b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

A등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

I 소인수분해

01. 소인수분해

pp.009~017

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 70　02 3　03 ②
04 ㄱ, ㄹ　05 ⑤　06 ③
07 36　08 ④　09 ⑤
10 ④　11 ⑤　12 ②

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 6　02 1　03 20　04 ⑤　05 ①　06 ④　07 127　08 ②
09 ⑤　10 11　11 ④　12 ⑤　13 ①　14 ④　15 ③　16 ③
17 3　18 ②　19 ④　20 ⑤　21 4　22 1354　23 ②　24 ④
25 ④　26 53　27 ②　28 260

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 ⑤　02 49　03 21
04 257　05 675　06 26
07 8　08 15, 60

02. 최대공약수와 최소공배수

pp.019~029

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ②　02 27　03 ④
04 ①　05 ②　06 216
07 ⑤　08 4　09 18
10 20　11 ②　12 ③
13 ④　14 ③　15 2바퀴
16 ③　17 28　18 ⑤

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 9　02 35　03 ⑤　04 ②　05 ④　06 70　07 ③　08 21
09 78　10 6개　11 5　12 ③　13 ②　14 ④　15 300　16 65
17 49　18 ②　19 ①　20 57　21 20　22 4　23 139　24 ②
25 ③　26 16개　27 ⑤　28 ④　29 48　30 301개　31 162초　32 42회
33 ②　34 ④　35 ③　36 24000원

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 180　02 (1) 16그루　(2) 16그루
03 50회　04 430　05 756
06 114분　07 32　08 32

대단원 평가

01 ⑤　02 190　03 105　04 ⑤　05 ①　06 6　07 ③　08 6400원　09 ⑤　10 220　11 오전 8시 12분　12 (1) 1, 4, 9　(2) 10명

II 정수와 유리수

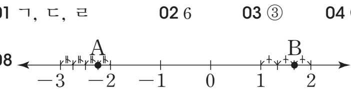
03. 정수와 유리수

pp.035~043

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ③　02 4　03 3
04 ⑤　05 ②　06 ⑤
07 2　08 ①, ④　09 ①
10 ③　11 ③　12 ③

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 ㄱ, ㄷ, ㄹ　02 6　03 ③　04 ③　05 11　06 ④　07 ②
08 

, 0, 1　09 r　10 ⑤　11 90
12 7　13 22　14 ②　15 ①　16 80　17 12　18 $-\frac{13}{5}$　19 ⑤
20 ④　21 ②　22 b, d, a, c　23 ⑤　24 ④　25 ⑤　26 55
27 45　28 ⑤　29 23

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 0　02 25
03 (1) -14　(2) -20　04 11
05 8　06 -97　07 15번째
08 종국 : 1, 현서 : $-\frac{11}{5}$

04. 정수와 유리수의 계산

pp.045~055

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ③　02 ③　03 $\frac{1}{4}$
04 -2　05 ①　06 ④
07 ③　08 ③　09 ②
10 ④　11 ①　12 52
13 $\frac{6}{5}$　14 ③　15 ④
16 ⑤　17 ⑤　18 ①

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 5　02 ④　03 ⑤　04 $a=-2$, $b=-1$　05 ①　06 15.7 m　07 ②
08 $-\frac{3}{2}$　09 ⑤　10 -3　11 42　12 3, $\frac{21}{80}$　13 ③　14 2025　15 47
16 $-\frac{3}{2}$　17 ②　18 -1　19 ③　20 ④　21 ②　22 ③　23 5
24 ①　25 14　26 600　27 -2　28 ③　29 ⑤　30 11　31 $-\frac{5}{9}$
32 $\frac{81}{2}$　33 ③　34 ③　35 $(-4, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, -1)$, $(-2, -1)$
36 b^2, $-\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $-a$

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 $\frac{24}{25}$　02 C, B, A
03 $\frac{23}{4}$　04 ④　05 4
06 ④　07 ㄷ　08 2

대단원 평가

01 2　02 6　03 ②　04 ⑤　05 69　06 $\frac{9}{10}$　07 ④　08 $-\frac{2}{3}$　09 ②　10 -25　11 10　12 (1) -15, -12, 11, 18　(2) 3

Ⅲ 문자와 식

05. 문자의 사용과 식

pp.061~070

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ⑤ 02 ④ 03 ②
04 ③ 05 ② 06 ②
07 ③ 08 ① 09 ⑤
10 $7x+24$ 11 $13x-17$
12 132

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 ③ 02 ④ 03 ④ 04 ③ 05 ⑤ 06 ④ 07 ③ 08 ①
09 ④ 10 76.6 11 $\frac{10000a}{b^2}$, 정상 12 (1) $3n+1$ (2) 151 13 ④ 14 ⑤
15 ③ 16 총경비 : $(x+50y+62500)$원, 1인당 낼 금액 : $\left(\frac{x}{25}+2y+2500\right)$원
17 15 18 $4x+24$ 19 ② 20 ④ 21 $\frac{1}{2}$ 22 $-5x-2$ 23 ②
24 ② 25 $6x-6y-8$ 26 ④ 27 ② 28 $(18x-11)\mathrm{km}$
29 $2x+12$ 30 ⑤ 31 ④ 32 $\frac{65}{2}x+23$ 33 $88x+52$
34 $(91x+9)\,\mathrm{cm}^2$ 35 ③ 36 $16x+48$

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 $-\frac{5}{12}$ 02 -6 03 $\frac{9}{8}x$
04 분속 $5x$ m
05 $\left(\frac{7}{10}a+\frac{3}{10}b\right)$ % 06 $10n+11$
07 $6(n-m)$
08 (1) 180 (2) $298x+251$

06. 일차방정식의 풀이

pp.072~080

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ②, ④ 02 ④ 03 ③
04 ① 05 ⑤ 06 ④
07 ②, ④ 08 ③ 09 $x=1$
10 ① 11 ① 12 ③
13 ② 14 $a=7$, $b\neq4$

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 8 02 $-11b+c$ 03 ① 04 ②, ④ 05 0 06 $x=\frac{35}{11}$
07 $a=5$, $b\neq-1$ 08 6개 09 12 10 ① 11 2 12 $x=-\frac{1}{2}$
13 2 14 80 15 $x=20$ 16 $x=\frac{1}{3}$ 17 ④ 18 ③ 19 ② 20 ②
21 5 22 15 23 ① 24 $\frac{5}{3}$ 25 $\frac{19}{5}$ 26 ① 27 ⑤ 28 ②
29 ④ 30 ②

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 $x=-\frac{18}{11}$ 02 $x=10$
03 -2 04 4
05 (1) $m=-\frac{1}{3}$, $n=9$
(2) $m\neq-\frac{1}{3}$, $n=9$
06 $a=-1$, $b=-7$, $n=0$
07 $x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$
08 $x=a+b+c$

07. 일차방정식의 활용

pp.082~089

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제

01 ③ 02 ⑤ 03 ①
04 ⑤ 05 ⑤ 06 3일
07 14

STEP 2 A등급을 위한 문제

01 ① 02 ③ 03 44세 04 ② 05 5일 06 ④ 07 ② 08 ③
09 ③ 10 600개 11 7000장 12 480 13 ⑤ 14 ④ 15 ④ 16 ②
17 ① 18 오전 10시 15분 19 시속 22.8 km 20 ④ 21 ② 22 ⑤
23 26 24 $\frac{20}{9}$시간 25 630개 26 2시간 30분 27 ④ 28 30개
29 28 30 ④

STEP 3 종합 사고력 도전 문제

01 19명 02 34점 03 3시간
04 75분 05 412 06 $35°$
07 (1) 60초 (2) 꼭짓점 D
08 초속 25 m

대단원 평가

01 $4a$ 02 -9 03 $\frac{7}{3}$ 04 36 05 5 06 ② 07 ⑤ 08 ⑤ 09 30 g 10 250 11 24 12 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $(x-2)$일 (3) 5일

Ⅳ 좌표평면과 그래프

08. 좌표평면과 그래프

pp.095~102

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제	STEP 2 A등급을 위한 문제	STEP 3 종합 사고력 도전 문제
01 ④ 02 ⑤ 03 18 04 ③ 05 10개 06 ④ 07 5 08 2 09 $\frac{65}{2}$ 10 ④ 11 ④	01 ③ 02 ①, ② 03 ④ 04 제1사분면 05 2 06 -3 07 ④ 08 $(-6, 6)$ 09 (1) $(3, -2)$ (2) $(-3, 2)$ 10 ② 11 ①, ③ 12 35 13 10 14 2 15 6 16 ④ 17 ⑤ 18 500원 19 64 20 ③ 21 ③	01 11 02 (1) $P(2, 2)$, $Q(2, -2)$ (2) 12초 (3) 36초 03 -1 04 20 05 $\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$ 06 12 07 20분 08 ㈎ : 30 cm^2, ㈏ : 50 cm^2, ㈐ : 70 cm^2

09. 정비례와 반비례

pp.104~113

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제	STEP 2 A등급을 위한 문제	STEP 3 종합 사고력 도전 문제
01 ⑤ 02 $y=3x$ 또는 $y=-3x$ 03 $-\frac{81}{4}$ 04 12 05 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$ 06 ④ 07 ⑤ 08 $(1, 16)$, $(2, 8)$, $(4, 4)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$ 09 80 10 ② 11 $y=400x$, 36000원 12 ④	01 ㄷ, ㄹ 02 $-\frac{9}{2}$ 03 $\frac{6}{5}$ 04 30 05 8 06 ③ 07 ④ 08 ④ 09 $\frac{5}{9}$ 10 4 11 ③ 12 $E(4, 3)$ 13 $-\frac{4}{9}$ 14 ②, ④ 15 ④ 16 $-\frac{23}{4}$ 17 4 18 $C\left(\frac{21}{5}, \frac{15}{7}\right)$ 19 ⑤ 20 8 21 78 22 ② 23 -27 24 ② 25 $-\frac{35}{9}$ 26 ④ 27 $\frac{45}{2}$ 28 $y=\frac{9}{5}x$, 54 29 30 mL 30 4대 31 ③ 32 ④	01 (1) $c<b<a$ (2) $r<s<q<p$ 02 ㈎ 정, ㈏ 반, ㈐ 반, ㈑ 정 03 (1) 6 m (2) 3배 04 324 05 $\frac{9}{8}$ 06 6 07 1 : 2 08 $\frac{5}{2}$배

대단원 평가 01 $\frac{41}{4}$ 02 $\frac{2}{3}$ 03 ④ 04 ④ 05 21분 06 $\frac{1}{4}$ 07 5 08 16 09 $A=18$, $y=\frac{18}{x}$ 10 100 11 7 12 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$

I 소인수분해

01. 소인수분해

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.009~010

01 70	02 3	03 ②	04 ㄱ, ㄹ	05 ⑤
06 ③	07 36	08 ④	09 ⑤	10 ④
11 ⑤	12 ②			

01

몫을 □라 하면

$48=x\times\square+8$에서 $40=x\times\square$

이때 x는 40의 약수 중에서 나머지 8보다 큰 수이므로

$x=10, 20, 40$

따라서 구하는 합은

$10+20+40=70$ **답** 70

02

세 수 n, $4\times n+1$, $7\times n+2$에서 2, 3, …을 n에 차례대로 넣어 보면 다음과 같다.

$n=2$일 때, 세 수는 각각 2, 9, 16이므로 n을 제외한 나머지 두 수는 소수가 아니다.

$n=3$일 때, 세 수는 각각 3, 13, 23이므로 세 수는 모두 소수이다.

따라서 구하는 가장 작은 자연수 n의 값은 3이다. **답** 3

03

ㄱ. 2는 소수이지만 짝수이다.

ㄴ. 한 자리 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이다.

ㄷ. $4=2^2$은 합성수이지만 약수가 1, 2, 4의 3개이므로 약수의 개수가 홀수이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답** ②

04

ㄱ. $32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$

ㄴ. $2+2+2+2=2\times4=2\times2^2=2^3$

ㄷ. $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3^4}{2^4}$

ㄹ. $2\times2\times2+3\times3\times5=2^3+3^2\times5$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답** ㄱ, ㄹ

05

3, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, …이므로 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=4\times12+2$이므로 3^{50}의 일의 자리의 숫자는 3^2의 일의 자리의 숫자와 같다.

따라서 구하는 일의 자리의 숫자는 9이다. **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 **참고**

자연수 a에 대하여 a의 거듭제곱 a, a^2, a^3, …의 일의 자리의 숫자를 구할 때는 거듭제곱의 값을 모두 구하지 않고 다음과 같이 일의 자리의 숫자만 계산하여 구해도 된다.

3의 일의 자리의 숫자 ⇨ 3

3^2의 일의 자리의 숫자 ⇨ $3\times3=9$에서 9

3^3의 일의 자리의 숫자 ⇨ $9\times3=27$에서 7

3^4의 일의 자리의 숫자 ⇨ $7\times3=21$에서 1

⋮

06

20 이상 30 이하인 자연수 중에서 소수는 23, 29의 2개이다.

$\therefore a=2$

① $30=2\times3\times5$이므로 30의 소인수는 2, 3, 5의 3개이다.

② $60=2^2\times3\times5$이므로 60의 소인수는 2, 3, 5의 3개이다.

③ $72=2^3\times3^2$이므로 72의 소인수는 2, 3의 2개이다.

④ $84=2^2\times3\times7$이므로 84의 소인수는 2, 3, 7의 3개이다.

⑤ $121=11^2$이므로 121의 소인수는 11의 1개이다.

따라서 소인수가 a개, 즉 2개인 것은 ③ 72이다. **답** ③

07

조건 ㈎에서 35보다 크고 40보다 작은 자연수이므로 구하는 자연수는 36, 37, 38, 39 중 하나이다.

이 수를 각각 소인수분해하면

$36=2^2\times3^2$, 37, $38=2\times19$, $39=3\times13$

이므로 각 수의 소인수의 합은 순서대로

$2+3=5$, 37, $2+19=21$, $3+13=16$

조건 ㈏에서 합이 5인 2개의 소인수를 가져야 하므로 구하는 자연수는 36이다. **답** 36

08

$360\times a=b^2$은 제곱수이므로 $360\times a$를 소인수분해하였을 때, 소인수의 지수는 모두 짝수이어야 한다.

이때 $360=2^3\times 3^2\times 5$이므로 $a=2\times 5\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은

$a=2\times 5\times 1^2=10$

a의 값이 가장 작을 때, b의 값도 가장 작으므로 가장 작은 자연수 b의 값은

$b^2=(2^3\times 3^2\times 5)\times(2\times 5)$

$=(2^2\times 3\times 5)\times(2^2\times 3\times 5)$

$=(2^2\times 3\times 5)^2=60^2$

에서 $b=60$

$\therefore a+b=10+60=70$

답 ④

09

주어진 수를 1, 2, 3, ⋯, 10의 몇 개의 수의 곱으로 나타내면 다음과 같다.

① $16=2\times 8$

② $35=5\times 7$

③ $42=6\times 7$

④ $140=2\times 7\times 10$

⑤ $243=3^5$

이때 1, 2, 3, ⋯, 10 중 3을 소인수로 갖는 수는 3, $6(=2\times 3)$, $9(=3^2)$뿐이므로 3^5은 주어진 수의 약수가 될 수 없다.

따라서 주어진 수의 약수가 아닌 것은 ⑤ 243이다.

답 ⑤

• 다른 풀이 •

$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$

$=1\times 2\times 3\times 2^2\times 5\times(2\times 3)\times 7\times 2^3\times 3^2\times(2\times 5)$

$=2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$

① $16=2^4$ ② $35=5\times 7$

③ $42=2\times 3\times 7$ ④ $140=2^2\times 5\times 7$

⑤ $243=3^5$

따라서 주어진 수의 약수가 아닌 것은 ⑤ 243이다.

10

$180=2^2\times 3^2\times 5$

$2^2\times 3^2\times 5$의 약수를 가장 작은 것부터 순서대로 나열하면

1, 2, 3, ⋯

이므로 약수 중에서 세 번째로 작은 수는 3이다.

또한, $2^2\times 3^2\times 5$의 약수를 가장 큰 것부터 순서대로 나열하면

$2^2\times 3^2\times 5$, $2\times 3^2\times 5$, $2^2\times 3\times 5$, $3^2\times 5$, ⋯

이므로 약수 중에서 네 번째로 큰 수는 $3^2\times 5=45$이다.

따라서 구하는 두 수의 합은

$3+45=48$

답 ④

11

$\dfrac{2000}{N}$을 자연수로 만드는 자연수 N은 2000의 약수이다.

이때 $2000=2^4\times 5^3$이므로 자연수 N의 개수는

$(4+1)\times(3+1)=20$

답 ⑤

12

$10=9+1$ 또는 $10=(4+1)\times(1+1)$이므로 a의 소인수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) a의 소인수가 2뿐일 때,

$a=2^k$ (k는 자연수) 꼴이므로

$2^4\times a=2^4\times 2^k=2^{4+k}$

이 수의 약수의 개수가 10이려면

$(4+k)+1=10$ $\therefore k=5$

이때 $a=2^5=32$이므로 10 이하의 자연수가 아니다.

(ii) a의 소인수가 2가 아닌 소수 하나뿐일 때,

$a=p^k$ (p는 2가 아닌 소수, k는 자연수) 꼴이므로

$2^4\times a=2^4\times p^k$

이 수의 약수의 개수가 10이려면

$(4+1)\times(k+1)=10$ $\therefore k=1$

이때 $a=p$이므로 a는 10 이하의 소수 중 2가 아닌 소수 3, 5, 7이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a는 3, 5, 7의 3개이다.

답 ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

2^4은 2가 4번 곱해진 수이고, 2^k은 2가 k번 곱해진 수이므로 $2^4\times 2^k$은 2가 $(4+k)$번 곱해진 수이다. 따라서 $2^4\times 2^k=2^{4+k}$이다.

STEP **2** A등급을 위한 문제 pp.011~015

01 6	02 1	03 20	04 ⑤	05 ①
06 ④	07 127	08 ②	09 ⑤	10 11
11 ④	12 ⑤	13 ①	14 ④	15 ③
16 ③	17 3	18 ②	19 ④	20 ⑤
21 4	22 1354	23 ②	24 ④	25 ④
26 53	27 ②	28 260		

01

백의 자리의 숫자가 1, 일의 자리의 숫자가 7인 세 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 □라 하고 이 자연수를 1□7과 같이 나타내자.
1□7과 241의 합을 A라 하면 A가 12의 배수이므로 A는 3의 배수인 동시에 4의 배수이다.
이때 A의 일의 자리의 숫자는 8이므로 A가 4의 배수이려면 A의 끝의 두 자리의 수는 08, 28, 48, 68, 88 중에서 하나가 되어야 한다.

∴ □$=0, 2, 4, 6, 8$

(i) □$=0$일 때, $A=107+241=348$
A의 각 자리의 숫자의 합은 $3+4+8=15$이므로 A는 3의 배수이다.

(ii) □$=2$일 때, $A=127+241=368$
A의 각 자리의 숫자의 합은 $3+6+8=17$이므로 A는 3의 배수가 아니다.

(iii) □$=4$일 때, $A=147+241=388$
A의 각 자리의 숫자의 합은 $3+8+8=19$이므로 A는 3의 배수가 아니다.

(iv) □$=6$일 때, $A=167+241=408$
A의 각 자리의 숫자의 합은 $4+0+8=12$이므로 A는 3의 배수이다.

(v) □$=8$일 때, $A=187+241=428$
A의 각 자리의 숫자의 합은 $4+2+8=14$이므로 A는 3의 배수가 아니다.

(i)~(v)에서 A가 3의 배수인 동시에 4의 배수인 경우는 □가 0일 때와 6일 때이므로 구하는 합은
$0+6=6$ **답** 6

BLACKLABEL 특강 참고

배수판별법

(1) 6의 배수 : 2의 배수이면서 3의 배수인 수
(2) 8의 배수 : 끝의 세 자리의 수가 000 또는 8의 배수인 수
(3) 12의 배수 : 3의 배수이면서 4의 배수인 수
(4) 25의 배수 : 끝의 두 자리의 수가 00 또는 25의 배수인 수

02

P를 Q로 나누면 몫이 30이고 나머지가 13이므로
$P=Q\times30+13$
$\quad=6\times Q\times5+6\times2+1$
이때 $6\times Q\times5$, 6×2는 6의 배수이다.
따라서 P를 6으로 나눈 나머지는 1이다. **답** 1

03

$221=13\times17$이므로 221의 약수는 1, 13, 17, 221이다.
$n-3=1$일 때, $n=4$
$n-3=13$일 때, $n=16$
$n-3=17$일 때, $n=20$
$n-3=221$일 때, $n=224$
이때 두 자리 자연수 n은 16, 20이므로
$221=16\times13+13$
$\quad=20\times11+1$
즉, 221을 16으로 나누면 나머지는 13이고,
221을 20으로 나누면 나머지는 1이다.
따라서 구하는 두 자리 자연수 n은 20이다. **답** 20

04

(i) 가장 작은 4의 배수 a
네 자리 자연수가 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 하므로 끝의 두 자리에 올 수 있는 수는 12, 20, 32이다.
□□12인 경우 : 3012
□□20인 경우 : 1320 또는 3120
□□32인 경우 : 1032
이 중에서 가장 작은 수가 a이므로
$a=1032$

(ii) 가장 큰 3의 배수 b
네 자리 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.
이때 네 자리의 숫자의 합 $0+1+2+3=6$은 3의 배수이므로 0, 1, 2, 3을 이용하여 만든 네 자리 자연수는 모두 3의 배수이다.
이 중에서 가장 큰 수가 b이므로
$b=3210$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1032$, $b=3210$이므로

$a+b=1032+3210=4242$

① $a=1032$는 2의 배수이지만 각 자리의 숫자의 합이 6으로 9의 배수가 아니므로 1032는 9의 배수는 아니다.

② $b=3210$은 일의 자리의 숫자가 0이므로 2의 배수이면서 5의 배수이다.

③ $a+b=4242$의 끝의 두 자리의 수 42는 4의 배수가 아니므로 4242는 4의 배수가 아니다. 또한, 각 자리의 숫자의 합 $4+2+4+2=12$는 9의 배수가 아니므로 4242는 9의 배수도 아니다.

④ $a+b=4242$는 일의 자리의 숫자가 2이므로 2의 배수이고 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 3의 배수이다. 즉, 6의 배수이다. 그러나 4242는 9의 배수는 아니다.

⑤ $a+b=4242$는 2의 배수인 동시에 3의 배수이지만 일의 자리의 숫자가 0 또는 5가 아니므로 5의 배수는 아니다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

05

ㄱ. $1\times3=3$은 소수이므로 두 홀수의 곱이 항상 합성수인 것은 아니다.

ㄴ. 1의 약수의 개수는 1이므로 약수가 2개 미만인 자연수가 존재한다.

ㄷ. $3\times5=15$는 합성수이지만 홀수이다.

ㄹ. 자연수는 1, 소수, 합성수로 이루어져 있으며, 합성수는 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수이므로 소수이면서 합성수인 자연수는 없다.

ㅁ. 모든 합성수는 소수의 곱으로 나타낼 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㅁ의 1개이다. **답** ①

06

a는 5보다 크고 35보다 작은 소수이므로

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

중에서 하나이다.

$a=b+4$에서 b는 a보다 4만큼 작은 수이므로 a의 각 값에 대하여 b의 값은 순서대로

3, 7, 9, 13, 15, 19, 25, 27

이때 b도 소수이므로 b의 값이 될 수 있는 수는 3, 7, 13, 19이다.

따라서 구하는 합은

$3+7+13+19=42$ **답** ④

07

$\dfrac{165}{n-4}$가 자연수가 되려면 $n-4$는 165의 약수이어야 한다.

$165=3\times5\times11$이므로 165의 약수는

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165

165의 각 약수에 대하여 n의 값은 순서대로

5, 7, 9, 15, 19, 37, 59, 169

이때 n은 소수이어야 하므로 n의 값으로 가능한 것은

5, 7, 19, 37, 59

따라서 구하는 합은

$5+7+19+37+59=127$ **답** 127

08

ㄱ. 23은 소수이므로 $23=1\times23$

즉, 정사각형 모양의 조각 23개로 직사각형 모양을 만드는 방법은 1가지뿐이다.

ㄴ. $120=1\times120=2\times60=3\times40=4\times30=5\times24$

$=6\times20=8\times15=10\times12$

이므로 정사각형 모양의 조각 120개로 직사각형 모양을 만드는 방법은 8가지이다.

ㄷ. $4=1\times4=2\times2$

즉, 정사각형 모양의 조각 4개로 직사각형 모양을 만드는 방법은 2가지이다.

이때 4는 합성수이지만 직사각형 모양을 만드는 방법의 수는 3보다 작다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

• 다른 풀이 •

ㄴ. 자연수 a에 대하여 자연수 n이 $n=a\times b$이면 이를 만족시키는 자연수 b는 반드시 하나로 정해진다. 즉, 자연수 n의 약수가 짝수 개이면 $n=a\times b$ (a, b는 자연수) 꼴로 나타낼 수 있는 서로 다른 경우는 $\dfrac{1}{2}\times$(n의 약수의 개수)가지이다.

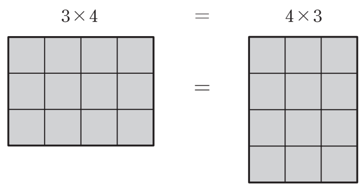
$120=2^3\times3\times5$에서 120의 약수의 개수는

$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$

따라서 $120=a\times b$ (a, b는 자연수) 꼴로 나타낼 수 있는 서로 다른 경우는 $\dfrac{1}{2}\times16=8$(가지)이므로 직사각형 모양을 만드는 방법은 8가지이다.

BLACKLABEL 특강 **오답 피하기**

같은 크기의 정사각형 모양의 조각 n개를 모두 사용하여 직사각형 모양을 만들기 위해서는 자연수 n을 두 자연수의 곱으로 나타낼 수 있어야 한다.
그런데 만들어진 직사각형 모양은 가로, 세로를 구분하지 않으므로 $n=a\times b$ (a, b는 자연수)일 때, $a\times b$인 직사각형과 $b\times a$인 직사각형은 동일한 직사각형으로 생각한다.



따라서 만들 수 있는 직사각형 모양의 개수를 n의 약수의 개수로 착각하지 않도록 주의한다.

09

$x^2+y=127$에서 y, 127이 홀수이므로 x^2은 짝수이어야 한다.
이때 x는 소수이므로 $x=2$
즉, $2^2+y=127$에서 $y=123$
$\therefore y-x=123-2=121$ **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 **필수 원리**

홀수와 짝수의 덧셈과 곱셈

(1) 홀수와 짝수의 덧셈
① (홀수)+(홀수)=(짝수)
② (홀수)+(짝수)=(홀수), (짝수)+(홀수)=(홀수)
③ (짝수)+(짝수)=(짝수)

(2) 홀수와 짝수의 곱셈
① (홀수)×(홀수)=(홀수)
② (홀수)×(짝수)=(짝수), (짝수)×(홀수)=(짝수)
③ (짝수)×(짝수)=(짝수)

10

$A\times280=A\times2^3\times5\times7=2^a\times b\times7$
이때 b는 2가 아닌 소수이므로 $b=5$
또한, $A\times2^3=2^a$이므로 A는 소인수로 2만 갖는다.
한편, $A\times144=A\times2^4\times3^2=2^b\times3^c=2^5\times3^c$
A는 소인수로 2만 가지므로
$A=2$, $c=2$
즉, $A\times280=2\times(2^3\times5\times7)=2^4\times5\times7$에서
$a=4$
$\therefore a+b+c=4+5+2=11$ **답** 11

11

7의 거듭제곱은
7, 49, 343, 2401, 16807, …
이므로 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $2026=4\times506+2$이므로 7^{2026}의 일의 자리의 숫자는 7^2의 일의 자리의 숫자와 같은 9이다.
8의 거듭제곱은
8, 64, 512, 4096, 32768, …
이므로 8의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복된다.
이때 $1003=4\times250+3$이므로 8^{1003}의 일의 자리의 숫자는 8^3의 일의 자리의 숫자와 같은 2이다.
따라서 $7^{2026}-8^{1003}$의 일의 자리의 숫자는
$9-2=7$ **답** ④

12

$1\times2=2$
$1\times2\times3=6$
$1\times2\times3\times4=24$
$1\times2\times3\times4\times5=120$
$1\times2\times3\times4\times5\times6=720$
$\vdots$
이와 같이 계속되므로 1부터 연속하여 n까지의 자연수를 모두 곱하여 만든 수 $1\times2\times3\times\cdots\times n$의 맨 뒤에 0이 존재하려면 $1\times2\times3\times\cdots\times n$에 2×5가 포함되어야 한다.
또한, 2×5가 한 번 포함될 때마다 0이 하나씩 늘어난다.
이때 $1\times2\times3\times\cdots\times25$에서
2의 배수는 12개,
$4=2^2$의 배수는 6개,
$8=2^3$의 배수는 3개,
$16=2^4$의 배수는 1개,
5의 배수는 5개,
$25=5^2$의 배수는 1개
이므로 $1\times2\times3\times\cdots\times25$를 소인수분해하면
$2^{12+6+3+1}\times5^{5+1}\times p$, 즉
$2^{22}\times5^6\times p$ (p는 2, 5가 아닌 소수의 거듭제곱의 곱) 꼴이다.
따라서 맨 뒤에 연속되는 0은 6개이다. **답** ⑤

13

$2^5=32$이므로 $\ll n\gg=5$가 되도록 하는 수는
$n=32\times$(2의 배수가 아닌 수)
꼴이다.
이때 n이 1000 이하의 자연수이므로
$32\times1=32$, $32\times3=96$, …, $32\times31=992$

따라서 구하는 n의 개수는 1부터 31까지의 수 중 2의 배수가 아닌 수의 개수와 같으므로 16개이다.

답 ①

14

주어진 소인수분해에서 B, D, F, G가 모두 소수이므로

$A=B\times D\times F\times G$

이때 10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이고,

$2+3=5$, $2+5=7$, $3+2=5$, $5+2=7$

이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $B=D=2$, $F=3$일 때,

$G=B+F=2+3=5$이므로

$A=B\times D\times F\times G=2\times2\times3\times5=60$

(ⅱ) $B=D=2$, $F=5$일 때,

$G=B+F=2+5=7$이므로

$A=B\times D\times F\times G=2\times2\times5\times7=140$

(ⅲ) $B=D=3$, $F=2$일 때,

$G=B+F=3+2=5$이므로

$A=B\times D\times F\times G=3\times3\times2\times5=90$

(ⅳ) $B=D=5$, $F=2$일 때,

$G=B+F=5+2=7$이므로

$A=B\times D\times F\times G=5\times5\times2\times7=350$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 모든 자연수 A의 값의 합은

$60+140+90+350=640$

답 ④

15

648을 자연수 a로 나눈 몫이 어떤 자연수의 제곱이 되려면 $\frac{648}{a}$을 소인수분해하였을 때, 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 한다.

따라서 $\frac{648}{a}=\frac{2^3\times3^4}{a}$이 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 a는

2, 2^3, 2×3^2, 2×3^4, $2^3\times3^2$, $2^3\times3^4$

의 6개이다.

답 ③

16

$2^7\times3^2$의 약수 중 어떤 자연수의 제곱이 되는 수 중 가장 큰 수는

$2^6\times3^2=(2^3\times3)^2$

즉, 주어진 수의 약수 중 자연수의 제곱이 되는 수의 개수는 $2^3\times3$의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 개수는

$(3+1)\times(1+1)=8$(개)

답 ③

17

조건 ㈎에서 $56\times a=b^2$이므로

$(2^3\times7)\times a=b^2$ ······ ㉠

즉, 자연수 c에 대하여 $a=2\times7\times c^2$ 꼴이다.

이를 ㉠에 넣으면

$b^2=(2^3\times7)\times(2\times7\times c^2)=2^4\times7^2\times c^2$

$\quad=(2^2\times7\times c)^2$

$\therefore b=2^2\times7\times c$

㈎

조건 ㈏에서 $\frac{b}{a}$의 값이 자연수이므로

$\frac{b}{a}=\frac{2^2\times7\times c}{2\times7\times c^2}=\frac{2}{c}$

가 자연수이어야 한다.

즉, c는 2의 약수이어야 하므로 c의 값으로 가능한 것은 1, 2이고

각 경우에 $\frac{b}{a}$의 값은

$\frac{b}{a}=\frac{2}{1}=2$, $\frac{b}{a}=\frac{2}{2}=1$

㈏

따라서 구하는 합은 $2+1=3$

㈐

답 3

단계	채점 기준	배점
㈎	a, b를 하나의 문자로 각각 표현한 경우	40%
㈏	$\frac{b}{a}$의 값을 모두 구한 경우	50%
㈐	모든 $\frac{b}{a}$의 값의 합을 구한 경우	10%

18

288에 곱하는 자연수를 a라 하면 $288=2^5\times3^2$이므로 $288\times a$가 어떤 자연수의 세제곱이 되려면

$a=2\times3\times b^3$ (단, b는 자연수)

꼴이어야 한다.

이때 a가 100보다 작은 수이어야 하므로 a로 가능한 수는

$2\times3\times1^3=6$, $2\times3\times2^3=48$의 2개이다.

답 ②

19

$48=2^4\times3$이므로 48의 모든 약수의 합은

$<48>=(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3)$

$\quad=31\times4=124$

$\therefore x=124$

즉, $x=124=2^2\times31$이므로 x의 약수의 개수는

$\{x\}=\{124\}=(2+1)\times(1+1)=3\times2=6$

$\therefore y=6$

$\therefore x+y=124+6=130$ **답** ④

20

$A=2^2\times3^3\times5^2$의 약수 중에서 짝수인 약수는

$2\times(3^3\times5^2$의 약수$)$ 또는 $2^2\times(3^3\times5^2$의 약수$)$

꼴이다.

이때 $3^3\times5^2$의 약수는 $(3+1)\times(2+1)=12$(개)이므로

A의 약수 중 짝수의 개수는

$12+12=24$ **답** ⑤

21

네 자리 자연수 $abab$에 대하여

$abab=ab\times100+ab$

$\quad=ab\times101$

이때 ab는 두 자리의 소수이고 101도 소수이므로 $abab$의 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)=4$ **답** 4

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

101은 $101<11^2=121$이고 11보다 작은 소수 2, 3, 5, 7 중 어느 것으로도 나누어떨어지지 않으므로 소수이다.

22

7은 소수이므로 약수의 개수 7을 두 자연수의 곱셈으로 표현하면 $7=1\times7$ 외에는 존재하지 않는다.

또한, $7=6+1$이므로 약수가 7개인 수는 $(\text{소수})^6$ 꼴이어야 한다. 이때 $2^6=64$, $3^6=729$, $5^6=15625$, $\cdots$이므로 세 자리 자연수 중 약수가 7개인 수는 729뿐이다.

5도 소수이므로 약수의 개수 5를 두 자연수의 곱셈으로 표현하면 $5=1\times5$ 외에는 존재하지 않는다.

또한, $5=4+1$이므로 약수가 5개인 수는 $(\text{소수})^4$ 꼴이어야 한다. 이때 $2^4=16$, $3^4=81$, $5^4=625$, $7^4=2401$, $\cdots$이므로 세 자리 자연수 중 약수가 5개인 수는 625뿐이다.

따라서 구하는 합은

$729+625=1354$ **답** 1354

23

ㄱ. 소수 a, 자연수 m에 대하여 a^m의 약수는 $1, a, a^2, a^3, \cdots, a^m$이므로 a^m의 약수는 $(m+1)$개이다.

ㄴ. 두 자연수 12, 15를 소인수분해하면 각각 $2^2\times3$, 3×5이므로 약수의 개수는 각각

$(2+1)\times(1+1)=6$, $(1+1)\times(1+1)=4$

즉, $12<15$이지만

$(12$의 약수의 개수$)>(15$의 약수의 개수$)$

ㄷ. 약수가 3개인 수의 약수를 $1, a, b$ $(a<b)$라 하면 $1\times b=a\times a=a^2$이고 a는 소수이어야 한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. **답** ②

24

약수의 개수 6을 두 자연수의 곱셈으로 표현하면

1×6 또는 2×3

(i) $6=1\times6$으로 생각할 때,

$6=5+1$이므로 이 경우의 약수가 6개인 수는 $(\text{소수})^5$ 꼴이어야 한다.

이때 $2^5=32$, $3^5=243\geq50$이므로 50보다 작은 자연수 중 이를 만족시키는 것은 $a=32$뿐이다.

(ii) $6=2\times3$으로 생각할 때,

$2=1+1$, $3=2+1$이므로 이 경우의 약수가 6개인 수는 $p\times q^2$ (p, q는 서로 다른 소수) 꼴이어야 한다.

$p=2$일 때,

$2\times3^2=18$, $2\times5^2=50\geq50$이므로 $a=18$

$p=3$일 때,

$3\times2^2=12$, $3\times5^2=75\geq50$이므로 $a=12$

$p=5$일 때,

$5\times2^2=20$, $5\times3^2=45$, $5\times7^2=245\geq50$이므로

$a=20$, $a=45$

$p=7$일 때,

$7\times2^2=28$, $7\times3^2=63\geq50$이므로 $a=28$

$p=11$일 때,

$11\times2^2=44$, $11\times3^2=99\geq50$이므로 $a=44$

$p\geq13$일 때,

가장 작은 수가 $13\times2^2=52\geq50$이므로 50보다 작은 자연수 중 이를 만족시키는 것은 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수는

12, 18, 20, 28, 32, 44, 45

의 7개이다. **답** ④

25

$F(n)$은 n의 약수의 개수이고 $6=2\times3$이므로

$F(6)=(1+1)\times(1+1)=4$

또한, $72=2^3\times3^2$이므로

$F(72)=(3+1)\times(2+1)=12$

조건 (나)에서 $F(6)\times F(a)=F(72)$이므로

$4\times F(a)=12$

$\therefore F(a)=3$

즉, a는 약수가 3개인 자연수이므로 $a=p^2$ (p는 소수) 꼴이다.

$\therefore a=2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ \cdots$

이때 조건 (가)에서 a는 9 이상이고 100 미만인 자연수이므로

$a=9,\ 25,\ 49$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은

$9+25+49=83$

답 ④

26

$N=18\times5+r$이고, 나머지 r은 18보다 작은 자연수이다.

r의 약수의 개수 4를 두 자연수의 곱셈으로 표현하면

1×4 또는 2×2

(i) $4=1\times4$로 생각할 때,

$4=3+1$이므로 이 경우의 약수가 4개인 수는 $(\text{소수})^3$ 꼴이어야 한다.

이때 $2^3=8,\ 3^3=27\geq18$이므로 $r=8$뿐이다.

(ii) $4=2\times2$로 생각할 때,

$2=1+1$이므로 이 경우의 약수가 4개인 수는

$p\times q$ (p, q는 서로 다른 소수) 꼴이어야 한다.

$p=2$일 때, $2\times3=6,\ 2\times5=10,\ 2\times7=14,$

$2\times11=22\geq18$이므로 $r=6,\ 10,\ 14$

$p=3$일 때, $3\times2=6,\ 3\times5=15,\ 3\times7=21\geq18$이므로

$r=6,\ 15$

$p=5$일 때, $5\times2=10,\ 5\times3=15,\ 5\times7=35\geq18$이므로

$r=10,\ 15$

$p=7$일 때, $7\times2=14,\ 7\times3=21\geq18$이므로 $r=14$

$p\geq11$일 때,

가장 작은 수가 $11\times2=22\geq18$이므로 이를 만족시키는 자연수 r은 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 r은

$6,\ 8,\ 10,\ 14,\ 15$

이므로 구하는 합은

$6+8+10+14+15=53$

답 53

27

홀수와 홀수의 곱은 $\boxed{\text{홀수}}$이고 짝수와 짝수의 곱, 짝수와 홀수의 곱은 짝수이다.

이것을 이용하면 10부터 99까지의 자연수 중에서 약수가 홀수 개인 수를 구할 수 있다.

(i) 자연수 n에 대하여

$n=p^k$ (단, p는 소수, k는 자연수)

이라 하면 n의 약수는 $(k+1)$개이고, 이것이 홀수이려면 k는 짝수이어야 한다.

(ii) 자연수 n에 대하여

$n=p^k\times q^t$ (단, p, q는 서로 다른 소수, k, t는 자연수)

이라 하면 n의 약수는 $\boxed{(k+1)\times(t+1)}$개이고, 이것이 홀수이려면 k와 t가 모두 짝수이어야 한다.

(iii) 소인수가 3개 이상일 때도 같은 방법으로 생각하면 n을 소인수분해할 때, 소인수의 지수가 모두 $\boxed{\text{짝수}}$이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 n은 어떤 자연수를 두 번 곱한 수가 되므로 10부터 99까지의 자연수 중에서 조건을 만족시키는 수는 $4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2$의 $\boxed{6}$개이다.

$\therefore$ (가) : 홀수, (나) : $(k+1)\times(t+1)$, (다) : 짝수, (라) : 6

답 ②

BLACKLABEL 특강 필수 원리

제곱수의 약수의 개수

(1) 소수의 제곱수 ⇨ 약수가 3개

(2) 자연수의 제곱수 ⇨ 약수가 홀수개

28 해결단계

❶ 단계	합이 20인 서로 다른 세 소수를 구한다.
❷ 단계	소인수의 지수를 이용하여 약수의 개수를 나타낸다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 가장 작은 자연수를 구한다.

조건 (가)에서 합이 20인 서로 다른 세 소수는

2, 5, 13 또는 2, 7, 11

구하는 수를

$a^x\times b^y\times c^z$ (단, a, b, c는 $a<b<c$인 소수, x, y, z는 자연수)

이라 하면 조건 (나)에서 약수가 12개이므로

$(x+1)\times(y+1)\times(z+1)=12$

$\therefore x=1,\ y=1,\ z=2$ 또는 $x=1,\ y=2,\ z=1$

또는 $x=2,\ y=1,\ z=1$

이때 $a<b<c$이므로 $a^x\times b^y\times c^z$이 가장 작은 값을 갖기 위해서는 $x=2,\ y=1,\ z=1$이어야 한다.

(i) $a=2,\ b=5,\ c=13$일 때,

$2^2\times5\times13=260$

(ii) $a=2$, $b=7$, $c=11$일 때,

$2^2\times7\times11=308$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수는 260이다.

답 260

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.016~017

01 ⑤	02 49	03 21	04 257	05 675
06 26	07 8	08 15, 60		

01 해결단계

❶ 단계	2의 거듭제곱과 그 배수를 이용하여 $1\times2\times3\times\cdots\times100$에 곱해진 2의 개수를 구한다.
❷ 단계	3의 거듭제곱과 그 배수를 이용하여 $1\times2\times3\times\cdots\times100$에 곱해진 3의 개수를 구한다.

1부터 100까지의 자연수 중에서

2의 배수는 50개,

$4=2^2$의 배수는 25개,

$8=2^3$의 배수는 12개,

$16=2^4$의 배수는 6개,

$32=2^5$의 배수는 3개,

$64=2^6$의 배수는 1개이므로

$m=50+25+12+6+3+1=97$

또한, 1부터 100까지의 자연수 중에서

3의 배수는 33개,

$9=3^2$의 배수는 11개,

$27=3^3$의 배수는 3개,

$81=3^4$의 배수는 1개이므로

$n=33+11+3+1=48$

$\therefore m+n=97+48=145$

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

배수의 개수 찾기

$A=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$을 소인수분해할 때 2의 지수를 구해 보자.

2의 배수는 2, 4, 6, 8, 10의 5개

$\therefore 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$

$=2^5\times(1\times1\times3\times2\times5\times3\times7\times4\times9\times5)$

$4=2^2$의 배수는 4, 8의 2개

$\therefore 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$

$=2^5\times(1\times1\times3\times2\times5\times3\times7\times4\times9\times5)$

$=2^5\times2^2\times(1\times1\times3\times1\times5\times3\times7\times2\times9\times5)$

$8=2^3$의 배수는 8의 1개

$\therefore 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$

$=2^5\times(1\times1\times3\times2\times5\times3\times7\times4\times9\times5)$

$=2^5\times2^2\times(1\times1\times3\times1\times5\times3\times7\times2\times9\times5)$

$=2^5\times2^2\times2\times(1\times1\times3\times1\times5\times3\times7\times1\times9\times5)$

즉, $A=2^m\times$(2의 배수가 아닌 수)일 때,

$m=$(2의 배수의 개수)$+$(4의 배수의 개수)$+$(8의 배수의 개수)

$=5+2+1=8$

02 해결단계

❶ 단계	각 묶음의 세 수의 합은 묶음의 가운데 수의 3배와 같음을 파악한다.
❷ 단계	세 수의 합이 12의 배수가 되려면 묶음의 가운데 수가 4의 배수이어야 함을 파악한다.
❸ 단계	한 묶음 안의 세 수의 합이 12의 배수가 되는 묶음의 개수를 구한다.

$(1, 2, 3)$인 경우, 세 수의 합은

$1+2+3=6=3\times2$

$(2, 3, 4)$인 경우, 세 수의 합은

$2+3+4=9=3\times3$

$(3, 4, 5)$인 경우, 세 수의 합은

$3+4+5=12=3\times4$

$\vdots$

즉, 각 묶음의 세 수의 합은 묶음의 가운데 수의 3배와 같으므로 이들 세 수의 합은 3의 배수이다.

따라서 세 수의 합이 12의 배수가 되려면 묶음의 가운데 수가 4의 배수이어야 한다.

이때 $199=4\times49+3$이므로 세 수의 합이 12의 배수가 되는 묶음은 49개이다.

답 49

• 다른 풀이 •

연속하는 세 수의 묶음을 $(n, n+1, n+2)$로 나타내면 세 수의 합은

$n+(n+1)+(n+2)=3\times n+3=3\times(n+1)$

따라서 세 수의 합은 묶음의 가운데 수의 3배와 같으므로 세 수의 합은 3의 배수이다.

이때 $1\le n\le198$이고 $n+1$이 4의 배수이어야 하므로

$n=3, 7, 11, \cdots, 195$

따라서 n은 49개이므로 세 수의 합이 12의 배수가 되는 묶음도 49개이다.

BLACKLABEL 특강 참고

연속하는 세 자연수는

$(n, n+1, n+2)$ 또는 $(m-1, m, m+1)$

로 나타낼 수 있다. (단, n은 자연수, m은 $m\ge2$인 자연수)

03 해결단계

❶ 단계	10을 소수의 합으로 나타낸다.
❷ 단계	$[a]=10$을 만족시키는 a의 값을 구한다.
❸ 단계	가장 작은 자연수 a의 값을 구한다.

10을 소수의 합으로 나타내면

$2+2+2+2+2$, $2+2+3+3$, $2+3+5$, $3+7$, $5+5$

이므로 $[a]=10$을 만족시키는 a의 값은

$2^5=32$, $2^2\times3^2=36$, $2\times3\times5=30$, $3\times7=21$, $5^2=25$

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a의 값은 21이다.

답 21

04 해결단계

❶ 단계	$abcabc$를 소인수분해한다.
❷ 단계	abc의 값으로 가능한 것을 모두 찾고 각 값에 대하여 약수의 개수를 확인한다.
❸ 단계	abc의 값을 구한다.

여섯 자리 자연수 $abcabc$에 대하여

$abcabc=abc\times1000+abc$

$\quad=abc\times1001=abc\times7\times11\times13$

이때 a, b, c는 서로 다른 한 자리 소수이고 $a<b<c$이므로

$abc=235$, 237, 257, 357

(i) $abc=235$일 때,

$abcabc=235\times7\times11\times13$

$\quad=5\times7\times11\times13\times47$

이므로 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=32$

(ii) $abc=237$일 때,

$abcabc=237\times7\times11\times13$

$\quad=3\times7\times11\times13\times79$

이므로 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=32$

(iii) $abc=257$일 때,

$abcabc=257\times7\times11\times13$

이므로 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$

(iv) $abc=357$일 때,

$abcabc=357\times7\times11\times13$

$\quad=3\times7^2\times11\times13\times17$

이므로 약수의 개수는

$(1+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=48$

(i)~(iv)에서 약수가 16개인 경우는 $abc=257$

답 257

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

a, b, c가 서로 다른 한 자리의 소수이고 $a<b<c$라는 조건이 있으므로

$abcabc=abc\times1001=abc\times7\times11\times13$

에서 abc가 소수인 경우에만 약수가 16개인 조건을 만족시킬 수 있다.

그러나 세 자리 자연수 abc에 대한 조건이 다르게 주어진다면 소수를 찾는 것만으로는 abc의 값을 바르게 찾을 수 없다.

예를 들어 $abc=169$인 경우,

$abcabc=abc\times1001=169\times7\times11\times13$

$\quad=7\times11\times13^3$

이므로 약수가 $(1+1)\times(1+1)\times(3+1)=16$(개)이다.

따라서 무조건 abc가 소수라는 조건만으로 접근하면 안 되고 나머지 조건들도 잘 살펴보는 것이 중요하다.

05 해결단계

❶ 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 N의 소인수 3, 5의 지수의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	약수의 개수를 이용하여 N의 소인수 3, 5의 지수 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	N의 소인수 3, 5의 지수를 각각 구한다.
❹ 단계	가장 작은 자연수 N의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $N=3^a\times5^b$ (단, a, b는 자연수)이고

조건 (가)에서 N은 $75=3\times5^2$의 배수이므로

a의 값은 1 이상의 자연수, b의 값은 2 이상의 자연수이다.

조건 (다)에서 N의 약수가 12개이므로

$(a+1)\times(b+1)=12$

$\therefore a=1, b=5$ 또는 $a=2, b=3$ 또는 $a=3, b=2$

이때 N이 가장 작은 값을 가지려면 b의 값이 최소이어야 하므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore N=3^3\times5^2=675$

답 675

06 해결단계

❶ 단계	조건을 이용하여 $b\times c$의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 b, c의 값의 경우에 따른 a의 값을 구한다.
❸ 단계	a의 값 중에서 가장 큰 값을 구한다.

$a=b\times c$이므로

$a\times b\times c=(b\times c)\times b\times c=(b\times c)^2$

이 값이 100 이상이고 900 이하이므로 $b\times c$의 값은 10 이상이고 30 이하가 되어야 한다.

또한, b, c는 모두 소수이고 $b<c$이므로 이를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b=2$, $c=5$일 때,

$a=2\times5=10$

(ii) $b=2$, $c=7$일 때,

$a=2\times7=14$

(iii) $b=2$, $c=11$일 때,

$a=2\times11=22$

(iv) $b=2$, $c=13$일 때,

$a=2\times13=26$

(v) $b=3$, $c=5$일 때,

$a=3\times5=15$

(vi) $b=3$, $c=7$일 때,

$a=3\times7=21$

(i)~(vi)에서 a의 값 중에서 가장 큰 값은 26이다.

답 26

07 해결단계

❶ 단계	$a\times b$를 소인수분해한다.
❷ 단계	조건 (나)에서 a, b의 조건을 파악한다.
❸ 단계	a의 소인수의 개수에 따라 경우를 나누고, 각 경우에 가능한 $\frac{a}{b}$의 개수를 구한다.
❹ 단계	기약분수 $\frac{a}{b}$의 개수를 구한다.

조건 (가)에서

$a\times b=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$

$\quad=2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2$

$\quad=2^7\times3^4\times5\times7$

조건 (나)에서 $\frac{a}{b}$의 값이 1보다 작으므로 $a<b$

또한, $\frac{a}{b}$가 분모가 b인 기약분수이므로 두 수 a, b에 공통인 인수가 존재하지 않아야 한다.

이때 a의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 $\frac{a}{b}$의 값을 구할 수 있다.

(ⅰ) $a=1$일 때,

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2^7\times3^4\times5\times7}$의 1개이다.

(ⅱ) a의 소인수가 1개일 때,

$a=2^7$, 3^4, 5, 7이므로

$\frac{a}{b}=\frac{2^7}{3^4\times5\times7}$, $\frac{3^4}{2^7\times5\times7}$, $\frac{5}{2^7\times3^4\times7}$, $\frac{7}{2^7\times3^4\times5}$

의 4개이다.

(ⅲ) a의 소인수가 2개일 때,

$a=2^7\times3^4$, $2^7\times5$, $2^7\times7$, $3^4\times5$, $3^4\times7$, 5×7

그런데 $a=2^7\times3^4$, $2^7\times5$, $2^7\times7$인 경우에는 $a>b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $\frac{a}{b}=\frac{3^4\times5}{2^7\times7}$, $\frac{3^4\times7}{2^7\times5}$, $\frac{5\times7}{2^7\times3^4}$의 3개이다.

(ⅳ) a의 소인수가 3개 이상이면 $a>b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 분모가 b인 기약분수 $\frac{a}{b}$의 개수는

$1+4+3=8$

답 8

08 해결단계

❶ 단계	$\frac{60\times a\times b}{c}$의 모든 소인수의 지수가 짝수임을 파악한다.
❷ 단계	각 경우에 따른 $a\times b\times c$의 값을 구한다.
❸ 단계	$a\times b\times c$의 값으로 가능한 값을 모두 구한다.

$\frac{60\times a\times b}{c}$가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 소인수분해하였을 때, 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 한다.

$\frac{60\times a\times b}{c}=\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{c}$에서

(ⅰ) $c=1$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{1}=2^2\times3\times5\times a\times b$이므로

$a\times b=3\times5$

$\therefore a\times b\times c=3\times5\times1=15$

(ⅱ) $c=2$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{2}=2\times3\times5\times a\times b$이므로

$a\times b=2\times3\times5$

$\therefore a\times b\times c=2\times3\times5\times2=60$

(ⅲ) $c=3$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{3}=2^2\times5\times a\times b$이므로

$a\times b=5$ 또는 $a\times b=2^2\times5$

$\therefore a\times b\times c=5\times3=15$ 또는 $a\times b\times c=2^2\times5\times3=60$

(ⅳ) $c=4$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{4}=3\times5\times a\times b$이므로

$a\times b=3\times5$

$\therefore a\times b\times c=3\times5\times4=60$

(ⅴ) $c=5$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{5}=2^2\times3\times a\times b$이므로

$a\times b=3$ 또는 $a\times b=2^2\times3$

$\therefore a\times b\times c=3\times5=15$ 또는 $a\times b\times c=2^2\times3\times5=60$

(ⅵ) $c=6$일 때,

$\frac{2^2\times3\times5\times a\times b}{6}=2\times5\times a\times b$이므로

$a\times b=2\times5$

$\therefore a\times b\times c=2\times5\times6=60$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 $a\times b\times c$의 값으로 가능한 값은

15, 60

답 15, 60

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

구하는 것은 $a\times b\times c$의 값이므로 세 수 a, b, c가 갖는 각 값을 따질 필요는 없다.
예를 들어 $a=2$, $b=3$, $c=5$인 경우, $a=3$, $b=2$, $c=5$인 경우, $a=1$, $b=6$, $c=5$인 경우는 모두 $a\times b\times c=30$으로 같다.
다만 세 수 a, b, c는 모두 주사위의 눈의 수이므로 각 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 하나이다. 즉, $a\times b$의 값은 1 이상이고 36 이하임에 유의해야 한다.
예를 들어 풀이의 (ⅰ)에서 $c=1$일 때 $a\times b$의 값은 $2^2\times3\times5=60$도 가능하지만 a, b가 주사위의 눈의 수라는 조건 때문에 $a\times b$의 값은 3×5만 가능하다.

02. 최대공약수와 최소공배수

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.019~021

01 ②	02 27	03 ④	04 ①	05 ②
06 216	07 ⑤	08 4	09 18	10 20
11 ②	12 ③	13 ④	14 ③	15 2바퀴
16 ③	17 28	18 ⑤		

01

① 7과 12는 서로소이지만 12는 소수가 아니다.

③ 3과 9는 모두 홀수이지만 최대공약수가 3이므로 서로소가 아니다.

④ 1은 모든 자연수와 서로소이다.

⑤ 10 이하의 자연수 중에서 6과 서로소인 수는 1, 5, 7의 3개이다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

02

$24=2^3\times3$, $2^2\times a\times7$의 최대공약수가 $12=2^2\times3$이므로 a의 값이 될 수 있는 수는 3의 배수이면서 2의 배수는 아니어야 한다.

$$\begin{array}{r} 24=2^3\times3 \\ 2^2\times a\times7 \\ \hline (\text{최대공약수})=2^2\times3 \end{array}$$

이때 a의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면

3, $3\times3=9$, $3\times5=15$, $3\times7=21$, $\cdots$

따라서 구하는 합은 $3+9+15=27$ 답 27

03

120과 a의 공약수가 20의 약수와 같으려면

120과 a의 최대공약수가 20이어야 한다.

$120=2^3\times3\times5$, $20=2^2\times5$이므로

① $a=2^2\times5$이면 최대공약수는 $2^2\times5$

② $a=2^2\times5^2$이면 최대공약수는 $2^2\times5$

③ $a=2^2\times5^3$이면 최대공약수는 $2^2\times5$

④ $a=2^3\times5$이면 최대공약수는 $2^3\times5$

⑤ $a=2^2\times5\times7$이면 최대공약수는 $2^2\times5$

따라서 ④ $2^3\times5$는 a의 값이 될 수 없다. 답 ④

04

45를 소인수분해하면 $45=3^2\times5$

즉, 두 수 $3^2\times5$, $3^2\times5\times7$의 최대공약수는

$3^2\times5$

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로 구하는 공약수의 개수는 $3^2\times5$의 약수의 개수와 같다.

따라서 구하는 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$ 답 ①

05

$343=7^3$이므로 343과 x가 서로소이려면 x는 인수로 7을 갖지 않아야 한다.

이때 두 수의 최소공배수가 $2^2\times3\times7^3$이므로

$x=2^2\times3=12$ 답 ②

06

12, 18, 24의 공배수를 작은 수부터 차례대로 나열할 때, 앞에서 세 번째의 수는 세 수 12, 18, 24의 최소공배수의 배수 중에서 세 번째로 작은 수이다.

이때 $12=2^2\times3$, $18=2\times3^2$, $24=2^3\times3$이므로 이들 세 수의 최소공배수는 $2^3\times3^2$이다.

세 수의 공배수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

$2^3\times3^2=72$, $(2^3\times3^2)\times2=144$, $(2^3\times3^2)\times3=216$, $\cdots$

따라서 구하는 수는 216이다. 답 216

07

세 수 $5\times x$, $6\times x$, $10\times x$의 최소공배수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 5\times x=x\qquad\quad\times5 \\ 6\times x=x\times2\times3\qquad \\ 10\times x=x\times2\qquad\times5 \\ \hline (\text{최소공배수})=x\times2\times3\times5=x\times30 \end{array}$$

이때 세 수의 최소공배수가 300이므로

$x\times30=300$

$\therefore x=10$ 답 ⑤

08

소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구할 때는 소인수의 지수가 같거나 작은 쪽을 택하여 곱하고 최소공배수를 구할 때는 소인수의 지수가 같거나 큰 쪽을 택하여 곱한다.

즉, $2^2\times3^a\times5$, $2^b\times3^2\times7$의 최소공배수가 $2^4\times3^3\times5\times7$이므로

$$\begin{array}{r} 2^2\times3^a\times5\quad\ \\ 2^b\times3^2\quad\ \times7 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^4\times3^3\times5\times7 \end{array}$$

$3^a=3^3$, $2^b=2^4$

$\therefore a=3, b=4$

이때 두 수 $2^2\times3^3\times5$, $2^4\times3^2\times7$의 최대공약수는 $2^2\times3^2$이므로

$m=2$, $n=2$

$\therefore m+n=2+2=4$

답 4

09

어떤 자연수로 38, 56, 74를 나누면 항상 2가 남으므로 이 자연수는

$38-2=36$, $56-2=54$, $74-2=72$

의 공약수이다.

따라서 이러한 자연수 중에서 가장 큰 수는 36, 54, 72의 최대공약수이므로 구하는 수는

$$\begin{array}{r} 36=2^2\times3^2 \\ 54=2\times3^3 \\ 72=2^3\times3^2 \\ \hline (\text{최대공약수})=2\times3^2 \end{array}$$

$2\times3^2=18$

답 18

10

되도록 많은 봉투에 똑같이 나누어 담아야 하므로 나누어 담는 봉투 수는 두 수 60, 36의 최대공약수이다.

이때 $60=2^2\times3\times5$, $36=2^2\times3^2$이므로

$a=2^2\times3=12$

즉, 사용하는 봉투가 12개이므로 한 봉투에 담는 과자의 개수는 $b=60\div12=5$,

빵의 개수는 $c=36\div12=3$

$\therefore a+b+c=12+5+3=20$

답 20

11

네 모퉁이에 나무를 반드시 심고 나무 사이의 간격이 최대가 되려면 그 간격은 이웃한 두 변의 길이 120, 90의 최대공약수이어야 한다.

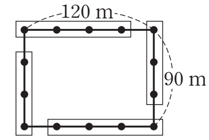
$$\begin{array}{r} 120=2^3\times3\times5 \\ 90=2\times3^2\times5 \\ \hline (\text{최대공약수})=2\times3\times5 \end{array}$$

즉, 나무 사이의 간격이

$2\times3\times5=30(\text{m})$

가 되도록 심어야 한다.

이때 $120\div30=4$, $90\div30=3$이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 필요한 나무의 수는

$(4+3)\times2=14$(그루)

답 ②

12

제품 상자의 크기를 가능한 한 크게 할 때, 제품 상자의 한 모서리의 길이는 560, 240, 320의 최대공약수이어야 한다.

$$\begin{array}{r} 560=2^4\quad\ \times5\times7 \\ 240=2^4\times3\times5\quad\ \\ 320=2^6\quad\ \times5\quad\ \\ \hline (\text{최대공약수})=2^4\quad\ \times5\quad\ \end{array}$$

따라서 정육면체 모양의 제품 상자의 한 모서리의 길이는

$2^4\times5=80(\text{cm})$

답 ③

13

5, 6, 8로 나누면 모두 4가 남으므로 구하는 자연수를 x라 하면 $x-4$는 5, 6, 8의 공배수이다.

이때 5, 6, 8의 최소공배수는

$$\begin{array}{r} 5=\quad\quad\ 5 \\ 6=2\times3\quad \\ 8=2^3\quad\quad\ \\ \hline (\text{최소공배수})=2^3\times3\times5 \end{array}$$

$2^3\times3\times5=120$

이므로

$x-4=120, 240, 360, \cdots, 960, 1080, \cdots$

$\therefore x=124, 244, 364, \cdots, 964, 1084, \cdots$

따라서 가장 큰 세 자리 자연수는 964이다.

답 ④

14

지하철과 버스가 동시에 출발한 후, 처음으로 다시 동시에 출발할 때까지 걸리는 시간은 16, 20의 최소공배수이므로

$$\begin{array}{r} 16=2^4\quad\ \\ 20=2^2\times5 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^4\times5 \end{array}$$

$2^4\times5=80$(분)

따라서 구하는 시각은 오전 8시로부터 80분, 즉 1시간 20분 후인 오전 9시 20분이다.

답 ③

15

두 톱니바퀴 A, B가 회전하기 시작한 후, 처음으로 다시 같은 톱니에서 동시에 맞물릴 때까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 24의 최소공배수이므로

$$\begin{array}{r} 36=2^2\times 3^2 \\ 24=2^3\times 3 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^3\times 3^2 \end{array}$$

$2^3\times 3^2=72$

따라서 두 톱니바퀴가 같은 톱니에서 동시에 맞물리는 것은 톱니바퀴 A가 $72\div 36=2$(바퀴) 회전한 후이다.

답 2바퀴

16

티슈 상자를 쌓아 만든 정육면체 모양의 구조물의 크기가 가장 작으려면 이 구조물의 한 모서리의 길이가 24, 12, 15의 최소공배수이어야 하므로

$$\begin{array}{r} 24=2^3\times 3 \\ 12=2^2\times 3 \\ 15= 3\times 5 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^3\times 3\times 5 \end{array}$$

$2^3\times 3\times 5=120$(cm)

이때 필요한 티슈 상자의 개수는

가로 방향으로 $120\div 24=5$

세로 방향으로 $120\div 12=10$

높이로 $120\div 15=8$

따라서 필요한 티슈 상자의 개수는

$5\times 10\times 8=400$

답 ③

17

42를 소인수분해하면 $42=2\times 3\times 7$이고

두 자연수 42, A의 최대공약수가 14이므로

$A=14\times a=2\times 7\times a$ (단, a는 3과 서로소인 자연수)

꼴이어야 한다.

이때 두 자연수 42, A의 최소공배수 84를 소인수분해하면

$84=2^2\times 3\times 7$이므로 다음과 같이 최소공배수를 구할 수 있다.

$$\begin{array}{r} 42=2\times 3\times 7 \\ A=2\times 7\times a \\ \hline 84=2^2\times 3\times 7 \end{array}$$

따라서 $a=2$가 되어야 하므로

$A=2\times 7\times 2=28$

답 28

• 다른 풀이 •

두 자연수 A, B의 최대공약수가 G, 최소공배수가 L이면

$A\times B=L\times G$가 성립하므로

$42\times A=14\times 84$

따라서 $A=28$이다.

18

두 분수 $\frac{12}{a}$, $\frac{18}{a}$이 모두 자연수가 되려면 자연수 a는 12, 18의 공약수이어야 하므로 a의 값 중 가장 큰 수 A는 12, 18의 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r} 12=2^2\times 3 \\ 18=2\times 3^2 \\ \hline (\text{최대공약수})=2\times 3 \\ (\text{최소공배수})=2^2\times 3^2 \end{array}$$

$\therefore A=2\times 3=6$

두 분수 $\frac{b}{12}$, $\frac{b}{18}$가 모두 자연수가 되려면 자연수 b는 12, 18의 공배수이어야 하므로 b의 값 중 가장 작은 수 B는 12, 18의 최소공배수이다.

$\therefore B=2^2\times 3^2=36$

$\therefore A+B=6+36=42$

답 ⑤

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.022~027

01 9	02 35	03 ⑤	04 ②	05 ④
06 70	07 ③	08 21	09 78	10 6개
11 5	12 ③	13 ②	14 ④	15 300
16 65	17 49	18 ②	19 ①	20 57
21 20	22 4	23 139	24 ②	25 ③
26 16개	27 ⑤	28 ④	29 48	30 301개
31 162초	32 42회	33 ②	34 ④	35 ③
36 24000원				

01

88을 소인수분해하면

$88=2^3\times 11$

즉, 구하는 수는 2 또는 11을 소인수로 갖지 않는 수이다.

이때 20 이하의 자연수 중에서 2의 배수는 10개이고,

11의 배수는 1개이므로 88과 서로소인 수의 개수는

$20-(10+1)=9$

답 9

02

두 수 A, B가 서로소가 아니므로 1이 아닌 최대공약수가 존재한다.

이때 두 수의 곱 294를 소인수분해하면

$294=2\times3\times7^2$

이므로 최대공약수는 7이어야 한다.

또한, $A<B$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $A=7$, $B=2\times3\times7$일 때,

$B-A=42-7=35$

(ii) $A=2\times7$, $B=3\times7$일 때,

$B-A=21-14=7$

(i), (ii)에서 $B-A$의 가장 큰 값은 35이다. **답** 35

03

조건 ㈎에서 x와 $60=2^2\times3\times5$의 최대공약수는 $12=2^2\times3$이므로 x는 $2^2\times3$을 인수로 갖고 5는 소인수로 갖지 않는다.

또한, 조건 ㈏에서 x와 $40=2^3\times5$의 최대공약수는 $8=2^3$이므로 x는 2^3을 인수로 갖고 5를 소인수로 갖지 않는다.

즉, x는 $2^3\times3$을 인수로 갖고 5는 소인수로 갖지 않는다.

이를 만족시키는 x의 값 중에서 조건 ㈐를 만족시키는 것은

$2^3\times3=24$ 또는 $2^4\times3=48$ 또는 $2^3\times3^2=72$

따라서 x의 값 중 가장 큰 수는 72이다. **답** ⑤

04

두 수의 최대공약수가 $432=2^4\times3^3$이므로

두 수의 공약수는 $2^4\times3^3$의 약수이다.

이러한 약수 중에서 자연수의 제곱이 되는 수는

소인수의 지수가 짝수인 수이므로

1, 2^2, 2^4, 3^2, $2^2\times3^2$, $2^4\times3^2$

의 6개이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 참고

자연수의 제곱인 수

자연수 N이 어떤 자연수의 제곱인 수이고 N을 소인수분해하면 다음과 같을 때,

$N=p^m\times q^n\times\cdots\times r^k$

(p, q, $\cdots$, r은 모두 서로 다른 소수, m, n, $\cdots$, k는 자연수)

(1) N의 소인수의 지수는 모두 짝수이다.

⇨ m, n, $\cdots$, k는 모두 짝수이다.

(2) N의 약수의 개수는 홀수이다.

⇨ N의 약수의 개수는

$(m+1)\times(n+1)\times\cdots\times(k+1)$ ⋯⋯ ㉠

이때 m, n, $\cdots$, k가 모두 짝수이므로

$m+1$, $n+1$, $\cdots$, $k+1$은 모두 홀수이다.

따라서 ㉠의 값은 홀수이다.

05

조건 ㈏, ㈐에서 세 수 A, B, C의 최대공약수는 12이고, 조건 ㈐에서 $A<B<C$이므로

$A=12\times a$, $B=12\times b$, $C=12\times c$

(단, a, b, c는 $a<b<c$인 자연수이고 a, b, c의 최대공약수는 1이다.)

라 할 수 있다.

조건 ㈎에서 $A+B+C=120$이므로

$12\times a+12\times b+12\times c=120$

$\therefore a+b+c=10$ ⋯⋯ ㉠

이때 $[A, B, C]$의 개수는 세 자연수 a, b, c에 대하여 ㉠을 만족시키는 $[a, b, c]$의 개수와 같다.

따라서 $[a, b, c]$는 $[1, 2, 7]$, $[1, 3, 6]$, $[1, 4, 5]$, $[2, 3, 5]$의 4개이므로 구하는 $[A, B, C]$도 4개이다. **답** ④

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

$a+b+c=10$에서 세 수 a, b, c가 모두 서로소이어야 한다고 착각하여 $[a, b, c]$가 $[1, 3, 6]$인 경우를 제외하고 $[a, b, c]$의 개수를 3으로 답하지 않도록 주의한다.

세 수 a, b, c 중 어느 두 수만 서로소이면 세 수의 최대공약수는 1이기 때문이다.

실제로 $[a, b, c]$가 $[1, 3, 6]$인 경우, 즉 $A=12$, $B=36$, $C=72$일 때, 세 수 A, B, C의 최대공약수를 구하면 다음과 같이 $2^2\times3=12$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$$\begin{array}{r} 12=2^2\times3 \\ 36=2^2\times3^2 \\ 72=2^3\times3^2 \\ \hline (\text{최대공약수})=2^2\times3 \end{array}$$

06

조건 ㈎에서 자연수 A의 소인수가 3개이므로

$A=a^l\times b^m\times c^n$ (a, b, c는 서로소인 자연수)

꼴이라 할 수 있다.

조건 ㈏에서 두 수 A, 280의 공약수가 8개이므로 이 두 수의 최대공약수의 약수가 8개이다.

이때 280을 소인수분해하면

$280=2^3\times5\times7$

이므로 A의 소인수의 종류에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) A의 소인수가 2, 5, 7인 경우

두 수 A, 280의 소인수가 일치하므로 최대공약수의 소인수도 2, 5, 7의 3개이다. 이때 소인수가 3개인 자연수의 약수가 8개이려면

$8=(1+1)\times(1+1)\times(1+1)$

인 경우만 가능하다.

즉, 두 수 A, 280의 최대공약수는

$2\times5\times7=70$

이고 이를 만족시키는 자연수 A 중 가장 작은 값은

$2\times5\times7=70$

(ii) A의 소인수가 2, 5, p (단, $p\neq7$)인 경우

280의 소인수는 2, 5, 7이므로 두 수 A, 280의 최대공약수의 소인수는 2, 5의 2개이다. 이때 소인수가 2개인 자연수의 약수가 8개이려면

$8=(1+1)\times(3+1)$

인 경우만 가능하다.

즉, 두 수 A, 280의 최대공약수는

$2^3\times5=40$

이고 이를 만족시키는 자연수 A 중 가장 작은 값은

$2^3\times5\times3=120$

(i), (ii)에서 자연수 A 중 가장 작은 값은 70이다. **답** 70

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$280=2^3\times5\times7$이므로 (i)에서

$2\times5^2\times7$, $2\times5\times7^2$, $2\times5^2\times7^2$, … 등도 모두 A의 값으로 가능하다.

마찬가지로 (ii)에서

$2^3\times5\times11$, $2^3\times5\times13$, $2^3\times5^2\times3$, … 등도 모두 A의 값으로 가능하다.

구하는 것이 A의 값으로 가능한 값 중 가장 작은 값이므로 각 경우에 가장 작은 A의 값을 구하여 비교한 것이다.

또한, A의 소인수가 2, 7, p (단, $p\neq5$)인 경우도 가능하지만 이때의 A의 값은 (ii)인 경우의 A의 값보다 크므로 생각하지 않는다.

07

두 수의 공약수의 개수는 두 수의 최대공약수의 약수의 개수이다.

즉, $\langle a, b\rangle=1$이면 두 수는 서로소이다.

$\langle 20, 30\rangle$은 두 수 20, 30의 최대공약수의 약수의 개수이고

$20=2^2\times5$, $30=2\times3\times5$에서 이 두 수의 최대공약수는 2×5이므로

$\langle 20, 30\rangle=(1+1)\times(1+1)=4$

즉, $\langle\langle 20, 30\rangle, \langle a, 12\rangle\rangle=1$에서

$\langle 4, \langle a, 12\rangle\rangle=1$

이므로 $\langle a, 12\rangle$와 4는 서로소이다. 이때 $4=2^2$이므로 $\langle a, 12\rangle$는 2를 소인수로 갖지 않는다.

$\therefore \langle a, 12\rangle=1, 3, 5, \cdots$

① $a=4$이면 4, 12의 최대공약수는 $4=2^2$이므로

$\langle 4, 12\rangle=2+1=3$

② $a=5$이면 5, 12는 서로소이므로

$\langle 5, 12\rangle=1$

③ $a=6$이면 6, 12의 최대공약수는 $6=2\times3$이므로

$\langle 6, 12\rangle=(1+1)\times(1+1)=4$

④ $a=7$이면 7, 12는 서로소이므로

$\langle 7, 12\rangle=1$

⑤ $a=8$이면 8, 12의 최대공약수는 $4=2^2$이므로

$\langle 8, 12\rangle=2+1=3$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③ 6이다. **답** ③

• 다른 풀이 •

$\langle 4, \langle a, 12\rangle\rangle=1$에서 $\langle a, 12\rangle=1, 3, 5, \cdots$

(i) $\langle a, 12\rangle=1$인 경우

a는 12와 서로소이고 $12=2^2\times3$이므로 2, 3을 소인수로 갖지 않는 자연수는 모두 a의 값이 될 수 있다.

즉, ② 5, ④ 7은 a가 될 수 있다.

(ii) $\langle a, 12\rangle=3$인 경우

a와 12의 최대공약수의 약수의 개수가 3이므로 이 두 수의 최대공약수는 $(\text{소수})^2$ 꼴이어야 한다.

이때 $12=2^2\times3$이므로 a와 12의 최대공약수는 2^2만 가능하고

$a=2^2\times p$ (단, p는 3을 소인수로 갖지 않는 자연수)

꼴이어야 한다.

즉, ① $4=2^2\times1$, ⑤ $8=2^2\times2$는 a가 될 수 있다.

(iii) $\langle a, 12\rangle=5, 7, 9, \cdots$인 경우

a와 12의 최대공약수의 약수의 개수가 5, 7, 9, …이어야 하는데 $12=2^2\times3$이므로 이를 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 a의 값이 될 수 없는 것은 ③ 6이다.

08

두 수 18, 42의 최소공배수는

$2\times3^2\times7=126$

$$\begin{array}{r} 18=2\times3^2 \\ 42=2\times3\times7 \\ \hline (\text{최소공배수})=2\times3^2\times7 \end{array}$$

두 수의 공배수는 두 수의 최소공배수의 배수이므로

$A\times12=126\times n$ (단, n은 자연수)

이라 하면

$A=\dfrac{21\times n}{2}$

이를 만족시키는 가장 작은 자연수 A는 $n=2$일 때이므로

$A=21$ **답** 21

09

세 자연수 x, y, z를

$x=2\times a$, $y=3\times a$, $z=8\times a=2^3\times a$ (a는 자연수)

라 하고 최소공배수를 구하면

$2^3\times3\times a$ (가)

이때 세 수의 최소공배수가 144이므로

$2^3\times3\times a=144$ $\quad\therefore a=6$ (나)

따라서 $x=2\times6=12$, $y=3\times6=18$, $z=8\times6=48$이므로
$x+y+z=12+18+48=78$
(다)

답 78

단계	채점 기준	배점
(가)	한 문자를 이용하여 x, y, z를 나타내고 이 문자로 최소공배수를 나타낸 경우	40%
(나)	한 문자의 값을 구한 경우	30%
(다)	$x+y+z$의 값을 구한 경우	30%

10

서로 다른 세 자연수 n, $12=2^2\times3$, $42=2\times3\times7$의 최소공배수가 $252=2^2\times3^2\times7$이므로 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} n \\ 12=2^2\times3\quad \\ 42=2\ \times3\ \times7 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^2\times3^2\times7 \end{array}$$

즉, n은 3^2을 반드시 인수로 갖고 2 또는 2^2 또는 7을 인수로 가질 수 있다.
따라서 n의 값이 될 수 있는 자연수는
3^2, 2×3^2, $2^2\times3^2$, $3^2\times7$, $2\times3^2\times7$, $2^2\times3^2\times7$
의 6개이다.

답 6개

11

$10=2\times5$이고 a는 2보다 큰 자연수이므로
두 수 2×5, $3\times a$의 최소공배수는
$2\times3\times5\times n=30\times n$ (단, n은 자연수)
꼴이다. 이때 두 수의 공배수는 최소공배수의 배수이므로 공배수가 두 자리 자연수가 되려면 최소공배수도 두 자리 자연수이어야 한다.
즉, $30\times n$의 값이 두 자리 자연수이려면 n의 값으로 가능한 것은 1, 2, 3
(i) $n=1$인 경우
최소공배수가 $30\times1=30$이므로 두 수 2×5, $3\times a$의 공배수는 30, 60, 90의 3개이다.
(ii) $n=2$인 경우
최소공배수가 $30\times2=60$이므로 두 수 2×5, $3\times a$의 공배수는 60의 1개이다.
(iii) $n=3$인 경우
최소공배수가 $30\times3=90$이므로 두 수 2×5, $3\times a$의 공배수는 90의 1개이다.
(i), (ii), (iii)에서 두 수 2×5, $3\times a$의 공배수 중에서 두 자리 자연수가 2개 이상 존재하는 경우는 $n=1$일 때이다.
따라서 두 수 2×5, $3\times a$의 최소공배수가 $2\times3\times5$인 경우이므로 2보다 큰 자연수 a의 값으로 가능한 것은 5뿐이다.

답 5

BLACKLABEL 특강 참고

2보다 큰 자연수 a의 값에 따라 두 수 2×5, $3\times a$의 최소공배수를 구하면 다음과 같다.
(i) $a=3$일 때, 2×5와 $3\times a=3\times3=3^2$의 최소공배수는 $2\times3^2\times5=90$이므로
두 자리 자연수인 공배수는 90의 1개
(ii) $a=4$일 때, 2×5와 $3\times a=3\times4=2^2\times3$의 최소공배수는 $2^2\times3\times5=60$이므로
두 자리 자연수인 공배수는 60의 1개
(iii) $a=5$일 때, 2×5와 $3\times a=3\times5$의 최소공배수는 $2\times3\times5=30$이므로
두 자리 자연수인 공배수는 30, 60, 90의 3개
(iv) $a=6$일 때, 2×5와 $3\times a=3\times6=2\times3^2$의 최소공배수는 $2\times3^2\times5=90$이므로
두 자리 자연수인 공배수는 90의 1개
(v) $a=7$일 때, 2×5와 $3\times a=3\times7$의 최소공배수는 $2\times3\times5\times7=210$이므로
두 자리 자연수인 공배수는 없다.
(vi) $a\geq8$일 때, 같은 방법으로 두 자리 자연수인 공배수는 없다.

12

ㄱ. 4, 6의 최소공배수는 $2^2\times3=12$이므로
$L(4,\ 6)=12$

$$\begin{array}{r} 4=2^2\quad \\ 6=2\ \times3 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^2\times3 \end{array}$$

ㄴ. A는 $n\times A$의 약수이므로
$L(A,\ n\times A)=n\times A$
서로 같은 두 수의 최소공배수는 그 자신이므로
$L(A,\ A)=A$
$\therefore L(A,\ n\times A)=n\times L(A,\ A)$
ㄷ. $A=4$, $B=6$, $m=3$, $n=2$일 때,
$m\times A=3\times4=12$, $n\times B=2\times6=12$이므로
$L(m\times A,\ n\times B)=L(12,\ 12)=12$
한편, $L(A,\ B)=L(4,\ 6)=12$이므로
$m\times n\times L(A,\ B)=3\times2\times12=72$
$\therefore L(m\times A,\ n\times B)\neq m\times n\times L(A,\ B)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄷ에서 주어진 등식이 성립하려면 세 자연수 m, n, $L(A,\ B)$가 모두 서로소이어야 한다.

13

B가 자연수이므로 A는 3, 4의 공배수이어야 한다. 이때 3, 4의 최소공배수는 12이므로 A는 12의 배수이다.
또한, C도 자연수이므로 A는 2, 3, 5의 공배수이어야 한다. 이때 2, 3, 5의 최소공배수는 30이므로 A는 30의 배수이다.
즉, A는 12, 30의 공배수이므로 가장 작은 자연수 A는 12, 30의 최소공배수인 $2^2\times3\times5=60$이다.

$$\begin{array}{r} 12=2^2\times3\quad \\ 30=2\ \times3\times5 \\ \hline (\text{최소공배수})=2^2\times3\times5 \end{array}$$

A가 60일 때,

$B=60\times\frac{1}{3}+60\times\frac{1}{4}=20+15=35$

$C=60\times\frac{1}{2}+60\times\frac{1}{3}+60\times\frac{1}{5}=30+20+12=62$

$\therefore A+B+C=60+35+62=157$

답 ②

14

주어진 세 수의 최대공약수, 최소공배수는 다음과 같다.

$$\begin{array}{r l}
 & N \\
 & 2^2\times3^3\times5 \\
 & 2\ \times3^2\times5\ \times7 \\
\hline
(\text{최대공약수})= & 2\ \times3^2\times5 \\
(\text{최소공배수})= & 2^2\times3^3\times5\times7
\end{array}$$

이때 N은 $2\times3^2\times5$를 인수로 갖고 $2^2\times3^3\times5\times7$의 약수가 되어야 한다.

즉, N은 2, 3^2, 5를 반드시 인수로 갖고 2^2 또는 3^3 또는 7을 인수로 가질 수 있다.

따라서 N의 값이 될 수 있는 자연수는

$2\times3^2\times5$, $2^2\times3^2\times5$, $2\times3^3\times5$, $2\times3^2\times5\times7$, $2^2\times3^3\times5$, $2^2\times3^2\times5\times7$, $2\times3^3\times5\times7$, $2^2\times3^3\times5\times7$

의 8개이다.

답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

자연수 N은 $2\times3^2\times5$를 인수로 가지면서 $2^2\times3^3\times5\times7$의 약수이어야 하므로

소인수 2에 대하여 2 또는 2^2

소인수 3에 대하여 3^2 또는 3^3

소인수 5에 대하여 5

소인수 7에 대하여 1 또는 7

을 각각 인수로 가져야 한다.

따라서 자연수 N으로 가능한 수의 개수는

$2\times2\times1\times2=8$

15

조건 (가)에서 세 자연수 a, b, c의 최대공약수가 5이므로 이 세 수는 모두 5의 배수이다.

즉, 자연수 c에 대하여 $\frac{c}{5}$의 값도 자연수이고

$c=5\times n$ (n은 자연수)이라 하면

조건 (나)에서 $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{5\times n}{5}=n$이므로

$a=4\times n$, $b=6\times n$

이때 조건 (가)에서 세 수 $4\times n$, $6\times n$, $5\times n$의 최대공약수가 5이므로 $n=5$이어야 한다.

$\therefore a=4\times5=2^2\times5$, $b=6\times5=2\times3\times5$, $c=5\times5=5^2$

따라서 세 자연수 a, b, c의 최소공배수는

$2^2\times3\times5^2=300$

답 300

16

조건 (가)에서 두 수 a와 $15=3\times5$의 최대공약수가 5이므로 a는 5의 배수이고 3을 소인수로 갖지 않는 수이다.

한편, 4로 나누면 2가 남고 5로 나누면 3이 남고 6으로 나누면 4가 남는 자연수를 x라 하면 $x+2$는 4, 5, 6의 공배수이다.

이때 $4=2^2$, 5, $6=2\times3$의 최소공배수는

$2^2\times3\times5=60$이므로

$x+2=60, 120, 180, \cdots$

$\therefore x=58, 118, 178, \cdots$

조건 (나)에서 이와 같은 x 중 가장 작은 수를 b라 하므로

$b=58$

또한, 조건 (다)에서 a가 b보다 크므로 구하는 자연수 a는 58보다 큰 수이다.

이때 58보다 큰 자연수 중 5의 배수는

60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, $\cdots$

이들 중 3을 소인수로 갖지 않는 수는

65, 70, 80, 85, 95, $\cdots$

따라서 구하는 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a의 값은 65이다.

답 65

17

60보다 작은 서로 다른 두 자연수 A, B의 최대공약수가 7이므로 두 자연수 A, B는 모두 60 미만의 7의 배수이다.

즉, A, B의 값으로 가능한 것은

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56 $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 이 두 자연수에 각각 7을 더하여 만든 두 자연수 $A+7$, $B+7$의 최대공약수가 21이므로 두 자연수 $A+7$, $B+7$은 21의 배수이다.

이때 ㉠의 각 수에 7을 더한 수는 순서대로

14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63

이므로 이 중 21의 배수가 되는 경우는

$14+7=21$, $35+7=42$, $56+7=63$일 때이다.

즉, 두 자연수 A, B의 값으로 가능한 것은

$14=2\times7$ 또는 $35=5\times7$ 또는 $56=2^3\times7$

(ⅰ) 두 자연수 A, B의 값이 14, 35일 때,

A, B의 최소공배수는 $2\times5\times7=70$

$A+7$, $B+7$의 값은 $21=3\times7$, $42=2\times3\times7$이므로

$A+7$, $B+7$의 최대공약수는 $3\times7=21$, 최소공배수는 $2\times3\times7=42$이다.

이때 $42=70-28$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) 두 자연수 A, B의 값이 14, 56일 때,

A, B의 최소공배수는 $2^3\times7=56$

$A+7$, $B+7$의 값은 $21=3\times7$, $63=3^2\times7$이므로

$A+7$, $B+7$의 최대공약수는 $3\times7=21$, 최소공배수는 $3^2\times7=63$이다.

이때 $63\neq56-28$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) 두 자연수 A, B의 값이 35, 56일 때,

A, B의 최소공배수는 $2^3\times5\times7=280$

$A+7$, $B+7$의 값은 $42=2\times3\times7$, $63=3^2\times7$이므로

$A+7$, $B+7$의 최대공약수는 $3\times7=21$, 최소공배수는 $2\times3^2\times7=126$이다.

이때 $126\neq280-28$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 두 자연수 A, B의 값은 14, 35이므로

$A+B=14+35=49$ **답** 49

18 해결단계

❶ 단계	$A\blacktriangle B=A\triangle B$이면 최소공배수와 최대공약수가 같음을 이용하여 ㄱ이 옳은지 알아본다.
❷ 단계	$A\triangle B=1$이면 A와 B는 서로소임을 이용하여 ㄴ이 옳은지 알아본다.
❸ 단계	$6\triangle n$은 10의 약수임을 이용하여 ㄷ이 옳은지 알아본다.

ㄱ. $A\blacktriangle B=A\triangle B=k$ (k는 자연수)라 하면 k는 A, B의 배수이면서 약수이므로 $k=A=B$

ㄴ. $A\triangle B=1$이면 A와 B는 서로소이므로

$A\blacktriangle B=A\times B$

ㄷ. $(6\triangle n)\blacktriangle10=10$에서 $6\triangle n$은 10의 약수이므로

$6\triangle n=1$, 2, 5, 10

(ⅰ) $6\triangle n=1$일 때,

6과 n은 서로소이므로 $n=5$, 7

(ⅱ) $6\triangle n=2$일 때,

6과 n의 최대공약수가 2이므로 n은 2의 배수이면서 3의 배수는 아니다.

$\therefore n=2$, 4, 8

(ⅲ) $6\triangle n=5$일 때,

6은 5의 배수가 아니므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(ⅳ) $6\triangle n=10$일 때,

6은 10의 배수가 아니므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 n의 값은 2, 4, 5, 7, 8의 5개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

19

두 자연수 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=a\times G$, $B=b\times G$ (단, a, b는 서로소, $a<b$)

라 할 수 있다. 두 수의 최소공배수가 240이므로

$a\times b\times G=240$ ……㉠

이때 $A\times B=2880$이므로

$$\begin{aligned}A\times B&=(a\times G)\times(b\times G)\\&=(a\times b\times G)\times G\\&=240\times G\ (\because ㉠)\\&=2880\end{aligned}$$

따라서 $G=12$이므로 ㉠에서 $a\times b=20$

이를 만족시키면서 a, b는 서로소이고 $a<b$인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a=1$, $b=20$일 때,

$A=12$, $B=240$이므로 A, B가 두 자리 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=4$, $b=5$일 때,

$A=48$, $B=60$이므로 A, B는 두 자리 자연수이고, A, B의 최소공배수는 $2^4\times3\times5=240$이다.

$$\begin{aligned}48&=2^4\times3\\60&=2^2\times3\times5\\(\text{최소공배수})&=2^4\times3\times5\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A=48$, $B=60$이므로

$B-A=60-48=12$ **답** ①

20

조건 ㈏에서 b, c의 최대공약수가 15이므로

$b=15\times x$, $c=15\times y$ (단, x, y는 서로소인 자연수)

라 할 수 있다.

이때 b, c의 최소공배수가 30이므로

$15\times x\times y=30$ $\therefore x\times y=2$

조건 ㈐에서 $b>c$이므로 $x=2$, $y=1$

$\therefore b=15\times2=30$, $c=15\times1=15$

조건 ㈎에서 a, $b=30$의 최대공약수가 6이므로

$a=6\times p$, $b=6\times5$ (단, p, 5는 서로소인 자연수)

라 할 수 있다.

이때 a, b의 최소공배수가 60이므로

$6\times p\times5=60$ $\therefore p=2$

따라서 $a=12$, $b=30$, $c=15$이므로

$a+b+c=12+30+15=57$ **답** 57

21

두 수 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=G\times a$, $B=G\times b$ (단, a, b는 서로소인 자연수, $a<b$)

라 할 수 있다.

두 수의 합이 80이므로

$A+B=G\times a+G\times b=80$ ……㉠

두 수의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 수의 곱과 같으므로

$A\times B=G\times a\times G\times b=1500$ ……㉡

즉, G는 80, 1500의 공약수이다.

이때 80, 1500의 최대공약수는 $2^2\times5=20$

$$\begin{array}{r} 80=2^4\times5 \\ 1500=2^2\times3\times5^3 \\ \hline (\text{최대공약수})=2^2\times5 \end{array}$$

따라서 G는 20의 약수 중에서 두 자리의 자연수이므로

$G=10$ 또는 $G=20$

(i) $G=10$일 때,

㉠에서 $10\times a+10\times b=80$ $\quad\therefore a+b=8$

㉡에서 $10\times a\times10\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=15$

$\therefore a=3,\ b=5$

(ii) $G=20$일 때,

㉠에서 $20\times a+20\times b=80$ $\quad\therefore a+b=4$

㉡에서 $20\times a\times20\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=\frac{15}{4}$

곱이 $\frac{15}{4}$인 두 자연수 a, b의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $G=10$, $a=3$, $b=5$이므로

$A=G\times a=10\times3=30$, $B=G\times b=10\times5=50$

$\therefore B-A=50-30=20$

답 20

BLACKLABEL 특강 참고

G가 20의 약수 중에서 한 자리 자연수라면

(i) $G=1$일 때,

㉠에서 $1\times a+1\times b=80$ $\quad\therefore a+b=80$

㉡에서 $1\times a\times1\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=1500$

$\therefore a=30,\ b=50$

그런데 30과 50은 서로소가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $G=2$일 때,

㉠에서 $2\times a+2\times b=80$ $\quad\therefore a+b=40$

㉡에서 $2\times a\times2\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=375$

$\therefore a=15,\ b=25$

그런데 15와 25는 서로소가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $G=4$일 때,

㉠에서 $4\times a+4\times b=80$ $\quad\therefore a+b=20$

㉡에서 $4\times a\times4\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=\frac{375}{4}$

곱이 $\frac{375}{4}$인 두 자연수 a, b의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $G=5$일 때,

㉠에서 $5\times a+5\times b=80$ $\quad\therefore a+b=16$

㉡에서 $5\times a\times5\times b=1500$ $\quad\therefore a\times b=60$

$\therefore a=6,\ b=10$

그런데 6과 10은 서로소가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 G의 값은 없다.

22

두 분수 $\frac{90}{n}$, $\frac{108}{n}$이 자연수가 되려면 n은 90, 108의 공약수이어야 한다. 이때 $90=2\times3^2\times5$, $108=2^2\times3^3$이므로 n은 이 두 수의 최대공약수인 2×3^2의 약수이어야 한다.

또한, 분수 $\frac{n}{3}$이 자연수가 되려면 n은 3의 배수이어야 한다.

따라서 자연수 n은 3, 2×3, 3^2, 2×3^2의 4개이다. **답** 4

23

세 수 $\frac{21}{44}$, $\frac{28}{33}$, $1\frac{13}{22}=\frac{35}{22}$에 곱할 분수 $\frac{b}{a}$가 가장 작으려면 a는 분자 21, 28, 35의 최대공약수, b는 분모 44, 33, 22의 최소공배수이어야 한다. (가)

세 수 $21=3\times7$, $28=2^2\times7$, $35=5\times7$의 최대공약수는 7이므로

$a=7$ (나)

세 수 $44=2^2\times11$, $33=3\times11$, $22=2\times11$의 최소공배수는 $2^2\times3\times11=132$이므로

$b=132$ (다)

$\therefore a+b=7+132=139$ (라)

답 139

단계	채점 기준	배점
(가)	a, b가 각각 어떤 수인지 알아낸 경우	50%
(나)	a의 값을 구한 경우	20%
(다)	b의 값을 구한 경우	20%
(라)	$a+b$의 값을 구한 경우	10%

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

두 분수 $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$에 분수를 곱하여 자연수로 만들기

$\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ 중에서 어느 것을 택하여 곱해도 자연수가 되도록 하는 분수는 $\frac{(B,\ D\text{의 공배수})}{(A,\ C\text{의 공약수})}$이다.

이때 이를 만족시키는 가장 작은 분수는 $\frac{(B,\ D\text{의 최소공배수})}{(A,\ C\text{의 최대공약수})}$이다.

24

두 분수 $\frac{84}{n}$, $\frac{114}{n}$가 모두 자연수이므로 n은 84, 114의 공약수이다. 또한, 분수 $\frac{m}{n}$을 약분하여 가장 작은 자연수가 되려면 n의 값은 가장 커야 하므로 84, 114의 최대공약수이어야 한다.

$$\begin{array}{r} 84=2^2\times3\times7 \\ 114=2\times3\times19 \\ \hline (\text{최대공약수})=2\times3 \end{array}$$

$\therefore n=2\times3=6$

한편, $\frac{114}{n}=\frac{114}{6}=19$이므로 $\frac{114}{n}<\frac{m}{n}$에서 $19<\frac{m}{6}$

즉, $\frac{m}{6}$이 $19<\frac{m}{6}$을 만족시키는 가장 작은 자연수이므로

$\frac{m}{6}=20$

$\therefore m=120$

답 ②

BLACKLABEL 특강 **풀이 첨삭**

$n=1, 2, 3, 6$일 때, 두 분수 $\frac{84}{n}$, $\frac{114}{n}$가 모두 자연수가 된다.
각각의 경우에 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $n=1$인 경우

$\frac{114}{1}<\frac{m}{1}$에서 $114<m$

위의 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 $\frac{m}{1}$은 115이다.

(ⅱ) $n=2$인 경우

$\frac{114}{2}<\frac{m}{2}$에서 $57<\frac{m}{2}$

위의 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 $\frac{m}{2}$은 58이다.

(ⅲ) $n=3$인 경우

$\frac{114}{3}<\frac{m}{3}$에서 $38<\frac{m}{3}$

위의 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 $\frac{m}{3}$은 39이다.

(ⅳ) $n=6$인 경우

$\frac{114}{6}<\frac{m}{6}$에서 $19<\frac{m}{6}$

위의 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 $\frac{m}{6}$은 20이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $\frac{114}{n}<\frac{m}{n}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 $\frac{m}{n}$은 20이다.
따라서 그때의 m의 값은
$m=20\times6=120$

25

초콜릿은 4개, 과자는 1개가 각각 부족하고, 사탕은 6개가 남았으므로 초콜릿, 과자, 사탕이 각각
$40+4=44$(개), $32+1=33$(개), $72-6=66$(개)
가 있으면 학생들에게 똑같이 나누어 줄 수 있다.
따라서 나누어 주려고 했던 학생 수는 44, 33, 66의 최대공약수이므로 11이다.

$$\begin{array}{r}
44=2^2\times11\\
33=3\times11\\
66=2\times3\times11\\
\hline
(\text{최대공약수})=\times11
\end{array}$$

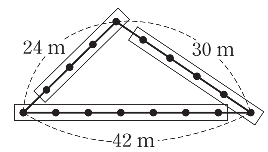
답 ③

26

기둥 사이의 간격이 일정하려면 기둥 사이의 간격은 24, 30, 42의 공약수이어야 한다. 또한, 기둥의 개수가 최소가 되려면 기둥 사이의 간격은 24, 30, 42의 최대공약수이어야 하므로
$2\times3=6$(m)

$$\begin{array}{r}
24=2^3\times3\\
30=2\times3\times5\\
42=2\times3\times7\\
\hline
(\text{최대공약수})=2\times3
\end{array}$$

이때 $24\div6=4$, $30\div6=5$,
$42\div6=7$이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 필요한 기둥의 개수는
$4+5+7=16$(개)



답 16개

27

정육면체 모양의 떡의 크기를 가능한 한 크게 하려면 떡의 한 모서리의 길이는 48, 36, 24의 최대공약수이어야 하므로
$2^2\times3=12$(cm)

$$\begin{array}{r}
48=2^4\times3\\
36=2^2\times3^2\\
24=2^3\times3\\
\hline
(\text{최대공약수})=2^2\times3
\end{array}$$

이때 자른 정육면체 모양의 떡의 개수는
$(48\div12)\times(36\div12)\times(24\div12)=4\times3\times2=24$
따라서 총 판매 금액은
$24\times3000=72000$(원)

답 ⑤

28

마지막 팀에서 남학생이 1명 많고 여학생이 1명 적으므로 남학생이 $33-1=32$(명), 여학생이 $23+1=24$(명)이면 모든 팀의 남학생 수와 여학생 수가 각각 같게 된다.
즉, 남학생을 32명, 여학생을 24명으로 보고 배정한 것과 같다.

① 두 수 $32=2^5$, $24=2^3\times3$의 최대공약수가 $2^3=8$이므로 최대 8개 팀까지 만들 수 있다.

② 팀의 수를 4개로 하면 마지막 팀을 제외한 각 팀에 배정되는 남학생은 $32\div4=8$(명), 여학생은 $24\div4=6$(명)이다.
이때 $8+6=14$이므로 팀의 수를 4개로 하면 각 팀에 14명씩 배정된다.

③, ④, ⑤ ①에 의하여 8개의 팀으로 나눌 때, 팀의 수가 최대이다. 즉, 팀의 수를 최대로 하면 마지막 팀을 제외한 각 팀에 배정되는 남학생은 $32\div8=4$(명), 여학생은 $24\div8=3$(명)이다.
이때 $4+3=7$이므로 팀의 수를 최대로 하면 각 팀에 7명씩 배정된다.
한편, 마지막 팀에 배정되는 여학생은 다른 팀에 비하여 1명 적으므로 팀의 수를 최대로 할 때, 마지막 팀에 배정되는 여학생은 2명이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

29

각 선물 상자마다 같은 개수의 초코 쿠키, 같은 개수의 버터 쿠키를 담아 포장해야 하므로 선물 상자의 개수는 288, 192의 공약수이다.

이때 $288=2^5\times3^2$, $192=2^6\times3$이므로 이 두 수의 최대공약수는
$2^5\times3$
즉, 선물 상자의 개수는 $2^5\times3$의 약수이다.
한편, 한 상자에 쿠키를 8개 이상 담으려 하므로 선물 상자의 최대 개수는 다음과 같이 $2^5\times3$의 약수 중 가장 큰 것부터 순서대로 생각할 수 있다.
(i) 선물 상자를 $(2^5\times3)$개 만들 때,
한 상자에 담는 초코 쿠키는 3개, 버터 쿠키는 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 선물 상자를 $(2^4\times3)$개 만들 때,
한 상자에 담는 초코 쿠키는 $2\times3=6$(개), 버터 쿠키는 $2^2=4$(개)이므로 한 상자에 쿠키를 8개 이상 담을 수 있다.
(iii) 선물 상자를 2^5개 만들 때,
한 상자에 담는 초코 쿠키는 $3^2=9$(개), 버터 쿠키는 $2\times3=6$(개)이므로 한 상자에 쿠키를 8개 이상 담을 수 있다.
(iv) 선물 상자를 $(2^3\times3)$개 이하로 만들 때,
한 상자에 쿠키를 8개 이상 담을 수 있다.
(i)~(iv)에서 조건을 만족시키면서 선물 상자의 개수가 최대가 되는 경우는 (ii)이고, 구하는 최대 개수는
$2^4\times3=48$ **답** 48

30

사탕 바구니에 들어 있는 사탕의 최소 개수를 x라 하면 사탕 바구니에 들어 있는 사탕을 3개씩 여러 번 또는 4개씩 여러 번 또는 5개씩 여러 번 꺼내면 마지막에 항상 1개가 남으므로 $x-1$은 3, 4, 5의 공배수이다.
3, 4, 5의 최소공배수는 $3\times4\times5=60$이므로
$x-1=60, 120, 180, 240, 300, \cdots$
$\therefore x=61, 121, 181, 241, 301, \cdots$ ……㉠
이때 7개씩 사탕을 꺼내면 남는 사탕이 없으므로 x는 7의 배수이어야 한다.
따라서 ㉠에서 가장 작은 7의 배수는 301이므로 처음 사탕 바구니에는 최소 301개의 사탕이 들어 있었다.
답 301개

31

교차로 A에서 직진 신호가 켜진 후 처음으로 직진 신호가 다시 켜질 때까지 걸리는 시간은
$16+1+20+1+15+1=54$(초)
교차로 B에서 직진 신호가 켜진 후 처음으로 직진 신호가 다시 켜질 때까지 걸리는 시간은
$15+1+41+1+22+1=81$(초)
교차로 A, B에서 직진 신호가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 동시에 직진 신호가 켜질 때까지 걸리는 시간은 54, 81의 최소공배수이다.
이때 $54=2\times3^3$, $81=3^4$이므로 두 교차로 A, B에서 직진 신호가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 직진 신호가 동시에 켜지게 되는 것은 54, 81의 최소공배수인 $2\times3^4=162$(초) 후이다.
답 162초

32

A가 2회전하는 동안 B는 7회전하고, C가 3회전하는 동안 B는 5회전한다.
이때 B의 회전 횟수 7과 5의 최소공배수는
$7\times5=35$
즉, B가 35회전하는 동안 A는 10회전, C는 21회전한다.
따라서 A가 10회전하는 동안, C는 21회전하므로 A가 20회전하는 동안 C의 회전 수는
$21\times2=42$(회) **답** 42회

33

묘목 간격 $6=2\times3$, $14=2\times7$의 최소공배수는
$2\times3\times7=42$
즉, 공원의 둘레의 길이는 42의 배수이다.
(i) 공원의 둘레의 길이가 42 m인 경우
묘목을 6 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$42\div6=7$(그루)
묘목을 14 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$42\div14=3$(그루)
따라서 두 경우에 심는 묘목의 수의 차는
$7-3=4$(그루)
(ii) 공원의 둘레의 길이가 $42\times2=84$(m)인 경우
묘목을 6 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$84\div6=14$(그루)
묘목을 14 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$84\div14=6$(그루)
따라서 두 경우에 심는 묘목의 수의 차는
$14-6=8$(그루)
(iii) 공원의 둘레의 길이가 $42\times3=126$(m)인 경우
묘목을 6 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$126\div6=21$(그루)
묘목을 14 m 간격으로 심을 때, 필요한 묘목의 수는
$126\div14=9$(그루)
따라서 두 경우에 심는 묘목의 수의 차는
$21-9=12$(그루)
⋮
(i), (ii), (iii), …에서 공원의 둘레의 길이가 42 m씩 늘어날 때마다 심는 묘목의 수의 차가 4그루씩 커진다.
따라서 두 묘목의 수의 차가 20그루이려면 공원의 둘레의 길이는
$42\times5=210$(m) **답** ②

34

윤영이는 $2+1=3$(일) 간격으로 반복하고, 희정이는 $3+2=5$(일) 간격으로 반복하므로 윤영이와 희정이는 3과 5의 최소공배수 간격으로 만남이 반복된다. 즉, 15일 간격으로 만남이 반복되므로 15일 동안 학원에 간 날을 ○표로 나타내면 다음 표와 같다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
윤영	○	○		○	○		○	○		○	○		○	○	
희정	○	○	○			○	○	○			○	○	○		

따라서 15일 동안 두 사람이 같이 학원에 가는 날은 6일이다.
이때 $100=15\times6+10$이므로 100일 동안 15일이 6번 반복되고 10일이 남는다.
또한, 남은 10일 동안 같이 학원에 가는 날이 4일이므로 5월 1일부터 100일 동안 두 사람이 같이 학원에 가는 날은
$6\times6+4=40$(일) **답** ④

35

출발선에서 동시에 출발한 세 장난감 자동차 A, B, C가 다시 처음으로 동시에 출발선을 통과하는 데까지 걸리는 시간은 각 자동차가 트랙을 한 바퀴 도는 시간의 최소공배수이다.
세 장난감 자동차가 출발선에서 동시에 출발한 후, 20분, 즉 1200초 동안 동시에 통과한 횟수는 25회이므로 출발선에서 동시에 출발한 세 장난감 자동차가 다시 처음으로 동시에 출발선을 통과하는 데까지 걸리는 시간은 $1200\div25=48$(초)
B가 트랙을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간을 x초라 하면 A, B, C가 각각 트랙을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간 $8=2^3$, x, $16=2^4$의 최소공배수가 $48=2^4\times3$이므로 x로 가능한 값은
3, $2\times3=6$, $2^2\times3=12$, $2^3\times3=24$, $2^4\times3=48$
중 하나이다.
그런데 B는 A보다 느리고 C보다 빠르므로 x의 값은 8보다 크고 16보다 작아야 한다.
$\therefore x=12$
따라서 B가 트랙을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간이 12초이므로 10바퀴 도는 데 걸리는 시간은
$12\times10=120$(초) **답** ③

36

저금통 A에 들어 있는 100원짜리 동전과 500원짜리 동전의 개수가 같으므로 저금통 A에 들어 있는 동전의 금액의 합은
$100+500=600$(원)의 배수이다.
저금통 B에 들어 있는 100원짜리 동전과 500원짜리 동전의 금액이 같으므로 저금통 B에 들어 있는 100원짜리 동전의 개수는 500원짜리 동전의 개수의 5배이다. 즉, 저금통 B에 들어 있는 동전의 금액의 합은
$100\times5+500=1000$(원)의 배수이다.
따라서 각 저금통에 들어 있는 동전의 금액의 합은 600원, 1000원의 공배수이다.
이때 $600=2^3\times3\times5^2$, $1000=2^3\times5^3$의 최소공배수는
$2^3\times3\times5^3=3000$
이므로 구하는 금액의 합은 3000원의 배수이다.
그런데 그 합이 22000원보다 많고 26000원보다 적으므로 구하는 합은 24000원이다. **답** 24000원

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.028~029

01 180 **02** (1) 16그루 (2) 16그루 **03** 50회 **04** 430
05 756 **06** 114분 **07** 32 **08** 32

01 해결단계

❶ 단계	두 자연수 A와 B가 어떤 수의 배수인지 확인한다.
❷ 단계	미지수를 사용하여 A, B를 나타내고 최대공약수와 최소공배수의 관계를 이용하여 식을 세운다.
❸ 단계	A와 B의 값을 구하고 그 합을 구한다.

조건 ㈎에서 $14\times A=16\times B$이므로
$2\times7\times A=2\times8\times B$
이때 7과 8은 서로소이므로 A는 8의 배수, B는 7의 배수이다.
$A=8\times k$, $B=7\times k$ (k는 자연수)라 하면
조건 ㈏에서 A, B의 최소공배수가 672, 최대공약수가 k이므로
$(8\times k)\times(7\times k)=672\times k$
$56\times k=672$
$\therefore k=12$
따라서 $A=8\times12=96$, $B=7\times12=84$이므로
$A+B=96+84=180$ **답** 180

02 해결단계

(1)	❶ 단계	조건을 만족시키는 나무 사이의 간격을 구한다.
	❷ 단계	작년에 심은 나무의 수를 구한다.
(2)	❸ 단계	조건을 만족시키는 나무 사이의 간격을 구한다.
	❹ 단계	올해 심어야 할 나무의 수를 구하여 새로 더 구입해야 할 나무의 수를 구한다.

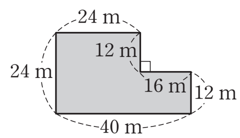
(1) 작년에 심은 나무 사이의 간격은 40, 24의 공약수이어야 하고, 나무의 수가 가능한 한 적으려면 나무 사이의 간격은 최대가 되어야 한다. 따라서 나무 사이의 간격은 $40=2^3\times5$, $24=2^3\times3$의 최대공약수이므로

$2^3=8(\text{m})$

이때 $40\div8=5$, $24\div8=3$이므로 작년에 심은 나무의 수는

$(5+3)\times2=16$(그루)

(2) 올해 텃밭은 오른쪽 그림과 같다.



텃밭의 둘레에 일정한 간격으로 가능한 한 나무의 수를 적게 하여 나무를 심으려면 나무 사이의 간격은

$12=2^2\times3$, $16=2^4$, $24=2^3\times3$, $40=2^3\times5$의 최대공약수이어야 한다.

즉, 나무 사이의 간격은

$2^2=4(\text{m})$

이때 $12\div4=3$, $16\div4=4$, $24\div4=6$, $40\div4=10$이므로 필요한 나무의 수는

$6+6+10+3+4+3=32$(그루)

(1)에서 수진이네 가족이 작년에 심은 나무의 수가 16그루이었으므로 올해 새로 더 구입해야 하는 나무의 수는

$32-16=16$(그루) **답** (1) 16그루 (2) 16그루

03 해결단계

❶ 단계	두 톱니바퀴의 1과 1이 처음으로 다시 맞물릴 때까지 같은 번호끼리 맞물리는 톱니의 개수를 구한다.
❷ 단계	두 톱니바퀴의 1과 1이 처음으로 다시 맞물릴 때까지 걸리는 시간을 구한다.
❸ 단계	3분 50초 동안 두 톱니바퀴의 같은 번호끼리 맞물리는 톱니의 개수를 구한다.

두 톱니바퀴가 돌아가기 시작하여 1과 1이 맞물릴 때까지 1초, 2와 2가 맞물릴 때까지 2초, 3과 3이 맞물릴 때까지 3초, …가 걸리므로 두 톱니바퀴의 1과 1이 맞물린 후 다시 처음으로 두 톱니바퀴의 1과 1이 맞물리기 직전까지 걸리는 시간은 돌아간 톱니의 수와 같다.

이때 돌아간 톱니의 수는 $15=3\times5$, $25=5^2$의 최소공배수이므로

$3\times5^2=75$(개)

또한, 톱니바퀴 A의 톱니 수는 15개, 톱니바퀴 B의 톱니 수는 25개이므로 이 시간 동안 두 톱니바퀴의 같은 번호끼리 맞물리는 톱니의 개수는 15개이다.

즉, 두 톱니바퀴의 톱니가 75개 돌아가는 동안, 즉 75초 동안 같은 번호의 톱니는 총 15개 맞물린다.

한편, 3분 50초는 230초이고

$230=75\times3+5$

이므로 3분 50초 동안 두 톱니바퀴의 같은 번호의 톱니가 15개씩 3번 맞물린 다음, 1과 1, 2와 2, 3과 3, 4와 4, 5와 5까지 맞물린다.

따라서 두 톱니바퀴의 같은 번호끼리 맞물리는 횟수는

$15\times3+5=50$(회) **답** 50회

04 해결단계

❶ 단계	A의 최댓값을 구한다.
❷ 단계	B의 최댓값을 구한다.
❸ 단계	A의 최댓값과 B의 최댓값의 합을 구한다.

연속하는 두 자연수는 항상 서로소이므로 21 이하의 두 자연수의 최소공배수는 두 수가 20, 21일 때, 가장 크다.

즉, A의 최댓값은 $20\times21=420$

또한, 21 이하의 두 자연수 중에서 최대공약수가 가장 큰 경우는 두 수가 10, 20일 때, B의 최댓값은 10이다.

따라서 A의 최댓값과 B의 최댓값의 합은

$420+10=430$ **답** 430

BLACKLABEL 특강 참고

연속하는 두 자연수의 최대공약수와 최소공배수

연속하는 두 자연수의 공통인 약수는 1뿐이다.
즉, 연속하는 두 자연수의 최대공약수는 1이므로 연속하는 두 자연수의 최소공배수는 두 수의 곱이다.

05 해결단계

❶ 단계	n이 될 수 있는 형태를 찾는다.
❷ 단계	$\frac{n}{21}$이 될 수 있는 형태를 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 n의 값을 구한다.

$90=2\times3^2\times5=18\times5$이므로 조건 (가)에서 n은 18의 배수인 동시에 7의 배수이고, 5의 배수는 아니다.

즉, $n=18\times7\times\square=2\times3^2\times7\times\square$ 꼴이다.

조건 (나)에서 $\frac{n}{21}=\frac{2\times3^2\times7\times\square}{21}=2\times3\times\square$이 자연수의 제곱수이어야 하므로 $\square=2\times3\times$(제곱수) 꼴이어야 한다.

$\therefore n=2\times3^2\times7\times2\times3\times$(제곱수)

$=756\times$(제곱수)

이때 n은 세 자리 정수이므로 (제곱수)$=1^2$이 되어야 한다.

$\therefore n=756\times1^2=756$ **답** 756

06 해결단계

❶ 단계	동시에 출발한 두 케이블카가 다시 처음으로 동시에 출발할 때까지 걸리는 시간을 구한다.
❷ 단계	동시에 출발한 두 케이블카가 다시 동시에 출발할 때까지 왕복한 횟수를 구한다.
❸ 단계	두 케이블카가 동시에 출발하여 250명의 학생들이 탑승장에서 전망대까지 올라가는 데 걸리는 최소 시간을 구한다.

$250=15\times16+10$이므로 케이블카 한 대에 15명씩 16번, 나머지 10명을 1번 태워야 한다.

두 케이블카 A, B가 왕복하는 데 걸리는 시간은 각각 12분, 16분이고, 두 케이블카는 12, 16의 공배수만큼의 시간이 지날 때마다 동시에 탑승장에 도착한다.

이때 $12=2^2\times3$, $16=2^4$의 최소공배수는

$2^4\times3=48$

이고, $48\div12=4$, $48\div16=3$이므로 48분 동안 두 케이블카는 합해서 7번을 왕복하고 동시에 탑승장에 도착한다.

따라서 $48\times2=96$(분) 동안 두 케이블카는 합해서

$7\times2=14$(번)을 왕복하고 동시에 탑승장에 도착하면서 총

$14\times15=210$(명)을 전망대까지 옮긴다.

남은 40명은 다음 표와 같이 태워야 한다.

케이블카		탑승장	전망대	탑승장	전망대
A	시간	0분	6분	12분	18분
	학생 수	15명		10명	
B	시간	0분	8분	16분	24분
	학생 수	15명			

그러므로 구하는 최소 시간은

$96+18=114$(분)

답 114분

07 해결단계

❶ 단계	두 수끼리의 차가 A의 배수가 됨을 확인한다.
❷ 단계	두 수끼리의 차를 각각 구한다.
❸ 단계	두 수끼리의 차의 최대공약수를 구하여 A의 값 중에서 가장 큰 수를 구한다.

세 수 37, 101, 197을 A로 나눈 나머지를 r이라 하면

$$\begin{cases}37=A\times a+r\\101=A\times b+r\quad(\text{단, } a,\ b,\ c,\ r\text{은 자연수, } 0\le r<A)\\197=A\times c+r\end{cases}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 이때

$101-37=A\times b-A\times a=64$,

$197-37=A\times c-A\times a=160$,

$197-101=A\times c-A\times b=96$

이므로 64, 160, 96은 A의 배수이어야 한다.

즉, A는 64, 160, 96의 공약수이고 A의 값 중 가장 큰 수는 64, 96, 160의 최대공약수인 $2^5=32$이다.

$$\begin{array}{rl}64=2^6 & \\ 96=2^5\times3 & \\ 160=2^5 & \times5\\ \hline (\text{최대공약수})=2^5 & \end{array}$$

답 32

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

배수의 사칙연산

자연수 A에 대하여 서로 다른 A의 배수의 합, 차, 곱 역시 A의 배수이다.
(단, 나눗셈에서는 성립하지 않는다.)

08 해결단계

❶ 단계	직사각형 모양의 벽 ABCD의 가로, 세로에 들어가는 타일의 개수를 각각 구한다.
❷ 단계	직사각형 모양의 벽 ABCD와 가로, 세로의 길이의 비율이 같고 가장 적은 타일로 겹치지 않게 빈틈없이 붙일 수 있는 직사각형을 구한다.
❸ 단계	직사각형 모양의 벽 ABCD에서 대각선 BD가 지나는 타일의 개수를 구한다.

직사각형 모양의 벽 ABCD의 가로에 들어가는 타일의 개수는

$120\div5=24$

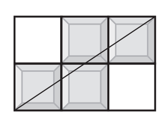
세로에 들어가는 타일의 개수는

$80\div5=16$

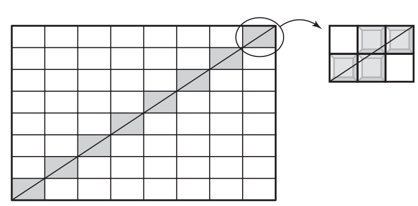
이때 $24=2^3\times3$, $16=2^4$의 최대공약수는 $2^3=8$이므로 직사각형 모양의 벽 ABCD와 가로, 세로의 길이의 비율이 같은 직사각형 중 가장 적은 타일로 겹치지 않게 빈틈없이 붙일 수 있는 직사각형은 가로에 타일이 $24\div8=3$(개),

세로에 타일이 $16\div8=2$(개) 있는 직사각형이다.

가로에 타일이 3개, 세로에 타일이 2개가 들어간 직사각형에서 대각선이 지나는 타일은 오른쪽 그림과 같이 4개이다.



이와 같은 직사각형 8개가 처음 직사각형 모양의 벽 ABCD의 대각선 BD와 만난다.



따라서 구하는 타일의 개수는

$4\times8=32$

답 32

대단원평가 pp.030~031

01 ⑤	02 190	03 105	04 ⑤
05 ①	06 6	07 ③	08 6400원
09 ⑤	10 220	11 오전 8시 12분	
12 (1) 1, 4, 9 (2) 10명			

01

3의 거듭제곱은 순서대로 3, 9, 27, 81, 243, …이므로 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $30=4\times7+2$이므로 3^{30}의 일의 자리의 숫자는 3^2의 일의 자리의 숫자와 같은 9이다.
7의 거듭제곱은 순서대로 7, 49, 343, 2401, …이므로 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $20=4\times5$이므로 7^{20}의 일의 자리의 숫자는 7^4의 일의 자리의 숫자와 같은 1이다.
따라서 $3^{30}\times7^{20}$의 일의 자리의 숫자는
$9\times1=9$ **답** ⑤

02

$45\times a=3^2\times5\times a$가 제곱수가 되려면 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 하므로 $a=5\times m^2$ (m은 자연수) 꼴이다.
$\therefore 45\times a=3^2\times5\times(5\times m^2)$
$=3^2\times5^2\times m^2$
$72\times b=2^3\times3^2\times b$가 제곱수가 되려면 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 하므로 $b=2\times n^2$ (n은 자연수) 꼴이다.
$\therefore 72\times b=2^3\times3^2\times(2\times n^2)$
$=2^4\times3^2\times n^2$
이때 $45\times a=72\times b$이므로
$3^2\times5^2\times m^2=2^4\times3^2\times n^2$
$\therefore 5^2\times m^2=2^4\times n^2$
이를 만족시키는 가장 작은 자연수 m, n의 값은
$m=2^2=4$, $n=5$
$\therefore a=5\times4^2=80$, $b=2\times5^2=50$
이때 $c^2=45\times a=3^2\times4^2\times5^2=60^2$이므로
$c=60$
$\therefore a+b+c=80+50+60=190$ **답** 190

03

합이 15가 되는 서로 다른 세 소수는 3, 5, 7의 한 가지뿐이므로 $\langle a\rangle=15$를 만족시키는 자연수 a의 소인수는 3, 5, 7이다.
따라서 이를 만족시키는 가장 작은 자연수 a의 값은
$3\times5\times7=105$ **답** 105

04

조건 (나)에서 자연수 n의 모든 약수의 합이 $n+1$이므로 n의 모든 약수는 1과 n뿐이다. 즉, 구하는 자연수 n은 소수이다.
이때 조건 (가)에서 n은 $20<n<40$이므로 이를 만족시키는 소수 n은 23, 29, 31, 37이다.
따라서 구하는 합은
$23+29+31+37=120$ **답** ⑤

05

조건 (가)에 의하여 1부터 a까지의 자연수 중
(2의 배수의 개수)+(3의 배수의 개수)−(6의 배수의 개수)
=30
이 성립해야 한다.
(i) $a=50$일 때,
2의 배수는 25개, 3의 배수는 16개, 6의 배수는 8개이므로
2 또는 3의 배수의 개수는
$25+16-8=33$
(ii) $a=49$, 48일 때,
2의 배수는 24개, 3의 배수는 16개, 6의 배수는 8개이므로
2 또는 3의 배수의 개수는
$24+16-8=32$
(iii) $a=47$, 46일 때,
2의 배수는 23개, 3의 배수는 15개, 6의 배수는 7개이므로
2 또는 3의 배수의 개수는
$23+15-7=31$
(iv) $a=45$일 때,
2의 배수는 22개, 3의 배수는 15개, 6의 배수는 7개이므로
2 또는 3의 배수의 개수는
$22+15-7=30$
(v) $a=44$일 때,
2의 배수는 22개, 3의 배수는 14개, 6의 배수는 7개이므로
2 또는 3의 배수의 개수는
$22+14-7=29$
(vi) $a\le43$일 때,
a의 값이 작아질수록 2의 배수의 개수가 3 또는 6의 배수의 개수보다 빠르게 작아지므로 2 또는 3의 배수는 28개 이하이다.
(i)~(vi)에서 조건 (가)를 만족시키는 자연수 a의 값은 45이다.

한편, 조건 (나)에 의하여 1부터 b까지의 자연수 중

(3의 배수의 개수)+(5의 배수의 개수)−(15의 배수의 개수)

$=20$

이 성립해야 한다.

(vii) $b=50$일 때,

3의 배수는 16개, 5의 배수는 10개, 15의 배수는 3개이므로

3 또는 5의 배수의 개수는

$16+10-3=23$

(viii) $b=49$, 48일 때,

3의 배수는 16개, 5의 배수는 9개, 15의 배수는 3개이므로

3 또는 5의 배수의 개수는

$16+9-3=22$

(ix) $b=47$, 46, 45일 때,

3의 배수는 15개, 5의 배수는 9개, 15의 배수는 3개이므로

3 또는 5의 배수의 개수는

$15+9-3=21$

(x) $b=44$, 43, 42일 때,

3의 배수는 14개, 5의 배수는 8개, 15의 배수는 2개이므로

3 또는 5의 배수의 개수는

$14+8-2=20$

(xi) $b=41$, 40일 때,

3의 배수는 13개, 5의 배수는 8개, 15의 배수는 2개이므로

3 또는 5의 배수의 개수는

$13+8-2=19$

(xii) $b\le 39$일 때,

b의 값이 작아질수록 3의 배수의 개수가 5 또는 15의 배수의 개수보다 빠르게 작아지므로 3 또는 5의 배수는 18개 이하이다.

(vii)~(xii)에서 조건 (나)를 만족시키는 자연수 b의 값은 44, 43, 42이다.

따라서 $a+b$의 값이 가장 작은 경우는 $a=45$, $b=42$일 때이므로 구하는 가장 작은 값은

$45+42=87$

답 ①

06

$120=2^3\times3\times5$이므로

$A(120)=(3+1)\times(1+1)\times(1+1)$

$=4\times2\times2=16$

$A(120)\times A(x)=64$이므로 $16\times A(x)=64$

$\therefore A(x)=4$

이때 자연수 x의 약수가 4개인 경우는 다음과 같다.

(i) $x=a^3$ (a는 소수) 꼴일 때,

$x=2^3$, 3^3, 5^3, $\cdots$

(ii) $x=a\times b$ (a, b는 서로 다른 소수) 꼴일 때,

$x=2\times3$, 2×5, 2×7, $\cdots$

(i), (ii)에서 가장 작은 자연수 x의 값은

$x=2\times3=6$

답 6

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

자연수 x가

(i) $x=a^3$ (a는 소수) 꼴이면 약수의 개수는

$3+1=4$

(ii) $x=a\times b$ (a, b는 서로 다른 소수) 꼴이면 약수의 개수는

$(1+1)\times(1+1)=4$

07

두 수 A, B의 최대공약수가 $28=2^2\times7$이므로 서로소인 두 자연수 x, y에 대하여

$A=2^2\times7\times x$, $B=2^2\times7\times y$

로 나타낼 수 있다.

또한, 두 수 B, C의 최대공약수가 $12=2^2\times3$이므로 서로소인 두 자연수 z, w에 대하여

$B=2^2\times3\times z$, $C=2^2\times3\times w$

로 나타낼 수 있다.

이때 $B=2^2\times7\times y=2^2\times3\times z$에서 y는 3을, z는 7을 소인수로 가지므로 자연수 s에 대하여

$B=2^2\times3\times7\times s$

로 나타낼 수 있다. 이때 x가 3을 소인수로 가지면 A, B의 최대공약수가 28이 될 수 없으므로 x는 3을 소인수로 갖지 않고, w가 7을 소인수로 가지면 B, C의 최대공약수가 12가 될 수 없으므로 w는 7을 소인수로 갖지 않는다.

따라서 세 수 A, B, C의 최대공약수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{array}{rlllllll} A= & 2^2 & & & \times & 7 & \times & x \\ B= & 2^2 & \times & 3 & \times & 7 & \times & s \\ C= & 2^2 & \times & 3 & & & \times & w \\ \hline \therefore (\text{최대공약수})= & 2^2 & = & 4 & & & & \end{array}$$

답 ③

08

각 문구 세트에 들어가는 연필, 볼펜, 수정테이프의 개수를 각각 같게 하여 되도록 많은 문구 세트를 만들려면 문구 세트의 개수는 96, 72, 48의 최대공약수이어야 한다.

즉, 오른쪽과 같이 문구 세트의 개수는 $2^3\times3=24$

$$96=2^5\times3$$
$$72=2^3\times3^2$$
$$48=2^4\times3$$
$$(\text{최대공약수})=2^3\times3$$

이때 한 문구 세트에 들어 있는 연필, 볼펜, 수정테이프의 개수는 각각

$96\div24=4$, $72\div24=3$, $48\div24=2$

따라서 문구 세트 한 개의 가격은

$500\times4+800\times3+1000\times2=6400$(원)

답 6400원

09

조건 (가), (나)에서 $A=\dfrac{36}{a}$이 자연수이므로 a는 36의 약수이다.

조건 (가), (나), (다)에서 $B=\dfrac{90}{b}=\dfrac{90}{6\times a}=\dfrac{15}{a}$가 자연수이므로 a는 15의 약수이다.

즉, a는 36, 15의 공약수이므로 두 수의 최대공약수의 약수이다.

이때 $36=2^2\times3^2$, $15=3\times5$의 최대공약수는 3이므로 a의 값으로 가능한 것은 1, 3이다.

(ⅰ) $a=1$일 때, $A=\dfrac{36}{1}=36$

(ⅱ) $a=3$일 때, $A=\dfrac{36}{3}=12$

따라서 모든 A의 값의 합은

$36+12=48$

답 ⑤

10

두 수 A, B의 최대공약수가 2×5이므로

$A=2\times5\times a$, $B=2\times5\times b$ (단, a, b는 서로소)

라 하면 두 수의 최소공배수는

$2\times5\times a\times b=2\times3\times5^2\times7$

$\therefore a\times b=3\times5\times7$ (가)

(ⅰ) a, b의 값이 1과 $3\times5\times7$일 때,

$2\times5\times1=10$, $2\times5\times105=1050$이므로

$A=10$, $B=1050$ 또는 $A=1050$, $B=10$

$\therefore A+B=1060$

(ⅱ) a, b의 값이 3과 5×7일 때,

$2\times5\times3=30$, $2\times5\times35=350$이므로

$A=30$, $B=350$ 또는 $A=350$, $B=30$

$\therefore A+B=380$

(ⅲ) a, b의 값이 5와 3×7일 때,

$2\times5\times5=50$, $2\times5\times21=210$이므로

$A=50$, $B=210$ 또는 $A=210$, $B=50$

$\therefore A+B=260$

(ⅳ) a, b의 값이 7과 3×5일 때,

$2\times5\times7=70$, $2\times5\times15=150$이므로

$A=70$, $B=150$ 또는 $A=150$, $B=70$

$\therefore A+B=220$ (나)

(ⅰ)~(ⅳ)에서 두 자연수 A, B의 합으로 가능한 값 중에서 가장 작은 값은 220이다. (다)

답 220

단계	채점 기준	배점
(가)	최대공약수 G, 서로소인 두 수 a, b를 이용하여 $A=G\times a$, $B=G\times b$ 꼴로 나타내고 $a\times b$의 값을 구한 경우	30%
(나)	a, b의 값으로 가능한 경우를 찾고, 각 경우에서 $A+B$의 값을 구한 경우	60%
(다)	$A+B$의 가장 작은 값을 구한 경우	10%

11

A행 버스의 출발 시각은

6시, 6시 12분, 6시 24분, 6시 36분, ⋯

B행 버스의 출발 시각은

6시 20분, 6시 36분, 6시 52분, 7시 8분, ⋯

즉, A행 버스와 B행 버스는 오전 6시 36분에 처음으로 동시에 출발한다. (가)

오전 6시 36분 이후에 A행 버스와 B행 버스는 12, 16의 공배수만큼의 시간이 지날 때마다 동시에 출발하게 된다.

이때 $12=2^2\times3$, $16=2^4$의 최소공배수는

$2^4\times3=48$ (나)

따라서 오전 6시 40분 이후에 두 버스가 두 번째로 다시 동시에 출발하는 시각은 처음 두 버스가 동시에 출발한 오전 6시 36분으로부터 $48+48=96$(분) 후인 오전 8시 12분이다. (다)

답 오전 8시 12분

단계	채점 기준	배점
(가)	A행 버스와 B행 버스가 처음으로 동시에 출발하는 시각을 구한 경우	30%
(나)	12, 16의 최소공배수를 구한 경우	30%
(다)	6시 40분 이후에 두 버스가 두 번째로 다시 동시에 출발하는 시각을 구한 경우	40%

12

(1) 1번 학생: 계속 서 있는다.

2번 학생: 서 있다가 [2단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.

3번 학생: [2단계]까지 서 있다가 [3단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.

4번 학생: 서 있다가 [2단계]에서 앉고, [3단계]까지 앉아 있다가 [4단계]에서 선 이후 계속 서 있는다.

5번 학생: [4단계]까지 서 있다가 [5단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.
6번 학생: 서 있다가 [2단계]에서 앉고, [3단계]에서 서고 [4단계], [5단계]까지 서 있다가 [6단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.
7번 학생: [6단계]까지 서 있다가 [7단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.
8번 학생: 서 있다가 [2단계]에서 앉고, [3단계]까지 앉아 있다가 [4단계]에서 선다. 이후 [5단계], [6단계], [7단계]까지 서 있다가 [8단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.
9번 학생: [2단계]까지 서 있다가 [3단계]에서 앉는다. [4단계]부터 [8단계]까지 앉아 있다가 [9단계]에서 선 이후 계속 서 있는다.
10번 학생: 서 있다가 [2단계]에서 앉고, [4단계]까지 앉아 있다가 [5단계]에서 선다. [6단계]부터 [9단계]까지 서 있다가 [10단계]에서 앉은 이후 계속 앉아 있는다.
따라서 이들 10명의 학생 중 [100단계]까지의 활동을 마친 후 서 있는 학생들의 번호는 1, 4, 9이다. (가)

(2) [1단계]에서 서 있던 n번 학생이 이후 [m단계]에서 앉고 서는 것을 바꾸었다면 n은 m의 배수이고 m은 n의 약수이다. 즉, n번 학생은 n의 약수의 단계에서 앉고 서는 것을 바꾸므로 이 학생이 [100단계]에서 서 있으려면 n의 약수의 개수가 홀수이어야 한다.
약수의 개수가 홀수인 자연수는 소인수분해하였을 때 각 소인수의 지수가 모두 짝수인 수, 즉 어떤 자연수의 제곱인 수이다. (나)
1부터 100까지의 자연수 중 이를 만족시키는 경우는
$1, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2$
따라서 [100단계]까지의 활동을 마친 후 서 있는 학생은 1번 학생, 4번 학생, 9번 학생, …, 100번 학생의 10명이다. (다)

답 (1) 1, 4, 9 (2) 10명

단계		채점 기준	배점
(1)	(가)	1부터 10까지의 번호표를 가진 학생 중 [100단계]에 서 있는 학생들의 번호를 모두 구한 경우	30%
(2)	(나)	[100단계]에 서 있는 학생들의 번호의 규칙을 찾은 경우	50%
	(다)	[100단계]에 서 있는 학생 수를 구한 경우	20%

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

앉아 있다가 서는 것을 ○, 서 있다가 앉는 것을 ×라 하고 앉고 서는 변화를 살펴보면 다음과 같다.
4번 학생은
[1단계] ○ → [2단계] × → [4단계] ○
6번 학생은
[1단계] ○ → [2단계] × → [3단계] ○ → [6단계] ×
8번 학생은
[1단계] ○ → [2단계] × → [4단계] ○ → [8단계] ×
9번 학생은
[1단계] ○ → [3단계] × → [9단계] ○
즉, 처음 서 있던 학생이 앉고 서는 상태를 바꾸는 때는 단계의 숫자가 학생의 번호표의 숫자의 약수일 때이다.

Ⅱ 정수와 유리수

03. 정수와 유리수

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.035~036

01 ③	02 4	03 3	04 ⑤	05 ②
06 ⑤	07 2	08 ①, ④	09 ①	10 ③
11 ③	12 ③			

01

① 영상 24 ℃ ⇨ +24 ℃
② 해발 1947 m ⇨ +1947 m
③ 10분 늦게 ⇨ +10분
④ 10000원 할인 ⇨ −10000원
⑤ 1000원을 모았다. ⇨ +1000원
따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

02

양의 정수는 $+5$, $\frac{24}{4}=6$의 2개이므로 $a=2$
음의 정수는 -3, $-\frac{4}{2}=-2$의 2개이므로 $b=2$
$\therefore a\times b=2\times 2=4$

답 4

03

□에 해당하는 수는 ‘정수가 아닌 유리수’이다.
이때 $-\frac{63}{21}=-3$, -17, 12는 정수이므로 정수가 아닌 유리수는 $-\frac{46}{7}$, $\frac{5}{12}$, 5.123의 3개이다.

답 3

04

① 자연수가 아닌 정수는 음의 정수 또는 0이다.
② 가장 큰 음의 정수는 −1이다.
③ 유리수는 양의 유리수, 0, 음의 유리수로 되어 있다.
④ 서로 다른 두 정수 0과 1 사이에는 정수가 없다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

05

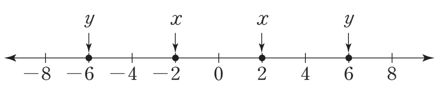
② B : $-\frac{5}{3}$ 답 ②

06

두 점 A와 B 사이의 거리는 12이므로 점 P가 나타내는 수는 -8이고, 두 점 B와 C 사이의 거리는 8이므로 점 Q가 나타내는 수는 2이다.
따라서 두 점 P와 Q 사이의 거리는 10이다. 답 ⑤

07

$|x|=2$이므로 $x=-2$ 또는 $x=2$
$|y|=6$이므로 $y=-6$ 또는 $y=6$
네 수 -2, 2, -6, 6을 나타내는 점을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) x, y를 나타내는 두 점 사이의 거리가 가장 멀 때,
$x=-2$, $y=6$ 또는 $x=2$, $y=-6$일 때이므로 $a=8$
(ii) x, y를 나타내는 두 점 사이의 거리가 가장 가까울 때,
$x=-2$, $y=-6$ 또는 $x=2$, $y=6$일 때이므로 $b=4$
(i), (ii)에서 $\frac{a}{b}=\frac{8}{4}=2$ 답 2

08

① 절댓값이 4인 수는 4와 -4이다.
④ 절댓값이 3 이하인 정수는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.
따라서 옳지 않은 것은 ①, ④이다. 답 ①, ④

09

주어진 수의 절댓값은 다음과 같다.
$|-2.4|=2.4$, $\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}$, $|2|=2$, $\left|\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$, $\left|\frac{9}{4}\right|=\frac{9}{4}$
따라서 절댓값이 큰 수부터 차례대로 나열하면
$-\frac{8}{3}$, $\frac{5}{2}$, -2.4, $\frac{9}{4}$, 2
따라서 세 번째에 오는 수는 -2.4이다. 답 ①

10

① $-11 \boxed{<} -8$
② $-0.1 \boxed{<} \frac{1}{10}$
③ $-\frac{2}{3}=-\frac{8}{12}$, $-\frac{3}{4}=-\frac{9}{12}$이므로 $-\frac{2}{3} \boxed{>} -\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$, $\left|-\frac{5}{6}\right|=\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$이므로 $\frac{4}{5} \boxed{<} \left|-\frac{5}{6}\right|$
⑤ $\left|+\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$, $\left|-\frac{6}{7}\right|=\frac{6}{7}=\frac{24}{28}$이므로
$\left|+\frac{3}{4}\right| \boxed{<} \left|-\frac{6}{7}\right|$
따라서 부등호가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다. 답 ③

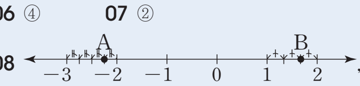
11

③ $-3<-\frac{11}{4}\leq 2$이므로 $-\frac{11}{4}$은 a의 값이 될 수 있다.
답 ③

12

$a\leq x<7$을 만족시키는 정수 x가 5개이려면
정수 x는 2, 3, 4, 5, 6이어야 하므로
$a=2$
$-2<y<b$를 만족시키는 정수 y가 6개이려면
정수 y는 -1, 0, 1, 2, 3, 4이어야 하므로
$b=5$
$\therefore b-a=5-2=3$ 답 ③

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.037~041

01 ㄱ, ㄷ, ㄹ	**02** 6	**03** ③	**04** ③	**05** 11
06 ④	**07** ②			
08 , 0, 1				**09** r
10 ⑤	**11** 90	**12** 7	**13** 22	**14** ②
15 ①	**16** 80	**17** 12	**18** $-\frac{13}{5}$	**19** ⑤
20 ④	**21** ②	**22** b, d, a, c	**23** ⑤	**24** ④
25 ⑤	**26** 55	**27** 45	**28** ⑤	**29** 23

01

ㄱ. 자연수는 5, $\frac{12^2}{2^3}(=18)$의 2개이다.

ㄴ. 양의 유리수는 5, $+\frac{3}{4}$, $\frac{12^2}{2^3}(=18)$의 3개이다.

ㄷ. 주어진 수는 모두 유리수이므로 유리수는 6개이다.

ㄹ. 음수는 -2.3, -2의 2개이다.

ㅁ. 정수가 아닌 유리수는 -2.3, $+\frac{3}{4}$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. **답** ㄱ, ㄷ, ㄹ

02

양의 유리수는 3.2, 502의 2개이므로 $x=2$

음의 유리수는 -4, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{78}{26}(=-3)$의 3개이므로 $y=3$

정수가 아닌 유리수는 3.2, $-\frac{7}{5}$의 2개이므로 $z=2$

$\therefore x\times y\times z=2\times3\times2=2^2\times3$

따라서 $x\times y\times z$의 약수의 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$ **답** 6

BLACKLABEL 특강 **필수 개념**

$a^m\times b^n$(a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)의 약수의 개수

⇨ $(m+1)\times(n+1)$

03

ㄱ. -2는 정수이지만 자연수가 아니다.

ㄴ. 어떤 정수라도 바로 앞의 정수와 바로 뒤의 정수를 알 수 있다.

ㄷ. 1과 2 사이에는 정수가 없다.

ㄹ. 가장 작은 양의 정수는 1이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다. **답** ③

04

ㄱ. 0과 1 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

ㄴ. 가장 큰 음의 유리수는 존재하지 않는다.

ㄷ. 모든 정수는 유리수이다.

ㄹ. $(\text{유리수})=\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$이므로 모든 유리수는

$\frac{(\text{정수})}{(\text{자연수})}$ 꼴로 나타낼 수 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답** ③

05

-1을 나타내는 점과 a를 나타내는 점 사이의 거리가 4이므로

$a=-5$ 또는 $a=3$

(i) $a=-5$일 때,

a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 8이므로

$b=11$

(ii) $a=3$일 때,

a와 3을 나타내는 점 사이의 거리가 0이므로

$b=3$

이때 a, b가 서로 다른 수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $b=11$ **답** 11

06

점 B와 점 E 사이를 3등분한 간격은 6이므로 세 점 A, C, D가 나타내는 수는 각각 -18, -6, 0이다.

ㄱ. 양수를 나타내는 점은 E의 1개이다.

ㄴ. 점 A가 나타내는 수는 -18이고, 점 D가 나타내는 수는 0이므로 두 점 A와 D 사이의 거리는 18이다.

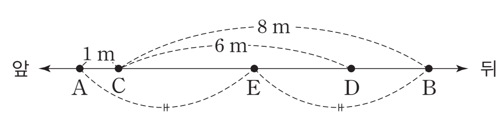
ㄷ. 두 점 C와 D 사이를 4등분한 간격은 $\frac{6}{4}=1.5$

즉, 점 C에 가장 가까운 점이 나타내는 수는 -4.5이므로 이 점은 -3을 나타내는 점보다 왼쪽에 있다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

07

5명의 학생 A, B, C, D, E의 위치를 수직선 위에 점으로 나타내면 다음 그림과 같다.

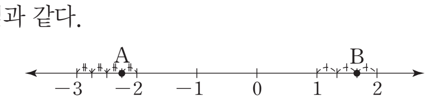


따라서 앞에 있는 학생부터 차례대로 나열하면

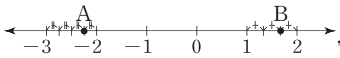
A, C, E, D, B **답** ②

08

두 수 $-\frac{9}{4}$, $\frac{5}{3}$를 나타내는 점 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $-\frac{9}{4}$와 $\frac{5}{3}$ 사이에 있는 정수는 -2, -1, 0, 1이고, 이 중 음수가 아닌 수는 0, 1이다.

답 

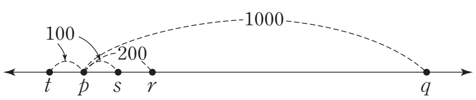
, 0, 1

09

주어진 표를 이용하여 인형의 가격과 왕복 교통비 및 그 합을 표로 나타내면 다음과 같다.

가게	인형의 가격	왕복 교통비	합
A	p원	1000원	$(p+1000)$원 ($=q$원)
B	$(p-1500)$원	1700원	$(p+200)$원 ($=r$원)
C	$(p-1200)$원	1300원	$(p+100)$원 ($=s$원)
D	$(p-1000)$원	900원	$(p-100)$원 ($=t$원)

따라서 p, q, r, s, t를 나타내는 점을 각각 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 왼쪽에서 네 번째에 있는 점이 나타내는 수는 r이다.



답 r

10

ㄱ. -4와 -3을 나타내는 점 사이를 4등분한 간격은 $\frac{1}{4}=0.25$이므로 점 A는 -3을 나타내는 점에서 0.75만큼 왼쪽에 위치해 있다. 즉, 점 A가 나타내는 수는 -3.75이다.

ㄴ. 점 A와 점 B 사이의 거리는 $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$이고, 점 B와 점 C 사이의 거리는 $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$이므로 점 B와 가장 가까운 점은 점 A이다.

ㄷ. 점 A와 점 D 사이의 거리는 $3.75+4.5=8.25$이므로 두 점 A와 D로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 수는

$4.5-\frac{8.25}{2}=4.5-4.125=0.375$

이때 점 C가 나타내는 수는 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$이므로 0.375를 나타내는 점은 점 C보다 오른쪽에 있다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

11

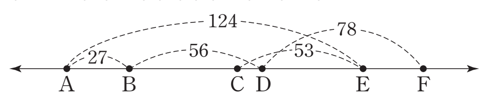
수직선 위의 6개의 점 A, B, C, D, E, F에 대하여
(선분 AB의 길이)$=27$, (선분 AE의 길이)$=124$,
(선분 BD의 길이)$=56$이므로
(선분 DE의 길이)$=124-(27+56)=41$
또한, (선분 CE의 길이)$=53$이므로
(선분 CD의 길이)$=53-41=12$
(선분 DF의 길이)$=78$이므로
(선분 CF의 길이)$=12+78=90$ **답** 90

• 다른 풀이 •

점 A가 나타내는 수를 0이라 하면
(선분 AB의 길이)$=27$이므로 점 B가 나타내는 수는
$0+27=27$
(선분 AE의 길이)$=124$이므로 점 E가 나타내는 수는
$0+124=124$
(선분 BD의 길이)$=56$이므로 점 D가 나타내는 수는
$27+56=83$
(선분 CE의 길이)$=53$이므로 점 C가 나타내는 수는
$124-53=71$
(선분 DF의 길이)$=78$이므로 점 F가 나타내는 수는
$83+78=161$
따라서 두 점 C, F 사이의 거리는
$161-71=90$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

주어진 표의 조건을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



12

두 정수 사이에 13개의 정수가 있으므로 두 정수를 수직선 위에 점으로 나타내면 두 점 사이의 거리는 14이다.
이때 두 정수는 절댓값이 같고 서로 다른 수이므로 부호가 반대이다.
따라서 두 점이 나타내는 수는 7과 -7이므로 두 정수 중 양수는 7이다. **답** 7

13

-11.1에 가장 가까운 정수는 -11이므로 $a=-11$ ㈎

$\frac{32}{3}=10.666\cdots$에 가장 가까운 정수는 11이므로 $b=11$ ㈏

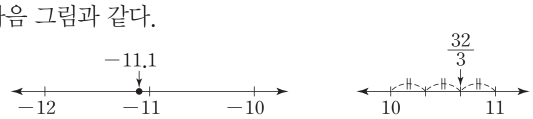
따라서 $|a|+|b|=|-11|+|11|=11+11=22$ ㈐

답 22

단계	채점 기준	배점
㈎	a의 값을 구한 경우	30%
㈏	b의 값을 구한 경우	30%
㈐	$\|a\|+\|b\|$의 값을 구한 경우	40%

• 다른 풀이 •

두 수 -11.1, $\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$를 나타내는 점을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore a=-11$, $b=11$

$\therefore |a|+|b|=|-11|+|11|=11+11=22$

14

조건 ㈎에서 $|a|=3$

조건 ㈏에서 $|b|=|-5|=5$

조건 ㈐에서 $|a|+|b|+|c|=10$이므로

$3+5+|c|=10$ $\quad\therefore |c|=2$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=2$

그런데 c는 양의 정수이므로 $c=2$ **답** ②

15

(i) $|a|=0$, $|b|=3$일 때,
(a, b)는 $(0, 3)$, $(0, -3)$의 2개이다.

(ii) $|a|=1$, $|b|=2$일 때,
(a, b)는 $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$의 4개이다.

(iii) $|a|=2$, $|b|=1$일 때,
(a, b)는 $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$의 4개이다.

(iv) $|a|=3$, $|b|=0$일 때,
(a, b)는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$의 2개이다.

(i) ~ (iv)에서 조건을 만족시키는 (a, b)의 개수는

$2+4+4+2=12$ **답** ①

16

조건 ㈐에서 $|c|>1$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다. (단, $|a|<10$, $|b|<10$, $|c|<10$)

(i) $|c|=2$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=3$
조건 ㈎에서 $|a|=3, 6, 9$
(a, b, c)의 개수는 $6\times2\times2=24$

(ii) $|c|=3$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=4$
조건 ㈎에서 $|a|=4, 8$
(a, b, c)의 개수는 $4\times2\times2=16$

(iii) $|c|=4$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=5$
조건 ㈎에서 $|a|=5$
(a, b, c)의 개수는 $2\times2\times2=8$

(iv) $|c|=5$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=6$
조건 ㈎에서 $|a|=6$
(a, b, c)의 개수는 $2\times2\times2=8$

(v) $|c|=6$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=7$
조건 ㈎에서 $|a|=7$
(a, b, c)의 개수는 $2\times2\times2=8$

(vi) $|c|=7$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=8$
조건 ㈎에서 $|a|=8$
(a, b, c)의 개수는 $2\times2\times2=8$

(vii) $|c|=8$일 때,
조건 ㈏에서 $|b|=9$
조건 ㈎에서 $|a|=9$
(a, b, c)의 개수는 $2\times2\times2=8$

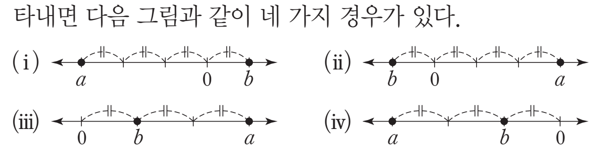
(i)~(vii)에서 조건을 만족시키는 (a, b, c)의 개수는

$24+16+8\times5=80$ **답** 80

17 해결단계

❶ 단계	$\|a\|=3\times\|b\|$인 두 수 a, b를 나타내는 점을 수직선 위에 경우를 나누어 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 각 경우에 따라 $\|a\|+\|b\|$의 값을 구한다.
❸ 단계	$\|a\|+\|b\|$의 값이 될 수 있는 수 중에서 가장 작은 수를 구한다.

$|a|=3\times|b|$이므로 두 수 a, b가 나타내는 점을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같이 네 가지 경우가 있다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 a와 b가 나타내는 두 점 사이의 거리가 12이므로

$|a|+|b|=12$

(ⅲ), (ⅳ)에서 a와 b가 나타내는 두 점 사이의 거리가 12이므로

$|b|=\frac{12}{2}=6$ $\quad\therefore |a|=3\times|b|=3\times6=18$

$\therefore |a|+|b|=18+6=24$

따라서 $|a|+|b|$의 값이 될 수 있는 수 중에서 가장 작은 수는 12이다.

답 12

18

$-3<2.4$이므로

$(-3)\blacktriangle 2.4=2.4$

$\left|-\frac{13}{5}\right|=\frac{13}{5}=2.6$, $\left|\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}=2.5$이므로

$\left|-\frac{13}{5}\right|>\left|\frac{5}{2}\right|$

$\therefore \left(-\frac{13}{5}\right)☆\frac{5}{2}=-\frac{13}{5}$

$\therefore \{(-3)\blacktriangle 2.4\}☆\left\{\left(-\frac{13}{5}\right)☆\frac{5}{2}\right\}=2.4☆\left(-\frac{13}{5}\right)$

$|2.4|=2.4$, $\left|-\frac{13}{5}\right|=2.6$이므로

$|2.4|<\left|-\frac{13}{5}\right|$

$\therefore \{(-3)\blacktriangle 2.4\}☆\left\{\left(-\frac{13}{5}\right)☆\frac{5}{2}\right\}=2.4☆\left(-\frac{13}{5}\right)=-\frac{13}{5}$

답 $-\frac{13}{5}$

19

네 점 A, B, C, D가 나타내는 수는 각각 -5, -1, 3, 5이다.

ㄱ. 두 점 A, B 사이의 거리는 4이므로 점 A는 점 B보다 4만큼 왼쪽에 있다.

ㄴ. 네 점 A, B, C, D가 나타내는 수의 절댓값은 각각 5, 1, 3, 5이므로 절댓값이 두 번째로 작은 점은 C이다.

ㄷ. 0을 나타내는 점으로부터 점 A까지의 거리와 점 D까지의 거리는 각각 5로 서로 같다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

20

① $[0]=0$

② $\frac{5}{2}=2.5$이고, 2.5보다 크지 않은 최대의 정수는 2이므로

$\left[\frac{5}{2}\right]=2$

③ $[-4]=-4$

④ -0.5보다 크지 않은 최대의 정수는 -1이므로

$[-0.5]=-1$

⑤ $-\frac{9}{2}=-4.5$이고, -4.5보다 크지 않은 최대의 정수는 -5이므로 $\left[-\frac{9}{2}\right]=-5$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

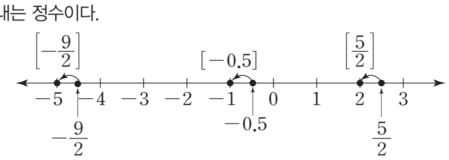
답 ④

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

수직선 위에서 $[a]$와 a가 나타내는 점의 위치

(1) a가 정수이면 $[a]=a$

(2) a가 정수가 아닌 유리수이면 $[a]$는 a가 나타내는 점의 왼쪽에서 가장 가까운 점이 나타내는 정수이다.



※ $[a]$의 의미를 이용하여 $[a]$의 값을 구할 수 있지만 수직선을 이용하여 구하는 것이 더 쉽다.

21

조건 (나), (다)에서

$b<c<0$

조건 (라)에서 $|a|=|b|$이고 $a\neq b$이므로

$b<c<0<a$

조건 (가)에서 $b<c<d<a$

답 ②

22

조건 (나)에서

$b<0<c$ 또는 $c<0<b$

(ⅰ) $a>0$이면 조건 (가)에서

$b<0<a<c$ 또는 $c<0<a<b$

조건 (다)에서

$b<d<0<a<c$ 또는 $c<0<a<d<b$

그런데 모두 조건 (라)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a<0$이면 조건 ㈎에서
$b<a<0<c$ 또는 $c<a<0<b$
조건 ㈐에서
$b<d<a<0<c$ 또는 $c<a<0<d<b$
조건 ㈑에서 $b<d<a<0<c$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $b<d<a<c$ 답 b, d, a, c

23

ㄱ. a, b의 대소 관계는 알 수 없다.
ㄴ. $a=2$, $b=2.5$이면 $|a|=2$, $|b-1|=1.5$이므로
$|a|>|b-1|$이지만 a가 b보다 원점에서 가깝다.
ㄷ. $a=-1$일 때, $|b-1|<1$이므로 정수 b는 1의 1개이다.
ㄹ. 절댓값의 성질에 의하여 절댓값은 항상 0 또는 양수이므로
$|a|>|b-1|\geq 0$
$\therefore |a|+|b-1|>0$
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

24

절댓값이 3보다 크고 8보다 작거나 같은 정수는
-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8의 10개이므로
$a=10$
절댓값이 3보다 작거나 같은 정수는
-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이므로
$b=7$
$\therefore a+b=10+7=17$ 답 ④

25

$\left|\frac{n}{4}\right|\leq 1$이므로 $-1\leq\frac{n}{4}\leq 1$
즉, $-\frac{4}{4}\leq\frac{n}{4}\leq\frac{4}{4}$이므로 이를 만족시키는 정수 n은
-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
그런데 $-\frac{10}{3}\leq n<7$이므로 구하는 정수 n은
-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 8개이다. 답 ⑤

26

주어진 전개도로 정육면체를 만들면 a가 적혀 있는 면과 마주 보는 면에 적혀 있는 수는 -7이므로
$a=7$
한편, $b=4\times a$이므로
$b=4\times 7=28$
b가 적혀 있는 면과 마주 보는 면에 적혀 있는 수는 c이므로
$c=-28$
따라서 두 수 b, c 사이에 존재하는 정수는 -27, -26, $\cdots$, -1, 0, 1, $\cdots$, 26, 27의 55개이다. 답 55

27

조건 ㈎에서 a는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.
조건 ㈏에서 a는 5 이상이어야 하므로 5, 6, 7, 8, 9이다.
조건 ㈐에서 a의 값은 5, 7, 9이므로
$m=5$, $M=9$
$\therefore M\times m=5\times 9=45$ 답 45

28

$-\frac{1}{4}=-\frac{2}{8}$, $\frac{3}{2}=\frac{12}{8}$이므로 $-\frac{1}{4}$보다 크고 $\frac{3}{2}$보다 작은 정수가 아닌 유리수를 기약분수로 나타낼 때, 분모가 8인 기약분수는
$-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{11}{8}$의 7개이다. 답 ⑤

29

(ⅰ) $-1<\frac{a}{b}<0$일 때
① $b=\pm 1$이면 a는 존재하지 않는다.
② $b=\pm 2$이면 $a=\mp 1$이므로
$\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$
③ $b=\pm 3$이면 $a=\mp 2$, ∓ 1이므로
$\frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$
④ $b=\pm 4$이면 $a=\mp 3$, ∓ 2, ∓ 1이므로
$\frac{a}{b}=-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\text{이므로 제외}\right)$
⑤ $b=\pm 5$이면 $a=\mp 4$, ∓ 3, ∓ 2, ∓ 1이므로
$\frac{a}{b}=-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$
따라서 서로 다른 유리수의 개수는
$0+1+2+2+4=9$

(ii) $\frac{a}{b}=0$일 때 서로 다른 유리수의 개수는 1이다.

(iii) $0<\frac{a}{b}<2$일 때

① $b=\pm1$이면 a는 존재하지 않는다.

② $b=\pm2$이면 $a=\pm1,\ \pm3$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$

③ $b=\pm3$이면 $a=\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm5$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}$

④ $b=\pm4$이면 $a=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm5$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4}\ \left(\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\text{이므로 제외}\right)$

⑤ $b=\pm5$이면 $a=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$

따라서 서로 다른 유리수의 개수는

$0+2+4+3+4=13$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 유리수의 개수는

$9+1+13=23$ **답** 23

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.042~043

01 0	**02** 25	**03** (1) -14 (2) -20	**04** 11
05 8	**06** -97	**07** 15번째	**08** 종국 : 1, 현서 : $-\frac{11}{5}$

01 해결단계

❶ 단계	$[[0]],\ \left[\left[\frac{24}{6}\right]\right],\ \left[\left[-\frac{9}{3}\right]\right]$의 값을 각각 구하여 $[[a]]$의 값을 구한다.
❷ 단계	a는 자연수가 아닌 정수임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$0,\ -\frac{9}{3}(=-3)$은 자연수가 아닌 정수이므로

$[[0]]=1,\ \left[\left[-\frac{9}{3}\right]\right]=1$

$\frac{24}{6}=4$는 자연수이므로 $\left[\left[\frac{24}{6}\right]\right]=0$

$$\therefore [[a]]+[[0]]+\left[\left[\frac{24}{6}\right]\right]+\left[\left[-\frac{9}{3}\right]\right]=[[a]]+1+0+1=[[a]]+2$$

즉, $[[a]]+2=3$이므로 $[[a]]=1$

따라서 $[[a]]=1$을 만족시키는 a는 자연수가 아닌 정수이므로 a의 값 중에서 가장 큰 수는 0이다. **답** 0

02 해결단계

❶ 단계	이웃하는 두 점 사이의 거리를 구한다.
❷ 단계	두 수 $a,\ b$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	자연수 x의 개수를 구한다.

두 점 A와 D 사이의 거리가 6이고, 두 점 A와 D 사이에 두 점 B, C가 같은 간격으로 놓여 있으므로 이웃하는 두 점 사이의 거리는 $\frac{6}{3}=2$

즉, 세 점 B, C, E가 나타내는 수는 각각 4, 6, 10이므로

$a=6,\ b=10$

이때 $\frac{6}{7}<\frac{30}{x}<\frac{10}{3}$이므로 세 분수의 분자를 30이 되도록 하면

$\frac{30}{35}<\frac{30}{x}<\frac{30}{9}\qquad \therefore 9<x<35$

따라서 이를 만족시키는 자연수 x는 10, 11, 12, $\cdots$, 34의 25개이다. **답** 25

BLACKLABEL 특강 참고

두 자연수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여

(1) a와 b 사이의 자연수, 즉 $a+1,\ a+2,\ \cdots,\ b-1$의 개수

⇨ $(b-1)-(a+1)+1=b-a-1$

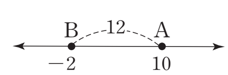
(2) a부터 b까지 자연수, 즉 $a,\ a+1,\ a+2,\ \cdots,\ b$의 개수

⇨ $b-a+1$

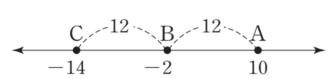
03 해결단계

(1)	❶ 단계	두 지점 A, B 사이의 거리를 이용하여 지점 C의 위치를 수로 나타낸다.
(2)	❷ 단계	두 지점 A, C 사이의 거리와 두 지점 C, D 사이의 거리의 비를 이용하여 두 지점 C, D 사이의 거리를 구한다.
	❸ 단계	지점 D의 위치를 수로 나타낸다.

(1) 두 지점 A, B의 위치를 각각 수로 나타내면 10, -2이므로 두 지점 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



두 지점 A, B 사이의 거리는 12이고, 지점 B가 두 지점 A, C로부터 같은 거리에 있으므로 세 지점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 지점 C의 위치를 수로 나타내면 -14이다.

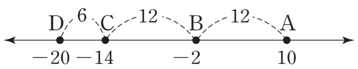
(2) (1)에서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $12+12=24$이므로

$24:$(두 지점 C, D 사이의 거리)$=4:1$

(두 지점 C, D 사이의 거리)$\times 4=24$

$\therefore$ (두 지점 C, D 사이의 거리)$=6$

지점 D를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 지점 D의 위치를 수로 나타내면 -20이다.

답 (1) -14 (2) -20

04 해결단계

❶ 단계	M$(-7, 5)$의 값을 구한다.
❷ 단계	M$(a, 6)$의 값을 구한다.
❸ 단계	정수 a의 개수를 구한다.

$|-7|>|5|$이므로 $\mathrm{M}(-7, 5)=-7$

$\mathrm{m}(\mathrm{M}(-7, 5), \mathrm{M}(a, 6))=6$에서

$\mathrm{m}(-7, \mathrm{M}(a, 6))=6$

$\therefore \mathrm{M}(a, 6)=6$

따라서 $|a|<6$이므로 이를 만족시키는 정수 a는

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

의 11개이다.

답 11

05 해결단계

❶ 단계	$2<|m|\le 4$를 만족시키는 정수 m의 값을 구한다.
❷ 단계	$1\le|n|<3$을 만족시키는 정수 n의 값을 구한다.
❸ 단계	(m, n)의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $2<|m|\le 4$이므로

$|m|=3, 4$

이를 만족시키는 m의 값은

$-4, -3, 3, 4$

$1\le|n|<3$이므로 $|n|=1, 2$

이를 만족시키는 n의 값은

$-2, -1, 1, 2$

조건 (나)에서 $m<n$이므로

(i) $m=-4$일 때,

가능한 n의 값은 $-2, -1, 1, 2$의 4개이다.

(ii) $m=-3$일 때,

가능한 n의 값은 $-2, -1, 1, 2$의 4개이다.

(iii) $m=3$ 또는 $m=4$일 때,

가능한 n의 값은 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 (m, n)의 개수는

$4+4=8$

답 8

06 해결단계

❶ 단계	조건 (가)에서 a의 부호를 정한다.
❷ 단계	조건 (나)에서 a의 절댓값이 될 수 있는 수를 구한다.
❸ 단계	조건 (다)에서 $|a|$의 값이 소수임을 이용하여 정수 a의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $b<a<0$

조건 (나)에서 $89<|a|\le 99$이므로 a가 될 수 있는 수는

$-99, -98, -97, \cdots, -91, -90$

조건 (다)에서 $|a|$는 소수이므로

$a=-97$

답 -97

07 해결단계

❶ 단계	사용된 전체 카드의 수를 구한다.
❷ 단계	분모가 같은 수끼리 모아 배수를 이용하여 정수가 적힌 카드의 수를 구한다.
❸ 단계	정수가 아닌 유리수가 적힌 카드의 수를 구한다.
❹ 단계	$\frac{5}{3}$는 몇 번째로 작은 수인지 구한다.

첫 번째 줄에는 1장, 두 번째 줄에는 2장, $\cdots$, 마지막 줄인 7번째 줄에는 7장의 카드가 있으므로 사용된 전체 카드의 수는

$1+2+3+4+5+6+7=28$(장)

탑의 각 층에서 가장 오른쪽에 있는 수는 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots, \frac{7}{1}$로 모두 정수이다.

탑의 각 층의 오른쪽에서 두 번째에 있는 수는 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$이고 1부터 6까지의 자연수 중 2의 배수는 2, 4, 6의 3개이므로 정수가 적힌 카드는 3장이다.

같은 방법으로 1부터 5까지의 자연수 중 3의 배수는 3의 1개이므로 정수가 적힌 카드는 1장, 1부터 4까지의 자연수 중 4의 배수는 4의 1개이므로 정수가 적힌 카드는 1장, 나머지 카드에 대하여 정수가 적힌 카드는 없다.

따라서 정수가 적힌 카드의 수는

$7+3+1+1=12$(장)

28장의 카드 중에서 정수가 적힌 카드는 12장이므로 정수가 아닌 유리수가 적힌 카드의 수는

$28-12=16$(장)

이때 정수가 아닌 유리수 중에서 $\frac{5}{3}$보다 큰 수는 여섯 번째 줄의 $\frac{5}{2}$밖에 없으므로 정수가 아닌 유리수를 작은 수부터 차례대로 나열하면 $\frac{5}{3}$는 $16-1=15$(번째) 수이다.

답 15번째

08 해결단계

❶단계	민혁이가 뽑은 나무판의 순서를 구한다.
❷단계	종국이와 현서가 뽑은 나무판의 경우에 따라 결과를 구한다.
❸단계	종국이와 현서가 가지고 있는 카드에 적힌 수를 각각 구한다.

세 사람이 각각 나무판 뽑기를 2번 진행한 후, 민혁이가 가지고 있는 카드에 적힌 수의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌었으므로 민혁이는 B를 반드시 한 번만 뽑아야 하고, 두 번째에서 C를 뽑으면 안 된다.

민혁이가 A → B의 순서로 뽑으면

$\frac{5}{3} \to 1 \to -1$

민혁이가 C → B의 순서로 뽑으면

$\frac{5}{3} \to \frac{5}{3} \to -\frac{5}{3}$

민혁이가 B → A의 순서로 뽑으면

$\frac{5}{3} \to -\frac{5}{3} \to -2$

따라서 민혁이는 첫 번째에 B를 뽑고, 두 번째에 A를 뽑아야 한다.

(i) 종국이가 A → B, 현서가 C → C의 순서로 뽑을 때,

종국이의 카드에 적힌 수 : $\frac{5}{4} \to 1 \to -1$

현서의 카드에 적힌 수 : $-\frac{11}{5} \to \frac{11}{5} \to \frac{11}{5}$

따라서 민혁이의 카드에 적힌 수가 가장 작으므로 조건에 맞지 않다.

(ii) 종국이가 A → C, 현서가 C → B의 순서로 뽑을 때,

종국이의 카드에 적힌 수 : $\frac{5}{4} \to 1 \to 1$

현서의 카드에 적힌 수 : $-\frac{11}{5} \to \frac{11}{5} \to -\frac{11}{5}$

따라서 민혁이의 카드에 적힌 수는 2번째로 큰 수이다.

(iii) 종국이가 C → B, 현서가 A → C의 순서로 뽑을 때,

종국이의 카드에 적힌 수 : $\frac{5}{4} \to \frac{5}{4} \to -\frac{5}{4}$

현서의 카드에 적힌 수 : $-\frac{11}{5} \to -3 \to 3$

따라서 민혁이의 카드에 적힌 수가 가장 작으므로 조건에 맞지 않다.

(iv) 종국이가 C → C, 현서가 A → B의 순서로 뽑을 때,

종국이의 카드에 적힌 수 : $\frac{5}{4} \to \frac{5}{4} \to \frac{5}{4}$

현서의 카드에 적힌 수 : $-\frac{11}{5} \to -3 \to 3$

따라서 민혁이의 카드에 적힌 수가 가장 작으므로 조건에 맞지 않다.

(i)~(iv)에서 종국이와 현서가 가지고 있는 카드에 적힌 수는 각각 1, $-\frac{11}{5}$이다.

답 종국 : 1, 현서 : $-\frac{11}{5}$

04. 정수와 유리수의 계산

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.045~047

01 ③	02 ③	03 $\frac{1}{4}$	04 -2	05 ①
06 ④	07 ③	08 ③	09 ②	10 ④
11 ①	12 52	13 $\frac{6}{5}$	14 ③	15 ④
16 ⑤	17 ⑤	18 ①		

01

① $(-8)+(+4)-(-3)=(-8)+(+4)+(+3)=-1$

② $(+6)-(-2)+(-7)=(+6)+(+2)+(-7)=1$

③ $\left(+\frac{9}{5}\right)-(+6)-\left(-\frac{11}{5}\right)=\left(+\frac{9}{5}\right)+(-6)+\left(+\frac{11}{5}\right)$
$=\left(+\frac{9}{5}\right)+\left(+\frac{11}{5}\right)+(-6)$
$=(+4)+(-6)=-2$

④ $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$
$=\left(-\frac{8}{12}\right)+\left(+\frac{2}{12}\right)+\left(-\frac{3}{12}\right)$
$=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$

⑤ $(-3.2)-(-4.1)-(+2.8)=(-3.2)+(+4.1)+(-2.8)$
$=-1.9$

따라서 계산 결과가 가장 작은 것은 ③이다. **답** ③

02

$\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}>+4.1$이므로 $a=\frac{13}{3}$

절댓값이 가장 작은 수는 $-\frac{1}{3}$이므로 $b=-\frac{1}{3}$

$\therefore a-b=\frac{13}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}+\left(+\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$ **답** ③

03

어떤 유리수를 □라 하면

$\square+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$

$\therefore \square=\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$
$=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$
$=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{2}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

따라서 바르게 계산하면

$$\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

04

$$\frac{1}{2}*\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}\right)-\left\{\frac{3}{3}+\left(+\frac{2}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{5}{3}=\frac{9}{6}-\frac{10}{6}=-\frac{1}{6}$$
$$\left(-\frac{3}{2}\right)◎\frac{1}{3}=\left(-\frac{3}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)$$
$$=\left(-\frac{3}{2}+\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}=-\frac{3}{6}-\frac{8}{6}=-\frac{11}{6}$$
$$\therefore \left\{\frac{1}{2}*\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)◎\frac{1}{3}\right\}=\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{11}{6}\right)$$
$$=-\frac{12}{6}=-2$$

답 -2

• 다른 풀이 •

$a*b=(a+1)-(1-b)=a+b$

$a◎b=(a+1)-(b+1)=a-b$

$$\therefore \left\{\frac{1}{2}*\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)◎\frac{1}{3}\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}+\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{11}{6}\right)$$
$$=-\frac{12}{6}=-2$$

05

㉠	a	b	1	c	-2	$\frac{3}{2}$

위와 같이 빈칸의 수를 왼쪽에서부터 차례대로 a, b, c라 하면 이웃하는 네 수의 합이 항상 $-\frac{1}{6}$이므로

$1+c+(-2)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$에서

$c+(-1)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$, $c+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$\therefore c=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

또한, ㉠$+a+b+1=a+b+1+c$

$\therefore$ ㉠$=c=-\frac{2}{3}$

답 ①

• 다른 풀이 •

$1+c+(-2)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$에서 $c=-\frac{2}{3}$

$b+1+c+(-2)=-\frac{1}{6}$에서

$b+1+\left(-\frac{2}{3}\right)+(-2)=-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore b=\frac{3}{2}$

$a+b+1+c=-\frac{1}{6}$에서

$a+\frac{2}{3}+1+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore a=-2$

㉠$+a+b+1=-\frac{1}{6}$에서

㉠$+(-2)+\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{6}$ $\quad\therefore$ ㉠$=-\frac{2}{3}$

06

날짜별로 기온을 구하면 다음과 같다.

날짜	기온
12월 1일	$7.4-2.1=5.3$ (℃)
12월 2일	$5.3-0.9=4.4$ (℃)
12월 3일	$4.4+4.3=8.7$ (℃)
12월 4일	$8.7-3.8=4.9$ (℃)
12월 5일	$4.9+0.2=5.1$ (℃)

따라서 기온이 두 번째로 낮은 날은 12월 4일이다.

답 ④

07

㉠ $a\times b=b\times a$이므로 곱셈의 교환법칙

㉡ $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$이므로 곱셈의 결합법칙

㉢ $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$이므로 분배법칙

답 ③

08

① $-3^2=-(3\times3)=-9$

② $(-3)^3=(-3)\times(-3)\times(-3)=-(3\times3\times3)=-27$

③ $-(-3^3)=-\{-(3\times3\times3)\}=-(-27)=27$

④ $-3\times(-3)^2=(-3)\times\{(-3)\times(-3)\}$
$=(-3)\times9=-27$

⑤ $(-3)^2\times(-3^2)=\{(-3)\times(-3)\}\times\{-(3\times3)\}$
$=9\times(-9)=-81$

따라서 계산 결과가 가장 큰 수는 ③이다.

답 ③

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

$(-a)^2$과 $-a^2$의 비교

$(-a)^2=(-a)\times(-a)=a^2$, $-a^2=-(a\times a)$

$\therefore (-a)^2\neq-a^2$

예) $(-2)^2=(-2)\times(-2)=4$, $-2^2=-(2\times2)=-4$

09

$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+\cdots+(-1)^{2025}$

$=(-1)+1+(-1)+1+\cdots+(-1)$

$=\{(-1)+1\}+\{(-1)+1\}+\cdots+\{(-1)+1\}+(-1)$

$=-1$

답 ②

10

$a=(-8)-(-5)=(-8)+(+5)=-3$

$1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이고 $\frac{4}{3}$의 역수는 $\frac{3}{4}$이므로

$-b=\frac{3}{4}\qquad \therefore b=-\frac{3}{4}$

$\therefore a\times b=(-3)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$

답 ④

11

$a=(-5)^2\times(+0.8)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

$=(+25)\times\left(+\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{8}\right)$

$=-\left(25\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{8}\right)=-\frac{5}{2}$

$b=\left(-\frac{1}{10}\right)\div\left(+\frac{4}{5}\right)\div\left(-\frac{5}{8}\right)$

$=\left(-\frac{1}{10}\right)\times\left(+\frac{5}{4}\right)\times\left(-\frac{8}{5}\right)$

$=+\left(\frac{1}{10}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{5}\right)=\frac{1}{5}$

$c=\left(+\frac{4}{11}\right)\times\left(-\frac{22}{9}\right)\times\left(-\frac{3}{8}\right)$

$=+\left(\frac{4}{11}\times\frac{22}{9}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{3}$

따라서 $a<b<c$이다.

답 ①

12

$A=\frac{2}{13}\times\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)\div\frac{5}{18}\right\}$

$=\frac{2}{13}\times\left\{\left(-\frac{5}{3}\right)\times\frac{18}{5}\right\}$

$=\frac{2}{13}\times(-6)=-\frac{12}{13}$

$B=0.16\times16\div\left(-\frac{4}{3}\right)\div\frac{1}{(-5)^2}$

$=\frac{16}{100}\times16\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times25$

$=-\left(\frac{4}{25}\times16\times\frac{3}{4}\times25\right)=-48$

$\therefore B\div A=(-48)\div\left(-\frac{12}{13}\right)$

$=(-48)\times\left(-\frac{13}{12}\right)=52$

답 52

13

$a\times\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{21}{20}$에서

$a=\frac{21}{20}\div\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{21}{20}\times\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{3}{4}$

$\frac{2}{9}\div b=-\frac{16}{45}$에서

$b=\frac{2}{9}\div\left(-\frac{16}{45}\right)=\frac{2}{9}\times\left(-\frac{45}{16}\right)=-\frac{5}{8}$

$\therefore a\div b=-\frac{3}{4}\div\left(-\frac{5}{8}\right)$

$=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{6}{5}$

답 $\frac{6}{5}$

14

$a\times b<0$이므로

$a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$

이때 $a<b$이므로

$a<0,\ b>0$

또한, $b>0$이고 $b\div c>0$이므로

$c>0$

따라서 $a<0,\ b>0,\ c>0$이다.

답 ③

15

$a=-\frac{1}{2}$이라 하면

① $-a=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

② $-a-1=-\left(-\frac{1}{2}\right)-1$

$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

③ $-a^2=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{a}$은 a의 역수이므로 $\frac{1}{a}=-2$

$\therefore -\frac{1}{a}=-(-2)=2$

⑤ $a^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{a^2}$은 a^2의 역수이므로 $\frac{1}{a^2}=4$

$\therefore -\frac{1}{a^2}+2=-4+2=-2$

따라서 가장 큰 수는 ④이다.

답 ④

16

거듭제곱을 가장 먼저 계산하고 (소괄호) → {중괄호} → [대괄호] 순으로 계산한다.

또한, 곱셈이나 나눗셈을 덧셈이나 뺄셈보다 먼저 계산하므로 주어진 식의 계산 순서는 ㄹ－ㄷ－ㄴ－ㅁ－ㄱ이다.

$$\therefore \frac{7}{9}+\left\{-3-\frac{5}{4}\div\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\times 5$$
$$=\frac{7}{9}+\left(-3-\frac{5}{4}\div\frac{9}{4}\right)\times 5$$
$$=\frac{7}{9}+\left(-3-\frac{5}{4}\times\frac{4}{9}\right)\times 5$$
$$=\frac{7}{9}+\left(-3-\frac{5}{9}\right)\times 5$$
$$=\frac{7}{9}+\left(-\frac{32}{9}\right)\times 5$$
$$=\frac{7}{9}+\left(-\frac{160}{9}\right)$$
$$=-\frac{153}{9}=-17$$

따라서 네 번째로 계산해야 하는 것은 ㅁ이고, 계산 결과는 -17이다.

답 ⑤

17

주어진 수직선에서 작은 눈금 사이의 간격은 $\frac{1}{3}$이므로

$a=-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$, $b=-1$, $c=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, $d=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$$\therefore a\times[\{(-b)\div c-(b+c)\}-d]$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left[\left\{-(-1)\div\frac{5}{3}-\left(-1+\frac{5}{3}\right)\right\}-\frac{10}{3}\right]$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left\{\left(1\times\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)-\frac{10}{3}\right\}$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left\{\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)-\frac{10}{3}\right\}$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left\{\left(\frac{9}{15}-\frac{10}{15}\right)-\frac{10}{3}\right\}$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{15}-\frac{10}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{15}-\frac{50}{15}\right)$$
$$=\left(-\frac{10}{3}\right)\times\left(-\frac{51}{15}\right)=\frac{34}{3}$$

답 ⑤

18

두 점 A와 B 사이의 거리는

$$\frac{1}{3}-(-4)=\frac{1}{3}+(+4)=\frac{1}{3}+\frac{12}{3}=\frac{13}{3}$$

따라서 점 C가 나타내는 수는

$$(-4)+\left(\frac{13}{3}\div 7\right)\times 3=(-4)+\left(\frac{13}{3}\times\frac{1}{7}\right)\times 3$$
$$=(-4)+\frac{13}{21}\times 3$$
$$=(-4)+\frac{13}{7}=\left(-\frac{28}{7}\right)+\frac{13}{7}$$
$$=-\frac{15}{7}$$

답 ①

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.048~053

01 5	02 ④	03 ⑤	04 $a=-2$, $b=-1$	
05 ①	06 15.7 m	07 ②	08 $-\frac{3}{2}$	09 ⑤
10 -3	11 42	12 3, $\frac{21}{80}$	13 ③	14 2025
15 47	16 $-\frac{3}{2}$	17 ②	18 -1	19 ③
20 ④	21 ②	22 ③	23 5	24 ①
25 14	26 600	27 -2	28 ③	29 ⑤
30 11	31 $-\frac{5}{9}$	32 $\frac{81}{2}$	33 ③	34 ③
35 $(-4, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, -1)$, $(-2, -1)$				
36 b^2, $-\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $-a$				

01

$$x=-\frac{7}{4}+\frac{1}{3}=-\frac{21}{12}+\frac{4}{12}=-\frac{17}{12}$$
$$y=3-\left(-\frac{1}{2}\right)=3+\left(+\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$x<n<y$에서 $-\frac{17}{12}<n<\frac{7}{2}$이므로 이것을 만족시키는 정수 n은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

답 5

02

$$A=-\frac{7}{3}-\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)+7\right\}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{3}-\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{28}{4}\right\}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{7}{3}-\frac{25}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{28}{12}-\frac{75}{12}-\left(-\frac{6}{12}\right)$$
$$=\left(-\frac{103}{12}\right)+\left(+\frac{6}{12}\right)$$
$$=-\frac{97}{12}=-8\frac{1}{12}$$

따라서 A보다 작지 않은 음의 정수는 -8, -7, -6, $\cdots$, -1의 8개이다.

답 ④

03

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\right)+\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)$$

$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$

$=\frac{45}{30}+\left(-\frac{10}{30}\right)+\left(-\frac{12}{30}\right)=\frac{23}{30}$ 답 ⑤

04

조건 ㈎에서 a는 정수이고 $a+1$의 절댓값이 2보다 작으므로 $a+1$이 될 수 있는 값은

-1, 0, 1

즉, a가 될 수 있는 값은

-2, -1, 0

조건 ㈏에서 b는 정수이고 $b+1$의 절댓값이 1보다 작으므로

$b+1=0$

$\therefore b=-1$

조건 ㈐에서 b의 값은 a의 값보다 크므로

$a=-2$, $b=-1$ 답 $a=-2$, $b=-1$

05

조건 ㈎에서 $57=1\times57=3\times19$이므로 주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b\times|a+b|=1\times57$인 경우

조건 ㈏에서 b와 9는 서로소이므로 $b=1$, $|a+b|=57$

즉, $|a+1|=57$이므로

$a+1=57$ 또는 $a+1=-57$

$\therefore a=56$ 또는 $a=-58$

(ii) $b\times|a+b|=3\times19$인 경우

조건 ㈏에서 b와 9는 서로소이므로 $b=19$, $|a+b|=3$

즉, $|a+19|=3$이므로

$a+19=3$ 또는 $a+19=-3$

$\therefore a=-16$ 또는 $a=-22$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$56+(-58)+(-16)+(-22)=-40$ 답 ①

06

A의 높이를 0 m라 하면

C는 A보다 9.5 m만큼 높으므로 C의 높이는

$0+9.5=9.5$(m)

D는 C보다 2.3 m만큼 낮으므로 D의 높이는

$9.5-2.3=7.2$(m)

B는 A보다 6.2 m만큼 낮으므로 B의 높이는

$0-6.2=-6.2$(m)

E는 B보다 4.8 m만큼 높으므로 E의 높이는

$(-6.2)+(+4.8)=-1.4$(m)

따라서 가장 높은 지점은 C, 가장 낮은 지점은 B이므로 두 지점의 높이의 차는

$9.5-(-6.2)=9.5+(+6.2)=15.7$(m) 답 15.7 m

07

① $a=\frac{1}{4}+\frac{11}{12}=\frac{3}{12}+\frac{11}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$

② $a+b=\frac{1}{4}$, 즉 $\frac{7}{6}+b=\frac{1}{4}$에서

$b=\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=\frac{3}{12}-\frac{14}{12}=-\frac{11}{12}$

③ $\frac{11}{12}+c=b$, 즉 $\frac{11}{12}+c=-\frac{11}{12}$에서

$c=-\frac{11}{12}-\frac{11}{12}=-\frac{22}{12}=-\frac{11}{6}$

④ $-\frac{1}{2}+d=\frac{1}{4}$에서

$d=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

⑤ $d+e=\frac{11}{12}$, 즉 $\frac{3}{4}+e=\frac{11}{12}$에서

$e=\frac{11}{12}-\frac{3}{4}=\frac{11}{12}-\frac{9}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

08

조건 ㈎, ㈏, ㈐에 의하여

$b<a<0<c$, $|b|=|c|$

조건 ㈑에서 $c-b=8$이고, $b<0<c$, $|b|=|c|$이므로

$b=-4$, $c=4$

또한, $c-a=\frac{11}{2}$이므로

$4-a=\frac{11}{2}$

$\therefore a=4-\frac{11}{2}=\frac{8}{2}-\frac{11}{2}=-\frac{3}{2}$

$\therefore a-b-c=\left(-\frac{3}{2}\right)-(-4)-(+4)$

$=\left(-\frac{3}{2}\right)+(+4)+(-4)$

$=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

09

3, 1, -2의 세 수를 이용하면

$7=3+3+1$, $-3=(-2)+(-2)+1$

과 같이 나타낼 수 있으므로 광수는 1위를 2회, 2위를 1회 하였고, 영자는 2위를 1회, 3위를 2회 하였다.

따라서 영철이는 1위를 1회, 2위를 1회, 3위를 1회 하였으므로 얻은 점수는

$3+1+(-2)=2$(점) **답** ⑤

• 다른 풀이 •

광수, 영자, 영철이가 한 번 게임을 할 때 세 사람의 점수의 합은

$3+1+(-2)=2$(점)

총 3회의 게임을 하였으므로 세 사람의 점수의 총합은

$2\times3=6$(점)

이때 광수는 7점, 영자는 -3점을 얻었으므로 영철이 얻은 점수는

$6-\{7+(-3)\}=6-4=2$(점)

10 해결단계

❶ 단계	주어진 규칙대로 수를 나열하여 반복되는 수를 찾는다.
❷ 단계	100번째에 오는 수를 구한다.

규칙대로 수를 나열하면

$+3,\ -2,\ -5,\ -3,\ +2,\ +5,\ +3,\ -2,\ -5,\ \cdots$

즉, 6개의 수 $+3,\ -2,\ -5,\ -3,\ +2,\ +5$가 반복된다.

이때 $100=6\times16+4$이므로 100번째에 오는 수는 4번째에 오는 수와 같다.

따라서 구하는 수는 -3이다. **답** -3

11

$[-5,\ 7]=7-(-5)=7+(+5)=12$

$[12,\ [a,\ 3]]=9$가 되려면

$[a,\ 3]=3$ 또는 $[a,\ 3]=21$

(i) $[a,\ 3]=3$일 때

$|a-3|=3$이므로

$a-3=3$ 또는 $a-3=-3$

$\therefore a=6$ 또는 $a=0$

(ii) $[a,\ 3]=21$일 때

$|a-3|=21$이므로

$a-3=21$ 또는 $a-3=-21$

$\therefore a=24$ 또는 $a=-18$

(i), (ii)에서 $M=24,\ m=-18$이므로

$$\begin{aligned}[M,\ m]&=[24,\ -18]\\&=24-(-18)=24+(+18)=42\end{aligned}$$

답 42

12

$-\dfrac{37}{14}=-3+\dfrac{5}{14},\ -\dfrac{21}{5}=-5+\dfrac{4}{5},\ \dfrac{59}{7}=8+\dfrac{3}{7},\ \dfrac{79}{16}=4+\dfrac{15}{16}$

이므로

$a_1=-3,\ a_2=-5,\ a_3=8,\ a_4=4$

$b_1=\dfrac{5}{14},\ b_2=\dfrac{4}{5},\ b_3=\dfrac{3}{7},\ b_4=\dfrac{15}{16}$

$$\begin{aligned}\therefore a_1-b_2+a_3-b_4&=-3-\frac{4}{5}+8-\frac{15}{16}\\&=5-\frac{4}{5}-\frac{15}{16}\\&=3+\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(1-\frac{15}{16}\right)\\&=3+\frac{1}{5}+\frac{1}{16}=3+\frac{21}{80}\end{aligned}$$

따라서 $a_1-b_2+a_3-b_4$의 정수 부분은 3이고,

0과 1 사이의 유리수 부분은 $\dfrac{21}{80}$이다. **답** $3,\ \dfrac{21}{80}$

13

$\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div a\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=-\dfrac{5}{4}$에서

$\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div a\times\left(+\dfrac{25}{4}\right)=-\dfrac{5}{4}$이므로

$\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div a=\left(-\dfrac{5}{4}\right)\div\dfrac{25}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore a&=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left\{\left(-\frac{5}{4}\right)\div\frac{25}{4}\right\}\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left\{\left(-\frac{5}{4}\right)\times\frac{4}{25}\right\}\\&=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\times(-5)=3\end{aligned}$$

답 ③

14

$2025^2-2025=2025\times(2025-1)=2025\times2024$

이므로

$\dfrac{2025^2-2025}{2024}=\dfrac{2025\times2024}{2024}=2025$ **답** 2025

15

$$\begin{aligned}A\div\left(-\frac{1}{3}\right)\times4\div\left(-\frac{10}{7}\right)&=A\times(-3)\times4\times\left(-\frac{7}{10}\right)\\&=A\times\frac{42}{5}\end{aligned}$$

이때 $B=A\times\dfrac{42}{5}$가 양의 정수, 즉 자연수가 되려면 A는 5의 배수이어야 한다.

따라서

$A=5$일 때 $B=5\times\frac{42}{5}=42$

$A=10$일 때 $B=10\times\frac{42}{5}=84$

$A=15$일 때 $B=15\times\frac{42}{5}=126$

$\vdots$

이므로 $A+B$의 값 중에서 가장 작은 수는

$5+42=47$

답 47

16

두 수의 곱이 가장 크려면

(양수)×(양수) 꼴 또는 (음수)×(음수) 꼴이어야 하므로 a가 될 수 있는 수는

$6\times2=12$ 또는 $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=1$

이 중에서 가장 큰 수는 12이므로

$a=12$

(가)

두 수의 곱이 가장 작으려면 (양수)×(음수) 꼴이어야 하므로 b가 될 수 있는 수는

$6\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{2}$ 또는 $6\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-8$ 또는

$2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}$ 또는 $2\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3}$

이 중에서 가장 작은 수는 -8이므로

$b=-8$

(나)

$\therefore a\div b=12\div(-8)=12\times\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{2}$

(다)

$-\frac{3}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	a의 값을 구한 경우	40%
(나)	b의 값을 구한 경우	40%
(다)	$a\div b$의 값을 구한 경우	20%

17

$|x|-|y|=5$이고 $|y|=\frac{3}{2}$이므로

$|x|-\frac{3}{2}=5 \quad \therefore |x|=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$

즉, $|x|=\frac{13}{2}$, $|y|=\frac{3}{2}$이므로

$x=\frac{13}{2}$ 또는 $x=-\frac{13}{2}$이고 $y=\frac{3}{2}$ 또는 $y=-\frac{3}{2}$

이때 $x\div y$의 값은

$\frac{13}{2}\div\frac{3}{2}=\frac{13}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{3}$

또는 $\left(-\frac{13}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{13}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{3}$

또는 $\frac{13}{2}\div\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{3}$

또는 $\left(-\frac{13}{2}\right)\div\frac{3}{2}=-\frac{13}{2}\times\frac{2}{3}=-\frac{13}{3}$

따라서 가장 큰 값은 $\frac{13}{3}$, 가장 작은 값은 $-\frac{13}{3}$이므로 그 차는

$\frac{13}{3}-\left(-\frac{13}{3}\right)=\frac{13}{3}+\left(+\frac{13}{3}\right)=\frac{26}{3}$

답 ②

18

(i) n이 짝수일 때

$2n+3$, $2n+1$, $n+1$은 홀수이므로

(주어진 식)$=(+1)\times(-1)\div(-1)\times(-1)=-1$

(ii) n이 홀수일 때

$2n+3$, $2n+1$은 홀수, $n+1$은 짝수이므로

(주어진 식)$=(-1)\times(-1)\div(-1)\times(+1)=-1$

(i), (ii)에서 주어진 식의 값은 -1이다.

답 -1

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

거듭제곱의 계산에서

$(\text{양수})^{(\text{짝수})}$ ⇨ (양수), $(\text{양수})^{(\text{홀수})}$ ⇨ (양수)

$(\text{음수})^{(\text{짝수})}$ ⇨ (양수), $(\text{음수})^{(\text{홀수})}$ ⇨ (음수)

이므로 $(-1)^n$ 꼴이 나오면 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어서 식의 값을 구해야 한다.

19

$a=\left\{1-\left(-\frac{6}{5}\right)^2\div\left(-\frac{3}{10}\right)\right\}\div\frac{3}{5}$

$=\left\{1-\left(+\frac{36}{25}\right)\times\left(-\frac{10}{3}\right)\right\}\times\frac{5}{3}$

$=\left\{1-\left(-\frac{24}{5}\right)\right\}\times\frac{5}{3}$

$=\left\{1+\left(+\frac{24}{5}\right)\right\}\times\frac{5}{3}$

$=\frac{29}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{29}{3}$

$b=-\frac{5}{6}-\left\{-2+\frac{15}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\div\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}$

$=-\frac{5}{6}-\left\{-2+\frac{15}{4}\times\frac{4}{9}\div\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}$

$=-\frac{5}{6}-\left\{-2+\frac{5}{3}\times(-8)\right\}$

$=-\frac{5}{6}-\left(-2-\frac{40}{3}\right)$

$=-\frac{5}{6}-\left(-\frac{46}{3}\right)$

$=-\frac{5}{6}+\left(+\frac{92}{6}\right)$

$=\frac{87}{6}=\frac{29}{2}$

따라서 $\frac{29}{3}<x<\frac{29}{2}$를 만족시키는 정수 x는 10, 11, 12, 13, 14의 5개이다.

답 ③

20

$a=\left(-\frac{5}{2}\right)+(-3)=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{6}{2}\right)=-\frac{11}{2}$

$b=\left\{-2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\left\{-\frac{4}{2}+\left(+\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$c=\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\times 6=4$

$\therefore a\div(b-c)=\left(-\frac{11}{2}\right)\div\left(\frac{9}{4}-4\right)$

$=\left(-\frac{11}{2}\right)\div\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right)$

$=\left(-\frac{11}{2}\right)\div\left(-\frac{7}{4}\right)$

$=\left(-\frac{11}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{22}{7}$

답 ④

21

$A=-\frac{6}{7}\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{4}\div\left(-\frac{5}{2}\right)^2\times 5\right\}+1$

$=-\frac{6}{7}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4}\div\frac{25}{4}\times 5\right)+1$

$=-\frac{6}{7}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4}\times\frac{4}{25}\times 5\right)+1$

$=-\frac{6}{7}\times\left(\frac{1}{2}+3\right)+1$

$=-\frac{6}{7}\times\frac{7}{2}+1$

$=-3+1=-2$

$A\times B=1$에서 B는 A의 역수이므로

$B=-\frac{1}{2}$

답 ②

22

$\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\left(\frac{1}{3}-1\right)\times\left(\frac{1}{4}-1\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{30}-1\right)$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\cdots\times\left(-\frac{29}{30}\right)$

$=-\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{29}{30}\right)$

$=-\frac{1}{30}$

답 ③

23

$8\triangle 12=(8+12)\div 8=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$이므로

(가)

$x\bigstar(8\triangle 12)=\frac{7}{2}$에서 $x\bigstar\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

$\therefore \left|x-\frac{5}{2}\right|=\frac{7}{2}$

(ⅰ) $x-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$일 때

$x=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$

(ⅱ) $x-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}$일 때

$x=-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=-1$

(나)

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 합은

$6+(-1)=5$

(다)

답 5

단계	채점 기준	배점
(가)	$8\triangle 12$의 값을 구한 경우	20%
(나)	조건을 만족시키는 x의 값을 모두 구한 경우	70%
(다)	모든 x의 값의 합을 구한 경우	10%

BLACKLABEL 특강 필수 개념

절댓값

$a>0$에 대하여 $|x|=a$이면

$x=a$ 또는 $x=-a$

24

어떤 수를 □라 하면

$\square\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}$이므로

$\square\times\frac{4}{9}=\frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore \square=\left\{\frac{5}{6}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\div\frac{4}{9}$

$=\left\{\frac{5}{6}+\left(+\frac{3}{2}\right)\right\}\times\frac{9}{4}$

$=\frac{7}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{21}{4}$

따라서 바르게 계산하면

$\frac{21}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=-2$

답 ①

25

갑은 6번 이기고 4번 졌으므로 갑의 위치의 값은

$6\times(+4)+4\times(-3)=24-12=12$

을은 4번 이기고 6번 졌으므로 을의 위치의 값은

$4\times(+4)+6\times(-3)=16-18=-2$

따라서 갑과 을의 위치의 값의 차는

$12-(-2)=14$ **답** 14

26

$\frac{5}{3}$를 [1단계]에 적용하면

$\left\{\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}\times(-9)\div\frac{3}{4}$

$=\left\{\left(+\frac{10}{6}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)\right\}\times(-9)\div\frac{3}{4}$

$=\left(+\frac{5}{2}\right)\times(-9)\times\frac{4}{3}=-30$

-30을 [2단계]에 적용하면

$(-30)^2\div(-2)=900\div(-2)=-450$

-450을 [3단계]에 적용하면

$(-450)\times\left(-\frac{2}{3}\right)-(-300)=300+(+300)=600$

답 600

27

$[3.7]=3$, $\left[\frac{49}{11}\right]=4$, $\left[-\frac{17}{4}\right]=-5$, $[-2.3]=-3$,

$\left[-\frac{20}{3}\right]=-7$이므로

$[3.7]+\left[\frac{49}{11}\right]\div\left[-\frac{17}{4}\right]-\frac{1}{5}\times\left([-2.3]\times\left[-\frac{20}{3}\right]\right)$

$=3+4\div(-5)-\frac{1}{5}\times\{(-3)\times(-7)\}$

$=3-\frac{4}{5}-\frac{21}{5}=-2$ **답** -2

28

$\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$이므로 $\frac{1}{3}\triangledown\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$

$-\frac{1}{2}=-\frac{15}{30}$, $\frac{4}{15}=\frac{8}{30}$이므로 두 수를 나타내는 두 점 사이의 거리는

$\frac{8}{30}-\left(-\frac{15}{30}\right)=\frac{23}{30}$

따라서 같은 거리만큼 떨어져 있으려면 $\frac{23}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{60}$만큼 떨어진 경우이므로

$\left(-\frac{1}{2}\right)\triangledown\left(\frac{1}{3}\triangledown\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\triangledown\frac{4}{15}=-\frac{1}{2}+\frac{23}{60}$

$=-\frac{30}{60}+\frac{23}{60}=-\frac{7}{60}$ **답** ③

29

점 C가 나타내는 수가 $-\frac{1}{2}$일 때 점 C와 점 A 사이의 거리는 점 C와 점 D 사이의 거리의 2배이어야 한다.

① 점 D가 나타내는 수가 $\frac{1}{3}$이면 두 점 C와 D 사이의 거리는

$\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times\frac{5}{6}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{3}=-\frac{3}{6}-\frac{10}{6}=-\frac{13}{6}$

② 점 D가 나타내는 수가 1이면 두 점 C와 D 사이의 거리는

$1-\left(-\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}-\frac{6}{2}=-\frac{7}{2}$

③ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{7}{2}$이면 두 점 C와 D 사이의 거리는

$\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times4=-\frac{1}{2}-8=-\frac{1}{2}-\frac{16}{2}=-\frac{17}{2}$

④ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{7}{4}$이면 두 점 C와 D 사이의 거리는

$\frac{7}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}+\frac{2}{4}=\frac{9}{4}$

따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times\frac{9}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{10}{2}=-5$

⑤ 점 D가 나타내는 수가 $\frac{5}{2}$이면 두 점 C와 D 사이의 거리는

$\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$

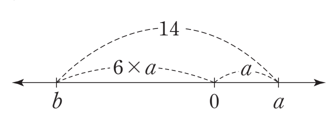
따라서 점 A가 나타내는 수는

$\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times3=-\frac{1}{2}-6=-\frac{1}{2}-\frac{12}{2}=-\frac{13}{2}$

그러므로 두 점 A, D가 나타내는 수로 가능한 것은 ⑤이다. **답** ⑤

30

주어진 조건을 만족시키는 두 정수 a, b를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a=14\div7=2$이므로

$b=-(6\times a)=-(6\times2)=-12$

$\therefore (-5)\times a+b\div4-a\times b$

$=(-5)\times2+(-12)\div4-2\times(-12)$

$=(-10)+(-3)-(-24)$

$=(-13)+(+24)=11$ **답** 11

31

$A=12.43\times(-14.24)-3\times7.43+12.43\times17.24$

$=12.43\times(-14.24)+12.43\times17.24-3\times7.43$

$=12.43\times\{(-14.24)+17.24\}-3\times7.43$

$=12.43\times(+3)-3\times7.43$

$=3\times12.43-3\times7.43$

$=3\times(12.43-7.43)$

$=3\times5=15$

$B=2-2\times\left\{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\div\left(-2+\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}\right\}$

$=2-2\times\left\{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)\div\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{2}\right\}$

$=2-2\times\left\{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}\right\}$

$=2-2\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)$

$=2-2\times\frac{7}{8}$

$=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$

c는 $A=15$와 마주 보고 있으므로 $c=\frac{1}{15}$

b는 $B=\frac{1}{4}$과 마주 보고 있으므로 $b=4$

a는 $-0.16=-\frac{16}{100}=-\frac{4}{25}$와 마주 보고 있으므로

$a=-\frac{25}{4}$

$\therefore a\div\frac{3}{b}\times c=a\times\frac{b}{3}\times c=\left(-\frac{25}{4}\right)\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{15}=-\frac{5}{9}$

답 $-\frac{5}{9}$

32

4개의 주사위의 각 면에 적힌 수의 합은

$\left\{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)+0+3+\frac{7}{2}+4\right\}\times4=36$

가려지는 면에 적힌 수의 합이 최소일 때, 가려지는 면을 제외한 면에 적힌 수의 합이 최대가 된다. 즉, 한 면이 가려지는 주사위의 경우 가려진 면에 -1이 있으면 되고, 세 면이 가려지는 주사위의 경우 가려진 면에 -1, $-\frac{1}{2}$, 0이 있으면 된다.

따라서 가려지는 면을 제외한 모든 면에 적힌 수의 합의 최댓값은

$36-\left\{(-1)\times4+\left(-\frac{1}{2}\right)+0\right\}=36-\left(-\frac{9}{2}\right)$

$=\frac{72}{2}+\frac{9}{2}=\frac{81}{2}$ **답** $\frac{81}{2}$

33

조건 (가)와 (나)에 의하여

a와 b의 부호는 다르고 b와 c의 부호는 다르다.

즉, a와 c의 부호는 같다.

조건 (다)에 의하여

c와 d의 부호는 같다.

이상을 정리하여 표로 나타내면 다음과 같이 두 가지로 구분된다.

	a	b	c	d
(i)	$+$	$-$	$+$	$+$
(ii)	$-$	$+$	$-$	$-$

① $\frac{a}{c}>0$

② $a\times d>0$

③ b의 부호가 $a+d$의 부호와 다르므로 $b\times(a+d)<0$

④ 조건 (다)에서 $c>0$이면 $d>c$, 즉 $d-c>0$이므로

$c\times(d-c)>0$

$c<0$이면 $d<c$, 즉 $d-c<0$이므로

$c\times(d-c)>0$

$\therefore c\times(d-c)>0$

⑤ $d>0$이면 $c-b>0$이므로 $d\times(c-b)>0$

$d<0$이면 $c-b<0$이므로 $d\times(c-b)>0$

$\therefore d\times(c-b)>0$

따라서 나머지 넷과 부호가 다른 하나는 ③이다. **답** ③

34

$a>b>c$, $a\times b<0$에서 $c<b<0<a$

이때 $a+b>0$이므로 $|b|<|a|$

또한, $a+c<0$이므로 $|a|<|c|$

$\therefore |b|<|a|<|c|$

① $|b|<|a|$이므로 $|a|-|b|>0$

② $|a|<|c|$이므로 $|a|-|c|<0$

③ $|b|<|c|$이므로 $|b|-|c|<0$

④ $c<b<0$이므로 $b\times c>0$

⑤ $c<a$이므로 $a-c>0$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. **답** ③

• 다른 풀이 •

조건을 만족시키는 세 유리수 a, b, c를 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$으로 놓으면

① $|a|=2$, $|b|=1$이므로 $|a|-|b|=2-1=1>0$

② $|a|=2$, $|c|=3$이므로 $|a|-|c|=2-3=-1<0$

③ $|b|=1$, $|c|=3$이므로 $|b|-|c|=1-3=-2<0$

④ $b\times c=(-1)\times(-3)=3>0$

⑤ $a-c=2-(-3)=2+(+3)=5>0$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

35

조건 ㈎에서 a와 b의 부호는 같으므로

조건 ㈏에 의하여 $a<0$, $b<0$이다.

이때 a가 될 수 있는 값은 -4, -3, -2, -1이고 b가 될 수 있는 값은 -3, -2, -1이다.

따라서 조건 ㈐를 만족시키는 a, b를 (a, b) 꼴로 나타내면

$(-4, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, -1)$, $(-2, -1)$

답 $(-4, -2)$, $(-4, -1)$, $(-3, -1)$, $(-2, -1)$

36

$a>0$이고 $b\times c\div a>0$이므로 $b\times c>0$

이때 a, b, c중에는 부호가 다른 것이 반드시 있으므로

$b<0$, $c<0$

또한, $1<|c|<|b|<|a|$이므로

$a=4$, $b=-3$, $c=-2$라 하면

$\frac{1}{b}=-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$, $-a=-4$, $\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$, $b^2=9$

따라서 큰 것부터 차례대로 나열하면

b^2, $-\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $-a$

답 b^2, $-\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $-a$

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.054~055

01 $\frac{24}{25}$	02 C, B, A	03 $\frac{23}{4}$	04 ④	05 4
06 ④	07 ㄷ	08 2		

01 해결단계

❶ 단계	$-\frac{1}{200}$과 $\frac{3}{25}$을 나타내는 두 점 사이를 5등분한 점 사이의 간격을 구한다.
❷ 단계	x_1, x_2, x_3, x_4의 값을 각각 구한 후, $x_1+x_2+x_3+x_4$의 값을 구한다.
❸ 단계	y_1, y_2, y_3, y_4의 값을 각각 구한 후, $y_1+y_2+y_3+y_4$의 값을 구한다.
❹ 단계	$x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4$의 값을 구한다.

$-\frac{1}{200}$과 $\frac{3}{25}$을 나타내는 두 점 사이를 5등분한 점 사이의 간격은

$\left\{\frac{3}{25}-\left(-\frac{1}{200}\right)\right\}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{40}$이다.

이때 $x_1=-\frac{1}{200}+\frac{1}{40}$, $x_2=-\frac{1}{200}+2\times\frac{1}{40}$,

$x_3=-\frac{1}{200}+3\times\frac{1}{40}$, $x_4=-\frac{1}{200}+4\times\frac{1}{40}$이므로

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4\times\left(-\frac{1}{200}\right)+\frac{1}{40}\times(1+2+3+4)$$
$$=-\frac{1}{50}+\frac{1}{4}=\frac{23}{100}$$

또한, $y_1=\frac{3}{25}+\frac{1}{40}$, $y_2=\frac{3}{25}+2\times\frac{1}{40}$, $y_3=\frac{3}{25}+3\times\frac{1}{40}$,

$y_4=\frac{3}{25}+4\times\frac{1}{40}$이므로

$$y_1+y_2+y_3+y_4=4\times\frac{3}{25}+\frac{1}{40}\times(1+2+3+4)$$
$$=\frac{12}{25}+\frac{1}{4}=\frac{73}{100}$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4=\frac{23}{100}+\frac{73}{100}$$
$$=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}$$

답 $\frac{24}{25}$

02 해결단계

❶ 단계	(시간)=(거리)÷(속력)임을 이용하여 세 차량이 걸린 시간을 각각 구한다.
❷ 단계	가장 빨리 도착한 차량부터 순서대로 나타낸다.

세 차량의 처음 속력을 1이라 하면

(시간)=(거리)÷(속력)

이므로 1000 m를 달리는 데 걸리는 시간은 각각

$$(\text{A 차량이 걸린 시간})=200\div1+300\div\frac{1}{2}+500\div\frac{1}{4}$$
$$=200+300\times2+500\times4$$
$$=200+600+2000$$
$$=2800$$

$$(\text{B 차량이 걸린 시간})=100\div1+500\div\frac{1}{2}+400\div\frac{1}{4}$$
$$=100+500\times2+400\times4$$
$$=100+1000+1600$$
$$=2700$$

$$(\text{C 차량이 걸린 시간})=100\div1+600\div\frac{1}{2}+300\div\frac{1}{4}$$
$$=100+600\times2+300\times4$$
$$=100+1200+1200$$
$$=2500$$

따라서 가장 빨리 도착한 차량부터 순서대로 나타내면

C, B, A

답 C, B, A

03 해결단계

❶ 단계	가장 왼쪽의 수는 양수, 가운데 수와 가장 오른쪽의 수의 곱은 절댓값이 가장 큰 음수가 되어야 함을 파악한다.
❷ 단계	가운데 수와 가장 오른쪽의 수의 곱은 (양수)×(음수) 꼴임을 파악한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 값 중에서 가장 큰 수를 구한다.

□ 안에 넣을 수를 왼쪽부터 차례대로 A, B, C라 하면 주어진 식은 $A-B\times C$라 할 수 있다.

주어진 식의 값이 가장 크려면 A는 양수이고, $B\times C$는 절댓값이 가장 큰 음수이어야 한다.

즉, $B\times C$는 (양수)×(음수) 꼴이어야 하므로

(ⅰ) $A=\frac{3}{4}$일 때, $B\times C$의 값은

$\frac{5}{2}\times(-2)=-5$ 또는 $\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{6}$

$|-5|>\left|-\frac{5}{6}\right|$이므로 $B\times C=-5$

따라서 주어진 식의 값은

$\frac{3}{4}-(-5)=\frac{3}{4}+\left(+\frac{20}{4}\right)=\frac{23}{4}$

(ⅱ) $A=\frac{5}{2}$일 때, $B\times C$의 값은

$\frac{3}{4}\times(-2)=-\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{4}$

$\left|-\frac{3}{2}\right|>\left|-\frac{1}{4}\right|$이므로 $B\times C=-\frac{3}{2}$

따라서 주어진 식의 값은

$\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}+\left(+\frac{3}{2}\right)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 나올 수 있는 값 중에서 가장 큰 수는 $\frac{23}{4}$이다.

답 $\frac{23}{4}$

04 해결단계

❶ 단계	조건 ㈎를 이용하여 A, B, C의 부호를 파악한 후 $A+B-C=\|A\|+\|B\|+\|C\|$임을 확인한다.
❷ 단계	조건 ㈏, ㈐를 이용하여 $\|A\|\times\|B\|\times\|C\|$의 값에 따라 경우를 나누어 $A+B-C$의 값을 구한다.
❸ 단계	$A+B-C$의 값 중에서 가장 큰 값을 구한다.

조건 ㈎에서 한 수는 음수이고, 두 수는 양수이므로 $A+B-C$의 값이 가장 크려면 C가 음수가 되어야 한다.

$\therefore A>0,\ B>0,\ C<0$

$\therefore A+B-C=|A|+|B|+|C|$

이때 $60=2^2\times3\times5$이므로 조건 ㈏, ㈐에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $|A|\times|B|\times|C|=2\times2\times15$일 때

$A+B-C=|A|+|B|+|C|=19$

(ⅱ) $|A|\times|B|\times|C|=2\times3\times10$일 때

$A+B-C=|A|+|B|+|C|=15$

(ⅲ) $|A|\times|B|\times|C|=2\times5\times6$일 때

$A+B-C=|A|+|B|+|C|=13$

(ⅳ) $|A|\times|B|\times|C|=3\times4\times5$일 때

$A+B-C=|A|+|B|+|C|=12$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $A+B-C$의 값 중에서 가장 큰 값은 19이다. 답 ④

05 해결단계

❶ 단계	보이지 않는 면에 적힌 수를 파악한다.
❷ 단계	수지의 게임 결과 값을 구한다.
❸ 단계	가인이가 이기기 위해서는 $b<0$이어야 한다는 조건을 파악한다.
❹ 단계	$b<0$일 때 $a-b>\frac{31}{15}$을 만족시키는 a의 값을 구한다.
❺ 단계	$(a,\ b)$의 개수를 구한다.

마주 보는 면에 적힌 두 수의 곱이 1이므로 두 수는 역수이고, $-\frac{2}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{7}{5}$의 역수는 각각 $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{7}$이므로 보이지 않는 면에 적힌 수는 $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{7}$이다.

수지의 경우 첫 번째에 나온 눈의 수가 $\frac{7}{5}$, 두 번째에 나온 눈의 수가 $-\frac{2}{3}$이므로

$\frac{7}{5}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=\frac{31}{15}$

이때 가인이가 이기려면 $a-b$의 값이 $\frac{31}{15}$보다 커야 하므로 반드시 $b<0$이어야 한다.

$\therefore b=-\frac{2}{3}$ 또는 $b=-\frac{3}{2}$

(ⅰ) $a=\frac{9}{4}$일 때, $(a,\ b)$는 $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{2}\right)$이므로

$a-b=\frac{9}{4}+\frac{2}{3}=\frac{35}{12}>\frac{31}{15}$, $a-b=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{15}{4}>\frac{31}{15}$

(ⅱ) $a=\frac{7}{5}$일 때, $(a,\ b)$는 $\left(\frac{7}{5},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{5},\ -\frac{3}{2}\right)$이므로

$a-b=\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=\frac{31}{15}$, $a-b=\frac{7}{5}+\frac{3}{2}=\frac{29}{10}>\frac{31}{15}$

(ⅲ) $a=\frac{5}{7}$일 때, $(a,\ b)$는 $\left(\frac{5}{7},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{7},\ -\frac{3}{2}\right)$이므로

$a-b=\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=\frac{29}{21}<\frac{31}{15}$, $a-b=\frac{5}{7}+\frac{3}{2}=\frac{31}{14}>\frac{31}{15}$

(ⅳ) $a=\frac{4}{9}$일 때, $(a,\ b)$는 $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{3}{2}\right)$이므로

$a-b=\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}<\frac{31}{15}$, $a-b=\frac{4}{9}+\frac{3}{2}=\frac{35}{18}<\frac{31}{15}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 가인이가 이기는 경우의 $(a,\ b)$는

$\left(\frac{9}{4},\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{5},\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{7},\ -\frac{3}{2}\right)$

의 4개이다. 답 4

06 해결단계

❶단계	9를 소인수분해하여 네 개의 서로 다른 정수의 곱으로 표현한다.
❷단계	네 개의 서로 다른 정수의 합이 0임을 이용하여 $a+b+c+d$의 값을 구한다.

네 개의 서로 다른 정수의 곱이 9가 되는 경우는

$(-3)\times(-1)\times1\times3=9$

이때 $(-3)+(-1)+1+3=0$이므로

$(13-a)+(12-b)+(11-c)+(10-d)=0$

덧셈의 교환법칙과 결합법칙에 의하여

$(13+12+11+10)-a-b-c-d=0$

$\therefore\ a+b+c+d=46$

답 ④

07 해결단계

❶단계	각 변의 네 개의 수의 합을 구한다.
❷단계	각 변의 네 개의 수의 합이 20이 아닌 예를 찾는다.
❸단계	A, B, C 모두 5가 아닌 예를 찾는다.
❹단계	$A+B+C$의 값이 3의 배수임을 설명한다.

각 변의 네 수의 합은

$\dfrac{(1+2+3+\cdots+8+9)+A+B+C}{3}$

$=\dfrac{45}{3}+\dfrac{A+B+C}{3}$

$=15+\dfrac{A+B+C}{3}$

ㄱ. $A=1$, $B=2$, $C=3$이면 각 변의 네 개의 수의 합은

$15+\dfrac{A+B+C}{3}=15+\dfrac{1+2+3}{3}=17$

따라서 각 변의 수의 합이 반드시 20이 되는 것은 아니다.

ㄴ. ㄱ에서 A, B, C 중에서 적어도 하나가 반드시 5가 되는 것은 아니다.

ㄷ. $\dfrac{A+B+C}{3}$가 자연수이어야 하므로 $A+B+C$의 값은 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

08 해결단계

❶단계	조건 (가), (나), (다)를 이용하여 a, b, c의 값의 범위를 파악한다.
❷단계	조건을 만족시키는 a, b, c의 값을 구한다.
❸단계	$b-a+c$의 값 중에서 가장 큰 값을 구한다.

조건 (가), (나), (다)에 의하여

$b<0<a<c<6$, $|a|<|b|<|c|<6$이므로 $a+b<0$

(i) $c=5$일 때, $a+b+c=4$에서 $a+b=-1$이므로

$a=1$, $b=-2$ 또는 $a=2$, $b=-3$ 또는 $a=3$, $b=-4$

(ii) $1\le c\le4$일 때, $a+b+c=4$에서 $a+b<0$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 가능한 $b-a+c$의 값은

$-2-1+5=2$ 또는 $-3-2+5=0$ 또는 $-4-3+5=-2$

이므로 이 중에서 가장 큰 값은 2이다.

답 2

대단원평가

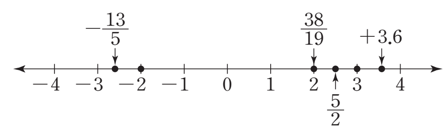
pp.056~057

01 2	02 6	03 ②	04 ⑤
05 69	06 $\frac{9}{10}$	07 ④	08 $-\frac{2}{3}$
09 ②	10 -25	11 10	
12 (1) -15, -12, 11, 18 (2) 3			

01

$-\dfrac{13}{5}=-2.6$, $\dfrac{5}{2}=2.5$, $\dfrac{38}{19}=2$

이므로 주어진 여섯 개의 수를 수직선 위에 점으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$-\dfrac{13}{5}<-2<\dfrac{38}{19}<\dfrac{5}{2}<3<+3.6$이므로 오른쪽에서 세 번째에 있는 점이 나타내는 수는 $\dfrac{5}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{5}{2}$보다 작거나 같은 정수 중에서 가장 큰 수는 2이다.

답 2

02

$-7\le a<\dfrac{7}{2}$이고 $\dfrac{7}{2}=3.5$이므로 정수 a가 될 수 있는 수는

-7, -6, -5, $\cdots$, 2, 3

또한, $|a|>2$이므로 구하는 정수 a는

-7, -6, -5, -4, -3, 3

의 6개이다.

답 6

03

ㄱ. $|a|$와 $|b|$는 항상 0보다 크거나 같으므로 $|a|+|b|=0$이면 $|a|=0$, $|b|=0$이다.

즉, $a=0$, $b=0$이다.

ㄴ. 음수는 작을수록 그 절댓값이 크다.

ㄷ. $a=-1$, $b=2$이면 $a<0<b$이지만 $|a|<|b|$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

04

조건 (가)에서 $b<0$, $|b|=3$이므로 $b=-3$

조건 (나)에서 $c<-4$

조건 (다)에서 $|a|<|b|$이고 $b=-3$이므로

$|a|<|-3|=3 \qquad \therefore -3<a<3$

따라서 $c<-4<-3=b<a<3$이므로

$c<b<a$ **답** ⑤

05 해결단계

❶ 단계	두 유리수 $-\frac{4}{3}$와 $\frac{17}{9}$, $-\frac{27}{5}$과 $\frac{11}{4}$ 사이에 있는 분모가 7인 유리수를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 유리 수 중 정수를 제외하여 a, b의 값을 구한다.
❸ 단계	$a+b$의 값을 구한다.

(i) $-\frac{10}{7}<-\frac{4}{3}<-\frac{9}{7}$이고 $\frac{13}{7}<\frac{17}{9}<\frac{14}{7}$이다.

따라서 구하는 유리수는

$-\frac{9}{7}, -\frac{8}{7}, \cdots, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{13}{7}$

중에서 정수 -1, 1을 제외해야 하므로

$a=9+13-2=20$

(ii) $-\frac{38}{7}<-\frac{27}{5}<-\frac{37}{7}$이고 $\frac{19}{7}<\frac{11}{4}<\frac{20}{7}$이다.

따라서 구하는 유리수는

$-\frac{37}{7}, -\frac{36}{7}, \cdots, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{19}{7}$

중에서 정수 -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2를 제외해야 하므로

$b=37+19-7=49$

(i), (ii)에서 $a+b=20+49=69$ **답** 69

06

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1+\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right\}+\cdots+\left\{\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{9}\right\}-\frac{1}{10}$$
$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

답 $\frac{9}{10}$

BLACKLABEL 특강 필수 원리

부분분수

(1) 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n\times(n+1)}-\frac{n}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n\times(n+1)}$$
$$\therefore \frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

(2) 세 자연수 A, B, $C\,(A\neq B)$에 대하여

$$\frac{C}{B-A}\times\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)=\frac{C}{B-A}\times\frac{B-A}{A\times B}=\frac{C}{A\times B}$$
$$\therefore \frac{C}{A\times B}=\frac{C}{B-A}\times\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$$

07

첫째 날의 가격은

$10000\times\left(1-\frac{10}{100}\right)=10000\times\frac{9}{10}=9000$(원)

둘째 날의 가격은

$9000\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=9000\times\frac{4}{5}=7200$(원)

셋째 날의 가격은

$7200\times\left(1+\frac{20}{100}\right)=7200\times\frac{6}{5}=8640$(원)

따라서 첫째 날과 셋째 날의 이 물건의 가격의 차는

$9000-8640=360$(원) **답** ④

08

$\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$

이므로

$a+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{5}{2}$에서

$$a=\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{4}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

$\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+b=-\frac{5}{2}$에서

$$b=\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)$$
$$=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)=-\frac{1}{6}$$

$\left(-\frac{1}{3}\right)+c+(-1)=-\frac{5}{2}$에서

$$c=\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)-(-1)$$
$$=\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+(+1)=-\frac{7}{6}$$

$$\therefore a\div(b-c)=\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left\{\left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{7}{6}\right)\right\}$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\right)\div1=-\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

09

$a>0$, $b<0$, $|a|=|b|$이므로 $a=3$, $b=-3$이라 하면

ㄱ. $a+b=3+(-3)=0$

ㄴ. $a^2-b^2=3^2-(-3)^2=9-9=0$

ㄷ. $\frac{a}{b}-1=a\div b-1=3\div(-3)-1$

$=-1-1=-2$

ㄹ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. **답** ②

10

$a\times b\div c$가 가장 작은 수가 되려면 절댓값이 큰 음수가 되어야 하므로 a, b, c 중 두 수는 양수 $+\frac{5}{3}$, $+0.4$이고 한 수는 음수 $-\frac{11}{2}$, -6 중 하나이다. (가)

이때 $a\times b\div c$의 절댓값이 가장 크려면 나누는 수의 절댓값은 작아야 하므로

$|+0.4|<\left|+\frac{5}{3}\right|<\left|-\frac{11}{2}\right|<|-6|$에서 $c=+0.4$

또한, 음수는 $-\frac{11}{2}$, -6 중 -6을 택해야 한다. 즉,

$a=-6,\ b=+\frac{5}{3},\ c=+0.4$ 또는 $a=+\frac{5}{3},\ b=-6,\ c=+0.4$ (나)

따라서 $a\times b\div c$를 계산한 결과 중 가장 작은 값은

$(-6)\times\frac{5}{3}\div(+0.4)=(-6)\times\frac{5}{3}\times\left(+\frac{5}{2}\right)=-25$ (다)

답 -25

단계	채점 기준	배점
(가)	a, b, c의 부호를 파악한 경우	20%
(나)	a, b, c의 값을 구한 경우	40%
(다)	$a\times b\div c$를 계산한 결과 중 가장 작은 값을 구한 경우	40%

11

$\frac{11}{48}=\frac{1}{\frac{48}{11}}$이고 $\frac{48}{11}=4+\frac{4}{11}=4+\frac{1}{\frac{11}{4}}$이므로

$\frac{11}{48}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{11}{4}}}$에서

$a=4,\ b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}=\frac{11}{4}$ (가)

또한, $\frac{11}{4}=2+\frac{3}{4}=2+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$이므로

$b=2,\ c=1,\ d=3$ (나)

따라서 $a=4$, $b=2$, $c=1$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=4+2+1+3=10$ (다)

답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	$\frac{11}{48}$의 역수인 가분수를 정수와 진분수의 합으로 나타내어 a의 값을 구한 경우	40%
(나)	(가)와 같은 방법으로 b, c, d의 값을 구한 경우	40%
(다)	$a+b+c+d$의 값을 구한 경우	20%

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$\frac{48}{11}=a+\frac{1}{q}$에서 $a=4$인 이유

만약 $\frac{48}{11}=3+\frac{15}{11}$로 고치면

$3+\frac{15}{11}=3+\cfrac{1}{\frac{11}{15}}=3+\cfrac{1}{0+\frac{11}{15}}$

즉, $b=0$이므로 b는 자연수가 아니다.

12

(1) $35640=2^3\times3^4\times5\times11$ (가)

이때 11에 2 이상의 수를 곱하면 절댓값이 10 이상 20 이하인 수가 될 수 없으므로 서로 다른 몇 개의 정수 중 하나는 11이다.

$2^3\times3^4\times5$를 절댓값이 10 이상 20 이하의 수의 곱으로 나타내면

(i) $5\times2=10$을 포함하는 경우

$2^3\times3^4\times5=(5\times2)\times(2^2\times3^4)$에서

$2^2\times3^4$을 절댓값이 10 이상 20 이하인 수의 곱으로 나타내면

$2^2\times3^4=(2\times3^2)\times(2\times3^2)$

$\therefore\ 35640=10\times11\times18\times18$

그러나 서로 다른 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $5\times3=15$를 포함하는 경우

$2^3\times3^4\times5=(5\times3)\times(2^3\times3^3)$에서

$2^3\times3^3$을 절댓값이 10 이상 20 이하인 수의 곱으로 나타내면

$2^3\times3^3=(2\times3^2)\times(2^2\times3)$

$\therefore\ 35640=11\times12\times15\times18$

(iii) $5\times2^2=20$을 포함하는 경우

$2^3\times3^4\times5=(5\times2^2)\times(2\times3^4)$에서

2×3^4은 절댓값이 10 이상 20 이하인 수의 곱으로 나타낼 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $35640=11\times12\times15\times18$ (나)

이때 두 수끼리의 합의 차가 2가 되도록 네 수를 두 쌍으로 묶으면

$35640=(11\times18)\times(12\times15)$로 나타낼 수 있고,

네 수의 곱이 35640이면서 합이 2가 되어야 하므로 구하는 네 수는 11, 18, -12, -15이다. (다)

(2) 네 수 중 가장 큰 정수와 가장 작은 정수의 합은

$18+(-15)=3$ (라)

답 (1) -15, -12, 11, 18 (2) 3

단계		채점 기준	배점
(1)	(가)	35640을 소인수분해한 경우	20%
	(나)	35640을 10 이상 20 이하의 정수의 곱으로 나타낸 경우	50%
	(다)	(나)에서 합이 2인 네 수를 구한 경우	20%
(2)	(라)	가장 큰 정수와 가장 작은 정수의 합을 구한 경우	10%

Ⅲ 문자와 식

05. 문자의 사용과 식

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.061~062

01 ⑤	02 ④	03 ②	04 ③	05 ②
06 ②	07 ③	08 ①	09 ⑤	10 $7x+24$
11 $13x-17$	12 132			

01

$$a\div b\div\{c\div(1\div d)\}\times e=a\div b\div\left(c\div\frac{1}{d}\right)\times e$$
$$=a\div b\div(c\times d)\times e$$
$$=\frac{a}{b}\div cd\times e$$
$$=\frac{a}{b}\times\frac{1}{cd}\times e=\frac{ae}{bcd}$$

답 ⑤

02

① $10a+b$

② $\frac{x}{12}$원

③ $(4x-y)$원

⑤ $7x+5$

따라서 바르게 나타낸 것은 ④이다. 답 ④

03

① $(-x)^4=\{-(-2)\}^4=2^4=16$

② $-x^4=-(-2)^4=-16$

③ $(-2x)^2=\{-2\times(-2)\}^2=4^2=16$

④ $-2x^3=-2\times(-2)^3=(-2)\times(-8)=16$

⑤ $-\frac{x^5}{2}=-\frac{(-2)^5}{2}=-\frac{-32}{2}=16$

따라서 식의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다. 답 ②

04

$$\frac{6}{a}-\frac{12}{b}+\frac{4}{c}=6\div a-12\div b+4\div c$$
$$=6\div\frac{3}{2}-12\div\frac{4}{3}+4\div\frac{4}{5}$$
$$=6\times\frac{2}{3}-12\times\frac{3}{4}+4\times\frac{5}{4}$$
$$=4-9+5=0$$

답 ③

05

기온이 15 ℃인 날의 소리의 속력은

초속 $391+0.6\times15=391+9=400(\text{m})$이므로

번개가 친 곳에서 블랙이가 있는 곳까지의 거리는

$400\times3=1200(\text{m})=1.2(\text{km})$ 답 ②

06

① $xy+1$은 이차식이다.

③ $3x+5$는 다항식이다.

④ $x+y-y^2-8$의 상수항은 -8이다.

⑤ $5x^2-3x+1$의 차수는 2이다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

07

주어진 식 중 일차식은

$x+1$, $3y$, $3a-2$, $\frac{b+1}{3}$, b의 5개이다. 답 ③

08

$\frac{2}{3}(6x-12)=4x-8$,

$(-4x+8)\div\left(-\frac{4}{3}\right)=(-4x+8)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=3x-6$이므로

$a=4+3=7$

$b=(-8)+(-6)=-14$

$\therefore\ a-b=7-(-14)=21$ 답 ①

09

① $(x-1)+(3x+5)=4x+4$

② $(5x-1)-(3x-6)=2x+5$

③ $(8-x)+4(3x-1)=8-x+12x-4=11x+4$

④ $2(3x+1)-3(5x-1)=6x+2-15x+3=-9x+5$

⑤ $8\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-6\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right)=-4x+2-4x+9$
$=-8x+11$

따라서 상수항이 가장 큰 것은 ⑤이다. 답 ⑤

10

$\frac{1}{2}(3B-2A)+3\{C-(A-B)\}$

$=\frac{3}{2}B-A+3(C-A+B)$

$=\frac{3}{2}B-A+3C-3A+3B$

$=-4A+\frac{9}{2}B+3C$

$=-4(2x-3)+\frac{9}{2}(4x+2)+3(-x+1)$

$=-8x+12+18x+9-3x+3$

$=7x+24$ **답** $7x+24$

11

잘못 계산한 식이 $A-(3x-5)=2x-1$이므로

$A=2x-1+(3x-5)=5x-6$

따라서 바르게 계산한 식 B는

$B=5x-6+(3x-5)=8x-11$

$\therefore A+B=(5x-6)+(8x-11)$

$=13x-17$ **답** $13x-17$

12

색종이 사이의 간격을 다 붙여 직사각형을 만들었을 때의 가로의 길이는 $(2x-9)$ cm, 세로의 길이는 12 cm이므로 색종이 8장의 넓이의 합을 x를 사용한 식으로 나타내면

$12(2x-9)=24x-108\ (\text{cm}^2)$

따라서 $a=24$, $b=-108$이므로

$a-b=24-(-108)$

$=24+108=132$ **답** 132

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.063~068

01 ③ 02 ④ 03 ④ 04 ③ 05 ⑤
06 ④ 07 ③ 08 ① 09 ④ 10 76.6
11 $\frac{10000a}{b^2}$, 정상 12 (1) $3n+1$ (2) 151
13 ④ 14 ⑤ 15 ③
16 총경비 : $(x+50y+62500)$원, 1인당 낼 금액 : $\left(\frac{x}{25}+2y+2500\right)$원
17 15 18 $4x+24$ 19 ② 20 ④ 21 $\frac{1}{2}$
22 $-5x-2$ 23 ② 24 ② 25 $6x-6y-8$
26 ④ 27 ② 28 $(18x-11)$km 29 $2x+12$
30 ⑤ 31 ④ 32 $\frac{65}{2}x+23$ 33 $88x+52$
34 $(91x+9)$ cm² 35 ③ 36 $16x+48$

01

ㄱ. $2\times x=2x$

ㄴ. $(a+b)\div\frac{1}{2}=(a+b)\times 2=2(a+b)$

ㄷ. $2\div 5x=\frac{2}{5x}$

ㄹ. $x\div 3+y\times(-3)=x\times\frac{1}{3}-3\times y=\frac{x}{3}-3y$

ㅁ. $x-y\times z\div 3=x-\frac{yz}{3}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. **답** ③

02

① $-y\times z\div x=-yz\div x=-\frac{yz}{x}$

② $y\times z\div(-x)=yz\div(-x)=-\frac{yz}{x}$

③ $-z\div(x\div y)=-z\div\frac{x}{y}=-z\times\frac{y}{x}=-\frac{yz}{x}$

④ $z\div x\times(-1)\div y=\frac{z}{x}\times(-1)\times\frac{1}{y}=-\frac{z}{xy}$

⑤ $y\times z\div x\times(-1)=yz\times\frac{1}{x}\times(-1)=-\frac{yz}{x}$

따라서 기호를 생략한 결과가 나머지 넷과 다른 것은 ④이다.

답 ④

03

이 중학교의 작년 전체 학생이 x명이므로

작년 남학생 수는 $x\times\frac{a}{100}=\frac{ax}{100}$

즉, 작년 여학생은 $\left(x-\frac{ax}{100}\right)$명이다.

올해는 작년에 비해 여학생 수가 5 % 감소하였으므로 올해 여학생 수는

$\left(x-\frac{ax}{100}\right)\times\left(1-\frac{5}{100}\right)=\left(x-\frac{ax}{100}\right)\times\frac{95}{100}$

$=\frac{19}{20}\left(x-\frac{ax}{100}\right)$ **답** ④

04

이 공장에서 한 명이 하루 동안 만들 수 있는 제품의 개수는

$c\div b\div a=\frac{c}{ab}$

따라서 두 명이 하루 동안 만들 수 있는 제품의 개수는

$2\times\frac{c}{ab}=\frac{2c}{ab}$ **답** ③

05

남학생 x명의 100 m 달리기 기록의 총합은

$16\times x=16x$(초)

여학생 y명의 100 m 달리기 기록의 총합은

$19\times y=19y$(초)

이 반 전체 학생은 $(x+y)$명이므로 구하는 평균은

$\frac{16x+19y}{x+y}$초 **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 개념

평균

$(\text{평균})=\frac{(\text{자료 전체의 합})}{(\text{자료의 개수})}$

06

수진이가 집에서 출발하여 분속 125 m로 x분 동안 걸어서 문구점에 도착했으므로 수진이네 집과 문구점 사이의 거리는

$125\times x=125x$(m)

이때 수진이네 집과 학교 사이의 거리가 2 km, 즉 2000 m이므로 문구점에서 학교까지의 거리는

$(2000-125x)$ m

따라서 수진이가 문구점에서 출발하여 분속 154 m로 걸어서 학교에 도착했으므로 수진이가 문구점에서 학교까지 가는 데 걸린 시간은

$(2000-125x)\div154=\frac{2000-125x}{154}$(분) **답** ④

07

직사각형의 가로의 길이는 $(20x-19)$ cm, 세로의 길이는 x cm이므로 완성된 직사각형의 넓이는

$(20x-19)\times x=x(20x-19)(\text{cm}^2)$ **답** ③

08

$a=-\frac{1}{2}$을 주어진 식에 각각 대입하면

$\frac{1}{a}=1\div\left(-\frac{1}{2}\right)=1\times(-2)=-2$

$a^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{a^2}=1\div\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1\times4=4$

$a^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{1}{a}<a<a^3<a^2<\frac{1}{a^2}$ **답** ①

09

$|a|=|b|=3$이고 $a>b$이므로 $a=3$, $b=-3$

$$\therefore \frac{3a^2-b^3+18}{a^2+b^2}=\frac{3\times3^2-(-3)^3+18}{3^2+(-3)^2}=\frac{27-(-27)+18}{9+9}=\frac{72}{18}=4$$

답 ④

10

섭씨 26 ℃를 화씨온도로 나타내면

$\frac{9}{5}\times26+32=46.8+32=78.8(^\circ\text{F})$

섭씨 24 ℃를 화씨온도로 나타내면

$\frac{9}{5}\times24+32=43.2+32=75.2(^\circ\text{F})$

따라서 기온이 화씨 78.8 °F이고, 습구 온도가 화씨 75.2 °F일 때의 불쾌지수는

$$0.4\times(78.8+75.2)+15=0.4\times154+15=61.6+15=76.6$$

답 76.6

11

a kg은 $1000a$ g이므로 체중이 a kg이고 키가 b cm인 사람의 카우프지수는

$$1000a\div b^2\times10=1000a\times\frac{1}{b^2}\times10=\frac{1000a}{b^2}\times10=\frac{10000a}{b^2}$$

(가)

체중이 45 kg, 키가 1.5 m, 즉 150 cm인 사람의 카우프지수는

$\frac{10000\times45}{150^2}=20$

따라서 이 사람의 비만도는 정상이다.

(나)

답 $\frac{10000a}{b^2}$, 정상

단계	채점 기준	배점
(가)	카우프지수를 a, b를 사용한 식으로 나타낸 경우	50%
(나)	체중이 45 kg이고 키가 1.5 m인 사람의 비만도를 구한 경우	50%

12 해결단계

(1)	❶ 단계	첫 번째 정사각형을 만들 때 필요한 성냥개비의 개수와 정사각형을 1개씩 추가할 때마다 필요한 성냥개비의 개수를 구한다.
	❷ 단계	n개의 정사각형을 만들 때 필요한 성냥개비의 개수를 n에 대한 일차식으로 나타낸다.
(2)	❸ 단계	(1)에서 구한 식에 $n=50$을 대입하여 정사각형 50개를 만들 때 필요한 성냥개비의 개수를 구한다.

(1) 첫 번째 정사각형을 만들 때 필요한 성냥개비의 개수는
$4=1+3$
정사각형을 1개씩 추가할 때마다 성냥개비가 3개씩 더 필요하므로 n개의 정사각형을 만들 때 필요한 성냥개비의 개수는
$1+3\times n=3n+1$

(2) n개의 정사각형을 만들 때 필요한 성냥개비의 개수는 $3n+1$이므로 정사각형 50개를 만들 때 필요한 성냥개비의 개수는
$3\times 50+1=151$ **답** (1) $3n+1$ (2) 151

13

$-3(2x+4)=(-3)\times 2x+(-3)\times 4$
$=-6x-12$

① $3\times(2x+4)=3\times 2x+3\times 4$
$=6x+12$

② $(3x-4)\times 2=3x\times 2-4\times 2$
$=6x-8$

③ $(2x-4)\div\frac{1}{3}=(2x-4)\times 3$
$=2x\times 3-4\times 3$
$=6x-12$

④ $(x+2)\div\left(-\frac{1}{6}\right)=(x+2)\times(-6)$
$=x\times(-6)+2\times(-6)$
$=-6x-12$

⑤ $(-3x+6)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=(-3x+6)\times(-2)$
$=-3x\times(-2)+6\times(-2)$
$=6x-12$

따라서 계산 결과가 $-3(2x+4)$와 같은 것은 ④이다. **답** ④

14

$A=4x$, $B=x^2$이므로
$(-2)^3+(-2)^2A-2B=-8+4\times 4x-2\times x^2$
$=-2x^2+16x-8$

① 다항식의 차수는 2이다.
② x^2의 계수는 -2이다.
③ x의 계수는 16이다.
④ 상수항은 -8이다.
⑤ $-2\times 2^2+16\times 2-8=-8+32-8=16$

따라서 옳은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

15

$(ax+b)\times(-4)=-12x+4$이므로
$ax+b=(-12x+4)\div(-4)=3x-1$
$cx+d=(-12x+4)\div\left(-\frac{2}{3}\right)$
$=(-12x+4)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$
$=18x-6$
따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=18$, $d=-6$이므로
$a+b+c+d=3+(-1)+18+(-6)=14$ **답** ③

16

볼링 경기를 하는 데 필요한 총경비는
$x+25\times 2000+25\times(2\times y+500)$
$=x+50000+25(2y+500)$
$=x+50000+50y+12500$
$=x+50y+62500$(원)
따라서 1인당 내야 할 금액은
$(x+50y+62500)\div 25=(x+50y+62500)\times\frac{1}{25}$
$=\frac{x}{25}+2y+2500$(원)

답 총경비 : $(x+50y+62500)$원,
1인당 낼 금액 : $\left(\frac{x}{25}+2y+2500\right)$원

• 다른 풀이 •

1인당 볼링화 대여료와 간식비는
$2000+2\times y+500=2y+2500$(원)
볼링장 임대료 x원을 회원 25명이 나누어 낼 때, 1인당 임대료는
$x\div 25=\frac{x}{25}$(원)
따라서 1인당 내야 할 금액은 $\left(\frac{x}{25}+2y+2500\right)$원이다.

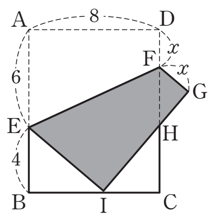
17

첫째 날 초콜릿을 먹고 남은 초콜릿의 개수는
$\frac{5}{9}(27x+36)=15x+20$
둘째 날 초콜릿을 먹고 남은 초콜릿의 개수는
$15x+20-10=15x+10$
셋째 날 초콜릿을 먹고 남은 초콜릿의 개수는
$\frac{3}{5}(15x+10)=9x+6$
따라서 $a=9$, $b=6$이므로
$a+b=9+6=15$ **답** 15

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

첫째 날에 전체 초콜릿 개수의 $\frac{4}{9}$를 먹었으므로 남은 초콜릿의 개수는 전체 초콜릿 개수의 $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이다.

18



접은 부분을 다시 펼치면 사각형 EIGF는 사각형 EADF와 완전히 겹쳐지므로 두 사각형의 넓이는 서로 같다. 이때 사각형 EADF는 사다리꼴이고 완전히 겹쳐지는 두 선분 GF, DF의 길이는 x로 서로 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times(x+6)\times8=4(x+6)$

$=4x+24$

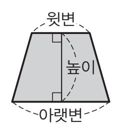
답 $4x+24$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

사다리꼴의 넓이

(사다리꼴의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$ {(윗변의 길이)+(아랫변의 길이)} × (높이)



19

$$\frac{x-1}{6}-\frac{2x+1}{3}+\frac{3x-1}{2}=\frac{(x-1)-2(2x+1)+3(3x-1)}{6}$$
$$=\frac{x-1-4x-2+9x-3}{6}$$
$$=\frac{6x-6}{6}=x-1$$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$

답 ②

20

$$a(x^2+3x)-\frac{1}{3}[4x^2+3\{x-(4x-2)\}]$$
$$=ax^2+3ax-\frac{1}{3}\{4x^2+3(x-4x+2)\}$$
$$=ax^2+3ax-\frac{1}{3}\{4x^2+3(-3x+2)\}$$
$$=ax^2+3ax-\frac{1}{3}(4x^2-9x+6)$$
$$=ax^2+3ax-\frac{4}{3}x^2+3x-2$$
$$=\left(a-\frac{4}{3}\right)x^2+(3a+3)x-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 x에 대한 일차식이므로

$a-\frac{4}{3}=0$, $3a+3\neq0$이어야 한다.

따라서 $a-\frac{4}{3}=0$에서 $a=\frac{4}{3}$이므로 x의 계수는

$3a+3=3\times\frac{4}{3}+3=7$

답 ④

21

주어진 식을 각각 계산하면

$x-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)=x-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$,

$\frac{2}{3}(2x-1)-\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}-x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$,

$x+1-\frac{4x+6}{5}=\frac{5x+5-4x-6}{5}=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$

이므로

$ax+b=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$이므로

$a-b=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

22

삼각형의 한 변에 놓인 네 식의 합은

$-3+(x-6)+(-3x+4)+(2x+2)=-3$

삼각형의 밑변의 왼쪽 꼭짓점에 들어갈 식을 B라 하면

$B+(-3x-3)+(-x-1)+(2x+2)=-3$에서

$B=-3-(-3x-3)-(-x-1)-(2x+2)=2x-1$

$-3+A+(3x+3)+B=-3$에서

$B=2x-1$을 대입하여 풀면

$A=-3-(-3)-(3x+3)-(2x-1)=-5x-2$

답 $-5x-2$

23

$x:y=2:3$이므로 $x=2k$, $y=3k$ (k는 0이 아닌 유리수)라 하면

$$\frac{2x-y}{3x-y}-\frac{4x-3y}{x+2y}=\frac{2\times2k-3k}{3\times2k-3k}-\frac{4\times2k-3\times3k}{2k+2\times3k}$$
$$=\frac{k}{3k}-\frac{-k}{8k}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

답 ②

• 다른 풀이 •

$x:y=2:3$에서 $2y=3x$ $\qquad\therefore y=\frac{3}{2}x$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{2x-y}{3x-y}-\frac{4x-3y}{x+2y}=\frac{2x-\frac{3}{2}x}{3x-\frac{3}{2}x}-\frac{4x-\frac{9}{2}x}{x+3x}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x}-\frac{-\frac{1}{2}x}{4x}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

24

$m+n$은 홀수, mn은 짝수, $m+1$은 홀수이므로

$(-1)^{m+n}(5a+b-3)-(-1)^{mn}(-2a+b+1)$
$+(-1)^{m+1}(a-b+2)$
$=-(5a+b-3)-(-2a+b+1)-(a-b+2)$
$=-5a-b+3+2a-b-1-a+b-2$
$=-4a-b$

답 ②

25

$A=(-y+1)-(-2x+y+3)$
$=-y+1+2x-y-3$
$=2x-2y-2$

$B=\frac{1}{2}A+(x-y-2)$
$=\frac{1}{2}(2x-2y-2)+(x-y-2)$
$=x-y-1+x-y-2$
$=2x-2y-3$

$\therefore A-2B+6C=A-2B+2\times3C$
$=A-2B+2\times2B=A+2B$
$=(2x-2y-2)+2(2x-2y-3)$
$=2x-2y-2+4x-4y-6$
$=6x-6y-8$

답 $6x-6y-8$

26

상자 B에 들어 있는 사탕의 개수를 x라 하면
상자 A에 들어 있는 사탕의 개수는 $x+8$
상자 C에 들어 있는 사탕의 개수는 $x-10$
상자 D에 들어 있는 사탕의 개수는 $(x-10)-12=x-22$
따라서 사탕이 가장 많이 들어 있는 상자는 A, 사탕이 가장 적게 들어 있는 상자는 D이므로 두 상자에 들어 있는 사탕의 개수의 차는
$(x+8)-(x-22)=x+8-x+22=30$

답 ④

27

지난주 B과자의 생산량 : $x-20000$(봉지)
이번 주 A과자의 생산량 : $x\times(1-0.1)=0.9x$(봉지)
이번 주 B과자의 생산량 :
$(x-20000)\times(1+0.2)=1.2x-24000$(봉지)
따라서 이 과자 공장의 이번주 A, B과자의 생산량의 합은
$0.9x+(1.2x-24000)=2.1x-24000$(봉지)

답 ②

28

비룡폭포에서 토왕성폭포 전망대까지의 거리는
$(25x+19)-(21x+3)=4x+16$(km)
따라서 육담폭포에서 비룡폭포까지의 거리는
$(22x+5)-(4x+16)=18x-11$(km)

답 $(18x-11)$ km

29

(선분 AB의 길이)$=(7x+27)-(-x+3)=8x+24$
선분 AP와 선분 PB의 길이의 비가 3 : 5이므로
(선분 AP의 길이)$=(8x+24)\times\frac{3}{8}=3x+9$
$\therefore$ (점 P가 나타내는 수)$=(-x+3)+(3x+9)$
$=2x+12$

답 $2x+12$

30

시작 지점을 0이라 하고 2칸 올라가는 것을 $+2$, 1칸 내려가는 것을 -1이라 하자.
진수가 a번 이기면 $(20-a)$번은 졌으므로 시작 지점을 기준으로 진수의 위치는
$2a-(20-a)=2a-20+a=3a-20$
미정이는 $(20-a)$번 이기고 a번 졌으므로 시작 지점을 기준으로 미정이의 위치는
$2(20-a)-a=40-2a-a=40-3a$
이때 $a>10$이므로 진수가 미정이보다 높은 곳에 위치한다.
따라서 진수와 미정이의 위치의 차는
(진수의 위치)$-$(미정이의 위치)
$=(3a-20)-(40-3a)$
$=3a-20-40+3a$
$=6a-60$(칸)

답 ⑤

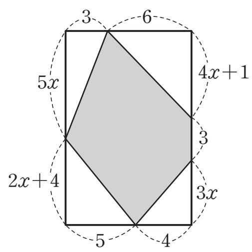
31

색칠한 부분의 둘레의 길이는 정사각형의 둘레의 길이와 원 4개의 둘레의 길이의 합과 같다.
정사각형의 한 변의 길이는 반지름의 길이 x의 4배인 $4x$이므로 정사각형의 둘레의 길이는
$4x\times4=16x$
반지름의 길이가 x인 원의 둘레의 길이는 $2\times3\times x=6x$이므로 원 4개의 둘레의 길이의 합은
$6x\times4=24x$
따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는
$16x+24x=40x$

답 ④

32

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이는 9, 세로의 길이는 $7x+4$이고 색칠한 부분의 넓이는 직사각형의 넓이에서 직각삼각형 4개의 넓이를 뺀 것이므로



(색칠한 부분의 넓이)

$=9(7x+4)-\left\{\frac{15}{2}x+5(x+2)+6x+3(4x+1)\right\}$

$=63x+36-\left(\frac{61}{2}x+13\right)$

$=\frac{65}{2}x+23$ 답 $\frac{65}{2}x+23$

33

처음 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$\{(7x+8)+(x+2)+(2x-1)\}\times4=(10x+9)\times4$

$=40x+36$

새로 생긴 직육면체 5개의 모든 모서리의 길이의 합은 처음 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합에 8개의 단면의 모서리의 길이의 합을 더한 값과 같으므로

$(40x+36)+\{(x+2)+(2x-1)\}\times2\times8$

$=(40x+36)+(3x+1)\times16$

$=40x+36+48x+16$

$=88x+52$ 답 $88x+52$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

처음 직육면체를 그림과 같은 방법으로 4번 잘랐을 때, 새로 생긴 단면은 4개가 아닌 8개임에 주의한다.

34

겹쳐지는 한 부분의 넓이는

$3\times3=9(\text{cm}^2)$

따라서 정사각형의 모양의 종이 x장을 겹쳐 놓을 때 겹쳐지는 부분은 $(x-1)$개이므로 이 도형의 넓이는

$10\times10\times x-9(x-1)=100x-9x+9$

$=91x+9(\text{cm}^2)$ 답 $(91x+9)\ \text{cm}^2$

35

새로 만든 사다리꼴의

(윗변의 길이)$=(k+2)\left(1-\frac{10}{100}\right)=\frac{9}{10}(k+2)$

(아랫변의 길이)$=(2k-3)\left(1+\frac{10}{100}\right)=\frac{11}{10}(2k-3)$

(높이)$=25\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=25\times\frac{4}{5}=20$

따라서 새로 만든 사다리꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{9}{10}(k+2)+\frac{11}{10}(2k-3)\right\}\times20$

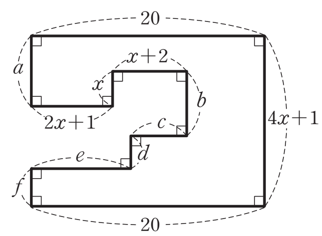
$=9(k+2)+11(2k-3)$

$=9k+18+22k-33$

$=31k-15$ 답 ③

36

다음 그림과 같이 나머지 변의 길이를 a, b, c, d, e, f라 하면



$c+e=(2x+1)+(x+2)=3x+3$

$a+b+d+f=(4x+1)+x=5x+1$

따라서 도형의 둘레의 길이는

$20+(4x+1)+20+(x+2)+x+(2x+1)$

$+a+b+c+d+e+f$

$=8x+44+(c+e)+(a+b+d+f)$

$=8x+44+(3x+3)+(5x+1)$

$=16x+48$ 답 $16x+48$

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.069~070

01 $-\frac{5}{12}$ **02** -6 **03** $\frac{9}{8}x$ **04** 분속 $5x$ m

05 $\left(\frac{7}{10}a+\frac{3}{10}b\right)$% **06** $10n+11$ **07** $6(n-m)$

08 (1) 180 (2) $298x+251$

01 해결단계

❶ 단계	기호 △의 뜻에 따라 A, B의 값을 구한다.
❷ 단계	주어진 식의 값을 구한다.

$2<6$이므로

$2\triangle6=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore A=\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3}>-5$이므로

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\triangle(-5)=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3} \qquad \therefore B=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore A^2-\frac{B}{A}&=A^2-B\div A\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\times 2\\&=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\\&=-\frac{5}{12}\end{aligned}$$

답 $-\frac{5}{12}$

02 해결단계

❶ 단계	일차식 A를 문자를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	식의 값 A_1, A_2, A_3, A_4를 각각 구한다.
❸ 단계	$A_1-A_2+A_3-A_4$의 값을 구한다.

$A=3x+b$ (b는 상수, $b\neq 0$)라 하면

$A_1=3\times 1+b=b+3$

$A_2=3\times 2+b=b+6$

$A_3=3\times 3+b=b+9$

$A_4=3\times 4+b=b+12$

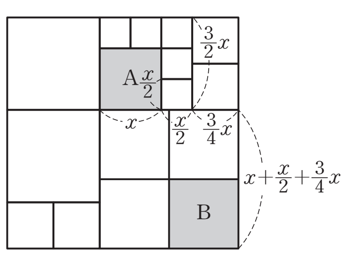
$$\begin{aligned}\therefore\ &A_1-A_2+A_3-A_4\\&=(b+3)-(b+6)+(b+9)-(b+12)\\&=3-6+9-12=-6\end{aligned}$$

답 -6

03 해결단계

❶ 단계	정사각형 A의 한 변의 길이를 이용하여 다른 정사각형의 한 변의 길이를 나타낸다.
❷ 단계	정사각형 B의 한 변의 길이를 x를 사용한 식으로 나타낸다.

정사각형 A의 한 변의 길이를 기준으로 하여 각 정사각형의 한 변의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



4개의 정사각형 B로 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이가

$x+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}x$이므로 정사각형 B의 한 변의 길이는

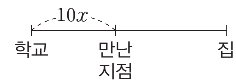
$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}x\right)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}x=\frac{9}{8}x$$

답 $\frac{9}{8}x$

04 해결단계

❶ 단계	지수가 학교에서 출발하여 10분 동안 걸어 온 거리를 구한다.
❷ 단계	자동차의 속력을 x를 사용한 식으로 나타낸다.

지수가 학교에서 출발하여 10분 동안 걸어 온 거리는



$10\times x=10x$(m)

즉, 자동차는 평소 다니는 거리에 비해 학교와 두 사람이 만난 지점 사이를 왕복하는 거리만큼 적게 달린다.

이때 4분 빨리 집에 도착하였으므로 자동차로 학교와 두 사람이 만난 지점 사이를 왕복하는 데 걸리는 시간은 4분이다.

따라서 자동차의 속력은 분속 $\frac{2\times 10x}{4}=5x$(m)이다.

답 분속 $5x$ m

05 해결단계

❶ 단계	컵 A의 소금물 100 g을 컵 B에 넣고 잘 섞은 후의 소금물의 양과 소금의 양을 각각 구한다.
❷ 단계	그 후, 컵 B의 소금물 200 g을 컵 A에 다시 넣어 잘 섞은 후의 소금물의 양과 소금의 양을 각각 구한다.
❸ 단계	마지막 컵 A의 소금물의 농도를 a, b를 사용한 식으로 나타낸다.

처음에 두 컵 A, B에 들어 있던 소금의 양은 각각

A : $\frac{a}{100}\times 400=4a$(g), B : $\frac{b}{100}\times 300=3b$(g)

(i) 컵 A의 a %의 소금물 100 g을 컵 B의 b %의 소금물 300 g과 섞을 때,

컵 A에서 컵 B로 이동되는 소금의 양은

$\frac{a}{100}\times 100=a$(g)

이므로 컵 B에 들어 있는

소금물의 양은 $100+300=400$(g),

소금의 양은 $(a+3b)$g

(ii) 다시 컵 B의 소금물 200 g을 컵 A에 남아 있는 a %의 소금물 300 g과 섞을 때,

컵 B에서 컵 A로 이동되는 소금의 양은

$\frac{a+3b}{400}\times 200=\frac{a+3b}{2}$(g)

컵 A에 남아 있는

소금물의 양은 $400-100=300$(g),

소금의 양은 $4a-a=3a$(g)

따라서 컵 A에 들어 있는

소금물의 양은 $300+200=500$(g),

소금의 양은 $3a+\frac{a+3b}{2}=\frac{7}{2}a+\frac{3}{2}b$(g)

(i), (ii)에서 마지막 컵 A의 소금물의 농도는

$$\begin{aligned}\frac{(\text{소금의 양})}{500}\times 100&=\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}a+\frac{3}{2}b\right)\\&=\frac{7}{10}a+\frac{3}{10}b\,(\%)\end{aligned}$$

답 $\left(\frac{7}{10}a+\frac{3}{10}b\right)$ %

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

컵 B의 소금물 200 g을 컵 A에 다시 넣을 때,
컵 B의 소금물의 농도를 p %라 하면

$p=\frac{a+3b}{400}\times 100=\frac{a+3b}{4}$

따라서 컵 B에서 컵 A로 이동되는 소금의 양은

$$\frac{p}{100}\times 200=\frac{a+3b}{4}\times\frac{1}{100}\times 200$$
$$=\frac{a+3b}{400}\times 200(\mathrm{g})$$

06 해결단계

❶ 단계	2번 접어 세 겹으로 만든 리본을 가위로 자르는 경우를 통하여 리본 조각의 개수의 규칙을 찾는다.
❷ 단계	n번 접어 $(n+1)$겹으로 만든 리본을 가위로 자를 때의 리본 조각의 개수의 규칙을 찾는다.
❸ 단계	n번 접어 $(n+1)$겹으로 만든 리본을 가위로 10번 자를 때 나누어진 리본 조각의 개수를 구한다.

2번 접어 세 겹으로 만든 리본을 가위로 1번 자르면 겹쳐진 횟수보다 1개 더 많은 조각이 생기므로 나누어진 리본 조각의 개수는

$3+1=4$

가위로 2번 자르면 1번 자를 때에 비해 가운데 조각 3개가 늘어난 것과 같으므로 나누어진 리본 조각의 개수는

$4+3=7$

가위로 3번 자르면 1번 자를 때에 비해 (2×3)개 늘어나므로 나누어진 리본 조각의 개수는

$4+2\times3=10$

⋮

즉, n번 접어 $(n+1)$겹으로 만든 리본을

가위로 1번 자를 때 나누어진 리본 조각의 개수는

$(n+1)+1=n+2$

가위로 2번 자를 때 나누어진 리본 조각의 개수는

$(n+2)+(n+1)=2n+3$

가위로 3번 자를 때 나누어진 리본 조각의 개수는

$$(n+2)+2(n+1)=n+2+2n+2$$
$$=3n+4$$

⋮

따라서 가위로 10번 자를 때 나누어진 리본 조각의 개수는

$$(n+2)+9(n+1)=n+2+9n+9$$
$$=10n+11$$

답 $10n+11$

07 해결단계

❶ 단계	m과 n 사이의 분모가 9인 기약분수의 규칙을 찾는다.
❷ 단계	기약분수의 개수를 구한다.

두 자연수 $m=\frac{9m}{9}$과 $n=\frac{9n}{9}$ 사이의 분모가 9인 기약분수는

$\frac{9m+1}{9}, \frac{9m+2}{9}, \frac{9m+4}{9}, \frac{9m+5}{9}, \frac{9m+7}{9}, \frac{9m+8}{9},$

$\frac{9(m+1)+1}{9}, \frac{9(m+1)+2}{9}, \frac{9(m+1)+4}{9}, \frac{9(m+1)+5}{9},$

$\frac{9(m+1)+7}{9}, \frac{9(m+1)+8}{9},$

$\cdots,$

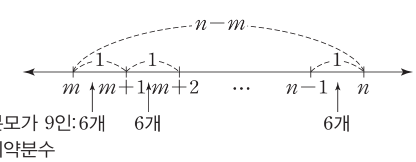
$\frac{9n-8}{9}, \frac{9n-7}{9}, \frac{9n-5}{9}, \frac{9n-4}{9}, \frac{9n-2}{9}, \frac{9n-1}{9}$

즉, 두 자연수 m과 $m+1$, $m+1$과 $m+2$, $\cdots$, $n-1$과 n 사이에 분모가 9인 기약분수가 각각 6개씩 있으므로 구하는 기약분수의 개수는

$6(n-m)$

답 $6(n-m)$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭



08 해결단계

(1)	❶ 단계	한 열, 한 행에 나열된 수의 규칙을 각각 찾는다.
	❷ 단계	전체 규칙을 찾는다.
	❸ 단계	6행 3열의 수를 구한다.
(2)	❹ 단계	7행 x열의 수와 10행 $(x+2)$열의 수를 각각 구한다.
	❺ 단계	7행 x열의 수와 10행 $(x+2)$열의 수의 합을 구한다.

(1) 1행 1열, 2행 1열, 3행 1열, 4행 1열, $\cdots$의 수를 차례대로 나열하면 1, 4, 9, 16, $\cdots$이므로 n행 1열의 수는 n^2이다.
1행 1열, 1행 2열, 1행 3열, 1행 4열, $\cdots$의 수를 차례대로 나열하면 1, 3, 5, 7, $\cdots$이므로 1행 m열의 수는 $2m-1$이다.
2행 1열, 2행 2열, 2행 3열, 2행 4열, $\cdots$의 수를 차례대로 나열하면 4, 12, 20, 28, $\cdots$, 즉 4×1, 4×3, 4×5, $\cdots$이므로 2행 m열의 수는 1행 m열의 수의 2^2배, 즉 $2^2(2m-1)$이다.
같은 방법으로 생각하면 n행 1열, n행 2열, n행 3열, $\cdots$의 수는 n^2에 각각 1행 1열, 1행 2열, 1행 3열, $\cdots$의 수를 곱한 것이므로 n행 m열의 수는 $n^2(2m-1)$이다.
따라서 6행 3열의 수는
$6^2\times(2\times3-1)=36\times5=180$

(2) 7행 x열의 수는 $7^2(2x-1)$이고, 10행 $(x+2)$열의 수는 $10^2\{2(x+2)-1\}$이므로 두 수의 합은
$7^2(2x-1)+10^2\{2(x+2)-1\}$
$=98x-49+100(2x+3)$
$=98x-49+200x+300$
$=298x+251$

답 (1) 180 (2) $298x+251$

06. 일차방정식의 풀이

STEP **1** 시험에 꼭 나오는 문제 pp.072~073

01 ②, ④	02 ④	03 ③	04 ①	05 ⑤
06 ④	07 ②, ④	08 ③	09 $x=1$	10 ①
11 ①	12 ③	13 ②	14 $a=7$, $b\neq4$	

01

① $x=3\times7+y$

③ $\frac{12}{100}\times x=30$

⑤ $\frac{2000}{5}\times x+\frac{6000}{3}\times y=12000$

따라서 옳은 것은 ②, ④이다. **답** ②, ④

02

[ ] 안의 수를 각 방정식의 x의 값에 대입하면

① $2\times2-1\neq3-2$

② $\frac{1}{4}\times6-1\neq-\frac{3}{2}\times6+8$

③ $5-2\times(-2)\neq-3\times(-2+1)$

④ $0.6\times25+3=0.8\times25-2=18$

⑤ $-11\neq4\times\left(-\frac{5}{2}\right)-2$

따라서 [ ] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것은 ④이다.

답 ④

03

ㄱ, ㄷ. 방정식

ㄴ. (좌변)$=3(-x+3)=-3x+9=$(우변)
이므로 항등식이다.

ㄹ. (우변)$=3(x-1)+x+4=3x-3+x+4=4x+1=$(좌변)
이므로 항등식이다.

ㅁ. (좌변)$=-x+5$, (우변)$=6-(x+2)=-x+4$
등식 $-x+5=-x+4$는 어떤 수를 x의 값에 대입하여도 항상 거짓이므로 방정식도 항등식도 아니다.

따라서 항등식은 ㄴ, ㄹ이다. **답** ③

04

(우변)$=5x-[2-\{-3+x+(ax+b)\}]$
$=5x-\{2-(-3+x+ax+b)\}$
$=5x-(2+3-x-ax-b)$
$=5x-(5-x-ax-b)$
$=5x-5+x+ax+b$
$=(a+6)x+(b-5)$

등식 $2x-3=(a+6)x+(b-5)$는 x에 대한 항등식이므로

$2=a+6$, $-3=b-5$

따라서 $a=-4$, $b=2$이므로

$a+b=-4+2=-2$ **답** ①

05

(가) 양변에 12를 곱한다.

(나) 양변에서 16을 뺀다.

(다) 양변을 8로 나눈다.

∴ (가) — ㄷ, (나) — ㄴ, (다) — ㄹ **답** ⑤

06

$2x-6+3x=4x+2$에서 -6과 $4x$를 이항하면

$2x+3x-4x=2+6$

$\therefore x=8$

따라서 $a=1$, $b=8$이므로

$a+b=1+8=9$ **답** ④

07

① $x^2-5x+6=0$ (일차방정식이 아니다.)

② $x^2+2x=x^2-2x+3$에서 $4x-3=0$ (일차방정식)

③ $3x-6=3x-6$ (항등식)

④ $x-5=0$ (일차방정식)

⑤ $x^2-x+2=2x+1$에서
$x^2-3x+1=0$ (일차방정식이 아니다.)

따라서 일차방정식은 ②, ④이다. **답** ②, ④

08

$2(x-4)=8-2\{5-(3-x)\}$에서

$2x-8=8-2(5-3+x)$

$2x-8=8-2(2+x)$

$2x-8=8-4-2x$

$4x=12$

$\therefore x=3$

답 ③

09

$-0.75x+\frac{7}{12}=-\frac{7}{6}x+1$에서

$-\frac{3}{4}x+\frac{7}{12}=-\frac{7}{6}x+1$

양변에 12를 곱하면

$-9x+7=-14x+12,\ 5x=5$

$\therefore x=1$

답 $x=1$

10

$\frac{8}{3}:\frac{1-3x}{6}=4:(x+2)$에서

$\frac{8}{3}(x+2)=\frac{2}{3}(1-3x)$

양변에 3을 곱하면

$8(x+2)=2(1-3x)$

$8x+16=2-6x$

$14x=-14$

$\therefore x=-1$

답 ①

11

$x=-2$를 주어진 방정식에 대입하면

$-4-3a=2\left(a-\frac{-2}{3}\right)-2,\ -4-3a=2a+\frac{4}{3}-2$

$-5a=\frac{10}{3}\qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$

답 ①

12

$0.6(-x+0.5)=\frac{1}{4}x+2$에서

$-0.6x+0.3=\frac{1}{4}x+2$

양변에 20을 곱하면

$-12x+6=5x+40,\ -17x=34$

$\therefore x=-2$

$x=-2$가 방정식 $\frac{2m-x}{3}-mx=\frac{7}{3}$의 해이므로

$x=-2$를 이 방정식에 대입하면

$\frac{2m+2}{3}+2m=\frac{7}{3}$

양변에 3을 곱하면

$2m+2+6m=7,\ 8m=5$

$\therefore m=\frac{5}{8}$

답 ③

13

$2(x-2)=a-3(x-3)$에서

$2x-4=a-3x+9,\ 5x=a+13$

$\therefore x=\frac{a+13}{5}$

이때 $\frac{a+13}{5}$이 자연수가 되려면 $a+13$은 5의 배수이어야 한다.

즉, $a+13=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \cdots$이므로

$a=-8,\ -3,\ 2,\ 7,\ \cdots$

따라서 모든 음의 정수 a의 값의 합은

$(-8)+(-3)=-11$

답 ②

14

$(3-a)x=3b-4(x+3)$에서

$(3-a)x=3b-4x-12$

$\therefore (7-a)x=3b-12$

이때 방정식 $(7-a)x=3b-12$의 해가 없으려면

$7-a=0,\ 3b-12\neq0$

$7-a=0$에서 $a=7$

$3b-12\neq0$에서 $3b\neq12\qquad \therefore b\neq4$

$\therefore a=7,\ b\neq4$

답 $a=7,\ b\neq4$

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.074~078

01 8	02 $-11b+c$	03 ①	04 ②, ④	05 0
06 $x=\frac{35}{11}$	07 $a=5,\ b\neq-1$	08 6개	09 12	
10 ①	11 2	12 $x=-\frac{1}{2}$	13 2	14 80
15 $x=20$	16 $x=\frac{1}{3}$	17 ④	18 ③	19 ②
20 ②	21 5	22 15	23 ①	24 $\frac{5}{3}$
25 $\frac{19}{5}$	26 ①	27 ⑤	28 ②	29 ④
30 ②				

01

$6x-2=-10+2x$

$6x-2+\boxed{2}=-10+2x+\boxed{2}$) 양변에 2를 더한다.

$6x=-8+2x$

$6x-\boxed{2}x=-8+2x-\boxed{2}x$) 양변에서 $2x$를 뺀다.

$4x=-8$

$\dfrac{4x}{\boxed{4}}=\dfrac{-8}{\boxed{4}}$) 양변을 4로 나눈다.

$\therefore\ x=-2$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=4$이므로

$a+b+c=2+2+4=8$ **답** 8

02

$a=b$의 양변에 c를 더하면 $a+c=\boxed{b+c}$

$a=3b+c$의 양변에 -2를 곱하면

$-2a=-2(3b+c)$

$\therefore\ -2a=\boxed{-6b-2c}$

$a=-2b-c$의 양변에 3을 곱하면

$3a=3(-2b-c)$

$\therefore\ 3a=-6b-3c$

이 등식의 양변에 $5c$를 더하면

$3a+5c=-6b-3c+5c$

$\therefore\ 3a+5c=\boxed{-6b+2c}$

따라서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 식은 각각 $b+c$, $-6b-2c$, $-6b+2c$이므로 세 식의 합은

$(b+c)+(-6b-2c)+(-6b+2c)=-11b+c$

답 $-11b+c$

03

$ax+b(3x-2)=(4a-3)x+6$에서

$ax+3bx-2b=(4a-3)x+6$

$\therefore\ (a+3b)x-2b=(4a-3)x+6$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3b=4a-3$, $-2b=6$

$-2b=6$에서 $b=-3$

$b=-3$을 $a+3b=4a-3$에 대입하면

$a-9=4a-3$, $-3a=6$ $\quad\therefore\ a=-2$

$\therefore\ a=-2$, $b=-3$ **답** ①

04

① $2a+1+(c-1)=b-1+(c-1)$

$\therefore\ 2a+c=b+c-2$

② $2a+1+(2b-1)=b-1+(2b-1)$

$2a+2b=3b-2 \qquad \therefore\ 2(a+b)=3b-2$

③ $2a+1+(-b-1)=b-1+(-b-1)$

$2a-b=-2$

$c(2a-b)=-2c \qquad \therefore\ 2ac-bc=-2c$

④ $2a+1-7=b-1-7$

$2a-6=b-8 \qquad \therefore\ a-3=\dfrac{b-8}{2}$

⑤ $2a+1+3=b-1+3$

$2a+4=b+2 \qquad \therefore\ \dfrac{a+2}{2}=\dfrac{b+2}{4}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다. **답** ②, ④

05

$x=3$을 $4kx-3b=ak+5x-3$에 대입하면

$12k-3b=ak+15-3$

$\therefore\ 12k-3b=ak+12$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$12=a$, $-3b=12$

따라서 $a=12$, $b=-4$이므로

$a+3b=12+3\times(-4)=0$ **답** 0

06

$3x-\left[3.8x-1-3\left\{(3x-4)\div\dfrac{3}{2}-x\right\}\right]=0$에서

$3x-\left[3.8x-1-3\left\{(3x-4)\times\dfrac{2}{3}-x\right\}\right]=0$

$3x-\left\{3.8x-1-3\left(2x-\dfrac{8}{3}-x\right)\right\}=0$

$3x-\left\{3.8x-1-3\left(x-\dfrac{8}{3}\right)\right\}=0$

$3x-(3.8x-1-3x+8)=0$

$3x-(0.8x+7)=0$, $3x-0.8x-7=0$

$2.2x=7$, $22x=70$, $11x=35$

$\therefore\ x=\dfrac{35}{11}$ **답** $x=\dfrac{35}{11}$

07

$(a-2)x^2+3x+1=3x(x-b)+3$에서

$ax^2-2x^2+3x+1=3x^2-3bx+3$

$ax^2-5x^2+3x+3bx-2=0$

$\therefore (a-5)x^2+(3+3b)x-2=0$

이 방정식이 x에 대한 일차방정식이려면

$a-5=0$, $3+3b\neq0$

$a-5=0$에서 $a=5$

$3+3b\neq0$에서 $3b\neq-3$ $\quad\therefore b\neq-1$

$\therefore a=5$, $b\neq-1$ **답** $a=5$, $b\neq-1$

BLACKLABEL 특강 필수 원리

일차방정식

(1) $ax+b=0$이 x에 대한 일차방정식 ⇨ $a\neq0$

(2) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 일차방정식 ⇨ $a=0$, $b\neq0$

08

$\frac{4x-2}{5}+0.8=0.6(3-x)-1.2$의 양변에 10을 곱하면

$2(4x-2)+8=6(3-x)-12$

$8x-4+8=18-6x-12$

$8x+4=-6x+6$

$14x=2$ $\quad\therefore x=\frac{1}{7}$

즉, $A=\frac{1}{7}$이므로 $\frac{1}{A}=7$

따라서 7보다 작은 자연수는 1, 2, 3, ⋯, 6의 6개이다. **답** 6개

09

$3(x+1):5=(x+3):2$에서

$6(x+1)=5(x+3)$

$6x+6=5x+15$

$x=9$ $\quad\therefore a=9$

$\frac{2-x}{3}=\frac{3x-2}{6}-\frac{3}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2(2-x)=3x-2-9$

$4-2x=3x-11$

$-5x=-15$

$x=3$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=9+3=12$ **답** 12

10

어떤 수를 a라 하면 $x=8$이 방정식 $2(2x+1)=a(x-1)-1$의 해이다. $x=8$을 이 방정식에 대입하면

$2\times17=7a-1$, $-7a=-35$ $\quad\therefore a=5$ **답** ①

11

$2(x-k+1)=3(2-k)$에서

(i) $k=1$일 때, $2(x-1+1)=3\times(2-1)$

$2x=3$, $x=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore S_1=\frac{3}{2}$ ㈎

(ii) $k=2$일 때, $2(x-2+1)=3\times(2-2)$

$2(x-1)=0$, $2x-2=0$, $2x=2$

$x=1$ $\quad\therefore S_2=1$ ㈏

(iii) $k=3$일 때, $2(x-3+1)=3\times(2-3)$

$2(x-2)=-3$, $2x-4=-3$, $2x=1$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore S_3=\frac{1}{2}$ ㈐

(i), (ii), (iii)에서

$S_1+S_2-S_3=\frac{3}{2}+1-\frac{1}{2}=2$ ㈑

답 2

단계	채점 기준	배점
㈎	S_1의 값을 구한 경우	30%
㈏	S_2의 값을 구한 경우	30%
㈐	S_3의 값을 구한 경우	30%
㈑	$S_1+S_2-S_3$의 값을 구한 경우	10%

12

$6x+A-3=4(x-1)$이 항등식이므로

$6x+A-3=4x-4$

$\therefore A=4x-4-(6x-3)=-2x-1$

이것을 $6x-A-3=4(x-1)$에 대입하면

$6x-(-2x-1)-3=4(x-1)$

$6x+2x+1-3=4x-4$, $4x=-2$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ **답** $x=-\frac{1}{2}$

13

다음과 같이 ①~⑤를 정하자.

$$\begin{array}{cccc} & & A & \\ & ④ & ⑤ & \\ & ① & ② & ③ \\ x+1 & -3x+1 & -4x+3 & 7x-4 \end{array}$$

$\boxed{}$ 안에 알맞은 식을 차례대로 구하면

①$=(x+1)-(-3x+1)=x+1+3x-1=4x$

②$=(-3x+1)-(-4x+3)=-3x+1+4x-3=x-2$

③$=(-4x+3)-(7x-4)=-4x+3-7x+4=-11x+7$

④$=4x-(x-2)=4x-x+2=3x+2$

⑤$=(x-2)-(-11x+7)=x-2+11x-7=12x-9$

$\therefore A=(3x+2)-(12x-9)$

$=3x+2-12x+9$

$=-9x+11$

이때 $A=-7$에서

$-9x+11=-7$

$-9x=-18 \quad \therefore x=2$ **답** 2

14

㈎에서 40과 56의 최대공약수는

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 40 & 56 \\ 2 & 20 & 28 \\ 2 & 10 & 14 \\ & 5 & 7 \end{array}$$

$2\times2\times2=8$

$\therefore 40★56=8$

즉, $8x-10=5(x+46)$이므로

$8x-10=5x+230$

$3x=240$

$\therefore x=80$

㈏에서 16과 40의 최소공배수는

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 16 & 40 \\ 2 & 8 & 20 \\ 2 & 4 & 10 \\ & 2 & 5 \end{array}$$

$2\times2\times2\times2\times5=80$

$\therefore 16\triangle40=80$

즉, $2y-80=0$이므로

$2y=80$

$\therefore y=40$

따라서 $x=80$, $y=40$을 $(x★y)\triangle(x\triangle y)$에 대입하면

$(80★40)\triangle(80\triangle40)$

이때 80은 40의 배수이므로 80과 40의 최대공약수는 40, 80과 40의 최소공배수는 80이다.

$\therefore (x★y)\triangle(x\triangle y)=(80★40)\triangle(80\triangle40)$

$=40\triangle80=80$ **답** 80

15

$\frac{a}{6}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$의 각 변에 6을 곱하면

$6\times\frac{a}{6}=6\times\frac{b}{3}=6\times\frac{c}{2}$

$a=2b=3c \quad \therefore b=\frac{1}{2}a,\ c=\frac{1}{3}a$

이것을 방정식 $(a-b-c)(x-2)-(a-4b+12c)=0$에 대입하면

$\left(a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a\right)(x-2)-\left(a-4\times\frac{1}{2}a+12\times\frac{1}{3}a\right)=0$

$\frac{1}{6}a(x-2)-3a=0$

$a\neq0$이므로 이 식의 양변에 $\frac{6}{a}$을 곱하면

$x-2-18=0 \quad \therefore x=20$ **답** $x=20$

• 다른 풀이 •

$\frac{a}{6}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면

$a=6k,\ b=3k,\ c=2k$

이것을 방정식 $(a-b-c)(x-2)-(a-4b+12c)=0$에 대입하면

$(6k-3k-2k)(x-2)-(6k-12k+24k)=0$

$k(x-2)-18k=0,\ kx-2k-18k=0$

$kx=20k \quad \therefore x=20\ (\because k\neq0)$

16

$-2<x<2$이므로 $x-2<0,\ x+2>0$

방정식 $|x-2|+|x+2|+3x=5$에서

$-(x-2)+(x+2)+3x=5$

$-x+2+x+2+3x=5,\ 3x=1$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ **답** $x=\frac{1}{3}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

절댓값

(1) 절댓값 : 수직선 위에서 어떤 수에 대응하는 점과 원점 사이의 거리를 그 수의 절댓값이라 한다.

(2) $|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

17

약분하면 $\frac{3}{5}$이 되는 분수를 $\frac{3x}{5x}$ (x는 자연수)라 하면

$$\frac{3x+6}{5x+(3x+6)-5}=\frac{3}{5}$$

$\frac{3x+6}{8x+1}=\frac{3}{5}$, $5(3x+6)=3(8x+1)$

$15x+30=24x+3$, $-9x=-27$

$\therefore\ x=3$

따라서 처음의 분수는

$\frac{b}{a}=\frac{3x}{5x}=\frac{3\times3}{5\times3}=\frac{9}{15}$

이므로 $a=15$, $b=9$

$\therefore\ a+b=15+9=24$

답 ④

18 해결단계

❶ 단계	연산 $*$의 뜻에 따라 주어진 방정식을 정리한다.
❷ 단계	절댓값이 k인 두 수는 k, $-k$임을 이용하여 일차방정식을 세운다.
❸ 단계	x의 값을 구한다.

$a*b=ab+a$이므로

$4*x=4x+4$, $x*2=2x+x=3x$

즉, $|(4*x)-(x*2)|=2$에서

$|4x+4-3x|=2$

$\therefore\ |x+4|=2$

이때 절댓값이 2인 수는 -2, 2이므로

$x+4=-2$ 또는 $x+4=2$

$\therefore\ x=-6$ 또는 $x=-2$

답 ③

19

$3(x-1)=2(x-2)$에서

$3x-3=2x-4$

$\therefore\ x=-1$

따라서 방정식 $ax+5=9-bx$의 해는 $x=(-1)\times2=-2$이므로 $x=-2$를 이 방정식에 대입하면

$-2a+5=9+2b$, $-2a-2b=4$

$\therefore\ a+b=-2$

답 ②

• 다른 풀이 •

방정식 $3(x-1)=2(x-2)$에서

$3x-3=2x-4$

$\therefore\ x=-1$ ……㉠

방정식 $ax+5=9-bx$에서

$(a+b)x=4$

$\therefore\ x=\frac{4}{a+b}$ ……㉡

㉡$=$㉠$\times2$이므로

$\frac{4}{a+b}=-2$

$\therefore\ a+b=-2$

20

$\frac{3x-4}{2}=\frac{2x+9}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$9x-12=4x+18$, $5x=30$ $\quad\therefore\ x=6$

$\frac{5x+a}{2}=0.6x-\frac{4+5a}{10}$의 해를 $x=b$라 하면 $6:b=3:2$이므로

$3b=12$ $\quad\therefore\ b=4$

즉, $x=4$가 방정식 $\frac{5x+a}{2}=0.6x-\frac{4+5a}{10}$의 해이므로 $x=4$를 이 방정식에 대입하면

$\frac{20+a}{2}=2.4-\frac{4+5a}{10}$

이 등식의 양변에 10을 곱하면

$100+5a=24-4-5a$

$10a=-80$

$\therefore\ a=-8$

답 ②

21

$\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$x+4=2x-1$, $-x=-5$ $\quad\therefore\ x=5$

$x=5$가 방정식 $3\{5x-(6x+a)\}=-12$의 해이므로 $x=5$를 이 방정식에 대입하면

$3\{25-(30+a)\}=-12$, $25-30-a=-4$

$-a=1$ $\quad\therefore\ a=-1$

$\left(5x+\frac{a}{3}\right):(bx+7)=2:3$에 $x=5$, $a=-1$을 대입하면

$\left(25-\frac{1}{3}\right):(5b+7)=2:3$, $3\left(25-\frac{1}{3}\right)=2(5b+7)$

$75-1=10b+14$, $-10b=-60$

$\therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=-1+6=5$

답 5

22

$3(x-1)-a=3$에서

$3x-3-a=3$, $3x=a+6$

$\therefore\ x=\frac{a+6}{3}$

$4x-[6x-3-\{9x-(6x-5)\}]=a$에서

$4x-\{6x-3-(9x-6x+5)\}=a$

$4x-\{6x-3-(3x+5)\}=a$, $4x-(6x-3-3x-5)=a$

$4x-(3x-8)=a$, $4x-3x+8=a$

$\therefore\ x=a-8$

두 방정식의 해가 서로 같으므로

$\frac{a+6}{3}=a-8$, $a+6=3a-24$, $-2a=-30$

$\therefore a=15$ 답 15

23

$0.12(x-3)+\frac{2}{5}=0.6-0.2x$의 양변에 100을 곱하면

$12(x-3)+40=60-20x$

$12x-36+40=60-20x$

$32x=56$

$\therefore x=\frac{7}{4}$

$x=\frac{7}{4}$이 방정식 $|m-1|-4x=0$의 해이므로 $x=\frac{7}{4}$을 이 방정식에 대입하면

$|m-1|-7=0$, $|m-1|=7$

$m-1=-7$ 또는 $m-1=7$

$\therefore m=-6$ 또는 $m=8$

따라서 모든 상수 m의 값의 곱은

$(-6)\times 8=-48$ 답 ①

24

$\frac{2a-x}{3}=\frac{3a-5}{2}+x$의 양변에 6을 곱하면

$4a-2x=9a-15+6x$

$-8x=5a-15$ $\therefore x=\frac{-5a+15}{8}$

$\therefore A=\frac{-5a+15}{8}$

(가)

$0.4(3x+2a+1)-\frac{2x-1}{5}=1$의 양변에 5를 곱하면

$2(3x+2a+1)-(2x-1)=5$, $6x+4a+2-2x+1=5$

$4x=-4a+2$ $\therefore x=\frac{-2a+1}{2}$

$\therefore B=\frac{-2a+1}{2}$

(나)

$A-B=2$에서 $\frac{-5a+15}{8}-\frac{-2a+1}{2}=2$

이 식의 양변에 8을 곱하면

$-5a+15-4(-2a+1)=16$, $-5a+15+8a-4=16$

$3a=5$

$\therefore a=\frac{5}{3}$

(다)

답 $\frac{5}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	A를 a를 사용하여 나타낸 경우	30%
(나)	B를 a를 사용하여 나타낸 경우	30%
(다)	$A-B=2$를 만족시키는 a의 값을 구한 경우	40%

25

$x+4a=3-2(x-1)$에서

$x+4a=3-2x+2$, $3x=5-4a$

$\therefore x=\frac{5-4a}{3}$

$x-\frac{x+a}{3}=1$의 양변에 3을 곱하면

$3x-(x+a)=3$, $3x-x-a=3$

$2x=3+a$

$\therefore x=\frac{3+a}{2}$

주어진 두 방정식의 해가 절댓값은 같고 부호는 서로 다르므로 두 해의 합은 0이다.

즉, $\frac{5-4a}{3}+\frac{3+a}{2}=0$이므로 양변에 6을 곱하면

$2(5-4a)+3(3+a)=0$

$10-8a+9+3a=0$

$-5a=-19$

$\therefore a=\frac{19}{5}$ 답 $\frac{19}{5}$

26

$\frac{ax-2}{3}=\frac{7}{3}-x$의 양변에 3을 곱하면

$ax-2=7-3x$, $(a+3)x=9$

$\therefore x=\frac{9}{a+3}$

이때 $\frac{9}{a+3}$가 정수가 되려면 $a+3$이 9의 약수 또는 9의 약수에 음의 부호를 붙인 수이어야 한다.

즉, $a+3=1$, 3, 9, -1, -3, -9이므로

$a=-2$, 0, 6, -4, -6, -12

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$(-2)+0+6+(-4)+(-6)+(-12)=-18$ **답** ①

27

$\frac{1}{2}a+1=\frac{x-a}{6}-1$의 양변에 6을 곱하면

$3a+6=x-a-6 \qquad \therefore x=4a+12$

이때 x가 자연수이므로 $4a+12=1, 2, 3, \cdots$

$\therefore a=-\frac{11}{4}, -\frac{10}{4}, -\frac{9}{4}, \cdots, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \cdots$

따라서 음수인 모든 a의 값의 합은

$-\frac{11}{4}-\frac{10}{4}-\frac{9}{4}-\cdots-\frac{1}{4}$

$=-\frac{1+2+3+\cdots+11}{4}$

$=-\frac{66}{4}=-\frac{33}{2}$ **답** ⑤

28

$4(x-1)+a=x+6$에서

$4x-4+a=x+6, 3x=10-a$

$\therefore x=\frac{10-a}{3}$

이때 $\frac{10-a}{3}$가 자연수가 되려면 $10-a$는 3의 배수이어야 한다.

즉, $10-a=3, 6, 9, 12, \cdots$이므로

$a=7, 4, 1, -2, \cdots$

따라서 자연수 a는 1, 4, 7의 3개이다.

비례식 $2:3=(5-b):(y-4)$에서

$2(y-4)=3(5-b), 2y-8=15-3b$

$2y=23-3b$

$\therefore y=\frac{23-3b}{2}$

이때 $\frac{23-3b}{2}$가 자연수가 되려면 $23-3b$는 2의 배수이어야 한다.

즉, $23-3b=2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \cdots$이므로

$3b=21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, \cdots$

그런데 $b<5$이므로

$b=\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, 3, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}, \cdots$

따라서 자연수 b는 1, 3의 2개이다.

그러므로 구하는 서로 다른 (a, b)의 개수는

$3\times2=6$ **답** ②

BLACKLABEL 특강 참고

(홀수)+(홀수)=(짝수), (홀수)−(홀수)=(짝수),
(홀수)+(짝수)=(홀수), (홀수)−(짝수)=(홀수),
(짝수)+(짝수)=(짝수), (짝수)−(짝수)=(짝수)
즉, 위의 문제에서 $23-3b$=(짝수)이므로 $3b$=(홀수)이다.
이때 b=(짝수)이면 $3b$=(짝수)이므로 b=(홀수)가 되어야 한다.

29

$(2a-1)x+4b-3=ax-b+12$에서

$2ax-x+4b-3=ax-b+12$

$2ax-x-ax=-b+12-4b+3$

$\therefore (a-1)x=-5b+15$

이 방정식이 $x=0$뿐만 아니라 다른 해도 가지므로 해가 무수히 많다.

즉, $a-1=0, -5b+15=0$이므로

$a-1=0$에서 $a=1$

$-5b+15=0$에서 $-5b=-15$

$\therefore b=3$

$\therefore a^2+b^2=1^2+3^2=10$ **답** ④

• 다른 풀이 •

$x=0$이 방정식 $(2a-1)x+4b-3=ax-b+12$의 해이므로

$x=0$을 이 식에 대입하면

$4b-3=-b+12, 5b=15$

$\therefore b=3$

$b=3$을 주어진 방정식에 대입하면

$(2a-1)x+12-3=ax-3+12$

$(2a-1)x+9=ax+9, (2a-1)x-ax=0$

$\therefore (a-1)x=0$

이 방정식이 $x=0$ 이외에도 해를 가져야 하므로

$a-1=0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+3^2=10$

BLACKLABEL 특강 참고

x에 대한 방정식 $ax=b$에서

(i) $a\neq0$이면 $x=\frac{b}{a}$, 즉 해가 1개이다.

(ii) $a=0$이면 $0\times x=b$이므로
 $b=0$이면 $0\times x=0$, 즉 해가 무수히 많다.
 $b\neq0$이면 $0\times x=b$, 즉 해가 없다.

(i), (ii)에서 x에 대한 방정식 $ax=b$ 꼴에서 $x=0$뿐만 아니라 다른 해도 가진다고 하면 방정식의 해가 무수히 많다는 뜻이 된다.

30

$(a+4)x+b-5=5a-4b$에서

$(a+4)x=5a-4b-b+5$

$\therefore (a+4)x=5a-5b+5$

이 방정식의 해가 무수히 많으므로

$a+4=0,\ 5a-5b+5=0$

즉, $a=-4$이고 이를 $5a-5b+5=0$에 대입하면

$-20-5b+5=0,\ -5b=15$

$\therefore b=-3$

$5(x+1)=c(3x+1)$에서

$5x+5=3cx+c$

$\therefore (5-3c)x=c-5$

이 방정식의 해가 없으므로

$5-3c=0,\ c-5\neq0$

$\therefore c=\frac{5}{3}$

$\therefore a-2b+3c$

$=(-4)-2\times(-3)+3\times\frac{5}{3}$

$=(-4)+6+5=7$

답 ②

STEP 3	종합 사고력 도전 문제	pp.079~080

01 $x=-\frac{18}{11}$ **02** $x=10$ **03** -2 **04** 4

05 (1) $m=-\frac{1}{3},\ n=9$ (2) $m\neq-\frac{1}{3},\ n=9$

06 $a=-1,\ b=-7,\ n=0$ **07** $x=3$ 또는 $x=-\frac{1}{3}$

08 $x=a+b+c$

01 해결단계

❶ 단계	좌변과 우변에 있는 분수의 분모인 $2-\frac{2x}{x-2}$와 $-3+\frac{3x}{x+3}$를 간단히 정리한다.
❷ 단계	주어진 방정식을 간단히 정리하여 해를 구한다.

$2-\frac{2x}{x-2}=\frac{2(x-2)-2x}{x-2}=\frac{2x-4-2x}{x-2}=\frac{-4}{x-2}$

$-3+\frac{3x}{x+3}=\frac{-3(x+3)+3x}{x+3}=\frac{-3x-9+3x}{x+3}=\frac{-9}{x+3}$

이므로 $x-\frac{2}{2-\frac{2x}{x-2}}=-3+\frac{3}{-3+\frac{3x}{x+3}}$에서

$x-\frac{2}{\frac{-4}{x-2}}=-3+\frac{3}{\frac{-9}{x+3}}$

즉, $x-2\div\frac{-4}{x-2}=-3+3\div\frac{-9}{x+3}$이므로

$x-2\times\frac{x-2}{-4}=-3+3\times\frac{x+3}{-9}$

$x+\frac{x-2}{2}=-3-\frac{x+3}{3}$

이 등식의 양변에 6을 곱하면

$6x+3(x-2)=-18-2(x+3)$

$6x+3x-6=-18-2x-6,\ 9x-6=-2x-24$

$11x=-18 \qquad \therefore x=-\frac{18}{11}$ 답 $x=-\frac{18}{11}$

02 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 간단히 한다.
❷ 단계	b의 값을 구한다.
❸ 단계	a의 값을 구한다.
❹ 단계	바르게 풀었을 때의 해를 구한다.

$\frac{a(x-1)}{2}-\frac{2-bx}{3}=-\frac{5}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$3a(x-1)-2(2-bx)=-5$

$3ax-3a-4+2bx=-5$

$\therefore (3a+2b)x=3a-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

준하는 a를 -1로 잘못 보고 풀어서 해로 $x=-\frac{4}{5}$를 얻었으므로 $a=-1,\ x=-\frac{4}{5}$를 ㉠에 대입하면

$(-3+2b)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-3-1$

$-3+2b=-4\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

$-3+2b=5,\ 2b=8$

$\therefore b=4$

권민이는 b를 2로 잘못 보고 풀어서 해로 $x=2$를 얻었으므로 $b=2,\ x=2$를 ㉠에 대입하면

$(3a+4)\times2=3a-1$

$6a+8=3a-1,\ 3a=-9$

$\therefore a=-3$

따라서 $a=-3,\ b=4$를 ㉠에 대입하면

$(-9+8)x=-9-1$

$-x=-10$

$\therefore x=10$

따라서 처음 방정식을 바르게 풀었을 때의 해는 $x=10$이다.

답 $x=10$

03 해결단계

❶ 단계	두 일차방정식의 해를 a, b를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	두 해가 같다는 조건을 이용하여 a와 b의 관계식을 구한다.
❸ 단계	a와 b의 관계식을 이용하여 식의 값을 구한다.

$5(x-a)=3(x+b)$에서

$5x-5a=3x+3b$

$2x=5a+3b$

$\therefore x=\dfrac{5a+3b}{2}$ ……㉠

$\dfrac{x+2a}{5}=\dfrac{x-b}{3}$의 양변에 15를 곱하면

$3(x+2a)=5(x-b)$

$3x+6a=5x-5b$

$-2x=-6a-5b$

$\therefore x=\dfrac{6a+5b}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{5a+3b}{2}=\dfrac{6a+5b}{2}$

$5a+3b=6a+5b$

$-a=2b \qquad \therefore a=-2b$

따라서 $a=-2b$를 $\dfrac{a}{b}$에 대입하면

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{-2b}{b}=-2$

답 -2

04 해결단계

❶ 단계	주어진 일차방정식의 해를 a를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	a와 b의 관계식을 구한다.
❸ 단계	관계식을 만족시키는 두 자연수 a, b의 값을 구한다.
❹ 단계	ab의 값 중 가장 작은 값을 구한다.

$3(x+a+5)=2(x-1)+5(x+a)-a$에서

$3x+3a+15=2x-2+5x+5a-a$

$-4x=a-17$

$\therefore x=\dfrac{17-a}{4}$

이때 $\dfrac{17-a}{4}=b$이므로

$17-a=4b$, $-a=-17+4b$

$\therefore a=17-4b$

이를 만족시키는 두 자연수 a, b의 값은

$b=1$일 때, $a=17-4=13$이고 $ab=13$

$b=2$일 때, $a=17-8=9$이고 $ab=18$

$b=3$일 때, $a=17-12=5$이고 $ab=15$

$b=4$일 때, $a=17-16=1$이고 $ab=4$

따라서 $a=1$, $b=4$일 때, ab의 값이 가장 작고, 그 값은 4이다.

답 4

05 해결단계

(1)	❶ 단계	주어진 등식을 간단히 정리한다.
	❷ 단계	주어진 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 m, n의 값을 각각 구한다.
(2)	❸ 단계	주어진 등식을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않도록 하는 m, n의 조건을 각각 구한다.

(1) $a\triangledown b=2ab-b+1$이므로

$2\triangledown(x-1)=2\times2(x-1)-(x-1)+1$

$=4x-4-x+1+1$

$=3x-2$

$\{2\triangledown(x-1)\}\triangledown3=(3x-2)\triangledown3$

$=2(3x-2)\times3-3+1$

$=18x-12-3+1$

$=18x-14$

$(x+m)\triangledown n=2(x+m)\times n-n+1$

$=2nx+2mn-n+1$

즉, $\{2\triangledown(x-1)\}\triangledown3=(x+m)\triangledown n$에서

$18x-14=2nx+2mn-n+1$ ……㉠

㉠이 x에 대한 항등식이 되려면

$18=2n$, $-14=2mn-n+1$

$18=2n$에서 $n=9$

$n=9$를 $-14=2mn-n+1$에 대입하면

$-14=18m-9+1$, $-18m=6$

$\therefore m=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore m=-\dfrac{1}{3}$, $n=9$

(2) ㉠을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으려면

$18=2n$, $-14\neq2mn-n+1$

$\therefore m\neq-\dfrac{1}{3}$, $n=9$

답 (1) $m=-\dfrac{1}{3}$, $n=9$ (2) $m\neq-\dfrac{1}{3}$, $n=9$

06 해결단계

❶ 단계	a를 포함하는 두 일차방정식의 해를 a를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계의 두 일차방정식의 해가 $x=n-1$, $x=n+1$이라는 조건을 사용하여 두 해 사이의 관계를 파악한다.
❸ 단계	a, n의 값을 구하여 b를 포함하는 방정식의 해를 구한다.
❹ 단계	❸ 단계의 방정식의 해를 대입하여 b의 값을 구한다.

$3x-2=2a-3$에서 $3x=2a-1$

$\therefore x=\dfrac{2a-1}{3}$ ……㉠

$3.2(x-4)=2.4(2x-a)-16.8$의 양변에 10을 곱하면

$32(x-4)=24(2x-a)-168$

$32x-128=48x-24a-168$

$-16x=-24a-40$

$\therefore x=\dfrac{3a+5}{2}$ ……㉡

이때 두 방정식의 해가 차례대로 $x=n-1$, $x=n+1$이므로

㉠, ㉡에서 $\dfrac{2a-1}{3}+2=\dfrac{3a+5}{2}$의 관계가 성립한다.

이 등식의 양변에 6을 곱하면

$2(2a-1)+12=3(3a+5)$

$4a-2+12=9a+15$

$-5a=5$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $x=\dfrac{-2-1}{3}=-1$이므로

$n-1=-1$

$\therefore n=0$

따라서 방정식 $2(x-1)-\{3(x-1)-b-2(3-x)\}=0$의 해는 $x=n$, 즉 $x=0$이므로 $x=0$을 이 식에 대입하면

$-2-(-3-b-6)=0$

$-2-(-9-b)=0$

$-2+9+b=0$

$\therefore b=-7$

$\therefore a=-1$, $b=-7$, $n=0$ 답 $a=-1$, $b=-7$, $n=0$

07 해결단계

❶ 단계	절댓값의 성질을 이용하여 경우를 나누고 주어진 방정식을 푼다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 x의 값을 주어진 방정식에 대입한 후, 조건에 맞는 방정식의 해를 찾는다.

$|2x-5+|x+1||=5$에서

$2x-5+|x+1|=5$ 또는 $2x-5+|x+1|=-5$

$\therefore |x+1|=-2x+10$ 또는 $|x+1|=-2x$

(i) $|x+1|=-2x+10$일 때,

$x+1=-2x+10$ 또는 $x+1=2x-10$

① $x+1=-2x+10$일 때,

$3x=9$ $\therefore x=3$

② $x+1=2x-10$일 때,

$-x=-11$ $\therefore x=11$

①, ②에서 $x=3$ 또는 $x=11$

$x=3$일 때, $|3+1|=-2\times3+10=4$

$x=11$일 때, $|11+1|=12$, $-2\times11+10=-12$

즉, 방정식의 해는 $x=3$

(ii) $|x+1|=-2x$일 때,

$x+1=-2x$ 또는 $x+1=2x$

③ $x+1=-2x$일 때,

$3x=-1$ $\therefore x=-\dfrac{1}{3}$

④ $x+1=2x$일 때,

$-x=-1$ $\therefore x=1$

③, ④에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x=-\dfrac{1}{3}$일 때, $\left|-\dfrac{1}{3}+1\right|=-2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$

$x=1$일 때, $|1+1|=2$, $-2\times1=-2$

즉, 방정식의 해는 $x=-\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=3$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$ 답 $x=3$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$

08 해결단계

❶ 단계	좌변의 -3을 이항하여 주어진 방정식을 변형한다.
❷ 단계	주어진 방정식의 해를 a, b, c를 사용하여 나타낸다.

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}+\dfrac{x}{c}-3=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c}$에서

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}&=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}+3\\&=\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{a+c}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)\\&=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\end{aligned}$$

즉, $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)x=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$이므로

$x=a+b+c$ $\left(\because \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\neq0\right)$ 답 $x=a+b+c$

07. 일차방정식의 활용

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 p.082

01 ③	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ⑤
06 3일	07 14			

01

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하자.
이때 가장 큰 수의 3배와 가장 작은 수의 차는 나머지 한 수의 3배보다 15만큼 작으므로

$3(x+2)-(x-2)=3x-15$

$3x+6-x+2=3x-15$, $2x+8=3x-15$

$-x=-23$ $\therefore x=23$

따라서 세 홀수는 21, 23, 25이므로 구하는 가장 큰 수는 25이다.

답 ③

02

휴대폰 케이스의 원가를 x원이라 하면 원가에 40 %의 이익을 붙여 정가를 정했으므로

$(\text{정가})=\left(1+\frac{40}{100}\right)x=\frac{140}{100}x=\frac{7}{5}x(\text{원})$

정가에서 600원을 할인하여 팔았으므로

$(\text{판매 가격})=\frac{7}{5}x-600(\text{원})$

이때 (이익)=(판매 가격)−(원가)이고 원가의 20 %의 이익을 얻었으므로

$\left(\frac{7}{5}x-600\right)-x=\frac{20}{100}x$

$\frac{2}{5}x-600=\frac{1}{5}x$

$\frac{1}{5}x=600$ $\therefore x=3000$

따라서 휴대폰 케이스의 원가는 3000원이다.

답 ⑤

03

작년 놀이기구 A의 1회 이용 요금을 x원이라 하면 놀이기구 B의 1회 이용 요금은 $(x-600)$원이다.
올해 두 놀이기구 A, B의 1회 이용 요금이 작년에 비해 각각 12 %, 18 % 인상되어 두 놀이기구의 이용 요금이 같아졌으므로

$x\times\frac{112}{100}=(x-600)\times\frac{118}{100}$

$112x=118(x-600)$

$112x=118x-70800$

$-6x=-70800$

$\therefore x=11800$

따라서 작년 놀이기구 A의 1회 이용 요금은 11800원이다.

답 ①

04

집에서 학교까지 자전거를 타고 시속 16 km로 간 거리를 x km라 하면 학교에서 집까지 시속 5 km로 걸어온 거리는 $(x-0.5)$ km이다.
집과 학교 사이를 왕복하는 데 걸린 시간이 총 48분, 즉 $\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$(시간)이므로

$\frac{x}{16}+\frac{x-0.5}{5}=\frac{4}{5}$

$5x+16(x-0.5)=64$, $5x+16x-8=64$

$21x=72$ $\therefore x=\frac{24}{7}$

따라서 집에서 학교까지 자전거를 타고 간 거리는 $\frac{24}{7}$ km이다.

답 ⑤

05

12.5 %의 소금물 600 g에 x g의 소금을 넣는다고 하면 16 %의 소금물의 양은 $(600+x)$ g이므로

$\frac{12.5}{100}\times600+x=\frac{16}{100}\times(600+x)$

$7500+100x=9600+16x$

$84x=2100$ $\therefore x=25$

따라서 더 넣는 소금의 양은 25 g이다.

답 ⑤

06

전체 일의 양을 1이라 하면 재동이와 진혁이가 하루 동안 하는 일의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$이다.
재동이와 진혁이가 5일 동안 함께 일한 후에 나머지를 재동이가 혼자 x일 동안 일하여 이 일을 완성하였다고 하면

$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)\times5+\frac{x}{12}=1$

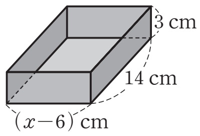
$\frac{3}{4}+\frac{x}{12}=1$, $9+x=12$

$\therefore x=3$

따라서 재동이가 혼자 일한 날은 3일이다.

답 3일

07



종이의 네 모퉁이를 잘라낸 후 접으면 오른쪽 그림과 같이 밑면의 가로, 세로의 길이가 각각 $(x-6)$ cm, 14 cm이고, 높이가 3 cm인 직육면체 모양의 상자가 된다.
이때 이 상자의 부피가 336 cm^3이므로
$(x-6)\times 14\times 3=336$
$x-6=8$ $\quad\therefore x=14$

답 14

STEP 2	A등급을 위한 문제	pp.083~087		
01 ①	**02** ③	**03** 44세	**04** ②	**05** 5일
06 ④	**07** ②	**08** ③	**09** ③	**10** 600개
11 7000장	**12** 480	**13** ⑤	**14** ④	**15** ④
16 ②	**17** ①	**18** 오전 10시 15분		
19 시속 22.8 km		**20** ④	**21** ②	**22** ⑤
23 26	**24** $\frac{20}{9}$시간	**25** 630개	**26** 2시간 30분	
27 ④	**28** 30개	**29** 28	**30** ④	

01

각 자리의 숫자의 합이 12인 두 자리 자연수의 일의 자리의 숫자를 x라 하면 십의 자리의 숫자는 $12-x$이다.
즉, 처음 수는
$(12-x)\times 10+x=120-9x$
십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는
$x\times 10+(12-x)=9x+12$
바꾼 수는 처음 수의 2배보다 39만큼 작으므로
$9x+12=2(120-9x)-39$
$9x+12=240-18x-39$
$27x=189$
$\therefore x=7$
따라서 처음 수의 일의 자리의 숫자는 7, 십의 자리의 숫자는 5이므로 처음 수는 57이다.

답 ①

BLACKLABEL 특강 교과 외 지식

진법

(1) 십(10)진법 : 세계에서 통용되는 수의 표시법
자릿값이 올라감에 따라 10배씩 커지는 수의 표시법
예) $6354=6\times 10^3+3\times 10^2+5\times 10+4$
(2) 이(2)진법 : 컴퓨터에서 사용하는 수의 표시법
자릿값이 올라감에 따라 2배씩 커지는 수의 표시법
수의 마지막에 (2)를 붙여서 이진법으로 나타낸 수임을 구분한다.
예) $1101_{(2)}=1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2+1$

02

은영이와 할아버지의 나이의 합이 아버지, 오빠, 동생의 나이의 합과 같아질 때를 x년 후라 하자.
현재 할아버지의 나이를 a세라 하면
현재 은영이의 아버지, 오빠, 동생의 나이의 합도 a
x년 후 은영이와 할아버지 나이의 합은
$(14+x)+(a+x)=14+2x+a$ …… ㉠
x년 후 아버지, 오빠, 동생의 나이의 합은 $3x+a$ …… ㉡
이때 ㉠=㉡이므로
$14+2x+a=a+3x$
$14+2x=3x$
$-x=-14$
$\therefore x=14$
따라서 14년 후 은영이의 나이는 28세이다.

답 ③

03

올해 고은이의 아버지의 나이를 x세라 하면 고은이의 부모님은 $\frac{4}{11}x$년 동안 결혼 생활을 했고, 고은이는 부모님이 결혼하신 해로부터 2년 후에 태어났으므로 올해 고은이의 나이는
$\left(\frac{4}{11}x-2\right)$세이다.
4년 후에 고은이의 나이는 아버지의 나이에서 12를 뺀 수의 절반과 같으므로
$\left(\frac{4}{11}x-2\right)+4=\frac{1}{2}\{(x+4)-12\}$
$\frac{4}{11}x+2=\frac{1}{2}x-4$, $8x+44=11x-88$
$-3x=-132$ $\quad\therefore x=44$
따라서 올해 고은이의 아버지의 나이는 44세이다.

답 44세

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

나이에 대한 문제

x년 후의 나이는 모든 사람이 현재 나이에서 x세 증가하는 데 주의하여 등식으로 나타낸다. 이때 다음이 성립한다.
(x년 후의 나이)=(현재의 나이)+x(세)

04

옆 반이 후반전에서 얻은 점수를 x점이라 하면 우리 반이 후반전에서 얻은 점수는 $(3x-6)$점이다.
우리 반은 전반전에서 5점 차로 지고 있었고, 전후반 경기가 모두 끝난 후 7점 차로 이겼으므로 우리 반이 후반전에서 얻은 점수는 옆 반이 후반전에서 얻은 점수보다 12점 많다.

즉, $3x-6=x+12$이므로

$2x=18 \qquad \therefore x=9$

따라서 우리 반이 후반전에서 얻은 점수는

$3x-6=3\times9-6=21$(점) **답** ②

• 다른 풀이 •

전반전에서 옆반이 얻은 점수를 a점이라 하면 우리 반이 얻은 점수는 $(a-5)$점이고, 후반전에서 옆 반이 얻은 점수를 x점이라 하면 우리 반의 얻은 점수는 $(3x-6)$점이다.

전후반 경기가 모두 끝난 후 우리 반이 옆 반을 7점 차로 이겼으므로

(우리 반 점수)=(옆 반 점수)+7

$(a-5)+(3x-6)=(a+x)+7$

$3x-11=x+7$

$2x=18 \qquad \therefore x=9$

따라서 우리 반이 후반전에서 얻은 점수는

$3x-6=3\times9-6=21$(점)

05

우빈이가 주말에 열공 독서실을 이용한 날수를 x일이라 하면 각 독서실을 이용한 날수는 다음 표와 같다.

	평일	주말	합계
집중 독서실	$(x+2)$일	$(7-x)$일	9일
열공 독서실	$(11-x)$일	x일	11일
합계	13일	7일	20일

우빈이가 20일 간 이용료로 지불한 금액은 총 15300원이므로

$700(x+2)+900(7-x)+600(11-x)+1000x=15300$

$7(x+2)+9(7-x)+6(11-x)+10x=153$

$7x+14+63-9x+66-6x+10x=153$

$2x+143=153,\ 2x=10$

$\therefore x=5$

따라서 우빈이가 주말에 열공 독서실을 이용한 날은 5일이다.

답 5일

06

작년의 여학생 수를 x라 하면 전체 학생은 500명이므로 작년의 남학생 수는 $500-x$이다.

이때 올해 증가한 남학생 수는 $\frac{8}{100}(500-x)$, 감소한 여학생 수는 $\frac{4}{100}x$이고, 작년에 비하여 전체 학생이 7명 증가하였으므로

$\frac{8}{100}(500-x)-\frac{4}{100}x=7,\ 8(500-x)-4x=700$

$-12x+4000=700,\ -12x=-3300$

$\therefore x=275$

따라서 작년의 여학생이 275명이므로 올해의 여학생 수는

$\left(1-\frac{4}{100}\right)\times275=264$ **답** ④

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

증가, 감소에 대한 문제

(1) x가 a % 증가 ⇨ $x+x\times\frac{a}{100}=\left(1+\frac{a}{100}\right)x$

(2) x가 b % 감소 ⇨ $x-x\times\frac{b}{100}=\left(1-\frac{b}{100}\right)x$

07

할아버지와 할머니께 드릴 상자 속의 사탕과 초콜릿의 개수의 합을 각각 $8x$, $7x$라 하자.

할아버지께 드릴 상자 속의 사탕과 초콜릿의 개수의 비가 9 : 7이므로

(사탕의 개수)$=8x\times\frac{9}{9+7}=\frac{9}{2}x$,

(초콜릿의 개수)$=8x\times\frac{7}{9+7}=\frac{7}{2}x$

할머니께 드릴 상자 속의 사탕과 초콜릿의 개수의 비가 4 : 3이므로

(사탕의 개수)$=7x\times\frac{4}{4+3}=4x$,

(초콜릿의 개수)$=7x\times\frac{3}{4+3}=3x$

이때 전체 사탕이 전체 초콜릿보다 24개 더 많으므로

$\frac{9}{2}x+4x=\left(\frac{7}{2}x+3x\right)+24$

$\frac{17}{2}x-\frac{13}{2}x=24,\ 2x=24 \qquad \therefore x=12$

따라서 전체 사탕의 개수는

$\frac{9}{2}x+4x=\frac{17}{2}x=\frac{17}{2}\times12=102$ **답** ②

08

이 상인이 물건을 구입하는 데 든 총 비용은

$6000\times100+100000=700000$(원)

도매 가격에 x %의 이익을 붙여 판매 가격을 정하면

(판매 가격)$=6000\left(1+\frac{x}{100}\right)$

이때 물건 20개는 파손되어 팔 수 없고, 이익은 총 비용의 20 %이므로

$6000\left(1+\frac{x}{100}\right)\times(100-20)-700000=700000\times\frac{20}{100}$

$480000\left(1+\frac{x}{100}\right)=840000$

$1+\frac{x}{100}=\frac{7}{4}$

$\frac{x}{100}=\frac{3}{4}$

$\therefore x=75$

따라서 이 물건의 판매 가격을 도매 가격에 75 %의 이익을 붙여서 정해야 한다. **답** ③

09

조금 편하게 앉기 위해 빈 의자에 한 명씩 옮겨 앉았을 때, 5명씩 앉은 의자와 4명씩 앉은 의자의 개수를 각각 $4x$, $3x$라 하자.
처음에 5명씩 꽉 차게 앉았을 때, 학생들이 앉은 의자의 개수는 $7x-3$이므로

$4x\times5+3x\times4=(7x-3)\times5$

$20x+12x=35x-15$

$-3x=-15$

$\therefore x=5$

따라서 5명씩 앉은 의자와 4명씩 앉은 의자의 개수는 각각 20, 15이므로 1학년 전체 학생 수는

$20\times5+15\times4=160$ **답** ③

10

과일 도매상점에서 사온 귤의 개수를 x라 하면 도매상점에서 사온 전체 귤의 가격은

$\frac{2000}{4}x=500x$(원)

첫째 날, 귤의 총 판매 금액은

$\frac{1}{2}x\times\frac{2400}{3}=400x$(원)

둘째 날, 귤의 총 판매 금액은

$\left(\frac{1}{2}x\times\frac{80}{100}\right)\times\frac{3500}{5}=280x$(원)

셋째 날, 귤의 총 판매 금액은

$\left(\frac{1}{2}x\times\frac{20}{100}\right)\times\left\{500\times\left(1+\frac{20}{100}\right)\right\}=60x$(원)

이때 총 144000원의 이익을 얻었으므로

$400x+280x+60x-500x=144000$

$240x=144000 \qquad \therefore x=600$

따라서 과일 도매상점에서 사온 귤은 600개이다. **답** 600개

11 해결단계

❶ 단계	지원이네 학교에서 인쇄한 종이의 장수를 x라 한다.
❷ 단계	표를 이용하여 지원이네 학교에서 낸 인쇄기 임대료에 대한 방정식을 세운다.
❸ 단계	지원이네 학교에서 인쇄한 종이의 장수를 구한다.

지원이네 학교에서 인쇄한 종이의 장수를 x라 하면 $x>3000$이므로 각 구간별로 인쇄한 종이의 장수와 1장당 가격은 다음 표와 같다.

구간(장)	인쇄한 종이의 장수(장)	1장당 가격(원)
1~1000	1000	5
1001~3000	2000	$5\times0.9=4.5$
3001 이상	$x-3000$	$5\times0.9\times0.9=4.05$

이때 인쇄기 임대료로 80200원을 냈으므로

$50000+1000\times5+2000\times4.5+(x-3000)\times4.05=80200$

$50000+5000+9000+4.05x-12150=80200$

$4.05x+51850=80200$

$4.05x=28350$

$\therefore x=7000$

따라서 인쇄한 종이는 7000장이다. **답** 7000장

12

최종 합격자 중 여자는 $140\times\frac{3}{7}=60$(명)

최종 합격자 중 남자는 $140\times\frac{4}{7}=80$(명)

한편, 이 회사의 전체 지원자 수를 x라 하면 1차 합격자 수는 $\frac{1}{2}x$이다.

이때 1차 합격자 중 남자는

$\frac{1}{2}x\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}x$(명)

1차 합격자 중 여자는

$\frac{1}{2}x\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}x$(명)

즉, 1차 합격자 수는 최종 합격자 수와 면접 불합격자 수의 합과 같으므로 이를 정리하면 다음 표와 같다.

	남자	여자
1차 합격자 수	$\frac{3}{10}x$	$\frac{1}{5}x$
최종 합격자 수	80	60
면접 불합격자 수	$\frac{3}{10}x-80$	$\frac{1}{5}x-60$

면접 불합격자 중 여자는 면접 불합격자의 $\frac{9}{25}$이므로 면접 불합격자의 남녀의 비는 16 : 9이다. 즉,

$\left(\frac{3}{10}x-80\right):\left(\frac{1}{5}x-60\right)=16:9$

$9\left(\frac{3}{10}x-80\right)=16\left(\frac{1}{5}x-60\right)$

$\frac{27}{10}x-720=\frac{16}{5}x-960$

$27x-7200=32x-9600$

$-5x=-2400$

$\therefore x=480$

따라서 전체 지원자 수는 480이다. **답** 480

13

봉지의 개수를 x라 하면

$3x+7=5x-3$

$-2x=-10 \qquad \therefore x=5$

이때 지우개의 개수는 $3x+7=3\times5+7=22$이므로 5개의 봉지에 지우개를 4개씩 나누어 담으면 지우개 $22-4\times5=2$(개)가 남는다. **답** ⑤

14

텐트의 개수를 x라 하면 한 텐트에 8명씩 들어갈 때, 8명이 모두 들어간 텐트의 개수는 $x-2$이므로

$6x+3=8(x-2)+5$

$6x+3=8x-16+5$

$-2x=-14 \qquad \therefore x=7$

따라서 텐트가 7개이므로 야영에 참여한 학생 수는

$6x+3=6\times7+3=45$ **답** ④

15

거북이가 출발한 후 결승선을 통과하기까지 걸린 시간은

$\frac{1000}{10}=100$(분)

토끼가 출발한 후 결승선을 통과하기까지 걸린 시간은

$\frac{x}{30}+40+\frac{1000-x}{50}$(분)

이때 토끼는 거북이보다 30분 늦게 출발하여 거북이와 동시에 결승선을 통과했으므로

$100=30+\frac{x}{30}+40+\frac{1000-x}{50}$

$100=\frac{x}{30}+\frac{1000-x}{50}+70$

$30=\frac{x}{30}+\frac{1000-x}{50}$

$4500=5x+3000-3x$

$-2x=-1500$

$\therefore x=750$ **답** ④

16

두 기차의 길이를 x m라 하자.

A 기차가 길이가 1 km, 즉 1000 m인 다리를 완전히 지나기 위해 움직이는 거리는 $(1000+x)$ m이고, 이 다리를 완전히 지나는 데 32초가 걸리므로 기차의 속력은

초속 $\frac{1000+x}{32}$ m

B 기차가 길이가 600 m인 다리를 완전히 지나기 위해 움직이는 거리는 $(600+x)$ m이고, A, B 두 기차의 속력이 같으므로

$600+x=15\times\frac{1000+x}{32}+18\times\left(\frac{1000+x}{32}\times\frac{1}{2}\right)$

$600+x=\frac{15(1000+x)+9(1000+x)}{32}$

$600+x=\frac{24(1000+x)}{32}$

$600+x=\frac{3(1000+x)}{4}$

$4(600+x)=3(1000+x)$

$2400+4x=3000+3x$

$\therefore x=600$

따라서 두 기차 A, B의 원래 속력은

초속 $\frac{1000+600}{32}$ m, 즉 초속 50 m

이므로 B 기차가 장애물을 만난 이후의 속력은 초속 25 m이다.

답 ②

17

정민이의 집에서 학교까지의 거리를 x km라 하면 집에서 학교까지 시속 15 km로 갈 때와 시속 12 km로 갈 때의 시간 차가 12분이므로

$\frac{x}{12}-\frac{x}{15}=\frac{12}{60}$

$5x-4x=12$

$\therefore x=12$

즉, 정민이의 집에서 학교까지의 거리는 12 km이다.

정민이가 등교 시간보다 12분 일찍 등교하려면 시속 15 km로 이동할 때보다 3분 일찍 도착해야 하고 그때의 속력을 시속 y km라 하면

$y\times\left(\frac{12}{15}-\frac{3}{60}\right)=12$

$\frac{3}{4}y=12$

$\therefore y=16$

따라서 정민이가 등교 시간보다 12분 일찍 등교하려면 시속 16 km로 가야 한다. **답** ①

18

영석이와 선희가 걷는 속력을 각각 분속 $4k$ m, 분속 $3k$ m라 하자.
둘레의 길이가 2.1 km, 즉 2100 m인 산책로를 서로 반대 방향으로 걸어서 15분 만에 만났으므로 15분 간 영석이와 선희가 걸은 거리의 합은 2100 m이다.
즉, $4k\times15+3k\times15=2100$에서
$60k+45k=2100$
$105k=2100 \qquad \therefore k=20$
즉, 영석이와 선희가 걷는 속력은 각각 분속 $4\times20=80$(m), 분속 $3\times20=60$(m)이다.
영석이와 선희가 휴식을 취한 지점에서 같은 방향으로 동시에 출발한 후 다시 만날 때까지 걸린 시간을 x분이라 하면
$80x-60x=2100$
$20x=2100$
$\therefore x=105$
영석이와 선희가 오전 8시 15분에 처음으로 만났고 만난 지점에서 15분 동안 휴식을 취한 후 출발했으므로 다시 동시에 출발한 시각은 오전 8시 30분이다.
따라서 영석이와 선희가 처음으로 다시 만나는 시각은 오전 8시 30분에서 105분 후인 오전 10시 15분이다. **답** 오전 10시 15분

19

레일바이크의 속력을 시속 x km라 하자.
한편, 태한이네 가족이 분속 60 m의 속력으로 산책하고 있으므로 속력은 시속 3600 m, 즉 시속 3.6 km이다.
레일바이크와 태한이네 식구들이 같은 방향으로 움직일 때는 레일바이크가 시속 $(x-3.6)$ km로 움직이는 것과 같고, 레일바이크와 태한이네 식구들이 반대 방향으로 움직일 때는 레일바이크가 시속 $(x+3.6)$ km로 움직이는 것과 같다.
레일바이크의 운행 간격이 일정하므로
$(x-3.6)\times\frac{11}{60}=(x+3.6)\times\frac{8}{60}$
$11(x-3.6)=8(x+3.6)$
$11x-39.6=8x+28.8$
$3x=68.4$
$\therefore x=22.8$
따라서 레일바이크의 속력은 시속 22.8 km이다.
답 시속 22.8 km

20

컵 A에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{4}{100}\times250=10$(g)
컵 B에 들어 있는 소금의 양은
$\frac{10}{100}\times200=20$(g)
컵 A에서 물 $2x$ g을 증발시키면 컵 A에 들어 있는 소금물의 양은 $(250-2x)$ g, 소금의 양은 10 g이고, 컵 B에 물 x g을 더 넣으면 컵 B에 들어 있는 소금물의 양은 $(200+x)$ g, 소금의 양은 20 g이다.
이때 두 컵 A, B에 들어 있는 소금물을 섞으면 소금물의 양은
$(250-2x)+(200+x)=450-x$(g)
소금의 양은 $10+20=30$(g)
이때 섞은 소금물의 농도가 8 %이므로
$\frac{8}{100}\times(450-x)=30$
$3600-8x=3000,\ -8x=-600$
$\therefore x=75$ **답** ④

21

원래 팔던 치즈 파이의 무게를 x g이라 하면 이 치즈 파이에 들어 있는 치즈의 양은
$\frac{20}{100}\times x=\frac{x}{5}$(g)
신제품에는 치즈의 양을 15 g 늘리고, 다른 재료 20 g을 더 넣었으므로 신제품의 무게는
$x+15+20=x+35$(g)
신제품에 들어 있는 치즈의 양은
$\frac{x}{5}+15$(g)
이때 신제품의 치즈의 함유량이 25 %이므로
$\frac{25}{100}\times(x+35)=\frac{x}{5}+15$
$25x+875=20x+1500$
$5x=625$
$\therefore x=125$
따라서 원래 팔던 치즈 파이의 무게는 125 g이다. **답** ②

22

덜어낸 소금물에 들어 있는 소금의 양을 x g이라 하면
$\frac{5}{100}\times300-x+\frac{8}{100}\times(500-300)=\frac{6}{100}\times500$
$15-x+16=30,\ 31-x=30$
$\therefore x=1$
따라서 덜어낸 소금물에 들어 있는 소금의 양은 1 g이다.
답 ⑤

23

두 컵 A, B에서 각각 200 g의 설탕물을 퍼내어 서로 바꾸어 넣은 후 컵 A에는 x %의 설탕물 $500-200=300$(g)과 6 %의 설탕물 200 g이 들어 있으므로 컵 A에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{x}{100}\times300+\frac{6}{100}\times200=3x+12$(g) ㈎

컵 B에는 x %의 설탕물 200 g과 6 %의 설탕물 $400-200=200$(g)이 들어 있으므로 컵 B에 들어 있는 설탕의 양은

$\frac{x}{100}\times200+\frac{6}{100}\times200=2x+12$(g) ㈏

이때 컵 A에 들어 있는 설탕물의 농도가 컵 B에 들어 있는 설탕물의 농도보다 2 % 더 높으므로

$\frac{3x+12}{500}\times100=\frac{2x+12}{400}\times100+2$

$\frac{3x+12}{5}=\frac{x+6}{2}+2$

$6x+24=5x+30+20$ $\therefore x=26$ ㈐

답 26

단계	채점 기준	배점
㈎	서로 바꾸어 넣은 후 컵 A에 들어 있는 설탕의 양을 x를 사용하여 나타낸 경우	30%
㈏	서로 바꾸어 넣은 후 컵 B에 들어 있는 설탕의 양을 x를 사용하여 나타낸 경우	30%
㈐	x의 값을 구한 경우	40%

24

수영장에 가득 찬 물의 양을 1이라 하면 A관, B관은 1시간에 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$의 물을 넣고, C관은 1시간에 $\frac{1}{8}$의 물을 빼낸다.

C관을 열어 둔 시간을 x시간이라 하면 B관을 열어 둔 시간은 $\left(x+\frac{10}{60}\right)$시간이고, A관은 8시간 동안 계속 열어 두었으므로

$\frac{1}{10}\times8+\frac{1}{5}\times\left(x+\frac{10}{60}\right)-\frac{1}{8}x=1$

$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}x+\frac{1}{30}-\frac{1}{8}x=1$

$96+24x+4-15x=120$

$9x+100=120$, $9x=20$

$\therefore x=\frac{20}{9}$

따라서 C관을 열어 둔 시간은 $\frac{20}{9}$시간이다. 답 $\frac{20}{9}$시간

25

주인은 수습생보다 4분 동안 36개의 만두를 더 만들 수 있으므로 1분 동안 9개의 만두를 더 만들 수 있다. 즉, 주인이 1분 동안 만들 수 있는 만두의 개수를 x라 하면 수습생이 1분 동안 만들 수 있는 만두의 개수는 $x-9$이다.

주인이 21분, 수습생이 28분 동안 각각 만두를 만들었을 때, 수습생은 주인이 만든 만두의 개수의 $\frac{2}{3}$를 만들었으므로

$\frac{2}{3}\times21x=28(x-9)$

$14x=28x-252$

$-14x=-252$ $\therefore x=18$

따라서 주인과 수습생이 만든 만두의 개수의 합은

$18\times21+(18-9)\times28=378+252$

$=630$(개) 답 630개

26

전체 일의 양을 1이라 하면 민혁이와 지수가 1시간 동안 하는 일의 양은 각각 $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$이다.

민혁이가 한 번 일할 때마다 하는 일의 양은 $\frac{1}{5}\times\frac{25}{60}=\frac{1}{12}$

지수가 한 번 일할 때마다 하는 일의 양은 $\frac{1}{4}\times\frac{24}{60}=\frac{1}{10}$

이 일이 완성되었을 때, 민혁이가 일을 한 횟수를 x라 하면 지수가 일을 한 횟수는 $x-1$이므로

$\frac{1}{12}x+\frac{1}{10}(x-1)=1$

$10x+12(x-1)=120$

$10x+12x-12=120$, $22x=132$

$\therefore x=6$

따라서 민혁이는 일을 25분씩 6회 하였으므로 민혁이가 일한 시간은 $25\times6=150$(분), 즉 2시간 30분이다. 답 2시간 30분

27

두 직사각형 ABGE와 EGCD의 넓이의 비가 3 : 2이므로 선분 BG의 길이를 $3x$ cm, 선분 GC의 길이를 $2x$ cm라 하자.

전체 철사의 길이가 60 cm이므로

$6\times3+(3x+2x)\times2+2x=60$

$18+10x+2x=60$

$12x=42$ $\therefore x=\frac{7}{2}$

이때 두 직사각형 EFHD와 FGCH의 넓이의 비가 2 : 1이므로

(직사각형 FGCH의 넓이)

$=$(직사각형 EGCD의 넓이)$\times\frac{1}{2+1}$

$=\left\{6\times\left(2\times\frac{7}{2}\right)\right\}\times\frac{1}{3}$

$=14(\text{cm}^2)$ 답 ④

28

정사각형의 한 변에 놓이는 검은 바둑돌의 개수를 x라 하면 정삼각형의 한 변에 놓이는 흰 바둑돌의 개수는 $\frac{1}{2}x+7$

정삼각형을 만드는 데 필요한 흰 바둑돌의 개수는

$3\left(\frac{1}{2}x+7\right)-3=\frac{3}{2}x+18$

정사각형을 만드는 데 필요한 검은 바둑돌의 개수는

$4x-4$

이때 흰 바둑돌과 검은 바둑돌의 총 개수가 58이므로

$\left(\frac{3}{2}x+18\right)+(4x-4)=58$

$3x+36+8x-8=116$

$11x+28=116,\ 11x=88 \qquad \therefore x=8$

따라서 흰 바둑돌 전체의 개수는

$\frac{3}{2}\times8+18=30$(개) **답** 30개

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

규칙적인 간격으로 정다각형을 만드는 데 필요한 바둑돌의 총 개수를

(변의 개수)×(한 변에 놓인 바둑돌의 개수)

로 구하지 않도록 주의한다. 이와 같이 구하면 각 꼭짓점의 위치에 놓인 바둑돌을 2번씩 중복하여 센 것이기 때문이다.

따라서 다각형을 만드는 데 필요한 바둑돌의 총 개수는

(변의 개수)×(한 변에 놓인 바둑돌의 개수)−(꼭짓점의 개수)

로 구해야 한다.

29

이 달의 달력에서  모양으로 선택한 5개의 숫자 중 가장 큰 숫자를 x라 하면 나머지 숫자는

$x-1,\ x-8,\ x-15,\ x-16$

5개의 숫자의 합이 100이면

$x+(x-1)+(x-8)+(x-15)+(x-16)=100$

$5x-40=100,\ 5x=140$

$\therefore x=28$

따라서 구하는 가장 큰 숫자는 28이다. **답** 28

30

2시와 3시 사이에 시침과 분침이 서로 반대 방향으로 일직선이 될 때의 시각을 2시 x분이라 하자.

이때 시침은 1분에 $0.5°$씩, 분침은 1분에 $6°$씩 움직이므로

분침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는

$6x°$

시침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는

$2\times30°+0.5x°=(60+0.5x)°$

시침과 분침이 이루는 각의 크기가 $180°$이므로

$6x-(60+0.5x)=180$

$5.5x=240$

$\therefore x=43\frac{7}{11}$

따라서 구하는 시각은 2시 $43\frac{7}{11}$분이다. **답** ④

STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.088~089

01 19명	**02** 34점	**03** 3시간	**04** 75분	**05** 412
06 $35°$	**07** (1) 60초 (2) 꼭짓점 D	**08** 초속 25 m		

01 해결단계

❶ 단계	나누어 준 사탕의 총 개수를 구한다.
❷ 단계	사탕을 받은 아이들의 수를 구한다.

나누어 준 사탕의 총 개수를 x라 하면 첫 번째 아이와 두 번째 아이가 받은 사탕의 개수가 같으므로

$\frac{1}{20}x+1=\frac{1}{20}\left\{x-\left(\frac{1}{20}x+1\right)\right\}+2$

$\frac{1}{20}x+1=\frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}x-1\right)+2$

$\frac{1}{20}x+1=\frac{19}{400}x-\frac{1}{20}+2$

$20x+400=19x-20+800$

$\therefore x=380$

즉, 사탕의 총 개수는 380이므로 첫 번째 아이가 받은 사탕의 개수는

$\frac{1}{20}\times380+1=20$

따라서 각 아이가 받은 사탕의 개수는 20으로 같으므로 사탕을 받은 아이들은 모두 $\frac{380}{20}=19$(명)이다. **답** 19명

02 해결단계

❶ 단계	쪽지시험에 통과한 학생의 최저 점수를 x점이라 하고 각각의 평균 점수를 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	x에 대한 방정식을 세운다.
❸ 단계	쪽지시험에 통과한 학생의 최저 점수를 구한다.

쪽지시험에 통과한 학생의 최저 점수를 x점이라 하면

선우네 반 학생 30명의 평균 점수는 $(x+8)$점,

쪽지시험에 통과한 학생 20명의 평균 점수는 $(x+18)$점,

쪽지시험에 통과하지 못한 학생 10명의 평균 점수는

$\left(\frac{x}{2}+5\right)$점이므로 전체 평균 점수는

$$x+8=\frac{20\times(x+18)+10\times\left(\frac{x}{2}+5\right)}{20+10}$$

$$x+8=\frac{20x+360+5x+50}{30}$$

$$x+8=\frac{25x+410}{30}$$

$30x+240=25x+410$

$5x=170 \qquad \therefore x=34$

따라서 쪽지시험에 통과한 학생의 최저 점수는 34점이다.

답 34점

03 해결단계

❶ 단계	불을 붙이고 x시간 후의 남은 두 향초 A, B의 길이를 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	비례식을 이용하여 x의 값을 구한다.
❸ 단계	향초 C가 1시간 동안 타는 길이를 구한다.
❹ 단계	향초 C가 다 타버리는 데 걸리는 시간을 구한다.

세 향초 A, B, C의 길이를 각각 1이라 하면 불을 붙이고 x시간 후의 남은 두 향초 A, B의 길이는 각각 $1-\frac{1}{5}x$, $1-\frac{1}{4}x$로 나타낼 수 있다.

x시간 후 남은 두 향초 A, B의 길이의 비가

$21:15=7:5$이므로

$\left(1-\frac{1}{5}x\right):\left(1-\frac{1}{4}x\right)=7:5$

$5\left(1-\frac{1}{5}x\right)=7\left(1-\frac{1}{4}x\right)$

$5-x=7-\frac{7}{4}x$

$\frac{3}{4}x=2 \qquad \therefore x=\frac{8}{3}$

즉, 오전 10시에 세 향초 A, B, C에 동시에 불을 붙이고 $\frac{8}{3}$시간 후의 남은 향초의 길이의 비가 $21:15:5$이므로 C 향초가 1시간 동안 타는 길이를 y라 하면 두 향초 A, C의 남은 길이의 비는

$\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{8}{3}\right):\left(1-\frac{8}{3}y\right)=21:5$

$\frac{7}{15}:\left(1-\frac{8}{3}y\right)=21:5$

$\frac{7}{15}\times5=\left(1-\frac{8}{3}y\right)\times21$

$\frac{7}{3}=21-56y$

$56y=\frac{56}{3} \qquad \therefore y=\frac{1}{3}$

따라서 C 향초가 1시간 동안 타는 길이가 $\frac{1}{3}$이므로 C 향초가 다 타버리는 데 걸리는 시간은 3시간이다.

답 3시간

04 해결단계

❶ 단계	각 경기에 사용한 시간을 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	소모된 총 열량이 1830 kcal임을 이용하여 x에 대한 방정식을 세운다.
❸ 단계	x의 값을 구한다.
❹ 단계	사이클 경기에 사용한 시간을 구한다.

수영 경기와 마라톤 경기에 사용한 시간을 각각 $2x$분, $3x$분이라 하면 사이클 경기에 사용한 시간은 $(150-5x)$분이다.

이때 소모된 총 열량은 1830 kcal이므로

$14\times2x+14\times(150-5x)+8\times3x=1830$

$28x+2100-70x+24x=1830$

$-18x=-270 \qquad \therefore x=15$

따라서 사이클 경기에 사용한 시간은

$150-5\times15=75$(분)

답 75분

BLACKLABEL 특강 교과 외 지식

트라이애슬론(triathlon)은 21세기 최후의 스포츠라 불린다. 2000년 시드니 올림픽부터 정식 종목으로 채택되었으며 3개의 유산소 운동을 조화시킨 가장 이상적인 스포츠로 평가받기도 한다.

05 해결단계

❶ 단계	처음에 담았을 때의 상자의 개수를 x라 하고 나중에 담았을 때 필요한 상자의 개수를 x를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	컵케이크의 개수를 이용하여 x에 대한 방정식을 세우고 푼다.
❸ 단계	$a+b$의 값을 구한다.

처음에 담았을 때 상자의 개수를 x라 하자.

처음에는 쿠키를 5개씩 x개의 상자에 넣어 60개가 남았는데 나중에는 쿠키를 5개씩 넣어도 쿠키가 남지 않았으므로 나중에 사용한 상자의 개수는 $\frac{5x+60}{5}=x+12$이다.

이때 컵케이크의 개수는 처음에 담았을 때 $11x$,

나중에 담았을 때 $7(x+12)+4=7x+88$이므로

$11x=7x+88$

$4x=88 \qquad \therefore x=22$

따라서 준비한 컵케이크의 개수는

$a=11\times22=242$

준비한 쿠키의 개수는

$b=5\times22+60=170$

따라서 $a+b=242+170=412$

답 412

06 해결단계

❶ 단계	시침과 분침이 직각을 이루고 있는 시각을 4시 x분이라 하고 12시 방향으로부터 시침과 분침이 회전한 각도를 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	x에 대한 방정식을 세우고 푼다.
❸ 단계	종례가 끝났을 때, 시침과 분침이 이루는 각 중 작은 각의 크기를 구한다.

4시 30분과 5시 사이에 시침과 분침이 직각을 이루고 있는 시각을 4시 x분이라 하자.

이때 시침은 1분에 $0.5°$씩, 분침은 1분에 $6°$씩 움직이므로

분침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는 $6x°$

시침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는

$4\times30°+0.5x°=(120+0.5x)°$

시침과 분침이 이루는 각 중 작은 각의 크기가 $90°$이므로

$6x-(120+0.5x)=90$

$5.5x=210 \qquad \therefore x=38\frac{2}{11}$

담임선생님의 종례는 4시 $\left(38\frac{2}{11}-10\right)$분, 즉 4시 $28\frac{2}{11}$분에 끝났으므로 분침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는

$6°\times28\frac{2}{11}=6°\times\frac{310}{11}=\left(\frac{1860}{11}\right)°$

시침이 12시 방향으로부터 회전한 각도는

$4\times30°+0.5°\times\frac{310}{11}=120°+\left(\frac{155}{11}\right)°=\left(\frac{1475}{11}\right)°$

따라서 구하는 각의 크기는

$\left(\frac{1860}{11}\right)°-\left(\frac{1475}{11}\right)°=\left(\frac{385}{11}\right)°=35°$

답 $35°$

• 다른 풀이 •

시침은 1분에 $0.5°$씩, 분침은 1분에 $6°$씩 움직이므로 10분 전에 시침과 분침은 현재 시침과 분침의 시계 반대 방향으로 각각 $5°$, $60°$만큼씩 움직인 곳에 위치하고 있다.

현재 시침과 분침이 이루는 각의 크기가 $90°$이므로 10분 전에 시침과 분침이 이루는 각의 크기는

$90°-60°+5°=35°$

07 해결단계

(1)	❶ 단계	두 점 P, Q가 몇 초 후에 처음으로 만나는지 구한다.
	❷ 단계	두 점 P, Q가 세 번째로 만나는 때는 출발한 지 몇 초 후인지 구한다.
(2)	❸ 단계	두 점 P, Q가 세 번째로 만나는 지점을 구한다.

(1) 두 점 P, Q가 출발하여 t초 동안 움직인 거리는 각각 $3t$ cm, $2t$ cm이다.

처음에 점 P는 점 Q보다 12 cm 뒤에 있으므로 점 P와 점 Q가 동시에 출발하여 첫 번째 만날 때까지 점 P는 점 Q보다 12 cm만큼 더 많이 움직여야 한다.

즉, $3t-2t=12$이므로 $t=12$

따라서 출발한 지 12초 후에 두 점 P와 Q는 처음으로 만난다.

한편, 점 P와 점 Q가 처음으로 만나고 x초 후에 세 번째 만난다고 하면 두 번을 더 만나는 것이므로 두 점 P와 Q가 움직인 거리의 차는 정육각형의 둘레의 길이인 24 cm의 2배가 되어야 한다.

즉, $3x-2x=24\times2$이므로 $x=48$

따라서 점 P와 점 Q가 세 번째로 만나는 때는 출발한 지 $12+48=60$(초) 후이다.

(2) 점 P는 꼭짓점 A를 출발하여 60초 동안 $60\times3=180$(cm)를 움직이고, $180=24\times7+12$이므로 점 P는 점 Q와 세 번째로 만날 때까지 정육각형의 둘레를 7바퀴 돌고 12 cm만큼 더 움직인다.

따라서 점 P와 점 Q가 세 번째로 만나는 지점은 꼭짓점 A로부터 12 cm 더 움직인 위치인 꼭짓점 D이다.

답 (1) 60초 (2) 꼭짓점 D

08 해결단계

❶ 단계	기차 A의 길이를 x m라 하고 600 m 길이의 철교를 완전히 통과하기까지 움직인 거리와 속력을 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	기차 A가 1200 m 길이의 터널을 통과할 때 기차가 완전히 보이지 않는 동안 움직인 거리와 속력을 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서의 기차 A의 속력이 서로 같음을 이용하여 x의 값을 구하고 기차 A의 속력을 구한다.
❹ 단계	기차 B의 속력을 초속 y m라 하고 y에 대한 방정식을 세워 푼 후, 기차 B의 속력을 구한다.

기차 A의 길이를 x m라 하면 기차 A가 600 m 길이의 철교를 완전히 통과하기까지 움직인 거리는 $(600+x)$ m이고, 걸리는 시간은 30초이므로 기차 A의 속력은 초속 $\frac{600+x}{30}$ m이다.

기차 A가 1200 m 길이의 터널을 통과할 때 기차가 완전히 보이지 않는 동안 움직인 거리는 $(1200-x)$ m이고, 걸리는 시간은 50초이므로 기차 A의 속력은 초속 $\frac{1200-x}{50}$ m이다.

이때 기차 A의 속력이 일정하므로

$\frac{600+x}{30}=\frac{1200-x}{50}$

$5(600+x)=3(1200-x)$

$3000+5x=3600-3x$

$8x=600 \qquad \therefore x=75$

즉, 기차 A의 속력은

초속 $\frac{600+75}{30}=\frac{675}{30}=22.5$(m)

한편, 기차 B의 속력을 초속 y m라 하면 두 기차 A, B가 마주 보고 20초 동안 달린 거리의 합이 950 m이므로

$22.5\times20+y\times20=950$

$450+20y=950$

$20y=500 \qquad \therefore y=25$

따라서 기차 B의 속력은 초속 25 m이다.

답 초속 25 m

대단원평가 pp.090~091

01 $4a$	02 -9	03 $\frac{7}{3}$	04 36
05 5	06 ②	07 ⑤	08 ⑤
09 30 g	10 250	11 24	
12 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $(x-2)$일 (3) 5일			

01

직사각형의 세로의 길이는 $2(a-b)$ 또는 $3(2a-3b)$이므로

$2(a-b)=3(2a-3b)$에서

$2a-2b=6a-9b$

$7b=4a \qquad \therefore b=\frac{4}{7}a$

직사각형의 둘레의 길이는

$2[2(a-b)+\{2(a-b)+(2a-3b)\}]$

$=2(2a-2b+2a-2b+2a-3b)$

$=2(6a-7b)$

$=12a-14b$

$b=\frac{4}{7}a$를 위의 식에 대입하면 직사각형의 둘레의 길이는

$12a-14b=12a-14\times\frac{4}{7}a$

$=12a-8a=4a$ **답** $4a$

02

$a-b+c=0$에서

$a-b=-c,\ b-c=a,\ c+a=b$

$\therefore \frac{4ac}{(a-b)(b-c)}-\frac{3ab}{(b-c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a-b)}$

$=\frac{4ac}{-c\times a}-\frac{3ab}{a\times b}+\frac{2bc}{b\times(-c)}$

$=-4-3+(-2)=-9$ **답** -9

03

(ⅰ) m : 짝수, n : 짝수일 때,

$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y\right)=\frac{1}{3}x-2y$

$a=\frac{1}{3},\ b=-2$이므로

$a-b=\frac{1}{3}-(-2)=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

(ⅱ) m : 짝수, n : 홀수일 때,

$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y\right)=x+y$

$a=1,\ b=1$이므로

$a-b=1-1=0$

(ⅲ) m : 홀수, n : 짝수일 때,

$-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)-\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y\right)$

$=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y=-x-y$

$a=-1,\ b=-1$이므로

$a-b=-1-(-1)=-1+1=0$

(ⅳ) m : 홀수, n : 홀수일 때,

$-\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y\right)$

$=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}y=-\frac{1}{3}x+2y$

$a=-\frac{1}{3},\ b=2$이므로

$a-b=-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $a-b$의 값 중 가장 큰 값은 $\frac{7}{3}$이다. **답** $\frac{7}{3}$

04

㈎ $0.3x+2.4=0.6(1-x)$의 양변에 10을 곱하면

$3x+24=6(1-x),\ 3x+24=6-6x$

$9x=-18 \qquad \therefore x=-2$

㈏ $\frac{3}{4}x+5=\frac{1}{2}(x-7)$의 양변에 4를 곱하면

$3x+20=2(x-7),\ 3x+20=2x-14$

$\therefore x=-34$

㈐ $4(2x-8)=-3x-\{5x-(2-x)\}$

$8x-32=-3x-(5x-2+x)$

$8x-32=-3x-(6x-2)$

$8x-32=-3x-6x+2$

$17x=34$

$\therefore x=2$

따라서 가장 큰 해는 ㈐의 $x=2$, 가장 작은 해는 ㈏의 $x=-34$이므로 두 해의 차는 $2-(-34)=2+34=36$ **답** 36

05

$\frac{x-8}{4}:3=(x-3):2$에서

$2\times\frac{x-8}{4}=3(x-3)$

양변에 2를 곱하면

$x-8=6x-18,\ -5x=-10 \qquad \therefore x=2$

$6(x-a)=x+10$의 해를 $x=b$라 하면

$2=b\times\frac{1}{4} \qquad \therefore b=8$

즉, 일차방정식 $6(x-a)=x+10$의 해가 $x=8$이므로

$6(8-a)=8+10$

$48-6a=18,\ -6a=-30 \qquad \therefore a=5$

답 5

06

$\frac{x+3}{3}=\frac{(a-1)-x}{6}$의 양변에 6을 곱하면

$2(x+3)=(a-1)-x$

$2x+6=a-1-x$

$3x=a-7$

$\therefore x=\frac{a-7}{3}$

이때 $\frac{a-7}{3}$이 음의 정수가 되려면

$a-7=-3,\ -6,\ -9,\ -12,\ -15,\ \cdots$

$\therefore a=4,\ 1,\ -2,\ -5,\ -8,\ \cdots$

따라서 구하는 가장 큰 음의 정수는 -2이다.

답 ②

07

수현이와 미연이가 움직인 거리를 x km라 하면 수현이는 시속 24 km로 x km를 움직였으므로 수현이가 왕복하는 데 걸린 시간은 $\frac{x}{24}$시간이다.

미연이가 탄 배가 강의 상류에서 하류로 내려갈 때의 배의 속력은 시속 $20+4=24$(km)이고, 강의 하류에서 상류로 올라갈 때의 배의 속력은 시속 $20-4=16$(km)이므로 미연이가 왕복하는 데 걸린 시간은

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}\div24+\frac{x}{2}\div16&=\frac{x}{2}\times\frac{1}{24}+\frac{x}{2}\times\frac{1}{16}\\&=\frac{x}{48}+\frac{x}{32}\\&=\frac{5}{96}x(\text{시간})\end{aligned}$$

이때 수현이가 미연이보다 10분 먼저 도착했으므로

$\frac{x}{24}+\frac{10}{60}=\frac{5}{96}x$

$4x+16=5x$

$-x=-16 \qquad \therefore x=16$

따라서 수현이와 미연이가 움직인 거리는 16 km이다.

답 ⑤

08

소형 봉투의 개수를 x라 하면

중형 봉투의 개수는 $x\times3=3x$,

대형 봉투의 개수는 $100-(x+3x)=100-4x$

사탕은 모두 365개이므로

$5\times(100-4x)+3\times3x+2\times x=365$

$500-20x+9x+2x=365$

$-9x=-135$

$\therefore x=15$

따라서 필요한 대형 봉투의 개수는

$100-4\times15=100-60=40$

답 ⑤

09 해결단계

❶ 단계	혼합물에 들어 있는 쌀과 보리의 무게를 각각 구한다.
❷ 단계	유리병 A에 들어 있는 보리의 무게를 x g이라 하고, 유리병 A, B에 들어 있는 쌀과 보리의 무게를 x를 사용한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	유리병 B에 들어 있는 쌀과 보리의 무게의 비를 이용하여 비례식을 세운다.
❹ 단계	유리병 A에 들어 있는 보리의 무게를 구한다.

두 유리병 A, B의 쌀과 보리를 모두 꺼내어 섞었을 때 혼합물의 무게가 총 95 g이고, 혼합물에 들어 있는 쌀과 보리의 무게의 비가 9 : 10이므로

(쌀의 무게)$=95\times\frac{9}{9+10}=45$(g)

(보리의 무게)$=95\times\frac{10}{9+10}=50$(g)

유리병 A에 들어 있는 보리의 무게를 x g이라 하면 혼합물에 들어 있는 보리의 무게가 50 g이므로 유리병 B에 들어 있는 보리의 무게는 $(50-x)$g이다.

또한, 유리병 A에 들어 있는 쌀과 보리의 무게의 비가 2 : 3이므로 유리병 A에 들어 있는 쌀의 무게는 $\frac{2}{3}x$ g이다.

즉, 두 유리병 A, B와 혼합물에 들어 있는 쌀과 보리의 무게는 다음 표와 같다.

	쌀의 무게(g)	보리의 무게(g)
유리병 A	$\frac{2}{3}x$	x
유리병 B	$45-\frac{2}{3}x$	$50-x$
혼합물	45	50

이때 유리병 B에 들어 있는 쌀과 보리의 무게의 비가 5 : 4이므로

$\left(45-\frac{2}{3}x\right) : (50-x)=5 : 4$

$4\left(45-\frac{2}{3}x\right)=5(50-x)$

$180-\frac{8}{3}x=250-5x$

$\frac{7}{3}x=70 \qquad \therefore x=30$

따라서 유리병 A에 들어 있는 보리의 무게는 30 g이다.

답 30 g

10

$2x-6a=10bx+6$이 모든 x에 대하여 항상 성립하므로 이 등식은 x에 대한 항등식이다.

즉, $2=10b$에서 $b=\frac{1}{5}$

$-6a=6$에서 $a=-1$ (가)

$\therefore \frac{a}{b}+\frac{2a^2}{b}+\frac{3a^3}{b}+\frac{4a^4}{b}+\cdots+\frac{100a^{100}}{b}$

$=\frac{1}{b}(a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots+100a^{100})$

$=5\times(-1+2-3+4-\cdots+100)$

$=5\times\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-99+100)\}$

$=5\times 50=250$ (나)

답 250

단계	채점 기준	배점
(가)	항등식임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 경우	20%
(나)	주어진 식에 a, b의 값을 대입하고 규칙을 찾아 식의 값을 구한 경우	80%

11

세 자리 자연수 x의 백의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b, 일의 자리의 숫자를 c라 하면

$x=100a+10b+c$, $y=100c+10b+a$

(단, $1\le a\le 9$, $0\le b\le 9$, $1\le c\le 9$) (가)

이때

$x-y=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)$

$=99a-99c$

이므로 $99a-99c=594$에서 $a-c=6$

이를 만족시키는 한 자리 자연수 a, c를 (a, c)로 나타낼 때, (a, c)는 $(9, 3)$, $(8, 2)$, $(7, 1)$이다.

또한, a, b, c는 모두 다른 숫자이므로 위의 각 경우에 대하여 b로 가능한 숫자는 10개의 숫자 0, 1, 2, ⋯, 9 중에서 a, c의 숫자 2개를 제외한 8개이다. (나)

따라서 가능한 세 자리 자연수 x의 개수는

$3\times 8=24$ (다)

답 24

단계	채점 기준	배점
(가)	x, y를 각각 식으로 나타낸 경우	10%
(나)	x, y의 각 자리의 숫자의 조건을 구한 경우	80%
(다)	가능한 세 자리 자연수 x의 개수를 구한 경우	10%

12

(1) 전체 일의 양이 1이므로 영수와 영철이가 혼자서 하루 동안 하는 일의 양은 각각 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$이다.

따라서 두 사람이 함께 하루 동안 하는 일의 양은

$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{6}{7}=\frac{1}{8}$ (가)

(2) 두 사람이 함께 일한 기간은 전체 일을 완성하는 데 걸린 기간의 절반이므로

$x=\{2+x+(\text{영수가 혼자 일한 기간})\}\times\frac{1}{2}$

$2x=2+x+(\text{영수가 혼자 일한 기간})$

$\therefore (\text{영수가 혼자 일한 기간})=x-2(\text{일})$ (나)

(3) $\frac{1}{16}\times 2+\frac{1}{8}\times x+\frac{1}{12}(x-2)=1$

위의 식의 양변에 24를 곱하면

$3+3x+2(x-2)=24$

$3+3x+2x-4=24$

$5x=25$

$\therefore x=5$

따라서 두 사람이 함께 일한 기간은 5일이다. (다)

답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $(x-2)$일 (3) 5일

단계		채점 기준	배점
(1)	(가)	두 사람이 함께 하루 동안 하는 일의 양을 구한 경우	20%
(2)	(나)	영수가 혼자 일한 기간을 x에 대한 식으로 나타낸 경우	20%
(3)	(다)	두 사람이 함께 일한 기간을 구한 경우	60%

Ⅳ 좌표평면과 그래프

08. 좌표평면과 그래프

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.095~096

01 ④	02 ⑤	03 18	04 ③	05 10개
06 ④	07 5	08 2	09 $\frac{65}{2}$	10 ④
11 ④				

01

$4a-1=3-a$에서 $5a=4$ $\quad\therefore a=\frac{4}{5}$

$3-b=2b+4$에서 $-1=3b$ $\quad\therefore b=-\frac{1}{3}$

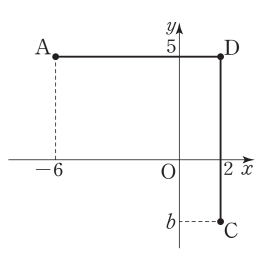
$\therefore ab=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{15}$ 답 ④

02

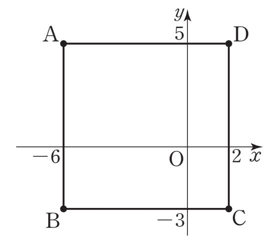
A$(-2, 2)$, B$(0, 3)$, C$(3, -2)$, D$(-3, 0)$, E$(1, -3)$이므로 다섯 점 A, B, C, D, E에 대하여 $2a-b$의 값은 각각 -6, -3, 8, -6, 5이다.
따라서 $2a-b=5$를 만족시키는 점은 E이다. 답 ⑤

03

사각형 ABCD가 정사각형이고 $b<0$이므로 세 점 A$(-6, 5)$, C$(2, b)$, D$(2, 5)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



사각형 ABCD가 정사각형이므로 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 8인 정사각형이다.
즉, (선분 CD의 길이)$=5-b=8$이므로
$b=-3$
또한, 사각형 ABCD가 정사각형이므로 다음 그림과 같이 점 B의 좌표는 $(-6, -3)$이다.



$\therefore a=-6$

$\therefore ab=(-6)\times(-3)=18$ 답 18

04

점 A$(4a+3, 5-b)$가 x축 위에 있으므로

$5-b=0$ $\quad\therefore b=5$

점 B$(-3a+2, 3b-1)$이 y축 위에 있으므로

$-3a+2=0$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표는 $4a+3=4\times\frac{2}{3}+3=\frac{17}{3}$이고,

점 B의 y좌표는 $3b-1=3\times5-1=14$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{17}{3}, 14\right)$ 답 ③

BLACKLABEL 특강 필수 원리

좌표축 위의 점의 좌표
(1) x축 위의 점의 좌표 ⇨ (x좌표, 0)
(2) y축 위의 점의 좌표 ⇨ (0, y좌표)

05

점 $(x-3, 6-y)$가 제2사분면 위에 있으려면 $x-3<0$이고 $6-y>0$이어야 한다.
이때 x, y는 자연수이므로
$x-3<0$에서 $x=1, 2$
$6-y>0$에서 $y=1, 2, 3, 4, 5$
따라서 구하는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$의 10개이다. 답 10개

06

점 P(a, b)가 제2사분면 위의 점이므로
$a<0$, $b>0$
① $ab<0$, $a-b<0$이므로
점 $(ab, a-b)$는 제3사분면 위의 점이다.

② $a<0$, $-b<0$이므로
점 $(a,\ -b)$는 제3사분면 위의 점이다.
③ $-b<0$, $a<0$이므로
점 $(-b,\ a)$는 제3사분면 위의 점이다.
④ $-2a>0$, $b-a>0$이므로
점 $(-2a,\ b-a)$는 제1사분면 위의 점이다.
⑤ $a-2b<0$, $a<0$이므로
점 $(a-2b,\ a)$는 제3사분면 위의 점이다.
따라서 제3사분면 위의 점의 좌표가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

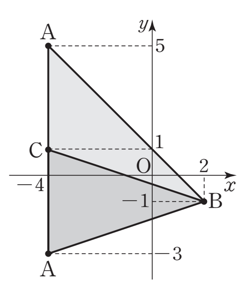
사분면
(1) 각 사분면 위의 점의 좌표의 부호
① 제1사분면 위의 점 ⇨ $(+,\ +)$
② 제2사분면 위의 점 ⇨ $(-,\ +)$
③ 제3사분면 위의 점 ⇨ $(-,\ -)$
④ 제4사분면 위의 점 ⇨ $(+,\ -)$
(2) 어느 사분면에도 속하지 않는 점
⇨ 원점, x축 위의 점, y축 위의 점

07

점 $(a,\ -7)$과 x축에 대하여 대칭인 점 A의 좌표는 $(a,\ 7)$
점 $(2,\ b)$와 y축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는 $(-2,\ b)$
이때 두 점 $A(a,\ 7)$, $B(-2,\ b)$가 일치하므로
$a=-2$, $b=7$
$\therefore a+b=-2+7=5$ 답 5

08

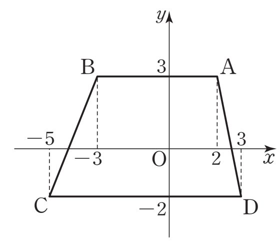
두 점 A, C의 x좌표가 같으므로 변 AC를 밑변으로 생각하자.
변 AC의 길이를 x라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 12이므로
$\frac{1}{2}\times x\times\{2-(-4)\}=12$
$3x=12$ $\quad\therefore x=4$
(변 AC의 길이)$=4$, 점 C의 y좌표가 1이므로
$|a-1|=4$ $\quad\therefore a-1=4$ 또는 $a-1=-4$
$\therefore a=5$ 또는 $a=-3$



따라서 구하는 모든 a의 값의 합은
$5+(-3)=2$ 답 2

09

네 점 $A(2,\ 3)$, $B(-3,\ 3)$, $C(-5,\ -2)$, $D(3,\ -2)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



두 변 AB, CD가 평행하므로 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.
따라서 사각형 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{(\text{변 AB의 길이})+(\text{변 CD의 길이})\}\times\{3-(-2)\}$
$=\frac{1}{2}\times[\{2-(-3)\}+\{3-(-5)\}]\times5$
$=\frac{1}{2}\times13\times5=\frac{65}{2}$ 답 $\frac{65}{2}$

10

수영장에서 수면으로부터 10 m 위의 지점에서 공을 던지므로 $x=0$일 때, y의 값은 10이다. 또한, 공이 최고 높이까지 올라갔다가 내려와서 수면에 도달해야 하므로 가능한 그래프는 ② 또는 ④이다. 그런데 공이 올라갈 때는 속도가 점점 작아지고, 공이 내려갈 때는 속도가 점점 커지므로 구하는 그래프는 ④이다. 답 ④

11

ㄱ. 민지가 학교까지 가는 데 걸린 시간은 $15-5=10$(분)이다.
ㄴ. 민수가 학교까지 가는 데 걸린 시간은 30분이고, 민수가 출발한 지 5분 후에 출발한 민지가 학교까지 가는 데 걸린 시간은 10분이므로 민지가 민수보다 $30-(5+10)=15$(분) 빨리 학교에 도착한다.
ㄷ. 민지의 속력은 분속 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$(km),
민수의 속력은 분속 $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$(km)
이므로 민지의 속력은 민수의 속력의 3배이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

STEP 2 A등급을 위한 문제 pp.097~100

01 ③	02 ①, ②	03 ④	04 제1사분면	
05 2	06 -3	07 ④	08 $(-6,\ 6)$	
09 (1) $(3,\ -2)$ (2) $(-3,\ 2)$			10 ②	11 ①, ③
12 35	13 10	14 2	15 6	16 ④
17 ⑤	18 500원	19 64	20 ③	21 ③

01

(ⅰ) $x=1$일 때, 1의 양의 약수는 1의 1개이고

1 이하의 자연수 중 1과 서로소인 자연수는 1의 1개이다.

$\therefore a=1,\ b=1$

(ⅱ) $x=2$일 때, 2의 양의 약수는 1, 2의 2개이고

2 이하의 자연수 중 2와 서로소인 자연수는 1의 1개이다.

$\therefore a=2,\ b=1$

(ⅲ) $x=3$일 때, 3의 양의 약수는 1, 3의 2개이고

3 이하의 자연수 중 3과 서로소인 자연수는 1, 2의 2개이다.

$\therefore a=2,\ b=2$

(ⅳ) $x=4$일 때, 4의 양의 약수는 1, 2, 4의 3개이고

4 이하의 자연수 중 4와 서로소인 자연수는 1, 3의 2개이다.

$\therefore a=3,\ b=2$

(ⅴ) $x=5$일 때, 5의 양의 약수는 1, 5의 2개이고

5 이하의 자연수 중 5와 서로소인 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

$\therefore a=2,\ b=4$

(ⅵ) $x=6$일 때, 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개이고

6 이하의 자연수 중 6과 서로소인 자연수는 1, 5의 2개이다.

$\therefore a=4,\ b=2$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 $a\le b$를 만족시키는 경우는 $x=1,\ 3,\ 5$이므로 구하는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 4)$의 3개이다. **답** ③

02

점 $A(3,\ 5)$를 주어진 규칙에 따라 이동시키면

$A'(-3a+5,\ 6-5)$, 즉 $A'(-3a+5,\ 1)$

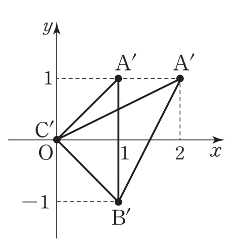
점 $B(0,\ 1)$을 주어진 규칙에 따라 이동시키면

$B'(0+1,\ 0-1)$, 즉 $B'(1,\ -1)$

점 $C(0,\ 0)$을 주어진 규칙에 따라 이동시키면

$C'(0,\ 0)$

이때 삼각형 $A'B'C'$이 이등변삼각형이 되려면 오른쪽 그림과 같이 점 A'의 x좌표는 1 또는 2이어야 한다.



즉, $-3a+5=1$에서

$-3a=-4 \qquad \therefore a=\dfrac{4}{3}$

$-3a+5=2$에서

$-3a=-3 \qquad \therefore a=1$ **답** ①, ②

03

점 $(a-b,\ ab)$가 제3사분면 위에 있으므로

$a-b<0,\ ab<0 \qquad \therefore a<0,\ b>0$

① $a<0,\ -ab>0$이므로 점 $(a,\ -ab)$는 제2사분면 위에 있다.

② $-a>0,\ -b<0$이므로 점 $(-a,\ -b)$는 제4사분면 위에 있다.

③ $-ab>0$이고 $a+b$의 부호는 알 수 없으므로 점 $(-ab,\ a+b)$가 속한 사분면은 알 수 없다.

④ $b-a>0,\ -\dfrac{b}{a}>0$이므로 점 $\left(b-a,\ -\dfrac{b}{a}\right)$는 제1사분면 위에 있다.

⑤ $\dfrac{a}{b}<0,\ a-b<0$이므로 점 $\left(\dfrac{a}{b},\ a-b\right)$는 제3사분면 위에 있다.

따라서 항상 제1사분면 위에 있는 점의 좌표는 ④이다. **답** ④

04

조건 (가)에서 $\dfrac{b}{a}<0$이므로 $a>0,\ b<0$ 또는 $a<0,\ b>0$

(ⅰ) $a>0,\ b<0$인 경우

조건 (나)에서 $a+b<0$이므로

$|a|<|b|$

이것은 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅱ) $a<0,\ b>0$인 경우

조건 (나)에서 $a+b<0$이므로

$|a|>|b|$

이것은 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a>0,\ b<0$

$\therefore a>0,\ -b>0$

따라서 점 $P(a,\ -b)$는 제1사분면 위의 점이다. **답** 제1사분면

05

점 $A(a-3,\ b-2)$가 x축 위에 있으므로

$b-2=0 \qquad \therefore b=2$

점 $B(a+4,\ b-1)$이 y축 위에 있으므로

$a+4=0 \qquad \therefore a=-4$

따라서 점 C의 좌표는 $(c-3,\ 4-c)$이고, 점 C는 어느 사분면에

도 속하지 않으므로

$c-3=0$ 또는 $4-c=0$

$\therefore c=3$ 또는 $c=4$

따라서 c의 값이 가장 클 때, $a+b+c$의 값도 가장 크므로 구하는 값은

$-4+2+4=2$ **답** 2

06

점 $\mathrm{P}(a,\ a-2b)$와 y축에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ a-2b)$

점 $\mathrm{R}(3a-2,\ -b+5)$와 x축에 대하여 대칭인 점 S의 좌표는

$(3a-2,\ b-5)$

두 점 Q, S가 원점에 대하여 대칭이므로

$-(-a)=3a-2 \qquad \therefore a=1$

$-(a-2b)=b-5,\ -1+2b=b-5 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore a+b=1+(-4)=-3$ **답** -3

07

점 $\left(-\dfrac{b}{a},\ a+b\right)$와 x축에 대하여 대칭인 점 P의 좌표는

$\left(-\dfrac{b}{a},\ -a-b\right)$

점 P가 제2사분면 위에 있으므로

$-\dfrac{b}{a}<0,\ -a-b>0$에서

$\dfrac{b}{a}>0,\ a+b<0$

$\therefore a<0,\ b<0$

점 $(a,\ ab)$와 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$(-a,\ -ab)$

이때 $-a>0,\ -ab<0$이므로 점 Q는 제4사분면 위의 점이다.

답 ④

08

$A_1(6,\ -6)$에서 $6>-6$이므로

규칙 ㈐에 의하여 $A_2(-6,\ 6)$

$A_2(-6,\ 6)$에서 $-6<6$이므로

규칙 ㈏에 의하여 $A_3(6,\ 6)$

$A_3(6,\ 6)$에서 $6=6$이므로

규칙 ㈎에 의하여 $A_4(6,\ -6)$

두 점 A_1과 A_4의 좌표가 같으므로 점 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \cdots$의 좌표는 $(6,\ -6),\ (-6,\ 6),\ (6,\ 6),\ (6,\ -6),\ (-6,\ 6),\ (6,\ 6),\ \cdots$과 같이 $(6,\ -6),\ (-6,\ 6),\ (6,\ 6)$의 3개가 이 순서대로 반복된다.

이때 $500=166\times3+2$이므로 점 A_{500}의 좌표는 점 A_2의 좌표와 같다.

따라서 구하는 점 A_{500}의 좌표는 $(-6,\ 6)$이다. **답** $(-6,\ 6)$

09

(1) 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$가 규칙 B에 따라 y축에 대하여 대칭인 점으로 이동하면 이동한 점의 좌표는 $(3,\ 2)$

점 $(3,\ 2)$가 규칙 A에 따라 x축에 대하여 대칭인 점으로 이동하면 이동한 점의 좌표는 $(3,\ -2)$

따라서 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$가 규칙 A★B에 따라 이동한 점의 좌표는 $(3,\ -2)$이다.

(2) 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$가 규칙 A에 따라 x축에 대하여 대칭인 점으로 이동하면 이동한 점의 좌표는 $(-3,\ -2)$

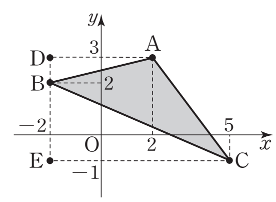
점 $(-3,\ -2)$가 규칙 C에 따라 원점에 대하여 대칭인 점으로 이동하면 이동한 점의 좌표는 $(3,\ 2)$

점 $(3,\ 2)$가 규칙 B에 따라 y축에 대하여 대칭인 점으로 이동하면 이동한 점의 좌표는 $(-3,\ 2)$

따라서 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$가 규칙 B★(C★A)에 따라 이동한 점의 좌표는 $(-3,\ 2)$이다. **답** (1) $(3,\ -2)$ (2) $(-3,\ 2)$

10

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $\mathrm{D}(-2,\ 3),\ \mathrm{E}(-2,\ -1)$이라 하면

(사각형 DECA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times(4+7)\times4=22$

(삼각형 ADB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times4\times1=2$

(삼각형 BEC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times7\times3=\dfrac{21}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$22-\left(2+\dfrac{21}{2}\right)=\dfrac{19}{2}$ **답** ②

11

점 P의 좌표를 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$라 하면

(삼각형 PAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times3\times b=\dfrac{3}{2}b$

(삼각형 PDC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times2\times a=a$

두 삼각형 PAB, PDC의 넓이가 같으므로

$\dfrac{3}{2}b=a \qquad \therefore a:b=3:2$

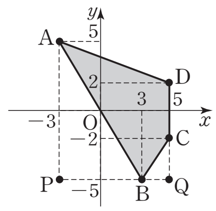
따라서 점 P의 좌표로 가능한 것은 ①, ③이다. **답** ①, ③

12

조건 (나)에 의하여 점 B는 점 A$(-3,\ 5)$와 원점에 대하여 대칭이므로 B$(3,\ -5)$이다.

조건 (다)에 의하여 점 D는 점 C$(5,\ -2)$와 x축에 대하여 대칭이므로 D$(5,\ 2)$이다.

따라서 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 P$(-3,\ -5)$, Q$(5,\ -5)$라 하면

(사각형 APQD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(10+7)\times8=68$

(삼각형 APB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\times10=30$

(삼각형 BQC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times3=3$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$68-(30+3)=35$ **답** 35

13

점 A$(-3,\ 2a-4)$가 x축 위에 있으므로

$2a-4=0 \qquad \therefore a=2$

점 B$(2a-b-6,\ 2)$가 y축 위에 있으므로

$2a-b-6=0$

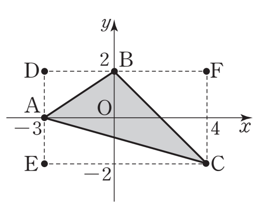
$4-b-6=0 \qquad \therefore b=-2$

따라서 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

A$(-3,\ 0)$, B$(0,\ 2)$, C$(4,\ -2)$

(가)

이때 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(나)

D$(-3,\ 2)$, E$(-3,\ -2)$, F$(4,\ 2)$라 하면

(사각형 DECF의 넓이)$=7\times4=28$

(삼각형 AEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times7\times2=7$

(삼각형 BCF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

(삼각형 ABD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times2=3$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$28-(7+8+3)=10$

(다)

답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	a, b의 값과 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 경우	30%
(나)	좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타낸 경우	20%
(다)	삼각형 ABC의 넓이를 구한 경우	50%

14

점 A$(1-a,\ 4)$와 x축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$(1-a,\ -4)$

점 A$(1-a,\ 4)$와 y축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는

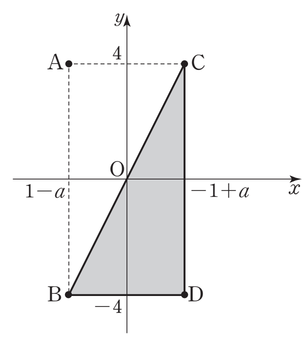
$(-1+a,\ 4)$

점 A$(1-a,\ 4)$와 원점에 대하여 대칭인 점 D의 좌표는

$(-1+a,\ -4)$

(i) $a>1$일 때,

점 A는 제2사분면 위에 있으므로 삼각형 BCD를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



삼각형 BCD의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times$(변 BD의 길이)$\times$(변 CD의 길이)$=16$

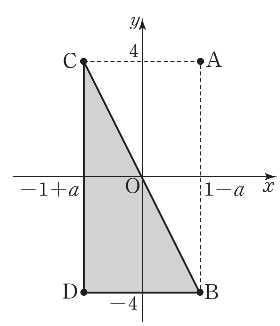
$\frac{1}{2}\times\{(-1+a)-(1-a)\}\times8=16$

$\frac{1}{2}\times\{-2(1-a)\}\times8=16$

$1-a=-2 \qquad \therefore a=3$

(ii) $a<1$일 때,

점 A는 제1사분면 위에 있으므로 삼각형 BCD를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



삼각형 BCD의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times$(변 BD의 길이)$\times$(변 CD의 길이)$=16$

$\frac{1}{2}\times\{(1-a)-(-1+a)\}\times 8=16$

$\frac{1}{2}\times 2(1-a)\times 8=16$

$1-a=2 \qquad \therefore a=-1$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$3+(-1)=2$ **답** 2

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

부호에 따라 경우를 나누어 생각하기

삼각형 BCD를 좌표평면 위에 나타낼 때, $1-a$의 값의 부호에 따라 세 점 B, C, D가 속하는 사분면이 달라진다는 것에 유의한다.

15

점 A(a, b)와 x축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는

$(a, -b)$

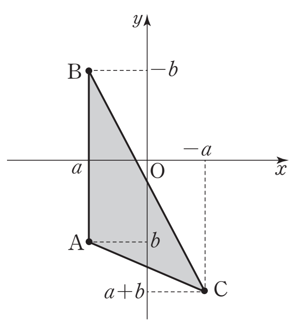
점 B가 제2사분면 위에 있으므로

$a<0,\ -b>0 \qquad \therefore a<0,\ b<0$

즉, 점 A는 제3사분면 위에 있다.

또한, $-a>0$, $a+b<0$이므로 점 C$(-a, a+b)$는 제4사분면 위에 있다.

따라서 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times(-b-b)\times(-a-a)=24$

$\frac{1}{2}\times(-2b)\times(-2a)=24$

$2ab=24$

$\therefore ab=12$

이때 $a<0$, $b<0$이므로 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-1, -12)$, $(-2, -6)$, $(-3, -4)$, $(-4, -3)$,

$(-6, -2)$, $(-12, -1)$의 6개이다. **답** 6

16

진수는 30분 동안 2250 m를 걸으므로 진수의 속력은

분속 $\frac{2250}{30}=75(\text{m})$

따라서 진수가 1시간, 즉 60분 동안 걸은 거리는

$75\times 60=4500(\text{m})$

석현이는 45분 동안 2250 m를 걸으므로 석현이의 속력은

분속 $\frac{2250}{45}=50(\text{m})$

따라서 석현이가 1시간, 즉 60분 동안 걸은 거리는

$50\times 60=3000(\text{m})$

따라서 진수와 석현이가 1시간 동안 걸은 거리의 차는

$4500-3000=1500(\text{m})$

$=1.5(\text{km})$ **답** ④

17

① 서현이는 8:15부터 8:17까지 200 m를 학교 반대 방향으로 걷고 8:17부터 8:30까지 학교 방향으로 500 m를 걸었으므로 이동한 거리는 총 $200+500=700(\text{m})$이다.

② 대현이는 8:15부터 8:18까지 학교 방향으로 걷고 방향을 바꾸어 8:18부터 8:21까지 학교 반대 방향으로 걷다가 다시 방향을 바꾸어 8:21부터 8:25까지 학교 방향으로 걸었으므로 대현이가 이동 방향을 바꾼 횟수는 총 2회이다.

③ 대현이의 집은 학교로부터 1100 m 떨어져 있고, 서현이의 집은 학교로부터 300 m 떨어져 있다.

④ 대현이는 8:18부터 학교에서 멀어지므로 학교 반대 방향으로 걷기 시작했다.

⑤ 서현이는 집에서 출발하여 8:15부터 8:17까지 학교 반대 방향으로 200 m 걷다가 방향을 바꿨으므로 속력은 분속 $\frac{200}{2}=100(\text{m})$이고, 8:25부터 학교에 도착할 때, 즉 8:30까지 300 m를 걸었으므로 속력은 분속 $\frac{300}{5}=60(\text{m})$이다.

따라서 서현이는 집에서 출발하여 이동 방향을 바꿀 때까지의 구간에 더 빨리 걸었다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

18

펜 1개의 판매 가격이 100원일 때, 판매 이익은

$(100-50)\times 100=5000$(원)

펜 1개의 판매 가격이 200원일 때, 판매 이익은

$(200-50)\times 70=10500$(원)

펜 1개의 판매 가격이 300원일 때, 판매 이익은

$(300-50)\times 40=10000$(원)

펜 1개의 판매 가격이 400원일 때, 판매 이익은

$(400-50)\times 30=10500$(원)

펜 1개의 판매 가격이 500원일 때, 판매 이익은

$(500-50)\times 25=11250$(원)

펜 1개의 판매 가격이 600원일 때, 판매 이익은
$(600-50)\times 20=11000$(원)
따라서 하루 동안 판매되는 펜의 판매 이익이 최대가 될 때의 펜 1개의 판매 가격은 500원이다. **답** 500원

19

(가) : y의 값이 36일 때 최대이므로 탑승한 관람차가 지면으로부터 가장 높은 곳에 있을 때의 높이는 36 m이다.
$\therefore a=36$

(나) : 탑승한 관람차의 지면으로부터의 높이가 27 m 이하인 시간은 관람차가 출발한 후 4분까지, 8분부터 16분까지, 20분부터 24분까지이다.
따라서 관람차의 지면으로부터의 높이가 27 m 이하인 시간은 $4+8+4=16$(분) 동안이다.
$\therefore b=16$

(다) : 탑승한 관람차가 1바퀴 돌아서 처음 탑승한 지점으로 오는 것은 탑승한 지 12분 후이다.
$\therefore c=12$

$\therefore a+b+c=36+16+12=64$ **답** 64

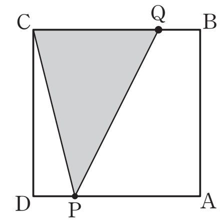
20

큰 원기둥에 물을 넣을 때는 물의 높이가 천천히 높아지고, 작은 원기둥에 물을 넣을 때는 물의 높이가 빨리 높아진다.
따라서 용기 ㉠의 경우, 아랫부분부터 큰 원기둥－작은 원기둥－중간 원기둥 순으로 배치되어 있으므로 물의 높이는 천천히 높아지다가 빨리 높아지고 중간 빠르기로 높아지면서 물이 채워진다.
용기 ㉡의 경우, 아랫부분부터 중간 원기둥－작은 원기둥－큰 원기둥 순으로 배치되어 있으므로 물의 높이가 중간 빠르기로 높아지다가 빨리 높아지고 천천히 높아지면서 물이 채워진다.
용기 ㉢의 경우, 아랫부분부터 큰 원기둥－중간 원기둥－작은 원기둥 순으로 배치되어 있으므로 물의 높이가 천천히 높아지다가 중간 빠르기로 높아지고 빠르게 높아지면서 물이 채워진다.
따라서 각 용기에 알맞은 그래프로 용기 ㉠은 B, 용기 ㉡은 A, 용기 ㉢은 C이다. **답** ③

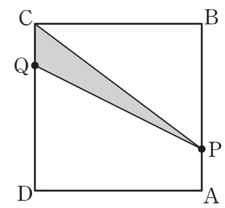
21 해결단계

❶ 단계	두 점 P, Q가 각각 변 DA와 변 BC 위를 이동할 때, 삼각형 PQC의 높이와 밑변의 길이의 변화를 파악한다.
❷ 단계	세 점 P, Q, C가 일직선 위에 있게 될 때는 언제인지 파악한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계와 같은 방법으로 정사각형 ABCD의 각 변에서 두 점 P, Q의 이동에 따른 삼각형 PQC의 넓이의 변화를 파악한다.

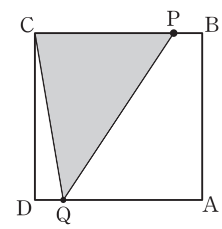
두 점 P, Q가 각각 두 점 D, B에서 동시에 출발하여 두 점 A, C에 도착하는 동안, 삼각형 PQC의 높이는 일정하고 밑변인 선분 CQ의 길이는 일정하게 줄어들므로 삼각형 PQC의 넓이도 일정하게 줄어든다.



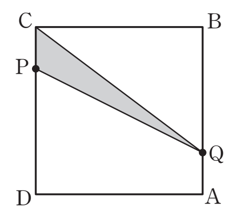
두 점 P, Q가 각각 두 점 A, C에 도착하면 세 점 P, Q, C가 일직선 위에 있으므로 $y=0$이다.
두 점 P, Q가 각각 두 점 A, C에서 출발하여 두 점 B, D에 도착하는 동안, 삼각형 PQC의 높이는 일정하고 밑변인 선분 CQ의 길이는 일정하게 늘어나므로 삼각형 PQC의 넓이도 일정하게 늘어난다.



두 점 P, Q가 각각 두 점 B, D에서 출발하여 두 점 C, A에 도착하는 동안, 삼각형 PQC의 높이는 일정하고 밑변인 선분 CP의 길이는 일정하게 줄어들므로 삼각형 PQC의 넓이도 일정하게 줄어든다.



두 점 P, Q가 각각 두 점 C, A에 도착하면 세 점 P, Q, C가 일직선 위에 있으므로 $y=0$이다.
두 점 P, Q가 각각 두 점 C, A에서 출발하여 두 점 D, B에 도착하는 동안, 삼각형 PQC의 높이는 일정하고 밑변인 선분 CP의 길이는 일정하게 늘어나므로 삼각형 PQC의 넓이도 일정하게 늘어난다.



따라서 x, y 사이의 관계식을 좌표평면에 그래프로 바르게 나타낸 것은 ③이다. **답** ③

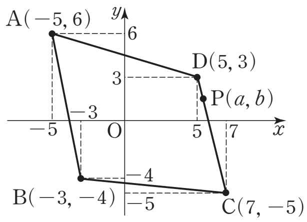
STEP 3 종합 사고력 도전 문제 pp.101~102

01 11
02 (1) P(2, 2), Q(2, -2) (2) 12초 (3) 36초
03 -1
04 20
05 $\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$
06 12
07 20분
08 (가) : 30 cm^2, (나) : 50 cm^2, (다) : 70 cm^2

01 해결단계

❶ 단계	사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	$-a+b$의 값이 최대가 되는 점 P의 위치를 찾는다.
❸ 단계	$-a+b$의 값 중 가장 큰 값을 구한다.

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



사각형 ABCD의 변 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 a의 값이 가장 작고, b의 값이 가장 클 때, $-a+b$의 값이 가장 크므로 점 P가 점 A에 위치해야 한다.

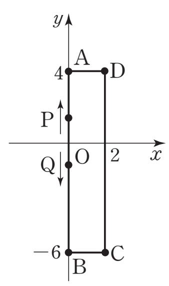
따라서 $-a+b$의 값 중 가장 큰 값은 $a=-5$, $b=6$일 때,

$-(-5)+6=11$ **답** 11

02 해결단계

(1)	❶ 단계	두 점 P, Q가 출발한 지 2초 후 도착하는 점의 좌표를 각각 구한다.
(2)	❷ 단계	두 점 P, Q가 원점 O로 되돌아올 때까지 걸리는 시간을 각각 구한다.
	❸ 단계	두 점 P, Q가 원점 O에서 처음으로 다시 만날 때까지 걸리는 시간을 구한다.
(3)	❹ 단계	두 점 P, Q가 원점 O에서 세 번째로 다시 만날 때까지 걸리는 시간을 구한다.

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) 점 P는 원점 O에서 출발하여 시계 방향으로 매초 4의 속력으로 움직이므로 1초 후 점 P가 도착하는 점은 A$(0,\ 4)$이고, 2초 후 점 P가 도착하는 점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.
또한, 점 Q는 원점 O에서 출발하여 시계 반대 방향으로 매초 6의 속력으로 움직이므로 1초 후 점 Q가 도착하는 점은 B$(0,\ -6)$이고, 2초 후 점 Q가 도착하는 점의 좌표는 $(2,\ -2)$이다.

(2) 점 P가 매초마다 도착하는 점의 좌표는
$(0,\ 0) \to (0,\ 4) \to (2,\ 2) \to (2,\ -2) \to (2,\ -6)$
$\to (0,\ -4) \to (0,\ 0) \to \cdots$
이므로 점 P는 6초마다 원점 O로 되돌아온다.
점 Q가 매초마다 도착하는 점의 좌표는
$(0,\ 0) \to (0,\ -6) \to (2,\ -2) \to (2,\ 4) \to (0,\ 0) \to \cdots$
이므로 점 Q는 4초마다 원점 O로 되돌아온다.
따라서 6, 4의 최소공배수는 12이므로 두 점 P, Q가 원점 O에서 처음으로 다시 만나는 것은 원점 O를 출발한 지 12초 후이다.

(3) 두 점 P, Q가 원점 O에서 세 번째로 다시 만나는 것은 원점 O를 출발한 지 $12\times3=36$(초) 후이다.

답 (1) P$(2,\ 2)$, Q$(2,\ -2)$ (2) 12초 (3) 36초

03 해결단계

❶ 단계	세 유리수 a, b, c의 부호를 구한다.
❷ 단계	세 유리수 a, b, c의 절댓값 $\lvert a\rvert$, $\lvert b\rvert$, $\lvert c\rvert$의 대소 관계를 구한다.
❸ 단계	$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$와 bc의 부호를 파악하여 p의 값을 구한다.
❹ 단계	$\dfrac{b+c}{a}$와 c^2-a^2의 부호를 파악하여 q의 값을 구한다.
❺ 단계	$p-q$의 값을 구한다.

$b<a<c$, $ac<0$이므로 $a<0$, $b<0$, $c>0$이다.

$a<0$, $c>0$, $a+c<0$이므로 $|a|>|c|$이다.

$|a|>|c|$, $b<a<0<c$이므로 $|b|>|a|>|c|$이다.

(i) $|b|>|a|$이므로 $|a|-|b|<0$
$b<0$, $c>0$이므로 $bc<0$
따라서 점 P$(|a|-|b|,\ bc)$는 제3사분면 위의 점이므로
$p=3$

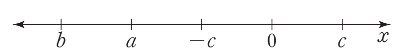
(ii) $b<0$, $c>0$, $|b|>|c|$이므로 $b+c<0$
$b+c<0$, $a<0$이므로 $\dfrac{b+c}{a}>0$
$c^2>0$, $a^2>0$, $|a|>|c|$이므로 $c^2-a^2<0$
따라서 점 Q$\left(\dfrac{b+c}{a},\ c^2-a^2\right)$은 제4사분면 위의 점이므로
$q=4$

(i), (ii)에서

$p-q=3-4=-1$ **답** -1

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

세 수 a, b, c를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



04 해결단계

❶ 단계	점 A와 x축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표를 구한다.
❷ 단계	점 A와 y축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표를 구한다.
❸ 단계	점 A와 원점에 대하여 대칭인 점 D의 좌표를 구한다.
❹ 단계	사각형 ACDB의 둘레의 길이가 24가 되기 위한 조건을 a, b를 사용한 식으로 나타낸다.
❺ 단계	조건을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

점 A$(a,\ b)$와 점 B가 x축에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(a,\ -b)$

점 A$(a,\ b)$와 점 C가 y축에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(-a,\ b)$

점 A$(a,\ b)$와 점 D가 원점에 대하여 대칭이므로 점 D의 좌표는 $(-a,\ -b)$

이때 사각형 ACDB의 둘레의 길이가 24가 되려면

$4(|a|+|b|)=24$

$\therefore\ |a|+|b|=6$

따라서 구하는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$|a|=1$, $|b|=5$일 때, 4개

$|a|=2$, $|b|=4$일 때, 4개

$|a|=3$, $|b|=3$일 때, 4개

$|a|=4$, $|b|=2$일 때, 4개

$|a|=5$, $|b|=1$일 때, 4개

이므로 모두 $5\times4=20$(개)이다. 답 20

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$|a|=1$, $|b|=5$일 때, 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(1, -5)$, $(-1, 5)$, $(-1, -5)$

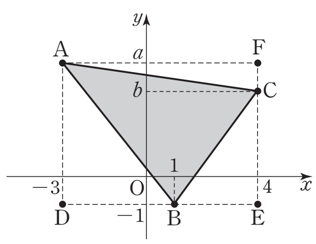
의 4개이다. 나머지 경우도 마찬가지로 4개씩 존재한다.

05 해결단계

❶ 단계	$a>b$, $a<b$의 두 경우로 나누어 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계의 각 경우에 대하여 삼각형 ABC의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

(i) $a>b$일 때,

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $D(-3, -1)$, $E(4, -1)$, $F(4, a)$라 하면

(사각형 ADEF의 넓이)$=7\times(a+1)=7a+7$

(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times(a+1)=2a+2$

(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times(b+1)=\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}$

(삼각형 ACF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times7\times(a-b)=\frac{7}{2}a-\frac{7}{2}b$

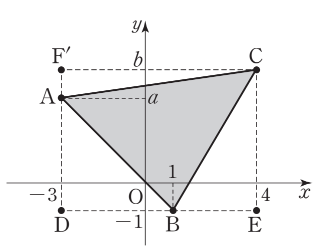
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$7a+7-\left\{(2a+2)+\left(\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{7}{2}a-\frac{7}{2}b\right)\right\}$

$=\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$

(ii) $a<b$일 때,

세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $D(-3, -1)$, $E(4, -1)$, $F'(-3, b)$라 하면

(사각형 CF′DE의 넓이)$=7\times(b+1)=7b+7$

(삼각형 ADB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times(a+1)=2a+2$

(삼각형 BEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times(b+1)=\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}$

(삼각형 ACF′의 넓이)$=\frac{1}{2}\times7\times(b-a)=\frac{7}{2}b-\frac{7}{2}a$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$7b+7-\left\{(2a+2)+\left(\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{7}{2}b-\frac{7}{2}a\right)\right\}$

$=\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 삼각형 ABC의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타내면

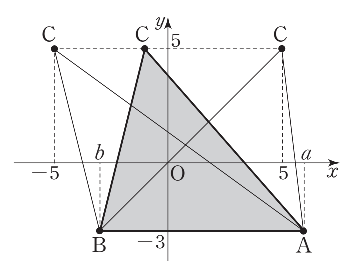
$\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$ 답 $\frac{3}{2}a+2b+\frac{7}{2}$

06 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 a, b의 부호를 판단한다.
❷ 단계	조건 (다)를 이용하여 a, b 사이의 관계를 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$a+b-c$의 값 중 가장 큰 값을 구한다.

조건 (가)에서 $ab<0$이므로 두 수 a, b는 부호가 서로 다르고, $a-b>0$에서 $a>b$이므로 $a>0$, $b<0$이다.

이때 조건 (나)에서 $-5\leq c\leq5$이므로 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이가 36이므로

$\frac{1}{2}\times$(변 AB의 길이)$\times8=36$

$\therefore$ (변 AB의 길이)$=9$

$a>0$, $b<0$이므로

(변 AB의 길이)$=a-b=9$

세 정수 $a>0$, $b<0$, $-5\leq c\leq5$에 대하여 $a+b$의 값이 가장 크고, c의 값이 가장 작을 때, $a+b-c$의 값이 가장 크므로

$a=8$, $b=-1$, $c=-5$일 때, $a+b-c$의 값이 가장 크다.

따라서 $a+b-c$의 값 중 가장 큰 값은

$8+(-1)-(-5)=12$ 답 12

07 해결단계

❶ 단계	수지가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수를 구한다.
❷ 단계	지우가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수를 구한다.
❸ 단계	지우가 혼자 제품 760개를 만드는 데 걸리는 시간을 구한다.

그래프에서 수지가 혼자 10분 동안 제품 240개를 만들었으므로 수지가 1분 동안 만들 수 있는 제품은

$\frac{240}{10}=24$(개)

그래프에서 수지와 지우가 함께 5분 동안 제품 $550-240=310$(개)를 만들었으므로 지우가 1분 동안 만들 수 있는 제품의 개수를 a라 하면

$(24+a)\times5=310$

$24+a=62$

$\therefore a=38$

즉, 지우가 1분 동안 만들 수 있는 제품은 38개이다.

따라서 지우가 혼자 제품 760개를 만드는 데 걸리는 시간은

$\frac{760}{38}=20$(분) 답 20분

08 해결단계

❶ 단계	물을 넣기 시작한 후 3초까지의 그래프를 통해 ㈎ 칸의 바닥의 넓이를 구한다.
❷ 단계	3초 후부터 8초까지의 그래프를 통해 ㈏ 칸의 바닥의 넓이를 구한다.
❸ 단계	16초 후부터 30초까지의 그래프를 통해 ㈐ 칸의 바닥의 넓이를 구한다.

매초 100 cm^3의 물을 넣고 있고, 물을 넣은 지 3초 후 수면의 높이가 10 cm이므로 수조에 채워진 물의 양은

(㈎ 칸의 바닥의 넓이)$\times10=3\times100(\text{cm}^3)$

$\therefore$ (㈎ 칸의 바닥의 넓이)$=30(\text{cm}^2)$

3초 후부터 8초까지 ㈏ 칸에 물이 채워져서 수면의 높이가 10 cm가 되므로 $8-3=5$(초) 동안 수조에 채워진 물의 양은

(㈏ 칸의 바닥의 넓이)$\times10=5\times100(\text{cm}^3)$

$\therefore$ (㈏ 칸의 바닥의 넓이)$=50(\text{cm}^2)$

16초 후부터 30초까지 ㈐ 칸에 물이 채워져서 수면의 높이가 20 cm가 되므로 $30-16=14$(초) 동안 수조에 채워진 물의 양은

(㈐ 칸의 바닥의 넓이)$\times20=14\times100(\text{cm}^3)$

$\therefore$ (㈐ 칸의 바닥의 넓이)$=70(\text{cm}^2)$

답 ㈎ : 30 cm^2, ㈏ : 50 cm^2, ㈐ : 70 cm^2

09. 정비례와 반비례

STEP 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp.104~105

01 ⑤　02 $y=3x$ 또는 $y=-3x$　03 $-\frac{81}{4}$　04 12

05 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$　06 ④　07 ⑤

08 (1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2), (16, 1)　09 80

10 ②　11 $y=400x$, 36000원　12 ④

01

① $y=\frac{1}{x}$

② $y=24-x$

③ x와 y 사이에 아무 관계도 없다.

④ $1:x=y:80$에서 $y=\frac{80}{x}$

⑤ $y=\frac{1}{6}x$

따라서 y가 x에 정비례하는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

02

y가 x에 정비례하므로 $y=ax\ (a\neq0)$라 하면

$x=5$일 때의 y의 값과 $x=-2$일 때의 y의 값의 차가 21이므로

$|5a-(-2a)|=21$

$|7a|=21$, $|a|=3$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-3$

따라서 x, y 사이의 관계식은

$y=3x$ 또는 $y=-3x$ 답 $y=3x$ 또는 $y=-3x$

03

y가 x에 반비례하므로 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$라 하면

$x=-2$일 때, $y=-\frac{3}{4}$이므로

$-\frac{3}{4}=\frac{a}{-2}$에서 $a=\frac{3}{2}$　$\therefore y=\frac{3}{2x}$

$x=A$일 때, $y=-\frac{1}{4}$이므로

$-\frac{1}{4}=\frac{3}{2A}$　$\therefore A=-6$

$x=4$일 때, $y=B$이므로

$B=\frac{3}{2\times4}$　$\therefore B=\frac{3}{8}$

$x=C$일 때, $y=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{6}=\frac{3}{2C}$ $\quad \therefore C=9$

$\therefore ABC=-6\times\frac{3}{8}\times9=-\frac{81}{4}$

답 $-\frac{81}{4}$

04

점 $(-4,\ -2)$가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$x=-4$, $y=-2$를 $y=ax$에 대입하면

$-2=a\times(-4)$ $\quad \therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 주어진 관계식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

점 $(b,\ 3)$이 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이므로

$x=b$, $y=3$을 $y=\frac{1}{2}x$에 대입하면

$3=\frac{1}{2}b$ $\quad \therefore b=6$

$\therefore \frac{b}{a}=b\times\frac{1}{a}=6\times2=12$

답 12

05

$y=ax$의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로 $a<0$이고, $y=bx$의 그래프가 제1사분면과 제3사분면을 지나므로 $b>0$이다.

또한, $y=ax$의 그래프는 $y=-x$의 그래프보다 x축에 가까우므로 $|a|<1$이고, $y=bx$의 그래프가 $y=-x$의 그래프보다 y축에 가까우므로 $|b|>1$이다.

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$이다.

답 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$

06

$A(3,\ a)$라 하면 점 A는 $y=x$의 그래프 위의 점이므로

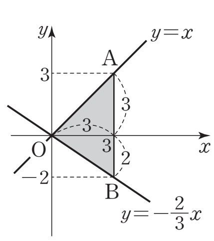
$a=3$ $\quad \therefore A(3,\ 3)$

$B(3,\ b)$라 하면 점 B는 $y=-\frac{2}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$b=-\frac{2}{3}\times3=-2$ $\quad \therefore B(3,\ -2)$

따라서 삼각형 AOB는 밑변의 길이가 5, 높이가 3인 삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3=\frac{15}{2}$



답 ④

07

x, y 사이의 관계식을 $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$라 하면

점 $(6,\ -3)$이 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-3=\frac{a}{6}$ $\quad \therefore a=-18$

즉, 주어진 반비례 관계의 그래프의 관계식은 $y=-\frac{18}{x}$이므로

$xy=-18$

따라서 주어진 반비례 관계의 그래프 위의 점의 x좌표와 y좌표의 곱은 -18로 일정하다.

① 점 $(-3,\ 6)$의 경우, $xy=-3\times6=-18$

② 점 $(-2,\ 9)$의 경우, $xy=-2\times9=-18$

③ 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 36\right)$의 경우, $xy=-\frac{1}{2}\times36=-18$

④ 점 $(1,\ -18)$의 경우, $xy=1\times(-18)=-18$

⑤ 점 $\left(3,\ -\frac{1}{6}\right)$의 경우, $xy=3\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 그래프 위의 점이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

08

$y=\frac{16}{x}$에서 $xy=16$

자연수 x, y에 대하여 위의 식을 만족시키는 x, y의 값을 나타내면 다음 표와 같다.

x	1	2	4	8	16
y	16	8	4	2	1

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1,\ 16)$, $(2,\ 8)$, $(4,\ 4)$, $(8,\ 2)$, $(16,\ 1)$이다.

답 $(1,\ 16)$, $(2,\ 8)$, $(4,\ 4)$, $(8,\ 2)$, $(16,\ 1)$

09

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 B가 점 A와 원점에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는 $(-a,\ -b)$이다.

이때 점 $A(a,\ b)$는 반비례 관계 $y=-\frac{20}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=-\frac{20}{a}$

$\therefore ab=-20$

따라서 직사각형 ACBD의 넓이는

(선분 AC의 길이)$\times$(선분 BC의 길이)

$=\{b-(-b)\}\times(-a-a)$

$=-4ab$

$=-4\times(-20)=80$

답 80

10

점 A$(b,\ -4)$가 $y=-\frac{4}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$-4=-\frac{4}{3}b \qquad \therefore b=3$

$\therefore$ A$(3,\ -4)$

점 A$(3,\ -4)$는 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-4=\frac{a}{3} \qquad \therefore a=-12$

점 B$(c,\ 4)$는 $y=-\frac{4}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$4=-\frac{4}{3}c \qquad \therefore c=-3$

$\therefore a+b+c=-12+3+(-3)$

$=-12$

답 ②

11

길이가 4 m인 전선의 무게가 80 g이므로 길이가 1 m인 전선의 무게는 20 g이다.

이때 전선 10 g당 가격이 200원이므로 전선 20 g의 가격은 400원이다.

즉, 전선 1 m당 가격은 400원이다.

따라서 이 전선 x m의 가격이 $400x$원이므로 x, y 사이의 관계식은

$y=400x$

또한, 전선 90 m의 가격은

$400\times90=36000$(원)

답 $y=400x$, 36000원

12

매분 3 L씩 물을 넣으면 10분 만에 물통이 가득 차므로 물통에 들어 가는 물의 양은

$3\times10=30$(L)

매분 x L씩 y분 동안 물을 넣으면 물통이 가득 차므로

$x\times y=30$

$\therefore y=\frac{30}{x}$

따라서 물통에 매분 5 L씩 물을 넣어 물통이 가득 찰 때까지 걸리는 시간은

$y=\frac{30}{5}=6$(분)

답 ④

STEP **2** A등급을 위한 문제 pp.106~111

01 ㄷ, ㄹ	02 $-\frac{9}{2}$	03 $\frac{6}{5}$	04 30	05 8
06 ③	07 ④	08 ④	09 $\frac{5}{9}$	10 4
11 ③	12 E$(4,\ 3)$	13 $-\frac{4}{9}$	14 ②, ④	15 ④
16 $-\frac{23}{4}$	17 4	18 C$\left(\frac{21}{5},\ \frac{15}{7}\right)$		19 ⑤
20 8	21 78	22 ②	23 -27	24 ②
25 $-\frac{35}{9}$	26 ④	27 $\frac{45}{2}$	28 $y=\frac{9}{5}x$, 54	
29 30 mL	30 4대	31 ③	32 ④	

01

ㄱ. (시간)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$에서 $y=\frac{60}{x}$

따라서 y는 x에 반비례한다.

ㄴ. 시계의 분침은 1분에 6°씩 회전하므로

$y=6x$

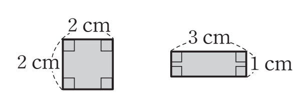
따라서 y는 x에 정비례한다.

ㄷ. 한 번 통화하는 데 기본요금이 7원이고 x초 동안 통화한 요금이 $2x$원이므로

$y=2x+7$

따라서 y는 x에 정비례하지도 않고 반비례하지도 않는다.

ㄹ. 오른쪽 그림의 두 직사각형의 둘레의 길이는 모두 8 cm이지만 넓이는 각각 4 cm², 3 cm²이다.



따라서 y는 x에 정비례하지도 않고 반비례하지도 않는다.

ㅁ. 소금 y g을 포함한 소금물 300 g의 농도가 x %이므로

$\frac{y}{300}\times100=x$에서 $y=3x$

따라서 y는 x에 정비례한다.

ㅂ. 넓이가 30 cm²인 마름모의 한 대각선의 길이가 x cm일 때, 다른 대각선의 길이는 y cm이므로

$\frac{1}{2}\times x\times y=30,\ xy=60 \qquad \therefore y=\frac{60}{x}$

따라서 y는 x에 반비례한다.

그러므로 y가 x에 정비례하지도 않고 반비례하지도 않는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

02

조건 ㈎에서 $3y$가 x에 정비례하므로

$3y=ax\ (a\neq0)$, 즉 $y=\frac{a}{3}x$ ……㉠

로 놓을 수 있다.

조건 ㈏에 의하여 $x=-4$, $y=3$을 ㉠에 대입하면

$3=\frac{a}{3}\times(-4)\qquad\therefore a=-\frac{9}{4}$

즉, x, y 사이의 관계식은

$y=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{9}{4}\right)x$

$\therefore y=-\frac{3}{4}x$

따라서 $x=6$일 때의 y의 값은

$y=-\frac{3}{4}\times6=-\frac{9}{2}$ 답 $-\frac{9}{2}$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

정비례 관계식

x와 y 사이의 관계식이 $y=ax\ (a\neq0)$ 꼴이면 정비례 관계이다.
이때 상수 a가 음수이거나 분수인 경우에도 정비례 관계임에 주의한다.

03

조건 ㈎에서 $xy=a\ (a<0)$라 하면 $y=\frac{a}{x}$

조건 ㈏에서 $x=2$일 때의 y의 값과 $x=4$일 때의 y의 값의 차가 3이므로

$\left|\frac{a}{2}-\frac{a}{4}\right|=3$

$\left|\frac{a}{4}\right|=3$, $|a|=12$

$\therefore\ a=12$ 또는 $a=-12$

이때 $a<0$이므로 $a=-12$

즉, x, y 사이의 관계식은 $y=-\frac{12}{x}$

따라서 $x=-10$일 때의 y의 값은

$y=-\frac{12}{-10}=\frac{6}{5}$ 답 $\frac{6}{5}$

04

y가 x에 반비례하므로 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$라 하면

$x=5$일 때, $y=m$이므로 $m=\frac{a}{5}$ ……㉠

$x=-3$일 때, $y=n$이므로 $n=-\frac{a}{3}$ ……㉡

또한, $x=k$일 때, $y=\frac{m}{3}-\frac{n}{2}$이므로

$\frac{1}{3}m-\frac{1}{2}n=\frac{a}{k}$

㉠, ㉡을 이 식에 대입하면

$\frac{1}{3}\times\frac{a}{5}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{k}$

$\frac{a}{15}+\frac{a}{6}=\frac{a}{k}$, $\frac{7a}{30}=\frac{a}{k}$

$\frac{7}{30}=\frac{1}{k}\ (\because\ a\neq0)\qquad\therefore k=\frac{30}{7}$

$\therefore 7k=7\times\frac{30}{7}=30$ 답 30

05

2를 파란색 상자에 넣어서 나오는 수는 $2a$이고, 이를 빨간색 상자에 넣어서 나오는 수는 -12이므로

$\frac{b}{2a}=-12\qquad\therefore\ \frac{b}{a}=-24$

-3을 파란색 상자에 넣어서 나오는 수는 $-3a$이고, 이를 빨간색 상자에 넣어서 나오는 수는

$\frac{b}{-3a}=-\frac{1}{3}\times\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}\times(-24)=8$ 답 8

06

③ a의 절댓값이 클수록 그래프는 y축에 가깝다. 답 ③

07

x, y 사이의 관계식을 $y=ax\ (a\neq0)$라 하면

점 $(-2,\ -5)$가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$-5=-2a\qquad\therefore\ a=\frac{5}{2}$

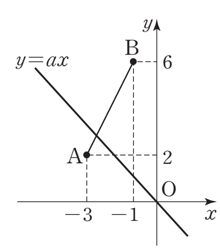
따라서 $y=\frac{5}{2}x$의 그래프가 점 $(m,\ 3m-2)$를 지나므로

$3m-2=\frac{5}{2}m$

$\frac{1}{2}m=2\qquad\therefore\ m=4$ 답 ④

08

두 점 A, B와 $y=ax$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $y=ax$의 그래프가 점 A를 지날 때 a의 값이 가장 크고, 점 B를 지날 때 a의 값이 가장 작다.



(i) 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$를 지날 때,

$2=-3a\qquad\therefore\ a=-\frac{2}{3}$

(ii) 점 $\mathrm{B}(-1,\ 6)$을 지날 때,

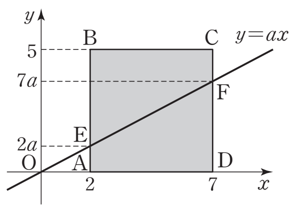
$6=-a \qquad \therefore a=-6$

(i), (ii)에서 상수 a의 값의 범위는

$-6 \le a \le -\frac{2}{3}$ **답** ④

09

다음 그림과 같이 점 A(2, 0), B(2, 5)라 하면 주어진 정사각형의 한 변의 길이가 5이므로 점 C(7, 5), D(7, 0)이고, 정사각형과 $y=ax$의 그래프가 만나는 점을 E, F라 하면 점 E, F는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 두 점 E, F의 좌표는 각각 E(2, 2a), F(7, 7a)이다.



$y=ax$의 그래프가 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로

(사각형 ADFE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(정사각형 ABCD의 넓이)

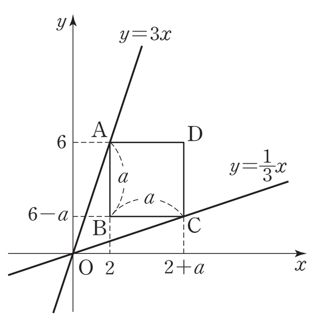
$\frac{1}{2}\times 5\times(2a+7a)=\frac{1}{2}\times 25$

$9a=5 \qquad \therefore a=\frac{5}{9}$ **답** $\frac{5}{9}$

10

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a라 하면

B(2, 6$-a$), C(2$+a$, 6$-a$)



점 C(2$+a$, 6$-a$)가 $y=\frac{1}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$6-a=\frac{1}{3}(2+a)$, $18-3a=2+a$

$-4a=-16 \qquad \therefore a=4$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 4이다. **답** 4

11

y축 위의 점 A의 좌표를 $(0, t)$ $(t\neq 0)$라 하면 두 점 B, C의 y좌표도 t이다.

B(s, t)라 하면 점 B는 $y=bx$의 그래프 위의 점이므로

$t=bs \qquad \therefore s=\frac{t}{b} \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{t}{b}, t\right)$

또한, C(u, t)라 하면 점 C는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$t=au \qquad \therefore u=\frac{t}{a} \qquad \therefore \mathrm{C}\left(\frac{t}{a}, t\right)$

이때 선분 AB의 길이는 두 점 A, B의 x좌표의 차와 같으므로

$\frac{t}{b}-0=\frac{t}{b}$

또한, 선분 BC의 길이는 두 점 B, C의 x좌표의 차와 같으므로

$\frac{t}{a}-\frac{t}{b}$

두 선분 AB, BC의 길이의 비가 1 : 3이므로

$\frac{t}{b}:\left(\frac{t}{a}-\frac{t}{b}\right)=1:3$

$\frac{t}{a}-\frac{t}{b}=\frac{3t}{b}$, $\frac{t}{a}=\frac{4t}{b}$, $\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$ $(\because t\neq 0)$

따라서 $b=4a$, 즉 $a=\frac{1}{4}b$이므로

$b-a=4a-a=3a$ 또는 $b-a=b-\frac{1}{4}b=\frac{3}{4}b$ **답** ③

• 다른 풀이 •

두 선분 AB, BC의 길이의 비가 1 : 3이므로 점 B의 x좌표를 k $(k\neq 0)$라 하면 점 C의 x좌표는

$k+3k=4k$

점 B는 $y=bx$의 그래프 위의 점이므로 점 B의 y좌표는

$y=bk$ ······㉠

점 C는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 점 C의 y좌표는

$y=a\times 4k=4ak$ ······㉡

이때 세 점 A, B, C의 y좌표가 모두 같으므로

㉠, ㉡에서

$bk=4ak \qquad \therefore b=4a$ 또는 $a=\frac{1}{4}b$ $(\because k\neq 0)$

$\therefore b-a=4a-a=3a$ 또는 $b-a=b-\frac{1}{4}b=\frac{3}{4}b$

BLACKLABEL 특강 **풀이 첨삭**

두 선분 AB, BC의 길이의 비가 1 : 3이므로 두 점 B, C의 x좌표는 0이 될 수 없다.
따라서 점 B의 x좌표를 k라 하면 $k\neq 0$이다.

12

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 A(a, 7)이 $y=7x$의 그래프 위의 점이므로

$7=7a \qquad \therefore a=1$

즉, A(1, 7)

점 B의 y좌표를 b라 하면 점 B(10, b)는 $y=\frac{1}{10}x$의 그래프 위

의 점이므로

$b=\frac{1}{10}\times 10 \qquad \therefore b=1$

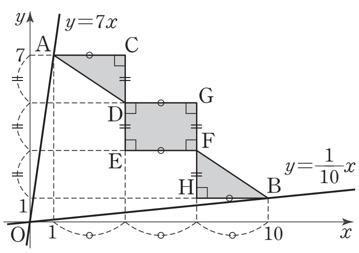
즉, B$(10,\ 1)$

사각형 DEFG는 직사각형이고 선분 CE와 GH의 길이가 같으므로 선분 CD와 FH의 길이가 같다.

이때 삼각형 ACD와 삼각형 FHB의 넓이의 비가 $1:1$이므로 선분 AC와 HB의 길이가 같다.

또한, 선분 DG와 HB의 길이가 같고 사각형 DEFG와 삼각형 FHB의 넓이의 비가 $2:1$이므로

세 선분 GF, FH, CD의 길이가 모두 같다.



즉, 위의 그림과 같으므로

(선분 CD의 길이)=(선분 DE의 길이)

=(선분 FH의 길이)

$=\frac{1}{3}\times(7-1)=2$

(선분 AC의 길이)=(선분 DG의 길이)

=(선분 HB의 길이)

$=\frac{1}{3}\times(10-1)=3$

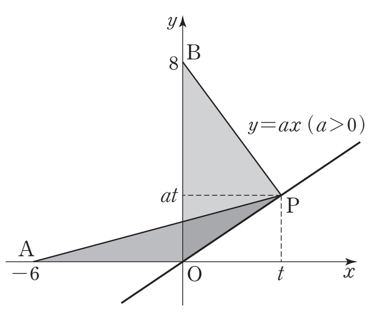
따라서 점 E의 x좌표는 $1+3=4$, y좌표는 $1+2=3$이므로

E$(4,\ 3)$이다. **답** E$(4,\ 3)$

13

점 P는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 P$(t,\ at)$라 하자.

(i) $a>0$일 때,



(삼각형 OPA의 넓이) : (삼각형 OPB의 넓이)=1 : 2에서

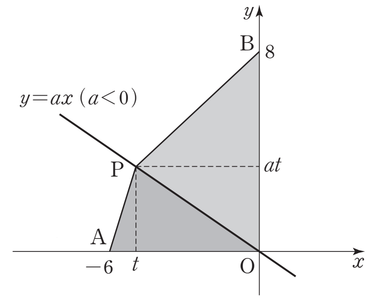
$t>0$, $at>0$이므로

$\left(\frac{1}{2}\times 6\times at\right):\left(\frac{1}{2}\times 8\times t\right)=1:2$

즉, $3at:4t=1:2$이므로

$6at=4t \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$

(ii) $a<0$일 때,



(삼각형 OPA의 넓이) : (삼각형 OPB의 넓이)=1 : 2에서

$t<0$, $at>0$이므로

$\left(\frac{1}{2}\times 6\times at\right):\left\{\frac{1}{2}\times 8\times(-t)\right\}=1:2$

즉, $3at:(-4t)=1:2$이므로

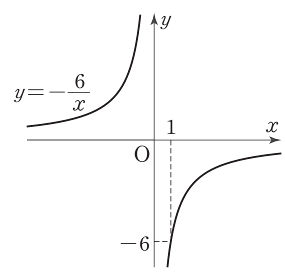
$6at=-4t \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{2}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{9}$ **답** $-\frac{4}{9}$

14

① 좌표축에 점점 가까워지면서 한없이 뻗어 나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이며 원점을 지나지 않는다.



② $x=3$을 $y=-\frac{6}{x}$에 대입하면

$y=-\frac{6}{3}=-2$

즉, 그래프는 점 $(3,\ -2)$를 지난다.

③ 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

④ 점 $(a,\ b)$가 주어진 그래프 위의 점이면

$b=-\frac{6}{a}$ ……㉠

㉠의 양변에 -1을 곱하면

$-b=-\left(-\frac{6}{a}\right)=-\frac{6}{-a}$

즉, 점 $(a,\ b)$가 주어진 그래프 위의 점이면 점 $(-a,\ -b)$도 주어진 그래프 위에 있다.

⑤ 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$에서 a의 절댓값이 클수록 그 그래프가 원점에서 멀리 떨어져 있으므로 $y=-\frac{6}{x}$의 그래프는 $y=-\frac{24}{x}$의 그래프보다 원점에 더 가깝다.

따라서 옳은 것은 ②, ④이다. **답** ②, ④

15

두 점 A, B의 x좌표의 차가 2이므로 점 A의 x좌표를 p라 하면 점 B의 x좌표는 $p+2$이다.

점 A$(p,\ -6)$이 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-6=\dfrac{a}{p}$ $\quad\therefore a=-6p$ $\quad\cdots\cdots$㉠

점 B$(p+2,\ -3)$도 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-3=\dfrac{a}{p+2}$ $\quad\therefore a=-3(p+2)$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$-6p=-3(p+2),\ -3p=-6$

$\therefore p=2,\ a=-12$ ($\because$ ㉠ 또는 ㉡)

따라서 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프 위의 점 C의 x좌표가 -1이므로 점 C의 y좌표는

$y=-\dfrac{12}{-1}=12$

답 ④

• 다른 풀이 •

점 A의 y좌표가 -6이므로 x좌표는

$-6=\dfrac{a}{x}$에서 $x=-\dfrac{a}{6}$ $\quad\cdots\cdots$㉢

점 B의 y좌표가 -3이므로 x좌표는

$-3=\dfrac{a}{x}$에서 $x=-\dfrac{a}{3}$ $\quad\cdots\cdots$㉣

이때 |㉢−㉣|=2이므로

$\left|-\dfrac{a}{6}-\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right|=2,\ \left|\dfrac{a}{6}\right|=2,\ |a|=12$

$\therefore a=12$ 또는 $a=-12$

한편, $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 제2사분면, 제4사분면을 지나므로

$a<0$ $\quad\therefore a=-12$

따라서 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프 위의 점 C의 x좌표가 -1이므로 y좌표는

$y=-\dfrac{12}{-1}=12$

16

조건 ㈎에서 점 A$(a,\ b)$는 반비례 관계 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=-\dfrac{8}{a}$ $\quad\therefore ab=-8$

조건 ㈏에서 점 B$(c,\ d)$는 반비례 관계 $y=\dfrac{36}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$d=\dfrac{36}{c}$ $\quad\therefore cd=36$

조건 ㈐에서 위의 식을 만족시키는 두 자연수 $c,\ d\ (c<d)$를 나타내면 다음 표와 같다.

c	1	2	3	4
d	36	18	12	9

이때 c는 d의 약수가 아니므로 $c=4,\ d=9$이다.

$\therefore ab+\dfrac{d}{c}=-8+\dfrac{9}{4}=-\dfrac{23}{4}$

답 $-\dfrac{23}{4}$

BLACKLABEL 특강 **풀이 첨삭**

$cd=36$을 만족시키는 두 자연수 $c,\ d$의 순서쌍 $(c,\ d)$는

$(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9),\ (6,\ 6),\ (9,\ 4),\ (12,\ 3),\ (18,\ 2),\ (36,\ 1)$

의 9개이지만 이 중에서 $c<d$를 만족시키는 것은

$(1,\ 36),\ (2,\ 18),\ (3,\ 12),\ (4,\ 9)$

의 4개뿐이다.

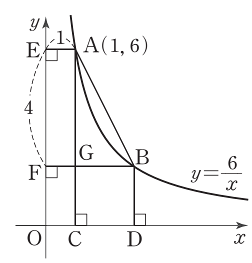
17

점 A$(a,\ 6)$은 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$6=\dfrac{6}{a}$ $\quad\therefore a=1$

즉, A$(1,\ 6)$

$\therefore$ C$(1,\ 0)$



이때 직사각형 AEFG의 넓이가 4이므로

(선분 EF의 길이)$=4$

즉, F$(0,\ 2)$

두 점 B, F의 y좌표가 서로 같으므로

B$(b,\ 2)$라 하면 점 B도 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\dfrac{6}{b}$ $\quad\therefore b=3$

즉, B$(3,\ 2)$

$\therefore$ (삼각형 AGB의 넓이)

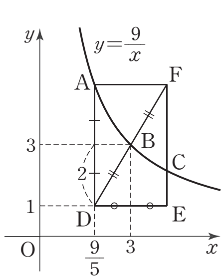
$=\dfrac{1}{2}\times$(선분 GB의 길이)$\times$(선분 AG의 길이)

$=\dfrac{1}{2}\times(3-1)\times(6-2)=4$

답 4

18

$y=\dfrac{9}{x}$의 그래프 위의 점 B의 x좌표가 3이므로 점 B의 좌표는 B$(3,\ 3)$이다.



점 B가 직사각형 ADEF의 대각선 DF의 길이를 이등분하는 점이고 점 B의 y좌표가 3이므로 직사각형 ADEF의 세로의 길이는 $2\times(3-1)=4$이다.

즉, $y=\dfrac{9}{x}$의 그래프 위의 점 A의 y좌

표가 5이므로 점 A의 좌표를 $(a,\ 5)$라 하면

$5=\frac{9}{a}\qquad \therefore a=\frac{9}{5}$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{9}{5},\ 5\right)$

따라서 직사각형 ADEF의 가로의 길이는 $2\times\left(3-\frac{9}{5}\right)=\frac{12}{5}$이므로 점 E의 좌표는 $\left(\frac{9}{5}+\frac{12}{5},\ 1\right)$이다.

즉, $\mathrm{E}\left(\frac{21}{5},\ 1\right)$

이때 $y=\frac{9}{x}$의 그래프 위의 점 C의 x좌표가 $\frac{21}{5}$이므로 점 C의 좌표를 $\left(\frac{21}{5},\ c\right)$라 하면

$c=9\times\frac{5}{21}=\frac{15}{7}$

따라서 구하는 점 C의 좌표는 $\left(\frac{21}{5},\ \frac{15}{7}\right)$이다. **답** $\mathrm{C}\left(\frac{21}{5},\ \frac{15}{7}\right)$

19

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $a,\ b\ (a>0,\ b<0)$라 하면

$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{6}{a}\right),\ \mathrm{B}\left(b,\ -\frac{8}{b}\right)$

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$\frac{6}{a}=-\frac{8}{b}\qquad \therefore b=-\frac{4}{3}a$

$\therefore \mathrm{B}\left(-\frac{4}{3}a,\ \frac{6}{a}\right)$

이때 점 C의 x좌표가 $-\frac{4}{3}a$이고 점 C는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 C의 y좌표는

$y=6\times\left(-\frac{3}{4a}\right)=-\frac{9}{2a}$

$\therefore \mathrm{C}\left(-\frac{4}{3}a,\ -\frac{9}{2a}\right)$

따라서 (선분 AB의 길이)$=a-\left(-\frac{4}{3}a\right)=a+\frac{4}{3}a=\frac{7}{3}a$,

(선분 BC의 길이)$=\frac{6}{a}-\left(-\frac{9}{2a}\right)=\frac{12}{2a}+\frac{9}{2a}=\frac{21}{2a}$이므로

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}a\times\frac{21}{2a}=\frac{49}{4}$ **답** ⑤

20

점 $\left(2a+3,\ \frac{1}{2}a-3\right)$이 x축 위에 있으므로 y좌표가 0이다. 즉,

$\frac{1}{2}a-3=0\qquad \therefore a=6$

(가)

따라서 $x,\ y$ 사이의 관계식은 $y=\frac{6}{x}$이다.

(나)

이때 $y=\frac{6}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점은

$(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$,

$(-1,\ -6),\ (-2,\ -3),\ (-3,\ -2),\ (-6,\ -1)$

의 8개이다.

(다)

답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	상수 a의 값을 구한 경우	30%
(나)	$x,\ y$ 사이의 관계식을 구한 경우	20%
(다)	x좌표, y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구한 경우	50%

BLACKLABEL 특강 필수 원리

x좌표, y좌표가 모두 정수인 점

$y=\frac{a}{x}$ ($a\neq0$인 정수)의 그래프 위의 점에 대하여 x좌표가 정수일 때 y좌표, 즉 $\frac{a}{x}$의 값이 정수이어야 하므로 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의

$|(x$좌표$)|=$(정수 a의 양의 약수)

이어야 한다.

예) $y=\frac{6}{x}$에서 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 이 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 x좌표는 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6이다.

21

점 $\mathrm{A}(-3,\ -2)$가 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-2=\frac{a}{-3}\qquad \therefore a=6$

점 $\mathrm{B}(4,\ -3)$이 $y=\frac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$-3=\frac{b}{4}\qquad \therefore b=-12$

제1사분면에서 $y=\frac{6}{x}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점은 x좌표에 따라 다음과 같다.

(i) $x=1$일 때, $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

(ii) $x=2$일 때, $y=1,\ 2$

(iii) $x=3,\ 4,\ 5$일 때, $y=1$

(iv) $x\geq6$일 때, y가 정수인 점은 없다.

(i)~(iv)에서 점의 개수는

$5+2+3=10$

제3사분면에서 $y=\frac{6}{x}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점도 위와 같이 10개이다.

한편, 제4사분면에서 $y=-\frac{12}{x}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점은 x좌표에 따라 다음과 같다.

(v) $x=1$일 때, $y=-1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ -11$

(vi) $x=2$일 때, $y=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$

(vii) $x=3$일 때, $y=-1,\ -2,\ -3$

(viii) $x=4,\ 5$일 때, $y=-1,\ -2$

(ix) $x=6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$일 때, $y=-1$

(x) $x\geq 12$일 때, y가 정수인 점은 없다.

(v)~(x)에서 점의 개수는

$11+5+3+4+6=29$

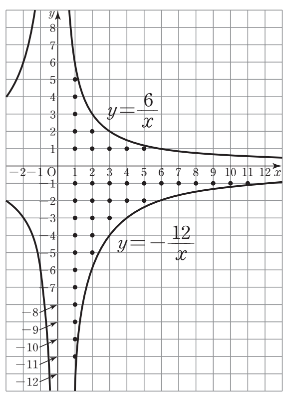
제2사분면에서 $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점도 위와 같이 29개이다.

따라서 구하는 점의 개수는

$10+10+29+29=78$ **답** 78

BLACKLABEL 특강 필수 원리

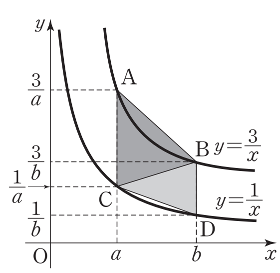
제1사분면과 제4사분면에 두 반비례 관계 $y=\dfrac{6}{x}$, $y=-\dfrac{12}{x}$의 그래프로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 0이 아닌 정수인 점을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



22 해결단계

❶ 단계	주어진 그래프와 점을 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	두 삼각형의 넓이를 a, b를 사용하여 각각 나타낸다.
❸ 단계	비례식을 이용하여 $\dfrac{b}{a}$의 값을 구한다.

$0<a<b$이므로 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프 및 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(삼각형 ABC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\times(b-a)$

$=\dfrac{b-a}{a}$

(삼각형 BCD의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{b}-\dfrac{1}{b}\right)\times(b-a)$

$=\dfrac{b-a}{b}$

이때 두 삼각형의 넓이의 비가 $2:1$이므로

$\dfrac{b-a}{a}:\dfrac{b-a}{b}=2:1,\ \dfrac{2(b-a)}{b}=\dfrac{b-a}{a}$

$a\neq b$에서 $b-a\neq 0$이므로

$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}$ $\quad\therefore\ \dfrac{b}{a}=2$ **답** ②

23

점 D는 제1사분면에서 $y=3x$의 그래프 위에 있으므로

$D(k,\ 3k)\ (k>0)$라 하면

두 점 A, D의 x좌표는 절댓값이 같은 정수이고 선분 AD는 x축에 평행하므로

$A(-k,\ 3k)$

두 점 A, B는 x좌표가 같고 점 B는 $y=3x$의 그래프 위에 있으므로 점 B의 y좌표는

$y=3\times(-k)=-3k$

$\therefore\ B(-k,\ -3k)$

이때 직사각형 ABCD의 넓이가 108이므로

$2k\times 6k=108$

$12k^2=108,\ k^2=9$ $\quad\therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$

$\therefore\ A(-3,\ 9),\ B(-3,\ -9),\ C(3,\ -9),\ D(3,\ 9)$

따라서 점 $A(-3,\ 9)$가 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$9=\dfrac{a}{-3}$ $\quad\therefore\ a=-27$ **답** -27

• 다른 풀이 •

$A(-p,\ q)\ (p>0,\ q>0)$라 하면 점 A는 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$q=\dfrac{a}{-p}$ $\quad\therefore\ a=-pq$

이때 직사각형 ABCD의 넓이가 108이므로

$2p\times 2q=108,\ 4pq=108$

$\therefore\ pq=27$

$\therefore\ a=-27$

24

$x_1:x_2=1:2$이므로 $x_1=k,\ x_2=2k\ (k\neq 0)$라 하자.

두 점 P, Q는 각각 $y=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$P\left(k,\ \dfrac{1}{k}\right),\ Q\left(2k,\ \dfrac{b}{2k}\right)$

점 $P\left(k,\ \dfrac{1}{k}\right)$은 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{k}=ak$ $\quad\therefore ak^2=1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

점 $Q\left(2k, \frac{b}{2k}\right)$도 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{b}{2k}=2ak$

$\therefore b=4ak^2=4$ ($\because$ ㉠)

답 ②

25

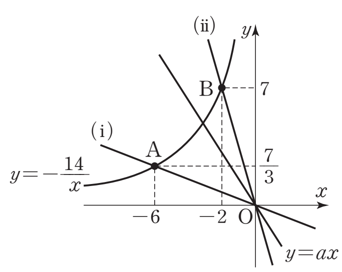
$y=-\frac{14}{x}$의 그래프 위의 점 중

x좌표가 -6인 점의 y좌표는 $y=-\frac{14}{-6}=\frac{7}{3}$

x좌표가 -2인 점의 y좌표는 $y=-\frac{14}{-2}=7$

두 점 A, B를

$A\left(-6, \frac{7}{3}\right)$, $B(-2, 7)$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 $y=ax$의 그래프가 점 A를 지날 때 a의 값이 가장 크고, 점 B를 지날 때 a의 값이 가장 작다.



(i) $y=ax$의 그래프가 점 $A\left(-6, \frac{7}{3}\right)$을 지날 때,

$\frac{7}{3}=-6a$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{18}$

(ii) $y=ax$의 그래프가 점 $B(-2, 7)$을 지날 때,

$7=-2a$ $\quad\therefore a=-\frac{7}{2}$

(i), (ii)에서 상수 a의 값의 범위는 $-\frac{7}{2}\le a\le -\frac{7}{18}$이므로 a의 최댓값은 $-\frac{7}{18}$이고, 최솟값은 $-\frac{7}{2}$이다.

따라서 구하는 합은

$-\frac{7}{18}+\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{7+63}{18}=-\frac{35}{9}$

답 $-\frac{35}{9}$

26

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(p, 12)$, $B(q, 4)$ $(p>0, q>0)$

라 하면 두 점 A, B는 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$12=\frac{a}{p}$ $\quad\therefore p=\frac{a}{12}$

$4=\frac{a}{q}$ $\quad\therefore q=\frac{a}{4}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times(q-p)\times(12-4)=16$

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{a}{4}-\frac{a}{12}\right)\times 8=16$

$\frac{2}{3}a=16$ $\quad\therefore a=24$

따라서 $p=2$, $q=6$이므로 $A(2, 12)$, $B(6, 4)$

$y=mx$의 그래프가 점 A를 지날 때 m의 값이 가장 크고, 점 B를 지날 때 m의 값이 가장 작다.

(i) $y=mx$의 그래프가 점 $A(2, 12)$를 지날 때,

$12=2m$ $\quad\therefore m=6$

(ii) $y=mx$의 그래프가 점 $B(6, 4)$를 지날 때,

$4=6m$ $\quad\therefore m=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 상수 m의 값의 범위는

$\frac{2}{3}\le m\le 6$

답 ④

27

$P(p, 6)$ $(p>0)$이라 하면

점 P는 $y=3x$의 그래프 위의 점이므로

$6=3p$에서 $p=2$

$\therefore P(2, 6)$, $A(2, 0)$

(가)

점 $P(2, 6)$이 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$6=\frac{a}{2}$에서 $a=12$ $\quad\therefore y=\frac{12}{x}$

(나)

점 B가 점 A를 출발한 지 8초 후의 x좌표는

$2+\frac{3}{4}\times 8=8$ $\quad\therefore B(8, 0)$

$Q(8, q)$ $(q>0)$는 $y=\frac{12}{x}$의 그래프 위의 점이므로

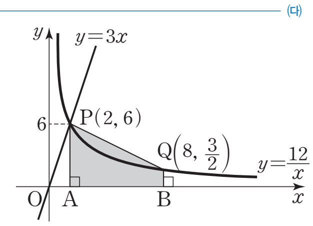
$q=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore Q\left(8, \frac{3}{2}\right)$

(다)

$\therefore$ (사각형 PABQ의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\left(6+\frac{3}{2}\right)\times(8-2)$

$=\frac{45}{2}$



(라)

답 $\frac{45}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 점 A, P의 좌표를 각각 구한 경우	20%
(나)	a의 값을 구한 경우	30%
(다)	점 Q의 좌표를 구한 경우	20%
(라)	사각형 PABQ의 넓이를 구한 경우	30%

28

두 개의 톱니바퀴 P, Q의 톱니 수를 각각 $9a$, $5a$ $(a \neq 0)$라 하면

$9a \times x = 5a \times y \qquad \therefore y=\frac{9}{5}x$

톱니바퀴 P가 30번 회전할 때의 톱니바퀴 Q의 회전 수는 $x=30$일 때의 y의 값이므로

$y=\frac{9}{5}\times 30=54$

따라서 x, y 사이의 관계식은 $y=\frac{9}{5}x$이고, 톱니바퀴 P가 30번 회전할 때의 톱니바퀴 Q의 회전 수는 54이다. **답** $y=\frac{9}{5}x$, 54

29

기체에 가해지는 압력이 x기압, 부피가 y mL이고 주어진 그래프에서 y가 x에 반비례하므로 기온이 20 ℃일 때와 80 ℃일 때의 기압과 부피 사이의 관계식을 각각 $y=\frac{a}{x}$, $y=\frac{b}{x}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$라 하자.

20 ℃일 때, 압력 10기압에서 부피가 15 mL이므로

$15=\frac{a}{10}$에서 $a=150$

$\therefore y=\frac{150}{x}$

이때 20 ℃에서 압력이 5기압이면 기체의 부피는

$y=\frac{150}{5}=30(\text{mL})$

80 ℃일 때, 압력 20기압에서 부피가 15 mL이므로

$15=\frac{b}{20}$에서 $b=300$

$\therefore y=\frac{300}{x}$

이때 80 ℃에서 압력이 5기압이면 기체의 부피는

$y=\frac{300}{5}=60(\text{mL})$

따라서 구하는 부피의 차는

$60-30=30(\text{mL})$ **답** 30 mL

30

이 풍력 발전소에서 발전기 1대를 가동할 때, x시간 후의 생산된 전력량을 y라 하면 $y=ax$ $(a \neq 0)$로 놓을 수 있다.

그래프 l, 즉 $y=ax$의 그래프는 점 $(2,\ 1500)$을 지나므로

$1500=2a \qquad \therefore a=750$

즉, 그래프 l의 관계식은 $y=750x$이다.

한편, 공장에서 기계 1대를 운영할 때, x시간 후의 필요한 전력량을 y라 하면 $y=bx$ $(b \neq 0)$로 놓을 수 있다.

그래프 m, 즉 $y=bx$의 그래프는 점 $(2,\ 500)$을 지나므로

$500=2b \qquad \therefore b=250$

즉, 그래프 m의 관계식은 $y=250x$이다.

풍력 발전소에서 발전기 2대를 가동할 때 x시간 후의 생산된 전력량을 y라 하면

$y=2\times 750x$, 즉 $y=1500x$

공장에서 기계 n대를 운영할 때 x시간 후의 필요한 전력량을 y라 하면

$y=n\times 250x$, 즉 $y=250nx$

$1500x=250nx$에서 $n=6$

즉, 풍력 발전소에서 발전기 2대를 가동하여 생산하는 전력량과 공장에서 기계 6대를 운영하는 데 필요한 전력량은 같다.

따라서 이미 기계 2대를 운영하는 공장에서 추가로 운영할 수 있는 기계는 4대이다. **답** 4대

31

처음 상자 안에 들어 있던 사탕의 개수가 x이므로 처음 상자 안에 들어 있던 초콜릿의 개수는 $2x$이다.

또한, 꺼낸 사탕의 개수가 y이므로 꺼낸 초콜릿의 개수는 $5y$이다.

남아 있는 사탕과 초콜릿의 개수의 비가 2 : 3이므로

$(x-y) : (2x-5y)=2 : 3$

$2(2x-5y)=3(x-y)$, $4x-10y=3x-3y$

$x=7y \qquad \therefore y=\frac{1}{7}x \qquad \cdots\cdots ㉠$

꺼낸 사탕이 5개이면 $y=5$이므로 이것을 ㉠에 대입하면 처음 상자 안에 들어 있던 사탕의 개수는

$5=\frac{x}{7} \qquad \therefore x=35$

따라서 처음 상자 안에 들어 있던 초콜릿의 개수는

$2x=2\times 35=70$(개) **답** ③

32 해결단계

❶ 단계	점 P가 점 B를 출발한 지 x초 후의 삼각형 ABP의 넓이를 y라 하고 x, y 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	변 BC 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 60일 때의 x의 값을 구한다.
❸ 단계	변 BC 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 처음으로 60이 될 때까지 걸린 시간을 구한다.

점 P가 점 B를 출발한 지 x초 후의 삼각형 ABP의 넓이를 y라 하면 변 BP의 길이가 $2x$이므로

$y=\frac{1}{2}\times 12\times 2x$

$\therefore y=12x$

$y=60$을 $y=12x$에 대입하면

$60=12x$

$\therefore x=5$

즉, 점 P가 점 B를 출발한 지 5초 후에 삼각형 ABP의 넓이가 처음으로 60이 된다.

한편, 점 P는 처음에 점 C에서 출발하였으므로 점 P가 점 C에서 출발하여 두 점 D, A를 차례로 지나 점 B에 도착할 때까지 걸리는 시간은

$\frac{12}{2}+\frac{20}{2}+\frac{12}{2}=6+10+6=22$(초)

따라서 점 P가 변 BC 위에 있으면서 삼각형 ABP의 넓이가 처음으로 60이 되는 것은 점 P가 점 C를 출발한 지

$22+5=27$(초) 후이다.

답 ④

STEP **3** 종합 사고력 도전 문제 pp.112~113

01 (1) $c<b<a$ (2) $r<s<q<p$
02 (가) 정, (나) 반, (다) 반, (라) 정
03 (1) 6 m (2) 3배
04 324
05 $\frac{9}{8}$
06 6
07 1 : 2
08 $\frac{5}{2}$배

01 해결단계

(1)	❶ 단계	a, b, c의 부호를 구한다.
	❷ 단계	a, b, c의 대소 관계를 구한다.
(2)	❸ 단계	p, q, r, s의 부호를 구한다.
	❹ 단계	p, q, r, s의 대소 관계를 구한다.

(1) $y=\frac{a}{x}$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지나고,

$y=\frac{b}{x}$, $y=\frac{c}{x}$의 그래프는 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$a>0,\ b<0,\ c<0$

또한, $y=\frac{b}{x}$의 그래프가 $y=\frac{c}{x}$의 그래프보다 원점에 가까우므로

$|c|>|b|$

이때 $b<0,\ c<0$이므로 $c<b$

$\therefore c<b<a$

(2) $y=px,\ y=qx$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면을 지나고, $y=rx,\ y=sx$의 그래프는 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$p>0,\ q>0,\ r<0,\ s<0$

또한, $y=px$의 그래프가 $y=qx$의 그래프보다 y축에 가까우므로

$|p|>|q|$

이때 $p>0,\ q>0$이므로 $p>q$

$y=rx$의 그래프가 $y=sx$의 그래프보다 y축에 가까우므로

$|r|>|s|$

이때 $r<0,\ s<0$이므로 $r<s$

$\therefore r<s<q<p$

답 (1) $c<b<a$ (2) $r<s<q<p$

02 해결단계

❶ 단계	㉠, ㉡에 해당하는 말을 넣었을 때의 x, y 사이의 관계식, y, z 사이의 관계식을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계의 관계식으로부터 x, z 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계의 관계식으로부터 ㉢에 알맞은 말을 찾는다.

(가) ㉠에 '정', ㉡에 '정'이 들어갈 때,

y가 x에 정비례하면 $y=ax\ (a\neq0)$로 놓을 수 있고, z가 y에 정비례하면 $z=by\ (b\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때 $y=ax$를 $z=by$에 대입하면

$z=b\times ax=abx\ (ab\neq0)$이므로 z는 x에 정비례한다.

따라서 이 경우 ㉢에 들어갈 말은 '정'이다.

(나) ㉠에 '정', ㉡에 '반'이 들어갈 때,

y가 x에 정비례하면 $y=ax\ (a\neq0)$로 놓을 수 있고, z가 y에 반비례하면 $z=\frac{b}{y}\ (b\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때 $y=ax$를 $z=\frac{b}{y}$에 대입하면

$z=\frac{b}{ax}\left(\frac{b}{a}\neq0\right)$이므로 z는 x에 반비례한다.

따라서 이 경우 ㉢에 들어갈 말은 '반'이다.

(다) ㉠에 '반', ㉡에 '정'이 들어갈 때,

y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$로 놓을 수 있고, z가 y에 정비례하면 $z=by\ (b\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때 $y=\frac{a}{x}$를 $z=by$에 대입하면

$z=b\times\frac{a}{x}=\frac{ab}{x}\ (ab\neq0)$이므로 z는 x에 반비례한다.

따라서 이 경우 ㉢에 들어갈 말은 '반'이다.

(라) ㉠에 '반', ㉡에 '반'이 들어갈 때,

y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}\ (a\neq0)$로 놓을 수 있고, z가 y에 반비례하면 $z=\frac{b}{y}\ (b\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때 $y=\frac{a}{x}$를 $z=\frac{b}{y}$에 대입하면

$z=b\times\frac{x}{a}=\frac{b}{a}x\left(\frac{b}{a}\neq0\right)$이므로 z는 x에 정비례한다.

따라서 이 경우 ㉢에 들어갈 말은 '정'이다.

그러므로 ㈎ 정, ㈏ 반, ㈐ 반, ㈑ 정이다.

답 ㈎ 정, ㈏ 반, ㈐ 반, ㈑ 정

03 해결단계

(1)	❶ 단계	x, y 사이의 관계식을 구한다.
	❷ 단계	받침점과 힘점 사이의 거리를 구한다.
(2)	❸ 단계	❶ 단계에서 구한 관계식을 이용하여 힘이 몇 배가 되어야 하는지 구한다.

(1) 작용점과 받침점 사이의 거리를 1 m로 두고 힘을 주어 12 kg의 물체를 올렸으므로

$12 : x = y : 1$, $xy = 12$

$\therefore y = \dfrac{12}{x}$ ……㉠

$x=2$를 ㉠에 대입하면 힘점과 받침점 사이의 거리는

$y = \dfrac{12}{2} = 6(\text{m})$

(2) 12 kg의 물체를 올리기 위해 준 힘을 p kg이라 하고 힘점과 받침점 사이의 거리를 q m라 할 때, 수평을 이룬다고 하면

$q = \dfrac{12}{p}$

이때 힘점과 받침점 사이의 거리를 $\dfrac{1}{3}q$ m로 줄이면

$\dfrac{1}{3}q = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{12}{p} = \dfrac{12}{3p}$

따라서 수평을 이루기 위해 필요한 힘은 $3p$ kg, 즉 3배가 되어야 한다.

답 (1) 6 m (2) 3배

04 해결단계

❶ 단계	$y=ax$의 그래프 위의 두 점 B, E와 정사각형의 넓이를 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	a의 값을 이용하여 두 점 F, H의 좌표를 각각 구한다.
❸ 단계	$y=bx$의 그래프 위의 점 D를 이용하여 b의 값을 구하고 점 J의 좌표를 구한다.
❹ 단계	사각형 FJIH의 넓이를 구한다.

두 점 A, B의 x좌표가 같고 점 A의 x좌표가 1이며, 점 B는 $y=ax$의 그래프 위에 있으므로

B$(1, a)$

선분 BC의 길이가 2이므로

C$(3, a)$

두 정사각형 ADCB, CGFE의 넓이의 비가 $1 : 9$이고, 정사각형 ADCB의 넓이가 4이므로 정사각형 CGFE의 넓이는 36이다.

따라서 정사각형 CGFE의 한 변의 길이는 6이므로

E$(3, a+6)$

점 E는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$a+6=3a$

$2a=6 \quad \therefore a=3$

$\therefore$ B$(1, 3)$, C$(3, 3)$, E$(3, 9)$

선분 EF의 길이는 6이므로

F$(9, 9)$

H$(9, p)$라 하면 점 H는 $y=3x$의 그래프 위의 점이므로

$p=3\times9=27 \quad \therefore$ H$(9, 27)$

한편, 점 D$(3, 1)$은 $y=bx$의 그래프 위의 점이므로

$1=3b \quad \therefore b=\dfrac{1}{3}$

J$(q, 9)$라 하면 점 J는 $y=\dfrac{1}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$9=\dfrac{1}{3}q \quad \therefore q=27$

$\therefore$ J$(27, 9)$

따라서

(변 FH의 길이)$=$(변 FJ의 길이)$=27-9=18$이므로

사각형 FJIH는 정사각형이고 그 넓이는

$18\times18=324$

답 324

05 해결단계

❶ 단계	상수 a, b의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	두 넓이 A, B를 각각 구한다.
❸ 단계	상수 k의 값을 구한다.

점 Q$(6, 2)$가 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$2=\dfrac{a}{6}$에서 $a=12$

$\therefore y=\dfrac{12}{x}$

점 P$(4, b)$가 $y=\dfrac{12}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$b=\dfrac{12}{4}=3$

$\therefore$ P$(4, 3)$

$\therefore$ (직사각형 ORPS의 넓이)$=4\times3=12$

이때 $A : B = 1 : 2$이므로

$A=12\times\dfrac{1}{1+2}=4$, $B=12-4=8$

한편, $y=kx$의 그래프와 선분 SP가 만나는 점을 T라 하면 점 T의 y좌표는 3이므로 x좌표는

$3=kx$에서 $x=\dfrac{3}{k}$

$\therefore$ T$\left(\dfrac{3}{k}, 3\right)$

이때 $A=4$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{k}\times3=4$

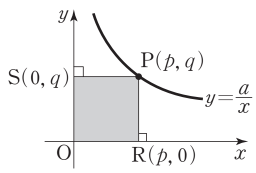
$\therefore k=\frac{9}{8}$ 답 $\frac{9}{8}$

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

$y=\frac{a}{x}$ $(a\neq0)$의 그래프 위의 한 점

$y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(p, q)$에 대하여 $\mathrm{R}(p, 0)$, $\mathrm{S}(0, q)$라 하면

(사각형 ORPS의 넓이) $=|p\times q|$
$=|a|$



따라서 위의 문제에서 점 $\mathrm{Q}(6,\ 2)$가 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $a=6\times2=12$, 즉 직사각형 ORPS의 넓이가 12임을 알 수 있다.

06 해결단계

❶ 단계	상수 a, b의 값을 구한다.
❷ 단계	점 Q의 좌표를 구한다.
❸ 단계	삼각형 POQ의 넓이를 구한다.

점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$4=2a$ $\quad\therefore a=2$

점 $\mathrm{P}(2,\ 4)$가 $y=\frac{8ab}{x}$, 즉 $y=\frac{16b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$4=\frac{16b}{2}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$

점 Q는 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이므로 점 Q의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t\right)$ $(t>0)$라 하면

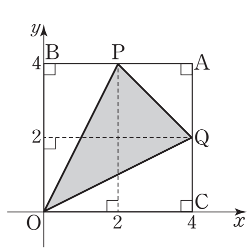
점 Q는 $y=\frac{8ab}{x}$, 즉 $y=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{2}t=\frac{8}{t}$

$t^2=16$ $\quad\therefore t=4$ $(\because t>0)$

$\therefore \mathrm{Q}(4,\ 2)$

세 점 $(4,\ 4)$, $(0,\ 4)$, $(4,\ 0)$을 각각 A, B, C라 하면 다음 그림과 같다.



$\therefore$ (삼각형 POQ의 넓이)

$=$(사각형 ABOC의 넓이)$-$(삼각형 APQ의 넓이)
$-$(삼각형 BOP의 넓이)$-$(삼각형 OCQ의 넓이)

$=4\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times4\times2$

$=16-2-4-4=6$ 답 6

07 해결단계

❶ 단계	a, b의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	점 P의 좌표를 이용해 두 점 A, B의 좌표를 각각 나타낸다.
❸ 단계	선분 PA와 선분 PB의 길이를 각각 구한다.
❹ 단계	선분 PA의 길이와 선분 PB의 길이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

점 $(3,\ 6)$이 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$6=3a$에서 $a=2$

$\therefore y=2x$

점 $(3,\ 6)$이 $y=\frac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$6=\frac{b}{3}$에서 $b=18$

$\therefore y=\frac{18}{x}$

이때 점 P는 $y=2x$의 그래프 위의 점이므로

$\mathrm{P}(t,\ 2t)$ $(0<t<3)$라 하면

두 점 A, P의 y좌표가 $2t$로 같고 점 A는 $y=\frac{18}{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 A의 x좌표는

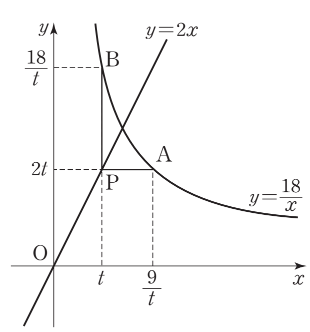
$2t=\frac{18}{x}$에서 $x=\frac{9}{t}$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{9}{t},\ 2t\right)$

두 점 B, P의 x좌표가 t로 같고 점 B도 $y=\frac{18}{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 B의 y좌표는

$y=\frac{18}{t}$

$\therefore \mathrm{B}\left(t,\ \frac{18}{t}\right)$



따라서

(선분 PA의 길이)$=\frac{9}{t}-t$,

(선분 PB의 길이)$=\frac{18}{t}-2t=2\left(\frac{9}{t}-t\right)$

이므로

(선분 PA의 길이) : (선분 PB의 길이)

$=\left(\frac{9}{t}-t\right):2\left(\frac{9}{t}-t\right)=1:2$

답 $1:2$

08 해결단계

❶ 단계	판매 금액과 판매량 사이의 관계를 식으로 나타낸다.
❷ 단계	30분 동안의 판매량을 구한다.
❸ 단계	판매 금액을 20 % 할인할 때의 1시간 동안의 판매량을 구한다.
❹ 단계	20 % 할인할 때 1시간 동안의 판매량은 할인 전 30분 동안의 판매량의 몇 배인지 구한다.

아이스크림의 판매 금액을 x원, 30분 동안의 판매량을 y개라 하면 판매 금액과 판매량이 서로 반비례하므로

$x\times y=800\times 100$

$\therefore\ y=\frac{80000}{x}$ ……㉠

판매 금액이 a원일 때의 30분 동안의 판매량은 $x=a$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{80000}{a}$(개)

판매 금액을 20 % 할인한 $\frac{4}{5}a$원일 때의 30분 동안의 판매량은 $x=\frac{4}{5}a$를 ㉠에 대입하면

$y=80000\div\frac{4}{5}a$

$=80000\times\frac{5}{4a}$

$=\frac{100000}{a}$(개)

이때 제품의 판매량은 판매 금액이 일정하면 판매 시간에 정비례하므로 할인할 때의 1시간 동안의 판매량은

$2\times\frac{100000}{a}=\frac{200000}{a}$(개)이다.

따라서

(할인할 때의 1시간 동안의 판매량)

÷(할인 전의 30분 동안의 판매량)

$=\frac{200000}{a}\div\frac{80000}{a}$

$=\frac{200000}{a}\times\frac{a}{80000}$

$=\frac{5}{2}$(배)

답 $\frac{5}{2}$배

대단원평가 pp.114~115

01 $\frac{41}{4}$	02 $\frac{2}{3}$	03 ④	04 ④
05 21분	06 $\frac{1}{4}$	07 5	08 16
09 $A=18$, $y=\frac{18}{x}$		10 100	11 7
12 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$			

01

점 $\left(a+\frac{3}{2},\ 5-2a\right)$가 x축 위에 있으므로

$5-2a=0$, $2a=5$ $\quad\therefore\ a=\frac{5}{2}$

점 $(a+2b,\ 4b-1)$이 y축 위에 있으므로

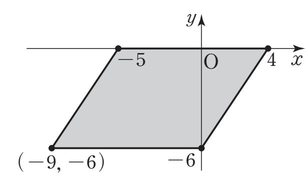
$a+2b=0$

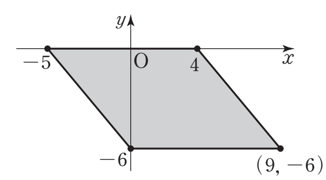
즉, $\frac{5}{2}+2b=0$이므로

$2b=-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore\ b=-\frac{5}{4}$

네 점 $(4,\ 0)$, $(0,\ -6)$, $(-5,\ 0)$, $(c,\ -6)$을 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이므로 다음 그림과 같이 점 $(c,\ -6)$의 좌표는 $(-9,\ -6)$ 또는 $(9,\ -6)$이다.

$\therefore\ c=-9$ 또는 $c=9$





따라서

$a+b+c=\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)+(-9)=\frac{5}{4}-9=-\frac{31}{4}$

또는

$a+b+c=\frac{5}{2}+\left(-\frac{5}{4}\right)+9=\frac{5}{4}+9=\frac{41}{4}$

이므로 가능한 $a+b+c$의 값 중 가장 큰 값은 $\frac{41}{4}$이다.

답 $\frac{41}{4}$

02

두 점 $\mathrm{P}(2a-1,\ b)$와 Q가 y축에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(-2a+1,\ b)$

두 점 Q$(-2a+1,\ b)$와 R이 원점에 대하여 대칭이므로 점 R의 좌표는 R$(2a-1,\ -b)$

즉, $2a-1=3a-2$, $-b=2b+1$이므로

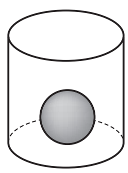
$a=1$, $b=-\frac{1}{3}$

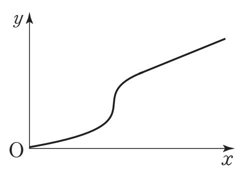
$\therefore\ a+b=1+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ **답** $\frac{2}{3}$

03

쇠구슬의 중간 지점까지는 수면의 높이가 점점 빠르게 증가하고, 쇠구슬의 중간 지점 이후에는 수면의 높이가 점점 천천히 증가하다가 쇠구슬이 완전히 잠긴 이후에는 수면의 높이가 일정하게 증가한다.

따라서 두 변수 x, y 사이의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.





답 ④

04

점 $(a,\ b)$는 제4사분면 위의 점이므로

$a>0$, $b<0$

점 $(c,\ d)$는 제3사분면 위의 점이므로

$c<0$, $d<0$

① $b<0$, $c<0$, $d<0$이므로 $\frac{bc}{d}<0$

② $a>0$, $b<0$이므로 $ab<0$

　$c<0$, $d<0$이므로 $cd>0$

　$\therefore\ ab-cd<0$

③ $a>0$, $b<0$, $c<0$이므로 $a-b+c$의 부호는 알 수 없다.

④ $a>0$, $d<0$이므로 $a^2-d>0$

⑤ $a>0$, $c<0$이므로 $ac<0$

　$b<0$, $d<0$이므로 $bd>0$

　$\therefore\ ac-bd<0$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. **답** ④

05

두 호스 A, B로 동시에 물을 채우면 8분 동안 80 L를 채우므로 1분에 $\frac{80}{8}=10$(L)의 물을 채울 수 있다.

또한, 호스 A로만 물을 채우면 18분 동안 60 L를 채우므로 1분에 $\frac{60}{18}=\frac{10}{3}$(L)의 물을 채울 수 있다.

따라서 호스 B로 1분에 $10-\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$(L)의 물을 채울 수 있으므로 부피가 140 L인 물통을 호스 B만으로 채우는 데 걸리는 시간은

$140\div\frac{20}{3}=140\times\frac{3}{20}$

$=21$(분) **답** 21분

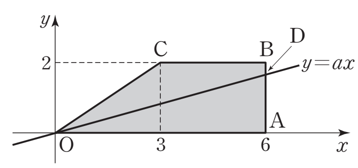
06

(사다리꼴 OABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(3+6)\times2=9$

(삼각형 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\times2=6$

$\therefore$ (삼각형 OAB의 넓이)$>\frac{1}{2}\times$(사다리꼴 OABC의 넓이)

따라서 $y=ax$의 그래프가 사다리꼴 OABC의 넓이를 이등분하려면 $y=ax$의 그래프는 변 AB와 만나야 하므로 다음 그림과 같다.



이때 $y=ax$의 그래프와 변 AB가 만나는 D, 점 D의 y좌표를 k라 하면 점 D의 x좌표는 6이므로

$k=6a$

$\therefore$ D$(6,\ 6a)$

(삼각형 OAD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times$(사다리꼴 OABC의 넓이)

이므로

$\frac{1}{2}\times6\times6a=\frac{9}{2}$

$18a=\frac{9}{2}$　　$\therefore\ a=\frac{1}{4}$ **답** $\frac{1}{4}$

07

조건 (가)에서 $a>0$

조건 (나)에서

$|a|<|-5|$　　$\therefore\ a<5$

이때 a는 정수이므로

$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$

조건 (다)에서 a는 소수이므로

$a=2,\ 3$

따라서 정수 a가 될 수 있는 값의 합은

$2+3=5$ **답** 5

08

직사각형 ABCO의 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 5 : 8이므로

(선분 OA의 길이)$=5k$, (선분 OC의 길이)$=8k$ (k는 자연수)

라 하자.

직사각형 ABCO의 둘레의 길이가 13이므로

$2\times(5k+8k)=13$

$26k=13 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

(선분 OA의 길이)$=\frac{5}{2}$, (선분 OC의 길이)$=4$

점 $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ 4\right)$는 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$4=\frac{5}{2}a \qquad \therefore a=\frac{8}{5}$

점 $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ 4\right)$는 $y=\frac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$4=b\div\frac{5}{2} \qquad \therefore b=10$

$\therefore ab=\frac{8}{5}\times10=16$ **답** 16

09

넓이가 8 m^2인 직사각형 모양의 그늘막 설치 비용이 5600원이므로 넓이가 1 m^2인 직사각형 모양의 그늘막 설치 비용은

$\frac{5600}{8}=700$(원)

따라서 12600원의 비용으로 설치할 수 있는 그늘막의 넓이가 A m^2이므로

$700A=12600$

$\therefore A=18$

한편, 직사각형 모양의 그늘막의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 x m, y m이므로 그늘막의 넓이는 xy m^2이다.

이때 12600원의 비용으로 설치할 수 있는 그늘막의 넓이가 18 m^2이므로

$xy=18$

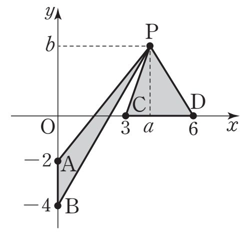
$\therefore y=\frac{18}{x}$

답 $A=18,\ y=\frac{18}{x}$

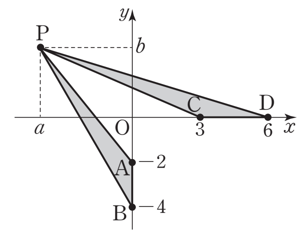
10

점 $\mathrm{A}(0,\ -2)$, $\mathrm{B}(0,\ -4)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$, $\mathrm{D}(6,\ 0)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

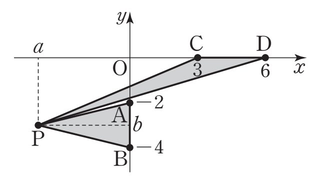
(i) $a>0,\ b>0$일 때,



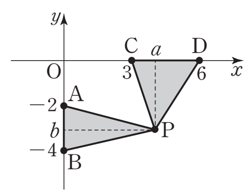
(ii) $a<0,\ b>0$일 때,



(iii) $a<0,\ b<0$일 때,



(iv) $a>0,\ b<0$일 때,



(i)~(iv)에서

(삼각형 PAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\{(-2)-(-4)\}\times|a|$

$=|a|$

(삼각형 PCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(6-3)\times|b|$

$=\frac{3}{2}|b|$

(가)

조건 (나)에서 $|a|:\frac{3}{2}|b|=1:2$

$2|a|=\frac{3}{2}|b|$

$\therefore \frac{|b|}{|a|}=\frac{4}{3}\ (\because a\neq0)$

(나)

이때 $|a|=3k,\ |b|=4k$ (k는 자연수)라 하면

조건 (가)에서 $1\le|b|\le100$이므로

$|b|=4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 100$

$|b|=4$이면 $k=1$이고 $|a|=3$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(-3, -4), (-3, 4), (3, -4), (3, 4)$

의 4개이다.

따라서 각 $|b|$의 값에 대하여 순서쌍 (a, b)는 4개씩 존재하므로 구하는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$25\times4=100$

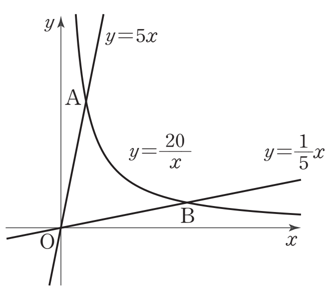
(다)

답 100

단계	채점 기준	배점
(가)	삼각형 PAB와 삼각형 PCD의 넓이를 구한 경우	40%
(나)	조건 (나)를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 경우	30%
(다)	조건 (가)를 이용하여 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한 경우	30%

11

$y=\frac{1}{5}x$, $y=5x$의 그래프와 $y=\frac{20}{x}\,(x>0)$의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



$y=5x$의 그래프와 $y=\frac{20}{x}$의 그래프가 만나는 점을 A, 점 A의 x좌표를 a라 하면 $5a=\frac{20}{a}$에서 $a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)\qquad \therefore \mathrm{A}(2, 10)$

$y=\frac{1}{5}x$의 그래프와 $y=\frac{20}{x}$의 그래프가 만나는 점을 B, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$\frac{1}{5}b=\frac{20}{b}$에서 $b^2=100$

$\therefore b=10\ (\because b>0)\qquad \therefore \mathrm{B}(10, 2)$

(가)

$y=\frac{20}{x}$, 즉 $xy=20\,(2\le x\le10,\ 2\le y\le10)$을 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 2)$

(나)

따라서 $y=\frac{1}{5}x$, $y=5x$의 그래프와 $y=\frac{20}{x}\,(x>0)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 경계 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은

$(0, 0), (1, 5), (2, 10), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (10, 2)$

의 7개이다.

(다)

답 7

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 그래프를 좌표평면 위에 나타내고 두 그래프가 각각 만나는 점의 좌표를 구한 경우	30%
(나)	$y=\frac{20}{x}\,(2\le x\le10)$ 위의 점 중 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 구한 경우	30%
(다)	세 그래프로 둘러싸인 도형의 경계 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구한 경우	40%

12

(1) $\mathrm{A}(3, p)$, $\mathrm{B}(-3, q)\ (p>0,\ q<0)$라 하면 두 점 A, B는 $y=\frac{12}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$p=\frac{12}{3}=4$, $q=\frac{12}{-3}=-4$

$\therefore \mathrm{A}(3, 4), \mathrm{B}(-3, -4)$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times6=12$

(가)

삼각형 OAE의 넓이와 사각형 OBCE의 넓이의 비가 $3:5$이므로

(삼각형 OAE의 넓이)$=$(삼각형 ABC의 넓이)$\times\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}\times$(선분 AE의 길이)$\times3=12\times\frac{3}{8}$

$\therefore$ (선분 AE의 길이)$=3$

따라서 $\mathrm{E}(3, 1)$이고, 점 E가 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로

$1=3a\qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

(나)

(2) $y=\frac{1}{3}x$의 그래프 위의 점 F의 좌표를 $\left(r, \frac{1}{3}r\right)\ (r>0)$이라 하면 점 F는 $y=\frac{12}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{3}r=\frac{12}{r}$

$r^2=36\qquad \therefore r=6\ (\because r>0)$

$\therefore \mathrm{F}(6, 2)$

$\therefore$ (삼각형 AEF의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times$(선분 AE의 길이)$\times(6-3)$

$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

(다)

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$

단계		채점 기준	배점
(1)	(가)	두 점 A, B의 좌표와 삼각형 ABC의 넓이를 구한 경우	20%
	(나)	주어진 넓이의 비를 이용하여 선분 AE의 길이와 상수 a의 값을 구한 경우	50%
(2)	(다)	점 F의 좌표와 삼각형 AEF의 넓이를 구한 경우	30%