정답과 해설

BLACKLABEL

Speed Check

I 도형의 방정식

01. 점과 직선

/ 본문 pp.009~019

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ② 02 ③ 03 ① 04 ③
05 ② 06 ⑤ 07 ③ 08 ⑤
09 9 10 4 11 ① 12 ④
13 $-\frac{1}{2}$ 14 제3사분면
15 $-1<m<\frac{1}{2}$ 16 4 17 ③
18 18 19 ④ 20 5 21 ⑤

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ② 02 ① 03 ③ 04 32 05 ⑤ 06 $\frac{3}{5}<\frac{n}{m}<4$ 07 ①
08 ③ 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 9 13 36 14 31 15 ②
16 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 17 $\left(\frac{11}{7}, \frac{27}{7}\right)$ 18 $\frac{55}{14}$ 19 최댓값: $2\sqrt{5}$, $\mathrm{P}(10, 0)$ 20 -1
21 ④ 22 $-\frac{1}{3}$ 23 $-\frac{5}{4}$ 24 ③ 25 ⑤ 26 ⑤ 27 9 28 35
29 ④ 30 3 31 $\frac{1}{2}$ 32 $2x+2y-1=0$ 또는 $6x-6y+5=0$ 33 $2\sqrt{2}$
34 $\frac{15}{4}$ 35 ② 36 $\left(\frac{13}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $-\frac{1}{2}$ 02 21 03 180
04 8 05 0 06 130
07 21 08 9 09 $\sqrt{5}$
10 5 11 $\frac{1}{2}$

02. 원의 방정식

/ 본문 pp.021~032

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③ 02 ④ 03 ① 04 5
05 $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$ 06 ②
07 ⑤ 08 21 09 ③ 10 ②
11 ④ 12 ④ 13 $m<\frac{3}{4}$ 14 8
15 ③ 16 ① 17 ③ 18 8
19 ⑤ 20 31 21 $4\sqrt{6}$

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ① 02 27 03 ③ 04 76 05 ① 06 29 07 $\frac{5}{2}\pi$ 08 ⑤
09 ④ 10 ⑤ 11 ② 12 15 13 $\frac{32}{5}$ 14 ② 15 ② 16 3
17 3 18 ① 19 26 20 ④ 21 ③ 22 ③ 23 ④ 24 ③
25 17 26 14 27 31 28 120 29 ④ 30 13 31 ⑤ 32 ②
33 7 34 $3<m<7$ 35 $\frac{27}{5}$ 36 ⑤ 37 ④ 38 ③
39 $3x-2y-4=0$ 40 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ 41 45 42 25

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $\frac{\sqrt{11}}{2}-1$ 02 195
03 $\frac{40}{3}$ 04 14 05 $\pi+7$
06 ⑤ 07 $\frac{1}{2}$ 08 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$
09 $-\frac{12}{35}<a<0$ 10 17
11 29

03. 도형의 이동

/ 본문 pp.034~041

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ② 02 ⑤ 03 ② 04 2
05 ④ 06 1 07 ③ 08 8
09 ③ 10 6 11 ⑤ 12 ①
13 ④ 14 ①

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ③ 02 ④ 03 6 04 26 05 8 06 9 07 15 08 25
09 ① 10 ③ 11 $\frac{5}{2}$ 12 ② 13 ① 14 ③ 15 $y=-3x+3$
16 ① 17 ⑤ 18 ④ 19 17 20 3 21 ② 22 ⑤ 23 103
24 ④

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $6+2\sqrt{5}$ 02 88
03 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ 04 8
05 24 06 31
07 $-11\le k\le -\frac{19}{4}$ 08 $\sqrt{34}$
09 $10\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ 10 $26+5\sqrt{2}$
11 37 12 15

II 집합과 명제

04. 집합

/ 본문 pp.047~058

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③ 02 ① 03 9 04 4
05 ⑤ 06 ⑤ 07 ④ 08 ②
09 ① 10 9 11 ③ 12 13
13 ⑤ 14 ① 15 6 16 8
17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ④
21 ③

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ⑤ 02 6 03 ② 04 -2 05 ① 06 ④ 07 ③ 08 12
09 ② 10 ① 11 ③ 12 448 13 22 14 5 15 123 16 60
17 ④ 18 ⑤ 19 288 20 ④ 21 5 22 ③ 23 10 24 ③
25 9 26 6 27 ② 28 36 29 ⑤ 30 ⑤ 31 24 32 6
33 ④ 34 ② 35 ① 36 64 37 41 38 ① 39 -1 40 138
41 400 42 ④

STEP 3 종합 사고력 문제

01 67 02 33 03 ③
04 32 05 72 06 130
07 735 08 21 09 ②
10 75 11 94 12 63

05. 명제

/ 본문 pp.061~072

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 ④	03 ①	04 ③
05 ③	06 ②	07 2	08 ③
09 7	10 ④	11 4	12 ④
13 ③	14 ③	15 12	16 60
17 720	18 ②	19 ⑤	20 ①

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ③	02 6	03 ③	04 ③	05 8	06 ②	07 12	08 5
09 7	10 ④	11 20	12 -1	13 ①	14 풀이 참조		15 11
16 15	17 ③	18 11	19 ④	20 ③	21 12	22 ⑤	23 ③
24 B, C	25 ④	26 ③	27 12	28 ⑤	29 ④	30 2, $x=z$	
31 4	32 5	33 150	34 ⑤	35 ②	36 ④	37 ①	38 3

STEP 3 종합 사고력 문제

01 32	02 7	03 $4\sqrt{3}$
04 5	05 풀이 참조	
06 B	07 ③	08 ⑤
09 15	10 ②	11 5

Ⅲ 함수와 그래프

06. 함수

/ 본문 pp.076~088

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ①	02 7	03 ②	04 5
05 ④	06 ④	07 42	08 ①
09 2	10 ⑤	11 ③	12 8
13 ③	14 ②	15 ②	16 ⑤
17 ①	18 -5	19 ④	20 $\sqrt{7}$
21 ⑤			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ⑤	02 ⑤	03 5	04 ①	05 2	06 ②	07 ③	08 ①
09 ⑤	10 ③	11 26	12 48	13 18	14 24	15 ⑤	16 ④
17 99	18 ①	19 ②	20 ③	21 4	22 6	23 ③	24 16
25 26	26 4	27 2	28 4	29 ①	30 ④	31 ②	32 4
33 4	34 ⑤	35 $2\sqrt{5}$	36 ④	37 $-\frac{3}{2}$	38 ②	39 ④	40 ③
41 5	42 32	43 ③	44 1	45 $-\frac{11}{7}<m<-\frac{1}{2}$			46 122
47 ②	48 21						

STEP 3 종합 사고력 문제

01 74	02 15	03 2
04 ④	05 3	06 3
07 2	08 4	09 8
10 6	11 23	12 6

07. 유리함수

/ 본문 pp.091~099

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ①	02 ①	03 ③	04 ⑤
05 ④	06 $\left\{y \,\middle|\, y\le\frac{1}{3}$ 또는 $y\ge3\right\}$		
07 3	08 ②	09 ②	10 ②
11 20	12 52	13 ④	14 ③

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 22	02 ④	03 ⑤	04 ②	05 15	06 ①	07 5	08 5
09 2	10 ③	11 85	12 14	13 $\frac{9}{4}$	14 ②	15 8	16 ①
17 2	18 36	19 ④	20 $1<k\le3$		21 4	22 9	23 -2
24 8	25 ②	26 32	27 1, $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+3}\ (-3<x\le3)$				28 ④
29 ③	30 ①						

STEP 3 종합 사고력 문제

01 72	02 46	03 5
04 5	05 3	06 444
07 $\frac{21}{5}$	08 18	09 57
10 19	11 140	12 192

08. 무리함수

/ 본문 pp.101~109

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ②	02 $2a$	03 ④	04 ⑤
05 ③	06 ②	07 ③	08 ①
09 ④	10 5	11 $2\le k<\frac{9}{4}$	
12 ⑤	13 12	14 $k\ge1$	

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ②	02 64	03 ④	04 3	05 ③	06 ④	07 ①	08 ⑤
09 $\frac{1}{10}$	10 $2\sqrt{2}$	11 $\frac{1}{3}\le m\le3$		12 1	13 $2\sqrt{2}$	14 $\frac{1}{12}$	15 45
16 38	17 4	18 ③	19 1	20 12	21 ⑤	22 83	23 800
24 ④	25 9	26 ④	27 ①	28 ③			

STEP 3 종합 사고력 문제

01 1925	02 ⑤	
03 $0<a\le\frac{1}{2}$ 또는 $a>2$		
04 113	05 $\frac{189}{32}$	06 6
07 2	08 23	09 $\frac{25}{38}$
10 24	11 3	12 13

I 도형의 방정식

01. 점과 직선

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.9~11

01 ②	02 ③	03 ①	04 ③	05 ②
06 ⑤	07 ③	08 ⑤	09 9	10 4
11 ①	12 ④	13 $-\frac{1}{2}$	14 제3사분면	
15 $-1<m<\frac{1}{2}$		16 4	17 ③	18 18
19 ④	20 5	21 ⑤		

01 두 점 A(1, 3), B(4, a) 사이의 거리가 5 이하이므로

$\sqrt{(4-1)^2+(a-3)^2}\le5$

$\sqrt{a^2-6a+18}\le5$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2-6a+18\le25$

$a^2-6a-7\le0$, $(a+1)(a-7)\le0$

$\therefore -1\le a\le7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -1, 0, 1, $\cdots$, 7의 9개이다. 답 ②

02 직선 $y=x+3$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$이라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(1-a)^2+(1-a-3)^2=(3-a)^2+(2-a-3)^2$

$a^2-2a+1+a^2+4a+4=a^2-6a+9+a^2+2a+1$

$6a=5 \qquad \therefore a=\frac{5}{6}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{6},\ \frac{23}{6}\right)$이다. 답 ③

•다른 풀이•

두 점 A(1, 1), B(3, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-1}{3-1}=\frac{1}{2}$이고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

M의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$

이때 $\underbrace{\text{직선 AB에 수직}}_{\text{기울기가 }-2}$이면서 점 M을 지나는 직선의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+\frac{11}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

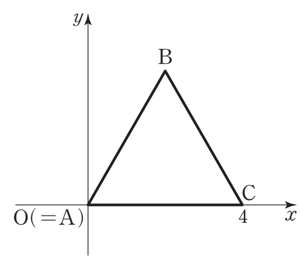
직선 ㉠과 직선 $y=x+3$의 교점이 P이므로

$-2x+\frac{11}{2}=x+3$에서 $3x=\frac{5}{2}$

$\therefore x=\frac{5}{6},\ y=\frac{23}{6}$

$\therefore P\left(\frac{5}{6},\ \frac{23}{6}\right)$

03 점 A를 원점으로 하고, 변 AC가 x축의 양의 방향으로 오도록 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 다음 그림과 같다.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 4이므로

B$(2,\ 2\sqrt{3})$, C$(4,\ 0)$

변 AC 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)$ $(0\le t\le4)$이라 하면

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\{(t-2)^2+(0-2\sqrt{3})^2\}+(t-4)^2$

$=t^2-4t+16+t^2-8t+16$

$=2t^2-12t+32$

$=2(t-3)^2+14$

따라서 $t=3$일 때 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 14이다. 답 ①

•다른 풀이 1•

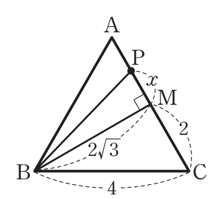
변 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{BM}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ←한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이때 점 P의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 점 P가 선분 AM 위에 있을 때,

$\overline{PM}=x$ $(0\le x\le2)$라 하면



$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(2\sqrt{3})^2+x^2\}+(x+2)^2$

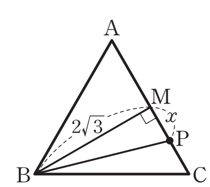
$=2x^2+4x+16$

$=2(x+1)^2+14$

즉, $x=0$일 때 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 16이다.

(ii) 점 P가 선분 MC 위에 있을 때,

$\overline{MP}=x$ $(0<x\le2)$라 하면



$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(2\sqrt{3})^2+x^2\}+(2-x)^2$

$=2x^2-4x+16$

$=2(x-1)^2+14$

즉, $x=1$일 때 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 14이다.

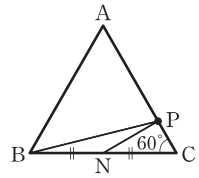
(i), (ii)에서 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은 14이다.

• 다른 풀이 2 •

변 BC의 중점을 N이라 하면 삼각형 PBC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(\overline{PN}^2+\overline{BN}^2)$

$=2(\overline{PN}^2+4)$ ……㉠



즉, $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값은 $\overline{PN}$이 최소일 때 최소가 된다.

이때 점 N에서 변 AC에 내린 수선의 발이 P일 때 $\overline{PN}$이 최소이므로 $\overline{PN}$의 최솟값은

$\overline{CN}\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

㉠에서 $\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 최솟값은

$2\times\{(\sqrt{3})^2+4\}=14$

04

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이는 각각

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{a^2-8a+25}$,

$\overline{CA}=\sqrt{(2-a)^2+(1-0)^2}=\sqrt{a^2-4a+5}$

△ABC가 이등변삼각형이므로

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$8=a^2-8a+25$ $\quad\therefore a^2-8a+17=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-17=-1<0$

이므로 허근을 갖는다.

즉, 위의 등식을 만족시키는 정수 a의 값은 없다.

(ii) $\overline{AB}=\overline{CA}$, 즉 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$에서

$8=a^2-4a+5$ $\quad\therefore a^2-4a-3=0$

$\therefore a=2+\sqrt{7}$ 또는 $a=2-\sqrt{7}$

위의 등식을 만족시키는 정수 a의 값은 없다.

(iii) $\overline{BC}=\overline{CA}$, 즉 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$a^2-8a+25=a^2-4a+5$

$4a=20$ $\quad\therefore a=5$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수 a의 값은 5이다. **답** ③

05

점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선이 변 BC와 만나는 점이 D이므로 점 D는 변 BC의 중점이다.

$\overline{BC}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$이므로

$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$이므로

$64+100=2(\overline{AD}^2+20)$, $2\overline{AD}^2=124$

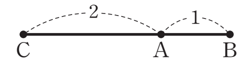
$\overline{AD}^2=62$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{62}$ ($\because \overline{AD}>0$) **답** ②

06

$3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$이므로 점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 점 C의 위치는 다음과 같이 경우를 나누어 나타낼 수 있다.

(i) 점 A가 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 경우

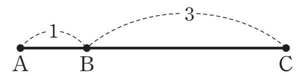


$\frac{1\times a+2\times 0}{1+2}=1$에서 $a=3$

$\frac{1\times b+2\times 3}{1+2}=0$에서 $b=-6$

$\therefore$ C$(3,\ -6)$

(ii) 점 B가 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 경우



$\frac{1\times a+3\times 1}{1+3}=0$에서 $a=-3$

$\frac{1\times b+3\times 0}{1+3}=3$에서 $b=12$

$\therefore$ C$(-3,\ 12)$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 점 C의 y좌표의 합은

$-6+12=6$ **답** ⑤

• 다른 풀이 1 •

두 점 A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{0-3}{1-0}(x-0)$ $\quad\therefore y=-3x+3$

점 C는 직선 AB 위에 있으므로 C$(a,\ -3a+3)$이라 하면

$3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $9\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$9\{(0-1)^2+(3-0)^2\}=(a-0)^2+(-3a+3-3)^2$

$90=a^2+9a^2$, $10a^2=90$

$a^2=9$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

따라서 C$(-3,\ 12)$ 또는 C$(3,\ -6)$이므로 모든 점 C의 y좌표의 합은 $12+(-6)=6$

• 다른 풀이 2 •

$3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$이므로 점 C는 선분 AB를 2 : 3으로 외분하거나 4 : 3으로 외분한다.

(i) 점 C가 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 경우

C$\left(\frac{2\times 0-3\times 1}{2-3},\ \frac{2\times 3-3\times 0}{2-3}\right)$

$\therefore$ C$(3,\ -6)$

(ii) 점 C가 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 경우

C$\left(\frac{4\times 0-3\times 1}{4-3},\ \frac{4\times 3-3\times 0}{4-3}\right)$

$\therefore$ C$(-3,\ 12)$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 점 C의 y좌표의 합은

$-6+12=6$

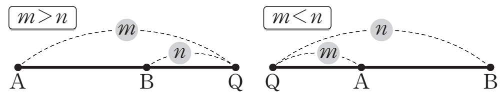
BLACKLABEL 특강 참고

선분의 외분점

선분 AB의 연장선 위에 있는 점 Q에 대하여

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

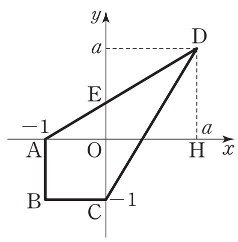
일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라 한다.



좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

07



오른쪽 그림과 같이 선분 AD와 y축의 교점을 E, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle EAO=\angle DAH$,

$\angle AOE=\angle AHD=90^{\circ}$이므로

$\triangle AOE\backsim\triangle AHD$ (AA 닮음)

$\overline{AE}:\overline{AD}=\overline{AO}:\overline{AH}=1:(1+a)$이므로

점 E는 선분 AD를 $1:a$로 내분한다.

즉, 점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times a+a\times(-1)}{1+a},\ \dfrac{1\times a+a\times 0}{1+a}\right)\qquad \therefore E\left(0,\ \dfrac{a}{1+a}\right)$

이때 y축이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 사다리꼴 ABCE의 넓이와 삼각형 CDE의 넓이는 같다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times\left\{1+\left(\dfrac{a}{1+a}+1\right)\right\}\times1=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{a}{1+a}+1\right)\times a$에서

$\dfrac{3a+2}{a+1}=\dfrac{2a+1}{a+1}\times a,\ 3a+2=2a^2+a\ (\because a>0)$

$a^2-a-1=0\qquad \therefore a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because a>0)$

답 ③

• 다른 풀이 •

두 점 $A(-1,\ 0)$, $D(a,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{a}{a-(-1)}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=\dfrac{a}{1+a}x+\dfrac{a}{1+a}\qquad\cdots\cdots㉠$

직선 ㉠의 y절편은 $\dfrac{a}{1+a}$이므로 y축에 의하여 나누어지는 오른쪽 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{a}{1+a}\right)\times a=\dfrac{a(2a+1)}{2(a+1)}$

또한,

$\square ABCD=2\triangle BCD\ (\because \triangle BAD\equiv\triangle BCD)$

$=2\times\dfrac{1}{2}\times1\times(a+1)$

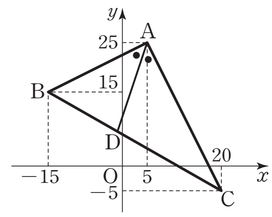
$=a+1$

이고, y축이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로

$\dfrac{1}{2}(a+1)=\dfrac{a(2a+1)}{2(a+1)}$

$a^2-a-1=0\qquad \therefore a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because a>0)$

08



$\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점이 D이므로 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(-15-5)^2+(15-25)^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(20-5)^2+(-5-25)^2}=\sqrt{1125}=15\sqrt{5}$

이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=10\sqrt{5}:15\sqrt{5}=2:3$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$를 $2:3$으로 내분하므로

$\left(\dfrac{2\times20+3\times(-15)}{2+3},\ \dfrac{2\times(-5)+3\times15}{2+3}\right)$

$\therefore D(-1,\ 7)$

따라서 선분 AD의 길이는

$\sqrt{(-1-5)^2+(7-25)^2}=\sqrt{360}=6\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AD}^2=360$

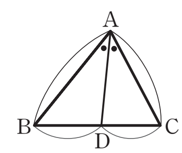
답 ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 내각의 이등분선

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



09

사각형 ABCD가 마름모이므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$,

대각선 BD의 중점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로

$\dfrac{a+c}{2}=2,\ \dfrac{b+1}{2}=2$

$\therefore a+c=4,\ b=3\qquad\cdots\cdots㉠$

또한, 마름모는 네 변의 길이가 같으므로

$\overline{BC}=\overline{CD}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CD}^2$

즉, $c^2+1=(4-c)^2+(4-1)^2$이므로

$c^2+1=c^2-8c+16+9,\ 8c=24\qquad \therefore c=3$

㉠에서 $a=4-c=4-3=1$

$\therefore abc=1\times3\times3=9$

답 9

• 다른 풀이 •

마름모의 두 대각선이 서로 수직임을 이용하여 식을 세울 수도 있다.

마름모의 두 대각선은 서로 수직이고, 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b-1}{a-c}$, 직선 BD의 기울기는 1이므로

$\dfrac{b-1}{a-c}\times1=-1\qquad \therefore c-a=2\ (\because b=3)$

위의 식과 ㉠을 연립하여 풀면 $a=1,\ c=3$

$\therefore abc=1\times3\times3=9$

10 삼각형 ABC의 무게중심과 세 변 AB, BC, CA의 중점 P, Q, R을 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 무게중심은 일치하므로

$\frac{0+2+4}{3}=a$, $\frac{0+4+2}{3}=b$

$\therefore a=2,\ b=2$

$\therefore ab=4$ **답** 4

11 두 점 $(2,\ a)$, $(a,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기가 3이므로

(기울기)$=\frac{6-a}{a-2}=3$에서

$6-a=3a-6,\ 4a=12\qquad \therefore a=3$

따라서 기울기가 3이고, 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=3(x-2)\qquad \therefore y=3x-3$ **답** ①

• 다른 풀이 •

구하는 직선의 방정식을 $y=3x+k$ (k는 상수)라 하면 이 직선이 두 점 $(2,\ a)$, $(a,\ 6)$을 지나므로

$a=6+k$ ……㉠, $6=3a+k$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6=3(6+k)+k,\ 4k=-12\qquad \therefore k=-3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x-3$

12 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ a+1)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(a-1,\ -6)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같다.

즉, $\frac{2-(a+1)}{2-(-2)}=\frac{-6-2}{a-1-2}$에서

$\frac{1-a}{4}=\frac{-8}{a-3}$

$(1-a)(a-3)=-32,\ -a^2+4a-3=-32$

$\therefore a^2-4a-29=0$ ← 판별식 D에 대하여 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근 존재

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 4이다. **답** ④

13 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

$\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 5)$이고 직사각형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 직사각형 OABC의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$

$\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{D}(6,\ 3)$이므로 직사각형 FADE의 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$

따라서 두 점 $\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{5-3}=-\frac{1}{2}$ **답** $-\frac{1}{2}$

14 주어진 직선이 x축, y축과 평행하지 않으므로 $a\neq0,\ b\neq0$

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}<0$, (y절편)$=-\frac{c}{b}<0$

$\therefore ab>0,\ bc>0$

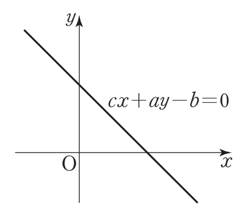
즉, a, c는 서로 부호가 같으므로 $ac>0$

$cx+ay-b=0$에서 $y=-\frac{c}{a}x+\frac{b}{a}$이므로

(기울기)$=-\frac{c}{a}<0$,

(y절편)$=\frac{b}{a}>0$

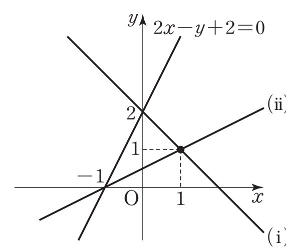
따라서 직선 $cx+ay-b=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

15 직선 $mx-y-m+1=0$, 즉 $y=m(x-1)+1$은 기울기 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

따라서 두 직선 $2x-y+2=0$, $y=m(x-1)+1$이 제2사분면에서 만나려면 직선 $y=m(x-1)+1$이 다음 그림과 같이 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=m(x-1)+1$이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$2=-m+1\qquad \therefore m=-1$

(ii) 직선 $y=m(x-1)+1$이 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=-2m+1\qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-1<m<\frac{1}{2}$ **답** $-1<m<\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

$2x-y+2=0$, $mx-y-m+1=0$을 연립하여 풀면

$x=\frac{m+1}{m-2}$, $y=\frac{4m-2}{m-2}$ (단, $m\neq2$)

즉, 두 직선 $2x-y+2=0$, $mx-y-m+1=0$의 교점 $\left(\frac{m+1}{m-2},\ \frac{4m-2}{m-2}\right)$가 $\underbrace{\text{제2사분면}}_{(x\text{좌표})<0,\ (y\text{좌표})>0}$ 위에 있어야 하므로

$\frac{m+1}{m-2}<0$에서 $-1<m<2$ ……㉠

양변에 $(m-2)^2$을 곱하면 $(m+1)(m-2)<0$

$\frac{4m-2}{m-2}>0$에서 $m<\frac{1}{2}$ 또는 $m>2$ ……㉡

양변에 $(m-2)^2$을 곱하면 $(4m-2)(m-2)>0$

㉠, ㉡에서

$-1<m<\frac{1}{2}$

16 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ (단, k는 실수) ……㉠

위의 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로 ㉠에 $x=3$, $y=-1$을 대입하면

$3+2+2+k(6-1-6)=0$

$-k+7=0$ $\therefore k=7$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$x-2y+2+14x+7y-42=0$

$15x+5y-40=0$ $\therefore 3x+y-8=0$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=4$ **답** 4

• 다른 풀이 •

두 방정식 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=2$

즉, 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점은 $(2,\ 2)$이다.

이때 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{3-2}(x-2)$, $y=-3x+8$

$\therefore 3x+y-8=0$

이 직선의 방정식이 $ax+by-8=0$이므로

$a=3$, $b=1$ $\therefore a+b=4$

17 ㄱ. $a=0$일 때, $l: y=2$, $m: x=-2$이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. $ax-y+a+2=0$에서 $a(x+1)-(y-2)=0$

이 등식은 $x=-1$, $y=2$일 때, a의 값에 관계없이 항상 성립한다.

즉, 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

$a\neq0$일 때, $l: y=ax+a+2$, $m: y=-\frac{4}{a}x-3-\frac{8}{a}$

이므로 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이다.

그런데 $a=-\frac{4}{a}$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 두 직선 l과 m이 서로 평행하도록 하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 참고

ㄷ에서 $a\neq0$일 때 두 직선

$l: ax-y+a+2=0$, $m: 4x+ay+3a+8=0$

이 평행할 조건은

$\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}\neq\frac{a+2}{3a+8}$

그런데 $a^2=-4$인 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

18 두 점 $\mathrm{A}(2,\ n)$, $\mathrm{C}(7,\ 2)$에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{41}$이므로

$\sqrt{(7-2)^2+(2-n)^2}=\sqrt{41}$

$\sqrt{n^2-4n+29}=\sqrt{41}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$n^2-4n+29=41$, $n^2-4n-12=0$

$(n+2)(n-6)=0$ $\therefore n=6$ ($\because n>2$)

네 점 $\mathrm{A}(2,\ 6)$, B, $\mathrm{C}(7,\ 2)$, D를 꼭짓점으로 하는 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로 수직이등분하므로 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.

이때 $\mathrm{A}(2,\ 6)$, $\mathrm{C}(7,\ 2)$를 지나는 직선 AC의 기울기가 $\frac{2-6}{7-2}=-\frac{4}{5}$이므로 직선 l의 기울기는 $\frac{5}{4}$이다.

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+7}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)$ $\therefore \left(\frac{9}{2},\ 4\right)$

즉, 직선 l은 기울기가 $\frac{5}{4}$이고 점 $\left(\frac{9}{2},\ 4\right)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-4=\frac{5}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)$ $\therefore 10x-8y-13=0$

따라서 $a=10$, $b=-8$이므로

$a-b=10-(-8)=18$ **답** 18

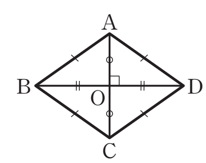
BLACKLABEL 특강 참고

마름모

(1) 마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이다.

(2) 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{CO}}$, $\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$



19 점 $\mathrm{P}(2a+b,\ a-2b)$가 직선 $x-y=3$ 위에 있으므로

$(2a+b)-(a-2b)=3$

$\therefore a+3b=3$ ……㉠

점 $\mathrm{Q}(b,\ -a)$에서 $b=x$, $-a=y$로 놓으면

$a=-y$, $b=x$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x-y=3$

따라서 $p=3$, $q=-1$이므로

$p+q=2$ **답** ④

BLACKLABEL 특강 필수 원리

점이 나타내는 도형의 방정식(자취의 방정식)

조건을 만족시키는 점이 나타내는 도형의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 한다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 x, y의 관계식을 만들면 이 관계식이 구하려는 도형의 방정식이다.

이때 제한된 범위가 있는지 확인한다.

20 점 $(k,\ 0)$에서 두 직선 $x-3y+2=0$, $3x+y-6=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\dfrac{|k-3\times0+2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|3k+0-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}$, $|k+2|=|3k-6|$

$k+2=-3k+6$ 또는 $k+2=3k-6$

$\therefore k=1$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+4=5$ 답 5

21 두 직선 $(m-1)x-5y+m+2=0$,

$x-(m+3)y+m=0$이 서로 평행하므로

$\dfrac{m-1}{1}=\dfrac{-5}{-(m+3)}\neq\dfrac{m+2}{m}$

$m-1=\dfrac{5}{m+3}\neq\dfrac{m+2}{m}$

$m-1=\dfrac{5}{m+3}$에서 $(m+3)(m-1)=5$

$m^2+2m-8=0$, $(m+4)(m-2)=0$

$\therefore m=-4\ (\because m<0)$*

평행한 두 직선 $-5x-5y-2=0$, $x+y-4=0$ 사이의 거리는 직선 $-5x-5y-2=0$ 위의 한 점 $\left(0,\ -\dfrac{2}{5}\right)$와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{\left|0+\left(-\dfrac{2}{5}\right)-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{22}{5\sqrt2}=\dfrac{11\sqrt2}{5}$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

*에서 평행한 두 직선 $-5x-5y-2=0$, $x+y-4=0$, 즉 $x+y+\dfrac{2}{5}=0$, $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|\dfrac{2}{5}-(-4)\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{22}{5\sqrt2}=\dfrac{11\sqrt2}{5}$ ←본문 8쪽 비법노트Ⓓ

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.12~17

01 ②	02 ①	03 ③	04 32	05 ⑤
06 $\frac{3}{5}<\frac{n}{m}<4$		07 ①	08 ③	09 ④
10 ④	11 ①	12 9	13 36	14 31
15 ②	16 $\frac{5\sqrt3}{3}$	17 $\left(\frac{11}{7},\ \frac{27}{7}\right)$		18 $\frac{55}{14}$
19 최댓값 : $2\sqrt5$, P(10, 0)			20 -1	21 ④
22 $-\frac{1}{3}$	23 $-\frac{5}{4}$	24 ③	25 ⑤	26 ⑤
27 9	28 35	29 ④	30 3	31 $\frac{1}{2}$
32 $2x+2y-1=0$ 또는 $6x-6y+5=0$			33 $2\sqrt2$	34 $\frac{15}{4}$
35 ②	36 $\left(\frac{13}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$			

01 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{x^2+(y-1)^2\}+\{(x-4)^2+y^2\}+\{(x-2)^2+(y-8)^2\}$

$=3x^2-12x+3y^2-18y+85$

$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+46$

따라서 $x=2$, $y=3$일 때, 최솟값은 46이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$과 점 $P(a,\ b)$에 대하여

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-x_1)^2+(b-y_1)^2+(a-x_2)^2+(b-y_2)^2+(a-x_3)^2+(b-y_3)^2$

$=3\left(a-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(b-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\bigstar$

즉, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 항상 $a=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $b=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

02 $A(-m,\ -2)$, $B(2,\ 2m)$, $P(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x+m)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2m)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이려면 점 P가 선분 AB 위에 있어야 하므로

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{\{2-(-m)\}^2+\{2m-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{(m+2)^2+(2m+2)^2}$

$=\sqrt{5m^2+12m+8}$

$\sqrt{5m^2+12m+8}=5$이므로 양변을 제곱하면

$5m^2+12m+8=25$

$5m^2+12m-17=0$, $(5m+17)(m-1)=0$

$\therefore m=1\ (\because m>0)$ 답 ①

03 $x^2-3=2x$에서 $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

포물선 $y=x^2-3$과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점이 A, B이므로 $A(-1,\ -2)$, $B(3,\ 6)$이라 하자.*

한편, 점 $P(a,\ b)$가 포물선 $y=x^2-3$ 위에 있으므로

$b=a^2-3$

$\therefore P(a,\ a^2-3)$

삼각형 APB가 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a+1)^2+(a^2-1)^2=(a-3)^2+(a^2-9)^2$

$16a^2+8a-88=0$

$\therefore 2a^2+a-11=0$

이차방정식 $2a^2+a-11=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=1^2-4\times2\times(-11)=89>0$에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{1}{2}$이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

삼각형 APB가 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형이므로 점 $P(a, b)$는 변 AB의 수직이등분선 위에 있다.

*에서 직선 AB의 기울기가 $\frac{6-(-2)}{3-(-1)}=2$이므로 변 AB의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고, 변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$ 즉, $(1, 2)$이므로 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$\therefore b=-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}$ ……㉠

또한, 점 $P(a, b)$는 포물선 $y=x^2-3$ 위에 있으므로

$\therefore b=a^2-3$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}=a^2-3$, $2a^2+a-11=0$

이차방정식 $2a^2+a-11=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times2\times(-11)=89>0$

에서 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{1}{2}$이다.

04

점 P가 출발한 지 t $(t\geq2)$초 후,

점 P의 좌표는 $(4-t, 4-t)$

점 Q의 좌표는

$(-2+2(t-2), 2-2(t-2))$, 즉 $(2t-6, -2t+6)$

두 점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(2t-6)-(4-t)\}^2+\{(-2t+6)-(4-t)\}^2}$

$=\sqrt{(3t-10)^2+(2-t)^2}$

$=\sqrt{10t^2-64t+104}$

$=\sqrt{10\left(t-\frac{16}{5}\right)^2+\frac{8}{5}}$

즉, $t=\frac{16}{5}$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 최소이고

$P'\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $Q'\left(\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$이다.

이때 직선 OP의 방정식이 $y=x$, 직선 OQ의 방정식이 $y=-x$이므로 직선 OP 위의 점 P′, 직선 OQ 위의 점 Q′에 대하여 삼각형 OP′Q′은 직각삼각형이고

$S=\frac{1}{2}\times\overline{OP'}\times\overline{OQ'}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{8}{25}$

$\therefore 100S=100\times\frac{8}{25}=32$ 답 32

05

세 점 $A(0, 3)$, $B(-5, -9)$, $C(4, 0)$에서

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}$

$=\sqrt{25}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}$

$=\sqrt{169}=13$

$\overline{AC}=\overline{AD}$이므로 $\overline{AD}=5$,

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=13-5=8$

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로

$\overline{PC}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{BD}=5:8$

즉, 점 C는 $\overline{BP}$를 $8:5$로 내분한다.

이때 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{8\times a+5\times(-5)}{8+5}=4$에서

$8a-25=52$

$8a=77$ $\therefore a=\frac{77}{8}$

$\frac{8\times b+5\times(-9)}{8+5}=0$에서

$8b-45=0$

$8b=45$ $\therefore b=\frac{45}{8}$

$\therefore P\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

세 점 $A(0, 3)$, $B(-5, -9)$, $C(4, 0)$에서

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

$\therefore \overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{AC}=13-5=8$

즉, 점 D는 선분 AB를 $5:8$로 내분하므로

$D\left(\frac{-25+0}{5+8}, \frac{-45+24}{5+8}\right)$, 즉 $D\left(-\frac{25}{13}, -\frac{21}{13}\right)$

직선 CD의 기울기가 $\frac{0+\frac{21}{13}}{4+\frac{25}{13}}=\frac{21}{77}=\frac{3}{11}$이고, 두 직선 AP와 CD가 평행하므로 직선 AP의 방정식은

$y-3=\frac{3}{11}(x-0)$ $\therefore y=\frac{3}{11}x+3$

한편, 직선 BC의 방정식은

$y-0=\frac{0+9}{4+5}(x-4)$ $\therefore y=x-4$

점 P는 두 직선 AP와 BC의 교점이므로

$\frac{3}{11}x+3=x-4$

$\frac{8}{11}x=7$ $\therefore x=\frac{77}{8}$

이것을 $y=x-4$에 대입하여 풀면

$y=\frac{77}{8}-4=\frac{45}{8}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$이다.

06

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\frac{-4m+n}{m+n}, \frac{3m-5n}{m+n}\right)$

이때 점 P가 제3사분면 위에 있으므로

$\frac{-4m+n}{m+n}<0$, $\frac{3m-5n}{m+n}<0$

$-4m+n<0$, $3m-5n<0$ ($\because m+n>0$)

$-4m+n<0$에서 $\frac{n}{m}<4$

$3m-5n<0$에서 $\frac{n}{m}>\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{3}{5}<\frac{n}{m}<4$ 답 $\frac{3}{5}<\frac{n}{m}<4$

07

선분 AB와 두 직선 $y=mx$, $y=nx$의 교점을 각각 C, D라 하자.

두 직선 $y=mx$, $y=nx$가 삼각형 AOB의 넓이를 삼등분하려면 두 점 C, D가 선분 AB를 삼등분해야 한다. 즉, 점 C는 선분 AB를 $1:2$로 내분하므로

$\mathrm{C}\left(\frac{1\times5+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times4}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$

점 D는 선분 AB를 $2:1$로 내분하므로

$\mathrm{D}\left(\frac{2\times5+1\times0}{2+1}, \frac{2\times0+1\times4}{2+1}\right)$, 즉 $\mathrm{D}\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$

두 점 C, D는 각각 두 직선 $y=mx$, $y=nx$ 위에 있으므로

$\frac{8}{3}=\frac{5}{3}m$, $\frac{4}{3}=\frac{10}{3}n$

$\therefore m=\frac{8}{5}$, $n=\frac{2}{5}$

이것을 $m^2+n^2=kmn$에 대입하면

$\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=k\times\frac{8}{5}\times\frac{2}{5}$

$\frac{68}{25}=\frac{16}{25}k$ $\quad\therefore k=\frac{17}{4}$ 답 ①

08

직선 $x+2y-1=0$ 위의 점 P의 좌표를 (p, q)라 하면

$p+2q-1=0$ ……㉠

두 점 A(1, 2), P(p, q)에 대하여 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2p+1}{3}, \frac{2q+2}{3}\right)$

$\frac{2p+1}{3}=x$, $\frac{2q+2}{3}=y$로 놓으면

$p=\frac{3x-1}{2}$, $q=\frac{3y-2}{2}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\frac{3x-1}{2}+2\times\frac{3y-2}{2}-1=0$

$\frac{3}{2}x+3y-\frac{7}{2}=0$, $3y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{6}$

즉, 도형 C는 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{6}$이다.

이때 도형 C와 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 접하므로 이차방정식 $ax^2=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{6}$, 즉 $6ax^2+3x-7=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times6a\times(-7)=0$

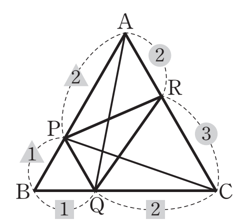
$\therefore a=-\frac{3}{56}$ 답 ③

09

해결단계

❶ 단계	세 삼각형 APR, PBQ, RQC의 넓이를 선분의 비를 이용하여 S_1에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 넓이를 이용하여 삼각형 PQR의 넓이를 구한다.
❸ 단계	두 삼각형 ABC와 PQR의 넓이를 이용하여 k의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 PC를 그으면 삼각형 APC에서



$\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{RC}}=2:3$이므로

$\triangle\mathrm{APR}=\frac{2}{5}\triangle\mathrm{APC}$

삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$이므로

$\triangle\mathrm{APC}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$

이때 삼각형 ABC의 넓이는 S_1이므로

$\triangle\mathrm{APR}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{4}{15}S_1$ ……㉠

또한, $\triangle\mathrm{PBQ}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$이고, $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{BA}}=1:3$이므로

$\triangle\mathrm{PBQ}:\triangle\mathrm{ABC}=1:9$

$\therefore \triangle\mathrm{PBQ}=\frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{9}S_1$ ……㉡

같은 방법으로 선분 AQ를 그으면 삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}=1:2$이므로

$\triangle\mathrm{AQC}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ ……㉢

삼각형 AQC에서 $\overline{\mathrm{AR}}:\overline{\mathrm{RC}}=2:3$이므로

$\triangle\mathrm{RQC}=\frac{3}{5}\triangle\mathrm{AQC}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}$ ($\because$ ㉢) $=\frac{2}{5}S_1$ ……㉣

㉠, ㉡, ㉣에서 삼각형 PQR의 넓이는

$S_1-(㉠+㉡+㉣)=S_1-\left(\frac{4}{15}S_1+\frac{1}{9}S_1+\frac{2}{5}S_1\right)$

$=S_1-\frac{7}{9}S_1=\frac{2}{9}S_1$

따라서 $S_2=\frac{2}{9}S_1$이므로

$S_1=\frac{9}{2}S_2$ $\quad\therefore k=\frac{9}{2}$ 답 ④

•다른 풀이•

삼각형 ABC에서 선분 AQ를 그으면

$\overline{BQ}:\overline{QC}=1:2$이므로 $\triangle ABQ:\triangle AQC=1:2$

삼각형 ABC의 넓이가 S_1이므로

$\triangle ABQ=\frac{1}{3}S_1$, $\triangle AQC=\frac{2}{3}S_1$

$\triangle PBQ \backsim \triangle ABC$이고 $\overline{BP}:\overline{BA}=1:3$이므로

$\triangle PBQ:\triangle ABC=1:9$

$\therefore \triangle PBQ=\frac{1}{9}S_1$

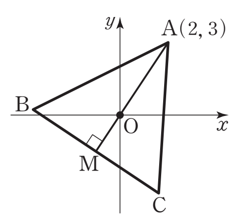
$\overline{PQ} /\!/ \overline{AC}$이므로 $\triangle APQ=\triangle PQR$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle PQR&=\triangle APQ\\&=\triangle ABQ-\triangle PBQ\\&=\frac{1}{3}S_1-\frac{1}{9}S_1=\frac{2}{9}S_1\end{aligned}$$

따라서 $S_2=\frac{2}{9}S_1$이므로

$S_1=\frac{9}{2}S_2 \qquad \therefore k=\frac{9}{2}$

10 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 정삼각형 ABC의 무게중심이 원점 O이므로



$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}$ ← $\overline{AO}:\overline{OM}=2:1$

이때 $\overline{AO}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$이므로

$\overline{AM}=\frac{3}{2}\overline{AO}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변 BC의 길이는

$\overline{BC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{AM}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{13}}{2}=\sqrt{39}$ ← 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 39=\frac{39\sqrt{3}}{4}$

답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

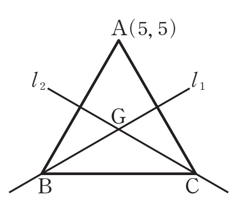
삼각형의 무게중심, 외심, 내심

(1) 무게중심 : 삼각형의 세 중선의 교점
(2) 외심 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점
(3) 내심 : 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점

정삼각형의 성질

정삼각형의 무게중심, 외심, 내심은 모두 일치한다.
따라서 정삼각형의 중선의 길이는 높이와 같다.

11 두 직선 l_1, l_2의 교점이 G이므로



$x-5y-3=0$에서

$x=5y+3$

위의 식을 $4x+3y-12=0$에 대입하면

$4(5y+3)+3y-12=0$

$23y=0 \qquad \therefore y=0$

이것을 $x=5y+3$에 대입하여 정리하면

$x=3$

즉, $G(3, 0)$

이때 두 점 B, C가 각각 직선 l_1, l_2 위에 있으므로

$B(5a+3, a)$, $C(3b, 4-4b)$ (단, a, b는 상수)*

라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 G이므로

$\frac{5+5a+3+3b}{3}=3$, $\frac{5+a+4-4b}{3}=0$

$5a+3b=1$, $a-4b=-9$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

$\therefore B(-2, -1)$, $C(6, -4)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{BC}&=\sqrt{(6+2)^2+(-4+1)^2}\\&=\sqrt{73}\end{aligned}$$

답 ①

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

주어진 두 점 B, C의 좌표는 계산을 간단히 하기 위해 임의로 설정한 것이므로 두 직선 l_1, l_2 위의 점 중 다른 미지수를 이용하여 좌표를 설정하여도 구하는 값은 항상 일정하다.

예를 들어, $B(10a+3, 2a)$, $C(3-3b, 4b)$라 하면

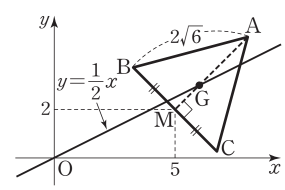
$\frac{5+10a+3+3-3b}{3}=3$, $\frac{5+2a+4b}{3}=0$

$10a-3b=-2$, $2a+4b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

$\therefore B(-2, -1)$, $C(6, -4)$

12 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$인 정삼각형 ABC의 높이는



$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

변 BC의 중점 M과 정삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

한편, 정삼각형 ABC의 무게중심 G가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 $G(2a, a)$라 하면

$\overline{GM}=\sqrt{(2a-5)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}$

$(2a-5)^2+(a-2)^2=2$, $5a^2-24a+27=0$

$(a-3)(5a-9)=0 \qquad \therefore a=3$ 또는 $a=\frac{9}{5}$

그런데 점 G의 y좌표가 2 이상이므로

$a=3 \qquad \therefore G(6, 3)$

이때 정삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)이라 하면

$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=3$

따라서 구하는 세 꼭짓점 A, B, C의 y좌표의 합은

$y_1+y_2+y_3=3\times 3=9$

답 9

13 변 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BC}=6$이므로

$\overline{BM}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

삼각형 ABC에서 중선 정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로
$36+16=2(\overline{AM}^2+9)$, $\overline{AM}^2+9=26$
$\therefore\ \overline{AM}^2=17$
한편, $\overline{DM}=\overline{EM}=1$이므로 점 M은 선분 DE의 중점이다.
따라서 삼각형 ADE에서 중선 정리에 의하여
$\overline{AD}^2+\overline{AE}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)$이므로
$a^2+b^2=2\times(17+1)=36$ **답** 36

• 다른 풀이 •

삼각형 ABE에서 중선 정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$이므로
$36+b^2=2(a^2+4)$
$\therefore\ 2a^2-b^2=28$ ……㉠
삼각형 ADC에서 중선 정리에 의하여
$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{DE}^2)$이므로
$a^2+16=2(b^2+4)$
$\therefore\ a^2-2b^2=-8$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a^2=\frac{64}{3}$, $b^2=\frac{44}{3}$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

14 변 BC의 중점을 M이라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$에서 $\overline{GM}=\frac{\overline{AG}}{2}=\frac{17}{2}$

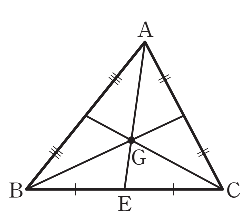
삼각형 GBC에서 중선 정리에 의하여
$\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2(\overline{GM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$225+400=2\left(\frac{289}{4}+\overline{BM}^2\right)$, $\frac{289}{4}+\overline{BM}^2=\frac{625}{2}$

$\overline{BM}^2=\frac{961}{4}$ $\therefore\ \overline{BM}=\frac{31}{2}$ ($\because\ \overline{BM}>0$)

$\therefore\ \overline{BC}=2\overline{BM}=2\times\frac{31}{2}=31$ **답** 31

15 오른쪽 그림과 같이 변 BC의 중점을 E라 하면 삼각형 ABC에서 중선 정리에 의하여



$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=2\left\{\overline{AE}^2+\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2\right\}$

$=2\overline{AE}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$ ……㉠

점 G가 무게중심이므로 $\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{AE}$이고,

삼각형 GBC에서 중선 정리에 의하여

$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2\left\{\overline{GE}^2+\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2\right\}$

$=2\left\{\left(\frac{1}{3}\overline{AE}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2\right\}$

$=\frac{2}{9}\overline{AE}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$ ……㉡

$9\times$㉡$-$㉠을 하면
$9\overline{BG}^2+9\overline{CG}^2-\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=4\overline{BC}^2$
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+4\overline{BC}^2=9(\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$
따라서 $k=4$, $l=9$이므로
$k+l=13$ **답** ②

• 다른 풀이 •

㉠, ㉡을 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+k\overline{BC}^2=l(\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$에 대입하면

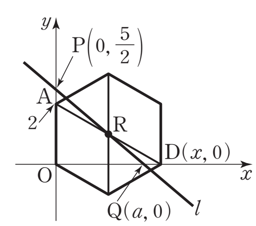
$2\overline{AE}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2+k\overline{BC}^2=l\left(\frac{2}{9}\overline{AE}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2\right)$

$2\overline{AE}^2+\left(\frac{1}{2}+k\right)\overline{BC}^2=\frac{2}{9}l\,\overline{AE}^2+\frac{1}{2}l\,\overline{BC}^2$

즉, $2=\frac{2}{9}l$, $\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}l$이므로

$l=9$, $k=4$ $\therefore\ k+l=13$

16 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 마주 보는 꼭짓점을 연결한 대각선의 교점을 R이라 하면 정육각형의 넓이를 이등분하는 직선 l은 점 R을 지나야 한다.



또한, 점 A와 마주 보는 꼭짓점을 D(x, 0)이라 하면 대각선 AD의 길이는 4이므로 직각삼각형 AOD에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{OD}^2+\overline{AO}^2=\overline{AD}^2$에서 $x^2+4=16$
$x^2=12$ $\therefore\ x=2\sqrt{3}$ ($\because\ x>0$)
$\therefore$ D($2\sqrt{3}$, 0)
따라서 대각선 AD의 중점 R의 좌표는
$\left(\frac{0+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(\sqrt{3}, 1)$
*이므로 직선 PR의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=\frac{1-\frac{5}{2}}{\sqrt{3}-0}(x-0)$ $\therefore\ l: y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{5}{2}$

이 직선이 점 Q(a, 0)을 지나므로 $x=a$, $y=0$을 직선 l의 방정식에 대입하여 풀면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{5}{2}$에서 $a=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **답** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

• 다른 풀이 •

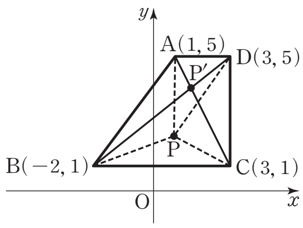
삼각형 ARO는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 점 R에서 변 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$, $\overline{OH}=\overline{HA}=\frac{1}{2}\times 2=1$이므로

R$(\sqrt{3},\ 1)$

다음은 *와 같다.

17 오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 P′이라 하고, 사각형 ABCD의 내부에 임의의 점 P를 잡으면



$\overline{PA}+\overline{PC}\ge\overline{AC}$

$\qquad=\overline{P'A}+\overline{P'C}$ ……㉠

$\overline{PB}+\overline{PD}\ge\overline{BD}$

$\qquad=\overline{P'B}+\overline{P'D}$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\ge\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$

즉, 점 P가 두 대각선 AC, BD의 교점일 때

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값이 최소이다.

이때 직선 AC의 방정식은 $y-1=\frac{1-5}{3-1}(x-3)$

$\therefore y=-2x+7$ ……㉢

직선 BD의 방정식은 $y-5=\frac{5-1}{3-(-2)}(x-3)$

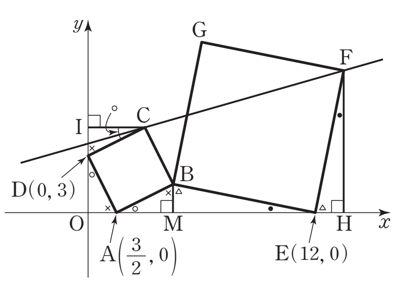
$\therefore y=\frac{4}{5}x+\frac{13}{5}$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$x=\frac{11}{7}$, $y=\frac{27}{7}$

$\therefore$ P$\left(\frac{11}{7},\ \frac{27}{7}\right)$ 답 $\left(\frac{11}{7},\ \frac{27}{7}\right)$

18



위의 그림과 같이 두 점 B, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 M, H, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 직각삼각형 OAD, MBA의 빗변의 길이가 같고

$\angle$OAD$=\angle$MBA이므로

$\triangle$OAD$\equiv\triangle$MBA (RHA 합동)

이때 $\overline{MA}=\overline{OD}=3$이므로 점 M의 좌표는 $\left(\underbrace{\frac{9}{2}}_{=\frac{3}{2}+3},\ 0\right)$,

$\overline{MB}=\overline{OA}=\frac{3}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

두 직각삼각형 IDC, OAD의 빗변의 길이가 같고

$\angle$IDC$=\angle$OAD이므로

$\triangle$IDC$\equiv\triangle$OAD (RHA 합동)

이때 $\overline{ID}=\overline{OA}=\frac{3}{2}$, $\overline{IC}=\overline{OD}=3$이므로 점 C의 좌표는

$\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

두 직각삼각형 BME, EHF의 빗변의 길이가 같고

$\angle$BEM$=\angle$EFH이므로

$\triangle$BME$\equiv\triangle$EHF (RHA 합동)

이때 $\overline{FH}=\overline{EM}=\underbrace{\frac{15}{2}}_{=12-\frac{9}{2}}$, $\overline{EH}=\overline{BM}=\frac{3}{2}$이므로 점 F의

좌표는 $\left(\underbrace{\frac{27}{2}}_{=12+\frac{3}{2}},\ \frac{15}{2}\right)$

즉, 직선 CF의 방정식은

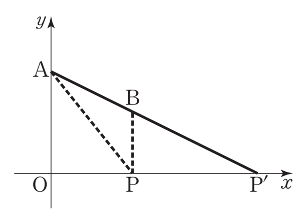
$$y-\frac{9}{2}=\frac{\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{\frac{27}{2}-3}(x-3)$$

$\therefore y=\frac{2}{7}x+\frac{51}{14}$

따라서 $a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{51}{14}$이므로

$a+b=\frac{55}{14}$ 답 $\frac{55}{14}$

19



위의 그림과 같이 직선 AB와 x축의 교점을 P′, x축 위의 임의의 점을 P라 하면

$\overline{AP}\le\overline{AB}+\overline{BP}$에서

$\overline{AP}-\overline{BP}\le\overline{AB}$

$\qquad=\overline{AP'}-\overline{BP'}$

즉, $\overline{AP}-\overline{BP}$의 값이 최대일 때의 점 P는 직선 AB와 x축의 교점이다.

따라서 $\overline{AP}-\overline{BP}$의 최댓값은 선분 AB의 길이이므로

$\sqrt{(4-0)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$

한편, 두 점 A(0, 5), B(4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

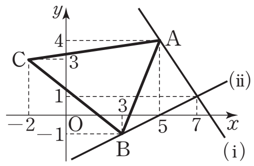
$y-5=\frac{3-5}{4-0}(x-0)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$

점 P는 직선 AB와 x축의 교점이므로 점 P의 x좌표는

$0=-\frac{1}{2}x+5$에서 $\frac{1}{2}x=5$ $\quad\therefore x=10$

$\therefore$ P(10, 0) 답 최댓값 : $2\sqrt{5}$, P(10, 0)

20 직선 $mx-y-7m+1=0$, 즉 $y=m(x-7)+1$은 기울기 m의 값에 관계없이 항상 점 $(7, 1)$을 지난다.



직선 $y=m(x-7)+1$이 삼각형 ABC와 만나려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지나야 하므로 직선 (i) 또는 직선 (ii)이거나 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=m(x-7)+1$이 점 $A(5, 4)$를 지날 때,

$4=-2m+1 \qquad \therefore m=-\frac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=m(x-7)+1$이 점 $B(3, -1)$을 지날 때,

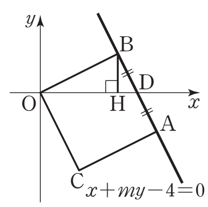
$-1=-4m+1 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-\frac{3}{2}\le m\le\frac{1}{2}$

따라서 실수 m의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{3}{2}$이므로 그 합은

$\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ 답 -1

21 직선 $x+my-4=0$의 x절편이 4이므로 변 AB의 중점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $(4, 0)$이다.



$\overline{BD}=a$라 하면 $\overline{OB}=2a$이고,

$\overline{OD}=4$이므로 직각삼각형 OBD에서

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2+\overline{OB}^2=\overline{OD}^2$에서 $a^2+(2a)^2=4^2$

$5a^2=16$, $a^2=\frac{16}{5} \qquad \therefore a=\frac{4\sqrt{5}}{5}\ (\because a>0)$

$\therefore \overline{BD}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$, $\overline{OB}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

$\overline{OH}=b$라 하면 $\overline{DH}=4-b$이므로

$\overline{OB}^2-\overline{OH}^2=\overline{BD}^2-\overline{DH}^2$에서

$\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2-b^2=\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-(4-b)^2$

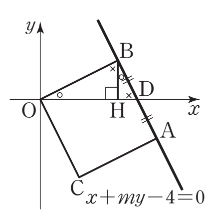
$8b=\frac{128}{5} \qquad \therefore b=\frac{16}{5}$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$

$\therefore m=\frac{\overline{BH}}{b}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{16}{5}}=\frac{1}{2}$ 답 ④

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림과 같이 변 AB가 x축과 만나는 점을 D라 하자.



정사각형 ABOC에서

$\overline{AD}=\overline{DB}=a$라 하면 $\overline{OB}=2a$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 BOH, DOB에서

$\angle OHB=\angle OBD=90^\circ$, $\angle BOH$는 공통이므로

$\triangle BOH \backsim \triangle DOB$ (AA 닮음)

직선 OB의 기울기는 $\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{OB}}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

이때 직선 AB와 직선 OB는 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -2이다.

따라서 직선 $x+my-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{m}x+\frac{4}{m}$의 기울기가 -2이므로

$-\frac{1}{m}=-2 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

22 $(3k+1)x+(-k+2)y+(-2k-3)=0$에서

$(3x-y-2)k+(x+2y-3)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y-2=0$, $x+2y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $A(1, 1)$을 지난다.

이때 직선 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 변 BC의 중점을 지나야 하고, 변 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 $(0, 1)$이므로

$x=0$, $y=1$을 ㉠에 대입하면

$-3k-1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 주어진 식을 k에 대하여 정리하는 것이 문제 풀이의 포인트이다. 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-2)k+(x+2y-3)=0$인데 이는 주어진 직선이 k의 값에 관계없이 두 직선 $3x-y-2=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지남을 의미한다.

이를 확장하면 두 방정식 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$이 나타내는 두 도형의 교점을 지나는 도형의 방정식은 $kf(x, y)+g(x, y)=0$ (단, k는 실수)으로 나타낼 수 있다.

23 두 점 $A(-3, 0)$, $B(1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-0}{1-(-3)}(x-1)$, 즉 $y=x+3$이다.

또한, $(k+1)x+(k-1)y-2k=0$에서

$(x+y-2)k+x-y=0$이므로 이 직선이 직선 $x+y-2=0$을 나타내는 k의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $y=x+3$, $x+y-2=0$을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{2}$이므로 주어진 직선이 지날 수 없는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$이다.

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\therefore ab=-\frac{5}{4}$ 답 $-\frac{5}{4}$

24 ㄱ. $k=1$을 $k^2x+(k^2+1)y-k^2+1=0$에 대입하면

$x+2y=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x$

따라서 $k=1$일 때, 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄴ. $k^2x+(k^2+1)y-k^2+1=0$에서

$(x+y-1)k^2+y+1=0$

위의 식이 k에 대한 항등식이려면

$x+y-1=0$, $y+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$이므로 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2, -1)$을 지난다. (거짓)

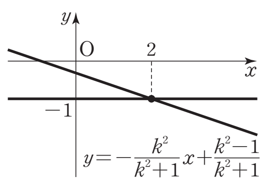
ㄷ. $k^2x+(k^2+1)y-k^2+1=0$에서

$y=-\frac{k^2}{k^2+1}x+\frac{k^2-1}{k^2+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 $\frac{k^2}{k^2+1}\geq 0$이므로 $-\frac{k^2}{k^2+1}\leq 0$이고,

$-1<k<1$일 때, $k^2-1<0$이므로 $\frac{k^2-1}{k^2+1}<0$이다.

따라서 기울기가 양이 아닌 수이고, y절편이 음수인 직선 ㉠, 즉 l은 오른쪽 그림과 같으므로 직선 l은 제1사분면을 지나지 않는다. (참)



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

25 세 직선이 삼각형을 이루지 않기 위해서는 세 직선이 한 점에서 만나거나, 세 직선 또는 두 직선이 평행하거나 일치하면 된다.

그런데 주어진 세 직선의 방정식에서 세 직선은 평행할 수 없고, 어떤 두 직선도 일치할 수 없다.

따라서 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않기 위해서는 세 직선이 한 점에서 만나거나 두 직선이 평행해야 한다.

$$\begin{cases} x+ay+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-ay+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-(a-2)y-1=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

(i) $a=0$일 때,

㉠, ㉡에서 $x+1=0$, $3x+1=0$이므로 두 직선이 평행하다. 즉, 세 직선은 삼각형을 이루지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서 $x+2y+1=0$,

$3x-2y+1=0$, $x-1=0$이므로 세 직선은 삼각형을 이룬다. 즉, $a\neq 2$이다.

(iii) $a\neq 0$, $a\neq 2$일 때,

㉠, ㉡, ㉢이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

① 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠+㉡을 하면

$4x+2=0 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}+ay+1=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2a}$

즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a}\right)$이므로 직선 ㉢도 이 점을 지나야 한다.

$-\frac{1}{2}+\frac{a-2}{2a}-1=0$에서 $\frac{a-2}{2a}=\frac{3}{2}$

$\therefore a=-1$

② 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡에서 $\frac{1}{3}\neq\frac{a}{-a}\neq\frac{1}{1}$이므로 두 직선 ㉠, ㉡이 평행하도록 하는 a의 값은 존재하지 않는다.

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$\frac{3}{1}=\frac{-a}{-(a-2)}\neq\frac{1}{-1}$에서

$3a-6=a$, $2a=6$

$\therefore a=3$

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$\frac{1}{1}=\frac{-(a-2)}{a}\neq\frac{-1}{1}$에서

$a=-a+2$, $2a=2$

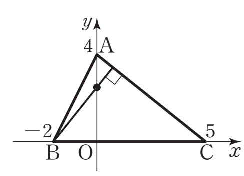
$\therefore a=1$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않도록 하는 a의 값은 -1, 0, 1, 3의 4개이므로 $M=4$,

a의 값의 합은 $N=-1+0+1+3=3$

$\therefore M+N=7$ 답 ⑤

26 수심은 삼각형의 두 꼭짓점에서 대변에 내린 두 수선의 교점과 일치하므로



(i) 꼭짓점 A를 지나고 변 BC에 수직인 직선의 방정식은

$x=0$

(ii) (직선 AC의 기울기)$=\frac{0-4}{5-0}=-\frac{4}{5}$이므로 꼭짓점 B를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$y-0=\frac{5}{4}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 구한 두 식을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=\frac{5}{2}$

즉, 수심의 좌표는 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$이므로

$p=0$, $q=\frac{5}{2}$

$\therefore p+q=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

27 조건 ㈎에서 직선 CD의 기울기가 음수이므로

$\dfrac{q-p}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}<0$

$\therefore q-p<0$ ……㉠

조건 ㈏에서 $\overline{CD}=\overline{AB}=3$이므로

$\sqrt{(3\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+(q-p)^2}=3$

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(q-p)^2}=3$

양변을 제곱하면

$8+(q-p)^2=9$

$(q-p)^2=1$

$\therefore q-p=-1$ ($\because$ ㉠) ……㉡

또한, 조건 ㈏에서 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 직선 AD의 기울기와 직선 BC의 기울기는 서로 같다.

즉, $\dfrac{q-1}{3\sqrt{2}-0}=\dfrac{p-4}{\sqrt{2}-0}$에서

$q-1=3p-12$

$\therefore q-3p=-11$ ……㉢

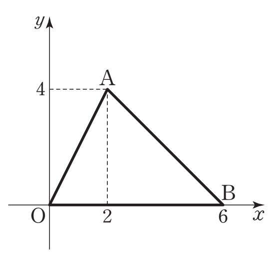
㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$p=5,\ q=4$

$\therefore p+q=9$

답 9

28 세 점 O(0, 0), A(2, 4), B(6, 0)에서



$\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$,

$\overline{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(0-4)^2}$

$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

삼각형 ABC가 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이므로 점 C는 변 AB의 수직이등분선 위에 있다.

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{0-4}{6-2}=-1$이고, 변 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{4+0}{2}\right)$, 즉 (4, 2)이므로 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=1\times(x-4)$

$\therefore y=x-2$

이때 점 C의 좌표를 $(a,\ a-2)$라 하면

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\overline{CM}=12$에서

$\overline{CM}=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(a-2-2)^2}=3\sqrt{2}$

$2a^2-16a+32=18,\ a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

그런데 점 C는 제1사분면 위에 있으므로

$a>0,\ a-2>0$에서 $a>2$

$\therefore a=7,\ b=7-2=5$

$\therefore ab=35$

답 35

• 다른 풀이 •

점 $C(a,\ b)$에 대하여 $\overline{CA}=\overline{CB}$이므로 $\overline{CA}^2=\overline{CB}^2$에서

$(a-2)^2+(b-4)^2=(a-6)^2+b^2$

$\therefore a=b+2$ ……㉠

두 삼각형 AOB와 ABC의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 넓이가 같으므로 높이가 같아야 한다.

즉, 직선 AB에서 두 점 O, C에 이르는 거리가 같아야 한다.

이때 직선 AB의 방정식이 $y-0=\dfrac{0-4}{6-2}(x-6)$, 즉 $x+y-6=0$이므로

$\dfrac{|-6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a+b-6|}{\sqrt{2}}$

㉠을 위의 식에 대입하여 정리하면

$6=|2b-4|,\ 2b-4=\pm6$

$2b=10$ 또는 $2b=-2$

$\therefore b=5$ ($\because b>0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$a=5+2=7$

$\therefore ab=7\times5=35$

29 □OABC=△COD이고,

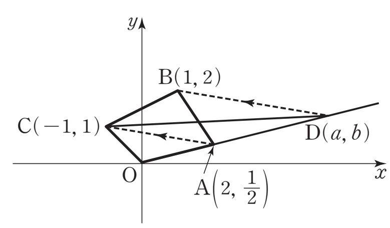
□OABC=△OAC+△ABC,

△COD=△OAC+△ADC

이므로 △ABC=△ADC

이때 선분 AC를 두 삼각형 ABC와 ADC의 공통인 밑변으로 하면 넓이가 같기 위해서는 높이가 같아야 하므로 $\overline{AC}/\!/\overline{DB}$이어야 한다.

즉, 두 직선 AC와 DB의 기울기는 같아야 한다.



직선 AC의 기울기는

$\dfrac{\frac{1}{2}-1}{2-(-1)}=-\dfrac{1}{6}$ ……㉠

직선 OA의 방정식은 $y=\dfrac{1}{4}x$이므로 직선 OA 위의 점 D의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{4}a\right)$라 하면 직선 DB의 기울기는

$\dfrac{\frac{1}{4}a-2}{a-1}$ ……㉡

㉠=㉡이므로

$-\dfrac{1}{6}=\dfrac{\frac{1}{4}a-2}{a-1},\ -\dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}a-2$

$5a=26 \quad \therefore a=\dfrac{26}{5}$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}a=\frac{1}{4}\times\frac{26}{5}=\frac{13}{10}$

$\therefore\ a+b=\frac{26}{5}+\frac{13}{10}=\frac{13}{2}$ 답 ④

30 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 CD의 기울기)이다.

즉, $a=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$

또한, 점 A$(0, 1)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$, 즉

$x+2y-2b=0$ 사이의 거리는 $\overline{AB}$의 길이인 $\sqrt{5}$와 같으므로 $\frac{|2-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$에서

$|2-2b|=5,\ 2-2b=\pm5$

$2b=-3$ 또는 $2b=7$

$\therefore\ b=-\frac{3}{2}$ 또는 $b=\frac{7}{2}$

그런데 $b>0$이므로 $b=\frac{7}{2}$

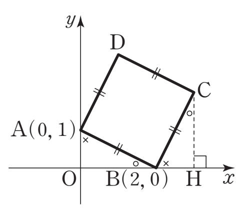
직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$의 y절편은 양수

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{6}{2}=3$ 답 3

• 다른 풀이 •

$a=-\frac{1}{2}$이므로 직선 CD의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+b$



오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 AOB, BHC에서 $\overline{AB}=\overline{BC}$이고

$\angle ABO=\angle BCH$이므로

$\triangle AOB\equiv\triangle BHC$ (RHA 합동)

즉, $\overline{BH}=\overline{AO}=1$, $\overline{CH}=\overline{BO}=2$이므로 점 C의 좌표는

$(2+1,\ 0+2)$, 즉 $(3, 2)$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$가 점 C$(3, 2)$를 지나므로

$2=-\frac{1}{2}\times3+b\qquad\therefore\ b=\frac{7}{2}$

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=\frac{6}{2}=3$

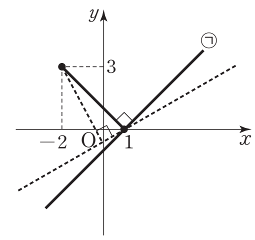
31 $(k-2)x+(k+1)y+2-k=0$에서

$k(x+y-1)+(-2x+y+2)=0$ ······㉠

㉠이 k에 대한 항등식이려면

$x+y-1=0,\ -2x+y+2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=0$이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지난다.



이때 점 $(-2, 3)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 최대가 되려면 두 점 $(1, 0)$, $(-2, 3)$을 지나는 직선이 직선 ㉠과 수직이어야 하므로

$-\frac{k-2}{k+1}\times\frac{3-0}{-2-1}=-1,$

$2-k=k+1$

$2k=1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

점 $(-2, 3)$과 직선 $(k-2)x+(k+1)y+2-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|-2(k-2)+3(k+1)+2-k|}{\sqrt{(k-2)^2+(k+1)^2}}$

$=\frac{9}{\sqrt{2k^2-2k+5}}$

이때 $f(k)=2k^2-2k+5$라 하면 $f(k)$가 최솟값을 가질 때, d가 최댓값을 갖는다.

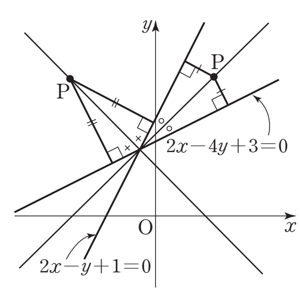
$f(k)=2k^2-2k+5$

$=2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

이므로 $f(k)$는 $k=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{9}{2}$를 갖는다.

따라서 구하는 실수 k의 값은 $\frac{1}{2}$이다.

32 다음 그림과 같이 두 직선 $2x-y+1=0$, $2x-4y+3=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 P(x, y)라 하자.



점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 서로 같으므로

$\frac{|2x-y+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2x-4y+3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}$

$2\sqrt{5}|2x-y+1|=\sqrt{5}|2x-4y+3|$

$2(2x-y+1)=\pm(2x-4y+3)$

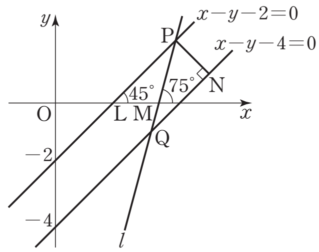
따라서 구하는 직선의 방정식은

$2x+2y-1=0$ 또는 $6x-6y+5=0$

답 $2x+2y-1=0$ 또는 $6x-6y+5=0$

33 직선 l의 y절편이 달라져도 선분 PQ의 길이는 변하지 않는다.

다음 그림과 같이 두 점 L, M을 잡자.



직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$의 기울기는 1이므로 이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $45°$이다.

즉, $\angle PLM=45°$이므로 삼각형 PLM에서

$\angle LPM=75°-45°=30°$

또한, 점 P에서 직선 $x-y-4=0$에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$\angle PQN=\angle LPM=30°$ ($\because$ 엇각)

$\overline{PN}$은 두 직선 $x-y-2=0$, $x-y-4=0$ 사이의 거리, 즉 점 $(0,\ -2)$와 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PN}=\frac{|0-(-2)-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 PQN에서

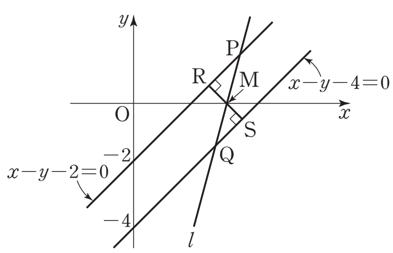
$$\overline{PQ}=\frac{\overline{PN}}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

• 다른 풀이 •

직선 l의 y절편이 달라져도 선분 PQ의 길이는 변하지 않는다.

다음 그림과 같이 세 점 R, M, S를 잡자.



평행한 두 직선의 기울기가 1이므로 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이고, 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $75°$이므로

$$\begin{aligned}\angle PMR&=90°-\angle RPM\\&=90°-(75°-45°)\\&=60°\end{aligned}$$

한편, 두 직선 $x-y-2=0$, $x-y-4=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{SR}&=\frac{|-2-(-4)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\\&=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\end{aligned}$$ ← 본문 8쪽 비법노트Ⓓ

따라서 두 직각삼각형 PRM, QSM에서

$\angle PMR=\angle QMS=60°$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=\overline{PM}+\overline{QM}\\&=\frac{\overline{MR}}{\cos 60°}+\frac{\overline{SM}}{\cos 60°}\\&=\frac{\overline{MR}+\overline{SM}}{\cos 60°}\\&=\frac{\overline{SR}}{\cos 60°}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

34 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, $B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$에서

$\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=3$, $\overline{AB}=5$

삼각형 OAB에서 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OP}:\overline{PA}$이므로 $\overline{OP}:\overline{PA}=3:5$ ……㉠

즉, 점 P는 $\overline{OA}$를 $3:5$로 내분하므로

$$P\left(\frac{3\times2\sqrt{2}+5\times0}{3+5},\ \frac{3\times2\sqrt{2}+5\times0}{3+5}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

직선 BP의 방정식을 구하면

$$y-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\sqrt{2}$$

점 Q는 직선 BP가 x축과 만나는 점이므로 $Q(3\sqrt{2},\ 0)$*

이때 $\overline{OA}=4$이므로 ㉠에서

$$\overline{AP}=\frac{5}{5+3}\overline{OA}=\frac{5}{8}\times4=\frac{5}{2}$$

이고, 직선 AP의 방정식은 $y=x$, 즉 $x-y=0$이므로

점 $Q(3\sqrt{2},\ 0)$과 직선 AP 사이의 거리는

$$\frac{|3\sqrt{2}-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3$$

$$\therefore \triangle APQ=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times3=\frac{15}{4}$$

답 $\frac{15}{4}$

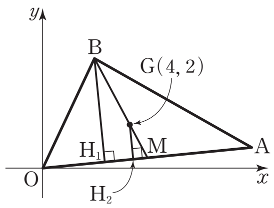
단계	채점 기준	배점
㈎	세 점 O, A, B의 좌표를 이용하여 세 선분 OA, OB, AB의 길이를 각각 구한 경우	20%
㈏	삼각형 OAB에서 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 점 P가 선분 OA를 3 : 5로 내분하는 점임을 확인하고, 점 P의 좌표를 구한 경우	30%
㈐	직선 BP의 방정식을 구하여 점 Q의 좌표를 구한 경우	30%
㈑	점 Q와 직선 AP 사이의 거리를 구하여 삼각형 APQ의 넓이를 구한 경우	20%

• 다른 풀이 •

*에서

$$\begin{aligned}\triangle APQ&=\triangle OAQ-\triangle OPQ\\&=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\\&=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

35 오른쪽 그림과 같이 변 OA의 중점을 M이라 하면 점 G가 삼각형 OAB의 무게중심이므로



$\overline{BG}:\overline{GM}=2:1$

$\therefore \overline{BM}:\overline{GM}=3:1$

점 B와 점 G에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\angle BH_1M=\angle GH_2M=90^\circ$, $\angle GMH_2$는 공통이므로

$\triangle BMH_1 \backsim \triangle GMH_2$ (AA 닮음)

닮음비는 $\overline{BM}:\overline{GM}=3:1$이므로

$\overline{GH_2}=\frac{1}{3}\overline{BH_1}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

한편, 직선 OA의 기울기를 m이라 하면 직선 OA의 방정식은

$y=mx$, 즉 $mx-y=0$

즉, 점 G와 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|4m-2|=\sqrt{2(m^2+1)}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$16m^2-16m+4=2m^2+2$

$7m^2-8m+1=0$, $(7m-1)(m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{7}$ 또는 $m=1$

이때 직선 OG의 기울기는 $\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$이고, 직선 OB의 기울기가 직선 OA의 기울기보다 크므로 직선 OG의 기울기는 직선 OA의 기울기보다 커야 한다.

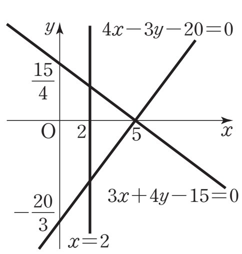
따라서 직선 OA의 기울기는 $\frac{1}{7}$이다.

답 ②

36 해결단계

❶ 단계	세 직선 중에서 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 두 직선의 교점을 구하여 내심의 좌표를 구한다.

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고, 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같다.



두 직선 $x=2$, $4x-3y-20=0$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$|a-2|=\frac{|4a-3b-20|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$5|a-2|=|4a-3b-20|$

$5(a-2)=\pm(4a-3b-20)$

$\therefore a+3b+10=0$ 또는 $3a-b-10=0$

이때 두 직선 $x=2$, $4x-3y-20=0$이 이루는 각 중에서 크기가 작은 각의 이등분선의 기울기는 양수이므로 이등분선의 방정식은

$3x-y-10=0$ ……㉠

두 직선 $x=2$, $3x+4y-15=0$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (c, d)라 하면

$|c-2|=\frac{|3c+4d-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$5|c-2|=|3c+4d-15|$

$5(c-2)=\pm(3c+4d-15)$

$\therefore 2c-4d+5=0$ 또는 $8c+4d-25=0$

이때 두 직선 $x=2$, $3x+4y-15=0$이 이루는 각 중에서 크기가 작은 각의 이등분선의 기울기는 음수이므로 이등분선의 방정식은

$8x+4y-25=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{13}{4}$, $y=-\frac{1}{4}$

따라서 삼각형의 내심의 좌표는 $\left(\frac{13}{4}, -\frac{1}{4}\right)$이다.

답 $\left(\frac{13}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

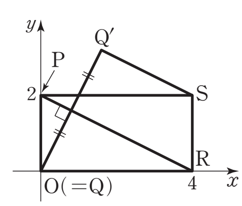
STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.18~19

01 $-\frac{1}{2}$	02 21	03 180	04 8	05 0
06 130	07 21	08 9	09 $\sqrt{5}$	10 5
11 $\frac{1}{2}$				

01 해결단계

❶ 단계	주어진 그림을 좌표평면 위에 놓고 각 점의 좌표를 구한 후, 직선 PR의 방정식을 구한다.
❷ 단계	대각선 PR이 선분 QQ′을 수직이등분함을 이용하여 점 Q′의 좌표를 구한다.
❸ 단계	직선 Q′S의 기울기를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 Q를 원점으로 하고, 두 반직선 QR, QP가 각각 x축, y축의 양의 방향으로 오도록 직사각형 PQRS를 놓으면



P(0, 2), R(4, 0), S(4, 2)이므로 직선 PR의 방정식은

$y-2=\frac{0-2}{4-0}(x-0)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

이때 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$가 선분 QQ′을 수직이등분하므로 점 Q′의 좌표를 (a, b)라 하면

(i) 직선 QQ′의 기울기는 2이므로

$\frac{b}{a}=2$

$\therefore b=2a$ ······㉠

(ii) 선분 QQ′의 중점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위에 있으므로

$\frac{b}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}+2$

$\therefore a+2b=8$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{8}{5}$, $b=\frac{16}{5}$이므로 점 Q′의 좌표는 $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$이다.

따라서 직선 Q′S의 기울기는

$$\frac{2-\frac{16}{5}}{4-\frac{8}{5}}=\frac{-\frac{6}{5}}{\frac{12}{5}}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

직선 QQ′의 기울기가 2이므로 Q′$(a, 2a)$라 하자.

이때 점 Q′에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 Q′QH에서 $\overline{QH}=a$, $\overline{Q'H}=2a$이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{QQ'}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$이고,

$\overline{PR}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

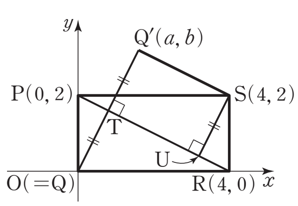
즉, $\triangle PQR=\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{QQ'}}{2}\times\overline{PR}$에서

$4=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}a}{2}\times2\sqrt{5}$이므로 $\frac{5}{2}a=4$

$\therefore a=\frac{8}{5}$, $Q'\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

직사각형 PQRS의 두 점 Q, S에서 대각선 PR에 내린 수선의 발 T, U까지의 거리가 같음을 알면 사각형 Q′TUS가 직사각형이 되어 $\overline{Q'S}\,/\!/\,\overline{PR}$임을 쉽게 알 수 있다.



∴ (직선 Q′S의 기울기)=(직선 PR의 기울기)$=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

02 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B의 좌표를 구한다.
❷ 단계	이등변삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AC}=\overline{BC}$일 때 최대임을 파악하여 m_1의 값을 구한다.
❸ 단계	이등변삼각형 ABC의 넓이는 $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때 최소임을 파악하여 m_2의 값을 구한다.
❹ 단계	m_1m_2의 값을 구한다.

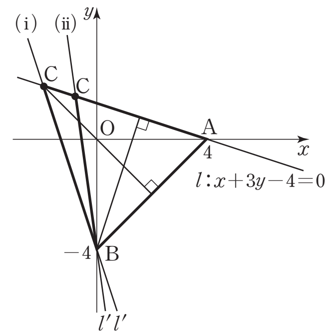
직선 $l : x+3y-4=0$과 x축의 교점이 점 A이므로

A$(4, 0)$

직선 $l' : mx-y-4=0$, 즉 $mx-(y+4)=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -4)$를 지나므로

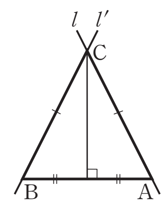
B$(0, -4)$

이때 두 직선 l, l'의 교점 C에 대하여 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최대, 최소가 되는 경우는 다음 그림과 같다.



(i) 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최대인 경우

$\overline{AC}=\overline{BC}$이어야 하므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선과 직선 l의 교점이어야 한다.



직선 AB의 기울기가 $\frac{-4-0}{0-4}=1$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -1이고, 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(2, -2)$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-2)$

$\therefore y=-x$

이 직선과 직선 $l : x+3y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$의 교점이 점 C이므로

$-x=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$에서 $\frac{2}{3}x=-\frac{4}{3}$

$x=-2$, $y=2$

$\therefore$ C$(-2, 2)$

점 C가 직선 $l' : mx-y-4=0$ 위에 있으므로

$-2m-2-4=0$에서 $m=-3$

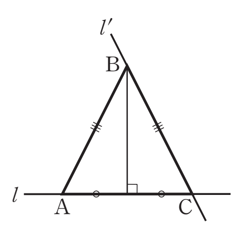
따라서 $m=-3$일 때 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최대이다.

$\therefore m_1=-3$

(ii) 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최소인 경우

$\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로 점 B는 선분 AC의 수직이등분선 위에 있어야 한다.

점 C의 좌표를 (a, b)라 하면 점 C는 직선 $l : x+3y-4=0$ 위에 있으므로



$a+3b-4=0$ ······㉠

직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 선분 AC의 수직이
직선 l
등분선의 기울기는 3이고, 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$이므로 선분 AC의 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{b}{2}=3\left(x-\frac{4+a}{2}\right)$

이 직선이 점 B$(0, -4)$를 지나므로

$-4-\frac{b}{2}=3\left(0-\frac{4+a}{2}\right)$

$3a-b+4=0$ ······ⓛ

ⓖ, ⓛ을 연립하여 풀면

$a=-\frac{4}{5}$, $b=\frac{8}{5}$

$\therefore$ C$\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

점 C가 직선 $l' : mx-y-4=0$ 위에 있으므로

$-\frac{4}{5}m-\frac{8}{5}-4=0$에서 $m=-7$

따라서 $m=-7$일 때 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최소이다.

$\therefore m_2=-7$

(i), (ii)에서 $m_1=-3$, $m_2=-7$이므로

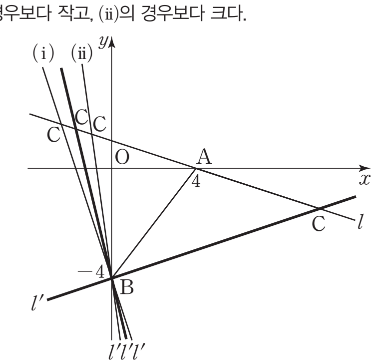
$m_1m_2=21$ 답 21

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 이등변삼각형 ABC는 밑변이 $\overline{AC}$, 높이가 $\overline{BH}$이므로 $\overline{AC}$가 최대일 때 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최대이고, $\overline{AC}$가 최소일 때 이등변삼각형 ABC의 넓이가 최소이다.
따라서 이등변삼각형 ABC가 각각 $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때의 점 C의 좌표를 구한 후, $\overline{AC}$가 각각 최대, 최소인 경우를 파악하여 직선 l'의 기울기 m_1, m_2의 값을 구할 수 있다.

BLACKLABEL 특강 참고

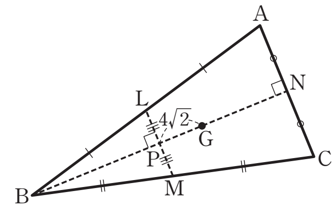
△ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형일 때, △ABC의 넓이는 (i)의 경우보다 작고, (ii)의 경우보다 크다.



03 해결단계

❶ 단계	두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하고, 점 P의 좌표를 구한다.
❷ 단계	삼각형 ABC의 무게중심 G를 이용하여 $\overline{NP}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	점 N의 좌표를 구하여 ab의 값을 구한다.

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 중점이 각각 L, M이므로 $\overline{LM} /\!/ \overline{AC}$이고, 직선 BN과 직선 LM이 서로 수직이므로 $\overline{BN} \perp \overline{AC}$이다.
즉, 직선 BN은 선분 AC의 수직이등분선이므로 두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하면 점 P는 선분 LM의 중점이다.



L$(2, 1)$, M$(4, -1)$이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$

삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 $\overline{BG} : \overline{GN}=2:1$이고, $\overline{NP}=\overline{BP}$, $\overline{PG}=4\sqrt{2}$이므로

$(\overline{BP}+\overline{PG}) : (\overline{NP}-\overline{PG})=2:1$

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}) : (\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$2(\overline{NP}-4\sqrt{2})=\overline{NP}+4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{NP}=12\sqrt{2}$

이때 N(a, b), P$(3, 0)$이므로

$\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ ······ⓖ

한편, 직선 LM의 기울기는 $\frac{-1-1}{4-2}=-1$, 직선 NP의 기울기는 $\frac{b}{a-3}$이고, 이 두 직선이 서로 수직이므로

$(-1)\times\frac{b}{a-3}=-1$

$\therefore a=b+3$ ······ⓛ

ⓛ을 ⓖ에 대입하여 풀면

$2b^2=288$, $b^2=144$

이때 무게중심 G가 제1사분면 위에 있으므로 $b>0$에서

$b=12$

이것을 ⓛ에 대입하면

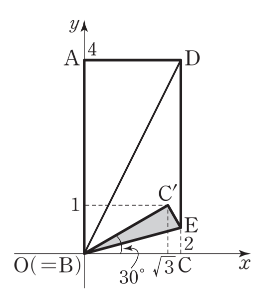
$a=15$

$\therefore ab=15\times12=180$ 답 180

04 해결단계

❶ 단계	점 B가 원점, 변 BC가 x축 위에 오도록 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓는다.
❷ 단계	점 C′의 좌표와 직선 BD의 방정식을 구한다.
❸ 단계	점 C′과 직선 BD 사이의 거리를 구한다.

좌표평면 위에 점 B를 원점으로 하고, 변 BC가 x축의 양의 방향으로 오도록 직사각형 모양의 종이를 놓으면



$\angle$C′BC$=30°$이고,

$\overline{BC'}=2$이므로

C′$(\sqrt{3}, 1)$

$\overline{BC'}\cos 30°$ $\overline{BC'}\sin 30°$

이때 직선 BD의 방정식은

$y=2x$, 즉 $2x-y=0$이므로

점 C′과 직선 BD 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\sqrt{15}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{1}{5}$이므로

$100ab=100\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=8$ **답** 8

05 해결단계

❶ 단계	직선 l의 기울기를 m이라 하고, 직선 l이 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 지나야 함을 이용하여 직선 l의 방정식을 세운다.
❷ 단계	직선 l과 직선 GE의 교점의 좌표, 직선 l과 직선 EF의 교점의 좌표를 m에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 두 점과 점 E를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 삼각형 GEF의 넓이의 $\frac{1}{2}$배임을 이용하여 m의 값을 구한다.
❹ 단계	a, b의 값을 구하여 $a+b$의 값을 구한다.

직사각형 ABCD의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 교점을 M이라 하면 이 교점은 선분 AC의 중점과 같다.

즉, $A(-2, 1)$, $C(2, 3)$이므로 $M(0, 2)$

직선 l은 점 $M(0, 2)$를 지나면서 삼각형 GEF의 넓이를 이등분하므로 직선 l의 기울기를 m $(m<0)$이라 하면 직선 l의 방정식을 $y=mx+2$라 할 수 있다.

이때 직선 GE의 방정식이 $y=x-2$이므로 두 직선 GE와 l의 교점의 x좌표는 $x-2=mx+2$에서

$(m-1)x=-4$ $\quad\therefore x=\frac{-4}{m-1}$

이것을 $y=x-2$에 대입하면

$$y=-\frac{4}{m-1}-2=\frac{-4-2m+2}{m-1}=\frac{-2m-2}{m-1}$$

$\therefore \left(\frac{-4}{m-1}, \frac{-2m-2}{m-1}\right)$ ······㉠

또한, 직선 EF의 방정식은 $y=-2$이므로 두 직선 EF와 l의 교점의 x좌표는 $-2=mx+2$에서

$mx=-4$ $\quad\therefore x=-\frac{4}{m}$

$\therefore \left(-\frac{4}{m}, -2\right)$ ······㉡

한편, $\triangle GEF=\frac{1}{2}\times4\times2=4$에서 세 점 ㉠, ㉡, E를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 2이어야 하고, 이 삼각형의 밑변의 길이는 $-\frac{4}{m}$, 높이는 $2-\frac{2m+2}{m-1}=-\frac{4}{m-1}$이므로

$$2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{m}\right)\times\left(-\frac{4}{m-1}\right)$$

위의 식의 양변에 $m(m-1)$을 곱하면

$2m^2-2m=8$

$2m^2-2m-8=0$, $m^2-m-4=0$

$\therefore m=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$

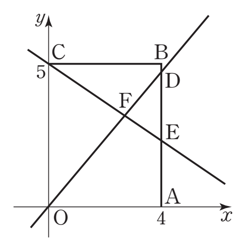
그런데 $m<0$이므로 $m=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a+b=0$ **답** 0

06 해결단계

❶ 단계	두 사각형 OAEF, BCFD의 넓이의 관계를 이용하여 $\overline{AD}=\overline{BE}+2$임을 파악한다.
❷ 단계	$\overline{BE}$의 길이를 이용하여 직선 OD의 기울기, 직선 CE의 기울기를 나타낸다.
❸ 단계	두 직선 OD, CE의 기울기의 곱이 $-\frac{7}{9}$임을 이용하여 $\overline{BE}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	두 직선 OD, CE의 방정식을 각각 구하고 교점의 좌표를 구하여 $22(a+b)$의 값을 구한다.



오른쪽 그림에서

$\triangle OAD=\square OAEF+\triangle DFE$,

$\triangle CEB=\square BCFD+\triangle DFE$

이때 $\square OAEF=\square BCFD+4$

이므로

$\triangle OAD=\triangle CEB+4$ ······㉠

$\overline{OA}=\overline{CB}=4$이므로

$\triangle OAD=\frac{1}{2}\times4\times\overline{AD}$,

$\triangle CEB=\frac{1}{2}\times4\times\overline{BE}$

㉠에서

$\frac{1}{2}\times4\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{BE}+4$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BE}+2$

이때 $\overline{BE}=k$라 하면 $\overline{AD}=k+2$이므로

직선 OD의 기울기는 $\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}=\frac{k+2}{4}$,

직선 CE의 기울기는 $-\frac{\overline{BE}}{\overline{CB}}=-\frac{k}{4}$

두 직선 OD, CE의 기울기의 곱이 $-\frac{7}{9}$이므로

$$\frac{k+2}{4}\times\left(-\frac{k}{4}\right)=-\frac{7}{9}$$

$9k^2+18k-112=0$, $(3k+14)(3k-8)=0$

$\therefore k=\frac{8}{3}$ $(\because k>0)$

즉, 직선 OD는 원점을 지나고 기울기가 $\frac{7}{6}$이므로 직선 OD의 방정식은

$y=\frac{7}{6}x$ ······㉡

직선 CE는 점 C(0, 5)를 지나고 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로
직선 CE의 방정식은

$y=-\frac{2}{3}x+5$ ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=\frac{30}{11}$, $y=\frac{35}{11}$

즉, 두 직선 OD, CE의 교점이 $\text{F}\left(\frac{30}{11}, \frac{35}{11}\right)$이므로

$a=\frac{30}{11}$, $b=\frac{35}{11}$

$\therefore 22(a+b)=130$ **답** 130

점 E의 좌표가 (5, 10)이므로

$\frac{a_1+4a_2}{7}=5$, $\frac{b_1+4b_2}{7}=10$에서

$a_1+4a_2=35$ ······㉠

$b_1+4b_2=70$ ······㉡

한편, 선분 AB를 4 : 1로 내분하는 점 (p, q)의 좌표는

$\left(\frac{4\times a_2+1\times a_1}{4+1}, \frac{4\times b_2+1\times b_1}{4+1}\right)$

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{35}{5}, \frac{70}{5}\right)$, 즉 (7, 14)이므로

$p=7$, $q=14$

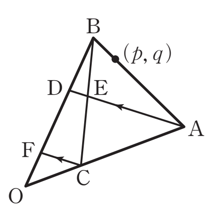
$\therefore p+q=7+14=21$ **답** 21

07 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)라 하고 점 C의 x좌표, y좌표를 a_1, b_1에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	삼각형의 닮음을 이용하여 점 E가 선분 BC를 3 : 4로 내분하는 점임을 파악한다.
❸ 단계	점 E의 x좌표, y좌표를 a_1, b_1, a_2, b_2에 대한 식으로 나타낸다.
❹ 단계	점 (p, q)의 x좌표, y좌표를 a_1, b_1, a_2, b_2에 대한 식으로 나타내고, 점 E의 좌표를 활용하여 $p+q$의 값을 구한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)라 하면
점 C는 변 OA를 1 : 2로 내분하므로

$\text{C}\left(\frac{1\times a_1+2\times 0}{1+2}, \frac{1\times b_1+2\times 0}{1+2}\right)$ $\therefore \text{C}\left(\frac{a_1}{3}, \frac{b_1}{3}\right)$



오른쪽 그림과 같이 점 C를 지나고 선분 AD와 평행한 직선이 변 OB와 만나는 점을 F라 하면
△OCF∽△OAD (AA 닮음)이므로

$\overline{\text{OF}}:\overline{\text{OD}}=1:3$에서

$\overline{\text{OF}}=\frac{1}{3}\overline{\text{OD}}$

$\overline{\text{BD}}:\overline{\text{OD}}=1:2$에서

$\overline{\text{BD}}=\frac{1}{2}\overline{\text{OD}}$

$\overline{\text{OD}}=\overline{\text{OF}}+\overline{\text{DF}}$에서

$\overline{\text{DF}}=\overline{\text{OD}}-\overline{\text{OF}}=\frac{2}{3}\overline{\text{OD}}$

△BED∽△BCF (AA 닮음)이므로

$$\begin{aligned}\overline{\text{BE}}:\overline{\text{EC}}&=\overline{\text{BD}}:\overline{\text{DF}}\\&=\frac{1}{2}\overline{\text{OD}}:\frac{2}{3}\overline{\text{OD}}\\&=3:4\end{aligned}$$

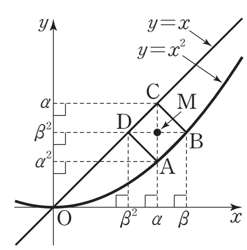
즉, 점 E는 선분 BC를 3 : 4로 내분하므로

$\text{E}\left(\frac{3\times\frac{a_1}{3}+4\times a_2}{3+4}, \frac{3\times\frac{b_1}{3}+4\times b_2}{3+4}\right)$

$\therefore \text{E}\left(\frac{a_1+4a_2}{7}, \frac{b_1+4b_2}{7}\right)$

08 해결단계

❶ 단계	정사각형 ABCD에서 $\text{A}(\alpha, \alpha^2)$, $\text{B}(\beta, \beta^2)$이라 하고, 두 점 C, D의 좌표를 설정한 후, α와 β 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점 M에 대하여 $\overline{\text{BD}}=2\overline{\text{BM}}$임을 파악하고 α와 β 사이의 관계식을 구한 후, β의 값을 이용하여 정사각형 ABCD의 대각선의 길이를 구한다.
❸ 단계	a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.



정사각형 ABCD에서 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 점 A, B의 좌표를 각각
(α, α^2), (β, β^2)
이라 하면 일차함수 $y=x$의 그래프 위의 두 점 C, D의 좌표는 각각
(α, α), (β^2, β^2)이다.
이때 두 직선 AB와 CD의 기울기가 같으므로

$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=1$, $\frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=1$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta=1$ ······㉠

정사각형 ABCD의 두 대각선 BD와 AC의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 (α, β^2)이고, $\overline{\text{BD}}=2\overline{\text{BM}}$이므로

$\beta-\beta^2=2(\beta-\alpha)$

$\therefore \beta^2+\beta-2\alpha=0$ ······㉡

㉠에서 $\alpha=1-\beta$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$\beta^2+\beta-2(1-\beta)=0$

$\beta^2+3\beta-2=0$

$\therefore \beta=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ $(\because \beta>0)$

따라서 대각선의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\text{BD}}&=\beta-\beta^2=\beta(1-\beta)\\&=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\times\frac{5-\sqrt{17}}{2}\\&=2\sqrt{17}-8\end{aligned}$$

이므로 $a=17$, $b=-8$

$\therefore a+b=9$ **답** 9

09 해결단계

❶ 단계	직선 BC의 방정식이 $y=2x+1$임을 이용하여 두 점 B, C의 y좌표를 나타낸다.
❷ 단계	삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$임을 이용하여 점 A의 x좌표, y좌표 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	점 A를 지나는 직선의 방정식을 구한 후, 두 직선 사이의 거리를 이용하여 선분 AH의 길이를 구한다.

직선 BC의 방정식이 $y=2x+1$이므로 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ 2x_2+1)$, $C(x_3,\ 2x_3+1)$이라 하자.

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(1,\ \frac{4}{3}\right)$이므로

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$에서

$x_1+x_2+x_3=3$ ······㉠

$\frac{y_1+2x_2+1+2x_3+1}{3}=\frac{4}{3}$에서

$y_1+2x_2+2x_3+2=4$

$\therefore\ x_2+x_3=1-\frac{y_1}{2}$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x_1+1-\frac{y_1}{2}=3,\ \frac{y_1}{2}=x_1-2 \qquad \therefore\ y_1=2x_1-4$

즉, 점 A는 직선 $y=2x-4$ 위의 점이다.

이때 두 직선 $y=2x-4$, $y=2x+1$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 선분 AH의 길이와 같다.

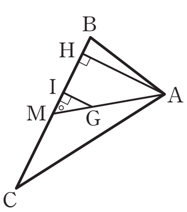
따라서 선분 AH의 길이는 직선 $y=2x-4$ 위의 한 점 $(0,\ -4)$와 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{AH}=\frac{|4+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

BLACKLABEL 특강 참고

삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 직선 AG와 변 BC의 교점은 변 BC의 중점이다.
변 BC의 중점을 M, 점 G에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면
$\triangle AHM \backsim \triangle GIM$ (AA 닮음)
이때 $\overline{AM}:\overline{GM}=3:1$이므로
$\overline{AH}:\overline{GI}=3:1$



따라서 선분 AH의 길이는 점 G와 직선 BC 사이의 거리의 3배이다.

10 해결단계

❶ 단계	$ax^2+3xy-2y^2+5x+5y+b=0$의 좌변을 x, y에 대한 두 일차식 $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$의 곱으로 나타낸다.
❷ 단계	y^2항의 계수가 -2임을 이용하여 $f(x,\ y)=px-2y+q$, $g(x,\ y)=rx+y+s$ 꼴로 나타낸다.
❸ 단계	두 직선 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$이 서로 수직임을 이용하여 p, r의 값을 구한다.
❹ 단계	a, b의 값을 구하여 $a+b$의 값을 구한다.

x, y에 대한 방정식

$ax^2+3xy-2y^2+5x+5y+b=0\ (a\neq 0)$

이 각 항의 계수가 모두 정수인 두 직선을 나타내므로 x, y에 대한 두 일차식 $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$에 대하여

$ax^2+3xy-2y^2+5x+5y+b=f(x,\ y)g(x,\ y)$

이 등식에서 좌변의 y^2항의 계수가 -2이므로

$f(x,\ y)=px-2y+q,\ g(x,\ y)=rx+y+s$*

$(p\neq 0,\ r\neq 0,\ p,\ q,\ r,\ s$는 정수$)$

라 하자.

이때 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$은 서로 수직인 두 직선이므로

$pr+(-2)\times 1=0$

$pr=2 \qquad \therefore\ p=\frac{2}{r}$

즉,

$ax^2+3xy-2y^2+5x+5y+b$

$=\left(\frac{2}{r}x-2y+q\right)(rx+y+s)$ ······㉠

등식 ㉠에서 우변의 xy항은

$\frac{2}{r}x\times y+(-2y)\times rx=\left(\frac{2}{r}-2r\right)xy$

이고, 좌변의 xy항의 계수가 3이므로

$\frac{2}{r}-2r=3$

$2r^2+3r-2=0,\ (r+2)(2r-1)=0$

$\therefore\ r=-2\ (\because\ r$은 정수$)$

이것을 ㉠에 대입하면

$ax^2+3xy-2y^2+5x+5y+b$

$=(-x-2y+q)(-2x+y+s)$

$=2x^2+3xy-2y^2-(2q+s)x+(q-2s)y+qs$

이므로

$a=2,\ 2q+s=-5,\ q-2s=5,\ qs=b$

$2q+s=-5$, $q-2s=5$를 연립하여 풀면

$q=-1,\ s=-3$

$\therefore\ b=qs=(-1)\times(-3)=3$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=5$

답 5

BLACKLABEL 특강 참고 *

$f(x,\ y)=px+2y+q$, $g(x,\ y)=rx-y+s$로 계산하여도 결과는 같다.

11 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓고, 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.
❷ 단계	선분의 내분점을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.
❸ 단계	두 직선 PQ, AC의 방정식을 각각 구하여 교점 R의 좌표를 구한다.
❹ 단계	두 삼각형 APR, RCQ의 넓이를 각각 구하고 $S_1+2n(n-m)S_2$의 최댓값을 구한다.

좌표평면 위에 점 B를 원점으로 하고, 두 반직선 BC, BA가 각각 x축, y축의 양의 방향으로 오도록 직각이등변삼각형 ABC를 놓으면

A$(0, 4)$, B$(0, 0)$, C$(4, 0)$

점 P는 변 AB를 $n : m$으로 내분하므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{n\times0+m\times0}{n+m}, \frac{n\times0+m\times4}{n+m}\right), \text{ 즉 } \mathrm{P}(0, 4m)$$

$(\because m+n=1)$

점 Q의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 점 C는 선분 BQ를 $(m-n) : n$으로 내분하므로

$$\mathrm{C}\left(\frac{(m-n)\times a+n\times0}{m-n+n}, \frac{(m-n)\times0+n\times0}{m-n+n}\right)$$

즉, $\mathrm{C}\left(\frac{(m-n)a}{m}, 0\right)$

이때 $\frac{(m-n)a}{m}=4$이므로

$$a=\frac{4m}{m-n}=\frac{4m}{2m-1}\ (\because n=1-m)$$

점 Q의 좌표는 $\left(\frac{4m}{2m-1}, 0\right)$이므로

*직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{-4m}{\frac{4m}{2m-1}}\left(x-\frac{4m}{2m-1}\right)$$

$$y=(1-2m)\left(x-\frac{4m}{2m-1}\right)$$

$\therefore y=(1-2m)x+4m$

직선 AC의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$$

$\therefore y=4-x$

두 직선 PQ, AC의 교점 R의 x좌표는

$(1-2m)x+4m=4-x$에서

$(2-2m)x=4-4m$

$m\neq1$이므로 $x=2$, $y=4-2=2$

즉, R$(2, 2)$

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times2\times(4-4m)=4(1-m),$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times2\times\left(\frac{4m}{2m-1}-4\right)=\frac{4(1-m)}{2m-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_1+2n(n-m)S_2 &=4(1-m)+(2-2m)(1-2m)\times\frac{4(1-m)}{2m-1} \quad (\because n=1-m)\\ &=4(1-m)-(2-2m)\times4(1-m)\\ &=4(1-m)(2m-1)\\ &=-8m^2+12m-4\\ &=-8\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $m=\frac{3}{4}$일 때 $S_1+2n(n-m)S_2$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

선분 BC의 연장선 위의 점 Q에 대해 점 C가 선분 BQ를 $(m-n) : n$으로 내분하므로 점 Q는 선분 BC를 $m : n$으로 외분한다. ← 해설 6쪽 BLACKLABEL 특강 참고

따라서 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m\times4-n\times0}{m-n}, \frac{m\times0-n\times0}{m-n}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{4m}{m-n}, 0\right)$$

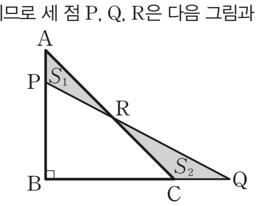
이때 $n=1-m$이므로

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4m}{2m-1}, 0\right)$$

다음은 *와 같다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$0<n<m<1$이므로 세 점 P, Q, R은 다음 그림과 같다.



02. 원의 방정식

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.21~23

01 ③	02 ④	03 ①	04 5	
05 $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$		06 ②	07 ⑤	08 21
09 ③	10 ②	11 ④	12 ④	13 $m<\frac{3}{4}$
14 8	15 ③	16 ①	17 ③	18 8
19 ⑤	20 31	21 $4\sqrt{6}$		

01 $x^2+y^2+2ax-6ay+20a-30=0$에서

$(x+a)^2+(y-3a)^2=10a^2-20a+30$

즉, 주어진 원의 중심의 좌표는 $(-a,\ 3a)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{10a^2-20a+30}$이다.

이때 $10a^2-20a+30=10(a-1)^2+20$이므로 $a=1$일 때 반지름의 길이는 최소이고 넓이도 최소이다.

따라서 주어진 원의 넓이가 최소일 때의 원의 중심의 좌표는 $(-1,\ 3)$이다. 답 ③

02 $x^2+y^2-2x-ay-b=0$에서

$(x-1)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+b+1$

즉, 주어진 원의 중심의 좌표는 $\left(1,\ \frac{a}{2}\right)$이고, 중심이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$\frac{a}{2}=1\qquad\therefore a=2$

또한, 원의 반지름의 길이가 2이므로

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b+1}=2$에서 $\sqrt{b+2}=2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$b+2=4\qquad\therefore b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$ 답 ④

03 원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 중심의 좌표는

$\left(\frac{5+0}{2},\ \frac{0+12}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ 6\right)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{(5-0)^2+(0-12)^2}}{2}=\frac{\sqrt{169}}{2}=\frac{13}{2}$

따라서 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-6)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\therefore x^2+y^2-5x-12y=0$

따라서 $a=-5,\ b=-12,\ c=0$이므로

$a+b+c=-5+(-12)+0=-17$ 답 ①

• 다른 풀이 •

두 점 A(5, 0), B(0, 12)를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x-5)(x-0)+(y-0)(y-12)=0$ ←본문 20쪽 비법노트Ⓑ

$x^2-5x+y^2-12y=0$

$\therefore x^2+y^2-5x-12y=0$

따라서 $a=-5,\ b=-12,\ c=0$이므로

$a+b+c=-5+(-12)+0=-17$

BLACKLABEL 특강 참고

두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식

원 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)(x\neq x_1,\ x\neq x_2)$라 하면 선분 AB는 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

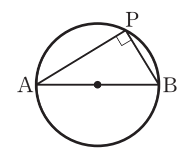
즉, 두 직선 PA, PB는 서로 수직이므로

$\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$에서

$(y-y_1)(y-y_2)=-(x-x_1)(x-x_2)$

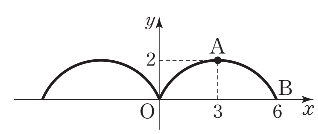
따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$



이때 점 P가 $\mathrm{A}(x=x_1)$ 또는 $\mathrm{B}(x=x_2)$인 경우에도 위의 식이 성립한다.

04 오른쪽 그림과 같이 곡선 OA를 포함하는 원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 B라 하면 점 B의 좌표는 $(6,\ 0)$이다.*



세 점 O, A, B를 지나는 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에서 원의 중심을 C라 하면 C의 좌표는 $(a,\ b)$

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}=$(반지름의 길이)

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CA}}$, 즉 $\overline{\mathrm{CO}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2$에서

$a^2+b^2=(a-3)^2+(b-2)^2$

$a^2+b^2=a^2-6a+9+b^2-4b+4$

$\therefore 6a+4b-13=0$ ……㉠

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CB}}$, 즉 $\overline{\mathrm{CO}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2$에서

$a^2+b^2=(a-6)^2+b^2$

$a^2+b^2=a^2-12a+36+b^2$

$12a-36=0\qquad\therefore a=3$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면

$b=-\frac{5}{4}$

이때 원의 반지름의 길이는 원의 중심과 원점 사이의 거리이므로

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+\left(-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{13}{4}$

$\therefore a+b+r=3+\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{13}{4}=5$ 답 5

•다른 풀이 1•

$*$에서 구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ……㉡

이라 하자.

원 ㉡이 점 O$(0,\ 0)$을 지나므로 $C=0$

원 ㉡이 점 A$(3,\ 2)$를 지나므로

$9+4+3A+2B=0$ ……㉢

원 ㉡이 점 B$(6,\ 0)$을 지나므로

$36+6A=0$ $\quad\therefore A=-6$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 풀면 $B=\dfrac{5}{2}$

즉, 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-6x+\dfrac{5}{2}y=0$이므로

이를 표준형으로 바꾸면

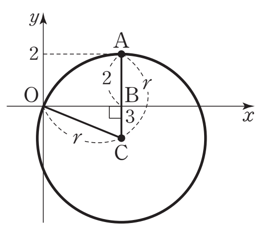
$(x-3)^2+\left(y+\dfrac{5}{4}\right)^2=\left(\dfrac{13}{4}\right)^2$

따라서 $a=3,\ b=-\dfrac{5}{4},\ r=\dfrac{13}{4}$이므로

$a+b+r=5$

•다른 풀이 2•

점 A$(3,\ 2)$가 곡선 OA를 포함하는 원 위의 점 중에서 x축으로부터 가장 멀리 있으므로 원의 중심의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다. 즉, $a=3$



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 직선 AC가 x축과 만나는 점을 B라 하면

$\overline{\mathrm{OB}}=3,\ \overline{\mathrm{OC}}=r,$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AB}}=r-2$

$\triangle$OCB가 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$에서 $r^2=3^2+(r-2)^2$

$4r=13$ $\quad\therefore r=\dfrac{13}{4}$

$\therefore b=2-r=2-\dfrac{13}{4}=-\dfrac{5}{4}$

$\therefore a+b+r=3+\left(-\dfrac{5}{4}\right)+\dfrac{13}{4}=5$

05

$x^2+y^2-4ax+2ay+10=0$에서

$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-10$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이려면

$5a^2-10>0,\ a^2-2>0$

$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})>0$

$\therefore a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$ 　　**답** $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$

06

중심의 좌표가 $(a,\ b)$인 원이 y축에 접하면 반지름의 길이가 $|a|$이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 두 점 $(3,\ 0)$, $(6,\ 1)$을 지나므로

$(3-a)^2+b^2=a^2$에서 $a=\dfrac{b^2+9}{6}$ ……㉠

$(6-a)^2+(1-b)^2=a^2$에서

$a=\dfrac{(b-1)^2+36}{12}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{b^2+9}{6}=\dfrac{(b-1)^2+36}{12}$

$2(b^2+9)=(b-1)^2+36$

$\therefore b^2+2b-19=0$ ← 판별식 D에 대하여 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근 존재

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 b의 값의 합은 -2이다. 　　**답** ②

07

점 $(-2,\ 3)$을 지나면서 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면에 있으므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.

즉, 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이고, 점 $(-2,\ 3)$은 이 원 위에 있으므로

$(-2+r)^2+(3-r)^2=r^2,\ r^2-10r+13=0*$

$\therefore r=5\pm2\sqrt{3}$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각

$(-5-2\sqrt{3},\ 5+2\sqrt{3})$, $(-5+2\sqrt{3},\ 5-2\sqrt{3})$이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-4\sqrt{3})^2}=4\sqrt{6}$ 　　**답** ⑤

•다른 풀이•

$*$에서 $r^2-10r+13=0$이므로 이 이차방정식의 두 근을 $r_1,\ r_2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$r_1+r_2=10,\ r_1r_2=13$

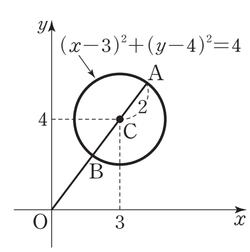
또한, 구하는 두 원의 중심의 좌표는 $(-r_1,\ r_1)$, $(-r_2,\ r_2)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\sqrt{(-r_2+r_1)^2+(r_2-r_1)^2}&=\sqrt{2(r_2-r_1)^2}\\&=\sqrt{2\{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2\}}\\&=\sqrt{96}=4\sqrt{6}\end{aligned}$$

08

원 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 위의 점을 P$(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}$의 값은 점 P와 원점 사이의 거리와 같다.



원의 중심을 C라 할 때, 오른쪽 그림과 같이 직선 OC와 원이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

점 P가 점 A의 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{OP}}$가 최댓값 M을 갖고,

점 P가 점 B의 위치에 있을 때 $\overline{\mathrm{OP}}$가 최솟값 m을 가지므로

$M=\overline{OA}=\overline{OC}+\overline{CA}$

$=\sqrt{3^2+4^2}+2$

$=5+2=7$

$m=\overline{OB}=\overline{OC}-\overline{BC}$

$=\sqrt{3^2+4^2}-2$

$=5-2=3$

$\therefore Mm=7\times3=21$ 답 21

09 두 점 A(3, 0), B(0, 3)에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:\sqrt{x^2+(y-3)^2}=1:2$

$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

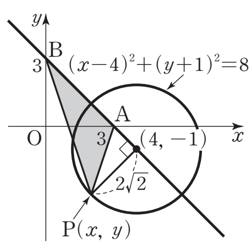
위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2+(y-3)^2=4\{(x-3)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-8x+2y+9=0$

$\therefore (x-4)^2+(y+1)^2=8$

즉, 오른쪽 그림과 같이 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(4, -1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.



*원의 중심과 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으므로 점 P가 직선 AB로부터 원의 반지름의 길이만큼 떨어져 있을 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 된다.

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=6$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.**

이때 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2}, \frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

이고, 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times0-2\times3}{1-2}, \frac{1\times3-2\times0}{1-2}\right)$, 즉 $(6, -3)$

이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(4, -1)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{(4-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(4, -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이다.

다음은 *와 같다.

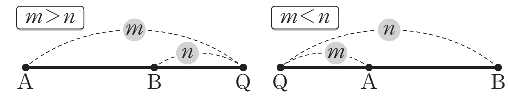
BLACKLABEL 특강 참고 **

선분의 외분점

선분 AB의 연장선 위에 있는 점 Q에 대하여

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n\ (m>0, n>0, m\neq n)$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 하며, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라 한다.



좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\ (m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

BLACKLABEL 특강 참고 **

아폴로니우스의 원

좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n\ (m>0, n>0, m\neq n)$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

10 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+ay=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x+ay)=0$

$\therefore 4x-ay-4=0$

$ay=4x-4$에서 $a=0$이면 $4x-4=0$에서 $x=1$이므로 직선 $y=x+3$과 수직이 아니다.

즉, $a\neq0$이므로

$y=\frac{4}{a}x-\frac{4}{a}$

이 직선이 직선 $y=x+3$과 수직이므로

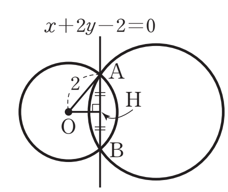
$\frac{4}{a}=-1 \quad \therefore a=-4$ 답 ②

11 두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-8x-16y+12=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-8x-16y+12)=0$

$\therefore x+2y-2=0$ ……㉠

원 $x^2+y^2=4$의 중심 O(0, 0)에서 직선 ㉠에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

이때 두 원의 두 교점을 각각 A, B라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$이므로 직각삼각형 AOH에서 피타고라스 정리에 의하여 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이

$\overline{AH}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 두 교점 사이의 거리는 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$이다. 답 ④

12 두 원 $x^2+y^2+4x-8y+9=0$, $x^2+y^2-6x+2y-6=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-8y+9+k(x^2+y^2-6x+2y-6)=0$

(단, $k\neq-1$) ……㉠

원 ㉠이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$1+0-4-0+9+k(1+0+6+0-6)=0$

$6+k=0 \qquad \therefore\ k=-6$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2-8x+4y-9=0$

$\therefore\ (x-4)^2+(y+2)^2=29$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{29}$이므로 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{29})^2=29\pi$ 답 ④

13 중심의 좌표가 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=4$

이 원과 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2보다 작아야 하므로

$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}<2$

$|2m+1|<2\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4m^2+4m+1<4m^2+4$

$4m<3 \qquad \therefore\ m<\frac{3}{4}$ 답 $m<\frac{3}{4}$

• 다른 풀이 •

중심의 좌표가 $(2,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=4$

이 원과 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 x에 대한 이차방정식 $(x-2)^2+(mx+1)^2=4$, 즉 $(1+m^2)x^2+2(m-2)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-2)^2-(1+m^2)>0$

$-4m+3>0 \qquad \therefore\ m<\frac{3}{4}$

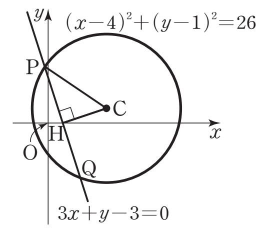
14 $x^2+y^2+(3k-8)x+(k-2)y-3k-9=0$을 k에 대하여 정리하면

$x^2+y^2-8x-2y-9+k(3x+y-3)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x^2+y^2-8x-2y-9=0$, $3x+y-3=0$이어야 한다.

즉, 주어진 원이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2-8x-2y-9=0$, 즉 $(x-4)^2+(y-1)^2=26$과 직선 $3x+y-3=0$의 교점이다.



오른쪽 그림과 같이 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=26$의 중심을 C라 하고 점 C$(4,\ 1)$에서 직선 $3x+y-3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\frac{|3\times4+1\times1-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

이때 원 $(x-4)^2+(y-1)^2=26$의 반지름의 길이가 $\sqrt{26}$이므로 $\overline{CP}=\sqrt{26}$이다.

직각삼각형 CPH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{26})^2-(\sqrt{10})^2}=4$

$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\times4=8$ 답 8

15 원 $(x-2)^2+y^2=r^2$과 직선 $2x+y-1=0$이 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $2x+y-1=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이인 r과 같다.

$\therefore\ r=\frac{|2\times2+1\times0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$

원 $(x-2)^2+y^2=r^2$과 직선 $y=-2x+1$이 한 점에서 만나려면 x에 대한 이차방정식 $(x-2)^2+(-2x+1)^2=r^2$, 즉 $5x^2-8x+5-r^2=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-5(5-r^2)=0$

$5r^2-9=0$, $r^2=\frac{9}{5}$

$\therefore\ r=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ (\because\ r>0)$

16 원 $x^2+(y-k)^2=8$과 직선 $y=x+2$가 만나지 않으려면 원의 중심 $(0,\ k)$와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$보다 커야 하므로

$\frac{|1\times0-1\times k+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>2\sqrt{2}$, $\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$

$|k-2|>4$

$k-2<-4$ 또는 $k-2>4$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

답 ①

• 다른 풀이 •

원 $x^2+(y-k)^2=8$과 직선 $y=x+2$가 만나지 않으려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(x+2-k)^2=8$, 즉 $2x^2+2(2-k)x+k^2-4k-4=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-k)^2-2(k^2-4k-4)<0$

$k^2-4k+4-2k^2+8k+8<0$

$k^2-4k-12>0$

$(k+2)(k-6)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

17

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=4$

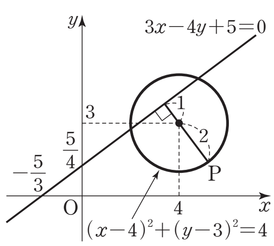
즉, 점 P는 중심의 좌표가 $(4,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

이때 원의 중심 $(4,\ 3)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\times4-4\times3+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$

이므로 오른쪽 그림과 같이 원 위의 점 P와 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리의 최댓값은

$1+2=3$



답 ③

18

두 점 $(-1,\ 7)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-7}{3-(-1)}=-1$

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore y=-x\pm4$

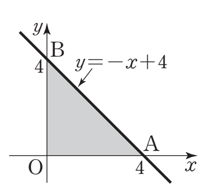
이때 직선이 제1사분면에서 원에 접하므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-x+4$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

답 8



19

점 $(a,\ 1)$이 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있으므로

$a^2+1=9$

$a^2=8 \quad \therefore a=2\sqrt{2}\ (\because a>0)$

이때 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $(2\sqrt{2},\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $2\sqrt{2}x+y=9$이므로 이 식에 $y=0$을 대입하면

$2\sqrt{2}x=9$

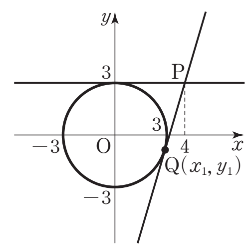
$\therefore x=\frac{9}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$이다.

답 ⑤

20

접점을 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 Q는 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있으므로



$x_1^2+y_1^2=9 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 점 Q에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9 \quad \cdots\cdots ㉡$

이때 접선 ㉡이 점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$을 지나므로

$4x_1+3y_1=9 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢에서 $y_1=-\frac{4}{3}x_1+3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x_1^2+\left(-\frac{4}{3}x_1+3\right)^2=9$

$25x_1^2-72x_1=0,\ x_1(25x_1-72)=0$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{72}{25}$

이것을 각각 ㉢에 대입하면

$x_1=0$일 때 $y_1=3$, $x_1=\frac{72}{25}$일 때 $y_1=-\frac{21}{25}$

이것을 각각 ㉡에 대입하면 접선의 방정식은

$y=3$ 또는 $24x-7y=75$

따라서 기울기가 양수인 접선의 기울기는 $\frac{24}{7}$이므로

$p=7,\ q=24$

$\therefore p+q=31$

답 31

• 다른 풀이 •

기울기가 m이고 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식은

$y=mx\pm3\sqrt{m^2+1}$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$을 지나므로

$3=4m\pm3\sqrt{m^2+1}$

$3-4m=\pm3\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16m^2-24m+9=9m^2+9$

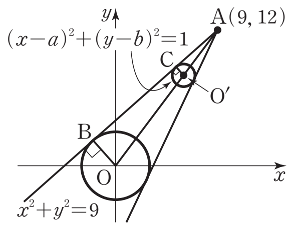
$7m^2-24m=0,\ m(7m-24)=0$

$\therefore m=\frac{24}{7}\ (\because m>0)$

따라서 $p=7$, $q=24$이므로

$p+q=31$

21 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$의 중심을 O′이라 하자.



$\overline{OA}=\sqrt{9^2+12^2}$
$=\sqrt{225}=15$

이므로 직각삼각형 OAB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{15^2-3^2}$
$=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

또한, 두 삼각형 OAB, O′AC에서

$\angle OBA=\angle O'CA=90^\circ$, $\angle OAB=\angle O'AC$이므로

$\triangle OAB \backsim \triangle O'AC$ (AA 닮음)

즉, $\overline{OB} : \overline{O'C}=\overline{AB} : \overline{AC}$이므로

$3 : 1=6\sqrt{6} : \overline{AC}$

$3\overline{AC}=6\sqrt{6}$ $\quad\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}-\overline{AC}=6\sqrt{6}-2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$

답 $4\sqrt{6}$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp.24~30

01 ①	02 27	03 ③	04 76	05 ①
06 29	07 $\frac{5}{2}\pi$	08 ⑤	09 ④	10 ⑤
11 ②	12 15	13 $\frac{32}{5}$	14 ②	15 ②
16 3	17 3	18 ①	19 26	20 ④
21 ③	22 ③	23 ④	24 ③	25 17
26 14	27 31	28 120	29 ④	30 13
31 ⑤	32 ②	33 7	34 $3<m<7$	35 $\frac{27}{5}$
36 ⑤	37 ④	38 ③	39 $3x-2y-4=0$	
40 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$	41 45	42 25		

01 원 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ ……㉠

이때 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$이 원 ㉠의 넓이를 4등분하므로 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$은 원의 중심 (2, 3)을 지나야 한다. 즉,

$3=2p$, $3=2q+r$ ……㉡

또한, 두 직선 $y=px$, $y=qx+r$이 서로 수직이어야 하므로

$pq=-1$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$p=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{2}{3}$, $r=\frac{13}{3}$

$\therefore p+q+r=\frac{31}{6}$

답 ①

02 점 (a, b)가 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로

$b=a^2$

중심의 좌표가 (a, b), 즉 (a, a^2)인 원이 x축에 접하면 반지름의 길이가 a^2이므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a^2)^2=a^4$ ……㉠

이 원과 직선 $x=6$이 두 점 A, B에서 만나므로 ㉠에 $x=6$을 대입하면

$a^2-12a+36+y^2-2a^2y+a^4=a^4$

$\therefore y^2-2a^2y+a^2-12a+36=0$ ……㉡

즉, $A(6, \alpha)$, $B(6, \beta)$라 하면 α, β는 y에 대한 이차방정식 ㉡의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a^2$, $\alpha\beta=a^2-12a+36$

이때 $\overline{AB}=12\sqrt{2}$이므로 $|\alpha-\beta|=12\sqrt{2}$

$(\alpha-\beta)^2=(12\sqrt{2})^2$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=288$

$(2a^2)^2-4(a^2-12a+36)=288$

$4a^4-4a^2+48a-432=0$

$a^4-a^2+12a-108=0$

3	1	0	−1	12	−108
		3	9	24	108
	1	3	8	36	0

$\therefore (a-3)(a^3+3a^2+8a+36)=0$

자연수 a에 대하여 $a^3+3a^2+8a+36>0$이므로

$a=3$, $b=3^2=9$

$\therefore ab=27$

답 27

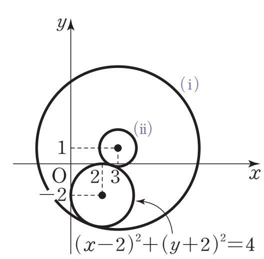
03 중심이 제4사분면에 있고 x축과 y축에 동시에 접하며 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+2)^2=4$ ……㉠

$x^2+y^2-6x-2y+10=k$ $(k>0)$라 하면

$(x-3)^2+(y-1)^2=k$ ……㉡

즉, ㉡은 중심의 좌표가 (3, 1)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원이므로



원 ㉠이 원 ㉡에 내접할 때 $\sqrt{k}$의 값이 최대이고, (i)

두 원 ㉠, ㉡이 외접할 때 $\sqrt{k}$의 값이 최소이다. (ii)

원 ㉠의 중심 $(2, -2)$와 원 ㉡의 중심 $(3, 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(3-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{k}$의 최댓값은 $\sqrt{k}-2=\sqrt{10}$에서 $\sqrt{10}+2$,

최솟값은 $\sqrt{k}+2=\sqrt{10}$에서 $\sqrt{10}-2$

따라서 $x^2+y^2-6x-2y+10$, 즉 k의 최댓값은

$M=(\sqrt{10}+2)^2=14+4\sqrt{10}$이고, k의 최솟값은

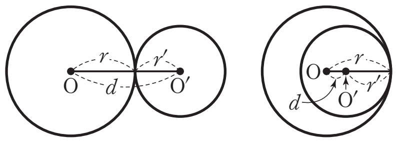
$m=(\sqrt{10}-2)^2=14-4\sqrt{10}$이다.

$\therefore M+m=28$

답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 r, r' $(r>r')$이라 하고, 두 원의 중심 사이의 거리를 d라 할 때,
(ⅰ) 두 원이 외접하려면 ⇨ $d=r+r'$
(ⅱ) 원 O'이 원 O에 내접하려면 ⇨ $d=r-r'$



04

선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

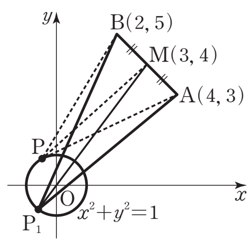
$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(3, 4)$이므로

$\overline{BM}=\sqrt{(3-2)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$

삼각형 PAB에서 중선 정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{BM}^2)=2(\overline{PM}^2+2)$ ……㉠

이때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값은 $\overline{PM}$이 최대일 때 최댓값을 갖는다.
즉, 오른쪽 그림과 같이 선분 PM이 원의 중심을 지나야 하므로 점 P가 점 P_1의 위치에 있을 때이다.



$\overline{PM}\le\overline{P_1M}$
$=\overline{P_1O}+\overline{OM}$
$=1+\sqrt{3^2+4^2}=6$

즉, $\overline{PM}$의 최댓값은 6이므로 ㉠에서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 최댓값은

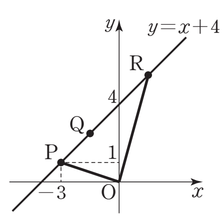
$2\times(6^2+2)=76$ **답** 76

05

두 점 P, R의 좌표가 각각 $(-3, 1)$, $(b, b+4)$이므로

$\overline{PR}=\sqrt{(b+3)^2+(b+3)^2}$
$=\sqrt{2(b+3)^2}$

원점 O와 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리는



$\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

이때 삼각형 OPR의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2(b+3)^2}\times2\sqrt{2}=24$, $2|b+3|=24$

$|b+3|=12$ $\quad\therefore b=9$ $(\because b>-3)$

즉, 점 R의 좌표는 $(9, 13)$

$\overline{OR}=\sqrt{9^2+13^2}=5\sqrt{10}$이므로

$\overline{OR}=5\overline{OQ}$에서 $\overline{OQ}=\sqrt{10}$

$\overline{OQ}=\sqrt{a^2+(a+4)^2}=\sqrt{2a^2+8a+16}$이므로

$\sqrt{2a^2+8a+16}=\sqrt{10}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2a^2+8a+16=10$, $a^2+4a+3=0$

$(a+3)(a+1)=0$ $\quad\therefore a=-1$ $(\because a>-3)$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-1, 3)$

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(-3)-(-1)\}^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

이므로 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이는

$S_1=\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$

$\overline{QR}=\sqrt{(-1-9)^2+(3-13)^2}=10\sqrt{2}$

이므로 선분 QR을 지름으로 하는 원의 넓이는

$S_2=\pi\times(5\sqrt{2})^2=50\pi$

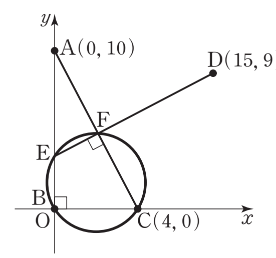
$\therefore S_1+S_2=2\pi+50\pi=52\pi$ **답** ①

06

A(0, 10), C(4, 0)이므로 직선 AC의 방정식은

$y=\frac{0-10}{4-0}(x-4)$ $\quad\therefore y=-\frac{5}{2}x+10$

네 점 B, C, E, F가 한 원 위에 있으므로 □BCFE는 원에 내접하는 사각형이고, 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.



$\therefore \angle EFC=90^\circ$

즉, 두 직선 AC, DE는 서로 수직이다.*

직선 AC의 기울기가 $-\frac{5}{2}$이므로 직선 DE는 기울기가

$\frac{2}{5}$이고 D(15, 9)를 지나므로 직선 DE의 방정식은

$y-9=\frac{2}{5}(x-15)$ $\quad\therefore y=\frac{2}{5}x+3$

$\therefore$ E(0, 3)

한편, 네 점 B, C, E, F를 지나는 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이라 하면

점 B(0, 0)이 원 위에 있으므로 $c=0$

점 C(4, 0)이 원 위에 있으므로

$4^2+4a=0$ $\quad\therefore a=-4$

점 E(0, 3)이 원 위에 있으므로

$3^2+3b=0$ $\quad\therefore b=-3$

즉, 네 점 B, C, E, F를 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-3y=0$, 즉 $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

이므로 구하는 원의 넓이는 $\frac{25}{4}\pi$

따라서 $p=4$, $q=25$이므로

$p+q=29$ **답** 29

• 다른 풀이 •

*에서 $\angle EFC=90^\circ$이므로 선분 EC는 원의 지름이다.

이때 C(4, 0), E(0, 3)이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{EC}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2}=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{25}{4}\pi$이므로 $p=4$, $q=25$

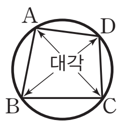
$\therefore p+q=29$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

⇨ $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$



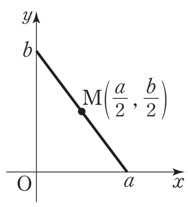
07

오른쪽 그림과 같이 바닥을 x축, 벽을 y축이라 하고, 길이가 10인 막대의 아래 끝과 위 끝의 좌표를 각각

$(a, 0)$, $(0, b)$

막대의 길이가 10

$(0\le a\le 10,\ 0\le b\le 10)$



라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=10^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 막대의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$이므로

$\frac{a}{2}=x$, $\frac{b}{2}=y$로 놓으면

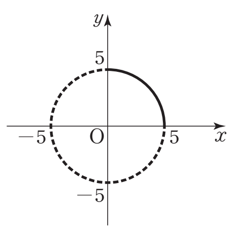
$a=2x$, $b=2y$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x)^2+(2y)^2=10^2$

$\therefore x^2+y^2=25\ (0\le x\le 5,\ 0\le y\le 5)$

따라서 중점 M이 그리는 도형은 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고, 반지름의 길이가 5인 원의 일부이므로 중점 M이 그리는 도형의 길이는



$\frac{1}{4}\times 2\pi\times 5=\frac{5}{2}\pi$ 답 $\frac{5}{2}\pi$

08

$x^2+y^2-4x+6y+9=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=4$

이 원 위의 점 Q의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$(x_1-2)^2+(y_1+3)^2=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 P는 선분 AQ를 $2:1$로 내분하므로

$\mathrm{P}\left(\frac{2\times x_1+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times y_1+1\times 1}{2+1}\right)$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{2x_1-2}{3}, \frac{2y_1+1}{3}\right)$

이때 $\frac{2x_1-2}{3}=x$, $\frac{2y_1+1}{3}=y$로 놓으면

$x_1=\frac{3x+2}{2}$, $y_1=\frac{3y-1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{3x+2}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3y-1}{2}+3\right)^2=4$

$\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{3y+5}{2}\right)^2=4$

$\therefore \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$인 원이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 이 원의 둘레의 길이이므로

$2\pi\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\pi$ 답 ⑤

09

$\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2)$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=4$에서

$x^2+y^2+x^2+(y-2)^2=4$

$2x^2+2y^2-4y=0$, $x^2+y^2-2y=0$

$\therefore x^2+(y-1)^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉠*

즉, 점 P는 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위에 있으므로 y의 값의 범위는 $0\le y\le 2$이다.

$\therefore y-x^2=y-\{1-(y-1)^2\}$ ($\because$ ㉠)

$=y^2-y$

$=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ (0\le y\le 2)$

$y-x^2$은 $y=2$일 때 최댓값 2, $y=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$을 갖는다.

따라서 $y-x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$ 답 ④

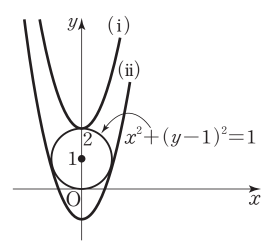
• 다른 풀이 •

*에서 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위에 있다.

이때 $y-x^2=k$ (k는 상수)라 하면

$y=x^2+k$

이 이차함수의 그래프가 원과 만나려면 오른쪽 그림과 같이 포물선 (i) 또는 포물선 (ii)이거나 두 포물선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 이차함수 $y=x^2+k$의 그래프가 원과 한 점에서 만날 때,

이차함수 $y=x^2+k$의 그래프가 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위의 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=0+k$ $\therefore k=2$

(ii) 이차함수 $y=x^2+k$의 그래프가 원과 두 점에서 접하면서 만날 때,

이차함수 $y=x^2+k$의 그래프가 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 접해야 하므로 이차방정식 $y-k+(y-1)^2=1$, 즉 $y^2-y-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+4k=0$ $\therefore k=-\frac{1}{4}$

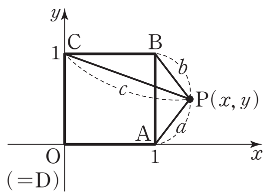
(ⅰ), (ⅱ)에서 이차함수 $y=x^2+k$의 그래프와 원 $x^2+(y-1)^2=1$이 만나기 위한 k의 값의 범위는

$-\frac{1}{4}\le k\le 2 \qquad \therefore -\frac{1}{4}\le y-x^2\le 2$

따라서 $y-x^2$의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이므로 그 합은

$2+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$

10 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 점 D를 원점으로 하고, 두 직선 DA, DC가 각각 x축, y축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면



A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$a=\overline{PA}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,

$b=\overline{PB}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

$c=\overline{PC}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

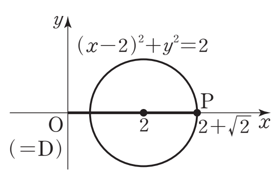
이때 $a^2+b^2=c^2$이므로

$(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=x^2+(y-1)^2$

$x^2+y^2-4x+2=0$

$\therefore (x-2)^2+y^2=2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 점 P는 중심의 좌표가 (2, 0)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같이 점 P와 점 D 사이의 거리의 최댓값은



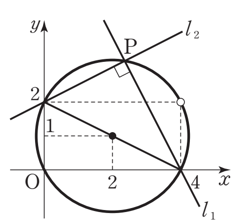
$2+\sqrt{2}$ **답** ⑤

11 l_1: $mx-y-4m=0$, 즉 $m(x-4)-y=0$에서 직선 l_1은 m의 값에 관계없이 항상 점 (4, 0)을 지난다.

l_2: $x+my-2m=0$, 즉 $x+m(y-2)=0$에서 직선 l_2는 m의 값에 관계없이 항상 점 (0, 2)를 지난다.

또한, 두 직선 l_1: $mx-y-4m=0$, l_2: $x+my-2m=0$에서 $m\times1+(-1)\times m=0$이므로 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

따라서 두 직선 l_1, l_2의 교점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 두 점 (4, 0), (0, 2)를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다. 중심의 좌표가



$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 (2, 1)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

이때 직선 l_1은 $x=4$, 직선 l_2는 $y=2$가 될 수 없으므로 점 (4, 2)는 제외된다.

ㄱ. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 성립하므로 점 P가 나타내는 도형은 원점을 지난다. (참)

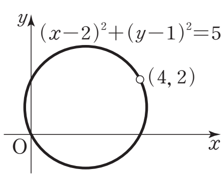
ㄴ. 점 P가 나타내는 도형은 두 직선 $x=4$, $y=2$의 교점 (4, 2)를 지나지 않는다. (참)

ㄷ. 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$는 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $2\sqrt{5}\pi$이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

오른쪽 그림과 같이 점 P의 자취는 한 점 (4, 2)를 제외한 원의 일부이다. 이때 곡선 위에는 무한히 많은 점이 포함되어 있으므로 원에서 한 점이 빠졌다고 해서 원의 둘레의 길이가 줄어들지 않는다.



12 원 C_1이 x축에 접하므로 중심의 좌표를 $(a, 1)$ $(1\le a\le 3)$, 원 C_2가 y축에 접하므로 중심의 좌표를 $(1, b)$ $(1\le b\le 3)$라 하자.

이때 두 원 C_1, C_2가 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다. 즉,

$\sqrt{(a-1)^2+(1-b)^2}=2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(a-1)^2+(1-b)^2=4 \qquad \cdots\cdots㉠$

한편, 접점 P는 두 원 C_1, C_2의 중심을 이은 선분의 중점이므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a+1}{2}$, $y=\frac{b+1}{2}$

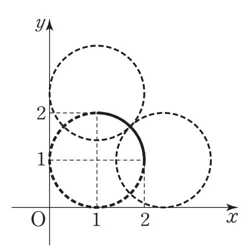
$\therefore a=2x-1,\ b=2y-1 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x-2)^2+(2-2y)^2=4$

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=1\ (1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2)$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심의 좌표가 (1, 1)이고, 반지름의 길이가 1인 원의 일부이므로 구하는 도형의 길이는



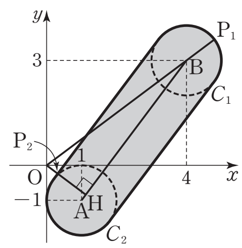
$\frac{1}{4}\times2\pi\times1=\frac{\pi}{2}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore 30k=30\times\frac{1}{2}=15$ **답** 15

13 원의 중심 P가 나타내는 영역은 점 B(4, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 둘레와 그 내부, 점 A(1, -1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2의 둘레와 그 내부, 선분 AB와 평행하고 거리가 1인 두 선분으로 둘러싸인 영역의 경계와 그 내부이다.

직선 OB와 원 C_1의 두 교점 중에서 원점에서 멀리 떨어져 있는 점을 P_1이라 하면 점 P가 점 P_1의 위치에 있을 때, 선분 OP의 길이는 최대가 된다.



$\therefore M=\overline{\mathrm{OB}}+1$

$=\sqrt{4^2+3^2}+1=6$

원점 O에서 원 C_2에 접하고 직선 AB와 평행한 접선 중에서 원점에 가까이 있는 접선에 내린 수선의 발을 P_2라 하면 점 P가 점 P_2의 위치에 있을 때, 선분 OP의 길이는 최소가 된다.

이때 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{3-(-1)}{4-1}(x-1)$

$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{7}{3}\qquad \therefore 4x-3y-7=0$

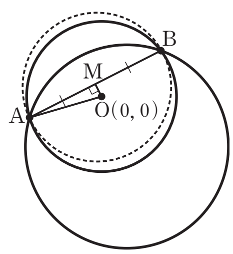
원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점 O와 직선 AB 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{7}{5}$

$\therefore m=\overline{\mathrm{OH}}-1=\dfrac{7}{5}-1=\dfrac{2}{5}$

$\therefore M+m=6+\dfrac{2}{5}=\dfrac{32}{5}$ 답 $\dfrac{32}{5}$

14 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2-2x+4y-11=0$의 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 가장 작은 원은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이다.



직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-2x+4y-11)=0$에서

$2x-4y+2=0$

$\therefore x-2y+1=0$

원 $x^2+y^2-9=0$, 즉 $x^2+y^2=9$의 중심 O(0, 0)과 직선 $x-2y+1=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ……㉠

선분 AB의 중점을 M이라 하면 ㉠에서

$\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=3$

이때 직각삼각형 AOM에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}$

$=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{44}{5}}$

따라서 두 교점 A, B를 지나는 원의 넓이는 반지름이 $\overline{\mathrm{AM}}$일 때 최소이므로

$S=\pi\overline{\mathrm{AM}}^2=\pi\times\left(\sqrt{\dfrac{44}{5}}\right)^2=\dfrac{44}{5}\pi$

$\therefore 5S=44\pi$ 답 ②

15 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에서

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$ ……㉠

원 $(x+k)^2+y^2=9$가 원 ㉠의 둘레를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉠의 중심 (3, 2)를 지나야 한다.

이때 $(x+k)^2+y^2=9$에서 $x^2+y^2+2kx+k^2-9=0$이므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2kx+k^2-9-(x^2+y^2-6x-4y+9)=0$

$\therefore (2k+6)x+4y+k^2-18=0$

직선 $(2k+6)x+4y+k^2-18=0$이 점 (3, 2)를 지나야 하므로

$6k+18+8+k^2-18=0$

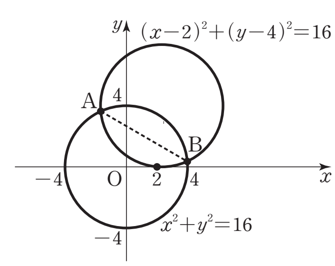
$\therefore k^2+6k+8=0$ ← $(k+4)(k+2)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=-2$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -6이다. 답 ②

16 호 AB를 원의 일부로 포함하는 원은 원 $x^2+y^2=16$과 합동이고 점 (2, 0)에서 x축에 접하므로 중심의 좌표가 (2, 4)이고 반지름의 길이가 4인 원이다.

즉, 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-4)^2=16$*



이때 직선 AB는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 교점을 지나는 직선이므로

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x-8y+4)=0$

$4x+8y-20=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=3$ 답 3

단계	채점 기준	배점
(가)	호 AB를 일부로 포함하는 원의 방정식을 구한 경우	40%
(나)	직선 AB의 방정식을 구한 경우	40%
(다)	$a+b$의 값을 구한 경우	20%

• 다른 풀이 •

*에서 원 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 중심을 $C(2,\ 4)$라 하면 사각형 OACB는 마름모이고, 두 대각선 AB, OC는 서로를 수직이등분하므로 직선 AB는 선분 OC의 수직이등분선이다.

이때 직선 OC의 기울기는 $\frac{4-0}{2-0}=2$이므로 직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

또한, 선분 OC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$ $\quad\therefore (1,\ 2)$

즉, 직선 AB는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ 2)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore x+2y-5=0$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=3$

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

모든 원은 서로 닮음이므로 반지름의 길이만 같으면 서로 합동이다. 따라서 원을 접어서 생긴 부분은 주어진 원과 합동인 원의 일부이므로 주어진 원에서 점 $(0,\ -4)$를 점 $(2,\ 0)$으로 옮긴다고 생각하면 접힌 원의 방정식을 쉽게 찾을 수 있다.

17

원 $x^2+y^2+2y-1=0$과 직선 $2x-y-2=0$, 즉 $y=2x-2$의 교점의 x좌표는

$x^2+(2x-2)^2+2(2x-2)-1=0$에서

$5x^2-4x-1=0$

$(x-1)(5x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-\frac{1}{5}$

즉, 두 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$이므로 이 두 교점을 지나고 x축에 접하는 원의 중심은 직선 $x=1$ 위에 있다.

구하는 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 원의 중심의 좌표가 $(1,\ -r)$이므로 원의 방정식은

원의 중심은 제4사분면 위에 존재

$(x-1)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$를 지나므로

$\left(-\frac{1}{5}-1\right)^2+\left(-\frac{12}{5}+r\right)^2=r^2$

$\frac{36}{25}+\frac{144}{25}-\frac{24}{5}r+r^2=r^2$

$\frac{24}{5}r=\frac{36}{5}$ $\quad\therefore r=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 원의 지름의 길이는

$2r=2\times\frac{3}{2}=3$ **답** 3

• 다른 풀이 •

구하는 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 원의 중심의 좌표가 $(1,\ -r)$이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+r)^2=r^2$이고, 원 $x^2+y^2+2y-1=0$과의 교점을 지나는 직선의 방정식이 $2x-y-2=0$이어야 한다.

원의 방정식 $(x-1)^2+(y+r)^2=r^2$에서

$x^2+y^2-2x+2ry+1=0$이므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+2ry+1-(x^2+y^2+2y-1)=0$

$\therefore 2x-2(r-1)y-2=0$

이것이 $2x-y-2=0$과 같아야 하므로

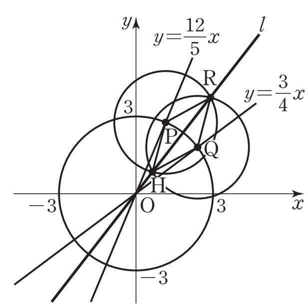
$2(r-1)=1$ $\quad\therefore r=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 원의 지름의 길이는

$2r=2\times\frac{3}{2}=3$

18 해결단계

❶ 단계	삼각형의 합동조건을 이용하여 직선 l이 두 직선 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$가 이루는 각의 이등분선임을 이해한다.
❷ 단계	직선 l 위의 점에서 두 직선 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$에 이르는 거리가 서로 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.



위의 그림과 같이 점 P와 점 Q를 중심으로 하는 두 원의 두 교점을 R, H라 하자.

$\overline{PH}=\overline{PR}=\overline{QH}=\overline{QR}=2$, $\overline{HR}$은 공통이므로

$\triangle PHR\equiv\triangle QHR$ (SSS 합동)이고, □PHQR은 마름모이므로 선분 PQ는 선분 RH를 수직이등분한다.

이때 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{OP}=\overline{OQ}=3$, $\overline{PM}=\overline{QM}$, $\overline{OM}$은 공통이므로

$\triangle OPM\equiv\triangle OQM$ (SSS 합동)

따라서 두 원의 교점 R, H를 지나는 직선을 l이라 하면 직선 l은 두 직선 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$가 이루는 각의 이등분선이므로 직선 l 위의 점 $(X,\ Y)$와 두 직선 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$, 즉 $12x-5y=0$, $3x-4y=0$ 사이의 거리는 서로 같다. 즉,

$$\frac{|12X-5Y|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{|3X-4Y|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$5(12X-5Y)=\pm13(3X-4Y)$

$\therefore\ 7X+9Y=0$ 또는 $9X-7Y=0$

그런데 구하는 직선 l의 기울기가 양수이므로 직선 l의 방정식은 $9x-7y=0$이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

두 점 P, Q가 각각 $y=\frac{12}{5}x$, $y=\frac{3}{4}x$ 위에 있으므로

P$(5a,\ 12a)$, Q$(4b,\ 3b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하자.

두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2=3^2$ 위에 있으므로

$(5a)^2+(12a)^2=3^2$에서

$(13a)^2=3^2$, $a^2=\left(\frac{3}{13}\right)^2$

$\therefore\ a=\frac{3}{13}$ $(\because\ a>0)$

$(4b)^2+(3b)^2=3^2$에서

$(5b)^2=3^2$, $b^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\therefore\ b=\frac{3}{5}$ $(\because\ b>0)$

한편, 두 점 P, Q를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x-5a)^2+(y-12a)^2=2^2$

$(x-4b)^2+(y-3b)^2=2^2$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-10ax-24ay+169a^2-4$$
$$-(x^2+y^2-8bx-6by+25b^2-4)=0$$

$(8b-10a)x+(6b-24a)y+169a^2-25b^2=0$

$a=\frac{3}{13}$, $b=\frac{3}{5}$을 위의 식에 대입하면

$\left(\frac{24}{5}-\frac{30}{13}\right)x+\left(\frac{18}{5}-\frac{72}{13}\right)y=0$, $162x-126y=0$

$\therefore\ 9x-7y=0$

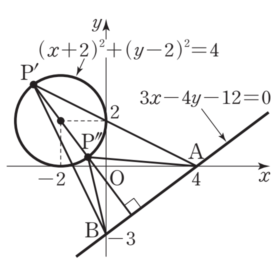
19

두 점 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$ $\quad\therefore\ 3x-4y-12=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$의 중심 $(-2,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-8-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{26}{5}$$



오른쪽 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 점 P가 점 P′의 위치에 있을 때 최댓값 $\frac{26}{5}+2=\frac{36}{5}$, 점 P″의 위치에 있을 때 최솟값 $\frac{26}{5}-2=\frac{16}{5}$을 갖는다.

이때 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값 M과 최솟값 m은 각각

$M=\frac{1}{2}\times5\times\frac{36}{5}=18$, $m=\frac{1}{2}\times5\times\frac{16}{5}=8$

$\therefore\ M+m=26$ 답 26

20

원 C 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{a+(-1)+3}{3}$, $y=\frac{b+1+(-2)}{3}$

$\therefore\ a=3x-2$, $b=3y+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 P는 원 C 위에 있으므로

$(a-2)^2+(b-1)^2=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$

즉, 삼각형 PAB의 무게중심이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 원이다.

이때 직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{-2-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$, 즉 $3x+4y-1=0$

원 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9}$의 중심 $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{\left|3\times\frac{4}{3}+4\times0-1\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$$

따라서 삼각형 PAB의 무게중심과 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{14}{15}$ 답 ④

21

사각형 PCBA의 넓이는 두 삼각형 ABC, ACP의 넓이의 합과 같다.

$\overline{\text{AC}}=\sqrt{(-2-4)\}^2+(2\sqrt{3}-0)^2}=4\sqrt{3}$

이고 직선 AC의 방정식은

$y-0=\frac{2\sqrt{3}-0}{-2-4}(x-4)$, 즉 $x+\sqrt{3}y-4=0$

점 B와 직선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|1\times0+\sqrt{3}\times(-4)-4|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{4+4\sqrt{3}}{2}=2+2\sqrt{3}$$

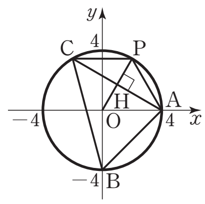
이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times(2+2\sqrt{3})=12+4\sqrt{3}$

한편, 사각형 PCBA의 넓이가 최대가 되려면 삼각형 ACP의 넓이가 최대이어야 한다.

즉, 점 P와 직선 AC 사이의 거리가 최대이어야 하므로 점 P를 지나는 원의 접선이 직선 AC와 서로 평행이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 OP와 직선 AC의 교점을 H라 하면



$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}}$

원점 O와 직선 AC 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|1\times0+\sqrt{3}\times0-4|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}}=4-2=2$

즉, 삼각형 ACP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$

따라서 사각형 PCBA의 넓이의 최댓값은

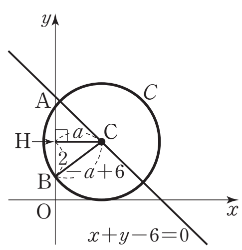
$12+4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=12+8\sqrt{3}$

답 ③

22 원 C의 중심이 직선 $x+y-6=0$ 위에 있고 제1사분면 위의 점이므로 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ -a+6)$ $(0<a<6)$이라 하자.

이때 반지름의 길이를 r이라 하면 원 C가 x축에 접하므로 $r=-a+6$

오른쪽 그림과 같이 원 C가 y축과 만나는 두 점을 A, B라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 원 C의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=2$

이때 $\overline{\mathrm{CB}}=r=-a+6$이고, $\triangle\mathrm{BCH}$가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{BH}}^2+\overline{\mathrm{HC}}^2$에서 $(-a+6)^2=2^2+a^2$

$-12a=-32\qquad\therefore\ a=\frac{8}{3}$

$\therefore\ r=-a+6=-\frac{8}{3}+6=\frac{10}{3}$

답 ③

• 다른 풀이 •

제1사분면에 있는 원 C의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 원 C는 x축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ ……㉠

원의 중심 $(a,\ b)$는 직선 $x+y-6=0$ 위에 있으므로

$a+b-6=0\qquad\therefore\ a=6-b$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-6+b)^2+(y-b)^2=b^2$ ……㉢

이때 y축에 의하여 잘린 원 C의 현은 $x=0$일 때이므로 $x=0$을 ㉢에 대입하면

$36-12b+b^2+y^2-2by+b^2=b^2$

$\therefore\ y^2-2by+b^2-12b+36=0$ ……㉣

y에 대한 이차방정식 ㉣의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 잘린 현의 길이가 4이므로 $|\alpha-\beta|=4$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2b$, $\alpha\beta=b^2-12b+36$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$16=4b^2-4b^2+48b-144$

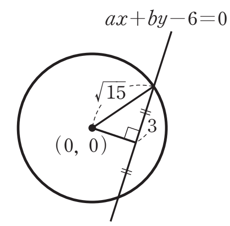
$48b=160\qquad\therefore\ b=\frac{10}{3}$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 $\frac{10}{3}$이다.

23 원 $x^2+y^2=15$와 직선 $ax+by-6=0$의 두 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원은 원과 직선의 교점을 이은 선분을 지름으로 하는 원이다.

이때 넓이가 최소인 원의 넓이는 $9\pi=3^2\times\pi$이므로 이 원의 지름의 길이는 6이고, 이것은 원 $x^2+y^2=15$의 현의 길이이다.

따라서 원 $x^2+y^2=15$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $ax+by-6=0$ 사이의 거리는



$\frac{|-6|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-3^2}$에서

$6=\sqrt{6(a^2+b^2)}$

위의 식의 양변을 제곱하면

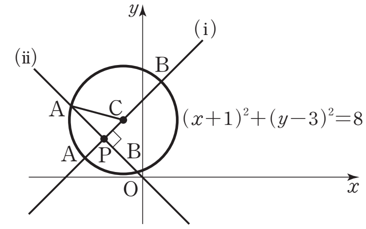
$6(a^2+b^2)=36$

$\therefore\ a^2+b^2=6$

답 ④

24 $y=kx+2k+2$에서 $k(x+2)+2-y=0$이므로 직선 $y=kx+2k+2$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 2)$를 지난다.

이때 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=8$의 중심을 $\mathrm{C}(-1,\ 3)$이라 하고, 점 $\mathrm{P}(-2,\ 2)$라 하면 점 P는 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=8$의 내부에 존재하므로 다음 그림과 같이 선분 AB의 길이는 $\underbrace{\text{직선 } y=kx+2k+2\text{가 원의 중심 C를 지날 때}}_{\text{(i)}}$ 최대이고, $\underbrace{\text{직선 CP와 수직일 때}}_{\text{(ii)}}$ 최소이다.



(i) 직선 $y=kx+2k+2$가 원의 중심 C를 지날 때, 선분 AB는 원의 지름과 같으므로 $M=4\sqrt{2}$

(ii) 직선 $y=kx+2k+2$가 직선 CP와 수직일 때,
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(-1+2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 APC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

$\therefore m=2\overline{AP}=2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $M^2+m^2=32+24=56$ 답 ③

25 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$2\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $4\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$4\{(x-1)^2+y^2\}=(x-4)^2+y^2$

$3x^2+3y^2-12=0 \qquad \therefore x^2+y^2-4=0$ ……㉠

한편, 두 직선 PA, PB가 서로 수직이므로 △PAB는 ∠APB=90°인 직각삼각형이고, 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$

$3^2=(x-1)^2+(y-0)^2+(x-4)^2+(y-0)^2$

$2x^2+2y^2-10x+8=0$

$\therefore x^2+y^2-5x+4=0\ (y\neq0)$ ……㉡

이때 점 P는 두 원 ㉠, ㉡의 교점이다.

㉠−㉡을 하면

$5x-8=0 \qquad \therefore x=\frac{8}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=\pm\frac{6}{5}$

즉, 조건을 만족시키는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\frac{6}{5}-\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{12}{5}$

따라서 $p=5$, $q=12$이므로

$p+q=17$ 답 17

• 다른 풀이 •

조건 ㈏에서 두 직선 PA, PB가 서로 수직이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위에 있다.

이때 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{3}{2}$이므로 원의 방정식은

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

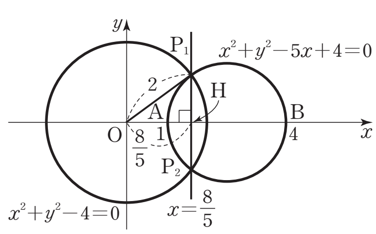
$\therefore x^2+y^2-5x+4=0$ ……㉢

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는 두 원 ㉠, ㉢의 공통현의 길이와 같다.

두 원의 공통현을 포함하는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-5x+4)=0$

$\therefore x=\frac{8}{5}$



위의 그림과 같이 직각삼각형 OP_1H에서 $\overline{OH}=\frac{8}{5}$, $\overline{OP_1}=2$이므로

$\overline{P_1H}=\sqrt{2^2-\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}$

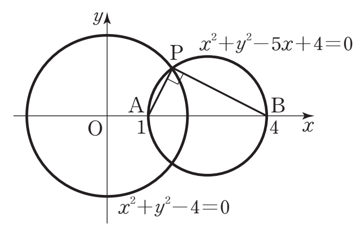
$\therefore \overline{P_1P_2}=2\overline{P_1H}=\frac{12}{5}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

세 점 A, P, B가 삼각형을 이루기 위해서는 세 점이 한 직선 위에 있지 않아야 한다.
이때 두 점 A(1, 0), B(4, 0)을 지나는 직선의 방정식이 $y=0$이고 점 $P(x, y)$가 이 직선 위에 있지 않아야 하므로 $y\neq0$이어야 한다.

BLACKLABEL 특강 참고

조건 ㈎에서 $2\overline{PA}=\overline{PB}$, 즉 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$이므로 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 각각 내분, 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 $x^2+y^2-4=0$ 위에 있다. 또한, 조건 ㈏에서 두 직선 PA, PB가 서로 수직이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 $x^2+y^2-5x+4=0$ 위에 있다.
따라서 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 두 점은 두 원의 교점이 된다.



26 ∠APB=∠AQB=90°이므로 두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

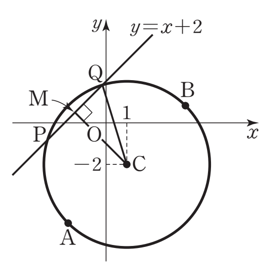
$A(1-\sqrt{7}, -5)$, $B(1+\sqrt{7}, 1)$에서

선분 AB의 중점의 좌표는 $(1, -2)$이고,

$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{7})^2+6^2}=\sqrt{64}=8$

이므로 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$



위의 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$의 중심을 C, 점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

점 $C(1, -2)$와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\overline{CM}=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

직각삼각형 CQM에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{QM}=\sqrt{\overline{QC}^2-\overline{CM}^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{2}}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{QM}=2\times\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}$

$\therefore l^2=\overline{PQ}^2=14$ **답** 14

27

원 C 위의 점 P의 좌표를 (p, q)라 하면

$p^2+q^2+5q=0$ ……㉠

$\overline{OP}=3$이므로

$\sqrt{p^2+q^2}=3 \qquad \therefore p^2+q^2=9$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$9+5q=0 \qquad \therefore q=-\frac{9}{5}$

이것을 ㉡에 대입하면

$p^2+\frac{81}{25}=9,\ p^2=\frac{144}{25}$

$\therefore p=\pm\frac{12}{5}$

이때 점 P는 제3사분면 위에 있으므로

$p=-\frac{12}{5}$

*따라서 점 P의 좌표는

$\left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$

$x^2+y^2+5y=0$에서 $x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$이므로 이 원 위의 점 $\mathrm{P}\left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$에서의 접선의 방정식은

$-\frac{12}{5}x+\left(-\frac{9}{5}+\frac{5}{2}\right)\left(y+\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}$ ←본문 20쪽 비법노트Ⓓ

$\therefore 24x-7y+45=0$

따라서 $a=24$, $b=-7$이므로

$a-b=24-(-7)=31$ **답** 31

• 다른 풀이 •

*에서 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$이고,

점 P가 접선 $ax+by+45=0$ 위에 있으므로

$-\frac{12}{5}a-\frac{9}{5}b+45=0$

$\therefore 4a+3b-75=0$ ……㉢

$x^2+y^2+5y=0$에서 $x^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$

이때 두 점 $\mathrm{P}\left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{7}{24}$이고, 이 직선이 접선 $ax+by+45=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{45}{b}$와 수직이므로

$-\frac{7}{24}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$

$\therefore a=-\frac{24}{7}b$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 풀면

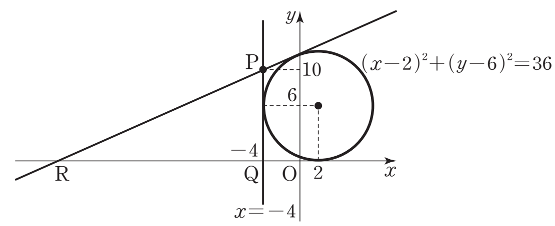
$a=24$, $b=-7$

$\therefore a-b=24-(-7)=31$

28

$x^2+y^2-4x-12y+4=0$에서 $(x-2)^2+(y-6)^2=36$이므로 이 원은 중심의 좌표가 $(2, 6)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

점 $\mathrm{P}(-4, 10)$에서 원 $(x-2)^2+(y-6)^2=36$에 그은 두 접선은 다음 그림과 같다.



직선 $x=-4$는 점 $\mathrm{P}(-4, 10)$을 지나고 주어진 원과 점 $(-4, 6)$에서 접한다.

또한, 점 $\mathrm{P}(-4, 10)$을 지나고 원과 접하는 직선 중 직선 $x=-4$가 아닌 직선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-10=m\{x-(-4)\} \qquad \therefore mx-y+4m+10=0$

이때 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|m\times2-1\times6+4m+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=6,\ \frac{|6m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=6$

$|6m+4|=6\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$36m^2+48m+16=36m^2+36$

$48m=20 \qquad \therefore m=\frac{5}{12}$

구하는 접선의 방정식은

$y-10=\frac{5}{12}\{x-(-4)\}$, 즉 $y=\frac{5}{12}x+\frac{35}{3}$

*두 접선 $x=-4$, $y=\frac{5}{12}x+\frac{35}{3}$가 x축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하면 두 접선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 삼각형 PQR의 넓이와 같다.

점 Q의 좌표는 $(-4, 0)$

점 R의 x좌표는

$0=\frac{5}{12}x+\frac{35}{3}$에서 $x=-28$

$\therefore \mathrm{R}(-28, 0)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{-4-(-28)\}\times10=120$ **답** 120

• 다른 풀이 •

$x^2+y^2-4x-12y+4=0$에서

$(x-2)^2+(y-6)^2=36$ ……㉠

점 $\mathrm{P}(-4, 10)$에서 원 ㉠에 그은 접선의 접점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$이라 하면

$(x_1-2)^2+(y_1-6)^2=36$ ······㉡

원 ㉠ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은 본문 20쪽 비법노트Ⓓ

$(x_1-2)(x-2)+(y_1-6)(y-6)=36$ ······㉢

이 접선이 점 P$(-4,\ 10)$을 지나므로

$-6(x_1-2)+4(y_1-6)=36$

$\therefore\ y_1=\frac{3}{2}x_1+12$ ······㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$x_1=-\frac{4}{13},\ y_1=\frac{150}{13}$ 또는 $x_1=-4,\ y_1=6$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{5}{12}x+\frac{35}{3}$ 또는 $x=-4$

다음은 *와 같다.

29

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times9+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times6}{2+1}\right)$, 즉 $(6,\ 2)$

점 P$(6,\ 2)$가 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$ 위에 있으므로

$6^2+2^2-2a\times6-2b\times2=0$

$\therefore\ 3a+b=10$ ······㉠

$x^2+y^2-2ax-2by=0$에서

*$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

이 원과 직선 AB가 점 P에서만 만나므로 직선 AB는 원 위의 점 P에서의 접선과 같다.

원의 중심을 C$(a,\ b)$라 하면 직선 CP는 직선 AB에 수직이고, 직선 AB의 기울기가 $\frac{0-6}{9-0}=-\frac{2}{3}$이므로 직선 CP의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 CP의 방정식은

$y-2=\frac{3}{2}(x-6)$ $\quad\therefore\ y=\frac{3}{2}x-7$

원의 중심 C$(a,\ b)$가 직선 CP 위에 있으므로

$b=\frac{3}{2}a-7$ $\quad\therefore\ 3a-2b=14$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{34}{9},\ b=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{34}{9}+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{22}{9}$ 답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 이 원과 직선 AB가 점 P에서만 만나므로 직선 AB는 원 위의 점 P에서의 접선과 같다.

직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{2}{3}x+6$

원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$(6-a)(x-a)+(2-b)(y-b)=a^2+b^2$ ← 본문 20쪽 비법노트Ⓓ

$\therefore\ y=\frac{a-6}{2-b}x+\frac{6a+2b}{2-b}$

이 직선이 직선 AB와 일치하므로

$\frac{a-6}{2-b}=-\frac{2}{3},\ \frac{6a+2b}{2-b}=6$

$3a-2b=14,\ 6a+8b=12$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{34}{9},\ b=-\frac{4}{3}$

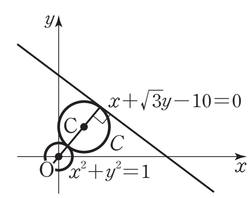
$\therefore\ a+b=\frac{34}{9}+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{22}{9}$

30

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+\sqrt{3}y-10=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=5$

원 $x^2+y^2=1$에 외접하면서 직선 $x+\sqrt{3}y-10=0$에 접하는 원 중 크기가 가장 작은 원을 C라 하면 원 C는 오른쪽 그림과 같으므로 반지름의 길이는



$\frac{1}{2}\times(5-1)=2$

또한, 원 C의 중심은 원점을 지나고 직선 $x+\sqrt{3}y-10=0$에 수직인 직선 위에 있다.

이때 직선 $x+\sqrt{3}y-10=0$, 즉

$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{10}{\sqrt{3}}$에 수직이면서 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 원 C의 중심을 C라 하면 C$(a,\ \sqrt{3}a)$ $(a>0)$라 할 수 있다.

두 원의 중심 O$(0,\ 0)$, C$(a,\ \sqrt{3}a)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합인 3과 같으므로

$\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2}=3$

$\sqrt{4a^2}=3,\ 2a=3$ $(\because\ a>0)$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

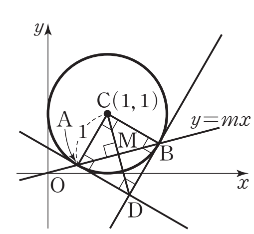
따라서 원 C의 방정식은 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=4$이므로 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ r^2=4$

$\therefore\ a^2+b^2+r^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+4=13$ 답 13

31

원의 중심을 C라 하고, 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선의 교점을 D라 하자.

원의 중심과 접점을 연결한 선분은 접선에 수직이고, 원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이



는 서로 같으므로 □ADBC는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{\text{CM}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

점 C(1, 1)과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 선분 CM의 길이와 같으므로

$\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2|m-1|=\sqrt{2(m^2+1)}$

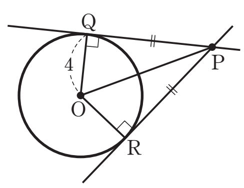
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2-8m+2=0$

$\therefore m^2-4m+1=0$ ← 판별식 D에 대하여 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근 존재

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 m의 값의 합은 4이다. **답** ⑤

32 사각형 ORPQ의 넓이는 두 삼각형 OQP, ORP의 넓이의 합과 같고 △OQP≡△ORP이므로 사각형 ORPQ의 넓이가 최소이려면 삼각형 OQP의 넓이가 최소이어야 한다.



이때 $\overline{\text{PQ}}\perp\overline{\text{OQ}}$이고 원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이는 4이므로 직각삼각형 OQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{OQ}}\times\overline{\text{PQ}}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\text{PQ}}$

$=2\overline{\text{PQ}}$

즉, 직각삼각형 OQP의 넓이가 최소이려면 $\overline{\text{PQ}}$가 최소이어야 하고 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\overline{\text{OP}}^2-\overline{\text{OQ}}^2}$

$=\sqrt{\overline{\text{OP}}^2-16}$

이므로 $\overline{\text{PQ}}$가 최소이려면 $\overline{\text{OP}}$가 최소이어야 한다. *

$\overline{\text{OP}}$의 최솟값은 점 O와 직선 $x+2y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$(\overline{\text{OP}}\text{의 최솟값})=\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

$\therefore (\overline{\text{PQ}}\text{의 최솟값})=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-16}=2$

이때 점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{QH}}=\overline{\text{HR}}=\frac{1}{2}\overline{\text{QR}}$

직각삼각형 OQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{OQ}}\times\overline{\text{PQ}}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{QH}}$

$\frac{1}{2}\times4\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\overline{\text{QR}}$

$\therefore \overline{\text{QR}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **답** ②

• 다른 풀이 1 •

*에서 점 P는 직선 $x+2y-10=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 위에 있으므로 점 P의 좌표를 $\left(p,\ -\frac{1}{2}p+5\right)$라 하면

$\overline{\text{OP}}=\sqrt{(p-0)^2+\left(-\frac{1}{2}p+5-0\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{4}p^2-5p+25}=\sqrt{\frac{5}{4}(p-2)^2+20}$

$p=2$일 때 $\overline{\text{OP}}$가 최소이므로 점 P의 좌표는 (2, 4)**

이때 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 접점은 원 위에 있으므로

$a^2+b^2=16$ ……㉠

또한, 접선의 방정식은 $ax+by=16$이고, 이 직선이 점 P(2, 4)를 지나므로

$2a+4b=16,\ a+2b=8$

$\therefore a=8-2b$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(8-2b)^2+b^2=16,\ 5b^2-32b+48=0$

$(5b-12)(b-4)=0$

$\therefore b=\frac{12}{5}$ 또는 $b=4$

㉡에서 $b=\frac{12}{5}$일 때 $a=\frac{16}{5}$, $b=4$일 때 $a=0$이므로

$\text{Q}\left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$, R(0, 4)라 하면

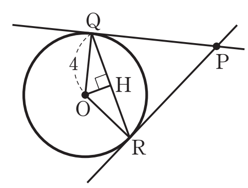
$\overline{\text{QR}}=\sqrt{\left(0-\frac{16}{5}\right)^2+\left(4-\frac{12}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

• 다른 풀이 2 •

**에서 직선 QR의 방정식은

$\underline{2x+4y=16}$***

$\therefore x+2y-8=0$



이때 원점 O에서 직선 $x+2y-8=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{OH}}=\frac{|1\times0+2\times0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

이때 $\overline{\text{OQ}}=4$이므로 직각삼각형 OHQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{QH}}=\sqrt{\overline{\text{OQ}}^2-\overline{\text{OH}}^2}=\sqrt{16-\frac{64}{5}}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 $\overline{\text{QR}}=2\overline{\text{QH}}$이므로

$\overline{\text{QR}}=2\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

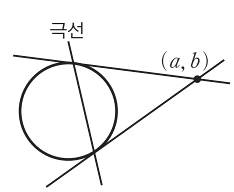
BLACKLABEL 특강 참고 ***

극선의 방정식

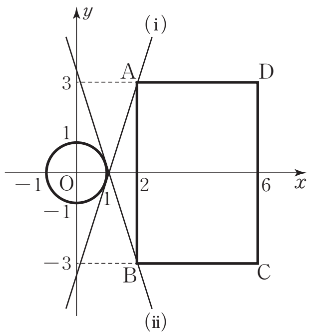
원 밖의 한 점에서 이 원에 두 접선을 그을 때 생기는 두 접점을 지나는 직선을 극선이라 한다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 $(a,\ b)$에서 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선의 방정식(극선의 방정식)은

$ax+by=r^2$



33 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 직사각형 ABCD와 만날 때, 다음 그림과 같이 (i)에서 접선의 기울기가 최대이고, (ii)에서 접선의 기울기가 최소이다.



(i) 접선이 점 A(2, 3)을 지날 때,

점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$에서

$mx-y-2m+3=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접하려면 이 직선과 원점 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\dfrac{|-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|-2m+3|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4m^2-12m+9=m^2+1$

$3m^2-12m+8=0$

$\therefore m=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-3\times8}}{3}=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$

(ii) 접선이 점 B(2, −3)을 지날 때,

점 B(2, −3)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-(-3)=m(x-2)$에서

$mx-y-2m-3=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접하려면 이 직선과 원점 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4m^2+12m+9=m^2+1$

$3m^2+12m+8=0$

$\therefore m=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-3\times8}}{3}=\dfrac{-6\pm2\sqrt{3}}{3}$

(i), (ii)에서

$\dfrac{-6-2\sqrt{3}}{3}\le m\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$이고, $3<\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}<\dfrac{10}{3}$이므로 조건을 만족시키는 정수 m은 −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

답 7

34 $x^2+y^2=10$에서 $y^2=10-x^2$

위의 식을 $(x-2)^2+y^2=10$에 대입하면

$(x-2)^2+10-x^2=10$

$4x=4 \qquad \therefore x=1$

이것을 $y^2=10-x^2$에 대입하면

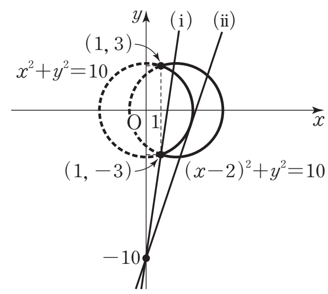
$y^2=9 \qquad \therefore y=\pm3$

즉, 두 원 $x^2+y^2=10$과 $(x-2)^2+y^2=10$의 두 교점의 좌표는 (1, 3), (1, −3)이다.

이때 점 (0, −10)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx-10 \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 주어진 초승달 모양의 도형과 서로 다른 네 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 직선 ㉠이 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 (1, −3)을 지날 때,

$-3=m-10 \qquad \therefore m=7$

(ii) 직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=10$에 접할 때,

원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=mx-10$, 즉 $mx-y-10=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$과 같으므로

$\dfrac{|-10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$10=\sqrt{10(m^2+1)}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$100=10(m^2+1)$, $m^2+1=10$

$m^2=9 \qquad \therefore m=\pm3$

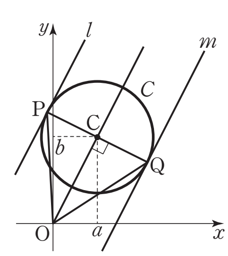
그런데 직선의 기울기가 양수이므로 $m=3$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는

$3<m<7$

답 $3<m<7$

35 평행한 두 직선 l, m이 원 C의 접선이므로 선분 PQ는 원 C의 지름이고, 원 C의 중심을 C라 하면 점 C(a, b)는 선분 PQ의 중점이다.



△OPQ가 정삼각형이므로 직선 OC는 선분 PQ를 수직이등분하고, 직선 OC는 직선 l과 평행하다. 즉, 직선 OC와 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

이때 평행한 두 직선 OC와 l 사이의 거리는 직선 OC 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PC}=\overline{CQ}=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

정삼각형 OPQ에서

$$\overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{15}}{5}\qquad\cdots\cdots㉠$$

이때 $C(a,\ b)$이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{a^2+b^2}\qquad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2=\frac{27}{5}$$

답 $\frac{27}{5}$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 도형의 성질을 통해 주어진 원의 중심의 좌표를 계산하는 문제로 원에 그은 평행한 두 접선 사이의 거리는 원의 지름의 길이와 같고, 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$임을 이용한다.
평면좌표에서도 중학교에서 배운 기본 도형의 성질이 자주 활용되므로 이러한 성질을 잘 알아두도록 하자.

36 ㄱ. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $P(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은

$$x_nx+y_ny=1\qquad\cdots\cdots㉠$$

이 직선이 점 $A(n,\ 0)$을 지나므로

$$nx_n=1\qquad\therefore x_n=\frac{1}{n}\ (참)$$

ㄴ. ㄱ에서 점 $P\left(\frac{1}{n},\ y_n\right)$이고, 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면에 있으므로

$$\frac{1}{n^2}+{y_n}^2=1에서\ {y_n}^2=\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$y_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\ (\because y_n>0)\qquad\cdots\cdots㉡$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{n},\ \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)$$

이때 $n=2$이면 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 직선 AP의 방정식은 ㉠에서

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1,\ 즉\ x+\sqrt{3}y-2=0\ (참)$$

ㄷ. ㉡에서

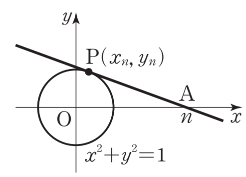
$$y_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}=\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}=\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}$$

$$\therefore y_3\times y_4\times\cdots\times y_{27}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{26}{27}\times\frac{28}{27}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{28}{27}}=\frac{2\sqrt{14}}{9}\ (참)$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

ㄱ. 기울기가 m이고 점 $A(n,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은



$y=m(x-n)$

$\therefore y=mx-mn$

원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=mx-mn$, 즉 $mx-y-mn=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|-mn|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1에서\ |-mn|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$m^2n^2=m^2+1,\ m^2(n^2-1)=1$$

$$m^2=\frac{1}{n^2-1}\qquad\therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

이때 $A(n,\ 0)$에서 원에 접선을 그을 때, 접점 P가 제1사분면에 있으려면 기울기가 음수이어야 하므로

$$m=-\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

원의 중심과 점 $P(x_n,\ y_n)$을 지나는 직선은 접선과 수직이므로

$$\frac{y_n}{x_n}=\sqrt{n^2-1}에서\ y_n=x_n\sqrt{n^2-1}$$

또한, 점 $P(x_n,\ x_n\sqrt{n^2-1})$은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

$${x_n}^2+(n^2-1){x_n}^2=1,\ n^2{x_n}^2=1$$

$${x_n}^2=\frac{1}{n^2}\qquad\therefore x_n=\frac{1}{n}\ (\because x_n>0)\ (참)$$

ㄴ. $n=2$일 때 접선의 기울기는

$$m=-\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}=-\frac{1}{\sqrt{4-1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

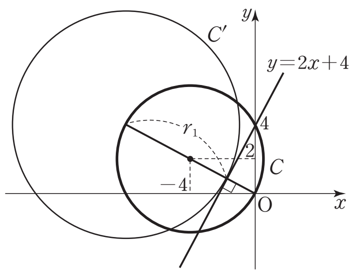
$m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $n=2$를 $y=mx-mn$에 대입하면 직선 AP의 방정식은

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

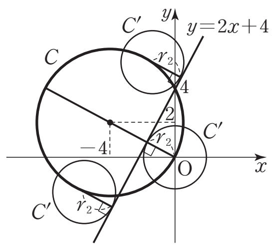
$$\therefore x+\sqrt{3}y-2=0\ (참)$$

37 반지름의 길이가 r이고 중심이 원 $C:(x+4)^2+(y-2)^2=20$ 위에 있는 원 중에서 직선 $y=2x+4$에 접하는 원을 C'이라 하자.
C'의 개수인 m이 홀수인 경우는 $m=1$ 또는 $m=3$일 때이다.

$m=1$, $m=3$이려면 원 C의 지름 중에서 직선 $y=2x+4$와 수직인 지름이 직선 $y=2x+4$에 의하여 나누어지는 두 선분의 길이를 r_1, r_2 $(r_1>r_2)$라 할 때,
$r=r_1$ 또는 $r=r_2$
이어야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]일 때 원 C'의 반지름의 길이를 r_1이라 하면 r_1의 값은 원 C의 반지름의 길이와 원 C의 중심 $(-4,\ 2)$와 직선 $y=2x+4$ 사이의 거리를 더한 것과 같다.
[그림 2]일 때 원 C'의 반지름의 길이를 r_2라 하면 r_2의 값은 원 C의 반지름의 길이에서 원 C의 중심 $(-4,\ 2)$와 직선 $y=2x+4$ 사이의 거리를 뺀 것과 같다.
이때 점 $(-4,\ 2)$와 직선 $y=2x+4$, 즉 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-4)-2+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

이고, 원 C의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로

$$r_1=2\sqrt{5}+\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{16\sqrt{5}}{5},$$

$$r_2=2\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

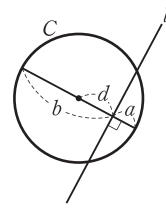
따라서 구하는 모든 r의 값의 곱은

$$r_1r_2=\frac{16\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{64}{5}$$

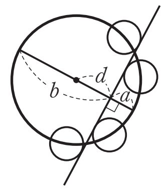
답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

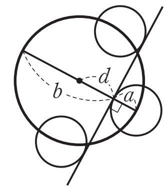
오른쪽 그림과 같이 원 C와 직선 l이 두 점에서 만날 때, 원 C의 중심과 직선 l 사이의 거리를 d, 원 C의 지름이 직선 l에 의하여 나누어지는 길이를 각각 a, b $(a<b)$라 하자.
이때 중심이 원 C 위에 있고 직선 l에 접하면서 반지름의 길이가 r인 원의 개수는 r의 값의 범위에 따라 다음과 같다.



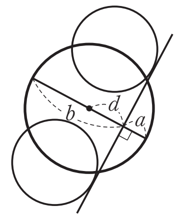
(i) $r<a$일 때 ⇨ 4개



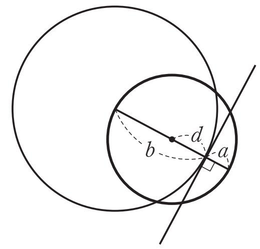
(ii) $r=a$일 때 ⇨ 3개



(iii) $a<r<b$일 때 ⇨ 2개

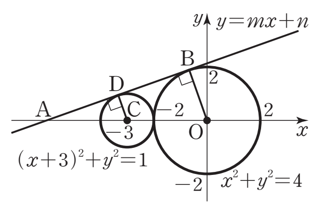


(iv) $r=b$일 때 ⇨ 1개



(v) $r>b$일 때 ⇨ 존재하지 않는다.

38 다음 그림과 같이 직선 $y=mx+n$이 x축과 만나는 점을 A, 원 $x^2+y^2=4$와의 접점을 B라 하고,
원 $(x+3)^2+y^2=1$의 중심을 C, 직선 $y=mx+n$과의 접점을 D라 하자.



△AOB에서 $\overline{\mathrm{OB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$이므로
$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{OC}}=3$
$\therefore$ A$(-6,\ 0)$
즉, 직선 $y=mx+n$은 점 $(-6,\ 0)$을 지나므로
$-6m+n=0$에서 $n=6m$
한편, 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+6m=0$과 원점 사이의 거리는 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$$\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\ |6m|=2\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면
$36m^2=4(m^2+1)$

$$8m^2=1,\ m^2=\frac{1}{8}$$

$$\therefore m=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ (\because m>0),\ n=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore 4mn=4\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=3$$

답 ③

•다른 풀이•

$y=mx+n$에서 $mx-y+n=0$ ……㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=4$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2와 같다.

즉, $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$에서

$\sqrt{m^2+1}=\dfrac{|n|}{2}$ ……㉡

또한, 직선 ㉠이 원 $(x+3)^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(-3,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다.

즉, $\dfrac{|-3m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$에서

$\sqrt{m^2+1}=|-3m+n|$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $\dfrac{|n|}{2}=|-3m+n|$이므로

$\dfrac{n}{2}=-3m+n$ 또는 $\dfrac{n}{2}=3m-n$

$\therefore n=6m$ 또는 $n=2m$

(i) $n=6m$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{m^2+1}=|3m|$

양변을 제곱하면

$m^2+1=9m^2$

$8m^2=1,\ m^2=\dfrac{1}{8}$

$\therefore m=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ (\because m>0),\ n=\dfrac{6}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

(ii) $n=2m$일 때,

이것을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{m^2+1}=|m|$

양변을 제곱하면

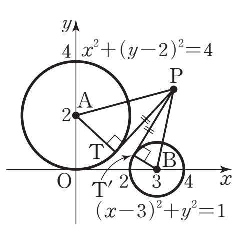
$m^2+1=m^2$

이때 조건을 만족시키는 실수 m의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ n=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$이므로

$4mn=4\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=3$

39 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-2)^2=4$, $(x-3)^2+y^2=1$의 중심을 각각 A, B라 하고, 점 P에서 두 원에 그은 접선의 접점을 각각 T, T′이라 하면



$\overline{PT}=\overline{PT'}$이므로 $\overline{PT}^2=\overline{PT'}^2$

이때 $\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$, $\overline{PT'}^2=\overline{PB}^2-\overline{BT'}^2$이므로

$\overline{PA}^2-4=\overline{PB}^2-1$

따라서 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x^2+(y-2)^2-4=(x-3)^2+y^2-1$

$\therefore 3x-2y-4=0$ **답** $3x-2y-4=0$

40 원 C_2의 중심을 $O_2(2,\ a)$라 하면 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 차인 $5-1=4$와 같으므로

$\overline{OO_2}=\sqrt{2^2+a^2}=4$에서

$4+a^2=16,\ a^2=12$

$\therefore a=2\sqrt{3}\ (\because a>0)$

$\therefore O_2(2,\ 2\sqrt{3})$*

또한, 직선 OA의 기울기는 직선 OO_2의 기울기 $\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$과 같고, 직선 AB는 직선 OA와 서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

직선 AB의 y절편을 $k\ (k>0)$라 하면 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+k$

$\therefore x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}k=0$

이때 직선 AB는 원 $C_1 : x^2+y^2=25$에 접하므로 원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 AB, 즉 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}k=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이인 5와 같다. 즉,

$\dfrac{|-\sqrt{3}k|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=5$에서

$|-\sqrt{3}k|=10,\ \sqrt{3}k=\pm10$

$\therefore k=\dfrac{10}{\sqrt{3}}\ (\because k>0)$

즉, 직선 AB의 방정식은 $x+\sqrt{3}y-10=0$이므로 직선 AB의 x절편은 10이다.

$\therefore B(10,\ 0)$

$\triangle OAB$가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ **답** $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

•다른 풀이•

*에서 원 C_2의 중심의 좌표가 $(2,\ 2\sqrt{3})$이므로 직선 OA의 기울기는

$\dfrac{2\sqrt{3}-0}{2-0}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle AOB=60^\circ$

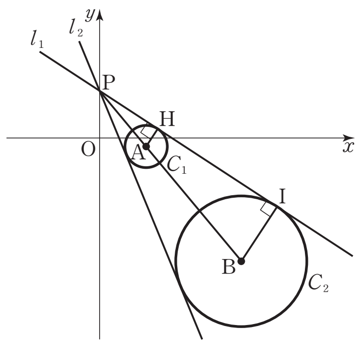
직각삼각형 OAB에서

$\overline{AB}=\overline{OA}\tan60^\circ=5\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}$

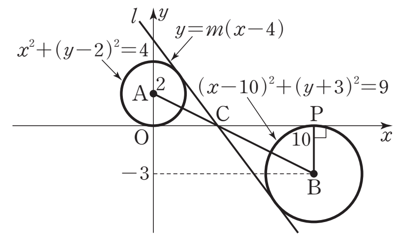
$=\dfrac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

41 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면
A$(3,\ -1)$, B$(b,\ -13)$



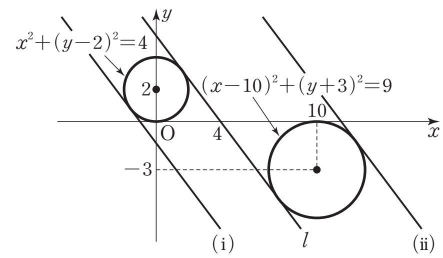
두 점 A, B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\triangle$PAH$\backsim\triangle$PBI (AA 닮음)
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BI}}=3\sqrt{5}$에서
$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}=1:3$이므로
$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BI}}=1:3$
즉, 점 A는 선분 PB를 $1:2$로 내분하므로 점 A의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times b+2\times 0}{1+2},\ \dfrac{1\times(-13)+2\times a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{b}{3},\ \dfrac{2a-13}{3}\right)$
이때 A$(3,\ -1)$이므로 $\dfrac{b}{3}=3$, $\dfrac{2a-13}{3}=-1$
$\therefore a=5,\ b=9$
한편, 점 P$(0,\ 5)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y-5=m(x-0)$
$\therefore mx-y+5=0$
원 C_1의 중심 A$(3,\ -1)$과 직선 $mx-y+5=0$ 사이의 거리가 원 C_1의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같으므로
$\dfrac{|m\times 3-(-1)+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
$|3m+6|=\sqrt{5(m^2+1)}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$9m^2+36m+36=5m^2+5$
$\therefore 4m^2+36m+31=0$ ← 판별식 D에 대하여 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근 존재
따라서 이차방정식의 근과 계수에 의하여 두 접선 l_1, l_2의 기울기의 곱은 $c=\dfrac{31}{4}$
$\therefore a+b+4c=5+9+4\times\dfrac{31}{4}=45$ **답** 45

42 두 원 $x^2+(y-2)^2=4$, $(x-10)^2+(y+3)^2=9$의 중심을 각각 A, B라 하고 직선 l과 x축의 교점을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P라 하자.
$\triangle$AOC$\backsim\triangle$BPC이고, 두 점 A$(0,\ 2)$, B$(10,\ -3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:3$이므로
$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\dfrac{2}{5}=10\times\dfrac{2}{5}=4$
$\therefore$ C$(4,\ 0)$



이때 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l은 점 C를 지나므로 그 방정식은 $y=m(x-4)$이고, 점 A$(0,\ 2)$와 직선 $l:mx-y-4m=0$ 사이의 거리는 원 $x^2+(y-2)^2=4$의 반지름의 길이인 2와 같으므로
$\dfrac{|-2-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$|-2-4m|=2\sqrt{m^2+1}$
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$12m^2+16m=0$, $4m(3m+4)=0$
$\therefore m=-\dfrac{4}{3}$ ($\because m\neq 0$)
따라서 $p=3$, $q=4$이므로
$p^2+q^2=9+16=25$ **답** 25

• 다른 풀이 •



직선 l의 기울기를 m이라 하자.
기울기가 m인 원 $x^2+(y-2)^2=4$의 접선은 (i) 또는 l이고 이 방정식은
$y-2=mx\pm 2\sqrt{m^2+1}$
$\therefore y=mx\pm 2\sqrt{m^2+1}+2$
직선 l은 직선 (i)보다 y절편이 더 크므로 직선 l의 방정식은
$y=mx+2\sqrt{m^2+1}+2$ ……㉠
또한, 기울기가 m인 원 $(x-10)^2+(y+3)^2=9$의 접선은 l 또는 (ii)이고 이 방정식은
$y+3=m(x-10)\pm 3\sqrt{m^2+1}$
$\therefore y=mx-10m\pm 3\sqrt{m^2+1}-3$
직선 l은 직선 (ii)보다 y절편이 더 작으므로 직선 l의 방정식은
$y=mx-10m-3\sqrt{m^2+1}-3$ ……㉡
이때 ㉠=㉡이므로
$2\sqrt{m^2+1}+2=-10m-3\sqrt{m^2+1}-3$
$5\sqrt{m^2+1}=-10m-5$, $\sqrt{m^2+1}=-2m-1$
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$3m^2+4m=0$, $m(3m+4)=0$
$\therefore m=-\dfrac{4}{3}$ ($\because m\neq 0$)
$\therefore p^2+q^2=25$

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.31~32

01 $\frac{\sqrt{11}}{2}-1$	02 195	03 $\frac{40}{3}$	04 14	05 $\pi+7$
06 ⑤	07 $\frac{1}{2}$	08 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$	09 $-\frac{12}{35}<a<0$	
10 17	11 29			

01 해결단계

❶ 단계	원의 중심과 포물선 $y=x^2-2$ 위의 한 점 B 사이의 거리의 최솟값을 구한다.
❷ 단계	선분 AB의 길이의 최솟값을 구한다.

원 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(0,\ 1)$과 포물선 $y=x^2-2$ 위의 한 점 $\mathrm{B}(a,\ a^2-2)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{a^2+(a^2-3)^2}=\sqrt{a^4-5a^2+9}$$
$$=\sqrt{\left(a^4-5a^2+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+9}$$
$$=\sqrt{\left(a^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$$

이므로 $a^2=\frac{5}{2}$일 때 최솟값은 $\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$이다.

따라서 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위의 점 A와 포물선 $y=x^2-2$ 위의 점 B 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{\sqrt{11}}{2}-1$ 답 $\frac{\sqrt{11}}{2}-1$

02 해결단계

❶ 단계	원의 중심을 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 원의 교점이 2개임을 파악한다.
❷ 단계	점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발 H를 이용하여 S를 나타내고, $0<\overline{\mathrm{PH}}\le4$임을 구한다.
❸ 단계	선분 PH의 길이에 따라 조건을 만족시키는 점 P의 개수를 구한 후 $m,\ n$의 값을 구한다.

직선 AB의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{6-2}(x-2)$$

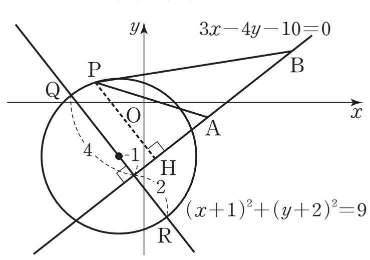
$\therefore\ 3x-4y-10=0$

이 직선과 원의 중심 $(-1,\ -2)$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3\times(-1)-4\times(-2)-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5|}{5}=1$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이고 $d<3$이므로 원과 직선 AB는 서로 다른 두 점에서 만난다.

원의 중심을 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점 중에서 직선 AB에 이르는 거리가 긴 점을 Q, 거리가 짧은 점을 R이라 하자.



두 점 Q, R과 직선 AB 사이의 거리를 각각 $d_1,\ d_2$라 하면

$d_1=d+3=4,\ d_2=3-d=2$

이때 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(6-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=5$

원 위의 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABP의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{5}{2}\overline{\mathrm{PH}}$$

이때 $0<\overline{\mathrm{PH}}\le4$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 점 P의 개수를 구할 수 있다.

(ⅰ) $0<\overline{\mathrm{PH}}<2$, 즉 $0<S<5$일 때,
$S=1,\ 2,\ 3,\ 4$이고, 조건을 만족시키는 점 P의 개수는 각각 4이다.

(ⅱ) $\overline{\mathrm{PH}}=2$, 즉 $S=5$일 때,
조건을 만족시키는 점 P의 개수는 3이다.

(ⅲ) $2<\overline{\mathrm{PH}}<4$, 즉 $5<S<10$일 때,
$S=6,\ 7,\ 8,\ 9$이고, 이것을 만족시키는 점 P의 개수는 각각 2이다.

(ⅳ) $\overline{\mathrm{PH}}=4$, 즉 $S=10$일 때,
조건을 만족시키는 점 P의 개수는 1이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서

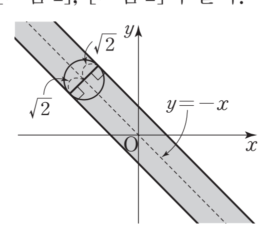
$m=4+4+3+2+2=15,\ n=4+4+2+2+1=13$

$\therefore\ mn=15\times13=195$ 답 195

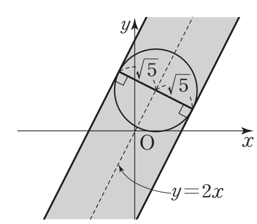
03 해결단계

❶ 단계	원 C_1이 움직이는 영역과 원 C_2가 움직이는 영역의 공통부분을 그림으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 영역의 경계를 나타내는 직선의 방정식을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 직선의 교점의 좌표를 구한 후, 두 원 C_1, C_2가 움직이는 영역의 공통부분의 넓이를 구한다.

원 $C_1,\ C_2$가 움직이는 영역을 좌표평면에 나타내면 각각 [그림 1], [그림 2]와 같다.

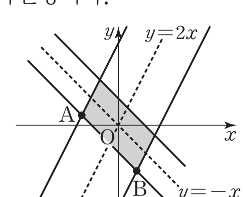


[그림 1]



[그림 2]

즉, 두 원 $C_1,\ C_2$가 움직이는 영역의 공통부분은 다음 그림과 같은 평행사변형이다.



직선 $y=-x$와 평행하면서 거리가 $\sqrt{2}$인 직선의 방정식을 $y=-x+a$, 즉 $x+y-a=0$이라 하면 직선 $y=-x$

위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y-a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

$|a|=2 \qquad \therefore a=\pm2$

$\therefore y=-x\pm2$

같은 방법으로 직선 $y=2x$와 평행하면서 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식을 $y=2x+b$, 즉 $2x-y+b=0$이라 하면 직선 $y=2x$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$|b|=5 \qquad \therefore b=\pm5$

$\therefore y=2x\pm5$

두 직선 $y=2x+5$와 $y=-x-2$의 교점을 A라 하면

$\mathrm{A}\left(-\frac{7}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

두 직선 $y=2x-5$와 $y=-x-2$의 교점을 B라 하면

$\mathrm{B}(1,\ -3)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

한편, 평행한 두 직선 $y=-x+2$, $y=-x-2$ 사이의 거리는

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

따라서 두 원이 움직이는 영역의 공통부분은 밑변의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$이고 높이가 $2\sqrt{2}$인 평행사변형이므로 그 넓이는

$\frac{10\sqrt{2}}{3}\times2\sqrt{2}=\frac{40}{3}$ **답** $\frac{40}{3}$

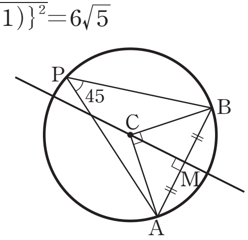
04 해결단계

❶ 단계	세 점 A, B, P를 지나는 원에서 호 AB에 대한 중심각의 크기를 이용하여 삼각형 ABC의 모양을 확인한다.
❷ 단계	점 C와 선분 AB의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.
❸ 단계	점 C를 중심으로 하는 원의 방정식을 구한 후, 점 B의 좌표를 대입하여 k의 값의 합을 구한다.

세 점 A, B, P를 지나는 원에서 호 AB에 대한 원주각의 크기가 $\angle\mathrm{APB}=45°$이므로 호 AB에 대한 중심각의 크기는 $\angle\mathrm{ACB}=90°$이다.

즉, $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$인 직각이등변삼각형이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{3-(-9)\}^2+\{5-(-1)\}^2}=6\sqrt{5}$



주어진 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 직각이등변삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{CB}}^2$에서

$(6\sqrt{5})^2=r^2+r^2$

$r^2=90 \qquad \therefore r=3\sqrt{10}\ (\because r>0)$

한편, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{-9+3}{2},\ \frac{-1+5}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}(-3,\ 2)$

이때 직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이고 직선 AB의 기울기는 $\frac{5-(-1)}{3-(-9)}=\frac{1}{2}$이므로 직선 CM의 기울기는 -2이다.

즉, 직선 CM의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-3)\}$

$\therefore y=-2x-4$

점 C의 좌표를 $(a,\ -2a-4)$라 하면 점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y+2a+4)^2=(3\sqrt{10})^2$

점 $\mathrm{B}(3,\ 5)$가 이 원 위에 있으므로

$(3-a)^2+(9+2a)^2=90$

$5a^2+30a=0,\ a^2+6a=0$

$a(a+6)=0$

$\therefore a=-6$ 또는 $a=0$

즉, $\mathrm{C}(-6,\ 8)$ 또는 $\mathrm{C}(0,\ -4)$이므로

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$ 또는 $\overline{\mathrm{OC}}=|-4|=4$

$\therefore k=4$ 또는 $k=10$

따라서 모든 k의 값의 합은

$4+10=14$ **답** 14

BLACKLABEL 특강 필수 개념

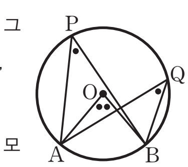
원주각과 중심각의 크기

(1) 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$과 같다. 즉,

$\angle\mathrm{APB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}$

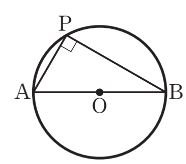
(2) 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다. 즉,

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}$



(3) 반원의 호에 대한 원주각의 크기는 $90°$이다. 즉, 선분 AB가 원의 지름이면

$\angle\mathrm{APB}=90°$



05 해결단계

❶ 단계	두 원 C_1, C_2의 방정식을 시각 t를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	두 원의 내부의 공통부분의 넓이가 최대인 경우를 파악하고, 그때의 시각 t와 넓이 S를 각각 구한다.
❸ 단계	$a+2S$의 값을 구한다.

원 C_1은 반지름의 길이가 1이고, 중심은 점 $(-10,\ 0)$에서 출발하여 x축을 따라 오른쪽 방향으로 매초 1의 속력으로 움직이므로 t초 후의 원 C_1의 중심의 좌표는 $(-10+t,\ 0)$이고 원의 방정식은

$C_1 : (x+10-t)^2+y^2=1$

원 C_2는 반지름의 길이가 1이고, 중심은 점 $(0,\ 8)$에서 출발하여 y축을 따라 아래쪽 방향으로 매초 1의 속력으로 움직이므로 t초 후의 원 C_2의 중심의 좌표는 $(0,\ 8-t)$이고 원의 방정식은

$C_2 : x^2+(y-8+t)^2=1$

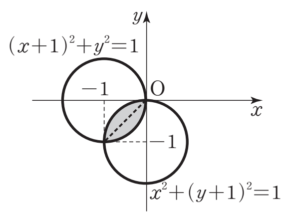
두 원 C_1, C_2의 내부의 공통부분의 넓이가 최대가 되려면 두 원의 중심 사이의 거리가 최소이어야 한다.

$$\sqrt{(-10+t)^2+(t-8)^2}$$
$$=\sqrt{t^2-20t+100+t^2-16t+64}$$
$$=\sqrt{2t^2-36t+164}$$
$$=\sqrt{2(t-9)^2+2}$$

즉, 출발한 지 9초 후에 공통부분의 넓이가 최대이므로

$a=9$

이때 $t=9$에서 두 원 C_1, C_2의 방정식은 각각 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+(y+1)^2=1$이므로 두 원의 내부의 공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$\therefore S=2\times\{$(사분원의 넓이) $-$(직각이등변삼각형의 넓이)$\}$

$$=2\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\therefore a+2S=9+2\times\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$=\pi+7$$

답 $\pi+7$

06 해결단계

❶ 단계	세 점 P, Q, R의 좌표를 m, n을 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$m=n$일 때 점 P의 좌표를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	점 $\left(\frac{4m}{m+n},\ 0\right)$을 점 S라 하고, 두 직선 PS, SR의 기울기를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❹ 단계	두 삼각형 APQ, BQR이 서로 합동임을 이용하여 △PQR이 직각이등변삼각형임을 파악하고 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$\left(\frac{m\times0+n\times0}{m+n},\ \frac{m\times4+n\times0}{m+n}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}\left(0,\ \frac{4m}{m+n}\right)$

$\left(\frac{m\times4+n\times0}{m+n},\ \frac{m\times4+n\times4}{m+n}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{4m}{m+n},\ 4\right)$

$\left(\frac{m\times4+n\times4}{m+n},\ \frac{m\times0+n\times4}{m+n}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{R}\left(4,\ \frac{4n}{m+n}\right)$

ㄱ. $m=n$이면 $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{4m}{2m}\right)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(0,\ 2)$ (참)

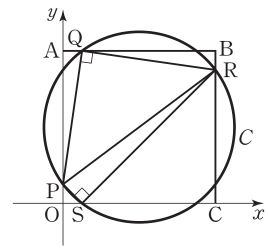
ㄴ. 두 직선 PQ, QR의 기울기는 각각

$$\frac{4-\frac{4m}{m+n}}{\frac{4m}{m+n}}=\frac{\frac{4n}{m+n}}{\frac{4m}{m+n}}=\frac{n}{m},$$

$$\frac{\frac{4n}{m+n}-4}{4-\frac{4m}{m+n}}=\frac{\frac{-4m}{m+n}}{\frac{4n}{m+n}}=-\frac{m}{n}$$

이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

즉, 두 직선 PQ, QR은 서로 수직이므로 선분 PR은 원 C의 지름이다.



점 $\left(\frac{4m}{m+n},\ 0\right)$을 S라 하면 두 직선 PS, SR의 기울기는 각각

$$\frac{-\frac{4m}{m+n}}{\frac{4m}{m+n}}=-1,\ \frac{\frac{4n}{m+n}}{4-\frac{4m}{m+n}}=\frac{\frac{4n}{m+n}}{\frac{4n}{m+n}}=1$$

이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 두 직선 PS, SR은 서로 수직이므로 점 S는 선분 PR을 지름으로 하는 원 C 위에 있다. (참)

ㄷ. 원 C의 중심은 선분 PR의 중점과 같으므로 원 C의 중심의 좌표는 $(2,\ 2)$

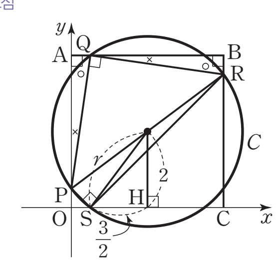
원 C의 중심에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{SH}}=\frac{3}{2}$ ㄴ에서 x축과 원 C의 교점

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{SH}}^2+2^2=r^2$

$\frac{25}{4}=r^2 \quad \therefore r=\frac{5}{2}$



두 삼각형 APQ, BQR에서

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BR}}=\left|\frac{4m}{m+n}\right|$,

$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=90^\circ$,

$\angle\mathrm{AQP}=180^\circ-(90^\circ+\angle\mathrm{BQR})$
$=\angle\mathrm{BRQ}$

$\therefore \triangle\mathrm{APQ}\equiv\triangle\mathrm{BQR}$ (ASA 합동)

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 △PQR은 직각이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{PR}}=2r=5$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)

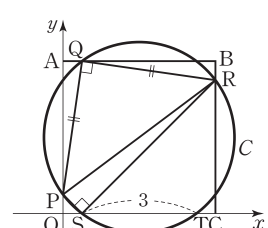
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

• 다른 풀이 •

ㄷ. 원 C의 중심은 선분 PR의 중점과 같으므로 원 C의 중심의 좌표는 $(2,\ 2)$

원 C와 x축의 두 교점 중 점 $\mathrm{S}\left(\frac{4m}{m+n},\ 0\right)$이 아닌 점을 $\mathrm{T}(t,\ 0)$이라 하면



선분 ST의 중점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4m}{m+n}+t\right)=2$$

$\therefore t=\dfrac{4n}{m+n}$

이때 $\overline{ST}=3$이므로 $\left|\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right|=3$

$\therefore \overline{PR}=\sqrt{(4-0)^2+\left(\dfrac{4n}{m+n}-\dfrac{4m}{m+n}\right)^2}$

$=\sqrt{4^2+\left\{\dfrac{4(n-m)}{m+n}\right\}^2}$

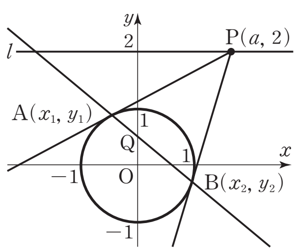
$=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\triangle$PQR은 $\overline{PQ}=\overline{QR}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PQ}=\dfrac{\overline{PR}}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ (참)

07 해결단계

❶ 단계	원의 중심을 좌표평면의 원점에 놓고, 직선 l을 $y=2$로 놓는다.
❷ 단계	원 위의 접점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에서 그은 접선의 방정식을 구한 후, 이 접선이 점 P를 지날 조건을 파악한다.
❸ 단계	두 접점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여 원의 중심과 점 Q 사이의 거리를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 좌표평면 위의 원점에 놓으면 반지름의 길이가 1이므로 원의 방정식은

$x^2+y^2=1$

원의 중심에서 2만큼 떨어져 있는 직선 l을 x축에 평행하게 놓으면 직선 l의 방정식은

$y=2$

이때 직선 l 위에 있는 임의의 한 점 P의 좌표를 $(a, 2)$라 하고, 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점 A, B를 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$,

$x_2x+y_2y=1$

두 접선이 모두 점 $P(a, 2)$를 지나므로

$ax_1+2y_1=1$,

$ax_2+2y_2=1$

즉, 직선 $ax+2y=1$은 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나고, 두 점을 지나는 직선은 유일하므로 직선 AB의 방정식은 $ax+2y=1$이다.

따라서 직선 AB는 a의 값에 관계없이 항상 점 $Q\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$을 지나므로 원의 중심과 점 Q 사이의 거리는 $\dfrac{1}{2}$이다.

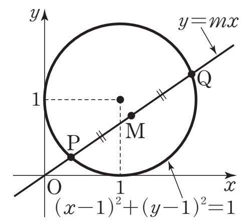
답 $\dfrac{1}{2}$

08 해결단계

❶ 단계	$y=mx$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$을 연립하여 만든 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 구한다.
❷ 단계	$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $M(X, Y)$라 하고, $X=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $Y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$로 치환하여 X, Y의 관계식을 구한다.
❸ 단계	$X>0$, $Y>0$일 때, 점 M이 나타내는 도형의 길이를 구한다.

두 점 P, Q를 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$라 하면 두 점은 직선 $y=mx$ 위에 있으므로

$y_1=mx_1$, $y_2=mx_2$



이때 x_1, x_2는 이차방정식

$(x-1)^2+(mx-1)^2=1$, 즉

$(m^2+1)x^2-2(m+1)x+1=0$

의 두 근이므로 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-(m^2+1)>0$

$2m>0 \qquad \therefore m>0$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\dfrac{2(m+1)}{m^2+1}$

따라서 선분 PQ의 중점 M의 좌표를 (X, Y)라 하면

$X=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m+1}{m^2+1}$ ······㉠

$Y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{mx_1+mx_2}{2}=mX$ ······㉡

이때 $m>0$에서 $X>0$이므로 ㉡에서

$m=\dfrac{Y}{X}$

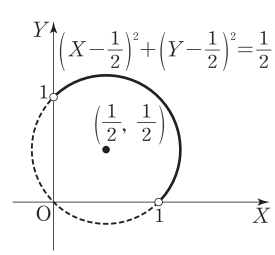
이것을 ㉠에 대입하면

$X=\dfrac{\dfrac{Y}{X}+1}{\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2+1}=\dfrac{\dfrac{X+Y}{X}}{\dfrac{X^2+Y^2}{X^2}}=\dfrac{X(X+Y)}{X^2+Y^2}$

$X>0$이므로 $X^2+Y^2=X+Y$

$X^2-X+Y^2-Y=0$

$\therefore \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ (단, $X>0$, $Y>0$)



즉, 점 M이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$인 원의 제1사분면의 부분이다.

이때 두 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선이 원의 중심 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$을 지나므로 구하는 도형의 길이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

09 해결단계

❶ 단계	기울기가 a이고, 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-6)^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 접선 중에서 가까운 두 직선 사이의 거리가 4보다 크도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구한다.

기울기가 a이고, 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선 중에서 위쪽에 있는 접선의 방정식은

$y=ax+\sqrt{a^2+1}$ ……㉠

기울기가 a이고, 원 $(x-1)^2+(y-6)^2=1$에 접하는 접선 중에서 아래쪽에 있는 접선의 방정식은

$y=a(x-1)-\sqrt{a^2+1}+6$ ……㉡ ←본문 20쪽 비법노트Ⓒ

이때 원 C가 주어진 두 원 사이를 어느 원과도 만나지 않으면서 통과하려면 ㉠, ㉡ 사이의 거리가 4보다 커야 한다.

즉, 직선 ㉡ 위의 한 점 $(0,\ -a-\sqrt{a^2+1}+6)$과 직선 ㉠, 즉 $ax-y+\sqrt{a^2+1}=0$ 사이의 거리가 4보다 커야 하므로

$$\frac{|a+\sqrt{a^2+1}-6+\sqrt{a^2+1}|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}>4$$

$|a-6+2\sqrt{a^2+1}|>4\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ a-6+2\sqrt{a^2+1}>4\sqrt{a^2+1}$ 또는

$a-6+2\sqrt{a^2+1}<-4\sqrt{a^2+1}$

(i) $a-6+2\sqrt{a^2+1}>4\sqrt{a^2+1}$에서

$a-6>2\sqrt{a^2+1}$ ……㉢

이때 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y-6)^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$, $(1,\ 6)$을 지나는 직선의 기울기가

$\frac{6-0}{1-0}=6$이므로 a의 값이 6보다 작아야 한다.

즉, ㉢의 좌변이 음수가 되므로 부등식 ㉢이 성립하는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a-6+2\sqrt{a^2+1}<-4\sqrt{a^2+1}$에서

$6\sqrt{a^2+1}<6-a$

위의 부등식의 양변을 제곱하면

$36(a^2+1)<a^2-12a+36$

$35a^2+12a<0$

$a(35a+12)<0$

$\therefore\ -\frac{12}{35}<a<0$

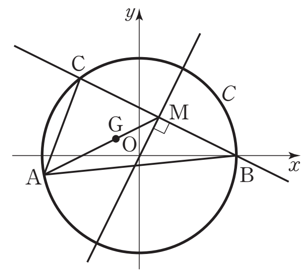
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{12}{35}<a<0$ 답 $-\frac{12}{35}<a<0$

10 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC의 무게중심을 이용하여 선분 BC의 중점 M의 좌표를 구하고, 변 BC의 길이를 구한다.
❷ 단계	직선 BC의 방정식을 구하고, 점 $\mathrm{A}(-5,\ -1)$과 직선 BC 사이의 거리를 구한다.
❸ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

중심이 원점 O이고 세 점 $\mathrm{A}(-5,\ -1)$, B, C를 지나는 원을 C라 하면 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$이므로 원 C의 방정식은 $C:x^2+y^2=26$



위의 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(a,\ b)$라 하고, 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자.

점 $\mathrm{G}(-1,\ 1)$은 선분 AM을 $2:1$로 내분하므로

$\frac{2\times a+1\times(-5)}{2+1}=-1$에서 $a=1$

$\frac{2\times b+1\times(-1)}{2+1}=1$에서 $b=2$

즉, 점 M의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\triangle\mathrm{OMB}$는 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}=\sqrt{26-5}=\sqrt{21}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{21}$

한편, 직선 OM의 방정식은

$y=2x$

직선 BC는 점 $\mathrm{M}(1,\ 2)$를 지나고 직선 OM과 수직이므로 직선 BC의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad\therefore\ x+2y-5=0$

점 $\mathrm{A}(-5,\ -1)$과 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|1\times(-5)+2\times(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}\times\frac{12\sqrt{5}}{5}=\frac{12}{5}\sqrt{105}$$

즉, $p=5$, $q=12$이므로

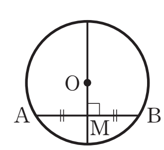
$p+q=17$ 답 17

BLACKLABEL 특강 필수 개념

원의 중심과 현의 수직이등분선

(1) 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OM}}$이면 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}$

(2) 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다. (현의 수직이등분선은 원의 지름의 양 끝 점을 지난다.)



11 해결단계

❶ 단계	주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 $m(x^2+y^2-k)+(x^2+y^2-8x-6y+21)=0\ (m\neq-1)$이라 한다.
❷ 단계	원 C_1의 중심과 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 m, k의 값을 구한다.
❸ 단계	원 C_2의 중심과 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 m의 값을 구하고 원 C_2의 반지름의 길이를 구한다.

$x^2+y^2=k$, $(x-4)^2+(y-3)^2=4$에서
$x^2+y^2-k=0$, $x^2+y^2-8x-6y+21=0$
이 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$m(x^2+y^2-k)+(x^2+y^2-8x-6y+21)=0$
(단, $m\neq-1$)
이라 하면
$(m+1)x^2+(m+1)y^2-8x-6y-mk+21=0$
$x^2+y^2-\dfrac{8}{m+1}x-\dfrac{6}{m+1}y+\dfrac{-mk+21}{m+1}=0$
$\therefore \left(x-\dfrac{4}{m+1}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{m+1}\right)^2$
$=\dfrac{(mk-21)(m+1)+25}{(m+1)^2}$ ······㉠
원 C_1의 중심의 좌표는 $(16, 12)$이고, 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 16이다.
즉, $\dfrac{4}{m+1}=16$에서 $m=-\dfrac{3}{4}$
$\dfrac{(mk-21)(m+1)+25}{(m+1)^2}=16^2$에서
$\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{4}k-21\right)+25=16$, $\dfrac{3}{4}k=15$
$\therefore k=20$
이것을 ㉠에 대입하여 정리하면
$\left(x-\dfrac{4}{m+1}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{m+1}\right)^2=\dfrac{20m^2-m+4}{(m+1)^2}$
원 C_2의 중심의 좌표는 $\left(\dfrac{4}{m+1}, \dfrac{3}{m+1}\right)$이고, 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $\left|\dfrac{4}{m+1}\right|$이다. 즉,
$\left(\dfrac{4}{m+1}\right)^2=\dfrac{20m^2-m+4}{(m+1)^2}$에서
$20m^2-m+4=16$, $20m^2-m-12=0$
$(4m+3)(5m-4)=0$
$\therefore m=-\dfrac{3}{4}$ 또는 $m=\dfrac{4}{5}$
그런데 두 원 C_1, C_2는 서로 다른 원이므로 $m=\dfrac{4}{5}$
즉, 원 C_2의 방정식은
$\left(x-\dfrac{20}{9}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{3}\right)^2=\left(\dfrac{20}{9}\right)^2$
따라서 원 C_2의 반지름의 길이는 $\dfrac{20}{9}$이므로
$p=9$, $q=20$ $\quad\therefore p+q=29$ **답** 29

• 다른 풀이 •
$x^2+y^2=k$, $(x-4)^2+(y-3)^2=4$에서
$x^2+y^2-k=0$, $x^2+y^2-8x-6y+21=0$
이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-k)-(x^2+y^2-8x-6y+21)=0$
$\therefore 8x+6y-k-21=0$ ······㉡
원 C_1의 중심의 좌표는 $(16, 12)$이고, 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 16이다.
즉, 원 C_1의 방정식은
$(x-16)^2+(y-12)^2=256$
$\therefore x^2+y^2-32x-24y+144=0$
이때 두 원
$x^2+y^2-8x-6y+21=0$, $x^2+y^2-32x-24y+144=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-8x-6y+21)-(x^2+y^2-32x-24y+144)=0$
$24x+18y-123=0$
$\therefore 8x+6y-41=0$ ······㉢
두 직선 ㉡, ㉢이 일치해야 하므로
$-41=-k-21$ $\quad\therefore k=20$
원 C_2의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.
즉, 원 C_2의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$
$\therefore x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$
두 원 $x^2+y^2-20=0$, $x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-20)-(x^2+y^2-2ax-2by+b^2)=0$
$2ax+2by-20-b^2=0$
이 직선이 ㉢과 일치해야 하므로
$\dfrac{2a}{8}=\dfrac{2b}{6}=\dfrac{20+b^2}{41}$
$\dfrac{b}{3}=\dfrac{20+b^2}{41}$에서 $3b^2-41b+60=0$
$(3b-5)(b-12)=0$
이때 $b=12$이면 두 원 C_1, C_2는 서로 같으므로
$b=\dfrac{5}{3}$
$\dfrac{a}{4}=\dfrac{b}{3}$에서 $a=\dfrac{20}{9}$
따라서 원 C_2의 반지름의 길이는 $\dfrac{20}{9}$이므로
$p=9$, $q=20$ $\quad\therefore p+q=29$

03. 도형의 이동

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.34~35

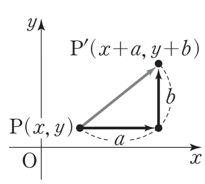
01 ②	02 ⑤	03 ②	04 2	05 ④
06 1	07 ③	08 8	09 ③	10 6
11 ⑤	12 ①	13 ④	14 ①	

01 점 A$(1,\ 3)$이 A$'(a,\ 1)$로, 점 B$(-2,\ 7)$이 B$'(1,\ b)$로 각각 옮겨졌으므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.
즉, $1+3=a$, $7-2=b$이므로
$a=4$, $b=5$
따라서 점 $(4,\ 5)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $(7,\ 3)$이다. 답 ②

02 점 A$(3,\ -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는 $(4,\ -5)$이므로 직선 AB의 방정식은
$$y-(-5)=\frac{-5-(-1)}{4-3}(x-4)$$
$\therefore\ 4x+y-11=0$
이 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$4(x-3)+(y-1)-11=0$
$\therefore\ 4x+y-24=0$
따라서 $a=4$, $b=-24$이므로
$a-b=4-(-24)=28$ 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

점 P$(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 P$'$이라 하면 P$'(x+a,\ y+b)$이므로 직선 PP$'$의 기울기는
$\dfrac{(y+b)-y}{(x+a)-x}=\dfrac{b}{a}$
따라서 이 문제에서 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-4}{1}=-4$이다.



03 원 $(x-1)^2+(y+5)^2=13$의 중심의 좌표는 $(1,\ -5)$이므로 이 원을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C라 하면 원 C의 중심의 좌표는 $(1+k,\ -5)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.
원 C와 직선 $2x-3y+5=0$이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원 C의 중심과 직선 $2x-3y+5=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{13}$보다 작아야 하므로
$$\frac{|2\times(1+k)-3\times(-5)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}<\sqrt{13}$$
$|2k+22|<13$
$-13<2k+22<13$
$\therefore\ -\dfrac{35}{2}<k<-\dfrac{9}{2}$
따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-17,\ -16,\ -15,\ \cdots,\ -5$이므로
$M=-5$, $m=-17$
$\therefore\ Mm=85$ 답 ②

04 $y=x^2-4x$
$\quad=(x-2)^2-4$
에서 포물선 $y=x^2-4x$의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -4)$
$y=x^2-10x+20$
$\quad=(x-5)^2-5$
에서 포물선 $y=x^2-10x+20$의 꼭짓점의 좌표는 $(5,\ -5)$
주어진 평행이동은 점 $(2,\ -4)$를 점 $(5,\ -5)$로 옮기므로 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
*직선 $l:x+2y-1=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은
$(x-3)+2(y+1)-1=0$
$\therefore\ l':x+2y-2=0$**
두 직선 $l,\ l'$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 $x+2y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+2y-2=0$ 사이의 거리와 같다.
$$\therefore\ d=\frac{|1\times1+2\times0-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$\therefore\ 10d^2=10\times\dfrac{1}{5}=2$ 답 2

• 다른 풀이 1 •
주어진 평행이동이 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하는 것이라 하고, 포물선 $y=x^2-4x$를 평행이동하면
$y-b=(x-a)^2-4(x-a)$
$y=x^2-2(a+2)x+a^2+4a+b$
이 포물선의 방정식이 $y=x^2-10x+20$이므로
$a+2=5$, $a^2+4a+b=20$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=3$, $b=-1$
다음은 *와 같다.

• 다른 풀이 2 •
**에서 평행한 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리 d는
$$d=\frac{|-1-(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$ ←본문 8쪽 비법노트Ⓓ
$\therefore\ 10d^2=10\times\dfrac{1}{5}=2$

05 직선 $y=-2x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$b=-2a+2$ ……㉠

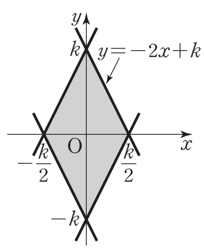
점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{Q}(a,\ -b)$, y축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{R}(-a,\ b)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QR}}&=\sqrt{(-a-a)^2+\{b-(-b)\}^2}\\&=2\sqrt{a^2+b^2}\\&=2\sqrt{a^2+(-2a+2)^2}\ (\because ㉠)\\&=2\sqrt{5a^2-8a+4}\\&=2\sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

따라서 선분 QR의 길이는 $a=\frac{4}{5}$일 때 최소이므로 이때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$이다.

답 ④

06 직선 $y=-2x+k\ (k>0)$와 이 직선을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동시켰을 때 생기는 모든 직선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 이 도형의 넓이가 1이므로

$4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times k\right)=1$에서 $k^2=1$

$\therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

07 $C : x^2+y^2-8x-2y+15=0$에서

$C : (x-4)^2+(y-1)^2=2$

즉, 원 C의 중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다. *

원 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C'의 방정식은

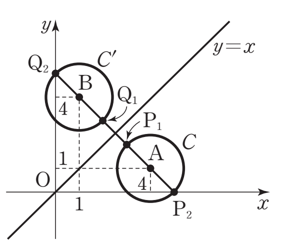
$(y-4)^2+(x-1)^2=2$

$\therefore C' : (x-1)^2+(y-4)^2=2$

즉, 원 C'의 중심의 좌표는 $(1,\ 4)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

** 다음 그림과 같이 두 원 C, C'의 중심을 각각 A, B라 하고, 직선 AB가 두 원 C, C'과 만나는 점 중 선분 AB 위의 점을 각각 P_1, Q_1, 선분 AB 위의 점이 아닌 점을 각각 P_2, Q_2라 하자.

선분 PQ의 길이의 최댓값은 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 길이와 같고, 최솟값은 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 길이와 같다.



A$(4,\ 1)$, B$(1,\ 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$에서

$$\begin{aligned}M&=\overline{\mathrm{P_2Q_2}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AP_2}}+\overline{\mathrm{BQ_2}}\\&=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m&=\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AP_1}}-\overline{\mathrm{BQ_1}}\\&=3\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\therefore M^2+m^2=50+2=52$

답 ③

• 다른 풀이 •

*에서 원 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C'의 중심의 좌표는 $(1,\ 4)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로

$C' : (x-1)^2+(y-4)^2=2$

다음은 **와 같다.

08 $y=x^2+2x-5$에서 $y=(x+1)^2-6$

이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x+1)^2-6$

$\therefore y=-(x-1)^2+6$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 6)$이고, 이 점은 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로

$6=-2+k \qquad \therefore k=8$

답 8

• 다른 풀이 •

$y=x^2+2x-5$에서 $y=(x+1)^2-6$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -6)$이므로 이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 6)$이다.

점 $(1,\ 6)$이 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로

$6=-2+k \qquad \therefore k=8$

09 점 $\mathrm{A}(-2,\ 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(7,\ -2)$

점 $\mathrm{B}(7,\ -2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점 C의 좌표는 $(10,\ -2+k)$*

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-2-7}{7-(-2)}\{x-(-2)\}$, 즉 $y=-x+5$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 점 C가 직선 $y=-x+5$ 위에 있어야 하므로

$-2+k=-10+5 \qquad \therefore k=-3$

답 ③

• 다른 풀이 •

*에서 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 서로 같아야 한다.

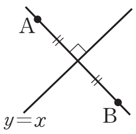
직선 AB의 기울기는 $\frac{-2-7}{7-(-2)}=-1$

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{-2+k-(-2)}{10-7}=\dfrac{k}{3}$

즉, $\dfrac{k}{3}=-1$이므로 $k=-3$

BLACKLABEL 특강 참고

직선 AB는 직선 $y=x$와 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1이다.



10 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=16$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2+(y-b)^2=16$

$\therefore (x+a)^2+(y-b)^2=16$

이 원을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+a)^2+(y-2-b)^2=16$

*즉, 중심의 좌표가 $(-a,\ 2+b)$이고 반지름의 길이가 4인 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$4=|-a|=|2+b|$

$\therefore a=4,\ b=2\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore a+b=6$ 답 6

• 다른 풀이 •

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=16$의 중심 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

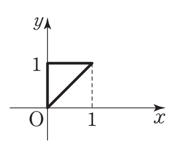
이 점을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-a,\ 2+b)$

다음은 *와 같다.

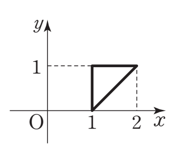
11 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동 또는 대칭이동을 이용하여 도형 $f(y,\ x-1)=0$이 되도록 하려면 다음의 순서로 이동해야 한다.

(i) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은



$f(y,\ x)=0$

(ii) 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은



$f(y,\ x-1)=0$

(i), (ii)에서 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은 ⑤와 같다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x,\ y-1)=0$

방정식 $f(x,\ y-1)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y,\ x-1)=0$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

$f(x,\ y)=0 \xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에}} f(y,\ x)=0 \xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} f(y,\ x-1)=0$ ……㉠

$f(x,\ y)=0 \xrightarrow[\text{1만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로}} f(x-1,\ y)=0 \xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에}} f(y-1,\ x)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 알 수 있듯이 대칭이동과 평행이동의 순서가 바뀌면 결과가 달라지므로 순서에 유의해야 한다.

12 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}(b,\ a)$이고 점 P와 점 Q가 y축에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{Q}(-b,\ a)$이다.

이때 점 A를 점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 점 $(1,\ -2)$는 두 점 A, Q를 이은 선분 AQ의 중점이다.

즉, $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(-b,\ a)$에 대하여

$\dfrac{a+(-b)}{2}=1,\ \dfrac{b+a}{2}=-2$

$\therefore a-b=2,\ a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-3$

따라서 구하는 점 A의 좌표는 $(-1,\ -3)$이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}(b,\ a)$이고, 점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{Q}(2-a,\ -4-b)$이다.

이때 두 점 P, Q가 y축에 대하여 대칭이므로

$-b=2-a,\ a=-4-b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-3$

따라서 구하는 점 A의 좌표는 $(-1,\ -3)$이다.

13 점 $(1,\ 2)$를 A, 점 $(a,\ b)$를 A′이라 하자.

(i) 선분 AA′의 중점 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$가 직선 $y=3x+2$ 위에 있으므로

$\dfrac{b+2}{2}=3\times\dfrac{a+1}{2}+2$

$b+2=3a+3+4$

$\therefore 3a-b=-5$ ……㉠

(ⅱ) 직선 $\mathrm{AA'}$이 직선 $y=3x+2$와 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{3}$

$a-1=6-3b$

$\therefore a+3b=7 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{4}{5},\ b=\frac{13}{5}$

$\therefore a+b=\frac{9}{5}$ 답 ④

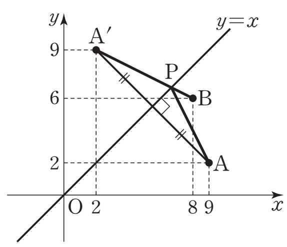
14 점 $\mathrm{A}(9, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}$이라 하면

$\mathrm{A'}(2, 9)$

이때 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PA'}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B}}$



즉, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 $y=x$와 직선 $\mathrm{A'B}$의 교점이어야 한다.

이때 두 점 $\mathrm{A'}(2, 9)$, $\mathrm{B}(8, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-9=\frac{6-9}{8-2}(x-2) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+10$

두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+10$, $y=x$의 교점 P의 x좌표가 a이므로

$-\frac{1}{2}a+10=a$

$\frac{3}{2}a=10 \qquad \therefore 3a=20$ 답 ①

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.36~39

01 ③	02 ④	03 6	04 26	05 8
06 9	07 15	08 25	09 ①	10 ③
11 $\frac{5}{2}$	12 ②	13 ①	14 ③	
15 $y=-3x+3$		16 ①	17 ⑤	18 ④
19 17	20 3	21 ②	22 ⑤	23 103
24 ④				

01 점 $(2, -1)$을 점 $(1, 1)$로 옮기기 위해서는 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 되므로 주어진 평행이동은

$(x, y) \longrightarrow (x-1, y+2)$

이 평행이동에 의하여 직선 $3x-y+2=0$이 옮겨지는 직선 l의 방정식은

$3(x+1)-(y-2)+2=0$

$\therefore l : 3x-y+7=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 l이 두 원의 넓이를 동시에 이등분하기 위해서는 두 원의 중심을 동시에 지나야 한다.

$x^2-4x+y^2-2ay-9=0$에서

$(x-2)^2+(y-a)^2=a^2+13$

$x^2-2bx+y^2-2y-1=0$에서

$(x-b)^2+(y-1)^2=b^2+2$

두 원의 중심의 좌표는 각각 $(2, a)$, $(b, 1)$이고, 직선 ㉠은 이 두 점을 지나야 하므로

$6-a+7=0,\ 3b-1+7=0$

$\therefore a=13,\ b=-2$

$\therefore a^2+b^2=13^2+(-2)^2=173$ 답 ③

02 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 방정식은

$y-2=-(x-4)^2 \qquad \therefore y=-x^2+8x-14$

두 이차함수 $y=-x^2+8x-14$, $y=x^2+ax+b$의 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 이차방정식

$-x^2+8x-14=x^2+ax+b$, 즉

$2x^2+(a-8)x+b+14=0$은 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$(a-8)^2-8(b+14)=0$

$\therefore b=\frac{1}{8}(a-8)^2-14$

따라서 점 (a, b)가 나타내는 도형은 이차함수 $y=\frac{1}{8}(x-8)^2-14$의 그래프이고 이 함수의 그래프와 y축이 만나는 점의 y좌표가 c이므로

$c=\frac{1}{8}(0-8)^2-14=-6$ 답 ④

03 $a\neq 0,\ b\neq 0$이므로 조건 (가)에 의하여

$a>0,\ b<0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에 의하여 복소수 z는 순허수이므로

$$\begin{cases} a+b-2=0 \\ a-b=4 \text{ 또는 } a-b=-4 \end{cases}$$

그런데 ㉠에서 $a-b>0$이므로 $a-b=4$

즉, $a+b-2=0$, $a-b=4$를 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-1$

$\therefore (x, y) \longrightarrow (x+3, y-1)$

이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=10$이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

원 ㉡이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원 ㉡과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같다.
원 ㉡과 x축의 교점의 x좌표는
$(x-3)^2+(0+1)^2=10$
$(x-3)^2=9$, $x-3=\pm3$
$\therefore$ $x=6$ 또는 $x=0$
따라서 원 ㉡과 x축의 두 교점은 $(6,\ 0)$, $(0,\ 0)$이므로 구하는 현의 길이는
$6-0=6$ 답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	조건 (가), (나)를 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 경우	40%
(나)	평행이동을 구하고 옮겨진 원의 방정식을 구한 경우	30%
(다)	원이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이를 구한 경우	30%

BLACKLABEL 특강 필수 개념

z^2이 실수일 조건

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)에서 $z^2=a^2-b^2+2abi$
이때 $a=0$, $b\neq0$이면 $z^2=-b^2<0$
즉, z가 순허수이면 z^2은 음의 실수이다.
또한, $b=0$이면 $z^2=a^2\geq0$
즉, z가 실수이면 z^2은 음이 아닌 실수이다.

음수의 제곱근

$a\geq0$, $b<0$이면 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이고,
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$이거나 $a=0$이다.

04 두 삼각형 OAB, O′A′B′에 내접하는 원을 각각 C, C'이라 하자. 원 C의 반지름의 길이를 r $(0<r<3)$이라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 중심이 제1사분면 위에 있으므로 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.
두 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$에 대하여 직선 AB의 x절편이 4, y절편이 3이므로 직선 AB의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$
$\therefore$ $3x+4y-12=0$
이때 원 C는 직선 AB에 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$과 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 r과 같다.
즉, $\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$에서
$|7r-12|=5r$
$7r-12=5r$ 또는 $7r-12=-5r$
$\therefore$ $r=6$ 또는 $r=1$
그런데 $0<r<3$이므로 $r=1$
*즉, 원 C의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.
한편, 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$이 점 $\mathrm{A}'(9,\ 2)$로 옮겨졌으므로 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 이 평행이동에 의하여 원 C가 옮겨지는 원 C'의 방정식은
$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1$
$(x-6)^2+(y-3)^2=1$
$\therefore$ $x^2+y^2-12x-6y+44=0$
따라서 $a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로
$a+b+c=26$ 답 26

• 다른 풀이 •
직각삼각형 OAB에 내접하는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r $(0<r<3)$이라 하면 $\mathrm{C}(r,\ r)$이고
$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{COA}+\triangle\mathrm{COB}+\triangle\mathrm{CAB}$
$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times r\times\overline{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\times r\times\overline{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\times r\times\overline{\mathrm{AB}}$
$\frac{1}{2}r\times(4+3+5)=6$ $\therefore$ $r=1$
다음은 *와 같다.

05 원 C는 y축에 접하므로 중심의 좌표를 $(1,\ p)$라 하면 원 C가 직선 l : $x+y-8=0$에 접하므로 원의 중심과 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉,
$\frac{|1+p-8|}{\sqrt{2}}=1$에서 $|p-7|=\sqrt{2}$
$\therefore$ $p=7\pm\sqrt{2}$
그런데 $p>8$이므로 $p=7+\sqrt{2}$
원 C'은 x축에 접하므로 중심의 좌표를 $(q,\ 1)$이라 하면 원 C'도 직선 l : $x+y-8=0$에 접하므로 원의 중심과 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉,
$\frac{|q+1-8|}{\sqrt{2}}=1$에서 $|q-7|=\sqrt{2}$
$\therefore$ $q=7\pm\sqrt{2}$
그런데 $0<q<8$이므로 $q=7-\sqrt{2}$
이때 원 C의 중심 $(1,\ 7+\sqrt{2})$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점이 원 C'의 중심 $(7-\sqrt{2},\ 1)$이므로
$1+a=7-\sqrt{2}$, $7+\sqrt{2}+b=1$
$\therefore$ $a=6-\sqrt{2}$, $b=-6-\sqrt{2}$
$\therefore$ $(a+b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$ 답 8

• 다른 풀이 •
원 C의 중심의 좌표를 $(1,\ p)$라 하면
$\frac{|1+p-8|}{\sqrt{2}}=1$에서 $p=7+\sqrt{2}$ ($\because$ $p>8$)
즉, 원 C의 중심의 좌표는 $(1,\ 7+\sqrt{2})$이다.
원을 평행이동하면 원의 중심도 똑같이 평행이동되므로 원 C를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원 C'의 중심의 좌표는
$(1+a,\ 7+\sqrt{2}+b)$
그런데 원 C'이 x축에 접하고 반지름의 길이가 1이므로
$7+\sqrt{2}+b=1$ $\therefore$ $b=-6-\sqrt{2}$
또한, 원 C'이 직선 $x+y-8=0$에 접하므로 원 C'의 중심 $(1+a,\ 1)$과 직선 $x+y-8=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같다. 즉,

$\dfrac{|1+a+1-8|}{\sqrt{2}}=1$에서 $|a-6|=\sqrt{2}$

$\therefore\ a=6\pm\sqrt{2}$

그런데 원 C'의 중심의 x좌표가 8보다 작으므로

$1+a<8 \qquad \therefore\ a<7$

즉, $a=6-\sqrt{2}$이므로

$a+b=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ (a+b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$

06

직선 $2x+y-3=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x+y-3=0$

위의 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2y+x-3=0 \qquad \therefore\ l : x-2y-3=0$

이때 원 $(x-a)^2+(y-3)^2=a^2$이 직선 l에 대하여 대칭이려면 원의 중심 $(a,\ 3)$이 직선 l 위에 있어야 하므로

$a-6-3=0$

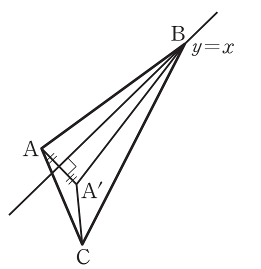
$\therefore\ a=9$ 답 9

07

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 5)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25}=5$

한편, 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 A'이고 점 $\mathrm{B}(5,\ 5)$는 직선 $y=x$ 위에 있으므로



$\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{AB}}=5$

직선 AB의 방정식은

$y-2=\dfrac{5-2}{5-1}(x-1)$

$\therefore\ 3x-4y+5=0$

점 $\mathrm{C}(k,\ 2k-5)$와 직선 AB 사이의 거리를 h_1이라 하면

$h_1=\dfrac{|3k-4(2k-5)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-5k+25|}{5}$

$=|-k+5|=5-k\ (\because\ k<5)$

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h_1=\dfrac{1}{2}\times5\times(5-k)=\dfrac{25-5k}{2}$

직선 $\mathrm{A'B}$는 직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선이므로 직선 $\mathrm{A'B}$의 방정식은

$3y-4x+5=0 \qquad \therefore\ 4x-3y-5=0$

점 $\mathrm{C}(k,\ 2k-5)$와 직선 $\mathrm{A'B}$ 사이의 거리를 h_2라 하면

$h_2=\dfrac{|4k-3(2k-5)-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-2k+10|}{5}$

$=\dfrac{10-2k}{5}\ (\because\ k<5)$

즉, 삼각형 $\mathrm{A'BC}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A'B}}\times h_2=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{10-2k}{5}=5-k$

이때 두 삼각형 ABC, $\mathrm{A'BC}$의 넓이의 합이 10이므로

$\dfrac{25-5k}{2}+5-k=10$

$35-7k=20 \qquad \therefore\ 7k=15$ 답 15

08

원 $C_1 : (x-1)^2+(y-2)^2=k$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(-y-2)^2=k$

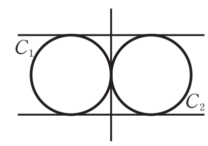
$\therefore\ (x-1)^2+(y+2)^2=k$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-1)^2+(x+2)^2=k$

$\therefore\ C_2 : (x+2)^2+(y-1)^2=k$

두 원 C_1, C_2에 동시에 접하는 접선이 3개이려면 오른쪽 그림과 같이 두 원이 서로 외접해야 한다.



즉, 두 원의 중심 $(1,\ 2)$와 $(-2,\ 1)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로

$\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}=2\sqrt{k}$

$4k=10 \qquad \therefore\ k=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ 10k=25$ 답 25

09

원 $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 위를 움직이는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(b,\ a)$이다.

또한, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{P}'(a,\ 0)$, $\mathrm{Q}'(b,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PP'}}=b$, $\overline{\mathrm{QQ'}}=a \qquad \therefore\ |\overline{\mathrm{PP'}}-\overline{\mathrm{QQ'}}|=|b-a|$

이때 $|b-a|=k\ (k\geq0)$라 하면

$b-a=k$ 또는 $b-a=-k$

$\therefore\ b=a+k$ 또는 $b=a-k$

이때 점 $(a,\ b)$는 직선 $y=x+k$ 또는 $y=x-k$ 위에 있으므로 점 P는 주어진 원과 이 두 직선의 교점이다.

직선과 원이 만나면서 k의 값, 즉 y절편이 최대이려면 직선과 원이 접해야 하므로 원의 중심 $(4,\ 4)$와 직선 $x-y+k=0$ 또는 $x-y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 한다. 즉,

$\dfrac{|4-4\pm k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$에서 $|k|=2\sqrt{2}$

$\therefore\ k=2\sqrt{2}\ (\because\ k\geq0)$

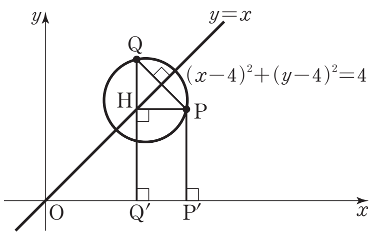
따라서 $|\overline{\mathrm{PP'}}-\overline{\mathrm{QQ'}}|$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

원 $(x-4)^2+(y-4)^2=4$의 중심 $(4,\ 4)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭인 두 점 P, Q는 기울기가 -1인 직선 위에 있고, 점 Q도 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 위에 있다.

다음 그림과 같이 점 P가 직선 $y=x$의 아래쪽에서 원 위에 있는 점이라 하고 점 P에서 $\overline{QQ'}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|=\overline{QH}$



$|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|$의 값이 최대가 되려면 $\overline{QH}$의 길이가 최대가 되어야 하므로 두 점 P, Q를 이은 선분 PQ는 원의 지름이어야 한다.

$\triangle$PQH는 $\overline{PH}=\overline{QH}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PH}=\overline{QH}=a$라 하면 $\overline{PQ}=\sqrt{2}a$

즉, $\sqrt{2}a=4$에서 $a=2\sqrt{2}$

따라서 $|\overline{PP'}-\overline{QQ'}|$의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

10 점 A$(-1,\ 3)$을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(-3,\ 3)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-3,\ -3)$

또한, 점 B$(5,\ k)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-5,\ k)$

이 점을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점 Q의 좌표는 $(-5,\ k+2)$

직선 AQ의 기울기는 $\dfrac{(k+2)-3}{-5-(-1)}=-\dfrac{k-1}{4}$

직선 BP의 기울기는 $\dfrac{-3-k}{-3-5}=\dfrac{k+3}{8}$

두 직선 AQ, BP가 서로 수직이므로

$-\dfrac{k-1}{4}\times\dfrac{k+3}{8}=-1,\ (k-1)(k+3)=32$

$k^2+2k-35=0,\ (k+7)(k-5)=0$

$\therefore k=5\ (\because k>0)$ 답 ③

11 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$x^2+(y+1-1)^2=9 \qquad \therefore x^2+y^2=9$

원 $x^2+y^2=9$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2=9 \qquad \therefore x^2+y^2=9$

즉, 원 $x^2+(y-1)^2=9$ 위의 점 P를 이동한 점 Q는 원 $x^2+y^2=9$ 위에 있다.

한편, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대가 되려면 점 Q는 선분 AB로부터 가장 멀리 있는 원 위의 점이어야 한다.

즉, 직선 AB에 수직이고 원 $x^2+y^2=9$의 중심 O$(0,\ 0)$을 지나는 직선이 원과 만나는 점 중에서 선분 AB로부터 멀리 있는 점이 점 Q가 되어야 한다.*

이때 A$(1,\ -\sqrt{3})$, B$(3,\ \sqrt{3})$이므로 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3}$

즉, 직선 OQ의 기울기는 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직선 OQ의 방정식은

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$의 교점의 x좌표는

$x^2+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=9$에서

$\dfrac{4}{3}x^2=9,\ x^2=\dfrac{27}{4}$

$\therefore x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

이때 구하는 점 Q는 선분 AB로부터 가장 멀리 있는 점이므로

$x=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ Q$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

한편, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a,\ b-1)$이므로

$b-1=\dfrac{3}{2} \qquad \therefore b=\dfrac{5}{2}$

따라서 점 P의 y좌표는 $\dfrac{5}{2}$이다. 답 $\dfrac{5}{2}$

BLACKLABEL 특강 참고 *

*에서 오른쪽 그림과 같이 점 Q는 원 $x^2+y^2=9$의 접선 중 직선 AB와 평행한 직선 l 위의 점이다.

이때 직선 AB의 기울기는

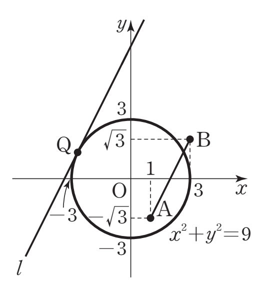
$\dfrac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3}$이므로

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm3\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$y=\sqrt{3}x\pm6$

$\therefore l : y=\sqrt{3}x+6$

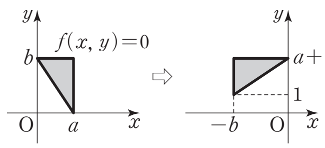


따라서 점 Q의 좌표는 직선 $y=\sqrt{3}x+6$과 원 $x^2+y^2=9$의 교점의 좌표와 같다.

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

문제에서는 점의 이동이 주어졌지만 도형의 이동을 이용해야 해결할 수 있는 문제이다. 점의 평행이동에서는 이동하는 만큼 더해서 좌표에 대입하지만, 도형의 평행이동에서는 이동하는 만큼 빼서 방정식에 대입해야 함에 유의하자.

12 [그림 1]과 같이 방정식 $f(x,\ y)=0$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ $(b>a)$라 하면 [그림 2]와 같이 이동된다.



[그림 1] [그림 2]

주어진 도형의 이동에 의하여

점 $(a,\ 0)$은 점 $(0,\ a+1)$로,

점 $(0,\ b)$는 점 $(-b,\ 1)$로,

점 $(a,\ b)$는 점 $(-b,\ a+1)$로 이동하였으므로

점 $(x,\ y)$는 점 $(-y,\ x+1)$로 이동한다.

이때 [그림 2]의 도형의 방정식을 $g(x',\ y')=0$이라 하면

점 $(-y,\ x+1)$은 도형 $g(x',\ y')=0$ 위에 있으므로

$-y=x',\ x+1=y'$

$\therefore\ x=y'-1,\ y=-x'$

이것을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면 [그림 2]의 도형의 방정식은

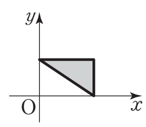
$f(y-1,\ -x)=0$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

주어진 도형 $f(x,\ y)=0$을 다음 순서대로 이동하면 [그림 2]의 도형을 나타낸다.

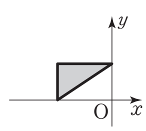
(ⅰ) 주어진 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은

$f(y,\ x)=0$



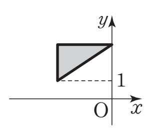
(ⅱ) (ⅰ)의 도형 $f(y,\ x)=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은

$f(y,\ -x)=0$



(ⅲ) (ⅱ)의 도형 $f(y,\ -x)=0$을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은

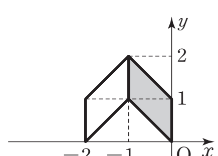
$f(y-1,\ -x)=0$



13 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동 또는 대칭이동을 이용하여 도형 $f(-y+2,\ x+1)=0$이 되도록 하려면 다음의 순서대로 이동해야 한다.

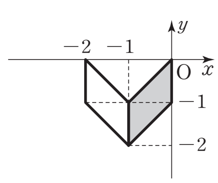
(ⅰ) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은

$f(y,\ x)=0$

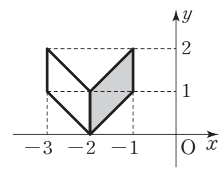


(ⅱ) 방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은

$f(-y,\ x)=0$



(ⅲ) 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 오른쪽 그림과 같고 도형의 방정식은



$f(-(y-2),\ x+1)=0$ $\therefore\ f(-y+2,\ x+1)=0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 방정식 $f(-y+2,\ x+1)=0$이 나타내는 도형은 ①이다. 답 ①

14 해결단계

❶ 단계	원의 중심을 C, 원과 직선 $y=x+10$의 두 교점을 A, B, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 C′이라 할 때, $\triangle$ACC′은 $\angle$ACC′$=60°$인 직각삼각형임을 파악한다.
❷ 단계	도형 $f(x,\ y)=0$을 도형 $f(y-9,\ x+9)=0$으로 옮기는 평행이동과 대칭이동을 이용하여 도형 $f(y-9,\ x+9)=0$이 어떤 도형인지 구한다.
❸ 단계	두 도형 $f(x,\ y)=0$, $f(y-9,\ x+9)=0$의 공통부분이 직선 CC′에 의하여 2개의 정삼각형으로 이등분됨을 이용하여 그 넓이를 구한다.

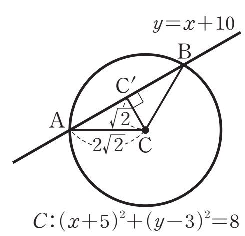
원 $C:(x+5)^2+(y-3)^2=8$이라 하고, 원 C의 중심을 C, 이 원과 직선 $y=x+10$의 두 교점을 A, B라 하자.

원의 중심 $\mathrm{C}(-5,\ 3)$과 직선 $y=x+10$, 즉

$x-y+10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5-3+10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 삼각형 ACC′에서 피타고라스 정리에 의하여



$$\overline{\mathrm{AC'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CC'}}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC'}}=2\sqrt{6}$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CC'}}:\overline{\mathrm{AC'}}=2:1:\sqrt{3}$이므로 $\triangle$ACC′은 $\angle\mathrm{ACC'}=60°$인 직각삼각형이다.

$\therefore\ \angle\mathrm{ACB}=120°$

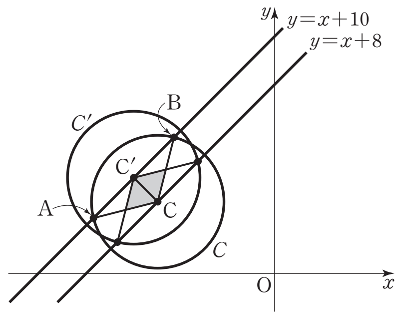
한편, 도형 $f(y-9,\ x+9)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -9만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이므로 처음 원의 중심 $\mathrm{C}(-5,\ 3)$은 점 $(-6,\ 4)$로, 직선 $y=x+10$은 직선 $y=x+8$로 이동한다.

원 C가 주어진 평행이동과 대칭이동에 의하여 옮겨진 원을 C'이라 하면 방정식 $f(y-9,\ x+9)=0$이 나타내는 도형은 원 $C':(x+6)^2+(y-4)^2=8$과 직선 $y=x+8$의 두 교점 및 원 C'의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다.

이때 원 C'의 중심을 C′이라 하면 점 $\mathrm{C'}(-6,\ 4)$는 직선 $y=x+10$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{C}(-5,\ 3)$, $\mathrm{C'}(-6,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 -1로 직선 $y=x+10$과 수직이다.

즉, 두 도형 $f(x,\ y)=0$, $f(y-9,\ x+9)=0$의 내부의

공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 직선 CC′이 공통부분을 이등분하고, 직선 CC′으로 나누어진 각 도형은 한 변의 길이가 $\overline{CC'}=\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 공통부분의 넓이는

$2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\sqrt{3}$ 답 ③

15 직선 l의 기울기를 m이라 하면 점 A$(2,\ -3)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y+3=m(x-2)$

$\therefore\ l : y=m(x-2)-3$

직선 l 위의 점을 P$(a,\ b)$라 하고, 이 점을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 점을 Q$(c,\ d)$라 하면 선분 PQ의 중점이 점 $(1,\ 3)$과 일치하므로

$\dfrac{a+c}{2}=1,\ \dfrac{b+d}{2}=3$

$\therefore\ a=2-c,\ b=6-d$

점 P$(2-c,\ 6-d)$가 직선 l 위에 있으므로

$6-d=m(2-c-2)-3$에서 $d=mc+9$

즉, 점 Q$(c,\ d)$가 직선 $y=mx+9$ 위에 있으므로 직선 l을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=mx+9$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=mx+9$

$\therefore\ y=-mx-9$

직선 $y=-mx-9$가 점 A$(2,\ -3)$을 지나므로

$-3=-2m-9$

$2m=-6\qquad\therefore\ m=-3$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=-3(x-2)-3$

$\therefore\ y=-3x+3$ 답 $y=-3x+3$

• 다른 풀이 •

직선 l을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1이라 하고, 직선 l을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2라 하자.

이때 직선 l_2도 점 A$(2,\ -3)$을 지나므로 직선 l_2의 기울기를 n이라 하면

$l_2 : y=n(x-2)-3$

이때 직선 l_1은 직선 l_2를 x축에 대하여 대칭이동한 직선과 같으므로

$l_1 : y=-n(x-2)+3$

이때 두 직선 $l,\ l_1$은 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이고, 직선 l_1은 점 $(2,\ 3)$을 지나므로 직선 l은 점 $(2\times1-2,\ 2\times3-3)$, 즉 $(0,\ 3)$을 지난다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{-3-3}{2-0}(x-2)-3\qquad\therefore\ y=-3x+3$

16 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

에서 포물선 $y=x^2-4x+1$의 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -3)$이다. 포물선의 꼭짓점은 대칭이동에 의하여 포물선의 꼭짓점으로 이동되므로 포물선 $y=x^2-4x+1$을 점 $(-1,\ a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 두 점 $(2,\ -3)$, $(p,\ q)$를 이은 선분의 중점이 점 $(-1,\ a)$와 일치한다.

즉, $\dfrac{2+p}{2}=-1,\ \dfrac{-3+q}{2}=a$이므로

$p=-4,\ q=2a+3$

따라서 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-4,\ 2a+3)$이다.

이때 대칭이동하여도 포물선의 폭은 변하지 않고, 처음 포물선이 아래로 볼록한 포물선이므로 대칭이동한 포물선은 위로 볼록한 포물선이 된다.

그런데 위로 볼록한 포물선이 x축과 만나지 않으려면 꼭짓점의 y좌표가 음수이어야 하므로

$2a+3<0\qquad\therefore\ a<-\dfrac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

포물선 $y=x^2-4x+1$을 점 $(-1,\ a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$2a-y=(-2-x)^2-4(-2-x)+1$ ← x 대신 $2\times(-1)-x$, y 대신 $2a-y$를 대입

$\therefore\ y=-x^2-8x+2a-13$

이 포물선이 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $-x^2-8x+2a-13=0$, 즉 $x^2+8x-2a+13=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\dfrac{D}{4}=16+2a-13<0$

$2a<-3\qquad\therefore\ a<-\dfrac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

17 ㄱ. 점 A$(3,\ 2)$를 점 P$(6,\ 0)$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AB의 중점이 P이므로

$\dfrac{a+3}{2}=6,\ \dfrac{b+2}{2}=0$

$\therefore a=9,\ b=-2$

즉, 점 B의 좌표는 $(9,\ -2)$이다. (참)

ㄴ. 선분 AB의 길이가 최대가 되려면 두 점 A, P 사이의 거리가 최대가 되어야 하므로 점 P는 점 A를 지나는 지름의 양 끝점 중에서 점 A로부터 먼 곳에 있어야 한다.

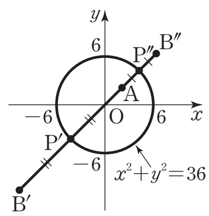
점 $A(3,\ 4)$에 대하여

$\overline{OA}+\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}+6=11$

이므로 선분 AB의 길이의 최댓값은

$\overline{AB}=2\overline{AP}=2\times 11=22$ (참)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 원의 지름의 양 끝점을 각각 P′, P″이라 하면 선분 AB의 길이가 최대일 때의 점 P의 위치는 P′, 최소일 때의 점 P의 위치는 P″이다.



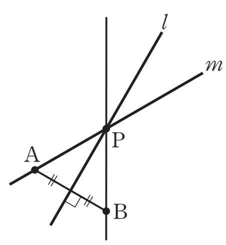
이때 점 A를 두 점 P′, P″에 대하여 각각 대칭이동한 점을 B′, B″이라 하고, $\overline{OA}=l$이라 하면

$\overline{AB'}=2(6+l),\ \overline{AB''}=2(6-l)$

따라서 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 항상 $\overline{AB'}+\overline{AB''}=2(6+l)+2(6-l)=24$로 일정하다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

18 직선 $m : x-y+2=0$ 위의 한 점 $A(-1,\ 1)$을 잡고 점 A를 직선 $l : 2x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $B(a,\ b)$라 하면



(i) 선분 AB의 중점

$\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$은 직선 l 위에 있으므로

$2\times\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b+1}{2}-1=0$

$\therefore 2a-b-5=0$ ……㉠

(ii) 직선 AB가 직선 l과 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-(-1)}=-\dfrac{1}{2},\ a+1=-2b+2$

$\therefore a+2b-1=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{11}{5},\ b=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore B\left(\dfrac{11}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$

한편, 두 직선 $l : 2x-y-1=0,\ m : x-y+2=0$의 교점을 P라 하고, 두 방정식을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=5$

$\therefore P(3,\ 5)$

직선 l에 대하여 직선 m과 대칭인 직선은 두 점 B, P를 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-5=\dfrac{5-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{3-\dfrac{11}{5}}(x-3)$$

$\therefore 7x-y-16=0$ **답** ④

• 다른 풀이 •

직선 $m : x-y+2=0$ 위의 한 점을 $A(a,\ a+2)$라 하고, 이 점을 직선 $l : 2x-y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a',\ b')$이라 하자.

(i) 선분 AA′의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a+a'}{2},\ \dfrac{a+2+b'}{2}\right)$이고, 이 점이 직선 $l : 2x-y-1=0$ 위에 있으므로

$a+a'-\dfrac{a+2+b'}{2}-1=0$

$a+2a'-b'-4=0$

$\therefore a=-2a'+b'+4$ ……㉢

(ii) 선분 AA′이 직선 $l : 2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$과 수직이므로

$\dfrac{b'-a-2}{a'-a}=-\dfrac{1}{2}$

$a-a'=2b'-2a-4$

$\therefore 3a=a'+2b'-4$ ……㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$3(-2a'+b'+4)=a'+2b'-4$

$\therefore 7a'-b'-16=0$

따라서 점 $(a',\ b')$은 직선 $7x-y-16=0$ 위에 있으므로 구하는 직선의 방정식은

$7x-y-16=0$

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

도형의 이동에 대한 문제를 풀 때에는 전체 도형을 이동시키려고 하면 복잡하고 어려울 수 있다. 도형을 이루고 있는 점의 이동으로 바꾸어 생각하면 보다 간단한데, 직선은 직선 위의 두 점, 원은 원의 중심을 이동시키는 것이다. 즉, 직선 l에 대하여 직선 m을 대칭이동할 때, 두 직선 l, m의 교점을 P라 하면 대칭이동에 의하여 점 P의 위치는 변하지 않으므로 우선 점 P의 좌표를 구하고, 직선 m 위의 P가 아닌 한 점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 B를 구하여 두 점 P, B를 지나는 직선의 방정식을 구하면 직선 l에 대하여 직선 m과 대칭인 직선의 방정식을 구할 수 있다.

19 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$에서

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

이 원과 원 $x^2+y^2=c$의 중심을 각각 C, O라 하면

$C(2,\ 4),\ O(0,\ 0)$

이때 점 C를 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동한 점은 O이다.

(i) 선분 CO의 중점 $(1,\ 2)$는 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$2=a+b$ ……㉠

(ⅱ) 직선 CO와 직선 $y=ax+b$는 수직이므로

$\frac{4-0}{2-0}=-\frac{1}{a}$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=\frac{5}{2}$

한편, 대칭이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$c=20$

$\therefore a-b+c=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+20=17$ **답** 17

20 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점이 B이므로

$\mathrm{B}(-b,\ -a)$

점 $\mathrm{B}(-b,\ -a)$를 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 점이 C이므로

$\mathrm{C}(2\times2-(-b),\ -a)$, 즉 $\mathrm{C}(b+4,\ -a)$

삼각형 OAC에서

$\overline{\mathrm{OA}}^2=a^2+b^2$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(b+4-a)^2+(-a-b)^2$

$=2a^2+2b^2-8a+8b+16$

$\overline{\mathrm{OC}}^2=(b+4)^2+(-a)^2$

$=a^2+b^2+8b+16$

이때 $a>0,\ b>0$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2=a^2+b^2-8a+8b+16$
$=(a-4)^2+(b+4)^2-16>0$

$\overline{\mathrm{OA}}^2<\overline{\mathrm{AC}}^2,\ \overline{\mathrm{OA}}^2<\overline{\mathrm{OC}}^2$

즉, △OAC가 직각삼각형일 때, 빗변이 될 수 있는 것은 $\overline{\mathrm{AC}}$ 또는 $\overline{\mathrm{OC}}$이다.

(ⅰ) 빗변이 $\overline{\mathrm{AC}}$인 직각삼각형일 때,

$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2$이 성립해야 하므로

$(a^2+b^2)+(a^2+b^2+8b+16)$

$=2a^2+2b^2-8a+8b+16$

$2a^2+2b^2+8b+16=2a^2+2b^2-8a+8b+16$

$8a=0$ $\therefore a=0$

그런데 a가 자연수라는 조건에 맞지 않으므로 $\overline{\mathrm{AC}}$가 빗변인 직각삼각형이 될 수 없다.

(ⅱ) 빗변이 $\overline{\mathrm{OC}}$인 직각삼각형일 때,

$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{OC}}^2$이 성립해야 하므로

$(a^2+b^2)+(2a^2+2b^2-8a+8b+16)$

$=a^2+b^2+8b+16$

$3a^2+3b^2-8a+8b+16=a^2+b^2+8b+16$

$a^2+b^2-4a=0$

$\therefore (a-2)^2+b^2=4$

자연수 a와 양수 b에 대하여 이를 만족시키는 경우는

$a=1,\ b=\sqrt{3}$ 또는 $a=2,\ b=2$ 또는 $a=3,\ b=\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 점 A는 $(1,\ \sqrt{3}),\ (2,\ 2),\ (3,\ \sqrt{3})$의 3개이다. **답** 3

21 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 직선 $y=-2x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,\ b)$라 하면

(ⅰ) 선분 AA′의 중점 $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$은 직선 $y=-2x+2$ 위에 있으므로

$\frac{b+3}{2}=-2\times\frac{a+2}{2}+2$

$b+3=-2a-4+4$

$\therefore 2a+b+3=0$ ……㉠

(ⅱ) 직선 AA′이 직선 $y=-2x+2$와 수직이므로

$\frac{b-3}{a-2}=\frac{1}{2}$

$a-2=2b-6$

$\therefore a-2b+4=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$

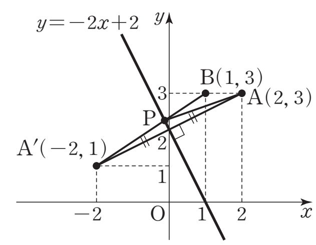
$\therefore \mathrm{A}'(-2,\ 1)$

이때 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PA'}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 $y=-2x+2$와 직선 A′B의 교점이어야 한다.



두 점 $\mathrm{A}'(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3-1}{1-(-2)}(x-1)$

$\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

$y=-2x+2,\ y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{8},\ y=\frac{9}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{8},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

점 $\mathrm{B}(1,\ 3)$을 직선 $y=-2x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하고 같은 방법으로 구하면 $\mathrm{B}'\left(-\frac{7}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

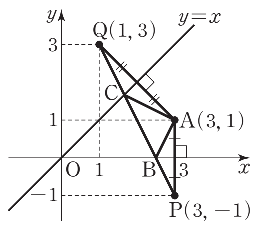
두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}'\left(-\frac{7}{5},\ \frac{9}{5}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{\frac{9}{5}-3}{-\frac{7}{5}-2}(x-2)$

$\therefore y=\frac{6}{17}x+\frac{39}{17}$

이때 점 P는 두 직선 $y=-2x+2$, $y=\frac{6}{17}x+\frac{39}{17}$의 교점임을 이용하여 점 P의 좌표를 구하여도 된다.

22 오른쪽 그림과 같이 지점 O를 좌표평면 위의 원점, 직선도로 l을 x축으로 정하면 직선도로 m은 직선 $y=x$, 정류소 A의 좌표는 $(3,\ 1)$이다. 또한, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면 $\mathrm{P}(3,\ -1)$이고, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면 점 $\mathrm{Q}(1,\ 3)$이다.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CQ}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CQ}}$$
$$\geq\overline{\mathrm{PQ}}$$

즉, 만들려고 하는 도로의 길이의 최솟값은 $\overline{\mathrm{PQ}}$이고, 두 점 B, C가 직선 PQ 위에 있을 때 최소이다.

두 점 $\mathrm{P}(3,\ -1)$, $\mathrm{Q}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{3-(-1)}{1-3}(x-1)$$

$\therefore\ y=-2x+5$

이때 직선 $y=-2x+5$와 x축의 교점은 $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$,

두 직선 $y=-2x+5$, $y=x$의 교점은 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

이므로 두 정류소 B와 C 사이의 거리는

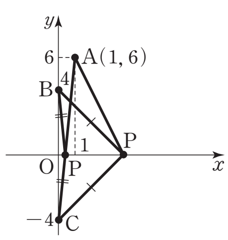
$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}(\mathrm{km})$$

답 ⑤

23 세 점 P, A, B를 $\mathrm{P}(x,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$로 정하면 $\sqrt{(x-1)^2+36}$은 두 점 A, P 사이의 거리이고 $\sqrt{x^2+16}$은 두 점 B, P 사이의 거리이다.

즉, $\sqrt{(x-1)^2+36}+\sqrt{x^2+16}$의 최솟값은 점 A에서 점 P를 거쳐 점 B까지 가는 최단거리를 의미한다.

이때 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$은 x축 위에 있으므로 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하면 $\mathrm{C}(0,\ -4)$



$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}$$
$$\geq\overline{\mathrm{AC}}$$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AC}}$이고, 점 P가 직선 AC와 x축의 교점일 때 최소이다.

직선 AC의 방정식은

$$y-(-4)=\frac{-4-6}{0-1}x \qquad \therefore\ y=10x-4$$

주어진 식의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표는

$10x-4=0$에서 $x=\frac{2}{5}$

이고 이때의 최솟값은

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1-0)^2+\{6-(-4)\}^2}=\sqrt{101}$$

따라서 $a=\frac{2}{5}$, $b=\sqrt{101}$이므로

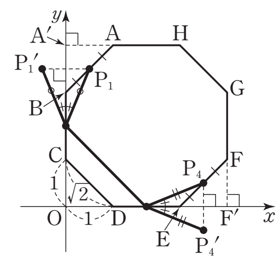
$$5a+b^2=5\times\frac{2}{5}+(\sqrt{101})^2=103$$

답 103

24 해결단계

❶ 단계	주어진 그림을 좌표평면 위에 놓고 각 점의 좌표를 구한다.
❷ 단계	두 점 P_1, P_4를 각각 y축, x축에 대하여 대칭이동한 점 P_1', P_4'의 좌표를 구한다.
❸ 단계	구하는 최단거리가 $\overline{\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_4'}$과 같음을 파악한다.
❹ 단계	$\overline{\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_4'}$의 길이를 구한다.

정팔각형 ABCDEFGH의 두 변 DE, BC를 포함하는 두 직선을 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면에 정팔각형을 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



정팔각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$에서

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}}=1 \qquad \therefore\ \mathrm{C}(0,\ 1)$, $\mathrm{D}(1,\ 0)$

$\mathrm{E}(1+\sqrt{2},\ 0)$이고, 점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 F′이라 하면 $\overline{\mathrm{EF}}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{EF'}}=1$에서

$\mathrm{F'}(2+\sqrt{2},\ 0)$

점 F의 x좌표는 점 F′의 x좌표, 점 F의 y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{F}(2+\sqrt{2},\ 1)$

$\mathrm{B}(0,\ 1+\sqrt{2})$이고, 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 A′이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{A'B}}=1$에서

$\mathrm{A'}(0,\ 2+\sqrt{2})$

점 A의 x좌표는 점 D의 x좌표, 점 A의 y좌표는 점 A′의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{A}(1,\ 2+\sqrt{2})$

변 AB의 중점 P_1과 변 EF의 중점 P_4는

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{P}_4\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

점 P_1을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_1', 점 P_4를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_4'이라 할 때,

$\mathrm{P}_1'\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{P}_4'\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로 네 점 P_1', B, E, P_4'이 한 직선 위에 있고, 두 점 P_2, P_3이 각각 B, E일 때, 구하는 최단 거리는 $\overline{\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_4'}$과 같다.

따라서 구하는 최단거리는

$$\overline{\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_4'}=\sqrt{\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2(2+\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{2}(2+\sqrt{2})$$
$$=2+2\sqrt{2}$$

답 ④

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.40~41

01 $6+2\sqrt{5}$	02 88	03 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	04 8	05 24
06 31	07 $-11\le k\le -\frac{19}{4}$	08 $\sqrt{34}$	09 $10\sqrt{3}$ m	
10 $26+5\sqrt{2}$	11 37	12 15		

01 해결단계

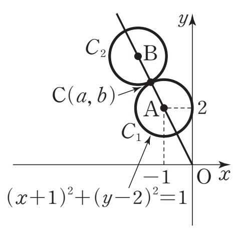
❶단계	두 원 C_1, C_2가 외접할 조건을 찾는다.
❷단계	a^2+b^2의 값이 최대가 되는 조건을 찾는다.
❸단계	a^2+b^2의 최댓값을 구한다.

원 $C_1 : x^2+y^2+2x-4y+4=0$에서

$C_1 : (x+1)^2+(y-2)^2=1$

점 $(a,\ b)$에 대하여 서로 대칭인 두 원 C_1과 C_2가 외접하려면 점 $(a,\ b)$는 접점이어야 한다. 이때 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, B라 하고 점 $(a,\ b)$를 점 C라 하면 세 점 A, C, B는 이 순서대로 한 직선 위에 있다.

한편, $a^2+b^2=\overline{\mathrm{OC}}^2$이므로 이 값이 최대가 되는 경우는 오른쪽 그림과 같이 원 C_1과 직선 OA의 교점 중 원점에서 먼 점이 점 C가 될 때이다.



따라서 구하는 최댓값은

$$a^2+b^2=\overline{\mathrm{OC}}^2=(\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AC}})^2$$
$$=(\sqrt{(-1)^2+2^2}+1)^2$$
$$=(\sqrt{5}+1)^2=6+2\sqrt{5}$$

답 $6+2\sqrt{5}$

02 해결단계

❶단계	규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, $\cdots$의 좌표를 구하여 점 P_n의 규칙성을 파악한다.
❷단계	$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{24}}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{23}}$, $\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{22}}$, $\cdots$의 규칙성을 파악한다.
❸단계	$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{24}}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{23}}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{22}}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{13}}^2$의 값을 구한다.

주어진 규칙에 따라 점 P_2, P_3, P_4, $\cdots$를 구하면

$\mathrm{P}_1(1,\ 2) \xrightarrow{(다)} \mathrm{P}_2(1,\ -2) \xrightarrow{(라)} \mathrm{P}_3(-1,\ -2)$

$\xrightarrow{(나)} \mathrm{P}_4(-2,\ -1) \xrightarrow{(다)} \mathrm{P}_5(-2,\ 1) \xrightarrow{(라)} \mathrm{P}_6(2,\ 1)$

$\xrightarrow{(나)} \mathrm{P}_7(1,\ 2) \xrightarrow{(다)} \cdots$

즉, 자연수 n에 대하여 두 점 P_n, P_{n+6}은 일치한다.

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{24}}^2=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_6}^2=(2-1)^2+(1-2)^2=2$

$\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{23}}^2=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5}^2=(-2-1)^2+\{1-(-2)\}^2=18$

$\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{22}}^2=\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}^2=\{-2-(-1)\}^2+\{-1-(-2)\}^2=2$

$\overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_{21}}^2=\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}^2=2$, $\overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_{20}}^2=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5}^2=18$

$\overline{\mathrm{P}_6\mathrm{P}_{19}}^2=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_6}^2=2$, $\overline{\mathrm{P}_7\mathrm{P}_{18}}^2=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_6}^2=2$

$\cdots$

$\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{13}}^2=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_6}^2=2$

$\therefore \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{24}}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{23}}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{22}}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{13}}^2$

$=4\times(2+18+2)=88$

답 88

03 해결단계

❶단계	주어진 대칭이동과 평행이동을 이용하여 원 O_1을 옮긴 두 원 O_2와 O_3의 방정식을 구한다.
❷단계	부채꼴의 넓이와 삼각형의 넓이를 이용하여 넓이의 합을 구한다.

중심의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원 O_1의 방정식은

$O_1 : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

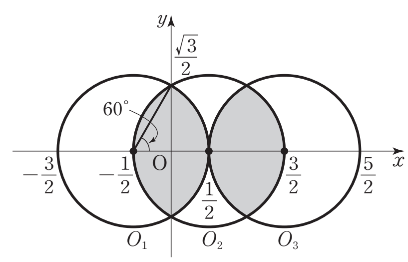
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1 \qquad \therefore O_2 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은

$\left(x-2+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1 \qquad \therefore O_3 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$

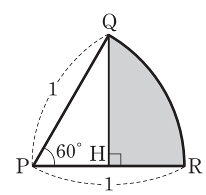
따라서 세 원 O_1, O_2, O_3은 [그림 1]과 같고 구하는 공통 부분의 넓이의 합은 그림에서 색칠한 부분의 넓이의 합과 같다.



[그림 1]

이때 [그림 2]와 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 PRQ를 생각해 보자.

점 Q에서 반지름 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로



[그림 2]

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PQ}}\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이를 S라 하면

$S=$(부채꼴 PRQ의 넓이)$-$(삼각형 PHQ의 넓이)

$=\pi\times 1^2\times\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$

그러므로 [그림 1]의 색칠한 부분은 [그림 2]의 색칠한 부분 8개로 이루어져 있으므로 구하는 넓이의 합은

$8S=8\times\left(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

답 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

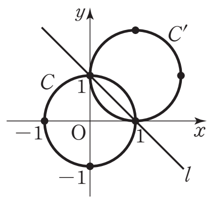
04 해결단계

❶단계	일치하는 점이 2개가 되도록 하는 직선 l의 개수를 구한다.
❷단계	일치하는 점이 3개가 되도록 하는 직선 l의 개수를 구한다.
❸단계	일치하는 점이 4개가 되도록 하는 직선 l의 개수를 구한다.
❹단계	일치하는 점이 2개 이상이 되도록 하는 직선 l의 개수를 구한다.

원 $C : x^2+y^2=1$을 직선 l에 대하여 대칭이동한 원을 C'이라 하자.

(i) 일치하는 점이 2개인 경우

두 원 C, C'의 교점이 2개이려면 오른쪽 그림과 같이 네 교점 중에서 두 점만을 지나는 원을 C'이라 하고, 두 원 C, C'의 교점을 지나는 직선을 l로 정해야 한다.



즉, 이 경우에 직선 l은

$y=x+1$, $y=x-1$, $y=-x+1$, $y=-x-1$

의 4개이다.

(ii) 일치하는 점이 3개인 경우

네 교점 중 세 점만을 지나는 원은 만들 수 없으므로 일치하는 점이 3개가 되도록 하는 직선 l은 존재하지 않는다.

(iii) 일치하는 점이 4개인 경우

두 원 C, C'은 일치해야 하므로 이 경우에 직선 l은

$y=x$, $y=-x$, $x=0$, $y=0$의 4개이다.

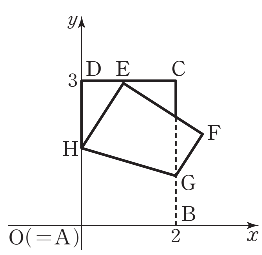
(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 직선 l의 개수는

$4+4=8$ **답** 8

05 해결단계

❶단계	주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구한다.
❷단계	직선 GH의 방정식을 구하여 두 점 G, H의 좌표를 구한다.
❸단계	(□EFGH의 넓이)=(□ABGH의 넓이)임을 이용하여 사다리꼴 EFGH의 넓이의 최솟값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A를 원점으로 하고, 두 반직선 AB, AD가 각각 x축, y축의 양의 방향으로 오도록 직사각형 ABCD를 놓으면



B(2, 0), C(2, 3), D(0, 3)

이때 점 E의 좌표를 $(t, 3)$ $(0<t<2)$이라 하면 점 E는 점 A와 직선 GH에 대하여 대칭이므로 직선 GH는 선분 AE의 수직이등분선이다.

직선 AE의 기울기가 $\frac{3-0}{t-0}=\frac{3}{t}$이므로 직선 GH의 기울기는 $-\frac{t}{3}$이고, 선분 AE의 중점 $\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}\right)$이 직선 GH 위에 있으므로 직선 GH의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=-\frac{t}{3}\left(x-\frac{t}{2}\right)$ $\therefore y=-\frac{t}{3}x+\frac{t^2}{6}+\frac{3}{2}$

$\therefore$ $G\left(2, \frac{t^2}{6}-\frac{2}{3}t+\frac{3}{2}\right)$, $H\left(0, \frac{t^2}{6}+\frac{3}{2}\right)$

한편, 사다리꼴 EFGH의 넓이는 사다리꼴 ABGH의 넓이와 같으므로 사다리꼴 ABGH의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times(\overline{BG}+\overline{AH})\times\overline{AB}&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{3}-\frac{2}{3}t+3\right)\times 2\\&=\frac{t^2}{3}-\frac{2}{3}t+3\\&=\frac{1}{3}(t-1)^2+\frac{8}{3}\ (0<t<2)\end{aligned}$$

즉, 사다리꼴 ABGH의 넓이는 $t=1$일 때 최솟값 $\frac{8}{3}$을 가지므로 사다리꼴 EFGH의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 $m=\frac{8}{3}$이므로 $9m=\frac{8}{3}\times 9=24$ **답** 24

06 해결단계

❶단계	방정식 $f(-x+1, y-1)=0$이 나타내는 도형을 그린다.
❷단계	방정식 $f(y-1, x+2)=0$이 나타내는 도형을 그린다.
❸단계	❶, ❷단계에서 그린 도형의 내부의 공통부분의 넓이를 구한다.

(i) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x, y)=0$

도형 $f(-x, y)=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

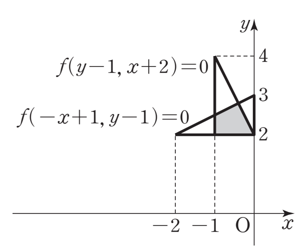
$f(-(x-1), y-1)=0$ $\therefore f(-x+1, y-1)=0$

(ii) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$

도형 $f(y, x)=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(y-1, x-(-2))=0$ $\therefore f(y-1, x+2)=0$

(i), (ii)에서 두 방정식 $f(-x+1, y-1)=0$, $f(y-1, x+2)=0$이 나타내는 도형의 내부의 공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 두 점 $(-2, 2)$, $(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+3$, 두 점 $(0, 2)$, $(-1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+2$이므로 두 직선은 수직이다.

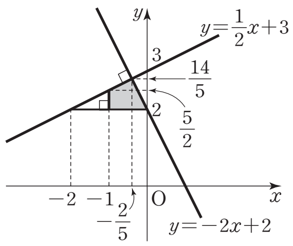
또한, 두 직선의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+3=-2x+2$에서

$\frac{5}{2}x=-1 \qquad \therefore x=-\frac{2}{5}$

이것을 $y=\frac{1}{2}x+3$에 대입하면 $y=\frac{14}{5}$

즉, 교점의 좌표는 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$



구하는 넓이는 세 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=-2x+2$, $y=2$로 둘러싸인 삼각형의 넓이에서 세 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=2$, $x=-1$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 빼면 되므로

$\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{20}$

따라서 $p=20$, $q=11$이므로

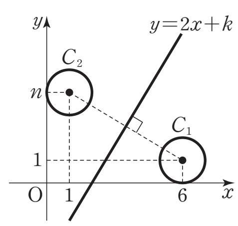
$p+q=31$

답 31

07 해결단계

❶ 단계	k의 값이 최대 또는 최소가 될 조건을 파악한다.
❷ 단계	k의 값이 최대가 되는 조건을 이용하여 k의 값을 구한다.
❸ 단계	k의 값이 최소가 되는 조건을 이용하여 k의 값을 구한다.
❹ 단계	k의 값의 범위를 구한다.

원 C_2가 원 C_1과 가장 멀리 떨어져 있을 때 k의 값은 최대이므로 오른쪽 그림과 같이 원 C_2가 y축에 접할 때 k의 값은 최대이다.



또한, 두 원 C_1, C_2가 일치할 때, k의 값은 최소이다.

k의 값이 최대일 때, 원 C_2의 반지름의 길이는 1이므로 원 C_2의 중심의 좌표를 $(1, n)$이라 하면 원 C_1의 중심 $(6, 1)$과 점 $(1, n)$은 직선 $y=2x+k$에 대하여 대칭이다.

(i) 두 점 $(6, 1)$, $(1, n)$을 연결한 선분의 중점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$은 직선 $y=2x+k$ 위에 있으므로

$\frac{n+1}{2}=2\times\frac{7}{2}+k$

$\therefore k=\frac{n-13}{2}$

(ii) 두 점 $(6, 1)$, $(1, n)$을 지나는 직선이 직선 $y=2x+k$와 수직이므로

$\frac{n-1}{1-6}=-\frac{1}{2}$, $2n-2=5$

$\therefore n=\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{19}{4}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

k의 값이 최소일 때, 직선 $y=2x+k$는 원 C_1의 중심 $(6, 1)$을 지나므로

$1=2\times6+k \qquad \therefore k=-11 \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-11\le k\le-\frac{19}{4}$

답 $-11\le k\le-\frac{19}{4}$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 직선에 대한 원의 대칭이동과 원의 대칭성을 활용한 재미있는 문제이다. 원 C_2의 중심의 좌표를 원 C_1의 중심을 직선 $y=2x+k$에 대한 대칭이동을 통해 직접 구하여 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수도 있지만, k의 값이 각각 최대, 최소가 되는 조건을 먼저 파악한다면 복잡한 계산 없이 k의 값의 범위를 구할 수 있다.

08 해결단계

❶ 단계	포물선 위의 두 점의 좌표를 정한다.
❷ 단계	두 점이 포물선 위에 있음을 이용하여 좌표 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	두 점이 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭임을 이용하여 좌표 사이의 관계식을 구한다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 구한 관계식을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구한다.

포물선 $y=x^2-4x+2$ 위의 서로 다른 두 점을 $A(a, b)$, $B(c, d)$라 하면

$b=a^2-4a+2 \qquad\cdots\cdots$㉠

$d=c^2-4c+2 \qquad\cdots\cdots$㉡

㉠−㉡을 하면 $b-d=(a^2-c^2)-4(a-c)$

$\therefore b-d=(a-c)(a+c-4) \qquad\cdots\cdots$㉢

또한, 두 점 A, B는 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이므로 직선 AB가 직선 $y=x+1$과 수직이다.

즉, $\frac{d-b}{c-a}=-1$에서 $b-d=c-a$

이것을 ㉢에 대입하면 $c-a=(a-c)(a+c-4)$이고, $a\neq c$이므로

$-1=a+c-4 \qquad \therefore a+c=3 \qquad\cdots\cdots$㉣

한편, ㉠+㉡을 하면

$b+d=a^2+c^2-4(a+c)+4 \qquad\cdots\cdots$㉤

선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$는 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$\frac{b+d}{2}=\frac{a+c}{2}+1 \qquad \therefore b+d=a+c+2$

이것을 ㉤에 대입하면

$a+c+2=a^2+c^2-4(a+c)+4$

$a+c+2=(a+c)^2-2ac-4(a+c)+4$

㉣을 위의 식에 대입하면

$3+2=3^2-2ac-4\times3+4$

$2ac=-4 \qquad \therefore ac=-2 \qquad\cdots\cdots$㉥

㉣, ㉥에서

$(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=9-4\times(-2)=17$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

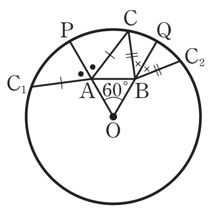
$=\sqrt{2(a-c)^2}$ ($\because b-d=c-a$)

$=\sqrt{2\times17}=\sqrt{34}$

답 $\sqrt{34}$

09 해결단계

❶ 단계	대칭이동을 이용하여 주어진 세 선분의 길이의 합이 최소가 될 조건을 찾는다.
❷ 단계	원과 현의 성질을 이용하여 세 선분의 길이의 합의 최솟값을 구한다.



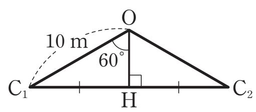
오른쪽 그림과 같이 점 C를 두 선분 OP, OQ에 대하여 각각 대칭이동한 점을 C_1, C_2라 하면

$\overline{AC}=\overline{AC_1}$, $\overline{BC}=\overline{BC_2}$

$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{AB}+\overline{BC_2}+\overline{C_1A}$

$\geq\overline{C_1C_2}$



또한, $\angle POQ=60°$이므로

$\angle C_1OC_2=2\angle POQ=120°$

└ $\angle C_1OP=\angle COP$, $\angle COQ=\angle C_2OQ$

$\overline{OC_1}=\overline{OC_2}$에서 $\triangle OC_1C_2$는 이등변삼각형이다.

점 O에서 변 C_1C_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle C_1OH$는 $\angle C_1OH=60°$, $\angle C_1HO=90°$, $\overline{OC_1}=10$ m인 직각삼각형이므로

$\overline{C_1H}=5\sqrt{3}$(m)

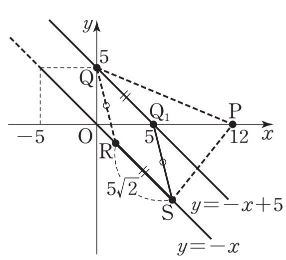
$\therefore \overline{C_1C_2}=2\overline{C_1H}=10\sqrt{3}$(m)

따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 최솟값은 $10\sqrt{3}$ m이다.

답 $10\sqrt{3}$ m

10 해결단계

❶ 단계	x축 위의 점 Q_1을 잡아 고정된 길이 $\overline{RS}$와 같은 길이를 갖는 선분 QQ_1을 찾는다.
❷ 단계	사각형 PQRS의 둘레의 길이가 최소가 될 조건을 찾는다.
❸ 단계	대칭이동을 이용하여 길이의 합의 최솟값을 구한다.
❹ 단계	사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값을 구한다.



움직이는 선분 RS를 고정하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 점 Q를 지나고 직선 $y=-x$에 평행한 직선 $y=-x+5$가 x축과 만나는 점 $Q_1(5, 0)$을 잡으면

$\overline{RS}\,/\!/\,\overline{QQ_1}$, $\overline{RS}=\overline{QQ_1}$

즉, □$QRSQ_1$은 평행사변형이므로

$\overline{QR}=\overline{Q_1S}$

$\therefore \overline{QR}+\overline{RS}=\overline{Q_1S}+\overline{QQ_1}$

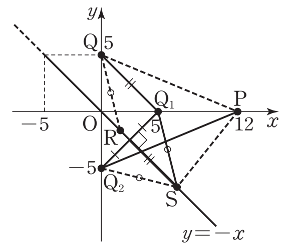
따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}=\overline{PQ}+\overline{Q_1S}+\overline{QQ_1}+\overline{SP}$

$=\sqrt{5^2+12^2}+\overline{Q_1S}+5\sqrt{2}+\overline{SP}$

$=13+5\sqrt{2}+\overline{Q_1S}+\overline{SP}$

이므로 둘레의 길이가 최소가 되려면 $\overline{Q_1S}+\overline{SP}$가 최소가 되어야 한다.



오른쪽 그림과 같이 점 Q_1의 직선 $y=-x$에 대한 대칭점을 Q_2라 하면 점 Q_2의 좌표는 $(0, -5)$이므로

$\overline{Q_1S}+\overline{SP}$

$=\overline{Q_2S}+\overline{SP}\geq\overline{Q_2P}$

$=\sqrt{(12-0)^2+(0+5)^2}$

$=13$

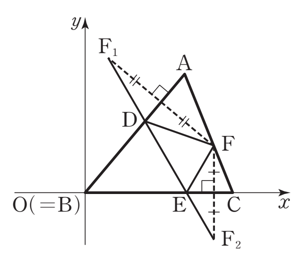
그러므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값은

$13+5\sqrt{2}+13=26+5\sqrt{2}$

답 $26+5\sqrt{2}$

11 해결단계

❶ 단계	주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.
❷ 단계	점 F를 두 직선 AB, BC에 대하여 대칭이동한 두 점 F_1, F_2의 좌표를 구한다.
❸ 단계	삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{F_1F_2}$와 같음을 이용하여 최솟값을 구한다.



위의 그림과 같이 좌표평면 위에 점 B를 원점으로 하고 반직선 BC가 x축의 양의 방향이 되도록 삼각형 ABC를 놓으면

$C(5, 0)$

점 A의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{AC}=\sqrt{17}$에서

$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=4\sqrt{2}$ $\quad\therefore a^2+b^2=32$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{(a-5)^2+b^2}=\sqrt{17}$ $\quad\therefore (a-5)^2+b^2=17$

㉠에서 $b^2=32-a^2$이고, 이것을 $(a-5)^2+b^2=17$에 대입하면

$(a-5)^2+32-a^2=17$

$a^2-10a+25+32-a^2=17$

$10a=40$ $\quad\therefore a=4$, $b=4$

$\therefore A(4, 4)$

한편, 직선 AC의 방정식은

$y-0=\dfrac{0-4}{5-4}(x-5)$ $\quad\therefore y=-4x+20$

점 F의 좌표를 $(k,\ -4k+20)\ (4\le k\le 5)$이라 하자.
점 F를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{F_1}$이라 하면 직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{4-0}{4-0}(x-0)$, 즉 $y=x$

이므로 $\mathrm{F_1}(-4k+20,\ k)$
또한, 점 F를 직선 BC, 즉 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{F_2}$라 하면 $\mathrm{F_2}(k,\ 4k-20)$
(삼각형 DEF의 둘레의 길이)
$=\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$
$=\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EF_2}}+\overline{\mathrm{F_1D}}$
$\ge\overline{\mathrm{F_1F_2}}$
$=\sqrt{\{k-(-4k+20)\}^2+(4k-20-k)^2}$
$=\sqrt{34k^2-320k+800}$
$=\sqrt{34\left(k-\dfrac{80}{17}\right)^2+\dfrac{800}{17}}$

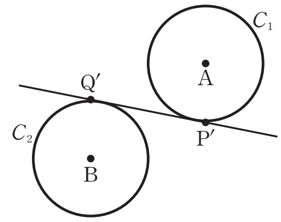
즉, 삼각형 DEF의 둘레의 길이는 $k=\dfrac{80}{17}$일 때, 최솟값 $\sqrt{\dfrac{800}{17}}=\dfrac{20\sqrt{34}}{17}$를 갖는다.
따라서 $p=17,\ q=20$이므로
$p+q=37$ **답** 37

12 해결단계

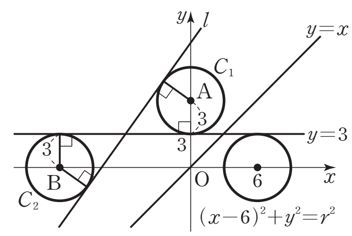
❶ 단계	주어진 원을 대칭이동, 평행이동한 두 원을 각각 $C_1,\ C_2$라 하고, 중심의 좌표를 구한다.
❷ 단계	$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$이면 ($y_1$의 최솟값)$=$($y_2$의 최댓값)임을 이용하여 r의 값을 구한다.
❸ 단계	직선 P′Q′의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$일 때 직선 P′Q′은 두 원 $C_1,\ C_2$에 동시에 접함을 이용하여 k의 값을 구한다.

원 $(x-6)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하면 반지름의 길이는 모두 r이고, 두 원 $C_1,\ C_2$의 중심을 각각 A, B라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 6),\ \mathrm{B}(6+k,\ 0)$이다.
두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$를 각각 P′, Q′이라 하면 두 점 P′, Q′은 각각 두 원 $C_1,\ C_2$ 위에 있으므로
$6-r\le y_1\le 6+r,\ -r\le y_2\le r$ ……㉠
이때 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값은 직선 P′Q′의 기울기와 같고,
$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 최솟값이 0이고 최댓값이 $\dfrac{4}{3}$이므로
$0\le$(직선 P′Q′의 기울기)$\le\dfrac{4}{3}$
$0<$(직선 AB의 기울기)$<\dfrac{4}{3}$에서 $0<-\dfrac{6}{6+k}<\dfrac{4}{3}$
$-\dfrac{4}{3}<\dfrac{6}{6+k}<0,\ \dfrac{6+k}{6}<-\dfrac{3}{4}$
$6+k<-\dfrac{9}{2}$ $\quad\therefore k<-\dfrac{21}{2}$ ……㉡

따라서 원 C_1의 중심 A(0, 6)은 원 C_2의 중심 $\mathrm{B}(6+k,\ 0)$보다 우측 상단에 위치하므로 두 원 $C_1,\ C_2$의 위치를 오른쪽 그림과 같이 생각할 수 있다.



그런데 $y_1<y_2$인 점 P′, Q′이 존재한다고 가정하면 (직선 P′Q′의 기울기)<0이 되어 모순이므로 항상 $y_1\ge y_2$이어야 한다.
한편, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$에서 $y_1=y_2$인 두 점 P′, Q′이 존재하므로 (y_1의 최솟값)$=$(y_2의 최댓값)이어야 한다.
즉, ㉠에서 $6-r=r$ $\quad\therefore r=3$



또한, 직선 P′Q′의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$일 때의 직선 P′Q′을 l이라 하면 직선 l은 두 원 $C_1,\ C_2$에 동시에 접한다.*
직선 l의 방정식을 $y=\dfrac{4}{3}x+n$이라 하면 점 A와 직선 l, 즉 $4x-3y+3n=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이인 3과 같으므로
$\dfrac{|0-18+3n|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3,\ |3n-18|=15$
이때 $n>6$이므로 $3n-18=15$ $\quad\therefore n=11$
$\therefore l:4x-3y+33=0$
**점 B와 직선 $l:4x-3y+33=0$ 사이의 거리도 원 C_2의 반지름의 길이인 3과 같으므로
$\dfrac{|4(6+k)-0+33|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3,\ |4k+57|=15$
$4k+57=-15$ 또는 $4k+57=15$
$\therefore k=-18$ 또는 $k=-\dfrac{21}{2}$
㉡에서 $k=-18$이므로
$|r+k|=|3+(-18)|=|-15|=15$ **답** 15

• 다른 풀이 •
*에서 직선 l의 방정식은
$y-6=\dfrac{4}{3}(x-0)\pm3\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}$ ← 본문 20쪽 비법노트ⓓ
$y-6=\dfrac{4}{3}x\pm5$
$\therefore l:y=\dfrac{4}{3}x+11$ 또는 $l:y=\dfrac{4}{3}x+1$
그런데 직선 l의 y절편은 6보다 크므로
$l:y=\dfrac{4}{3}x+11$
다음은 **와 같다.

II 집합과 명제

04. 집합

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.47~49

01 ③	02 ①	03 9	04 4	05 ⑤
06 ⑤	07 ④	08 ②	09 ①	10 9
11 ③	12 13	13 ⑤	14 ①	15 6
16 8	17 ②	18 ③	19 ④	20 ④
21 ③				

01 집합 $A=\{\varnothing, 0, \{0\}\}$에 대하여
원소는 $\varnothing$, 0, $\{0\}$
부분집합은 $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, $\{\varnothing, 0\}$, $\{\varnothing, \{0\}\}$, $\{0, \{0\}\}$, $\{\varnothing, 0, \{0\}\}$
따라서 옳지 않은 것은 ③ $0\subset A$이다. 답 ③

02 $A=\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ $(n_1<n_2<n_3<n_4)$라 하면
집합 A의 서로 다른 두 원소의 합은
n_1+n_2, n_1+n_3, n_1+n_4, n_2+n_3, n_2+n_4, n_3+n_4
집합 B의 원소 중 가장 작은 원소가 4, 가장 큰 원소가 12이므로
$n_1+n_2=4$, $n_3+n_4=12$
이때 n_1, n_2, n_3, n_4는 서로 다른 자연수이므로
*$n_1+n_2=4$에서 $n_1=1$, $n_2=3$
즉, $3<n_3<n_4$이므로 $n_3+n_4=12$가 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.
(i) $n_3=4$, $n_4=8$일 때,
집합 A의 서로 다른 두 원소의 합은 각각 4, 5, 7, 9, 11, 12이므로
$B=\{4, 5, 7, 9, 11, 12\}$
그런데 $n(B)=5$를 만족시키지 않는다.
(ii) $n_3=5$, $n_4=7$일 때,
집합 A의 서로 다른 두 원소의 합은 각각 4, 6, 8, 10, 12이므로
$B=\{4, 6, 8, 10, 12\}$
따라서 $n(B)=5$를 만족시킨다.
(i), (ii)에서 $B=\{4, 6, 8, 10, 12\}$이므로
$a=6$, $b=8$, $c=10$
$\therefore a+b+c=24$ 답 ①

• 다른 풀이 •
집합 A의 서로 다른 두 원소의 합
n_1+n_2, n_1+n_3, n_1+n_4, n_2+n_3, n_2+n_4, n_3+n_4
에서 $n(B)=5$를 만족시키려면 $n_1+n_4=n_2+n_3$이어야 한다.
*에서 $n_1=1$, $n_2=3$이므로
$n_4-n_3=n_2-n_1=2$
위의 식과 $n_3+n_4=12$를 연립하여 풀면
$n_3=5$, $n_4=7$
따라서 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{4, 6, 8, 10, 12\}$이므로
$a+b+c=6+8+10=24$

03 $-8\le 2x-3\le 8$에서 $-5\le 2x\le 11$
$-\frac{5}{2}\le x\le\frac{11}{2}$, $-\frac{3}{2}\le x+1\le\frac{13}{2}$
$\therefore -\frac{1}{2}\le\frac{x+1}{3}\le\frac{13}{6}$
이때 $\frac{x+1}{3}\in Z$이므로
$\frac{x+1}{3}=0, 1, 2$ $\quad\therefore x=-1, 2, 5$
*즉, $4x-5=-9, 3, 15$이므로 $A=\{-9, 3, 15\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 합은
$-9+3+15=9$ 답 9

• 다른 풀이 •
$\frac{x+1}{3}\in Z$에서 $\frac{x+1}{3}=k$ (k는 정수)라 하면
$x=3k-1$ ……㉠
$-8\le 2x-3\le 8$에서 $-8\le 6k-5\le 8$
$-3\le 6k\le 13$ $\quad\therefore -\frac{1}{2}\le k\le\frac{13}{6}$
이때 조건을 만족시키는 정수 k는 0, 1, 2이므로 ㉠에서
$x=-1, 2, 5$
다음은 *와 같다.

04 $|x|+|y|=2$를 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$
이므로 $n(A)=8$
또한, $n(B)=k$이므로 $n(A)+n(B)=3k$에서
$8+k=3k$ $\quad\therefore k=4$ 답 4

05 (i) $2n-1=2(n-1)+1$이므로 $A\subset B$
또한, $2n+1=2(n+1)-1$이므로 $B\subset A$
$\therefore A=B$

(ⅱ) $4n-1=2\times 2n-1$이므로 $C\subset A$

그런데 $5=2\times 3-1\in A$이지만 $5\notin C$이므로 $A\not\subset C$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $C\subset A=B$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

세 집합 A, B, C를 원소나열법으로 나타내면

$A=B=\{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$,

$C=\{\cdots, -5, -1, 3, 7, \cdots\}$

이므로 $C\subset A=B$

06

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$

$a-3\in A$이므로 $A=B$이려면 $a-3\in B$에서

$a-3=5$ 또는 $a-3=1-a$

(ⅰ) $a-3=5$, 즉 $a=8$일 때,

$A=\{5, 65\}$, $B=\{-7, 5\}$이므로

$A\neq B$

(ⅱ) $a-3=1-a$, 즉 $a=2$일 때,

$A=\{-1, 5\}$, $B=\{-1, 5\}$이므로

$A=B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

즉, 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같아야 하므로

$a-3+(a^2+1)=5+(1-a)$

$a^2+a-2=6-a$, $a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=-4$일 때,

$A=\{-7, 17\}$, $B=\{5\}$이므로 $A=B$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=2$일 때,

$A=\{-1, 5\}$, $B=\{-1, 5\}$이므로 $A=B$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=2$

07

$x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$\therefore A=\{2, 4\}$

$B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$A\subset X\subset B$, $X\neq A$이므로 집합 X는 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A를 제외한 것과 같다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{7-2}-1=31$ 답 ④

08

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$에서

$4\notin A$, $12\notin A$이므로 $4\in B$, $12\in B$

$n(B)=4$일 때, 집합 B의 모든 원소의 합이 최소이려면

$1\in B$, $2\in B$이어야 하므로 $B=\{1, 2, 4, 12\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+4+12=19$ 답 ②

09

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$,

$B=\{x\,|\,x=ab+1,\ a\in A,\ b\in A\}$이므로

$B=\{5, 7, 10, 11, 15, \cdots, 170\}$

$\therefore A\cap B=\{5, 7, 11\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소의 최댓값은 11, 최솟값은 5이므로 합은

$11+5=16$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$p\in A\cap B$이면 $p\in A$, $p\in B$이므로

$2\leq p\leq 13$이고, $p=ab+1$ $(a\in A,\ b\in A)$ 꼴이어야 한다.

$2\leq ab+1\leq 13$에서 $1\leq ab\leq 12$

$a=2$일 때, $b=2, 3, 5$이고 $p=5, 7, 11$

$a=3$일 때, $b=2$이고 $p=7$

$a=5$일 때, $b=2$이고 $p=11$

$a=7, 11, 13$이면 조건을 만족시키는 p의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore A\cap B=\{5, 7, 11\}$

10

(ⅰ) $a\leq 0$일 때,

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq a$가 성립하므로 $A=R$이다.

이때 $a\neq b$이므로 $B\neq\varnothing$이다.

즉, $A\cap B=B\neq\varnothing$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a>0$일 때,

$x^2\geq a$에서 $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})\geq 0$

$\therefore x\leq -\sqrt{a}$ 또는 $x\geq\sqrt{a}$

즉, $A=\{x\,|\,x\leq -\sqrt{a}$ 또는 $x\geq\sqrt{a}\}$

이때 $A\cup B=R$, $A\cap B=\varnothing$이 성립하려면

$B=\{x\,|\,-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\}$

이어야 하므로 이차부등식 $(x-a)(x-b)<0$의 해는 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$와 같아야 한다.

$-\sqrt{a}<0$이고 $a>0$이므로

$b=-\sqrt{a}$, $a=\sqrt{a}$

$a=\sqrt{a}$의 양변을 제곱하면

$a^2=a$ $\quad\therefore a=1$ $(\because a>0)$, $b=-\sqrt{1}=-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$, $b=-1$이므로

$10a+b=10+(-1)=9$ 답 9

11 $A\cap(A-B)=A$에서 $A\subset(A-B)$이고,

$(A-B)\subset A$는 항상 성립하므로

$A-B=A \qquad \therefore A\cap B=\varnothing$

*이때 $A\cup B=U$이고, $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$A=\{1, 4, 5\}$이므로

$B=\{2, 3\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3=5$ 답 ③

•다른 풀이•

$$A\cap(A-B)=A\cap(A\cap B^C)=(A\cap A)\cap B^C$$
$$=A\cap B^C=A-B=A$$

$\therefore A\cap B=\varnothing$

다음은 *와 같다.

12 $k^2-7k+10\le0$에서

$(k-2)(k-5)\le0 \qquad \therefore 2\le k\le5$

이때 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$A=\{2, 3, 4, 5\}$

$\therefore A^C=U-A=\{1, 6\}$

$i^k+(-i)^{k+2}=0$에서

$k=1$일 때, $i+(-i)^3=i+i=2i$

$k=2$일 때, $i^2+(-i)^4=-1+1=0$

$k=3$일 때, $i^3+(-i)^5=(-i)+(-i)=-2i$

$k=4$일 때, $i^4+(-i)^6=1+(-1)=0$

$k=5$일 때, $i^5+(-i)^7=i+i=2i$

$k=6$일 때, $i^6+(-i)^8=(-1)+1=0$

즉, $i^k+(-i)^{k+2}=0$을 만족시키는 k의 값은 2, 4, 6이므로

$B=\{2, 4, 6\}$

$$\therefore A^C\cup B=\{1, 6\}\cup\{2, 4, 6\}$$
$$=\{1, 2, 4, 6\}$$

따라서 집합 $A^C\cup B$의 모든 원소의 합은

$1+2+4+6=13$ 답 13

BLACKLABEL 특강 참고

i의 거듭제곱의 성질을 이용하여 집합 B의 원소를 구할 수도 있다.

$$i^k+(-i)^{k+2}=i^k+(-1)^{k+2}i^{k+2}$$
$$=i^k\{1+(-1)^{k+2}i^2\}$$
$$=i^k\{1+(-1)^{k+3}\}=0$$

이때 $i^k\ne0$이므로 $1+(-1)^{k+3}=0$이어야 한다.

즉, $(-1)^{k+3}=-1$에서 $k+3$이 홀수이어야 하므로 k는 짝수이어야 한다.

따라서 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 $B=\{2, 4, 6\}$

13 ㄱ. $A\cap(A\cup B)^C=A\cap(A^C\cap B^C)$
$$=(A\cap A^C)\cap B^C$$
$$=\varnothing\cap B^C=\varnothing \text{ (참)}$$

ㄴ. $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$
$$=A\cap(B^C\cap C^C)$$
$$=A\cap(B\cup C)^C$$
$$=A-(B\cup C) \text{ (참)}$$

ㄷ. $\{(A-B)\cup B\}-A=\{(A\cap B^C)\cup B\}-A$
$$=\{(A\cup B)\cap(B^C\cup B)\}-A$$
$$=\{(A\cup B)\cap U\}-A$$
$$=(A\cup B)-A$$
$$=(A\cup B)\cap A^C$$
$$=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$$
$$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$$
$$=B\cap A^C$$
$$=B-A \text{ (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

•다른 풀이•

ㄱ. $A\subset(A\cup B)$이므로 $A-(A\cup B)=\varnothing$

$\therefore A\cap(A\cup B)^C=A-(A\cup B)=\varnothing$ (참)

14 $A\cap B=\{1, b\}\ (b\ne1)$이므로 $1\in B$이어야 한다.

(i) $-4a=1$, 즉 $a=-\dfrac{1}{4}$인 경우

$A=\left\{\dfrac{13}{16}, 1, 2\right\}$, $B=\left\{1, \dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{4}\right\}$

이때 $A\cap B=\{1\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-a+2=1$, 즉 $a=1$인 경우

$A=\{-2, 1, 2\}$, $B=\{-4, 1, 3\}$

이때 $A\cap B=\{1\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a+2=1$, 즉 $a=-1$인 경우

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$

이때 $A\cap B=\{1, 4\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이고

$A\cap B=\{1, 4\}$, $B-A=\{3\}$이므로

$a=-1$, $b=4$, $c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1+16+9=26$ 답 ①

15 $B\cap(A^C\cup B^C)=(B\cap A^C)\cup(B\cap B^C)$
$$=(B\cap A^C)\cup\varnothing$$
$$=B\cap A^C$$
$$=B-A=\{3, 6\}$$

*이고, $A=\{2, 4\}$이므로

$A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$

$$\therefore A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=U-(A\cup B)$$
$$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-\{2, 3, 4, 6\}$$
$$=\{1, 5\}$$

따라서 집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$1+5=6$ 답 6

• 다른 풀이 •

$B\cap(A^C\cup B^C)=B\cap(A\cap B)^C$

$=B-(A\cap B)=\{3,\ 6\}$

다음은 *와 같다.

16 8의 배수는 4의 배수이므로

$A_8\subset A_4 \qquad \therefore A_4\cup A_8=A_4$

즉, $A_3\cap(A_4\cup A_8)=A_3\cap A_4$

이때 $A_3\cap A_4$는 3과 4의 최소공배수인 12의 배수의 집합이므로

$A_3\cap A_4=A_{12}$

따라서 전체집합 $U=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 99\}$의 원소 중에서 12의 배수는 12, 24, 36, $\cdots$, 96의 8개이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 8이다. **답** 8

17 $A_{30}\cap A_{45}$는 30과 45의 최대공약수인 15의 약수의 집합이므로

$A_{30}\cap A_{45}=A_{15}$

즉, $A_k\subset A_{15}$이려면 k가 15의 약수이어야 하므로

$k=1,\ 3,\ 5,\ 15$

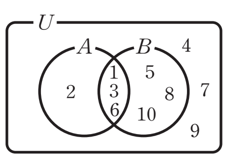
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$1+3+5+15=24$ **답** ②

18 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이고 $(A-B)\cup(B-A)=\{2,\ 5,\ 8,\ 10\}$이므로

$A-B=\{2\}$, $A\cap B=\{1,\ 3,\ 6\}$, $B-A=\{5,\ 8,\ 10\}$

따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=(B-A)\cup(A\cap B)$

$=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

즉, $n(B)=6$이므로 집합 B의 부분집합의 개수는

$2^6=64$ **답** ③

19 두 집합 B, C가 서로소이므로 $B\cap C=\varnothing$

$n(A^C\cap C^C)=n((A\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup C)$

에서 $n(U)=50$, $n(A^C\cap C^C)=20$이므로

$50-n(A\cup C)=20 \qquad \therefore n(A\cup C)=30$

또한, $n(A^C\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(B)-n(A\cap B)=12$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n((A\cup C)\cup B)$

$=n(A\cup C)+n(B)-n((A\cup C)\cap B)$

$=n(A\cup C)+n(B)-n((A\cap B)\cup(B\cap C))$

$=n(A\cup C)+n(B)-n(A\cap B)\ (\because B\cap C=\varnothing)$

$=30+12=42$ **답** ④

• 다른 풀이 •

두 집합 B와 C가 서로소이므로 $B\cap C=\varnothing$

즉, $n(B\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$이므로

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$\quad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$

$\quad+n(A\cap B\cap C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(C\cap A)$

$=n(A)+n(C)-n(C\cap A)+n(B)-n(A\cap B)$

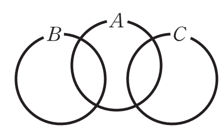
$=n(A\cup C)+n(B-A)$

$=30+12=42$

BLACKLABEL 특강 참고

벤 다이어그램을 이용하면 조금 더 간단히 답을 구할 수 있다.

두 집합 B, C가 서로소이므로 세 집합 A, B, C의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 주어진 조건에서 $n(A\cup C)=30$, $n(B-A)=12$이므로



$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup C)+n(B-A)=30+12=42$

20 $n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$이고, $n(A\cap B)\ge 5$이므로

$5\le n(A\cap B)\le 10$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$이므로

$5\le n(A)+n(B)-n(A\cup B)\le 10$

$5\le 10+13-n(A\cup B)\le 10$

$\therefore 13\le n(A\cup B)\le 18$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 18, 최솟값은 13이므로 그 합은

$13+18=31$ **답** ④

BLACKLABEL 특강 참고

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A)\ge n(B)$일 때,

(1) $n(A\cap B)$가 최대이려면 $n(A\cup B)$가 최소 ⇨ $B\subset A$

(2) $n(A\cap B)$가 최소이려면 $n(A\cup B)$가 최대

① $n(A)+n(B)\le n(U)$이면 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

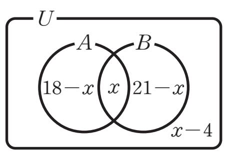
② $n(A)+n(B)>n(U)$이면 $n(A\cup B)=n(U)$

21 학생 전체의 집합을 U, A 과목을 선택한 학생의 집합을 A, B 과목을 선택한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35$, $n(A)=18$, $n(B)=21$

두 과목을 모두 선택한 학생의 집합은 $A\cap B$이다.
$A\subset(A\cup B)$, $B\subset(A\cup B)$에서
$n(A)\le n(A\cup B)$, $n(B)\le n(A\cup B)$이므로
$18\le n(A\cup B)$, $21\le n(A\cup B)$
$\therefore 21\le n(A\cup B)$
$(A\cup B)\subset U$에서 $n(A\cup B)\le n(U)$이므로
$n(A\cup B)\le 35$
$\therefore 21\le n(A\cup B)\le 35$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$21\le 18+21-n(A\cap B)\le 35$
$\therefore 4\le n(A\cap B)\le 18$
따라서 최댓값은 $M=18$, 최솟값은 $m=4$이므로
$M+m=18+4=22$ 답 ③

• 다른 풀이 •



$n(A\cap B)=x$라 하면
$n(U)=35$, $n(A)=18$,
$n(B)=21$이므로 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타낼 수 있다.
이때 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수는 0 이상이어야 하므로
$18-x\ge 0$, $x\ge 0$, $21-x\ge 0$, $x-4\ge 0$
$\therefore 4\le x\le 18$
따라서 두 과목을 모두 선택한 학생의 수의 최댓값은
$M=18$, 최솟값은 $m=4$이므로
$M+m=18+4=22$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.50~56

01 ⑤	02 6	03 ②	04 −2	05 ①
06 ④	07 ③	08 12	09 ②	10 ①
11 ③	12 448	13 22	14 5	15 123
16 60	17 ④	18 ⑤	19 288	20 ④
21 5	22 ③	23 10	24 ③	25 9
26 6	27 ②	28 36	29 ⑤	30 ⑤
31 24	32 6	33 ④	34 ②	35 ①
36 64	37 41	38 ①	39 −1	40 138
41 400	42 ④			

01 $P(A)$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로
$P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}\}$
ㄱ. $\varnothing$은 집합 $P(A)$의 원소이므로
$\varnothing\in P(A)$ (참)
ㄴ. $\{\{1, 2\}\}$는 집합 $P(A)$의 원소이므로
$\{\{1, 2\}\}\in P(A)$ (참)
ㄷ. 집합 $P(A)$의 원소 $\{1, 2\}$ 하나만을 원소로 갖는 집합 $\{\{1, 2\}\}$는 집합 $P(A)$의 부분집합이므로
$\{\{1, 2\}\}\subset P(A)$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 개념

멱집합(Power Set)
집합 A에 대하여 A의 멱집합은 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합으로 2^A 또는 $P(A)$로 나타낸다.
집합 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$일 때,
(1) 멱집합의 원소의 개수 : 2^n
(2) 멱집합의 부분집합의 개수 : 2^{2^n}

02 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{ab, bc, ca\}$에서
$A=B$이므로 각 집합의 모든 원소의 합과 곱이 서로 같다. 즉,
$a+b+c=ab+bc+ca=7$ ……㉠
$abc=(abc)^2$ ……㉡
㉡에서 $(abc)^2-abc=0$
$abc(abc-1)=0$
$\therefore abc=0$ 또는 $abc=1$
이때 $abc=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$ 또는 $c=0$이므로 집합 B의 원소 ab, bc, ca 중 적어도 두 수가 0이 되어 $A=B$를 만족시키지 않는다.
$\therefore abc=1$ ……㉢
㉠, ㉢에서 세 실수 a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-7x^2+7x-1=0$이므로
*$(x-1)(x^2-6x+1)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3\pm2\sqrt{2}$
이때 $3-2\sqrt{2}<1<3+2\sqrt{2}$이므로
$a=3-2\sqrt{2}$
$\frac{1}{a}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$
$\therefore a+\frac{1}{a}=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$ 답 6

• 다른 풀이 •
*에서 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$
$\therefore \alpha>0$, $\beta>0$
이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\beta=\frac{1}{\alpha}$
즉, $0<\alpha<1$이면 $\beta>1$이다.
$A=\{a, b, c\}=\left\{\alpha, 1, \frac{1}{\alpha}\right\}$에서 가장 작은 원소를 α라 할 때, 가장 큰 원소는 $\frac{1}{\alpha}$이므로
$\alpha+\frac{1}{\alpha}=6$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼차방정식의 근과 계수의 관계

(1) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

(2) 세 수 α, β, γ를 세 근으로 하고, x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

03

ㄱ. 2 이상의 자연수 a에 대하여 $N(a, a)$는 a의 양의 약수의 개수와 같고,
$N(a, a)\geq 2\neq 1$ ($\because a\geq 2$)
$a\notin A_1(a)$
$\therefore 2\notin A_1(2)$ (거짓)

ㄴ. 3의 양의 약수는 1, 3의 2개이므로 3과 양의 공약수의 개수가 4인 200 이하의 자연수는 존재하지 않는다.
$\therefore A_4(3)=\varnothing$ (거짓)

ㄷ. 200 이하의 자연수 중에서 3과 양의 공약수의 개수가 2인 자연수는 200 이하의 3의 배수와 같다.
이때 200 이하의 3의 배수의 개수가 66이므로 $A_2(3)$의 원소의 개수는 66이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. **답** ②

• 다른 풀이 •

ㄱ. $2\in A_1(2)$라 하면 집합 $A_k(a)$의 정의에 의하여 $N(2, 2)=1$을 만족시켜야 한다.
그런데 2의 양의 약수는 1, 2의 2개이므로 $N(2, 2)=2$
$\therefore 2\notin A_1(2)$ (거짓)

04

$x^3-a^2x^2-x+a^2=0$에서
$(x+1)(x-1)(x-a^2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a^2$
$\therefore A=\{-1, 1, a^2\}$
$x^2+(a-3)x-a+2=0$에서
$(x-1)(x+a-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-a+2$
$\therefore B=\{1, -a+2\}$
이때 $\underbrace{A\cup B=\{-1, 1, 4\}}_{*}$이므로
$-a+2=4$ 또는 $a^2=4$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,
$A=\{-1, 1, 4\}$, $B=\{1, 4\}$이므로
$A\cup B=\{-1, 1, 4\}$를 만족시킨다.

(ii) $a=2$일 때,
$A=\{-1, 1, 4\}$, $B=\{1, 0\}$이므로
$A\cup B=\{-1, 0, 1, 4\}$에서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 -2이다.
답 -2

• 다른 풀이 •

$*$에서

(i) $-a+2=4$, 즉 $a=-2$일 때,
$a^2=4$이므로 $A=\{-1, 1, 4\}$, $B=\{1, 4\}$에서
$A\cup B=\{-1, 1, 4\}$를 만족시킨다.

(ii) $-a+2=-1$, 즉 $a=3$일 때,
$a^2=9$이므로 $A\cup B=\{-1, 1, 9\}$에서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-a+2=1$, 즉 $a=1$일 때,
$a^2=1$이므로 $A\cup B=\{-1, 1\}$에서 조건을 만족시키지 않는다.

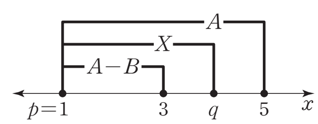
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 -2이다.

05

집합 B의 원소 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$가 자연수이므로 a, b, c, d는 완전제곱수이고, $a+b=13=4+9=2^2+3^2$이므로
$a=4$, $b=9$ ($\because a<b$)
$\therefore A\cap B=\{a, b\}=\{4, 9\}$ ……㉠
㉠에서 $4\in B$, $9\in B$이고 $\sqrt{a}=2$, $\sqrt{b}=3$이므로
$\sqrt{c}=4$, $\sqrt{d}=9$ ($\because c<d$)
$\therefore c=16$, $d=81$
$\therefore a+d=4+81=85$
답 ①

06

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$,
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$이므로
$(A-B)\subset X\subset A$
$A=\{x\,|\,1\leq x\leq 5\}$, $B=\{x\,|\,3<x<7\}$에서
$A-B=\{x\,|\,1\leq x\leq 3\}$
이때 두 집합 $A-B$, A를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$(A-B)\subset X\subset A$에서
$p=1$, $3\leq q\leq 5$
따라서 q의 최댓값은 5, 최솟값은 3이므로 합은
$5+3=8$
답 ④

07

$x\geq 1$이므로
$0<\frac{4}{x}\leq 4$에서 $\left[\frac{4}{x}\right]=0, 1, 2, 3, 4$
$\therefore A_4=\{0, 1, 2, 3, 4\}$
$0<\frac{6}{x}\leq 6$에서 $\left[\frac{6}{x}\right]=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$\therefore A_6=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 $A_4\cap A_6=\{0, 1, 2, 3, 4\}$이므로
$A_4\cap A_6=A_4$
답 ③

08 조건 (가), (나)에 의하여

$4\in A$, $4+4=8\in U$이므로 $8\in A$

$4\in A$, $5\in A$이고, $4+5=9\in U$이므로 $9\in A$

$5\in A$, $5+5=10\in U$이므로 $10\in A$

$4\in A$, $8\in A$이고, $4+8=12\in U$이므로 $12\in A$

$5\in A$, $8\in A$이고, $5+8=13\in U$이므로 $13\in A$

$5\in A$, $9\in A$이고, $5+9=14\in U$이므로 $14\in A$

$5\in A$, $10\in A$이고, $5+10=15\in U$이므로 $15\in A$

$\vdots$

조건 (가), (나)에서 집합 A의 원소가 될 수 있는 수들을 나열하면 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, $\cdots$, 50이다.

이때 $A^C=U-A$이므로 집합 A^C의 원소의 개수가 최대이려면 집합 A의 원소의 개수가 최소이어야 한다.

즉, $A=\{4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \cdots, 50\}$이므로

$A^C=\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$

따라서 집합 A^C의 가장 큰 원소는 11, 가장 작은 원소는 1이므로 그 합은

$11+1=12$ 답 12

09 ㄱ. $A_3=A_2\cup\{A_2\}$이고, $A_2=\{1, \{1\}\}$이므로

$A_3=\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ (참)

ㄴ. $A_{n+1}=A_n\cup\{A_n\}$에서 $\{A_n\}\subset A_{n+1}$이므로

$A_n\in A_{n+1}$ (참)

ㄷ. $A_2=\{1, \{1\}\}=\{1, A_1\}$

$A_3=\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}=\{1, A_1, A_2\}$

$\vdots$

$\therefore A_{n+1}=\{1, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

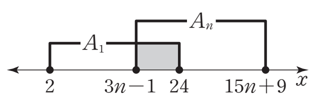
10 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면

$A_1\cap A_n\neq\varnothing$이어야 한다.

이때 $A_1=\{x\,|\,2\le x\le 24\}$,

$A_n=\{x\,|\,3n-1\le x\le 15n+9\}$이므로

오른쪽 그림에서



$3n-1\le 24$, $3n\le 25$

$\therefore n\le\dfrac{25}{3}=8.33\cdots$

따라서 자연수 n의 최댓값은 8이다. 답 ①

11 $x-[x]=\dfrac{1}{n}$에서 $x=[x]+\dfrac{1}{n}=(\text{정수})+\dfrac{1}{n}$이고,

$-5\le x\le 5$인 유리수이므로

$(\text{정수})=-5, -4, \cdots, 4$

ㄱ. $A_3=\left\{-5+\dfrac{1}{3}, -4+\dfrac{1}{3}, \cdots, 0+\dfrac{1}{3}, \cdots, 4+\dfrac{1}{3}\right\}$

$\therefore \dfrac{1}{3}\in A_3$ (참)

ㄴ. $n\ge 2$인 임의의 자연수 n에 대하여 집합 A_n의 원소는

$(\text{정수})+\dfrac{1}{n}$ ($(\text{정수})=-5, -4, \cdots, 4$) 꼴이므로

집합 A_n의 원소의 개수는 10이다. (거짓)

ㄷ. 임의의 두 자연수 m, n에 대하여 $m\neq n$이면

$\dfrac{1}{m}\neq\dfrac{1}{n}$이므로 $(\text{정수})+\dfrac{1}{m}\neq(\text{정수})+\dfrac{1}{n}$

$\therefore A_m\cap A_n=\varnothing$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

ㄴ. 조건에서 $-5\le x\le 5$이므로 $[x]=-5, -4, -3, \cdots, 5$의 11개로 착각할 수 있다. 그러나 $x-[x]=\dfrac{1}{n}$에서 $x=[x]+\dfrac{1}{n}$이므로 $-5\le[x]+\dfrac{1}{n}\le 5$, $-5-\dfrac{1}{n}\le[x]\le 5-\dfrac{1}{n}$이고, n이 2 이상의 자연수이므로 $[x]=-5, -4, -3, \cdots, 4$의 10개이다.

12 $1=2^0\times3^0\times5^0$, $2=2^1\times3^0\times5^0$, $3=2^0\times3^1\times5^0$,

$4=2^2\times3^0\times5^0$, $5=2^0\times3^0\times5^1$, $6=2^1\times3^1\times5^0$,

$8=2^3\times3^0\times5^0$, $9=2^0\times3^2\times5^0$, $10=2^1\times3^0\times5^1$

$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

이때 집합 B의 부분집합 중에서 원소로 3의 배수를 적어도 하나 갖는 집합의 개수는 집합 B의 부분집합의 개수에서 3의 배수를 원소로 갖지 않는 집합의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 집합 B의 부분집합의 개수는 $2^9=512$이고, 집합 B의 부분집합 중에서 3의 배수를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 $2^{9-3}=2^6=64$이므로 구하는 집합의 개수는

$512-64=448$ 답 448

13 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$이므로 집합 X는 두 집합 A, B의 원소를 각각 적어도 한 개씩 원소로 갖는다.

이때 $A\cap B=\{2\}$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $2\in X$인 경우

집합 X의 개수는 집합 $\{1, 3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

(ii) $2\notin X$인 경우

집합 X는 $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$의 6개이다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$16+6=22$ 답 22

• 다른 풀이 •

전체집합 U의 부분집합 중 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 집합 X의 개수는 전체집합 U의 부분집합의 개수에서 $X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$을 만족시키는 집합 X의 개수를 빼면 된다.

전체집합 U의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

$X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$을 만족시키는 집합 X의 개수는 다음과 같다.

(i) $X\cap A=\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$

(ii) $X\cap B=\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$

(iii) $X\cap A=\varnothing$, $X\cap B=\varnothing$인 집합 X는

$\varnothing$ 또는 $\{5\}$의 2개

(i), (ii), (iii)에서 $X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$인 집합 X의 개수는

$8+4-2=10$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$32-10=22$

14 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^{10}}\right\}$의 부분집합 중에서

(i) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^{10}}$인 경우, 즉 $\frac{1}{2^{10}}$을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{10-1}=2^9$

(ii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^9}$인 경우, 즉 $\frac{1}{2^9}$은 반드시 원소로 갖고, $\frac{1}{2^{10}}$은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{10-1-1}=2^8$

(iii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2^8}$인 경우, 즉 $\frac{1}{2^8}$은 반드시 원소로 갖고, 두 원소 $\frac{1}{2^{10}}$, $\frac{1}{2^9}$은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{10-1-2}=2^7$

⋮

따라서 각 부분집합에서 가장 작은 원소들의 합은

$\frac{1}{2^{10}}\times2^9+\frac{1}{2^9}\times2^8+\frac{1}{2^8}\times2^7+\cdots+\frac{1}{2}\times1$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=10\times\frac{1}{2}=5$ 답 5

15 $U=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 조건 (나)에 의하여 집합 A는 1, 18 또는 2, 9 또는 3, 6을 동시에 원소로 가져야 한다. ……㉠

(i) $n(A)=2$인 경우

㉠에 의하여

$A=\{1, 18\}$ 또는 $A=\{2, 9\}$ 또는 $A=\{3, 6\}$

집합 B는 조건 (다)에 의하여 집합 U의 원소 중에서 집합 A에 속하지 않은 4개의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 B의 개수는

$2^{6-4}=2^2=4$

즉, 집합 A가 될 수 있는 각각의 경우에 대하여 집합 B가 4개씩 존재하므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\times4=12$

(ii) $n(A)=4$인 경우

㉠에 의하여

$A=\{1, 2, 9, 18\}$ 또는 $A=\{1, 3, 6, 18\}$ 또는 $A=\{2, 3, 6, 9\}$

집합 B는 조건 (다)에 의하여 집합 U의 원소 중에서 집합 A에 속하지 않은 2개의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 B의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

즉, 집합 A가 될 수 있는 각각의 경우에 대하여 집합 B가 16개씩 존재하므로 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3\times16=48$

(iii) $n(A)=6$인 경우

$A=U=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로 집합 B는 공집합이 아닌 집합 U의 부분집합이다.

따라서 집합 B의 개수는 $2^6-1=63$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 63이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$12+48+63=123$ 답 123

16 집합 $K(U)$의 원소는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합이므로

$K(U)=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$

이때 $A\in K(U)$, $B\in K(U)$이고, $n(A\cup B)=3$이 되려면 두 집합 A, B는 공통인 원소가 한 개만 있어야 한다.

즉, $\underline{n(A\cap B)=1}$*

예를 들면, $A=\{1, 2\}$일 때, 가능한 집합 B는 $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$의 6개이다.

따라서 집합 A가 될 수 있는 집합 $K(U)$의 원소 10개에 대하여 가능한 집합 B가 각각 6개씩 존재하므로 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$10\times6=60$ 답 60

• 다른 풀이 •

*에서

전체집합 U의 원소 5개 중에서 집합 $A\cap B$의 원소 하나를 택하는 경우의 수는 5

교집합의 원소를 제외한 전체집합 U의 원소 4개 중에서 두 집합 A, B의 나머지 원소를 각각 택하는 경우의 수는

$4\times3=12$

따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$5\times12=60$

17 집합 $S=\{a, b, c\}$의 부분집합은

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, S

(i) $\varnothing\in X$일 때,

조건 (가)에서 $S-\varnothing=S\in X$

즉, $\varnothing$과 집합 S는 동시에 집합 X의 원소이므로

$X=\{\varnothing, S\}$가 가능하다.

(ii) $\{a\}\in X$일 때,

조건 (가)에서 $S-\{a\}=\{b, c\}\in X$

즉, 두 집합 $\{a\}$와 $\{b, c\}$는 동시에 집합 X의 원소이다.

또한, $\{a\}\in X$, $\{b, c\}\in X$이면 조건 (나)에서

$\{a, b, c\}=S\in X$이고, 조건 (가)에서 $\varnothing\in X$이므로

$X=\{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, S\}$

같은 방법으로

$\{b\}\in X$일 때, $X=\{\varnothing, \{b\}, \{a, c\}, S\}$

$\{c\}\in X$일 때, $X=\{\varnothing, \{c\}, \{a, b\}, S\}$

(iii) $\{a\}\in X$, $\{b\}\in X$일 때,

조건 (가)에서 $\{b, c\}\in X$, $\{a, c\}\in X$이고, 조건 (나)에서 $\{a, b\}\in X$이므로 조건 (가)에서 $\{c\}\in X$

또한, $\{a, b\}\in X$, $\{c\}\in X$이면 조건 (나)에서 $S\in X$이므로 조건 (가)에서 $\varnothing\in X$

$\therefore X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S\}$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 5이다.

답 ④

18 $n(A)=20\le n(B)$이므로

$f(A)=2^{20}$, $f(B)=2^x\,(x\ge20)$이라 하면

$f(A)+f(B)=f(A\cup B)$에서

$2^{20}+2^x=2^{n(A\cup B)}$, $2^{20}(1+2^{x-20})=2^{n(A\cup B)}$

이때 $1+2^{x-20}$의 값이 2의 거듭제곱 꼴이 되려면

$2^{x-20}=1=2^0$에서 $x-20=0$ $\qquad\therefore x=20$

이때 $2^{n(A\cup B)}=2^{20}(1+1)=2^{20}\times2^1=2^{21}$이므로

$n(A\cup B)=21$

따라서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+20-21=19$

이므로 $f(A\cap B)=2^{19}$

$\therefore a=19$

답 ⑤

19 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$에서

$A\cap B=\{3, 4\}$

조건 (나)에 의하여 $\{3, 4\}\subset(X\cup Y)$

이므로 집합 A의 부분집합 중에서 집합 X를 택하고 집합 B의 부분집합 중에서 집합 Y를 택하는 경우에서 집합 $X\cup Y$가 두 원소 3, 4를 포함하지 않는 경우를 제외하면 된다.

이때 조건 (가)에서 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 2^4이고, 집합 Y는 집합 B의 부분집합이므로 집합 Y의 개수는 2^5이다.

즉, 두 집합 X, Y의 순서쌍 (X, Y)의 개수는

$2^4\times2^5=2^9=512$

한편, 집합 $X\cup Y$가 3을 원소로 갖지 않으려면 두 집합 X, Y가 모두 3을 원소로 갖지 않아야 하므로 그 경우의 수는 두 집합 A, B의 부분집합 중에서 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수의 곱과 같다. 즉,

$2^3\times2^4=2^7=128$

같은 방법으로 집합 $X\cup Y$가 4를 원소로 갖지 않는 경우의 수는 128

또한, 집합 $X\cup Y$가 두 원소 3, 4를 모두 원소로 갖지 않으려면 두 집합 X, Y가 모두 3, 4를 원소로 갖지 않아야 하므로 그 경우의 수는

$2^2\times2^3=2^5=32$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$512-2\times128+32=288$

답 288

• 다른 풀이 •

$A\cap B=\{3, 4\}$이므로 조건 (나)에서 $\{3, 4\}\subset(X\cup Y)$

즉, 3, 4는 집합 $X\cup Y$의 원소이므로 각각 세 집합 $X-Y$, $X\cap Y$, $Y-X$ 중에서 어느 한 집합에 속해야 한다. 이때 그 경우의 수는 $3\times3=9$

한편, 조건 (가)에서 $X\subset A$, $Y\subset B$이므로 1, 2는 각각 두 집합 X, $A-X$ 중에서 어느 한 집합에 속해야 하고, 5, 6, 7은 각각 두 집합 Y, $B-Y$ 중에서 어느 한 집합에 속해야 한다.

이때 그 경우의 수는 $(2\times2)\times(2\times2\times2)=32$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$9\times32=288$

20 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로

$A-B=\{3, 5, 6\}$

즉, 집합 $A-B$의 공집합이 아닌 부분집합이 집합 B와 서로소인 집합이다.

이때 집합 $A-B$의 부분집합 중에서 3을 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{3-1}=2^2=4$

같은 방법으로 5와 6을 각각 원소로 갖는 부분집합도 4개씩이므로

$S(X_1)+S(X_2)+S(X_3)+\cdots+S(X_n)$

$=3\times4+5\times4+6\times4=56$

답 ④

21 두 집합 A, B가 서로소이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 두 집합 A, B의 원소를 모두 더한 것과 같다.

이때 $f(A\cup B)=20$이므로

$a+b+c+d+(a+k)+(b+k)+(c+k)+(d+k)$

$=20$

$2(a+b+c+d+2k)=20$

$a+b+c+d+2k=10$

$\therefore a+b+c+d=10-2k$

이때

$f(A)=a+b+c+d=10-2k$,

$f(B)=a+b+c+d+4k=10+2k$

이므로

$f(A)f(B)=(10-2k)(10+2k)=100-4k^2$

이 수가 어떤 정수의 제곱이 되어야 하므로 $100-4k^2$이 될 수 있는 것은

0^2, 1^2, 2^2, $\cdots$, 10^2

정수 k가 최대이면 $100-4k^2$은 최소이므로

$100-4k^2=0$에서 $k^2=25$ $\quad\therefore k=\pm5$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 5이다. **답** 5

22 (i) $A\cap B=\varnothing$일 때,

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)$

$=(a+a+2+a+4)+(b+b+3)$

$=3a+6+2b+3=3a+2b+9$

이때 $S(A\cup B)=17$이므로

$3a+2b+9=17$ $\quad\therefore 3a+2b=8$

위의 식을 만족시키는 자연수 a, b는 $a=2$, $b=1$

즉, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 4\}$에서 $A\cap B=\{4\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $A\cap B=\{b\}$일 때,

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$

$=(3a+6)+(2b+3)-b$

$=3a+b+9$

이때 $S(A\cup B)=17$이므로

$3a+b+9=17$ $\quad\therefore 3a+b=8$ $\quad\cdots\cdots$㉠

① $b=a$인 경우

㉠에서 $3a+a=8$, $4a=8$ $\quad\therefore a=2$, $b=2$

즉, $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 5\}$이므로 조건을 만족시킨다.

② $b=a+2$인 경우

㉠에서 $3a+(a+2)=8$, $4a=6$ $\quad\therefore a=\dfrac{3}{2}$

이때 a는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

③ $b=a+4$인 경우

㉠에서 $3a+(a+4)=8$, $4a=4$ $\quad\therefore a=1$, $b=5$

즉, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5, 8\}$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $A\cap B=\{b+3\}$일 때,

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$

$=(3a+6)+(2b+3)-(b+3)$

$=3a+b+6$

이때 $S(A\cup B)=17$이므로

$3a+b+6=17$ $\quad\therefore 3a+b=11$ $\quad\cdots\cdots$㉡

① $b+3=a$인 경우

㉡에서 $3(b+3)+b=11$, $4b=2$ $\quad\therefore b=\dfrac{1}{2}$

이때 b는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

② $b+3=a+2$인 경우

$b=a-1$을 ㉡에 대입하면

$3a+(a-1)=11$, $4a=12$ $\quad\therefore a=3$, $b=2$

즉, $A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{2, 5\}$이므로 조건을 만족시킨다.

③ $b+3=a+4$인 경우

$b=a+1$을 ㉡에 대입하면

$3a+(a+1)=11$, $4a=10$ $\quad\therefore a=\dfrac{5}{2}$

이때 a는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $A\cap B=\{b, b+3\}$일 때,

즉, $B\subset A$이므로

$S(A\cup B)=S(A)=a+a+2+a+4=3a+6$

$S(A\cup B)=17$이므로

$3a+6=17$ $\quad\therefore a=\dfrac{11}{3}$

이때 a는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 3이다.

답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

a, b가 자연수임을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 개수를 구할 수도 있다.

㉠을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$ 또는 $(2, 2)$

$a=1$, $b=5$이면 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5, 8\}$

$a=2$, $b=2$이면 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 5\}$

㉡을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 8)$ 또는 $(2, 5)$ 또는 $(3, 2)$

$a=1$, $b=8$이면 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{8, 11\}$

$a=2$, $b=5$이면 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{5, 8\}$

$a=3$, $b=2$이면 $A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{2, 5\}$

이 중에서 교집합의 원소가 한 개이고, $S(A\cup B)=17$을 만족시키는 경우는

$a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=3$, $b=2$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 3이다.

23 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 이용하여 d의 값을 구한다.
❷ 단계	$A\cap B=\{4, 7, 9\}$와 d의 값을 이용하여 집합 A의 원소를 구한다.
❸ 단계	집합 A에서 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합을 구한다.

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$이므로
$B=\{a_1+d, a_2+d, \cdots, a_6+d\}$
집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$라 하면
$S(A)=32$, $S(B)=32+6d$, $S(A\cup B)=62$,
$S(A\cap B)=4+7+9=20$이고,
$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$이므로
$62=32+(32+6d)-20$
$6d=18 \qquad \therefore d=3$
이때 $A\cap B=\{4, 7, 9\}$이므로 집합 A의 한 원소를 a_i라 하면 $a_i+3=4$에서 $a_i=1$
같은 방법으로
$a_{i+1}+3=7$에서 $a_{i+1}=4$, $a_{i+2}+3=9$에서 $a_{i+2}=6$
즉, 집합 $A=\{1, 4, 6, 7, 9, x\}$라 하면 $S(A)=32$이므로 $1+4+6+7+9+x=32$에서 $x=5$
$\therefore A=\{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$
따라서 집합 A의 원소 중에서 값이 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합은 $1+9=10$ 답 10

24 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A-B)^C\cap(A\cup B)\}$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap\{(A\cap B^C)^C\cap(A\cup B)\}$
$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap\{(A^C\cup B)\cap(A\cup B)\}$
$=(A\cap U)\cap\{(A^C\cap A)\cup B\}$
$=A\cap(\varnothing\cup B)=A\cap B$
즉, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$
① $A\cap B=A$
② $B^C\subset A^C$
③ $A-B=\varnothing$
④ $A\cap(A\cup B)=A\cap B=A$
⑤ $A\cup(A^C\cap B^C)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B^C)$
$=U\cap(A\cup B^C)=A\cup B^C$
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

25 $A\cap B=\{3\}$에서 $3\in B$이므로
$a^2-2a=3$, $a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$
(i) $a=-1$일 때,
$A=\{-3, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$
그런데 집합 A의 원소 -3은 자연수가 아니므로 모순이다.
(ii) $a=3$일 때,
$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$
(i), (ii)에서 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$이므로
$(A^C\cup B)^C\cup(A^C\cup B^C)^C=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$
$=A\cap(B^C\cup B)$
$=A\cap U=A$
$=\{1, 3, 5\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$1+3+5=9$ 답 9

단계	채점 기준	배점
㈎	$A\cap B=\{3\}$에서 $3\in B$임을 이용하여 a의 값을 구한 경우	20%
㈏	조건에 맞는 a의 값을 구한 후, 두 집합 A, B를 구한 경우	40%
㈐	$(A^C\cup B)^C\cup(A^C\cup B^C)^C$을 간단히 하여 이 집합의 모든 원소의 합을 구한 경우	40%

26 조건 ㈏에서
$\{(A\cup B)\cap(B-A)^C\}\cup B$
$=\{(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C\}\cup B$
$=\{(A\cup B)\cap(B^C\cup A)\}\cup B$
$=\{A\cup(B\cap B^C)\}\cup B$
$=(A\cup\varnothing)\cup B$
$=A\cup B$
이므로 $A\cup B\neq A$
$\therefore B\not\subset A$
또한, 조건 ㈎에 의하여
$A\not\subset B$
한편, $\{f(x)+g(x)\}^3=\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$에서
$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3+3f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}$
$=\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$
$3f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}=0$
$\therefore f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 또는 $f(x)+g(x)=0$
즉, $C=\{x\mid f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$
또는 $f(x)+g(x)=0\}$
이므로 $n(C)$가 최소이려면 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근의 개수가 최대이어야 한다.
그런데 $B\not\subset A$, $A\not\subset B$이므로 조건 ㈎에서 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근의 개수의 최댓값은 3이다.
따라서 $n(C)$의 최솟값은
$5+4-3=6$ * 답 6

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 근의 개수가 각각 5, 4이고, $n(C)$가 최소이려면 공통근이 3개이어야 하므로 서로 다른 세 공통근을 a, b, c라 하면
$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)f_1(x)$,
$g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-f)g_1(x)$
이고, 두 방정식 $f_1(x)=0$, $g_1(x)=0$의 근은 각각 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 근과 같거나 존재하지 않는다.
이때
$f(x)+g(x)$
$=(x-a)(x-b)(x-c)\{(x-d)(x-e)f_1(x)+(x-f)g_1(x)\}$
이므로 방정식 $f(x)+g(x)=0$은 공통근 a, b, c를 근으로 갖는다.
즉, $n(C)$가 최소일 때는 방정식 $(x-d)(x-e)f_1(x)+(x-f)g_1(x)=0$이 a, b, c를 근으로 갖거나 근을 갖지 않을 때이고, 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=0$의 근과 중복되므로 $n(C)$의 최솟값은 두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 근의 개수의 합에서 공통근의 개수를 빼면 된다.

27 $A-X\subset A$, $B-X\subset B$이므로 조건 (나)에서
$A-X=B-X\subset(A\cap B)=\{3,\ 4,\ 5\}$
$A-X\subset\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{1,\ 2\}\subset X$
$B-X\subset\{3,\ 4,\ 5\}$에서 $\{6,\ 7\}\subset X$
즉, $\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}\subset X$이므로
$1\in X$, $2\in X$, $6\in X$, $7\in X$ ……㉠
조건 (다)에서
$(X-A)\cap(X-B)=(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)$
$=X\cap(A^C\cap B^C)$
$=X\cap(A\cup B)^C$
$X\cap(A\cup B)^C\neq\varnothing$이고 $(A\cup B)^C=\{8,\ 9,\ 10\}$이므로
$8\in X$ 또는 $9\in X$ 또는 $10\in X$ ……㉡
㉡에서 가장 작은 원소가 8이므로 $8\in X$
조건 (가)에서 $n(X)=6$이고 ㉠에서 1, 2를 제외한 가장 작은 원소는 3이므로
$3\in X$
즉, 집합 X의 모든 원소의 합이 최소인 경우는
$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$
따라서 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은
$1+2+3+6+7+8=27$ 답 ②

28 k는 12와 15의 최대공약수인 3의 약수이므로
$(N_{12}\cup N_{15})\subset N_k$를 만족시키는 자연수 k의 최댓값은
$M=3$
또한, l은 3과 4의 최소공배수인 12의 배수이므로
$(N_3\cap N_4)\supset N_l$을 만족시키는 자연수 l의 최솟값은
$m=12$
$\therefore Mm=3\times12=36$ 답 36

29 ㄱ. $A_n\cap B=\{3,\ 5\}$이므로 n은 3, 5의 공배수이면서 2, 9, 10의 배수가 아니어야 한다.
즉, 조건을 만족시키는 n의 값은 15, 75이다. (거짓)
ㄴ. $A_n\cap B=\{2,\ 3,\ 9\}$이므로 n은 2, 3, 9의 공배수이면서 5, 10의 배수가 아니어야 한다.
즉, 조건을 만족시키는 n의 최솟값은 18이다. (참)
ㄷ. $n(A_n\cap B)=4$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.
(i) $A_n\cap B=\{2,\ 3,\ 5,\ 9\}$일 때,
n은 2, 3, 5, 9의 공배수이면서 10의 배수가 아니어야 한다.
이때 2, 3, 5, 9의 공배수인 100 이하의 자연수는 90뿐이므로 10의 배수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $A_n\cap B=\{2,\ 3,\ 5,\ 10\}$일 때,
n은 2, 3, 5, 10의 공배수이면서 9의 배수가 아니어야 한다.
이때 2, 3, 5, 10의 공배수인 100 이하의 자연수는 30, 60, 90이고, 이 중 9의 배수인 90을 제외하면 조건을 만족시키는 자연수 n은 30, 60의 2개이다.
(iii) $A_n\cap B=\{2,\ 3,\ 9,\ 10\}$일 때,
n은 2, 3, 9, 10의 공배수이면서 5의 배수가 아니어야 한다.
이때 2, 3, 9, 10의 공배수인 100 이하의 자연수는 90뿐이므로 5의 배수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.
(iv) $A_n\cap B=\{2,\ 5,\ 9,\ 10\}$일 때,
n은 2, 5, 9, 10의 공배수이면서 3의 배수가 아니어야 한다.
이때 2, 5, 9, 10의 공배수인 100 이하의 자연수는 90뿐이므로 3의 배수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.
(v) $A_n\cap B=\{3,\ 5,\ 9,\ 10\}$일 때,
n은 3, 5, 9, 10의 공배수이면서 2의 배수가 아니어야 한다.
이때 3, 5, 9, 10의 공배수인 100 이하의 자연수는 90뿐이므로 2의 배수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 n의 개수는 2이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

ㄷ에서 $n(A_n\cap B)=4$이려면 집합 B의 원소 중에서 집합 A_n의 원소가 아닌 것이 오직 하나만 존재해야 한다.
$2\not\in A$이면 $10\not\in A$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$3\not\in A$이면 $9\not\in A$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$5\not\in A$이면 $10\not\in A$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$10\not\in A$이면 $2\not\in A$ 또는 $5\not\in A$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, 집합 B의 원소이면서 집합 A의 원소가 아닌 것은 9이므로 자연수 n은 3과 10의 공배수이면서 9의 배수는 아니어야 하므로 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수는 30, 60의 2개이다.

30 $A_n=\{x\,|\,x$는 n의 양의 약수$\}$이므로 $n(A_n)=4$, 즉 n의 양의 약수의 개수가 4이려면
$n=a^3$ (a는 소수) 꼴 또는
$n=ab$ (a, b는 서로 다른 소수) 꼴이어야 한다.
이때의 집합 A_n은
$A_{a^3}=\{1,\ a,\ a^2,\ a^3\}$ 또는 $A_{ab}=\{1,\ a,\ b,\ ab\}$
집합 A_n을 n의 값이 작은 순서대로 나열하면
$A_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $A_8=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $A_{10}=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$,
$A_{14}=\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$, $A_{15}=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$,
$A_{21}=\{1,\ 3,\ 7,\ 21\}$, $\cdots$
한편, 집합 $A_q\cap A_r$의 모든 원소의 합이 최소이려면
$A_q\cap A_r=\{1\}$이어야 하므로 q와 r은 서로소이어야 한다.

이때 집합 $A_p \cup A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소이려면 두 집합 A_q, A_r은 두 집합 A_8, A_{15} 중에서 각각 하나이고, 집합 A_p는 집합 A_6이어야 한다.*

따라서 $A_6 \cup A_8 \cup A_{15} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 15\}$이므로

집합 $A_p \cup A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+3+4+5+6+8+15=44$ 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

집합 $A_p \cup A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소이려면
집합 $A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소이어야 한다.
이때 $A_q \cap A_r = \{1\}$이므로
(i) $A_q = A_6$ 또는 $A_r = A_6$일 때,
집합 $A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소인 경우는
$A_q \cup A_r = A_6 \cup A_{35} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 35\}$
이때 모든 원소의 합은 59이다.
(ii) $A_q = A_8$ 또는 $A_r = A_8$일 때,
집합 $A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소인 경우는
$A_q \cup A_r = A_8 \cup A_{15} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 15\}$
이때 모든 원소의 합은 38이다.
(iii) $A_q = A_{10}$ 또는 $A_r = A_{10}$일 때,
집합 $A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소인 경우는
$A_q \cup A_r = A_{10} \cup A_{21} = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 21\}$
이때 모든 원소의 합은 49이다.
⋮ (중략)
따라서 집합 $A_q \cup A_r$의 모든 원소의 합이 최소인 경우는
$A_8 \cup A_{15}$
이므로 두 집합 A_q, A_r은 두 집합 A_8, A_{15} 중에서 각각 하나이어야 한다.

31 조건 (가)에서 집합 $A_6 \cap A_9$는 6과 9의 공배수, 즉 18의 배수의 집합이므로 $A_{18} \subset A_k$이다.

즉, k는 18의 약수이다.

조건 (나)에서 집합 $B_{2k} \cap B_{3k}$는 $2k$와 $3k$의 공약수, 즉 k의 약수의 집합이므로 $n(B_k) \geq 4$이다.

즉, k는 약수의 개수가 4 이상이어야 한다.

이때 18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $k=1, 2, 3$일 때,
1, 2, 3의 약수의 개수가 4보다 작으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=6$일 때,
$6=2\times3$의 약수의 개수는 $(1+1)\times(1+1)=4$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(iii) $k=9$일 때,
$9=3^2$의 약수의 개수는 $2+1=3$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $k=18$일 때,
$18=2\times3^2$의 약수의 개수는 $(1+1)\times(2+1)=6$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 $k=6$ 또는 $k=18$이므로 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$6+18=24$ 답 24

BLACKLABEL 특강 참고

두 집합 B_{2k}, B_{3k}를 직접 구하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 값을 구할 수도 있다.
(i) $k=1$, 2일 때,
$n(B_{2k}) < 4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $k=3$일 때,
$B_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $B_9 = \{1, 3, 9\}$이므로
$B_6 \cap B_9 = \{1, 3\}$
즉, $n(B_6 \cap B_9) = 2$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(iii) $k=6$일 때,
$B_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로
$B_{12} \cap B_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$
즉, $n(B_{12} \cap B_{18}) = 4$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
(iv) $k=9$일 때,
$B_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $B_{27} = \{1, 3, 9, 27\}$이므로
$B_{18} \cap B_{27} = \{1, 3, 9\}$
즉, $n(B_{18} \cap B_{27}) = 3$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(v) $k=18$일 때,
$B_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$,
$B_{54} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$이므로
$B_{36} \cap B_{54} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
즉, $n(B_{36} \cap B_{54}) = 6$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 자연수 k는 6, 18이다.

32 집합 $A_n \cap A_4$는 n과 4의 공배수의 집합이고 $(A_n \cap A_4) \subset A_{2n}$에서 $2n$은 n과 4의 최소공배수의 약수이어야 한다.

$n=4k$ (k는 자연수)일 때, n과 4의 최소공배수는 $4k$이고, $2n$은 $8k$이므로 $4k$의 약수가 아니다.

즉, $n \neq 4k$ (k는 자연수)이어야 한다.*

또한, $100 \notin (A_4 - A_n)$에서 $100 \in A_4$이므로 $100 \in A_n$이어야 한다.

즉, n은 100의 약수이어야 한다.

100의 약수 중에서 4의 배수가 아닌 수는 1, 2, 5, 10, 25, 50이므로 구하는 자연수 n의 개수는 6이다. 답 6

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

(i) $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때,
n과 4의 최소공배수는 $4(4k-1)$이고, $2n=2(4k-1)$이므로 $2n$은 n과 4의 최소공배수의 약수이다.
(ii) $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때,
n과 4의 최소공배수는 $2(4k-2)=4(2k-1)$이고,
$2n=2(4k-2)=4(2k-1)$이므로 $2n$은 n과 4의 최소공배수의 약수이다.
(iii) $n=4k-3$ (k는 자연수)일 때,
n과 4의 최소공배수는 $4(4k-3)$이고, $2n=2(4k-3)$이므로 $2n$은 n과 4의 최소공배수의 약수이다.
(i), (ii), (iii)에서 $n \neq 4k$ (k는 자연수)일 때 $(A_n \cap A_4) \subset A_{2n}$을 만족시킨다.

33 ㄱ. $A \circ \varnothing = (A \cap \varnothing^C) \cup (A^C \cap \varnothing)$
$= (A \cap U) \cup \varnothing$
$= A \cup \varnothing$
$= A$ (거짓)

ㄴ. $A \circ A = (A \cap A^C) \cup (A^C \cap A)$
$= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

이므로

$(A \circ A) \circ A = \varnothing \circ A$
$= (\varnothing \cap A^C) \cup (\varnothing^C \cap A)$
$= \varnothing \cup (U \cap A)$
$= \varnothing \cup A$
$= A$ (참)

ㄷ. $(A \circ B) \cap C = \{(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\} \cap C$
$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)$

$(A \cap C) \circ (B \cap C)$
$= \{(A \cap C) \cap (B \cap C)^C\} \cup \{(A \cap C)^C \cap (B \cap C)\}$
$= \{(A \cap C) \cap (B^C \cup C^C)\}$
$\cup \{(A^C \cup C^C) \cap (B \cap C)\}$
$= \{(A \cap C \cap B^C) \cup (A \cap C \cap C^C)\}$
$\cup \{(A^C \cap B \cap C) \cup (C^C \cap B \cap C)\}$
$= (A \cap B^C \cap C) \cup \varnothing \cup (A^C \cap B \cap C) \cup \varnothing$
$= (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)$
$\therefore (A \circ B) \cap C = (A \cap C) \circ (B \cap C)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

34 $(A \cup B) - (A \cap B)$
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$
$= (A \cup B) \cap (A^C \cup B^C)$
$= \{(A \cup B) \cap A^C\} \cup \{(A \cup B) \cap B^C\}$
$= (A \cap A^C) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C) \cup (B \cap B^C)$
$= \varnothing \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap B^C) \cup \varnothing$
$= (A - B) \cup (B - A)$

즉, $(A - B) \cup (B - A) = A - B$이므로
$B - A = \varnothing$

ㄱ. 주어진 식에서 집합 B가 공집합인지 아닌지 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $B - A = \varnothing$에서 $B \subset A$이므로
$A \cup B = A$ (거짓)

ㄷ. $B - A = \varnothing$에서 $B \cap A^C = \varnothing$이므로
$(B \cap A^C)^C = \varnothing^C = U$
$\therefore A \cup B^C = U$ (참)

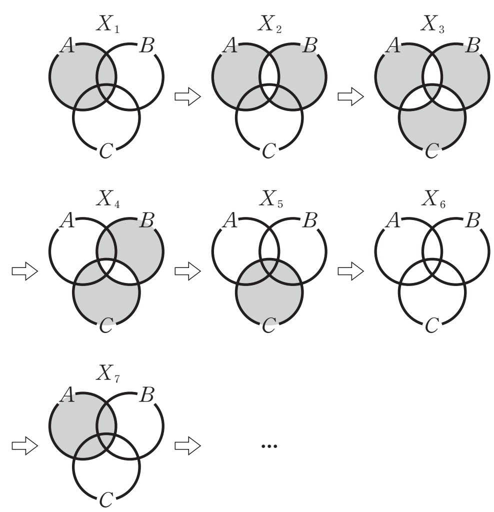
따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

35 부등식 $x + a - 3 > 0$, 즉 $x > 3 - a$가 모든 양수 x에 대하여 성립해야 하므로 $3 - a \le 0$이어야 한다.
$\therefore a \ge 3$
즉, $A = \{a \mid a \ge 3\}$
또한, 이차부등식 $x^2 + ax + a > 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 4a < 0$, $a(a - 4) < 0$
$\therefore 0 < a < 4$
즉, $B = \{a \mid 0 < a < 4\}$
따라서 $A \cup B = \{a \mid a > 0\}$, $A \cap B = \{a \mid 3 \le a < 4\}$이므로
$(A \cup B) - (A \cap B) = \{a \mid 0 < a < 3$ 또는 $a \ge 4\}$ 답 ①

36 $A \star B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cup B) - (A \cap B)$
이때 연산 ★는 교환법칙과 결합법칙이 성립하고,
$A \star A = \varnothing$, $\varnothing \star \varnothing = \varnothing$, $A \star \varnothing = \varnothing \star A = A$이므로
$X_6 = A \star B \star C \star A \star B \star C$
$= (A \star A) \star (B \star B) \star (C \star C)$
$= \varnothing \star \varnothing \star \varnothing$
$= \varnothing$
$X_7 = X_6 \star A$
$= \varnothing \star A$
$= A$
즉, 자연수 k에 대하여 $X_{6k} = \varnothing$, $X_{6k+1} = A$이다.
따라서 $X_n = A$를 만족시키는 $2 \le n \le 30$인 자연수 n의 값은 7, 13, 19, 25이고, 그 합은
$7 + 13 + 19 + 25 = 64$ 답 64

• 다른 풀이 •

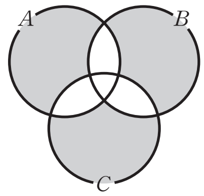
자연수 n에 대하여 집합 X_n을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $X_1 = X_7$에서 자연수 k에 대하여 $X_k = X_{k+6}$이므로
$X_n = A$를 만족시키는 $2 \le n \le 30$인 자연수 n의 값은
7, 13, 19, 25
따라서 자연수 n의 값의 합은
$7 + 13 + 19 + 25 = 64$

37 세 편의 영화 A, B, C를 관람한 사원들의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(A) = 27$, $n(B) = 18$, $n(C) = 22$, $n(A \cap B \cap C) = 8$
이 회사의 모든 사원들이 적어도 한 편의 영화를 관람하였으므로
$n(A \cup B \cup C) = 50$

이때 한 편의 영화만 관람한 사원들의 집합을 벤 다이어그램에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 한 편의 영화만 관람한 사원의 수는

$n(A\cup B\cup C)-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)$
$\qquad +n(C\cap A)\}+2\times n(A\cap B\cap C)$

그런데

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$\qquad -\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$
$\qquad +n(A\cap B\cap C)$

이므로

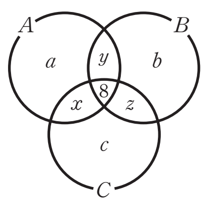
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)$
$\qquad -n(A\cup B\cup C)$
$=27+18+22+8-50$
$=25$

따라서 한 편의 영화만 관람한 사원의 수는

$50-25+2\times 8=41$ 답 41

• 다른 풀이 •

세 편의 영화 A, B, C를 관람한 사원들의 집합을 각각 A, B, C라 하고, 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내면



$n(A\cup B\cup C)=50$,
$n(A)=27$, $n(B)=18$, $n(C)=22$이므로

$a+b+c+x+y+z=50-8=42$ ……㉠
$a+x+y=27-8=19$ ……㉡
$b+y+z=18-8=10$ ……㉢
$c+x+z=22-8=14$ ……㉣

㉡+㉢+㉣−㉠을 하면

$x+y+z=1$ ……㉤

㉤을 ㉠에 대입하면

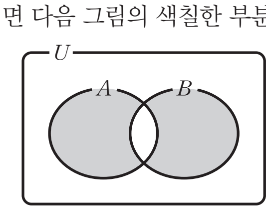
$a+b+c=41$

따라서 한 편의 영화만 관람한 사원의 수는 41이다.

38 조건 (다)에서

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

이므로 집합 $C=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



이때 집합 $A\cap B$는 집합 $A-C$와 같고, 조건 (가), (나)에서 집합 $A-C$는 $1000=2^3\times 5^3$의 약수 중에서 2의 배수가 아닌 수의 집합이므로

$A\cap B=\{1, 5, 5^2, 5^3\}$

즉, $n(A\cap B)=4$이고, $n(C)=500$이므로

$n(A\cup B)=n(C)+n(A\cap B)$
$\qquad =500+4=504$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$\qquad =n(U)-n(A\cup B)$
$\qquad =1000-504=496$ 답 ①

39 $(x-2)(x^2+ax+b)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2+ax+b=0$

$(x-2)(x^2+bx+a)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2+bx+a=0$

이때 $n(A\cup B)=4$, $n(A\cap B)=2$이므로 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$은 하나의 공통근을 갖는다.

이 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0$ ……㉠
$\alpha^2+b\alpha+a=0$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha+b-a=0$, $(a-b)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=1$ ($\because a\neq b$)

이것을 ㉠에 대입하면

$1+a+b=0$ $\quad\therefore b=-a-1$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2+ax-a-1=0$에서

$(x-1)(x+a+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-a-1$

$\therefore A=\{1, 2, -a-1\}$

이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2-(a+1)x+a=0$에서

$(x-1)(x-a)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=a$

$\therefore B=\{1, 2, a\}$

따라서 $(A-B)\cup(B-A)=\{-a-1, a\}$이므로 집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

$-a-1+a=-1$ 답 -1

• 다른 풀이 •

$(x-2)(x^2+ax+b)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2+ax+b=0$이므로

$A=\{x\,|\,x=2$ 또는 $x^2+ax+b=0\}$

$(x-2)(x^2+bx+a)=0$에서

$x=2$ 또는 $x^2+bx+a=0$이므로

$B=\{x\,|\,x=2$ 또는 $x^2+bx+a=0\}$

이때 $n(A\cup B)=4$, $n(A\cap B)=2$이므로 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$은 하나의 공통근을 갖는다.

이 공통근을 α라 하고 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 p, α, 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근을 q, α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$p+\alpha=-a$ ……㉠, $p\alpha=b$ ……㉡

$q+\alpha=-b$ ……㉢, $q\alpha=a$ ……㉣

㉡$-$㉣을 하면 $\alpha(p-q)=b-a$

㉠$-$㉢을 하면 $p-q=-a+b$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$\alpha(b-a)=b-a \quad \therefore \alpha=1\ (\because a\neq b)$

㉠, ㉢에서 $p+1=-a$, $q+1=-b$이므로 두 식을 변끼리 더하면

$p+q+2=-(a+b)$

㉡, ㉣에서 $p=b$, $q=a$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$p+q+2=-(p+q)$

$2(p+q)=-2 \quad \therefore p+q=-1$

따라서 $A=\{2, p, \alpha\}$, $B=\{2, q, \alpha\}$에서

$(A-B)\cup(B-A)=\{p, q\}$이므로

집합 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은

$p+q=-1$

40 $A^C=\{x\,|\,x=7n+2\}$

$=\{9, 16, 23, 30, 37, 44, \cdots\}$ ……㉠

이때 $7n+2\leq 200$에서

$7n\leq 198 \quad \therefore n\leq 28.\times\times\times$

$\therefore n(A^C)=28$

$B^C=\{x\,|\,x=5n-1\}$

$=\{4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, \cdots\}$ ……㉡

이때 $5n-1\leq 200$에서

$5n\leq 201 \quad \therefore n\leq 40.\times\times\times$

$\therefore n(B^C)=40$

또한, ㉠, ㉡에서

$A^C\cap B^C=\{9, 44, 79, 114, 149, 184\}$*

$\therefore n(A^C\cap B^C)=6$

따라서 $A\cap B=(A^C\cup B^C)^C=U-(A^C\cup B^C)$이므로

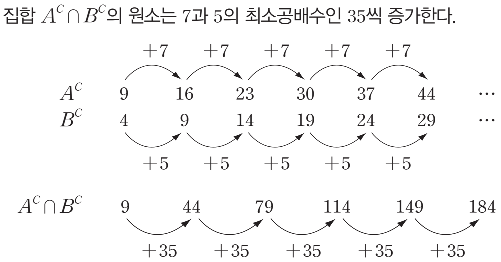
$n(A\cap B)=n(U)-n(A^C\cup B^C)$

$=n(U)-\{n(A^C)+n(B^C)-n(A^C\cap B^C)\}$

$=200-(28+40-6)=138$ **답** 138

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

집합 A^C의 원소는 7씩 증가하고, 집합 B^C의 원소는 5씩 증가하므로 집합 $A^C\cap B^C$의 원소는 7과 5의 최소공배수인 35씩 증가한다.



41 학생 전체의 집합을 U, 경상도, 전라도, 제주도를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=200$, $n(A)=80$, $n(B)=100$, $n(A^C\cap B^C)=40$, $n(C-(A\cup B))=20$이고,

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=200-n(A\cup B)=40$

$\therefore n(A\cup B)=200-40=160$

이때 경상도와 전라도를 모두 선택한 학생들의 집합은 $A\cap B$이므로 경상도와 전라도를 모두 선택한 학생의 수는

$a=n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=80+100-160=20$

한편, $n(C-(A\cup B))=20$에서

$n(C-(A\cup B))=n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)$

$=n(A\cup B\cup C)-160=20$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=20+160=180$

이때 3개의 장소 중에서 어느 것도 선택하지 않은 학생들의 집합은 $(A\cup B\cup C)^C$이므로

$b=n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=200-180=20$

따라서 $a=20$, $b=20$이므로 $ab=400$ **답** 400

BLACKLABEL 특강 참고

특정 조건을 포함한 문장을 집합으로 표현하면 다음과 같다.

(1) '또는', '적어도 하나는' ⇨ $A\cup B$

(2) '모두', '둘 다 ~하는' ⇨ $A\cap B$

(3) '둘 중 어느 것도 ~하지 않는' ⇨ $(A\cup B)^C$

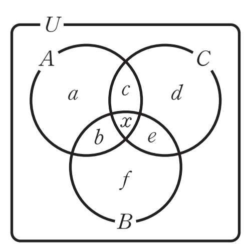
(4) '하나만 ~하는' ⇨ $A-B$ 또는 $B-A$

42 학생 전체의 집합을 U, 국어, 영어, 수학을 합격한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=110$, $n(A)=92$, $n(B)=75$, $n(C)=63$

$n(A\cap B)=65$, $n(A\cap C)=54$, $n(B\cap C)=48$

$n(A\cap B\cap C)=x$라 하고 벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내면



$n(A\cap B)=65$에서

$b+x=65 \quad \therefore b=65-x$

$n(A\cap C)=54$에서 $c+x=54 \quad \therefore c=54-x$

$n(B\cap C)=48$에서 $e+x=48 \quad \therefore e=48-x$

$n(A)=92$에서 $a+b+c+x=92$

$a+(65-x)+54=92 \quad \therefore a=x-27$

$n(B)=75$에서 $b+e+f+x=75$

$(65-x)+48+f=75 \quad \therefore f=x-38$

$n(C)=63$에서 $c+d+e+x=63$

$(54-x)+d+48=63 \quad \therefore d=x-39$

이때 a, b, c, d, e, f가 모두 0 이상이어야 하므로

$x-27\geq 0$, $65-x\geq 0$, $54-x\geq 0$, $x-39\geq 0$,

$48-x\geq 0$, $x-38\geq 0$ $\quad\therefore 39\leq x\leq 48$

따라서 세 과목 모두 합격한 학생 수의 최솟값은 39이다.

답 ④

• 다른 풀이 •

학생 전체의 집합을 U, 국어, 영어, 수학을 합격한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=110$, $n(A)=92$, $n(B)=75$, $n(C)=63$,

$n(A\cap B)=65$, $n(A\cap C)=54$, $n(B\cap C)=48$

이때 세 과목 모두 합격한 학생 수는 $n(A\cap B\cap C)$이므로 $n(A\cap B\cap C)=x$라 하면

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad-n(A\cap B)-n(A\cap C)\\&\quad-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\&=92+75+63-65-54-48+x\\&=63+x\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=92+75-65=102\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n(A\cup C)&=n(A)+n(C)-n(A\cap C)\\&=92+63-54=101\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n(B\cup C)&=n(B)+n(C)-n(B\cap C)\\&=75+63-48=90\end{aligned}$$

이고, $n(A\cup B\cup C)\geq n(A\cup B)$,

$n(A\cup B\cup C)\geq n(A\cup C)$,

$n(A\cup B\cup C)\geq n(B\cup C)$이므로

$63+x\geq 102$, $63+x\geq 101$, $63+x\geq 90$

$x\geq 39$, $x\geq 38$, $x\geq 27$

$\therefore x\geq 39$

따라서 구하는 최솟값은 39이다.

BLACKLABEL 특강 참고

벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 이용하여 $39\leq x\leq 48$임을 구했지만 x의 최댓값은 48이 아니다.
$x=48$이라 하고 벤 다이어그램의 각 영역의 원소의 개수를 구하면 $a=21$, $b=17$, $c=6$, $d=9$, $e=0$, $f=10$이므로 $n(A\cup B\cup C)=111$이 되어 $n(U)=110$에 모순이다.
각 영역의 원소의 개수를 더하면 $n(A\cup B\cup C)=x+63$이고, $n(A\cup B\cup C)\leq 110$을 만족시켜야 하므로 $x+63\leq 110$에서 $x\leq 47$이다. 즉, x의 최댓값은 47이다.

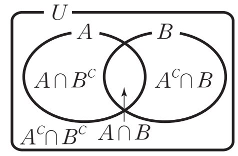
STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.57~58

01 67	02 33	03 ③	04 32	05 72
06 130	07 735	08 21	09 ②	10 75
11 94	12 63			

01 해결단계

❶ 단계	1, 2가 각각 세 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소임을 파악한다.
❷ 단계	$n(A^C\cap B)=3$을 이용하여 1, 2가 각각 집합 $A^C\cap B$의 원소인 경우와 아닌 경우로 나누어 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

두 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 조건 ㈎에서 1, 2는 각각 세 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소이다.



(i) $1\in A^C\cap B$, $2\in A^C\cap B$일 때,
$n(A^C\cap B)=3$이므로 3, 4, 5 중 1개는 집합 $A^C\cap B$의 원소이고 나머지 2개는 각각 세 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소이어야 한다.
따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$3\times3\times3=27$

(ii) $1\in A^C\cap B$, $2\notin A^C\cap B$일 때,
2는 두 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소이고, $n(A^C\cap B)=3$이므로 3, 4, 5 중 2개는 집합 $A^C\cap B$의 원소이고 나머지 1개는 세 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소이어야 한다.
따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$2\times3\times3=18$

(iii) $1\notin A^C\cap B$, $2\in A^C\cap B$일 때,
(ii)와 같은 방법으로 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$2\times3\times3=18$

(iv) $1\notin A^C\cap B$, $2\notin A^C\cap B$일 때,
1과 2는 각각 두 집합 $A\cap B$, $A^C\cap B^C$ 중 하나의 원소이고 $n(A^C\cap B)=3$이므로 3, 4, 5는 모두 집합 $A^C\cap B$의 원소이다.
따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$2\times2=4$

(i)~(iv)에서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는
$27+18+18+4=67$

답 67

02 해결단계

❶ 단계	$x_2=2$, $y_2=-1$일 때 좌표평면에서 집합 $A◎B$가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.
❷ 단계	$x_2=-2$, $y_2=2$일 때 좌표평면에서 집합 $A◎B$가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.
❸ 단계	선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$A◎B=\{(x_1+x_2, y_1+y_2)\,|\,(x_1, y_1)\in A, (x_2, y_2)\in B\}$,

$B=\{(2, -1), (-2, 2)\}$에서

$A◎B$

$=\{(x_1+2, y_1-1)\,|\,(x_1, y_1)\in A\}$

$\quad\cup\{(x_1-2, y_1+2)\,|\,(x_1, y_1)\in A\}$

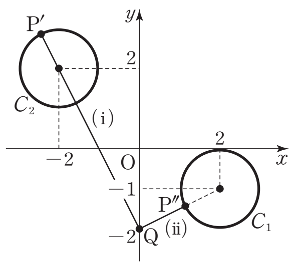
좌표평면에서 집합 $\{(x_1+2,\ y_1-1)\,|\,(x_1,\ y_1)\in A\}$가 나타내는 도형은 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 이 원을 C_1이라 하면 원 C_1의 방정식은

$C_1 : (x-2)^2+(y+1)^2=1$

좌표평면에서 집합 $\{(x_1-2,\ y_1+2)\,|\,(x_1,\ y_1)\in A\}$가 나타내는 도형은 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 이 원을 C_2라 하면 원 C_2의 방정식은

$C_2 : (x+2)^2+(y-2)^2=1$

이때 선분 PQ의 길이가 최대, 최소가 되는 경우는 다음과 같다.



(i) 선분 PQ의 길이가 최대인 경우

위의 그림과 같이 직선 PQ가 원 C_2의 중심을 지날 때, 즉 점 P가 원 C_2 위의 점 P′의 위치에 있을 때 선분 PQ의 길이는 최대가 된다.

점 Q와 원 C_2의 중심 $(-2,\ 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-0)^2+\{2-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

이때 원 C_2의 반지름의 길이가 1이므로

$M=2\sqrt{5}+1$

(ii) 선분 PQ의 길이가 최소인 경우

위의 그림과 같이 직선 PQ가 원 C_1의 중심을 지날 때, 즉 점 P가 원 C_1 위의 점 P″의 위치에 있을 때 선분 PQ의 길이는 최소가 된다.

점 Q와 원 C_1의 중심 $(2,\ -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(2-0)^2+\{-1-(-2)\}^2}=\sqrt{5}$

이때 원 C_1의 반지름의 길이는 1이므로

$m=\sqrt{5}-1$

(i), (ii)에서

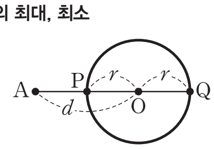
$M^2+2m^2=(2\sqrt{5}+1)^2+2(\sqrt{5}-1)^2$

$=21+4\sqrt{5}+12-4\sqrt{5}=33$ **답** 33

BLACKLABEL 특강 필수 원리

원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리의 최대, 최소

원 밖의 한 점 A와 원의 중심 O 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r이라 할 때, 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은



(1) 최댓값: $\overline{AO}+\overline{OQ}=d+r$

(2) 최솟값: $\overline{AO}-\overline{OP}=d-r$

03 해결단계

❶ 단계	$m=1$일 때, $k=1,\ 2$를 대입하여 집합 $X(A,\ B)$를 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	$i^m+\left(\frac{1}{i}\right)^k$에서 $m,\ k$의 값에 따라 $X(A,\ B)$는 같은 수가 나올 수 있음을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	$A=B=U$일 때 $n(X(A,\ B))$가 최대임을 이용하여 집합 $X(A,\ B)$를 직접 구하고 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

$X(A,\ B)=\left\{i^m+\left(\frac{1}{i}\right)^k \middle|\, m\in A,\ k\in B\right\}$

$=\{i^m+(-i)^k\,|\,m\in A,\ k\in B\}$

ㄱ. $A=\{1\},\ B=\{1,\ 2\}$이므로

$m=1,\ k=1$일 때, $i+(-i)=0$

$m=1,\ k=2$일 때, $i+(-i)^2=i-1$

$\therefore X(A,\ B)=\{0,\ -1+i\}$ (참)

ㄴ. $n(A)n(B)$는 순서쌍 $(m,\ k)$의 개수와 같다.

한편, $i^m+(-i)^k$에서

$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$

$(-i)^1=-i,\ (-i)^2=-1,\ (-i)^3=i,\ (-i)^4=1$

이므로 $m,\ k$의 값에 따라 $X(A,\ B)$는 같은 수가 나올 수 있다.

따라서 $n(X(A,\ B))$는 $n(A)n(B)$보다 작거나 같으므로 $n(X(A,\ B))\le n(A)n(B)$ (참)

ㄷ. $n(X(A,\ B))$가 최대이려면 $A=B=U$이어야 하고, 이때의 집합 $X(A,\ B)$의 원소를 구하면

(i) $m=1$일 때,

$i+(-i)=0,\ i+(-i)^2=i-1,$

$i+(-i)^3=i+i=2i,\ i+(-i)^4=i+1$

(ii) $m=2$일 때, $i^2=-1$이므로

$i^2+(-i)=-1-i,\ i^2+(-i)^2=-1-1=-2,$

$i^2+(-i)^3=-1+i,\ i^2+(-i)^4=-1+1=0$

(iii) $m=3$일 때, $i^3=-i$이므로

$i^3+(-i)=-i-i=-2i,\ i^3+(-i)^2=-i-1,$

$i^3+(-i)^3=-i+i=0,\ i^3+(-i)^4=-i+1$

(iv) $m=4$일 때, $i^4=1$이므로

$i^4+(-i)=1-i,\ i^4+(-i)^2=1-1=0,$

$i^4+(-i)^3=1+i,\ i^4+(-i)^4=1+1=2$

(i)~(iv)에서

$X(A,\ B)$

$=\{-2,\ 0,\ 2,\ -1-i,\ -1+i,\ 1-i,\ 1+i,-2i,\ 2i\}$

따라서 $n(X(A,\ B))$의 최댓값은 9이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

04 해결단계

❶ 단계	주어진 조건에 따라 집합 A_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$를 구한다.
❷ 단계	집합 사이의 관계를 파악하여 집합 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 집합의 부분집합의 개수를 구한다.

$4kx-[4kx]=0$에서 $4kx=[4kx]=$(정수)이므로

$A_1=\{x\,|\,4x=[4x],\ 0\le x\le 1\}$

$\quad=\{x\,|\,4x$는 정수, $0\le x\le 1\}$

이때 $0\le 4x\le 4$에서 $4x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로

$x=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}$

$\therefore\ A_1=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\right\}$

같은 방법으로

$A_2=\left\{0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \cdots,\ \frac{8}{8}\right\}$,

$A_3=\left\{0,\ \frac{1}{12},\ \frac{2}{12},\ \frac{3}{12},\ \cdots,\ \frac{12}{12}\right\}$,

$A_4=\left\{0,\ \frac{1}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{3}{16},\ \cdots,\ \frac{16}{16}\right\}$

$\therefore\ A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=A_1$

따라서 구하는 부분집합의 개수는 $2^5=32$ **답** 32

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 가우스 기호의 성질을 알고 있는지 확인하는 것으로 자주 출제되는 유형의 문제이다. 주어진 집합의 원소의 조건 $4kx=[4kx]$에서 $4kx$가 정수임을 확인하도록 하자.

05 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 집합으로 나타낸다.
❷ 단계	주어진 조건에서 집합의 원소의 개수를 구한다.
❸ 단계	두 종목만 좋아하는 학생의 수를 구한다.

학생 전체의 집합을 U, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 농구를 좋아하는 학생의 집합을 B, 야구를 좋아하는 학생의 집합을 C라 하면

$n(U)=100k,\ n(A)=64k,\ n(B)=52k,\ n(C)=38k,$

$n(A\cap B\cap C)=12k$ (k는 상수)라 할 수 있다.

이때 한 종목만 좋아하는 학생이 전체의 $46\,\%$, 즉 $46k$명이므로

$n(A\cup B\cup C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$\qquad+2\times n(A\cap B\cap C)$

$=46k$ ……㉠

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$\qquad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$
$\qquad+n(A\cap B\cap C)$

이므로 위의 식을 ㉠에 대입하여 정리하면

$64k+52k+38k$
$\ -2\times\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}+3\times 12k$
$=46k$

$190k-2\times\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}=46k$

$2\times\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}=144k$

$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=72k$

한편, ㉠에서 $n(A\cup B\cup C)=72k-2\times 12k+46k=94k$이므로

$n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)$
$\qquad=100k-94k=6k$

이고, $n((A\cup B\cup C)^C)=12$이므로 $6k=12$

$\therefore\ k=2$

따라서 두 종목만 좋아하는 학생의 수는

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$

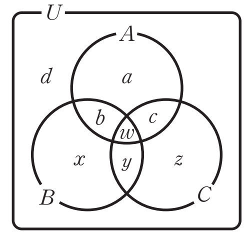
$=72k-3\times 12k=36k$

$=36\times 2=72$ **답** 72

06 해결단계

❶ 단계	벤 다이어그램을 이용하여 각 영역에 속하는 원소의 개수를 문자로 나타낸다.
❷ 단계	$n(B-A)=1,\ n(C-A)=3,\ n(B\cap C)=3$을 이용하여 문자 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	$n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

벤 다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 나타내면



$n(B-A)=1,\ n(C-A)=3,$

$n(B\cap C)=3$이므로

$x+y=1$ ……㉠

$y+z=3$

$w+y=3$

㉠에서 $y=0$ 또는 $y=1$

(i) $y=0$일 때,

$x=1,\ z=3,\ w=3$

$n(U)=7$이므로 $a=b=c=d=0$

즉, $n(A)=3,\ n(B)=4,\ n(C)=6$이므로

$n(A)\times n(B)\times n(C)=3\times 4\times 6=72$

(ii) $y=1$일 때,

$x=0,\ z=2,\ w=2$

$n(U)=7$이므로 $a+b+c+d=2$

즉, $n(A)=a+b+c+2,\ n(B)=b+3,$

$n(C)=c+5$

$n(A)\times n(B)\times n(C)$의 값이 최소이려면

$a=b=c=0,\ d=2$

즉, $n(A)=2,\ n(B)=3,\ n(C)=5$이므로

$n(A)\times n(B)\times n(C)=2\times 3\times 5=30$

$n(A)\times n(B)\times n(C)$의 값이 최대이려면

$a+b+c=2,\ d=0$

즉, $n(A)=4,\ n(B)=b+3,\ n(C)=c+5$이므로

$n(A)\times n(B)\times n(C)=4(b+3)(c+5)$

$a+b+c=2$에서

$a=0,\ b=0,\ c=2$이면

$n(A)\times n(B)\times n(C)=4\times 3\times 7=84$

$a=0,\ b=1,\ c=1$이면

$n(A)\times n(B)\times n(C)=4\times 4\times 6=96$

$a=0,\ b=2,\ c=0$이면

$n(A)\times n(B)\times n(C)=4\times 5\times 5=100$

(i), (ii)에서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값은 100, 최솟값은 30이므로

$M=100$, $m=30$

$\therefore M+m=130$ **답** 130

07 해결단계

❶ 단계	집합 A_n의 모든 원소의 합을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식이 35의 배수가 되도록 하는 n의 값을 구한다.
❸ 단계	집합 B_{20}의 모든 원소의 합을 구한다.

주어진 조건에 의하여 집합 A_n의 원소의 개수는 7이고, 가장 작은 원소는 n이므로

$A_n=\{n,\ n+2,\ n+4,\ n+6,\ n+8,\ n+10,\ n+12\}$

이때 집합 A_n의 모든 원소의 합은

$n+n+2+n+4+n+6+n+8+n+10+n+12$

$=7n+42=7(n+6)$ ……㉠

집합 A_n의 모든 원소의 합이 35의 배수가 되려면

$7(n+6)=35k$ (k는 자연수)

$n+6=5k$ $\therefore n=5k-6$ ……㉡

그런데 $k=1$이면 $n=5-6=-1$에서 n은 자연수가 아니므로 $k\geq 2$

따라서 B_{20}은 $k=21$일 때, 즉 $n=5\times 21-6=99$ ($\because$ ㉡) 일 때이므로 집합 B_{20}, 즉 A_{99}의 모든 원소의 합은

$7\times(99+6)=735$ ($\because$ ㉠) **답** 735

• 다른 풀이 •

$n(A_n)=7$이므로 A_n의 원소를 작은 수부터 차례대로 나열할 때 가운데 수를 x라 하면

$A_n=\{x-6,\ x-4,\ x-2,\ x,\ x+2,\ x+4,\ x+6\}$

이때 집합 A_n의 모든 원소의 합은

$x-6+x-4+x-2+x+x+2+x+4+x+6$

$=7x$

집합 A_n의 모든 원소의 합이 7의 배수이므로 집합 A_n의 모든 원소의 합이 35의 배수이려면 집합 A_n의 모든 원소의 합이 5의 배수이면 된다.

즉, x가 5의 배수이면 된다.

한편, $A_1=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}$에서 $x\geq 7$이므로 B_1은 $x=10$일 때이다.

따라서 집합 B_{20}은 $x=10+5\times 19=105$일 때이므로 집합 B_{20}의 모든 원소의 합은 $7\times 105=735$이다.

08 해결단계

❶ 단계	전체집합 U를 5로 나누었을 때 나머지가 i인 원소의 집합을 A_i로 나타낸 후, 집합 사이의 관계를 파악한다.
❷ 단계	원소끼리의 합이 5의 배수가 아닐 조건을 구한 후, $n(A)$의 최댓값을 구한다.

전체집합 U의 원소를 5로 나누었을 때 나머지가 i ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)인 원소의 집합을 A_i라 하면

$A_0=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ 50\}$

$A_1=\{1,\ 6,\ 11,\ \cdots,\ 46\}$

$A_2=\{2,\ 7,\ 12,\ \cdots,\ 47\}$

$A_3=\{3,\ 8,\ 13,\ \cdots,\ 48\}$

$A_4=\{4,\ 9,\ 14,\ \cdots,\ 49\}$

이므로

$U=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$, $n(A_i)=10$,

$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$

(i) $x\in A_i$, $y\in A_i$일 때,

$i=0$일 때 $x+y$가 5의 배수가 된다.

즉, 집합 A는 집합 A_0의 원소를 두 개 이상 원소로 갖지 않아야 한다.

(ii) $x\in A_i$, $y\in A_j$ $(i\neq j)$일 때,

$i+j=5$일 때 $x+y$가 5의 배수가 된다.

즉, 집합 A는 두 집합 A_1과 A_4 또는 두 집합 A_2와 A_3의 원소들을 함께 원소로 갖지 않아야 한다.

(i), (ii)에서 원소의 개수가 최대인 집합 A는

집합 $A_1\cup A_2$ 또는 $A_1\cup A_3$ 또는 $A_2\cup A_4$ 또는 $A_3\cup A_4$에 집합 A_0의 원소를 한 개만 추가한 집합이므로 $n(A)$의 최댓값은

$10+10+1=21$ **답** 21

09 해결단계

❶ 단계	집합 A_k의 원소가 될 수 있는 수를 구한다.
❷ 단계	집합 B의 원소를 구한 후, $A_k\cap B^C$의 원소가 될 수 있는 수를 구한다.
❸ 단계	$n(A_k\cap B^C)=1$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구한다.

집합 A_k는 전체집합 U의 부분집합이므로 x는 20 이하의 자연수이고 $x(y-k)=30$에서 $y-k$는 30의 약수이다.

이때 y, k는 모두 자연수이고, $y\in U$이므로

$1\leq y-k<20$에서 $\frac{3}{2}<x\leq 30$

이때 $x\in U$이므로 $2\leq x\leq 20$

$y-k$, x 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

$\therefore A_k\subset\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$

또한, $\frac{30-x}{5}=6-\frac{x}{5}\in U$에서 x는 5의 배수이므로

$x=5,\ 10,\ 15,\ 20$

즉, $B=\{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$이므로 $(A_k\cap B^C)\subset\{2,\ 3,\ 6\}$

(i) $2\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$2(y-k)=30$에서 $y-k=15$

$\therefore y=k+15$

이때 $y=k+15\leq 20$이므로

$k\leq 5$

(ii) $3\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$3(y-k)=30$에서 $y-k=10$ $\quad\therefore y=k+10$

이때 $y=k+10\le20$이므로

$k\le10$

(iii) $6\in(A_k\cap B^C)$일 때,

$6(y-k)=30$에서 $y-k=5$ $\quad\therefore y=k+5$

이때 $y=k+5\le20$이므로

$k\le15$

(i), (ii), (iii)에서

$1\le k\le5$일 때, $A_k\cap B^C=\{2,\ 3,\ 6\}$

$5<k\le10$일 때, $A_k\cap B^C=\{3,\ 6\}$

$10<k\le15$일 때, $A_k\cap B^C=\{6\}$

따라서 $n(A_k\cap B^C)=1$을 만족시키는 자연수 k는 11, 12, 13, 14, 15의 5개이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 참고

k의 값의 범위에 따라 집합 $A_k\cap B^C$은 다음과 같다.

(i) $1\le k\le5$일 때,

$y-k$	2	3	5	6	10	15
x	15	10	6	5	3	2

즉, $A_k=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$이므로

$A_k\cap B^C=\{2,\ 3,\ 6\}$

(ii) $5<k\le10$일 때,

$y-k$	2	3	5	6	10
x	15	10	6	5	3

즉, $A_k=\{3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15\}$이므로

$A_k\cap B^C=\{3,\ 6\}$

(iii) $10<k<15$일 때,

$y-k$	2	3	5	6
x	15	10	6	5

즉, $A_k=\{5,\ 6,\ 10,\ 15\}$이므로

$A_k\cap B^C=\{6\}$

(iv) $k=15$일 때,

$y-k$	2	3	5
x	15	10	6

즉, $A_k=\{6,\ 10,\ 15\}$이므로

$A_k\cap B^C=\{6\}$

(i)~(iv)에서 $n(A_k\cap B^C)=1$을 만족시키는 자연수 k는 11, 12, 13, 14, 15이다.

10 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 만족시키도록 집합 A_1, A_2, A_3, …을 직접 구하여 성질을 파악한 후, a_k를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 파악한 집합 A_k의 성질을 이용하여 집합 A_{30}을 구한 후, $A_{30}\cap A_m\neq\varnothing$을 만족시키면서 자연수 m이 최대일 조건을 찾는다.
❸ 단계	❷ 단계에서 찾은 조건을 이용하여 자연수 m의 최댓값을 구한다.

주어진 조건을 만족시키도록 집합 A_k를 구하면

$A_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$A_2=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$A_3=\{5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 15\}$

⋮

이때 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, …이므로 $a_k=2k-1$

즉, $a_{30}=59$이므로 $A_{30}=\{59,\ 60,\ 61,\ \cdots,\ 150\}$

집합 A_k에서 a_k는 홀수이므로 $A_{30}\cap A_m\neq\varnothing$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값은 $a_m=149$일 때이다.

따라서 $2m-1=149$에서 $m=75$이므로 자연수 m의 최댓값은 75이다. **답** 75

• 다른 풀이 •

집합 A_k의 원소 중에서 가장 작은 수는 $2k-1$이고, A_k의 원소의 개수가 $3k+2$이므로

$A_k=\{2k-1,\ 2k,\ 2k+1,\ \cdots,\ 5k\}$

이때 $A_{30}=\{59,\ 60,\ 61,\ \cdots,\ 150\}$이므로 $A_{30}\cap A_m\neq\varnothing$을 만족시키려면 m의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $m<30$일 때,

두 집합 A_{30}, A_m의 교집합이 존재해야 하므로 집합 A_m의 원소의 최댓값이 집합 A_{30}의 원소의 최솟값보다 크거나 같아야 한다. 즉,

$5m\ge59$에서 $m\ge\dfrac{59}{5}$

그런데 m은 자연수이고, $m<30$이므로

$12\le m<30$

(ii) $m\ge30$일 때,

두 집합 A_{30}, A_m의 교집합이 존재해야 하므로 집합 A_m의 원소의 최솟값이 집합 A_{30}의 원소의 최댓값보다 작거나 같아야 한다. 즉,

$2m-1\le150$에서 $m\le\dfrac{151}{2}$

그런데 m은 자연수이고, $m\ge30$이므로

$30\le m\le75$

(i), (ii)에서 자연수 m의 값의 범위는 $12\le m\le75$

따라서 자연수 m의 최댓값은 75이다.

11 해결단계

❶ 단계	9 이하의 자연수 중에서 공약수를 갖는 수의 조합을 이용하여 서로소가 될 수 있는 수의 조합을 찾는다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 조합에 따라 집합 X의 개수를 구한 후, 그 합을 구한다.

9 이하의 자연수 중에서 짝수는 모두 2를 공약수로 가지므로 집합 X는 짝수인 원소를 2개 이상 가질 수 없다. 마찬가지로 3, 6, 9는 3을 공약수로 가지므로 집합 X는 3, 6, 9 중에서 원소를 2개 이상 가질 수 없고, 홀수로 이루어진 집합은 3과 9를 동시에 갖는 경우를 제외하면 원소끼리 서로소이다.

따라서 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 2, 4, 8 중에서 하나가 집합 X의 원소인 경우

집합 X의 나머지 원소는 모두 홀수이고 이때 3, 9도 동시에 원소로 가질 수 없으므로 집합 X는 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$의 부분집합 중에서 3과 9를 동시에 원소로 갖는 경우와 공집합을 제외해야 한다.

즉, 집합 X의 개수는

$3\times\{2^5-(2^3+1)\}=3\times 23=69$

(ii) 6이 집합 X의 원소인 경우

6은 짝수이면서 3의 배수이므로 집합 X가 6을 원소로 가지면 2, 4, 8과 3, 9는 집합 X의 원소가 될 수 없다.

즉, 집합 X는 집합 $\{1, 5, 7\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외해야 하므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$

(iii) 홀수로만 이루어진 경우

집합 X는 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$의 부분집합 중에서 3과 9를 동시에 원소로 갖는 경우와 원소의 개수가 1인 경우, 공집합을 제외해야 하므로 집합 X의 개수는

$2^5-(2^3+5+1)=18$

(i), (ii), (iii)에서 집합 X의 개수는

$69+7+18=94$ 답 94

12 해결단계

❶ 단계	$S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되도록 하는 $S(A)$, $S(B)$의 조건을 파악한다.
❷ 단계	서로 다른 두 원소의 합이 9의 배수가 아니면서 $S(A)$의 값이 최대가 되도록 하는 집합 A를 구한다.
❸ 단계	서로 다른 두 원소의 합이 10의 배수가 아니면서 $S(B)$의 값이 최소가 되도록 하는 집합 B를 구한다.
❹ 단계	$n(A\cap B)=1$을 만족시키는 두 집합 A, B를 구한 후, $S(A)-S(B)$의 최댓값을 구한다.

$S(A)-S(B)$의 값이 최대가 되려면 $S(A)$의 값이 최대, $S(B)$의 값이 최소가 되어야 한다.

조건 (나)에서 집합 A의 임의의 서로 다른 두 원소의 합이 9의 배수가 아니려면 두 원소를 9로 나눈 나머지의 합이 0 또는 9가 되지 않아야 한다.

전체집합 U의 원소를 9로 나눈 나머지가 i ($i=0, 1, 2, \cdots, 8$)인 원소의 집합을 A_i라 하면

$A_0=\{9, 18\}$

$A_1=\{1, 10, 19\}$, $A_8=\{8, 17\}$

$A_2=\{2, 11, 20\}$, $A_7=\{7, 16\}$

$A_3=\{3, 12\}$, $A_6=\{6, 15\}$

$A_4=\{4, 13\}$, $A_5=\{5, 14\}$

따라서 조건 (나)를 만족시키는 집합 A는 A_0의 원소를 두 개 이상 원소로 갖지 않아야 하고, A_1과 A_8 또는 A_2와 A_7 또는 A_3과 A_6 또는 A_4와 A_5의 원소들을 함께 원소로 갖지 않아야 한다.

조건 (가)에서 $n(A)=8$이므로 $S(A)$의 값이 최대가 되도록 하는 집합 A의 원소를 큰 수부터 택하면

$A=\{20, 19, 18, 15, 14, 11, 10, 6\}$ ……㉠

조건 (다)에서 집합 B의 임의의 서로 다른 두 원소의 합이 10의 배수가 아니려면 두 원소를 10으로 나눈 나머지의 합이 0 또는 10이 되지 않아야 한다.

전체집합 U의 원소를 10으로 나눈 나머지가 j ($j=0, 1, 2, \cdots, 9$)인 원소의 집합을 B_j라 하면

$B_0=\{10, 20\}$

$B_1=\{1, 11\}$, $B_9=\{9, 19\}$

$B_2=\{2, 12\}$, $B_8=\{8, 18\}$

$B_3=\{3, 13\}$, $B_7=\{7, 17\}$

$B_4=\{4, 14\}$, $B_6=\{6, 16\}$

$B_5=\{5, 15\}$

따라서 조건 (다)를 만족시키는 집합 B는 B_5, B_0의 원소를 두 개 이상 원소로 갖지 않아야 하고, B_1과 B_9 또는 B_2와 B_8 또는 B_3과 B_7 또는 B_4와 B_6의 원소들을 함께 원소로 갖지 않아야 한다.

조건 (가)에서 $n(B)=8$이므로 $S(B)$의 값이 최소가 되도록 하는 집합 B의 원소를 작은 수부터 택하면

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12\}$ ……㉡

이때 조건 (가)에서 $n(A\cap B)=1$이므로 ㉠, ㉡에서 두 원소 10, 11 중 하나는 집합 A 또는 집합 B에서 제외해야 한다.

(i) 원소 10 또는 11을 집합 A에서 제외하는 경우

집합 A는 5를 원소로 가져야 하므로

$n(A\cap B)=2$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 원소 10 또는 11을 집합 B에서 제외하는 경우

집합 B는 13을 원소로 가져야 하므로

$n(A\cap B)=1$

이때 $S(B)$의 값이 최소가 되려면 집합 B에서 11을 제외해야 한다.

(i), (ii)에서

$A=\{6, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 20\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 13\}$

이므로

$S(A)=6+10+11+14+15+18+19+20$

$=113$

$S(B)=1+2+3+4+5+10+12+13$

$=50$

따라서 $S(A)-S(B)$의 최댓값은

$S(A)-S(B)=113-50=63$ 답 63

05. 명제

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.61~63

01 ③	02 ④	03 ①	04 ③	05 ③
06 ②	07 2	08 ③	09 7	10 ④
11 4	12 ④	13 ③	14 ③	15 12
16 60	17 720	18 ②	19 ⑤	20 ①

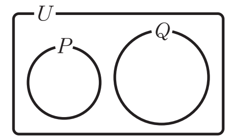
01 ㄱ. $\sqrt{3}+\sqrt{7}\neq\sqrt{10}$이므로 거짓인 명제이다.
ㄴ. $x>2$인 실수는 성립하지만 $x\leq2$인 실수는 성립하지 않으므로 참, 거짓을 판별할 수 없다.
즉, 명제가 아니다.
ㄷ, ㄹ. 참인 명제이다.
ㅁ. '재미있다'는 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다. 답 ③

02 조건 '$\overbrace{x^2+y^2+z^2=0}^{x=0\text{이고 }y=0\text{이고 }z=0}$'의 부정은 '$x^2+y^2+z^2\neq0$'이므로 '$x\neq0$ 또는 $y\neq0$ 또는 $z\neq0$'이다. 답 ④

03 $x^2-3x-18<0$에서 $(x+3)(x-6)<0$
$\therefore\ -3<x<6$
$\therefore\ P=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$4x-7>0$에서 $x>\frac{7}{4}$이므로
$Q=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\}$
따라서 $P\cap Q=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
$n(P\cap Q)=4$ 답 ①

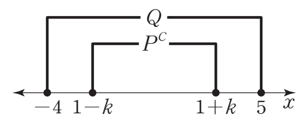
04 ① (반례) $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\neq1$이다. (거짓)
② (반례) $x=0$이면 x는 실수이지만 $x^2=0$이다. (거짓)
③ $xy>1$에서 $0<y\leq1$이므로 양변을 y로 나누면
$x>\frac{1}{y}$
이때 $\frac{1}{y}\geq1$이므로 $x>1$이다. (참)
④ (반례) $x=\sqrt{2}+1$이면 x는 무리수이지만
$x^2=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$이므로 x^2도 무리수이다. (거짓)
⑤ (반례) $x=1,\ y=-2$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다. (거짓)
따라서 참인 명제는 ③이다. 답 ③

05 조건 q의 진리집합이 Q이므로 조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이다.
이때 명제 '$p\longrightarrow\sim q$'가 참이므로 $P\subset Q^C$이다.
즉, 두 진리집합 $P,\ Q$의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



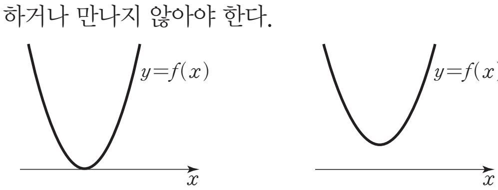
① $P\cap Q=\varnothing$ (거짓)
② $P\cup Q\neq U$ (거짓)
③ $P\cap Q^C=P-(P\cap Q)=P-\varnothing=P$ ($\because$ ①) (참)
④ $P^C\cup Q=P^C$ ($\because\ Q\subset P^C$) (거짓)
⑤ $P^C\cap Q=Q-(P\cap Q)=Q-\varnothing=Q$ ($\because$ ①) (거짓)
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

06 $q:x^2-x-20\leq0$에서 $(x+4)(x-5)\leq0$
$\therefore\ -4\leq x\leq5$
두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$P^C=\{x\,|\,1-k\leq x\leq1+k\},\ Q=\{x\,|\,-4\leq x\leq5\}$
명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 두 집합 $P^C,\ Q$를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-4\leq1-k,\ 1+k\leq5$이므로
$k\leq5,\ k\leq4$
$\therefore\ k\leq4$
따라서 명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ②

07 주어진 명제가 참이 되려면
$f(x)=x^2+4kx+3k^2-2k+3$이라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이 항상 성립해야 한다.
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 x축에 접하거나 만나지 않아야 한다.



이차방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2k)^2-(3k^2-2k+3)\leq0$에서
$k^2+2k-3\leq0,\ (k+3)(k-1)\leq0$
$\therefore\ -3\leq k\leq1$
따라서 주어진 명제가 거짓이 되려면 $k<-3$ 또는 $k>1$이어야 하므로 구하는 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 2

• 다른 풀이 •

명제가 거짓이면 명제의 부정은 참이다.
주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+3k^2-2k+3<0$이다.'
이고, 이 명제가 참이 되어야 하므로 이차방정식
$x^2+4kx+3k^2-2k+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2k)^2-(3k^2-2k+3)>0$에서
$k^2+2k-3>0$, $(k+3)(k-1)>0$
$\therefore k<-3$ 또는 $k>1$
따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

08

명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치하므로 명제와 대우 중에서 하나의 참, 거짓을 판별하고, 역의 참, 거짓을 판별하면 된다.
ㄱ. 대우 : $x\neq y$이면 $x^2-y^2\neq 0$이다.
(반례) $x=1$, $y=-1$이면 $x\neq y$이지만
$x^2-y^2=0$이다. (거짓)
역 : $x=y$이면 $x^2-y^2=0$이다. (참)
ㄴ. 명제 : $x-2=0$이면 $x^2-4=0$이다. (참)
역 : $x^2-4=0$이면 $x-2=0$이다.
(반례) $x=-2$이면 $x^2-4=0$이지만 $x-2\neq 0$이다. (거짓)
ㄷ. 대우 : $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다. (참)
역 : $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이면 $xy\neq 0$이다. (참)
따라서 명제와 그 역, 대우가 모두 참인 것은 ㄷ뿐이다.
답 ③

09

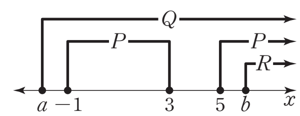
주어진 명제가 참이므로 그 대우
'$a\geq k$이고 $b\geq -1$이면 $a+b\geq 6$이다.'
도 참이다.
$a\geq k$, $b\geq -1$에서 $a+b\geq k-1$이므로
$k-1\geq 6$ $\qquad\therefore k\geq 7$
따라서 실수 k의 최솟값은 7이다. 답 7

10

주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$는
'자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 $\boxed{\text{홀수}}$이다.'이다.
n이 홀수이면 $n=\boxed{2k+1}$ (k는 $\boxed{0}$ 또는 자연수)로 나타낼 수 있다.
이때 n^2의 값을 구하면
$n^2=(\boxed{2k+1})^2=4k^2+4k+1=2(\boxed{2k^2+2k})+1$이고,
$2(\boxed{2k^2+2k})$는 $\boxed{0}$ 또는 짝수이므로 n^2은 $\boxed{\text{홀수}}$이다.
따라서 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
즉, ① 대우, ② 홀수, ③ $2k+1$, ④ 0, ⑤ $2k^2+2k$이므로 바르게 짝지어지지 않은 것은 ④이다. 답 ④

11

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하면
$P=\{x\mid -1\leq x\leq 3$ 또는 $x\geq 5\}$,
$Q=\{x\mid x\geq a\}$, $R=\{x\mid x\geq b\}$
이때 q는 p이기 위한 필요조건, r은 p이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$, $R\subset P$
즉, $R\subset P\subset Q$이므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore a\leq -1$, $b\geq 5$
따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 5이므로 구하는 합은 $-1+5=4$ 답 4

12

① $p\Longrightarrow \sim q$이고, $r\Longrightarrow q$에서 $\sim q\Longrightarrow \sim r$이므로
$p\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow \sim r$ $\qquad\therefore p\Longrightarrow \sim r$ (거짓)
② $p\Longrightarrow q$이고, $\sim r\Longrightarrow \sim q$에서 $q\Longrightarrow r$이므로
$p\Longrightarrow q\Longrightarrow r$ $\qquad\therefore p\Longrightarrow r$ (거짓)
③ $p\Longrightarrow \sim q$이고, $\sim r\Longrightarrow q$에서 $\sim q\Longrightarrow r$이므로
$p\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow r$ $\qquad\therefore p\Longrightarrow r$ (거짓)
④ $q\Longrightarrow \sim p$에서 $p\Longrightarrow \sim q$이고, $\sim q\Longrightarrow r$이므로
$p\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow r$ $\qquad\therefore p\Longrightarrow r$ (참)
⑤ $q\Longrightarrow p$에서 $\sim p\Longrightarrow \sim q$이고, $\sim q\Longrightarrow \sim r$이므로
$\sim p\Longrightarrow \sim q\Longrightarrow \sim r$ $\qquad\therefore \sim p\Longrightarrow \sim r$ (거짓)
따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

13

투표 결과를 명제라 하고, 명제에 나타나는 각 조건 p, q, r, s를 각각 A, B, C, D가 대표에 선출되는 것으로 하자.
(나), (다), (라)를 p, q, r, s로 나타내면
(나) : $p\Longrightarrow r$, (다) : $\sim q\Longrightarrow \sim r$, (라) : $\sim p\Longrightarrow \sim s$
이때 명제가 참이면 그 대우가 참이므로 (다), (라)에서
(마) : $r\Longrightarrow q$, (바) : $s\Longrightarrow p$
(나), (마), (바)에서 $s\Longrightarrow p\Longrightarrow r\Longrightarrow q$
즉, A 또는 D가 대표에 선출되면 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 대표로 선출된 두 사람은 B, C이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

(i) (나)에서 A가 대표가 되었다고 가정하면 (가)에 의하여 A, B, C, D의 선출 여부는 다음과 같다.

A	B	C	D
○	×	○	×

그런데 이것은 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) ㈏의 대우는 'C가 대표가 되지 않았다면 A도 대표가 되지 않았다.'이므로 C가 대표가 되지 않았다고 가정하면 ㈎에 의하여 A, B, C, D의 선출 여부는 다음과 같다.

A	B	C	D
×	○	×	○

그런데 이것은 ㈑를 만족시키지 않는다.

(iii) ㈐에서 B가 대표가 되지 않았다고 가정하면 ㈎에 의하여 A, B, C, D의 선출 여부는 다음과 같다.

A	B	C	D
○	×	×	○

그런데 이것은 ㈏를 만족시키지 않는다.

(iv) ㈐의 대우는 'C가 대표가 되었다면 B도 대표가 되었다.'이므로 C가 대표가 되었다고 가정하면 ㈎에 의하여 A, B, C, D의 선출 여부는 다음과 같다.

A	B	C	D
×	○	○	×

따라서 이것은 ㈏, ㈑를 모두 만족시킨다.

(i)~(iv)에서 대표로 선출된 두 사람은 B, C이다.

14 ㄱ. $a^2-\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{2}=\left(a-\frac{b}{4}\right)^2-\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{2}$

$=\left(a-\frac{b}{4}\right)^2+\frac{7}{16}b^2>0$ ($\because a\neq b$) (참)

ㄴ. (반례) $a=2$, $b=1$이면

$|a-b|=|2-1|=1$, $||a|-|b||=|2-1|=1$

$\therefore |a-b|=||a|-|b||$ (거짓)

ㄷ. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$

($\because a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$)

$\therefore a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄴ. $|a-b|>0$, $||a|-|b||>0$ ($\because a\neq b$)이므로

$|a-b|^2-||a|-|b||^2$

$=(a-b)^2-(|a|-|b|)^2$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=-2ab+2|a||b|$

$=2(|ab|-ab)$

이때 $ab\geq 0$이면 $|ab|=ab$에서 $|ab|-ab=0$

$ab<0$이면 $|ab|=-ab$이므로

$|ab|-ab=-2ab>0$

즉, $|a-b|^2-||a|-|b||^2=2(|ab|-ab)\geq 0$ 이므로

$|a-b|\geq||a|-|b||$이다. (거짓)

15 점 (a, b)가 곡선 $y=\frac{6}{x}$ 위에 있으므로

$b=\frac{6}{a}$ $\quad\therefore ab=6$

이때 점 (a, b)가 제1사분면 위에 있으므로

$a>0$, $b>0$

즉, $2a>0$, $3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}$ (단, 등호는 $2a=3b$일 때 성립)

$=2\sqrt{6ab}=2\sqrt{6\times 6}=12$

따라서 구하는 최솟값은 12이다. 답 12

16 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때 $a+b=6$이므로

$6\geq 2\sqrt{ab}$에서 $\sqrt{ab}\leq 3$

$\therefore ab\leq 9$

$\therefore \frac{1}{ab}\geq\frac{1}{9}$ (단, 등호는 $a=b=3$일 때 성립) ……㉠

$\therefore \frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}$

$=a+b+\frac{a+b}{ab}$

$=6+\frac{6}{ab}$ ($\because a+b=6$)

$\geq 6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$ ($\because$ ㉠)

즉, $\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}$은 $a=3$, $b=3$일 때 최솟값 $\frac{20}{3}$을 가지므로

$p=\frac{20}{3}$, $q=3$, $r=3$

$\therefore pqr=\frac{20}{3}\times 3\times 3=60$ 답 60

17 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 상자를 묶은 끈의 전체 길이는

$2x+2y+5\times 4=2x+2y+20$ (cm)

끈의 길이가 68 cm이므로

$2x+2y+20=68$ $\quad\therefore x+y=24$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때 $x+y=24$이므로

$24\geq 2\sqrt{xy}$에서 $\sqrt{xy}\leq 12$

$\therefore xy\leq 144$ (단, 등호는 $x=y=12$일 때 성립)

이때 상자의 부피는 $5xy$이므로

$5xy\leq 720$

따라서 상자의 최대 부피는 720 cm^{3}이므로

$A=720$ 답 720

18 x, y는 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\ge(3x+4y)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}\text{일 때 성립}\right)$

이때 $x^2+y^2=1$이므로 $(3x+4y)^2\le 25$

$\therefore\ -5\le 3x+4y\le 5$

따라서 $3x+4y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$이므로

$M-m=10$ **답** ②

•다른 풀이•

$3x+4y=k$라 하면 $3x+4y-k=0$

즉, 구하는 $3x+4y$의 값은 직선 $3x+4y-k=0$이 원 $x^2+y^2=1$과 만나도록 하는 k의 값과 같다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k|}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로

$\frac{|k|}{5}\le 1,\ |k|\le 5 \qquad \therefore\ -5\le k\le 5$

따라서 $M=5$, $m=-5$이므로 $M-m=10$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

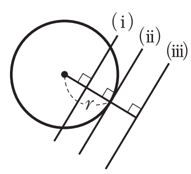
원과 직선의 위치 관계

원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$의 중심과 직선 $y=mx+n$ 사이의 거리를 d라 할 때, 원과 직선이

(i) 서로 다른 두 점에서 만난다.
⇨ $d<r$

(ii) 한 점에서 만난다. (접한다.)
⇨ $d=r$

(iii) 만나지 않는다.
⇨ $d>r$



19 x, y는 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right\}\{x^2+(2y)^2\}\ge\left\{\frac{1}{4}x+\left(-\frac{2y}{4}\right)\right\}^2$

(단, 등호는 $x=-2y$일 때 성립)

$\frac{1}{8}(x^2+4y^2)\ge\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right)^2$

이때 $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=3$이므로 $\frac{1}{8}(x^2+4y^2)\ge 9$

$\therefore\ x^2+4y^2\ge 72$ (단, 등호는 $x=6$, $y=-3$일 때 성립)

*즉, x^2+4y^2은 $x=6$, $y=-3$일 때 최솟값 72를 가지므로

$p=72$, $q=6$, $r=-3$

$\therefore\ p-q+r=72-6+(-3)=63$ **답** ⑤

•다른 풀이•

$\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=3$에서 $x=2y+12$이므로

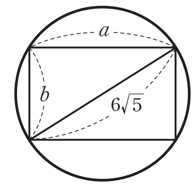
$x^2+4y^2=(2y+12)^2+4y^2$

$=8y^2+48y+144$

$=8(y+3)^2+72$

다음은 *와 같다.

20 원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 a, b라 하면



$a^2+b^2=180$

이때 사각기둥의 밑면은 한 변의 길이가 $\frac{a}{4}$인 정사각형이고, 높이는 b이므로 사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은

$\frac{a}{4}\times 8+b\times 4=2a+4b$

a, b는 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{, 즉 } b=2a\text{일 때 성립}\right)$

$20(a^2+b^2)\ge(2a+4b)^2$

이때 $a^2+b^2=180$이므로

$(2a+4b)^2\le 3600$

$a>0$, $b>0$이므로

$0<2a+4b\le 60$ (단, 등호는 $a=6$, $b=12$일 때 성립)

따라서 사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값은 60이다. **답** ①

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.64~70

01 ③	02 6	03 ③	04 ③	05 8
06 ②	07 12	08 5	09 7	10 ④
11 20	12 -1	13 ①	14 풀이 참조	15 11
16 15	17 ③	18 11	19 ④	20 ③
21 12	22 ⑤	23 ③	24 B, C	25 ④
26 ③	27 12	28 ⑤	29 ④	30 2, $x=z$
31 4	32 5	33 150	34 ⑤	35 ②
36 ④	37 ①	38 3		

01 ㄱ. $a>0$, $b>0$, $2ab>1$이므로

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab\ge 2ab>1$ (참)

ㄴ. (반례) $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이면

$a>0$, $b>0$, $a^2+b^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}>1$이지만

$2ab=2\times 1\times\frac{1}{2}=1$이다. (거짓)

ㄷ. $a+b=0$ ……㉠

$b+c=0$ ……㉡

$c+a=0$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=0$

$\therefore\ a+b+c=0$ ……㉣

㉠, ㉡, ㉢을 ㉣에 각각 대입하면

$c=0$, $a=0$, $b=0$ (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

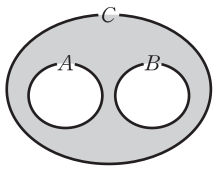
• 다른 풀이 •

ㄱ. $a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab>1$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립) (참)

02 명제 p가 참이므로 $A\subset C$이고, 명제 r이 참이므로 $C^C\subset B^C$, 즉 $B\subset C$이다.
또한, 명제 q가 참이므로 $B\subset A^C$에서 $A\cap B=\varnothing$이다.
즉, 세 집합 A, B, C의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $n(A)=14$, $n(B)=10$, $n(C)=30$이므로

$n(C-(A\cup B))=n(C)-n(A\cup B)$
$=30-(14+10)=6$

답 6

03 $\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$이므로
$q=p+\sqrt{2}$, $r=p+2=q+2-\sqrt{2}$
이때 (유리수)+(유리수)=(유리수),
(유리수)+(무리수)=(무리수)임을 이용하면 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

ㄱ. $q=p+\sqrt{2}$, $r=p+2$에서 $\sqrt{2}$는 무리수, 2는 유리수이므로 p가 유리수이면 q는 무리수, r은 유리수이다. (참)

ㄴ. (반례) $p=-\sqrt{2}$(무리수)이면 $q=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$, $r=2-\sqrt{2}$이므로 q는 유리수, r은 무리수이다. (거짓)

ㄷ. $r=q+2-\sqrt{2}$에서 $2-\sqrt{2}$가 무리수이므로 q가 유리수이면 r은 무리수이다. (참)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04 $(X\cup P^C)\cap(X^C\cap Q)$
$=\{X\cap(X^C\cap Q)\}\cup\{P^C\cap(X^C\cap Q)\}$
$=\{(X\cap X^C)\cap Q\}\cup\{P^C\cap(X^C\cap Q)\}$
$=(\varnothing\cap Q)\cup\{P^C\cap(X^C\cap Q)\}$
$=\varnothing\cup\{P^C\cap(X^C\cap Q)\}$
$=(Q\cap X^C)\cap P^C$
$=Q\cap X^C\cap P^C$
$=(Q\cap P^C)\cap X^C$
$=(Q-P)-X=\varnothing$ ……㉠

이때 임의의 부분집합 X에 대하여 ㉠이 항상 성립하려면 $Q-P=\varnothing$이어야 하므로 $Q\subset P$이다.
따라서 항상 참인 명제는 ③ $q \longrightarrow p$이다.

답 ③

• 다른 풀이 •

$(X\cup P^C)\cap(X^C\cap Q)=\varnothing$이므로
$(X\cup P^C)-(X^C\cap Q)=X\cup P^C$이고,
$(X\cup P^C)-(X^C\cap Q)=(X\cup P^C)\cap(X^C\cap Q)^C$
$=(X\cup P^C)\cap(X\cup Q^C)$
$=X\cup(P^C\cap Q^C)$
이므로 $X\cup(P^C\cap Q^C)=X\cup P^C$
X는 임의의 부분집합이므로 $P^C\cap Q^C=P^C$에서
$P^C\subset Q^C$ $\quad\therefore Q\subset P$

05 명제 '$\sim q$이면 p이다.'가 참이려면 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 할 때, $Q^C\subset P$이어야 하므로 명제 '$\sim q$이면 p이다.'가 거짓이려면 $Q^C\not\subset P$이어야 한다.
따라서 집합 Q^C의 원소이면서 집합 P에 속하지 않아야 하므로 $x\in Q^C\cap P^C$인 x, 즉 $\sqrt{3x}$가 자연수가 되도록 하는 200 이하의 자연수 x의 개수를 구해야 한다.
$\sqrt{3x}$가 자연수이려면 $x=3k^2$ (k는 자연수) 꼴이어야 하므로

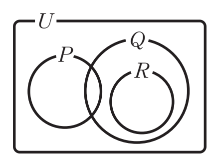
$3k^2\le 200$, $k^2\le\dfrac{200}{3}=66.6\times\times\times$

이때 $8^2=64$, $9^2=81$이므로 $k=1, 2, 3, \cdots, 8$
그러므로 주어진 명제가 거짓이 되도록 하는 x의 개수는 k의 개수와 같으므로 8이다.

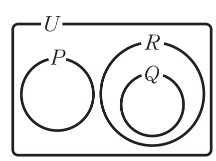
답 8

06 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 한다.

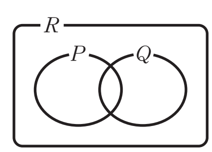
ㄱ. $(P\cap R)\cup(R-Q)=\varnothing$이므로
$P\cap R=\varnothing$, $R-Q=\varnothing$
$\therefore P\cap R=\varnothing$, $R\subset Q$
그런데 $P\cap Q\neq\varnothing$이면 오른쪽 그림에서 $P\not\subset Q^C$



ㄴ. $(P\cap R)\cup(Q-R)=\varnothing$이므로
$P\cap R=\varnothing$, $Q-R=\varnothing$
$\therefore P\cap R=\varnothing$, $Q\subset R$
즉, $P\cap Q=\varnothing$이므로 $P\subset Q^C$이다.



ㄷ. $P\cap R^C=P-R=\varnothing$이므로 $P\subset R$
$Q^C\cup R=U$에서 $(Q^C\cup R)^C=U^C$
$Q\cap R^C=Q-R=\varnothing$
$\therefore Q\subset R$
그런데 $P\cap Q\neq\varnothing$이면 오른쪽 그림에서 $P\not\subset Q^C$



따라서 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되도록 하는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

07 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 한다.

$|x-1|+|x-3|<k$에서

(i) $x<1$일 때,

$-x+1-x+3<k \quad \therefore x>\dfrac{4-k}{2}$ ……㉠

(ii) $1 \le x<3$일 때,

$x-1-x+3<k \quad \therefore 0 \times x<k-2$ ……㉡

(iii) $x \ge 3$일 때,

$x-1+x-3<k \quad \therefore x<\dfrac{4+k}{2}$ ……㉢

즉, 집합 P는 k의 값에 따라 달라지므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

① $k \le 2$일 때,

㉠에서 $\dfrac{4-k}{2} \ge 1$이므로 $x<1$과 $x>\dfrac{4-k}{2}$의 공통부분은 존재하지 않는다. 즉, $x<1$에서 해는 없다.

㉡에서 $k-2 \le 0$이므로 해는 없다.

㉢에서 $\dfrac{4+k}{2} \le 3$이므로 $x \ge 3$과 $x<\dfrac{4+k}{2}$의 공통부분은 존재하지 않는다. 즉, $x \ge 3$에서 해는 없다.

따라서 $k \le 2$이면 $P=\varnothing$이므로 $P \subset Q$를 만족시킨다.

② $k>2$일 때,

㉠에서 $\dfrac{4-k}{2}<1$이므로 $x<1$과 $x>\dfrac{4-k}{2}$의 공통부분은 $\dfrac{4-k}{2}<x<1$

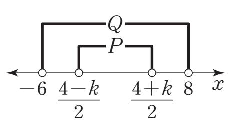
㉡에서 $k-2>0$이므로 해는 모든 실수이다.

$\therefore 1 \le x<3$

㉢에서 $\dfrac{4+k}{2}>3$이므로 $x \ge 3$과 $x<\dfrac{4+k}{2}$의 공통부분은 $3 \le x<\dfrac{4+k}{2}$

따라서 $k>2$이면 $P=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{4-k}{2}<x<\dfrac{4+k}{2}\right\}$이다.

이때 $P \subset Q$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-6 \le \dfrac{4-k}{2}$, $\dfrac{4+k}{2} \le 8$

$4-k \ge -12$, $4+k \le 16$

$k \le 16$, $k \le 12 \quad \therefore k \le 12$

그런데 $k>2$이므로 $2<k \le 12$

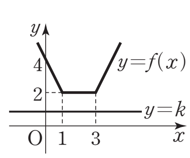
①, ②에서 $k \le 12$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 12이다.

답 12

BLACKLABEL 특강 참고

$f(x)=|x-1|+|x-3|$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $k \le 2$일 때, $f(x)<k$를 만족시키는 x는 없다.

$\therefore P=\varnothing$



08 $x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

즉, 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{x \mid -2<x<3\}$

또한, $x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8 \ge 0$에서

$x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4) \ge 0$

$\{x-(2a-2)\}\{x-(a-4)\} \ge 0$

조건 q의 진리집합을 Q라 하면 a의 값의 범위에 따라 집합 Q는 다음과 같다.

(i) $2a-2<a-4$, 즉 $a<-2$일 때,

$Q=\{x \mid x \le 2a-2$ 또는 $x \ge a-4\}$

(ii) $2a-2=a-4$, 즉 $a=-2$일 때,

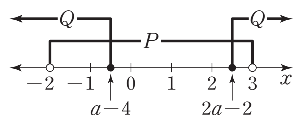
$(x+6)^2 \ge 0$이므로 $Q=\{x \mid x$는 모든 실수$\}$

(iii) $2a-2>a-4$, 즉 $a>-2$일 때,

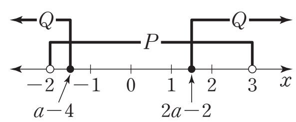
$Q=\{x \mid x \le a-4$ 또는 $x \ge 2a-2\}$

(i), (ii)에서 $a \le -2$일 때 $P \cap Q=\{x \mid -2<x<3\}$이므로 두 조건 p, q가 모두 참이 되도록 하는 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii)에서 $a>-2$일 때 $2a-2>-6$, $a-4>-6$이므로 두 조건 p, q가 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재하려면 다음 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 $-1 \le a-4<0$, $2a-2>2$이므로

$3 \le a<4$, $a>2 \quad \therefore 3 \le a<4$

[그림 2]에서 $a-4<-1$, $1<2a-2 \le 2$이므로

$a<3$, $\dfrac{3}{2}<a \le 2 \quad \therefore \dfrac{3}{2}<a \le 2$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는 $\dfrac{3}{2}<a \le 2$ 또는 $3 \le a<4$이므로 정수 a는 2, 3이고, 그 합은

$2+3=5$

답 5

• 다른 풀이 •

$x^2-x-6<0$에서 $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

위의 식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2

$x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8 \ge 0$에서

$x^2+(6-3a)x+2(a-1)(a-4) \ge 0$

$\{x-2(a-1)\}\{x-(a-4)\} \ge 0$ ……㉠

이때 두 조건 p, q가 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나이어야 하므로 -1, 0, 1, 2 중에서 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x는 -1 또는 2이어야 한다.

(i) $x=-1$만 부등식 ㉠을 만족시킬 경우

$\{-1-2(a-1)\}\{-1-(a-4)\}\geq 0$

$(2a-1)(a-3)\geq 0$

$\therefore\ a\leq\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq 3$ ……㉡

그런데 $x=0$, $x=2$는 부등식 ㉠을 만족시키지 않으므로

$\{0-2(a-1)\}\{0-(a-4)\}<0$

$2(a-1)(a-4)<0$ $\quad\therefore\ 1<a<4$ ……㉢

$\{2-2(a-1)\}\{2-(a-4)\}<0$

$2(a-2)(a-6)<0$ $\quad\therefore\ 2<a<6$ ……㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $3\leq a<4$이므로 정수 a는 3이다.

(ii) $x=2$만 부등식 ㉠을 만족시킬 경우

$\{2-2(a-1)\}\{2-(a-4)\}\geq 0$

$2(a-2)(a-6)\geq 0$

$\therefore\ a\leq 2$ 또는 $a\geq 6$ ……㉤

그런데 $x=-1$, $x=1$은 부등식 ㉠을 만족시키지 않으므로

$\{-1-2(a-1)\}\{-1-(a-4)\}<0$

$(2a-1)(a-3)<0$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}<a<3$ ……㉥

$\{1-2(a-1)\}\{1-(a-4)\}<0$

$(2a-3)(a-5)<0$ $\quad\therefore\ \frac{3}{2}<a<5$ ……㉦

㉤, ㉥, ㉦에서 $\frac{3}{2}<a\leq 2$이므로 정수 a는 2이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 a는 2, 3이므로 그 합은 $2+3=5$

09 명제 '집합 C에 속하는 어떤 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$이다.'가 참이려면 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원을 S라 할 때, 원 S와 집합 C가 나타내는 도형의 교점이 존재해야 한다.

원 S의 중심은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로

$\left(\frac{-1+1}{2},\ \frac{3+(-3)}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 0)$

이고 반지름의 길이는

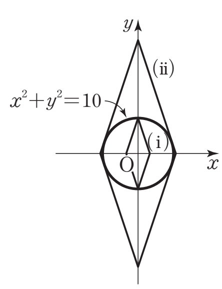
$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+1)^2+(-3-3)^2}$

$=\sqrt{10}$

이므로 원 S의 방정식은

$x^2+y^2=10$

이때 집합 C가 나타내는 도형은 오른쪽 그림의 도형 (i) 또는 도형 (ii)이거나 두 도형 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) $3|x|+|y|=k$의 그래프가 점 $(0,\ \sqrt{10})$을 지날 때,

$k=\sqrt{10}$

(ii) $3|x|+|y|=k$의 그래프가 원 $S : x^2+y^2=10$과 접할 때,

$x>0$, $y>0$일 때 $3x+y=k$이므로 직선 $y=-3x+k$가 원 $x^2+y^2=10$과 접해야 한다.

$x^2+(-3x+k)^2=10$에서 $10x^2-6kx+k^2-10=0$

위의 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-10(k^2-10)=0$에서 $-k^2+100=0$

$k^2=100$ $\quad\therefore\ k=10$ ($\because$ k는 자연수)

(i), (ii)에서 $\sqrt{10}\leq k\leq 10$

따라서 자연수 k는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 7개이다. **답** 7

BLACKLABEL 특강 참고

(ii)에서 $3|x|+|y|=k$의 그래프가 원 $S : x^2+y^2=10$과 접할 때,
$x>0$, $y>0$에서 직선 $3x+y=k$, 즉 $3x+y-k=0$이 원 $x^2+y^2=10$과 접해야 하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 한다.

즉, $\frac{|3\times 0+1\times 0-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$에서 $|-k|=10$

$\therefore\ k=10$ ($\because$ $k>0$)

10 대우가 거짓이면 그 명제도 거짓이므로 명제는 거짓이고, 역은 참인 명제를 찾으면 된다.

ㄱ. 명제 : $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이므로 $|a|+|b|=0$이다. (참)

역 : $|a|+|b|=0$이면 $a=b=0$이므로 $a^2+b^2=0$이다. (참)

ㄴ. 명제 : $a^2=b^2$이면 $a^3=b^3$이다.

(반례) $a=1$, $b=-1$이면 $a^2=b^2=1$이지만 $a^3=1$, $b^3=-1$이므로 $a^3\neq b^3$이다. (거짓)

역 : $a^3=b^3$이면 $a=b$이므로 $a^2=b^2$이다. (참)

ㄷ. 명제 : $a+b$가 짝수이면 a, b는 모두 짝수이다.

(반례) $a=1$, $b=3$이면 $a+b=4$는 짝수이지만 a, b는 모두 홀수이다. (거짓)

역 : a, b가 모두 짝수이면 $a+b$는 짝수이다. (참)

따라서 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

11 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

명제 $p\longrightarrow q$의 역, 즉 명제 $q\longrightarrow p$가 참이므로

$Q\subset P$

명제 $p\longrightarrow q$의 대우가 참이면 명제 $p\longrightarrow q$도 참이므로 $P\subset Q$

$\therefore\ P=Q$

즉, $a-1=b+1$, $a+4=ab$이므로

$a-1=b+1$에서 $b=a-2$

이것을 $a+4=ab$에 대입하면

$a+4=a(a-2)$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$), $b=4-2=2$

$\therefore a^2+b^2=16+4=20$ 답 20

12 해결단계

❶ 단계	$f(p, q)f(q, r)=-1$을 만족시키는 $f(p, q)$, $f(q, r)$의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 값에 따라 $f(p, r)$의 값을 구한다.

$f(p, q)f(q, r)=-1$에서

$f(p, q)=1$, $f(q, r)=-1$ 또는

$f(p, q)=-1$, $f(q, r)=1$

(i) $f(p, q)=1$, $f(q, r)=-1$일 때,

$f(p, q)=1$에서 명제 $p \longrightarrow q$의 대우와 역이 모두 참이고, 대우가 참이면 명제도 참이므로

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$

이때 $f(q, r)=-1$에서 명제 $q \longrightarrow r$의 대우와 역 중에서 하나만 참이어야 한다.

① 명제 $q \longrightarrow r$의 대우가 참인 경우

$\sim r \Longrightarrow \sim q$이면 $q \Longrightarrow r$이므로 $p \Longrightarrow q \Longrightarrow r$

즉, 명제 $p \longrightarrow r$이 참이므로 대우도 참이다.

② 명제 $q \longrightarrow r$의 역이 참인 경우

$r \Longrightarrow q$이면 $r \Longrightarrow q \Longrightarrow p$이므로 명제 $r \longrightarrow p$가 참이다.

①, ②에서 명제 $p \longrightarrow r$의 대우 또는 역 중에서 하나만 참이므로 $f(p, r)=-1$

(ii) $f(p, q)=-1$, $f(q, r)=1$일 때,

$f(q, r)=1$에서 명제 $q \longrightarrow r$의 대우와 역이 모두 참이고, 대우가 참이면 명제도 참이므로

$q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$

이때 $f(p, q)=-1$에서 명제 $p \longrightarrow q$의 대우와 역 중에서 하나만 참이어야 한다.

③ 명제 $p \longrightarrow q$의 대우가 참인 경우

$\sim q \Longrightarrow \sim p$이면 $p \Longrightarrow q$이므로 $p \Longrightarrow q \Longrightarrow r$

즉, 명제 $p \longrightarrow r$이 참이므로 대우도 참이다.

④ 명제 $p \longrightarrow q$의 역이 참인 경우

$q \Longrightarrow p$이면 $r \Longrightarrow q \Longrightarrow p$이므로 명제 $r \longrightarrow p$가 참이다.

③, ④에서 명제 $p \longrightarrow r$의 대우 또는 역 중에서 하나만 참이므로 $f(p, r)=-1$

(i), (ii)에서 가능한 $f(p, r)$의 값은 -1이다. 답 -1

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$f(a, b)=1$에서 명제 $a \longrightarrow b$의 역과 대우가 모두 참이므로 a는 b이기 위한 필요충분조건이다.
(i)에서 $f(p, q)=1$이면 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $f(q, r)=-1$에서 $f(p, r)=-1$이다.
같은 방법으로 (ii)에서 $f(q, r)=1$이면 q는 r이기 위한 필요충분조건이므로 $f(p, q)=-1$에서 $f(p, r)=-1$이다.
따라서 가능한 $f(p, r)$의 값은 -1이다.

13

$\sqrt{n^2+n+1}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+n+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 할 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2+n+1)=q^2$이다. 이때 q^2은 p의 배수이고, p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$이다.

$p^2(n^2+n+1)=q^2$에서 $n^2+n+1=q^2$

$\therefore n(n+1)=\boxed{q^2-1}$

자연수 k에 대하여

(i) $q=2k$일 때,

$n(n+1)=4k^2-1$에서

$4k^2-1=(2k+1)\times(\boxed{2k-1})$이므로 연속한 두 자연수의 곱이 될 수 없다.

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$일 때,

$n(n+1)=4k^2+4k$에서

$4k^2+4k=2k\times(\boxed{2k+2})$이므로 연속한 두 자연수의 곱이 될 수 없다.

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sqrt{n^2+n+1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2+n+1}$은 유리수가 아니다.

$\therefore f(q)=q^2-1$, $g(k)=2k-1$, $h(k)=2k+2$

$$\therefore \frac{g(5)h(6)}{f(10)}=\frac{(2\times5-1)\times(2\times6+2)}{10^2-1}=\frac{9\times14}{99}=\frac{14}{11}$$

답 ①

14

주어진 명제의 대우는 '자연수 n에 대하여 n이 3의 배수가 아니면 n^2+2는 3의 배수이다.'이다.

n이 3의 배수가 아니므로

$n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ (단, k는 음이 아닌 정수)

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2k+1)$$

이므로 n^2+2는 3의 배수이다.

(ii) $n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)$$

이므로 n^2+2는 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 자연수 n에 대하여 n이 3의 배수가 아니면 n^2+2는 3의 배수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 풀이 참조

15 (i) $f(1)\neq 1$임을 증명하기 위해 $f(1)=1$이라 가정하자.

조건 (나)의 식의 양변에 $n=1$, $m=1$을 대입하면

$f(1+f(1))=f(1)+1+1$ $\quad\therefore f(2)=3$

$n=2$, $m=1$을 대입하면

$f(2+f(1))=f(2)+1+1$ $\quad\therefore f(3)=\boxed{5}$

$n=1$, $m=2$를 대입하면

$f(1+f(2))=f(1)+2+1$ $\quad\therefore f(4)=4$

$n=3$, $m=1$을 대입하면

$f(3+f(1))=f(3)+1+1$ $\quad\therefore f(4)=\boxed{7}$

따라서 $f(4)$의 값이 정의되지 않으므로 모순이다.

즉, $f(1)\neq 1$이다.

(ii) $f(k)\leq k$를 만족시키는 어떤 자연수 $k\ (k\geq 2)$가 존재한다고 가정하자.

자연수 k에 대하여 $k-1<k$이고 조건 (가)에 의하여

$f(k-1)<f(k)\leq k$이므로

$f(k-1)\leq \boxed{k-1}$

마찬가지로

$f(k-2)\leq k-2$

$\vdots$

(중략)

따라서 $f(1)\leq 1$이고 $f(1)$은 자연수이므로 $f(1)=1$이다.

이것은 (i)에 의하여 모순이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)>n$이 성립한다.

$\therefore p=5,\ q=7,\ g(k)=k-1$

$\therefore g(p+q)=g(12)=12-1=11$ 답 11

16 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$에서

$\sim p \Longrightarrow \sim q$

$\therefore P^C\subset Q^C$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$\sim p: x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉, $P^C=\{-1, 2\}$

이때 $\sim q: ax-a\leq 2x+1$이므로 ㉠을 만족시키려면 부등식 $ax-a\leq 2x+1$에 $x=-1$, $x=2$를 대입하였을 때 성립해야 한다.

(i) $x=-1$일 때, $-a-a\leq -2+1$

$-2a\leq -1$ $\quad\therefore a\geq \frac{1}{2}$

(ii) $x=2$일 때, $2a-a\leq 4+1$ $\quad\therefore a\leq 5$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}\leq a\leq 5$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 15

• 다른 풀이 •

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p$에서 $Q\subset P$

이때 $x^2-x-2\neq 0$에서 $(x+1)(x-2)\neq 0$

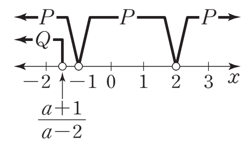
$\therefore x\neq -1$이고 $x\neq 2$

즉, $P=\{x\,|\,x$는 $x\neq -1$이고 $x\neq 2$인 모든 실수$\}$

$ax-a>2x+1$에서 $(a-2)x>a+1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

(i) $a<2$일 때, ㉡에서 $x<\frac{a+1}{a-2}$

$Q\subset P$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+1}{a-2}\leq -1$

$a+1\geq -a+2$ ($\because a<2$)

$\therefore a\geq \frac{1}{2}$

그런데 $a<2$이므로 $\frac{1}{2}\leq a<2$

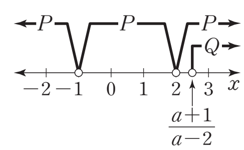
(ii) $a=2$일 때, ㉡에서 $0\times x>3$

즉, 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 $Q=\varnothing$

따라서 $Q\subset P$를 만족시킨다.

(iii) $a>2$일 때, ㉡에서 $x>\frac{a+1}{a-2}$

$Q\subset P$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+1}{a-2}\geq 2$

$a+1\geq 2a-4$ ($\because a>2$)

$\therefore a\leq 5$

그런데 $a>2$이므로 $2<a\leq 5$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{2}\leq a\leq 5$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

17 ㄱ. $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$

즉, $p \Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $x<y \Longleftrightarrow x-y<0 \Longleftrightarrow x-y<|x-y|$

즉, $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $A\cap B\cap C=A\cap B \Longleftrightarrow (A\cap B)\subset C$

$A\cup B\cup C=C \Longleftrightarrow (A\cup B)\subset C$

이때 $(A\cap B)\subset(A\cup B)$이므로

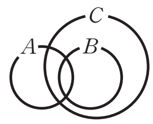
$(A\cup B)\subset C$이면 $(A\cap B)\subset C$

즉, $p \Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

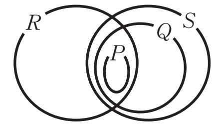
p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
즉, 다음과 같이 조건 p를 만족하지만 조건 q는 만족하지 않는 반례가 존재한다.
ㄱ. $x=-1$, $y=-2$이면 $xy=2>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.
ㄷ. 세 집합 A, B, C의 포함 관계가 오른쪽 벤 다이어그램과 같으면 $A\cap B\cap C=A\cap B$이지만 $A\cup B\cup C\neq C$이다.



18 p가 q이기 위한 필요충분조건이려면 두 조건 p, q의 진리집합이 같아야 한다.
$p: x^2+x\neq 0$에서
$x(x+1)\neq 0$이므로
$x\neq -1$, $x\neq 0$ ……㉠
$q: x^4+x^3+ax^2+ax\neq 0$에서
$x^2(x^2+x)+a(x^2+x)\neq 0$
$(x^2+x)(x^2+a)\neq 0$
$x(x+1)(x^2+a)\neq 0$
$\therefore x\neq -1,\ x\neq 0,\ x^2+a\neq 0$ ……㉡
㉠=㉡이려면 이차방정식 $x^2+a=0$의 근이 $x=-1$이거나 $x=0$이거나 존재하지 않아야 한다.
*(i) $x=-1$일 때, $1+a=0$에서 $a=-1$
그런데 $a=-1$이면 $x^2-1=(x+1)(x-1)=0$에서 $x=1$도 근이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $x=0$일 때, $a=0$
두 조건 p, q의 진리집합이 같으므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
(iii) 이차방정식 $x^2+a=0$의 근이 존재하지 않으려면 $a>0$
(i), (ii), (iii)에서 $a\geq 0$
따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 정수 a는 0, 1, 2, …, 10의 11개이다. **답** 11

• 다른 풀이 •
p가 q이기 위한 필요충분조건이므로
$p \Longleftrightarrow q$에서 $\sim p \Longleftrightarrow \sim q$
$\sim p: x^2+x=0$에서
$x(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ ……㉢
$\sim q: x^4+x^3+ax^2+ax=0$에서
$x^2(x^2+x)+a(x^2+x)=0$
$(x^2+x)(x^2+a)=0$
$x(x+1)(x^2+a)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x^2+a=0$ ……㉣
㉢=㉣이므로 이차방정식 $x^2+a=0$의 근이 $x=-1$이거나 $x=0$이거나 존재하지 않아야 한다.
다음은 *와 같다.

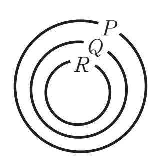
19 x가 정수이면 x^2, x^3, x^4은 모두 정수이므로 네 조건 p, q, r, s의 진리집합을 각각 P, Q, R, S라 하면
$P\subset Q$, $P\subset R$, $P\subset S$
또한, x^2이 정수이면 x^4이 정수이므로
$Q\subset S$
즉, 네 집합 P, Q, R, S의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. r이 s이기 위한 충분조건이려면 $R\subset S$이어야 한다.
그런데 위의 그림에서 $R\not\subset S$이므로 r은 s이기 위한 충분조건이 아니다. (거짓)
ㄴ. $P\cap R=P$이고 $P\subset Q$이므로
$(P\cap R)\subset Q$
즉, (p이고 r)은 q이기 위한 충분조건이다. (참)
ㄷ. $P\cup S=S$이고 $Q\subset S$이므로
$Q\subset (P\cup S)$
즉, (p 또는 s)는 q이기 위한 필요조건이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

20 p는 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Longrightarrow p \qquad \therefore Q\subset P$
또한, $\sim q$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로
$\sim q \Longrightarrow \sim r$
명제가 참이면 그 대우도 참이므로
$r \Longrightarrow q \qquad \therefore R\subset Q$
즉, 세 집합 P, Q, R의 포함 관계는
$R\subset Q\subset P$, $P^C\subset Q^C\subset R^C$*
$\therefore \{(P-Q)\cap R\}^C\cap(P\cap R^C)$
$=\{(P\cap Q^C)\cap R\}^C\cap(P\cap R^C)$
$=\{(P\cap R)\cap Q^C\}^C\cap(P\cap R^C)$
$=(R\cap Q^C)^C\cap(P\cap R^C)$
($\because R\subset P$에서 $P\cap R=R$)
$=(R-Q)^C\cap(P-R)$
$=\varnothing^C\cap(P-R)$ ($\because R\subset Q$에서 $R-Q=\varnothing$)
$=U\cap(P-R)=P-R$ **답** ③

• 다른 풀이 •
*에서 $R\subset Q\subset P$이므로 세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림에서



$(P-Q)\cap R=\varnothing$이므로
$\{(P-Q)\cap R\}^C\cap(P\cap R^C)$
$=\varnothing^C\cap(P\cap R^C)$
$=U\cap(P\cap R^C)$
$=P\cap R^C=P-R$

21 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$ $\quad \therefore P \subset Q$

즉, $2 \in \{a,\ a^2-7,\ ab+b\}$이므로

$a=2$ 또는 $a^2-7=2$ 또는 $ab+b=2$

한편, r은 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow r$ $\quad \therefore P \subset R$

$\therefore 2 \in \{ab^2,\ b\}$ $\quad$ ……㉠

(i) $a=2$일 때,

㉠에서 $2 \in \{2b^2,\ b\}$이므로

$2b^2=2$ 또는 $b=2$에서 $b^2=1$ 또는 $b=2$

그런데 b는 자연수이므로 $b=1$ 또는 $b=2$

즉, $a=2$, $b=1$일 때 $a+b=3$이고, $a=2$, $b=2$일 때 $a+b=4$이다.

(ii) $a^2-7=2$일 때, $a^2=9$에서 a는 자연수이므로 $a=3$

㉠에서 $2 \in \{3b^2,\ b\}$이므로

$3b^2=2$ 또는 $b=2$

그런데 $3b^2=2$를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않으므로 $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

(iii) $ab+b=2$일 때, $b(a+1)=2$이고 a, b는 자연수이므로

$a+1=2$, $b=1$ $\quad \therefore a=1,\ b=1$

이때 $R=\{1\}$이므로 $P \not\subset R$

즉, $a=1$, $b=1$일 때는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a+b$의 값은 3 또는 4 또는 5이므로 그 합은 $3+4+5=12$ **답** 12

22 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$이 모두 참이므로

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$

명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$\sim q \Longrightarrow \sim p$(①), $r \Longrightarrow \sim q$

또한, $p \Longrightarrow q \Longrightarrow \sim r$에서 $p \Longrightarrow \sim r$(②)이므로

$r \Longrightarrow \sim p$

명제 $\sim s \longrightarrow r$과 그 역이 모두 참이므로

$\sim s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow \sim s$

명제가 참이면 그 대우도 참이므로

$\sim r \Longrightarrow s$, $s \Longrightarrow \sim r$

$q \Longrightarrow \sim r \Longrightarrow s$에서 $q \Longrightarrow s$(③)이므로 $\sim s \Longrightarrow \sim q$

$p \Longrightarrow q \Longrightarrow s$에서 $p \Longrightarrow s$이므로 $\sim s \Longrightarrow \sim p$(④)

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다. **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$이 모두 참이므로

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$ ……㉠

명제 $\sim s \longrightarrow r$과 그 역이 모두 참이므로

$\sim s \Longleftrightarrow r$, 즉 $\sim r \Longleftrightarrow s$ ……㉡

㉠, ㉡에 의해 $p \Longrightarrow q \Longrightarrow \sim r \Longleftrightarrow s$ ……㉢

㉢을 이용하여 ①~⑤의 참, 거짓을 판별한다.

23 조사에서 얻은 결과를 참인 명제라 하고, 명제에 나타나는 각 조건 p, q, r, s를 각각 국어, 영어, 일본어, 중국어에 흥미가 있는 것으로 하자.

(가), (나), (다)를 p, q, r, s로 나타내면

(가) : $p \Longrightarrow q$, (나) : $q \Longrightarrow \sim r$, (다) : $\sim s \Longrightarrow r$

이때 명제가 참이면 그 대우도 참이므로

(라) : $\sim q \Longrightarrow \sim p$, (마) : $r \Longrightarrow \sim q$, (바) : $\sim r \Longrightarrow s$

또한, (가), (나)에서 $p \Longrightarrow \sim r$, (라), (마)에서 $r \Longrightarrow \sim p$

(나), (바)에서 $q \Longrightarrow s$, (다), (마)에서 $\sim s \Longrightarrow \sim q$

보기의 내용을 네 조건 p, q, r, s를 이용하여 나타낸 후, 참, 거짓을 판별하면 다음과 같다.

ㄱ. 명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$는 명제 $\sim s \longrightarrow \sim q$의 역이므로 참인지는 알 수 없다.

ㄴ. $p \Longrightarrow \sim r$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$은 참이다.

ㄷ. $p \Longrightarrow \sim r \Longrightarrow s$에서 $p \Longrightarrow s$이지만 명제 $p \longrightarrow s$의 역인 명제 $s \longrightarrow p$가 참인지는 알 수 없다.

ㄹ. $r \Longrightarrow \sim p$에서 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이지만 명제 $r \longrightarrow p$가 참인지는 알 수 없다.

ㅁ. $\sim q \Longrightarrow \sim p$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

따라서 항상 참인 것은 ㄴ, ㅁ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

(가), (나), (바)에서 $p \Longrightarrow q \Longrightarrow \sim r \Longrightarrow s$임을 이용하여 ㄱ~ㅁ의 참, 거짓을 판별한다.

24 A, B, C, D 각각이 범인인 경우, 네 명의 진술의 참, 거짓은 다음과 같다.

범인	A 진술	B 진술	C 진술	D 진술
A	거짓	참	거짓	참
B	거짓	거짓	거짓	참
C	참	참	거짓	참
D	거짓	참	참	거짓

따라서 한 명의 진술만이 참인 경우의 범인은 B이고, 한 명의 진술만이 거짓인 경우의 범인은 C이다. **답** B, C

25 $Q-P=\varnothing$에서 $Q \subset P$이므로 $q \Longrightarrow p$

$P \cup R^C = R^C$에서 $P \subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$

$\therefore q \Longrightarrow p \Longrightarrow \sim r$

또한, $(S \cup Q^C)^C \cup (S \cup R^C)^C = \varnothing$에서

$(S \cup Q^C)^C = \varnothing$이고 $(S \cup R^C)^C = \varnothing$

$S^C \cap Q = \varnothing$이고 $S^C \cap R = \varnothing$

$Q-S=\varnothing$이고 $R-S=\varnothing$

즉, $Q \subset S$, $R \subset S$이므로 $q \Longrightarrow s$, $r \Longrightarrow s$

ㄱ. $q \Longrightarrow s$이므로 명제 $q \longrightarrow s$는 참이다.

ㄴ. 명제 $s \longrightarrow p$가 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. $q \Longrightarrow p \Longrightarrow \sim r$에서 $q \Longrightarrow \sim r$

즉, $r \Longrightarrow \sim q$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

$Q-P=\varnothing$에서 $Q \subset P$

$P \cup R^C = R^C$에서 $P \subset R^C$이므로

$Q \subset P \subset R^C$ ……㉠

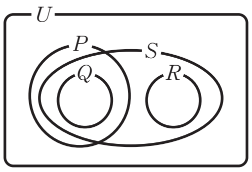
$(S \cup Q^C)^C \cup (S \cup R^C)^C = \varnothing$에서

$(S^C \cap Q) \cup (S^C \cap R) = \varnothing$

$S^C \cap (Q \cup R) = \varnothing$, $(Q \cup R) - S = \varnothing$

$(Q \cup R) \subset S$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 네 집합 P, Q, R, S의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $Q \subset S$이므로 $q \Longrightarrow s$

ㄴ. P와 S의 포함관계는 $S \subset P$일 수도 있고 $S \not\subset P$일 수도 있으므로 명제 $s \longrightarrow p$가 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. $R \subset Q^C$이므로 $r \Longrightarrow \sim q$

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

26

ㄱ. $x+y=2$에서 $y=2-x$이고, $0<x<2$이므로

$xy = x(2-x) = -x^2+2x$

$= -(x^2-2x+1)+1$

$= -(x-1)^2+1 \le 1$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$\therefore xy \le 1$ (참)

ㄴ. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2xy$ ($\because x+y=2$)

ㄱ에서 $xy \le 1$이므로 $4-2xy \ge 2$

$\therefore x^2+y^2 \ge 2$ (참)

ㄷ. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{xy}$ ($\because x+y=2$)

ㄱ에서 $xy \le 1$이고, $xy>0$이므로 $\dfrac{2}{xy} \ge 2$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge 2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄱ. $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$1 \ge \sqrt{xy}$ $\therefore xy \le 1$ (참)

ㄴ. $x+y=2$에서 $y=2-x$이고, $0<x<2$이므로

$x^2+y^2 = x^2+(2-x)^2$

$=2x^2-4x+4$

$=2(x^2-2x+1)+2$

$=2(x-1)^2+2 \ge 2$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

$\therefore x^2+y^2 \ge 2$ (참)

ㄷ. $x>0$, $y>0$에서 $\dfrac{1}{x}>0$, $\dfrac{1}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

ㄱ에서 $xy \le 1$이므로 $\dfrac{1}{xy} \ge 1$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge 2$ (거짓)

27

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$36=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ ($\because a+b+c=6$)

이때 $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$이므로

$36=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\ge ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)$

$=3(ab+bc+ca)$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)*

$\therefore ab+bc+ca \le 12$

따라서 구하는 최댓값은 12이다. 답 12

단계	채점 기준	배점
(가)	곱셈 공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에 $a+b+c=6$을 대입한 경우	30%
(나)	부등식 $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$를 이용하여 식을 정리한 경우	40%
(다)	$ab+bc+ca$의 최댓값을 구한 경우	30%

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \ge 0$

이므로 등호가 성립할 조건은

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$

28

$xy>0$에서 $x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$이므로

$P=\{(x, y) \mid x>0, y>0$ 또는 $x<0, y<0\}$

$|x|+|y| \ge 0$, $|x+y| \ge 0$이므로

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$

$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$=2|xy|-2xy>0$

$2|xy|>2xy$에서 $|xy|>xy$

즉, $xy<0$이므로 $x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$

$\therefore Q=\{(x, y) \mid x>0, y<0$ 또는 $x<0, y>0\}$

따라서 $P \cap Q=\varnothing$이므로 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

모든 실수 x, y에 대하여 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$가 성립하고, 등호는 $xy \ge 0$일 때 성립한다.

집합 Q는 조건 q : $|x+y|<|x|+|y|$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 집합이므로 모든 실수 x, y에서 $xy\ge0$을 만족시키는 경우를 제외하면 된다.
즉, $Q=\{(x, y)\,|\,xy<0\}$이다.
그런데 $P=\{(x, y)\,|\,xy>0\}$이므로 두 부등식 $xy>0$, $xy<0$을 동시에 만족시키는 두 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 존재하지 않는다.
$\therefore P\cap Q=\varnothing$

29 ㄱ. (반례) $a=\frac{1}{4}$이면 $-1<2a<1$을 만족시키지만

$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5}$, $1-a=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{1}{a+1}>1-a$ (거짓)

ㄴ. 부등식 $a<b$의 양변에 b를 곱하면
$b<0$이므로 $ab>b^2$ ……㉠
또한, $a<b$의 양변에 a를 곱하면
$a<0$이므로 $a^2>ab$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $a^2>ab>b^2$
$\therefore a^2>b^2$ (참)

ㄷ. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이이고, c가 가장 긴 변의 길이이므로 $a+b>c$

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{c}{1+c}$$
$$=\frac{a(1+b)(1+c)+b(1+a)(1+c)-c(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$=\frac{a(1+b+c+bc)+b(1+a+c+ac)-c(1+a+b+ab)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$=\frac{a+b-c+ab(2+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}>0$$
$(\because a+b>c,\ a>0,\ b>0,\ c>0)$

$\therefore \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

•다른 풀이 1•

ㄱ. $\frac{1}{a+1}-1+a=\frac{1}{a+1}+\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}$
$=\frac{1+a^2-1}{a+1}=\frac{a^2}{1+a}$

이때 $a^2\ge0$이고, $-1<2a<1$에서

$\frac{1}{2}<a+1<\frac{3}{2}$이므로

$\frac{1}{a+1}-1+a=\frac{a^2}{1+a}\ge0$

$\therefore \frac{1}{a+1}\ge1-a$ (거짓)

ㄴ. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$a<b<0$에서
$a+b<0$, $a-b<0$이므로
$a^2-b^2>0$ $\quad\therefore a^2>b^2$ (참)

•다른 풀이 2•

ㄱ. $\frac{1}{a+1}-1+a=\frac{1}{a+1}+a+1-2$

$-1<2a<1$에서 $\frac{1}{2}<a+1<\frac{3}{2}$

즉, $a+1>0$, $\frac{1}{a+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a+1}+a+1-2\ge2\sqrt{\frac{1}{a+1}\times(a+1)}-2=0$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{a+1}=a+1,\ \text{즉 } a=0\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore \frac{1}{a+1}\ge1-a$ (거짓)

30 $(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$

$=\frac{1}{2}(2x+2y+2z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$

$=\frac{1}{2}\{(2x+y)+(y+2z)\}\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2x+y}{y+2z}+\frac{y+2z}{2x+y}\right)$

$x>0$, $y>0$, $z>0$에서 $\frac{2x+y}{y+2z}>0$, $\frac{y+2z}{2x+y}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2x+y}{y+2z}+\frac{y+2z}{2x+y}\ge2\sqrt{\frac{2x+y}{y+2z}\times\frac{y+2z}{2x+y}}=2$$

이때 등호가 성립할 조건은

$\frac{2x+y}{y+2z}=\frac{y+2z}{2x+y}$에서 $(2x+y)^2=(y+2z)^2$

$2x+y=y+2z$ $\quad\therefore x=z$

$\therefore (x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)\ge\frac{1}{2}\times(2+2)=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이고, $x=z$일 때 최솟값을 갖는다. 답 2, $x=z$

•다른 풀이•

$A>0$, $B>0$일 때, 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{(\sqrt{A})^2+(\sqrt{B})^2\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\right\}$$
$$\ge\left(\sqrt{A}\times\frac{1}{\sqrt{A}}+\sqrt{B}\times\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2=4$$

(단, 등호는 $A=B$일 때 성립)

$\therefore \frac{1}{A}+\frac{1}{B}\ge\frac{4}{A+B}$

이때 $A=2x+y$, $B=y+2z$를 대입하면

$\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\ge\frac{4}{2x+2y+2z}$이므로

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$$
$$\ge(x+y+z)\times\frac{4}{2x+2y+2z}=\frac{4}{2}=2$$

(단, 등호는 $2x+y=y+2z$, 즉 $x=z$일 때 성립)

BLACKLABEL 특강 참고

코시 엥겔폼(Titu's lemma)

(1) a, b는 양수, x, y는 실수일 때,

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}\text{일 때 성립}\right)$

(2) a, b, c는 양수, x, y, z는 실수일 때,

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{일 때 성립}\right)$

31 좌표평면 위의 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 m $(m<0)$인 직선의 방정식은

$y=m(x-2)+1$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하면 y축과 만나는 점은 B이고 삼각형 OAB의 넓이와 삼각형 OCB의 넓이는 같다.

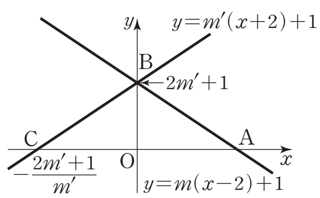
이 직선의 방정식을 구하면

$y=m(-x-2)+1$, 즉 $y=-m(x+2)+1$

이때 $m'=-m$으로 놓으면 $m'>0$이고

$y=m'(x+2)+1$

이 직선의 x절편은 $-\frac{2m'+1}{m'}$, y절편은 $2m'+1$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore\ \triangle OCB=\frac{1}{2}\times\left\{-\left(-\frac{2m'+1}{m'}\right)\right\}\times(2m'+1)$

$=\frac{4m'^2+4m'+1}{2m'}=2m'+\frac{1}{2m'}+2$

이때 $2m'>0$, $\frac{1}{2m'}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

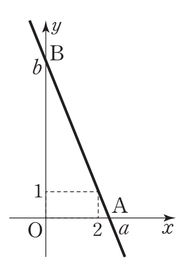
$2m'+\frac{1}{2m'}+2\ge2\sqrt{2m'\times\frac{1}{2m'}}+2=4$

$\left(\text{단, 등호는 } 2m'=\frac{1}{2m'},\ \text{즉 } m'=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 OCB의 넓이의 최솟값이 4이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값도 4이다. 답 4

• 다른 풀이 •

점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 음수인 직선의 x절편, y절편을 각각 a, b라 하면 직선의 방정식은



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a>0,\ b>0)$

이 직선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$

이때 $\frac{2}{a}>0$, $\frac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge2\sqrt{\frac{2}{ab}}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{2}{a}=\frac{1}{b},\ \text{즉 } a=2b\text{일 때 성립}\right)$

$\sqrt{\frac{2}{ab}}\le\frac{1}{2}$, $\frac{2}{ab}\le\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\ ab\ge8$

이때 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로

$\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\times8=4$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 4이다.

32 $2x^2+2y^2-4x+\frac{25}{x^2+2y^2+1}$

$=x^2+2y^2+1+\frac{25}{x^2+2y^2+1}+x^2-4x-1$

$=x^2+2y^2+1+\frac{25}{x^2+2y^2+1}+(x-2)^2-5$

이때 모든 실수 x, y에 대하여

$x^2+2y^2+1>0$, $\frac{25}{x^2+2y^2+1}>0$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+2y^2+1+\frac{25}{x^2+2y^2+1}$

$\ge2\sqrt{(x^2+2y^2+1)\times\frac{25}{x^2+2y^2+1}}=10$

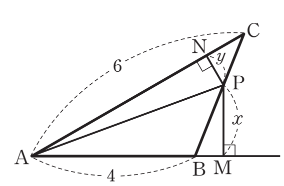
이때 등호는 $x^2+2y^2+1=\frac{25}{x^2+2y^2+1}$, 즉 $x^2+2y^2=4$일 때 성립한다.

또한, x는 실수이므로

$(x-2)^2\ge0$ (단, 등호는 $x=2$일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=2$, $y=0$일 때 $10+0-5=5$이다. 답 5

33



$\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하면

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$에서

$\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times4\times x+\frac{1}{2}\times6\times y$

$\therefore\ 2x+3y=6$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{4}{x}+\frac{6}{y}$에서

$(2x+3y)\left(\frac{4}{x}+\frac{6}{y}\right)=26+\frac{12y}{x}+\frac{12x}{y}$ ……㉠

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{12y}{x}+\frac{12x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{12y}{x}\times\frac{12x}{y}}=24$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{12y}{x}=\frac{12x}{y}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $2x+3y=6$이므로 ㉠에서

$$6\left(\frac{4}{x}+\frac{6}{y}\right)\ge 26+24=50$$

$$\therefore \frac{4}{x}+\frac{6}{y}\ge\frac{25}{3}\ \left(\text{단, 등호는 } x=y=\frac{6}{5}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $m=\frac{25}{3}$이므로

$18m=18\times\frac{25}{3}=150$ **답** 150

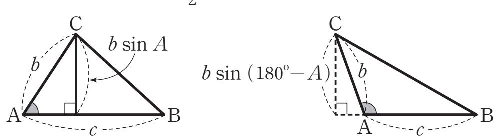
BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이가 각각 b, c이고 그 끼인각이 $\angle A$일 때, 이 삼각형의 넓이 S는

(1) $\angle A$가 예각일 때, $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

(2) $\angle A$가 둔각일 때, $S=\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)$



34 점 $P(a, b)$가 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 위에 있으므로

$(a+1)^2+(b-2)^2=1$ ……㉠

(i) $a=-1$일 때,

$ab-2a+b=-b+2+b=\boxed{2}$

(ii) $b=2$일 때,

$ab-2a+b=2a-2a+2=\boxed{2}$

(iii) $a\ne-1$, $b\ne2$일 때,

$(a+1)^2>0$, $(b-2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+1)^2+(b-2)^2\ge 2\sqrt{(a+1)^2(b-2)^2}$$
$$=2|(a+1)(b-2)|$$

$$\left(\text{단, 등호는 } |a+1|=|b-2|=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{일 때 성립}\right)$$

$$\therefore\ |(a+1)(b-2)|\le\boxed{\frac{1}{2}}\ (\because ㉠)$$

따라서

$$\begin{aligned}ab-2a+b&=a(b-2)+(b-2)+2\\&=(a+1)(b-2)+2\\&\le|(a+1)(b-2)|+2\\&\le\boxed{\frac{1}{2}}+2=\boxed{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

이므로 $ab-2a+b$의 최댓값은 $\boxed{\frac{5}{2}}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $ab-2a+b$의 최댓값은 $\boxed{\frac{5}{2}}$이다.

$\therefore p=2,\ q=\frac{1}{2},\ r=\frac{5}{2}$

$$\therefore \frac{pr}{q}=\frac{2\times\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=10$$ **답** ⑤

35 x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}\{(\sqrt{2}x)^2+(3y)^2\}\ge(x+\sqrt{3}y)^2$$

(단, 등호는 $2x=3\sqrt{3}y$일 때 성립)

이때 $2x^2+9y^2=18$이므로

$\frac{5}{6}\times18\ge(x+\sqrt{3}y)^2$, $(x+\sqrt{3}y)^2\le15$

$\therefore -\sqrt{15}\le x+\sqrt{3}y\le\sqrt{15}$

따라서 $x+\sqrt{3}y$의 최댓값은 $\sqrt{15}$이다. **답** ②

• 다른 풀이 •

$x+\sqrt{3}y=k$라 하면

$x=k-\sqrt{3}y$

$x=k-\sqrt{3}y$를 $2x^2+9y^2=18$에 대입하면

$2(k-\sqrt{3}y)^2+9y^2=18$

$2(k^2-2\sqrt{3}ky+3y^2)+9y^2=18$

$15y^2-4\sqrt{3}ky+2k^2-18=0$ ……㉠

이때 y는 실수이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(2\sqrt{3}k)^2-15(2k^2-18)\\&=-18k^2+270\\&\ge0\end{aligned}$$

$k^2\le15$

즉, $-\sqrt{15}\le k\le\sqrt{15}$이므로

$-\sqrt{15}\le x+\sqrt{3}y\le\sqrt{15}$

따라서 $x+\sqrt{3}y$의 최댓값은 $\sqrt{15}$이다.

36 길이가 10인 선분 AB 위를 점 P가 움직이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=10$이고,

$$\begin{aligned}4S_1+S_2&=4\pi\overline{AP}^2+\pi\overline{BP}^2\\&=\pi(4\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)\end{aligned}$$

이때 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right\}(4\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)\ge\left(\frac{1}{2}\times2\overline{AP}+\overline{BP}\right)^2$$

(단, 등호는 $4\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}=2$, $\overline{BP}=8$일 때 성립)

$$\frac{5}{4}(4\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)\ge(\overline{AP}+\overline{BP})^2$$

$4\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\geq\frac{4}{5}\times10^2=80$ ($\because$ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=10$)

$\therefore$ $4S_1+S_2=\pi(4\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2)\geq80\pi$

따라서 $4S_1+S_2$의 최솟값은 80π이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각
r_1, r_2 $(0<r_1<10,\ 0<r_2<10)$라 하면
$r_1+r_2=10$ $\quad\therefore$ $r_2=10-r_1$
따라서

$$\begin{aligned}4S_1+S_2&=4\pi r_1^2+\pi r_2^2\\&=\pi\{4r_1^2+(10-r_1)^2\}\\&=\pi(5r_1^2-20r_1+100)\\&=5\pi(r_1-2)^2+80\pi\ (0<r_1<10)\end{aligned}$$

이므로 $r_1=2$일 때 $4S_1+S_2$는 최솟값 80π를 갖는다.

37

a, b, c는 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2^2+3^2+6^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(2a+3b+6c)^2$
$49\geq(2a+3b+6c)^2$ ($\because$ $a^2+b^2+c^2=1$)
$-7\leq2a+3b+6c\leq7$
$\therefore$ $\alpha=7$
이때 등호는 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}$일 때 성립하므로
$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}=k$ $(k\neq0)$라 하면
$a=2k$, $b=3k$, $c=6k$

$$\therefore\ \frac{c^2}{ab}=\frac{(6k)^2}{2k\times3k}=\frac{36k^2}{6k^2}=6=\beta$$

$\therefore$ $\alpha-\beta=7-6=1$ 답 ①

38

a, b가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여
$\{1^2+(\sqrt{2})^2\}(a^2+b^2)\geq(a+\sqrt{2}b)^2$
$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{b}{\sqrt{2}}\text{일 때 성립}\right)$
$3(a^2+b^2)\geq(a+\sqrt{2}b)^2$
이때 $a+\sqrt{2}b=3-x$, $a^2+b^2=9-x^2$이므로
$3(9-x^2)\geq(3-x)^2$
$27-3x^2\geq9-6x+x^2$
$2x^2-3x-9\leq0$
$(2x+3)(x-3)\leq0$
$\therefore$ $-\frac{3}{2}\leq x\leq3$
따라서 x의 최댓값은 3이다. 답 3

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.71~72

01 32	02 7	03 $4\sqrt{3}$	04 5	05 풀이 참조
06 B	07 ③	08 ⑤	09 15	10 ②
11 5				

01

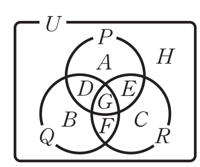
해결단계

❶ 단계	세 집합 P, Q, R의 포함 관계를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 두 집합 Q, R의 개수를 각각 구한다.
❸ 단계	순서쌍 (Q, R)의 개수를 구한다.

$U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 홀수인 자연수$\}$에서
$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
p : $x^2-8x+12\leq0$에서
$(x-2)(x-6)\leq0$ $\quad\therefore$ $2\leq x\leq6$
$\therefore$ $P=\{3,\ 5\}$
p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p\Longrightarrow q$
$\therefore$ $P\subset Q$
r은 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $\sim p\Longrightarrow r$
$\therefore$ $P^C\subset R$
집합 Q는 집합 U의 부분집합 중에서 집합 P의 두 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로 조건을 만족시키는 집합 Q의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$
또한, 집합 R은 집합 U의 부분집합 중에서 집합 $P^C=\{1,\ 7,\ 9\}$의 세 원소 1, 7, 9를 반드시 포함하는 집합이므로 집합 R의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$
따라서 두 집합 Q, R의 순서쌍 (Q, R)의 개수는
$8\times4=32$ 답 32

• 다른 풀이 •

p는 q이기 위한 충분조건이므로
$P\subset Q$
r은 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로
$P^C\subset R$
세 집합 P, Q, R을 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램으로 나타내었을 때, 각 영역에 해당하는 집합을 A, B, C, D, E, F, G, H라 하자.



$P\subset Q$이므로 집합 P의 두 원소 3, 5가 속할 수 있는 집합은 각각 D, G의 2가지이다.
$P^C\subset R$이므로 집합 P^C의 세 원소 1, 7, 9가 속할 수 있는 집합은 각각 C, F의 2가지이다.
따라서 두 집합 Q, R의 순서쌍 (Q, R)의 개수는
$(2\times2)\times(2\times2\times2)=32$

02 해결단계

❶ 단계	방정식 $x^2-2kxy+16y^2=0$의 해가 $x=0$, $y=0$뿐임을 파악한다.
❷ 단계	조건 p를 제곱을 포함한 식의 합으로 변형한다.
❸ 단계	k의 값의 범위에 따라 ❷단계에서 세운 방정식의 해를 구한다.
❹ 단계	정수 k의 개수를 구한다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참이려면 방정식 $x^2-2kxy+16y^2=0$을 만족시키는 두 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)가 오직 $(0, 0)$뿐이어야 한다.

$x^2-2kxy+16y^2=0$에서

$x^2-2kxy+k^2y^2+16y^2-k^2y^2=0$

$\therefore (x-ky)^2+(16-k^2)y^2=0$ ……㉠

이때 ㉠을 만족시키는 두 실수 x, y의 순서쌍이 오직 $(0, 0)$뿐이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $16-k^2<0$, 즉 $k<-4$ 또는 $k>4$일 때,

㉠에서 $(x-ky)^2=(k^2-16)y^2$

$x-ky=\pm\sqrt{k^2-16}|y|$

$\therefore x=ky\pm\sqrt{k^2-16}|y|$

즉, ㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 무수히 많으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $16-k^2=0$, 즉 $k=-4$ 또는 $k=4$인 경우

$(x-ky)^2=0$이어야 하므로

$k=-4$일 때, $x=-4y$

$k=4$일 때, $x=4y$

즉, ㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 무수히 많으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $16-k^2>0$, 즉 $-4<k<4$일 때,

$(x-ky)^2=0$, $y^2=0$이어야 하므로

$x=0$, $y=0$

따라서 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 오직 $(0, 0)$뿐이다.

(i), (ii), (iii)에서 $-4<k<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 k는 $-3, -2, -1, \cdots, 3$의 7개이다. 답 7

03 해결단계

❶ 단계	x, y가 양수임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 각각 구한다.
❷ 단계	주어진 식을 X로 놓고, X^2을 구한다.
❸ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 X^2의 값의 범위를 구한 후, X의 최댓값을 구한다.

$x+y=10$에서 $y=10-x$ ……㉠

x, y가 양수이므로 $x>0$, $y>0$에서

$x>0$, $10-x>0$ $\quad\therefore 0<x<10$, $0<y<10$ ($\because$ ㉠)

$X=\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y}$라 하면

$X^2=21-2x+2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}+23-2y$

$=44-2(x+y)+2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}$

$=\underbrace{24+2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}}_{*}$ ($\because x+y=10$) ……㉡

한편, $0<x<10$, $0<y<10$에서

$21-2x>0$, $23-2y>0$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(21-2x)+(23-2y)\ge2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}$

$\left(\text{단, 등호는 } 21-2x=23-2y, \text{ 즉 } x=\frac{9}{2}, y=\frac{11}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore 2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}\le44-2(x+y)$

$=24$ ($\because x+y=10$)

㉡에서

$X^2=24+2\sqrt{(21-2x)(23-2y)}\le24+24=48$

이므로 $0<X\le4\sqrt{3}$

따라서 X의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다. 답 $4\sqrt{3}$

• 다른 풀이 1 •

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{21-2x})^2+(\sqrt{23-2y})^2\}$

$\ge(\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y})^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{21-2x}=\sqrt{23-2y}, \text{ 즉 } x=\frac{9}{2}, y=\frac{11}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$2\{44-2(x+y)\}\ge(\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y})^2$

$48\ge(\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y})^2$ ($\because x+y=10$)

$\therefore 0<\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y}\le4\sqrt{3}$

($\because \sqrt{21-2x}>0$, $\sqrt{23-2y}>0$)

따라서 주어진 식의 최댓값은 $4\sqrt{3}$이다.

• 다른 풀이 2 •

$*$에서

$X^2=24+2\sqrt{(21-2x)(2x+3)}$ ($\because y=10-x$)

$=24+2\sqrt{-4x^2+36x+63}$

$=24+2\sqrt{-4\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+144}$ $(0<x<10)$

따라서 X^2은 $x=\frac{9}{2}$일 때 최댓값 $24+2\sqrt{144}=48$을 가지므로 X, 즉 $\sqrt{21-2x}+\sqrt{23-2y}$의 최댓값은

$\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

04 해결단계

❶ 단계	코시-슈바르츠의 부등식을 이용하여 a의 최댓값 M을 구한다.
❷ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 b의 최솟값 m을 구한 후, M^2+m^2의 값을 구한다.

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이때 $x+y=a$이므로

$a^2\le2(x^2+y^2)\le2\times2=4$ ($\because x^2+y^2\le2$)

$\therefore -2\le a\le2$

즉, a의 최댓값은 2이므로

$M=2$

한편, $x=0$ 또는 $y=0$일 때 $b=xy=0$이고,
$x\neq0$, $y\neq0$일 때, $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x^2+y^2\geq2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$ (단, 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립)
이때 $xy=b$이므로
$2|b|\leq x^2+y^2\leq2$, $|b|\leq1$ $\quad\therefore -1\leq b\leq1$
즉, b의 최솟값은 -1이므로
$m=-1$
$\therefore M^2+m^2=2^2+(-1)^2=5$ **답** 5

05 해결단계

❶ 단계	두 정수 a, b를 모두 2의 배수가 아니라고 가정한다.
❷ 단계	이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 정수인 근을 α라 할 때, α가 2의 배수가 아닌 경우와 2의 배수인 경우로 나누어 생각한다.
❸ 단계	결론이 가정에 모순임을 유도하여 주어진 명제를 증명한다.

두 정수 a, b가 모두 2의 배수가 아니라고 가정하자.
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 정수인 근을 α라 하면 α는 2의 배수가 아니거나 2의 배수이다.

(i) α가 2의 배수가 아닐 때, α와 a, b가 모두 2의 배수가 아니므로 α^2, $a\alpha$, b는 모두 2의 배수가 아니다.
즉, $\alpha^2+a\alpha+b$는 2의 배수가 아니므로
$\alpha^2+a\alpha+b\neq0$이다.

(ii) α가 2의 배수일 때, α^2, $a\alpha$는 모두 2의 배수이고, b는 2의 배수가 아니다.
즉, $\alpha^2+a\alpha+b$는 2의 배수가 아니므로
$\alpha^2+a\alpha+b\neq0$이다.

(i), (ii)에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 정수인 근을 갖지 않으므로 모순이다.
따라서 주어진 이차방정식이 적어도 하나의 정수인 근을 가지면 두 정수 a, b 중에서 적어도 하나는 2의 배수이다.
답 풀이 참조

06 해결단계

❶ 단계	(나)에서 미적분 I 을 선택한 학생은 B 또는 C임을 파악한다.
❷ 단계	미적분 I 을 선택한 학생이 B인 경우 나머지 학생들이 선택한 과목을 구한다.
❸ 단계	미적분 I 을 선택한 학생이 C인 경우 나머지 학생들이 선택한 과목을 구한다.

(가)~(라)의 각 문장의 내용 중에서 하나는 참, 하나는 거짓이므로 (나)에서 미적분 I 을 선택한 학생은 B 또는 C이다.

(i) B가 미적분 I 을 선택한 경우
(가)에서 B가 선택한 과목이 미적분 I 이므로 A가 선택한 과목은 대수가 아니다.
(라)에서 A가 선택한 과목은 미적분 I 이 아니므로 D가 선택한 과목은 확률과 통계이다.
(다)에서 D가 선택한 과목이 확률과 통계이므로 C가 선택한 과목은 대수가 아니다.
위의 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	대수	미적분 I	확률과 통계	기하
A	×	×	×	
B	×	○	×	×
C	×	×	×	
D	×	×	○	×

이때 A, C가 모두 기하를 선택해야 하므로 4명이 선택한 과목이 서로 다르다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) C가 미적분 I 을 선택한 경우
(가)에서 B가 선택한 과목은 미적분 I 이 아니므로 A가 선택한 과목은 대수이다.
(라)에서 A가 선택한 과목은 미적분 I 이 아니므로 D가 선택한 과목은 확률과 통계이다.
위의 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	대수	미적분 I	확률과 통계	기하
A	○	×	×	×
B	×	×	×	
C	×	○	×	×
D	×	×	○	×

이때 4명이 선택한 과목이 모두 다르므로 기하를 선택한 학생은 B이다.

(i), (ii)에서 기하를 선택한 학생은 B이다. **답** B

07 해결단계

❶ 단계	두 방정식 $ax^2-bx+c=0$, $\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c=0$의 근 사이의 관계를 파악한 후, 세 집합 P, Q, R을 각각 구한다.
❷ 단계	방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근과 1의 대소 관계를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	$P\cap Q=\varnothing$이 되도록 하는 두 근과 1의 대소 관계를 파악하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❹ 단계	$P\cap Q\neq\varnothing$이 되도록 하는 두 근과 1의 대소 관계를 파악하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

방정식 $ax^2-bx+c=0$이 실근을 가질 때, a, b, c가 모두 양의 실수이므로 실근은 모두 0보다 크다.
$x=t$ $(t>0)$를 방정식 $ax^2-bx+c=0$의 근이라 하면
$at^2-bt+c=0$에서 $\frac{a}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}-\frac{b}{\frac{1}{t}}+c=0$이므로 $\frac{1}{t}$은 방정식 $\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c=0$의 근이다.
즉, $P=\{x|\alpha<x<\beta\}$ $(0<\alpha<\beta)$라 하면
$Q=\left\{x\middle|\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}\right\}$이다.
또한, $(x-1)^2\leq0$에서 $x=1$이므로
$R=\{1\}$
ㄱ. $R\subset P$이면 $\alpha<1<\beta$이므로
$\frac{1}{\beta}<1<\frac{1}{\alpha}$
$\therefore R\subset Q$ (참)

ㄴ. $P\cap Q=\varnothing$이려면 $P=Q=\varnothing$이거나 $\alpha<\beta<1$ 또는 $1<\alpha<\beta$이어야 한다.
이때 어느 경우도 $R\subset P$ 또는 $R\subset Q$를 만족시키지 않는다. (거짓)

ㄷ. $P\cap Q\neq\varnothing$이려면 $\alpha<1<\beta$이어야 한다.
$\alpha<1<\beta$일 때, $\frac{1}{\beta}<1<\frac{1}{\alpha}$이므로 두 집합 P, Q는 모두 1을 원소로 갖는다.
즉, $R\subset P$, $R\subset Q$이므로
$R\subset(P\cap Q)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$이 실근을 가질 때, 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
이때 a, b, c가 모두 양수이므로 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
$\therefore\ \alpha>0,\ \beta>0$

08 해결단계

❶ 단계	$\angle FGH=90^\circ$임을 이용하여 세 점 F, G, H가 중심이 M인 한 원 위에 있음을 증명하고, ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	$\triangle EFM$과 $\triangle FGM$의 넓이를 구한 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	$\overline{FH}=6\sqrt{2}$임을 이용하여 a, b에 관한 식을 세운 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $\triangle GDH$와 $\triangle FCG$는 직각이등변삼각형이므로
$\angle FGH=90^\circ$
점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 M인 한 원 위에 있다.*
즉, $\overline{FM}=\overline{GM}$이다. (참)

ㄴ. $\angle HAE=\angle EBF=90^\circ$이고, $\overline{AH}=\overline{BE}$, $\overline{AE}=\overline{BF}$에서
$\triangle AEH\equiv\triangle BFE$ (SAS 합동)이므로
$\angle AEH+\angle BEF=90^\circ$, $\overline{EH}=\overline{FE}$
즉, $\triangle EFH$는 $\overline{EH}=\overline{EF}=\sqrt{a^2+b^2}$인 직각이등변삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$이다.
이때 선분 EM은 삼각형 EFH의 넓이를 이등분하므로
$\triangle EFM=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$
한편, $\triangle FGH$는 $\angle FGH=90^\circ$, $\overline{HG}=\sqrt{2}a$, $\overline{FG}=\sqrt{2}b$인 직각삼각형이므로
$\triangle FGH=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}b=ab$
이때 선분 GM은 삼각형 FGH의 넓이를 이등분하므로
$\triangle FGM=\frac{1}{2}ab$
$a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2b^2}$
$=2ab$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)
$\therefore\ \frac{1}{4}(a^2+b^2)\ge\frac{1}{2}ab$
$\therefore\ \triangle EFM\ge\triangle FGM$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\triangle FGM=\frac{1}{2}ab$이고, $\triangle EFH$는
$\overline{EF}=\overline{EH}=\sqrt{a^2+b^2}$인 직각이등변삼각형이므로
$\overline{FH}=\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}$
이때 $\overline{FH}=6\sqrt{2}$이면 $\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서
$a^2+b^2=36$ ……㉠
$a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\ge2\sqrt{a^2b^2}$
$=2ab$ (단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)
$36\ge2ab$ ($\because$ ㉠)
$\therefore\ \frac{1}{2}ab\le9$
따라서 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

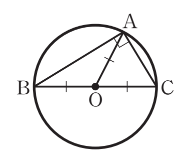
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

ㄴ. $\angle FGH=90^\circ$이고 $\triangle EFH$는 $\angle HEF=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 네 점 E, F, G, H는 한 원 위에 있고 반지름의 길이는 $\overline{EM}$과 같다.
점 G에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하면
$\overline{GI}\le\overline{EM}$
이때 두 삼각형 EFM, FGM은 밑변이 $\overline{FM}$이고 높이가 각각 $\overline{EM}$, $\overline{GI}$인 삼각형이므로
$\triangle EFM\ge\triangle FGM$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

직각삼각형 ABC의 외심 O는 빗변의 중점이므로
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$



09 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}$의 최솟값을 구한다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=12$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$
$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$에서

$\frac{1}{2}\times5\times12=\frac{1}{2}\times5\times a+\frac{1}{2}\times12\times b+\frac{1}{2}\times13\times c$

$\therefore\ 5a+12b+13c=60$ ······㉠ *

$(5a+12b+13c)\left(\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\right)$

$=25+\frac{60a}{b}+\frac{65a}{c}+\frac{60b}{a}+144+\frac{156b}{c}$

$+\frac{65c}{a}+\frac{156c}{b}+169$

$=338+60\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+65\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+156\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$338+60\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+65\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+156\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\geq338+120\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+130\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}+312\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}}$

$=900$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{a}{b},\ \frac{a}{c}=\frac{c}{a},\ \frac{b}{c}=\frac{c}{b},\ \text{즉 } a=b=c\text{일 때 성립}\right)$

즉, $(5a+12b+13c)\left(\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\right)\geq900$이므로

$60\left(\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\right)\geq900$ ($\because$ ㉠)

$\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\geq15$

따라서 $\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}$의 최솟값은 15이다. **답** 15

• 다른 풀이 •

*에서 a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{5a})^2+(\sqrt{12b})^2+(\sqrt{13c})^2\}$

$\times\left\{\left(\sqrt{\frac{5}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{12}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{13}{c}}\right)^2\right\}$

$\geq\left(\sqrt{5a}\times\sqrt{\frac{5}{a}}+\sqrt{12b}\times\sqrt{\frac{12}{b}}+\sqrt{13c}\times\sqrt{\frac{13}{c}}\right)^2$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

$(5a+12b+13c)\left(\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\right)\geq(5+12+13)^2$

$60\left(\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\right)\geq900$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}\geq15$

따라서 $\frac{5}{a}+\frac{12}{b}+\frac{13}{c}$의 최솟값은 15이다.

서울대 선배들의 추천 PICK | 1등급 비법 노하우

이 문제는 도형의 성질과 절대부등식을 활용하여 식의 최솟값을 구하는 문제이다. 도형에 주어진 조건을 이용하여 $X+\frac{1}{X}$ $(X>0)$ 꼴을 포함하도록 식을 변형한다.

10 해결단계

❶ 단계	$Q=\varnothing$일 때 a, b의 조건을 파악하여 ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	$a=0$, $b=4$일 때, 두 진리집합 P, Q의 포함 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되도록 하는 a, b의 조건을 구한 후, ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. $Q=\varnothing$이면 $a-b\geq b-a$이어야 하므로 $a\geq b$이다. (참)

ㄴ. $a=0$, $b=4$일 때,

$P=R$ (단, 집합 R은 실수 전체의 집합이다.)

$Q=\{x\mid-4<x<4\}$

$\therefore\ Q\subset P$ (참)

ㄷ. 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이므로 $Q\subset P$이려면 $Q=\varnothing$이거나 $P=R$이거나 $Q\subset\{x\mid x\leq b-4\}$ 또는 $Q\subset\{x\mid x\geq a\}$이어야 한다.

(ⅰ) $Q=\varnothing$일 때, ㄱ에서 $a\geq b$

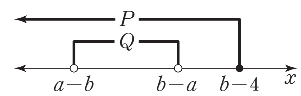
(ⅱ) $P=R$일 때, $a\leq b-4$

(ⅲ) $Q\subset\{x\mid x\leq b-4\}$ 또는 $Q\subset\{x\mid x\geq a\}$일 때,

ㄱ에서 $a<b$이면 $Q\neq\varnothing$이므로

$Q=\{x\mid a-b<x<b-a\}$

① $Q\subset\{x\mid x\leq b-4\}$일 때,

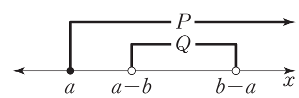


위의 그림과 같아야 하므로

$b-a\leq b-4$

$\therefore\ a\geq4$

② $Q\subset\{x\mid x\geq a\}$일 때,



위의 그림과 같아야 하므로

$a\leq a-b$

$\therefore\ b\leq0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $a\geq b$ 또는 $a\leq b-4$ 또는 $a\geq4$ 또는 $b\leq0$이어야 하므로 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓이 되려면 $b-4<a<b$, $a<4$, $b>0$이어야 한다.

$1\leq b\leq4$일 때, $b-4<a<b$, $a<4$를 만족시키는 정수 a는 각각 $b-3$, $b-2$, $b-1$의 3개

$b=5$일 때, $1<a<5$, $a<4$를 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개

$b=6$일 때, $2<a<6$, $a<4$를 만족시키는 정수 a는 3의 1개

$b\geq7$일 때, $b-4<a<b$, $a<4$를 만족시키는 정수 a는 없다.

즉, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4\times3+2+1=15$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

11 해결단계

❶ 단계	$\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}{x^2+x+1}$을 다항식의 나눗셈을 이용하여 (분자의 차수)<(분모의 차수)인 분수꼴로 나타낸다.
❷ 단계	주어진 식의 최댓값은 $\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}{x^2+x+1}$의 최솟값의 역수임을 파악한다.
❸ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ❷ 단계에서 구한 식의 최솟값을 구하고, 주어진 식의 최댓값 M을 구한다.

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$이므로

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}=\frac{1}{\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}{x^2+x+1}}$$

다항식 $x^4+2x^3+6x^2+5x+13$을 다항식 x^2+x+1로 나누어 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+\ x\ +4 \\ x^2+x+1 & x^4+2x^3+6x^2+5x+13 \\ & x^4+\ x^3+\ x^2 \\ \hline & \quad x^3+5x^2+5x+13 \\ & \quad x^3+\ x^2+\ x \\ \hline & \qquad 4x^2+4x+13 \\ & \qquad 4x^2+4x+\ 4 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 9 \end{array}$$

$x^4+2x^3+6x^2+5x+13=(x^2+x+1)(x^2+x+4)+9$

이므로

$$\frac{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)(x^2+x+4)+9}{x^2+x+1}$$
$$=x^2+x+4+\frac{9}{x^2+x+1}$$
$$=x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}+3$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+1>0$, $\dfrac{9}{x^2+x+1}>0$이므로 주어진 식의 최댓값은 $\dfrac{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}{x^2+x+1}$의 최솟값의 역수와 같다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+x+1+\frac{9}{x^2+x+1}+3$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2+x+1)\times\frac{9}{x^2+x+1}}+3$$
$$=2\times3+3=9$$

이때 등호는 $x^2+x+1=\dfrac{9}{x^2+x+1}$, 즉 $x=-2$ 또는 $x=1$일 때 성립한다.

$$\therefore \frac{x^2+x+1}{x^4+2x^3+6x^2+5x+13}\leq\frac{1}{9}$$

따라서 주어진 식의 최댓값 $M=\dfrac{1}{9}$이므로

$45M=45\times\dfrac{1}{9}=5$ 답 5

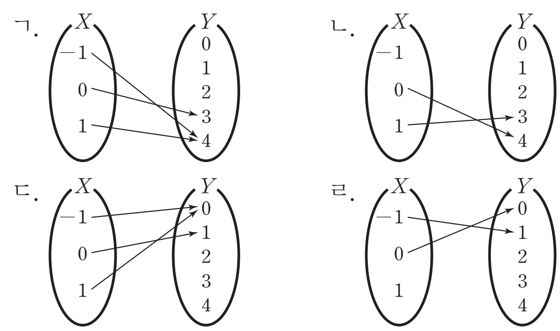
III 함수와 그래프

06. 함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.76~78

01 ①	02 7	03 ②	04 5	05 ④
06 ④	07 42	08 ①	09 2	10 ⑤
11 ③	12 8	13 ③	14 ②	15 ②
16 ⑤	17 ①	18 -5	19 ④	20 $\sqrt{7}$
21 ⑤				

01 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



ㄴ. 집합 X의 원소 -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

ㄹ. 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ①

02 집합 X는 $f(x)=g(x)$인 x의 값을 원소로 갖는다.

$x^3+2x+1=-2x^2+3x+3$에서

$x^3+2x^2-x-2=0$

$h(x)=x^3+2x^2-x-2$라 하면 $h(1)=0$, $h(-1)=0$이므로 오른쪽 그림과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
-1	1	3	2	0
		-1	-2	
	1	2	0	

$h(x)=(x+2)(x+1)(x-1)$

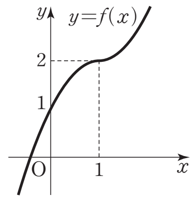
$h(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 집합 X는 공집합이 아닌 집합 $\{-2, -1, 1\}$의 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ 답 7

03 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+1 & (x<1) \\ x^2-2x+3 & (x\geq1) \end{cases}$

$=\begin{cases} -(x-1)^2+2 & (x<1) \\ (x-1)^2+2 & (x\geq1) \end{cases}$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이므로 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄴ. $f(a)=-2$라 하면 $a<1$이므로

$-a^2+2a+1=-2$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<1$)

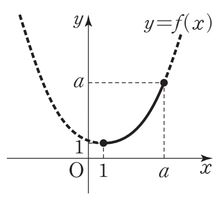
또한, $f(1)=2$이므로 부등식 $-2\leq f(x)\leq2$를 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $-1\leq x\leq1$이다. (참)

ㄷ. 위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

04 함수 f는 정의역이 $X=\{x\,|\,1\leq x\leq a\}$이고 일대일대응이므로 치역도 $X=\{x\,|\,1\leq x\leq a\}$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$f(1)=1$, $f(a)=a$

즉, $b=1$이고 $\frac{1}{3}(a-1)^2+1=a$

$a^2-2a+1+3=3a$, $a^2-5a+4=0$

$(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>1$)

$\therefore a+b=4+1=5$ **답** 5

05 함수 $f(x)=x^2-6x$가 항등함수가 되려면 집합 X의 각 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립해야 하므로

$x^2-6x=x$에서 $x^2-7x=0$

$x(x-7)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=7$

따라서 구하는 집합 X는 집합 $\{0, 7\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ **답** ④

06 집합 $X=\{0, 1, 2\}$에 대하여 함수 h는 X에서 X로의 항등함수이므로 $h(0)=0$, $h(1)=1$, $h(2)=2$

$\therefore f(0)=g(1)=h(2)=2$

이때 함수 g는 X에서 X로의 상수함수이므로

$g(0)=g(1)=g(2)=2$

또한, $f(0)-g(0)=f(1)$이므로 $f(1)=2-2=0$이고, 함수 f는 X에서 X로의 일대일대응이므로

$f(0)=2$, $f(1)=0$, $f(2)=1$

$\therefore f(2)+g(0)+h(1)=1+2+1=4$ **답** ④

07 (i) $n=3$일 때,

두 집합 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$에 대하여 집합 X의 세 원소 x_1, x_2, x_3에 대응될 수 있는 집합 Y의 원소가 각각 3개씩 존재하므로 X에서 Y로의 함수의 개수는 $3^3=27$

이때 집합 Y의 원소의 개수가 3이므로 X에서 Y로의 상수함수의 개수는 3이다.

따라서 X에서 Y로의 함수 중에서 상수함수가 아닌 함수의 개수는 $\underline{f(3)=27-3=24}$ *

(ii) $n=4$일 때,

두 집합 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$에 대하여

x_1에 대응될 수 있는 것은 집합 Y의 원소 중에서 y_1을 제외한 y_2, y_3, y_4 중에서 하나이므로 3개,

x_2에 대응될 수 있는 것은 x_1에 대응되는 것을 제외한 3개,

x_3에 대응될 수 있는 것은 x_1, x_2에 대응되는 것을 제외한 2개,

x_4에 대응될 수 있는 것은 x_1, x_2, x_3에 대응되는 것을 제외한 1개

따라서 X에서 Y로의 함수 중에서 x_1이 y_1에 대응되지 않는 일대일대응의 개수는

$g(4)=3\times3\times2\times1=18$

(i), (ii)에서 $f(3)+g(4)=24+18=42$ **답** 42

• 다른 풀이 1 •

*에서 $f(3)=24$

$g(4)=$(전체 일대일대응의 개수)

$-(x_1 \longrightarrow y_1$인 일대일대응의 개수)

$=4\times3\times2\times1-3\times2\times1=18$

$\therefore f(3)+f(4)=24+18=42$

• 다른 풀이 2 •

X에서 Y로의 함수의 개수는

$n\times n\times n\times\cdots\times n=n^n$

이때 상수함수는 n개이므로

$f(n)=n^n-n$ $\quad\therefore f(3)=3^3-3=27-3=24$

또한, X에서 Y로의 일대일대응의 개수는

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1=n!$

이때 x_1이 y_1에 대응되는 일대일대응의 개수는

$(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times1=(n-1)!$

이므로

$g(n)=n!-(n-1)!$
$\quad=n\times(n-1)!-(n-1)!=(n-1)(n-1)!$
$\therefore g(4)=(4-1)(4-1)!$
$\quad=3\times(3\times2\times1)=18$
$\therefore f(3)+g(4)=24+18=42$

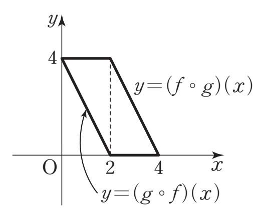
08 $g(-2)=(-2)^2-9=-5$이므로
$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(-5)$
$\quad=-4\times(-5)+1=21$
또한, $f(3)=6$이므로
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(6)=6^2-9=27$
$\therefore (f\circ g)(-2)-(g\circ f)(3)=21-27=-6$ 답 ①

09 $f(x)=ax+m,\ g(x)=bx+n$이므로
$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$
$f(bx+n)=g(ax+m)$
$a(bx+n)+m=b(ax+m)+n$
$abx+an+m=abx+bm+n$
$(1-b)m+(a-1)n=0$
위의 식이 두 실수 $m,\ n$의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$1-b=0,\ a-1=0$ $\quad\therefore a=1,\ b=1$
$\therefore a+b=2$ 답 2

10 $f^1(x)=2x-1$이므로
$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$\quad=2f(x)-1=2(2x-1)-1$
$\quad=4x-3$
$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$
$\quad=2f^2(x)-1=2(4x-3)-1$
$\quad=8x-7$
$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))$
$\quad=2f^3(x)-1=2(8x-7)-1$
$\quad=16x-15$
$\quad\vdots$
$\therefore f^n(x)=2^nx-(2^n-1)$ (단, n은 자연수)
$\therefore f^9(3)=2^9\times3-(2^9-1)$
$\quad=1536-511=1025$ 답 ⑤

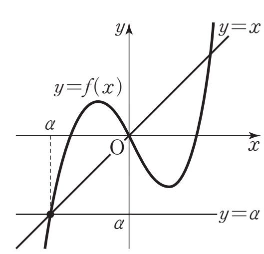
11 $f(x)=x+a,\ (h\circ g)(x)=5x-2$이고
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이므로
$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$\quad=(h\circ g)(f(x))$
$\quad=(h\circ g)(x+a)$
$\quad=5(x+a)-2$
$\quad=5x+5a-2$
$(h\circ(g\circ f))(x)=bx-7$에서
$5x+5a-2=bx-7$
즉, $5=b,\ 5a-2=-7$이므로
$a=-1,\ b=5$
$\therefore 2a+b=2\times(-1)+5=3$ 답 ③

12 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le2)\\ 4 & (2<x\le4)\end{cases},\ g(x)=-x+4\ (0\le x\le4)$
이므로
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}2g(x) & (0\le g(x)\le2)\\ 4 & (2<g(x)\le4)\end{cases}$
$\quad=\begin{cases}4 & (0\le x<2)\\ 2(-x+4) & (2\le x\le4)\end{cases}$
$\quad=\begin{cases}4 & (0\le x<2)\\ -2x+8 & (2\le x\le4)\end{cases}$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}g(2x) & (0\le x\le2)\\ g(4) & (2<x\le4)\end{cases}$
$\quad=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x\le2)\\ 0 & (2<x\le4)\end{cases}$
두 함수 $y=(f\circ g)(x),\ y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



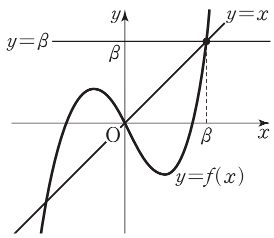
따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 2, 높이가 4인 평행사변형 모양이므로 구하는 넓이는
$2\times4=8$ 답 8

13 $(f\circ f)(x)=f(x)$에서 $f(f(x))=f(x)$
$f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 원점과 원점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나므로 원점이 아닌 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<0<\beta)$라 하면
$t=\alpha,\ t=0,\ t=\beta$
(i) $t=\alpha$, 즉 $f(x)=\alpha$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 한 점 $(\alpha,\ \alpha)$에서 만나므로 조건을 만족시키는 실수 x는 α의 1개이다.



(ii) $t=0$, 즉 $f(x)=0$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건을 만족시키는 실수 x의 개수는 3이다.

(iii) $t=\beta$, 즉 $f(x)=\beta$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 한 점 $(\beta,\ \beta)$에서 만나므로 조건을 만족시키는 실수 x는 β의 1개이다.



(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 x의 개수는

$1+3+1=5$

답 ③

14 $f^{-1}(8)=m$이라 하면 $f(m)=8$ ……㉠

$f^{-1}(12)=n$이라 하면 $f(n)=12$ ……㉡

$f(x)=\begin{cases} x+5 & (x<4) \\ 3x-3 & (x\geq 4)\end{cases}$이므로

$x<4$일 때, $f(x)=x+5<9$

$x\geq 4$일 때, $f(x)=3x-3\geq 9$

㉠에서 $f(m)<9$이므로 $m<4$이고 $f(m)=m+5$

즉, $m+5=8$이므로 $m=3$

㉡에서 $f(n)>9$이므로 $n\geq 4$이고 $f(n)=3n-3$

즉, $3n-3=12$이므로 $n=5$

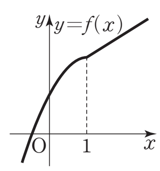
$\therefore f^{-1}(8)+f^{-1}(12)=3+5=8$

답 ②

15 $x<1$일 때,

$f(x)=-x^2+2x+2b=-(x-1)^2+2b+1$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x\geq 1$일 때 직선

$y=(3a-1)x-b+5$의 기울기는 양수이어야 하므로

$3a-1>0 \quad \therefore a>\frac{1}{3}$ ……㉠

또한, $x=1$에서 두 함수 $y=(3a-1)x-b+5$와 $y=-x^2+2x+2b$의 함숫값이 같아야 하므로

$3a-b+4=1+2b$

$3b=3a+3 \quad \therefore b=a+1$

㉠에서 $b=a+1>\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

따라서 정수 b의 최솟값은 2이다.

답 ②

16 $f(3x+1)=6x-5$에서

$3x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{3}$이므로

$f(t)=6\times\frac{t-1}{3}-5=2t-7$

$\therefore f(x)=2x-7$

$y=2x-7$을 x에 대하여 풀면

$2x=y+7 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \quad \therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

즉, $ax+b=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{7}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{4}$

답 ⑤

• 다른 풀이 •

$f(3x+1)=6x-5$에서

$(f^{-1}\circ f)(3x+1)=f^{-1}(6x-5)$

$\therefore f^{-1}(6x-5)=3x+1$

$6x-5=k$로 놓으면 $x=\frac{k+5}{6}$이므로

$f^{-1}(k)=3\times\frac{k+5}{6}+1=\frac{1}{2}k+\frac{7}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{7}{2}$이므로

$ab=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{4}$

17 $(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서

$(f^{-1}\circ f\circ g^{-1})(x^2)=f^{-1}(x)$

$g^{-1}(x^2)=f^{-1}(x)=2x^2$

$x^2=t$로 놓으면

$g^{-1}(t)=2t \quad \therefore g^{-1}(x)=2x$

$y=2x$라 하면 $x=\frac{1}{2}y$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x \quad \therefore g(x)=\frac{1}{2}x$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$
$\qquad =f^{-1}(g(2))$
$\qquad =f^{-1}(1)$
$\qquad =2\times 1^2=2$

답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

$g(2)$의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.
$g^{-1}(x)=2x$에서
$g(2x)=(g\circ g^{-1})(x)=x$
양변에 $x=1$을 대입하면 $g(2)=1$

18 $f(x)=x+a$에서 $y=x+a$라 하면

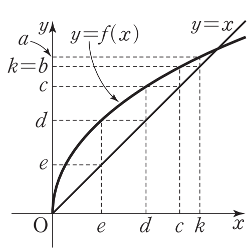
$x=y-a$

x와 y를 서로 바꾸면
$y=x-a \qquad \therefore f^{-1}(x)=x-a$
이때 $(f^{-1}\circ g)(x)=2x+5$이므로
$(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=g(x)-a$
$\qquad\qquad =bx+c-a=2x+5$
위의 등식은 x에 대한 항등식이므로
$b=2,\ c-a=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$
또한, $g^{-1}(3)=2$에서 $g(2)=3$이므로
$2b+c=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서
$a=-6,\ b=2,\ c=-1$
$\therefore a+b+c=-6+2+(-1)=-5$ 　　답 -5

•다른 풀이 1•
$g^{-1}(3)=2$이므로 $g(2)=3$
$(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}(g(x))=2x+5 \qquad \cdots\cdots ㉢$
㉢에 $x=2$를 대입하면
$f^{-1}(g(2))=9,\ f^{-1}(3)=9$
$\therefore f(9)=3$
$f(x)=x+a$이므로
$9+a=3 \qquad \therefore a=-6$
㉢에 $x=1$을 대입하면
$f^{-1}(g(1))=7,\ g(1)=f(7)=7-6=1$
$g(x)=bx+c$이므로 $b+c=1$
$\therefore a+b+c=-6+1=-5$

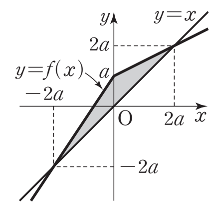
•다른 풀이 2•
$(f^{-1}\circ g)(x)=2x+5$의 양변에 함수 f를 합성하면
$g(x)=f(2x+5)$
$\qquad =2x+5+a\ (\because f(x)=x+a)$
$g^{-1}(3)=2$에서 $g(2)=3$이므로 위의 식에 $x=2$를 대입하면
$4+5+a=3 \qquad \therefore a=-6$
$\therefore g(x)=2x-1$
이때 $g(x)=bx+c$이므로 $2x-1=bx+c$
$\therefore b=2,\ c=-1$
$\therefore a+b+c=-6+2+(-1)=-5$

19 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(k)=p$라 하면
$f(p)=k \qquad \therefore p=c$
또한, $g(c)=q$라 하면
$f(q)=c \qquad \therefore q=d$
$\therefore (g\circ g)(k)=g(g(k))$
$\qquad\qquad =g(c)=d$



답 ④

20 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하면
$x<0$일 때 $\frac{3}{2}x+a=x$에서 $x=-2a$이므로 $(-2a,\ -2a)$
$x\geq 0$일 때 $\frac{1}{2}x+a=x$에서 $x=2a$이므로 $(2a,\ 2a)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 28이므로



$2\left(\frac{1}{2}\times a\times 2a+\frac{1}{2}\times a\times 2a\right)=28$
$4a^2=28,\ a^2=7$
$\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$ 　　답 $\sqrt{7}$

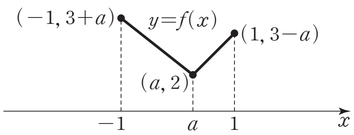
•다른 풀이•
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 28이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 28=14$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 $(-2a,\ -2a)$, $(2a,\ 2a)$
이므로 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{\{2a-(-2a)\}^2+\{2a-(-2a)\}^2}=\sqrt{32a^2}$
$\qquad =4a\sqrt{2}\ (\because a>0)$
또한, 점 $(0,\ a)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\ (\because a>0)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 $4a\sqrt{2}$이고 높이가 $\frac{a}{\sqrt{2}}$인 삼각형이고 넓이가 14이므로
$\frac{1}{2}\times 4a\sqrt{2}\times\frac{a}{\sqrt{2}}=14$
$2a^2=14,\ a^2=7$
$\therefore a=\sqrt{7}\ (\because a>0)$

21 $f(x)=|x+1|+|x-a|+|x-1|$에서
(i) $-1\leq x<a\ (\because -1<a<1)$일 때,
$f(x)=(x+1)+(-x+a)+(-x+1)$
$\qquad =-x+2+a$
(ii) $a\leq x\leq 1\ (\because -1<a<1)$일 때,
$f(x)=(x+1)+(x-a)+(-x+1)$
$\qquad =x+2-a$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} -x+2+a & (-1\le x<a) \\ x+2-a & (a\le x\le 1) \end{cases}$$

이때 $f(-1)=1+2+a=3+a$, $f(a)=a+2-a=2$, $f(1)=3-a$이므로 $-1\le x\le 1$, $-1<a<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 최솟값은 $x=a$일 때 2이다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

$-1\le x\le 1$이므로

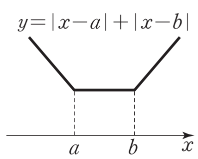
$f(x)=x+1+|x-a|+(-x+1)$

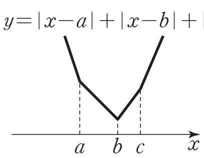
$\quad=|x-a|+2$

이때 $-1<a<1$에서 $x=a$가 $-1\le x\le 1$에 포함되고, $|x-a|\ge 0$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $x=a$일 때 2이다.

BLACKLABEL 특강 참고

두 함수 $y=|x-a|+|x-b|$, $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다. (단, $a<b<c$)





따라서 $y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$ 꼴의 함수는 $a\le x\le b$일 때 최솟값 $b-a$를 갖고, $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ $(a<b<c)$ 꼴의 함수는 $x=b$일 때 최솟값 $c-a$를 갖는다.

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.79~86

01 ⑤	02 ⑤	03 5	04 ①	05 2
06 ②	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 ③
11 26	12 48	13 18	14 24	15 ⑤
16 ④	17 99	18 ①	19 ②	20 ③
21 4	22 6	23 ③	24 16	25 26
26 4	27 2	28 4	29 ①	30 ④
31 ②	32 4	33 4	34 ⑤	35 $2\sqrt{5}$
36 ④	37 $-\frac{3}{2}$	38 ②	39 ④	40 ③
41 5	42 32	43 ③	44 1	
45 $-\frac{11}{7}<m<-\frac{1}{2}$		46 122	47 ②	48 21

01 $0\le k\le 8$인 정수 k에 대하여

$f(k)=f(9\times 0+k)$

$\quad=f(0)+k=0+k=k$

$\therefore f(k)=k$ (단, $0\le k\le 8$)

ㄱ. $f(31)=f(9\times 3+4)=f(3)+4$

$\quad=3+4=7$ (참)

ㄴ. $0\le p\le 4$이므로 $0\le 2p\le 8$이다.

즉, $f(2p)=2p$이므로

$f(181p)=f(9\times 20p+p)=f(20p)+p$

$\quad=f(9\times 2p+2p)+p=f(2p)+2p+p$

$\quad=2p+2p+p$

$\quad=5p$ (참)

ㄷ. $f(81a+9b+c)=f(9(9a+b)+c)$

$\quad=f(9a+b)+c=f(a)+b+c$

$\quad=a+b+c$

$f(81c+9b+a)=f(9(9c+b)+a)$

$\quad=f(9c+b)+a=f(c)+b+a$

$\quad=c+b+a$

$\therefore f(81a+9b+c)=f(81c+9b+a)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 $f(xy)=f(x)+f(y)$ ……㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(1)=0$ (거짓)

ㄴ. $f(8)=f(4\times 2)$

$\quad=f(4)+f(2)$

$\quad=f(2\times 2)+f(2)$

$\quad=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)$ (참)

ㄷ. ㉠의 양변에 $y=\dfrac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(1)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$0=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 (i) $m=0$, 즉 $g(x)=1$인 경우

x가 유리수일 때, $x^2+1=1$에서 $x=0$

x가 무리수일 때, $-x^2+1=1$에서 $x=0$

그런데 $x=0$은 유리수이므로 방정식 $-x^2+1=1$을 만족시키는 무리수 x는 존재하지 않는다.

즉, 두 함수의 그래프의 교점은 $x=0$일 때의 1개뿐이므로

$h(0)=1$

(ii) $m=1$, 즉 $g(x)=x+1$인 경우

x가 유리수일 때,

$x^2+1=x+1$에서 $x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=1$

x가 무리수일 때,

$-x^2+1=x+1$에서 $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

그런데 x는 무리수이어야 하므로 방정식

$-x^2+1=x+1$을 만족시키는 무리수 x는 존재하지 않는다.

즉, 두 함수의 그래프의 교점은 $x=0$ 또는 $x=1$일 때의 2개이므로

$h(1)=2$

(iii) $m=\sqrt{2}$, 즉 $g(x)=\sqrt{2}x+1$인 경우

x가 유리수일 때,

$x^2+1=\sqrt{2}x+1$에서 $x^2-\sqrt{2}x=0$

$x(x-\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

그런데 x는 유리수이어야 하므로 $x=0$

x가 무리수일 때,

$-x^2+1=\sqrt{2}x+1$에서 $x^2+\sqrt{2}x=0$

$x(x+\sqrt{2})=0$ $\quad\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$

그런데 x는 무리수이어야 하므로 $x=-\sqrt{2}$

즉, 두 함수의 그래프의 교점은 $x=0$ 또는 $x=-\sqrt{2}$일 때의 2개이므로

$h(\sqrt{2})=2$

(i), (ii), (iii)에서

$h(0)+h(1)+h(\sqrt{2})=1+2+2=5$ 답 5

04 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^4+19x^2=8x^3+12x$에서

$x^4-8x^3+19x^2-12x=0$

$x(x-1)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

전체집합 U의 두 부분집합 A, B를

$A=\{x|f(x)=g(x)\}$, $B=\{x|f(x)\neq g(x)\}$라 하면

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{2, 5, 6, 7\}$

$A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$

조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 집합 X는

$X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$ (단, $X\neq\varnothing$)*

이어야 하므로 집합 X의 개수는 전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합의 개수에서 $X\cap A=\varnothing$ 또는 $X\cap B=\varnothing$을 만족시키는 집합 X의 개수를 빼면 된다.

전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^7-1=127$

(i) $X\cap A=\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4-1=15$ ($\because X\neq\varnothing$)

(ii) $X\cap B=\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$ ($\because X\neq\varnothing$)

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$127-15-7=105$ 답 ①

• 다른 풀이 •

*에서 집합 X는 두 집합 A, B의 원소를 각각 적어도 하나 이상 원소로 가져야 하므로

$P\subset A$, $Q\subset B$ ($P\neq\varnothing$, $Q\neq\varnothing$)인 두 집합 P, Q에 대하여 $X=P\cup Q$로 나타낼 수 있다.

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 $P\cap Q=\varnothing$

따라서 집합 X의 개수는 두 집합 P, Q의 순서쌍 (P, Q)의 개수와 같으므로 구하는 집합 X의 개수는

$(2^3-1)\times(2^4-1)=7\times15=105$

05 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$f(a)+2f\left(\frac{1}{a}\right)=3a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또한, $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$의 양변에 $x=\frac{1}{a}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{a}\right)+2f(a)=\frac{3}{a}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$2\times$㉡$-$㉠을 하면

$3f(a)=2\times\frac{3}{a}-3a$

$\therefore f(a)=-a+\frac{2}{a}$

$\therefore f(x)=-x+\frac{2}{x}$

$f(-x)=x-\frac{2}{x}$이므로 $f(x)=f(-x)$에서

$-x+\frac{2}{x}=x-\frac{2}{x}$, $2x=\frac{4}{x}$

$x^2=2$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 실수 x는 $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$의 2개이다. 답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식의 양변에 $x=a$, $x=\frac{1}{a}$을 각각 대입하여 관계식을 세운 경우	30%
(나)	(가)에서 세운 관계식을 연립하여 함수 $f(x)$를 구한 경우	40%
(다)	$f(x)=f(-x)$를 만족시키는 실수 x의 개수를 구한 경우	30%

06 조건 (다)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$f\left(\frac{121}{2}\right)=f\left(\frac{121}{2}-2\right)=f\left(\frac{121}{2}-2-2\right)=\cdots$

$\therefore f\left(\frac{121}{2}\right)=f\left(\frac{117}{2}\right)=f\left(\frac{113}{2}\right)=\cdots=f\left(\frac{1}{2}\right)$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$

조건 (가)에서 $-1\le x\le 0$일 때, $f(x)=(x+1)^2$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{1}{4}$

$\therefore f\left(\frac{121}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ 답 ②

07 함수 f가 항등함수이므로 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립해야 한다.

(i) $x<-3$일 때,

$f(x)=-5$이므로 $f(x)=x$를 만족시키는 x의 값은

$x=-5$

(ii) $-3\le x\le 2$일 때,

$f(x)=3x-4$이므로 $f(x)=x$에서

$3x-4=x \qquad \therefore x=2$

(iii) $x>2$일 때,

$f(x)=2x^2-2x-9$이므로 $f(x)=x$에서

$2x^2-2x-9=x$

$2x^2-3x-9=0$, $(2x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>2$)

(i), (ii), (iii)에서 $X=\{-5, 2, 3\}$이므로

$a+b+c=-5+2+3=0$ 답 ③

08 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$

g는 상수함수이므로 $g(x)=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 6$)

$f(x)+g(x)+h(x)=10$에서

$x+k+h(x)=10$

$\therefore h(x)=-x+10-k$

$1\le x\le 6$에서

$4-k\le -x+10-k\le 9-k$

이때 $1\le h(x)\le 6$이어야 하므로

$4-k\ge 1$, $9-k\le 6$

$\therefore k=3$

따라서 $g(x)=3$, $h(x)=-x+7$이므로

$g(2)+h(4)=3+3=6$ 답 ①

• 다른 풀이 •

f는 항등함수이므로 $f(4)=4$ ······㉠

g는 상수함수이므로 $g(2)=g(4)$ ······㉡

이때 $f(4)+g(4)+h(4)=10$이므로

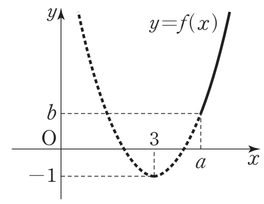
$g(4)+h(4)=10-f(4)=10-4=6$ ($\because$ ㉠)

한편, ㉡에서 $g(4)+h(4)=g(2)+h(4)$이므로

$g(2)+h(4)=g(4)+h(4)=6$

09 $f(x)=x^2-6x+8$

$=(x-3)^2-1$



$x\ge a$에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a\ge 3$

또한, 치역은 $\{y\,|\,y\ge b\}$이어야 하므로

$f(a)=b$

$\therefore a-b=a-f(a)$

$=a-(a^2-6a+8)$

$=-a^2+7a-8$

$=-\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=\frac{7}{2}$일 때 $\frac{17}{4}$이다. 답 ⑤

10 ㄱ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b)라 하면 $f(a)=g(a)=b$이므로

$h(a)=\frac{1}{4}f(a)+\frac{3}{4}g(a)=\frac{1}{4}b+\frac{3}{4}b=b$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점 (a, b)를 지난다. (참)

ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 원점에 대하여 대칭이면

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

$\therefore h(-x)=\frac{1}{4}f(-x)+\frac{3}{4}g(-x)$

$=-\frac{1}{4}f(x)-\frac{3}{4}g(x)$

$=-\left\{\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}g(x)\right\}$

$=-h(x)$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=3x$, $g(x)=-x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 모두 일대일대응이지만

$h(x)=\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}g(x)$

$=\frac{1}{4}\times 3x+\frac{3}{4}\times(-x)=0$

따라서 함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 필수 개념

함수 $f(x)$의 정의역의 임의의 원소 x에 대하여

(1) $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(2) $f(-x)=f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

11 조건 (가)에서 $\{f(x)+x^2-5\}\times\{f(x)+4x\}=0$이므로
$g(x)=-x^2+5$, $h(x)=-4x$라 하면
$\{f(x)-g(x)\}\times\{f(x)-h(x)\}=0$
$\therefore f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$
$g(x)=h(x)$이면 $-x^2+5=-4x$에서
$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ ($\because 5\notin X$)
이때 $g(-1)=h(-1)=4$이므로 $f(-1)=4$
$x=1$일 때,
$f(1)=g(1)=4$ 또는 $f(1)=h(1)=-4$
그런데 함수 f가 일대일함수이므로
$f(1)\neq 4$ $\qquad\therefore f(1)=-4$
$x=0$일 때,
$f(0)=g(0)=5$ 또는 $f(0)=h(0)=0$
그런데 조건 (나)에서 $f(0)\times f(1)\times f(2)<0$이므로
$f(0)\neq 0$ $\qquad\therefore f(0)=5$
$x=2$일 때,
$f(2)=g(2)=1$ 또는 $f(2)=h(2)=-8$
그런데 조건 (나)에서 $\underbrace{f(0)}_{>0}\times\underbrace{f(1)}_{<0}\times f(2)<0$이므로
$f(2)>0$ $\qquad\therefore f(2)=1$
$x=-3$일 때,
$f(-3)=g(-3)=-4$ 또는 $f(-3)=h(-3)=12$
그런데 함수 f가 일대일함수이므로
$f(-3)\neq -4$ $\qquad\therefore f(-3)=12$
$x=-2$일 때,
$f(-2)=g(-2)=1$ 또는 $f(-2)=h(-2)=8$
그런데 함수 f가 일대일함수이므로
$f(-2)\neq 1$ $\qquad\therefore f(-2)=8$
$\therefore f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$
$=12+8+4+5+(-4)+1=26$

답 26

12 $|f(n+1)-f(n)|=4$에서 $f(n+1)-f(n)=\pm 4$
두 함숫값의 차가 4가 되려면 함숫값은 각각 1, 5이어야 하므로
$f(n+1)=5$, $f(n)=1$ 또는 $f(n+1)=1$, $f(n)=5$
이다.
이때 위의 식을 만족시키는 n의 값은 1, 2, 3, 4이고, 함수 f가 일대일대응이므로 각 n에 대하여 n과 $n+1$을 제외한 정의역의 원소는 1과 5를 제외한 나머지 수에 겹치지 않게 대응된다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$4\times2\times3!=48$

답 48

13 조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일함수이다.
조건 (다)에서 $9-f(a)\in\{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$이고, 조건 (나)에서 $f(1)=1$이므로
$9-f(a)\in\{1, f(2), f(3), f(4)\}$
이때 $a=1$이면 $8\in\{1, f(2), f(3), f(4)\}$이어야 하므로 $f(2)=8$ 또는 $f(3)=8$ 또는 $f(4)=8$이다.
(i) $f(2)=8$일 때,
$f(3)+f(4)=9$이어야 하므로
순서쌍 $(f(3), f(4))$는
$(2, 7)$, $(7, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$의
6가지
(ii) $f(3)=8$일 때,
$f(2)+f(4)=9$이어야 하므로
순서쌍 $(f(2), f(4))$는
$(2, 7)$, $(7, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$의
6가지
(iii) $f(4)=8$일 때,
$f(2)+f(3)=9$이어야 하므로
순서쌍 $(f(2), f(3))$은
$(2, 7)$, $(7, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$의
6가지
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$6+6+6=18$

답 18

• 다른 풀이 •
조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일함수이어야 하고, 조건 (나)와 (다)에서 $9-1=8\in\{f(x)\,|\,x\in X\}$이어야 한다. 즉, 함수 f의 치역은 항상 1, 8을 원소로 갖는다.
1, 8을 제외한 함수 f의 치역의 원소는 조건 (다)에 의하여
2, 7 또는 3, 6 또는 4, 5
이때 함수 f의 치역을 $\{1, 2, 7, 8\}$이라 하면 $f(1)=1$을 만족시키는 일대일함수 f의 개수는
$3\times2\times1=6$
함수 f의 치역이 $\{1, 3, 6, 8\}$ 또는 $\{1, 4, 5, 8\}$일 때도 함수 f는 6가지씩 존재하므로 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$3\times6=18$

14 조건 (가)에서 $f(1)\neq f(2)$이고 $f(1)\neq f(3)$이므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.
(i) $f(2)\neq f(3)$인 경우
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 모두 다른 수이므로 집합 X의 원소 1, 2, 3을 집합 Y의 서로 다른 원소에 각각 대응시키는 방법의 수는 $3!=6$
이 각각에 대하여 $f(4)$의 값은 집합 Y의 어느 원소이어도 조건을 만족시키므로 함수 f의 개수는
$6\times3=18$
(ii) $f(2)=f(3)$인 경우
집합 X의 원소 1, 2를 집합 Y의 서로 다른 원소에 각각 대응시킨 후, 3을 $f(2)$에 대응시키면 된다.

즉, $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$

이 각각에 대하여 $f(4)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 값이어야 하므로 함수 f의 개수는

$6\times1=6$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$18+6=24$ 답 24

15 조건 ㈏에서 $f(1)=7$이고, 조건 ㈎에서 함수 f는 일대일대응이므로 두 집합 $X=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 일대일대응인 함수 f의 개수를 구하면 된다.

이때 조건 ㈐에서 $k\geq2$이면 $f(k)\leq k$이므로

$f(2)$의 값은 1, 2 중에서 하나의 값을 가지므로 2가지,

$f(3)$의 값은 1, 2, 3 중에서 $f(2)$의 값을 제외한 나머지 수 중에서 하나의 값을 가지므로 2가지

같은 방법으로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 각각 2가지이고, 7에 대응되는 수는 1부터 6까지의 수 중에서 2부터 6까지의 수가 대응되는 수를 제외한 수이므로 1가지이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times2\times2\times2\times2\times1=2^5=32$ 답 ⑤

16 치역과 공역이 일치하기 위해서는 정의역 X를 3개조로 나누어 함숫값으로 각각 1, 2, 3을 갖도록 배정하면 된다.

(i) 정의역 X를 1개, 1개, 4개의 3개조로 나누어 공역 Y의 원소에 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$\left({}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4\times\frac{1}{2!}\right)\times3!$

$=6\times5\times1\times\frac{1}{2}\times6=90$

(ii) 정의역 X를 1개, 2개, 3개의 3개조로 나누어 공역 Y의 원소에 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$({}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3)\times3!=6\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1\times6=360$

(iii) 정의역 X를 2개, 2개, 2개의 3개조로 나누어 공역 Y의 원소에 하나씩 대응시키면 되므로 함수 f의 개수는

$\left({}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{3!}\right)\times3!$

$=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{6}\times6=90$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$90+360+90=540$ 답 ④

• 다른 풀이 •

치역과 공역이 일치하는 함수 f의 개수는 X에서 Y로의 함수의 개수에서 X에서 Y로의 함수 중 치역의 원소의 개수가 1이거나 2인 함수의 개수를 빼면 된다.

X에서 Y로의 함수의 개수는 $3^6=729$

X에서 Y로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 1 또는 2인 경우는 다음과 같다.

(i) 치역의 원소의 개수가 1인 경우

집합 Y의 원소 중 치역에 속할 원소 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

(ii) 치역의 원소의 개수가 2인 경우

집합 Y의 원소 중 치역에 속할 원소 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

이때 집합 X의 원소를 치역의 원소 2개에 대응시키는 경우의 수는

$2^6-2=62$

따라서 구하는 함수의 개수는 $3\times62=186$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$729-(3+186)=729-189=540$

17 조건 ㈎에서 $(f\circ g)(x)=4\{g(x)\}^2-g(x)-1$이므로

$f(x)=4x^2-x-1$*

함수 $g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b\ (a\neq0)$라 하면 조건 ㈏에서 $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$이므로

$a(4x^2-x-1)+b=4(ax+b)^2-(ax+b)-1$

$4ax^2-ax-a+b=4a^2x^2+8abx+4b^2-ax-b-1$

$4ax^2-ax-a+b=4a^2x^2+(8ab-a)x+4b^2-b-1$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로

$4a=4a^2$, $-a=8ab-a$, $-a+b=4b^2-b-1$

$4a=4a^2$에서 $a=1\ (\because a\neq0)$

$a=1$을 $-a=8ab-a$에 대입하면 $b=0$이므로

$g(x)=x$

$\therefore f(5)+g(5)=(4\times5^2-5-1)+5=99$ 답 99

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$(f\circ g)(x)=4\{g(x)\}^2-g(x)-1$에서 $g(x)=t$로 놓으면

$f(t)=4t^2-t-1$

이때 함수 $t=g(x)$는 일차함수이므로 일대일대응이다. 즉, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $t=g(x)$에서 치역이 실수 전체의 집합이므로 모든 실수 t에 대하여 $f(t)=4t^2-t-1$이 성립한다.

따라서 $f(x)=4x^2-x-1$이다.

18 $g(1)=5$이고 $f\circ g=g\circ f$이므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서

$f(g(1))=g(f(1))$

$\therefore f(5)=g(2)=3$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서

$f(g(2))=g(f(2))$

$\therefore f(3)=g(5)=1$

$(f\circ g)(5)=(g\circ f)(5)$에서

$f(g(5))=g(f(5))$

$\therefore f(1)=g(3)=2$

따라서 $g(3)+g(5)=2+1=3$이므로

$f(g(3)+g(5))=f(3)=1$ 답 ①

19 $f^1(140)=f(140)=\dfrac{140+2}{2}=71$

$f^2(140)=(f\circ f^1)(140)=f(f^1(140))$
$=f(71)=\dfrac{71+1}{2}=36$

$f^3(140)=(f\circ f^2)(140)=f(f^2(140))$
$=f(36)=\dfrac{36+2}{2}=19$

$f^4(140)=(f\circ f^3)(140)=f(f^3(140))$
$=f(19)=\dfrac{19+1}{2}=10$

$f^5(140)=(f\circ f^4)(140)=f(f^4(140))$
$=f(10)=\dfrac{10+2}{2}=6$

$f^6(140)=(f\circ f^5)(140)=f(f^5(140))$
$=f(6)=\dfrac{6+2}{2}=4$

$f^7(140)=(f\circ f^6)(140)=f(f^6(140))$
$=f(4)=\dfrac{4+2}{2}=3$

$f^8(140)=(f\circ f^7)(140)=f(f^7(140))$
$=f(3)=\dfrac{3+1}{2}=2$

$f^9(140)=(f\circ f^8)(140)=f(f^8(140))$
$=f(2)=\dfrac{2+2}{2}=2$

$\vdots$

즉, 8 이상의 자연수 n에 대하여 $f^n(140)=2$이다.
따라서 $f^n(140)=2$를 만족시키는 10 이하의 자연수 n은 8, 9, 10이므로 구하는 합은

$8+9+10=27$ 답 ②

20 ㄱ. x가 유리수이면 $f(x)=\sqrt{2}$이고, $\sqrt{2}$는 무리수이므로
$f(\sqrt{2})=1$
즉, x가 유리수이면
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(\sqrt{2})=1$ (참)

ㄴ. (반례) $x=0$이면 0은 유리수이므로 $f(0)=\sqrt{2}$
$\therefore f(0\times f(0))=f(0\times\sqrt{2})=f(0)=\sqrt{2}$ (거짓)

ㄷ. $f(x_1)\neq f(x_2)$이면 x_1은 유리수, x_2는 무리수 또는 x_1은 무리수, x_2는 유리수이다.
이때 (유리수)+(무리수)=(무리수)이므로 x_1+x_2는 무리수이다.
$\therefore f(x_1+x_2)=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄴ에서

(i) x가 무리수일 때,
$xf(x)=x\times1=x$이므로 $xf(x)$는 무리수이다.
즉, $f(xf(x))=1$

(ii) x가 유리수일 때,
$xf(x)=x\times\sqrt{2}=\sqrt{2}x$
$x=0$이면 $xf(x)=0$이므로
$f(xf(x))=f(0)=\sqrt{2}$
$x\neq0$이면 $xf(x)=\sqrt{2}x$에서 $\sqrt{2}x$는 무리수이므로
$f(xf(x))=f(\sqrt{2}x)=1$

(i), (ii)에서 $x=0$일 때 $f(xf(x))=f(0)=\sqrt{2}$이므로
$f(xf(x))\neq1$인 실수 x가 존재한다.
따라서 ㄴ은 거짓이다.

21 함수 $g\circ f$가 항등함수이므로 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$

$(g\circ f)(3)=3$, 즉 $g(f(3))=3$에서

$g(f(3))=g(-a)=a^2-a+b$

$\therefore a^2-a+b=3$ ······㉠

$(g\circ f)(5)=5$, 즉 $g(f(5))=5$에서

$g(f(5))=g(a)=a^2+a+b$

$\therefore a^2+a+b=5$ ······㉡

㉡−㉠을 하면

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$ 답 4

22 $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(-4+a)$
$=(a-4)^2$ ($\because -4+a<a$)

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=a-g(1)$

$(g\circ f)(4)+(f\circ g)(1)=45$이므로

$(a-4)^2+a-g(1)=45$ ······㉠

(i) $a\leq1$일 때,
$g(1)=15$이므로 ㉠에서
$(a-4)^2+a-15=45$
$a^2-7a-44=0$, $(a+4)(a-11)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=11$
이때 $a\leq1$이므로 $a=-4$

(ii) $a>1$일 때,
$g(1)=1$이므로 ㉠에서
$(a-4)^2+a-1=45$
$a^2-7a-30=0$, $(a+3)(a-10)=0$
$\therefore a=-3$ 또는 $a=10$
이때 $a>1$이므로 $a=10$

(i), (ii)에서 $a=-4$ 또는 $a=10$이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$-4+10=6$ 답 6

23 ① $a\in A$라 하면 $f(a)=a$이므로

$f(f(a))=f(a)=a \qquad \therefore a\in B$

$\therefore A\subset B$

② $a\in A$라 하면 $f(a)=a$이므로

$f(f(a))=f(a) \qquad \therefore a\in C$

$\therefore A\subset C$

③ $b\in B$라 하면 $f(f(b))=b$

이때 $f(b)\neq b$이면 $f(f(b))\neq f(b)$

즉, b는 집합 C의 원소가 아닐 수도 있다.

$\therefore B\not\subset C$

④ $b\in B\cap C$라 하면

$f(f(b))=b$, $f(f(b))=f(b)$이므로 $f(b)=b$

$\therefore b\in A$

$\therefore (B\cap C)\subset A$

⑤ ①에서 $A\subset B$이므로 $A\cup B=B$

이때 $C\subset B$이면 $B\cap C=C$이고, ④에서

$(B\cap C)\subset A$이므로 $C\subset A$

그런데 ②에서 $A\subset C$이므로 $A=C$

즉, $C\subset(A\cup B)$이면 $A=C$이다.

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 관계로 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

24 $(f\circ f)(n)=f(f(n))=3$이므로 $f(n)$은 양의 약수의 개수가 3인 자연수이다. 이때 약수의 개수가 3인 자연수는 소수의 제곱수이므로 $f(n)$의 값이 될 수 있는 것은 소수의 제곱수이다.

$f(n)=p^2$ (p는 소수)이라 하자.

(i) $p=2$, 즉 $f(n)=4$일 때,

n의 양의 약수의 개수가 4이므로 서로 다른 두 소수 q, r에 대하여 $n=qr$ 또는 $n=q^3$ 꼴이어야 한다.

① $n=qr$ 꼴인 경우

조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46의 13개이다.

② $n=q^3$ 꼴인 경우

조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 8, 27의 2개이다.

(ii) $p=3$, 즉 $f(n)=9$일 때,

n의 양의 약수의 개수가 9이므로 서로 다른 두 소수 q, r에 대하여 $n=q^2r^2$ 또는 $n=q^8$ 꼴이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 36의 1개이다.

(iii) $p\geq 5$, 즉 $f(n)\geq 25$일 때,

조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n의 개수는

$(13+2)+1=16$ 답 16

BLACKLABEL 특강 필수 개념

자연수의 양의 약수의 개수

(1) 자연수 $N=a^pb^qc^r$(a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r은 양의 정수)의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$

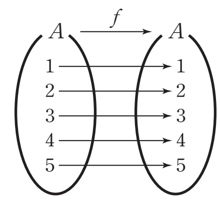
(2) 자연수 N의 약수의 개수가 홀수이면 N은 제곱수이다.

(3) 자연수 N의 약수의 개수가 3이면 N은 소수의 제곱수이다.

25 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=x$를 만족시키는 함수 f에 대하여 $f\circ f$는 항등함수이고 f는 일대일대응이다.

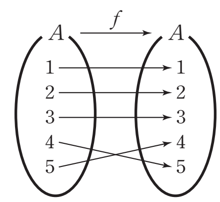
이때 정의역의 한 원소 a에 대하여 $(f\circ f)(a)=a$를 만족시키려면 $f(a)=a$ 또는 $f(a)=b$, $f(b)=a$ $(a\neq b)$이어야 한다.

(i) $f(x)=x$를 만족시키는 x가 5개인 경우



정의역의 모든 원소에 대하여 $f(x)=x$ 꼴인 함수 f는 위의 그림과 같으므로 1개이다.

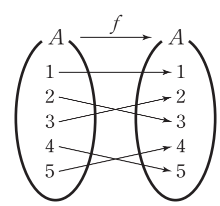
(ii) $f(x)=x$를 만족시키는 x가 3개인 경우



$f(a)=a$, $f(b)=b$, $f(c)=c$, $f(d)=e$, $f(e)=d$ 꼴인 함수 f의 개수는 위의 그림과 같이 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 $f(d)=e$, $f(e)=d$를 만족시키는 d와 e를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(iii) $f(x)=x$를 만족시키는 x가 1개인 경우



$f(a)=a$, $f(b)=c$, $f(c)=b$, $f(d)=e$, $f(e)=d$ 꼴인 함수 f의 개수는 위의 그림과 같이 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 $f(b)=c$, $f(c)=b$를 만족시키는 b와 c를 선택하고, $f(d)=e$, $f(e)=d$를 만족시키는 d와 e를 선택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2\times{}_3C_2\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times3\times\dfrac{1}{2}=15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

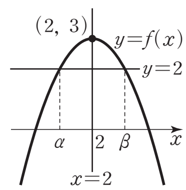
$1+10+15=26$ 답 26

26 조건 ㈐에서 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)$가 $f(2-x)=f(2+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 3이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

즉, $f(2)=3$이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=3$에서

$f(f(x))=3 \qquad \therefore f(x)=2$

이때 조건 ㈎에서 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=2$는 서로 다른 두 실근을 갖고 두 실근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=2$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2 \qquad \therefore \alpha+\beta=4$ 답 4

• 다른 풀이 •

이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수를 $a\ (a<0)$라 하자.

조건 ㈏에서 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 3이고, 조건 ㈐에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 3)$이다.

$\therefore f(x)=a(x-2)^2+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(f(x))=3$에서 $a\{f(x)-2\}^2+3=3$

$a\{f(x)-2\}^2=0,\ f(x)-2=0$

$a(x-2)^2+3-2=0\ (\because ㉠)$

$\therefore ax^2-4ax+4a+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2a)^2-a(4a+1)=-a>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $(f\circ f)(x)=3$, 즉 $ax^2-4ax+4a+1=0$의 모든 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-4a}{a}=4$

27 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 그래프의 개형으로부터

$\alpha<-2,\ \beta>0$

이때 방정식 $g(f(x))=0$의 실근이 존재하기 위해서는 $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$이어야 한다.

(i) $f(x)=\alpha\ (\alpha<-2)$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\alpha\ (\alpha<-2)$와 만나지 않으므로 실근 x가 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)=\beta\ (\beta>0)$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=\beta\ (\beta>0)$와 서로 다른 두 점에서 만나므로 실근의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 방정식 $g(f(x))=0$의 실근의 개수는 2이다.

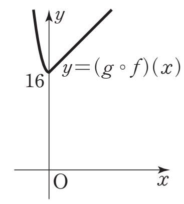
답 2

28 $(g\circ f)(x)=f(x)+10$

$=\begin{cases} x^2+2ax+16 & (x<0) \\ x+16 & (x\ge 0)\end{cases}$

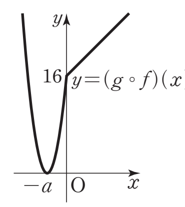
$=\begin{cases} (x+a)^2+16-a^2 & (x<0) \\ x+16 & (x\ge 0)\end{cases}$

이때 $a\le 0$이면 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge 16\}$이다.



즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$a>0$이면 $x<0$에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-a,\ 16-a^2)$이고 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 0\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 한다.



즉, $16-a^2=0$이므로 $a=\pm 4$

그런데 $a>0$이므로 $a=4$ 답 4

• 다른 풀이 •

함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 0\}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))\ge 0$이어야 한다.

$f(x)=t$로 놓으면

$g(t)\ge 0$에서 $t+10\ge 0 \qquad \therefore t\ge -10$

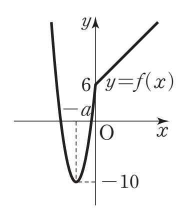
$\therefore f(x)\ge -10$

이때

$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases} (x+a)^2+6-a^2 & (x<0) \\ x+6 & (x\ge 0)\end{cases}$

이고, 함수 $f(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge -10\}$이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-a)=-10$이어야 하므로

$6-a^2=-10$

$a^2=16 \qquad \therefore a=\pm 4$

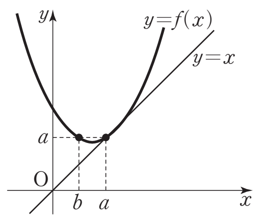
그런데 함수 $y=f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같으려면 $-a<0$, 즉 $a>0$이어야 하므로 $a=4$

29 $f(x)=x^2+px+q,\ \ A=\{x\,|\,(f\circ f)(x)=f(x)\}$이고, 조건 ㈎에서 $n(A)=3$이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$, 즉 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(x)=t$로 놓으면 이차방정식 $f(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 1 또는 2이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

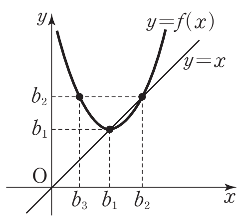
(i) 이차방정식 $f(t)=t$의 실근의 개수가 0일 때,
이차방정식 $f(t)=t$의 실근이 존재하지 않으므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 존재하지 않는다.
따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $f(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1일 때,
이차방정식 $f(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 오직 한 점에서만 만나야 한다.



이때 교점의 좌표를 (a, a)라 하면 이차방정식 $f(x)=a$는 a와 a가 아닌 실근 b를 갖는다.
따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 이차방정식 $f(t)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때,
이차방정식 $f(t)=t$의 서로 다른 두 실근을 b_1, b_2 $(b_1<b_2)$라 하자.
방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 이차방정식



$f(x)=b_1$ 또는 이차방정식 $f(x)=b_2$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수의 합이 3이어야 하므로 위의 그림과 같이 방정식 $f(x)=b_1$은 하나의 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=b_2$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 방정식 $f(x)=b_2$에서 b_2가 아닌 실근을 b_3이라 하면 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근은 b_1, b_2, b_3의 3개이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b_1$에 대하여 대칭이고, $f(b_2)=f(b_3)=b_2$이므로

$b_2+b_3=2b_1$ ⋯⋯㉠

이때 조건 ㈏에서 집합 A의 모든 원소의 합이 6이므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 6이다.

$b_1+b_2+b_3=3b_1=6$ ($\because$ ㉠)

$\therefore b_1=2$

따라서 이차함수 $f(x)=x^2+px+q$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, 점 $(2, 2)$를 지나므로

$f(x)=(x-2)^2+2$

$\therefore f(5)=(5-2)^2+2=11$

답 ①

30 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)$, 즉 $f(f(f(x)))=f(f(x))$에서 $f(f(x))=t$로 놓으면

$f(t)=t$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2+2x & (x<0) \\ -\frac{1}{4}x^2+2x & (x\ge 0) \end{cases}$$ 에서

(i) $t<0$일 때, $f(t)=\frac{1}{4}t^2+2t$이므로

$f(t)=t$에서

$\frac{1}{4}t^2+2t=t$, $t^2+4t=0$

$t(t+4)=0$ $\quad\therefore t=-4$ ($\because t<0$)

(ii) $t\ge 0$일 때, $f(t)=-\frac{1}{4}t^2+2t$이므로

$f(t)=t$에서

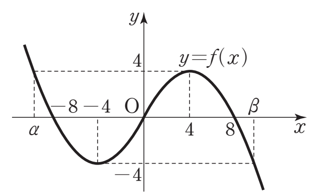
$-\frac{1}{4}t^2+2t=t$, $t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$ $\quad\therefore t=0$ 또는 $t=4$

(i), (ii)에서 $f(t)=t$를 만족시키는 t의 값은 -4, 0, 4이다.
즉, 방정식 $f(f(f(x)))=f(f(x))$의 서로 다른 실근의 개수는 방정식

$f(f(x))=-4$ 또는 $f(f(x))=0$ 또는 $f(f(x))=4$ ⋯⋯㉠

를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수와 같다.



이때 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x+4)^2-4 & (x<0) \\ -\frac{1}{4}(x-4)^2+4 & (x\ge 0) \end{cases}$ 이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같고 ㉠에서 $f(x)=u$로 놓으면 방정식 $f(u)=-4$의 실근은

$u=-4$ 또는 $u=\beta$

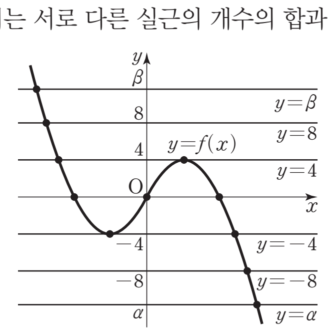
방정식 $f(u)=0$의 실근은

$u=-8$ 또는 $u=0$ 또는 $u=8$

방정식 $f(u)=4$의 실근은

$u=\alpha$ 또는 $u=4$

즉, ㉠을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=-8$ 또는 $f(x)=-4$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=4$ 또는 $f(x)=8$ 또는 $f(x)=\beta$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.



위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 7개의 직선

$y=\alpha$, $y=-8$, $y=-4$, $y=0$, $y=4$, $y=8$, $y=\beta$와 만나는 교점의 개수는 11이므로 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 11이다. 답 ④

31 (i) $x<3$일 때,

$(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)$

$=g(f(x))-f(g(x))$

$=g(3)-f(x^2-3)$

$=\begin{cases} 6-3 & (x^2-3<3) \\ 6-\{-2(x^2-3)+3\} & (x^2-3\geq 3)\end{cases}$

$=\begin{cases} 3 & (-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}) \\ 2x^2-3 & (x\leq -\sqrt{6} \text{ 또는 } \sqrt{6}\leq x<3)\end{cases}$

이때 $(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)=15$에서

$-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$이면 $3=15$이므로 모순이다.

$x\leq -\sqrt{6}$ 또는 $\sqrt{6}\leq x<3$이면

$2x^2-3=15$에서

$2x^2-18=0$, $2(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ ($\because x\leq -\sqrt{6}$ 또는 $\sqrt{6}\leq x<3$)

(ii) $x\geq 3$일 때,

$(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)$

$=g(f(x))-f(g(x))$

$=g(-2x+3)-f(x^2-3)$

$=(-2x+3)^2-3-\{-2(x^2-3)+3\}$

($\because$ $x\geq 3$에서 $x^2-3\geq 6$)

$=6x^2-12x-3$

$(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)=15$에서

$6x^2-12x-3=15$, $6x^2-12x-18=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x\geq 3$)

(i), (ii)에서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값은 -3, 3이므로 그 곱은

$(-3)\times 3=-9$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)=15$에서

$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)+15$

이므로 방정식 $(g\circ f)(x)-(f\circ g)(x)=15$의 실근은 두 함수 $y=(g\circ f)(x)$와 $y=(f\circ g)(x)+15$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=\begin{cases} 3 & (x<3) \\ -2x+3 & (x\geq 3)\end{cases}$, $g(x)=x^2-3$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=\{f(x)\}^2-3$

$=\begin{cases} 3^2-3 & (x<3) \\ (-2x+3)^2-3 & (x\geq 3)\end{cases}$

$=\begin{cases} 6 & (x<3) \\ 4x^2-12x+6 & (x\geq 3)\end{cases}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=\begin{cases} 3 & (g(x)<3) \\ -2g(x)+3 & (g(x)\geq 3)\end{cases}$

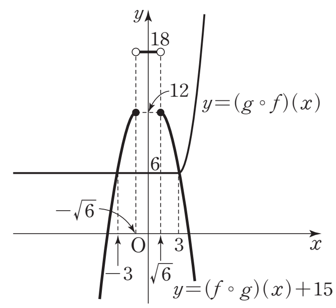
$=\begin{cases} 3 & (x^2-3<3) \\ -2(x^2-3)+3 & (x^2-3\geq 3)\end{cases}$

$=\begin{cases} 3 & (-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}) \\ -2x^2+9 & (x\leq -\sqrt{6} \text{ 또는 } x\geq \sqrt{6})\end{cases}$

$\therefore (f\circ g)(x)+15$

$=\begin{cases} 18 & (-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}) \\ -2x^2+24 & (x\leq -\sqrt{6} \text{ 또는 } x\geq \sqrt{6})\end{cases}$

두 함수 $y=(g\circ f)(x)$와 $y=(f\circ g)(x)+15$의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$-2x^2+24=6$

$2x^2=18$, $x^2=9$

$\therefore x=\pm 3$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$-3\times 3=-9$

32 해결단계

❶ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=(g\circ f)(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $g(x)$를 구한다.
❷ 단계	함수 $(g\circ g)(x)$를 구하고 함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프를 그린다.
❸ 단계	함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프의 대칭성을 이용하여 방정식 $(g\circ g)(x)=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합을 구한다.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=(g\circ f)(x)$의

정의역이 $\{x\mid 0\leq x\leq 3\}$, 공역이 $\{y\mid 0\leq y\leq 2\}$

이므로 함수 $y=g(x)$의

정의역은 $\{x\mid 0\leq x\leq 2\}$, 공역은 $\{y\mid 0\leq y\leq 2\}$

이다.

이때 주어진 그래프에서

$f(x)=\begin{cases} x & (0\leq x<1) \\ 1 & (1\leq x\leq 2) \\ x-1 & (2<x\leq 3)\end{cases}$,

$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 2x & (0\leq x<1) \\ 2 & (1\leq x\leq 2) \\ -2x+6 & (2<x\leq 3)\end{cases}$ ……㉠

함수 f와 함수 g를 합성하면

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=\begin{cases} g(x) & (0\le x<1) \\ g(1) & (1\le x\le 2) \\ g(x-1) & (2<x\le 3)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$0\le x<1$일 때, $g(x)=2x$

$1\le x\le 2$일 때, $g(1)=2$

$2<x\le 3$일 때, $g(x-1)=-2x+6$

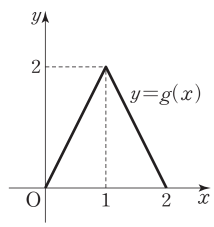
이때 $g(x-1)=-2x+6$ $(2<x\le 3)$에서

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이므로

$g(t)=-2t+4$ $(1<t\le 2)$

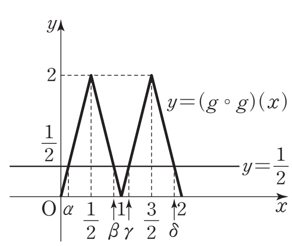
$$\therefore\ g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $g(x)$를 이용하여 함수 $g(g(x))$를 구하면



$$g(g(x))$$
$$=\begin{cases} 2g(x) & (0\le g(x)<1) \\ -2g(x)+4 & (1\le g(x)\le 2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} 2\times 2x & (0\le 2x<1) \\ -2\times 2x+4 & (1\le 2x\le 2) \\ -2(-2x+4)+4 & (1\le -2x+4\le 2) \\ 2(-2x+4) & (0\le -2x+4<1)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} 4x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right) \\ -4x+4 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right) \\ 4x-4 & \left(1\le x\le \frac{3}{2}\right) \\ -4x+8 & \left(\frac{3}{2}<x\le 2\right)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $(g\circ g)(x)=\frac{1}{2}$의 실근은 함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같으므로 네 교점의 x좌표를 각각 α, β, γ, δ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$라 하면



$0\le x\le 1$에서 함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

$1\le x\le 2$에서 함수 $y=(g\circ g)(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \gamma+\delta=3$

따라서 방정식 $(g\circ g)(x)=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1+3=4$ **답** 4

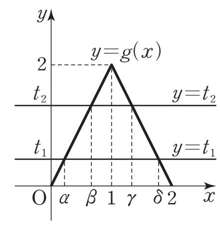
BLACKLABEL 특강 참고

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$(g\circ g)(x)=\frac{1}{2}$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $g(t)=\frac{1}{2}$

함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 2이므로 교점의 x좌표를 각각 t_1, t_2 $(t_1<t_2)$라 하자.

$g(x)=t_1$, $g(x)=t_2$에서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t_1$의 교점의 x좌표를 각각 α, δ $(\alpha<\delta)$라 하면



$\frac{\alpha+\delta}{2}=1$ $\quad\therefore\ \alpha+\delta=2$

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t_2$의 교점의 x좌표를 각각 β, γ $(\beta<\gamma)$라 하면

$\frac{\beta+\gamma}{2}=1$ $\quad\therefore\ \beta+\gamma=2$

방정식 $(g\circ g)(x)=\frac{1}{2}$의 실근은 α, β, γ, δ이므로 모든 실근의 합은

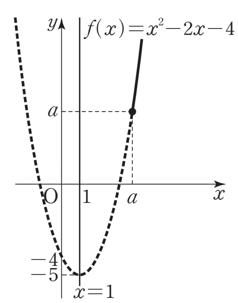
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2+2=4$

33 집합 $A=\{x\,|\,x\ge a\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

즉, $f(x)=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$의 그래프에서 대칭축은 $x=1$이고, $x\ge a$에서 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가해야 하므로

$a\ge 1$

또한, (정의역)=(공역)=(치역)이어야 하므로 $x\ge a$에서 오른쪽 그림과 같이 $f(a)=a$이어야 한다.



즉, $a^2-2a-4=a$에서

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore\ a=4$ $(\because\ a\ge 1)$ **답** 4

34 집합 $S=\{1, 2, 3, 4\}$의 두 부분집합 X, Y에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 역함수가 존재하고 $X\cup Y=S$, $X\cap Y=\varnothing$이려면 $Y=S-X$이고 $n(X)=n(Y)=2$이어야 한다.

공집합이 아닌

즉, 두 부분집합 X, Y가 될 수 있는 경우는 다음과 같다.

$X=\{1, 2\}$일 때 $Y=\{3, 4\}$,

$X=\{1, 3\}$일 때 $Y=\{2, 4\}$,

$X=\{1, 4\}$일 때 $Y=\{2, 3\}$,

$X=\{2, 3\}$일 때 $Y=\{1, 4\}$,

$X=\{2, 4\}$일 때 $Y=\{1, 3\}$,

$X=\{3, 4\}$일 때 $Y=\{1, 2\}$

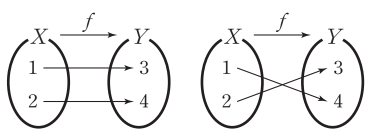
한편, $X=\{1, 2\}$, $Y=\{3, 4\}$에 대하여 함수
$f : X \longrightarrow Y$는 $f(1)=3$, $f(2)=4$인 경우와
$f(1)=4$, $f(2)=3$인 경우로 2가지가 존재한다.
따라서 두 부분집합 X, Y가 될 수 있는 6가지 경우에 대하여 함수 f는 2가지씩 존재하므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$6\times2=12$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

함수 f의 역함수가 존재하고, $X\cup Y=S$, $X\cap Y=\varnothing$이려면 $Y=S-X$이고 $n(X)=n(Y)=2$이어야 한다.
$S=\{1, 2, 3, 4\}$에서 두 집합 X, Y의 원소를 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\times2=6$$

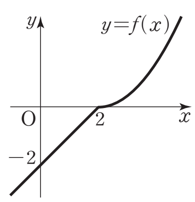
$X=\{1, 2\}$, $Y=\{3, 4\}$에 대하여 함수 f는 다음과 같이 2가지 경우가 존재한다.



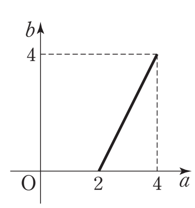
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$6\times2=12$

35

함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, 함수



$y=x^2-ax+b$
$=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$
의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 2보다 작거나 같아야 하므로
$\frac{a}{2}\le2$에서 $a\le4$
또한, 치역이 실수 전체의 집합 R이어야 하므로
$f(2)=4-2a+b=0$
$\therefore b=2a-4$
이때 a, b가 음이 아닌 실수이므로
$b=2a-4\ge0$에서
$a\ge2$
$\therefore b=2a-4\ (2\le a\le4)$
따라서 조건을 만족시키는 점 (a, b)가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같은 선분이므로 구하는 도형의 길이는



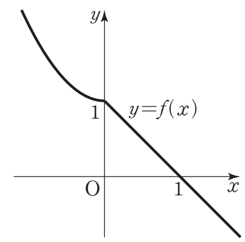
$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $f(x)$가 일대일대응임을 이용하여 실수 a의 값의 범위를 구한 경우	40%
(나)	치역이 R임을 이용하여 b를 a에 대하여 나타낸 경우	40%
(다)	점 (a, b)가 나타내는 도형의 길이를 구한 경우	20%

36

ㄱ. $f(1)=0$, $f(0)=1$이므로
$f^2(1)=f(f(1))=f(0)=1$
$f^3(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$
⋮
$\therefore f^{2n-1}(1)=0$, $f^{2n}(1)=1$
또한, $f(-1)=2$, $f(2)=-1$이므로
$f^2(-1)=f(f(-1))=f(2)=-1$
$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(-1)=2$
⋮
$\therefore f^{2n-1}(-1)=2$, $f^{2n}(-1)=-1$
$\therefore f^{2n}(1)+f^{2n+1}(-1)=1+2=3$ (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$a>0$일 때 $f(a)<1$이므로
$f(f(a))>0$,
$b<0$일 때 $f(b)>1$이므로
$f(f(b))<0$
$\therefore f^2(a)>f^2(b)$ (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x<0) \\ -x+1 & (x\ge0) \end{cases}$에서

(ⅰ) $x<0$일 때,
$f(x)=x^2+1>1$이므로
$f^2(x)=f(f(x))=-(x^2+1)+1=-x^2$

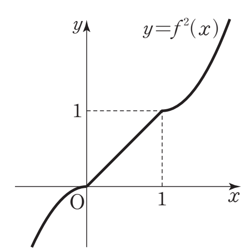
(ⅱ) $0\le x\le1$일 때,
$f(x)=-x+1\ge0$이므로
$f^2(x)=f(f(x))=-(-x+1)+1=x$

(ⅲ) $x>1$일 때,
$f(x)=-x+1<0$이므로
$f^2(x)=f(f(x))=(-x+1)^2+1=(x-1)^2+1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$f^2(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x & (0\le x\le1) \\ (x-1)^2+1 & (x>1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f^2(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 직선 $y=k$ (k는 상수)와 함수 $y=f^2(x)$의 그래프는 항상 한 점에서 만나므로 합성함수 $f^2(x)$의 역함수가 존재한다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

ㄴ. 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소하는 함수이므로 함수 $f^2(x)$는 x의 값이 증가할 때 $f^2(x)$의 값도 증가하는 함수이다.
따라서 $b<0<a$인 두 실수 a, b에 대하여
$f^2(a)>f^2(b)$이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 즉, 역함수의 성질에 의하여
$(f\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ f^{-1}$
가 존재하며 함수 f^2의 역함수이다.
따라서 $f^2(x)$의 역함수가 존재한다. (참)

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값이 감소하는 함수이면 함수 $(f\circ f)(x)$는 x의 값이 증가할 때 $(f\circ f)(x)$의 값도 증가하는 함수이다.
[증명] 함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로
$x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$
또한, $f(x_1)>f(x_2)$이면 $(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)$
따라서 $x_1<x_2$이면 $(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)$이므로 함수 $(f\circ f)(x)$는 x의 값이 증가할 때 $(f\circ f)(x)$의 값도 증가하는 함수이다.

37 $2g(x)-(4x+7)=h(x)$로 놓으면
$f(h(x))=(f\circ h)(x)=x$
이므로 함수 $h(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.
$\therefore h(x)=g(x)$
즉, $2g(x)-(4x+7)=g(x)$이므로
$g(x)=4x+7$ *
함수 $g(x)$의 역함수가 $f(x)$이므로 $y=4x+7$에서
$4x=y-7,\ x=\dfrac{y-7}{4}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{x-7}{4}$
$\therefore f(x)=\dfrac{x-7}{4}$
$$\begin{aligned}\therefore ((g\circ f^{-1})^{-1}\circ g)(1)&=(f\circ g^{-1}\circ g)(1)\\&=(f\circ I)(1)\\&=f(1)\\&=\frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$
답 $-\dfrac{3}{2}$

• 다른 풀이 •
$((g\circ f^{-1})^{-1}\circ g)(1)=(f\circ g^{-1}\circ g)(1)=f(1)=k$라 하면
$f^{-1}(k)=g(k)=1$이므로 *에서
$4k+7=1,\ 4k=-6$
$\therefore k=-\dfrac{3}{2}$
$\therefore ((g\circ f^{-1})^{-1}\circ g)(1)=-\dfrac{3}{2}$

38 $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이므로
$f(t)=\dfrac{t-1}{t}$
$\therefore f(x)=\dfrac{x-1}{x}$
$y=\dfrac{x-1}{x}$에서 $xy=x-1$
$x(1-y)=1,\ x=\dfrac{1}{1-y}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\dfrac{1}{1-x}\qquad \therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x}$
위의 식에 x 대신에 $p+1$을 대입하면
$f^{-1}(p+1)=\dfrac{1}{1-(p+1)}=-\dfrac{1}{p}$
답 ②

• 다른 풀이 1 •
$f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$의 양변에 함수 f^{-1}를 합성하면
$f^{-1}(f(x+1))=f^{-1}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
$\therefore f^{-1}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x+1\qquad \cdots\cdots ㉠$
이때 $\dfrac{x}{x+1}=p+1$이라 하면
$x=(x+1)(p+1)$
$x=xp+x+p+1,\ xp+p+1=0$
$xp=-p-1\qquad \therefore x=-\dfrac{p+1}{p}\ (\because p\neq 0)$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$f^{-1}(p+1)=-\dfrac{p+1}{p}+1=-\dfrac{1}{p}$

• 다른 풀이 2 •
$f^{-1}(p+1)=k$라 하고 양변에 함수 f를 합성하면
$f(f^{-1}(p+1))=f(k)$
$\therefore p+1=f(k)$
한편, $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$이므로 이 식에 x 대신에 $k-1$을 대입하면
$f(k)=\dfrac{k-1}{k}=1-\dfrac{1}{k}$
즉, $p+1=1-\dfrac{1}{k}$이므로 $p=-\dfrac{1}{k}$
$\therefore k=-\dfrac{1}{p}$
$\therefore f^{-1}(p+1)=-\dfrac{1}{p}$

39 $f(a)+f(b)=f(ab)\qquad \cdots\cdots ㉠$
$f(4)=\alpha,\ f(8)=\beta$이므로 $a=4,\ b=8$을 ㉠에 대입하면
$f(4)+f(8)=f(4\times 8)$에서 $\alpha+\beta=f(32)$
함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(\alpha+\beta)=32$
또한, $a=4,\ b=2$를 ㉠에 대입하면
$f(4)+f(2)=f(8)$에서 $\alpha+f(2)=\beta$
$\therefore \beta-\alpha=f(2)$
함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(\beta-\alpha)=2$
$\therefore g(\alpha+\beta)-g(\beta-\alpha)=32-2=30$
답 ④

40 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$(f \circ g \circ h)(x)=h(x)$이므로 $(f \circ g)(x)=x$이어야 한다. 즉, $g^{-1}(x)=f(x)$

이때 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$라 하면 방정식

$f(x)=h(x)$의 근이 1, 3이고 $h(x)=x^2+kx$이므로

$h(x)-f(x)=x^2+kx-(ax+b)=(x-1)(x-3)$

$x^2+(k-a)x-b=x^2-4x+3$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$k-a=-4$, $-b=3$

$\therefore a=k+4$, $b=-3$

한편, 조건 (다)에서 함수 $y=g^{-1}(x)+2x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1이므로

$g^{-1}(1)+2=0$, $g^{-1}(1)=-2$

즉, $f(1)=-2$이므로

$a-3=-2 \qquad \therefore a=1$

위의 값을 $a=k+4$에 대입하면

$k=a-4=1-4=-3$

$\therefore f(x)=x-3$, $h(x)=x^2-3x$

이때 $g(2)=c$라 하면 $f(c)=2$이므로

$c-3=2 \qquad \therefore c=5$

$\therefore f(1)+g(2)+h(4)=(1-3)+5+(4^2-3\times 4)$

$=-2+5+4=7$

답 ③

• 다른 풀이 •

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 일차함수이므로

$f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$, $g(x)=cx+d\ (c\neq 0)$

라 하자.

조건 (가)에서 $(f \circ g \circ h)(x)=h(x)$이므로

$f(ch(x)+d)=h(x)$

$ach(x)+ad+b=h(x)$

$\therefore ac=1$, $ad+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

조건 (나)에서 방정식 $f(x)=h(x)$, 즉 $h(x)-f(x)=0$의 두 근이 1, 3이고 $h(x)$가 x^2의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)-f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$x^2+kx-ax-b=x^2-4x+3$

$(k-a)x-b=-4x+3$

$\therefore k=a-4$, $b=-3$

$b=-3$을 ㉠에 대입하면 $ad=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

한편, $g(x)=cx+d$에서 $y=cx+d$라 하면

$cx=y-d$, $x=\dfrac{1}{c}y-\dfrac{d}{c}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{1}{c}x-\dfrac{d}{c}$

$\therefore g^{-1}(x)=\dfrac{1}{c}x-\dfrac{d}{c}$

이때 ㉠, ㉡에서 $\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{ac}=\dfrac{3}{1}=3$이므로

$g^{-1}(x)=\dfrac{1}{c}x-3$

조건 (다)에서 함수 $y=g^{-1}(x)+2x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1이므로 $g^{-1}(1)+2=0$에서

$\dfrac{1}{c}-3+2=0$, $\dfrac{1}{c}=1 \qquad \therefore c=1$

$\therefore a=1$, $d=3$, $k=1-4=-3$

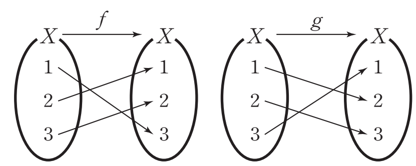
따라서 $f(x)=x-3$, $g(x)=x+3$, $h(x)=x^2-3x$이므로

$f(1)+g(2)+h(4)=-2+5+4=7$

41 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

이때 정의역이 집합 $X=\{1, 2, 3\}$이고 $f^3=I$이므로 $f(1)=3$이면 $f(3)=2$, $f(2)=1$이어야 한다.*

따라서 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



한편, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$f \circ f \circ f=I$에서 $g^3=(f^{-1})^3=(f^3)^{-1}=I^{-1}=I$

$(f^{-1})^3=f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ f\circ f)^{-1}=(f^3)^{-1}$

따라서 $g^{10}=g$, $g^{11}=g^2$이므로

$g^{10}(2)+g^{11}(3)=g(2)+g^2(3)$

$=3+g(1)$

$=3+2=5$

답 5

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고, $f \circ f \circ f=I$이므로 $(f \circ f)(x)=g(x)$이다.

이때 $f(1)=3$이면 $(f \circ f)(1)=g(1)$이므로 $f(3)=g(1)$

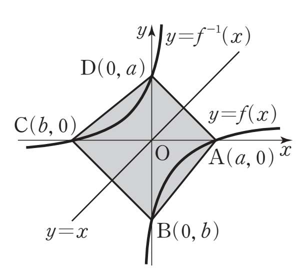
(i) $f(3)=g(1)=1$일 때,
$f(3)=1$, $f(1)=1$이 되어 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.

(ii) $f(3)=g(1)=2$일 때,
$f(3)=2$, $f(2)=1$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응을 만족한다.

(iii) $f(3)=g(1)=3$일 때,
$f(3)=3$, $f(3)=1$이 되어 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 $f(3)=2$, $f(2)=1$이다.

42 점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(a>0)$, 점 B의 좌표를 $(0, b)$ $(b<0)$라 하자.



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(b, 0)$, 점 D의 좌표는 $(0, a)$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{34}$에서 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{34}$

$\therefore a^2+b^2=34 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{BC}=5\sqrt{2}$에서 $\sqrt{b^2+b^2}=5\sqrt{2}$

$2b^2=50$, $b^2=25$

$\therefore b=-5$ ($\because b<0$) ……㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=9$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $\overline{AC}=\overline{BD}=5+3=8$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

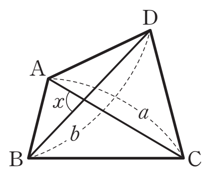
$\frac{1}{2}\times8\times8=32$ **답** 32

BLACKLABEL 특강 필수 개념

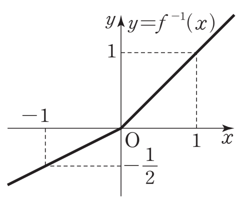
사각형의 넓이

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이가 각각 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 x일 때, 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab\sin x$



43 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서



$$f(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$$

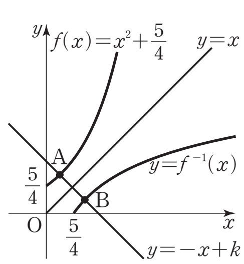
ㄱ. $f^{-1}(5)=5$이므로
$f^{-1}(f^{-1}(5))=f^{-1}(5)$ (참)

ㄴ. $f^{-1}(-2)=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$가 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
그런데 $x\ge0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 일치하므로 교점은 무수히 많다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

44 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고, 직선 $y=-x+k$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나서 생기는 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, $A(a, b)$라 하면 $B(b, a)$이다.

이때 점 $A(a, b)$는 함수 $f(x)=x^2+\frac{5}{4}$의 그래프 위에 있으므로

$b=a^2+\frac{5}{4}$ ……㉠

두 점 A, B 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}\\&=\sqrt{2(b-a)^2}\\&=\sqrt{2\left(a^2+\frac{5}{4}-a\right)^2}\ (\because ㉠)\\&=\sqrt{2\left(a^2-a+\frac{1}{4}+1\right)^2}\\&=\sqrt{2\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}^2}\end{aligned}$$

즉, 선분 AB의 길이는 $a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\sqrt{2\times1^2}=\sqrt{2}$를 갖는다.

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x+y-2=0$

원점과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

따라서 선분 AB의 길이가 최소일 때의 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$ **답** 1

• 다른 풀이 •

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+k$와 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 최소가 되려면 점 A를 지나면서 기울기가 1인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 한다.

이 직선의 방정식을 $y=x+c$라 하면 방정식

$x^2+\frac{5}{4}=x+c$, 즉 $4x^2-4x+5-4c=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4(5-4c)=0$에서

$16c=16$ $\quad\therefore c=1$

즉, 직선의 방정식은 $y=x+1$이고 방정식

$4x^2-4x+1=(2x-1)^2=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

직선 $y=-x+k$가 점 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+k$에서 $k=2$

한편, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고, 직선 $y=-x+k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

원점과 직선 $y=-x+2$, 즉 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$

45 $f(x)=|x+2|-|x-3|+1$

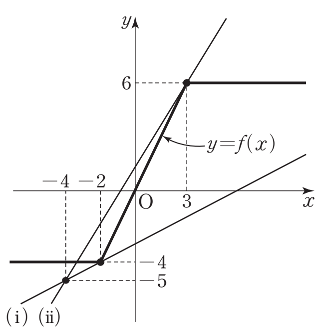
$$=\begin{cases} -(x+2)+(x-3)+1 & (x<-2) \\ (x+2)+(x-3)+1 & (-2\le x<3) \\ (x+2)-(x-3)+1 & (x\ge 3) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -4 & (x<-2) \\ 2x & (-2\le x<3) \\ 6 & (x\ge 3) \end{cases}$$

이때 직선 $mx+y+4m+5=0$, 즉

$y=-m(x+4)-5$ ……㉠

는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, -5)$를 지나므로 직선 ㉠과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 ㉠이 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(-2, -4)$를 지나는 경우

$-4=-2m-5$

$\therefore -m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(3, 6)$을 지나는 경우

$6=-7m-5$

$\therefore -m=\frac{11}{7}$

(i), (ii)에서 직선 ㉠의 기울기 $-m$의 값의 범위는

$\frac{1}{2}<-m<\frac{11}{7}$

따라서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{11}{7}<m<-\frac{1}{2}$ 　　답 $-\frac{11}{7}<m<-\frac{1}{2}$

46 조건 (나)에서

$f(4x)=4f(x)$ ……㉠

㉠에서 $f(x)=\frac{1}{4}f(4x)$이므로

$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}f(2)=\frac{1}{16}f(2)$

조건 (가)에서

$f(2)=3-|2\times2-5|=2$이므로

$f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}$

㉠에서

$f(196)=f(4\times49)=4f(49)$

$=4\times f\left(4\times\frac{49}{4}\right)=16f\left(\frac{49}{4}\right)$

$=16\times f\left(4\times\frac{49}{16}\right)=64f\left(\frac{49}{16}\right)$

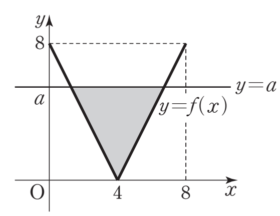
조건 (가)에서

$f\left(\frac{49}{16}\right)=3-\left|2\times\frac{49}{16}-5\right|=\frac{15}{8}$이므로

$f(196)=64\times\frac{15}{8}=120$

$\therefore 16f\left(\frac{1}{8}\right)+f(196)=16\times\frac{1}{8}+120=122$ 　　답 122

47 ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=a$ $(a>0)$의 교점의 x좌표는



$|2x-8|=a$에서

$2x-8=-a$ 또는 $2x-8=a$

$\therefore x=\frac{8-a}{2}$ 또는 $x=\frac{8+a}{2}$

이때 위의 그림의 색칠한 도형의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\left(\frac{8+a}{2}-\frac{8-a}{2}\right)\times a=16$

$a^2=32$ 　　$\therefore a=4\sqrt{2}$ $(\because a>0)$ (거짓)

ㄴ. (i) $0\le x<4$일 때,

$f(x)=-2x+8$이므로 $-2x+8=x$에서

$3x=8$ 　　$\therefore x=\frac{8}{3}$

(ii) $4\le x\le 8$일 때,

$f(x)=2x-8$이므로 $2x-8=x$에서

$x=8$

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=x$의 실근은

$x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=8$이므로 그 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f(t)=t$

(i) $0\le t<4$일 때,

ㄴ에서 $t=\frac{8}{3}$이므로 $f(x)=\frac{8}{3}$

$|2x-8|=\frac{8}{3}$에서

$2x-8=-\frac{8}{3}$ 또는 $2x-8=\frac{8}{3}$

$\therefore x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=\frac{16}{3}$

(ii) $4\le t\le 8$일 때,

ㄴ에서 $t=8$이므로 $f(x)=8$

$|2x-8|=8$에서

$2x-8=-8$ 또는 $2x-8=8$

$\therefore x=0$ 또는 $x=8$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x))=f(t)$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=\frac{16}{3}$ 또는 $x=8$이므로 구하는 모든 실근의 합은

$0+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}+8=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

ㄷ. $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f(t)=t$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 2이고 교점의 x좌표를 각각 t_1, 8 $(0<t_1<4)$이라 하자.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t_1$은 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=4$ $\quad\therefore \alpha+\beta=8$

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=8$은 서로 다른 두 점에서 만나고 교점의 x좌표는 각각 0, 8이다.

따라서 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은

$\alpha+\beta+0+8=16$

48

정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$일 때 $f(x)=n$이고, 모든 자연수 x에 대하여 $x>0$이므로 $x+4>4$

$0<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{4}$ $\quad\therefore 3<3+\frac{1}{x+4}<3+\frac{1}{4}$

$\therefore f\left(3+\frac{1}{x+4}\right)=3$

정수 n에 대하여 $n-1<x\le n$일 때 $g(x)=n$이므로

$g\left(f\left(3+\frac{1}{x+4}\right)+\frac{x}{6}\right)=g\left(3+\frac{x}{6}\right)=4$에서

$3<3+\frac{x}{6}\le 4$, $0<\frac{x}{6}\le 1$

$\therefore 0<x\le 6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 21

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.87~88

01 74	02 15	03 2	04 ④	05 3
06 3	07 2	08 4	09 8	10 6
11 23	12 6			

01 해결단계

❶ 단계	주어진 등식에서 x, y에 적절한 수 또는 식을 대입하여 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 $f(x)$, $g(x)$를 이용하여 $f(x)-g(x)$를 구한다.
❸ 단계	$f(2)-g(2)$의 값을 구한다.

$f(x-g(y))=(x+4y^2-1)^3-3$ ……㉠

위의 식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립하므로

㉠의 양변에 $y=0$을 대입하면

$f(x-g(0))=(x-1)^3-3$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=g(0)$을 대입하면

$f(0)=\{g(0)-1\}^3-3=5$ ($\because f(0)=5$)

$\{g(0)-1\}^3=8$, $g(0)-1=2$

$\therefore g(0)=3$

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x-3)=(x-1)^3-3$

위의 식의 양변에 x 대신에 $x+3$을 대입하면

$f(x)=(x+2)^3-3$ ……㉢

㉠의 양변에 $x=g(y)$를 대입하면

$f(0)=\{g(y)+4y^2-1\}^3-3=5$

$\{g(y)+4y^2-1\}^3=8$, $g(y)+4y^2-1=2$

$g(y)=-4y^2+3$

$\therefore g(x)=-4x^2+3$ ……㉣

㉢$-$㉣을 하면

$f(x)-g(x)=(x+2)^3-3+4x^2-3$

$\therefore f(2)-g(2)=64-3+4\times4-3=74$ 답 74

02 해결단계

❶ 단계	x의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$의 식을 구한다.
❷ 단계	각 범위에서 직선의 기울기를 비교하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한 후, a, b 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 a, b의 값을 각각 구하여 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

(i) $x<-2$일 때,

$f(x)=3(-x+1)+ax+4+b(-x-2)$

$=(a-b-3)x+7-2b$

(ii) $-2\le x<1$일 때,

$f(x)=3(-x+1)+ax+4+b(x+2)$

$=(a+b-3)x+7+2b$

(iii) $x\ge1$일 때,

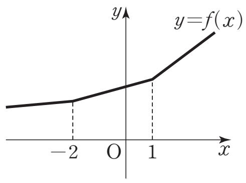
$f(x)=3(x-1)+ax+4+b(x+2)$

$=(a+b+3)x+1+2b$

한편, 세 범위 $x<-2$, $-2\le x<1$, $x\ge1$에서의 각 직선의 기울기 $a-b-3$, $a+b-3$, $a+b+3$에 대하여 a, b는 한 자리 자연수이므로

$a-b-3<a+b-3<a+b+3$

이때 $a+b+3>0$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x<-2$일 때의 직선의 기울기가 양수이어야 하므로

$a-b-3>0$ $\quad\therefore a>b+3$

따라서 조건을 만족시키는 한 자리 자연수 a, b는 다음과 같다.

$b=1$일 때, $a>4$이므로 a는 5, 6, 7, 8, 9의 5개

$b=2$일 때, $a>5$이므로 a는 6, 7, 8, 9의 4개

$b=3$일 때, $a>6$이므로 a는 7, 8, 9의 3개

$b=4$일 때, $a>7$이므로 a는 8, 9의 2개

$b=5$일 때, $a>8$이므로 a는 9의 1개

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$5+4+3+2+1=15$ 답 15

BLACKLABEL 특강 참고

$x=-2$에서 두 함수

$y=(a-b-3)x+7-2b$, $y=(a+b-3)x+7+2b$

의 함숫값은 $-2a+13$으로 같다.

$x=1$에서 두 함수

$y=(a+b-3)x+7+2b$, $y=(a+b+3)x+1+2b$

의 함숫값은 $a+3b+4$로 같다.

03 해결단계

❶ 단계	$ax+2=t$로 놓은 후, $(g\circ f)(x)=x^2-x-2$를 t에 대하여 정리하고 함수 $g(x)$를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 함수 $g(x)$를 이용하여 $g(x)\le0$인 x의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 x의 값의 범위 안에 정수인 해가 7개 이상 존재하도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구한다.

$f(x)=ax+2$에서 $ax+2=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t-2}{a}$ $(\because a\ne0)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2-x-2$에서

$$g(t)=\left(\frac{t-2}{a}\right)^2-\frac{t-2}{a}-2$$

$$=\frac{t^2-4t+4}{a^2}-\frac{t-2}{a}-2$$

$$=\frac{t^2-(a+4)t-2a^2+2a+4}{a^2}$$

$$\therefore g(x)=\frac{x^2-(a+4)x-2a^2+2a+4}{a^2}$$

이때 $a^2>0$이므로 부등식 $g(x)\le0$의 해는

$x^2-(a+4)x-2a^2+2a+4\le0$의 해와 같다.

즉, $x^2-(a+4)x-(a-2)(2a+2)\le0$에서

$\{x+(a-2)\}\{x-(2a+2)\}\le0$

$\therefore -a+2\le x\le 2a+2$ $(\because a$는 자연수$)$

*위의 x의 값의 범위 안에 정수인 해가 7개 이상 존재하려면

$2a+2-(-a+2)+1\ge7$

$3a\ge6$ $\quad\therefore a\ge2$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

• 다른 풀이 •

$f(x)=ax+2$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x^2-x-2$에서

$g(ax+2)=x^2-x-2$

$ax+2=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t-2}{a}$ $(\because a\ne0)$

$$\therefore g(t)=\left(\frac{t-2}{a}\right)^2-\left(\frac{t-2}{a}\right)-2$$

$g(x)\le0$에서 $\left(\dfrac{x-2}{a}\right)^2-\left(\dfrac{x-2}{a}\right)-2\le0$

$$\left(\frac{x-2}{a}+1\right)\left(\frac{x-2}{a}-2\right)\le0$$

$-1\le\dfrac{x-2}{a}\le2$, $-a\le x-2\le 2a$ $(\because a$는 자연수$)$

$\therefore -a+2\le x\le 2a+2$

다음은 *와 같다.

04 해결단계

❶ 단계	$f(1)=1$에서 $f^{-1}(1)=1$이고, 주어진 식의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하여 $f^{-1}(2)$의 값을 구한 후, 주어진 식의 양변에 $a=2$, $b=2$를 대입하여 ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	$f(a)=p$, $f(b)=q$라 한 후, 역함수의 성질을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	ㄴ을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점을 찾은 후, ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

$f(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

ㄱ. $f(1)=1$이므로 $f^{-1}(1)=1$

㉠의 양변에 $a=1$, $b=1$을 대입하면

$f(1+1)=f^{-1}(1)+f^{-1}(1)$

$f(2)=1+1=2$ $\quad\therefore f^{-1}(2)=2$

㉠의 양변에 $a=2$, $b=2$를 대입하면

$f(2+2)=f^{-1}(2)+f^{-1}(2)$

$\therefore f(4)=2+2=4$ (거짓)

ㄴ. $f(a)=p$, $f(b)=q$라 하면

$f^{-1}(p)=a$, $f^{-1}(q)=b$

㉠의 양변에 $a=p$, $b=q$를 대입하면

$f(p+q)=f^{-1}(p)+f^{-1}(q)=a+b$

$\therefore f^{-1}(a+b)=p+q=f(a)+f(b)$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $f(f(a)+f(b))=a+b$이므로

$f(a)=b$, $f(b)=a$이면 $f(a+b)=a+b$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 점 $(a+b, a+b)$에서 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

05 해결단계

❶ 단계	주어진 함수가 f_1 또는 f_2와 같음을 이용하여 두 함수 f_1, f_2의 조건을 파악한다.
❷ 단계	$f_1(x)=x$ 또는 $f_2(x)=x$인 경우로 나누어 조건을 만족시키는 두 일차함수 f_1, f_2를 각각 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 두 일차함수 f_1, f_2의 순서쌍 (f_1, f_2)의 개수를 구한다.

$f_1 \circ f_2=f_1$ 또는 $f_1 \circ f_2=f_2$이므로 두 일차함수 f_1, f_2 중에서 적어도 하나는 $y=x$이어야 한다.

(i) $f_1(x)=f_2(x)=x$이면 조건을 모두 만족시킨다.

(ii) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$인 경우

$f_2(f_2(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

이 함수가 $f_1(x)=x$ 또는 $f_2(x)=ax+b$와 일치해야 하므로

① $a^2x+ab+b=x$에서 $a^2=1$, $ab+b=0$

$a^2=1$에서 $a=1$ 또는 $a=-1$

$a=1$을 $ab+b=0$에 대입하면

$2b=0 \qquad \therefore b=0$

그런데 $f_2(x)=x$가 아니므로 모순이다.

$a=-1$을 $ab+b=0$에 대입하면 성립하므로

$f_2(x)=-x+b$

$f_2(1)=1$이므로 $-1+b=1 \qquad \therefore b=2$

즉, $f_2(x)=-x+2$

② $a^2x+ab+b=ax+b$에서 $a^2=a$, $ab+b=b$

$a^2=a$에서 $a=1$ $(\because a\neq 0)$

이것을 $ab+b=b$에 대입하면

$2b=b \qquad \therefore b=0$

그런데 $f_2(x)=x$가 아니므로 모순이다.

(iii) $f_1(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$, $f_2(x)=x$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 계산하면 $f_1(x)=-x+2$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (f_1, f_2)의 개수는

(x, x), $(-x+2, x)$, $(x, -x+2)$의 3이다. **답** 3

06 해결단계

❶ 단계	함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역을 이용하여 함수 f의 치역을 구한다.
❷ 단계	$f(3)=2$, $f(4)=4$와 함수 f의 치역을 이용하여 $f(1)$, $f(2)$로 가능한 값들을 구한다.
❸ 단계	$f(1)$, $f(2)$의 값을 이용하여 $f(1)+f(2)$의 값을 구한다.

함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 함수 f의 치역도 $\{1, 2, 4\}$이다.

즉, $f(3)=2$, $f(4)=4$이므로 $f(a)=1$을 만족시키는 집합 X의 원소 a가 존재한다.

$\therefore f(1)=1$ 또는 $f(2)=1$

이때 $3\notin\{1, 2, 4\}$이므로 $f(b)=3$을 만족시키는 집합 X의 원소 b가 존재하지 않는다.

이를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값은 다음과 같다.

$f(1)$	1	1	1	2	4
$f(2)$	1	2	4	1	1

그런데 $f(1)=1$, $f(2)=1$ 또는 $f(1)=1$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=1$이면 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역이 $\{1, 4\}$ 또는 $\{4\}$가 되어 모순이다.*

따라서 $f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$이어야 하므로 $f(1)+f(2)=3$ **답** 3

• 다른 풀이 •

함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이고 $3\notin\{1, 2, 4\}$이므로 3을 함숫값으로 갖는 정의역의 원소가 존재하지 않는다.

또한, $f(3)=2$이고, 함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 2, 4\}$이므로 3이 아닌 정의역의 원소 중에서 2를 함숫값으로 갖는 원소가 존재해야 한다.

이때 $f(4)=4$이므로 $f(1)$과 $f(2)$는 각각 1 또는 2가 되어야 한다.

즉, $f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로

$f(1)+f(2)=3$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

(i) $f(1)=1$, $f(2)=1$일 때,
$f(f(f(1)))=f(f(1))=f(1)=1$,
$f(f(f(2)))=f(f(1))=f(1)=1$,
$f(f(f(3)))=f(f(2))=f(1)=1$,
$f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$이므로
함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 4\}$이다.

(ii) $f(1)=1$, $f(2)=4$일 때,
$f(f(f(1)))=f(f(1))=f(1)=1$,
$f(f(f(2)))=f(f(4))=f(4)=4$,
$f(f(f(3)))=f(f(2))=f(4)=4$,
$f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$이므로
함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{1, 4\}$이다.

(iii) $f(1)=4$, $f(2)=1$일 때,
$f(f(f(1)))=f(f(4))=f(4)=4$,
$f(f(f(2)))=f(f(1))=f(4)=4$,
$f(f(f(3)))=f(f(2))=f(1)=4$,
$f(f(f(4)))=f(f(4))=f(4)=4$이므로
함수 $(f\circ f\circ f)(x)$의 치역은 $\{4\}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)=1$, $f(2)=1$ 또는 $f(1)=1$, $f(2)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(2)=1$일 때 조건을 만족시키지 않는다.

07 해결단계

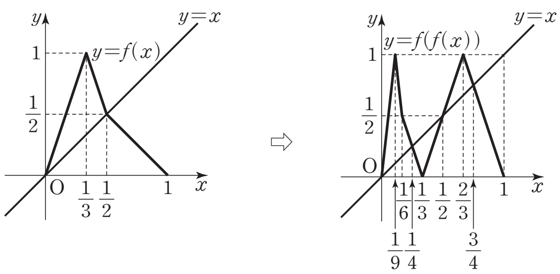
❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(f(x))$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	두 집합 A, B의 원소의 조건의 의미를 파악한 후, 집합 $A\cap B$를 구하여 $n(A\cap B)$를 구한다.

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \left(0\le x<\dfrac{1}{3}\right) \\ -3x+2 & \left(\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{1}{2}\right) \\ -x+1 & \left(\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$에서

$$f(f(x))=\begin{cases} 3f(x) & \left(0\le f(x)<\dfrac{1}{3}\right) \\ -3f(x)+2 & \left(\dfrac{1}{3}\le f(x)<\dfrac{1}{2}\right) \\ -f(x)+1 & \left(\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 3\times 3x & \left(0\le x<\dfrac{1}{9}\right) \\ -3\times 3x+2 & \left(\dfrac{1}{9}\le x<\dfrac{1}{6}\right) \\ -3x+1 & \left(\dfrac{1}{6}\le x\le\dfrac{1}{3}\right) \\ -(-3x+2)+1 & \left(\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{1}{2}\right) \\ -3(-x+1)+2 & \left(\dfrac{1}{2}< x\le\dfrac{2}{3}\right) \\ 3(-x+1) & \left(\dfrac{2}{3}< x\le 1\right) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

이때 $f(f(x))-x=0$에서 $f(f(x))=x$이고, $f(x)-x\neq 0$에서 $f(x)\neq x$이므로 집합 $A\cap B$의 원소는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이면서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이 아닌 점의 x좌표이다.

$-3x+3=x$에서 $4x=3$ $\quad\therefore x=\dfrac{3}{4}$

즉, 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $0,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와

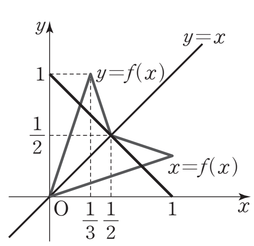
$-3x+1=x$에서 $4x=1$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{4}$

직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $0,\ \dfrac{1}{2}$이므로

$A\cap B=\left\{\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right\}$ $\qquad\therefore n(A\cap B)=2$ **답** 2

BLACKLABEL 특강 참고

$A=\{x\mid f(f(x))-x=0,\ 0\le x\le 1\}$에서 집합 A는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 실근을 원소로 갖는다.
$f(f(x))-x=0$에서 $f(x)=y$로 놓으면
$f(y)-x=0,\ x=f(y)$
즉, 방정식 $f(f(x))-x=0$의 실근의 개수는 연립방정식
$\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases}$의 해의 개수와 같다.
이때 연립방정식 $\begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases}$의 해의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $x=f(y)$의 그래프의 교점의 개수와 같고, 함수 $x=f(y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 두 함수 $y=f(x)$, $x=f(y)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편, $B=\{x\mid f(x)-x\neq 0,\ 0\le x\le 1\}$에서 집합 B의 원소는 $f(x)-x\neq 0$, 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 아닌 실수 x이다.
따라서 $n(A\cap B)$는 두 함수 $y=f(x)$, $x=f(y)$의 그래프의 교점 중에서 직선 $y=x$ 위에 있지 않은 교점의 개수와 같다.
$\therefore n(A\cap B)=2$

08 해결단계

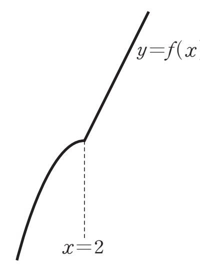
❶ 단계	$g(x)=-(x-c)^2+4$, $h(x)=(a+b+2)\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b+4}\right)x$라 하고 함수 $f(x)$가 일대일대응임을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 $c\ge 2$이고 $g(2)=h(2)$임을 파악한다.
❸ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $f(2)$의 값을 구하고, $a-b+c$의 값을 구한다.

$g(x)=-(x-c)^2+4$,

$h(x)=(a+b+2)\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b+4}\right)x$

라 하면 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<2) \\ h(x) & (x\ge 2) \end{cases}$의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이어야 한다.

이때 $a>0$, $b>0$이므로 직선 $y=h(x)$의 기울기는 양수이다.
따라서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $c\ge 2$이고 $g(2)=h(2)$이어야 하므로

$$\begin{aligned} -(2-c)^2+4&=2(a+b+2)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b+4}\right) \\ &=(a+b+2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+2}\right) \\ &=1+\frac{a}{b+2}+\frac{b+2}{a}+1 \\ &=2+\frac{a}{b+2}+\frac{b+2}{a} \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$\dfrac{a}{b+2}>0$, $\dfrac{b+2}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2+\frac{a}{b+2}+\frac{b+2}{a}\ge 2+2\sqrt{\frac{a}{b+2}\times\frac{b+2}{a}}$$

(단, 등호는 $a=b+2$일 때 성립)

$$=2+2=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\therefore -(2-c)^2+4\ge 4$

그런데 $c\ge 2$인 모든 c에 대하여

$-(2-c)^2+4\le 4$이므로

$-(2-c)^2+4=4$ $\qquad\therefore c=2$

$c=2$를 ㉠에 대입하면

$2+\dfrac{a}{b+2}+\dfrac{b+2}{a}=4$

즉, ㉡에서 등호가 성립할 때이므로

$a=b+2,\ a-b=2$

$\therefore a-b+c=2+2=4$ **답** 4

09 해결단계

❶ 단계	조건 (다)의 의미를 파악한 후, $f(5)=9$를 이용하여 $f(7)$의 값을 찾는다.
❷ 단계	조건 (나)의 의미를 파악한 후, 함수의 정의를 이용하여 $g(7)$, $f(1)$의 값을 찾는다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 함숫값과 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(3)$, $g(5)$의 값을 찾는다.
❹ 단계	$f(3)+g(5)$의 값을 구한다.

$f(g(f(x)))=x+2$ ······㉠
$f(k)=3$이라 하자.
$x=k$를 ㉠에 대입하면 $f(g(f(k)))=k+2$
$f(g(3))=k+2$, $f(5)=k+2$ ($\because g(3)=5$)
$f(5)=9$이므로 $k+2=9$
$\therefore k=7$, $f(7)=3$ ······㉡
한편, 어떤 $x\in B$에 대하여 $g(x)=x$이고 $g(3)=5$이므로
$g(5)=5$ 또는 $g(7)=7$
이때 $g(5)=5$이면 $f(p)=5$라 하고, $x=p$를 ㉠에 대입하면
$f(g(f(p)))=p+2$, $f(g(5))=p+2$
$f(5)=p+2$, $p+2=9$ ($\because f(5)=9$)
$\therefore p=7$
그런데 ㉡에서 $f(7)=3$이므로 모순이다.
즉, $g(7)=7$
$f(q)=7$이라 하고, $x=q$를 ㉠에 대입하면
$f(g(f(q)))=q+2$, $f(g(7))=q+2$
$f(7)=q+2$
㉡에서 $f(7)=3$이므로
$3=q+2$
$\therefore q=1$, $f(1)=7$ ······㉢
$x=5$를 ㉠에 대입하면 $f(g(f(5)))=7$
$f(g(9))=7$
이때 ㉢에서 $f(1)=7$이므로
$g(9)=1$
$x=3$을 ㉠에 대입하면 $f(g(f(3)))=5$
이때 합성함수 $(f\circ g\circ f)(x)=x+2$가 일대일대응이므로 함수 f의 정의역의 각 원소는 치역의 서로 다른 원소에 대응되고, $f(1)=7$, $f(5)=9$, $f(7)=3$이므로
$f(3)=5$*
즉, $f(g(f(3)))=5$에서 $g(f(3))=3$이므로
$g(5)=3$
$\therefore f(3)+g(5)=5+3=8$ **답** 8

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

(i) $f(3)=3$일 때,
$f(g(f(3)))=f(g(3))=f(5)=9$
(ii) $f(3)=7$일 때,
$f(g(f(3)))=f(g(7))=f(7)=3$
(iii) $f(3)=9$일 때,
$f(g(f(3)))=f(g(9))=f(1)=7$
(i), (ii), (iii)에서 $f(g(f(3)))=5$에 모순이므로 $f(3)=5$이어야 한다.

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

조건 (다)에서 $f(g(f(x)))=x+2$이므로 이 식의 x에 적당한 값을 대입하여 나머지 대응을 모두 찾아야 한다.
이때 조건 (가)에서 $f(5)=9$, $g(3)=5$이므로 $f(g(f(x)))=x+2$에 $x=5$를 대입하거나 $f(x)=3$인 x의 값을 미지수로 정하여 대입할 수 있다.
한편, 정의역과 공역의 원소의 개수가 같은 두 함수 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$에 대하여 합성함수 $(f\circ g\circ f)(x)=x+2$가 일대일대응이므로 두 함수 f, g도 일대일대응이어야 한다.
만약 함수 f가 일대일대응이 아니면 $f(x_1)=f(x_2)$인 서로 다른 두 원소 x_1, x_2가 존재한다.
$f(x_1)=f(x_2)=a$라 하면
$f(g(f(x_1)))=f(g(a))=x_1+2$
$f(g(f(x_2)))=f(g(a))=x_2+2$
즉, $f(g(a))=x_1+2=x_2+2$이므로 $x_1=x_2$이다.
그런데 $x_1\neq x_2$이므로 모순이다. 따라서 함수 f는 일대일대응이다.
마찬가지로 함수 g도 일대일대응이다.

10 해결단계

❶ 단계	$g(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$이라 하고 x의 값의 범위를 나누어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	$f(x)=\lvert g(x)\rvert$라 하고, 대칭이동을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❸ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프의 교점의 개수를 이용하여 방정식 $\left\lvert x-[x]-\frac{1}{2}\right\rvert=\frac{1}{4}x^2$의 실근의 개수를 구한다.

$f(x)=\left\lvert x-[x]-\frac{1}{2}\right\rvert$, $g(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$이라 하자.

⋮

$-2\le x<-1$에서 $[x]=-2$이므로 $g(x)=x+\frac{3}{2}$

$-1\le x<0$에서 $[x]=-1$이므로 $g(x)=x+\frac{1}{2}$

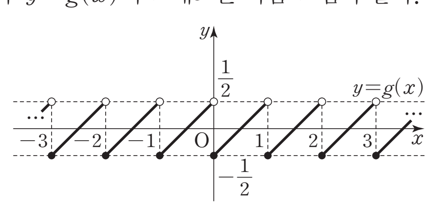
$0\le x<1$에서 $[x]=0$이므로 $g(x)=x-\frac{1}{2}$

$1\le x<2$에서 $[x]=1$이므로 $g(x)=x-\frac{3}{2}$

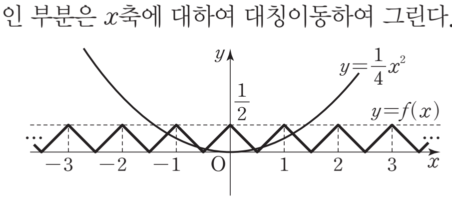
$2\le x<3$에서 $[x]=2$이므로 $g(x)=x-\frac{5}{2}$

⋮

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=\lvert g(x)\rvert$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프는 위의 그림과 같고, 방정식 $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}x^2$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프의 교점의 개수와 같으므로 6이다. **답** 6

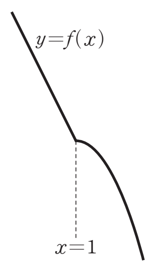
11 해결단계

❶ 단계	함수 $f(x)$가 일대일대응임을 이용하여 a의 값의 범위에 따른 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	$a<0$일 때, 세 교점의 좌표를 구하고 a, b, c의 값을 구한다.
❸ 단계	$a>0$일 때, 조건을 만족하지 않음을 파악한다.
❹ 단계	$3a+6b-8c$의 값을 구한다.

$g(x)=ax+b$, $h(x)=cx^2+3x$라 하면 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<1) \\ h(x) & (x\geq 1)\end{cases}$의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

직선 $y=g(x)$의 기울기가 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore c<0$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 세 교점의 좌표를 $(-2,\ p)$, $(1,\ q)$, $(2,\ r)$이라 하면 $p>q>r$

이때 세 점 $(p,\ -2)$, $(q,\ 1)$, $(r,\ 2)$도 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이므로* p, q, r은 -2, 1, 2 중에 하나이다.

$p>q>r$이므로 $p=2$, $q=1$, $r=-2$

즉, $g(1)=h(1)=1$, $g(-2)=2$, $h(2)=-2$이므로

$g(1)=a+b=1$ ······㉠

$g(-2)=-2a+b=2$ ······㉡

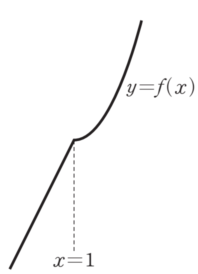
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$

$h(1)=c+3=1$에서 $c=-2$

(ii) $a>0$일 때,

직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore c>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.**

$\therefore f(1)=1$

그런데 $f(1)=1$이면 $h(1)=1$이므로

$c+3=1$ $\quad\therefore c=-2$

이는 $c>0$에 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=-2$이므로

$3a+6b-8c=-1+8+16=23$ **답** 23

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

풀이에서 다음을 이용하였다.

(*) 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $(a,\ b)$이면 $(b,\ a)$도 교점이다.

[증명] 교점이 $(a,\ b)$이므로 $f(a)=b$, $f^{-1}(a)=b$

$f(a)=b$에서 $f^{-1}(b)=a$, $f^{-1}(a)=b$에서 $f(b)=a$

따라서 점 $(b,\ a)$도 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이다.

(**) 함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하는 함수이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

[증명] 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 $(a,\ b)$에 대하여 $a\neq b$라 하자. 이때 *에 의하여 점 $(b,\ a)$도 교점이다.

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가하므로

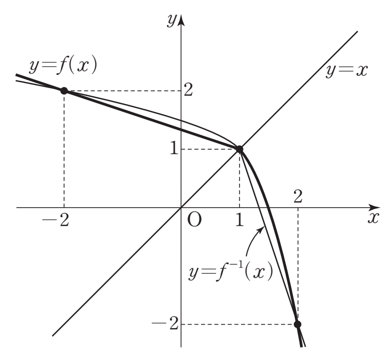
(i) $a<b$이면 $f(a)<f(b)$, 즉 $b<a$이므로 모순이다.

(ii) $b<a$이면 $f(b)<f(a)$, 즉 $a<b$이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $a\neq b$이면 모순이므로 $a=b$이어야 한다.

BLACKLABEL 특강 참고

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음과 같다.



12 해결단계

❶ 단계	주어진 집합을 A라 하고, 집합 A의 부분집합 중 B, C를 정한 후 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하면 $h(t)=-2+S(C)-S(B\cap C)$임을 파악한다.
❷ 단계	t의 값의 범위에 따른 함수 $h(t)$를 구한다.
❸ 단계	함수 $h(t)$의 치역을 구하여 m의 값을 구한다.

세 집합 A, B, C를 각각

$A=\{x\,|\,f(x)=t$ 또는 $g(x)=t$, x는 실수$\}$,

$B=\{x\,|\,f(x)=t$, x는 실수$\}$,

$C=\{x\,|\,g(x)=t$, x는 실수$\}$

라 하면 $A=B\cup C$이므로 집합 A의 원소는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표 또는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.

이때 $f(x)=g(x)$에서

$x^2+2x=(x-m)^2+m$

$x^2+2x=x^2-2mx+m^2+m$

$(2m+2)x=m^2+m$

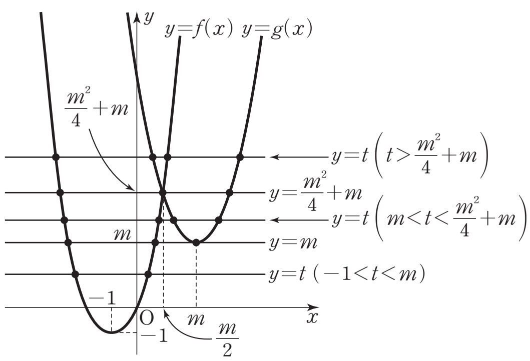
$\therefore\ x=\dfrac{m^2+m}{2m+2}=\dfrac{m(m+1)}{2(m+1)}=\dfrac{m}{2}\ (\because\ m>0)$

즉, 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m^2}{4}+m\right)$이므로

$t\neq\dfrac{m^2}{4}+m$일 때, $B\cap C=\varnothing$ ……㉠

$t=\dfrac{m^2}{4}+m$일 때, $B\cap C=\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$ ……㉡

한편, 이차함수 $f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이고, 이차함수 $g(x)=(x-m)^2+m$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(m,\ m)$이므로 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 및 직선 $y=t$는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=t\ (t>-1)$는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=t$와 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 합은 -2이다.

즉, 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하면

$S(B)=-2$

$h(t)=S(B\cup C)=S(B)+S(C)-S(B\cap C)$

$\quad=-2+S(C)-S(B\cap C)$ ……㉢

이때 t의 값의 범위에 따른 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

(i) $-1<t<m$일 때,

㉠에서 $S(B\cap C)=0$

직선 $y=t$는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않으므로 $C=\varnothing$ $\quad\therefore\ S(C)=0$

㉢에서 $h(t)=-2+0-0=-2$

(ii) $t=m$일 때,

㉠에서 $S(B\cap C)=0$

직선 $y=m$은 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 $(m,\ m)$에서 만나므로 $C=\{m\}$ $\quad\therefore\ S(C)=m$

㉢에서 $h(t)=-2+m-0=m-2$

(iii) $m<t<\dfrac{m^2}{4}+m$ 또는 $t>\dfrac{m^2}{4}+m$일 때,

㉠에서 $S(B\cap C)=0$

직선 $y=t$는 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=t$와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 합은 $2m$이다.

$\therefore\ S(C)=2m$

㉢에서 $h(t)=-2+2m-0=2m-2$

(iv) $t=\dfrac{m^2}{4}+m$일 때,

㉡에서 $S(B\cap C)=\dfrac{m}{2}$

직선 $y=\dfrac{m^2}{4}+m$은 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=\dfrac{m^2}{4}+m$과 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표의 합은 $2m$이다.

$\therefore\ S(C)=2m$

㉢에서 $h(t)=-2+2m-\dfrac{m}{2}=\dfrac{3}{2}m-2$

(i)~(iv)에서 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}-2 & (-1<t<m)\\ m-2 & (t=m)\\ 2m-2 & \left(m<t<\dfrac{m^2}{4}+m \text{ 또는 } t>\dfrac{m^2}{4}+m\right)\\ \dfrac{3}{2}m-2 & \left(t=\dfrac{m^2}{4}+m\right)\end{cases}$$

따라서 함수 $h(t)$의 치역은

$\left\{-2,\ m-2,\ \dfrac{3}{2}m-2,\ 2m-2\right\}$이고 모든 원소의 합이 19이므로

$-2+(m-2)+\left(\dfrac{3}{2}m-2\right)+(2m-2)=19$

$\dfrac{9}{2}m-8=19,\ \dfrac{9}{2}m=27$

$\therefore\ m=6$ **답** 6

07. 유리함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.91~92

01 ①	02 ①	03 ③	04 ⑤	05 ④
06 $\left\{y \,\middle|\, y\le\frac{1}{3}\text{ 또는 } y\ge 3\right\}$	07 3	08 ②	09 ②	
10 ②	11 20	12 52	13 ④	14 ③

01 $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-8}\div\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-12}$

$=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-8}\times\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$

$=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-2)}\times\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=-\dfrac{8x}{x^2-4}$ 답 ①

02 $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{3x-b}{x^2-x+1}=\dfrac{-5x+c}{x^3+1}$의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{3x-b}{x^2-x+1}=\dfrac{a(x^2-x+1)+(3x-b)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{(a+3)x^2-(a+b-3)x+a-b}{x^3+1}$

즉, $\dfrac{(a+3)x^2-(a+b-3)x+a-b}{x^3+1}=\dfrac{-5x+c}{x^3+1}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+3=0,\ a+b-3=5,\ a-b=c$

따라서 $a=-3,\ b=11,\ c=-14$이므로

$a-2b+c=-3-2\times11+(-14)=-39$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{3x-b}{x^2-x+1}=\dfrac{-5x+c}{x^3+1}$에서 양변에 x^3+1을 곱하면

$a(x^2-x+1)+(3x-b)(x+1)=-5x+c$

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$(a+3)x^2-(a+b-8)x+a-b-c=0$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+3=0,\ a+b-8=0,\ a-b-c=0$

따라서 $a=-3,\ b=11,\ c=-14$이므로

$a-2b+c=-3-2\times11+(-14)=-39$

03 $f(x)=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$이므로

$\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(3)}+\dfrac{1}{f(5)}+\cdots+\dfrac{1}{f(99)}$

$=\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{100\times102}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{6}}-\cancel{\dfrac{1}{8}}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\cancel{\dfrac{1}{100}}-\dfrac{1}{102}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{102}\right)$

$=\dfrac{25}{102}$

따라서 $p=102,\ q=25$이므로

$p+q=102+25=127$ 답 ③

04 $\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{\dfrac{3x-1}{x}}}=\dfrac{1}{3-\dfrac{x}{3x-1}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{3(3x-1)-x}{3x-1}}=\dfrac{3x-1}{8x-3}$

즉, $\dfrac{3x-1}{8x-3}=\dfrac{ax+b}{cx-3}$이므로

$a=3,\ b=-1,\ c=8$

$\therefore a+b+c=3+(-1)+8=10$ 답 ⑤

05 $\dfrac{2x+y}{z}=\dfrac{y+z}{2x}=\dfrac{z+2x}{y}=k$로 놓으면

$2x+y=zk$ ……㉠

$y+z=2xk$ ……㉡

$z+2x=yk$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(2x+y+z)=k(2x+y+z)$

$2x+y+z\neq0$이므로 양변을 $2x+y+z$로 나누면

$k=2$

㉠−㉡을 하면

$2x-z=-k(2x-z)$이므로

$2x-z=0 \quad \therefore 2x=z$ ……㉣

㉡−㉢을 하면

$y-2x=-k(y-2x)$이므로

$y-2x=0 \quad \therefore y=2x$ ……㉤

㉣, ㉤에서 $2x=y=z$

$\therefore \dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\dfrac{3x\times4x\times3x}{x\times2x\times2x}$

$=\dfrac{36x^3}{4x^3}=9$

답 ④

• 다른 풀이 •

$$\frac{2x+y}{z}=\frac{y+z}{2x}=\frac{z+2x}{y}$$
$$=\frac{(2x+y)+(y+z)+(z+2x)}{z+2x+y}$$
$$=\frac{2(2x+y+z)}{2x+y+z}=2$$

$\frac{2x+y}{z}=2$에서 $2x+y=2z$ ……ⓑ

$\frac{y+z}{2x}=2$에서 $y+z=4x$ ……ⓢ

$\frac{z+2x}{y}=2$에서 $z+2x=2y$ ……ⓞ

ⓑ−ⓢ을 하면

$2x-z=-2(2x-z)$이므로

$2x-z=0$ $\quad\therefore z=2x$ ……ⓩ

ⓢ−ⓞ을 하면

$y-2x=-2(y-2x)$이므로

$y-2x=0$ $\quad\therefore y=2x$ ……ⓒ

ⓩ, ⓒ에서 $2x=y=z$

$$\therefore \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}=\frac{3x\times 4x\times 3x}{x\times 2x\times 2x}$$
$$=\frac{36x^3}{4x^3}=9$$

BLACKLABEL 특강 참고

가비의 리

$a:b:c=d:e:f$, 즉 $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$일 때,

$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{a+b+c}{d+e+f}=\frac{pa+qb+rc}{pd+qe+rf}$가 성립한다.

(단, $d+e+f\neq 0$, $pd+qe+rf\neq 0$)

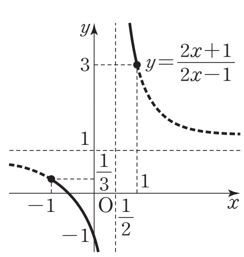
06

$$y=\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{(2x-1)+2}{2x-1}$$
$$=\frac{2}{2x-1}+1=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+1$$

이므로 함수 $y=\frac{2x+1}{2x-1}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x<\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2}<x\le 1$에서 함수 $y=\frac{2x+1}{2x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le\frac{1}{3}\text{ 또는 }y\ge 3\right\}$



답 $\left\{y\,\middle|\,y\le\frac{1}{3}\text{ 또는 }y\ge 3\right\}$

07

주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-3,\ 2)$이므로 유리함수의 식을

$y=\frac{k}{x+3}+2$ (단, $k\neq 0$)

라 할 수 있다.

이 유리함수의 그래프가 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\frac{k}{2}+2,\ \frac{k}{2}=-4$ $\quad\therefore k=-8$

$\therefore y=\frac{-8}{x+3}+2=\frac{-8+2(x+3)}{x+3}=\frac{2x-2}{x+3}$

따라서 $a=2,\ b=-2,\ c=3$이므로

$a+b+c=2+(-2)+3=3$ 답 3

• 다른 풀이 •

$y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)+b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$

에서 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-c,\ y=a$이고, 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-3,\ 2)$이므로

$-c=-3,\ a=2$ $\quad\therefore a=2,\ c=3$

한편, 유리함수 $y=\frac{2x+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\frac{-2+b}{-1+3}$

$b-2=-4$ $\quad\therefore b=-2$

$\therefore a+b+c=2+(-2)+3=3$

08

$f(x)=\frac{5x}{x+2}=\frac{5(x+2)-10}{x+2}=-\frac{10}{x+2}+5$

이므로 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-q=-\frac{10}{(x-p)+2}+5$

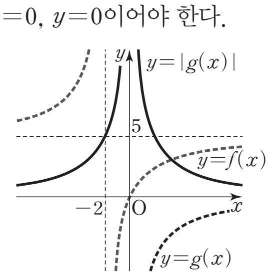
$\therefore g(x)=-\frac{10}{x-p+2}+5+q$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=p-2,\ y=5+q$

함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=|g(x)|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 다음 그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$이어야 한다.



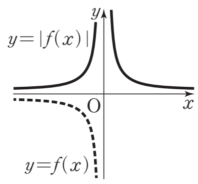
따라서 $p-2=0$, $5+q=0$이므로

$p=2$, $q=-5$

$\therefore p+q=2+(-5)=-3$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

유리함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이려면 오른쪽 그림과 같이 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



09 $y=\dfrac{-4x+7}{2x-3}=\dfrac{-2(2x-3)+1}{2x-3}$

$=\dfrac{1}{2x-3}-2=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}-2$

에서 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=-2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ -2\right)$이다.

이때 직선 $y=ax+b$는 기울기가 $a=\pm1$이고, 두 점근선의 교점 $\left(\dfrac{3}{2},\ -2\right)$를 지나야 하므로 방정식은

$y=\pm\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-2$에서

$y=x-\dfrac{7}{2}$ 또는 $y=-x-\dfrac{1}{2}$

즉, $a=1$, $b=-\dfrac{7}{2}$ 또는 $a=-1$, $b=-\dfrac{1}{2}$이므로

$a^2+4b^2=1+4\times\dfrac{49}{4}=50$ 또는

$a^2+4b^2=1+4\times\dfrac{1}{4}=2$

따라서 a^2+4b^2의 값이 될 수 있는 수는 ② 50이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프의 대칭성을 이용하여 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 그래프의 대칭성을 생각할 수 있다.

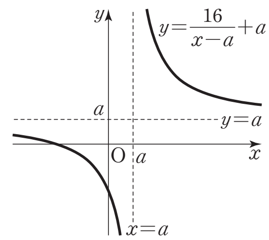
유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이고, 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

따라서 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$를 각각 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 두 직선 $y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$에 대하여 각각 대칭이다.

10 $y=\dfrac{ax-a^2+16}{x-a}=\dfrac{a(x-a)+16}{x-a}=\dfrac{16}{x-a}+a$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=a$이다.

이때 $a>0$이므로 주어진 유리함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$일 때의 함숫값이 0보다 작아야 하므로

$-\dfrac{16}{a}+a<0$

$a>0$이므로 위의 부등식의 양변에 a를 곱하면

$-16+a^2<0$, $(a+4)(a-4)<0$

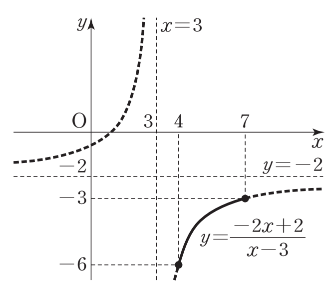
$\therefore 0<a<4$ $(\because a>0)$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ②

11 $y=\dfrac{-2x+2}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)-4}{x-3}=-\dfrac{4}{x-3}-2$

이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+2}{x-3}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $4\le x\le7$에서 함수 $y=\dfrac{-2x+2}{x-3}$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $x=7$일 때 최댓값 -3, $x=4$일 때 최솟값 -6을 갖는다.

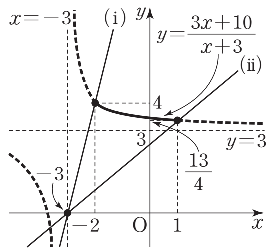
즉, $a=7$, $b=-3$, $c=4$, $d=-6$이므로

$a-b+c-d=7-(-3)+4-(-6)=20$ 답 20

12 $y=\dfrac{3x+10}{x+3}=\dfrac{3(x+3)+1}{x+3}=\dfrac{1}{x+3}+3$

이므로 함수 $y=\dfrac{3x+10}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 직선 $y=kx+3k$, 즉 $y=k(x+3)$은 k의 값에 관계 없이 항상 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 이 직선과 함수 $y=\dfrac{3x+10}{x+3}$의 그래프가 $-2\le x\le 1$에서 만나려면 직선이 다음 그림과 같이 직선 (ⅰ) 또는 직선 (ⅱ)이거나 두 직선 (ⅰ), (ⅱ) 사이에 있어야 한다.



(ⅰ) 직선 $y=kx+3k$가 점 $(-2,\ 4)$를 지날 때,

$4=-2k+3k \qquad \therefore k=4$

(ⅱ) 직선 $y=kx+3k$가 점 $\left(1,\ \dfrac{13}{4}\right)$을 지날 때,

$\dfrac{13}{4}=k+3k,\ 4k=\dfrac{13}{4}$

$\therefore k=\dfrac{13}{16}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\dfrac{13}{16}\le k\le 4$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $M=4$, 최솟값은 $m=\dfrac{13}{16}$이다.

$\therefore 16Mm=16\times 4\times\dfrac{13}{16}=52$ 답 52

13

$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$이므로

$f^2(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}$

$=\dfrac{x}{1-2x}$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}$

$=\dfrac{x}{1-3x}$

⋮

$\therefore f^n(x)=\dfrac{x}{1-nx}$

즉, $f^{20}(x)=\dfrac{x}{1-20x}=\dfrac{ax+b}{cx+1}$이므로

$a=1,\ b=0,\ c=-20$

$\therefore a+b+c=-19$ 답 ④

14

$g(f(x))=x$에서 $(g\circ f)(x)=x$

$\therefore \underline{f(x)=g^{-1}(x)}_{*}$ ……㉠

이때 $y=\dfrac{bx+1}{cx+2}$이라 하면

$y(cx+2)=bx+1,\ (cy-b)x=-2y+1$

$x=\dfrac{-2y+1}{cy-b}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{-2x+1}{cx-b} \qquad \therefore g^{-1}(x)=\dfrac{-2x+1}{cx-b}$

㉠에서

$\dfrac{-2x+a}{x+1}=\dfrac{-2x+1}{cx-b}$

$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=1$ 답 ③

• 다른 풀이 1 •

$*$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

$f(x)=\dfrac{-2x+a}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+a+2}{x+1}=\dfrac{a+2}{x+1}-2$

에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1,\ -2)$이다.

점 $(-1,\ -2)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이므로 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는

$g(x)=\dfrac{a+2}{x+2}-1=\dfrac{a+2-(x+2)}{x+2}=\dfrac{-x+a}{x+2}$

이때 $g(x)=\dfrac{bx+1}{cx+2}$이므로

$a=1,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=1$

• 다른 풀이 2 •

$*$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이다.

유리함수 $f(x)=\dfrac{-2x+a}{x+1}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\dfrac{-x+a}{x+2}$ ←본문 90쪽 비법노트ⓒ

즉, $g(x)=f^{-1}(x)$에서 $\dfrac{-x+a}{x+2}=\dfrac{bx+1}{cx+2}$이므로

$a=1,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=1$

BLACKLABEL 특강 참고

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프에서 두 점근선의 교점의 좌표는 $(p,\ q)$이고 상수 k는 곡선의 모양을 결정한다.
역함수 관계인 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 점 $(p,\ q)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 점 $(q,\ p)$이므로 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 역함수는 $y=\dfrac{k}{x-q}+p$이다.

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.93~97

01 22	02 ④	03 ⑤	04 ②	05 15
06 ①	07 5	08 5	09 2	10 ③
11 85	12 14	13 $\frac{9}{4}$	14 ②	15 8
16 ①	17 2	18 36	19 ④	20 $1<k\le 3$
21 4	22 9	23 -2	24 8	25 ②
26 32	27 1, $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+3}\ (-3<x\le 3)$			
28 ④	29 ③	30 ①		

01 $\frac{2}{x^2-1}+\frac{6}{x^2-9}+\frac{10}{x^2-25}+\cdots+\frac{42}{x^2-441}$

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}+\frac{6}{(x-3)(x+3)}+\frac{10}{(x-5)(x+5)}+\cdots+\frac{42}{(x-21)(x+21)}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-19}-\frac{1}{x+19}\right)+\left(\frac{1}{x-21}-\frac{1}{x+21}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+21}\right)+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+19}\right)+\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-21}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{22}{(x-1)(x+21)}+\frac{22}{(x-3)(x+19)}+\frac{22}{(x-5)(x+17)}+\cdots+\frac{22}{(x-21)(x+1)}$$

$$=22\left\{\frac{1}{(x-1)(x+21)}+\frac{1}{(x-3)(x+19)}+\frac{1}{(x-5)(x+17)}+\cdots+\frac{1}{(x-21)(x+1)}\right\}$$

$\therefore k=22$ 답 22

BLACKLABEL 특강 참고

부분분수로 변형하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

(1) $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) $\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$ (단, $a\neq 0$)

02 욕조의 부피를 V, 세 수도꼭지 A, B, C에서 매분 나오는 물의 양을 각각 a, b, c라 하면

$\frac{V}{a+b}=p$이므로 $a+b=\frac{V}{p}$ ······㉠

$\frac{V}{b+c}=q$이므로 $b+c=\frac{V}{q}$ ······㉡

$\frac{V}{c+a}=r$이므로 $c+a=\frac{V}{r}$ ······㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(a+b+c)=\frac{V}{p}+\frac{V}{q}+\frac{V}{r}$$

$$\therefore a+b+c=\frac{V(pq+qr+rp)}{2pqr}$$

따라서 세 수도꼭지 A, B, C를 동시에 사용하여 욕조에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은

$$\frac{V}{a+b+c}=\frac{V}{\frac{V(pq+qr+rp)}{2pqr}}=\frac{2pqr}{pq+qr+rp}$$

답 ④

03 ㄱ. $x+\frac{1}{x}=-1$에서 $x\neq 0$이므로 양변에 x를 곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0$

$\therefore 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+x+1}{x^2}=0$ (참)

ㄴ. $x+\frac{1}{x}=-1$에서

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$

$\therefore 2x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3$

$=2\times(-1)+4\times(-1)-3$

$=-9$ (참)

ㄷ. $x^{3n+2}+x^{3n+1}+x^{3n}+\frac{1}{x^{3n}}+\frac{1}{x^{3n+1}}+\frac{1}{x^{3n+2}}$

$=x^{3n}(x^2+x+1)+\frac{1}{x^{3n}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^{3n}\times 0+\frac{1}{x^{3n}}\times 0$ ($\because$ ㄱ)

$=0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

ㄷ. $x+\frac{1}{x}=-1$에서 $x\neq 0$이므로 $x^2+x+1=0$

양변에 $x-1$을 곱하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0$ $\therefore x^3=1$

$\therefore x^{3n}+x^{3n+1}+x^{3n+2}+\frac{1}{x^{3n}}+\frac{1}{x^{3n+1}}+\frac{1}{x^{3n+2}}$

$=1+x+x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

$=0$ ($\because$ ㄱ) (참)

04 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=0$에서

$ab+bc+ca=0$

ㄱ. $\dfrac{a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c}{(c+a)(c+b)}$

$=\dfrac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=\dfrac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$ ($\because ab+bc+ca=0$)

(참)

ㄴ. $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$의 양변에

a를 곱하면 $1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}=0$ $\quad\therefore \dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}=-1$

b를 곱하면 $\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}=0$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}=-1$

c를 곱하면 $\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1=0$ $\quad\therefore \dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=-1$

$\therefore \dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

$=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\right)$

$=-3$ (참)

ㄷ. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$ ($\because ab+bc+ca=0$)

이므로

$$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{1}{2} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

• 다른 풀이 •

ㄴ. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$의 양변에 $a+b+c$를 곱하면

$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=0$

$1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+1+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+1=0$

$\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+3=0$

$\therefore \dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}=-3$

05 $\dfrac{165}{98}=1+\dfrac{1}{\frac{98}{67}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{67}{31}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\frac{31}{5}}}}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{6+\frac{1}{5}}}}$

이므로 $f\left(\dfrac{165}{98}\right)=1+1+2+6+5=15$ **답** 15

• 다른 풀이 •

$\dfrac{m_k}{n_k}=a_k+\dfrac{1}{\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}}$

(단, k는 음이 아닌 정수이고, $m_0=q$, $n_0=p$)

이라 하면

$m_{k+1}=n_k$,

$a_k=(m_k$를 n_k로 나누었을 때의 몫$)$,

$n_{k+1}=(m_k$를 n_k로 나누었을 때의 나머지$)$

이것을 이용하여 a_n을 구하면

$165=98\times 1+67$에서

$a_0=1$, $\dfrac{m_1}{n_1}=\dfrac{98}{67}$

$98=67\times 1+31$에서

$a_1=1$, $\dfrac{m_2}{n_2}=\dfrac{67}{31}$

$67=31\times 2+5$에서

$a_2=2$, $\dfrac{m_3}{n_3}=\dfrac{31}{5}$

$31=5\times 6+1$에서

$a_3=6$, $\dfrac{m_4}{n_4}=\dfrac{5}{1}$이므로

$a_4=5$

$\therefore f\left(\dfrac{165}{98}\right)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$

$=1+1+2+6+5=15$

06 $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n(n+1)}-\dfrac{b}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{a(n+2)-bn}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{(a-b)n+2a}{n(n+1)(n+2)}$ (a, b는 상수)

라 할 때, 위의 등식은 n에 대한 항등식이므로

$a-b=0$, $2a=4$

$\therefore a=b=2$

즉, $\dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{2}{n(n+1)}-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

이므로

$*\,f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=2\left\{\left(\dfrac{1}{1\times 2}-\dfrac{1}{2\times 3}\right)+\left(\dfrac{1}{2\times 3}-\dfrac{1}{3\times 4}\right)\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{3\times 4}-\dfrac{1}{4\times 5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10\times 11}-\dfrac{1}{11\times 12}\right)\right\}$

$=2\left(\dfrac{1}{1\times 2}-\dfrac{1}{11\times 12}\right)$

$=2\times\dfrac{65}{132}=\dfrac{65}{66}$

따라서 $p=66$, $q=65$이므로

$p+q=131$ **답** ①

• 다른 풀이 •

$$f(n)=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{4}{n+1}\times\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{4}{n+1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=2\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

다음은 *와 같다.

BLACKLABEL 특강 필수 개념

부분분수

분모가 세 식의 곱인 경우의 부분분수는 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$$

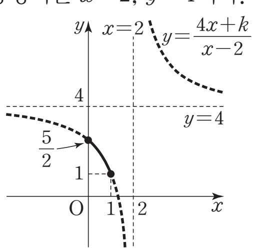
[증명] $\frac{1}{ABC}=\frac{1}{B}\times\frac{1}{AC}=\frac{1}{B}\times\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)$

$=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$

07 $y=\frac{4x+k}{x-2}=\frac{4(x-2)+k+8}{x-2}=\frac{k+8}{x-2}+4$

이므로 함수 $y=\frac{4x+k}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{k+8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=4$이다.

이때 $a\le x\le 1$에서 최댓값이 $\frac{5}{2}$로 4보다 작으므로 주어진 유리함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$x=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$\frac{4+k}{1-2}=1$, $4+k=-1$

$\therefore k=-5$ $\quad\therefore y=\frac{4x-5}{x-2}$

$x=a$일 때 최댓값 $\frac{5}{2}$를 가지므로 $\frac{4a-5}{a-2}=\frac{5}{2}$

$8a-10=5a-10$, $3a=0$ $\quad\therefore a=0$

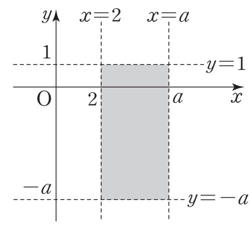
$\therefore a-k=0-(-5)=5$

답 5

08 $y=\frac{x-4}{x-a}=\frac{(x-a)+a-4}{x-a}=\frac{a-4}{x-a}+1$이므로 유리함수 $y=\frac{x-4}{x-a}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=1$이고,

$y=\frac{-ax+1}{x-2}=\frac{-a(x-2)-2a+1}{x-2}=\frac{-2a+1}{x-2}-a$이므로 유리함수 $y=\frac{-ax+1}{x-2}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-a$이다.*

그런데 $0<a<2$이면 네 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 18보다 작으므로 오른쪽 그림과 같이 $a>2$이어야 한다.



이때 넓이가 18이므로

$(a-2)(1+a)=18$에서

$a^2-a-2=18$, $a^2-a-20=0$

$(a+4)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=5\ (\because a>2)$

답 5

• 다른 풀이 •

*에서 두 유리함수 $y=\frac{x-4}{x-a}$, $y=\frac{-ax+1}{x-2}$의 그래프의 점근선으로 둘러싸인 도형은 가로의 길이가 $|a-2|$, 세로의 길이가 $|a+1|$인 직사각형이다.

이때 도형의 넓이가 18이므로

$|a+1|\times|a-2|=18$

$|(a+1)(a-2)|=18$, $|a^2-a-2|=18$

$\therefore a^2-a-2=18$ 또는 $a^2-a-2=-18$

(i) $a^2-a-2=18$일 때,

$a^2-a-20=0$, $(a+4)(a-5)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=5$

(ii) $a^2-a-2=-18$일 때,

$a^2-a+16=0$이고, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times1\times16=-63<0$

이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a=5\ (\because a>0)$

BLACKLABEL 특강 참고

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선은 분모 $cx+d$가 0이 될 때의 x의 값, 즉 $-\frac{d}{c}$와 분모, 분자의 x의 계수의 비, 즉 $\frac{a}{c}$가 결정한다.

이를 알면 점근선을 쉽게 구하고, 유리함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

09 $x\neq -a$인 모든 실수 x에 대하여 유리함수 $f(x)=\frac{bx+c}{x+a}$가 $f(2-x)+f(2+x)=2$를 만족시키므로 이 유리함수의 그래프는 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이다.

$f(a-x)+f(a+x)=2b$: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (a, b)에 대하여 대칭

즉, 두 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로

$f(x)=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)+c-ab}{x+a}=\frac{c-ab}{x+a}+b$에서

$-a=2$, $b=1$ $\quad\therefore a=-2$, $b=1$

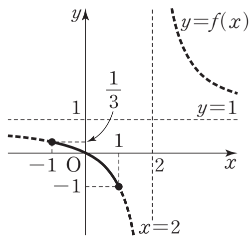
또한, 유리함수 $f(x)=\frac{x+c}{x-2}$에 대하여 $f(3)=3$이므로

$\frac{3+c}{3-2}=3$, $3+c=3$ $\quad\therefore c=0$

*즉, $f(x)=\frac{2}{x-2}+1$이므로 이 유리함수의 그래프는 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향

으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $-1 \le x \le 1$에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $M=\frac{1}{3}$,

$x=1$일 때 최솟값 $m=-1$을 갖는다.

$\therefore 3M-m=3\times\frac{1}{3}-(-1)=2$ 답 2

• 다른 풀이 1 •

유리함수 $f(x)=\frac{bx+c}{x+a}$의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이므로 유리함수의 식을 $f(x)=\frac{k}{x-2}+1\ (k\neq 0)$이라 할 수 있다.

이때 유리함수 $f(x)=\frac{k}{x-2}+1$이 $f(3)=3$을 만족시키므로 $f(3)=k+1=3$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore f(x)=\frac{2}{x-2}+1$

다음은 *와 같다.

• 다른 풀이 2 •

$f(3)=3$에서 $\frac{3b+c}{3+a}=3$

$\therefore c=3a-3b+9$ ……㉠

$f(2-x)+f(2+x)=2$에서

$\frac{b(2-x)+c}{(2-x)+a}+\frac{b(2+x)+c}{(2+x)+a}=2$

$\frac{(2b-bx+c)(2+a+x)+(2b+bx+c)(2+a-x)}{(2+a-x)(2+a+x)}=2$

$-2bx^2+8b+4ab+2ac+4c=-2x^2+2a^2+8a+8$

위의 식이 x에 대한 항등식이므로

$-2b=-2$ ……㉡

$8b+4ab+2ac+4c=2a^2+8a+8$ ……㉢

㉡에서 $b=1$, ㉠에서 $c=3a+6$

이것을 ㉢에 대입하면

$a^2+5a+6=0,\ (a+3)(a+2)=0$

이때 $a=-3$이면 $f(3)$이 정의되지 않으므로

$a=-2,\ c=0$

$\therefore f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}+1$

다음은 *와 같다.

BLACKLABEL 특강 참고

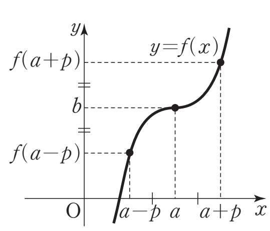
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)에 대하여 대칭이면 실수 p에 대하여

$\frac{f(a-p)+f(a+p)}{2}=b$

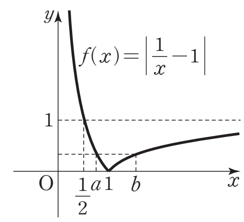
이므로

$f(a-p)+f(a+p)=2b$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)에 대하여 대칭이면 $f(a-x)+f(a+x)=2b$이다.



10 ㄱ. $0<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립하므로 오른쪽 그림과 같이 $a<1<b$이고, $x>1$일 때 $0<f(x)<1$이므로 $0<f(b)<1$ (참)



ㄴ. $\left|\frac{1}{x}-1\right|=1$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}<a<1,\ b>1$이다. (거짓)

ㄷ. $f(a)=\left|\frac{1}{a}-1\right|=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$,

$f(b)=\left|\frac{1}{b}-1\right|=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}$ ($\because$ ㄴ)이므로

$f(a)f(b)=\frac{1-a}{a}\times\frac{b-1}{b}$

$=-\frac{(a-1)(b-1)}{ab}$ (참)

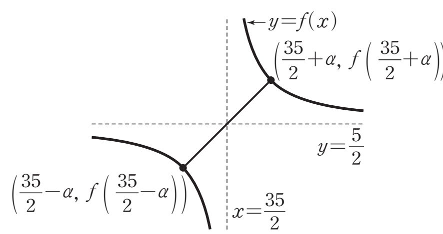
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

11 두 직선 $y=x-15$, $y=-x+20$의 교점의 x좌표를 구하면

$x-15=-x+20$, $2x=35$

$\therefore x=\frac{35}{2},\ y=\frac{35}{2}-15=\frac{5}{2}$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{35}{2}, \frac{5}{2}\right)$이고 유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x-15$, $y=-x+20$에 대하여 각각 대칭이므로 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=\frac{35}{2}$, $y=\frac{5}{2}$이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{35}{2}, \frac{5}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\left(\frac{35}{2}-\alpha, f\left(\frac{35}{2}-\alpha\right)\right)$, $\left(\frac{35}{2}+\alpha, f\left(\frac{35}{2}+\alpha\right)\right)$를 이은 선분의 중점이 점 $\left(\frac{35}{2}, \frac{5}{2}\right)$이어야 한다.

즉, $\frac{f\left(\frac{35}{2}-\alpha\right)+f\left(\frac{35}{2}+\alpha\right)}{2}=\frac{5}{2}$이므로

$f\left(\frac{35}{2}-\alpha\right)+f\left(\frac{35}{2}+\alpha\right)=5$

위의 식에 α 대신 $\frac{35}{2}-x$를 대입하여 정리하면

$f(x)+f(35-x)=5$

위의 식에 $x=1, 2, \cdots, 17$을 대입하면

$f(1)+f(34)=f(2)+f(33)=\cdots=f(17)+f(18)$

$=5$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(34)$

$=\{f(1)+f(34)\}+\{f(2)+f(33)\}+\cdots$

$+\{f(17)+f(18)\}$

$=5\times17=85$ 답 85

단계	채점 기준	배점
(가)	두 직선 $y=x-15$, $y=-x+20$의 교점을 구한 경우	20%
(나)	유리함수 $y=f(x)$의 그래프가 (가)에서 구한 점에 대하여 대칭임을 파악한 경우	30%
(다)	유리함수 $y=f(x)$의 그래프에서 대칭인 두 점 사이의 관계식을 구한 경우	30%
(라)	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(34)$의 값을 구한 경우	20%

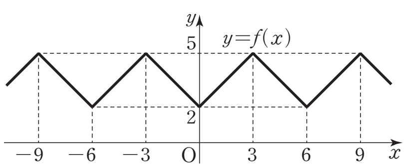
12 조건 (가)에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (-3\le x<0)\\ x+2 & (0\le x\le 3)\end{cases}$$

조건 (나)에서 $x-3=x'$으로 놓으면

$f(x')=f(x'+6)$

따라서 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $a=0$일 때,

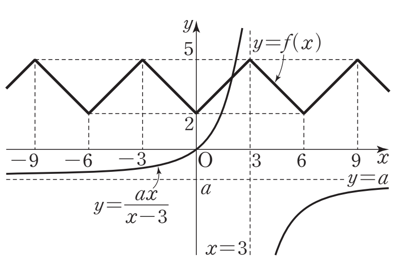
$y=\dfrac{ax}{x-3}=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$은 서로 만나지 않는다.

(ii) $a\ne0$일 때,

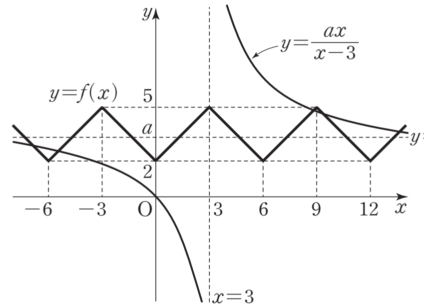
$y=\dfrac{ax}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+3a}{x-3}=\dfrac{3a}{x-3}+a$이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=a$이고 이 그래프는 항상 점 $(0, 0)$을 지난다.

$a<0$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같이 한 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=\dfrac{ax}{x-3}$의 그래프가 무수히 많은 점에서 만나려면 $a>0$이어야 하고, 유리함수 $y=\dfrac{ax}{x-3}$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 유리함수 $y=\dfrac{ax}{x-3}$의 그래프의 점근선 $y=a$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나야 하므로

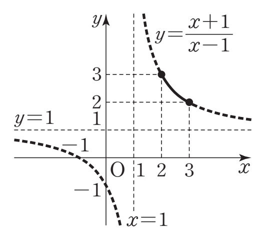
$2\le a\le5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 a는 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$2+3+4+5=14$ 답 14

13 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=1$이므로 $2\le x\le3$에서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

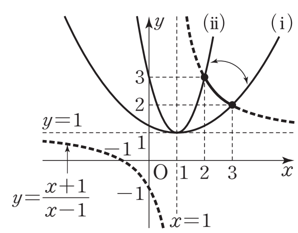


한편,

$y=ax^2-2ax+a+1$

$=a(x-1)^2+1$,

$y=bx^2-2bx+b+1=b(x-1)^2+1$이므로 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 모두 $(1, 1)$이다.



주어진 부등식이 $2\le x\le3$에서 항상 성립하도록 하는 상수 a의 값은 위의 그림의 (i)과 같이 이차함수 $y=a(x-1)^2+1$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지날 때 최대이고, b의 값은 (ii)와 같이 이차함수 $y=b(x-1)^2+1$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때 최소이다.

즉, $y=a(x-1)^2+1$에 $x=3$, $y=2$를 대입하면

$2=a(3-1)^2+1$

$2=4a+1\qquad\therefore a=\dfrac{1}{4}=M$

$y=b(x-1)^2+1$에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$3=b(2-1)^2+1$

$3=b+1\qquad\therefore b=2=m$

$\therefore M+m=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$ 답 $\dfrac{9}{4}$

BLACKLABEL 특강 참고

부등식을 이용하여 a, b의 값의 범위를 구할 수도 있다.

$2\le x\le 3$이므로 $x-1>0$

$y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$에서

$a(x-1)^2+1\le\dfrac{2}{x-1}+1\le b(x-1)^2+1$

$a(x-1)^2\le\dfrac{2}{x-1}\le b(x-1)^2$

위의 식의 양변을 $(x-1)^2$으로 나누면 $a\le\dfrac{2}{(x-1)^3}\le b$ ……㉠

또한, $2\le x\le 3$에서 $1\le x-1\le 2$이므로

$1\le(x-1)^3\le 8$, $\dfrac{1}{8}\le\dfrac{1}{(x-1)^3}\le 1$

$\therefore \dfrac{1}{4}\le\dfrac{2}{(x-1)^3}\le 2$ ……㉡

$2\le x\le 3$에서 ㉠이 항상 성립하려면 ㉡을 포함해야 하므로

$a\le\dfrac{1}{4}$, $b\ge 2$

14 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$을 정리하면

$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

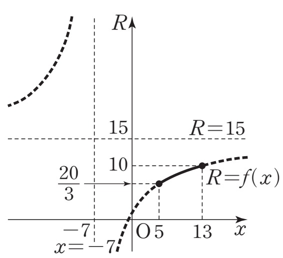
주어진 그림의 전기회로도에서 총 저항의 크기는

$R=\dfrac{10(x-3)}{10+(x-3)}+5=\dfrac{15x+5}{x+7}$

$=\dfrac{15(x+7)-100}{x+7}=-\dfrac{100}{x+7}+15$

$\therefore f(x)=-\dfrac{100}{x+7}+15$

이때 $5\le x\le 13$에서 함수 $R=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\dfrac{20}{3}\le R\le 10$

따라서 구하는 치역은

$\left\{R\,\middle|\,\dfrac{20}{3}\le R\le 10\right\}$ 답 ②

15 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=0$, $y=k$

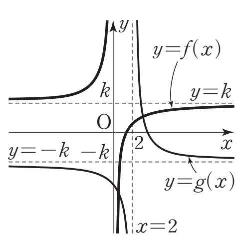
함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=-k$

k의 값의 범위에 따라 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 다음과 같다.

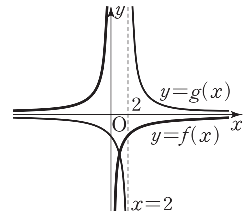
(i) $k>0$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 2이다.



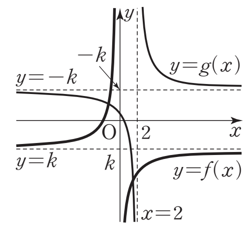
(ii) $k=0$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.



(iii) $k<0$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수는 1이다.



(i), (ii), (iii)에서

$h(k)=\begin{cases}1 & (k\le 0)\\ 2 & (k>0)\end{cases}$

*이때 두 정수 m, $4-m$에 대하여

$h(m)+h(4-m)=3$이려면

$h(m)=1$, $h(4-m)=2$ 또는 $h(m)=2$, $h(4-m)=1$

이어야 한다.

즉, $m\le 0$, $4-m>0$ 또는 $m>0$, $4-m\le 0$이므로

$m\le 0$ 또는 $m\ge 4$

$|m|\le 5$이므로 조건을 만족시키는 정수 m은

-5, -4, -3, -2, -1, 0, 4, 5의 8개이다.

답 8

• 다른 풀이 •

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수가 $h(k)$이므로

$f(x)=g(x)$에서

$-\dfrac{2}{x}+k=\dfrac{1}{x-2}-k$

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}=2k$, $\dfrac{3x-4}{x(x-2)}=2k$

$\therefore 2kx^2-(4k+3)x+4=0$ (단, $x\ne 0$, $x\ne 2$) ……㉠

(i) $k=0$일 때,

㉠에 $k=0$을 대입하면 $-3x+4=0$

$\therefore x=\dfrac{4}{3}$

즉, 양수인 근의 개수가 1이므로 x좌표가 양수인 점의 개수도 1이고 $h(0)=1$

(ii) $k\ne 0$일 때,

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(4k+3)^2-4\times 2k\times 4$

$=16k^2-8k+9$

$=16\left(k-\dfrac{1}{4}\right)^2+8>0$

이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{4k+3}{2k}=2+\dfrac{3}{2k}$, $\alpha\beta=\dfrac{4}{2k}=\dfrac{2}{k}$

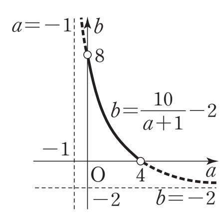
① $k<0$일 때,
$\alpha\beta<0$이므로 $\alpha<0<\beta$
즉, 양수인 근의 개수가 1이므로 $h(k)=1$
② $k>0$일 때,
$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이므로 $0<\alpha<\beta$
즉, 양수인 근의 개수가 2이므로 $h(k)=2$

(i), (ii)에서 $h(k)=\begin{cases} 1 & (k\le 0) \\ 2 & (k>0) \end{cases}$

다음은 *와 같다.

16

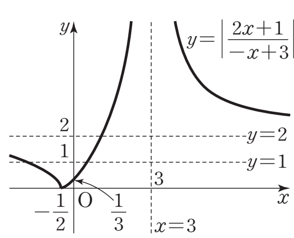
점 P(1, 2)를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 점이 Q, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 점이 R이므로
$Q(a+1,\ 2)$, $R(1,\ b+2)$
이때 삼각형 OQR의 넓이를 S라 하면
$S=\triangle OPQ+\triangle PQR+\triangle OPR$
$=\frac{1}{2}\times a\times 2+\frac{1}{2}\times a\times b+\frac{1}{2}\times b\times 1$
$=\frac{1}{2}(ab+2a+b)=4$
에서 $ab+2a+b=8$
$(a+1)b=8-2a$
$\therefore b=\frac{8-2a}{a+1}=\frac{-2(a+1)+10}{a+1}=\frac{10}{a+1}-2$
따라서 순서쌍 $(a,\ b)$를 좌표평면에 나타내면 유리함수
$b=\frac{10}{a+1}-2\ (a>0,\ b>0)$
의 그래프이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 ①

17

$y=\frac{2x+1}{-x+3}=\frac{-2(-x+3)+7}{-x+3}=-\frac{7}{x-3}-2$
이므로 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은
$x=3$, $y=-2$이고, 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지난다.
함수 $y=\left|\frac{2x+1}{-x+3}\right|$의 그래프는 유리함수 $y=\frac{2x+1}{-x+3}$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

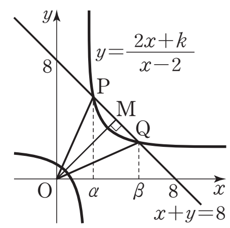


(i) 함수 $y=\left|\frac{2x+1}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 2이므로 $N(1)=2$
(ii) 함수 $y=\left|\frac{2x+1}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 개수는 1이므로 $N(0)=1$
(iii) 함수 $y=\left|\frac{2x+1}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 1이므로 $N(2)=1$
$\therefore N(1)-N(0)+N(2)=2-1+1=2$

답 2

18

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2x+k}{x-2}$와 직선 $x+y=8$의 두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하자.



$y=8-x$를 $y=\frac{2x+k}{x-2}$에 대입하여 정리하면
$x^2-8x+(k+16)=0$ ……㉠
방정식 ㉠의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=k+16$
이때 $\alpha\beta=14$이므로 $k=-2$ *
곡선 $y=\frac{2x-2}{x-2}=\frac{2}{x-2}+2$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면
$\overline{OM}\perp\overline{PQ}$
$\therefore \overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OP}^2=\overline{OM}^2+\left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\right)^2$
이때 원점과 직선 $x+y-8=0$ 사이의 거리는
$\overline{OM}=\frac{|-8|}{\sqrt{1+1}}=4\sqrt{2}$
이고, $P(\alpha,\ 8-\alpha)$, $Q(\beta,\ 8-\beta)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=4$
$\therefore \overline{OP}\times\overline{OQ}=32+4=36$

답 36

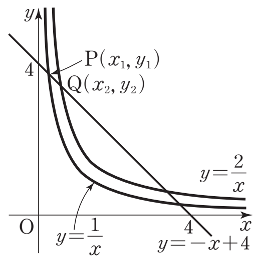
• 다른 풀이 1 •

*에서 $k=-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$x^2-8x+14=0$ $\quad\therefore x=4\pm\sqrt{2}$
$\therefore P(4-\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2})$, $Q(4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2})$
$\therefore \overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OP}^2=(4-\sqrt{2})^2+(4+\sqrt{2})^2$
$=36$

• 다른 풀이 2 •

*에서 $k=-2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$x^2-8x+14=0$
이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로
$\alpha^2-8\alpha+14=0$, $\beta^2-8\beta+14=0$ ……㉡
$\therefore \overline{OP}\times\overline{OQ}$
$=\sqrt{\alpha^2+(8-\alpha)^2}\sqrt{\beta^2+(8-\beta)^2}$
$=\sqrt{2\alpha^2-16\alpha+64}\sqrt{2\beta^2-16\beta+64}$
$=\sqrt{2(\alpha^2-8\alpha+14)+36}\sqrt{2(\beta^2-8\beta+14)+36}$
$=\sqrt{36}\sqrt{36}$ ($\because$ ㉡)
$=36$

19 직선 $y=-x+4$가 두 함수 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점 중에서 y축에 가까운 점을 다음 그림과 같이 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$라 하자.



ㄱ. 주어진 그래프에서 $y_1>y_2$이므로

$\frac{1}{x_1}>\frac{2}{x_2}$

이때 $x_1>0$, $x_2>0$이므로 위의 부등식의 양변에 x_1x_2를 곱하면 $x_2>2x_1$ (거짓)

ㄴ. 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식이 $y=-x+4$이므로 직선 PQ의 기울기는 -1이다.

즉, $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$에서

$y_1-y_2=-(x_1-x_2)$

$\therefore y_1-y_2=x_2-x_1$ (참)

ㄷ. 원점 O에서 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 각각 지나는 직선의 기울기를 비교하면

$\frac{y_1-0}{x_1-0}>\frac{y_2-0}{x_2-0}$, $\frac{y_1}{x_1}>\frac{y_2}{x_2}$

$\therefore x_2y_1>x_1y_2$ ($\because x_1>0$, $x_2>0$)

이 부등식의 양변에 x_1y_2를 각각 더하면

$x_1y_2+x_2y_1>x_1y_2+x_1y_2$

$=2x_1y_2$

$>2x_1x_2$ ($\because y_2>x_2$)

$\therefore x_1y_2+x_2y_1>2x_1x_2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

• 다른 풀이 •

ㄷ. 직선 $y=-x+4$가 두 함수 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점 중에서 y축에 가까운 점이 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$이므로 원점 O에서 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 각각 지나는 직선의 기울기는 1보다 크다. 즉,

$\frac{y_1-0}{x_1-0}>1$, $\frac{y_1}{x_1}>1$ ……㉠

$\frac{y_2-0}{x_2-0}>1$, $\frac{y_2}{x_2}>1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}>2$

이때 $x_1x_2>0$이므로 부등식의 양변에 x_1x_2를 곱하면

$x_1y_2+x_2y_1>2x_1x_2$ (참)

20 해결단계

❶ 단계	x의 값의 범위에 따른 함수식을 구하고, 함수의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	직선 $y=kx+3k-4$ $(k\neq0)$가 항상 지나는 점을 구하고, ❶ 단계의 그래프와 교점이 존재하지 않을 조건을 구한다.
❸ 단계	조건에 따른 실수 k의 값의 범위를 구한다.

$$y=\frac{|2x|-2}{|x+1|}$$

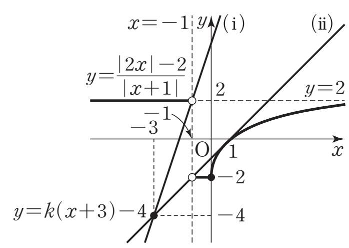
$$=\begin{cases}\frac{-2x-2}{-(x+1)} & (x<-1)\\ \frac{-2x-2}{x+1} & (-1<x<0)\\ \frac{2x-2}{x+1} & (x\geq0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2 & (x<-1)\\ -2 & (-1<x<0)\\ -\frac{4}{x+1}+2 & (x\geq0)\end{cases}$$

에서 유리함수 $y=-\frac{4}{x+1}+2$의 그래프는 두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$이고, 두 점 $(0, -2)$, $(1, 0)$을 지난다.

또한, 직선 $y=kx+3k-4$, 즉 $y=k(x+3)-4$ $(k\neq0)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -4)$를 지난다.

따라서 함수 $y=\frac{|2x|-2}{|x+1|}$의 그래프와 직선 $y=k(x+3)-4$의 교점이 존재하지 않으려면 다음 그림과 같이 직선 $y=k(x+3)-4$가 직선 (i)이거나 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=k(x+3)-4$가 점 $(-1, 2)$를 지나는 경우

$2=2k-4$, $2k=6$ $\quad\therefore k=3$

(ii) 직선 $y=k(x+3)-4$가 점 $(-1, -2)$를 지나거나 유리함수 $y=-\frac{4}{x+1}+2$ $(x\geq0)$의 그래프와 접하는 경우

직선 $y=k(x+3)-4$가 점 $(-1, -2)$를 지나면

$-2=2k-4$, $2k=2$ $\quad\therefore k=1$

직선 $y=k(x+3)-4$가 유리함수 $y=-\frac{4}{x+1}+2$의 그래프와 접하면 방정식 $k(x+3)-4=-\frac{4}{x+1}+2$가 $x\geq0$에서 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 양변에 $x+1$을 곱하면

$k(x+1)(x+3)-4(x+1)=-4+2(x+1)$

$kx^2+4kx+3k-4x-4=-4+2x+2$

$kx^2+2(2k-3)x+3k-2=0$

$k\neq0$이므로 이 이차방정식이 중근을 가져야 하고, 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k-3)^2-k(3k-2)=0$

$k^2-10k+9=0,\ (k-1)(k-9)=0$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=9$

그런데 직선 $y=k(x+3)-4$가 $x\geq0$에서 유리함수 $y=-\dfrac{4}{x+1}+2$의 그래프와 접해야 하므로 $k=1$

따라서 직선 $y=k(x+3)-4$가 점 $(-1,\ -2)$를 지나거나 유리함수 $y=-\dfrac{4}{x+1}+2\ (x\geq0)$의 그래프와 접하는 경우는 같은 직선이므로

$k=1$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는

$1<k\leq3$ 답 $1<k\leq3$

21 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+2$에서 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=2$이므로 두 점근선의 교점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

또한, 두 직선 $x=1,\ y=mx-2m$의 교점 B의 좌표는 $(1,\ -m)$이고, 두 직선 $y=2,\ y=mx-2m$의 교점 C의 좌표는 $\left(2+\dfrac{2}{m},\ 2\right)$이다.

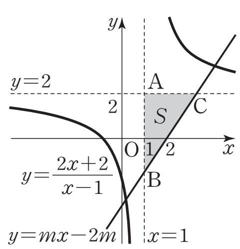
이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2}{m}-1\right)\{2-(-m)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{m}\right)(2+m)$

$=\dfrac{1}{2}\left(2+m+\dfrac{4}{m}+2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(4+m+\dfrac{4}{m}\right)$



이때 $m>0,\ \dfrac{4}{m}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S\geq\dfrac{1}{2}\left(4+2\sqrt{m\times\dfrac{4}{m}}\right)$ (단, 등호는 $m=2$일 때 성립)

$=\dfrac{1}{2}\times(4+4)=4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은 4이다. 답 4

22 제1사분면에 있는 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$이라 하면 두 점 B, C는

$\mathrm{B}\left(k\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right),\ \mathrm{C}\left(\alpha,\ \dfrac{k}{\alpha}\right)$이고, $k>1$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=k\alpha-\alpha=\alpha(k-1),\ \overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{k}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{k-1}{\alpha}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\alpha(k-1)\times\dfrac{k-1}{\alpha}$

$=\dfrac{1}{2}(k-1)^2$

즉, $\dfrac{1}{2}(k-1)^2=32$이므로 $(k-1)^2=64$

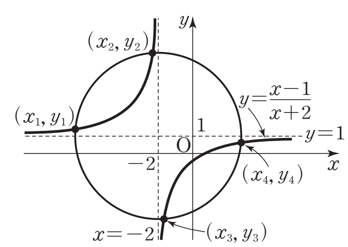
$k-1=\pm8$ $\quad\therefore\ k=9\ (\because\ k>1)$ 답 9

단계	채점 기준	배점
(가)	점 A의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 각각 나타낸 경우	20%
(나)	두 선분 AB, AC의 길이를 각각 구한 경우	30%
(다)	삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 k의 값을 구한 경우	50%

23 $y=\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{(x+2)-3}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}+1$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-2,\ y=1$이고, 두 점 $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

따라서 중심이 점 $(-2,\ 1)$인 원과 유리함수 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



한편, 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점에 대하여 대칭이므로 주어진 유리함수 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$의 그래프는 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이다.

또한, 중심이 점 $(-2,\ 1)$인 원도 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로 원과 유리함수 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$의 그래프의 교점은 서로 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_4,\ y_4)$와 두 점 $(x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)$이 각각 점 $(-2,\ 1)$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{x_1+x_4}{2}=-2,\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=1$에서

$x_1+x_4=-4,\ y_2+y_3=2$

$\therefore\ \dfrac{x_1+x_4}{y_2+y_3}=\dfrac{-4}{2}=-2$ 답 -2

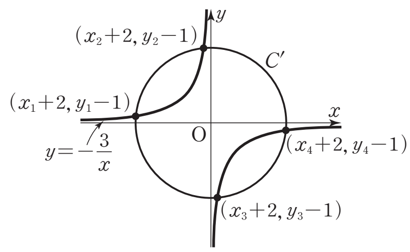
• 다른 풀이 •

$y=\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{(x+2)-3}{x+2}=-\dfrac{3}{x+2}+1$

에서 주어진 유리함수의 그래프는 유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또한, 주어진 원을 C라 하고, 원 C를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 원을 C'이라 하자.

원 C와 유리함수 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$의 그래프의 네 교점의 좌표가 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$이므로 원 C'과 유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프는 네 점에서 만나고 그 좌표는 각각 $(x_1+2,\ y_1-1)$, $(x_2+2,\ y_2-1)$, $(x_3+2,\ y_3-1)$, $(x_4+2,\ y_4-1)$이다.



한편, 원 C'과 유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프는 각각 두 직선 $y=x$, $y=-x$, 원점에 대하여 모두 대칭이므로 네 교점도 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 또는 원점에 대하여 대칭이어야 한다.

두 점 $(x_1+2,\ y_1-1)$, $(x_4+2,\ y_4-1)$이 원점에 대하여 대칭이므로

$x_1+2=-(x_4+2) \qquad \therefore\ x_1+x_4=-4$

또한, 두 점 $(x_2+2,\ y_2-1)$, $(x_3+2,\ y_3-1)$이 원점에 대하여 대칭이므로

$y_2-1=-(y_3-1) \qquad \therefore\ y_2+y_3=2$

$\therefore\ \dfrac{x_1+x_4}{y_2+y_3}=\dfrac{-4}{2}=-2$

24 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{f(a+4)-f(a)}{a+4-a}=-1$

$\dfrac{\dfrac{k}{a+4}-\dfrac{k}{a}}{4}=-1,\ \dfrac{k}{a+4}-\dfrac{k}{a}=-4$

$\dfrac{-4k}{a(a+4)}=-4 \qquad \therefore\ k=a(a+4)$

즉, $f(a)=a+4$, $f(a+4)=a$이므로

$\mathrm{P}(a,\ a+4)$, $\mathrm{Q}(a+4,\ a)$

두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점이 각각 R, S이므로

$\mathrm{R}(-a,\ -a-4)$, $\mathrm{S}(-a-4,\ -a)$

직선 PS의 기울기는

$\dfrac{-a-(a+4)}{(-a-4)-a}=\dfrac{-2a-4}{-2a-4}=1$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{PS}}$가 되어 □PQRS는 직사각형이다.

따라서 사각형 PQRS의 넓이는

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PS}}$

$=\sqrt{(a+4-a)^2+\{a-(a+4)\}^2}$

$\qquad\times\sqrt{(-a-4-a)^2+\{-a-(a+4)\}^2}$

$=\sqrt{4^2+(-4)^2}\times\sqrt{(2a+4)^2+(2a+4)^2}$

$=4\sqrt{2}\times\sqrt{2}(2a+4)\ (\because\ 2a+4>0)$

$=16a+32$

사각형 PQRS의 넓이가 $32\sqrt{3}$이므로

$16a+32=32\sqrt{3}$

$16a=32\sqrt{3}-32 \qquad \therefore\ a=2\sqrt{3}-2$

$\therefore\ k=a(a+4)=(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)=8$ 답 8

• 다른 풀이 •

함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이고, 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한, 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 두 점 R, S는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있고 직선 RS의 기울기는 -1이다.

따라서 □PQRS는 직사각형이다.

점 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{a},\ a\right)$

이 점이 $\mathrm{Q}\left(a+4,\ \dfrac{k}{a+4}\right)$와 일치하므로

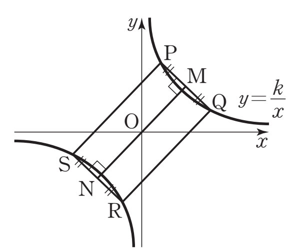
$\dfrac{k}{a}=a+4,\ a=\dfrac{k}{a+4}$

$\therefore\ k=a(a+4)$, $\mathrm{P}(a,\ a+4)$, $\mathrm{Q}(a+4,\ a)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(a+4-a)^2+\{a-(a+4)\}^2}$

$\qquad=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

한편, 오른쪽 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M, 선분 RS의 중점을 N이라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{MN}}$



이때

$\mathrm{M}\left(\dfrac{a+a+4}{2},\ \dfrac{a+4+a}{2}\right)$,

즉 $\mathrm{M}(a+2,\ a+2)$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{(a+2)^2+(a+2)^2}=\sqrt{2}(a+2)\ (\because\ a+2>0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{MN}}=2\overline{\mathrm{OM}}=2\sqrt{2}(a+2)$

사각형 PQRS의 넓이가 $32\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{MN}}=4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}(a+2)$

$\qquad=16(a+2)=32\sqrt{3}$

$a+2=2\sqrt{3} \qquad \therefore\ a=2\sqrt{3}-2$

$\therefore\ k=a(a+4)=(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)=8$

25 함수 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$이고 두 점근선의 교점은 원점이므로 함수 $y=-\dfrac{8}{x}$

의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
또한, 원점을 지나는 직선 l도 원점에 대하여 대칭이므로 유리함수 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프와 직선 l의 두 교점 Q, R은 서로 원점에 대하여 대칭이다. *

함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 제1사분면의 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>0)$라 하고, 함수 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프 위의 두 점 Q, R의 좌표를 각각 $\left(-b,\ \dfrac{8}{b}\right)$, $\left(b,\ -\dfrac{8}{b}\right)$ $(b>0)$이라 하면 삼각형 PQR에서 변 QR의 길이는

$$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\{b-(-b)\}^2+\left(-\frac{8}{b}-\frac{8}{b}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4b^2+\frac{256}{b^2}}=\frac{2\sqrt{b^4+64}}{b}$$

한편, 직선 QR, 즉 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{-\frac{8}{b}-\frac{8}{b}}{b-(-b)}x$$

$$y=-\frac{8}{b^2}x \qquad \therefore\ l: 8x+b^2y=0$$

점 P와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{\left|8a+\frac{2b^2}{a}\right|}{\sqrt{8^2+b^4}}=\frac{8a+\frac{2b^2}{a}}{\sqrt{b^4+64}}=\frac{8a^2+2b^2}{a\sqrt{b^4+64}}$$

즉, 삼각형 PQR은 밑변의 길이가 $\dfrac{2\sqrt{b^4+64}}{b}$, 높이가 $\dfrac{8a^2+2b^2}{a\sqrt{b^4+64}}$인 삼각형이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{b^4+64}}{b}\times\frac{8a^2+2b^2}{a\sqrt{b^4+64}}$$
$$=\frac{8a^2+2b^2}{ab}=\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}$$

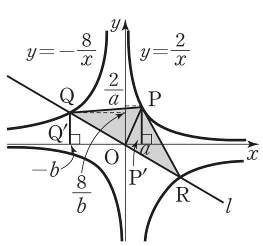
이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{8a}{b}}=8$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{2b}{a}=\dfrac{8a}{b}, \text{ 즉 } b=2a\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 8이다. **답** ②

• 다른 풀이 •



함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프 위의 제1사분면의 점 P의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)$ $(a>0)$, 함수 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프 위의 점 Q의 좌표를 $\left(-b,\ \dfrac{8}{b}\right)$ $(b>0)$이라 하고 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하자.
이때 삼각형 OPQ의 넓이는 사다리꼴 PP′Q′Q의 넓이에서 두 삼각형 OPP′, OQQ′의 넓이를 뺀 것과 같다.
사다리꼴 PP′Q′Q의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{a}+\frac{8}{b}\right)\times(a+b)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}$$

삼각형 OPP′의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{2}{a}=1$,

삼각형 OQQ′의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times b\times\dfrac{8}{b}=4$

이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}-1-4=\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}$$

한편, *에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}$, $\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OPR}$이므로

$$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OPR}$$
$$=2\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}$$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{8a}{b}}=8$$

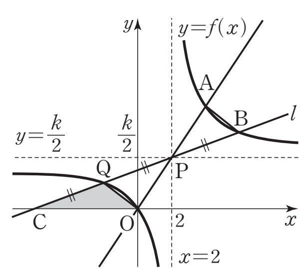
$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{2b}{a}=\dfrac{8a}{b}, \text{ 즉 } b=2a\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값은 8이다.

26 해결단계

❶ 단계	직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 점 B가 아닌 점을 Q라 하고, 점 Q의 좌표와 점 C의 좌표를 구한다.
❷ 단계	두 점 C, P를 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.
❸ 단계	원점과 직선 l 사이의 거리를 이용하여 k의 값을 구한다.

점 C의 좌표를 $(c,\ 0)$이라 하고, 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 점 B가 아닌 점을 Q라 하자.
두 삼각형 PBA, PQO는 합동이고, $S_2=2S_1$이므로
$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$



즉, 점 Q는 선분 PC의 중점이므로 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{c+2}{2},\ \dfrac{k}{4}\right)$

이때 점 Q가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로

$$\frac{k}{4}=\frac{k}{\frac{c+2}{2}-2}+\frac{k}{2},\ \frac{1}{4}=\frac{2}{c-2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{c-2}=-\frac{1}{4},\ c-2=-8 \qquad \therefore\ c=-6$$

$\therefore\ \mathrm{C}(-6,\ 0)$

직선 l은 두 점 $C(-6,\ 0)$, $P\left(2,\ \frac{k}{2}\right)$를 지나므로

직선 l의 방정식은

$$y=\frac{\frac{k}{2}}{2-(-6)}(x+6),\ y=\frac{k}{16}(x+6)$$

$\therefore\ kx-16y+6k=0$

*이때 원점과 직선 l 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|6k|}{\sqrt{k^2+(-16)^2}}=2$$

$k^2+256=9k^2,\ 8k^2=256$

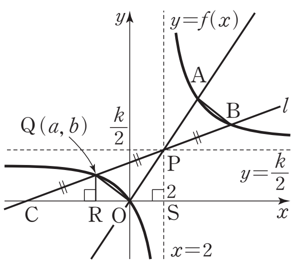
$\therefore\ k^2=32$ 답 32

•다른 풀이•

직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 점 B가 아닌 점을 $Q(a,\ b)$라 하자.

두 삼각형 PBA, PQO는 합동이고, $S_2=2S_1$이므로

$\overline{PB}=\overline{QP}=\overline{CQ}$



이때 두 점 Q, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면 △CQR∽△CPS이고 닮음비가 1 : 2이다.

$\overline{QR} : \overline{PS}=1 : 2$에서 $b : \frac{k}{2}=1 : 2$ $\quad\therefore\ b=\frac{k}{4}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(a,\ \frac{k}{4}\right)$이고, 점 Q가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $\frac{k}{4}=\frac{k}{a-2}+\frac{k}{2}$

$\frac{k}{a-2}=-\frac{k}{4},\ a-2=-4$ $\quad\therefore\ a=-2$

$\therefore\ Q\left(-2,\ \frac{k}{4}\right)$

즉, 직선 l은 두 점 $P\left(2,\ \frac{k}{2}\right)$, $Q\left(-2,\ \frac{k}{4}\right)$를 지나므로

직선 l의 방정식은

$$y-\frac{k}{2}=\frac{\frac{k}{2}-\frac{k}{4}}{2-(-2)}(x-2),\ y-\frac{k}{2}=\frac{k}{16}(x-2)$$

$\therefore\ kx-16y+6k=0$

다음은 *와 같다.

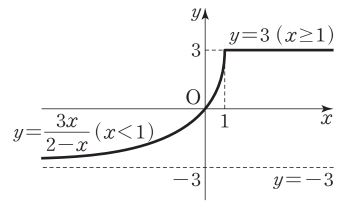
27

$f(x)=\frac{3x}{1+|x-1|}$에서

$x<1$일 때, $f(x)=\frac{3x}{1-x+1}=\frac{3x}{2-x}=-\frac{6}{x-2}-3$

$x\ge1$일 때, $f(x)=\frac{3x}{1+x-1}=\frac{3x}{x}=3$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 정의역에서 함수 $f(x)$가 역함수를 갖기 위해서는 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 x의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하거나 감소해야 한다.

따라서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 주어진 정의역이 집합 $\{x\,|\,x\le1\}$의 부분집합이어야 하므로 a의 최댓값은 1이다.

또한, 이때의 역함수는 $y=\frac{3x}{2-x}$에서 $y(2-x)=3x$

$(3+y)x=2y,\ x=\frac{2y}{y+3}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{2x}{x+3}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+3}\ (-3<x\le3)$

답 1, $f^{-1}(x)=\frac{2x}{x+3}\ (-3<x\le3)$

28

$f(x)=\frac{9x+17}{3x-1},\ g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$

에서 $(g\circ f)(k)=g(f(k))=1$이므로 $f(k)$는 정수이어야 한다.

$$f(k)=\frac{9k+17}{3k-1}=\frac{3(3k-1)+20}{3k-1}$$
$$=\frac{20}{3k-1}+3$$

이므로 $f(k)$가 정수이려면 $\frac{20}{3k-1}$이 정수이어야 한다.

자연수 k에 대하여 $3k-1$은 자연수이므로 $3k-1$은 20의 양의 약수이다. 즉,

$3k-1=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$

$3k=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 11,\ 21$

$\therefore\ k=\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{11}{3},\ 7$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 7이므로

$m=3,\ n=1+2+7=10$

$\therefore\ m+n=3+10=13$ 답 ④

29

$b\ne-4$이면 함수 $f^{-1}(x)$의 역함수 $f(x)$가 존재한다.

유리함수 $f(x)=\frac{4x-8}{2x+b}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{-bx-8}{2x-4}$

$(f\circ f)(a)=a$에서 $f(a)=f^{-1}(a)$이므로

$$\frac{4a-8}{2a+b}=\frac{-ab-8}{2a-4}$$

$(4a-8)(2a-4)=(2a+b)(-ab-8)$

$(8+2b)a^2+(b^2-16)a+8b+32=0$

$2(b+4)a^2+(b-4)(b+4)a+8(b+4)=0$

$\therefore 2a^2+(b-4)a+8=0$ ($\because b\neq-4$) ……㉠

이때 조건을 만족시키는 실수 a가 오직 하나뿐이므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(b-4)^2-4\times2\times8=0$에서

$(b-4)^2=64$, $b-4=\pm8$

$\therefore b=12$ ($\because b\neq-4$)

이것을 ㉠에 대입하면

$2a^2+8a+8=0$, $a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$ $\quad\therefore a=-2$

$\therefore a+b=(-2)+12=10$

답 ③

30 $f(x)=\frac{a}{x}+b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

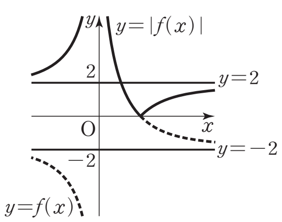
$x=0$, $y=b$

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=-2$, $y=2$와 한 점에서만 만나야 한다.

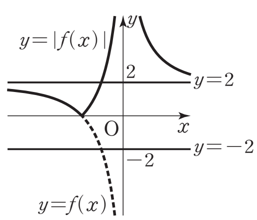
즉, 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 다음 그림과 같이 $y=-2$ 또는 $y=2$이어야 한다.

$\therefore b=-2$ 또는 $b=2$ ……㉠

(i) $b=-2$일 때



(ii) $b=2$일 때



$y=\frac{a}{x}+b$에서

$\frac{a}{x}=y-b$, $x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$에서

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ ……㉡

그런데 ㉡에서 $b\neq2$이므로 $b=-2$ ($\because$ ㉠)

$b=-2$를 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-2-1$, $\frac{a}{4}=3$ $\quad\therefore a=12$

따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

답 ①

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

pp.98~99

01 72	02 46	03 5	04 5	05 3
06 444	07 $\frac{21}{5}$	08 18	09 57	10 19
11 140	12 192			

01 해결단계

❶ 단계	1일차, 2일차의 케이크와 쿠키의 판매량을 각각 문자 a, b로 나타낸다.
❷ 단계	이틀 동안의 케이크와 쿠키의 판매량의 비가 1일차와 2일차의 디저트 전체 판매량의 비와 같음을 이용하여 a, b의 관계식을 세우고, a와 b의 비를 구한다.
❸ 단계	이틀 동안의 디저트 전체 판매량의 범위를 이용하여 a, b의 값을 구하고, 2일차의 디저트 전체 판매량을 구한다.

1일차의 케이크와 쿠키의 판매량을 각각

a, $3a$ (a는 자연수),

2일차의 케이크와 쿠키의 판매량을 각각

$5b$, $7b$ (b는 자연수)

라 하면 이틀 동안의 케이크와 쿠키의 판매량을 다음 표와 같이 나타낼 수 있다.

	케이크의 개수	쿠키의 개수	합계
1일차	a	$3a$	$4a$
2일차	$5b$	$7b$	$12b$
합계	$a+5b$	$3a+7b$	$4a+12b$

이틀 동안의 케이크와 쿠키의 판매량의 비는 1일차의 디저트 전체 판매량과 2일차의 디저트 전체 판매량의 비와 동일하므로

$\frac{3a+7b}{a+5b}=\frac{12b}{4a}=k$ ($k>0$)로 놓으면

$\frac{12b}{4a}=k$에서

$\frac{3b}{a}=k$ $\quad\therefore \frac{b}{a}=\frac{k}{3}$ ……㉠

$\frac{3a+7b}{a+5b}=k$에서

$$\frac{3+\frac{7b}{a}}{1+\frac{5b}{a}}=k,\ \frac{3+\frac{7k}{3}}{1+\frac{5k}{3}}=k\ (\because ㉠)$$

$\frac{9+7k}{3+5k}=k$, $5k^2-4k-9=0$

$(k+1)(5k-9)=0$ $\quad\therefore k=\frac{9}{5}$ ($\because k>0$)

즉, $\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$이므로 $a=5m$, $b=3m$ (m은 자연수)이라 하면 이틀 동안의 디저트 전체 판매량은 100보다 크고 150보다 작아야 하므로

$100<4a+12b<150$

$100<56m<150$, $\frac{100}{56}<m<\frac{150}{56}$

$\therefore m=2$

따라서 $a=10$, $b=6$이므로 2일차의 디저트 전체 판매량은

$12b=72$

답 72

02 해결단계

❶ 단계	점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계의 결과를 k라 하고, 이 식이 원의 방정식임을 파악한 후, k가 최솟값을 갖기 위한 조건을 찾는다.
❸ 단계	원과 주어진 유리함수의 그래프의 접점을 찾은 후, k의 값을 구한다.

유리함수 $y=\frac{4}{x-3}+2\ (x>3)$ 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$에 대하여

$\overline{PA}^2=(x-4)^2+y^2$, $\overline{PB}^2=x^2+(y-2)^2$

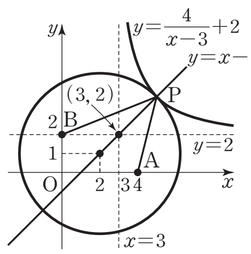
$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2x^2+2y^2-8x-4y+20$

$2x^2+2y^2-8x-4y+20=k$ ……㉠

라 하면 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{k-10}{2}$

즉, 점 P는 중심이 점 $(2, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{k-10}{2}}$인 원 위에 있고, 원의 반지름의 길이가 최소일 때 k의 값도 최소이다.

이때 원의 반지름의 길이가 최소이려면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 원과 유리함수의 그래프가 접하는 점에 위치하여야 한다.



원의 중심 $(2, 1)$과 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 교점 $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{2-1}{3-2}(x-2)$, 즉 $y=x-1$ ……㉡

이고, 유리함수 $y=\frac{4}{x-3}+2$의 그래프가 위의 직선에 대하여 대칭이므로 점 P는 직선 ㉡과 주어진 유리함수의 그래프의 교점이다.

㉡을 $y=\frac{4}{x-3}+2$에 대입하면

$x-1=\frac{4}{x-3}+2$, $x-3=\frac{4}{x-3}$

$(x-3)^2=4$, $x-3=\pm2$

$\therefore x=5\ (\because x>3)$, $y=4$

즉, 점 P의 좌표는 $(5, 4)$이므로 ㉠에서

$k=50+32-40-16+20=46$

따라서 구하는 최솟값은 46이다. **답** 46

• 다른 풀이 1 •

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ $\therefore M(2, 1)$

삼각형 PBA에서 중선정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{PM}^2)$

이때 $A(4, 0)$, $M(2, 1)$이므로

$\overline{AM}^2=(2-4)^2+(1-0)^2=5$

즉, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(5+\overline{PM}^2)$이므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$이 최소이려면 $\overline{PM}$이 최소이어야 한다.

한편, 유리함수 $y=\frac{4}{x-3}+2$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(3, 2)$이므로 이 유리함수의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지나고 기울기가 1인 직선에 대하여 대칭이다.

이 직선의 방정식을 구하면

$y-2=x-3$ $\therefore y=x-1$ ……㉢

점 M이 직선 ㉢ 위에 있으므로 $\overline{PM}$이 최소이려면 점 P가 직선 ㉢과 주어진 유리함수의 그래프의 교점이어야 한다.

두 함수 $y=\frac{4}{x-3}+2$, $y=x-1$의 그래프의 교점을 구하면

$x-1=\frac{4}{x-3}+2$, $x^2-4x+3=4+2x-6$

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=5\ (\because x>3)$, $y=4$

즉, $P(5, 4)$이므로 $\overline{PM}^2=(5-2)^2+(4-1)^2=18$

따라서 구하는 최솟값은

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(5+\overline{PM}^2)=2\times(5+18)=46$

• 다른 풀이 2 •

유리함수 $y=\frac{4}{x-3}+2$의 그래프는 유리함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$f(x)=\frac{4}{x}\ (x>0)$라 하고, 세 점 A, B, P를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, P′이라 하면 $A'(1, -2)$, $B'(-3, 0)$이고, 점 P′은 함수 $f(x)=\frac{4}{x}$의 그래프 위에 있다.

$P'\left(a, \frac{4}{a}\right)\ (a>0)$라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=\overline{P'A'}^2+\overline{P'B'}^2\\&=(a-1)^2+\left(\frac{4}{a}+2\right)^2+(a+3)^2+\left(\frac{4}{a}\right)^2\\&=2a^2+4a+\frac{32}{a^2}+\frac{16}{a}+14\\&=2\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+4\left(a+\frac{4}{a}\right)+14 \quad \cdots\cdots ㉣\end{aligned}$$

이때 $a>0$에서 $a^2>0$, $\frac{16}{a^2}>0$, $\frac{4}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\frac{16}{a^2}\ge2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}=8$ (단, 등호는 $a=2$일 때 성립),

$a+\frac{4}{a}\ge2\sqrt{a\times\frac{4}{a}}=4$ (단, 등호는 $a=2$일 때 성립)

따라서 ㉣에서 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=2\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+4\left(a+\frac{4}{a}\right)+14\\&\ge2\times8+4\times4+14=46\end{aligned}$$

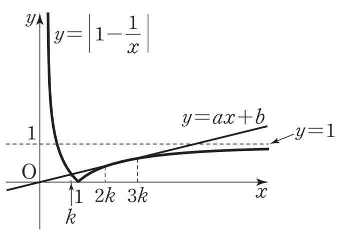
03 해결단계

❶ 단계	$(g\circ f)(x)=h(x)$에 $f(x)=1-\frac{1}{x}$, $g(x)=\lvert x\rvert$, $h(x)=ax+b$를 대입하여 x에 대한 방정식을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 방정식의 서로 다른 세 양의 실근의 비가 $1:2:3$임을 이용하여 세 근을 미지수로 표현한다.
❸ 단계	두 함수 $y=\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert$과 $y=ax+b$의 그래프를 세 점에서 만나도록 그린 후, 세 교점이 한 직선 위에 있음을 이용하여 방정식을 세운다.
❹ 단계	❸ 단계에서 구한 방정식을 풀어 세 근을 찾은 후, 그 합을 구한다.

$f(x)=1-\frac{1}{x}$, $g(x)=\lvert x\rvert$, $h(x)=ax+b$이므로

$(g\circ f)(x)=h(x)$에서 $\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert=ax+b$

방정식 $\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert=ax+b$의 세 양의 실근을 k, $2k$, $3k$라 하면 함수 $y=\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 세 점에서 만나야 하므로 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



이때 $0<k<1$이고 $F(x)=\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert$이라 하면 세 교점은 모두 한 직선 위에 있으므로

$\frac{F(2k)-F(k)}{2k-k}=\frac{F(3k)-F(2k)}{3k-2k}$, 즉

$F(k)+F(3k)=2F(2k)$

$\left(-1+\frac{1}{k}\right)+\left(1-\frac{1}{3k}\right)=2\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ $(\because 0<k<1)$

$\frac{5}{3k}=2 \qquad \therefore k=\frac{5}{6}$

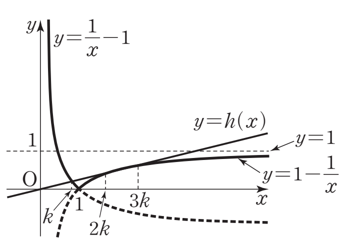
따라서 서로 다른 세 양의 실근의 합은

$k+2k+3k=6k=6\times\frac{5}{6}=5$ **답** 5

• 다른 풀이 •

$$y=\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & (0<x<1)\\ 1-\frac{1}{x} & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $y=\left\lvert 1-\frac{1}{x}\right\rvert$의 그래프와 직선 $y=ax+b$가 $x>0$에서 세 교점을 가지고, 교점의 x좌표의 값의 비가 $1:2:3$이므로 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



함수 $y=\frac{1}{x}-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표가 k이므로 방정식 $\frac{1}{x}-1=ax+b$, 즉 $ax^2+(b+1)x-1=0$의 근이 k이다.

$\therefore ak^2+(b+1)k-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 함수 $y=1-\frac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 $2k$, $3k$이므로 방정식 $1-\frac{1}{x}=ax+b$, 즉 $ax^2+(b-1)x+1=0$의 두 근이 $2k$, $3k$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2k+3k=-\frac{b-1}{a}$, $2k\times 3k=\frac{1}{a}$

$\therefore a=\frac{1}{6k^2}$, $b=-\frac{5}{6k}+1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{6k^2}\times k^2+\left(-\frac{5}{6k}+1+1\right)\times k-1=0$

$\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+2k-1=0$, $2k=\frac{10}{6} \qquad \therefore k=\frac{5}{6}$

따라서 세 양의 실근의 합은

$k+2k+3k=6k=6\times\frac{5}{6}=5$

04 해결단계

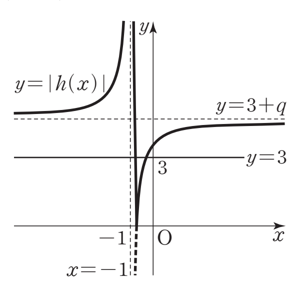
❶ 단계	$f(x)+q$를 새로운 함수로 지정하고 두 점근선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	주어진 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재할 조건을 찾는다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 조건을 만족시키는 q의 값의 범위를 찾은 후, 자연수 q의 최솟값을 구한다.

$h(x)=f(x)+q$라 하면 $g(x)=\lvert h(x)\rvert$

$f(x)=\frac{3x-1}{x+1}=\frac{3(x+1)-4}{x+1}=-\frac{4}{x+1}+3$

에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=3$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3+q$이다.

이때 함수 $y=h(x)$의 그래프가 $-1<x<0$에서 증가하므로 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 존재하려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $-1<x<0$에서 직선 $y=3$과 만나야 한다.



즉, 함수 $y=\lvert h(x)\rvert$의 그래프가 위의 그림과 같아야 하므로

$h(0)>3$에서 $q-1>3$

$\therefore q>4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 q의 최솟값은 5이다.

답 5

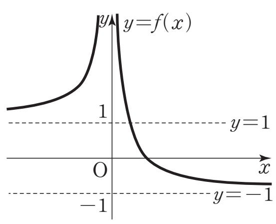
05 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	❶ 단계에서 그린 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=g(a)$의 그래프를 그린다.
❸ 단계	두 집합 A와 B가 나타내는 도형을 파악한다.
❹ 단계	$n(A\cap B)=1$이 되도록 하는 모든 양의 실수 r의 값을 구한 후, 그 합을 구한다.

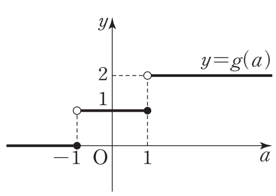
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{-x} & (x<0)\\[2mm] \dfrac{1-x}{x} & (x>0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x} & (x<0)\\[2mm] \dfrac{1}{x}-1 & (x>0)\end{cases}$$

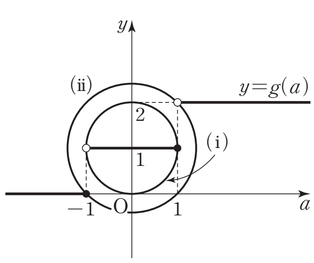
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=a$의 그래프의 교점의 개수와 같고, 이 값이 $g(a)$이므로 함수 $y=g(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $n(A\cap B)=1$이 되려면 함수 $y=g(a)$의 그래프와 원 $a^2+(y-1)^2=r$이 한 점에서 만나야 하므로 원은 다음 그림과 같이 (i) 또는 (ii)의 경우와 같아야 한다.



(i) 원 $a^2+(y-1)^2=r$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$r=1$

(ii) 원 $a^2+(y-1)^2=r$이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$1+1=r \qquad \therefore r=2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 r의 값의 합은 $1+2=3$

답 3

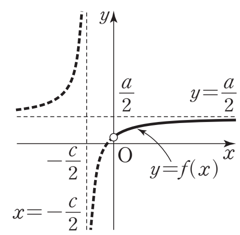
06 해결단계

❶ 단계	함수 $f(x)$의 식을 변형하여 분자의 차수를 낮춘다.
❷ 단계	계수의 부호에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, 함수 $f(x)$가 일대일함수인지 상수함수인지 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 나눈 기준에 따라 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 상수함수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한 후, 그 차를 구한다.

$$f(x)=\frac{ax+b}{2x+c}=\frac{\frac{a}{2}(2x+c)+b-\frac{ac}{2}}{2x+c}=\frac{b-\frac{ac}{2}}{2x+c}+\frac{a}{2}$$

(i) $b-\dfrac{ac}{2}<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{c}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 일대일함수이다.

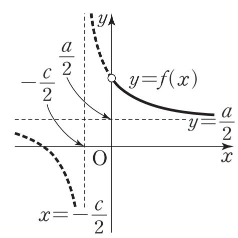


(ii) $b-\dfrac{ac}{2}=0$일 때,

$f(x)=\dfrac{a}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$는 상수함수이다.

(iii) $b-\dfrac{ac}{2}>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=-\dfrac{c}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$이므로 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 일대일함수이다.



(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$가 일대일함수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 전체 경우의 수에서 $b-\dfrac{ac}{2}=0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 빼면 된다.

a, b, c는 모두 8보다 작은 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 (a, b, c)의 전체 경우의 수는

$8\times8\times8=512$

$b-\dfrac{ac}{2}=0$, 즉 $2b=ac$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하면

$b=0$일 때, $ac=0$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $\cdots$, $(7, 0)$,

$(0, 1)$, $(0, 2)$, $\cdots$, $(0, 7)$의 15개

$b=1$일 때, $ac=2$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

$b=2$일 때, $ac=4$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$의 3개

$b=3$일 때, $ac=6$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$의 4개

$b=4$일 때, $ac=8$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(2, 4)$, $(4, 2)$의 2개

$b=5$일 때, $ac=10$이므로 순서쌍 (a, c)는

$(2,\ 5)$, $(5,\ 2)$의 2개
$b=6$일 때, $ac=12$이므로 순서쌍 $(a,\ c)$는
$(2,\ 6)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$의 4개
$b=7$일 때, $ac=14$이므로 순서쌍 $(a,\ c)$는
$(2,\ 7)$, $(7,\ 2)$의 2개
즉, $b-\dfrac{ac}{2}=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$15+2+3+4+2+2+4+2=34$
따라서 함수 $f(x)$가 상수함수가 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $n=34$이고, 일대일함수가 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $m=512-34=478$이므로
$m-n=444$ **답** 444

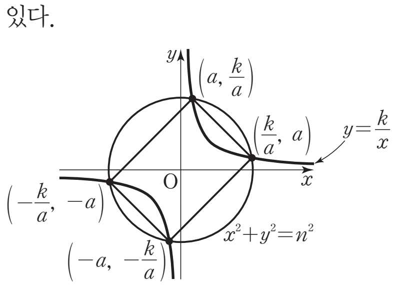
BLACKLABEL 특강 참고

함수 $y=\dfrac{px+q}{rx+s}$는 계수 $p,\ q,\ r,\ s$의 값에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다.
(1) $p\neq0$, $r=0$이면 일차함수이다.
(2) $r\neq0$, $ps-qr=0$이면 상수함수이다.
(3) $r\neq0$, $ps-qr\neq0$이면 분수함수이다.
이때 일차함수와 분수함수는 일대일함수이므로 주어진 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{2x+c}$가 일대일함수가 되려면 (1) 또는 (3)을 만족시켜야 하고, 상수함수가 되려면 (2)를 만족시켜야 한다.
그런데 $r=2$로 함수 $f(x)$는 일차함수가 될 수 없으므로 상수함수 또는 분수함수이다.
따라서 $ac-2b=0$이면 상수함수, $ac-2b\neq0$이면 일대일함수이다.

07 해결단계

❶ 단계	원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\dfrac{k}{x}$의 대칭성을 이용하여 네 교점의 좌표를 미지수로 표현한다.
❷ 단계	네 교점을 이어 만든 직사각형의 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배임을 이용하여 방정식을 세운다.
❸ 단계	❶ 단계에서 구한 교점이 원 $x^2+y^2=n^2$ 위에 있음을 이용하여 방정식을 세운다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 세운 방정식을 연립하여 k의 값, 즉 $f(n)$을 n으로 표현한 후, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구한다.

원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\dfrac{k}{x}$가 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이므로 원과 곡선의 교점은 서로 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$에 대하여 대칭이다.
즉, 다음 그림과 같이 네 점의 좌표를
$\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$, $\left(\dfrac{k}{a},\ a\right)$, $\left(-a,\ -\dfrac{k}{a}\right)$, $\left(-\dfrac{k}{a},\ -a\right)$
$\left(\text{단, } \dfrac{k}{a}>a>0\right)$
라 할 수 있다.



직사각형의 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되려면
$2\sqrt{\left(a-\dfrac{k}{a}\right)^2+\left(\dfrac{k}{a}-a\right)^2}=\sqrt{\left(a+\dfrac{k}{a}\right)^2+\left(\dfrac{k}{a}+a\right)^2}$
$2\sqrt{2}\left|a-\dfrac{k}{a}\right|=\sqrt{2}\left|a+\dfrac{k}{a}\right|$
$2\left(\dfrac{k}{a}-a\right)=a+\dfrac{k}{a}\ \left(\because \dfrac{k}{a}>a>0\right)$
$\dfrac{2k}{a}-2a=a+\dfrac{k}{a}$, $\dfrac{k}{a}=3a$ $\quad\therefore k=3a^2$ ……㉠
한편, 점 $\left(a,\ \dfrac{k}{a}\right)$는 원 $x^2+y^2=n^2$ 위에 있으므로
$a^2+\left(\dfrac{k}{a}\right)^2=n^2$
㉠을 위의 식에 대입하면
$a^2+\dfrac{9a^4}{a^2}=n^2$, $10a^2=n^2$ $\quad\therefore a^2=\dfrac{n^2}{10}$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$k=\dfrac{3}{10}n^2=f(n)$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{12}{10}+\dfrac{27}{10}=\dfrac{21}{5}$ **답** $\dfrac{21}{5}$

08 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점과 함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프의 두 점근선의 교점을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	방정식 $(f\circ f)(x)=x+1$의 실근은 오직 하나임을 파악한다.
❸ 단계	이차방정식의 판별식을 이용하여 b의 값을 구한다.

$f(x)=\dfrac{4x+b}{x-2a}=\dfrac{4(x-2a)+8a+b}{x-2a}=\dfrac{8a+b}{x-2a}+4$
에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=2a$, $y=4$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(2a,\ 4)$이다.
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(2a,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 그 좌표는 $(4,\ 2a)$와 같다.
함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x-6)-6$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(2a+6,\ -2)$이다.
점 $(4,\ 2a)$와 점 $(2a+6,\ -2)$가 일치하므로
$2a+6=4$, $2a=-2$ $\quad\therefore a=-1$
*한편, 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$과 한 점에서만 만나므로 방정식 $(f\circ f)(x)=x+1$은 실근을 하나만 가져야 한다.
$(f\circ f)(x)=\dfrac{4\times\dfrac{4x+b}{x+2}+b}{\dfrac{4x+b}{x+2}+2}=\dfrac{(16+b)x+6b}{6x+b+4}$
$(f\circ f)(x)=x+1$에서 $\dfrac{(16+b)x+6b}{6x+b+4}=x+1$
$(16+b)x+6b=(x+1)(6x+b+4)$

$\therefore\ 6x^2-6x-5b+4=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-6(-5b+4)=0$

$30b-15=0 \qquad \therefore\ b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=-1$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$12(b-a)=12\times\dfrac{3}{2}=18$ **답** 18

• 다른 풀이 •

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구해보자.

$y=\dfrac{4x+b}{x-2a}$라 하면 $(x-2a)y=4x+b$

$xy-2ay=4x+b$, $(y-4)x=2ay+b$

$x=\dfrac{2ay+b}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{2ax+b}{x-4}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{2ax+b}{x-4}$

$f^{-1}(x)=f(x-6)-6$이므로

$\dfrac{2ax+b}{x-4}=\dfrac{4(x-6)+b}{x-6-2a}-6$

$\dfrac{2ax+b}{x-4}=\dfrac{-2x+12a+b+12}{x-6-2a}$

$x\neq4$인 모든 실수에 대하여 위의 등식이 성립하므로

$2a=-2 \qquad \therefore\ a=-1$

다음은 *와 같다.

09 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\lvert f(x)\rvert$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 점의 좌표를 (m, n)이라 하고, m의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 점 (m, n)의 개수를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 점의 개수의 합을 구한다.

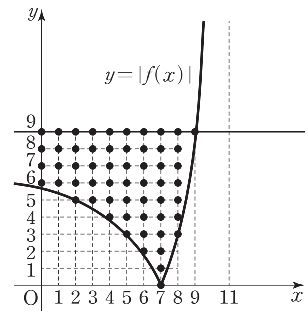
함수 $f(x)=\dfrac{36}{x-11}+9\ (x<11)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{36}{x}\ (x<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 11만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 것이고, 두 점근선의 방정식은 $x=11$, $y=9$이다.

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\dfrac{36}{x-11}+9=0$에서

$\dfrac{x-11}{36}=-\dfrac{1}{9} \qquad \therefore\ x=7$

따라서 함수 $y=\lvert f(x)\rvert\ (x<11)$의 그래프와 y축 및 직선 $y=9$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



도형의 내부 또는 그 둘레에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 좌표를 (m, n)이라 하면 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $m=0$ 또는 $m=1$일 때,
$6\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는
$2\times4=8$

(ii) $m=2$ 또는 $m=3$일 때,
$5\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는
$2\times5=10$

(iii) $m=4$일 때,
$4\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는 6

(iv) $m=5$ 또는 $m=8$일 때,
$3\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는
$2\times7=14$

(v) $m=6$일 때,
$2\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는 8

(vi) $m=7$일 때,
$0\le n\le 9$이므로 점 (m, n)의 개수는 10

(vii) $m=9$일 때,
$n=9$이므로 점 (m, n)의 개수는 1

(i)~(vii)에서 조건을 만족시키는 점의 개수는

$8+10+6+14+8+10+1=57$ **답** 57

10 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 꼴로 변형한다.
❷ 단계	k, p의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 m의 값의 범위를 구하고, 자연수 n의 값을 구한다.

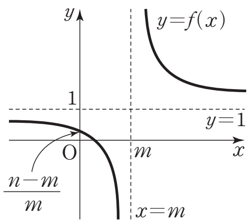
$f(x)=\dfrac{x+m-n}{x-m}=\dfrac{(x-m)+2m-n}{x-m}=\dfrac{2m-n}{x-m}+1$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=m$, $y=1$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않는 경우는 두 정수 m, $2m-n$의 부호에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $m>0$, $2m-n>0$일 때,

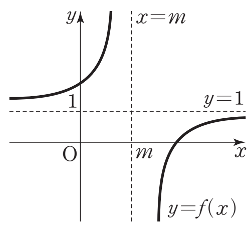
함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점이 $\left(0,\ \dfrac{n-m}{m}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, $\dfrac{n-m}{m}\ge 0$이어야 한다.



따라서 $m>0$, $2m-n>0$, $\dfrac{n-m}{m}\ge 0$이므로

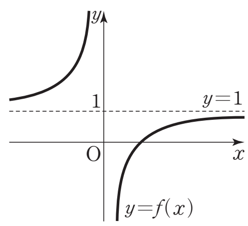
$\dfrac{n}{2}<m\le n$

(ii) $m>0$, $2m-n<0$일 때,
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 항상 제3사분면을 지나지 않는다.

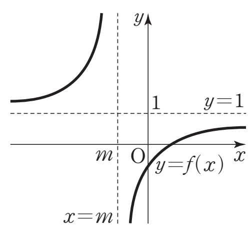


$\therefore\ 0<m<\dfrac{n}{2}$

(iii) $m=0$일 때,
$2m-n<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 항상 제3사분면을 지나지 않는다.



(iv) $m<0$일 때,
$2m-n<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 항상 제3사분면을 지난다. 즉, 조건을 만족시키지 않는다.



(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는

$0\le m<\dfrac{n}{2}$ 또는 $\dfrac{n}{2}<m\le n$

따라서 조건을 만족시키는 정수 m의 개수가 10이 되도록 하는 자연수 n의 값은 9 또는 10이므로 그 합은

$9+10=19$ **답** 19

11 해결단계

❶ 단계	$f(1)<f(3)<f(2)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악하고, m의 값을 구한다.
❷ 단계	$g(f(3))<g(f(2))<g(f(1))$을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악하고, q의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	$Q(80)$의 값을 구한다.

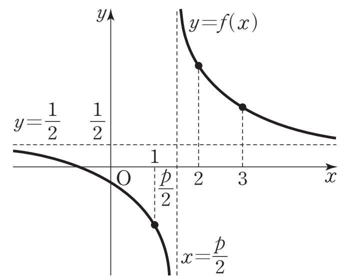
$$f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}=\frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)+2n+\frac{p}{2}}{2\left(x-\frac{p}{2}\right)}=\frac{n+\frac{p}{4}}{x-\frac{p}{2}}+\frac{1}{2}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{p}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$

이때 $n+\dfrac{p}{4}>0$, $f(0)=-\dfrac{2n}{p}<0$이므로

$f(1)<f(3)<f(2)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $1<\dfrac{p}{2}<2$, 즉 $2<p<4$이어야 하므로

$p=3$ ($\because$ p는 자연수)

$\therefore\ m=3$, $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-3}$

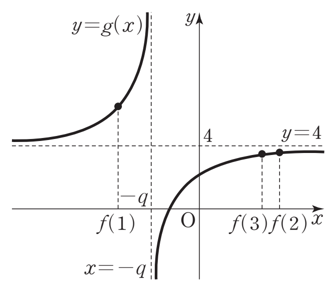
$$g(x)=\frac{4x+n}{x+q}=\frac{4(x+q)+n-4q}{x+q}=\frac{n-4q}{x+q}+4$$

에서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-q$, $y=4$

이때 $f(1)<0<f(3)<f(2)$이므로

$g(f(3))<g(f(2))<g(f(1))$을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $n-4q<0$, $f(1)<-q$이어야 하므로

$n-4q<0$에서 $\dfrac{n}{4}<q$ ⋯⋯㉠

$f(1)<-q$에서 $-(1+2n)<-q$

$\therefore\ q<2n+1$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{n}{4}<q<2n+1$

$n=80$이면 $20<q<161$이므로 이를 만족시키는 자연수 q는 21, 22, 23, $\cdots$, 160의 140개이다.

$\therefore\ Q(80)=140$ **답** 140

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 주어진 함숫값 또는 합성함수의 함숫값의 대소 관계를 판단하는 과정에서 계수의 범위에 따른 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형을 추론해야 하는 문제이다.
단순하게 대입하여 계산하는 것이 아닌 점근선의 위치, 함수의 그래프와 y축의 교점의 위치에 따른 유리함수의 그래프의 특성을 파악하여 주어진 조건을 만족시키는 유리함수의 식을 파악할 수 있다.

12 해결단계

❶ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	집합으로 주어진 식의 의미를 파악한 후, b의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 a, b, k의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	함수 $g(x)$의 식을 구한 후, $a\times b\times g(-k)$의 값을 구한다.

$f(x)=\dfrac{bx}{x-a}=\dfrac{b(x-a)+ab}{x-a}=\dfrac{ab}{x-a}+b$

에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이고 이 그래프는 항상 점 $(0,\ 0)$을 지난다.

함수 $y=f(x+2a)+a$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 이 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=a+b$

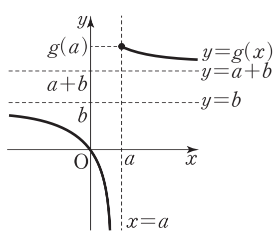
한편, $\{t\,|\,h(t)=1\}=\{t\,|\,-9\le t\le -8\}\cup\{t\,|\,t\ge k\}$에서

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$-9\le t\le -8$ 또는 $t\ge k$ ……㉠

(i) $b>0$일 때,

$ab>0$, $a+b>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$t<b$ 또는 $a+b<t\le g(a)$

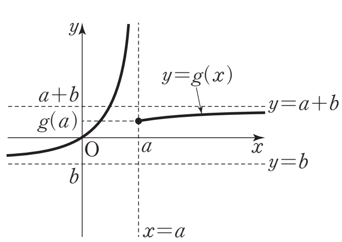
이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$일 때,

$ab<0$, $a+b>b$이고, $g(a)=f(3a)+a=a+\dfrac{3}{2}b$

① $g(a)>b$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



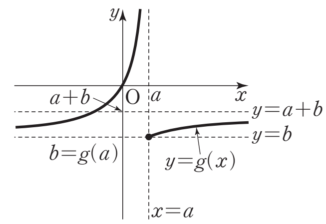
즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$b<t<g(a)$ 또는 $t\ge a+b$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

② $g(a)=b$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



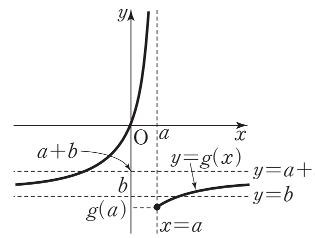
즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$t=b$ 또는 $t\ge a+b$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

③ $g(a)<b$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$g(a)\le t\le b$ 또는 $t\ge a+b$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$g(a)=-9$, $b=-8$, $a+b=k$

$g(a)=a+\dfrac{3}{2}b=a+\dfrac{3}{2}\times(-8)=-9$에서

$a-12=-9$ $\qquad\therefore a=3$

$\therefore k=a+b=3+(-8)=-5$

(i), (ii)에서

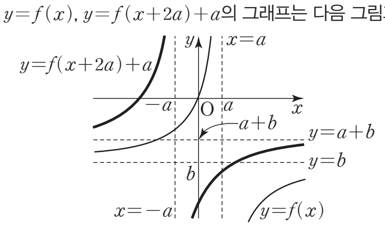
$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{24}{x-3}-8 & (x<3)\\[2mm] -\dfrac{24}{x+3}-5 & (x\ge 3)\end{cases}$$

따라서 $g(-k)=g(5)=-\dfrac{24}{5+3}-5=-8$이므로

$a\times b\times g(-k)=3\times(-8)\times(-8)=192$ **답** 192

BLACKLABEL 특강 참고

두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x+2a)+a$의 그래프는 다음 그림과 같다.



08. 무리함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.101~102

01 ②	02 $2a$	03 ④	04 ⑤	05 ③
06 ②	07 ③	08 ①	09 ④	10 5
11 $2\le k<\frac{9}{4}$	12 ⑤	13 12	14 $k\ge1$	

01 모든 실수 x에 대하여 무리식 $\sqrt{kx^2-kx+3}$이 실수가 되기 위해서는 $kx^2-kx+3\ge0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때,

$3\ge0$이므로 항상 실수이다.

(ii) $k\ne0$일 때,

이차방정식 $kx^2-kx+3=0$이 중근이나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$D=(-k)^2-12k$$
$$=k(k-12)\le0$$
$$\therefore 0<k\le12\ (\because k\ne0)$$

(i), (ii)에서 $0\le k\le12$이므로 정수 k는 0, 1, 2, $\cdots$, 12의 13개이다.

답 ②

02 $x=a^2+\frac{1}{a^2}$이므로

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}+2}-\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$$
$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$$
$$=\left|a+\frac{1}{a}\right|-\left|a-\frac{1}{a}\right| \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0<a<1$에서 $\frac{1}{a}>1$이므로

$$a+\frac{1}{a}>0,\ a-\frac{1}{a}<0$$

따라서 ㉠에서

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)$$
$$=2a$$

답 $2a$

03
$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ (\because a>0,\ b>0)$$

답 ④

• 다른 풀이 •

(i) $a\ne b$일 때,

$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}=\frac{a-\sqrt{ab}}{a^2-ab}+\frac{b-\sqrt{ab}}{b^2-ab}$$
$$=\frac{a-\sqrt{ab}}{a(a-b)}-\frac{b-\sqrt{ab}}{b(a-b)}$$
$$=\frac{ab-b\sqrt{ab}-ab+a\sqrt{ab}}{ab(a-b)}$$
$$=\frac{\sqrt{ab}(a-b)}{ab(a-b)}$$
$$=\frac{\sqrt{ab}}{ab}\ (\because a\ne b)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

(ii) $a=b$일 때,

$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}=\frac{1}{a+a}+\frac{1}{a+a}=\frac{1}{a}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

(i), (ii)에서 임의의 두 양수 a, b에 대하여

$$\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

04
$$x=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=2+\sqrt{3}$$

$x>0$이므로

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$$
$$=\frac{2x+2}{x-1}$$

위의 식에 $x=2+\sqrt{3}$을 대입하면

$$\frac{2(2+\sqrt{3})+2}{(2+\sqrt{3})-1}=\frac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(6+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}-6+6-2\sqrt{3}}{3-1}$$
$$=2\sqrt{3}$$

답 ⑤

05 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a>0)$의 정의역이 $\{x|x\ge4\}$, 치역이 $\{y|y\ge2\}$이므로

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a(x-4)}+2=\sqrt{ax-4a}+2$$

즉, $b=-4a$, $c=2$이므로

$$\frac{4a^2+2b+c^2}{4a}=\frac{4a^2-8a+4}{4a}=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}$$

이때 $a>0$이므로 구하는 최솟값은 $a=1$일 때 0이다.

답 ③

• 다른 풀이 •

*에서

$\dfrac{4a^2+2b+c^2}{4a}=\dfrac{4a^2-8a+4}{4a}=a+\dfrac{1}{a}-2$

이때 $a>0$에서 $\dfrac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\dfrac{1}{a}-2\ge 2\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}-2$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립)

$\qquad=2-2=0$

따라서 구하는 최솟값은 0이다.

06

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}=\dfrac{\dfrac{c}{a}x+\dfrac{d}{a}}{x+\dfrac{b}{a}}$

$=\dfrac{\dfrac{c}{a}\left(x+\dfrac{b}{a}\right)+\dfrac{d}{a}-\dfrac{bc}{a^2}}{x+\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\dfrac{d}{a}-\dfrac{bc}{a^2}}{x+\dfrac{b}{a}}+\dfrac{c}{a}$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$이다.

또한, 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 $x=0$일 때의 y의 값이므로 $\dfrac{d}{b}$이다.

그런데 주어진 그래프에서 두 점근선의 교점의 x좌표는 음수, y좌표는 양수이고, 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 양수이므로

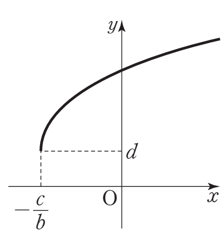
$-\dfrac{b}{a}<0$, $\dfrac{c}{a}>0$, $\dfrac{d}{b}>0$

이때 $a>0$이므로 $b>0$, $c>0$, $d>0$

한편, $y=a\sqrt{bx+c}+d=a\sqrt{b\left(x+\dfrac{c}{b}\right)}+d$의 그래프는

함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-\dfrac{c}{b}<0$, $d>0$이므로 무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프는 제1사분면, 제2사분면을 지난다.

답 ②

07

무리함수 $y=\sqrt{2x-a}-5$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y-2=\sqrt{2(x+3)-a}-5\qquad\therefore y=\sqrt{2x+6-a}-3$

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{-2x+6-a}-3$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{bx+4}+c$의 그래프와 일치하므로

$6-a=4$, $b=-2$, $c=-3$

$\therefore a=2$, $b=-2$, $c=-3$

$\therefore a+b+c=2+(-2)+(-3)=-3$

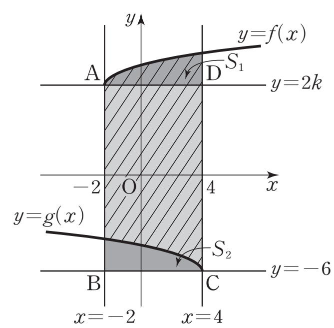
답 ③

08

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 것이다.

$g(x)=\sqrt{4-x}-6=\sqrt{-(x-4)}-6$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=4$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=4$, $y=2k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $y=-6$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

곡선 $y=f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-2k-6$만큼 평행이동하면 곡선 $y=g(x)$와 일치하므로 $S_1=S_2$이다.

*따라서 네 점 A$(-2, 2k)$, B$(-2, -6)$, C$(4, -6)$, D$(4, 2k)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=-2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이(빗금친 부분)는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

$\overline{AB}=2k+6$, $\overline{AD}=6$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$6(2k+6)=72$

$12k+36=72\qquad\therefore k=3$

답 ①

• 다른 풀이 •

곡선 $y=\sqrt{x+2}+2k$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$y=\sqrt{2-x+2}+2k\qquad\therefore y=\sqrt{4-x}+2k$

위의 도형을 y축의 방향으로 $-2k-6$만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-(-2k-6)=\sqrt{4-x}+2k\qquad\therefore y=\sqrt{4-x}-6$

따라서 곡선 $y=f(x)$를 직선 $x=1$에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $-2k-6$만큼 평행이동하면 곡선 $y=g(x)$와 일치하므로 $S_1=S_2$이다.

다음은 *와 같다.

BLACKLABEL 특강 참고

직선에 대한 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을

(1) 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 도형 ⇨ $f(2a-x, y)=0$

(2) 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 도형 ⇨ $f(x, 2b-y)=0$

09

ㄱ. $y=-\sqrt{4-4x}+3=-\sqrt{-4(x-1)}+3$의 그래프는 무리함수 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉, 주어진 무리함수의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프와 겹쳐진다. (거짓)

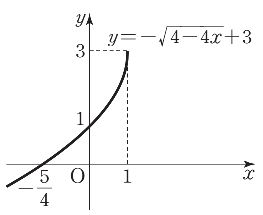
함수 $y=\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{4-4x}+3$에 $x=-\frac{5}{4}$를 대입하면

$y=-\sqrt{4-4\times\left(-\frac{5}{4}\right)}+3=0$이므로 주어진 무리함수의 그래프는 점 $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$을 지난다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 두 점 $(1, 3)$, $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$을 지난다.

또한, $x=0$일 때 $y=-\sqrt{4-0}+3=1$이므로 점 $(0, 1)$을 지난다.



즉, 함수 $y=-\sqrt{4-4x}+3$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

10

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$

또한, 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 1이고 점 $(0, 4)$를 지나므로

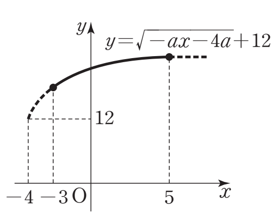
$-\frac{b}{2a}=1$, $c=4$ $\quad\therefore b=-2a$, $c=4$

$-3\le x\le 5$에서 무리함수

$y=\sqrt{-ax-4a}+12$

$=\sqrt{-a(x+4)}+12$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최댓값 M, $x=-3$일 때 최솟값 m을 갖는다.



$\therefore M=\sqrt{-a\times 9}+12=12+3\sqrt{-a}$,

$m=\sqrt{-a\times 1}+12=12+\sqrt{-a}$

이때 $M-m=2$이므로

$(12+3\sqrt{-a})-(12+\sqrt{-a})=2$

$2\sqrt{-a}=2$

$\therefore a=-1$

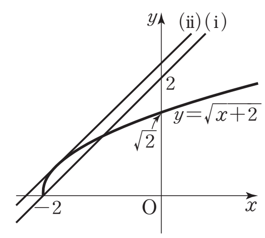
따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=4$이므로

$a+b+c=-1+2+4=5$ **답** 5

11

방정식 $\sqrt{x+2}=x+k$가 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $y=x+k$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+k$가 직선 (i)이거나 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지날 때, $0=-2+k$ $\quad\therefore k=2$

(ii) 직선 $y=x+k$가 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 접할 때, $\sqrt{x+2}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$

$4k=9$ $\quad\therefore k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$2\le k<\frac{9}{4}$ **답** $2\le k<\frac{9}{4}$

12

함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다. ←본문 75쪽 비법노트① (5)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리는 함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 사이의 거리와 같다.

$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-6x+a+4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점의 좌표는 각각 (α, α), (β, β)이고, 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

직선 $y=x$ 위의 점이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{8}$

$2(\alpha-\beta)^2=8$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편, ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=a+4$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\quad=36-4(a+4)$

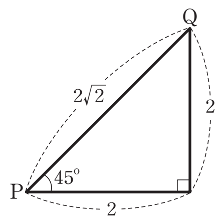
$\quad=20-4a \quad\cdots\cdots ㉢$

㉡$=$㉢에서 $20-4a=4$

$4a=16 \quad \therefore a=4$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-a}+2$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점은 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로 두 교점을 각각 P, Q라 하면 다음 그림과 같은 직각삼각형을 그릴 수 있다.



두 교점의 x좌표의 차가 2이므로 두 교점의 x좌표를 각각 p, $p+2$라 하면 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+(p+2)=6$

$2p+2=6$, $2p=4$

$\therefore p=2$

또한, $p(p+2)=a+4$이므로 $8=a+4$

$\therefore a=4$

13 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(3)$

$\quad=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)$

$\quad=g^{-1}(f^{-1}(3))$

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$\dfrac{2a+1}{a-2}=3$, $2a+1=3a-6$

$\therefore a=7$

$g^{-1}(f^{-1}(3))=g^{-1}(7)$

$g^{-1}(7)=b$라 하면 $g(b)=7$

$\sqrt{4b+1}=7$, $4b+1=49$

$\therefore b=12$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)=12$ 답 12

• 다른 풀이 •

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))$

$\quad=(f\circ g)^{-1}(3)$

$(f\circ g)^{-1}(3)=k$라 하면 $(f\circ g)(k)=3$

$\dfrac{2g(k)+1}{g(k)-2}=3$, $2g(k)+1=3g(k)-6$

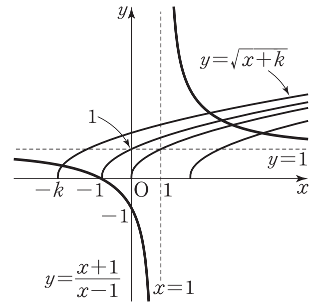
$\therefore g(k)=7$

즉, $\sqrt{4k+1}=7$이므로 $k=12$

$\therefore (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(3)=12$

14 $y=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)+2}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 무리함수 $y=\sqrt{x+k}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$, $y=\sqrt{x+k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-k\le-1$이어야 한다.

$\therefore k\ge1$ 답 $k\ge1$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.103~107

01 ②	02 64	03 ④	04 3	05 ③
06 ④	07 ①	08 ⑤	09 $\frac{1}{10}$	10 $2\sqrt{2}$
11 $\frac{1}{3}\le m\le3$		12 1	13 $2\sqrt{2}$	14 $\frac{1}{12}$
15 45	16 38	17 4	18 ③	19 1
20 12	21 ⑤	22 83	23 800	24 ④
25 9	26 ④	27 ①	28 ③	

01 $\sqrt{10}-3=\dfrac{1}{6+a_1} \quad\cdots\cdots$ ㉠에서

$6+a_1=\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}=\dfrac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}=\sqrt{10}+3$

$\therefore a_1=\sqrt{10}-3$

$a_1=\dfrac{1}{6+a_2}$에서 $\sqrt{10}-3=\dfrac{1}{6+a_2}$

㉠에서 $a_2=a_1=\sqrt{10}-3$

$a_2=\dfrac{1}{6+a_3}$에서 $\sqrt{10}-3=\dfrac{1}{6+a_3}$

㉠에서 $a_3=a_1=\sqrt{10}-3$

$\vdots$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{10}-3$이므로

$\left(a_{10}+\dfrac{1}{a_{20}}\right)^2=\left(\sqrt{10}-3+\dfrac{1}{\sqrt{10}-3}\right)^2$

$\quad=(\sqrt{10}-3+\sqrt{10}+3)^2$

$\quad=(2\sqrt{10})^2=40$ 답 ②

02 별 A, B의 표면 온도를 각각 T_A, T_B, 반지름의 길이를 각각 R_A, R_B, 광도를 각각 L_A, L_B라 하면 주어진 조건에 의하여

$T_A=\frac{1}{3}T_B$, $R_A=72R_B$, $L_A=kL_B$ ……㉠

이때 $T_A{}^2=\frac{1}{R_A}\sqrt{\frac{L_A}{4\pi\sigma}}$이므로 ㉠을 대입하면

$\left(\frac{1}{3}T_B\right)^2=\frac{1}{72R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$

$\frac{1}{9}T_B{}^2=\frac{1}{72R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$

또한, $T_B{}^2=\frac{1}{R_B}\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\sigma}}$이므로 위의 식에 대입하면

$\frac{1}{9R_B}\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\sigma}}=\frac{1}{72R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$이므로

$\frac{1}{9}=\frac{\sqrt{k}}{72}$, $\sqrt{k}=8$

$\therefore k=64$ 답 64

• 다른 풀이 •

$T^2=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}$에서 양변을 제곱하면

$T^4=\frac{1}{R^2}\times\frac{L}{4\pi\sigma}$ $\quad\therefore L=4\pi\sigma R^2T^4$

별 A, B의 표면 온도를 각각 T_A, T_B, 반지름의 길이를 각각 R_A, R_B, 광도를 각각 L_A, L_B라 하면

$L_A=4\pi\sigma R_A{}^2T_A{}^4$, $L_B=4\pi\sigma R_B{}^2T_B{}^4$

이때 주어진 조건에 의하여

$T_A=\frac{1}{3}T_B$, $R_A=72R_B$이므로

$\frac{L_A}{L_B}=\frac{4\pi\sigma R_A{}^2T_A{}^4}{4\pi\sigma R_B{}^2T_B{}^4}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4$

$=72^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=64$

$\therefore L_A=64L_B$

$L_A=kL_B$에서 $k=64$

03 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$

이므로

$S(n)=f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(n)$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots$

$+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{4}$

$=\sqrt{n+2}-2$

ㄱ. $S(14)=\sqrt{16}-2=4-2=2$ (거짓)

ㄴ. $\sqrt{n^4+2}<\sqrt{n^4+2n^2+1}$ ($\because n\geq 3$)

$=\sqrt{(n^2+1)^2}$

$=n^2+1$

이므로

$S(n^4)=\sqrt{n^4+2}-2$

$<(n^2+1)-2=n^2-1$

$<n^2$

$\therefore S(n^4)<n^2$ (참)

ㄷ. $S(n)>11$에서 $\sqrt{n+2}-2>11$

$\sqrt{n+2}>13$, $n+2>169$

$\therefore n>167$

즉, $S(n)>11$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 168이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

ㄴ. $S(n^4)<n^2$에서 $\sqrt{n^4+2}-2<n^2$, 즉 $\sqrt{n^4+2}<n^2+2$를 확인하면 된다.

이때 $\sqrt{n^4+2}>0$, $n^2+2>0$이므로

$(n^2+2)^2-(\sqrt{n^4+2})^2=n^4+4n^2+4-(n^4+2)$

$=4n^2+2$

>0

따라서 $(n^2+2)^2>(\sqrt{n^4+2})^2$에서

$n^2+2>\sqrt{n^4+2}$이므로 $S(n^4)<n^2$ (참)

BLACKLABEL 특강 필수 개념

부등식의 증명

두 수 또는 두 식이 모두 양수일 때, 제곱의 차를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.

$A>0$, $B>0$일 때

(1) $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A>B$

(2) $A^2-B^2=0 \Longleftrightarrow A=B$

(3) $A^2-B^2<0 \Longleftrightarrow A<B$

04 $\sqrt{n}$의 정수 부분이 $f(n)$, 소수 부분이 $g(n)$이므로

$\sqrt{n}=f(n)+g(n)$에서

$g(n)=\sqrt{n}-f(n)$ ……㉠

㉠을 $\{f(n)\}^2+\{g(n)\}^2=3-2g(n)$에 대입하면

$\{f(n)\}^2+\{\sqrt{n}-f(n)\}^2=3-2\{\sqrt{n}-f(n)\}$

$\{f(n)\}^2+n-2f(n)\sqrt{n}+\{f(n)\}^2=3-2\sqrt{n}+2f(n)$

$2\{f(n)\}^2-2f(n)+n-3+\{2-2f(n)\}\sqrt{n}=0$

n과 $f(n)$은 정수이고, $\sqrt{n}$은 무리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2\{f(n)\}^2-2f(n)+n-3=0$, $2-2f(n)=0$

$2-2f(n)=0$에서 $f(n)=1$

위의 값을 $2\{f(n)\}^2-2f(n)+n-3=0$에 대입하면

$2-2+n-3=0$ $\quad\therefore n=3$ 답 3

• 다른 풀이 •

$\sqrt{n}$의 정수 부분이 $f(n)$, 소수 부분이 $g(n)$이므로

$\sqrt{n}=f(n)+g(n)$ $(0<g(n)<1)$ ← $\sqrt{n}$은 무리수이므로 $g(n)\neq 0$

$\{f(n)\}^2+\{g(n)\}^2=3-2g(n)$에서

$\{f(n)\}^2=3-2g(n)-\{g(n)\}^2$

$\{f(n)\}^2=4-\{g(n)+1\}^2$ ……㉡

$0<g(n)<1$에서 $1<\{g(n)+1\}^2<4$이므로

$0<\{f(n)\}^2<3$

이때 n은 양의 정수, $f(n)$은 정수이므로

$f(n)=1$

위의 식을 ㉡에 대입하여 정리하면

$1=4-\{g(n)+1\}^2$, $\{g(n)+1\}^2=3$

$\therefore\ g(n)=\sqrt{3}-1\ (\because\ 0<g(n)<1)$

따라서 $f(n)+g(n)=1+(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{n}=\sqrt{3}\qquad \therefore\ n=3$

05

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로

$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=a\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$, $4=\frac{1}{4}a+\frac{9}{2}$

$\frac{1}{4}a=-\frac{1}{2}\qquad \therefore\ a=-2$

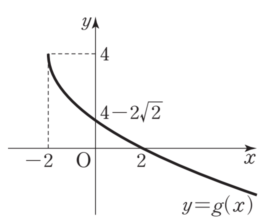
즉, $f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}=-2x^2+2x+4$이므로

$b=2$, $c=4$

$\therefore\ g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$

ㄱ. 정의역은 $\{x|x\ge-2\}$이고, 치역은 $\{y|y\le4\}$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 무리함수 $y=-2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.



또한, $g(0)=-2\sqrt{2}+4>0$이므로 위의 그림과 같이 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면을 지나고, 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=0$에서 $-2x^2+2x+4=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore\ \alpha=-1$, $\beta=2\ (\because\ \alpha<\beta)$

함수 $g(x)$는 ㄴ에서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이므로* $-1\le x\le2$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(-1)=-2\sqrt{-1+2}+4=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$x_1<x_2$이면 $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$

즉, $-2\sqrt{x_1+2}>-2\sqrt{x_2+2}$에서 $-2\sqrt{x_1+2}+4>-2\sqrt{x_2+2}+4$

$\therefore\ g(x_1)>g(x_2)$

따라서 $x_1<x_2$이면 $g(x_1)>g(x_2)$이므로 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이다.

06

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식

$\frac{1}{2}x^2=x+k$, 즉 $x^2-2x-2k=0\qquad\cdots\cdots$㉠

의 두 실근이다.

이때 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha+k)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta+k)\ (\alpha<\beta)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+k)-(\alpha+k)\}^2}$

$=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{2}(\beta-\alpha)\ (\because\ \alpha<\beta)$

㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2k$

$\therefore\ (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4+8k$

즉, $\beta-\alpha=\sqrt{4+8k}\ (\because\ \alpha<\beta)$이므로

$f(k)=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\sqrt{4+8k}$

$=2\sqrt{2+4k}=2\sqrt{4\left(k+\frac{1}{2}\right)}$

따라서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 $y=2\sqrt{4k}$의 그래프를 k축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 그 개형은 ④이다. **답** ④

07

$f(x)=a\sqrt{bx+1}+c=a\sqrt{b\left(x+\frac{1}{b}\right)}+c$

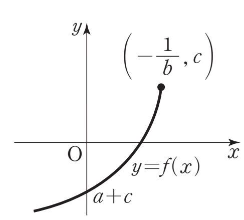
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{b}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\left(-\frac{1}{b}, c\right)$, $(0, a+c)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면은 지나지 않고 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면만 지나는 경우는 다음과 같다.

(i) 점 $\left(-\frac{1}{b}, c\right)$가 제1사분면 위에 있는 경우

$-\frac{1}{b}>0$, $c>0$이므로 $b<0$, $c>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $\left(-\frac{1}{b}, c\right)$를 기준으로 왼쪽 아래(↙)로 향해야 하므로



$a<0$

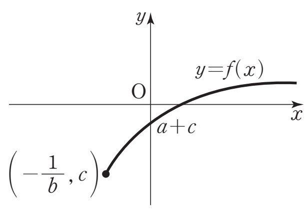
이 그래프와 y축의 교점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로 $a+c<0$

$\therefore\ ac<0$, $a+c<0$, $bc<0$

(ii) 점 $\left(-\frac{1}{b}, c\right)$가 제3사분면 위에 있는 경우

$-\frac{1}{b}<0$, $c<0$이므로 $b>0$, $c<0$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $\left(-\frac{1}{b}, c\right)$를 기준으로 오른쪽 위로(↗) 향해야 하므로 $a>0$



이 그래프와 y축의 교점의 y좌표가 0보다 작아야 하므로 $a+c<0$

$\therefore ac<0,\ a+c<0,\ bc<0$

(i), (ii)에서 $ac<0,\ a+c<0,\ bc<0$이므로

$$\frac{|ac|}{ac}+\frac{2|a+c|}{a+c}+\frac{3|bc|}{bc}=-\frac{ac}{ac}-\frac{2(a+c)}{a+c}-\frac{3bc}{bc}$$
$$=-1-2-3=-6$$

답 ①

BLACKLABEL 특강 필수 원리

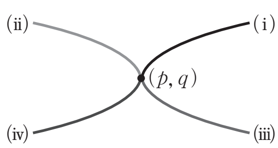
무리함수 $y=a\sqrt{b(x-p)}+q$의 그래프의 개형은 a, b의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

(i) $a>0$, $b>0$일 때,
점 (p, q)를 기준으로 오른쪽 위(↗)로 향한다.

(ii) $a>0$, $b<0$일 때,
점 (p, q)를 기준으로 왼쪽 위(↖)로 향한다.

(iii) $a<0$, $b>0$일 때,
점 (p, q)를 기준으로 오른쪽 아래(↘)로 향한다.

(iv) $a<0$, $b<0$일 때,
점 (p, q)를 기준으로 왼쪽 아래(↙)로 향한다.



08

$f(x)=-\sqrt{kx+4k}+8$, $g(x)=\sqrt{-kx+4k}-8$이라 하자.

$f(x)=-\sqrt{kx+4k}+8=-\sqrt{k(x+4)}+8$이므로 곡선 $y=f(x)$는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, 8)$을 지난다.

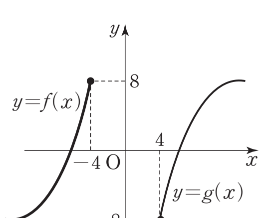
또한, $-f(-x)=\sqrt{-kx+4k}-8$에서

$-f(-x)=g(x)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 k의 값의 부호에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 그릴 수 있다.

(i) $k<0$일 때,

곡선 $y=f(x)$는 점 $(-4, 8)$을 기준으로 왼쪽 아래(↙)로 향하므로 곡선 $y=g(x)$는 점 $(4, -8)$을 기준으로 오른쪽 위(↗)로 향한다.

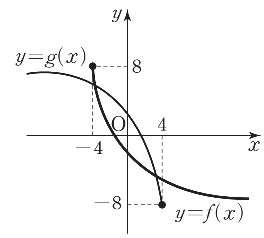


이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 없다.

(ii) $k>0$일 때,

곡선 $y=f(x)$는 점 $(-4, 8)$을 기준으로 오른쪽 아래(↘)로 향하므로 곡선 $y=g(x)$는 점 $(4, -8)$을 기준으로 왼쪽 위(↖)로 향한다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)<g(0)$,

$f(4)\ge -8$, $g(-4)\le 8$

이어야 하므로

$f(0)<g(0)$에서

$-\sqrt{4k}+8<\sqrt{4k}-8$, $8<\sqrt{4k}$

양변을 제곱하면

$4k>64 \qquad \therefore k>16 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(4)\ge -8$에서

$-\sqrt{8k}+8\ge -8$, $\sqrt{8k}\le 16$

양변을 제곱하면

$8k\le 256 \qquad \therefore k\le 32 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$g(-4)\le 8$에서

$\sqrt{8k}-8\le 8$, $\sqrt{8k}\le 16$

마찬가지로 $k\le 32 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $16<k\le 32$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는

$16<k\le 32$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 17, 18, 19, ⋯, 32의 16개이다.

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 일대일함수이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프가 원점을 지날 때, 두 함수의 그래프는 오직 한 점(원점)에서만 만난다.

09

두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$가 무리함수 $y=\sqrt{x+3}-1$의 그래프 위에 있으므로

$y_1=\sqrt{x_1+3}-1$, $y_2=\sqrt{x_2+3}-1$

선분 PQ의 중점의 y좌표가 4이므로

$$\frac{(\sqrt{x_1+3}-1)+(\sqrt{x_2+3}-1)}{2}=4$$

$\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}-2=8$

$\therefore \sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$

따라서 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(\sqrt{x_2+3}-1)-(\sqrt{x_1+3}-1)}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{\sqrt{x_2+3}-\sqrt{x_1+3}}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x_2+3}-\sqrt{x_1+3})(\sqrt{x_2+3}+\sqrt{x_1+3})}{(x_2-x_1)(\sqrt{x_2+3}+\sqrt{x_1+3})}$$

$$=\frac{(x_2+3)-(x_1+3)}{x_2-x_1}\times\frac{1}{\sqrt{x_2+3}+\sqrt{x_1+3}}$$

$$=1\times\frac{1}{10}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{10}$$

답 $\frac{1}{10}$

10 근호 안의 식의 값은 항상 0 이상이어야 하므로

$1-x\geq0,\ 1+x\geq0$

$\therefore\ -1\leq x\leq1$

즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,-1\leq x\leq1\}$이고, $f(x)\geq0$이므로 $\{f(x)\}^2$이 최대 또는 최소일 때, $f(x)$도 최대 또는 최소이다.

$$\{f(x)\}^2=(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2$$
$$=1-x+2\sqrt{1-x^2}+1+x$$
$$=2+2\sqrt{1-x^2}$$

에서 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$일 때 최댓값 $2+2=4$를 갖고, $x=\pm1$일 때 최솟값 $2+2\times0=2$를 갖는다.

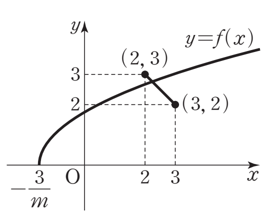
$\therefore\ M=\sqrt{4}=2,\ m=\sqrt{2}$

$\therefore\ Mm=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
㈎	(근호 안의 식의 값)≥0임을 이용하여 함수 $f(x)$의 정의역을 구한 경우	30%
㈏	$f(x)\geq0$이므로 $\{f(x)\}^2$이 최대 또는 최소일 때, $f(x)$도 최대 또는 최소임을 파악한 경우	30%
㈐	$\{f(x)\}^2$의 최댓값과 최솟값을 구하고 $f(x)$의 최댓값 M, 최솟값 m을 구한 경우	30%
㈑	Mm의 값을 구한 경우	10%

11 무리함수 $f(x)=\sqrt{mx+3}=\sqrt{m\left(x+\frac{3}{m}\right)}$ $(m>0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{mx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{m}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 점 $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$를 이은 선분과 무리함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나려면 점 $(2,\ 3)$이 무리함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이거나 위쪽에 있어야 하고, 점 $(3,\ 2)$가 무리함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이거나 아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore\ f(2)\leq3,\ f(3)\geq2$

즉, $\sqrt{2m+3}\leq3$, $\sqrt{3m+3}\geq2$이므로

(i) $\sqrt{2m+3}\leq3$에서 $2m+3\leq9$

$2m\leq6\qquad\therefore\ 0<m\leq3\ (\because\ m>0)$

(ii) $\sqrt{3m+3}\geq2$에서 $3m+3\geq4$

$3m\geq1\qquad\therefore\ m\geq\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

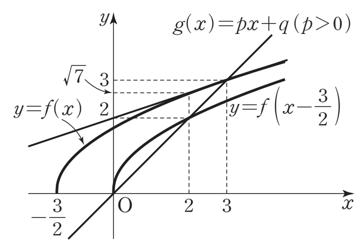
$\frac{1}{3}\leq m\leq3$

답 $\frac{1}{3}\leq m\leq3$

12 $f(x)=\sqrt{2x+3}$에서

$$f\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)+3}=\sqrt{2x}$$

이때 부등식 $f\left(x-\frac{3}{2}\right)<g(x)<f(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위가 $2<x<3$이려면 다음 그림과 같이 함수 $g(x)=px+q\ (p>0)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$ 또는 두 점 $(2,\ \sqrt{7})$, $(3,\ 3)$을 지나야 한다.



이때 p, q가 정수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$을 지나는 직선이고, 이 직선의 방정식은

$y-2=\frac{3-2}{3-2}(x-2)$에서 $y=x$

$\therefore\ g(x)=x$

따라서 $p=1$, $q=0$이므로 $p+q=1$

답 1

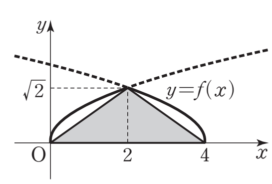
13 $x\geq0$, $4-x\geq0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,0\leq x\leq4\}$이다. 이때

$$|\sqrt{x}-\sqrt{4-x}|=\begin{cases}\sqrt{4-x}-\sqrt{x} & (0\leq x<2)\\ \sqrt{x}-\sqrt{4-x} & (2\leq x\leq4)\end{cases}$$

이므로

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}-|\sqrt{x}-\sqrt{4-x}|}{2}$$
$$=\begin{cases}\sqrt{x} & (0\leq x<2)\\ \sqrt{4-x} & (2\leq x\leq4)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 세 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(2,\ \sqrt{2})$일 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다.



따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
㈎	x의 값의 범위를 나누어 함수 $f(x)$의 식을 절댓값 기호를 없애고 나타낸 경우	40%
㈏	삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되도록 하는 세 꼭짓점의 좌표를 구한 경우	40%
㈐	삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구한 경우	20%

14 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=ax+b$에 대하여

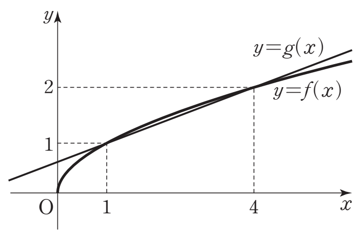
$f(1)=g(1)$에서 $a+b=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(4)=g(4)$에서 $4a+b=2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ *

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $1\le x\le 4$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

$h(x)=|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$

$=\sqrt{x}-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

$\sqrt{x}=k$로 놓으면 $1\le x\le 4$에서 $1\le k\le 2$이고,

$\sqrt{x}-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=k-\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{3}$

$=-\frac{1}{3}\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$

그러므로 $k=\frac{3}{2}$, 즉 $x=\frac{9}{4}$일 때 함수 $h(x)$는 최댓값 $\frac{1}{12}$을 갖는다.

답 $\frac{1}{12}$

• 다른 풀이 •

*에서 직선 $y=g(x)$와 기울기가 같고 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선을 $y=\frac{1}{3}x+t$ (t는 상수)라 하면

접점의 x좌표는 방정식 $\sqrt{x}=\frac{1}{3}x+t$의 실근이다.

양변을 제곱하면 $x=\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}tx+t^2$

$9x=x^2+6tx+9t^2$

$\therefore x^2+(6t-9)x+9t^2=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(6t-9)^2-4\times1\times9t^2=0$

$36t^2-108t+81-36t^2=0$

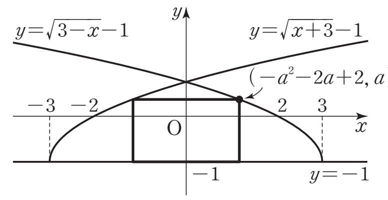
$108t=81$ $\quad\therefore t=\frac{3}{4}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}$

이때 $h(x)$의 최댓값은 평행한 두 직선 $y=g(x)$와 $y=\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}$의 y절편의 차와 같으므로

$\left|\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{8}{12}-\frac{9}{12}\right|=\frac{1}{12}$

15 두 함수 $y=\sqrt{x+3}-1$, $y=\sqrt{3-x}-1$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 세 함수 $y=\sqrt{x+3}-1$, $y=\sqrt{3-x}-1$, $y=-1$의 그래프로 둘러싸인 영역에 내접하는 직사각형도 y축에 대하여 대칭이다. *



함수 $y=\sqrt{3-x}-1$의 그래프 위의 직사각형의 한 꼭짓점의 y좌표를 a ($a>-1$)라 하면

$\sqrt{3-x}-1=a$에서 $\sqrt{3-x}=a+1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$3-x=a^2+2a+1$ $\quad\therefore x=-a^2-2a+2$

즉, 이 꼭짓점의 좌표는 $(-a^2-2a+2, a)$이므로 직사각형의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2[2(-a^2-2a+2)+\{a-(-1)\}]$

$=-4a^2-6a+10$

$=-4\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{49}{4}$

따라서 $a=-\frac{3}{4}$일 때 l은 최댓값 $\frac{49}{4}$를 가지므로

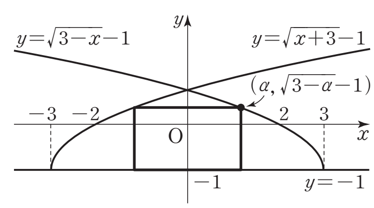
$p=4$, $q=49$

$\therefore q-p=45$

답 45

• 다른 풀이 •

*에서



함수 $y=\sqrt{3-x}-1$의 그래프 위의 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(\alpha, \sqrt{3-\alpha}-1)$ $(0<\alpha<3)$, 직사각형의 둘레의 길이를 l'이라 하면

$l'=2[2\alpha+\{\sqrt{3-\alpha}-1-(-1)\}]$

$=2\sqrt{3-\alpha}+4\alpha$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\sqrt{3-\alpha}=t$ $(0<t<\sqrt{3})$로 놓고 이 식의 양변을 제곱하면

$3-\alpha=t^2$ $\quad\therefore \alpha=3-t^2$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$l'=2t+4(3-t^2)$

$=-4t^2+2t+12$

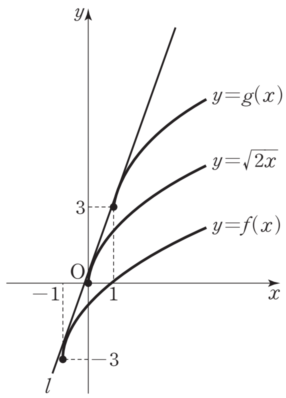
$=-4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{49}{4}$

$0<\frac{1}{4}<\sqrt{3}$이므로 $t=\frac{1}{4}$, 즉 $\alpha=\frac{47}{16}$일 때 l'은 최댓값 $\frac{49}{4}$를 갖는다.

따라서 $p=4$, $q=49$이므로

$q-p=45$

16 $f(x)=\sqrt{2x+2}-3=\sqrt{2(x+1)}-3$,
$g(x)=\sqrt{2x-2}+3=\sqrt{2(x-1)}+3$이라 하자.
곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\sqrt{2x}$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=\sqrt{2x}$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 곡선 $y=\sqrt{2x}$를 평행이동하면 겹칠 수 있다.
또한, 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\sqrt{2x}$의 시작점 $(-1, -3)$, $(1, 3)$, $(0, 0)$은 모두 직선 $y=3x$ 위에 있다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접하는 직선 l은 곡선 $y=\sqrt{2x}$에도 접하고 기울기가 3이다.
직선 l의 방정식을
$y=3x+k$ (k는 상수)
라 하면 직선 l과 곡선 $y=\sqrt{2x}$의 교점의 x좌표는
$\sqrt{2x}=3x+k$
위의 식의 양변을 제곱하면
$2x=9x^2+6kx+k^2$, $9x^2+2(3k-1)x+k^2=0$
x에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3k-1)^2-9k^2=0$$

$$-6k+1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$y=3x+\frac{1}{6}$, 즉 $18x-6y+1=0$

점 O와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|18\times0-6\times0+1|}{\sqrt{18^2+6^2}}=\frac{1}{\sqrt{360}}=\frac{\sqrt{10}}{60}$$

점 P$(2, a)$와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|18\times2-6\times a+1|}{\sqrt{18^2+6^2}}=\frac{|37-6a|}{\sqrt{360}}=\frac{\sqrt{10}|37-6a|}{60}$$

두 점 O, P에서 직선 l에 이르는 거리가 서로 같으므로

$$\frac{\sqrt{10}|37-6a|}{60}=\frac{\sqrt{10}}{60},\ |37-6a|=1$$

$\therefore a=6$ 또는 $a=\frac{19}{3}$

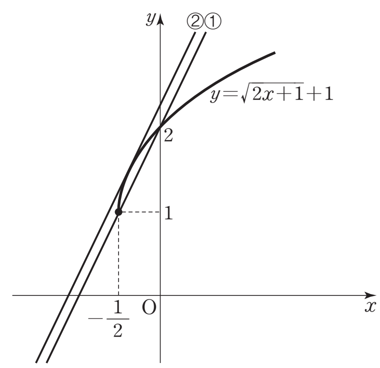
따라서 모든 a의 값의 곱은

$6\times\frac{19}{3}=38$ **답** 38

17 $$y=x+|x-k|=\begin{cases} k & (x<k) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-k & (x\geq k) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

에서 함수 $y=x+|x-k|$의 그래프는 점 (k, k)를 지나고 $x=k$의 좌우에서 기울기가 바뀐다.
두 함수 $y=\sqrt{2x+1}+1$, $y=x+|x-k|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 곡선 $y=\sqrt{2x+1}+1$이 직선 ㉡과 서로 다른 두 점에서 만나는 경우
다음 그림과 같이 직선 ㉡이 그래프 ①과 일치하거나 두 그래프 ①, ② 사이에 있어야 한다.



① 직선 ㉡이 점 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$을 지날 때,

$1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-k$, $1=-1-k$

$\therefore k=-2$

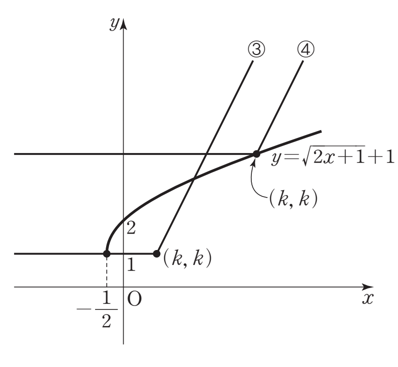
② 직선 ㉡이 곡선 $y=\sqrt{2x+1}+1$과 접할 때,
$2x-k=\sqrt{2x+1}+1$에서
$2x-(k+1)=\sqrt{2x+1}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$4x^2-4(k+1)x+(k+1)^2=2x+1$
$4x^2-2(2k+3)x+k^2+2k=0$
x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k+3)^2-4(k^2+2k)=0$$

$$4k+9=0 \qquad \therefore k=-\frac{9}{4}$$

①, ②에서 실수 k의 값의 범위는 $-\frac{9}{4}<k\leq-2$이다.

(ii) 곡선 $y=\sqrt{2x+1}+1$이 두 직선 ㉠, ㉡과 각각 한 점에서 만나는 경우
다음 그림과 같이 함수 $y=x+|x-k|$의 그래프가 그래프 ③과 일치하거나 두 그래프 ③, ④ 사이에 있어야 한다.



③ 직선 ㉠이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$을 지날 때, $k=1$

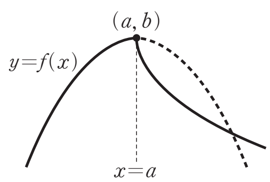
④ 점 $(k,\ k)$ $(k>0)$가 곡선 $y=\sqrt{2x+1}+1$ 위에 있을 때,
$k=\sqrt{2k+1}+1$에서
$k-1=\sqrt{2k+1}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$k^2-2k+1=2k+1$
$k^2-4k=0,\ k(k-4)=0$
$\therefore\ k=4$

③, ④에서 실수 k의 값의 범위는 $1\le k<4$이다.

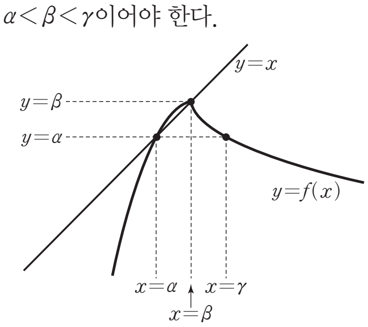
(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 k의 값의 범위는
$-\frac{9}{4}<k\le -2$ 또는 $1\le k<4$
이므로 구하는 모든 정수 k는 $-2,\ 1,\ 2,\ 3$이고 구하는 합은
$-2+1+2+3=4$

답 4

18 함수 $f(x)=\begin{cases} -(x-a)^2+b & (x\le a) \\ -\sqrt{x-a}+b & (x>a) \end{cases}$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



조건 ㈎에서 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$
$\therefore\ f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ ……㉠
조건 ㈏에서 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이고, 조건 ㈎에서 방정식 ㉠의 실근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$뿐이므로
$f(\gamma)=\alpha$ 또는 $f(\gamma)=\beta$
이때 $f(\gamma)=\alpha$이면 방정식 $f(x)=\beta$의 실근은 β뿐이고,
$f(\gamma)=\beta$이면 방정식 $f(x)=\alpha$의 실근은 α뿐이다.
$f(\gamma)=\alpha$라 가정하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$의 교점은 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\gamma,\ \alpha)$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$의 교점은 $(\beta,\ \beta)$뿐이다.
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\beta$의 교점이 1개이려면 점 $(\beta,\ \beta)$는 점 $(a,\ b)$와 일치해야 한다.
$\therefore\ a=b=\beta$ ……㉡
또한, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, $\alpha<\beta<\gamma$이어야 한다.

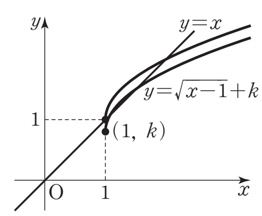


$f(x)=x$에서 $-(x-a)^2+b=x$
$-(x-\beta)^2+\beta=x$ (∵ ㉡), $(x-\beta)^2+(x-\beta)=0$
$(x-\beta)(x-\beta+1)=0$
$\therefore\ x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$
$f(\alpha)=\alpha$이고 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\beta-1$ ……㉢
한편, $f(\gamma)=\alpha$이고 $\gamma>\beta$이므로
$-\sqrt{\gamma-a}+b=\alpha$
$-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta=\beta-1$ (∵ ㉡, ㉢), $\sqrt{\gamma-\beta}=1$
$\therefore\ \gamma=\beta+1$ ……㉣
$\alpha+\beta+\gamma=15$이므로 ㉢, ㉣에서
$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15$
$3\beta=15$ $\quad\therefore\ \beta=5$
$\therefore\ \alpha=\beta-1=4,\ \gamma=\beta+1=6$
즉, $f(x)=\begin{cases} -(x-5)^2+5 & (x\le 5) \\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5) \end{cases}$이므로
$f(\alpha+\beta)=f(9)=-\sqrt{9-5}+5=3$
한편, $f(\gamma)=\beta$라 가정하면 같은 방법으로 $f(\alpha+\beta)=3$이다.
$\therefore\ f(\alpha+\beta)=3$

답 ③

19 함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다. ←본문 75쪽 비법노트① (5)

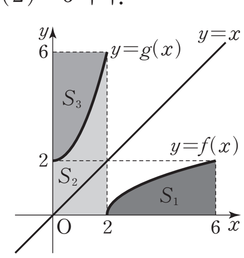
따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 실수 k는 최댓값을 가지므로
$1=\sqrt{1-1}+k$에서 $k=1$

답 1

20 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$에서 $y=\sqrt{x-2}$라 하고, 양변을 제곱하면
$y^2=x-2,\ x=y^2+2$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+2$
$\therefore\ g(x)=x^2+2\ (x\ge 0)$
이때 $f(6)=\sqrt{6-2}=2$이므로 $g(2)=6$이다.
즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.



이때 두 직선 $x=2$, $y=6$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 직사각형에서 S_2를 뺀 영역을 S_3이라 하면

$S_1=S_3$

$\therefore S_1+S_2=S_3+S_2$

$\quad\quad=2\times6=12$

답 12

21 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ -x & (-1\le x<1) \\ -1 & (x\ge1) \end{cases}$$

한편, $g(x)=\sqrt{2x+3}$에서 $y=\sqrt{2x+3}$이라 하고 양변을 제곱하면

$y^2=2x+3$

$\therefore x=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$

$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\ (x\ge0)$

따라서

$$\begin{aligned} y&=(f\circ g^{-1})(x) \\ &=f(g^{-1}(x)) \\ &=\begin{cases} 1 & (g^{-1}(x)<-1) \\ -g^{-1}(x) & (-1\le g^{-1}(x)<1) \\ -1 & (g^{-1}(x)\ge1) \end{cases} \\ &=\begin{cases} 1 & \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}<-1\right) \\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} & \left(-1\le\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}<1\right) \\ -1 & \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\ge1\right) \end{cases} \\ &=\begin{cases} 1 & (0\le x<1) \\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2} & (1\le x<\sqrt{5}) \\ -1 & (x\ge\sqrt{5}) \end{cases} \end{aligned}$$

이므로 그래프의 개형은 ⑤이다.

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 원리

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\ne0)$의 역함수는

$y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}\ (x\ge c)$이다.

[증명] $y=\sqrt{ax+b}+c$에서

$y-c=\sqrt{ax+b}$

양변을 제곱하면

$(y-c)^2=ax+b$

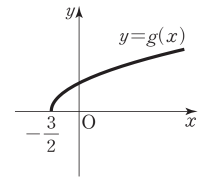
$\therefore x=\frac{1}{a}\{(y-c)^2-b\}$

x와 y를 서로 바꾸면

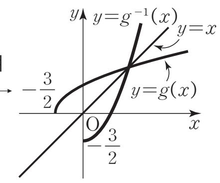
$y=\frac{1}{a}\{(x-c)^2-b\}\ (x\ge c)$

BLACKLABEL 특강 참고

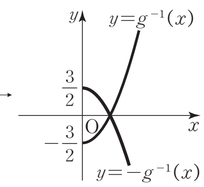
함수 $y=-g^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 역함수의 기하학적 의미와 대칭이동을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.



직선 $y=x$에 대하여 대칭이동



x축에 대하여 대칭이동



22 $a\ge3$이므로 $f(a)=b$라 하면

$b=\sqrt{2a+3}+6\ge\sqrt{2\times3+3}+6=9$ ……㉠

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)$

$g(b)=-\sqrt{b-3}+5$이고 ㉠에서 $b-3\ge6$이므로 $g(b)$가 자연수가 되도록 하는 $b-3$의 값은 9, 16이다.*

(i) $b-3=9$, 즉 $b=12$일 때,

$f(a)=12$에서 $\sqrt{2a+3}+6=12$

$\sqrt{2a+3}=6$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2a+3=36$, $2a=33$ $\quad\therefore a=\frac{33}{2}$

(ii) $b-3=16$, 즉 $b=19$일 때,

$f(a)=19$에서 $\sqrt{2a+3}+6=19$

$\sqrt{2a+3}=13$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2a+3=169$, $2a=166$ $\quad\therefore a=83$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a의 값은 83이다.

답 83

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$g(b)=-\sqrt{b-3}+5$가 자연수가 되려면 $\sqrt{b-3}=0$ 또는 $\sqrt{b-3}=1$ 또는 $\sqrt{b-3}=2$ 또는 $\sqrt{b-3}=3$ 또는 $\sqrt{b-3}=4$이어야 한다.

이때 $b-3\ge6$이므로

$\sqrt{b-3}=3$ 또는 $\sqrt{b-3}=4$

$\therefore b-3=9$ 또는 $b-3=16$

23 $f(x)=\sqrt{x+4n^2}-2n\ (x\ge0)$에서 $y=\sqrt{x+4n^2}-2n$이라 하면

$y+2n=\sqrt{x+4n^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

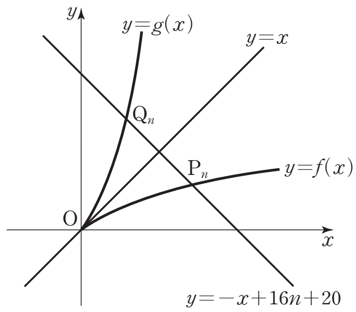
$y^2+4ny+4n^2=x+4n^2$

$\therefore x=y^2+4ny$

x와 y를 서로 바꾸면 함수 $f(x)$의 역함수는

$y=x^2+4nx\ (x\ge0)$

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 다음 그림과 같다.



점 Q_n의 x좌표는

$x^2+4nx=-x+16n+20$

$x^2+(4n+1)x-16n-20=0$

$(x+4n+5)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x\ge0)$

$\therefore Q_n(4,\ 16n+16)$

이때 두 점 P_n, Q_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$P_n(16n+16,\ 4)$

$\therefore l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(16n+16-4)^2+(4-16n-16)^2}$

$=\sqrt{(16n+12)^2+(16n+12)^2}$

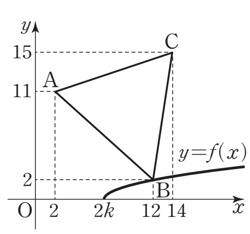
$=\sqrt{2}(16n+12)\ (\because n$은 자연수$)$

따라서 $l_5=92\sqrt{2}$, $l_2=44\sqrt{2}$, $l_1=28\sqrt{2}$이므로

$(l_5-l_2-l_1)^2=(92\sqrt{2}-44\sqrt{2}-28\sqrt{2})^2$

$=(20\sqrt{2})^2=800$ 답 800

24 k의 값이 커질수록 곡선 $y=\sqrt{x-2k}$는 x축의 양의 방향으로 평행이동하므로 곡선 $y=f(x)$가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 k의 최댓값은 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 점 B$(12,\ 2)$를 지날 때이다.



$2=\sqrt{12-2k}$에서 양변을 제곱하면

$12-2k=4$, $2k=8$ $\quad\therefore k=4$

즉, $k\le4$일 때 곡선 $y=f(x)$는 삼각형 ABC와 만난다. ……㉠

한편, $y=\sqrt{x-2k}$에서 양변을 제곱하면

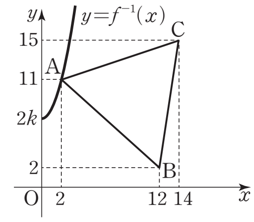
$y^2=x-2k$, $x=y^2+2k$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x^2+2k$

즉, 함수 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=x^2+2k\ (x\ge0)$

이때 k의 값이 커질수록 곡선 $y=x^2+2k$는 y축의 양의 방향으로 평행이동하므로 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 k의 최댓값은 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 점 A$(2,\ 11)$을 지날 때이다.



$4+2k=11$에서 $2k=7$ $\quad\therefore k=\dfrac{7}{2}$

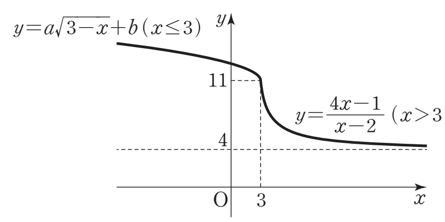
즉, $k\le\dfrac{7}{2}$일 때 곡선 $y=f^{-1}(x)$는 삼각형 ABC와 만난다. ……㉡

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$k\le\dfrac{7}{2}$이므로 구하는 양수 k의 최댓값은 $\dfrac{7}{2}$이다. 답 ④

25 $y=\dfrac{4x-1}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+7}{x-2}=\dfrac{7}{x-2}+4$

조건 (가)에서 함수 f의 치역이 $\{y|y>4\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(3)=11$이어야 하므로 $b=11$

조건 (다)에서 $f(-1)=13$이므로

$2a+b=13$, $2a+11=13$

$2a=2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}+11 & (x\le3)\\ \dfrac{4x-1}{x-2} & (x>3)\end{cases}$

$f(2)=\sqrt{3-2}+11=12$이므로

$f(2)f(k)=60$에서 $12f(k)=60$

$\therefore f(k)=5$

즉, $\dfrac{4k-1}{k-2}=5$이므로 $4k-1=5k-10$

$\therefore k=9$ 답 9

26 $y=m(x+1)-1$은 기울기 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식이다. 즉, 집합 A의 원소는 직선 $y=m(x+1)-1$ 위의 점이다.

$y=\dfrac{1}{x-1}+2$는 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$,

$y=2$인 유리함수이고, $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$의 그래프는

$y=\frac{1}{x-1}+2$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그대로 두고

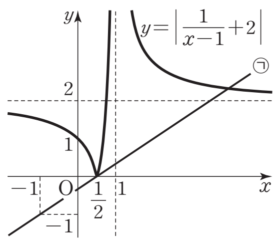
$y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 집합 B의 원소는 함수 $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$의 그래프 위의 점이다.

함수 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 즉, 집합 C의 원소는 무리함수 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프 위의 점이다.

이때 $n(A\cap B)=3$은 직선 $y=m(x+1)-1$과 함수 $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$의 그래프의 교점이 3개임을 의미한다.

점 $(-1,\ -1)$을 지나고 $x<1$에서 함수 $y=\left|\frac{1}{x-1}+2\right|$의 그래프와 접하는 직선을 ㉠이라 하자.



$n(A\cap B)=3$이려면 직선 $y=m(x+1)-1$의 기울기가 직선 ㉠의 기울기보다 커야 한다.

이때 $\left|\frac{1}{x-1}+2\right|=0$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

두 점 $(-1,\ -1)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나는 직선 ㉠의 기울기는

$$\frac{0-(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)}=\frac{2}{3}$$

따라서 $n(A\cap B)=3$이기 위한 m의 값의 범위는

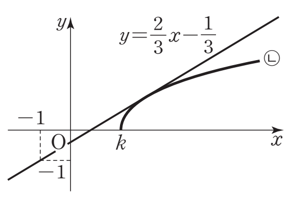
$$\boxed{m>\frac{2}{3}}$$

한편, $n(A\cap B)=2$이려면 $m=\frac{2}{3}$이어야 하므로

$y=\frac{2}{3}(x+1)-1$ $\qquad\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

이때 $n(A\cap B)=2$이면서 $n(A\cap C)=0$이려면 직선 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$이 함수 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프와 만나지 않아야 한다.

따라서 함수 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$에 접하는 곡선 ㉡보다 오른쪽에 있어야 한다.



곡선 ㉡의 함수식을 $y=\sqrt{x-k}$ (k는 실수)라 할 때, 직선 $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$과 곡선 ㉡의 접점의 x좌표는 방정식 $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=\sqrt{x-k}$의 실근이다.

$2x-1=3\sqrt{x-k}$에서 양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=9x-9k$ $\qquad\therefore 4x^2-13x+9k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-13)^2-4\times4\times(9k+1)=0$

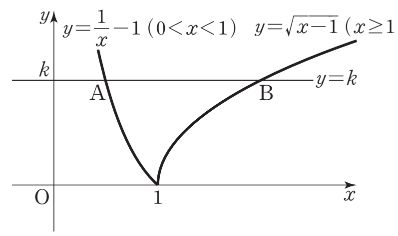
$153-144k=0$ $\qquad\therefore k=\frac{153}{144}=\frac{17}{16}$

따라서 $n(A\cap B)=2$이면서 $n(A\cap C)=0$이기 위한 n의 값의 범위는

$$\boxed{n>\frac{17}{16}}$$

$\therefore$ (가) : $m>\frac{2}{3}$, (나) : $n>\frac{17}{16}$ 답 ④

27 x축에 평행한 직선을 $y=k$ $(k>0)$라 하고, $\alpha<\beta$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 두 점 A, B는 두 함수 $y=\frac{1}{x}-1$ $(0<x<1)$, $y=\sqrt{x-1}$ $(x\geq1)$의 그래프 위에 있다.



$\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}-1\right)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \sqrt{\beta-1})$이고, 두 점 A, B는 직선 $y=k$ 위에 있으므로

$\frac{1}{\alpha}-1=k$, $\sqrt{\beta-1}=k$에서

$\frac{1}{\alpha}=k+1$, $\beta-1=k^2$ $\qquad\therefore \alpha=\frac{1}{k+1}$, $\beta=k^2+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha\beta&=\frac{k^2+1}{k+1}\\&=\frac{(k+1)(k-1)+2}{k+1}\\&=k-1+\frac{2}{k+1}\\&=k+1+\frac{2}{k+1}-2 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $k>0$에서 $k+1>0$, $\frac{2}{k+1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}k+1+\frac{2}{k+1}&\geq2\sqrt{(k+1)\times\frac{2}{k+1}}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } k+1=\frac{2}{k+1}\text{, 즉 } k=\sqrt{2}-1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ㉠에서

$\alpha\beta=k+1+\frac{2}{k+1}-2\geq2\sqrt{2}-2$

이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}-2$이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

$\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}-1\right)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \sqrt{\beta-1})$이라 할 때, 두 점의 y좌표가 같으므로

$\frac{1}{\alpha}-1=\sqrt{\beta-1}$

양변을 제곱하면

$\beta-1=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2,\ \beta=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+2$

$\therefore\ \alpha\beta=\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+2\right)=\frac{1}{\alpha}+2\alpha-2$ ……㉡

이때 $\alpha>0$에서 $\frac{1}{\alpha}>0,\ 2\alpha>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+2\alpha\ge 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}\times 2\alpha}$

$=2\sqrt{2}$ $\left(\text{단, 등호는 } \frac{1}{\alpha}=2\alpha,\ \text{즉 } \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ㉡에서

$\alpha\beta=\frac{1}{\alpha}+2\alpha-2\ge 2\sqrt{2}-2$

이므로 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}-2$이다.

28 해결단계

❶ 단계	점 $P(x_1, y_1)$은 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=a\sqrt{ax}$의 교점임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	두 점 P, Q의 좌표를 a, b를 이용하여 나타낸 후, 직선 PQ의 기울기를 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	$\overline{OP}=\overline{OQ}$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 후, $\overline{PQ}=1$임을 이용하여 삼각형 OPQ의 넓이를 구하고 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. 점 $P(x_1, y_1)$은 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=a\sqrt{ax}$의 교점이므로

$\frac{1}{x_1}=a\sqrt{ax_1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\frac{1}{x_1^2}=a^3x_1,\ \frac{1}{x_1^3}=a^3 \qquad \therefore\ \frac{1}{x_1}=a$

즉, $y_1=\frac{1}{x_1}=a$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $P\left(\frac{1}{a},\ a\right)$

같은 방법으로 $Q(x_2, y_2)$는 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=b\sqrt{bx}$의 교점이므로 $\frac{1}{x_2}=b\sqrt{bx_2}$에서

$x_2=\frac{1}{b},\ y_2=b \qquad \therefore\ Q\left(\frac{1}{b},\ b\right)$

즉, 직선 PQ의 기울기는

$\dfrac{b-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{b-a}{\frac{a-b}{ab}}=-ab$ (거짓)

ㄷ. $\overline{OP}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}},\ \overline{OQ}=\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}$

$\overline{OP}=\overline{OQ}$에서 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+\frac{1}{a^2}=b^2+\frac{1}{b^2},\ a^2-b^2+\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=0$

$(a^2-b^2)\left(1-\frac{1}{a^2b^2}\right)=0$

이때 $0<b<1<a$이므로

$a^2-b^2\ne0,\ 1-\frac{1}{a^2b^2}=0$

$a^2b^2=1,\ ab=1$ ($\because\ a>0,\ b>0$)

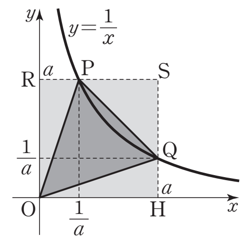
$\therefore\ b=\frac{1}{a}$

즉, $P\left(\frac{1}{a},\ a\right)$, $Q\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$이고 $\overline{PQ}=1$이므로

$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-a\right)^2}=1$

$2\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=1,\ \left(a-\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a^2+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{2}$ ……㉠



따라서 위의 그림에서

$\triangle OPQ$

$=\square OHSR-(\triangle OPR+\triangle OHQ+\triangle PQS)$

$=a^2-\left\{\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times a+\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{4}-4}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

이므로 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{3}{4}$이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.108~109

01 1925	02 ⑤	03 $0<a\le\frac{1}{2}$ 또는 $a>2$		
04 113	05 $\frac{189}{32}$	06 6	07 2	08 23
09 $\frac{25}{38}$	10 24	11 3	12 13	

01 해결단계

❶ 단계	주어진 식을 x, y, z에 대한 무리식의 제곱의 합으로 변형한다.
❷ 단계	x, y, z가 실수임을 이용하여 x, y, z의 값을 각각 구한 후, $x^{11}-41y+72z^{12}$의 값을 구한다.

$x+y+z+1=2(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z+1})$에서

$x+y+z+1-2(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z+1})=0$

$(x-1-2\sqrt{x-1}+1)+(y-2-2\sqrt{y-2}+1)$
$+(z+1-2\sqrt{z+1}+1)=0$

$(\sqrt{x-1}-1)^2+(\sqrt{y-2}-1)^2+(\sqrt{z+1}-1)^2=0$

$\sqrt{x-1}-1$, $\sqrt{y-2}-1$, $\sqrt{z+1}-1$은 모두 실수이므로

$\sqrt{x-1}-1=0$, $\sqrt{y-2}-1=0$, $\sqrt{z+1}-1=0$

$\sqrt{x-1}=1$, $\sqrt{y-2}=1$, $\sqrt{z+1}=1$

$x-1=1$, $y-2=1$, $z+1=1$

$\therefore x=2,\ y=3,\ z=0$

따라서 구하는 식의 값은

$x^{11}-41y+72z^{12}=2^{11}-41\times3+0$

$=2048-123=1925$ 답 1925

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

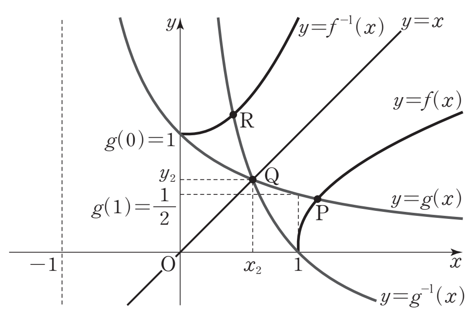
x, y, z가 실수라는 조건만 있으므로 $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{y-2}$, $\sqrt{z+1}$ 중에 허수인 것이 있다고 가정하자.
이때 $x+y+z+1=2(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z+1})$의 좌변은 실수이므로 우변도 실수이어야 한다.
그런데 $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{y-2}$, $\sqrt{z+1}$ 중에 허수인 것은 그 허수부분이 양수이므로 우변의 허수부분은 0이 될 수 없다.
따라서 $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{y-2}$, $\sqrt{z+1}$은 모두 실수이어야 한다.

02 해결단계

❶ 단계	함수 $g(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하는 함수임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판단한다.
❷ 단계	역함수 관계에 있는 두 함수는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단한다.
❸ 단계	점 Q가 직선 $y=x$ 위의 점임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값이 감소하는 함수이므로 $0<x_2<1$에서

$g(1)<y_2<g(0) \qquad \therefore \frac{1}{2}<y_2<1$ (참)



ㄴ. 두 점 $P(x_1, y_1)$, $R(x_3, y_3)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $x_1=y_3$, $y_1=x_3$이다.

$\therefore x_1y_1=x_3y_3$ (참)

ㄷ. 직선 PQ의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고, 직선 QR의 기울기는 $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$이다.

이때 점 Q는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $x_2=y_2$이고, ㄴ에서 $x_1=y_3$, $y_1=x_3$이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=1$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03 해결단계

❶ 단계	x의 값의 범위에 따라 함수 $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	두 함수 $y=ax-1$, $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$의 그래프의 교점이 1개이기 위한 직선 $y=ax-1$의 위치를 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 파악한 직선 $y=ax-1$의 기울기를 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

함수 $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$에서

$0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=-\sqrt{x}$

$1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=1-\sqrt{x-1}$

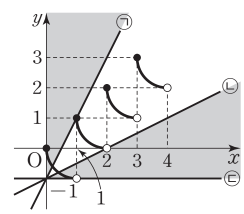
$2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=2-\sqrt{x-2}$

$3\le x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}=3-\sqrt{x-3}$

따라서 $0\le x<4$에서 함수 $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 $y=ax-1$은 y절편이 -1이므로 두 함수

$y=ax-1$, $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$

의 그래프의 교점이 1개이려면 직선 $y=ax-1$이 y축과 직선 ㉠ 사이 또는 직선 ㉡과 같거나 두 직선 ㉡, ㉢ 사이에 있어야 한다.

(i) 두 점 $(0, -1)$, $(1, 1)$을 지나는 직선 ㉠의 기울기가 $\frac{1-(-1)}{1-0}=2$이므로 직선 $y=ax-1$이 y축과 직선 ㉠ 사이에 있으려면 $a>2$이어야 한다.

(ii) 두 점 $(0, -1)$, $(2, 0)$을 지나는 직선 ㉡의 기울기가 $\frac{0-(-1)}{2-0}=\frac{1}{2}$이므로 직선 $y=ax-1$이 직선 ㉡과 같거나 두 직선 ㉡, ㉢ 사이에 있으려면 $0<a\le\frac{1}{2}$이어야 한다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$0<a\le\frac{1}{2}$ 또는 $a>2$ 답 $0<a\le\frac{1}{2}$ 또는 $a>2$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

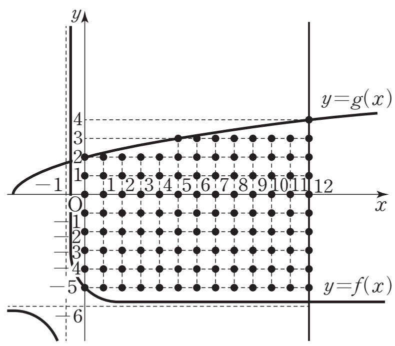
이 문제는 가우스 기호와 무리함수라는 두 가지 중요한 개념을 함께 사용한 좋은 문제이다.
가우스 기호를 포함한 함수는 x의 값의 범위에 따라 그래프를 직접 그려 해석하는 것이 가장 좋다. 이때 범위는 가우스 기호를 포함한 식의 값이 정수가 되도록 하는 x의 값을 기준으로 구분한다. 예를 들어 $[x]$는 x의 값의 범위를 $0\le x<1$, $1\le x<2$, $2\le x<3$, …로 나누고, $[3x]$는 x의 값의 범위를 $0\le x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\le x<1$, …로 나눈다.
또한, 무리함수는 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 한다는 조건이 중요하고, 무리함수 역시 그래프를 직접 그려 해석하는 것이 용이하다.

04 해결단계

❶ 단계	좌표평면 위에 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 점의 개수를 구한다.

$$f(x)=-\frac{6x+5}{x+1}=\frac{-6(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-6$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이고 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-6$이다.
또한, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.
따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 y축 및 직선 $x=12$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.

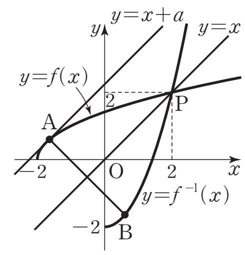


도형의 내부 또는 그 둘레에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 좌표를 (m, n)이라 하면 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.
(ⅰ) $-5\le n\le 2$일 때,
$0\le m\le 12$이므로 점 (m, n)의 개수는
$8\times 13=104$
(ⅱ) $n=3$일 때,
$5\le m\le 12$이므로 점 (m, n)의 개수는
$1\times 8=8$
(ⅲ) $n=4$일 때,
$m=12$이므로 점 (m, n)의 개수는 1
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 점 (m, n)의 개수는
$104+8+1=113$ **답** 113

05 해결단계

❶ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 교점 P의 좌표를 구한다.
❷ 단계	선분 AB의 길이가 최대가 되려면 점 A를 지나고 기울기가 1인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 함을 이용하여 점 A의 좌표를 구한 후, 선분 AB의 길이를 구한다.
❸ 단계	직선 AB의 방정식을 구한 후, 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 구한다.
❹ 단계	삼각형 ABP의 넓이를 구한다.

함수 $f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다. ←본문 75쪽 비법노트ⓘ(5)
따라서 교점 P의 x좌표는 방정식 $\sqrt{x+2}=x$의 실근이므로 이 식의 양변을 제곱하면
$x+2=x^2$, $x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0 \qquad \therefore x=2\ (\because x\ge 0)$
즉, 점 P의 x좌표가 2이므로 P$(2, 2)$
한편, 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 선분 AB의 길이가 최대가 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 기울기가 1인 직선이 점 A에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 한다.



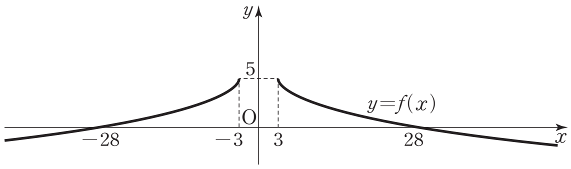
이 직선의 방정식을 $y=x+a$ (a는 상수)라 하면 접점 A의 x좌표는 방정식 $x+a=\sqrt{x+2}$의 실근이므로 이 식의 양변을 제곱하면
$x^2+2ax+a^2=x+2$
$\therefore x^2+(2a-1)x+a^2-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$
이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D=(2a-1)^2-4(a^2-2)=0$
$-4a+9=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{4}$
이것을 ㉠에 대입하면
$x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=0$, $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=0$
$\therefore x=-\frac{7}{4}$
즉, A$\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$, B$\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$이므로 선분 AB의 길이는
$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\right)^2+\left(-\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$
또한, 직선 AB의 방정식은
$y-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{7}{4}\right)$
$\therefore 4x+4y+5=0$
점 P$(2, 2)$와 직선 AB, 즉 $4x+4y+5=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|4\times 2+4\times 2+5|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{21}{4\sqrt{2}}$$
따라서 삼각형 ABP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{4}\times\frac{21}{4\sqrt{2}}=\frac{189}{32}$ **답** $\frac{189}{32}$

06 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	$f(x)=t$로 놓고 $f(t)=k$를 만족시키는 t의 값을 구하고, $g(k)$의 값을 구한다.
❸ 단계	$g(6)+g(5)+g(1)$의 값을 구한다.

$f(x)=-\sqrt{|x|-3}+5$가 정의되는 x의 값의 범위는
$|x|-3\ge 0 \qquad \therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 3$
$$\therefore f(x)=-\sqrt{|x|-3}+5=\begin{cases}-\sqrt{-x-3}+5 & (x\le -3)\\ -\sqrt{x-3}+5 & (x\ge 3)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(f(x))=k$에서 $f(x)=t\ (t\le5)$로 놓으면

(i) $k=6$일 때,

$f(f(x))=f(t)=6$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=6$의 교점은 존재하지 않으므로

$g(6)=0$

(ii) $k=5$일 때,

$f(f(x))=f(t)=5$에서

$t=-3$ 또는 $t=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-3$, $y=3$의 서로 다른 교점의 개수는 각각 2이므로

$g(5)=4$

(iii) $k=1$일 때,

$f(f(x))=f(t)=1$에서

$-\sqrt{|t|-3}+5=1$

$\sqrt{|t|-3}=4$, $|t|-3=16$

$|t|=19$

$\therefore t=-19$ 또는 $t=19$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-19$의 서로 다른 교점의 개수는 2이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=19$의 교점은 존재하지 않으므로

$g(1)=2$

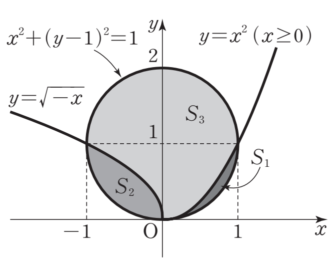
(i), (ii), (iii)에서 구하는 합은

$g(6)+g(5)+g(1)=0+4+2=6$ **답** 6

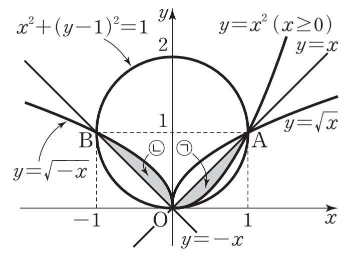
07 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프와 원 $x^2+(y-1)^2=1$을 그린 후, 세 도형을 나타낸다.
❷ 단계	함수 $y=x^2\ (x\ge0)$의 역함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프가 y축에 대하여 대칭임을 이용하여 S_3의 값을 구한다.
❸ 단계	$S_1+S_2+S_3$이 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 넓이와 같음을 이용하여 S_1+S_2의 값을 구한 후, $S_3-(S_1+S_2)$의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & (x<0)\\ x^2 & (x\ge0)\end{cases}$의 그래프와 원 $x^2+(y-1)^2=1$로 둘러싸인 세 도형의 넓이를 작은 것부터 순서대로 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $y=x^2\ (x\ge0)$의 역함수는 $y=\sqrt{x}$이고, 역함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 다음 그림의 두 도형 ㉠, ㉡의 넓이가 서로 같다.



따라서 S_3은 반지름의 길이가 1인 반원의 넓이와 직각삼각형 OAB의 넓이의 합과 같으므로

$S_3=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2+\frac{1}{2}\times2\times1$

$=\frac{\pi}{2}+1$

한편, $S_1+S_2+S_3$은 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 넓이와 같으므로

$S_1+S_2+S_3=\pi\times1^2=\pi$

$\therefore S_1+S_2=\pi-S_3$

$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

$=\frac{\pi}{2}-1$

$\therefore S_3-(S_1+S_2)=\frac{\pi}{2}+1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2$ **답** 2

08 해결단계

❶ 단계	$f_1(x)=\sqrt{-3x+6}+5$, $f_2(x)=\frac{ax+b}{x+2}$라 하고, $-2a+b$의 값에 따른 유리함수 $y=f_2(x)$의 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	함수 $f(x)$가 일대일대응임을 이용하여 $x=2$에서의 $f_2(x)$의 함숫값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계를 이용하여 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하고, $g(4)$의 값을 구한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다.

$f_1(x)=\sqrt{-3x+6}+5$, $f_2(x)=\frac{ax+b}{x+2}$라 하면

$x\le2$에서 $f_1(x)\ge5$

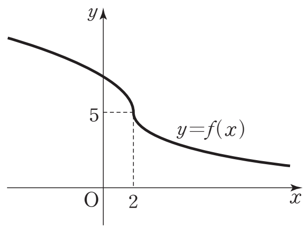
함수 $f(x)$의 치역이 양의 실수 전체의 집합이므로

$x>2$에서 $0<f_2(x)<5$ ……㉠

$f_2(x)=\frac{ax+b}{x+2}=\frac{-2a+b}{x+2}+a$이므로 $-2a+b$의 값에 따라 경우를 나눌 수 있다.

(i) $-2a+b>0$일 때,

$x>2$에서 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



㉠에 의하여 유리함수 $y=f_2(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $y=0$이어야 하므로

$a=0$

또한, 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면

$f_2(2)=5$

$\dfrac{2a+b}{4}=5$

위의 식에 $a=0$을 대입하면

$\dfrac{b}{4}=5 \qquad \therefore b=20$

이때 $g(4)=\alpha$라 하면 $f(\alpha)=4$, 즉 $f_2(\alpha)=4$이므로

$\dfrac{20}{\alpha+2}=4$

$\alpha+2=5 \qquad \therefore \alpha=g(4)=3$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(0, 20)$이고 $g(4)=3$이다.

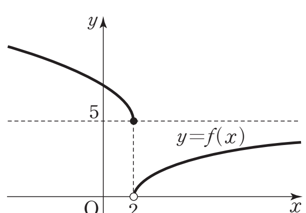
(ii) $-2a+b=0$일 때,

$f_2(x)=a$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-2a+b<0$일 때,

$x>2$에서 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



㉠에 의하여 유리함수 $y=f_2(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식이 $y=5$이어야 하므로

$a=5$

함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $f_2(2)=0$

$\dfrac{2a+b}{4}=0$

위의 식에 $a=5$를 대입하면

$\dfrac{10+b}{4}=0 \qquad \therefore b=-10$

이때 $g(4)=\beta$라 하면 $f(\beta)=4$, 즉 $f_2(\beta)=4$이므로

$\dfrac{5\beta-10}{\beta+2}=4$, $5\beta-10=4\beta+8$

$\therefore \beta=g(4)=18$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(5, -10)$이고 $g(4)=18$이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 20)$, $(5, -10)$의 2개이고, 모든 $g(4)$의 값의 합은 $S=3+18=21$이므로

$k+S=2+21=23$

답 23

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 끊어지는 점 없이 연결되어야 한다고 오해할 수 있다.
그러나 풀이에서 (iii)과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=2$에서 연결되지 않더라도 함수 $f(x)$가 일대일대응일 수 있다.

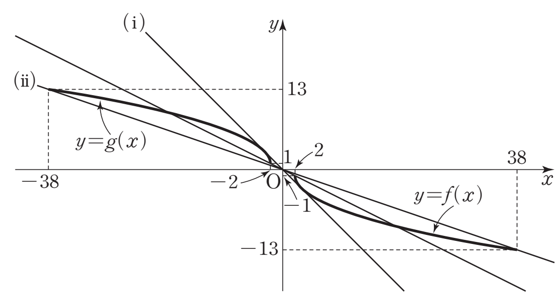
09 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 Q′에 대하여 $\dfrac{b+d}{a+c}$의 값이 직선 PQ′의 기울기와 같음을 파악한다.
❷ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 기울기가 최대가 될 때와 최소가 될 때의 조건을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 조건에 따라 최댓값 M과 최솟값 m을 구한 후, $M-m$의 값을 구한다.

구하는 값 $\dfrac{b+d}{a+c}=\dfrac{b-(-d)}{a-(-c)}$는 두 점 (a, b)와 $(-c, -d)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

Q′$(-c, -d)$라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 함수식을 $y=g(x)$라 하면 점 Q′은 함수 $g(x)=1+2\sqrt{-x-2}$ $(-38\le x\le -2)$의 그래프 위에 있다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 Q′에 대하여 직선 PQ′의 기울기를 k라 하고 직선 PQ′을 움직여 보면 다음 그림과 같다.



(i) k는 직선 PQ′이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 동시에 접할 때 최소이고 두 곡선이 원점에 대하여 대칭이므로 직선 PQ′은 원점을 지나는 직선이 된다.

즉, 직선 PQ′의 방정식은 $y=kx$이다.

이때 직선 $y=kx$와 곡선 $f(x)=-1-2\sqrt{x-2}$의 교점의 x좌표는 방정식 $kx=-1-2\sqrt{x-2}$의 실근이므로 $kx+1=-2\sqrt{x-2}$의 양변을 제곱하면

$(kx+1)^2=4(x-2)$

$k^2x^2+2(k-2)x+9=0$

이때 $k\ge 0$이면 직선 $y=kx$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 만나지 않으므로 $k<0$

x에 대한 이차방정식 $k^2x^2+2(k-2)x+9=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2\times 9=0$

$8k^2+4k-4=0$, $2k^2+k-1=0$

$(k+1)(2k-1)=0$ $\therefore k=-1$ ($\because k<0$)

즉, 직선 PQ'의 기울기의 최솟값은 $m=-1$이다.

(ii) k는 P(38, -13), Q'(-38, 13)일 때 최대이고 최댓값은

$k=\frac{13-(-13)}{-38-38}=-\frac{13}{38}$

즉, 직선 PQ'의 기울기의 최댓값은 $M=-\frac{13}{38}$이다.

(i), (ii)에서 $M-m=-\frac{13}{38}-(-1)=\frac{25}{38}$ 답 $\frac{25}{38}$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

점 P는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점이고 점 Q'은 곡선 $y=g(x)$ 위의 임의의 점이므로 직선 PQ'이 반드시 원점을 지나는 직선인 것은 아님에 주의한다.
또한, 그래프를 정확하게 그리는 것이 어려운 경우에는 개형에서 경계로 가능한 경우를 모두 찾고 직접 값을 구하여 최대, 최소를 판단해야 한다.
이 문제에서 직선 PQ'의 기울기가 최대가 되는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(1) P(38, -13), Q'(-38, 13)일 때,
직선 PQ'의 기울기는 $\frac{13-(-13)}{-38-38}=-\frac{13}{38}$

(2) P(2, -1), Q'(-2, 1)일 때,
직선 PQ'의 기울기는 $\frac{1-(-1)}{-2-2}=-\frac{1}{2}$

(3) P(2, -1), Q'(-38, 13) 또는 P(38, -13), Q'(-2, 1)일 때,
직선 PQ'의 기울기는 $\frac{13-(-1)}{-38-2}=-\frac{7}{20}$

이때 $-\frac{13}{38}>-\frac{7}{20}>-\frac{1}{2}$이므로 직선 PQ'의 기울기는 (1)의 경우에 최대이다.

10 해결단계

❶ 단계	$f_1(x)=\sqrt{-2x+16}+4$, $f_2(x)=-\sqrt{2x-8}+b$라 하고 $f_1(k)=f_2(k)$임을 이용하여 b와 k에 대한 식을 구한다.
❷ 단계	두 점 (8, 4), (4, b)를 이은 선분의 중점이 (k, $f(k)$)임을 이용하여 k의 값을 구하고, b의 값을 구한다.
❸ 단계	$k\times f(2k)$의 값을 구한다.

양수 k에 대하여 $x<k$에서 $f(x)=\sqrt{-2x+2a}+4$이므로

$f(0)=8$, $\sqrt{2a}+4=8$

$\sqrt{2a}=4$ $\therefore a=8$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x+16}+4 & (x<k)\\ -\sqrt{2x-8}+b & (x\ge k)\end{cases}$

이때 $f_1(x)=\sqrt{-2x+16}+4$, $f_2(x)=-\sqrt{2x-8}+b$라 하면

$f_1(x)=\sqrt{-2x+16}+4=\sqrt{-2(x-8)}+4$ ← $x\le 8$에서 정의된다.

$f_2(x)=-\sqrt{2x-8}+b=-\sqrt{2(x-4)}+b$ ← $x\ge 4$에서 정의된다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되었으므로

$4\le k\le 8$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (k, $f(k)$)에 대하여 대칭이므로*

$f_1(k)=f_2(k)$

$\sqrt{-2k+16}+4=-\sqrt{2k-8}+b$ ……㉠

또한, 두 무리함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프가 점 (k, $f(k)$)에 대하여 대칭이어야 하므로 무리함수 $y=f_1(x)$의 그래프의 시작점 (8, 4)와 무리함수 $y=f_2(x)$의 그래프의 시작점 (4, b)가 점 (k, $f(k)$)에 대하여 대칭이어야 한다.

즉, 두 점 (8, 4), (4, b)를 이은 선분의 중점이 (k, $f(k)$)이어야 하므로

$k=\frac{8+4}{2}=6$

** $k=6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=8$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x+16}+4 & (x<6)\\ -\sqrt{2x-8}+8 & (x\ge 6)\end{cases}$이므로

$f(2k)=f(12)=-\sqrt{2\times 12-8}+8=4$

$\therefore k\times f(2k)=6\times 4=24$ 답 24

• 다른 풀이 •

*에서 곡선 $y=\sqrt{-2x+16}+4$를 점 (k, $f(k)$)에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$2f(k)-y=\sqrt{-2(2k-x)+16}+4$

$\therefore y=-\sqrt{2x-4k+16}+2f(k)-4$

이 방정식이 $y=-\sqrt{2x-8}+b$와 일치하므로

$-4k+16=-8$, $2f(k)-4=b$

$\therefore k=6$

다음은 **와 같다.

11 해결단계

❶ 단계	두 실수 a, b의 값의 범위에 따른 함수 $y=\|f(x)\|$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	조건을 만족시킬 때, 함수 $y=\|f(x)\|$의 그래프가 지나는 점과 기울기가 $\frac{1}{4}$이고 $x>\frac{1}{6}$에서 함수 $y=\|f(x)\|$의 그래프에 접하는 직선을 이용하여 a, b의 값을 구한다.
❸ 단계	$6a+3b$의 값을 구한다.

$\{t\,|\,h(t)=1\}=\left\{t\,\middle|\,t<-\frac{1}{6}\right\}$

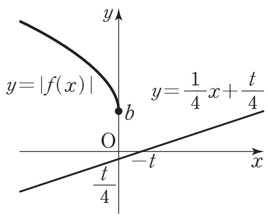
에서 $h(t)=1$을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $t<-\frac{1}{6}$이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $l: x-4y+t=0$이 오직 한 점에서만 만나도록 하는 실수 t의 값의 범위가 $t<-\frac{1}{6}$이다. ……㉠

직선 $l: x-4y+t=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+\frac{t}{4}$에서

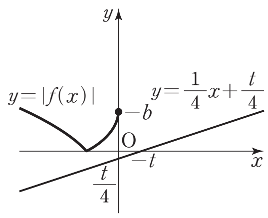
(직선 l의 y절편)$=\frac{t}{4}<-\frac{1}{24}$

이때 두 실수 a, b의 값에 따라 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a<0$일 때,



[$b\geq 0$일 때]

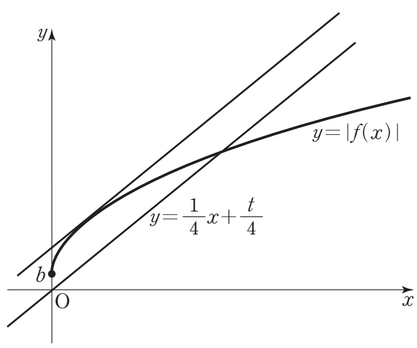


[$b<0$일 때]

$t<-\frac{1}{6}$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+\frac{t}{4}$는 만나지 않으므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

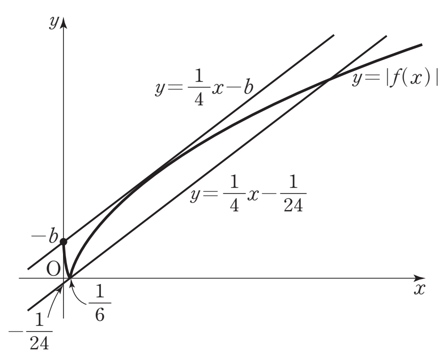
(ii) $a>0$일 때,

① $b\geq 0$인 경우



$t\geq 0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+\frac{t}{4}$가 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재하므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

② $b<0$인 경우



㉠을 만족시키려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{6},\ 0\right)$을 지나야 하므로

$\sqrt{\frac{1}{6}a}+b=0$ ……㉡

또한, 기울기가 $\frac{1}{4}$이고 $x>\frac{1}{6}$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프에 접하는 직선이 점 $(0,\ -b)$를 지나야 하므로 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x-b$

이 직선이 $x>\frac{1}{6}$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프에 접하므로

$\frac{1}{4}x-b=\sqrt{ax}+b$에서

$\frac{1}{4}x-2b=\sqrt{ax}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\frac{1}{16}x^2-bx+4b^2=ax$

$x^2-16(a+b)x+64b^2=0$

x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=\{-8(a+b)\}^2-64b^2=0$

$a^2+2ab=0,\ a(a+2b)=0$

$a\neq 0$이므로 $a=-2b$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$이므로

$6a+3b=6\times\frac{2}{3}+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=3$ 답 3

12 해결단계

❶ 단계	함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구한다.
❷ 단계	$a\geq\frac{3}{2}$임을 이용하여 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❸ 단계	함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$의 위치 관계와 $h(1)=h(3)<h(2)$임을 이용하여 $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$의 값을 구한다.
❹ 단계	직선 $y=x-3$이 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접함을 이용하여 a의 값을 구한 후, $f(4)$, $f^{-1}(4)$의 값을 비교하여 $g(4)$의 값을 구한다.

$y=\sqrt{ax-3}+2\ \left(x\geq\frac{3}{a}\right)$에서 $y-2=\sqrt{ax-3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

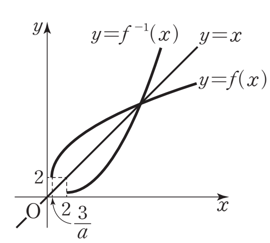
$y^2-4y+4=ax-3,\ ax=y^2-4y+7$

$x=\frac{1}{a}y^2-\frac{4}{a}y+\frac{7}{a}$

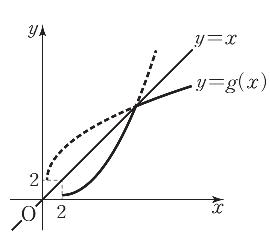
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x^2-\frac{4}{a}x+\frac{7}{a}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x^2-\frac{4}{a}x+\frac{7}{a}\ (x\geq 2)$

$a\geq\frac{3}{2}$에서 $0<\frac{3}{a}\leq 2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{3}{a},\ 2\right)$를 지나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$는 $x\geq 2$에서 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 값 중 크지 않은 값이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프와 직선 $y=x-n$

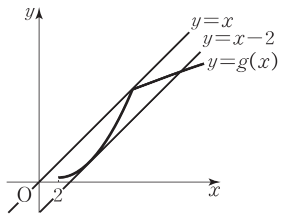
(n은 자연수)이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1 이상이므로

$1 \le h(1) = h(3) < h(2)$에서

$h(2)=2$ 또는 $h(2)=3$

(i) $h(2)=2$일 때,

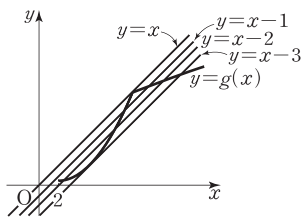
함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x-2$에 접해야 한다.



이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 만나는 서로 다른 점의 개수는 2 또는 3이므로 $h(1) < h(2)$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $h(2)=3$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 주어진 조건이 성립하려면 $h(1)=h(3)=2$이어야 한다.



(i), (ii)에서 직선 $y=x-3$이 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접해야 하므로 방정식 $f^{-1}(x)=x-3$이 중근을 갖는다.

즉, $\frac{1}{a}x^2-\frac{4}{a}x+\frac{7}{a}=x-3$에서

$x^2-4x+7=ax-3a$ ($\because a \ne 0$)

$x^2-(a+4)x+7+3a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4(7+3a)=0$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=6 \left(\because a \ge \frac{3}{2}\right)$

$\therefore f(x)=\sqrt{6x-3}+2$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$

이때 $f(4)=\sqrt{6\times4-3}+2=\sqrt{21}+2$,

$f^{-1}(4)=\frac{1}{6}\times4^2-\frac{2}{3}\times4+\frac{7}{6}=\frac{7}{6}$, 즉

$f(4)>f^{-1}(4)$이므로 $g(4)=f^{-1}(4)=\frac{7}{6}$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로

$p+q=13$ **답** 13

B L A C K L A B E L