정답과 해설

BLACKLABEL

Speed Check

I 다항식

01. 다항식의 연산과 나머지정리

/ 본문 pp.009~019

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 $2x^2-3x+4$	02 ③	03 48	
04 ⑤	05 ⑤	06 ①	07 ②
08 160	09 ①	10 ②	11 17
12 ⑤	13 ④	14 29	15 ②
16 ①	17 2	18 ④	19 ③
20 22	21 ④		

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 51	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ④	06 ③	07 64	08 ③
09 ⑤	10 ①	11 ②	12 3	13 ①	14 5	15 99	16 54
17 ⑤	18 13	19 ②	20 9	21 40	22 41	23 ②	24 ④
25 ③	26 74	27 -6	28 x	29 $4x-1$	30 ③	31 $x+24$	32 ②
33 ④	34 -1	35 -5	36 72				

STEP 3 종합 사고력 문제

01 4	02 24	03 384
04 325	05 34	06 8
07 96	08 $\frac{2}{3}$	09 148
10 6	11 18	12 24

02. 인수분해

/ 본문 pp.021~026

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 ⑤	03 16	04 ④
05 ②	06 1	07 ②	
08 $(x-3y-1)(x-y+2)$			
09 $(x+1)(x+2)(x-1)(x-3)$			
10 ①	11 ④	12 ⑤	13 ③
14 ⑤			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ④	02 31	03 ①	04 ③	05 $(ab+a+1)(ab+b+1)$		06 ⑤
07 59	08 40	09 20	10 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$		11 ③	12 0
13 ②	14 ④	15 14	16 ①	17 ②	18 38	

STEP 3 종합 사고력 문제

01 60	02 ⑤	03 128
04 240	05 ②	06 18

II 방정식과 부등식

03. 복소수

/ 본문 pp.029~037

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ④	02 ④	03 2	04 ②
05 9	06 28	07 ①	08 400
09 1	10 ④	11 ⑤	12 ①
13 ③	14 $-x-2y+5$		

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ④	02 ①	03 15	04 ③	05 $-4+6i$		06 ①	07 13
08 75	09 ①	10 7	11 ⑤	12 240	13 ③	14 19	15 169
16 ④	17 ③	18 16	19 $2+3i$	20 ④	21 0	22 ②	23 5
24 3	25 ①	26 392	27 $4i$	28 ②	29 ④	30 -144	

STEP 3 종합 사고력 문제

01 6	02 60	03 8
04 ⑤	05 6	06 $3(\alpha^3-\beta^3)$
07 1	08 30	09 10
10 ⑤	11 1	12 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

04. 이차방정식

/ 본문 pp.039~048

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ①	02 ④	03 ①	04 ③
05 ④	06 ②	07 5	08 ①
09 ⑤	10 21	11 52	12 ②
13 ④	14 ③	15 ④	16 5
17 -1	18 1	19 ①	20 10
21 ④			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 -2	02 ④	03 ④	04 ③	05 ④	06 ⑤	07 2	08 10
09 20	10 3	11 ②	12 0	13 ④	14 -14	15 ④	16 ①
17 ③	18 13	19 ⑤	20 18	21 ①	22 ③	23 ②	24 ①
25 49	26 33	27 $7-2\sqrt{6}$		28 190	29 2	30 ②	

STEP 3 종합 사고력 문제

01 2	02 2	03 -12
04 -30	05 26	06 34
07 ③	08 8	09 $-\frac{3}{4}$
10 50	11 $2+\sqrt{5}$	12 21

05. 이차방정식과 이차함수

/ 본문 pp.050~059

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ②　02 8　03 ②　04 ⑤
05 ③　06 21　07 ④　08 ①
09 ②　10 -1　11 ③
12 $1<a<2$　13 ③　14 ④
15 2　16 55　17 4　18 ①
19 ④　20 ④　21 200

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 -16　02 ①　03 ③　04 ⑤　05 10　06 1　07 6　08 ④
09 ②　10 ①　11 $\frac{80}{7}$　12 45　13 ①　14 4　15 ③　16 ④
17 -2　18 ①　19 ⑤　20 ②　21 ④　22 3　23 3　24 ②
25 ②　26 46　27 9　28 ③　29 120 m　30 54

STEP 3 종합 사고력 문제

01 4　02 $\frac{13}{4}$　03 ③
04 12　05 7　06 ③
07 ③　08 24　09 $10\sqrt{5}$
10 $2\sqrt{6}$　11 54

06. 여러 가지 방정식

/ 본문 pp.061~070

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ②　02 ②　03 ④
04 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$(중근)　05 4
06 ⑤　07 ③　08 ⑤　09 6
10 ⑤　11 ②　12 ③　13 3
14 ①　15 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
16 ④　17 ③　18 ①　19 ②
20 7　21 ①

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 18　02 84　03 9　04 $-\frac{31}{4}$　05 ⑤　06 ②　07 $\frac{13}{3}$　08 ⑤
09 ③　10 ⑤　11 -4　12 ①　13 ②　14 -208　15 ③
16 $a=6$, $b=-\frac{3}{2}$　17 12　18 ④　19 ⑤　20 ②　21 ①　22 23
23 164　24 16　25 -1　26 ②　27 ④　28 ③　29 2　30 4

STEP 3 종합 사고력 문제

01 11　02 -100　03 17
04 252　05 -4　06 21
07 45　08 6　09 46
10 x의 최댓값: $\frac{7}{3}$, $y=z=\frac{4}{3}$
11 갑: $200\sqrt{3}$ m/분, 을: $250\sqrt{3}$ m/분
12 88

07. 여러 가지 부등식

/ 본문 pp.073~084

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ④　02 ⑤　03 ②　04 12
05 ①　06 ③　07 $a\le\frac{1}{2}$
08 1 cm 이상 2 cm 이하　09 ③
10 ④　11 $a>\frac{3}{2}$　12 6　13 ②
14 ④　15 5　16 ③　17 ①
18 ④　19 ②　20 ⑤　21 ④

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ②　02 ⑤　03 ②　04 $\frac{6}{5}<x\le\frac{15}{11}$　05 ①　06 2　07 150
08 ③　09 ④　10 $a>-2$　11 $x<a$ 또는 $x>b$　12 9　13 ⑤
14 4　15 ①　16 14　17 ②　18 ④　19 $-3\le m<2$　20 ①
21 9　22 ④　23 ③　24 5　25 2　26 15　27 1　28 ④
29 $a\le x\le b$　30 ②　31 8　32 13　33 $3+\sqrt{3}$　34 $\frac{1}{2}\le a\le 1$
35 ②　36 15　37 5　38 12　39 ①　40 ③　41 ②　42 ①

STEP 3 종합 사고력 문제

01 10　02 6　03 $a>b$
04 ⑤　05 5　06 5
07 21　08 $1+\sqrt{3}<x<3$
09 $0\le a<\frac{1}{4}$
10 15　11 $-\frac{9}{4}$
12 $\frac{2}{3}<p<1$ 또는 $1<p\le\frac{4}{3}$

Speed Check

Ⅲ 경우의 수

08. 순열과 조합

/ 본문 pp.087~097

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 40	02 ④	03 ③	04 ①
05 ④	06 ④	07 ②	08 ②
09 12	10 1200	11 ④	12 40
13 ③	14 ②	15 126	16 ②
17 ④	18 420	19 ③	20 ①
21 ③			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 12	02 ③	03 10	04 9	05 135	06 ②	07 ⑤	08 ④
09 660	10 ④	11 4320	12 144	13 72	14 192	15 1008	
16 풀이 참조		17 12	18 ③	19 175	20 ①	21 ②	22 ③
23 ③	24 252	25 ②	26 ②	27 3600	28 130	29 432	30 35
31 ④	32 82	33 900	34 30	35 ④			

STEP 3 종합 사고력 문제

01 16	02 53	03 944
04 266	05 9번	06 9
07 20	08 504	09 60
10 594	11 860	12 4235

Ⅳ 행렬

09. 행렬과 그 연산

/ 본문 pp.101~111

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ④	02 ②	03 4	04 0
05 ③	06 ①	07 ①	08 ①
09 ②	10 12	11 $6\sqrt{5}$	12 -2
13 250	14 ③	15 ④	16 ①
17 ③	18 ③	19 ④	20 7
21 ⑤			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ③	02 5	03 ④	04 8	05 ②	06 ⑤	07 ②	08 60
09 ④	10 ②	11 ②	12 3	13 ⑤	14 26	15 ⑤	16 ③
17 ⑤	18 8	19 ③	20 ④	21 10	22 2	23 16	24 A
25 ①	26 ①	27 63	28 6	29 ①	30 16	31 3	32 5
33 5	34 3	35 ④	36 -1				

STEP 3 종합 사고력 문제

01 10	02 11	03 3
04 18000원		05 288
06 12	07 2	08 146
09 86	10 ④	11 1003

I 다항식

01. 다항식의 연산과 나머지정리

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.9~11

01 $2x^2-3x+4$		02 ③	03 48	04 ⑤
05 ⑤	06 ①	07 ②	08 160	09 ①
10 ②	11 17	12 ⑤	13 ④	14 29
15 ②	16 ①	17 2	18 ④	19 ③
20 22	21 ④			

01 $A-2B=3x^2-5x+5$ ······㉠
$2A+B=x^2+5$ ······㉡
㉠$+2\times$㉡을 하면
$5A=5x^2-5x+15$
$\therefore A=x^2-x+3$ ······㉢
㉢을 ㉡에 대입하면
$2(x^2-x+3)+B=x^2+5$이므로
$B=-2(x^2-x+3)+x^2+5$
$=-x^2+2x-1$
$\therefore A-B=(x^2-x+3)-(-x^2+2x-1)$
$=2x^2-3x+4$ 답 $2x^2-3x+4$

• 다른 풀이 •

두 실수 a, b에 대하여
$a(A-2B)+b(2A+B)=A-B$라 하면
$(a+2b)A+(-2a+b)B=A-B$
$\therefore a+2b=1,\ -2a+b=-1$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=\frac{3}{5},\ b=\frac{1}{5}$
$\therefore A-B=\frac{3}{5}(A-2B)+\frac{1}{5}(2A+B)$
$=\frac{3}{5}(3x^2-5x+5)+\frac{1}{5}(x^2+5)$
$=\frac{9}{5}x^2-3x+3+\frac{1}{5}x^2+1$
$=2x^2-3x+4$

02 $(x-2y-1)(3x-y+4)$
$=x(3x-y+4)-2y(3x-y+4)-(3x-y+4)$
$=3x^2-xy+4x-6xy+2y^2-8y-3x+y-4$
$=3x^2+2y^2-7xy+x-7y-4$ 답 ③

03 $A=x^3+x+4$, $B=x+4$에서 $A=x^3+B$이므로
$A^3-B^3=(x^3+B)^3-B^3$
$=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3$
$=x^9+3x^6B+3x^3B^2$
이때 $B=x+4$를 $3x^3B^2$에 대입하면
$3x^3B^2=3x^3(x+4)^2=3x^3(x^2+8x+16)$
$=3x^5+24x^4+48x^3$
따라서 구하는 x^3의 계수는 48이다. 답 48

• 다른 풀이 •

$A=x^3+x+4$, $B=x+4$에서 $A-B=x^3$이므로
$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$
$=x^9+3ABx^3$
따라서 A^3-B^3의 전개식에서 x^3의 계수는
$3\times(AB$의 상수항$)=3\times(4\times4)=48$

04 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x+2$, 나머지가 2이므로
$f(x)=(x^2+1)(x+2)+2$
$=\{(x^2-1)+2\}(x+2)+2$
$=(x^2-1)(x+2)+2(x+2)+2$
$=(x^2-1)(x+2)+2x+6$
따라서 다항식 $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $2x+6$이다. 답 ⑤

• 다른 풀이 1 •

$f(x)=(x^2+1)(x+2)+2$
$=x^3+2x^2+x+2+2$
$=x^3+2x^2+x+4$
이때 $f(x)$를 x^2-1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r}
x+2 \\
x^2-1\,\overline{)\,x^3+2x^2+x+4} \\
\underline{x^3-x} \\
2x^2+2x+4 \\
\underline{2x^2-2} \\
2x+6
\end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $2x+6$이다.

• 다른 풀이 2 •

$f(x)=(x^2+1)(x+2)+2$ ······㉠
$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$ ······㉡
㉠에서 $f(1)=8$, $f(-1)=4$이고
㉡에서 $f(1)=a+b$, $f(-1)=-a+b$이므로
$a+b=8$, $-a+b=4$
두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=6$
따라서 구하는 나머지는 $2x+6$이다.

05 $f(x)=(x-1)Q(x)+R$이므로
$xf(x)+5=x(x-1)Q(x)+Rx+5$

$=x(x-1)Q(x)+R(x-1)+R+5$
$=(x-1)\{xQ(x)+R\}+R+5$
따라서 $xf(x)+5$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $xQ(x)+R$, 나머지는 $R+5$이다. 답 ⑤

06 $a+b+c=3$에서
$a+b=3-c$, $b+c=3-a$, $c+a=3-b$이므로
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(3-c)(3-a)(3-b)$
$=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc$
$=27-9\times3+3\times(-6)-(-8)=-10$ 답 ①

07 $(5+3k)^3=a$, $(5-3k)^3=b$로 놓으면
$\{(5+3k)^3+(5-3k)^3\}^2-\{(5+3k)^3-(5-3k)^3\}^2$
$=(a+b)^2-(a-b)^2$
$=4ab$
$=4(5+3k)^3(5-3k)^3$
$=4\{(5+3k)(5-3k)\}^3$
$=4(25-9k^2)^3=4\times(-2)^3=-32$ 답 ②

08 $x+2y=4$, $x^2+4y^2=32$에서
$(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$
$4^2=32+4xy$ $\quad\therefore xy=-4$
$\therefore x^3+8y^3=(x+2y)^3-3\times x\times2y(x+2y)$
$=4^3-6\times(-4)\times4=160$ 답 160

09 $x^2+\dfrac{4}{x^2}=8$이므로
$\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2-4+\dfrac{4}{x^2}=8-4=4$
$\therefore x-\dfrac{2}{x}=2$ $(\because x>2)$
$\therefore x^3-\dfrac{8}{x^3}=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^3+3\times x\times\dfrac{2}{x}\left(x-\dfrac{2}{x}\right)$
$=2^3+6\times2=8+12=20$ 답 ①

• 다른 풀이 •
인수분해를 이용하면
$x^3-\dfrac{8}{x^3}=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2+2+\dfrac{4}{x^2}\right)$
$=2\times(8+2)$ $\left(\because x-\dfrac{2}{x}=2,\ x^2+\dfrac{4}{x^2}=8\right)$
$=20$

10 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서
$(\sqrt{3})^2=11+2(ab+bc+ca)$, $2(ab+bc+ca)=-8$
$\therefore ab+bc+ca=-4$
한편,
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$에서
$6\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\{11-(-4)\}+3abc$
$3abc=-9\sqrt{3}$
$\therefore abc=-3\sqrt{3}$ 답 ②

11 $x=10^2$이라 하면
$A=(105^2-95^2)(105^3+95^3)$
$=\{(x+5)^2-(x-5)^2\}\{(x+5)^3+(x-5)^3\}$
이때
$(x+5)^2-(x-5)^2=x^2+10x+25-(x^2-10x+25)$
$=20x$
$(x+5)^3+(x-5)^3=x^3+15x(x+5)+5^3+x^3$
$-15x(x-5)-5^3$
$=2x^3+150x$
$\therefore A=20x(2x^3+150x)=40x^4+3000x^2$
$=40\times(10^2)^4+3000\times(10^2)^2$
$=4\times10^9+3\times10^7$
$=403\times10^7$
따라서 자연수 A는 10자리 자연수이므로 $n=10$이고, 자연수 A의 모든 자리의 숫자의 합은
$S=4+3=7$
$\therefore n+S=10+7=17$ 답 17

12 직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면 직육면체의 겉넓이는 84이므로
$2(xy+yz+zx)=84$ $\quad\therefore xy+yz+zx=42$
직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 52이므로
$4(x+y+z)=52$ $\quad\therefore x+y+z=13$
$\therefore \overline{AF}^2+\overline{FC}^2+\overline{CA}^2$
$=(x^2+z^2)+(y^2+z^2)+(x^2+y^2)$
$=2(x^2+y^2+z^2)$
$=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}$
$=2\times(169-84)$
$=2\times85=170$ 답 ⑤

13 $\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}=k$ ($k\neq0$인 상수)라 하면
$x^2+2ax+1=kbx^2-4kx-k$
위의 등식은 x에 대한 항등식이므로
$1=kb$, $2a=-4k$, $1=-k$
$\therefore k=-1$, $a=2$, $b=-1$
$\therefore a+b=2+(-1)=1$ 답 ④

• 다른 풀이 •
$\dfrac{x^2+2ax+1}{bx^2-4x-1}$ ……㉠
실수 x의 값에 관계없이 ㉠의 값이 항상 일정하므로 ㉠에 $x=0$을 대입하면 ㉠의 값은 -1로 일정하다.
㉠에 $x=1$을 대입하면
$\dfrac{2a+2}{b-5}=-1$ $\quad\therefore 2a+b=3$ ……㉡

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$\dfrac{2-2a}{b+3}=-1$ $\therefore 2a-b=5$ ⋯⋯㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

14 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$1-3+6=b\times(-1)\times(-2)$ $\therefore b=2$

양변에 $x=2$를 대입하면

$4-6+6=c\times(-1)\times1$ $\therefore c=-4$

양변에 $x=3$을 대입하면

$9-9+6=a\times2\times1$ $\therefore a=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3^2+2^2+(-4)^2=29$ 답 29

• 다른 풀이 •

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

x^2-3x+6

$=a(x^2-3x+2)+b(x^2-5x+6)+c(x^2-4x+3)$

$=(a+b+c)x^2-(3a+5b+4c)x+2a+6b+3c$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b+c=1$, $3a+5b+4c=3$, $2a+6b+3c=6$

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3a+5b+4c=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2a+6b+3c=6 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉡$-3\times$㉠을 하면 $2b+c=0$ ⋯⋯㉣

㉢$-2\times$㉠을 하면 $4b+c=4$ ⋯⋯㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $b=2$, $c=-4$

$b=2$, $c=-4$를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=3^2+2^2+(-4)^2=29$

15 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$\left(\dfrac{7}{9}\right)^{20}=a_0+\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+\dfrac{a_3}{3^3}+\cdots+\dfrac{a_{40}}{3^{40}}$ ⋯⋯㉠

양변에 $x=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$\left(\dfrac{1}{9}\right)^{20}=a_0-\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}-\dfrac{a_3}{3^3}+\cdots+\dfrac{a_{40}}{3^{40}}$ ⋯⋯㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\left(\dfrac{7}{9}\right)^{20}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{20}=2\left(\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{3^3}+\cdots+\dfrac{a_{39}}{3^{39}}\right)$

$\therefore \dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{3^3}+\dfrac{a_5}{3^5}+\cdots+\dfrac{a_{39}}{3^{39}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7^{20}-1}{9^{20}}$

$=\dfrac{7^{20}-1}{2\times3^{40}}$ 답 ②

16 다항식 $f(x)$를 $x-11$로 나누었을 때의 나머지가 15279이므로 나머지정리에 의하여

$f(11)=a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times10+e$

$=15279$

이때 a, b, c, d, e는 10보다 작은 자연수이므로

$a=1$, $b=5$, $c=2$, $d=7$, $e=9$

$\therefore f(x)=(x-1)^4+5(x-1)^3+2(x-1)^2$

$+7(x-1)+9$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(-1)$

$=(-2)^4+5\times(-2)^3+2\times(-2)^2+7\times(-2)+9$

$=-21$ 답 ①

17 다항식 $P(x)$를 x^2+x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-2)Q(x)+ax+b$ ⋯⋯㉠

이때 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -1이고, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -6이므로 나머지정리에 의하여

$P(2)=-1$, $P(-3)=-6$

$x=2$, $x=-3$을 ㉠에 각각 대입하면

$P(2)=2a+b=-1$, $P(-3)=-3a+b=-6$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $R(x)=x-3$이므로

$R(5)=5-3=2$ 답 2

18 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 16이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)=8+12+2a+b=16$

$\therefore 2a+b=-4$ ⋯⋯㉠

또한, 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=-1+3-a+b=-2$

$\therefore a-b=4$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-4$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-4$ ⋯⋯㉢

이때 $100=x$로 놓으면 $98=x-2$이므로

㉢에서

$f(x-2)=(x-2)^3+3(x-2)^2-4$

$=x^3-3x^2$

이 식에 $x=100$을 대입하면

$f(98)=100^3-3\times100^2=970000$

따라서 $f(98)$은 6자리 자연수이므로

$n=6$ 답 ④

• 다른 풀이 •

㉢에서 $f(x)=x^3+3x^2-4$

이때 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$
$\quad =(x-1)(x+2)^2$
$\therefore f(98)=97\times100^2=970000$
따라서 $f(98)$은 6자리 자연수이므로
$n=6$

19 다항식 $f(x+3)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(-2+3)=0 \qquad \therefore f(1)=0$
$f(x)=ax^4-3x^2+(a-1)x-4$에서
$f(1)=a-3+(a-1)-4=0$
$2a-8=0 \qquad \therefore a=4$ 답 ③

20 다항식 $f(x)$가 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(1)=0,\ f(2)=0$
$f(x)$가 삼차다항식이므로 $4-f(x)$를 x^2으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면
$4-f(x)=x^2(ax+b)$ ……㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$4-f(1)=a+b \qquad \therefore a+b=4$ ……㉡
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$4-f(2)=4(2a+b) \qquad \therefore 2a+b=1$ ……㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=7$
이것을 ㉠에 대입하면
$4-f(x)=x^2(-3x+7)$
$f(x)=-x^2(-3x+7)+4=3x^3-7x^2+4$
$\therefore f(3)=81-63+4=22$ 답 22

21 주어진 등식에서 $x-1=t$로 놓으면
$2t^3-3t-1=a(t-1)^3+b(t-1)^2+c(t-1)+d$ ……㉠
조립제법을 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ & & 2 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & -1 & \boxed{-2} \\ & & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & \boxed{3} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 2 & \boxed{6} & & \end{array}$$

$2t^3-3t-1$을 $t-1$에 대한 내림차순으로 정리하면
$2t^3-3t-1=(t-1)[(t-1)\{2(t-1)+6\}+3]-2$
$\qquad =2(t-1)^3+6(t-1)^2+3(t-1)-2$
따라서 $a=2,\ b=6,\ c=3,\ d=-2$이므로
$a+b+c-d=2+6+3-(-2)=13$ 답 ④

• 다른 풀이 •
㉠이 t에 대한 항등식이므로 양변에 $t=1$을 대입하면
$2-3-1=d \qquad \therefore d=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$2t^3-3t-1=a(t-1)^3+b(t-1)^2+c(t-1)-2$
$2t^3-3t+1=a(t-1)^3+b(t-1)^2+c(t-1)$
이때 $2t^3-3t+1=(t-1)(2t^2+2t-1)$로 인수분해되므로
$(t-1)(2t^2+2t-1)=(t-1)\{a(t-1)^2+b(t-1)+c\}$
$\therefore 2t^2+2t-1=a(t-1)^2+b(t-1)+c$ ……㉡
㉡도 t에 대한 항등식이므로 양변에 $t=1$을 대입하면
$2+2-1=c \qquad \therefore c=3$
이것을 ㉡에 대입하면
$2t^2+2t-1=a(t-1)^2+b(t-1)+3$
$2t^2+2t-4=a(t-1)^2+b(t-1)$
$(t-1)(2t+4)=(t-1)\{a(t-1)+b\}$
$\therefore 2t+4=a(t-1)+b$
즉, $2t+4=at-a+b$가 t에 대한 항등식이므로
$a=2,\ -a+b=4 \qquad \therefore a=2,\ b=6$
$\therefore a+b+c-d=2+6+3-(-2)=13$

BLACKLABEL 특강 참고

주어진 등식의 좌변을 곱셈 공식을 이용하여 전개한 다음, 조립제법을 이용해도 된다. 즉,
$2(x-1)^3-3(x-1)-1=2(x^3-3x^2+3x-1)-3(x-1)-1$
$\qquad =2x^3-6x^2+3x$
이므로 $2x^3-6x^2+3x$를 조립제법을 이용하여 $x-2$에 대한 내림차순으로 정리한 후, a, b, c, d의 값을 구할 수도 있다.

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.12~17

01 51	02 ⑤	03 ①	04 ⑤	05 ④
06 ③	07 64	08 ③	09 ⑤	10 ①
11 ②	12 3	13 ①	14 5	15 99
16 54	17 ⑤	18 13	19 ②	20 9
21 40	22 41	23 ②	24 ④	25 ③
26 74	27 -6	28 x	29 $4x-1$	30 ③
31 $x+24$	32 ②	33 ④	34 -1	35 -5
36 72				

01 $3A-B=(x-3)(x^2+3x+9)=x^3-27$ ……㉠
$A+B=(x-5)(x+5)=x^2-25$ ……㉡
㉠+㉡을 하면
$4A=(x^3-27)+(x^2-25)=x^3+x^2-52$
$\therefore A=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2-13$

㉡에서

$B=(x^2-25)-A$

$\quad=(x^2-25)-\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2-13\right)$

$\therefore\ B=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-12$

$X+5A=B$에서

$X=-5A+B$

$\quad=-5\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2-13\right)+\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-12\right)$

$\quad=-\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+53$

따라서 구하는 합은

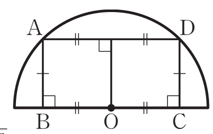
$-\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+53=51$ **답** 51

02

직사각형 ABCD에서

$\overline{AB}=\overline{CD}$이고, $\overline{DA}=\overline{BC}=2\overline{OC}$

이므로 조건 ㈏에서



$\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BO}=2\overline{OC}+\overline{CD}+\overline{OC}$

$\qquad\qquad\qquad=3\overline{OC}+\overline{CD}$

$\therefore\ 3\overline{OC}+\overline{CD}=3x+y+5$ ……㉠

조건 ㈎에서 $\overline{OC}+\overline{CD}=x+y+3$ ……㉡

㉠－㉡을 하면

$2\overline{OC}=2x+2 \qquad \therefore\ \overline{OC}=x+1$

이것을 ㉡에 대입하면

$(x+1)+\overline{CD}=x+y+3 \qquad \therefore\ \overline{CD}=y+2$

$\therefore\ \square ABCD=\overline{BC}\times\overline{CD}=2\overline{OC}\times\overline{CD}$

$\qquad\qquad=2(x+1)(y+2)$ **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

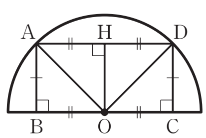
반원의 중심 O에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{OA}$, $\overline{OD}$를 그으면

$\triangle OHA\equiv\triangle OHD$이므로

$\overline{AH}=\overline{DH}$

또한, $\triangle ODH\equiv\triangle DOC$,

$\triangle OAH\equiv\triangle AOB$이므로 $\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{AH}=\overline{DH}$



03

다항식 $f(x)$를 x^2+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로

$f(x)=(x^2+2)Q(x)+x+2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2$

$=(x^2+2)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+2)(x+2)Q(x)+(x+2)^2$

$=(x^2+2)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+2)(x+2)Q(x)$

$\qquad+(x^2+2)+4x+2$

$=(x^2+2)[(x^2+2)\{Q(x)\}^2+2(x+2)Q(x)+1]$

$\qquad+4x+2$

따라서 $\{f(x)\}^2$을 x^2+2로 나누었을 때의 나머지는 $4x+2$이므로

$R(x)=4x+2$

$\therefore\ R(2)=4\times2+2=10$ **답** ①

04

ㄱ. $f(x)=(1+x-x^2+x^3-x^4)^2$

$\quad=(1+x-x^2+x^3-x^4)\times(1+x-x^2+x^3-x^4)$

에서 x^6항이 나오는 경우만 계산하면

$(-x^2)\times(-x^4)+x^3\times x^3+(-x^4)\times(-x^2)$

$=x^6+x^6+x^6=3x^6$

따라서 x^6항의 계수는 3이다. (참)

ㄴ. $1+x-x^2+x^3-x^4=g(x)$라 하면

$g(x)=(-x^4-x^2)+(x^3+x)+1$

$\quad=-x^2(x^2+1)+x(x^2+1)+1$

$\quad=(x^2+1)(-x^2+x)+1$

$\therefore\ f(x)=\{g(x)\}^2$

$\quad=\{(x^2+1)(-x^2+x)+1\}^2$

$\quad=\{(x^2+1)(-x^2+x)\}^2$

$\qquad+2(x^2+1)(-x^2+x)+1$

$\quad=(x^2+1)\{(x^2+1)(-x^2+x)^2$

$\qquad+2(-x^2+x)\}+1$

따라서 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $R(0)=1$ (참)

ㄷ. $g(x)$를 x^2-2x+2로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & -x^2-x-1 \\ \hline
x^2-2x+2 & -x^4+x^3-x^2+x+1 \\
 & -x^4+2x^3-2x^2 \\ \hline
 & -x^3+x^2+x \\
 & -x^3+2x^2-2x \\ \hline
 & -x^2+3x+1 \\
 & -x^2+2x-2 \\ \hline
 & x+3
\end{array}
$$

$\therefore\ g(x)=(x^2-2x+2)(-x^2-x-1)+x+3$

이때 $x^2-2x+2=A$, $-x^2-x-1=B$로 놓으면

$f(x)=\{g(x)\}^2$

$\quad=\{AB+(x+3)\}^2$

$\quad=A^2B^2+2AB(x+3)+(x+3)^2$

$\quad=A\{AB^2+2B(x+3)\}+(x+3)^2$

따라서 다항식 $f(x)=\{g(x)\}^2$을 x^2-2x+2로 나누었을 때의 나머지는 $(x+3)^2$을 x^2-2x+2로 나누었을 때의 나머지와 같다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

05

조건 ㈎에서 x, y, z 중 적어도 하나는 1이므로 조건 ㈏의 등식 $x+y+z=x^2+y^2+z^2$에 $x=1$ 또는 $y=1$ 또는 $z=1$을 대입하여도 일반성을 잃지 않는다.

$x+y+z=x^2+y^2+z^2$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+y+z=1+y^2+z^2 \qquad \therefore\ y+z=y^2+z^2$

$xyz=\frac{3}{8}$에서 $yz=\frac{3}{8}$

$y^2+z^2=(y+z)^2-2yz$이므로 $y+z=(y+z)^2-\frac{3}{4}$

이때 $y+z=t$로 놓으면 $t=t^2-\frac{3}{4}$, $t^2-t-\frac{3}{4}=0$

$4t^2-4t-3=0$, $(2t+1)(2t-3)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

실수 y, z에 대하여 $t=y+z=y^2+z^2\ge 0$이므로 $t=\frac{3}{2}$

따라서 $x=1$, $y+z=\frac{3}{2}$이므로

$x+y+z=\frac{5}{2}$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 참고

(ⅰ) $x=y=z=1$이면 $xyz\ne\frac{3}{8}$

(ⅱ) $x=y=1$이면 $1+1+z=1^2+1^2+z^2$ ($\because$ 조건 (나))

$z^2-z=0$, $z(z-1)=0$ $\therefore z=0$ 또는 $z=1$

즉, $xyz=0$ 또는 $xyz=1$이므로 $xyz\ne\frac{3}{8}$

같은 방법으로 $x=z=1$이면 $xyz\ne\frac{3}{8}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 세 실수 x, y, z 중 1인 것은 오직 하나만 존재한다.

06

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$이므로

$7=4^2-3xy$, $-3xy=-9$ $\therefore xy=3$

즉, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-4\times3=4$이므로

$x-y=2$ ($\because x>y$)

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\times3\times2$

$=8+18=26$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$xy=3$이므로

$(x-y)^2=(x^2-xy+y^2)-xy=7-3=4$

$\therefore x-y=2$ ($\because x>y$)

$\therefore x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)(x^2-xy+y^2+2xy)$

$=2\times(7+2\times3)=26$

07

$x+\frac{1}{x}=4$에서

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$

이때 $x<1$이므로 $x-\frac{1}{x}<0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=-2\sqrt{3}$

$\therefore x+x^2+x^3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

$=-2\sqrt{3}+14+52=66-2\sqrt{3}$

따라서 $p=66$, $q=-2$이므로

$p+q=66+(-2)=64$ 답 64

08

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(\sqrt{3})^2=1+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=1$

이때 $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=1-1=0$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

이때 a, b, c는 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$ $\therefore a=b=c$

즉, $a+b+c=\sqrt{3}$에서 $3a=\sqrt{3}$이므로

$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore abc=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{27}=\frac{\sqrt{3}}{9}$ 답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

다음은 문제에서 자주 활용되는 공식이므로 잘 기억해두도록 하자.

$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\{(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\}$

(복부호 동순)

09

$x+y+z=4$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(4-z)(4-x)(4-y)$

$=64-16(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-xyz$

$=4(xy+yz+zx)-xyz$ ······㉠

또한,

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=16-2(xy+yz+zx)$

이고, $x^3+y^3+z^3=7$이므로

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

에서

$4\{16-3(xy+yz+zx)\}=7-3xyz$

$64-12(xy+yz+zx)=7-3xyz$

$\therefore xyz=4(xy+yz+zx)-19$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=4(xy+yz+zx)-4(xy+yz+zx)+19$

$=19$ 답 ⑤

10

$x^2=6+2\sqrt{5}$, $y^2=6-2\sqrt{5}$이므로

$x^2y^2=(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})=6^2-(2\sqrt{5})^2=16$

$\therefore xy=4$ ($\because x>0$, $y>0$)

$x^2+y^2=(6+2\sqrt{5})+(6-2\sqrt{5})=12$이므로

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=12+2\times4=20$

$\therefore x+y=2\sqrt{5}$ ($\because x>0$, $y>0$)

$x^2-y^2=(6+2\sqrt{5})-(6-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$에서

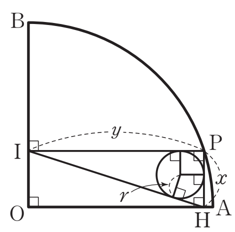
$(x+y)(x-y)=4\sqrt{5}$ $\therefore x-y=2$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$\quad=2^3+3\times4\times2$
$\quad=32$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\quad=(2\sqrt{5})^3-3\times4\times2\sqrt{5}$
$\quad=40\sqrt{5}-24\sqrt{5}=16\sqrt{5}$
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$이므로
$12\times16\sqrt{5}=x^5+y^5+16\times2\sqrt{5}$
$\therefore x^5+y^5=160\sqrt{5}$
$\therefore \dfrac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{x^5+y^5}=\dfrac{32\times16\sqrt{5}}{160\sqrt{5}}=\dfrac{16}{5}$ 답 ①

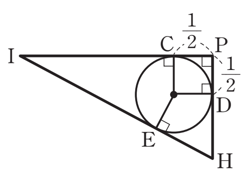
BLACKLABEL 특강 참고

x, y가 양수이고,
$x^2=6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$, $y^2=6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-1)^2$
이므로 $x=\sqrt{5}+1$, $y=\sqrt{5}-1$이다.

11 오른쪽 그림과 같이



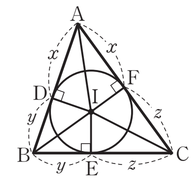
$\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하자.
□OHPI는 직사각형이고, $\overline{OP}$의 길이, 즉 부채꼴의 반지름의 길이가 4이므로
$\overline{OP}=\overline{HI}=\sqrt{x^2+y^2}=4$에서
$x^2+y^2=16$ ……㉠
직각삼각형 PIH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면
$\pi r^2=\dfrac{\pi}{4}$ $\quad\therefore r=\dfrac{1}{2}$ ($\because r>0$)
직각삼각형 PIH에 내접하는 원의 중심에서 삼각형의 세 변 IP, PH, HI에 내린 수선의 발을 각각 C, D, E라 하면 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$이므로



$\overline{CP}=\overline{DP}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore \overline{CI}=y-\dfrac{1}{2}$, $\overline{DH}=x-\dfrac{1}{2}$
$\overline{CI}=\overline{EI}$, $\overline{DH}=\overline{EH}$이고 $\overline{IH}=\overline{IE}+\overline{EH}$이므로
$4=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad\therefore x+y=5$ ……㉡
이때 $(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$이므로
$5^2-2xy=16$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$2xy=9$
$\therefore xy=\dfrac{9}{2}$
$\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=x^3+y^3$
$\quad=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$\quad=5^3-3\times\dfrac{9}{2}\times5$
$\quad=\dfrac{115}{2}$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 내접원과 접선의 길이
△ABC의 내접원과 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 접점을 각각 D, E, F라 하면
$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$



BLACKLABEL 특강 해결 실마리

도형이 제시된 문항의 경우, 보조선을 이용하면 식으로 표현해야 하는 조건을 명확히 할 수 있다. 이때 중학교 수학에서 배운 도형의 성질이 자주 이용되므로 그 성질을 잘 기억하고 있도록 하자.

12 $2x-y=1$에서 $y=2x-1$
위의 식을 $ax^2+by^2+2x-3y+c=0$에 대입하면
$ax^2+b(2x-1)^2+2x-3(2x-1)+c=0$
$\therefore (a+4b)x^2-4(b+1)x+b+c+3=0$ ……㉠
㉠은 x에 대한 항등식이므로
$a+4b=0$, $b+1=0$, $b+c+3=0$
$\therefore a=4$, $b=-1$, $c=-2$
$\therefore a-b+c=4-(-1)+(-2)=3$ 답 3

13 $f(x)=x^3+9x^2+4x-45$에서
$f(x+a)=(x+a)^3+9(x+a)^2+4(x+a)-45$
$\quad=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+9x^2+18ax+9a^2+4x+4a-45$
$\quad=x^3+(3a+9)x^2+(3a^2+18a+4)x+a^3+9a^2+4a-45$
이때 $f(x+a)=x^3+bx-3$이 x에 대한 항등식이므로
$3a+9=0$, $3a^2+18a+4=b$, $a^3+9a^2+4a-45=-3$
$\therefore a=-3$, $b=-23$
$\therefore a+b=-3+(-23)=-26$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$f(x+a)=x^3+bx-3$에서 x 대신에 $x-a$를 대입하면
$f(x)=(x-a)^3+b(x-a)-3$
$\quad=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+bx-ab-3$
$\quad=x^3-3ax^2+(3a^2+b)x-a^3-ab-3$
이때 $f(x)=x^3+9x^2+4x-45$이므로
$-3a=9$, $3a^2+b=4$, $-a^3-ab-3=-45$
$\therefore a=-3$, $b=-23$
$\therefore a+b=-3+(-23)=-26$

14 $P_n(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-n)$이므로
$P_1(x)=x-1$
$P_2(x)=(x-1)(x-2)$
$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
등식 $P_2(x^2)-x^4=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$에서

$(\text{좌변})=P_2(x^2)-x^4$
$=(x^2-1)(x^2-2)-x^4$
$=-3x^2+2$
$(\text{우변})=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$
$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$
$+d(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore\ -3x^2+2$
$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$
$+d(x-1)(x-2)(x-3)$ ……㉠
㉠의 양변에
$x=1$을 대입하면 $a=-1$
$x=2$를 대입하면
$-10=a+b \qquad \therefore\ b=-9$
$x=3$을 대입하면
$-25=a+2b+2c,\ 2c=-6 \qquad \therefore\ c=-3$
$x=0$을 대입하면
$2=a-b+2c-6d,\ 6d=0 \qquad \therefore\ d=0$
$\therefore\ a-b+c-d=-1-(-9)+(-3)-0=5$ 답 5

15 주어진 조립제법을 이용하여 $x^{100}-1$을 $x-1$에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^{100}-1=a_{100}(x-1)^{100}+a_{99}(x-1)^{99}+\cdots$
$+a_1(x-1)+a_0$ ……㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{100}-1=a_{100}+a_{99}+a_{98}+\cdots+a_1+a_0$ ……㉡
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-1=a_{100}-a_{99}+a_{98}-a_{97}+\cdots-a_1+a_0$ ……㉢
㉡+㉢을 하면
$2^{100}-2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100})$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$
$\therefore\ n=99$ 답 99

16 $f\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)=x^3-2+\dfrac{1}{x^3}$
$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2$
$=\left\{\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)+2\right\}^3$
$-3\left\{\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)+2\right\}-2$
$x-2+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면
$f(t)=(t+2)^3-3(t+2)-2=t^3+6t^2+9t$
이 함수가 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$과 일치하므로
$p=6,\ q=9,\ r=0$
$\therefore\ pq+r=6\times9+0=54$ 답 54

• 다른 풀이 •

$f\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right)=x^3-2+\dfrac{1}{x^3}$이 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 등식의 양변에
$x=1$을 대입하면 $f(0)=1-2+1=0$
$x=-1$을 대입하면 $f(-4)=-1-2-1=-4$
$x=2$를 대입하면 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^3-2+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{49}{8}$
$f(x)=x^3+px^2+qx+r$에서
$f(0)=0$이므로 $r=0$
$f(-4)=-4$이고 $r=0$이므로
$-64+16p-4q=-4$
$16p-4q=60 \qquad \therefore\ 4p-q=15$ ……㉠
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{49}{8}$이고 $r=0$이므로
$\dfrac{1}{8}+\dfrac{p}{4}+\dfrac{q}{2}=\dfrac{49}{8}$
$\dfrac{p}{4}+\dfrac{q}{2}=6 \qquad \therefore\ p+2q=24$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=6,\ q=9$
$\therefore\ pq+r=6\times9+0=54$

17 ㄱ. 주어진 등식에서 좌변과 우변의 x^{1000}항의 계수가 같아야 하므로
$a_{1000}=1$ (참)
ㄴ. 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$2^{1000}+7=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{999}+a_{1000}$
$(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{1000})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{999})$
$=2^{1000}+7>0$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{1000}>a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{999}$
(참)
ㄷ. 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{999}+a_{1000}=7$ ……㉠
ㄴ에서
$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{999}+a_{1000}=2^{1000}+7$ ……㉡
㉠+㉡을 하면
$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{1000})=2^{1000}+14$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{1000}=\underbrace{2^{999}}_{\text{짝수}}+7=(\text{홀수})$
즉, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{1000}$의 값은 홀수이다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

18 해결단계

❶ 단계	$f(x)$의 차수를 구한 후, 다항식 $f(x)$의 식을 세운다.
❷ 단계	주어진 등식을 이용하여 $f(0)$, $f(-2)$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	다항식 $f(x)$를 구한 후, $f(1)$의 값을 구한다.

$f(x^2+2x)=x^2f(x)+8x+8$ ……㉠
다항식 $f(x)$를 최고차항의 계수가 $a(a\neq0)$인 n차다항식이라 하면 $f(x)=ax^n+\cdots$ 꼴이다. 즉,
$f(x^2+2x)=a(x^2+2x)^n+\cdots=ax^{2n}+\cdots$
$x^2f(x)+8x+8=ax^{n+2}+\cdots$
이라 할 수 있다.
㉠에서 양변의 최고차항이 일치해야 하므로

$ax^{2n}=ax^{n+2}$
즉, $2n=n+2$에서 $n=2$이므로 다항식 $f(x)$는 이차식이다.
$f(x)=ax^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하자.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=8$이므로
$f(0)=a\times0^2+b\times0+c=8$ $\quad\therefore c=8$
㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$f(0)=4f(-2)-16+8$, $8=4f(-2)-8$
$\therefore f(-2)=4$
$f(-2)=4a-2b+8=4$이므로
$b=2a+2$
즉, $f(x)=ax^2+(2a+2)x+8$이므로
$f(x^2+2x)=a(x^2+2x)^2+(2a+2)(x^2+2x)+8$
$\qquad=ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$ ……㉡
$x^2f(x)+8x+8=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$ ……㉢
㉠에서 ㉡=㉢이므로
$ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$
$=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$4a=2a+2$, $6a+2=8$, $4a+4=8$
$\therefore a=1$
따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로
$f(1)=1+4+8=13$ 답 13

•다른 풀이•

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하자.
$f(x^2+2x)=x^2f(x)+8x+8$의 양변에
$x=0$을 대입하면 $f(0)=8$
$\therefore c=8$
$x=-2$를 대입하면 $f(0)=4f(-2)-8$
$4f(-2)=16$ ($\because f(0)=8$) $\quad\therefore f(-2)=4$
즉, $4a-2b+c=4$에서 $4a-2b=-4$ ($\because c=8$)
$\therefore 2a-b=-2$ ……㉣
$x=1$을 대입하면 $f(3)=f(1)+16$
즉, $9a+3b+c=a+b+c+16$에서
$8a+2b=16$ $\quad\therefore 4a+b=8$ ……㉤
㉣, ㉤을 연립하여 풀면
$a=1$, $b=4$
따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로
$f(1)=1+4+8=13$

19 다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x-3)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2+x+1이므로
$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)Q_1(x)+x^2+x+1$
위의 식의 양변에 $x=2$, $x=4$를 각각 대입하면
$f(2)=7$, $f(4)=21$
다항식 $f(8x)$를 $8x^2-6x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로
$f(8x)=(8x^2-6x+1)Q_2(x)+ax+b$
$\qquad=(4x-1)(2x-1)Q_2(x)+ax+b$ ……㉠
$f(2)=7$이므로 ㉠의 양변에 $x=\frac{1}{4}$을 대입하면
$f(2)=\frac{1}{4}a+b$ $\quad\therefore \frac{1}{4}a+b=7$ ……㉡
$f(4)=21$이므로 ㉠의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면
$f(4)=\frac{1}{2}a+b$ $\quad\therefore \frac{1}{2}a+b=21$ ……㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=56$, $b=-7$
$\therefore a+b=56+(-7)=49$ 답 ②

•다른 풀이•

다항식 $f(x)$를 $(x-2)(x-3)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 x^2+x+1이므로
$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)+x^2+x+1$
위의 식의 양변에 x 대신 $8x$를 대입하면
$f(8x)=(8x-2)(8x-3)(8x-4)Q(8x)$
$\qquad+64x^2+8x+1$
$\qquad=8(4x-1)(8x-3)(2x-1)Q(8x)$
$\qquad+64x^2+8x+1$
$\qquad=8(8x-3)(8x^2-6x+1)Q(8x)$
$\qquad+8(8x^2-6x+1)+56x-7$
$\qquad=(8x^2-6x+1)\{8(8x-3)Q(8x)+8\}+56x-7$
즉, 다항식 $f(8x)$를 $8x^2-6x+1$로 나누었을 때의 나머지가 $56x-7$이므로
$56x-7=ax+b$에서 $a=56$, $b=-7$
$\therefore a+b=56+(-7)=49$

20 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -5이므로
$f(1)+g(1)=-5$ ……㉠
$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 10이므로
$\{f(1)\}^3+\{g(1)\}^3=10$ ……㉡
이때
$\{f(1)\}^3+\{g(1)\}^3$
$=\{f(1)+g(1)\}^3-3f(1)g(1)\{f(1)+g(1)\}$
이므로 ㉠, ㉡을 이 식에 대입하면
$10=-125+15f(1)g(1)$ $\quad\therefore f(1)g(1)=9$
따라서 $f(x)g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)g(1)=9$ 답 9

21 $f(x)$는 x^3의 계수가 2인 삼차다항식이므로 조건 ㈏에서 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $2x+k$(k는 상수)라 할 수 있다.
이때 나머지가 $4(x+1)$이므로
$f(x)=(x+1)^2(2x+k)+4(x+1)$

조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$1^2\times k+4\times1=0 \qquad \therefore k=-4$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(2x-4)+4(x+1)$
$=(x+1)\{(x+1)(2x-4)+4\}$
$=(x+1)(2x^2-2x)$
$=2x(x+1)(x-1)$

즉, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$는

$Q(x)=2x(x+1)$

따라서 $Q(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$Q(4)=2\times4\times5=40$ 답 40

22 $2^5=x$로 놓으면

$2^{2022}+2^{2015}+2^{2009}=2^{5\times404+2}+2^{5\times403}+2^{5\times401+4}$
$=4\times(2^5)^{404}+(2^5)^{403}+16\times(2^5)^{401}$
$=4x^{404}+x^{403}+16x^{401}$

$f(x)=4x^{404}+x^{403}+16x^{401}$이라 하면 $2^{2022}+2^{2015}+2^{2009}$을 31로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 나머지정리에 의하여

$R_1=f(1)=4+1+16=21$ ($\because 0\le R_1<31$)

또한, $2^{2022}+2^{2015}+2^{2009}$을 33으로 나누었을 때의 나머지는 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=4-1-16=-13$

그런데 $0\le R_2<33$이어야 하므로 다항식 $P(x)$에 대하여 $f(x)=(x+1)P(x)-13$이라 하면

$f(32)=33P(32)-13$
$=33\{P(32)-1\}+33-13$
$=33\{P(32)-1\}+20$

$\therefore R_2=20$

$\therefore R_1+R_2=21+20=41$ 답 41

단계	채점 기준	배점
(가)	$2^5=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 다항식 $f(x)$로 변형한 경우	30%
(나)	$f(x)$를 이용하여 R_1의 값을 구한 경우	30%
(다)	$f(x)$를 이용하여 R_2의 값을 구한 경우	30%
(라)	R_1+R_2의 값을 구한 경우	10%

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

치환을 이용하여 수의 나눗셈을 다항식의 나눗셈으로 변형한 후, 나머지를 계산하는 문항이다. 이때 다항식의 나눗셈에서 나머지는 나누는 식보다 차수가 작으면 되므로 나누는 식이 일차식인 경우 나머지는 음수가 나올 수 있다.
그러나 수의 나눗셈에서 $0\le$(나머지)$<$(나누는 수)이므로 수의 나눗셈을 다항식의 나눗셈으로 변형하여 나머지를 계산할 때, 나머지가 음수가 나오면 해당 식을 수의 곱셈식으로 나타낸 후 변형을 통해 범위에 맞는 나머지를 구해야 한다.

23 ㄱ. 다항식 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하면

$xf(x)=(x-2)Q(x)+R$ ……㉠

㉠에 x 대신 $x+2$를 대입하면

$(x+2)f(x+2)=xQ(x+2)+R$ ……㉡

㉠, ㉡에서 다항식 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 다항식 $(x+2)f(x+2)$를 x로 나누었을 때의 몫은 $Q(x+2)$이므로 몫이 같지 않다. (거짓)

ㄴ. ㉠에서 다항식 $xf(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 R, ㉡에서 다항식 $(x+2)f(x+2)$를 x로 나누었을 때의 나머지도 R이므로 나머지가 같다. (참)

ㄷ. 다항식 $f(x)f(-x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $P(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)f(-x)=(x^2-4)P(x)+ax+b$
$=(x+2)(x-2)P(x)+ax+b$

이 식의 양변에

$x=-2$를 대입하면 $f(-2)f(2)=-2a+b$

$x=2$를 대입하면 $f(2)f(-2)=2a+b$

즉, $-2a+b=2a+b$에서 $a=0$

따라서 다항식 $f(x)f(-x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지는 b이므로 일차식이 아니다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

24 다항식 $f(x)=x^2+px+q$를 $x-2a$로 나누었을 때의 나머지가 $4b^2$이므로 나머지정리에 의하여

$f(2a)=4a^2+2ap+q=4b^2$ ……㉠

다항식 $f(x)$를 $x-2b$로 나누었을 때의 나머지가 $4a^2$이므로 나머지정리에 의하여

$f(2b)=4b^2+2bp+q=4a^2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 변끼리 빼면

$4(a^2-b^2)+2p(a-b)=4(b^2-a^2)$

$2p(a-b)=8(b^2-a^2)$

$2p(a-b)=-8(a-b)(a+b)$

$\therefore p=-4(a+b)$ ($\because a\ne b$) ……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$4a^2-8a(a+b)+q=4b^2$

$-4a^2-8ab+q=4b^2$

$\therefore q=4a^2+8ab+4b^2=4(a+b)^2$

따라서 $f(x)=x^2-4(a+b)x+4(a+b)^2$이므로 $f(x)$를 $x-(a+b)$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(a+b)=(a+b)^2-4(a+b)^2+4(a+b)^2$
$=(a+b)^2$ 답 ④

25 다항식 $P(x)$를 $(x^3+2x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^3+2x+1)(x-1)Q(x)+R(x)$ ……㉠

이므로 다항식 $P(x)$를 x^3+2x+1로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$를 x^3+2x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $R(x)$는 삼차 이하의 다항식이고, 다항식 $P(x)$를 x^3+2x+1로 나누었을 때의 나머지가 $3x+1$이므로

$R(x)=a(x^3+2x+1)+3x+1$ (a는 상수)

이라 할 수 있다.

즉, ㉠에서

$$P(x)=(x^3+2x+1)(x-1)Q(x)+a(x^3+2x+1)+3x+1$$

이때 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로 나머지정리에 의하여

$P(1)=4a+4=-4 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $R(x)=-2(x^3+2x+1)+3x+1$이므로

$$R(2)=-2\times(2^3+2\times2+1)+3\times2+1=-19$$

답 ③

26

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $g(x)-2x^2$이고 나머지 $g(x)-2x^2$의 차수는 다항식 $g(x)$의 차수보다 작아야 하므로 다항식 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이다.

즉, $g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 할 수 있다.

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)\{g(x)-2x^2\}+\{g(x)-2x^2\}\\&=\{g(x)-2x^2\}\{g(x)+1\}\\&=(ax+b)(2x^2+ax+b+1)\end{aligned}$$

이때 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{2}x+b\right)\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b+1\right)$

조건 (나)에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=-\frac{9}{4}$이므로

$f(1)=\left(\frac{1}{2}+b\right)\left(2+\frac{1}{2}+b+1\right)=-\frac{9}{4}$

즉, $b^2+4b+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$에서

$b^2+4b+4=0$, $(b+2)^2=0 \qquad \therefore b=-2$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-2\right)\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)$이므로

$f(6)=\left(\frac{1}{2}\times6-2\right)\times\left(2\times6^2+\frac{1}{2}\times6-1\right)=74$ 답 74

27

다항식 $x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n$을 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2^n(x-2)$이므로

$x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$

$\therefore x^n(x^2+px+q)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(4+2p+q)=0$

$2^n\neq0$이므로 $4+2p+q=0$

$\therefore q=-2p-4$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n\{x^2+px+(-2p-4)\}$

$=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

$x^n(x-2)(x+p+2)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

$\therefore x^n(x+p+2)=(x-2)Q(x)+2^n$ ······㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n(2+p+2)=2^n(4+p)=2^n$

$2^n\neq0$이므로 $4+p=1$에서 $p=-3$

$\therefore q=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore pq=(-3)\times2=-6$ 답 -6

단계	채점 기준	배점
(가)	나누는 식과 나머지를 이용하여 등식을 세운 경우	30%
(나)	등식에서 p와 q 사이의 관계식을 구한 경우	40%
(다)	p, q의 값을 각각 구한 후, pq의 값을 계산한 경우	30%

• 다른 풀이 •

㉠에서 x^2+px+q는 $x-2$를 인수로 가져야 하므로

$x^2+px+q=(x-2)\left(x-\frac{q}{2}\right)$ ······㉣

라 할 수 있다.

㉣을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^n\left(x-\frac{q}{2}\right)=(x-2)Q(x)+2^n$

이 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n\left(2-\frac{q}{2}\right)=2^n$, $2-\frac{q}{2}=1 \qquad \therefore q=2$

㉣에서 $p=-2-\frac{q}{2}=-2-\frac{2}{2}=-3$

$\therefore pq=(-3)\times2=-6$

28

해결단계

❶ 단계	$x^{10}-x^{10}=0$임을 이용하여 다항식 $x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x+1$을 다항식 $x^4+x^3+x^2+x+1$이 포함된 식으로 변형한다.
❷ 단계	$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$을 이용하여 ❶ 단계의 식을 다항식 $x^4+x^3+x^2+x+1$이 포함된 식으로 변형한다.
❸ 단계	변형한 식에서 나머지를 구한다.

다항식 $x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x+1$을 다항식 $x^4+x^3+x^2+x+1$이 포함된 식으로 변형하면

$$\begin{aligned}&x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x+1\\&=x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}-x^{10}+x+1\\&=x^{10}(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^{10}-1)+x\\&=x^{10}(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^5-1)(x^5+1)+x\\&=x^{10}(x^4+x^3+x^2+x+1)\\&\quad-(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^5+1)+x\\&=(x^4+x^3+x^2+x+1)\{x^{10}-(x-1)(x^5+1)\}+x\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 x이다. 답 x

29

다항식 $f(x)-x^2+2x$가 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(1)-1+2=0$, $f(3)-9+6=0$

$\therefore f(1)=-1$, $f(3)=3$

다항식 $f(2x^2+1)$을 x^2-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(2x^2+1)=(x^2-x)Q(x)+ax+b$

$=x(x-1)Q(x)+ax+b$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

이때 $f(1)=-1$이므로 $b=-1$

또한, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(3)=a+b$

이때 $f(3)=3$, $b=-1$이므로 $a=4$

따라서 구하는 나머지는 $4x-1$이다. 답 $4x-1$

30 다항식 x^3+4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3+4x^2+ax+b=(x+1)^2Q(x)$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+4-a+b=0$ $\quad\therefore b=a-3$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^3+4x^2+ax+a-3=(x+1)^2Q(x)$

$\underbrace{(x+1)(x^2+3x+a-3)}_{\text{조립제법 이용}}=(x+1)^2Q(x)$

$\therefore x^2+3x+a-3=(x+1)Q(x)$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-3+a-3=0$ $\quad\therefore a=5$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$ 답 ③

• 다른 풀이 1 •

다항식 x^3+4x^2+ax+b를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+p$ (p는 상수)라 하면

$x^3+4x^2+ax+b=(x+1)^2(x+p)$

$=(x^2+2x+1)(x+p)$

$=x^3+(p+2)x^2+(2p+1)x+p$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p+2=4$, $2p+1=a$, $p=b$

$\therefore p=2$, $a=5$, $b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$

• 다른 풀이 2 •

다항식 x^3+4x^2+ax+b가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법을 반복하여 이용하였을 때, 나머지가 모두 0이어야 한다.

$$\begin{array}{r|rrrl}
-1 & 1 & 4 & a & b \\
 & & -1 & -3 & 3-a \\
\hline
-1 & 1 & 3 & a-3 & \boxed{3-a+b} \leftarrow 0 \\
 & & -1 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{a-5} \leftarrow 0 &
\end{array}$$

즉, $a-5=0$, $3-a+b=0$이므로 $a=5$, $b=2$

$\therefore a+b=5+2=7$

31 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$에서

$f(0)-0=0$, $f(1)-1=0$, $f(2)-2=0$, $f(3)-3=0$

$F(x)=f(x)-x$라 하면 $F(x)$는 사차다항식이고

$F(0)=0$, $F(1)=0$, $F(2)=0$, $F(3)=0$

즉, $F(x)$는 x, $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $F(x)$의 최고차항의 계수도 1이고

$F(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$

즉, $f(x)-x=x(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+x$ ······㉠

$f(x)$를 x^2-3x-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-3x-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$f(-1)=-a+b=23$, $f(4)=4a+b=28$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=24$

따라서 구하는 나머지는 $x+24$이다. 답 $x+24$

32 ㄱ. $2f(x)+g(x)$와 $f(x)+2g(x)$가 모두 $x-7$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$2f(7)+g(7)=0$, $f(7)+2g(7)=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$f(7)=0$, $g(7)=0$

즉, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-7$로 나누어떨어진다. (거짓)

ㄴ. $f(x)$와 $g(x)$를 $x-7$로 나누었을 때의 몫을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하면

$f(x)=(x-7)F(x)$, $g(x)=(x-7)G(x)$

따라서 $f(x)g(x)=(x-7)^2F(x)G(x)$이므로

$f(x)g(x)$는 $(x-7)^2$으로 나누어떨어진다. (참)

ㄷ. 다항식 $g(f(x))$가 $x-7$로 나누어떨어지려면 인수정리에 의하여 $g(f(7))=0$이어야 한다.

이때 $f(7)=0$이므로 $g(f(7))=g(0)$

그런데 $g(0)$의 값을 알 수 없으므로 다항식 $g(f(x))$는 $x-7$로 나누어떨어진다고 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

33 조건 ㈎에서

$4P(x)+Q(x)=0$, 즉 $Q(x)=-4P(x)$ ······㉠

이므로

$P(x)Q(x)=P(x)\times\{-4P(x)\}=-4\{P(x)\}^2$

조건 ㈏에서 $P(x)Q(x)$를 x^2+x-12로 나누었을 때의 몫을 $A(x)$라 하면

$-4\{P(x)\}^2=(x^2+x-12)A(x)$

$\therefore \{P(x)\}^2=-\frac{1}{4}(x+4)(x-3)A(x)$

이때 $P(x)$가 이차다항식이고 $\{P(x)\}^2$이 $x+4$, $x-3$

을 인수로 가지므로 $P(x)$도 $x+4$, $x-3$을 인수로 가져야 한다. ← $\{P(-4)\}^2=0$, $\{P(3)\}^2=0$이므로 $P(-4)=0$, $P(3)=0$

즉, 0이 아닌 실수 a에 대하여

$P(x)=a(x+4)(x-3)$,

$Q(x)=-4a(x+4)(x-3)$ ($\because$ ㉠)

이라 할 수 있다.

$P(1)=20$이므로

$-10a=20 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $Q(x)=8(x+4)(x-3)$이므로

$Q(2)=8\times6\times(-1)=-48$ 답 ④

• 다른 풀이 •

조건 ㈏에서 $P(x)Q(x)$가 x^2+x-12, 즉 $(x+4)(x-3)$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$P(-4)Q(-4)=0$, $P(3)Q(3)=0$

즉, $P(-4)=0$ 또는 $Q(-4)=0$이고

$P(3)=0$ 또는 $Q(3)=0$

이때 조건 ㈎에서 $4P(x)+Q(x)=0$, 즉

$Q(x)=-4P(x)$를 만족시켜야 하므로

$P(-4)=Q(-4)=0$, $P(3)=Q(3)=0$

$P(x)$, $Q(x)$가 이차다항식이므로 $P(x)$의 이차항의 계수를 a라 하면

$P(x)=a(x+4)(x-3)$, $Q(x)=-4a(x+4)(x-3)$

$P(1)=20$이므로 $-10a=20$

$\therefore a=-2$

따라서 $Q(x)=8(x+4)(x-3)$이므로

$Q(2)=8\times6\times(-1)=-48$

34 다항식 $f(x)-1$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)-1=0$ ……㉠

다항식 $f(x)+1$이 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)+1=0$

$\therefore f(-1)-(-1)=0$ ……㉡

$F(x)=f(x)-x$라 하면 $F(x)$는 최고차항이 $f(x)$와 일치하는 삼차다항식이다.

이때 ㉠, ㉡에서 $F(1)=0$, $F(-1)=0$이므로 다항식 $F(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.

즉, $F(x)=(x-1)(x+1)(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 할 수 있으므로

$f(x)-x=(x-1)(x+1)(ax+b)$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+1)(ax+b)+x$이므로

$f(x)-1=(x-1)(x+1)(ax+b)+x-1$

$\qquad=(x-1)\{(x+1)(ax+b)+1\}$

그런데 $f(x)-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 $x-1$은 $(x+1)(ax+b)+1$의 인수이다.

즉, $x=1$을 $(x+1)(ax+b)+1$에 대입하면

$2(a+b)+1=0$ ……㉢

같은 방법으로

$f(x)+1=(x-1)(x+1)(ax+b)+x+1$

$\qquad=(x+1)\{(x-1)(ax+b)+1\}$

에서 $x+1$은 $(x-1)(ax+b)+1$의 인수이므로

$-2(-a+b)+1=0$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x(x-1)(x+1)+x$

$\therefore f(2)=-\frac{1}{2}\times2\times1\times3+2=-1$ 답 -1

• 다른 풀이 1 •

$f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하자.

삼차다항식 $f(x)-1$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)-1=(x-1)^2(ax+b)$ (단, $a\neq0$, b는 상수)

$\therefore f(x)=(x-1)^2(ax+b)+1$ ……㉤

삼차다항식 $f(x)+1$이 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)+1=(x+1)^2(ax+c)$ (단, c는 상수)

$\therefore f(x)=(x+1)^2(ax+c)-1$ ……㉥

㉤=㉥이므로

$(x-1)^2(ax+b)+1=(x+1)^2(ax+c)-1$

$\therefore ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+1$

$\quad=ax^3+(2a+c)x^2+(a+2c)x+c-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$b-2a=2a+c$, $a-2b=a+2c$, $b+1=c-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=1$

㉤에서 $f(x)=(x-1)^2\left(-\frac{1}{2}x-1\right)+1$

$\therefore f(2)=1^2\times(-1-1)+1=-1$

• 다른 풀이 2 •

삼차다항식 $f(x)-1$이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 몫을 $ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$f(x)-1=(x-1)^2(ax+b)$ ……㉦

$\therefore f(x)+1=(x-1)^2(ax+b)+2$

$\qquad=(x^2-2x+1)(ax+b)+2$

$\qquad=\{(x^2+2x+1)-4x\}(ax+b)+2$

$\qquad=(x+1)^2(ax+b)-4x(ax+b)+2$

$\qquad=(x+1)^2(ax+b)-4a(x+1)^2$

$\qquad\qquad+4(2a-b)x+4a+2$

$\qquad=(x+1)^2(ax+b-4a)$

$\qquad\qquad+4(2a-b)x+4a+2$

이때 삼차다항식 $f(x)+1$이 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$4(2a-b)x+4a+2=0$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$4(2a-b)=0$, $4a+2=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

㉦에서 $f(x)=(x-1)^2\left(-\frac{1}{2}x-1\right)+1$

$\therefore f(2)=1^2\times(-1-1)+1=-1$

35 $(x+7)f(2x)=8xf(x+1)$ ······㉠

$f(x)$를 n차다항식이라 하면 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^n+\cdots$

이라 할 수 있다.

$f(2x)=(2x)^n+\cdots$
$=2^n x^n+\cdots$

$f(x+1)=(x+1)^n+\cdots$
$=x^n+\cdots$

㉠에서 양변의 최고차항이 일치해야 하므로

$x\times 2^n x^n=8x\times x^n$

즉, $2^n=8$에서 $n=3$이므로 다항식 $f(x)$는 삼차식이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$7f(0)=0\times f(1)$

$\therefore f(0)=0$ ······㉡

$x=-1$을 대입하면

$6f(-2)=-8f(0)=0$ ($\because$ ㉡)

$\therefore f(-2)=0$ ······㉢

$x=-3$을 대입하면

$4f(-6)=-24f(-2)=0$ ($\because$ ㉢)

$\therefore f(-6)=0$ ······㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 인수정리에 의하여 $f(x)$는 x, $x+2$, $x+6$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=x(x+2)(x+6)$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1\times1\times5=-5$ 답 -5

단계	채점 기준	배점
㈎	다항식 $f(x)$의 차수를 구한 경우	30%
㈏	인수정리를 이용하여 $f(x)$의 인수를 모두 구한 경우	50%
㈐	$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구한 경우	20%

• 다른 풀이 •

최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 할 수 있다.

$f(2x)=(2x)^3+a(2x)^2+b\times2x$

$f(x+1)=(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)$

이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$(x+7)(8x^3+4ax^2+2bx)$
$=8x\{(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)\}$

$\therefore 8x^4+(56+4a)x^3+(28a+2b)x^2+14bx$
$=8x^4+8(a+3)x^3+8(3+2a+b)x^2+8(a+b+1)x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$56+4a=8(a+3)$, $28a+2b=8(3+2a+b)$, $14b=8(a+b+1)$

$\therefore a=8$, $b=12$

$\therefore f(x)=x^3+8x^2+12x$

따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-1+8-12$
$=-5$

36 다항식 $f(x)$를 $x+3$, x^2+9로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 조건 ㈎에서 나머지가 모두 $3p^2$이므로

$f(x)=(x+3)Q_1(x)+3p^2$
$=(x^2+9)Q_2(x)+3p^2$

즉, $f(x)-3p^2=(x+3)Q_1(x)$,

$f(x)-3p^2=(x^2+9)Q_2(x)$이므로 다항식 $f(x)-3p^2$은 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이고, $x+3$, x^2+9로 나누어떨어진다.

이때

$f(x)=(x+3)(x^2+9)(x+a)+3p^2$ (단, a는 상수)

이라 하면 조건 ㈏에서 $f(1)=f(-1)$이므로

$f(1)=4\times10\times(1+a)+3p^2$
$=40a+40+3p^2$

$f(-1)=2\times10\times(-1+a)+3p^2$
$=20a-20+3p^2$

에서

$40a+40+3p^2=20a-20+3p^2$

$20a=-60$ $\therefore a=-3$

$\therefore f(x)=(x+3)(x-3)(x^2+9)+3p^2$
$=(x^2-9)(x^2+9)+3p^2$
$=x^4-81+3p^2$

한편, 조건 ㈐에서 인수정리에 의하여 $f(\sqrt{p})=0$이므로

$(\sqrt{p})^4-81+3p^2=0$

$4p^2-81=0$, $p^2=\frac{81}{4}$

$\therefore p=\frac{9}{2}$ ($\because p>0$)

$\therefore 16p=16\times\frac{9}{2}=72$ 답 72

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.18~19

01 4	02 24	03 384	04 325	05 34
06 8	07 96	08 $\frac{2}{3}$	09 148	10 6
11 18	12 24			

01 해결단계

❶ 단계	$x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$로 놓고, 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 정리한다.
❷ 단계	곱셈 공식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.
❸ 단계	주어진 식의 값을 구한다.

$x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$로 놓으면

$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)$
$=0$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4$에서

$a^2+b^2+c^2=4$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$0=4+2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-2$

따라서 주어진 식의 값은

$(x-y)^2(y-z)^2+(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2$

$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(-2)^2-2abc\times0=4$ **답** 4

02 해결단계

❶ 단계	주어진 두 식을 변끼리 더하고, 곱하여 a, b에 대한 새로운 식을 얻는다.
❷ 단계	**❶ 단계**에서 구한 식을 이용하여 $a+b$, ab의 값을 구한다.
❸ 단계	곱셈 공식을 이용하여 a^2+ab+b^2의 값을 구한다.

$a+\frac{1}{b}=5+\sqrt{21}$ ······㉠, $b+\frac{1}{a}=5-\sqrt{21}$ ······㉡

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)=(5+\sqrt{21})+(5-\sqrt{21})=10$

$\therefore a+b+\frac{a+b}{ab}=10$ ······㉢

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=(5+\sqrt{21})(5-\sqrt{21})=4$

$ab+\frac{1}{ab}+2=4$

$\therefore ab+\frac{1}{ab}=2$ ······㉣

㉣에서 $ab=t$로 놓으면

$t+\frac{1}{t}=2$에서

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$

$\therefore t=ab=1$

$ab=1$을 ㉢에 대입하여 정리하면

$2(a+b)=10$, $a+b=5$

$\therefore a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$

$=5^2-1=24$ **답** 24

03 해결단계

❶ 단계	등식의 양변에 각각 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 대입한 후 a_0의 값과 홀수차항의 계수의 합을 구한다.
❷ 단계	$(3x^3-2x)^6$에서 차수가 가장 낮은 항이 6차항임을 확인하고 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6의 값과 $a_7+a_9+\cdots+a_{17}$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	**❷ 단계**에서 구한 값을 구하는 식에 대입하여 식의 값을 구한다.

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=0$

양변에 $a_0=0$, $x=1$을 대입하면

$1=a_1+a_2+\cdots+a_{17}+a_{18}$ ······㉠

양변에 $a_0=0$, $x=-1$을 대입하면

$1=-a_1+a_2-\cdots-a_{17}+a_{18}$ ······㉡

㉠−㉡을 하면

$2(a_1+a_3+\cdots+a_{17})=0$

$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{17}=0$ ······㉢

이때 $(3x^3-2x)^6=x^6(3x^2-2)^6$에서 차수가 가장 낮은 항은 $64x^6$이므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$, $a_6=64$

이것을 ㉢에 대입하면

$a_7+a_9+\cdots+a_{17}=0$

$\therefore a_2+4a_4+6a_6-9(a_7+a_9+\cdots+a_{17})$

$=0+4\times0+6\times64-9\times0=384$ **답** 384

04 해결단계

❶ 단계	$x^5+y^5+z^5$을 만들 수 있는 다항식의 곱을 떠올린다.
❷ 단계	주어진 조건을 이용하여 필요한 식의 값을 구한다.
❸ 단계	$x^5+y^5+z^5$의 값을 구한다.

$(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$

$=x^5+y^5+z^5+x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$

$\therefore x^5+y^5+z^5$

$=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$

$-\{x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)\}$ ······㉠

$x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=15$, $xyz=-3$이므로

(i) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$5^2=15+2(xy+yz+zx)$, $2(xy+yz+zx)=10$

$\therefore xy+yz+zx=5$

(ii) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

에서

$5\times(15-5)=x^3+y^3+z^3-3\times(-3)$

$\therefore x^3+y^3+z^3=41$

(iii) $(xy+yz+zx)^2$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

에서

$5^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-3)\times5$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=55$

(iv) $x+y=5-z$, $y+z=5-x$, $z+x=5-y$이므로

$x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$

$=x^2y^2(5-z)+y^2z^2(5-x)+z^2x^2(5-y)$

$=5(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-xyz(xy+yz+zx)$

$=5\times55-(-3)\times5=290$

㉠에서

$x^5+y^5+z^5=15\times41-290=325$ **답** 325

• 다른 풀이 •

$x+y+z=5$, $xy+yz+zx=5$, $xyz=-3$이므로

세 실수 x, y, z를 세 근으로 하는 t에 대한 삼차방정식은

$t^3-5t^2+5t+3=0$ ······㉡

t^5을 t^3-5t^2+5t+3으로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} t^2+5t+20 \\ t^3-5t^2+5t+3 \,\overline{)\, t^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\ t^5-5t^4+5t^3+3t^2 \qquad\qquad \\ \hline 5t^4-5t^3-3t^2 \qquad\qquad \\ 5t^4-25t^3+25t^2+15t \qquad \\ \hline 20t^3-28t^2-15t \qquad \\ 20t^3-100t^2+100t+60 \\ \hline 72t^2-115t-60 \end{array}$$

$\therefore\ t^5$

$=(t^3-5t^2+5t+3)(t^2+5t+20)+72t^2-115t-60$

$=72t^2-115t-60\ (\because\ t^3-5t^2+5t+3=0)$

이때 x, y, z는 ㉡의 근이므로

$x^5=72x^2-115x-60$ ……㉢

$y^5=72y^2-115y-60$ ……㉣

$z^5=72z^2-115z-60$ ……㉤

㉢+㉣+㉤을 하면

$x^5+y^5+z^5$

$=72(x^2+y^2+z^2)-115(x+y+z)-60\times3$

$=72\times15-115\times5-180$

$=1080-575-180=325$

05 해결단계

❶ 단계	주어진 식을 이용하여 $x+y$와 xy 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 이용하여 $x+y$, xy의 값을 구한다.
❸ 단계	ax^5+by^5의 값을 구한다.

$(ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+bxy^2+ax^2y+by^3$

$=ax^3+by^3+xy(ax+by)$

이때 $ax+by=4$, $ax^2+by^2=6$, $ax^3+by^3=10$이므로

$6(x+y)=10+4xy$ ……㉠

$(ax^3+by^3)(x+y)=ax^4+bxy^3+ax^3y+by^4$

$=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$

이때 $ax^2+by^2=6$, $ax^3+by^3=10$, $ax^4+by^4=18$이므로

$10(x+y)=18+6xy$ ……㉡

$x+y=A$, $xy=B$로 놓으면 ㉠, ㉡에서

$6A=10+4B$, $10A=18+6B$

두 식을 연립하여 풀면 $A=3$, $B=2$

$\therefore\ x+y=3$, $xy=2$

따라서

$(ax^4+by^4)(x+y)=ax^5+bxy^4+ax^4y+by^5$

$=ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$

에서 $ax^3+by^3=10$, $ax^4+by^4=18$이므로

$ax^5+by^5=(ax^4+by^4)(x+y)-xy(ax^3+by^3)$

$=18\times3-2\times10=34$ 답 34

06 해결단계

❶ 단계	$p+q$, pq, $p-q$의 값을 구한다.
❷ 단계	곱셈 공식을 이용하여 $p^8\pm q^8$의 값을 구한다.
❸ 단계	$ap+b=-\frac{1}{p^8}$, $aq+b=-\frac{1}{q^8}$을 변형하여 a, b의 값을 구한 후, $2a+b$의 값을 구한다.

$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$에서

(i) $p+q=1$, $pq=-1$, $p-q=\sqrt{5}$

(ii) $p^2-q^2=(p+q)(p-q)=\sqrt{5}$

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1^2+2=3$

(iii) $p^4-q^4=(p^2+q^2)(p^2-q^2)=3\sqrt{5}$

$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=3^2-2\times(-1)^2=7$

(iv) $p^8-q^8=(p^4+q^4)(p^4-q^4)=21\sqrt{5}$

$p^8+q^8=(p^4+q^4)^2-2p^4q^4=7^2-2\times(-1)^4=47$

주어진 두 식을

$ap+b=-\frac{1}{p^8}$ ……㉠, $aq+b=-\frac{1}{q^8}$ ……㉡

이라 하자.

㉠−㉡을 하면

$ap-aq=-\frac{1}{p^8}+\frac{1}{q^8}$

즉, $a(p-q)=\frac{p^8-q^8}{p^8q^8}=\frac{p^8-q^8}{(pq)^8}$이므로 (i), (iv)에서

$\sqrt{5}a=21\sqrt{5}$ $\therefore\ a=21$

㉠+㉡을 하면

$ap+aq+2b=-\frac{1}{p^8}-\frac{1}{q^8}$

즉, $a(p+q)+2b=-\frac{p^8+q^8}{p^8q^8}=-\frac{p^8+q^8}{(pq)^8}$이므로 (i), (iv)

에서

$21+2b=-47$

$2b=-68$ $\therefore\ b=-34$

$\therefore\ 2a+b=2\times21+(-34)=8$ 답 8

07 해결단계

❶ 단계	정의에 따라 A_1, A_2, A_3을 미지수로 나타낸다.
❷ 단계	A_1, A_2, A_3 꼴이 포함된 다항식을 이용하여 $A_1+A_2+A_3-3$의 값을 구한다.
❸ 단계	$A_1+A_2+A_3-3$을 100으로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

조건 (가)에서 $A_1=9+99+999$

조건 (나)에서 $n\geq2$일 때, A_n은 9, 99, 999 중에서 서로 다른 n개를 택하여 곱한 수의 총합이므로

$A_2=9\times99+99\times999+999\times9$

$A_3=9\times99\times999$

이때 $9=a$, $99=b$, $999=c$로 놓으면

$A_1=a+b+c$, $A_2=ab+bc+ca$, $A_3=abc$

즉, A_1, A_2, A_3은 세 일차식의 곱

$(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

에서 이차항, 일차항의 계수 및 상수항과 같다.

$\therefore\ (x+9)(x+99)(x+999)=x^3+A_1x^2+A_2x+A_3$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$A_1+A_2+A_3+1=10\times100\times1000$

$=1000000$

$\therefore\ A_1+A_2+A_3-3=1000000-4=999996$

따라서 $A_1+A_2+A_3-3$을 100으로 나누었을 때의 나머지는 96이다. **답** 96

• 다른 풀이 •

$a=10$, $b=100$, $c=1000$이라 하면

$9=a-1$, $99=b-1$, $999=c-1$

$$\begin{aligned}A_1&=9+99+999\\&=(a-1)+(b-1)+(c-1)\\&=(a+b+c)-3\end{aligned}$$

조건 (나)에서 A_n이 세 수 9, 99, 999 중에서 서로 다른 n개를 택하여 곱한 수의 총합이므로

$$\begin{aligned}A_2&=9\times99+99\times999+999\times9\\&=(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)\\&=ab-(a+b)+1+bc-(b+c)+1\\&\qquad+ca-(c+a)+1\\&=ab+bc+ca-2(a+b+c)+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_3&=9\times99\times999\\&=(a-1)(b-1)(c-1)\\&=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore A_1+A_2+A_3-3&=abc-4=10\times100\times1000-4\\&=1000000-4=999996\end{aligned}$$

따라서 $A_1+A_2+A_3-3$을 100으로 나누었을 때의 나머지는 96이다.

BLACKLABEL 특강 참고

다음은 문제에서 자주 활용되는 공식이므로 잘 기억해두도록 하자.
삼차방정식에서도 많이 활용된다.

$(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)$
$=x^3\pm(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x\pm abc$ (복부호 동순)

08 해결단계

❶ 단계	$k=0$, 1, 2, 3, 4일 때의 $f(k)$의 값을 구하여 규칙을 파악한다.
❷ 단계	인수정리를 이용할 수 있는 식의 형태를 찾는다.
❸ 단계	$f(x)$를 구한 후, $f(5)$의 값을 구한다.

$k=0$, 1, 2, 3, 4일 때, $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$이므로

$f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=\dfrac{2}{3}$, $f(3)=\dfrac{3}{4}$, $f(4)=\dfrac{4}{5}$

$\therefore f(0)-0=0$, $2f(1)-1=0$, $3f(2)-2=0$,
$4f(3)-3=0$, $5f(4)-4=0$

$g(x)=(x+1)f(x)-x$라 하면 $g(x)$는 오차다항식이고,

$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

즉, 인수정리에 의하여

$g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (단, $a\neq0$)

라 할 수 있다.

$\therefore (x+1)f(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=a\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$

$\therefore a=-\dfrac{1}{120}$

$$\begin{aligned}\therefore (x+1)f(x)-x\\=-\frac{1}{120}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

위의 식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$6f(5)-5=-\dfrac{1}{120}\times5\times4\times3\times2\times1$

$6f(5)-5=-1$, $6f(5)=4$

$\therefore f(5)=\dfrac{2}{3}$ **답** $\dfrac{2}{3}$

09 해결단계

❶ 단계	직육면체의 세 모서리의 길이를 x, y, z라 하고, l_1, l_2, S_1, S_2를 x, y, z에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$x+y+z$, $xy+yz+zx$의 값을 구한다.
❸ 단계	곱셈 공식을 이용하여 $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=z$라 하면

$l_1=3x+3y+3z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$

$l_2=x+y+z+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$

에서 $l_1-l_2=2x+2y+2z=28$ $\quad\therefore x+y+z=14$

$S_1=xy+yz+zx+\dfrac{1}{2}xy+\dfrac{1}{2}yz+\dfrac{1}{2}zx$
$\qquad+$(삼각형 AFC의 넓이)

$S_2=\dfrac{1}{2}xy+\dfrac{1}{2}yz+\dfrac{1}{2}zx+$(삼각형 AFC의 넓이)

$\therefore S_1-S_2=xy+yz+zx=61$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2\\&=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\\&=2(x^2+y^2+z^2)\\&=2\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}\\&=2\times(14^2-2\times61)\\&=148\end{aligned}$$

답 148

10 해결단계

❶ 단계	$f(x)$의 차수를 구한 후, 다항식 $f(x)$의 식을 세운다.
❷ 단계	항등식의 성질을 이용하여 다항식 $f(x)$를 구한다.
❸ 단계	$f(1)$의 값을 구한다.

$f(x-1)+x^6f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=7x^6-x^2+2x+5$ ……㉠

$f(x)$를 최고차항의 계수가 p ($p\neq0$)인 n차다항식이라 하면

$f(x)=px^n+\cdots$ 꼴이므로

$f(x-1)=p(x-1)^n+\cdots=px^n+\cdots$

$x^6f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=px^6\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^n+\cdots=p\dfrac{x^6}{x^{3n}}+\cdots$

이때 ㉠을 만족시키려면 $3n\le6$이어야 하므로

$n\le2$

따라서 $f(x)$는 2차 이하의 다항식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x-1)+x^6f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

$=a(x-1)^2+b(x-1)+c+x^6\left(\dfrac{a}{x^6}+\dfrac{b}{x^3}+c\right)$

$=cx^6+bx^3+ax^2+(b-2a)x+2a-b+c$

$cx^6+bx^3+ax^2+(b-2a)x+2a-b+c$

$=7x^6-x^2+2x+5$ ($\because$ ㉠)

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$c=7,\ b=0,\ a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+7$이므로

$f(1)=6$ 답 6

11 해결단계

❶ 단계	다항식 $f(x)$에 대한 식을 세우고, 다항식 $g(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.
❷ 단계	인수정리를 이용하여 다항식 $f(x)$를 구한다.
❸ 단계	$f(2)$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 다항식 $f(x)$를 $x^2+g(x)$로 나누었을 때의 몫은 $x+3$이고 나머지는 $\{g(x)\}^2-4x^2$이므로

$f(x)=\{x^2+g(x)\}(x+3)+\{g(x)\}^2-4x^2$ ……㉠

$g(x)=a_nx^n+\cdots+a$ ($a_n>0$, a는 상수)라 하면

$\{g(x)\}^2-4x^2=a_n^2x^{2n}-4x^2+\cdots+a^2$

나머지 $\{g(x)\}^2-4x^2$의 차수는 다항식 $x^2+g(x)$의 차수보다 작아야 하므로

$a_n^2x^{2n}-4x^2=0$ $\therefore a_n=2$ ($\because a_n>0$), $n=1$

즉, $g(x)=2x+a$이고, 이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2+2x+a)(x+3)+(2x+a)^2-4x^2$

$=(x^2+2x+a)(x+3)+4ax+a^2$

조건 (나)에서 $f(x)$가 $g(x)$, 즉 $2x+a$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$

$\left(\frac{a^2}{4}-a+a\right)\left(-\frac{a}{2}+3\right)-2a^2+a^2=0$

$\frac{a^3}{8}+\frac{a^2}{4}=0,\ \frac{a^2}{8}(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$

그런데 $a=0$이면 $f(0)=0$이 되어 조건을 만족시키지 않으므로 $a=-2$

$\therefore f(x)=(x^2+2x-2)(x+3)-8x+4$

$\therefore f(2)=6\times5-16+4=18$ 답 18

12 해결단계

❶ 단계	$P(1)$, $P(2)$의 값을 구한다.
❷ 단계	$P(0)$, $P(4)$의 값에 따라 $P(x)$의 식을 세운 후, $P(1)$, $P(2)$의 값을 이용하여 $P(6)$의 값을 구한다.
❸ 단계	$P(6)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

조건 (가)에서 $P(1)P(2)=0$이므로

$P(1)=0$ 또는 $P(2)=0$ ……㉠

조건 (나)에서 다항식 $P(x)\{P(x)-4\}$가 $x(x-4)$로 나누어떨어지므로

$P(0)\{P(0)-4\}=0,\ P(4)\{P(4)-4\}=0$

$\therefore P(0)=0$ 또는 $P(0)=4$, $P(4)=0$ 또는 $P(4)=4$

(i) $P(0)=0,\ P(4)=0$일 때,

$P(x)=ax(x-4)$ $(a\neq0)$라 하면

$P(1)\neq0,\ P(2)\neq0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $P(0)=0,\ P(4)=4$일 때,

$P(0)-0=0,\ P(4)-4=0$이므로 이차다항식 $P(x)-x$는 x, $x-4$를 인수로 갖는다.

$P(x)-x=ax(x-4)$ $(a\neq0)$라 하면

$P(x)=ax(x-4)+x$

㉠에서

① $P(1)=0$이면 $a=\frac{1}{3}$이므로

$P(x)=\frac{1}{3}x(x-4)+x$

$\therefore P(6)=\frac{1}{3}\times6\times(6-4)+6=10$

② $P(2)=0$이면 $a=\frac{1}{2}$이므로

$P(x)=\frac{1}{2}x(x-4)+x$

$\therefore P(6)=\frac{1}{2}\times6\times(6-4)+6=12$

(iii) $P(0)=4,\ P(4)=0$일 때,

이차다항식 $P(x)$는 $x-4$를 인수로 갖는다.

$P(x)=a(x-4)(x-p)$ ($a\neq0$, p는 상수)라 하면

$P(0)=4$이므로

$4ap=4$ $\therefore ap=1$

㉠에서

① $P(1)=0$이면 $p=1,\ a=1$이므로

$P(x)=(x-1)(x-4)$

$\therefore P(6)=(6-1)\times(6-4)=10$

② $P(2)=0$이면 $p=2,\ a=\frac{1}{2}$이므로

$P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$

$\therefore P(6)=\frac{1}{2}\times(6-2)\times(6-4)=4$

(iv) $P(0)=4,\ P(4)=4$일 때,

$P(0)-4=0,\ P(4)-4=0$이므로 이차다항식 $P(x)-4$는 x, $x-4$를 인수로 갖는다.

$P(x)-4=ax(x-4)$ $(a\neq0)$라 하면

$P(x)=ax(x-4)+4$

㉠에서

① $P(1)=0$이면 $a=\frac{4}{3}$이므로

$P(x)=\frac{4}{3}x(x-4)+4$

$\therefore P(6)=\frac{4}{3}\times6\times(6-4)+4=20$

② $P(2)=0$이면 $a=1$이므로

$P(x)=x(x-4)+4$

$\therefore P(6)=6\times(6-4)+4=16$

(i)~(iv)에서 $P(6)$의 최댓값은 20, 최솟값은 4이므로 합은

$20+4=24$ 답 24

02. 인수분해

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.21~22

01 ③	02 ⑤	03 16	04 ④	05 ②
06 1	07 ②	08 $(x-3y-1)(x-y+2)$		
09 $(x+1)(x+2)(x-1)(x-3)$			10 ①	
11 ④	12 ⑤	13 ③	14 ⑤	

01 ① $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$

$=a^2+(-b)^2+1^2$
$+2\{a\times(-b)+(-b)\times1+1\times a\}$

$=(a-b+1)^2$

② $27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

$=(3x)^3-3\times(3x)^2\times y+3\times3x\times y^2-y^3$

$=(3x-y)^3$

③ $x^3-27=x^3-3^3$

$=(x-3)(x^2+3x+9)$

④ $x^4+4x^2+16=x^4+x^2\times2^2+2^4$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

⑤ $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

① $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$

$=(a-b)^2+2(a-b)+1$

$=(a-b+1)^2$

④ $x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

02 $x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x+1)(x^2-x-9)+21$

$=(X+1)(X-9)+21$

$=X^2-8X+12$

$=(X-2)(X-6)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

$=(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)$

$\therefore a=-2,\ b=-3$ 또는 $a=-3,\ b=-2$

$\therefore a+b=-5$ 답 ⑤

03 $(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)+k$

$=\{(x-2)(x-8)\}\{(x-4)(x-6)\}+k$

$=(x^2-10x+16)(x^2-10x+24)+k$

$x^2-10x=X$로 놓으면

$(x^2-10x+16)(x^2-10x+24)+k$

$=(X+16)(X+24)+k$

$=X^2+40X+384+k$

이 식이 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면

$X^2+40X+384+k=(X+20)^2$에서

$384+k=400$이므로 $k=16$ 답 16

04 $x^2=t$로 놓으면

$x^4-20x^2+64=t^2-20t+64$

$=(t-4)(t-16)$

$=(x^2-4)(x^2-16)$

$=(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-4,\ b=-2,\ c=2,\ d=4$

$\therefore ad-bc=(-4)\times4-(-2)\times2$

$=-12$ 답 ④

05 $x^4-6x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$

$=(x^2-y^2+2xy)(x^2-y^2-2xy)$

$=(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)$

따라서 인수인 것은 ② $x^2-2xy-y^2$이다. 답 ②

06 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+3xy-3x-5y+2y^2+2$

$=x^2+3(y-1)x+2y^2-5y+2$

$=x^2+(3y-3)x+(2y-1)(y-2)$

$=(x+2y-1)(x+y-2)$

$\therefore a=2,\ b=1,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=1$ 답 1

07 주어진 식을 전개한 다음 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$

$=x^2y+xy^2-y^2z-yz^2-z^2x+zx^2$

$=(y+z)x^2+(y^2-z^2)x-yz(y+z)$

$=(y+z)x^2+(y+z)(y-z)x-yz(y+z)$

$=(y+z)\{x^2+(y-z)x-yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x-z)$

$=(x+y)(y+z)(x-z)$

따라서 인수인 것은 ② $x-z$이다. 답 ②

08 $x+y+z=1$에서 $z=1-x-y$

$\therefore x^2-4xy+3y^2-x-7y-2z$

$=x^2-4xy+3y^2-x-7y-2(1-x-y)$

$=x^2-4xy+x+3y^2-5y-2$
$=x^2+(1-4y)x+3y^2-5y-2$
$=x^2+(1-4y)x+(3y+1)(y-2)$
$=(x-3y-1)(x-y+2)$

답 $(x-3y-1)(x-y+2)$

09 $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+6$이라 하면
$f(-1)=0,\ f(-2)=0$이므로
$1+1+a-b+6=0,\ 16+8+4a-2b+6=0$
$a-b=-8,\ 4a-2b=-30$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-7,\ b=1$
$\therefore f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$
따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
 & & -1 & 2 & 5 & -6 \\
\hline
-2 & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & 8 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\therefore x^4-x^3-7x^2+x+6$
$=(x+1)(x+2)(x^2-4x+3)$
$=(x+1)(x+2)(x-1)(x-3)$

답 $(x+1)(x+2)(x-1)(x-3)$

• 다른 풀이 •

다항식 $x^4-x^3+ax^2+bx+6$이 두 일차식 $x+1,\ x+2$를 인수로 가지므로
$x^4-x^3+ax^2+bx+6=(x+1)(x+2)(x^2+px+3)$
(단, p는 상수) ……㉠
이라 할 수 있다.
$(x+1)(x+2)(x^2+px+3)$
$=x^4+(p+3)x^3+(3p+5)x^2+(2p+9)x+6$
이므로
$x^4-x^3+ax^2+bx+6$
$=x^4+(p+3)x^3+(3p+5)x^2+(2p+9)x+6$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$-1=p+3,\ a=3p+5,\ b=2p+9$
$\therefore p=-4,\ a=-7,\ b=1$
㉠에서
$x^4-x^3+ax^2+bx+6$
$=(x+1)(x+2)(x^2-4x+3)$
$=(x+1)(x+2)(x-1)(x-3)$

10 $(x^2-1)^2-3x(x^2+1)=x^4-2x^2+1-3x^3-3x$
$=x^4-3x^3-2x^2-3x+1$
$=x^2\left(x^2-3x-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$
$=x^2\left\{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\right\}$
$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4\right\}$
$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-4\right)$
$=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)$
$\therefore a=1,\ b=-4,\ c=1$
$\therefore a+b+c=-2$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$(x^2-1)^2-3x(x^2+1)=(x^2+1)^2-4x^2-3x(x^2+1)$
$x^2+1=A$로 놓으면
$(x^2+1)^2-4x^2-3x(x^2+1)$
$=A^2-4x^2-3xA$
$=A^2-3xA-4x^2$
$=(A+x)(A-4x)$
$=(x^2+x+1)(x^2-4x+1)$
따라서 $a=1,\ b=-4,\ c=1$이므로
$a+b+c=-2$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

다항식 $x^4-3x^3-2x^2-3x+1$의 인수분해에서
$x^4-3x^3-2x^2-3x+1=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-4\right)$와 같이 인수분해하는 경우가 있다. 이러한 경우 우변이 다항식의 곱의 꼴이 아니므로 인수분해를 바르게 했다고 볼 수 없다.

11 주어진 식에서 가장 낮은 차수의 문자는 b이므로 b에 대하여 내림차순으로 정리하면
$ac^2-2a^2c+a^3+bc^2-2abc+a^2b$
$=b(a^2-2ac+c^2)+a(a^2-2ac+c^2)$
$=(b+a)(a^2-2ac+c^2)$
$=(a+b)(a-c)^2$
이때 $a+b=2,\ b+c=5$를 변끼리 빼면
$a-c=-3$
따라서 구하는 식의 값은
$2\times(-3)^2=18$ 답 ④

12 $(a-b)c^3-(a^2-b^2)c^2-(a^3-a^2b+ab^2-b^3)c$
$+(a^4-b^4)=0$
에서
$(a-b)c^3-(a+b)(a-b)c^2-\{a^2(a-b)+b^2(a-b)\}c$
$+(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$
$(a-b)c^3-(a+b)(a-b)c^2-(a-b)(a^2+b^2)c$
$+(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=0$
$(a-b)\{c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c$
$+(a+b)(a^2+b^2)\}=0$
$(a-b)[c^2\{c-(a+b)\}-(a^2+b^2)\{c-(a+b)\}]=0$
$(a-b)(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 $\underline{c-a-b\neq0}$이므로 $a-b=0$ 또는 $c^2-a^2-b^2=0$

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

$\therefore$ $a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

따라서 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형 또는 $a=b$인 이등변삼각형이다. **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 개념

세 변의 길이에 따른 삼각형의 모양

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c $(a\leq b\leq c)$라 하면

(1) $c^2=a^2+b^2$: 직각삼각형 (2) $c^2<a^2+b^2$: 예각삼각형

(3) $c^2>a^2+b^2$: 둔각삼각형 (4) $a=b=c$: 정삼각형

(5) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$: 이등변삼각형

13

$13=t$로 놓으면

-2	1	1	-1	2
		-2	2	-2
	1	-1	1	0

$2355=13^3+13^2-13+2$

$=t^3+t^2-t+2$

$=(t+2)(t^2-t+1)$

$=(13+2)\times(13^2-13+1)$

$=15\times157$

이때 a, b는 10 이상의 자연수이므로

$a=15$, $b=157$ 또는 $a=157$, $b=15$

$\therefore$ $a+b=172$ **답** ③

14

$f(n)=n^3+7n^2+14n+8$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	7	14	8
		-1	-6	-8
	1	6	8	0

$f(n)=n^3+7n^2+14n+8$

$=(n+1)(n^2+6n+8)$

$=(n+1)(n+2)(n+4)$

즉, 바닥 전체의 가로의 길이는 $(n+1)(n+2)(n+4)$, 세로의 길이는 $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형이 가로에 $(n+2)(n+4)$개, 세로에 $(n+3)$개가 필요하다.

따라서 필요한 타일의 개수는 $(n+2)(n+3)(n+4)$이다.

답 ⑤

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.23~25

01 ④	02 31	03 ①	04 ③	
05 $(ab+a+1)(ab+b+1)$			06 ⑤	07 59
08 40	09 20	10 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$		
11 ③	12 0	13 ②	14 ④	15 14
16 ①	17 ②	18 38		

01

1000개의 이차다항식을

x^2+2x-n (단, n은 1000 이하의 자연수)

이라 하면 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되어야 하므로

$x^2+2x-n=(x+a)(x-b)$(단, a, b는 자연수)

라 할 수 있다.

이때 $x^2+2x-n=x^2+(a-b)x-ab$이므로

$a-b=2$, $ab=n$

$ab\leq1000$이고, $a-b=2$인 자연수 a, b의 값은 다음 표와 같다.

a	3	4	5	$\cdots$	31	32
b	1	2	3	$\cdots$	29	30
ab	3	8	15	$\cdots$	899	960

따라서 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 것의 개수는 30이다. **답** ④

02

$a+b+c=5$에서

$a+b=5-c$, $b+c=5-a$, $c+a=5-b$이므로

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=ab(5-c)+bc(5-a)+ca(5-b)$

$=5(ab+bc+ca)-3abc$ $\cdots\cdots$㉠

한편, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$25=9+2(ab+bc+ca)$

$\therefore$ $ab+bc+ca=8$ $\cdots\cdots$㉡

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서

$14-3abc=5\times(9-8)$

$\therefore$ $abc=3$ $\cdots\cdots$㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$5\times8-3\times3=31$ **답** 31

03

$\dfrac{a^3+b^3}{a^3+c^3}=\dfrac{a+b}{a+c}$에서 $\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+c)(a^2-ac+c^2)}=\dfrac{a+b}{a+c}$

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-ac+c^2}=1$ $(\because a+b>0,\ a+c>0)$

$a^2-ab+b^2=a^2-ac+c^2$, $b^2-c^2-ab+ac=0$

$(b+c)(b-c)-a(b-c)=0$, $(b-c)(b+c-a)=0$

$\therefore$ $b=c$ 또는 $a=b+c$ $\cdots\cdots$㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

04

ax^3+b를 $ax+b$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $Q_1(x)$, R_1이므로

$ax^3+b=(ax+b)Q_1(x)+R_1$ $\cdots\cdots$㉠

ax^4+b를 $ax+b$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $Q_2(x)$, R_2이므로

$ax^4+b=(ax+b)Q_2(x)+R_2$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=-\frac{b}{a}$를 각각 대입하면

$R_1=-\frac{b^3}{a^2}+b$, $R_2=\frac{b^4}{a^3}+b$

이때 $R_1=R_2$이므로

$-\frac{b^3}{a^2}+b=\frac{b^4}{a^3}+b$, $b=-a$($\because$ $a\neq0$, $b\neq0$)

$\therefore$ $R_1=R_2=0$

㉠에서 $ax^3-a=a(x-1)(x^2+x+1)$이므로

$a(x-1)(x^2+x+1)=a(x-1)Q_1(x)$

$\therefore$ $Q_1(x)=x^2+x+1$

㉡에서 $ax^4-a=a(x-1)(x+1)(x^2+1)$이므로

$a(x-1)(x+1)(x^2+1)=a(x-1)Q_2(x)$

$\therefore$ $Q_2(x)=(x+1)(x^2+1)$

따라서 $Q_1(3)=13$, $Q_2(4)=85$이므로

$Q_1(3)+Q_2(4)=98$

답 ③

05

$(a+1)(b+1)(ab+1)+ab$

$=(ab+a+b+1)(ab+1)+ab$

$ab+1=A$로 놓으면

$(A+a+b)A+ab=A^2+(a+b)A+ab$

$=(A+a)(A+b)$

$=(ab+a+1)(ab+b+1)$

답 $(ab+a+1)(ab+b+1)$

06

$310=x$로 놓으면

$308\times310\times313-3116$

$=(x-2)x(x+3)-(10x+16)$

$=x^3+x^2-6x-10x-16=x^3+x^2-16x-16$

$=x^3-16x+x^2-16=x(x^2-16)+(x^2-16)$

$=(x+1)(x^2-16)=(x+1)(x+4)(x-4)$

$=311\times314\times306$

이때 311은 소수이고, $306=2\times3^2\times17$, $314=2\times157$이므로

$308\times310\times313-3116=2^2\times3^2\times17\times157\times311$

따라서 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=72$

답 ⑤

07

$(x^2-3x+2)(x^2+7x+12)+4$

$=(x-1)(x-2)(x+4)(x+3)+4$

$=(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)+4$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+4$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+4$

$=(X-3)(X-8)+4$

$=X^2-11X+28$

$=(X-4)(X-7)$

$=(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$

따라서 $f(x)=x^2+2x-4$, $g(x)=x^2+2x-7$ 또는

$f(x)=x^2+2x-7$, $g(x)=x^2+2x-4$이므로

$f(5)+g(5)=59$

답 59

08

다항식 $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$에서 $x^2=t$로 놓고 인수분해하면

$x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$

$=t^2-2(a^2+b^2)t+(a^2-b^2)^2$

$=t^2-2(a^2+b^2)t+(a+b)^2(a-b)^2$

$=\{t-(a+b)^2\}\{t-(a-b)^2\}$

$=\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}$

$=(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$

한편, 다항식 x^2-4a^2을 인수분해하면

$x^2-4a^2=(x+2a)(x-2a)$

(i) $a+b=2a$이면 $-2a$인 경우는 부호만 반대이기 때문에 따로 생각할 필요가 없다.

$a=b$이므로 a, b는 서로 같은 자연수이다.

(ii) $-a-b=2a$이면

$3a=-b$이므로 a, b 중 자연수가 아닌 것이 존재한다.

(iii) $a-b=2a$이면

$a=-b$이므로 a, b 중 자연수가 아닌 것이 존재한다.

(iv) $-a+b=2a$이면

$3a=b$이므로 a, b는 서로 다른 자연수이다.

(i)~(iv)에서 $3a=b$이고 a, b가 서로 다른 한 자리의 짝수이므로

$a=2$, $b=6$

$\therefore$ $a^2+b^2=2^2+6^2=40$

답 40

• 다른 풀이 •

$f(x)=x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$이라 하면

$x^2-4a^2=(x+2a)(x-2a)$이고, 주어진 두 다항식이 공통인수를 가지므로 나머지정리에 의하여

$f(-2a)=0$ 또는 $f(2a)=0$

$16a^4-8a^4-8a^2b^2+a^4-2a^2b^2+b^4=0$

$9a^4-10a^2b^2+b^4=0$, $(9a^2-b^2)(a^2-b^2)=0$

$b^2=9a^2$ ($\because$ $a\neq b$) $\therefore$ $b=3a$ ($\because$ $a>0$, $b>0$)

이때 a, b는 서로 다른 한 자리의 짝수이므로

$a=2$, $b=6$

$\therefore$ $a^2+b^2=2^2+6^2=40$

09

$x+2y+3z=6$에서

$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$

이때 $x-1=a$, $2(y-1)=b$, $3(z-1)=c$로 놓으면

$a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$ ……㉠

$$\therefore\ \frac{360(x-1)(y-1)(z-1)}{(x-1)^3+8(y-1)^3+27(z-1)^3}$$

$$=\frac{360(x-1)(y-1)(z-1)}{(x-1)^3+\{2(y-1)\}^3+\{3(z-1)\}^3}$$

$$=\frac{360\times a\times\frac{b}{2}\times\frac{c}{3}}{a^3+b^3+c^3}$$

$$=\frac{60abc}{3abc}\ (\because\ ㉠)$$

$x\neq1,\ y\neq1,\ z\neq1$이므로 $a\neq0,\ b\neq0,\ c\neq0$

$=20$

답 20

10

주어진 식을 전개한 다음 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc+abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

답 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

• 다른 풀이 •

$a+b+c=t$로 놓으면

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(t-c)(t-a)(t-b)+abc$

$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc+abc$

$=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t$

$=t\{t^2-(a+b+c)t+ab+bc+ca\}$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-(a+b+c)^2+ab+bc+ca\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

11

주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y-1)x+3y^2+y+k$

이때 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 $4y-1$은 y에 대한 두 일차식의 합, $3y^2+y+k$는 y에 대한 두 일차식의 곱으로 나타낼 수 있어야 하므로 y에 대한 두 일차식을 $y+a,\ 3y+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하자.

$(y+a)+(3y+b)=4y-1$이므로

$a+b=-1$ ……㉠

$(y+a)(3y+b)=3y^2+y+k$이므로

$3y^2+(3a+b)y+ab=3y^2+y+k$

$\therefore\ 3a+b=1,\ ab=k$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-2$

$\therefore\ k=1\times(-2)=-2$

답 ③

• 다른 풀이 •

주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y-1)x+3y^2+y+k$

이때 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 이차방정식 $x^2+(4y-1)x+3y^2+y+k=0$에서

$$x=\frac{-(4y-1)\pm\sqrt{(4y-1)^2-4(3y^2+y+k)}}{2}$$의 근호 안의 식 $(4y-1)^2-4(3y^2+y+k)$가 완전제곱식이 되어야 한다.* 이차방정식 $(4y-1)^2-4(3y^2+y+k)=0$, 즉 $4y^2-12y+1-4k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-4(1-4k)=0$

$\therefore\ k=-2$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$a,\ b,\ c$가 실수일 때, 이차식 $ax^2+bx+c\ (a\neq0)$가

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha,\ \beta$는 유리수)

와 같이 계수와 상수항이 모두 유리수인 두 일차식의 곱으로 표현되려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$가 모두 유리수이어야 한다.

즉, 근호 안의 b^2-4ac의 값이 유리수의 제곱이 되어야 한다.

12

$f(b,\ a,\ c)+f(c,\ a,\ b)=-3$에서

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=-3$$

$$\frac{b^2c+a^2b+c^2a+bc^2+ca^2+ab^2}{abc}=-3$$

즉, $b^2c+a^2b+c^2a+bc^2+ca^2+ab^2=-3abc$이므로

$b^2c+a^2b+c^2a+bc^2+ca^2+ab^2+3abc=0$

이때 좌변을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$b^2c+a^2b+c^2a+bc^2+ca^2+ab^2+3abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

이므로 $(a+b+c)(ab+bc+ca)=0$

$\therefore\ ab+bc+ca=0\ (\because\ a+b+c\neq0)$

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$$

답 0

단계	채점 기준	배점
(가)	$f(b,\ a,\ c)+f(c,\ a,\ b)$를 $a,\ b,\ c$에 대한 식으로 정리한 경우	30%
(나)	식을 변형하여 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$의 값을 구한 경우	40%
(다)	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구한 경우	30%

13

$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$

$=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$

$=(y-z)x^2-(y-z)(y+z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$

즉, $x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$이어야 한다.

$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=10$ ······㉠
에서 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) $x=y$일 때, ㉠에 대입하면
$(2x+z)(x-z)^2=10$
이때 x, y, z는 자연수이고, 10의 약수 중에서 제곱수는 1뿐이므로 $x-z=\pm1$이고, $2x+z=10$이다.
① $x-z=1$인 경우
$z=x-1$이고 $2x+z=10$에서 $3x-1=10$이므로
$x=\frac{11}{3}$
그런데 x는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
② $x-z=-1$인 경우
$z=x+1$이고 $2x+z=10$에서 $3x+1=10$이므로
$x=3$
$\therefore y=3,\ z=x+1=4$
①, ②에서 $x=3$, $y=3$, $z=4$
(ⅱ) $y=z$일 때,
(ⅰ)과 같은 방법으로 하면 $x=4$, $y=3$, $z=3$
(ⅲ) $z=x$일 때,
(ⅰ)과 같은 방법으로 하면 $x=3$, $y=4$, $z=3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $xyz=36$ 답 ②

14 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-4$라 하면 $f(2)=0$, $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ & & 2 & 6 & 6 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ & & -2 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x+2)(x^2+x+1)$
이때 $g(x)=ax^4+bx^3+cx^2-16a$라 하면 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 일차식인 공통인수를 가지므로 $g(x)$는 $x-2$ 또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
(ⅰ) $g(x)$가 $x-2$를 인수로 갖는 경우
$g(2)=16a+8b+4c-16a=0$에서 $c=-2b$
그런데 b, c는 모두 양수이므로 성립하지 않는다.
(ⅱ) $g(x)$가 $x+2$를 인수로 갖는 경우
$g(-2)=16a-8b+4c-16a=0$에서 $c=2b$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $c=2b$이므로
$ax^5+bx^2-4ax-c=ax^5+bx^2-4ax-2b$
$=ax(x^4-4)+b(x^2-2)$
$=ax(x^2-2)(x^2+2)+b(x^2-2)$
$=(x^2-2)\{ax(x^2+2)+b\}$
$=(x^2-2)(ax^3+2ax+b)$
따라서 다항식 $ax^5+bx^2-4ax-c$의 인수로 항상 옳은 것은 ④ x^2-2이다. 답 ④

15 $f(n)=n^2-3n+2=(n-1)(n-2)$
$g(n)=2n^3-12n^2+28n-24$에서 $g(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -12 & 28 & -24 \\ & & 4 & -16 & 24 \\ \hline & 2 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

$\therefore g(n)=(n-2)(2n^2-8n+12)$
$=2(n-2)(n^2-4n+6)$
$\frac{g(n)}{f(n)}$이 정의되기 위해서는 $f(n)\neq0$이어야 하므로
$n\neq1$, $n\neq2$
$\therefore \frac{g(n)}{f(n)}=\frac{2(n-2)(n^2-4n+6)}{(n-1)(n-2)}$
$=\frac{2(n^2-4n+6)}{n-1}$ ($\because n\neq2$)
$=\frac{2\{(n-1)(n-3)+3\}}{n-1}$
$=2n-6+\frac{6}{n-1}$
따라서 $\frac{g(n)}{f(n)}$이 자연수이려면 $\frac{6}{n-1}$이 정수이어야 하고, $n\neq1$, $n\neq2$이므로 $n-1$은 2 이상의 6의 약수이어야 한다.
(ⅰ) $n-1=2$일 때, $n=3$
$\frac{g(3)}{f(3)}=0+3=3$ (자연수)
(ⅱ) $n-1=3$일 때, $n=4$
$\frac{g(4)}{f(4)}=2+2=4$ (자연수)
(ⅲ) $n-1=6$일 때, $n=7$
$\frac{g(7)}{f(7)}=8+1=9$ (자연수)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 n의 값은 3, 4, 7이고 그 합은 14이다.
답 14

16 구하는 입체도형의 부피는 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피에서 구멍 부분의 부피를 빼면 된다.
이때 구멍 부분의 부피는 한 변의 길이가 y인 정사각형을 밑면으로 하고, 높이가 x인 정사각기둥 3개의 부피의 합에서 중복된 부분인 한 모서리의 길이가 y인 정육면체의 부피를 두 번 빼서 구할 수 있다.
즉, 구멍 부분의 부피는 $3xy^2-2y^3$이므로 구하는 입체도형의 부피는
$x^3-(3xy^2-2y^3)=x^3-3xy^2+2y^3$
이때 $f(x)=x^3-3xy^2+2y^3$이라 하면 $f(y)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} y & 1 & 0 & -3y^2 & 2y^3 \\ & & y & y^2 & -2y^3 \\ \hline & 1 & y & -2y^2 & 0 \end{array}$$

$\therefore x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$=(x-y)(x-y)(x+2y)$
$=(x-y)^2(x+2y)$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$$\begin{aligned} x^3-3xy^2+2y^3 &= x^3-xy^2-2xy^2+2y^3 \\ &= x(x+y)(x-y)-2y^2(x-y) \\ &= (x-y)\{x(x+y)-2y^2\} \\ &= (x-y)(x^2+xy-2y^2) \\ &= (x-y)(x-y)(x+2y) \\ &= (x-y)^2(x+2y) \end{aligned}$$

17

조건 (나)에서

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=6x^4+24x^3+24x^2+2$

이므로

$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

$=6x^4+24x^3+24x^2+2$ ……㉠

조건 (가)에서 $P(x)+Q(x)=2$이므로 ㉠에 대입하면

$8-6P(x)Q(x)=6x^4+24x^3+24x^2+2$

$-6P(x)Q(x)=6x^4+24x^3+24x^2-6$

$\therefore P(x)Q(x)=-x^4-4x^3-4x^2+1$

이때 $P(-1)Q(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & -1 & -4 & -4 & 0 & 1 \\ & & 1 & 3 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -3 & -1 & 1 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & -1 & \\ \hline & -1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)Q(x)=-(x+1)^2(x^2+2x-1)$

$\qquad\qquad\;=-(x^2+2x+1)(x^2+2x-1)$

이때 $P(x)+Q(x)=2$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=-x^2-2x+1,\ Q(x)=x^2+2x+1$

$\therefore P(1)+Q(2)=-2+9=7$ 답 ②

18

해결단계

❶ 단계	주어진 식을 인수정리를 이용하여 인수분해한다.
❷ 단계	이차식을 미지수를 이용한 두 일차식의 곱으로 나타낸다.
❸ 단계	조건에 맞는 M, m의 값을 각각 구한 후, $M-m$의 값을 구한다.

$f(x)=3x^3+(k-3)x^2+(6-k)x-6$이라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & k-3 & 6-k & -6 \\ & & 3 & k & 6 \\ \hline & 3 & k & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 3x^3+(k-3)x^2+(6-k)x-6$

$\quad=(x-1)(3x^2+kx+6)$

*이때 $3x^2+kx+6=(3x+a)(x+b)$ (a, b는 정수)라 하면 $3x^2+kx+6=3x^2+(a+3b)x+ab$에서

$k=a+3b,\ 6=ab$

$a=1,\ b=6$일 때,

$M=1+3\times6=19$

$a=-1,\ b=-6$일 때,

$m=-1+3\times(-6)=-19$

$\therefore M-m=19-(-19)=38$ 답 38

• 다른 풀이 •

$3x^3+(k-3)x^2+(6-k)x-6$

$=3x^3+kx^2-3x^2+6x-kx-6$

$=3x^2(x-1)+kx(x-1)+6(x-1)$

$=(x-1)(3x^2+kx+6)$

다음은 *와 같다.

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p.26

01 60	**02** ⑤	**03** 128	**04** 240	**05** ②
06 18				

01

해결단계

❶ 단계	c에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.
❷ 단계	a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 등식을 만족시키는 a, b, c 사이의 관계를 구한다.
❸ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(a+b)^2(a^2+b^2)-2(a^2+ab+b^2)c^2+c^4$

$=c^4-2(a^2+ab+b^2)c^2+(a^2+2ab+b^2)(a^2+b^2)$

$=\{c^2-(a^2+2ab+b^2)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$=\{c^2-(a+b)^2\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$=\{c+(a+b)\}\{c-(a+b)\}\{c^2-(a^2+b^2)\}$

$\therefore (c+a+b)(c-a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$c+a+b>0,\ c\neq a+b \qquad \therefore c^2=a^2+b^2$

즉, $\triangle$ABC는 빗변의 길이가 c, 나머지 두 변의 길이가 a, b인 직각삼각형이다.

삼각형 ABC의 한 변의 길이가 8이고, 둘레의 길이가 40이어야 하므로 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) $c=8$인 경우

$a<8$, $b<8$이고 $a+b+c<24$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=8$ 또는 $b=8$인 경우

$a=8$인 경우 $b+c=32$, $64+b^2=c^2$

이때 $64+b^2=c^2$에서

$b^2-c^2=-64$, $(b+c)(b-c)=-64$

$\therefore b-c=-2$

$b+c=32$, $b-c=-2$를 연립하여 풀면

$b=15$, $c=17$

$b=8$인 경우에도 같은 방법으로 하면

$a=15$, $c=17$

(i), (ii)에서 $a=8$, $b=15$ 또는 $a=15$, $b=8$

따라서 △ABC는 빗변이 아닌 두 변의 길이가 8, 15인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times8\times15=60$ 답 60

02 해결단계

❶ 단계	주어진 다항식이 계수와 상수항이 모두 자연수인 서로 다른 일차식의 곱으로만 인수분해되는 경우를 생각한다.
❷ 단계	a_{n-1}의 값의 의미를 파악한 후, ❶ 단계에서 나눈 경우에 따라 a_{n-1}의 값을 구한다.

주어진 다항식의 서로 다른 일차식인 인수를 $x+\alpha_1$, $x+\alpha_2$, $\cdots$, $x+\alpha_n$이라 하면 α_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$는 1000의 양의 약수이어야 한다.

이때 a_{n-1}의 값은 서로 다른 일차식인 인수의 상수항의 합이고, 상수항은 $1000=2^3\times5^3$이므로

① $(x+2)(x+4)(x+125)$일 때,
 $a_{n-1}=2+4+125=131$

② $(x+1)(x+2)(x+4)(x+125)$일 때,
 $a_{n-1}=1+2+4+125=132$

③ $(x+8)(x+125)$일 때,
 $a_{n-1}=8+125=133$

④ $(x+1)(x+8)(x+125)$일 때,
 $a_{n-1}=1+8+125=134$

즉, α_i $(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 중 가장 큰 수가 125이면 a_{n-1}의 최댓값은 134이다.

그런데 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_n 중 가장 큰 수가 125보다 큰 경우, 즉 200, 250, 500, 1000인 경우는 a_{n-1}의 값이 135를 넘게 된다.

따라서 a_{n-1}의 값으로 적당하지 않은 것은 ⑤ 135이다.

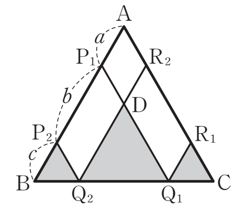
답 ⑤

03 해결단계

❶ 단계	두 선분 P_1Q_1, R_2Q_2의 교점을 D라 하였을 때, 네 삼각형 ABC, R_1Q_1C, DQ_2Q_1, P_2BQ_2의 넓이를 각각 S, x, y, z로 놓고 관계식을 구한다.
❷ 단계	네 삼각형 ABC, R_1Q_1C, DQ_2Q_1, P_2BQ_2가 서로 닮음임을 이용하여 x, y, z를 S, a, b, c로 표현한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 식을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한 후, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=8$이므로 $\overline{AB}=\overline{AP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2B}$에서

$a+b+c=8$ ……㉠



위의 그림과 같이 두 선분 P_1Q_1, R_2Q_2의 교점을 D라 하고, 삼각형 ABC의 넓이를 S, 삼각형 R_1Q_1C의 넓이를 x, 삼각형 DQ_2Q_1의 넓이를 y, 삼각형 P_2BQ_2의 넓이를 z라 하자.

색칠한 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$x+y+z=\frac{1}{2}S$ ……㉡

이때 세 선분 AC, P_1Q_1, P_2Q_2와 세 선분 AB, R_2Q_2, R_1Q_1이 각각 평행하므로 네 삼각형 ABC, R_1Q_1C, DQ_2Q_1, P_2BQ_2는 모두 닮음이다.*

(i) 두 삼각형 ABC, R_1Q_1C의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{AP_1}$, 즉 $8:a$이고 넓이의 비는 $8^2:a^2$이므로

 $S:x=64:a^2$, $64x=Sa^2$ $\therefore x=\frac{a^2}{64}S$

(ii) 두 삼각형 ABC, DQ_2Q_1의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{P_1P_2}$, 즉 $8:b$이고 넓이의 비는 $8^2:b^2$이므로

 $S:y=64:b^2$, $64y=Sb^2$ $\therefore y=\frac{b^2}{64}S$

(iii) 두 삼각형 ABC, P_2BQ_2의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{P_2B}$, 즉 $8:c$이고 넓이의 비는 $8^2:c^2$이므로

 $S:z=64:c^2$, $64z=Sc^2$ $\therefore z=\frac{c^2}{64}S$

(i), (ii), (iii)에서

$x+y+z=\frac{a^2}{64}S+\frac{b^2}{64}S+\frac{c^2}{64}S=\frac{a^2+b^2+c^2}{64}S$

㉡을 위의 식에 대입하면

$\frac{1}{2}S=\frac{a^2+b^2+c^2}{64}S$

$\therefore a^2+b^2+c^2=32$ ……㉢

**또한, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$8^2=32+2(ab+bc+ca)$ ($\because$ ㉠, ㉢)

$2(ab+bc+ca)=32$

$\therefore ab+bc+ca=16$ ……㉣

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=8\times(32-16)$ ($\because$ ㉠, ㉢, ㉣)

$=8\times16=128$ 답 128

• 다른 풀이 •

△ABC는 이등변삼각형이므로 *에서

$\overline{R_1Q_1}=\overline{R_1C}=a$, $\overline{DQ_2}=\overline{DQ_1}=b$, $\overline{P_2B}=\overline{P_2Q_2}=c$,

$\angle A=\angle Q_1R_1C=\angle Q_2DQ_1=\angle BP_2Q_2$

즉,

(색칠한 부분의 넓이)

$=\triangle R_1Q_1C+\triangle DQ_2Q_1+\triangle P_2BQ_2$

$=\frac{1}{2}a^2\sin(\angle Q_1R_1C)+\frac{1}{2}b^2\sin(\angle Q_2DQ_1)$

$\qquad+\frac{1}{2}c^2\sin(\angle BP_2Q_2)$

$=\frac{1}{2}a^2\sin A+\frac{1}{2}b^2\sin A+\frac{1}{2}c^2\sin A$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\sin A$ ······㉤

이때 색칠한 부분의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$(\text{색칠한 부분의 넓이})=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin A\right)$

$=\frac{1}{2}\times32\sin A$

$=16\sin A$ ······㉥

㉤, ㉥에서

$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\sin A=16\sin A$

$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=16 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=32$

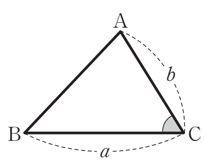
다음은 **와 같다.

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이가 각각 a, b이고 그 끼인각이 $\angle C$일 때, 이 삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$



04 해결단계

❶ 단계	좌변은 인수분해하고, 우변은 소인수분해한다.
❷ 단계	❶ 단계의 결과를 이용하여 경우를 나누어 등식을 만족시키는 한 자리의 자연수 a, b, c를 구한 후, abc의 값을 구한다.

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

$=a^3(b-c)+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b$

$=a^3(b-c)-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$

$=a^3(b-c)-(b-c)(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$

$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)\{a(a+b)(a-b)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)$

$=(b-c)(a-b)\{(a^2-c^2)+b(a-c)\}$

$=(b-c)(a-b)\{(a-c)(a+c)+b(a-c)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)$ ······㉠

우변을 소인수분해하면 $114=2\times3\times19$이고,

$(b-c)+(a-b)=a-c$이므로 ㉠에서

(i) $(b-c)(a-b)(a-c)=1\times1\times2$인 경우

$a+b+c=3\times19=57$ ······㉡

그런데 a, b, c는 모두 한 자리 자연수이므로

$a+b+c\le27$이다.

즉, ㉡에 모순이다.

(ii) $(b-c)(a-b)(a-c)=1\times2\times3$인 경우

$a+b+c=19$ ······㉢

이고, 이를 만족시키는 세 자연수 a, b, c는 자연수 k에 대하여 $k+3$, $k+1$, k 또는 $k+3$, $k+2$, k이어야* 하므로

$k+3$, $k+1$, k를 ㉢에 대입하면

$k+3+k+1+k=19$

$3k=15 \qquad \therefore k=5$

$k+3$, $k+2$, k를 ㉢에 대입하면

$k+3+k+2+k=19$

$3k=14 \qquad \therefore k=\frac{14}{3}$

그런데 k는 자연수이므로 모순이다.

따라서 세 자연수 a, b, c는 각각 8, 6, 5이다.

(i), (ii)에서 $a=8$, $b=6$, $c=5$이므로

$abc=8\times6\times5=240$

답 240

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$a>b>c$이면 $b-c$, $a-b$, $a-c$ 중에서 가장 큰 수는 $a-c$이므로 (ii)에서 가능한 경우는 다음과 같다.

① $b-c=1$, $a-b=2$, $a-c=3$일 때,
$c=k$ (k는 자연수)로 놓으면 $a=k+3$, $b=k+1$

② $b-c=2$, $a-b=1$, $a-c=3$일 때,
$c=k$ (k는 자연수)로 놓으면 $a=k+3$, $b=k+2$

①, ②에서 $(b-c)(a-b)(a-c)=1\times2\times3$을 만족시키는 a, b, c의 값은 각각 자연수 k에 대하여 $k+3$, $k+1$, k 또는 $k+3$, $k+2$, k이다.

05 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 $a=0$, $b=-2$를 대입하여 $f(x)$를 인수분해한 후 서로 다른 일차식의 개수를 구한다.
❷ 단계	ㄴ은 $b=2$를 대입하여 $f(x)$를 인수분해한 후, 서로 다른 일차식의 개수가 1이 되는 a의 개수를 구한다.
❸ 단계	ㄷ은 $b=a^2+2$를 대입하여 a의 값에 따른 일차식의 개수를 구한다.

ㄱ. $a=0$, $b=-2$이므로

$f(x)=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x+1)^2(x-1)^2$

즉, 서로 다른 일차식의 개수는 2이므로

$N(0,\ -2)=2$이다. (참)

ㄴ. $b=2$이므로

$f(x)=x^4+2ax^3+2x^2+2ax+1$

$=x^2\left(x^2+2ax+2+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}+2a\right)$

$=(x^2+1)(x^2+2ax+1)$

이때 $N(a,\ 2)=1$이므로 $f(x)$의 인수 중에서 서로 다른 일차식이 1개이려면 인수 $x^2+2ax+1$이 완전제곱식이어야 한다.

즉, $a=\pm1$이므로 조건을 만족시키는 a는 2개이다. (참)

ㄷ. $b=a^2+2$이면

$$f(x)=x^4+2ax^3+(a^2+2)x^2+2ax+1$$
$$=x^2\left(x^2+2ax+a^2+2+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+a^2\right\}$$
$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+a\right)^2=(x^2+ax+1)^2$$

이므로 $\underbrace{a\neq\pm2\text{이면 일차식인 인수는 없다}}_{N(a,b)=0}$. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

06 해결단계

❶ 단계	x^4-ax^2+1을 치환하여 인수분해하는 경우와 이차항을 분리하여 인수분해하는 경우로 나눈다.
❷ 단계	❶ 단계에서 나눈 경우에 따라 인수분해가 될 수 있는 자연수 a의 개수를 구한다.

x^4+ax^2+b 꼴의 다항식이 인수분해되려면 다음과 같은 경우로 나눌 수 있다.

(i) x^4-ax^2+1이 완전제곱식인 경우

$x^2=X$로 놓으면 $x^4-ax^2+1=X^2-aX+1$

이차방정식 $X^2-aX+1=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4=0,\ (a+2)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a$는 자연수)

(ii) $x^4-ax^2+1=(x^2+1)^2-(Ax)^2$ (A는 자연수) 꼴인 경우

$$x^4-ax^2+1=(x^4+2x^2+1)-(a+2)x^2$$
$$=(x^2+1)^2-(a+2)x^2$$

위의 식이 인수분해되려면 $a+2$가 제곱수이어야 하고 a는 100 이하의 자연수이므로

$a+2=2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots,\ 10^2$

$\therefore\ a=2,\ 7,\ 14,\ \cdots,\ 98$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 9이다.

(iii) $x^4-ax^2+1=(x^2-1)^2-(Bx)^2$ (B는 자연수) 꼴인 경우

$$x^4-ax^2+1=(x^4-2x^2+1)-(a-2)x^2$$
$$=(x^2-1)^2-(a-2)x^2$$

위의 식이 인수분해되려면 $a-2$가 제곱수이어야 하고 a는 100 이하의 자연수이므로

$a-2=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 9^2$

$\therefore\ a=3,\ 6,\ 11,\ \cdots,\ 83$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 9이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 a의 개수는

$1+9+9-\underbrace{1}_{a=2\text{는 중복}}=18$ 답 18

• 다른 풀이 •

(i) $x^4-ax^2+1=(x^2+mx+1)(x^2+nx+1)$ ($m,\ n$은 정수)일 때,

$$x^4-ax^2+1$$
$$=(x^2+mx+1)(x^2+nx+1)$$
$$=x^4+(m+n)x^3+(mn+2)x^2+(m+n)x+1$$

$m+n=0,\ mn+2=-a$이므로 $n=-m$을 $mn+2=-a$에 대입하면

$a=m^2-2$ ……㉠

이때 $1\le a\le100$인 자연수이므로

$1\le m^2-2\le100$에서 $3\le m^2\le102$

$\therefore\ m=\pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \cdots,\ \pm10$

이를 ㉠에 각각 대입하면 $a=2,\ 7,\ 14,\ \cdots,\ 98$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 9이다.

(ii) $x^4-ax^2+1=(x^2+mx-1)(x^2+nx-1)$ ($m,\ n$은 정수)일 때,

$$x^4-ax^2+1$$
$$=(x^2+mx-1)(x^2+nx-1)$$
$$=x^4+(m+n)x^3+(mn-2)x^2-(m+n)x+1$$

$m+n=0,\ mn-2=-a$이므로 $n=-m$을 $mn-2=-a$에 대입하면

$a=m^2+2$ ……㉡

이때 $1\le a\le100$인 자연수이므로

$1\le m^2+2\le100$에서 $0\le m^2\le98$

$\therefore\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots,\ \pm9$

이를 ㉡에 각각 대입하면 $a=2,\ 3,\ 6,\ 11,\ \cdots,\ 83$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 10이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a의 개수는

$9+10-\underbrace{1}_{a=2\text{는 중복}}=18$

Ⅱ 방정식과 부등식

03. 복소수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.29~30

01 ④	02 ④	03 2	04 ②	05 9
06 28	07 ①	08 400	09 1	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ③	14 $-x-2y+5$	

01 ① $i^{1001}=(i^4)^{250}\times i=1\times i=i$ (거짓)

② $7-5i$는 순허수가 아니다. (거짓)

③ $\overline{-1+5i}=-1-5i$의 켤레복소수는 $-1+5i$이다. (거짓)

④ $5-2i$의 실수부분은 5, 허수부분은 -2이다. (참)

⑤ 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$가 실수이면 $b=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

02 $\frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{2a+ai+6i-3}{4+1}$

$=\frac{(2a-3)+(a+6)i}{5}$

$=\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$

이므로 복소수 $\frac{a+3i}{2-i}$의 실수부분은 $\frac{2a-3}{5}$이고 허수부분은 $\frac{a+6}{5}$이다.

실수부분과 허수부분의 합이 3이므로

$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=3$, $\frac{3a+3}{5}=3$

$3a+3=15$ $\therefore a=4$ 답 ④

03 $1+2i+\frac{1+i}{1-i}+\frac{7-i}{1+2i}$

$=1+2i+\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}+\frac{(7-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=1+2i+\frac{1+2i-1}{1+1}+\frac{7-14i-i-2}{1+4}$

$=1+2i+\frac{2i}{2}+\frac{5-15i}{5}$

$=1+2i+i+1-3i$

$=2$ 답 2

04 $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ ······㉠

이때

$x+y=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}+\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{4}{1+3}=1$,

$xy=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}\times\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{4}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{4}{1+3}=1$

이므로 ㉠에서

$\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}=\frac{1^3-3\times1\times1}{1}=-2$ 답 ②

05 $a=(2-n-5i)^2=\{(2-n)-5i\}^2$

$=(2-n)^2-25-10(2-n)i$

$=(n^2-4n-21)-10(2-n)i$

복소수 a에 대하여 a^2이 실수가 되기 위해서는 a가 실수 또는 순허수이어야 한다.

(i) 복소수 a가 실수일 때,

$2-n=0$에서 $n=2$

(ii) 복소수 a가 순허수일 때,

$n^2-4n-21=0$이고 $2-n\neq0$

$n^2-4n-21=0$에서 $(n+3)(n-7)=0$

$\therefore n=-3$ 또는 $n=7$ ······㉠

$2-n\neq0$에서 $n\neq2$ ······㉡

n은 자연수이므로 ㉠, ㉡에서 $n=7$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$2+7=9$ 답 9

06 $(x^2-y^2-2x+5y)+(5-xy)i=2x+y+2i$에서

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-y^2-2x+5y=2x+y$ ······㉠

$5-xy=2$ ······㉡

㉠에서 $x^2-y^2-4x+4y=0$

$(x-y)(x+y)-4(x-y)=0$

$(x-y)(x+y-4)=0$ $\therefore x+y=4$ ($\because x\neq y$)

㉡에서 $xy=3$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\times3\times4=28$ 답 28

07 $i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots+199i^{199}-200i^{200}$

$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots-199i-200$

$=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots$

$+(197i+198-199i-200)$

$=(-2-2i)\times50$

$=-100-100i$

즉, $-100-100i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-100$, $b=-100$

$\therefore a+b=-200$

답 ①

08 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2=i^2=-1$

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^4=(-i)^4=1$

$$f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$$
$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^n+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}^n$$
$$=(-1)^n+1^n=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 2 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(400)$

$=0+2+0+2+\cdots+0+2$

$=2\times200=400$

답 400

09 $z=\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}$라 하면

$$z=\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}$$
$$=\frac{2(-1-\sqrt{3}i)}{1+3}=\underbrace{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}_{*}$$

$$z^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3=zz^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+3}{4}=1$$

$$\therefore z^5=z^2z^3=z^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

** 따라서 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

답 1

• 다른 풀이 1 •

*에서 $z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이므로 $2z+1=-\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$, $4z^2+4z+4=0$

$\therefore z^2+z+1=0$ ……㉠

㉠의 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$, $z^3-1=0$

$\therefore z^3=1$ ……㉡

$\therefore z^5=z^3z^2=z^2$ ($\because$ ㉡)

$=-1-z$ ($\because$ ㉠)

$=-1-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

다음은 **와 같다.

• 다른 풀이 2 •

$z=a+bi=\left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}\right)^5$이라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}\right)^5\times\overline{\left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}\right)^5}$$
$$=\left(\frac{2}{-1+\sqrt{3}i}\times\frac{\overline{2}}{\overline{-1+\sqrt{3}i}}\right)^5$$
$$=\left\{\frac{2\times2}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}\right\}^5=\left(\frac{4}{4}\right)^5=1$$

10 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

조건 ㈎에서 $(z-\bar{z}-i)+z\bar{z}=5-3i$이므로

$\{(a+bi)-(a-bi)-i\}+(a+bi)(a-bi)=5-3i$

$\therefore (a^2+b^2)+(2b-1)i=5-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2=5$, $2b-1=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\pm2$, $b=-1$ ……㉠

이때 조건 ㈏에서

$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a>0$이므로

$a>0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-1$

따라서 조건을 만족시키는 복소수 z는 $2-i$이다.

답 ④

11 ㄱ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$f(z)=z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq0$ (참)

ㄴ. $f(z+\omega)=(z+\omega)\overline{(z+\omega)}=(z+\omega)(\bar{z}+\bar{\omega})$

$=z\bar{z}+z\bar{\omega}+\omega\bar{z}+\omega\bar{\omega}$

$f(z)+f(\omega)=z\bar{z}+\omega\bar{\omega}$

$\therefore f(z+\omega)\neq f(z)+f(\omega)$ (거짓)

ㄷ. $f(z\omega)=z\omega\times\overline{z\omega}=z\omega\times\bar{z}\bar{\omega}$

$=z\bar{z}\times\omega\bar{\omega}=f(z)f(\omega)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

12 $x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x+1=-\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4x^2+4x+1=-3$, $4x^2+4x+4=0$

$\therefore x^2+x+1=0$ ……㉠

㉠의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0$ $\quad\therefore x^3=1$ ……㉡

$\therefore 3x^3-4x^2+2x+1$

$=3-4(-x-1)+2x+1$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=6x+8$

$=6\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+8$

$=5-3\sqrt{3}i$

답 ①

• 다른 풀이 •

$3x^3-4x^2+2x+1$을 x^2+x+1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3x-7 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,3x^3-4x^2+2x+1} \\ \underline{3x^3+3x^2+3x} \\ -7x^2-x+1 \\ \underline{-7x^2-7x-7} \\ 6x+8 \end{array}$$

$\therefore\ 3x^3-4x^2+2x+1=(x^2+x+1)(3x-7)+6x+8$

$=6x+8\ (\because ㉠)$

$=6\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+8$

$=5-3\sqrt{3}i$

13

$\sqrt{-4}\sqrt{-9}+\sqrt{-2}\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}+\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$

$=2i\times3i+\sqrt{2}i\times3\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}i}+\dfrac{4\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}i}$

$=-6+6i+\dfrac{2}{i}+2$

$=-4+6i-2i$

$=-4+4i$

*즉, $a+bi=-4+4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-4,\ b=4$

$\therefore\ a^2+b^2=(-4)^2+4^2=32$ **답** ③

• 다른 풀이 •

$\sqrt{-4}\sqrt{-9}+\sqrt{-2}\sqrt{18}+\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-6}}+\dfrac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-8}}$

$=-\sqrt{(-4)\times(-9)}+\sqrt{(-2)\times18}-\sqrt{\dfrac{24}{-6}}+\sqrt{\dfrac{-32}{-8}}$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{-36}-\sqrt{-4}+\sqrt{4}$

$=-6+6i-2i+2$

$=-4+4i$

다음은 *와 같다.

14

$(x^2-1)(y^2-1)\neq0$이므로

$(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)\neq0$

$\therefore\ x\neq-1$이고 $x\neq1$이고 $y\neq-1$이고 $y\neq1$ ……㉠

$\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}=-\sqrt{(x-1)(y-1)}$이므로

$x-1<0,\ y-1<0\ (\because ㉠)$

$\therefore\ x<1,\ y<1$ ……㉡

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+1}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{y+1}}$이므로

$x+1>0,\ y+1<0\ (\because ㉠)$

$\therefore\ x>-1,\ y<-1$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $-1<x<1,\ y<-1$이므로

$x-2<0,\ y-3<0,\ y<0$

$\therefore\ |x-2|+|y-3|+\sqrt{y^2}=-(x-2)-(y-3)-y$

$=-x-2y+5$

답 $-x-2y+5$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.31~35

01 ④	02 ①	03 15	04 ③	05 $-4+6i$
06 ①	07 13	08 75	09 ①	10 7
11 ⑤	12 240	13 ③	14 19	15 169
16 ④	17 ③	18 16	19 $2+3i$	20 ④
21 0	22 ②	23 5	24 3	25 ①
26 392	27 $4i$	28 ②	29 ④	30 -144

01

$z=(x^2-x-6)+(x^2+x-2)i$

$=(x+2)(x-3)+(x+2)(x-1)i$

복소수 z가 실수가 되기 위해서는 허수부분이 0이어야 하므로

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 복소수 z는 0이 아니므로 $x\neq-2$이어야 한다.

$\therefore\ x_1=1$

또한, 복소수 z^2이 음의 실수가 되기 위해서는 복소수 z가 순허수이어야 하므로

$(x+2)(x-3)=0$이고 $(x+2)(x-1)\neq0$

$(x+2)(x-3)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=3$ ……㉠

$(x+2)(x-1)\neq0$에서 $x\neq-2$이고 $x\neq1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$

$\therefore\ x_2=3$

$\therefore\ x_1+x_2=1+3=4$ **답** ④

02

ㄱ. $\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d$는 실수)라 하자.

$\alpha\beta=0$이면 $(a+bi)(c+di)=0$

위의 식의 양변에 켤레복소수 $(a-bi)(c-di)$를 곱하면

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$

(i) $a^2+b^2=0$인 경우

$a,\ b$가 실수이므로 $a=b=0$

$\therefore\ \alpha=a+bi=0+0=0$

(ii) $c^2+d^2=0$인 경우

$c,\ d$가 실수이므로 $c=d=0$

$\therefore\ \beta=c+di=0+0=0$

(i), (ii)에서 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ (참)

ㄴ. (반례) $\alpha=1+i,\ \beta=1-i$이면

$\alpha^2+\beta^2=(1+i)^2+(1-i)^2=2i+(-2i)=0$이지만

$\alpha\neq0$이고 $\beta\neq0$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$이면

$\alpha+\beta i=1+i\times i=1+(-1)=0$이지만 $\alpha\neq0$이고

$\beta\neq0$이다. (거짓)

ㄹ. (반례) $\alpha=4,\ \beta=2$이면

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=8$이므로 모두 실수이지만 $\overline{\alpha}\neq\beta$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

03 $f(2,\ 1)=\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\dfrac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{2+1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

$f(4,\ 2)=\dfrac{2+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i}=\dfrac{(2+\sqrt{2}i)^2}{(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{2+4\sqrt{2}i}{4+2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

$f(6,\ 3)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-\sqrt{3}i}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{3}i)(\sqrt{6}+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{3+6\sqrt{2}i}{6+3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

$\vdots$

$f(30,\ 15)=\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{15}i}{\sqrt{30}-\sqrt{15}i}=\dfrac{(\sqrt{30}+\sqrt{15}i)^2}{(\sqrt{30}-\sqrt{15}i)(\sqrt{30}+\sqrt{15}i)}$

$=\dfrac{15+30\sqrt{2}i}{30+15}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$

$\therefore\ f(2,\ 1)+f(4,\ 2)+f(6,\ 3)+\cdots+f(30,\ 15)$

$=15\times\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)$

$=5+10\sqrt{2}i$

*즉, $p+q\sqrt{2}i=5+10\sqrt{2}i$이므로 $p=5,\ q=10$

$\therefore\ p+q=5+10=15$ 답 15

• 다른 풀이 •

$f(a,\ b)=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}i}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}i)(\sqrt{a}+\sqrt{b}i)}$

$=\dfrac{(a-b)+2\sqrt{ab}i}{a+b}$

$a=2k,\ b=k$ (k는 자연수)로 놓으면

$f(2k,\ k)=\dfrac{(2k-k)+2\sqrt{2k^2}i}{2k+k}=\dfrac{k+2\sqrt{2}ki}{3k}$

$=\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3}$

$\therefore\ f(2,\ 1)+f(4,\ 2)+f(6,\ 3)+\cdots+f(30,\ 15)$

$=15\times\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3}$

$=5+10\sqrt{2}i$

다음은 *와 같다.

04 복소수 z에 대하여 z^4이 음의 실수가 되기 위해서는 z^2이 순허수가 되어야 한다. 이때

$z^2=(a-b)^2+2(a-b)(a+b-4)i-(a+b-4)^2$

$=-4(a-2)(b-2)+2(a-b)(a+b-4)i$

이므로

$-4(a-2)(b-2)=0$ ……㉠

$2(a-b)(a+b-4)\neq0$ ……㉡

㉠에서 $(a-2)(b-2)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $b=2$

㉡에서 $(a-b)(a+b-4)\neq0$

$\therefore\ a\neq b$이고 $a+b-4\neq0$ ……㉢

(i) $a=2$일 때,

㉢에서 $b\neq2$

5 이하의 두 자연수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)$

(ii) $b=2$일 때,

㉢에서 $a\neq2$

5 이하의 두 자연수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (4,\ 2),\ (5,\ 2)$

(i), (ii)에서 z^4이 음의 실수가 되도록 하는 5 이하의 두 자연수 $a,\ b$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+4=8$ 답 ③

05 서로 다른 두 복소수 $x,\ y$에 대하여

$x^2-y=2i$ ……㉠, $y^2-x=2i$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $x^2-y^2+x-y=0$

$(x+y)(x-y)+(x-y)=0$

$\therefore\ (x-y)(x+y+1)=0$

그런데 $x\neq y$이므로

$x+y+1=0$ $\therefore\ x+y=-1$ ……㉢

㉠$+$㉡을 하면 $x^2+y^2-x-y=4i$

$(x+y)^2-2xy-(x+y)=4i$

$1-2xy+1=4i$ ($\because$ ㉢)

$\therefore\ xy=1-2i$

$\therefore\ (x+y)^3-3xy=(-1)^3-3(1-2i)$

$=-4+6i$ 답 $-4+6i$

06 이차방정식 $(2+i)x^2+(k^2-i)x-2i=0$의 실근을 $x=a$라 하면

$(2+i)a^2+(k^2-i)a-2i=0$

$(2a^2+ak^2)+(a^2-a-2)i=0$

$a,\ k$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a^2+ak^2=0$ ……㉠, $a^2-a-2=0$ ……㉡

㉡에서 $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

㉠에서 $2-k^2=0,\ k^2=2$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{2}$

(ii) $a=2$일 때,

㉠에서 $8+2k^2=0$ $\therefore\ k^2=-4$

k는 실수이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=\pm\sqrt{2}$ 답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

허수는 대소를 비교할 수 없으므로 이차방정식의 계수가 복소수일 때에는 판별식을 이용하여 근을 판별하기 어렵다.
이차방정식 $(2+i)x^2+(k^2-i)x-2i=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(k^2-i)^2+8i(2+i)=k^4-2ik^2-1+16i-8$
$=k^4-9+(16-2k^2)i$
이때 $k^4-9,\ (16-2k^2)i$의 대소를 비교할 수 없으므로 이 경우 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 없다.

07 $\frac{1}{i}=-i$, $\frac{1}{i^2}=-1$, $\frac{1}{i^3}=i$, $\frac{1}{i^4}=1$이므로 자연수 k에 대하여

$\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

$=\begin{cases} -i & (n=4k-3\text{일 때}) \\ 1-i & (n=4k-2\text{일 때}) \\ 1 & (n=4k-1\text{일 때}) \\ 0 & (n=4k\text{일 때}) \end{cases}$

즉, $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}=\frac{1}{i}=-i$가 성립하려면 $n=4k-3$ 꼴이어야 한다.

이때 $1\le n\le 50$이므로

$1\le 4k-3\le 50$

$4\le 4k\le 53$　　$\therefore 1\le k\le \frac{53}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 13의 13개이므로 구하는 자연수 n의 개수는 13이다.　　답 13

08 $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}=i^n+i^{2n}+i^{3n}=i^n+(-1)^n+(-i)^n$

자연수 k에 대하여

(i) $n=4k-3$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=i-1-i=-1$

(ii) $n=4k-2$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-1+1-1=-1$

(iii) $n=4k-1$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=-i-1+i=-1$

(iv) $n=4k$일 때,

$i^n+(-1)^n+(-i)^n=1+1+1=3$

(i)~(iv)에서 $z^n+z^{2n}+z^{3n}=-1$을 만족시키는 n은 4의 배수가 아닌 100 이하의 자연수이다.

따라서 100 이하의 자연수 중 4의 배수는 25개이므로 구하는 자연수 n의 개수는

$100-25=75$　　답 75

단계	채점 기준	배점
(가)	복소수 z를 간단히 한 후, $z^n+z^{2n}+z^{3n}$을 정리한 경우	30%
(나)	자연수 k에 대하여 n이 $4k-3$, $4k-2$, $4k-1$, $4k$일 때 $z^n+z^{2n}+z^{3n}$의 값을 각각 구한 경우	50%
(다)	조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구한 경우	20%

BLACKLABEL 특강　참고

$z^n+z^{2n}+z^{3n}=-1$에서

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+1=0$, $(z^n+1)+z^{2n}(z^n+1)=0$, $(z^n+1)(z^{2n}+1)=0$

즉, $z^n=-1$ 또는 $z^{2n}=-1$에서

$z^n=-1$ 또는 $z^n=i$ 또는 $z^n=-i$

따라서 $i^n=-1$ 또는 $i^n=i$ 또는 $i^n=-i$이므로 n은 4의 배수가 아닌 자연수이어야 한다.

09 $z_1=2+i$

$z_2=iz_1=i(2+i)=2i-1$

$z_3=iz_2=i(2i-1)=-2-i$

$z_4=iz_3=i(-2-i)=-2i+1$

$z_5=iz_4=i(-2i+1)=2+i=z_1$

$\vdots$

즉, 자연수 k에 대하여

$z_n=\begin{cases} 2+i & (n=4k-3\text{일 때}) \\ 2i-1 & (n=4k-2\text{일 때}) \\ -2-i & (n=4k-1\text{일 때}) \\ -2i+1 & (n=4k\text{일 때}) \end{cases}$

이때 $999=4\times250-1$이므로

$z_{999}=z_{4\times250-1}=-2-i$　　답 ①

10 $(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2=-4$이므로 자연수 k에 대하여

$(1-i)^{4k}=(-4)^k=(-1)^k\times4^k$

$=\begin{cases} -4^k & (k\text{는 홀수}) \\ 4^k & (k\text{는 짝수}) \end{cases}$

즉, 주어진 등식 $(1-i)^m=-4^n$이 성립하려면 홀수 k에 대하여 $m=4k$, $n=k$이어야 한다.

이때 m, n은 모두 두 자리의 자연수이므로

$10\le m\le 99$, $10\le n\le 99$

$10\le 4k\le 99$, $10\le k\le 99$에서

$10\le k\le \frac{99}{4}$

$\therefore k=11, 13, 15, 17, 19, 21, 23$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(44, 11)$, $(52, 13)$, $(60, 15)$, $(68, 17)$, $(76, 19)$, $(84, 21)$, $(92, 23)$의 7개이다.　　답 7

11 ㄱ. $z_2=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2=\frac{-2}{2i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$이므로

$z_4=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^4=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2\right\}^2=i^2=-1$ (참)

ㄴ. $z_8={z_4}^2=(-1)^2=1$

이때 $1111=8\times138+7$이므로

$z_{1111}={z_8}^{138}\times z_7=z_7$ (참)

ㄷ. $z_3=z_1\times z_2=iz_1$,

$z_5=z_1\times z_4=-z_1$,

$z_7=z_1\times z_6=z_1\times z_2\times z_4=-iz_1$

$\therefore z_1+z_3+z_5+z_7=z_1(1+i-1-i)=0$

또한, $z_9=z_1\times z_8=z_1$이므로

$z_{n+8}=z_n$

$\therefore z_1+z_3+z_5+\cdots+z_{99}$

$=(z_1+z_3+z_5+z_7)+(z_9+z_{11}+z_{13}+z_{15})+\cdots$

$+(z_{89}+z_{91}+z_{93}+z_{95})+z_{97}+z_{99}$

$=z_{97}+z_{99}$

이때 $97=8\times12+1$, $99=8\times12+3$이므로

$$z_{97}+z_{99}=z_1+z_3=z_1+iz_1$$
$$=(1+i)z_1$$
$$=(1+i)\times\frac{\sqrt{2}i}{1+i}=\sqrt{2}i$$

$\therefore z_1+z_3+z_5+\cdots+z_{99}=\sqrt{2}i$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

12

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$,

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$이므로

$z_1^8=z_1^{16}=z_1^{24}=\cdots=z_1^{8k}=1$ (단, k는 자연수)

$z_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$라 하면

$z_2^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$

$z_2^6=(z_2^3)^2=(-1)^2=1$이므로

$z_2^6=z_2^{12}=z_2^{18}=\cdots=z_2^{6l}=1$ (단, l은 자연수)

따라서 $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=2$를 만족시키려면

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n=1$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=1$을 동시에 만족시켜야 하므로 자연수 n은 8과 6의 공배수이어야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 n은 24, 48, 72, 96이므로 그 합은 $24+48+72+96=240$ 답 240

13

ㄱ. $z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2\times z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{4}{4}=1$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $z^3=1$이므로

$$z^4+z^5=z^3\times z+z^3\times z^2=z+z^2$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1 \text{ (참)}$$

ㄷ. 자연수 k에 대하여

$z=z^4=z^7=\cdots=z^{3k-2}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^2=z^5=z^8=\cdots=z^{3k-1}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^6=z^9=\cdots=z^{3k}=1$

(i) $n=3k-2$일 때,

$z^n=z$이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$

$=z+z^2+z^3+z^4+z^5=z+z^2+1+z+z^2$

$=-1+1-1=-1$

즉, 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 1, 4, 7, $\cdots$, 100의 34개이다.

(ii) $n=3k-1$일 때,

$z^n=z^2$이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$

$=z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}=z^2+z+1+z^2+z$

$=-1+1-1=-1$

즉, 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 2, 5, 8, $\cdots$, 98의 33개이다.

(iii) $n=3k$일 때,

$z^n=1$이므로

$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}=1+1+1+1+1=5$

즉, 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 없다.

(i), (ii), (iii)에서 100 이하의 자연수 n의 개수는

$34+33=67$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

14 해결단계

❶ 단계	$\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$의 거듭제곱의 규칙성을 찾는다.
❷ 단계	❶ 단계의 결과를 이용하여 $f(n)$의 규칙성을 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 자연수 m의 개수를 구한다.

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

$$z_1^3=z_1^2\times z_1=-i\times\frac{\sqrt{2}}{1+i}=-\frac{\sqrt{2}i}{1+i}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{2}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$

$z_1^5=-z_1$, $z_1^6=-z_1^2$, $z_1^7=-z_1^3$, $z_1^8=1$, $\cdots$

$z_2=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$라 하면

$z_2^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$

$$z_2^3=z_2^2\times z_2=i\times\frac{\sqrt{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{2}i}{1-i}$$
$$=\frac{\sqrt{2}i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{2}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$z_2^4=(z_2^2)^2=i^2=-1$

$z_2^5=-z_2$, $z_2^6=-z_2^2$, $z_2^7=-z_2^3$, $z_2^8=1$, $\cdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$f(n)=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n=z_1^n+z_2^n$은 다음과 같다.

$$f(1)=z_1+z_2=\frac{\sqrt{2}}{1+i}+\frac{\sqrt{2}}{1-i}$$
$$=\frac{\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{2}(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$f(2)=z_1^{\,2}+z_2^{\,2}=-i+i=0$

$f(3)=z_1^{\,3}+z_2^{\,3}$

$=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=-\sqrt{2}$

$f(4)=z_1^{\,4}+z_2^{\,4}=(-1)+(-1)=-2$

$f(5)=z_1^{\,5}+z_2^{\,5}=-z_1-z_2=-f(1)=-\sqrt{2}$

$f(6)=z_1^{\,6}+z_2^{\,6}=-z_1^{\,2}-z_2^{\,2}=-f(2)=0$

$f(7)=z_1^{\,7}+z_2^{\,7}=-z_1^{\,3}-z_2^{\,3}=-f(3)=\sqrt{2}$

$f(8)=z_1^{\,8}+z_2^{\,8}=1+1=2$

즉, $1\le m\le 8$일 때 $f(m)>1$을 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 7, 8이다.

이때 $z_1^{\,n+8}=z_1^{\,n}$, $z_2^{\,n+8}=z_2^{\,n}$에서 $f(n+8)=f(n)$이고,

$50=8\times 6+2$이므로

$f(49)=f(1)=\sqrt{2}$, $f(50)=f(2)=0$

따라서 $f(m)>1$을 만족시키는 50 이하의 자연수 m의 개수는

$3\times 6+1=19$ **답** 19

15 $z=a+bi$라 하면 $\overline{(a+bi)^2}=\overline{z^2}=\overline{z}^2$이므로

$\overline{z}^2=3-2i$

이때 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(a-bi)^4=\overline{z}^4=(\overline{z}^2)^2=(3-2i)^2=5-12i$

즉, $5-12i=\dfrac{c+di}{5+12i}$이므로

$c+di=(5-12i)(5+12i)=25+144=169$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$c=169$, $d=0$

$\therefore c+d=169$ **답** 169

16 $\omega=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}$에서 $\overline{\omega}=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{2}$

$\therefore \omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=\dfrac{1+2}{4}=\dfrac{3}{4}$ ……㉠

$*\therefore z\overline{z}=\dfrac{3\omega+1}{5\omega-1}\times\overline{\left(\dfrac{3\omega+1}{5\omega-1}\right)}$

$=\dfrac{3\omega+1}{5\omega-1}\times\dfrac{3\overline{\omega}+1}{5\overline{\omega}-1}$

$=\dfrac{9\omega\overline{\omega}+3(\omega+\overline{\omega})+1}{25\omega\overline{\omega}-5(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{9\times\frac{3}{4}+3\times 1+1}{25\times\frac{3}{4}-5\times 1+1}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{43}{59}$ **답** ④

• 다른 풀이 •

$\omega=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}$에서 $2\omega-1=\sqrt{2}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4\omega^2-4\omega+1=-2$

$\therefore 4\omega^2-4\omega+3=0$

이때 ω와 $\overline{\omega}$는 계수가 실수인 이차방정식 $4x^2-4x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=\dfrac{3}{4}$

다음은 *와 같다.

17 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

즉, $a^2+b^2=0$이므로

$a=b=0$

$\therefore z=0$ (참)

ㄴ. $z^2-\overline{z}=(a+bi)^2-(a-bi)$

$=(a^2-b^2-a)+(2ab+b)i$

$(a^2-b^2-a)+(2ab+b)i$가 실수이므로

$2ab+b=0$, $b(2a+1)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b\ne 0$이면 z는 실수가 아니다. (거짓)

ㄷ. $\dfrac{zi}{1-z}-\dfrac{\overline{z}i}{1-\overline{z}}$

$=\dfrac{zi(1-\overline{z})-\overline{z}i(1-z)}{(1-z)(1-\overline{z})}$

$=\dfrac{zi-z\overline{z}i-\overline{z}i+z\overline{z}i}{1-(z+\overline{z})+z\overline{z}}$

$=\dfrac{(z-\overline{z})i}{1-(z+\overline{z})+z\overline{z}}$

$=\dfrac{\{(a+bi)-(a-bi)\}i}{1-\{(a+bi)+(a-bi)\}+(a+bi)(a-bi)}$

$=\dfrac{-2b}{1-2a+a^2+b^2}$

따라서 $\dfrac{zi}{1-z}-\dfrac{\overline{z}i}{1-\overline{z}}$는 실수이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

• 다른 풀이 •

ㄷ. $\dfrac{zi}{1-z}-\dfrac{\overline{z}i}{1-\overline{z}}$

$=\dfrac{zi}{1-z}+\dfrac{\overline{z}(-i)}{1-\overline{z}}=\dfrac{zi}{1-z}+\dfrac{\overline{z}\,\overline{i}}{1-\overline{z}}$

$=\dfrac{zi}{1-z}+\dfrac{\overline{zi}}{\overline{1-z}}=\dfrac{zi}{1-z}+\overline{\left(\dfrac{zi}{1-z}\right)}$

따라서 $\dfrac{zi}{1-z}-\dfrac{\overline{z}i}{1-\overline{z}}$는 실수이다. (참)

18 $\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2=\overline{\alpha^2-\beta^2}=3+6i$이므로

$\alpha^2-\beta^2=3-6i$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=3-6i$

$(2+i)(\alpha-\beta)=3-6i$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{3-6i}{2+i}=\frac{(3-6i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{-15i}{5}=-3i$

$\alpha-\beta=-3i$, $\alpha+\beta=2+i$를 연립하여 풀면

$\alpha=1-i$, $\beta=1+2i$

따라서 $\alpha\beta=(1-i)(1+2i)=3+i$, $\overline{\alpha\beta}=3-i$이므로

$(\alpha\beta)^2+(\overline{\alpha\beta})^2=(3+i)^2+(3-i)^2$
$=8+6i+8-6i$
$=16$ 답 16

19 $z=x+yi$, $\omega=a+bi$ (x, y, a, b는 실수)라 하자.

$\overline{z}=x-yi$이므로

$(2-3i)z+\omega\overline{z}$
$=(2-3i)(x+yi)+(a+bi)(x-yi)$
$=(2x+3y+ax+by)+(-3x+2y+bx-ay)i$

위의 복소수가 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$-3x+2y+bx-ay=0$

$\therefore (-3+b)x+(2-a)y=0$

임의의 실수 x, y에 대하여 위의 등식이 성립하므로

$-3+b=0$, $2-a=0$ $\therefore a=2$, $b=3$

$\therefore \omega=2+3i$ 답 $2+3i$

• 다른 풀이 •

$(2-3i)z+\omega\overline{z}$가 실수이므로

$(2-3i)z+\omega\overline{z}=\overline{(2-3i)z+\omega\overline{z}}$
$=(2+3i)\overline{z}+\overline{\omega}z$

즉, $(2-3i)z-\overline{\omega}z=(2+3i)\overline{z}-\omega\overline{z}$에서

$(2-3i-\overline{\omega})z=(2+3i-\omega)\overline{z}$

임의의 복소수 z에 대하여 위의 등식이 성립하므로

$2-3i-\overline{\omega}=0$, $2+3i-\omega=0$

$\therefore \omega=2+3i$

20 실수 a, b, c, d, e, f에 대하여

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$라 하자.

ㄱ. $\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$이므로

$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$
$=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$
$=ac+bd-adi+bci+ac+bd+adi-bci$
$=2(ac+bd)$

즉, $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$는 항상 실수이다.

ㄴ. $\overline{z_3}=e-fi$이므로

$z_3+\overline{z_3}=(e+fi)+(e-fi)=2e$ ……㉠

$z_3\overline{z_3}=(e+fi)(e-fi)=e^2+f^2$ ……㉡

$\therefore z_3^2-z_3\overline{z_3}+\overline{z_3}^2=(z_3+\overline{z_3})^2-3z_3\overline{z_3}$
$=(2e)^2-3(e^2+f^2)$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=e^2-3f^2$

즉, $z_3^2-z_3\overline{z_3}+\overline{z_3}^2$은 항상 실수이다.

ㄷ. $\frac{\overline{z_3}i}{1+z_3}+\frac{\overline{z_3}i}{1+\overline{z_3}}$
$=\overline{z_3}i\left(\frac{1}{1+z_3}+\frac{1}{1+\overline{z_3}}\right)$
$=\overline{z_3}i\times\frac{2+(z_3+\overline{z_3})}{1+(z_3+\overline{z_3})+z_3\overline{z_3}}$
$=(e-fi)i\times\frac{2+2e}{1+2e+e^2+f^2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=(f+ei)\times\frac{2(1+e)}{(1+e)^2+f^2}$
$=\frac{2f(1+e)}{(1+e)^2+f^2}+\frac{2e(1+e)}{(1+e)^2+f^2}i$

이때 $\frac{2e(1+e)}{(1+e)^2+f^2}$의 값이 0이 아니면

$\frac{\overline{z_3}i}{1+z_3}+\frac{\overline{z_3}i}{1+\overline{z_3}}$는 실수가 아니다.

ㄹ. $(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)+(z_3+1)(z_3^2-z_3+1)$
$=(\overline{z_3}^3+1)+(z_3^3+1)$
$=z_3^3+\overline{z_3}^3+2$
$=(z_3+\overline{z_3})^3-3z_3\overline{z_3}(z_3+\overline{z_3})+2$
$=8e^3-3(e^2+f^2)\times2e+2$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=2e^3-6ef^2+2$

즉, $(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)+(z_3+1)(z_3^2-z_3+1)$은 항상 실수이다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

ㄱ. $\overline{z_1}z_2=\overline{(z_1\overline{z_2})}$이므로

$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{(z_1\overline{z_2})}=(\text{실수})$

ㄴ. ㉠, ㉡에서 $z_3+\overline{z_3}$, $z_3\overline{z_3}$는 모두 실수이므로

$z_3^2-z_3\overline{z_3}+\overline{z_3}^2=(z_3+\overline{z_3})^2-3z_3\overline{z_3}=(\text{실수})$

ㄹ. $(z_3+1)(z_3^2-z_3+1)=\overline{(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)}$이므로

$(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)+(z_3+1)(z_3^2-z_3+1)$
$=(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)+\overline{(\overline{z_3}+1)(\overline{z_3}^2-\overline{z_3}+1)}$
$=(\text{실수})$

21 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2+2z=(a+bi)^2+2(a+bi)$
$=a^2-b^2+2abi+2a+2bi$
$=(a^2+2a-b^2)+(2ab+2b)i$

이때 조건 ㈎에서 z^2+2z가 실수이므로

$2ab+2b=0$

$2b(a+1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $b=0$

즉, $z=-1+bi$ 또는 $z=a$이다.

(i) $z=-1+bi$일 때,

$\overline{z}=-1-bi$이고 조건 ㈏에서 $z\overline{z}=4$이므로

$(-1+bi)(-1-bi)=4$

$1+b^2=4$ $\therefore b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore z=-1-\sqrt{3}i$ 또는 $z=-1+\sqrt{3}i$

(ii) $z=a$일 때,

$\bar{z}=a$이고 조건 (나)에서 $z\bar{z}=4$이므로

$a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$

$\therefore z=-2$ 또는 $z=2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 복소수 z는

$z=-1-\sqrt{3}i$ 또는 $z=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $z=-2$ 또는 $z=2$이다.*

$z=-1-\sqrt{3}i$이면

$z^2=(-1-\sqrt{3}i)^2=-2+2\sqrt{3}i$

$\therefore z^4=(-2+2\sqrt{3}i)^2=-8-8\sqrt{3}i$

$z=-1+\sqrt{3}i$이면

$z^2=(-1+\sqrt{3}i)^2=-2-2\sqrt{3}i$

$\therefore z^4=(-2-2\sqrt{3}i)^2=-8+8\sqrt{3}i$

$z=-2$ 또는 $z=2$이면 $z^4=16$

따라서 서로 다른 z^4의 값의 합은

$(-8-8\sqrt{3}i)+(-8+8\sqrt{3}i)+16=0$ 답 0

• 다른 풀이 •

*에서 $z=-1-\sqrt{3}i$일 때 $z+1=-\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$z^2+2z+1=-3 \qquad \therefore z^2+2z+4=0$

위의 식의 양변에 $z-2$를 곱하면

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$z^3-8=0 \qquad \therefore z^3=8$

$\therefore z^4=z^3\times z=8z=8(-1-\sqrt{3}i)=-8-8\sqrt{3}i$

같은 방법으로 $z=-1+\sqrt{3}i$일 때 $z^3=8$이므로

$z^4=z^3\times z=8z=8(-1+\sqrt{3}i)=-8+8\sqrt{3}i$

$z=-2$ 또는 $z=2$일 때 $z^4=16$

따라서 서로 다른 z^4의 값의 합은

$(-8-8\sqrt{3}i)+(-8+8\sqrt{3}i)+16=0$

22 $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=4$이므로 $\frac{1}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}}{4}$, $\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\beta}}{4}$

또한, $\alpha+\beta=2-2\sqrt{3}i$에서 $\overline{\alpha+\beta}=2+2\sqrt{3}i$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\bar{\alpha}}{4}+\frac{\bar{\beta}}{4}=\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{4}=\frac{\overline{\alpha+\beta}}{4}$

$=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$z=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$이라 하면

$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$

$\therefore z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

이때 $2468=6\times411+2$이므로

$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^{2468}=z^{2468}=z^{6\times411+2}$

$=(z^6)^{411}\times z^2=z^2$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 답 ②

23 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}$에서 $4z+1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$16z^2+8z+1=-3$, $16z^2+8z+4=0$

$\therefore 4z^2+2z+1=0 \qquad \cdots\cdots$㉠

㉠의 양변에 $2z-1$을 곱하면

$(2z-1)(4z^2+2z+1)=0$, $8z^3-1=0$

$\therefore (2z)^3=1 \qquad \cdots\cdots$㉡

$\therefore 1+2z+2^2z^2+2^3z^3+\cdots+2^{10}z^{10}$

$=1+2z+(2z)^2+(2z)^3+\cdots+(2z)^{10}$

$=1+2z+(2z)^2+1+2z+(2z)^2+\cdots+1+2z$ ($\because$ ㉡)

$=1+2z$ ($\because$ ㉠)

$=1+2\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=a+bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 8b^2-4a^2=8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=5$ 답 5

BLACKLABEL 특강 참고

$2z=\omega$로 놓으면 $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이고

$a+bi=1+2z+2^2z^2+2^3z^3+\cdots+2^{10}z^{10}$

$=1+2z+(2z)^2+(2z)^3+\cdots+(2z)^{10}$

$=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{10}$

이므로 규칙성을 조금 더 쉽게 파악할 수 있다.

24 $z=\frac{-1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3z+1=\sqrt{2}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9z^2+6z+1=-2$, $9z^2+6z+3=0$

$\therefore 3z^2+2z+1=0 \qquad \cdots\cdots$㉠

$\therefore 3z^3+5z^2+z+1=(3z^2+2z+1)z+3z^2+1$

$=3z^2+1$ ($\because$ ㉠)

$=-2z$ ($\because$ ㉠)

즉, $\frac{1}{3z^3+5z^2+z+1}=az+b$에서 $-\frac{1}{2z}=az+b$이므로

$2az^2+2bz+1=0 \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠=㉡에서

$2a=3$, $2b=2 \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$, $b=1$

$\therefore 2ab=2\times\frac{3}{2}\times1=3$ 답 3

25 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^2+\omega+1=0 \qquad \cdots\cdots$㉠

㉠의 양변을 ω로 나누면

$\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \qquad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$

㉠의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0 \qquad \therefore \omega^3=1$

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$에서

$f(\omega)=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$f(\omega^2)=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$

$f(\omega^{2^2})=f(\omega^4)=\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

$f(\omega^{2^3})=f(\omega^8)=\omega^8+\dfrac{1}{\omega^8}=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=-1$

$\vdots$

$\therefore f(\omega^{2^k})=-1$ (단, k는 음이 아닌 정수)

$\therefore f(\omega)f(\omega^2)f(\omega^{2^2})f(\omega^{2^3})\times\cdots\times f(\omega^{2^{2048}})$

$=\underbrace{(-1)\times(-1)\times(-1)\times\cdots\times(-1)}_{2049\text{개}}$

$=(-1)^{2049}=-1$

답 ①

26 해결단계

❶ 단계	$z^2-kz+1=0$을 이용하여 ω를 z에 대한 일차식으로 간단히 한다.
❷ 단계	$z^2-kz+1=0$에서 z의 값을 구한 후 ω가 순허수임을 이용하여 k^2의 값을 구한다.
❸ 단계	a, b를 k에 대한 식으로 나타낸 후, ❷ 단계에서 구한 값을 이용하여 $(a+4b)^2$의 값을 구한다.

$z^2-kz+1=0$에서 $z^2+1=kz \qquad \cdots\cdots$㉠

$\therefore \omega=(z^2-1)^2+4z(z^2+z+1)$

$=z^4+4z^3+2z^2+4z+1$

$=(z^2+1)^2+4z(z^2+1)$

$=(z^2+1)(z^2+4z+1)$

$=kz\times(kz+4z)$ ($\because$ ㉠)

$=k(k+4)z^2$

$=k(k+4)(kz-1)$ ($\because$ ㉠)

ω가 순허수이려면 $kz-1$이 순허수이어야 하므로 $kz-1$의 실수부분이 0이어야 한다.

$z^2-kz+1=0$에서 $z=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$이므로

$kz-1=z^2=\left(\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}\right)^2$

$=\dfrac{(k^2-2)\pm k\sqrt{k^2-4}}{2}$

이때 $-2<k<2$에서 $kz-1$의 실수부분은 $\dfrac{k^2-2}{2}$이므로

$\dfrac{k^2-2}{2}=0 \qquad \therefore k^2=2$

$\omega=k(k+4)(kz-1)=(k^3+4k^2)z-(k^2+4k)$이고

$\omega=az+b$이므로

$a=k^3+4k^2$, $b=-k^2-4k$

따라서

$a+4b=k^3+4k^2+4(-k^2-4k)$

$=k^3-16k=k^2\times k-16k$

$=2k-16k=-14k$

이므로

$(a+4b)^2=(-14k)^2=196k^2=392$

답 392

27

$(3+2i)x+(1-i)y=3+7i$에서

$(3x+y)+(2x-y)i=3+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x+y=3$, $2x-y=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-3$

$\therefore \sqrt{6x}\sqrt{y}+\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{12}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{12}\sqrt{3}i+\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}i}$

$=\sqrt{12\times3}i-\sqrt{\dfrac{12}{3}}i$

$=6i-2i=4i$

답 $4i$

28

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a<0$, $b<0$

즉, $ab>0$, $\dfrac{b}{a}>0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)+\sqrt{-a}i$

따라서 주어진 복소수의 허수부분은 $\sqrt{-a}$이다.

답 ②

29

a, b, c가 양의 실수이므로

$a+b>0$, $b+c>0$

$\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{b+c}$의 양변에 $(a+b)(b+c)$를 곱하면

$b+c<a+b \qquad \therefore c<a \qquad \cdots\cdots$㉠

또한, $\dfrac{2}{c}<\dfrac{1}{b}$의 양변에 bc를 곱하면

$2b<c \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $2b<c<a$

ㄱ. $a-c>0$, $a-2b>0$이므로

$\sqrt{\dfrac{a-c}{a-2b}}=\dfrac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{a-2b}}$ (거짓)

ㄴ. $2b-c<0$, $c-a<0$이므로

$\sqrt{2b-c}\sqrt{c-a}=-\sqrt{(2b-c)(c-a)}$ (참)

ㄷ. $c-2b>0$, $2b-a<0$이므로

$\sqrt{\dfrac{c-2b}{2b-a}}=\sqrt{\dfrac{c-2b}{-(a-2b)}}$

$=\sqrt{(-1)\times\dfrac{c-2b}{a-2b}}$

$=\sqrt{-1}\times\sqrt{\dfrac{c-2b}{a-2b}}$

$=i\sqrt{\dfrac{c-2b}{-(2b-a)}}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

30 $abc=-72$에서 세 실수 a, b, c의 곱이 음수이므로 a, b, c 중 하나만 음수이거나 a, b, c 모두 음수이다.

(i) a, b, c 중 하나만 음수인 경우

$a=-m$ $(m>0)$이라 하고, b, c는 양수라 하면

$abc=-72$에서

$-mbc=-72 \qquad \therefore mbc=72$

$\therefore k=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{-m}\sqrt{b}\sqrt{c}$

$=\sqrt{m}i\times\sqrt{b}\sqrt{c}=i\times\sqrt{mbc}$

$=\sqrt{72}i=6\sqrt{2}i$

(ii) a, b, c 모두 음수인 경우

$a=-m$, $b=-n$, $c=-l$ $(m>0,\ n>0,\ l>0)$

이라 하면 $abc=-72$에서

$-mnl=-72 \qquad \therefore mnl=72$

$\therefore k=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{-m}\sqrt{-n}\sqrt{-l}$

$=\sqrt{m}i\times\sqrt{n}i\times\sqrt{l}i=-i\times\sqrt{mnl}$

$=-\sqrt{72}i=-6\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서 $k=6\sqrt{2}i$ 또는 $k=-6\sqrt{2}i$

따라서 구하는 모든 k의 값의 제곱의 합은

$(6\sqrt{2}i)^2+(-6\sqrt{2}i)^2=-144$ **답** -144

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.36~37

01 6	**02** 60	**03** 8	**04** ⑤	**05** 6
06 $3(\alpha^3-\beta^3)$	**07** 1	**08** 30	**09** 10	**10** ⑤
11 1	**12** $\frac{\sqrt{3}}{4}$			

01 해결단계

❶ 단계	a_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 8)$의 값 중에서 1, -1, i, $-i$의 개수를 각각 a, b, c, d라 하고, 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 연립하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)를 모두 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 순서쌍의 각 경우마다 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$의 값을 각각 구한 후, 최댓값을 찾는다.

여덟 개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8 중에서 1, -1, i, $-i$의 개수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c+d=8 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=3+i$에서

$1\times a+(-1)\times b+i\times c+(-i)\times d=3+i$이므로

$(a-b)+(c-d)i=3+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=3$, $c-d=1$

$\therefore a=b+3,\ c=d+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2b+3+2d+1=8$

$\therefore b+d=2$

이때 b, d는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 (b, d)는

$(2, 0)$ 또는 $(1, 1)$ 또는 $(0, 2)$

각 경우에 대하여 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는

$(5, 1)$ 또는 $(4, 2)$ 또는 $(3, 3)$

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는

$(5, 2, 1, 0)$ 또는 $(4, 1, 2, 1)$ 또는 $(3, 0, 3, 2)$이다.

이때

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$

$=1^2\times a+(-1)^2\times b+i^2\times c+(-i)^2\times d$

$=a+b-c-d$

이므로

(i) 순서쌍 (a, b, c, d)가 $(5, 2, 1, 0)$일 때,

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2=5+2-1-0$

$=6$

(ii) 순서쌍 (a, b, c, d)가 $(4, 1, 2, 1)$일 때,

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2=4+1-2-1$

$=2$

(iii) 순서쌍 (a, b, c, d)가 $(3, 0, 3, 2)$일 때,

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2=3+0-3-2$

$=-2$

(i), (ii), (iii)에서 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$의 최댓값은 6이다. **답** 6

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

$1^2=1$, $(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(-i)^2=-1$이므로

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$의 값이 최대가 되려면 i 또는 $-i$의 개수가 최소이어야 한다. 이때 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=3+i$이므로 i의 개수는 1, $-i$의 개수는 0이면 된다.

남은 7개의 수는 1 또는 -1이므로 1과 -1의 개수를 각각 x, y라 하면

$x+y=7$

또한, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=3+i$에서

$x-y=3$

$x+y=7$, $x-y=3$을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=2$

따라서 구하는 최댓값은

$5\times1^2+2\times(-1)^2+1\times i^2=6$

02 해결단계

❶ 단계	주어진 식을 i의 거듭제곱을 이용하여 간단히 한다.
❷ 단계	n의 값에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 m, n의 값을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 값을 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.

$i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}=i^n+(-i)^{2n}=i^n+(-1)^n$에서

$f(n)=i^n+(-1)^n$이라 하자.

(i) $n=4k-3$ (k는 자연수)일 때,

$f(n)=i^{4k-3}+(-1)^{4k-3}=i-1$이고,

$(i-1)^2=-2i$, $(i-1)^4=-4$, $(i-1)^8=16$,

$(i-1)^{12}=-64$, $\cdots$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 4, 12, 20, 28의 4개이다.

이때 $n=4k-3$인 30 이하의 자연수 n은 1, 5, 9, 13, …, 25, 29의 8개이다.

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$4\times8=32$

(ii) $n=4k-2$ (k는 자연수)일 때,

$f(n)=i^{4k-2}+(-1)^{4k-2}=i^2+1=-1+1=0$

즉, 모든 자연수 m에 대하여 $\{f(n)\}^m=0$이므로 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때,

$f(n)=i^{4k-1}+(-1)^{4k-1}=i^3-1=-i-1$이고,

$(-i-1)^2=2i$, $(-i-1)^4=-4$, $(-i-1)^8=16$,

$(-i-1)^{12}=-64$, …

이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 4, 12, 20, 28의 4개이다.

이때 $n=4k-1$인 30 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 23, 27의 7개이다.

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$4\times7=28$

(iv) $n=4k$ (k는 자연수)일 때,

$f(n)=i^{4k}+(-1)^{4k}=1+1=2$이므로

$\{f(n)\}^m=2^m$

즉, 모든 자연수 m에 대하여 $\{f(n)\}^m>0$이므로 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$32+28=60$ 답 60

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$f(n)=i^n+(-1)^n$에서

$f(1)=i+(-1)=i-1$

$f(2)=i^2+(-1)^2=-1+1=0$

$f(3)=i^3+(-1)^3=-i-1$

$f(4)=i^4+(-1)^4=1+1=2$

$f(5)=i^5+(-1)^5=i+(-1)=i-1$

⋮

이므로 $f(n+4)=f(n)$이다.

따라서 자연수 k에 대하여

$n=4k-3$, $n=4k-2$, $n=4k-1$, $n=4k$

로 경우를 나누어 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있다.

03 해결단계

❶ 단계	i^n의 규칙성을 이용하여 $f(i)$와 $g(i)$를 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 값을 대입하여 z를 구한다.
❸ 단계	$z\bar{z}=5$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

자연수 k에 대하여

$$i^n=\begin{cases} i & (n=4k-3\text{일 때}) \\ -1 & (n=4k-2\text{일 때}) \\ -i & (n=4k-1\text{일 때}) \\ 1 & (n=4k\text{일 때}) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(i)&=ai+3ai^3+5ai^5+\cdots+97ai^{97}+99ai^{99} \\ &=(ai-3ai)+(5ai-7ai)+\cdots+(97ai-99ai) \\ &=-2ai\times25 \\ &=-50ai \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(i)&=2bi^2+4bi^4+6bi^6+\cdots+98bi^{98}+100bi^{100} \\ &=(-2b+4b)+(-6b+8b)+\cdots \\ &\qquad+(-98b+100b) \\ &=2b\times25 \\ &=50b \end{aligned}$$

즉, $f(i)+g(i)=50(b-ai)$이므로

$$z=\frac{50(b-ai)}{100i}=\frac{b-ai}{2i}=\frac{-a-bi}{2}$$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{-a-bi}{2}\times\frac{-a+bi}{2}=\frac{a^2+b^2}{4}$$

이때 $z\bar{z}=5$에서 $a^2+b^2=20$ ……㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-4, -2)$, $(-4, 2)$, $(-2, -4)$, $(-2, 4)$,

$(2, -4)$, $(2, 4)$, $(4, -2)$, $(4, 2)$

의 8개이다. 답 8

04 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 $z_1=a+bi$를 $z_1\overline{z_1}=10$에 대입하여 a^2+b^2의 값을 구한다.
❷ 단계	ㄴ은 ❶ 단계에서 구한 식과 $z_1+\overline{z_2}=3$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d를 구하여 $c+d$의 값을 계산한다.
❸ 단계	ㄷ은 ❶ 단계에서 구한 식과 $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d를 구하여 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값을 구한다.

ㄱ. $z_1=a+bi$이므로 $\overline{z_1}=a-bi$

이때 $z_1\overline{z_1}=10$이므로 $(a+bi)(a-bi)=10$

$\therefore a^2+b^2=10$ (참)

ㄴ. $\overline{z_2}=c-di$이고 $z_1+\overline{z_2}=3$이므로

$(a+bi)+(c-di)=3$

$\therefore a+c+(b-d)i=3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+c=3$, $b-d=0$

ㄱ에서 $a^2+b^2=10$이고, a, b가 자연수이므로

$a=3$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=3$ ……㉠

㉠에서 $a=3$, $b=1$이면 $c=0$이므로 c가 자연수라는 조건에 모순이다.

즉, $a=1$, $b=3$이므로 $c=2$, $d=3$

$\therefore c+d=5$ (참)

ㄷ. $z_2=c+di$, $\overline{z_2}=c-di$이므로

$z_2\overline{z_2}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2$

한편, $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$,

$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$이므로

$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$에서

$(a+c)^2+(b+d)^2=41$

a, b, c, d가 자연수이므로
$a+c=5$, $b+d=4$ 또는 $a+c=4$, $b+d=5$
이때 ㉠에서
$a=3$, $b=1$이면 $c=2$, $d=3$ 또는 $c=1$, $d=4$
$\therefore c^2+d^2=13$ 또는 $c^2+d^2=17$
$a=1$, $b=3$이면 $c=4$, $d=1$ 또는 $c=3$, $d=2$
$\therefore c^2+d^2=17$ 또는 $c^2+d^2=13$
따라서 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17이다. (참)
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 해결단계

❶ 단계	조건 (가)의 z_k에 대하여 $z_k{}^n=1$이 되는 자연수 n의 조건을 구한다.
❷ 단계	조건 (나)의 z_l에 대하여 $z_l{}^n=1$이 되는 자연수 n의 조건을 구한다.
❸ 단계	자연수 n의 최솟값을 구한다.

$z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$z_k{}^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z_k{}^3=z_k{}^2\times z_k=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{4}{4}=1$

즉, $z_k{}^n=1$을 만족시키는 자연수 n은 3의 배수이다.
한편, 조건 (나)에서 $z_l=-z_k$인 n 이하의 자연수 l이 존재하므로 $z_l{}^n=1$이어야 한다.
즉, $(-z_k)^n=1$에서 $(-1)^n\times z_k{}^n=1$을 만족시키는 자연수 k가 존재해야 하므로 n은 짝수이어야 한다.
따라서 n은 3의 배수인 동시에 짝수이므로 6의 배수이고 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 6

06 해결단계

❶ 단계	$\omega^2+\omega+1=0$을 이용하여 ω^3의 값을 구한다.
❷ 단계	주어진 x, y, z를 이용하여 $x+y+z$의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 값을 이용하여 $x^3+y^3+z^3$을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

$\omega^2+\omega+1=0$의 양변에 $\omega-1$을 곱하면
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$
$\omega^3-1=0$
$\therefore \omega^3=1$ ……㉠
$x=\alpha-\beta$, $y=\alpha\omega-\beta\omega^2$, $z=\alpha\omega^2-\beta\omega$이므로
$x+y+z=(\alpha-\beta)+(\alpha\omega-\beta\omega^2)+(\alpha\omega^2-\beta\omega)$
$=\alpha(1+\omega+\omega^2)-\beta(1+\omega+\omega^2)$
$=0$ ($\because \omega^2+\omega+1=0$) ……㉡
$\therefore x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=3xyz$ ($\because$ ㉡)
$=3(\alpha-\beta)(\alpha\omega-\beta\omega^2)(\alpha\omega^2-\beta\omega)$
$=3\omega^2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta\omega)(\alpha\omega-\beta)$
$=3\omega^2(\alpha-\beta)(\alpha^2\omega-\alpha\beta-\alpha\beta\omega^2+\beta^2\omega)$
$=3\omega^2(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)\omega-\alpha\beta(1+\omega^2)\}$
$=3\omega^2(\alpha-\beta)\{(\alpha^2+\beta^2)\omega+\alpha\beta\omega\}$ ($\because \omega^2+\omega+1=0$)
$=3\omega^3(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
$=3(\alpha^3-\beta^3)$ ($\because$ ㉠) 답 $3(\alpha^3-\beta^3)$

07 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 좌변을 변형한다.
❷ 단계	$z^2+zi+1=0$을 이용하여 ❶ 단계에서 변형한 식의 값을 구한다.
❸ 단계	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한 후, $a+b$의 값을 계산한다.

$\dfrac{1}{z^3}(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$
$=\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+1+z+z^2+z^3$
$=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)+\left(z^3+\dfrac{1}{z^3}\right)+1$ ……㉠
한편, $z\neq0$이므로 $z^2+zi+1=0$의 양변을 z로 나누면
$z+i+\dfrac{1}{z}=0$
$\therefore z+\dfrac{1}{z}=-i$ ……㉡
$\therefore z^2+\dfrac{1}{z^2}=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-2$
$=(-i)^2-2=-3$ ……㉢
$z^3+\dfrac{1}{z^3}=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$
$=(-i)^3-3\times(-i)=4i$ ……㉣
㉡, ㉢, ㉣을 ㉠에 대입하면
$\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)+\left(z^3+\dfrac{1}{z^3}\right)+1$
$=-i+(-3)+4i+1$
$=-2+3i$
따라서 $-2+3i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-2$, $b=3$
$\therefore a+b=1$ 답 1

08 해결단계

❶ 단계	복소수 z를 $z^2-\overline{z}=0$에 대입하여 실수부분과 허수부분으로 간단히 정리한다.
❷ 단계	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 실수 a, b의 값을 구한다.
❸ 단계	복소수 z의 거듭제곱의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 후, 그 식의 값이 정수가 되도록 하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구한다.

$z=a+bi$ ($a<0$, $b>0$)에서
$\overline{z}=a-bi$
$z^2-\overline{z}=0$에서
$(a+bi)^2-(a-bi)=0$
$(a^2-b^2-a)+(2ab+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2-a=0$, $2ab+b=0$

$2ab+b=0$에서 $b(2a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ $(\because b>0)$

$a^2-b^2-a=0$에서 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-b^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$b^2=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0)$

즉, $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$2z+1=\sqrt{3}i$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$, $4z^2+4z+4=0$

$\therefore z^2+z+1=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

위의 식의 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z^3-1=0$ $\quad\therefore z^3=1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

$$\begin{aligned}\therefore (z^5+z^4+z^3+z^2+1)^n&=(z^2+z+1-z)^n \ (\because ㉠, ㉡)\\&=(-z)^n \ (\because ㉠)\\&=(-z^3)^{\frac{n}{3}}\\&=(-1)^{\frac{n}{3}}\end{aligned}$$

이 값이 정수가 되어야 하므로 자연수 n은 3의 배수이다.

따라서 3의 배수인 두 자리의 자연수 n은 12, 15, 18, …, 99의 30개이다.

답 30

09 해결단계

❶ 단계	z_n^n을 z_1, z_2의 거듭제곱으로 나타낸 후 값을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 값을 주어진 식에 대입하여 값을 구한다.
❸ 단계	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 x, y의 값을 구한 후, $x-y$의 값을 계산한다.

$z_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n$에서 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$

$z_2=z_1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=\frac{1}{-i}=i$

$z_2^2=i^2=-1$

$z_3^3=(z_1^3)^3=z_1^9=(z_1^2)^4z_1=i^4z_1=z_1$

$z_4^4=(z_1^4)^4=z_1^{16}=(z_1^2)^8=i^8=1$

$z_5^5=(z_1^5)^5=z_1^{25}=(z_1^2)^{12}z_1=i^{12}z_1=z_1$

$z_6^6=(z_1^6)^6=z_1^{36}=(z_1^2)^{18}=i^{18}=-1$

$\vdots$

이므로

$z_1+2z_2^2+3z_3^3+4z_4^4+5z_5^5+\cdots+20z_{20}^{20}$

$=z_1-2+3z_1+4+5z_1-6+\cdots+20$

$=(1+3+5+\cdots+19)z_1-(2-4+6-8+\cdots-20)$

$=100z_1+10$

$=100\times\frac{\sqrt{2}}{1-i}+10$

$=100\times\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}+10$

$=(50\sqrt{2}+10)+50\sqrt{2}i$

$(50\sqrt{2}+10)+50\sqrt{2}i=x+yi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=50\sqrt{2}+10$, $y=50\sqrt{2}$

$\therefore x-y=10$

답 10

10 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 z_n의 n에 1, 2, 3, …을 대입하여 $z_n=-8$을 만족시키는 n의 값을 찾는다.
❷ 단계	ㄴ은 n의 값에 따라 경우를 나누어 z_n의 값을 구한다.
❸ 단계	ㄷ은 ❷ 단계에서 구한 값을 이용하여 z_n이 4로 나누어떨어지는지 확인한다.

ㄱ. $z_n=(1+i)^n+(1-i)^n$이므로

$z_1=(1+i)+(1-i)=2$

$z_2=(1+i)^2+(1-i)^2$

$=2i-2i=0$

$z_3=(1+i)^3+(1-i)^3$

$=-2+2i+(-2-2i)=-4$

$z_4=(1+i)^4+(1-i)^4$

$=(2i)^2+(-2i)^2=-8$

즉, $n=4$일 때 $z_n=-8$을 만족시킨다. (참)

ㄴ. (i) ㄱ에서 $n=1$, 2, 3, 4일 때 z_n은 실수이다.

$(1+i)^4=-4$, $(1-i)^4=-4$이므로 2 이상의 자연수 k에 대하여

(ii) $n=4k-3$일 때,

$$\begin{aligned}(1+i)^{4k-3}&=\{(1+i)^4\}^{k-1}\times(1+i)\\&=(-4)^{k-1}(1+i)\\&=(-4)^{k-1}+(-4)^{k-1}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-i)^{4k-3}&=\{(1-i)^4\}^{k-1}\times(1-i)\\&=(-4)^{k-1}(1-i)\\&=(-4)^{k-1}-(-4)^{k-1}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore z_n&=(1+i)^{4k-3}+(1-i)^{4k-3}\\&=2\times(-4)^{k-1}\end{aligned}$$

(iii) $n=4k-2$일 때,

$$\begin{aligned}(1+i)^{4k-2}&=\{(1+i)^4\}^{k-1}\times(1+i)^2\\&=(-4)^{k-1}\times(1+i)^2\\&=(-4)^{k-1}\times2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-i)^{4k-2}&=\{(1-i)^4\}^{k-1}\times(1-i)^2\\&=(-4)^{k-1}\times(1-i)^2\\&=(-4)^{k-1}\times(-2i)\\&=-(-4)^{k-1}\times2i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore z_n&=(1+i)^{4k-2}+(1-i)^{4k-2}\\&=0\end{aligned}$$

(iv) $n=4k-1$일 때,

$$\begin{aligned}(1+i)^{4k-1}&=\{(1+i)^4\}^{k-1}\times(1+i)^3\\&=(-4)^{k-1}\times(1+i)^3\\&=(-4)^{k-1}\times(-2+2i)\end{aligned}$$

$$(1-i)^{4k-1}=\{(1-i)^4\}^{k-1}\times(1-i)^3$$
$$=(-4)^{k-1}\times(1-i)^3$$
$$=(-4)^{k-1}\times(-2-2i)$$
$$\therefore z_n=(1+i)^{4k-1}+(1-i)^{4k-1}$$
$$=(-4)^{k-1}\times(-4)$$
$$=(-4)^k$$

(v) $n=4k$일 때,

$(1+i)^{4k}=(-4)^k$, $(1-i)^{4k}=(-4)^k$이므로

$$z_n=(1+i)^{4k}+(1-i)^{4k}$$
$$=2\times(-4)^k$$

(i)~(v)에서 자연수 n에 대하여 z_n은 항상 실수이므로 z_n^2은 항상 0보다 크거나 같다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $n=2, 3, 4$일 때 z_n은 4로 나누어떨어진다.

ㄴ에서 2 이상의 자연수 k에 대하여

$$z_n=\begin{cases} 2\times(-4)^{k-1} & (n=4k-3\text{일 때}) \\ 0 & (n=4k-2\text{일 때}) \\ (-4)^k & (n=4k-1\text{일 때}) \\ 2\times(-4)^k & (n=4k\text{일 때}) \end{cases}$$

이므로 $n\ge2$일 때, z_n은 4로 나누어떨어진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

11 해결단계

❶ 단계	조건 (가), (나)에서 α, β, γ의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 관계식을 통해 $\frac{\gamma}{\alpha}$에 대한 이차방정식을 구한다.
❸ 단계	❶ 단계에서 구한 관계식과 ❷ 단계에서 구한 이차방정식의 근을 이용하여 $\frac{\gamma}{\alpha}\times\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$의 값을 구한다.

조건 (가)에서

$\beta+\gamma=-\alpha$ ······㉠

조건 (나)에서

$\alpha\beta+\gamma\alpha=-\beta\gamma$

$\alpha(\beta+\gamma)=-\beta\gamma$, $-\alpha^2=-\beta\gamma$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ ($\because \alpha\ne0, \beta\ne0$) ······㉡

또한, 조건 (나)에서

$\beta(\alpha+\gamma)+\gamma\alpha=0$

이때 조건 (가)에서 $\beta=-(\alpha+\gamma)$이므로 위의 식에 대입하면

$-(\alpha+\gamma)^2+\gamma\alpha=0$

$\therefore \alpha^2+\gamma\alpha+\gamma^2=0$

위의 식의 양변을 α^2으로 나누면

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}+1=0$

$\therefore \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\gamma}{\alpha}\times\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\gamma}{\alpha}\times\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1$ 답 1

12 해결단계

❶ 단계	$z, \bar{z}$에 대한 식의 값의 음수 조건을 이용하여 b의 값의 범위를 찾는다.
❷ 단계	z에 대한 식의 값의 실수 조건을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 찾는다.
❸ 단계	a, b의 값을 구한 후, ab의 값을 계산한다.

$z=a+bi$에서 $\bar{z}=a-bi$

$\frac{z-\bar{z}}{i}$가 음수이므로

$\frac{a+bi-a+bi}{i}=2b<0$

$\therefore b<0$ ······㉠

$\frac{z}{1+z^2}$가 실수이므로

$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$

즉, $z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2)$에서

$z-\bar{z}+z\bar{z}^2-\bar{z}z^2=0$

$(z-\bar{z})-z\bar{z}(z-\bar{z})=0$

$(z-\bar{z})(1-z\bar{z})=0$

이때 $z-\bar{z}=2bi$, $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로

$2bi(1-a^2-b^2)=0$

$1-a^2-b^2=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a^2+b^2=1$ ······㉡

또한, $\frac{z^2}{1+z}$도 실수이므로

$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$

즉, $z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$에서

$z^2-\bar{z}^2+z^2\bar{z}-z\bar{z}^2=0$

$(z+\bar{z})(z-\bar{z})+z\bar{z}(z-\bar{z})=0$

$\therefore (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$

$z-\bar{z}=2bi$, $z+\bar{z}=2a$, $z\bar{z}=a^2+b^2$이므로

$2bi(a^2+b^2+2a)=0$

$a^2+b^2+2a=0$ ($\because b\ne0$)

㉡을 위의 식에 대입하면

$1+2a=0$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

㉠, ㉡에서

$b=-\sqrt{1-a^2}=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

04. 이차방정식

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.39~41

01 ①	02 ④	03 ①	04 ③	05 ④
06 ②	07 5	08 ①	09 ⑤	10 21
11 52	12 ②	13 ④	14 ③	15 ④
16 5	17 -1	18 1	19 ①	20 10
21 ④				

01 $a^2x-2a=x-2$에서

$a^2x-x=2a-2$, $(a^2-1)x=2(a-1)$

$\therefore (a+1)(a-1)x=2(a-1)$

(i) $a=-1$일 때, $0\times x=-4$이므로 해가 없다.

(ii) $a=1$일 때, $0\times x=0$이므로 해가 무수히 많다.

(iii) $a\neq-1$, $a\neq1$일 때, $x=\dfrac{2}{a+1}$

(i), (ii), (iii)에서 $a\neq-1$일 때 해가 존재한다. 답 ①

02 $|x|-1=\sqrt{(2x-7)^2}$에서

$|x|-1=|2x-7|$

(i) $x<0$일 때, $-x-1=-(2x-7)$

$-x-1=-2x+7$ $\quad\therefore x=8$

그런데 $x<0$이므로 $x=8$은 근이 아니다.

(ii) $0\le x<\dfrac{7}{2}$일 때, $x-1=-(2x-7)$

$x-1=-2x+7$, $3x=8$ $\quad\therefore x=\dfrac{8}{3}$

(iii) $x\ge\dfrac{7}{2}$일 때, $x-1=2x-7$ $\quad\therefore x=6$

(i), (ii), (iii)에서 $x=\dfrac{8}{3}$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$\dfrac{8}{3}+6=\dfrac{26}{3}$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$|x|-1=\sqrt{(2x-7)^2}$의 양변을 제곱하면

$(|x|-1)^2=(2x-7)^2$

$x^2-2|x|+1=4x^2-28x+49$

$\therefore 3x^2+2(|x|-14x)+48=0$

(i) $x<0$일 때, $3x^2+2(-x-14x)+48=0$

$3x^2-30x+48=0$, $x^2-10x+16=0$

$(x-2)(x-8)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=8$

그런데 $x<0$이므로 모두 근이 아니다.

(ii) $x\ge0$일 때, $3x^2+2(x-14x)+48=0$

$3x^2-26x+48=0$, $(3x-8)(x-6)=0$

$\therefore x=\dfrac{8}{3}$ 또는 $x=6$

(i), (ii)에서 $x=\dfrac{8}{3}$ 또는 $x=6$

03 $(\sqrt{3}-1)x^2+(4-2\sqrt{3})x-4=0$의 양변에 $1+\sqrt{3}$을 곱하면

$(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3})x^2+(4-2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})x$
$-4(1+\sqrt{3})=0$

$2x^2+(2\sqrt{3}-2)x-4(1+\sqrt{3})=0$

$x^2+(\sqrt{3}-1)x-2(1+\sqrt{3})=0$

$x^2+\{(1+\sqrt{3})-2\}x+(1+\sqrt{3})\times(-2)=0$

$(x+1+\sqrt{3})(x-2)=0$

$\therefore x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=-1-\sqrt{3}$, $\beta=2$이므로

$2\alpha+\beta=-2\sqrt{3}$ 답 ①

04 이차방정식 $(k+2)x^2-ax-ka^2-4=0$의 한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$4(k+2)-2a-ka^2-4=0$

위의 식을 k에 대하여 정리하면

$(4-a^2)k-2a+4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$4-a^2=0$, $-2a+4=0$

$4-a^2=0$에서 $(2+a)(2-a)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$ ······㉠

$-2a+4=0$에서 $a=2$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$ 답 ③

05 (i) $x<-2$일 때,

$x^2+5(x+2)-4=0$

$x^2+5x+6=0$, $(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

그런데 $x<-2$이므로 $x=-3$

(ii) $x\ge-2$일 때,

$x^2-5(x+2)-4=0$

$x^2-5x-14=0$, $(x+2)(x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=7$이므로 그 합은

$-3+(-2)+7=2$ 답 ④

06 $x^2-[x]x-1=0$에서

(i) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-x-1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $1<x<2$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ii) $2\le x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-2x-1=0$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $x=1+\sqrt{2}$

(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x]=3$이므로

$x^2-3x-1=0 \quad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

그런데 $3\le x<4$이므로 $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$ 또는

$x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 근의 개수는 3이다.

답 ②

• 다른 풀이 •

$[x]$의 값은 상수이므로 방정식 $x^2-[x]x-1=0$의 근은

$x=\frac{[x]\pm\sqrt{[x]^2+4}}{2}$

그런데 $[x]\le x<[x]+1$이므로

$x=\frac{[x]+\sqrt{[x]^2+4}}{2}$ ……㉠

이때 $1<x<4$에서 $[x]=1, 2, 3$이므로 ㉠은 서로 다른 3개의 값을 갖는다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 근의 개수는 3이다.

07 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2-10=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-10)>0$

$-2k+11>0 \quad \therefore k<\frac{11}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

08 x에 대한 이차방정식 $a^2x^2+2(b^2+c^2)x+a^2=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(b^2+c^2)^2-(a^2)^2$

$=(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2+a^2)<0$

이때 a, b, c는 0이 아닌 서로 다른 세 실수이므로

$a^2+b^2+c^2>0$

즉, $b^2+c^2-a^2<0$이므로 $a^2>b^2+c^2$ ……㉠

이차방정식 $cx^2+2ax+2b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-2bc$

$>b^2+c^2-2bc$ ($\because$ ㉠)$=(b-c)^2>0$ ($\because b\ne c$)

따라서 이차방정식 $cx^2+2ax+2b=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 ①

09 x에 대한 이차식 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+2k+b-3$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식

$x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+2k+b-3=0$

이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2+2k+b-3)=0$

$k^2+2ka+a^2-k^2-a^2-2k-b+3=0$

$\therefore 2k(a-1)-b+3=0$ ……㉠

㉠이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$a-1=0,\ -b+3=0$

$\therefore a=1,\ b=3$

$\therefore a+b=4$

답 ⑤

10 이차방정식 $2x^2-5x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{25}{4}-2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

$\therefore 8\alpha^3\beta+8\alpha\beta^3=8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=8\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{4}=21$

답 21

11 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0,\ \beta^2-4\beta+1=0$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

$\therefore \frac{\beta^2}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\alpha^2}{\beta^2-3\beta+1}$

$=\frac{\beta^2}{(\alpha^2-4\alpha+1)+\alpha}+\frac{\alpha^2}{(\beta^2-4\beta+1)+\beta}$

$=\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4^3-3\times1\times4}{1}$

$=52$

답 52

12 이차방정식 $x^2+(a-4)x-4=0$의 두 근의 차가 4이므로 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-(a-4) \quad \therefore a=-2\alpha$ ……㉠

$\alpha(\alpha+4)=-4$에서 $\alpha^2+4\alpha+4=0$

$(\alpha+2)^2=0 \quad \therefore \alpha=-2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=4$

따라서 이차방정식 $x^2+(a+4)x+4=0$, 즉

$x^2+8x+4=0$의 두 근을 s, t라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$s+t=-8,\ st=4$

$\therefore (s-t)^2=(s+t)^2-4st$

$=64-16=48$

$\therefore |s-t|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\times\frac{c}{a}$$
$$=\frac{b^2-4ac}{a^2}$$

$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 차는

$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

13 이차방정식 $4x^2-2x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{3}{4}$

두 근 $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\frac{\beta}{1+\beta}$의 합과 곱은 각각

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}=\frac{\alpha(1+\beta)+\beta(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$$
$$=\frac{2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1}$$
$$=\frac{-1}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\times\frac{\beta}{1+\beta}=\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}$$
$$=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}=-1$$

따라서 $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\frac{\beta}{1+\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left\{x^2-\left(-\frac{4}{3}\right)x+(-1)\right\}=0$

$\therefore 3x^2+4x-3=0$ 답 ④

14 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, c를 서로 바꾸어 놓고 풀었으므로 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근이 1, $-\frac{3}{5}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{c}=1+\left(-\frac{3}{5}\right)$ $\therefore \frac{b}{c}=-\frac{2}{5}$ ……㉠

$\frac{a}{c}=1\times\left(-\frac{3}{5}\right)$ $\therefore \frac{a}{c}=-\frac{3}{5}$ ……㉡

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=-\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{2}{3}\ (\because ㉠, ㉡)$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{5}{3}\ (\because ㉡)$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{5}{3}}=\frac{2}{5}$$ 답 ③

• 다른 풀이 •

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, c를 서로 바꾸어 놓고 풀었으므로 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근이 1, $-\frac{3}{5}$이다.

이때 두 근이 1, $-\frac{3}{5}$이고 x^2의 계수가 5인 이차방정식은

$5(x-1)\left(x+\frac{3}{5}\right)=0$, 즉 $5x^2-2x-3=0$이므로

$c=5k$, $b=-2k$, $a=-3k$ $(k\neq0)$

라 하면 처음 주어진 이차방정식은

$-3kx^2-2kx+5k=0$

$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=1$

따라서 $\alpha=-\frac{5}{3}$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-\frac{5}{3}$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{3}{5}+1=\frac{2}{5}$

BLACKLABEL 특강 참고

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(c\neq0)$의 두 근이 p, q이면

이차방정식 $cx^2\pm bx+a=0$의 두 근은 $\pm\frac{1}{p}$, $\pm\frac{1}{q}$이다. (복부호 동순)

증명 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 p이므로

$ap^2+bp+c=0$ ……㉢

한편, $x=\pm\frac{1}{p}$을 이차식 $cx^2\pm bx+a$에 대입하면

$\frac{c}{p^2}+\frac{b}{p}+a=\frac{1}{p^2}(c+bp+ap^2)=0$ $(\because ㉢)$

따라서 이차방정식 $cx^2\pm bx+a=0$의 한 근은 $\pm\frac{1}{p}$이다.

같은 방법으로 $\pm\frac{1}{q}$에 대해서도 성립한다.

15 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ ……㉠

방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근을 x_1, x_2라 하면

$f(2x_1-3)=0$, $f(2x_2-3)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2x_1-3=\alpha$, $2x_2-3=\beta$로 놓으면

$x_1=\frac{\alpha+3}{2}$, $x_2=\frac{\beta+3}{2}$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{\alpha+3}{2}+\frac{\beta+3}{2}=\frac{\alpha+\beta+6}{2}$$
$$=\frac{-2+6}{2}\ (\because \alpha+\beta=-2)$$
$$=2$$ 답 ④

• 다른 풀이 1 •

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha\beta=k$라 하면 $\alpha+\beta=-2$이므로 $f(x)=a(x^2+2x+k)$ $(a\neq0)$라 할 수 있다.

$$\therefore f(2x-3)=a\{(2x-3)^2+2(2x-3)+k\}$$
$$=a(4x^2-8x+3+k)$$
$$=4ax^2-8ax+3a+ka$$

따라서 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은

$-\dfrac{-8a}{4a}=2$

• 다른 풀이 2 •

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a\neq0)$라 하면

$f(2x-3)=a(2x-3-\alpha)(2x-3-\beta)$

따라서 $f(2x-3)=0$에서 $x=\dfrac{3+\alpha}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3+\beta}{2}$이므로

$\dfrac{3+\alpha}{2}+\dfrac{3+\beta}{2}=\dfrac{6+\alpha+\beta}{2}=\dfrac{6-2}{2}=2$ $(\because \alpha+\beta=-2)$

BLACKLABEL 특강 참고

방정식 $f(ax+b)=0$ $(a\neq0)$의 근을 구하는 문제는 자주 출제되므로 구하는 방법을 잘 기억해두면 좋다.
이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
따라서 이차방정식 $f(ax+b)=0$의 두 근은
$ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서 $x=\dfrac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-b}{a}$

16 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x-3=0$, 즉 $x^2-2x-6=0$의 근은

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-(-6)}=1\pm\sqrt{7}$ ←근의 공식 이용

$\therefore \frac{1}{2}x^2-x-3=\frac{1}{2}(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$

따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=7$이므로

$a+b+c=-1+(-1)+7=5$ **답** 5

17 $f(\alpha)=f(\beta)=1$에서 $f(\alpha)-1=f(\beta)-1=0$이므로 이차방정식 $f(x)-1=0$의 두 근은 α, β이다.

이때 이차식 $f(x)$의 x^2의 계수가 4이면 이차식 $f(x)-1$의 x^2의 계수도 4이므로

$$f(x)-1=4(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=2(2x^2-x-2)$$
$$=4x^2-2x-4$$
$$\therefore f(x)=(4x^2-2x-4)+1$$
$$=4x^2-2x-3$$
$$\therefore f(1)=4-2-3=-1$$ **답** -1

18 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{2}-1$, 즉 $-1+\sqrt{2}$이면 $-1-\sqrt{2}$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-a$ $\quad\therefore a=2$

$(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})=b$ $\quad\therefore b=-1$

따라서 $a+b$, $\dfrac{b}{a}$, 즉 1과 $-\dfrac{1}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}x+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$ $\quad\therefore 2x^2-x-1=0$

따라서 $p=2$, $q=-1$이므로

$p+q=1$ **답** 1

19 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이면 $2+3i$도 근이므로

$\alpha=2+3i$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\dfrac{2-3i}{13}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

따라서 $a=\dfrac{2}{13}$, $b=-\dfrac{3}{13}$이므로

$a+b=-\dfrac{1}{13}$ **답** ①

20 제품 한 개당 판매가격을 a원에서 x % 내리면 인하된 판매가격은

$a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$(원)

이때의 하루 판매량은 b개에서 $5x$ % 증가하므로

$b\left(1+\dfrac{5x}{100}\right)$(개)

하루 판매액은 ab원에서 35 % 증가하므로

$ab\left(1+\dfrac{35}{100}\right)$(원)

이때

(제품 한 개당 판매가격)×(하루 판매량)
=(하루 판매액)

이므로

$a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\times b\left(1+\dfrac{5x}{100}\right)=ab\left(1+\dfrac{35}{100}\right)$

위의 식의 양변에 $\dfrac{10000}{ab}$을 곱하면

$(100-x)(100+5x)=10000+3500$

$5x^2-400x+3500=0$, $x^2-80x+700=0$

$(x-10)(x-70)=0$

$\therefore x=10$ $(\because 0<x<40)$ **답** 10

21 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x cm $(x>0)$라 하면

$\overline{A'B}=(x+2)$ cm, $\overline{A'C}=(x+4)$ cm

$\triangle A'BC$는 직각삼각형이고 $\overline{BC}<\overline{A'B}<\overline{A'C}$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$(x+4)^2=x^2+(x+2)^2$

$x^2+8x+16=x^2+x^2+4x+4$

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=6$ ($\because x>0$)   답 ④

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.42~46

01 -2	02 ④	03 ④	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 2	08 10	09 20	10 3
11 ②	12 0	13 ④	14 -14	15 ④
16 ①	17 ③	18 13	19 ⑤	20 18
21 ①	22 ③	23 ②	24 ①	25 49
26 33	27 $7-2\sqrt{6}$	28 190	29 2	30 ②

01 $(m-4)(m-1)x=m-2(x+1)$에서

$(m^2-5m+4)x=m-2x-2$

$(m^2-5m+6)x=m-2$

$\therefore (m-2)(m-3)x=m-2$

$m=3$이면 $0\times x=1$이므로 해가 없다.

$\therefore m=3$

이차방정식 $x^2-mx+n=0$, 즉 $x^2-3x+n=0$의 한 근이 5이므로

$25-15+n=0$ $\therefore n=-10$

즉, 이차방정식 $x^2-3x-10=0$에서

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

따라서 나머지 한 근은 -2이다.   답 -2

02 $kx^2+(k-2)x+4=0$이 이차방정식이므로 $k\neq0$

이 이차방정식의 한 허근이 α이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$k\alpha^2+(k-2)\alpha+4=0$ ……㉠

이때 α는 허수이고 α^2은 실수이므로 등식 ㉠이 성립하려면 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$k-2=0$ $\therefore k=2$

따라서 주어진 이차방정식은 $2x^2+4=0$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{4}{2}=2$이다.   답 ④

• 다른 풀이 •

허수 α에 대하여 α^2이 실수이려면 α는 순허수이어야 한다.

$\alpha=ai$ (a는 실수)라 하면 $\overline{\alpha}=-ai$

즉, 계수가 실수인 이차방정식 $kx^2+(k-2)x+4=0$의 한 근이 ai이므로 다른 한 근은 $-ai$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ai+(-ai)=-\frac{k-2}{k}$ $\therefore k=2$

따라서 이차방정식 $kx^2+(k-2)x+4=0$, 즉 $2x^2+4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{4}{2}=2$이다.

03 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로

$x=1-\sqrt{3}$을 대입하면

$a(1-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(1-\sqrt{3})+c=0$

$a(4-2\sqrt{3})+\sqrt{3}b(1-\sqrt{3})+c=0$

$4a-2a\sqrt{3}+b\sqrt{3}-3b+c=0$

$(4a-3b+c)+(-2a+b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$4a-3b+c=0$ ……㉠

$-2a+b=0$ $\therefore b=2a$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $c=2a$

즉, 주어진 방정식은 $ax^2+2\sqrt{3}ax+2a=0$이고

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2+2\sqrt{3}x+2=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-2}=-\sqrt{3}\pm1$ ←근의 공식 이용

따라서 $\beta=-1-\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=1-\sqrt{3}+\frac{1}{-1-\sqrt{3}}$

$=1-\sqrt{3}+\frac{-1+\sqrt{3}}{(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})}$

$=1-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 답 ④

04 방정식 $|x^2+(4a-1)x+a^2|=1$의 한 근이 -1이므로

$x=-1$을 대입하면

$|(-1)^2+(4a-1)\times(-1)+a^2|=1$

$|a^2-4a+2|=1$

(i) $a^2-4a+2=1$일 때,

$a^2-4a+1=0$

$\therefore a=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1}=2\pm\sqrt{3}$ ←근의 공식 이용

(ii) $a^2-4a+2=-1$일 때,

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=2\pm\sqrt{3}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$이므로

모든 실수 a의 값의 곱은

$(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})\times1\times3=3$ 답 ③

05 $x^2+\sqrt{x^2}=|x-1|+3$에서

$x^2+|x|=|x-1|+3$

(i) $x<0$일 때, $x^2-x=-(x-1)+3$

$x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

(ii) $0\le x<1$일 때, $x^2+x=-(x-1)+3$

$x^2+2x-4=0$ $\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le x<1$이므로 모두 근이 아니다.

(iii) $x\ge1$일 때, $x^2+x=(x-1)+3$

$x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge1$이므로 $x=\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$ *

이것은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이므로

$x^2+ax+b=0$에

$x=-2$를 대입하면 $4-2a+b=0$ ……㉠

$x=\sqrt{2}$를 대입하면 $2+\sqrt{2}a+b=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2-\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

$\therefore a-b=2-\sqrt{2}-(-2\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$

답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, $\sqrt{2}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+\sqrt{2}=-a$ $\therefore a=2-\sqrt{2}$

$(-2)\times\sqrt{2}=b$ $\therefore b=-2\sqrt{2}$

06

$[2x]^2-2[x]-7=0$에서

(i) $n\le x<n+\frac{1}{2}$ (n은 정수)일 때,

$2n\le 2x<2n+1$이므로

$[2x]=2n$, $[x]=n$

즉, $(2n)^2-2n-7=0$에서

$4n^2-2n-7=0$

$\therefore n=\frac{1\pm\sqrt{29}}{4}$

그런데 n은 정수이므로 해가 없다.

(ii) $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$ (n은 정수)일 때,

$2n+1\le 2x<2n+2$이므로

$[2x]=2n+1$, $[x]=n$

즉, $(2n+1)^2-2n-7=0$에서

$4n^2+2n-6=0$, $2n^2+n-3=0$

$(2n+3)(n-1)=0$

$\therefore n=1$ ($\because n$은 정수)

(i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\le x<2$

답 ⑤

07

$(k-1)x^2-2\sqrt{6}x+k=0$에서

(i) $k=1$일 때,

일차방정식 $-2\sqrt{6}x+1=0$에서

$x=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$

즉, 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $k\ne1$일 때,

이차방정식 $(k-1)x^2-2\sqrt{6}x+k=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{6})^2-k(k-1)=0$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=-2$ 또는 $k=1$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+1+3=2$

답 2

08

이차방정식 $x^2-2(a+k)x-a+10=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(-a+10)$

$=(a+k)^2+a-10\ge0$ ……㉠

이때 a, k는 실수이므로

$(a+k)^2\ge0$

따라서 ㉠이 모든 실수 k에 대하여 항상 성립하려면

$a-10\ge0$, 즉 $a\ge10$이어야 하므로 실수 a의 최솟값은 10이다.

답 10

BLACKLABEL 특강 참고

이차함수의 최솟값을 이용하여 실수 a의 값의 범위를 구할 수도 있다.
㉠에서 $f(k)=(k+a)^2+a-10$이라 하면 k에 대한 이차함수 $f(k)$는 $k=-a$일 때 최솟값 $a-10$을 갖는다.
이때 k의 값에 관계없이 ㉠이 항상 성립해야 하므로
($f(k)$의 최솟값)≥0이어야 한다.
즉, $a-10\ge0$에서 $a\ge10$

09

$(a-3)x^2+(a-b)x-(b-3)=0$이 이차방정식이므로

$a-3\ne0$에서 $a\ne3$ ……㉠

또한, 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(a-b)^2+4(a-3)(b-3)$

$=a^2-2ab+b^2+4ab-12a-12b+36$

$=a^2+2ab+b^2-12a-12b+36$

$=(a+b)^2-12(a+b)+36$

$=(a+b-6)^2=0$

$\therefore a+b=6$ ……㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

따라서 a^2+b^2의 값은 $a=2$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=2$일 때 최소이고 최솟값은

$2^2+4^2=20$

답 20

10

$(x^2-2x-4a)(x^2+2ax+a^2-a+2)=0$에서

(i) $a=-1$일 때, ← 두 이차방정식이 같아지는 경우

$(x^2-2x+4)(x^2-2x+4)=0$

$(x^2-2x+4)^2=0$

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times4=-3<0$

즉, 이차방정식 $x^2-2x+4=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 주어진 방정식도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $a\neq-1$일 때,

두 이차방정식 $x^2-2x-4a=0$,

$x^2+2ax+a^2-a+2=0$의 계수가 모두 실수이므로 두 이차방정식이 실근과 허근을 각각 1개씩 가질 수는 없다.

즉, 주어진 방정식이 서로 다른 허근을 2개 가지려면 두 이차방정식 중 하나는 서로 다른 두 허근을 갖고, 나머지 하나는 실근을 가져야 한다.

두 이차방정식 $x^2-2x-4a=0$,

$x^2+2ax+a^2-a+2=0$의 판별식을 각각 D_2, D_3이라 하자.

① 이차방정식 $x^2-2x-4a=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-4a)=1+4a<0$

$\therefore a<-\frac{1}{4}$ ……㉠

이차방정식 $x^2+2ax+a^2-a+2=0$은 실근을 가져야 하므로

$\frac{D_3}{4}=a^2-(a^2-a+2)=a-2\geq0$

$\therefore a\geq2$ ……㉡

그런데 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

② 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-a+2=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

$\frac{D_3}{4}=a-2<0$ $\therefore a<2$ ……㉢

이차방정식 $x^2-2x-4a=0$은 실근을 가져야 하므로

$\frac{D_2}{4}=1+4a\geq0$ $\therefore a\geq-\frac{1}{4}$ ……㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시키는 정수 a의 값은 0, 1이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 3

11 두 이차방정식

$x^2+px+q=0$ ……㉠

$x^2+qx+p=0$ ……㉡

에 대하여 ㉠, ㉡의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=p^2-4q$, $D_2=q^2-4p$

ㄱ. $p+q<0$이면 $p<0$ 또는 $q<0$이다.

(i) $p<0$이면 $D_2>0$

(ii) $q<0$이면 $D_1>0$

(i), (ii)에서 ㉠과 ㉡ 중 적어도 하나는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $\sqrt{pq}=-\sqrt{p}\sqrt{q}$이면 $p<0$, $q<0$

$\therefore D_1>0$, $D_2>0$

즉, ㉠과 ㉡ 모두 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. (반례) $p=-\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{4}$이면 *

$p+q=-\frac{1}{4}<0$, $pq=-\frac{1}{8}<0$이지만

$D_1=p^2-4q=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$

이므로 ㉠은 허근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

ㄷ에서 $p+q<0$, $pq<0$인 두 실수 p, q는 다음과 같이 생각할 수 있다.
(i) $p<0$, $q>0$, $|p|>|q|$
(ii) $p>0$, $q<0$, $|p|<|q|$
(i)의 경우 $D_2=q^2-4p>0$이므로 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖지만 $p^2>0$, $-4q<0$에서 $D_1=p^2-4q$의 값의 부호는 알 수 없다. 이러한 경우에는 $p<0$, $q>0$, $|p|>|q|$이면서 $p^2<4q$를 만족시키는 두 실수 p, q를 찾아 대입하면 ㄷ이 거짓임을 보일 수 있다.
(ii)도 (i)과 같은 방법으로 반례를 찾아 거짓임을 보일 수 있다.

12 이차방정식 $x^2+(k+1)x+k=0$의 두 근의 절댓값의 비가 $1:2$이므로 두 근의 부호가 같은 경우 두 근을 α, 2α, 부호가 다른 경우 두 근을 α, -2α $(\alpha\neq0)$라 하자.

(i) 두 근이 α, 2α일 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-(k+1)$ $\therefore 3\alpha=-k-1$ ……㉠

$\alpha\times2\alpha=k$ $\therefore k=2\alpha^2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3\alpha=-2\alpha^2-1$, $2\alpha^2+3\alpha+1=0$

$(\alpha+1)(2\alpha+1)=0$ $\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

$\therefore k=2$ 또는 $k=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉡)

(ii) 두 근이 α, -2α일 때,

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=-(k+1)$ $\therefore \alpha=k+1$ ……㉢

$\alpha\times(-2\alpha)=k$ $\therefore k=-2\alpha^2$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\alpha=-2\alpha^2+1$, $2\alpha^2+\alpha-1=0$

$(\alpha+1)(2\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=-\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉣)

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값은 -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2이므로 그 합은

$-2+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+2=0$ 답 0

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2+(k+1)x+k=0$에서

$(x+1)(x+k)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=-k$

(i) $|-1|:|-k|=1:2$일 때,

$|k|=2 \quad \therefore k=\pm2$

(ii) $|-1|:|-k|=2:1$일 때,

$2|k|=1,\ |k|=\frac{1}{2} \quad \therefore k=\pm\frac{1}{2}$

13 x에 대한 이차방정식 $x^2+(a^2-2a-3)x-a+1=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호는 반대이므로

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a^2-2a-3)=0$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ ……㉠

$\alpha\beta=-a+1<0 \quad \therefore a>1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

답 ④

14 이차방정식 $x^2+(a-2)x+2a-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a,\ \alpha\beta=2a-4$ ……㉠

이때 $a<2$에서 $\alpha\beta=2a-4<0$

$|\alpha|+|\beta|=\sqrt{65}$의 양변을 제곱하면

$(|\alpha|+|\beta|)^2=65,\ |\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=65$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=65\ (\because \alpha\beta<0)$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=65$

㉠을 이 식에 대입하면

$(2-a)^2-4(2a-4)=65,\ a^2-12a-45=0$

$(a+3)(a-15)=0 \quad \therefore a=-3\ (\because a<2)$

즉, ㉠에서 $\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-10$이므로

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-14$

답 -14

단계	채점 기준	배점
(가)	두 근의 합과 곱을 구한 경우	30%
(나)	주어진 조건을 이용하여 a에 대한 방정식을 세운 경우	30%
(다)	a의 값을 구한 경우	30%
(라)	$(\alpha-1)(\beta-1)$의 값을 구한 경우	10%

BLACKLABEL 특강 참고

이차방정식 $x^2+(a-2)x+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(2a-4)=a^2-12a+20=(a-2)(a-10)$

이때 $a<2$이므로 $a-2<0,\ a-10<0$에서

$D=(a-2)(a-10)>0$

따라서 $a<2$일 때 이차방정식 $x^2+(a-2)x+2a-4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

15 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 p, q이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$ ……㉠

또한, 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 두 근이 r, s이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$r+s=\frac{b}{c},\ rs=\frac{a}{c}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$$r+s=\frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{p+q}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)$$

$$rs=\frac{a}{c}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\times\left(-\frac{1}{q}\right)$$

$\therefore r=-\frac{1}{p},\ s=-\frac{1}{q}$ 또는 $r=-\frac{1}{q},\ s=-\frac{1}{p}$

이때 $-1<p<0<q<1$에서

$-\frac{1}{p}>1,\ -\frac{1}{q}<-1$

또한, $r<s$이므로 $r=-\frac{1}{q},\ s=-\frac{1}{p}$

따라서 $r<-1<p<0<q<1<s$이므로 대소 관계는 $r<p<q<s$이다.

답 ④

16 해결단계

❶ 단계	이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 두 근 ω, $\overline{\omega}$를 구한다.
❷ 단계	ω, $\overline{\omega}$의 거듭제곱의 규칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한다.
❸ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$에서 $x=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

$\omega=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$$\omega^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\omega^3=\omega^2\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{4i}{4}=i$$

즉, $\omega^6=(\omega^3)^2=i^2=-1$이므로

$$\begin{aligned}&1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100}\\&=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5)\\&\quad+(\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^9+\omega^{10}+\omega^{11})\\&\quad+(\omega^{12}+\omega^{13}+\omega^{14}+\omega^{15}+\omega^{16}+\omega^{17})+\cdots\\&\quad+\omega^{96}+\omega^{97}+\omega^{98}+\omega^{99}+\omega^{100}\\&=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5)\\&\quad-(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5)\\&\quad+(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5)-\cdots\\&\quad+1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\\&=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4\end{aligned}$$

또한, 같은 방법으로 $\overline{\omega}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$에 대하여 $\overline{\omega}^6=-1$이므로

$1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\cdots+\overline{\omega}^{100}=1+\overline{\omega}+\overline{\omega}^2+\overline{\omega}^3+\overline{\omega}^4$

*한편, ω, $\overline{\omega}$는 이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\bar{\omega}=\sqrt{3},\ \omega\bar{\omega}=1$

$\therefore\ \omega^2+\bar{\omega}^2=(\omega+\bar{\omega})^2-2\omega\bar{\omega}=(\sqrt{3})^2-2\times1=1,$

$\omega^3+\bar{\omega}^3=(\omega+\bar{\omega})^3-3\omega\bar{\omega}(\omega+\bar{\omega})$

$=(\sqrt{3})^3-3\times1\times\sqrt{3}=0,$

$\omega^4+\bar{\omega}^4=(\omega^2+\bar{\omega}^2)^2-2\omega^2\bar{\omega}^2=1-2\times1^2=-1$

$\therefore\ (1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{100})+(1+\bar{\omega}+\bar{\omega}^2+\cdots+\bar{\omega}^{100})$

$=(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)+(1+\bar{\omega}+\bar{\omega}^2+\bar{\omega}^3+\bar{\omega}^4)$

$=2+(\omega+\bar{\omega})+(\omega^2+\bar{\omega}^2)+(\omega^3+\bar{\omega}^3)+(\omega^4+\bar{\omega}^4)$

$=2+\sqrt{3}+1+0+(-1)$

$=2+\sqrt{3}$ 답 ①

•다른 풀이•

이차방정식 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$에서

$x^2+1=\sqrt{3}x$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^4+2x^2+1=3x^2,\ x^4-x^2+1=0$

$x^2=t$로 놓으면 $t^2-t+1=0$

이 식의 양변에 $t+1$을 곱하면

$(t+1)(t^2-t+1)=0 \qquad \therefore\ t^3=-1$

$\therefore\ x^6=-1$

즉, $\omega^6=-1$이고 $\bar{\omega}^6=-1$이다.

다음은 *와 같다.

17 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times(-1)=3$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\times(-1)\times1=4$

$\therefore\ \alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$=3\times4-(-1)^2\times1=11,$

$\alpha^5\beta^5=(\alpha\beta)^5=(-1)^5=-1$

따라서 $\alpha^5,\ \beta^5$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha^5+\beta^5)x+\alpha^5\beta^5=0$에서

$x^2-11x-1=0$ 답 ③

•다른 풀이•

이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

α는 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha-1=0$

$\alpha^2=\alpha+1$

$\alpha^3=\alpha\times\alpha^2=\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=2\alpha+1$

$\alpha^4=\alpha\times\alpha^3=\alpha(2\alpha+1)=2\alpha^2+\alpha=3\alpha+2$

$\alpha^5=\alpha\times\alpha^4=\alpha(3\alpha+2)=3\alpha^2+2\alpha=5\alpha+3$ ……㉠

같은 방법으로 $\beta^5=5\beta+3$ ……㉡

따라서 $\alpha^5,\ \beta^5$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-(\alpha^5+\beta^5)x+\alpha^5\beta^5=0$에서

$x^2-\{(5\alpha+3)+(5\beta+3)\}x+(\alpha\beta)^5=0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore\ x^2-11x-1=0$

18 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\alpha=-a,\ \alpha=b$

$\therefore\ a=-1-\alpha,\ b=\alpha$ ……㉠

이차방정식 $x^2-(a+4)x-b=0$의 두 근이 4, β이므로

$4+\beta=a+4,\ 4\beta=-b$

$\therefore\ a=\beta,\ b=-4\beta$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-1-\alpha=\beta,\ \alpha=-4\beta$

$\therefore\ \alpha+\beta=-1,\ \alpha+4\beta=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-\frac{4}{3},\ \beta=\frac{1}{3}$

*따라서 $\alpha,\ \beta$, 즉 $-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$9\left[x^2-\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}\right\}x+\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{1}{3}\right]=0$

$\therefore\ 9x^2+9x-4=0$

따라서 $p=9,\ q=-4$이므로 $p-q=13$ 답 13

•다른 풀이•

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0 \qquad \therefore\ a+b=-1$ ……㉢

이차방정식 $x^2-(a+4)x-b=0$의 한 근이 4이므로 $x=4$를 대입하면

$16-4(a+4)-b=0 \qquad \therefore\ 4a+b=0$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{4}{3}$

이것을 $x^2+ax+b=0,\ x^2-(a+4)x-b=0$에 각각 대입하여 풀면

$x^2+\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=0$에서 $3x^2+x-4=0$

$(3x+4)(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$

$\therefore\ \alpha=-\frac{4}{3}$

$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{4}{3}=0$에서 $3x^2-13x+4=0$

$(3x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=4$

$\therefore\ \beta=\frac{1}{3}$

다음은 *와 같다.

19 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$

$f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$이므로

$f(\alpha)=-\alpha-1,\ f(\beta)=-\beta-1$ ($\because\ \alpha+\beta=-1$)

$\therefore\ f(\alpha)+\alpha+1=0,\ f(\beta)+\beta+1=0$

이때 α, β는 이차방정식 $f(x)+x+1=0$의 두 근이므로
$f(x)+x+1=k(x^2+x-1)$ $(k\neq0)$이라 할 수 있다.
$x=1$을 위의 식에 대입하면
$f(1)+1+1=k(1+1-1)$
$\therefore k=f(1)+2=2$ $(\because f(1)=0)$
즉, $f(x)+x+1=2(x^2+x-1)$이므로
$f(x)=2x^2+x-3$
이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+x-3=0$에서
$(2x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=1$
따라서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차는
$1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

20 $2<\sqrt{5}<3$에서 $3<\sqrt{5}+1<4$이므로 $\sqrt{5}+1$의 소수 부분은
$(\sqrt{5}+1)-3=-2+\sqrt{5}$
즉, 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $-2+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{5}$이고 근과 계수의 관계에 의하여
$(-2+\sqrt{5})+(-2-\sqrt{5})=-\frac{b}{a} \quad \therefore \frac{b}{a}=4$
$(-2+\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})=\frac{c}{a} \quad \therefore \frac{c}{a}=-1$
이때 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\frac{b}{c}=-\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{4}{-1}=4$, $\alpha\beta=\frac{a}{c}=-1$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4^2-2\times(-1)=18$ 답 18

21 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 허근 z_1, z_2에 대하여
$z_1=a+bi$ (단, a, b는 실수, $b\neq0$)
라 하면 $z_2=a-bi$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$z_1+z_2=(a+bi)+(a-bi)=2a=p$
$z_1z_2=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=q$
ㄱ. a, b는 실수이고 $b\neq0$이므로
$q=a^2+b^2>0$ (참)
ㄴ. $z_1=2z_2$이면 $a+bi=2a-2bi$
a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=0$, $b=0$
그런데 $b\neq0$이어야 하므로 $z_1=2z_2$를 만족시키는 p, q는 존재하지 않는다. (거짓)
ㄷ. (반례) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$이면
$z_1z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=1$이지만
$p=2a=\sqrt{3}$, $q=z_1z_2=1$이므로
$p+q\neq1$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

22 조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(-1)=19$이므로
$1-p+q=19 \quad \therefore -p+q=18$ ······㉠
조건 (나)에서 계수가 실수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $a-2i$이므로 다른 한 근은 $a+2i$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(a-2i)+(a+2i)=-p \quad \therefore p=-2a$
$(a-2i)(a+2i)=q \quad \therefore q=a^2+4$
위의 식을 ㉠에 대입하여 정리하면
$a^2+2a+4=18$, $a^2+2a-14=0$
$a=-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-14)}$ ←근의 공식 이용
$=-1\pm\sqrt{15}$
그런데 $a>0$이므로 $a=-1+\sqrt{15}$
$\therefore p+q=a^2-2a+4$
$=(-2a+14)-2a+4$ $(\because a^2+2a-14=0)$
$=-4a+18$
$=-4(-1+\sqrt{15})+18$
$=22-4\sqrt{15}$ 답 ③

23 계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이
$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이므로 다른 한 근은 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$
(두 근의 곱)$=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$
즉, $f(x)=a(x^2-x+1)$ $(a\neq0)$이라 할 수 있다.
이때 $f(\alpha)=0$이므로
$\alpha^2-\alpha+1=0$ ······㉠
*$\alpha+1$을 ㉠의 양변에 곱하면
$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$
$\alpha^3+1=0 \quad \therefore \alpha^3=-1$
$\therefore f(\alpha^6-\alpha)=f(1-\alpha)=f(-\alpha^2)$ $(\because$ ㉠$)$
$=a(\alpha^4+\alpha^2+1)$
$=a(-\alpha+\alpha^2+1)$ $(\because \alpha^3=-1)$
$=0$ 답 ②

• 다른 풀이 •
$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\alpha-1=\sqrt{3}i$
위의 식의 양변을 제곱하면 $4\alpha^2-4\alpha+1=-3$
$4\alpha^2-4\alpha+4=0$
$\therefore \alpha^2-\alpha+1=0$
다음은 *와 같다.

24 이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5$이고,
$x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{D}}{2}$
이때 두 근이 정수가 되기 위해서는 D가 제곱수이거나 0이어야 한다.

그런데 D가 제곱수가 될 수 없으므로 $D=0$
$m^2-6m+5=0$에서
$(m-1)(m-5)=0$ $\therefore m=1$ 또는 $m=5$
(ⅰ) $m=1$일 때,
$x^2+2x+1=0$, 즉 $(x+1)^2=0$이므로 두 근은 정수이다.
(ⅱ) $m=5$일 때,
$x^2+6x+9=0$, 즉 $(x+3)^2=0$이므로 두 근은 정수이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은
$1+5=6$ 답 ①

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 두 정수인 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-m-1$ ……㉠
$\alpha\beta=2m-1$ ……㉡
㉠에서 $m=-\alpha-\beta-1$
이 식을 ㉡에 대입하면
$\alpha\beta=2(-\alpha-\beta-1)-1$
$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+3=0$, $\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=1$
$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)=1$
이때 α, β는 정수이므로
$\alpha+2=1$, $\beta+2=1$ 또는 $\alpha+2=-1$, $\beta+2=-1$
$\therefore \alpha=\beta=-1$ 또는 $\alpha=\beta=-3$
$\alpha=\beta=-1$일 때, $m=1$
$\alpha=\beta=-3$일 때, $m=5$
따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 m의 값의 합은
$1+5=6$

25

조건 ㈏에서 c와 d는 각각 3개의 양의 약수를 가지므로 소수의 제곱수이다.
이때 조건 ㈎에서 서로 다른 네 자연수 a, b, c, d는
$a\le50$, $b\le50$, $c\le50$, $d\le50$ ……㉠
을 만족시키므로 c와 d는 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 중 하나이다.
이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c, d이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a=c+d\le50$, $b=cd\le50$ ($\because$ ㉠)
$c<d$라 하면 $c=2^2$, $d=3^2$이어야 하므로
$a=2^2+3^2=13$, $b=2^2\times3^2=36$
$\therefore a+b=49$ 답 49

26

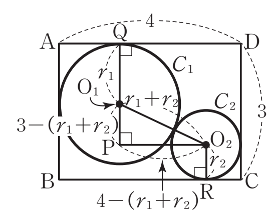
해결단계

❶ 단계	주어진 이차방정식의 두 근이 서로 다른 소수임을 이용하여 m의 값이 될 수 있는 수를 구한다.
❷ 단계	각 m의 값에 대하여 근이 될 수 있는 서로 다른 두 소수를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구한다.

이차방정식 $mx^2-10x+n=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $\frac{10}{m}$이다.
그런데 두 근이 서로 다른 소수이므로 $\frac{10}{m}$은 자연수이다.
즉, m의 값이 될 수 있는 수는 10의 약수인 1, 2, 5, 10이다.
(ⅰ) $m=1$일 때,
두 근의 합은 10이므로 이를 만족시키는 서로 다른 두 소수는 3과 7뿐이다.
이때 이차방정식 $mx^2-10x+n=0$, 즉
$x^2-10x+n=0$은
$(x-3)(x-7)=0$
$x^2-10x+21=0$ $\therefore n=21$
(ⅱ) $m=2$일 때,
두 근의 합은 5이므로 이를 만족시키는 서로 다른 두 소수는 2와 3뿐이다.
이때 이차방정식 $mx^2-10x+n=0$, 즉
$2x^2-10x+n=0$은
$2(x-2)(x-3)=0$
$2x^2-10x+12=0$ $\therefore n=12$
(ⅲ) $m=5$ 또는 $m=10$일 때,
두 근의 합은 2 또는 1이고 이를 만족시키는 서로 다른 두 소수는 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은
$21+12=33$ 답 33

27

오른쪽 그림과 같이 점 O_1을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선과 점 O_2를 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 직선이 만나는 점을 P, 두 점 O_1, O_2에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하자.



두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면
$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$
$\overline{O_1P}=3-(r_1+r_2)$
$\overline{O_2P}=4-(r_1+r_2)$
직각삼각형 O_1PO_2에서 피타고라스 정리에 의하여
$(r_1+r_2)^2=\{3-(r_1+r_2)\}^2+\{4-(r_1+r_2)\}^2$
$(r_1+r_2)^2=(r_1+r_2)^2-6(r_1+r_2)+9$
$+(r_1+r_2)^2-8(r_1+r_2)+16$
$(r_1+r_2)^2-14(r_1+r_2)+25=0$
$\therefore r_1+r_2=7-2\sqrt{6}$ ($\because 0<r_1+r_2<3$)
따라서 구하는 반지름의 길이의 합은 $7-2\sqrt{6}$이다.
답 $7-2\sqrt{6}$

28

$\overline{OH}=4$, $\overline{PH}=3$이므로 삼각형 OHP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=5$

$\overline{HB}=\overline{OB}-\overline{OH}=5-4=1$이므로 삼각형 PHB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HB}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overline{AH}=\overline{AO}+\overline{OH}=5+4=9$이므로 삼각형 PAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{9^2+3^2}$

$=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

따라서 두 선분 PA, PB의 길이, 즉 $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(3\sqrt{10}+\sqrt{10})x+3\sqrt{10}\times\sqrt{10}=0$

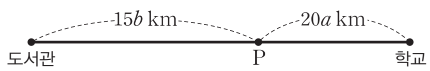
$\therefore x^2-4\sqrt{10}x+30=0$

따라서 $a=-4\sqrt{10}$, $b=30$이므로

$a^2+b=(-4\sqrt{10})^2+30=190$ **답** 190

29

A, B가 도중에 만난 지점을 P라 하자.



A는 B와 마주친 뒤 20분 후에 학교에 도착하였으므로 지점 P에서 학교까지의 거리는 $20a$ km이고, B는 A와 마주친 뒤 15분 후에 도서관에 도착하였으므로 지점 P에서 도서관까지의 거리는 $15b$ km이다.

그런데 A가 B보다 20분 먼저 출발하였으므로 A가 도서관을 출발하여 지점 P까지 가는 데 걸린 시간은 B가 학교를 출발하여 지점 P까지 가는 데 걸린 시간보다 20분 더 길다. 즉,

$\dfrac{15b}{a}=\dfrac{20a}{b}+20 \leftarrow (\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

이때 $\dfrac{b}{a}=t$로 놓으면 $15t=\dfrac{20}{t}+20$

$t>0$이므로 위의 식의 양변에 t를 곱하면

$15t^2=20+20t$

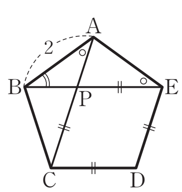
$15t^2-20t-20=0$, $3t^2-4t-4=0$

$(3t+2)(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t>0$)

$\therefore \dfrac{b}{a}=2$ **답** 2

30

두 선분 BE와 AC의 교점을 P라 하면 삼각형 ABE와 삼각형 BCA가 합동이므로



$\angle AEB=\angle BAC$

두 삼각형 ABE, PBA에서

$\angle B$는 공통, $\angle AEB=\angle PAB$이므로

$\triangle ABE \backsim \triangle PBA$ (AA 닮음)

한편, 사각형 PCDE에서 $\overline{PC}/\!/\overline{ED}$, $\overline{PE}/\!/\overline{CD}$이고 $\overline{CD}=\overline{DE}$이므로 □PCDE는 마름모이다.

$\therefore \overline{PE}=2$

$\overline{BE}=x$라 하면 $\overline{PB}=x-2$이므로

$\overline{BE}:\overline{BA}=\overline{AB}:\overline{PB}$에서 $x:2=2:(x-2)$

$4=x(x-2)$, $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\overline{BE}=1+\sqrt{5}$ **답** ②

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.47~48

01 2	02 2	03 -12	04 -30	05 26
06 34	07 ③	08 8	09 $-\frac{3}{4}$	10 50
11 $2+\sqrt{5}$	12 21			

01 해결단계

❶ 단계	$\lvert x-1\rvert=0$, $\lvert\lvert x-1\rvert-3\rvert=0$을 만족시키는 x의 값을 기준으로 범위를 나눈다.
❷ 단계	❶ 단계에서 나눈 범위에 따라 방정식을 푼다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

$\lvert\lvert x-1\rvert-3\rvert=x+a$에서

(i) $x<1$일 때,

$\lvert x-1\rvert=-(x-1)$이므로 $\lvert -x-2\rvert=x+a$

① $-2\le x<1$일 때,

$\lvert -x-2\rvert=-(-x-2)$이므로

$x+2=x+a$

이때 방정식의 해가 무수히 많으려면 이 등식이 항등식이 되어야 하므로

$a=2$

② $x<-2$일 때,

$\lvert -x-2\rvert=-x-2$이므로

$-x-2=x+a$

$2x=-a-2$ $\therefore x=-\dfrac{a+2}{2}$

이때 방정식을 만족시키는 해는 오직 하나만 존재하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x\ge1$일 때,

$\lvert x-1\rvert=x-1$이므로 $\lvert x-4\rvert=x+a$

① $x\ge4$일 때,

$\lvert x-4\rvert=x-4$이므로

$x-4=x+a$

이때 방정식의 해가 무수히 많으려면 이 등식이 항등식이 되어야 하므로

$a=-4$

그런데 a는 자연수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

② $1\le x<4$일 때,

$\lvert x-4\rvert=-(x-4)$이므로 $-x+4=x+a$

$2x=4-a$ $\therefore x=\dfrac{4-a}{2}$

이때 방정식을 만족시키는 해는 오직 하나만 존재하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 2이다.

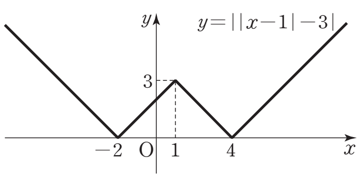
답 2

• 다른 풀이 •

방정식 $||x-1|-3|=x+a$의 해가 무수히 많으려면 두 함수 $y=||x-1|-3|$, $y=x+a$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많아야 한다.

$$y=||x-1|-3|$$
$$=\begin{cases} |-(x-1)-3| & (x<1) \\ |(x-1)-3| & (x\geq 1) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} |-x-2| & (x<1) \\ |x-4| & (x\geq 1) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -x-2 & (x<-2) \\ x+2 & (-2\leq x<1) \\ -x+4 & (1\leq x<4) \\ x-4 & (x\geq 4) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=||x-1|-3|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 함수 $y=||x-1|-3|$, $y=x+a$의 그래프의 교점의 개수가 무수히 많으려면 $y=x+a$는 $y=x+2$ 또는 $y=x-4$와 같아야 하므로

$a=2$ 또는 $a=-4$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 자연수)

02 해결단계

❶ 단계	$\lvert x^2+3x-2k+1\rvert=5$이면 $x^2+3x-2k+1=-5$ 또는 $x^2+3x-2k+1=5$임을 이용한다.
❷ 단계	판별식을 이용하여 각 이차방정식이 두 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	근과 계수의 관계를 이용하여 각 이차방정식의 두 근의 곱을 k에 대한 식으로 나타낸다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 구한 k의 조건과 네 근의 곱이 -16임을 이용하여 k의 값을 구한다.

$|x^2+3x-2k+1|=5$에서

$x^2+3x-2k+1=-5$ 또는 $x^2+3x-2k+1=5$

이때 x에 대한 방정식 $|x^2+3x-2k+1|=5$가 서로 다른 네 실근을 가지므로 두 이차방정식

$x^2+3x-2k+1=-5$, $x^2+3x-2k+1=5$는 각각 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x^2+3x-2k+1=-5$일 때,

이차방정식 $x^2+3x-2k+1=-5$, 즉 $x^2+3x-2k+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4(-2k+6)>0$

$8k>15 \quad \therefore k>\frac{15}{8}$ ……㉠

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-2k+6$ ……㉡

(ii) $x^2+3x-2k+1=5$일 때,

이차방정식 $x^2+3x-2k+1=5$, 즉 $x^2+3x-2k-4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4(-2k-4)>0$

$8k>-25 \quad \therefore k>-\frac{25}{8}$ ……㉢

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-2k-4$ ……㉣

(i), (ii)에서 $k>\frac{15}{8}$ ($\because$ ㉠, ㉢)

또한, 주어진 방정식의 모든 실근의 곱이 -16이므로

$(-2k+6)(-2k-4)=-16$ ($\because$ ㉡, ㉣)

$4k^2-4k-24=-16$

$4k^2-4k-8=0$, $k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $k>\frac{15}{8}$이므로 $k=2$

답 2

03 해결단계

❶ 단계	이차식 $(x-a)(x-3a)+4$가 완전제곱식임을 알고 판별식을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 a의 값에 따른 $P(x)$를 구한다.
❸ 단계	모든 $P(5)$의 값의 합을 구한다.

$\{P(x)+3\}^2=(x-a)(x-3a)+4$에서

$\{P(x)+3\}^2=x^2-4ax+3a^2+4$ ……㉠

즉, 이차식 $x^2-4ax+3a^2+4$가 완전제곱식이므로 이차방정식 $x^2-4ax+3a^2+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-(3a^2+4)=0$

$a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

㉠에서 $\{P(x)+3\}^2=x^2+8x+16=(x+4)^2$이므로

$P(x)+3=-x-4$ 또는 $P(x)+3=x+4$

즉, $P(x)=-x-7$ 또는 $P(x)=x+1$이므로

$P(5)=-12$ 또는 $P(5)=6$

(ii) $a=2$일 때,

㉠에서 $\{P(x)+3\}^2=x^2-8x+16=(x-4)^2$이므로

$P(x)+3=-x+4$ 또는 $P(x)+3=x-4$

즉, $P(x)=-x+1$ 또는 $P(x)=x-7$이므로

$P(5)=-4$ 또는 $P(5)=-2$

(i), (ii)에서 $P(5)=-12$ 또는 $P(5)=-4$ 또는 $P(5)=-2$ 또는 $P(5)=6$이므로 구하는 합은

$-12+(-4)+(-2)+6=-12$

답 -12

04 해결단계

❶ 단계	이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	이차방정식 $x^2-(4a-b)x-8b=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 $\vert\alpha\vert+\vert\beta\vert$, $\vert\alpha\vert\vert\beta\vert$의 합과 곱을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 a, b의 값을 구한 후, ab의 값을 계산한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ ……㉠

또한, 이차방정식 $x^2-(4a-b)x-8b=0$의 두 근이 $|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha||\beta|$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha||\beta|=4a-b$ ……㉡

$(|\alpha|+|\beta|)\times|\alpha||\beta|=-8b$ ……㉢

이때 α, β의 부호가 서로 다르므로

$|\alpha||\beta|=-\alpha\beta=-b$

즉, ㉢에서 $(|\alpha|+|\beta|)\times(-b)=-8b$

$\therefore |\alpha|+|\beta|=8\ (\because b\neq0)$ ……㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$8-b=4a-b \qquad \therefore a=2$

㉠에서 $\alpha+\beta=-2$ ……㉤

㉣, ㉤에서

$(|\alpha|+|\beta|)^2-(\alpha+\beta)^2=8^2-(-2)^2$

$2|\alpha||\beta|-2\alpha\beta=60$

$-2b-2b=60 \qquad \therefore b=-15$

$\therefore ab=2\times(-15)=-30$ 답 -30

05 해결단계

❶ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β의 합과 곱, γ, δ의 합과 곱을 각각 구한다.
❷ 단계	판별식을 이용하여 α, β, γ, δ 중 실근이 있는지 파악한다.
❸ 단계	α, β, γ, δ 사이의 관계식을 이용하여 각 값과 a, b의 값을 구하고 a^2+b^2의 값을 계산한다.

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$

또한, 이차방정식 $x^2+bx-2=0$의 서로 다른 두 근이 γ, δ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-b$, $\gamma\delta=-2$

이차방정식 $x^2+bx-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2+8>0$에서 두 근 γ, δ는 실근이므로

$\alpha+\gamma=2+2i$에서

$\alpha=(2-\gamma)+2i$

이때 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 계수는 실수이고, α가 허근이므로 β는 α의 켤레복소수이다. 즉,

$\beta=\overline{\alpha}=(2-\gamma)-2i$

$\alpha+\beta=2$에서

$(2-\gamma)+2i+(2-\gamma)-2i=2$, $4-2\gamma=2$

$\therefore \gamma=1$, $\delta=-2\ (\because \gamma\delta=-2)$

$\gamma+\delta=-b$이므로

$1+(-2)=-b \qquad \therefore b=1$

또한, $\alpha=1+2i$, $\beta=1-2i$이므로 $\alpha\beta=a$에서

$a=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore a^2+b^2=5^2+1^2=26$ 답 26

06 해결단계

❶ 단계	이차방정식 $x^2+8px-q^2=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 p, q에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	α, β의 값에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 p, q의 값을 구한다.
❸ 단계	p, q의 값을 이용하여 α, β의 값을 구한 후, $\vert\alpha-\beta\vert+p+q$의 값을 계산한다.

이차방정식 $x^2+8px-q^2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-8p$, $\alpha\beta=-q^2$

그런데 α, β가 모두 정수, p, q가 모두 소수이고, 두 근의 곱이 $-q^2$이므로 α, β가 q 또는 $-q$, -1 또는 q^2, 1 또는 $-q^2$인 세 가지 경우뿐이다.

(i) α, β가 q 또는 $-q$일 때,

$\alpha+\beta=q+(-q)=0$

이때 $p\neq0$이므로 $\alpha+\beta=-8p$라는 조건에 맞지 않다.

즉, q 또는 $-q$는 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

(ii) α, β가 -1 또는 q^2일 때,

$\alpha+\beta=-1+q^2=-8p$

소수인 p에 대하여 $p>1$이므로

$-1+q^2=-8p<-8 \qquad \therefore q^2<-7$

그런데 소수인 q는 $q>1$이므로 조건에 맞지 않다.

즉, -1 또는 q^2은 주어진 이차방정식의 해가 아니다.

(iii) α, β가 1 또는 $-q^2$일 때,

$\alpha+\beta=1-q^2=-8p \qquad \therefore 8p=q^2-1$

이를 만족시키는 소수 p, q는 $p=3$, $q=5$뿐이다. *

(i), (ii), (iii)에서 $p=3$, $q=5$

$x^2+24x-25=0$에서

$(x+25)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-25$ 또는 $x=1$

즉, 이차방정식 $x^2+24x-25=0$의 두 근은 -25, 1이므로

$|\alpha-\beta|=1-(-25)=26$

$\therefore |\alpha-\beta|+p+q=26+3+5=34$ 답 34

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$8p=q^2-1$에서 $8p=(q+1)(q-1)$

(i) $q=2$일 때,

$8p=3\times1$이므로 p는 소수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) q가 홀수인 소수일 때,

$q=2k-1$(k는 자연수)이라 하면 $2p=k(k-1)$

① $k=2p$, $k-1=1$일 때,

$k=2$, $p=1$

이때 p는 소수라는 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=p$, $k-1=2$일 때,

$k=3$, $p=3$, $q=5$

(i), (ii)에서 $p=3$, $q=5$

07 해결단계

❶ 단계	주어진 두 이차방정식의 계수가 실수임을 이용하여 한 근이 각각 α, β일 때, 나머지 한 근이 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$임을 파악한다.
❷ 단계	$\alpha+\beta$가 순허수, $\alpha\beta$가 실수임을 이용하여 α, β를 $A+Bi$ (A, B는 실수) 꼴로 나타낸다.
❸ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이고, 한 허근이 α이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.

또한, 이차방정식 $x^2+cx+d=0$의 계수가 실수이고, 한 허근이 β이므로 $\overline{\beta}$도 근이다.

이때 $\alpha+\beta$는 순허수이므로 α, β의 실수부분은 절댓값이 같고 부호가 반대이어야 한다. 즉,

$\alpha=p+qi$, $\overline{\alpha}=p-qi$, $\beta=-p+ri$, $\overline{\beta}=-p-ri$

(단, p, q, r은 실수)

라 할 수 있다.

이때 $\alpha\beta$는 실수이므로

$\alpha\beta=(p+qi)(-p+ri)=-p^2-qr+p(r-q)i$에서

$p(r-q)=0$

$\therefore p=0$ 또는 $r=q$

그런데 $p=0$이면 $\alpha=qi$, $\overline{\alpha}=-qi$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=\alpha+\overline{\alpha}=0 \qquad \therefore a=0$

이는 a가 0이 아닌 실수라는 조건에 맞지 않다.

따라서 $r=q$이므로

$\alpha=p+qi$, $\overline{\alpha}=p-qi$, $\beta=-p+qi$, $\overline{\beta}=-p-qi$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=\alpha+\overline{\alpha}=2p \qquad \therefore a=-2p$

$b=\alpha\overline{\alpha}=p^2+q^2$

또한, 이차방정식 $x^2+cx+d=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$-c=\beta+\overline{\beta}=-2p \qquad \therefore c=2p$

$d=\beta\overline{\beta}=p^2+q^2$

ㄱ. $a+c=-2p+2p=0$ (참)

ㄴ. $\overline{\alpha}\beta=(p-qi)(-p+qi)=-(p-qi)^2$

$\alpha\overline{\beta}=(p+qi)(-p-qi)=-(p+qi)^2$

이때 $q\neq0$이면 $\overline{\alpha}\beta\neq\alpha\overline{\beta}$이다. (거짓)

ㄷ. $b=d=p^2+q^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

08 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 p, q 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 얻은 관계식과 조건 (나)를 이용하여 정수 q의 값을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 q의 값을 이용하여 p의 값을 구한다.
❹ 단계	p^2+q^2의 최댓값을 구한다.

$f(x)=x^2+2x+4$이므로

$$\begin{aligned} g(x)&=f(x-p)-q \\ &=(x-p)^2+2(x-p)+4-q \\ &=x^2+2(1-p)x+p^2-2p-q+4 \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $g(0)=2$이므로

$g(x)=x^2+2(1-p)x+2$이고,

$p^2-2p-q+4=2$에서

$(p-1)^2=q-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $(p-1)^2\geq0$이므로 $q-1\geq0$

$\therefore q\geq1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

한편, 조건 (나)에서 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(1-p)^2-2=q-3<0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore q<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $1\leq q<3$

이때 q는 정수이므로

$q=1$ 또는 $q=2$

(i) $q=1$일 때, ㉠에서

$(p-1)^2=0 \qquad \therefore p=1$

(ii) $q=2$일 때, ㉠에서

$(p-1)^2=1$, $p-1=\pm1$

$\therefore p=2$ 또는 $p=0$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$

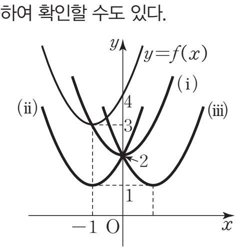
따라서 p^2+q^2의 값은 $p=2$, $q=2$일 때 최대이고 그 최댓값은

$2^2+2^2=8$ **답** 8

BLACKLABEL 특강 참고

이 문제를 이차함수의 그래프를 이용하여 확인할 수도 있다.

함수 $g(x)=f(x-p)-q$의 그래프는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 그래프이다.



이때 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지고, $g(0)=2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과는 만나지 않으면서 y축과는 점 $(0, 2)$에서 만난다.

따라서 조건을 만족시키는 경우는 위의 그림과 같이 세 가지이다.

(i) x축과 y축의 방향으로 각각 1, -1만큼 평행이동한 경우

$p=1$, $q=1$이므로 $p^2+q^2=1^2+1^2=2$

(ii) y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 경우

$p=0$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=0^2+2^2=4$

(iii) x축과 y축의 방향으로 각각 2, -2만큼 평행이동한 경우

$p=2$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=2^2+2^2=8$

09 해결단계

❶ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 이용하여 $\dfrac{2-(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)^2}$을 k에 대한 식으로 나타낸 후, 이 식의 값을 정수 n이라 하고 k에 대한 방정식으로 정리한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 방정식이 실근을 가짐을 이용하여 정수 n의 값을 구한다.
❹ 단계	❸ 단계에서 구한 n의 값을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 k의 값을 구한 후, 그 합을 계산한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k^2-2k-1$

즉,

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2k)^2-4(k^2-2k-1)$

$=8k+4$

$(\alpha+\beta)^2=(2k)^2=4k^2$

이므로

$\dfrac{2-(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)^2}=\dfrac{-8k-2}{8k^2}=\dfrac{-4k-1}{4k^2}$

이때 $\dfrac{-4k-1}{4k^2}=n$ (n은 음이 아닌 정수)이라 하면

$4nk^2+4k+1=0$ ……㉠

(i) $n=0$일 때,

㉠에서 $4k+1=0$ $\therefore k=-\dfrac{1}{4}$

(ii) $n\neq0$일 때,

이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-4n\geq0$ $\therefore n\leq1$

이때 n은 음이 아닌 정수이므로 $n=1$

즉, $4k^2+4k+1=0$이므로

$(2k+1)^2=0$ $\therefore k=-\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

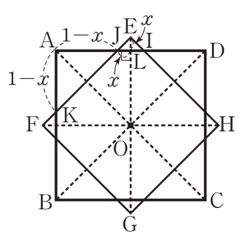
$-\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$ 답 $-\dfrac{3}{4}$

10 해결단계

❶ 단계	꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{JL}=x$라 하고, 두 삼각형 AKJ, EJI의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배가 되도록 하는 x의 값을 구한다.
❸ 단계	정사각형 EFGH의 한 변의 길이가 $2k$임을 이용하여 k의 값을 구한 후, $100(p+q)$의 값을 구한다.

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고

$\overline{JL}=x$ $(0<x<1)$라 하자.



△EJI는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{EL}=\overline{JL}=x$

$\therefore$ △EJI$=\dfrac{1}{2}\times2x\times x=x^2$

또한, $\overline{AD}=2$에서 $\overline{AL}=1$이므로

$\overline{AJ}=1-x$

△AKJ가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AK}=\overline{AJ}=1-x$

$\therefore$ △AKJ$=\dfrac{(1-x)^2}{2}$

삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\dfrac{3}{2}$배이므로

$\dfrac{(1-x)^2}{2}=\dfrac{3}{2}x^2$

$2x^2+2x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $(\because 0<x<1)$

한편, 정사각형 EFGH의 한 변의 길이가 $2k$이므로

$\overline{EG}=\sqrt{2}\times2k=2\sqrt{2}k$

$\therefore \overline{OE}=\sqrt{2}k$

이때 $\overline{OE}=\overline{OL}+\overline{EL}$이므로

$\sqrt{2}k=1+x=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore k=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

따라서 $p=\dfrac{1}{4}$, $q=\dfrac{1}{4}$이므로

$100(p+q)=100\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=50$ 답 50

11 해결단계

❶ 단계	$x-[x]$의 의미를 파악한다.
❷ 단계	주어진 식을 변형하여 $(x-[x])^2$을 x에 대한 간단한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$(x-[x])^2$의 값의 범위를 이용하여 $[x]$의 값을 구한 후, 주어진 식에 대입하여 x의 값을 구한다.

$x>0$인 실수 x에 대하여 $[x]$는 x의 정수 부분이므로

$x-[x]$는 x의 소수 부분이다.

즉, $0\leq x-[x]<1$이므로 $0\leq(x-[x])^2<1$ ……㉠

한편, $x^2+(x-[x])^2-18=0$에서

$(x-[x])^2=18-x^2$

위의 식을 ㉠에 대입하면 $0\leq18-x^2<1$

$-1<x^2-18\leq0$, $17<x^2\leq18$

$\therefore \sqrt{17}<x\leq\sqrt{18}$ $(\because x>0)$

즉, $[x]=4$이므로 이것을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+(x-4)^2-18=0$, $2x^2-8x-2=0$

$x^2-4x-1=0$

$\therefore x=2+\sqrt{5}$ $(\because x>0)$ 답 $2+\sqrt{5}$

• 다른 풀이 •

$n\leq x<n+1$ (n은 음이 아닌 정수)이라 하면

$[x]=n$

$x^2+(x-[x])^2-18=0$에서 $x^2+(x-n)^2-18=0$

$\therefore 2x^2-2nx+n^2-18=0$

이 이차방정식의 근이 존재하므로 근의 공식을 이용하여 근을 구하면

$x=\dfrac{n\pm\sqrt{36-n^2}}{2}$

이때 $n\leq x<n+1$을 만족시켜야 하므로

$x=\dfrac{n+\sqrt{36-n^2}}{2}$ ……㉡

㉡을 $n\leq x<n+1$에 대입하면

$n\leq\dfrac{n+\sqrt{36-n^2}}{2}<n+1$

$2n \le n+\sqrt{36-n^2} < 2n+2$

$n \le \sqrt{36-n^2} < n+2$

위의 부등식의 각 변을 제곱하면

$n^2 \le 36-n^2 < n^2+4n+4$

(i) $n^2 \le 36-n^2$에서

$2n^2 \le 36$, $n^2 \le 18$

$\therefore$ $0 \le n \le 3\sqrt{2}$ ($\because$ n은 음이 아닌 정수)

(ii) $36-n^2 < n^2+4n+4$에서

$2n^2+4n-32>0$, $n^2+2n-16>0$

$\therefore$ $n > -1+\sqrt{17}$ ($\because$ n은 음이 아닌 정수)

(i), (ii)에서 $-1+\sqrt{17} < n \le 3\sqrt{2}$이므로

$n=4$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 방정식의 근은

$\dfrac{4+\sqrt{20}}{2}=2+\sqrt{5}$

12 해결단계

❶ 단계	주어진 이차방정식의 해를 a에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	이차방정식의 정수인 근이 적어도 하나 존재하기 위한 a의 조건을 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계를 만족시키는 자연수 a의 값을 모두 구한 후, 그 곱을 계산한다.

이차방정식 $ax^2+2(a+1)x+a-3=0$에서

$$x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-a(a-3)}}{a}$$

$$=\frac{-a-1\pm\sqrt{5a+1}}{a}$$

$\therefore$ $x=-1-\dfrac{1+\sqrt{5a+1}}{a}$ 또는 $x=-1+\dfrac{\sqrt{5a+1}-1}{a}$

주어진 이차방정식의 두 근 중 적어도 하나가 정수이려면 $5a+1$은 제곱수이면서 $\dfrac{1+\sqrt{5a+1}}{a}$ 또는 $\dfrac{\sqrt{5a+1}-1}{a}$이 정수이어야 한다.

$a \ge 1$에서 $5a+1 \ge 6$이므로 $5a+1$이 제곱수가 되는 경우와 그때의 a의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$5a+1$	9	16	25	36	49	64	81	$\cdots$
a	$\frac{8}{5}$	3	$\frac{24}{5}$	7	$\frac{48}{5}$	$\frac{63}{5}$	16	$\cdots$

이때 $\dfrac{1+\sqrt{5a+1}}{a} \ge 1$에서 $0<a\le 7$,

$\dfrac{\sqrt{5a+1}-1}{a} \ge 1$ ($\because$ $\sqrt{5a+1}>1$)에서 $0<a\le 3$이므로

조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 3과 7뿐이다.

따라서 구하는 값은

$3\times 7=21$ 답 21

• 다른 풀이 •

$ax^2+2(a+1)x+a-3=0$에서

$(x^2+2x+1)a+(2x-3)=0$

$(x+1)^2a=3-2x$

$x=-1$은 근이 아니므로 이 식의 양변을 $(x+1)^2$으로 나누면

$a=\dfrac{3-2x}{(x+1)^2}$ ……㉠

주어진 이차방정식의 두 근 중 적어도 하나가 정수이므로 어떤 정수 x에 대하여 자연수인 a의 값을 구하면 된다.

이때 a가 자연수이면 $a \ge 1$이므로 ㉠에서

$3-2x \ge (x+1)^2$

$x^2+4x-2 \le 0$

$\therefore$ $-2-\sqrt{6} \le x \le -2+\sqrt{6}$

즉, -1이 아닌 정수 x의 값은 -4, -3, -2, 0이다.

$x=-4$일 때,

㉠에서 $a=\dfrac{3-2\times(-4)}{(-4+1)^2}=\dfrac{11}{9}$이므로 자연수가 아니다.

$x=-3$일 때,

㉠에서 $a=\dfrac{3-2\times(-3)}{(-3+1)^2}=\dfrac{9}{4}$이므로 자연수가 아니다.

$x=-2$일 때,

㉠에서 $a=\dfrac{3-2\times(-2)}{(-2+1)^2}=7$

$x=0$일 때,

㉠에서 $a=\dfrac{3-2\times 0}{(0+1)^2}=3$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값의 곱은

$3\times 7=21$

05. 이차방정식과 이차함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.50~52

01 ②	02 8	03 ②	04 ⑤	05 ③
06 21	07 ④	08 ①	09 ②	10 -1
11 ③	12 $1<a<2$	13 ③	14 ④	15 2
16 55	17 4	18 ①	19 ④	20 ④
21 200				

01 두 점 A, B를 A$(\alpha, 0)$, B$(\beta, 0)$이라 하면 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a$

이때 $\overline{\text{AB}}=\sqrt{5}$가 되려면 $|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이어야 하므로 이 식의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=5$

또한, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$5=a^2-4a$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 ②

02 (i) 이차함수 $y=x^2-12x+2k$의 그래프와 x축이 만날 때, 이차방정식 $x^2-12x+2k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-6)^2-1\times 2k\geq 0$

$36-2k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 18$

(ii) 이차함수 $y=-2kx^2-8x-1$의 그래프와 x축이 만날 때, 이차방정식 $-2kx^2-8x-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-4)^2-(-2k)\times(-1)\geq 0$

$16-2k\geq 0 \qquad \therefore k\leq 8$

(i), (ii)에서 $k\leq 8$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 8의 8개이다. 답 8

03 이차함수 $y=x^2+2(m-1)x+m^2+2$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m^2+2=0$이 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m^2+2)<0$

$-2m-1<0 \qquad \therefore m>-\frac{1}{2}$ 답 ②

04 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점 A의 x좌표가 $3+\sqrt{2}$이므로 이차방정식 $x^2-4x+1=mx+n$, 즉 $x^2-(4+m)x+1-n=0$의 한 실근이 $3+\sqrt{2}$이다.

이때 이차방정식 $x^2-(4+m)x+1-n=0$의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $3+\sqrt{2}$이면 $3-\sqrt{2}$도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=4+m \qquad \therefore m=2$

$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=1-n \qquad \therefore n=-6$

$\therefore m-n=2-(-6)=8$ 답 ⑤

05 이차함수 $y=-2x^2+6x$의 그래프와 직선 $y=3x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+6x=3x+k$, 즉 $2x^2-3x+k=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times 2\times k\geq 0$

$9-8k\geq 0 \qquad \therefore k\leq\frac{9}{8}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 ③

06 직선 $y=2x+a$가 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+20$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 두 그래프는 서로 만나지 않는다.

이차방정식 $x^2-2ax+a^2+20=2x+a$, 즉 $x^2-2(a+1)x+a^2-a+20=0$이 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2-a+20)<0$

$3a-19<0 \qquad \therefore a<\frac{19}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 21

07 직선 $y=f(x)$가 점 $(-1, 2)$를 지나므로 기울기를 a라 하면

$f(x)=a(x+1)+2$ (단, a는 실수) $\cdots\cdots$㉠

이차함수 $y=3x^2-2x-3$의 그래프와 직선 $y=a(x+1)+2$가 오직 한 점에서만 만나므로 이차방정식 $3x^2-2x-3=a(x+1)+2$, 즉 $3x^2-(a+2)x-a-5=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+2)\}^2-4\times 3\times(-a-5)=0$

$a^2+16a+64=0$, $(a+8)^2=0$

$\therefore a=-8$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $f(x)=-8x-6$이므로

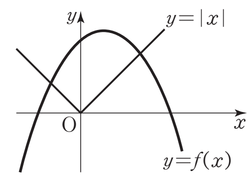
$f(-2)=-8\times(-2)-6=10$ 답 ④

08 이차함수 $y=x^2+2$의 그래프에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+a$ (a는 실수)라 하자.
이차방정식 $x^2+2=2x+a$, 즉 $x^2-2x+2-a=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-(2-a)=0 \qquad \therefore a=1$
즉, 직선 $y=2x+1$이 이차함수 $y=-x^2+2kx+6k+4$의 그래프와 접하므로 이차방정식
$-x^2+2kx+6k+4=2x+1$, 즉
$x^2+2(1-k)x-6k-3=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=(1-k)^2-(-6k-3)=0$
$k^2+4k+4=0$, $(k+2)^2=0$
$\therefore k=-2$
답 ①

09 두 이차함수 $y=2x^2-4x+3$, $y=x^2+2ax-a^2-13$의 그래프가 만나지 않으므로 이차방정식
$2x^2-4x+3=x^2+2ax-a^2-13$, 즉
$x^2-2(a+2)x+a^2+16=0$이 허근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a+2)\}^2-(a^2+16)<0$
$4a-12<0 \qquad \therefore a<3$
따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 2이다.
답 ②

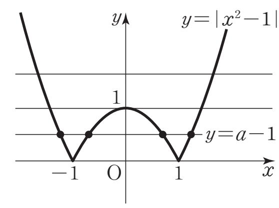
10 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 두 교점의 x좌표가 각각 -2, 2이므로 이차방정식
$ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$
의 두 실근은 -2, 2이다. ……㉠
한편, 이차방정식
$a(2x+1)^2+(b-m)(2x+1)+c-n=0$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하고, $2x+1=t$로 놓으면 방정식
$at^2+(b-m)t+c-n=0$의 두 실근은 $2\alpha+1$, $2\beta+1$이다.
㉠에서 $2\alpha+1=-2$, $2\beta+1=2$이므로
$\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{2} \qquad \therefore \alpha+\beta=-1$
따라서 구하는 이차방정식의 모든 실근의 합은 -1이다.
답 -1

11 $f(x)-|x|=0$에서 $f(x)=|x|$
즉, 방정식 $f(x)-|x|=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$, $y=|x|$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
$a<0$, $b>0$, $c>0$이므로 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 위로 볼록하고,
(꼭짓점의 x좌표)$=-\frac{b}{2a}>0$,
(y축과의 교점의 y좌표)$=c>0$
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



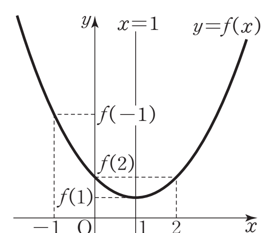
이때 $y=|x|=\begin{cases} x & (x\ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$
이므로 함수 $y=|x|$의 그래프는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 구하는 실근의 개수는 2이다.
답 ③

12 방정식 $|x^2-1|=a-1$의 실근은 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=a-1$의 교점의 x좌표와 같다.
이때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 방정식
$|x^2-1|=a-1$이 서로 다른 네 실근을 가지려면
$0<a-1<1$
$\therefore 1<a<2$



답 $1<a<2$

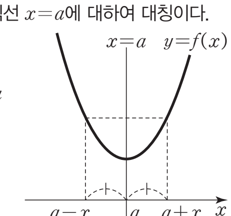
13 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭인 포물선이다.
즉, 대칭축이 $x=1$이고, 이차항의 계수는 양수이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)$을 갖는다.
따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore f(1)<f(2)<f(-1)$
답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

함수 $f(x)$가 $f(a-x)=f(a+x)$ 또는 $f(x)=f(2a-x)$를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
함수 $f(x)$가 $f(a-x)=f(a+x)$를 만족시키면 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.
또한, $f(a-x)=f(a+x)$에서 x 대신 $a-x$를 대입하면
$f(a-(a-x))=f(a+(a-x))$
$\therefore f(x)=f(2a-x)$
즉, $f(x)=f(2a-x)$는 $f(a-x)=f(a+x)$와 같은 의미이다.



14 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 최솟값 -1을 가지므로

$f(x)=a(x-2)^2-1$

이때 $f(1)=1$이므로

$f(1)=a\times(-1)^2-1=a-1=1 \qquad \therefore a=2$

즉, $f(x)=2(x-2)^2-1=2x^2-8x+7$이므로

$a=2,\ b=-8,\ c=7$

$\therefore a-b-c=2-(-8)-7=3$

답 ④

15 주어진 직선은 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-0=\dfrac{1-0}{0-1}(x-1) \qquad \therefore y=-x+1$

즉, 직선 $-x-y+1=0$이 직선 $ax+by+1=0$과 일치하므로

$a=-1,\ b=-1$

$\therefore y=ax^2+bx$

$\quad =-x^2-x$

$\quad =-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

이때 $0\le x\le 1$이므로 — 꼭짓점의 x좌표 $-\frac{1}{2}$이 포함되지 않는다.

$x=0$일 때 최댓값 $M=0$, $x=1$일 때 최솟값 $m=-2$를 갖는다.

$\therefore M-m=0-(-2)=2$

답 2

16 $3x-1=t$로 놓으면 $0\le x\le 3$에서 $-1\le t\le 8$이고

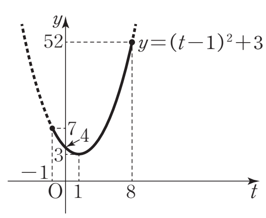
$y=(3x-1)^2+2(1-3x)+4$

$\quad =(3x-1)^2-2(3x-1)+4$

$\quad =t^2-2t+4$

$\quad =(t-1)^2+3$

즉, $-1\le t\le 8$에서 이차함수 $y=(t-1)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=8$일 때 최댓값 $M=52$,

$t=1$일 때 최솟값 $m=3$을 갖는다.

$\therefore M+m=55$

답 55

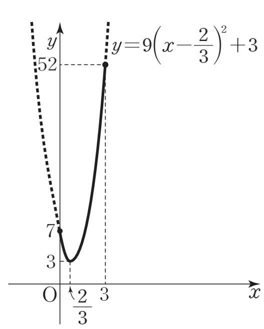
• 다른 풀이 •

$y=(3x-1)^2+2(1-3x)+4$

$\quad =9x^2-12x+7$

$\quad =9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+3$

즉, $0\le x\le 3$에서 이차함수 $y=9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

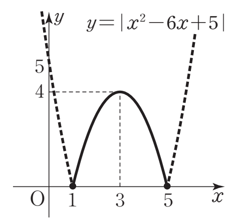


$x=3$일 때 최댓값 $M=52$,

$x=\dfrac{2}{3}$일 때 최솟값 $m=3$을 갖는다.

$\therefore M+m=55$

17 $1\le x\le 5$에서 함수 $\left(=|(x-1)(x-5)|=|(x-3)^2-4|\right)$ $y=|x^2-6x+5|$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$x=3$일 때 최댓값 4,

$x=1$ 또는 $x=5$일 때 최솟값 0을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$4+0=4$

답 4

• 다른 풀이 •

$1\le x\le 5$에서 $x-1\ge 0$, $x-5\le 0$이므로

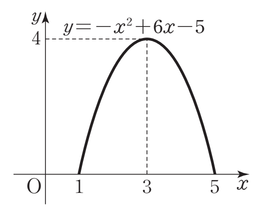
$(x-1)(x-5)\le 0$

즉, $1\le x\le 5$에서 함수 $y=|x^2-6x+5|$의 그래프는 함수

$y=-x^2+6x-5$

$\quad =-(x-3)^2+4$

의 그래프와 같으므로 $x=3$일 때 최댓값 4, $x=1$ 또는 $x=5$일 때 최솟값 0을 갖는다.



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$4+0=4$

18 $-x^2-y^2+4x+6y+4=-(x-2)^2-(y-3)^2+17$ ……㉠

이때 x, y는 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$, $(y-3)^2\ge 0$이다.

$\therefore -(x-2)^2-(y-3)^2+17\le 17$

㉠에서 $x=2$, $y=3$일 때 최댓값 17을 가지므로

$a=2,\ b=3,\ c=17$

$\therefore a+b+c=22$

답 ①

19 $2x-y^2=-4$에서 $y^2=2x+4$ ……㉠

두 실수 x, y에 대하여 $\underbrace{y^2\ge 0}_{(\text{실수})^2\ge 0}$, 즉 $2x+4\ge 0$이므로

$x\ge -2$

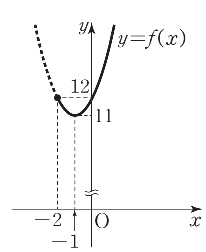
㉠을 x^2+3y^2-4x에 대입하면

$x^2+3y^2-4x=x^2+3(2x+4)-4x$

$\qquad =x^2+2x+12$

$\qquad =(x+1)^2+11$

$f(x)=(x+1)^2+11$이라 하면 $x\ge -2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최솟값 11을 갖는다.

따라서 x^2+3y^2-4x의 최솟값은 11이다.

답 ④

20 상품 한 개의 가격이 $\left(11-\dfrac{x}{100}\right)$원인 상품 x개를 모두 팔았으므로 생산된 상품 x개의 총 판매 금액은

$x\left(11-\dfrac{x}{100}\right)$원

이때 이 상품을 x개 생산하는 데 필요한 비용은 $\left(1000+x+\dfrac{x^2}{400}\right)$원이고, 상품 x개를 생산하여 모두 판매하였을 때의 이익을 y원이라 하면

(이익)=(총 판매 금액)−(생산 비용)이므로

$$y=x\left(11-\frac{x}{100}\right)-\left(1000+x+\frac{x^2}{400}\right)$$
$$=-\frac{1}{80}x^2+10x-1000$$
$$=-\frac{1}{80}(x-400)^2+1000$$

즉, $x=400$일 때 y의 최댓값은 1000이다.

따라서 400개의 상품을 생산하여 판매하였을 때 이익이 최대가 된다. 답 ④

21 직사각형 모양의 물받이의 단면의 세로의 길이가 x cm이므로 가로의 길이는 $(40-2x)$ cm이다.

이때 $x>0$, $40-2x>0$이어야 하므로 $0<x<20$이다.

단면의 넓이를 y cm²라 하면

$$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$$
$$=-2(x-10)^2+200\ (0<x<20)$$

따라서 단면의 넓이는 $x=10$일 때 최댓값이 200 cm²이므로 $M=200$이다. 답 200

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.53~57

01 −16	02 ①	03 ③	04 ⑤	05 10
06 1	07 6	08 ④	09 ②	10 ①
11 $\frac{80}{7}$	12 45	13 ①	14 4	15 ③
16 ④	17 −2	18 ①	19 ⑤	20 ②
21 ④	22 3	23 3	24 ②	25 ②
26 46	27 9	28 ③	29 120 m	30 54

01 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이 C(1, 9)이므로

$y=a(x-1)^2+9=ax^2-2ax+a+9$

라 할 수 있다.

이 이차함수가 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로

$b=-2a,\ c=a+9$ ……㉠ *

또한, 삼각형 ABC에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이가 9이고 넓이가 27이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times 9=27 \qquad \therefore \overline{AB}=6$

이때 이 이차함수의 그래프의 대칭축이 $x=1$이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근은 −2, 4이다.

즉, 이차함수의 식은

$y=a(x+2)(x-4)=ax^2-2ax-8a$

이 이차함수도 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로

$b=-2a,\ c=-8a$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a+9=-8a$, $9a=-9$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ c=8$

$\therefore abc=-16$ 답 −16

• 다른 풀이 •

*에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, 즉 $ax^2-2ax+a+9=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{a+9}{a}$

한편, 삼각형 ABC의 넓이가 27이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times 9=27 \qquad \therefore \overline{AB}=|\alpha-\beta|=6$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$6^2=2^2-4\times\dfrac{a+9}{a}$

$4-\dfrac{4a+36}{a}=36,\ 4a-4a-36=36a\ (\because a\neq 0)$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ c=8\ (\because ㉠)$

$\therefore abc=-16$

02 세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 x^2의 계수가 같으므로 주어진 그래프에 의하여

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$, $g(x)=a(x-\alpha)(x-\gamma)$,

$h(x)=a(x-\alpha)(x-\delta)$ $\underline{(a>0)}$라 할 수 있다. 세 그래프 모두 아래로 볼록

$f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$$a(x-\alpha)(x-\beta)+a(x-\alpha)(x-\gamma)+a(x-\alpha)(x-\delta)=0$$
$$a(x-\alpha)\{(x-\beta)+(x-\gamma)+(x-\delta)\}=0$$
$$a(x-\alpha)\{3x-(\beta+\gamma+\delta)\}=0$$

따라서 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 근 중 $x=\alpha$ 이외의 다른 한 근은

$x=\dfrac{\beta+\gamma+\delta}{3}$ 답 ①

03 이차함수 $y=ax^2-4bx-4a+16$의 그래프가 x축과 만나지 않거나 오직 한 점에서만 만나려면 이차방정식 $ax^2-4bx-4a+16=0$이 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2b)^2-a(-4a+16)\le 0$

$a^2+b^2-4a\le 0,\ \underbrace{(a-2)^2}_{(a-2)^2\ge 0}+b^2\le 4$

이때 $b^2\le 4$이므로 $-2\le b\le 2$

(i) $b=-2$ 또는 $b=2$일 때,

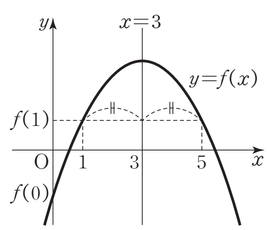
$(a-2)^2\le 0$이므로 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(2, -2)$, $(2, 2)$의 2개

(ii) $b=-1$ 또는 $b=1$일 때,
$(a-2)^2\le 3$이므로 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$, $(3, -1)$, $(3, 1)$의 6개

(iii) $b=0$일 때,
$(a-2)^2\le 4$이므로 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$의 4개 ←$a=0$인 경우 제외

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$2+6+4=12$ 답 ③

04 $f(6-x)=f(x)$에서 x 대신 $3+x$를 대입하면
$f(3-x)=f(3+x)$
즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
이때 $f(0)<0$, $f(1)>0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$
함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하므로 $a<0$
대칭축이 $x=-\dfrac{b}{2a}=3$이고, $a<0$이므로
$b>0$ (참)

ㄴ. $x=1$을 $f(6-x)=f(x)$에 대입하면
$f(5)=f(1)$
$\therefore f(5)=25a+5b+c>0$
위의 부등식의 양변을 25로 나누면
$a+\dfrac{1}{5}b+\dfrac{1}{25}c>0$ (참)

ㄷ. 대칭축이 $x=3$이므로
$f(x)=a(x-3)^2+k$ (단, k는 상수)
라 할 수 있다.
이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $ax^2-6ax+9a+k=0$의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{-6a}{a}=6$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

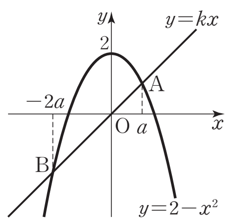
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로
$f(x)=a(x-3)^2+d$ (d는 상수)
$\quad\;\;=ax^2-6ax+9a+d$
이 함수가 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로
$b=-6a$, $c=9a+d$
이때 $f(0)<0$, $f(1)>0$이므로
$9a+d<0$, $4a+d>0$
$\therefore -4a<d<-9a$
이것을 만족시키는 실수 d가 존재해야 하므로
$a<0$, $d>0$ ……㉠
ㄱ. $b=-6a>0$ ($\because$ ㉠) (참)
ㄷ. $f(x)=ax^2-6ax+9a+d$에서 이차방정식 $ax^2-6ax+9a+d=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(-3a)^2-a(9a+d)=-ad>0$ ($\because$ ㉠)
따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은
$-\dfrac{-6a}{a}=6$이다. (참)

05 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(4, 0)$을 지나고 이차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-1)(x-4)=x^2-5x+4$
$g(x)=ax+b$라 하면 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프와 x좌표가 2인 점에서 접하므로 이차방정식
$(x-1)(x-4)=ax+b$, 즉 $x^2-(a+5)x+4-b=0$이 중근 $x=2$를 갖는다.*
이때 이차항의 계수가 1이고 중근 $x=2$를 갖는 이차방정식은
$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x^2-4x+4=0$
이 이차방정식이 $x^2-(a+5)x+4-b=0$과 일치하므로
$a+5=4$, $4-b=4$ $\quad\therefore a=-1$, $b=0$
$\therefore g(x)=-x$
방정식 $f(x)+5g(x)=0$에서
$x^2-5x+4+5\times(-x)=0$ $\quad\therefore x^2-10x+4=0$
따라서 구하는 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 10이다. 답 10

• 다른 풀이 •

*에서 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(a+5)\}^2-4(4-b)=0$
$\therefore a^2+10a+4b+9=0$ ……㉠
또한, 이차방정식 $x^2-(a+5)x+4-b=0$이 $x=2$를 근으로 가지므로
$4-2a-10+4-b=0$ $\quad\therefore b=-2a-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$a^2+10a-8a-8+9=0$
$a^2+2a+1=0$, $(a+1)^2=0$
$\therefore a=-1$, $b=0$ $\quad\therefore g(x)=-x$
방정식 $f(x)+5g(x)=0$에서
$x^2-10x+4=0$
따라서 구하는 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 10이다.

06 $\overline{OA} : \overline{OB} = 1 : 2$이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, $-2a$ $(a>0)$라 하면 이것은 방정식 $2-x^2=kx$, 즉 $x^2+kx-2=0$의 두 실근이다.



이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+(-2a)=-k$, $a\times(-2a)=-2$

$-a=-k$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$, $k=1$

답 1

07 x에 대한 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+2$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+2=2x-k$, 즉

$x^2-2(a+1)x+a^2+2+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-(a^2+2+k)>0$

$2a-1-k>0$

$\therefore k<2a-1$

위의 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수가 $f(a)$이므로

$a=1$일 때, $k<1$에서 $f(1)=0$

$a=2$일 때, $k<3$에서 $f(2)=2$

$a=3$일 때, $k<5$에서 $f(3)=4$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=0+2+4=6$

답 6

08 이차함수 $y=x^2-2(a+3)x+a^2+8a$의 그래프가 직선 $y=mx+n$에 항상 접하므로 이차방정식

$x^2-2(a+3)x+a^2+8a=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m+6)x+a^2+8a-n=0$은 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m+6)\}^2-4(a^2+8a-n)=0$에서

$4a^2+4a(m+6)+(m+6)^2-4a^2-32a+4n=0$

$4(m-2)a+(m+6)^2+4n=0$

위의 등식이 실수 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$4(m-2)=0$, $(m+6)^2+4n=0$

$\therefore m=2$, $n=-16$

$\therefore m+n=-14$

답 ④

09 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점을 $A(p,\ p+3)$, $B(q,\ q+3)(p<q)$이라 하면 p, q는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 실근이므로

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

즉, $p=-2$, $q=4$이므로 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ 7)$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 D라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 y축과 만나는 두 점이 각각 $C(0,\ -5)$, $D(0,\ 3)$이므로

$\overline{CD}=8$

삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ACD와 BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\triangle ABC=\triangle ACD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times8\times2+\frac{1}{2}\times8\times4$

$=8+16=24$

$\therefore k=24$

이때 방정식 $f(2x-24)=g(2x-24)$, 즉

$f(2x-24)-g(2x-24)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $2\alpha-24=-2$, $2\beta-24=4$이므로

$\alpha=11$, $\beta=14$

$\therefore \alpha+\beta=25$

답 ②

10 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=ax-1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2=ax-1$, 즉

$x^2-ax+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\times1\times1>0$

$\therefore a^2>4$ ……㉠

또한, 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2=x+b$, 즉 $x^2-x-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times(-b)<0$

$\therefore 4b<-1$ ……㉡

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=a^2-4b>4+1=5>0$ $(\because$ ㉠, ㉡$)$

즉, 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄴ. ㉡에서 $b<-\frac{1}{4}$이므로 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축과 음의 부분에서 만난다. (거짓)

ㄷ. $y=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$에서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$이고,

$-\frac{a^2}{4}+b=\frac{-(a^2-4b)}{4}<0$ $(\because$ ㉠, ㉡$)$

즉, 꼭짓점은 $\underbrace{\text{제3사분면}}_{a>0}$ 또는 $\underbrace{\text{제4사분면}}_{a<0}$에 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

11 직선 $y=kx$와 이차함수 $y=2(x-2)^2$의 그래프의 서로 다른 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $2(x-2)^2=kx$, 즉 $2x^2-(k+8)x+8=0$의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{k+8}{2}$, $\alpha\beta=4$ ……㉠

직선 $y=kx$와 이차함수 $y=-(x+1)^2$의 그래프의 서로 다른 두 교점의 x좌표를 각각 γ, δ라 하면 γ, δ는 이차방정식 $-(x+1)^2=kx$, 즉 $x^2+(k+2)x+1=0$의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-k-2$, $\gamma\delta=1$ ……㉡

이때 $\overline{AB}:\overline{CD}=2:3$에서 $3\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로

$3|\alpha-\beta|=2|\gamma-\delta|$ *

위의 식의 양변을 제곱하면

$9(\alpha-\beta)^2=4(\gamma-\delta)^2$

㉠에서

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{k+8}{2}\right)^2-16=\frac{k^2}{4}+4k$$

㉡에서

$$(\gamma-\delta)^2=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta=\{-(k+2)\}^2-4=k^2+4k$$

즉, $9\left(\dfrac{k^2}{4}+4k\right)=4(k^2+4k)$이므로

$\dfrac{7}{4}k^2-20k=0$, $\dfrac{7}{4}k\left(k-\dfrac{80}{7}\right)=0$

$\therefore k=\dfrac{80}{7}$ ($\because k>0$) 답 $\dfrac{80}{7}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

네 점 A, B, C, D는 직선 $y=kx$ 위에 있으므로

$A(\alpha, k\alpha)$, $B(\beta, k\beta)$, $C(\gamma, k\gamma)$, $D(\delta, k\delta)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(k\beta-k\alpha)^2}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2(1+k^2)}$,

$\overline{CD}=\sqrt{(\delta-\gamma)^2+(k\delta-k\gamma)^2}=\sqrt{(\delta-\gamma)^2(1+k^2)}$

즉,

$$\overline{AB}:\overline{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2(1+k^2)}:\sqrt{(\delta-\gamma)^2(1+k^2)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2}:\sqrt{(\delta-\gamma)^2}=|\alpha-\beta|:|\gamma-\delta|$$

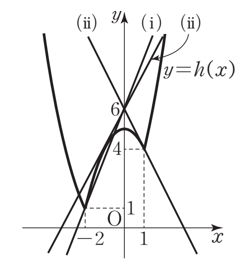
가 성립한다.

12 해결단계

❶ 단계	직선 $y=mx+6$이 항상 점 $(0, 6)$을 지나고 기울기가 m임을 파악한다.
❷ 단계	함수 $y=h(x)$의 그래프를 그린 후, m의 값에 따라 세 점에서 만날 수 있는 경우를 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 경우를 만족시키는 m의 값을 구한 후, 직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는지 확인한다.
❹ 단계	조건을 만족시키는 m의 값을 찾아 그 합 S의 값을 구한 후, $10S$의 값을 계산한다.

직선 $y=mx+6$은 점 $(0, 6)$을 지나고 기울기가 m인 직선이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge1) \\ -x^2+5 & (-2<x<1)\end{cases}$의 그래프가 직선 $y=mx+6$과 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 기울기 m에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y=mx+6$이 점 $(-2, 1)$을 지날 때,

$1=-2m+6$, $2m=5$

$\therefore m=\dfrac{5}{2}$

(ii) 직선 $y=mx+6$이 곡선 $y=-x^2+5$에 접할 때,

이차방정식 $mx+6=-x^2+5$, 즉 $x^2+mx+1=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D=m^2-4=0$, $(m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=2$

① $m=-2$일 때,

이차방정식 $x^2+mx+1=0$, 즉 $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

그런데 $x=1$일 때 이차방정식이 중근을 가지므로 직선 $y=mx+6$은 이차함수 $y=-x^2+5$의 그래프에 접하고 직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

② $m=2$일 때,

직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

(i), (ii)에서 $m=\dfrac{5}{2}$ 또는 $m=2$

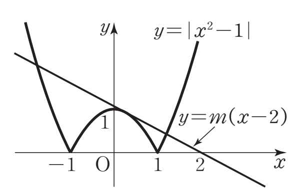
따라서 $S=\dfrac{5}{2}+2=\dfrac{9}{2}$이므로

$10S=10\times\dfrac{9}{2}=45$ 답 45

13

$|x^2-1|-mx+2m=0$에서 $|x^2-1|=mx-2m$이므로 이 방정식의 실근은 두 함수 $y=|x^2-1|$, $y=mx-2m$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

이때 직선 $y=mx-2m=m(x-2)$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 0)$을 지나므로 주어진 방정식이 서로 다른 4개의 실근을 가지려면 직선의 기울기 m의 값이 0보다 작고 이차함수 $y=1-x^2$ $(-1\le x\le1)$의 그래프에 접할 때보다 커야 한다.



이차함수 $y=1-x^2$ $(-1\le x\le1)$의 그래프에 직선

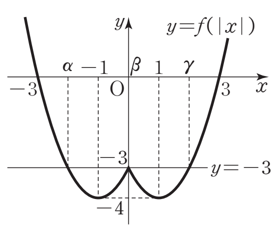
$y=m(x-2)$가 접하려면 방정식 $1-x^2=m(x-2)$, 즉 $x^2+mx-2m-1=0$이 중근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=m^2-4(-2m-1)=0$
$m^2+8m+4=0$ $\quad \therefore m=-4+2\sqrt{3}$ ($\because -1\le x\le 1$)
즉, 조건을 만족시키는 실수 m의 값의 범위는
$-4+2\sqrt{3}<m<0$
따라서 $a=-4+2\sqrt{3}$, $b=0$이므로
$a+b=-4+2\sqrt{3}$

답 ①

14 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나고, 아래로 볼록하므로
$f(x)=a(x+1)(x-3)$ (단, $a>0$)
이라 할 수 있다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, -4)$를 지나므로
$-4=a\times2\times(-2)$ $\quad \therefore a=1$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$
$f(|x-k|)+3=0$에서
$|x-k|^2-2|x-k|=0$
$|x-k|(|x-k|-2)=0$
$\therefore |x-k|=0$ 또는 $|x-k|=2$
$|x-k|=0$에서 $x=k$
$|x-k|=2$에서 $x=-2+k$ 또는 $x=2+k$
따라서 모든 실근의 합은
$(-2+k)+k+(2+k)=3k$이므로
$3k=12$ $\quad \therefore k=4$

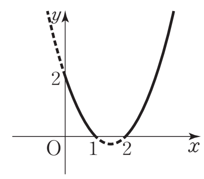
답 4

• 다른 풀이 •
이차함수 $f(x)=x^2-2x-3$에 대하여 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

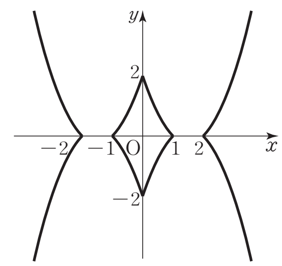


두 함수 $y=f(|x|)$, $y=-3$의 그래프의 교점의 x좌표를 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면
$\frac{\alpha+\gamma}{2}=0$, $\beta=0$ $\quad \therefore \alpha+\beta+\gamma=0$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠
이때 방정식 $f(|x-k|)+3=0$, 즉 $f(|x-k|)=-3$의 실근은 함수 $y=f(|x-k|)$의 그래프와 직선 $y=-3$의 교점의 x좌표와 같고, 함수 $y=f(|x-k|)$의 그래프는 함수 $y=f(|x|)$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y=f(|x-k|)$, $y=-3$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\alpha+k$, $\beta+k$, $\gamma+k$이다.
따라서 구하는 모든 실근의 합은
$(\alpha+k)+(\beta+k)+(\gamma+k)=(\alpha+\beta+\gamma)+3k$
$=3k$ ($\because$ ㉠)
이므로
$3k=12$ $\quad \therefore k=4$

15 $|y|=x^2-3|x|+2$에서 $x\ge0$, $y\ge0$일 때,
$y=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$이므로 이 함수의 그래프는 [그림 1]과 같고, 함수 $|y|=x^2-3|x|+2$의 그래프는 $x\ge0$, $y\ge0$일 때의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

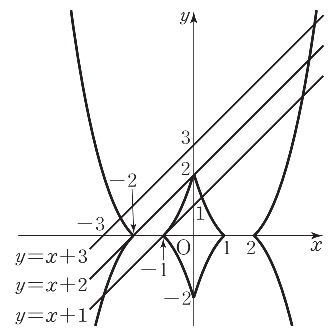


[그림 1]



[그림 2]

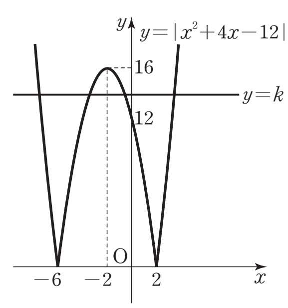
세 직선 $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$과 $|y|=x^2-3|x|+2$의 그래프의 교점의 개수는 오른쪽 그림과 같이 각각 4개, 3개, 2개이므로



$N(1)=4$,
$N(2)=3$,
$N(3)=2$
$\therefore N(1)+N(2)+N(3)=9$

답 ③

16 함수 $y=|x^2+4x-12|$의 그래프와 직선 $y=k$는 다음 그림과 같으므로



이때 방정식 $|x^2+4x-12|=k$의 실근은 함수 $y=|x^2+4x-12|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다. 방정식 $|x^2+4x-12|=k$가 1개의 양의 실근과 3개의 서로 다른 음의 실근을 가지려면
$x>0$일 때, 함수 $y=|x^2+4x-12|$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고
$x<0$일 때, 함수 $y=|x^2+4x-12|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는
$12<k<16$

답 ④

17 $f(|f(x)|)=0$에서 $|f(x)|=t$로 놓으면 $f(t)=0$
주어진 그래프에서 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=-3$ 또는 $t=1$

이때 $t=|f(x)|\geq 0$이므로 $t=1$ ……㉠

한편, 주어진 그래프에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 각각 -3과 1이므로

$f(x)=k(x+3)(x-1)$ (단, $k<0$)

이라 할 수 있다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$4=k\times 2\times(-2)$

$-4k=4$ $\quad\therefore k=-1$

$\therefore f(x)=-(x+3)(x-1)$

$\qquad\quad =-x^2-2x+3$

이때 ㉠에서 $|f(x)|=1$

(i) $f(x)=1$에서

$-x^2-2x+3=1$

$x^2+2x-2=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$

(ii) $f(x)=-1$에서

$-x^2-2x+3=-1$

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4이고, 실근 중 가장 큰 근은 $-1+\sqrt{5}$, 가장 작은 근은 $-1-\sqrt{5}$이므로

$a=4,\ b=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

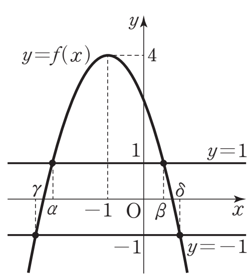
$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{-2}=-2$ 답 -2

• 다른 풀이 •

㉠에서 $|f(x)|=1$이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$, 직선 $y=-1$의 교점의 x좌표를 $\gamma,\ \delta\ (\gamma<\delta)$라 하자.



방정식 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$의 서로 다른 실근의 개수의 합은 4이므로 $a=4$

가장 큰 근은 δ, 가장 작은 근은 γ이고 $\gamma,\ \delta$는 $x=-1$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{\gamma+\delta}{2}=-1$ $\quad\therefore b=\gamma+\delta=-2$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{-2}=-2$

18 $f(x)=x^2+2ax+4a-6$

$\qquad =(x+a)^2-a^2+4a-6$

즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때 최솟값

$g(a)=-a^2+4a-6$을 갖는다.

이때

$g(a)=-a^2+4a-6=-(a-2)^2-2$

이므로 이차함수 $g(a)$는 $a=2$일 때 최댓값 -2를 갖는다.

답 ①

19 이차방정식 $x^2+(a+3)x+a-b^2-2b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a-3,\ \alpha\beta=a-b^2-2b$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\qquad =(-a-3)^2-2(a-b^2-2b)$

$\qquad =a^2+4a+2b^2+4b+9$

$\qquad =(a+2)^2+2(b+1)^2+3$

이때 $a,\ b$는 실수이므로 $(a+2)^2\geq 0,\ (b+1)^2\geq 0$이다.

따라서 $\alpha^2+\beta^2$은 $a=-2,\ b=-1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

답 ⑤

20 이차함수 $y=x^2+2(m-1)x-3m$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2+2(m-1)x-3m=0$의 서로 다른 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(m-1),\ \alpha\beta=-3m$

이때 두 점 $(\alpha,\ 0),\ (\beta,\ 0)$ 사이의 거리는

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

$\qquad =\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$\qquad =\sqrt{\{-2(m-1)\}^2-4\times(-3m)}$

$\qquad =\sqrt{4m^2+4m+4}$

$\qquad =\sqrt{4\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$

따라서 x축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리는

$m=-\dfrac{1}{2}$일 때 최소가 된다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

이차방정식 $x^2+2(m-1)x-3m=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+3m=m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

21 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=px^2+qx+r$ (단, $p,\ q,\ r$은 상수)

이라 할 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$를 지나므로

$r=4$ $\quad\therefore f(x)=px^2+qx+4$

또한, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(1,\ 1)$을 지나므로

$1=p+q+4$ $\quad\therefore p+q=-3$ ……㉠

점 C(3, 1)도 지나므로

$1=9p+3q+4 \qquad \therefore 3p+q=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=1$, $q=-4$

$\therefore f(x)=x^2-4x+4$

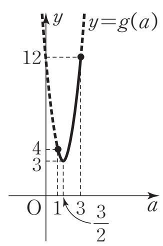
*한편, $1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a, b)$에 대하여

$1\le a\le 3$, $b=a^2-4a+4$

즉, $g(a)=a^2+3b$라 하면

$$\begin{aligned} g(a)&=a^2+3b \\ &=a^2+3(a^2-4a+4) \\ &=4a^2-12a+12 \\ &=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+3 \end{aligned}$$

$1\le a\le 3$에서 함수 $y=g(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$a=3$일 때 $g(a)$의 최댓값은 $M=12$

$a=\frac{3}{2}$일 때 $g(a)$의 최솟값은 $m=3$

$\therefore Mm=12\times 3=36$ 답 ④

• 다른 풀이 •

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{B}(1, 1)$, $\mathrm{C}(3, 1)$을 지나므로

$f(x)=k(x-1)(x-3)+1$ (단, $k\ne 0$)

이라 할 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0, 4)$를 지나므로

$f(0)=3k+1=4 \qquad \therefore k=1$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=(x-1)(x-3)+1 \\ &=x^2-4x+4 \end{aligned}$$

다음은 *와 같다.

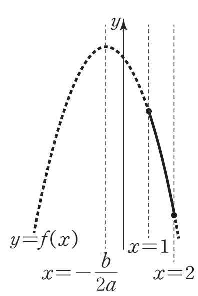
22

$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2+bx+5 \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5 \end{aligned}$$

에서 $a<0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가

$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+5\right)$이다.

이때 $a<0$, $b<0$에서 $-\frac{b}{2a}<0$이므로 $1\le x\le 2$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 3을 가지므로 $f(1)=3$에서

$a+b+5=3$

$\therefore a+b=-2$

그런데 a, b는 각각 음의 정수이므로

$a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로

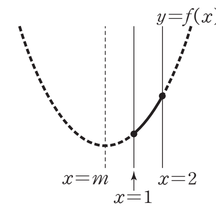
$f(-2)=-4+2+5=3$ 답 3

23

$f(x)=x^2-2mx+m^2+m=(x-m)^2+m$

(i) $m<1$일 때,

$1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$일 때 최댓값 7을 가져야 한다. 즉,



$f(2)=4-4m+m^2+m=7$

에서

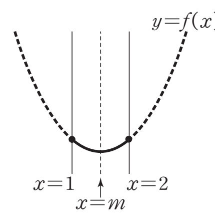
$m^2-3m-3=0$

$\therefore m=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ ($\because m<1$)

그런데 m은 정수이므로 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $1\le m\le 2$일 때,

$1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$ 또는 $x=2$일 때 최댓값 7을 가져야 한다.



① $f(1)=7$일 때,

$1-2m+m^2+m=7$에서

$m^2-m-6=0$, $(m+2)(m-3)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=3$

② $f(2)=7$일 때,

$4-4m+m^2+m=7$에서

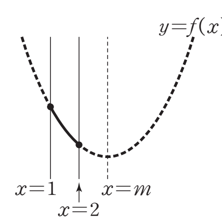
$m^2-3m-3=0$

$\therefore m=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

①, ②에서 $1\le m\le 2$이므로 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $m>2$일 때,

$1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$일 때 최댓값 7을 가져야 한다. 즉,



$f(1)=1-2m+m^2+m=7$

에서

$m^2-m-6=0$, $(m+2)(m-3)=0$

$\therefore m=3$ ($\because m>2$)

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 m의 값은 3이다.

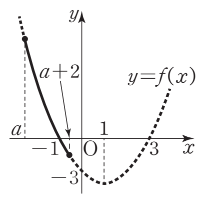
답 3

단계	채점 기준	배점
㈎	$f(x)=(x-m)^2+m$으로 나타낸 경우	10%
㈏	$m<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 최댓값이 7이 되도록 하는 정수 m의 값을 구한 경우	25%
㈐	$1\le m\le 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 최댓값이 7이 되도록 하는 정수 m의 값을 구한 경우	25%
㈑	$m>2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 최댓값이 7이 되도록 하는 정수 m의 값을 구한 경우	25%
㈒	㈏~㈑로부터 정수 m의 값을 구한 경우	15%

$f(x)$의 최솟값이 $f(1)$이므로 그래프에서 꼭짓점의 x좌표가 1이다.

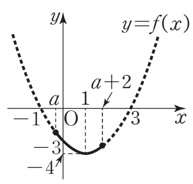
24 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(1)$을 만족시키므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
즉, $f(x)=(x-1)^2+k$ (k는 실수)라 할 수 있다.
이때 $f(3)=0$을 만족시키므로
$4+k=0 \qquad \therefore k=-4$
$\therefore f(x)=(x-1)^2-4$
$\qquad =x^2-2x-3$

(i) $a<-1$일 때,
$a \leq x \leq a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



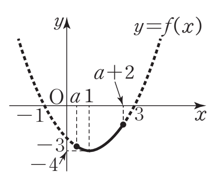
즉, 최댓값은 $f(a)=a^2-2a-3$이고 최솟값은 $f(a+2)=a^2+2a-3$
이때 최댓값과 최솟값의 합이 0이어야 하므로
$2a^2-6=0$, $a^2=3$
$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
그런데 $a<-1$이므로 $a=-\sqrt{3}$

(ii) $-1 \leq a<0$일 때,
$a \leq x \leq a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



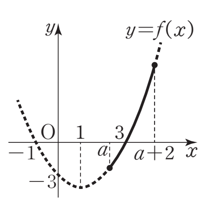
즉, 최댓값은 $f(a)=a^2-2a-3$이고 최솟값은 $f(1)=-4$
이때 최댓값과 최솟값의 합이 0이어야 하므로
$a^2-2a-7=0$
$\therefore a=1\pm2\sqrt{2}$
그런데 $-1 \leq a<0$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $0 \leq a<1$일 때,
$a \leq x \leq a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 최댓값은 $f(a+2)=a^2+2a-3$이고 최솟값은 $f(1)=-4$
이때 최댓값과 최솟값의 합이 0이어야 하므로
$a^2+2a-7=0$
$\therefore a=-1\pm2\sqrt{2}$
그런데 $0 \leq a<1$이므로 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $a \geq 1$일 때,
$a \leq x \leq a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



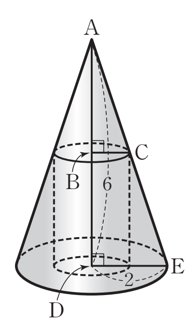
즉, 최댓값은 $f(a+2)=a^2+2a-3$이고 최솟값은 $f(a)=a^2-2a-3$
이때 최댓값과 최솟값의 합이 0이어야 하므로
$2a^2-6=0$, $a^2=3$
$\therefore a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
그런데 $a \geq 1$이므로 $a=\sqrt{3}$

(i)~(iv)에서 $a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은
$-\sqrt{3} \times \sqrt{3}=-3$ **답** ②

25 빵 하나의 가격을 100원 인하하면 한 달 동안의 빵 판매량이 200개씩 증가하므로 빵 하나의 가격을 $100x$원 인하한다고 하면 빵 판매량은 $200x$개씩 증가하게 된다.
한 달 동안의 빵 판매 금액을 y원이라 하면
$y=(2000-100x)(1600+200x)$
$\quad =-20000(x^2-12x-160)$
$\quad =-20000(x-6)^2+3920000$
이때 $x \geq 0$, $2000-100x \geq 0$에서 $0 \leq x \leq 20$이므로
$x=6$일 때 y의 최댓값은 3920000이다.
따라서 한 달 동안의 빵 판매 금액이 최대가 되도록 하는 빵 하나의 가격은
$2000-100 \times 6=1400$(원) **답** ②

26 네 점 P, Q, R, S는 매초 1의 속력으로 움직이므로 각 꼭짓점을 출발한 지 x초 후, $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$이다.
즉, $\overline{BP}=\overline{DR}=8-x$, $\overline{AS}=\overline{CQ}=12-x$이므로
$\triangle APS=\triangle CRQ=\frac{1}{2}x(12-x)=\frac{1}{2}(12x-x^2)$
$\triangle BQP=\triangle DSR=\frac{1}{2}x(8-x)=\frac{1}{2}(8x-x^2)$
사각형 PQRS의 넓이를 y라 하면
$y=\square ABCD-(\triangle APS+\triangle BQP+\triangle CRQ+\triangle DSR)$
$\quad =12 \times 8-\frac{1}{2}(12x-x^2+8x-x^2+12x-x^2+8x-x^2)$
$\quad =96-\frac{1}{2}(40x-4x^2)$
$\quad =2x^2-20x+96$
$\quad =2(x-5)^2+46$
즉, $x=5$일 때 y의 최솟값은 46이다.
따라서 구하는 넓이의 최솟값은 46이다. **답** 46

27 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r이라 하면 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC, ADE에서
$\angle CAB$는 공통,
$\angle ABC=\angle ADE=90°$이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (AA 닮음)
즉, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DE}$에서
$\overline{AB}:6=r:2$



$2\overline{AB}=6r \qquad \therefore \overline{AB}=3r$

즉, $\overline{BD}=6-3r$이므로

$S=2\pi r^2+2\pi r(6-3r)$

$\quad =-4\pi r^2+12\pi r$

$\quad =-4\pi\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+9\pi$

$\therefore \frac{S}{\pi}=-4\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+9$

따라서 $r=\frac{3}{2}$일 때 $\frac{S}{\pi}$의 최댓값은 9이다. **답** 9

28 $\overline{AC}+\overline{DB}=\overline{CD}$이므로 $\overline{CD}=1$

$\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{DB}=\overline{CD}-\overline{AC}=1-x$

$\therefore S_1=$(지름이 $\overline{AB}$인 반원의 넓이)

$\quad +$(지름이 $\overline{CD}$인 반원의 넓이)

$\quad -$(지름이 $\overline{AC}$인 반원의 넓이)

$\quad -$(지름이 $\overline{DB}$인 반원의 넓이)

$\quad =\frac{\pi}{2}\times 1^2+\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$

$\quad =-\frac{\pi}{4}(x^2-x-2)$

$\quad =-\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{16}\pi$

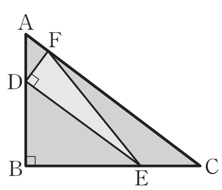
즉, S_1은 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $M=\frac{9}{16}\pi$를 갖고, S_1이 최대일 때 S_2는 최소이므로

$m=$(지름이 $\overline{AB}$인 원의 넓이)$-$(S_1의 최댓값)

$\quad =\pi\times 1^2-\frac{9}{16}\pi=\frac{7}{16}\pi$

$\therefore M-m=\frac{9}{16}\pi-\frac{7}{16}\pi=\frac{\pi}{8}$ **답** ③

29 오른쪽 그림과 같이 공원의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C, 꽃밭의 세 꼭짓점을 각각 D, E, F라 하면 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 3 : 4 : 5이므로



$\overline{AB}=3k$ m, $\overline{BC}=4k$ m, $\overline{AC}=5k$ m (단, $k>0$)

라 할 수 있다.

꽃밭 X의 한 변이 도로와 평행하므로

$\overline{DE}/\!/\overline{AC}$

$\therefore \angle AFD=\angle FDE=90^\circ$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle ABC$, $\triangle AFD$, $\triangle DBE$는 서로 닮음이다.

$\overline{AD}=a$ m $(0<a<3k)$라 하면 $\triangle ABC$, $\triangle AFD$에서

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{FD}$이므로

$5:4=a:\overline{FD} \qquad \therefore \overline{FD}=\frac{4}{5}a$ m

또한, $\overline{BD}=(3k-a)$ m이고 $\triangle ABC$, $\triangle DBE$에서

$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{DB}$이므로

$5:3=\overline{DE}:(3k-a) \qquad \therefore \overline{DE}=\left(5k-\frac{5}{3}a\right)$ m

이때 꽃밭 X의 넓이는

$\triangle DEF=\frac{1}{2}\times\overline{FD}\times\overline{DE}$

$\quad =\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}a\times\left(5k-\frac{5}{3}a\right)$

$\quad =2ak-\frac{2}{3}a^2$

$\quad =-\frac{2}{3}\left(a-\frac{3}{2}k\right)^2+\frac{3}{2}k^2\ (\mathrm{m}^2)$ (단, $0<a<3k$)

즉, 꽃밭 X의 넓이는 $a=\frac{3}{2}k$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}k^2$ m^2를 갖고, 이 값이 150 m^2와 같으므로

$\frac{3}{2}k^2=150$, $k^2=100$

$\therefore k=10$ ($\because k>0$)

따라서 이때의 공원의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=3k+4k+5k=12k$

$\quad =120$ (m) **답** 120 m

BLACKLABEL 특강 참고

$\overline{AB}=4k$, $\overline{BC}=3k$라 하고 풀어도 결과는 달라지지 않는다.

$\overline{AB}=4k$, $\overline{BC}=3k$, $\overline{AD}=a$라 하면 $\overline{FD}=\frac{3}{5}a$, $\overline{DE}=5k-\frac{5}{4}a$

따라서 $\triangle DEF=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}a\times\left(5k-\frac{5}{4}a\right)=-\frac{3}{8}(a-2k)^2+\frac{3}{2}k^2$이므로 꽃밭 X의 넓이는 $a=2k$일 때 최댓값 $\frac{3}{2}k^2$ m^2를 갖는다.

30 두 이차함수 $y=x^2-8x+7$, $y=-x^2+2x-1$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x^2-8x+7=-x^2+2x-1$에서

$2x^2-10x+8=0$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

두 점 P, Q 중 점 Q의 x좌표가 더 크므로

P$(1, 0)$, Q$(4, -9)$

직선 $x=k$와 두 이차함수 $y=x^2-8x+7$, $y=-x^2+2x-1$의 그래프의 교점이 각각 R, S이므로

R(k, k^2-8k+7), S$(k, -k^2+2k-1)$

두 점 R, S 중 점 S의 y좌표가 더 크므로

$\overline{RS}=(-k^2+2k-1)-(k^2-8k+7)$

$\quad =-2k^2+10k-8$

$\quad =-2\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

사각형 PRQS의 넓이를 $S(k)$라 하면

$S(k)=\triangle PRS+\triangle QSR$

$\quad =\frac{1}{2}\times\overline{RS}\times(k-1)+\frac{1}{2}\times\overline{RS}\times(4-k)$

$\quad =\frac{1}{2}\times\overline{RS}\times(k-1+4-k)$

$\quad =\frac{3}{2}\left\{-2\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right\}$

$$=-3\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$$

즉, $k=\frac{5}{2}$일 때 $S(k)$의 최댓값은 $\frac{27}{4}$이다.

따라서 사각형 PRQS의 넓이의 최댓값은 $M=\frac{27}{4}$이므로

$8M=8\times\frac{27}{4}=54$ **답** 54

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.58~59

01 4	02 $\frac{13}{4}$	03 ③	04 12	05 7
06 ③	07 ③	08 24	09 $10\sqrt{5}$	10 $2\sqrt{6}$
11 54				

01 해결단계

❶ 단계	이차방정식 $x^2-1=ax$를 풀어 두 교점 P, Q의 좌표를 a를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}=17$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax$ $(a>0)$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-1=ax$, 즉 $x^2-ax-1=0$의 두 근이므로

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$$

두 점 P, Q의 좌표를 $\text{P}\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}, \frac{a(a-\sqrt{a^2+4})}{2}\right)$, $\text{Q}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \frac{a(a+\sqrt{a^2+4})}{2}\right)$라 하면

$$\overline{\text{OP}}=\sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2+4})^2}{4}+\frac{a^2(a-\sqrt{a^2+4})^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(1+a^2)(a-\sqrt{a^2+4})^2}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{a^2+4}-a)}{2}\ (\because \sqrt{a^2+4}>a)$$
$$\overline{\text{OQ}}=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2+4})^2}{4}+\frac{a^2(a+\sqrt{a^2+4})^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{(1+a^2)(a+\sqrt{a^2+4})^2}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{a^2+4}+a)}{2}$$

이때 $\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}=17$이므로

$$\frac{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{a^2+4}-a)}{2}\times\frac{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{a^2+4}+a)}{2}=17$$
$$\frac{4(1+a^2)}{4}=17,\ a^2=16$$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ **답** 4

• 다른 풀이 •

이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=ax$ $(a>0)$의 두 교점 P, Q의 좌표를 각각 $\text{P}(\alpha, a\alpha)$, $\text{Q}(\beta, a\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하자.

α, β는 이차방정식 $x^2-1=ax$, 즉 $x^2-ax-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-1$

$$\overline{\text{OP}}\times\overline{\text{OQ}}=\sqrt{\alpha^2+(a\alpha)^2}\sqrt{\beta^2+(a\beta)^2}$$
$$=\sqrt{\alpha^2(a^2+1)}\sqrt{\beta^2(a^2+1)}$$
$$=|\alpha|\sqrt{a^2+1}\times|\beta|\sqrt{a^2+1}$$
$$=|\alpha\beta|(a^2+1)$$
$$=a^2+1\ (\because \alpha\beta=-1)$$

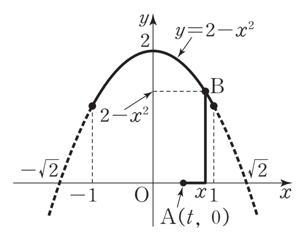
이므로

$a^2+1=17$

$a^2=16$ $\quad\therefore a=4\ (\because a>0)$

02 해결단계

❶ 단계	점 A의 좌표를 $(t, 0)$, 점 B의 좌표를 $(x, 2-x^2)$이라 하고, 두 점 A, B를 연결한 경로의 길이 d를 구한다.
❷ 단계	$x\geq t$, $x<t$일 때로 나누어 경로의 길이의 최댓값을 구한다.



x축 위의 점 A의 좌표를 $(t, 0)$ $(-1\leq t\leq 1)$, 함수 $y=2-x^2$의 그래프 위의 점 B의 좌표를 $(x, 2-x^2)$ $(-1\leq x\leq 1)$, x축 또는 y축과 평행하거나 일치하는 선분들을 이용하여 두 점 A, B를 연결한 경로의 길이를 d라 하면

$d=2-x^2+|x-t|$

(i) $x<t$일 때,

$$d=2-x^2-x+t=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+t$$

$-1\leq x\leq 1$에서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 d의 최댓값은 $\frac{9}{4}+t$이다.

또한, $-1\leq t\leq 1$이므로 $t=1$일 때 $\frac{9}{4}+t$의 최댓값은 $\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$이다.

즉, $x<t$이면 $x=-\frac{1}{2}$, $t=1$일 때 d의 최댓값은 $\frac{13}{4}$이다.

(ii) $x\geq t$일 때,

$$d=2-x^2+x-t=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}-t$$

$-1\leq x\leq 1$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 d의 최댓값은 $\frac{9}{4}-t$이다.

또한, $-1\leq t\leq 1$이므로 $t=-1$일 때 $\frac{9}{4}-t$의 최댓값은 $\frac{9}{4}-(-1)=\frac{13}{4}$이다.

즉, $x\geq t$이면 $x=\frac{1}{2}$, $t=-1$일 때 d의 최댓값은 $\frac{13}{4}$이다.

(i), (ii)에서 구하는 길이의 최댓값은 $\frac{13}{4}$이다. **답** $\frac{13}{4}$

03 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 $f(-x)$를 직접 구하여 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	ㄴ은 $x<0$일 때와 $x\ge0$일 때로 경우를 나누어 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근을 구한 후, 그 합을 구한다.
❸ 단계	ㄷ은 두 함수 $y=x\|x\|$와 $y=4x-p$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수의 최댓값을 구한다.

함수 $f(x)=x|x|-4x+p$에서

ㄱ. $p=0$이면 $f(x)=x|x|-4x$

$\therefore f(-x)=-x|-x|-4(-x)$
$=-x|x|+4x$
$=-(x|x|-4x)$
$=-f(x)$

즉, $p=0$이면 $f(-x)=-f(x)$가 성립한다. (참)

ㄴ. $p=3$이면 $f(x)=x|x|-4x+3$

(ⅰ) $x<0$일 때, $f(x)=-x^2-4x+3$
$f(x)=0$, 즉 $-x^2-4x+3=0$에서
$x^2+4x-3=0$
$\therefore x=-2-\sqrt{7}\ (\because x<0)$

(ⅱ) $x\ge0$일 때, $f(x)=x^2-4x+3$
$f(x)=0$, 즉 $x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

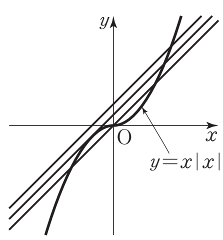
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 실근의 합은
$(-2-\sqrt{7})+1+3=2-\sqrt{7}$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같다.

방정식 $f(x)=0$에서
$x|x|-4x+p=0 \qquad \therefore x|x|=4x-p$
이 방정식의 근은 두 함수 $y=x|x|$, $y=4x-p$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

이때

$$y=x|x|=\begin{cases} x^2 & (x\ge0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$$



이므로 두 함수의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같다.

즉, 교점의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로 방정식 $f(x)=0$의 실근은 최대 3개이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수의 최댓값도 3이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

$f(x)g(x)+f(x)-3g(x)=-x^3+x^2+7$에서
$f(x)\{g(x)+1\}-3\{g(x)+1\}=-x^3+x^2+4$
$\therefore \{f(x)-3\}\{g(x)+1\}=-x^3+x^2+4$

이때 $h(x)=-x^3+x^2+4$라 하면 $h(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ & & -2 & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$h(x)=(x-2)(-x^2-x-2)=-(x-2)(x^2+x+2)$
$\therefore \{f(x)-3\}\{g(x)+1\}=-(x-2)(x^2+x+2)$

일차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$의 계수와 상수항이 모두 정수이므로

$$\begin{cases} f(x)-3=x-2 \\ g(x)+1=-(x^2+x+2) \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} f(x)-3=-(x-2) \\ g(x)+1=x^2+x+2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} f(x)=x+1 \\ g(x)=-x^2-x-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=-x+5 \\ g(x)=x^2+x+1 \end{cases}$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β이므로 방정식 $f(x)=g(x)$는 두 실근 α, β를 갖는다.

(ⅰ) $f(x)=x+1$, $g(x)=-x^2-x-3$일 때,
방정식 $f(x)=g(x)$에서 $x+1=-x^2-x-3$
$\therefore x^2+2x+4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=1^2-4=-3<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ⅱ) $f(x)=-x+5$, $g(x)=x^2+x+1$일 때,
방정식 $f(x)=g(x)$에서 $-x+5=x^2+x+1$
$\therefore x^2+2x-4=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$\frac{D_2}{4}=1^2+4=5>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖는 경우는
$f(x)=-x+5$, $g(x)=x^2+x+1$
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^2+2x-4=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-2)^2-2\times(-4)=12$ **답** 12

04 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식의 좌변과 우변을 각각 인수분해하여 일차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$로 가능한 경우를 모두 구한다.
❷ 단계	두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표 α, β가 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 파악하고, ❶ 단계에서 구한 경우 중 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖는 경우를 찾는다.
❸ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구한다.

05 해결단계

❶ 단계	x의 값의 범위에 따라 $f(x)$를 $f_1(x)$와 $f_2(x)$로 나누어 구한다.
❷ 단계	두 함수 $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 그래프에 동시에 접하는 직선 l_1의 기울기를 구하고, 직선 l_2의 방정식을 구한다.
❸ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l_2의 교점을 구하여 $\|\alpha\|+\|\beta\|+\|\gamma\|$의 값을 구한다.

$f(x)=x^2-3|x-1|-3x+3$에서

(i) $x<1$일 때,

$f(x)=x^2+3(x-1)-3x+3=x^2$

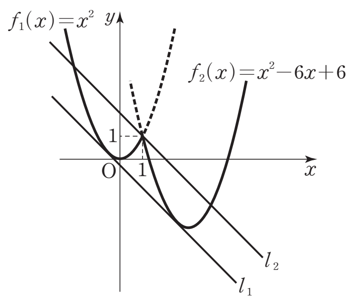
(ii) $x\geq1$일 때,

$f(x)=x^2-3(x-1)-3x+3$

$=x^2-6x+6$

$=(x-3)^2-3$

이때 $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=(x-3)^2-3$이라 하면 함수 $y=f_2(x)$의 그래프는 함수 $y=f_1(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l_1이 두 점에서 접하려면 다음 그림과 같이 직선 l_1이 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프에 모두 접해야 한다.



직선 l_1의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $y=f_1(x)$의 그래프와 직선 l_1이 접하려면 이차방정식 $x^2=ax+b$, 즉 $x^2-ax-b=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2+4b=0$　　$\therefore a^2=-4b$　　$\cdots\cdots$ ㉠

또한, 함수 $y=f_2(x)$의 그래프와 직선 l_1이 접하려면 이차방정식 $(x-3)^2-3=ax+b$, 즉

$x^2-(6+a)x+6-b=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(6+a)^2-4(6-b)=0$

$\therefore a^2+12a+4b+12=0$

㉠을 위의 식에 대입하면

$12a+12=0$　　$\therefore a=-1$

따라서 두 직선 l_1, l_2는 기울기가 -1이고, 직선 l_2가 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프와 세 점에서 만나려면 두 그래프의 교점인 $(1, 1)$을 지나야 하므로 직선 l_2의 방정식은 $y-1=-(x-1)$, 즉 $y=-x+2$이다.

직선 $y=-x+2$와 함수 $f_1(x)=x^2$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $y=f_1(x)$의 그래프와 직선 l_2의 두 교점의 좌표는 $(-2, 4)$, $(1, 1)$이다.

직선 $y=-x+2$와 함수 $f_2(x)=x^2-6x+6$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-6x+6=-x+2$에서 $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 함수 $y=f_2(x)$의 그래프와 직선 l_2의 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(4, -2)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l_2가 서로 다른 세 점 $(-2, 4)$, $(1, 1)$, $(4, -2)$에서 만나므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=|-2|+|1|+|4|$

$=2+1+4=7$

답 7

06 해결단계

❶ 단계	두 점 B, C의 좌표를 각각 t를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	t의 값의 범위를 나누어 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 최댓값을 각각 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 값을 비교하여 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구한다.

이차함수 $f(x)=-x^2+11x-10$의 그래프와 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는

$-x^2+11x-10=-x+10$에서

$x^2-12x+20=0$, $(x-2)(x-10)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=10$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+10$의 두 교점의 좌표는 $(2, 8)$, $(10, 0)$이다.

$\mathrm{A}(t, -t+10)$ $(2<t<10)$이므로 점 A는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+10$의 두 교점 사이에 있다.

이때 두 점 A, B의 x좌표가 같으므로

$\mathrm{B}(t, -t^2+11t-10)$

두 점 B, C는 직선 $x=\frac{11}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{C}(11-t, -t^2+11t-10)$

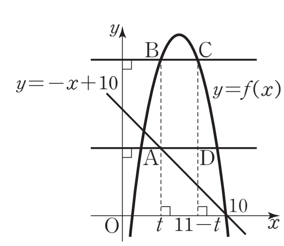
두 점 A, D의 y좌표가 같고, 두 점 C, D의 x좌표가 같으므로

$\mathrm{D}(11-t, -t+10)$

이때 점 A의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $2<t<\frac{11}{2}$일 때,

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 직사각형 ADCB의 둘레의 길이는

$2\overline{\mathrm{AB}}+2\overline{\mathrm{AD}}$

$=2\{(-t^2+11t-10)-(-t+10)\}$

$+2\{(11-t)-t\}$

$=-2t^2+20t-18$

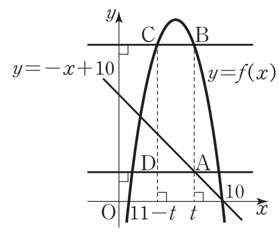
$=-2(t-5)^2+32$

따라서 $2<t<\frac{11}{2}$에서 직사각형 ADCB의 둘레의 길

이의 최댓값은 $t=5$일 때 32이다.

(ii) $\frac{11}{2}<t<10$일 때,

네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2\overline{AB}+2\overline{AD}$

$=2\{(-t^2+11t-10)-(-t+10)\}$
$+2\{t-(11-t)\}$

$=-2t^2+28t-62$

$=-2(t-7)^2+36$

따라서 $\frac{11}{2}<t<10$에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $t=7$일 때 36이다.

(i), (ii)에서 구하는 최댓값은 36이다. 답 ③

07 해결단계

❶ 단계	주어진 등식으로부터 이차함수 $f(x)$를 구한다.
❷ 단계	ㄱ은 이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계를 이용한다.
❸ 단계	ㄴ은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록함을 이용한다.
❹ 단계	ㄷ은 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않음을 이용하여 정수 a의 최솟값을 구한다.

이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수를 a라 하고, 등식

$2f(x)+f(1-x)=3x^2$에서 x^2의 계수를 비교하면

$2a+a=3,\ 3a=3 \qquad \therefore a=1$

즉, $f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 할 수 있다.

주어진 등식에서

$2(x^2+bx+c)+\{(1-x)^2+b(1-x)+c\}=3x^2$

$\therefore (b-2)x+1+b+3c=0$

위의 식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$b-2=0,\ 1+b+3c=0$

$\therefore b=2,\ c=-1$

$\therefore f(x)=x^2+2x-1$

ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+2x-1=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4+4=8$

즉, $|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$이므로 서로 다른 두 교점 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$이다. (참)

ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$가 성립한다. (참)

ㄷ. 이차함수 $y=f(x)+a$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 방정식

$f(x)+a=0$, 즉 $x^2+2x-1+a=0$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(-1+a)=-a+2<0$

$\therefore a>2$

즉, 정수 a의 최솟값은 3이다. (거짓)

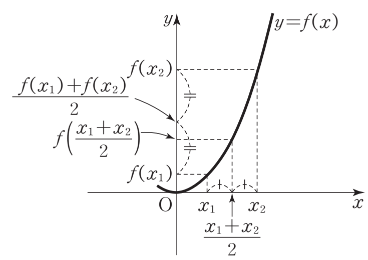
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

서로 다른 두 실수 x_1, x_2에 대하여 다음이 성립한다.

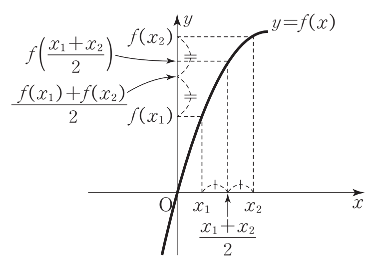
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한 경우

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록한 경우

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



08 해결단계

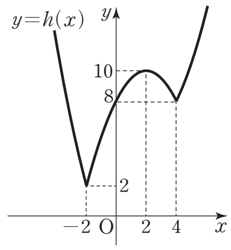
❶ 단계	함수 $h(x)$를 구한다.
❷ 단계	a의 값의 범위를 나누어 함수 $h(x)$의 최댓값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위를 구하고 p^2+q^2의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{2}x^2,\ g(x)=x+4$에서

$-f(x)+2g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+8$이므로

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x<-2 \text{ 또는 } x\ge 4)\\ -\frac{1}{2}x^2+2x+8 & (-2\le x<4)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 1보다 큰 실수 a에 대하여 $a-3\le x\le a$에서 함수 $h(x)$의 최댓값이 10인 경우는 다음과 같다.

(i) $1<a<2$일 때,

$-2<a-3<-1$이므로 $a-3\le x\le a$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(a)$이다.

그런데 $h(a)<h(2)=10$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$h(x)=10$이 되는 x의 값

(ii) $2\le a\le 2\sqrt{5}$일 때,

$h(2)=10$, $h(2\sqrt{5})=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^2=10$이고

$2<x<2\sqrt{5}$에서 $h(x)<10$이다.

① $a=2$일 때,

$-1\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 함수 $h(x)$는 최댓값 $h(2)=10$을 갖는다.

② $a=2\sqrt{5}$일 때,

$2\sqrt{5}-3\le x\le 2\sqrt{5}$에서 $x=2\sqrt{5}$일 때 함수 $h(x)$는 최댓값 $h(2\sqrt{5})=10$을 갖는다.

③ $2<a<2\sqrt{5}$일 때,

$a-3\le x\le a$에서 $x=2$일 때 함수 $h(x)$는 최댓값 $h(2)=10$을 갖는다.

(iii) $a>2\sqrt{5}$일 때,

$a-3\le x\le a$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(a)$이다.

그런데 $h(a)>h(2\sqrt{5})=10$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $2\le a\le 2\sqrt{5}$이므로

$p=2$, $q=2\sqrt{5}$

$\therefore p^2+q^2=4+20=24$

답 24

09 해결단계

❶ 단계	이차함수 $y=x^2-1$의 그래프에 접하고 두 점 $A(\alpha, \alpha^2-1)$, $B(\beta, \beta^2-1)$을 지나는 직선의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 두 직선의 교점 C의 좌표를 구한다.
❸ 단계	삼각형 ACB의 넓이를 구한다.

점 $A(\alpha, \alpha^2-1)$에서 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-1=mx+n$, 즉 $x^2-mx-n-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4(-n-1)=0$에서

$m^2+4n+4=0$ ……㉠

점 $A(\alpha, \alpha^2-1)$이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$\alpha^2-1=m\alpha+n$

$\therefore n=\alpha^2-1-m\alpha$

이것을 ㉠에 대입하면

$m^2+4(\alpha^2-1-m\alpha)+4=0$

$m^2-4m\alpha+4\alpha^2=0$, $(m-2\alpha)^2=0$

$\therefore m=2\alpha$, $n=-\alpha^2-1$

따라서 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=2\alpha x-\alpha^2-1$ ……㉡

같은 방법으로 점 $B(\beta, \beta^2-1)$에서의 접선의 방정식은

$y=2\beta x-\beta^2-1$ ……㉢

두 직선 ㉡, ㉢의 교점 C의 x좌표는

$2\alpha x-\alpha^2-1=2\beta x-\beta^2-1$

$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$\therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}=2$ ($\because \alpha\ne\beta$, $\alpha+\beta=4$)

$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$를 $y=2\alpha x-\alpha^2-1$에 대입하면

$y=2\alpha\times\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha^2-1$

$=\alpha\beta-1$

즉, 점 C의 좌표는 $C(2, \alpha\beta-1)$이다.

한편, α, β는 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 직선 $y=kx$의 교점의 x좌표이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-1=kx$, 즉 $x^2-kx-1=0$의 두 근이고 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k=4$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore C(2, -2)$

점 $C(2, -2)$를 지나고 y축에 평행한 직선 $x=2$와 직선 $y=4x$의 교점을 D라 하면

$D(2, 8)$

또한,

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times(-1)=20$

이므로

$|\beta-\alpha|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\underbrace{\frac{1}{2}\times|\beta-\alpha|\times\overline{CD}}_{*}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\{8-(-2)\}$

$=10\sqrt{5}$

답 $10\sqrt{5}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

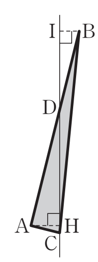
네 점 A, B, C, D는 오른쪽 그림과 같으므로 두 점 A, B에서 $\overline{CD}$ 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

$\triangle ACB=\triangle ACD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AH}+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BI}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times(\overline{AH}+\overline{BI})$

$=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times|\beta-\alpha|$



10 해결단계

❶ 단계	두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β임을 이용하여 $f(x)-g(x)$의 식을 세운다.
❷ 단계	함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$가 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$인 점에서 접함을 이용하여 $g(x)-h(x)$의 식을 세운다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 식을 이용하여 $f(x)-h(x)$의 식을 세운다.
❹ 단계	❸ 단계에서 구한 식 및 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$의 교점의 x좌표의 합과 곱을 이용하여 $\lvert\alpha-\beta\rvert$의 값을 구한다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 3, 2이므로 $f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.
이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 각각 α, β이므로

$$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$가 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$인 점에서 서로 접하므로 $g(x)-h(x)=0$은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$를 중근으로 갖는 이차방정식이다.
이때 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$$g(x)-h(x)=2\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$
$$=2x^2-2(\alpha+\beta)x+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$f(x)-h(x)=3x^2-3(\alpha+\beta)x+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}+\alpha\beta$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$가 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=h(x)$, 즉 $f(x)-h(x)=0$의 두 실근이므로 이 방정식의 두 실근의 합이 2이고, 곱이 -1이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3(\alpha+\beta)}{3}=2 \qquad \therefore \alpha+\beta=2$$

$$\frac{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}+\alpha\beta}{3}=-1\text{에서 } \frac{2+\alpha\beta}{3}=-1 \ (\because \alpha+\beta=2)$$

$\therefore \alpha\beta=-5$

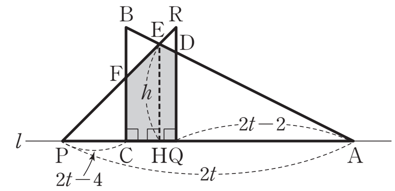
$$\therefore \lvert\alpha-\beta\rvert=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{2^2-4\times(-5)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

11 해결단계

❶ 단계	$2\le t\le 3$일 때, 두 삼각형 ABC, PQR이 겹쳐지는 부분을 파악한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 그린 도형의 각 변의 길이를 구한다.
❸ 단계	$S(t)$의 최댓값과 그때의 t의 값을 구한 후, $14(a+M)$의 값을 계산한다.

두 삼각형이 서로 마주 보는 방향으로 매초 1만큼씩 움직이므로 고정되어 있는 삼각형 ABC를 향해 삼각형 PQR이 매초 2만큼씩 움직이는 것으로 생각할 수 있다.
따라서 $2\le t\le 3$에서 두 삼각형이 겹쳐지는 부분은 다음 그림과 같다.



두 선분 AB와 PR의 교점을 E라 하고, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
△PQR∽△PHE (AA 닮음)에서 삼각형 PHE가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EH}=h$라 하면
$\overline{PH}=h$
△ABC∽△AEH (AA 닮음)이므로
$\overline{EH}:\overline{HA}=\overline{BC}:\overline{CA}$
$h:\overline{HA}=1:2 \qquad \therefore \overline{HA}=2h$
$\overline{PA}=2t$이므로 $\overline{PA}=\overline{PH}+\overline{HA}$에서
$2t=h+2h \qquad \therefore h=\frac{2}{3}t$
두 선분 AB, QR의 교점을 D라 하면
$\overline{PA}=\overline{PQ}+\overline{QA}$에서 $\overline{QA}=2t-2$이므로
$\overline{QD}=\frac{1}{2}\overline{QA}=t-1$
두 선분 BC, PR의 교점을 F라 하면
$\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA}$에서 $\overline{PC}=2t-4$이므로
$\overline{FC}=\overline{PC}=2t-4$
두 삼각형 ABC, PQR이 겹쳐지는 부분의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\triangle PAE-\triangle QAD-\triangle PCF$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times 2t\times\frac{2}{3}t\right)-\frac{1}{2}\times(2t-2)\times(t-1)-\frac{1}{2}(2t-4)^2$$
$$=-\frac{7}{3}t^2+10t-9$$
$$=-\frac{7}{3}\left(t-\frac{15}{7}\right)^2+\frac{12}{7}$$

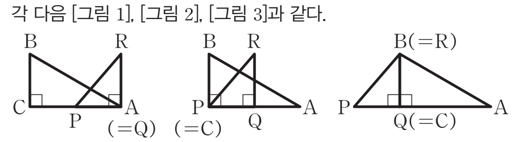
따라서 $2\le t\le 3$에서 $S(t)$는 $t=\frac{15}{7}$일 때 최댓값 $\frac{12}{7}$를 가지므로
$a=\frac{15}{7}$, $M=\frac{12}{7}$

$$\therefore 14(a+M)=14\times\left(\frac{15}{7}+\frac{12}{7}\right)=54$$

답 54

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

움직이기 시작한 지 1초 후, 2초 후, 3초 후의 두 삼각형의 위치는 각각 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]과 같다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

따라서 $2\le t\le 3$일 때, 두 삼각형이 겹쳐지는 부분의 모양은 풀이의 그림과 같다.

06. 여러 가지 방정식

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.61~63

01 ②	02 ②	03 ④	04 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (중근)	
05 4	06 ⑤	07 ③	08 ⑤	09 6
10 ⑤	11 ②	12 ③	13 3	14 ①
15 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$			16 ④	17 ③
18 ①	19 ②	20 7	21 ①	

01

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$이라 하자.
$f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$
사차방정식 $f(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x^2+2x+3=0$
이때 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-1\times3=-2<0$이므로 이 이차방정식은 두 허근을 갖는다.
즉, 사차방정식 $f(x)=0$의 두 실근 α, β는 -1 또는 2이고, 두 허근 γ, δ는 $x^2+2x+3=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\gamma+\delta=-2$, $\gamma\delta=3$
$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=(-2)^2-2\times3=-2$
$\therefore \alpha+\beta+\gamma^2+\delta^2=-1+2+(-2)$
$=-1$

답 ②

02

$(x^2+x)^2-2(x^2+x+1)-22=0$에서
$x^2+x=t$로 놓으면
$t^2-2(t+1)-22=0$
$t^2-2t-24=0$, $(t+4)(t-6)=0$
$\therefore t=-4$ 또는 $t=6$
즉, $x^2+x=-4$ 또는 $x^2+x=6$이므로
$x^2+x+4=0$에서 $x=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
$x^2+x-6=0$에서 $(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
따라서 모든 실근의 합은
$-3+2=-1$

답 ②

03

$x^4-13x^2+36=0$에서 $x^2=t$로 놓으면
$t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$
$\therefore t=4$ 또는 $t=9$
따라서 $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로
$x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$
$\alpha<\beta<\gamma<\delta$에서
$\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=3$이므로
$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta=-3+2\times(-2)+3\times2+4\times3$
$=11$

답 ④

04

사차방정식 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$
$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면
$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$
$\therefore t=1$
즉, $x+\frac{1}{x}=1$이므로 양변에 x를 곱하면
$x^2-x+1=0$
$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (중근)

답 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (중근)

05

방정식 $x^3-kx^2+(k-5)x+4=0$의 한 근이 2이므로
$x=2$를 대입하면
$8-4k+2(k-5)+4=0$
$-2k+2=0$ $\quad\therefore k=1$
즉, 주어진 방정식은 $x^3-x^2-4x+4=0$
이때 $f(x)=x^3-x^2-4x+4$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+x-2)$
$=(x-2)(x+2)(x-1)$
$f(x)=0$에서 $(x+2)(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
따라서 삼차방정식 $(x-2)(x+2)(x-1)=0$의 2가 아닌 두 근 α, β는 -2 또는 1이므로
$|k|+|\alpha|+|\beta|=1+2+1=4$

답 4

• 다른 풀이 •

$f(x)=x^3-kx^2+(k-5)x+4$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -k & k-5 & 4 \\ & & 1 & 1-k & -4 \\ \hline & 1 & 1-k & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)\{x^2+(1-k)x-4\}$

$f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+(1-k)x-4=0$

이때 주어진 삼차방정식의 한 근이 $x=2$이므로 이차방정식 $x^2+(1-k)x-4=0$의 한 근이 $x=2$이어야 한다.

$4+2(1-k)-4=0 \qquad \therefore k=1$

이것을 $x^2+(1-k)x-4=0$에 대입하면

$x^2-4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근이 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 $\alpha=-2$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-2$

$\therefore |k|+|\alpha|+|\beta|=1+2+1=4$

06

$f(x)=x^3+5x^2+(k+4)x+k$라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & k+4 & k \\ & & -1 & -4 & -k \\ \hline & 1 & 4 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+4x+k)$

이때 주어진 삼차방정식이 중근을 가지려면 $x=-1$이 중근이거나 $x^2+4x+k=0$이 중근을 가져야 한다.

(i) $x=-1$이 중근일 때,

$x=-1$을 $x^2+4x+k=0$에 대입하면

$1-4+k=0 \qquad \therefore k=3$

(ii) $x^2+4x+k=0$이 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-k=0 \qquad \therefore k=4$

(i), (ii)에서 $k=3$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은

$3+4=7$ 답 ⑤

07

삼차방정식 $x^3-x^2-7x-5=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7$, $\alpha\beta\gamma=5$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$ ($\because \alpha+\beta+\gamma=1$)

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-1+(-7)-5=-12$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$f(x)=x^3-x^2-7x-5$라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

라 할 수 있다.

또한, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

$=f(1)$

$=1-1-7-5=-12$

08

삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-1$

이때 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식은

$$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$$

이고

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-1}=-1$$

이므로 구하는 삼차방정식은

$x^3+3x^2+2x+1=0$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=3+2+1=6$ 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 다음을 구할 수 있다.

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β $(\alpha\beta\neq 0)$라 하면 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $cx^2+bx+a=0$

(2) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ $(\alpha\beta\gamma\neq 0)$라 하면 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식은 $dx^3+cx^2+bx+a=0$

이 문제에서 $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=1$이므로 구하는 방정식은 $x^3+3x^2+2x+1=0$

09

계수가 유리수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$도 주어진 삼차방정식의 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+\alpha=-a$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\alpha+\alpha(2+\sqrt{3})=b$

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\alpha=3$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$\alpha=3$, $a=-7$, $b=13$

$\therefore a+b=-7+13=6$ 답 6

• 다른 풀이 1 •

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $x=2+\sqrt{3}$을 방정식에 대입하면

$(2+\sqrt{3})^3+a(2+\sqrt{3})^2+b(2+\sqrt{3})-3=0$

$23+7a+2b+(15+4a+b)\sqrt{3}=0$

이때 $23+7a+2b$, $15+4a+b$는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$23+7a+2b=0$, $15+4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=13$

$\therefore a+b=6$

• 다른 풀이 2 •

계수가 유리수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

두 수 $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$을 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=0$, 즉

$x^2-4x+1=0$이므로 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 나머지 한 근을 α라 하면

$x^3+ax^2+bx-3=(x-\alpha)(x^2-4x+1)$

$x^3+ax^2+bx-3=x^3-(\alpha+4)x^2+(4\alpha+1)x-\alpha$

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-\alpha-4$, $b=4\alpha+1$, $-3=-\alpha$

$\therefore \alpha=3$, $a=-7$, $b=13$

$\therefore a+b=6$

10 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 주어진 삼차방정식의 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+\alpha(1+i)=-4$

$(1+i)(1-i)\alpha=-b$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $a=1$, $b=6$

$\therefore a+b=7$ 답 ⑤

• 다른 풀이 1 •

삼차방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$의 한 근이 $1+i$이므로 $x=1+i$를 방정식에 대입하면

$(1+i)^3+a(1+i)^2-4(1+i)+b=0$

$-6+b+(2a-2)i=0$

이때 $-6+b$, $2a-2$는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-6+b=0$, $2a-2=0$ $\quad\therefore a=1$, $b=6$

$\therefore a+b=7$

• 다른 풀이 2 •

계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$의 한 근이 $1+i$이므로 다른 한 근은 $1-i$이다.

두 복소수 $1+i$, $1-i$를 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=0$, 즉

$x^2-2x+2=0$이므로 삼차방정식

$x^3+ax^2-4x+b=0$의 나머지 한 근을 α라 하면

$x^3+ax^2-4x+b=(x-\alpha)(x^2-2x+2)$

$x^3+ax^2-4x+b=x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+2)x-2\alpha$

위 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=-\alpha-2$, $-4=2\alpha+2$, $b=-2\alpha$

$\therefore \alpha=-3$, $a=1$, $b=6$

$\therefore a+b=7$

11 삼차방정식 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 ω_1이 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega_1}$도 이 이차방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega_1+\overline{\omega_1}=1$, $\omega_1\overline{\omega_1}=1$

또한, 삼차방정식 $x^3-8=0$, 즉 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$에서 ω_2가 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega_2}$도 이 이차방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega_2+\overline{\omega_2}=-2$, $\omega_2\overline{\omega_2}=4$

$\therefore (\omega_1^2+\overline{\omega_1}^2)(\omega_2^2+\overline{\omega_2}^2)$

$=\{(\omega_1+\overline{\omega_1})^2-2\omega_1\overline{\omega_1}\}\{(\omega_2+\overline{\omega_2})^2-2\omega_2\overline{\omega_2}\}$

$=(1^2-2\times1)\times\{(-2)^2-2\times4\}$

$=(-1)\times(-4)=4$ 답 ②

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이 ω_1, $\overline{\omega_1}$이므로

$\omega_1^2-\omega_1+1=0$, $\overline{\omega_1}^2-\overline{\omega_1}+1=0$

$\therefore \omega_1^2=\omega_1-1$, $\overline{\omega_1}^2=\overline{\omega_1}-1$ ……㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega_1+\overline{\omega_1}=1$ ……㉡

$\therefore \omega_1^2+\overline{\omega_1}^2=(\omega_1-1)+(\overline{\omega_1}-1)$ ($\because$ ㉠)

$=(\omega_1+\overline{\omega_1})-2$

$=1-2$ ($\because$ ㉡)

$=-1$

마찬가지로 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 허근이 ω_2, $\overline{\omega_2}$이므로

$\omega_2^2+2\omega_2+4=0$, $\overline{\omega_2}^2+2\overline{\omega_2}+4=0$

$\therefore \omega_2^2=-2\omega_2-4$, $\overline{\omega_2}^2=-2\overline{\omega_2}-4$ ……㉢

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega_2+\overline{\omega_2}=-2$ ……㉣

$\therefore \omega_2^2+\overline{\omega_2}^2=(-2\omega_2-4)+(-2\overline{\omega_2}-4)$ ($\because$ ㉢)

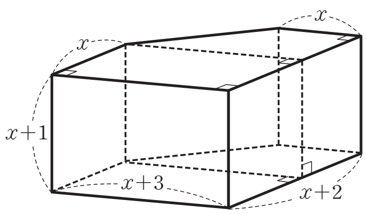
$=-2(\omega_2+\overline{\omega_2})-8$

$=(-2)\times(-2)-8$ ($\because$ ㉣)

$=-4$

$\therefore (\omega_1^2+\overline{\omega_1}^2)(\omega_2^2+\overline{\omega_2}^2)=(-1)\times(-4)=4$

12 주어진 오각기둥의 전개도를 점선을 따라 접으면 다음 그림과 같다.



오각기둥의 부피가 108이므로

$\left[x(x+3)+\dfrac{2\{(x+3)+x\}}{2}\right](x+1)=108$

$(x^2+5x+3)(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$

이때 $f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 하면 $f(3)=0$이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

3	1	6	8	-105
		3	27	105
	1	9	35	0

$\therefore f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$

$f(x)=0$에서 $x^2+9x+35=\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{59}{4}>0$이므로

$x=3$

답 ③

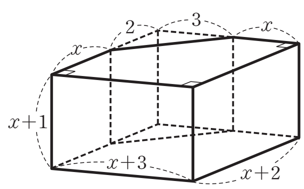
BLACKLABEL 특강 참고

오각기둥의 부피를 다음과 같이 구할 수도 있다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 오각기둥의 밑면의 변의 길이를 일부 연장하여 사각기둥을 만들면 구하는 오각기둥의 부피는

(사각기둥의 부피)

$-$(삼각기둥의 부피)



$=(x+3)(x+2)(x+1)-\left(\dfrac{1}{2}\times2\times3\right)\times(x+1)$

$=x^3+6x^2+8x+3$

13

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+3y^2=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$

이것을 ㉡에 대입하면 $(y+1)^2+3y^2=7$

$4y^2+2y-6=0$, $2y^2+y-3=0$

$(2y+3)(y-1)=0$

$\therefore y=1$ ($\because y>0$), $x=2$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=3$

답 3

14

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

그런데 $x=y$이면 $x^2-y^2=9$를 만족시키지 못하므로

$x=2y$

이것을 ㉡에 대입하면 $4y^2-y^2=9$

$3y^2=9$, $y^2=3$

$\therefore y=-\sqrt{3}$ 또는 $y=\sqrt{3}$

$y=-\sqrt{3}$일 때, $x=-2\sqrt{3}$

$y=\sqrt{3}$일 때, $x=2\sqrt{3}$

즉, 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

이때 $\alpha_1<\alpha_2$이므로

$\alpha_1=-2\sqrt{3}$, $\beta_1=-\sqrt{3}$, $\alpha_2=2\sqrt{3}$, $\beta_2=\sqrt{3}$

$\therefore \beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

답 ①

15

$\begin{cases} x^2+xy=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-3\times$㉡을 하면

$x^2-2xy-3y^2=0$, $(x-3y)(x+y)=0$

$\therefore x=3y$ 또는 $x=-y$

(i) $x=3y$를 ㉠에 대입하면 $9y^2+3y^2=3$

$12y^2=3$, $y^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore y=\pm\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{3}{2}$ (복부호 동순)

(ii) $x=-y$를 ㉠에 대입하면

$y^2-y^2=3$, $0=3$

즉, 주어진 방정식을 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

답 $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

• 다른 풀이 •

㉠$-$㉡을 하면 $x^2-y^2=2$

$\therefore (x+y)(x-y)=2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠$+$㉡을 하면 $(x+y)^2=4$

$\therefore x+y=\pm2$

(i) $x+y=-2$일 때,

이것을 ㉢에 대입하면

$x-y=-1$

위의 식과 $x+y=-2$를 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{3}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $x+y=2$일 때,

이것을 ㉢에 대입하면

$x-y=1$

위의 식과 $x+y=2$를 연립하여 풀면

$x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ 또는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

16 $\begin{cases} x+y+xy=23 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2y+xy^2=120 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$라 놓으면

㉠에서 $u+v=23$ ⋯⋯㉢

㉡에서 $xy(x+y)=120$이므로

$uv=120$ ⋯⋯㉣

㉢에서 $v=-u+23$

이것을 ㉣에 대입하면

$u(-u+23)=120$, $u^2-23u+120=0$

$(u-8)(u-15)=0$

$\therefore u=8$ 또는 $u=15$

$u=8$일 때, $v=15$

$u=15$일 때, $v=8$

$\therefore \begin{cases} u=8 \\ v=15 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=15 \\ v=8 \end{cases}$

(i) $u=8$, $v=15$일 때,

$x+y=8$, $xy=15$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-5)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

(ii) $u=15$, $v=8$일 때,

$x+y=15$, $xy=8$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-15t+8=0$의 두 근이므로

$t=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\times1\times8}}{2}=\dfrac{15\pm\sqrt{193}}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{15-\sqrt{193}}{2} \\ y=\dfrac{15+\sqrt{193}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{15+\sqrt{193}}{2} \\ y=\dfrac{15-\sqrt{193}}{2} \end{cases}$

그런데 x, y는 정수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

$\therefore x^2+y^2=34$

답 ④

17 $x+y=-2a+4$, $xy=a^2-3a+1$이므로 두 실수 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-(-2a+4)t+(a^2-3a+1)=0$, 즉

$t^2+2(a-2)t+(a^2-3a+1)=0$이라 할 수 있다.

이때 이 이차방정식이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2-3a+1)\geq0$

$-a+3\geq0$ $\therefore a\leq3$

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

답 ③

18 처음 직사각형 모양의 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면 대각선의 길이가 5 m이므로

$x^2+y^2=25$ ⋯⋯㉠

또한, 땅의 가로의 길이를 1 m만큼 줄이고 세로의 길이를 2 m만큼 늘였더니 넓이가 3 m^{2}만큼 넓어졌으므로

$(x-1)(y+2)=xy+3$

$xy+2x-y-2=xy+3$

$\therefore y=2x-5$ ⋯⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(2x-5)^2=25$

$5x^2-20x=0$

$x(x-4)=0$ $\therefore x=4$ $(\because x>0)$

$x=4$를 ㉡에 대입하면 $y=3$

따라서 처음 땅의 둘레의 길이는

$2\times(4+3)=14$(m)

답 ①

19 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$ ⋯⋯㉠

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$ ⋯⋯㉡

㉠$-$㉡을 하면 $-3k\alpha+3k=0$

$-3k(\alpha-1)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $\alpha=1$

(i) $k=0$을 ㉠에 대입하면 $3\alpha^2-\alpha=0$

$\alpha(3\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{3}$

즉, 공통근이 두 개이다.

(ii) $\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $3k+2=0$

$3k=-2$ $\therefore k=-\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $k=-\dfrac{2}{3}$

답 ②

20 $abc+ab+bc+ca+a+b+c=29$에서

$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=29+1$

$(a+1)(b+1)(c+1)=30$ *

$(a+1)(b+1)(c+1)=2\times3\times5$

$a\leq b\leq c$라 하면

$a+1=2$, $b+1=3$, $c+1=5$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=4$

$\therefore a+b+c=7$

답 7

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$abc+ab+bc+ca+a+b+c+1=30$을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$bca+ba+ca+a+bc+b+c+1=30$

$(bc+b+c+1)a+bc+b+c+1=30$

$(bc+b+c+1)(a+1)=30$

$\{b(c+1)+(c+1)\}(a+1)=30$

$\therefore (b+1)(c+1)(a+1)=30$

21 $x^2+y^2+4x-4y+k+2=0$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+4x+y^2-4y+k+2=0$ ……㉠

x가 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.

즉, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(y^2-4y+k+2)\ge0$에서

$y^2-4y+k-2\le0$ $\therefore (y-2)^2\le6-k$

이때 y도 실수이므로

$6-k\ge0$ $\therefore k\le6$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$x^2+y^2+4x-4y+k+2=0$에서

$(x+2)^2+(y-2)^2=6-k$

$(x+2)^2\ge0$, $(y-2)^2\ge0$이므로 주어진 방정식을 만족시키는 실수 x, y가 존재하려면

$6-k\ge0$ $\therefore k\le6$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.64~68

01 18	02 84	03 9	04 $-\frac{31}{4}$	05 ⑤
06 ②	07 $\frac{13}{3}$	08 ⑤	09 ③	10 ⑤
11 -4	12 ①	13 ②	14 -208	15 ③
16 $a=6$, $b=-\frac{3}{2}$	17 12	18 ④	19 ⑤	
20 ②	21 ①	22 23	23 164	24 16
25 -1	26 ②	27 ④	28 ③	29 2
30 4				

01 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 한 양의 실근이 α이므로

$\alpha^4-\alpha^3-4\alpha^2-\alpha+1=0$

$\alpha\ne0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$\alpha^2-\alpha-4-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$, $\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-4=0$

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-4=0$

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-6=0$

이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=t$로 놓으면

$t^2-t-6=0$, $(t+2)(t-3)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=3$

즉, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$ 또는 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

그런데 $\alpha>0$이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

$\therefore \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=3^3-3\times3=18$ 답 18

• 다른 풀이 •

$f(x)=x^4-x^3-4x^2-x+1$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -4 & -1 & 1 \\ & & -1 & 2 & 2 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & \boxed{0} \\ & & -1 & 3 & -1 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x^2-3x+1)$

$f(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x^2-3x+1=0$

이때 $g(x)=x^2-3x+1$이라 하면 이차방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

즉, 사차방정식 $f(x)=0$의 한 양의 실근 α는 이차방정식 $g(x)=0$의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\alpha\ne0$이므로 위의 식의 양변을 α로 나누면

$\alpha-3+\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

$\therefore \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=3^3-3\times3=18$

02 사차방정식 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+55=0$에서

$(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)+55=0$

$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+55=0$

이때 $x^2+4x=X$로 놓으면

$(X-5)(X-21)+55=0$

$X^2-26X+160=0$, $(X-10)(X-16)=0$

$(x^2+4x-10)(x^2+4x-16)=0$

$\therefore x^2+4x-10=0$ 또는 $x^2+4x-16=0$

(i) 이차방정식 $x^2+4x-10=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-10$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+20=36$

(ii) 이차방정식 $x^2+4x-16=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-4$, $\gamma\delta=-16$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta=16+32=48$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 제곱의 합은

$36+48=84$ 답 84

03 사차방정식 $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=0$에서

$x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a+b)^2(a-b)^2=0$

$\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}=0$

$\therefore x=\pm(a+b)$ 또는 $x=\pm(a-b)$
이때 네 근의 곱이 9이므로
$(a+b)^2(a-b)^2=9$
a, b는 $a>b$인 두 자연수이므로
$(a+b)^2=9$ ……㉠
$(a-b)^2=1$ ……㉡
㉠−㉡을 하면 $4ab=8$이므로 $ab=2$
$\therefore a=2,\ b=1$
$\therefore a^3+b^3=2^3+1^3=9$ 답 9

• 다른 풀이 •

주어진 사차방정식의 네 근의 곱이 9이므로 사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(a^2-b^2)^2=9 \quad \therefore a^2-b^2=3\ (\because a>b)$
따라서 $(a+b)(a-b)=3$이고 a, b는 $a>b$인 두 자연수이므로
$a+b=3,\ a-b=1$
$\therefore a=2,\ b=1$
$\therefore a^3+b^3=2^3+1^3=9$

04 $f(x)=x^3-(2a-1)x^2+(a^2-2a)x+2a^2+4a+4$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-2	1	$-2a+1$	a^2-2a	$2a^2+4a+4$
		-2	$4a+2$	$-2a^2-4a-4$
	1	$-2a-1$	a^2+2a+2	0

$\therefore f(x)=(x+2)\{x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2\}$
$f(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$
삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$이 $x\neq-2$인 중근을 갖거나 $x=-2$를 중근이 아닌 근으로 가져야 한다.

(i) $x\neq-2$인 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(2a+1)\}^2-4(a^2+2a+2)=0$
$-4a-7=0 \quad \therefore a=-\frac{7}{4}$
이것을 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$에 대입하면
$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=0,\ \left(x+\frac{5}{4}\right)^2=0$
$\therefore x=-\frac{5}{4}$
즉, 주어진 삼차방정식은 서로 다른 두 실근 $x=-2$, $x=-\frac{5}{4}$ (중근)를 갖는다.

(ii) $x=-2$를 중근이 아닌 근으로 갖는 경우
$x=-2$를 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$에 대입하면
$4+2(2a+1)+a^2+2a+2=0$
$a^2+6a+8=0,\ (a+4)(a+2)=0$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=-2$
① $a=-4$를 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$에 대입하면
$x^2+7x+10=0,\ (x+5)(x+2)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=-2$
즉, 주어진 삼차방정식은 서로 다른 두 실근 $x=-5$, $x=-2$ (중근)를 갖는다.
② $a=-2$를 $x^2-(2a+1)x+a^2+2a+2=0$에 대입하면
$x^2+3x+2=0,\ (x+2)(x+1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$
즉, 주어진 삼차방정식은 서로 다른 두 실근 $x=-2$ (중근), $x=-1$을 갖는다.

(i), (ii)에서 $a=-\frac{7}{4}$ 또는 $a=-4$ 또는 $a=-2$
따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은
$-\frac{7}{4}+(-4)+(-2)=-\frac{31}{4}$ 답 $-\frac{31}{4}$

05 ㄱ. $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$에서
$f(1)=1+2a-1+b^2-2a-b^2=0$
따라서 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(1)=0$이므로
삼차식 $f(x)=x^3+(2a-1)x^2+(b^2-2a)x-b^2$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

1	1	$2a-1$	b^2-2a	$-b^2$
		1	$2a$	b^2
	1	$2a$	b^2	0

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2ax+b^2)$
$f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+2ax+b^2=0$
이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-b^2>0\ (\because a<b<0)$
즉, 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이때 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 한다.
$1+2a+b^2=0$에서 $a=-\frac{b^2+1}{2}$
이것을 $a<b$에 대입하여 정리하면
$-\frac{b^2+1}{2}<b,\ b^2+2b+1>0,\ (b+1)^2>0$
즉, $b\neq-1$, $a=-\frac{b^2+1}{2}$을 만족시키는 a, b에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 세 실근을 1, α, β $(\alpha\neq1,\ \beta\neq1,\ \alpha\neq\beta)$라 하자.

세 실근의 합이 7이므로 $1+\alpha+\beta=7$

$\therefore\ \alpha+\beta=6$

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$

$-2a=6\qquad\therefore\ a=-3$

이때 이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$, 즉 $x^2-6x+b^2=0$이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=(-3)^2-b^2>0$에서 $b^2<9\qquad\therefore\ -3<b<3$

또한, 1을 근으로 갖지 않아야 하므로

$1-6+b^2\neq0$에서 $b^2\neq5$

$\therefore\ b\neq\pm\sqrt{5}$

따라서 $a=-3$, $-3<b<3$, $b\neq\pm\sqrt{5}$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍은 $(-3,\ -2)$, $(-3,\ -1)$, $(-3,\ 0)$, $(-3,\ 1)$, $(-3,\ 2)$의 5개이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06

삼차방정식 $x^3+x^2+kx+3=0$의 세 근을 α, β, γ $(\alpha\leq\beta\leq\gamma)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$, $\alpha\beta\gamma=-3$

이때 α, β, γ가 모두 정수이므로 $\alpha\beta\gamma=-3$에서 가능한 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$는 $(-3,\ -1,\ -1)$, $(-3,\ 1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 3)$이고, 이 중에서 $\alpha+\beta+\gamma=-1$을 만족시키는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$는 $(-3,\ 1,\ 1)$이다.

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\gamma=1$을 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$에 대입하면

$k=(-3)\times1+1\times1+1\times(-3)$

$=-5$

답 ②

07

$a^3=a^2+a+\frac{1}{9}$, $b^3=b^2+b+\frac{1}{9}$, $c^3=c^2+c+\frac{1}{9}$이므로 서로 다른 세 실수 a, b, c는 방정식 $x^3=x^2+x+\frac{1}{9}$, 즉 $9x^3-9x^2-9x-1=0$의 근이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\underbrace{a+b+c=1,\ ab+bc+ca=-1,}_{*}$ $abc=\frac{1}{9}$이므로

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$

$=1\times(1+3)+3\times\frac{1}{9}=\frac{13}{3}$

답 $\frac{13}{3}$

• 다른 풀이 •

$*$에서

$a^3+b^3+c^3$

$=\left(a^2+a+\frac{1}{9}\right)+\left(b^2+b+\frac{1}{9}\right)+\left(c^2+c+\frac{1}{9}\right)$

$=(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)+\frac{1}{3}$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+(a+b+c)+\frac{1}{3}$

$=1^2-2\times(-1)+1+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

08

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$ ……㉠

또한, 삼차방정식 $x^3-3x+5=0$의 세 근이 p, q, r이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q+r=0$, $pq+qr+rp=-3$, $pqr=-5$ ……㉡

$\therefore\ (p\alpha+q\beta)^2+(p\beta-q\alpha)^2+r^2\alpha^2+r^2\beta^2$

$=p^2\alpha^2+2p\alpha q\beta+q^2\beta^2+p^2\beta^2-2p\beta q\alpha+q^2\alpha^2+r^2\alpha^2+r^2\beta^2$

$=p^2(\alpha^2+\beta^2)+q^2(\alpha^2+\beta^2)+r^2(\alpha^2+\beta^2)$

$=(\alpha^2+\beta^2)(p^2+q^2+r^2)$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}$

$=-3\times6$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=-18$

답 ⑤

09

계수가 유리수인 사차방정식

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c=0$의 중근이 아닌 한 근이 $-2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{3}$이다.

두 수 $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$을 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-(-2+\sqrt{3}-2-\sqrt{3})x+(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})=0$, 즉 $x^2+4x+1=0$이므로 사차방정식

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c=0$의 중근을 α라 하면

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c=(x-\alpha)^2(x^2+4x+1)$

이라 할 수 있다.

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c$

$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2+4x+1)$

$=x^4+(4-2\alpha)x^3+(\alpha^2-8\alpha+1)x^2+(4\alpha^2-2\alpha)x+\alpha^2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$6=4-2\alpha$, $a=\alpha^2-8\alpha+1$, $b=4\alpha^2-2\alpha$, $c=\alpha^2$

$\therefore\ \alpha=-1$, $a=10$, $b=6$, $c=1$

$\therefore\ a+b+c=17$

답 ③

• 다른 풀이 •

계수가 유리수인 사차방정식

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c=0$의 중근이 아닌 한 근이 $-2+\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $-2-\sqrt{3}$이다.

나머지 중근을 α라 하면 사차방정식의 근과 계수의 관계

에 의하여

$(-2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})+2a=-6$

$-4+2a=-6 \qquad \therefore a=-1$

한편, 두 수 $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$을 근으로 갖는 이차방정식은 $x^2+4x+1=0$이므로

$x^4+6x^3+ax^2+bx+c=(x+1)^2(x^2+4x+1)$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=1$을 대입해도 성립한다.

$1+6+a+b+c=2^2\times 6$

$\therefore a+b+c=17$

10 조건 ㈎에서 계수가 실수인 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 허근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$이다.

두 복소수 $2-i$, $2+i$를 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-(2-i+2+i)x+(2-i)(2+i)=0$, 즉

$x^2-4x+5=0$이므로 삼차방정식 $P(x)=0$의 다른 한 근을 α라 하면

$P(x)=(x^2-4x+5)(x-\alpha) \qquad \cdots\cdots ㉠$

라 할 수 있다.

이때 조건 ㈏에서 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 10이므로 나머지정리에 의하여 $P(-1)=10$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면

$P(-1)=(1+4+5)(-1-\alpha)=10$

$10(-1-\alpha)=10$, $-1-\alpha=1$

$\therefore \alpha=-2$

따라서

$P(x)=(x^2-4x+5)(x+2)$

$\qquad =x^3-2x^2-3x+10$

이므로

$a=-2$, $b=-3$, $c=10$

$\therefore a+b+c=5$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

조건 ㈏에서 $P(-1)=10$이므로

$-1+a-b+c=10$에서 $a+c=b+11 \qquad \cdots\cdots ㉡$

조건 ㈎에서 삼차방정식 $P(x)=0$의 세 근을 $2-i$, $2+i$, k (k는 실수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)+k=-a$에서 $a=-4-k$

$(2-i)(2+i)+(2+i)k+k(2-i)=b$에서 $b=4k+5$

$k(2-i)(2+i)=-c$에서 $c=-5k$

이것을 ㉡에 대입하면

$(-4-k)+(-5k)=(4k+5)+11$

$-10k=20 \qquad \therefore k=-2$

따라서 $a=-2$, $b=-3$, $c=10$이므로

$a+b+c=5$

11 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 허근을 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $q\neq 0$)라 하면 $\overline{\alpha}=p-qi$도 이 삼차방정식의 근이다.

즉, $\overline{\alpha}=\alpha^2$이므로 $p-qi=(p+qi)^2$에서

$p-qi=(p^2-q^2)+2pqi$

p, q는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$p=p^2-q^2$, $-q=2pq$

$\therefore p=-\frac{1}{2}$ ($\because q\neq 0$),

$$q=\pm\sqrt{p^2-p}=\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, 두 허근은 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$이다. *

이때 두 근이 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+x+1=0$이므로 삼차방정식

$x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 실근을 β라 하면

$x^3+ax^2+bx-3=(x-\beta)(x^2+x+1)$

$\qquad =x^3+(1-\beta)x^2+(1-\beta)x-\beta$

즉, $a=b=1-\beta$, $-3=-\beta$이므로

$\beta=3$, $a=b=-2$

$\therefore a+b=-4$ 답 -4

• 다른 풀이 •

*에서 주어진 삼차방정식의 한 실근을 β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta=3$

즉, $\beta=3$이므로

$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3=-a$

$\therefore a=-2$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times 3+3\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=b$$

$\therefore b=-2$

$\therefore a+b=-4$

12 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4=-3<0$에서 서로 다른 두 허근을 가지므로 방정식 $x^3=1$의 허근 ω는 이 이차방정식의 근이다.

이때 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 모든 계수가 실수이므로 한 허근이 ω이면 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$$\therefore z\overline{z}=\frac{\omega+1}{2\omega+1}\times\overline{\left(\frac{\omega+1}{2\omega+1}\right)}=\frac{\omega+1}{2\omega+1}\times\frac{\overline{\omega}+1}{2\overline{\omega}+1}$$

$$=\frac{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}$$

$$=\frac{1-1+1}{4-2+1} \ (\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{3}$$ 답 ①

13 $f(x)=x^3-3x^2+3x-2$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 3 & -2 \\ & & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-x+1)$

$f(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x^2-x+1=0$

이때 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1-4=-3<0$에서 허근을 가지므로 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 허근 α는 이 이차방정식의 근이다. 즉,

$\alpha^2-\alpha+1=0$ ……㉠

㉠의 양변에 $\alpha+1$을 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha^3+1=0$ $\therefore \alpha^3=-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$(\alpha-1)(\alpha^2+1)(\alpha^3-1)(\alpha^4+1)(\alpha^5-1)(\alpha^6+1)$

$=\alpha^2\times\alpha\times(-1-1)(-\alpha+1)(-\alpha^2-1)(1+1)$

$=\alpha^3\times(-2)\times(-\alpha^2)\times(-\alpha)\times2$

$=-4\alpha^6=-4$

답 ②

14 $f(x)=x^3+8$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha=-2$라 하면 β와 γ는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta+\gamma=2$, $\beta\gamma=4$ ……㉠

따라서 $g(x)=x^3-x+2$에서

$g(\alpha)=g(-2)=-8+2+2=-4$

$g(\beta)=\beta^3-\beta+2=-8-\beta+2$ ($\because \beta^3+8=0$)

$=-\beta-6$

$g(\gamma)=\gamma^3-\gamma+2=-8-\gamma+2$ ($\because \gamma^3+8=0$)

$=-\gamma-6$

$\therefore g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)=-4(-\beta-6)(-\gamma-6)$

$=-4\{\beta\gamma+6(\beta+\gamma)+36\}$

$=-4\times(4+6\times2+36)$ ($\because$ ㉠)

$=-208$

답 -208

단계	채점 기준	배점
(가)	방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 구하고, 나머지 두 근의 관계를 구한 경우	40%
(나)	$g(x)$에 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$를 대입한 경우	20%
(다)	(가)에서 구한 두 근의 관계를 이용하여 $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 구한 경우	40%

• 다른 풀이 •

$g(x)=x^3-x+2=(x^3+8)-x-6=f(x)-x-6$

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이고,

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha-6=-\alpha-6$,

$g(\beta)=f(\beta)-\beta-6=-\beta-6$,

$g(\gamma)=f(\gamma)-\gamma-6=-\gamma-6$

$\therefore g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)=(-\alpha-6)(-\beta-6)(-\gamma-6)$

$=f(-6)=(-6)^3+8$

$=-208$

15 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1-4=-3<0$에서 허근을 가지므로 α, β는 이 이차방정식의 두 근이다.

이때 α는 삼차방정식 $x^3-1=0$, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\alpha^3=1$, $\alpha^2+\alpha+1=0$ ……㉠

㉠에서 $\alpha^2+\alpha=-1$, $\alpha+1=-\alpha^2$이므로

$f(n)=(\alpha^2+\alpha)^n+(\alpha+1)^n=(-1)^n+(-\alpha^2)^n$

위의 식에 $n=1, 2, 3, \cdots, 6$을 차례로 대입하면

$f(1)=(-1)^1+(-\alpha^2)^1=-(1+\alpha^2)=\alpha$

$f(2)=(-1)^2+(-\alpha^2)^2=1+\alpha^4=1+\alpha=-\alpha^2$

$f(3)=(-1)^3+(-\alpha^2)^3=-1-\alpha^6=-1-1=-2$

$f(4)=(-1)^4+(-\alpha^2)^4=1+\alpha^8=1+\alpha^2=-\alpha$

$f(5)=(-1)^5+(-\alpha^2)^5=-1-\alpha^{10}=-1-\alpha=\alpha^2$

$f(6)=(-1)^6+(-\alpha^2)^6=1+\alpha^{12}=1+1=2$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)=0$

또한,

$f(7)=(-1)^7+(-\alpha^2)^7=-1-\alpha^{14}=-1-(\alpha^3)^4\alpha^2$

$=-1-\alpha^2=\alpha=f(1)$

이므로 $f(n+6)=f(n)$이다.

$\therefore F(50)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)\}$

$+\{f(7)+f(8)+f(9)+\cdots+f(12)\}$

$+\cdots$

$+\{f(43)+f(44)+f(45)+\cdots+f(48)\}$

$+f(49)+f(50)$

$=f(49)+f(50)=f(1)+f(2)$

$=\alpha-\alpha^2$

같은 방법으로 β는 두 방정식 $x^3-1=0$, $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\beta^3=1$, $\beta^2+\beta+1=0$

$\therefore g(n)=(-1)^n+(-\beta^2)^n$

위의 식에 $n=1, 2, 3, \cdots, 6$을 차례로 대입하여 정리하면

$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)=0$

이고, $g(n+6)=g(n)$이므로

$G(50)=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(50)$

$=g(49)+g(50)=g(1)+g(2)$

$=\beta-\beta^2$

한편, α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$

$\therefore F(50)+G(50)=\alpha-\alpha^2+\beta-\beta^2$
$=\alpha+\beta-(\alpha^2+\beta^2)$
$=\alpha+\beta-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta$
$=-1-1+2=0$ 답 ③

• 다른 풀이 •

삼차방정식 $x^3-1=0$의 서로 다른 두 허근이 α, β이므로
$\alpha^3=1,\ \beta^3=1$
또한, α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$
$f(n)+g(n)$
$=(\alpha^2+\alpha)^n+(\alpha+1)^n+(\beta^2+\beta)^n+(\beta+1)^n$
$=(-1)^n+(-\alpha^2)^n+(-1)^n+(-\beta^2)^n$
$=2\times(-1)^n+(-\alpha^2)^n+(-\beta^2)^n$
$f(1)+g(1)=2\times(-1)-\alpha^2-\beta^2$
$=-2-\alpha^2-\beta^2$
$=-2+\alpha+1+\beta+1$
$=\alpha+\beta=-1$
$f(2)+g(2)=2\times(-1)^2+(-\alpha^2)^2+(-\beta^2)^2$
$=2+\alpha^4+\beta^4=2+\alpha+\beta$
$=2+(-1)=1$
$f(3)+g(3)=2\times(-1)^3+(-\alpha^2)^3+(-\beta^2)^3$
$=-2-\alpha^6-\beta^6$
$=-2-1-1=-4$
$f(4)+g(4)=2\times(-1)^4+(-\alpha^2)^4+(-\beta^2)^4$
$=2+\alpha^8+\beta^8=2+\alpha^2+\beta^2$
$=-\{f(1)+g(1)\}=-(-1)=1$
$f(5)+g(5)=2\times(-1)^5+(-\alpha^2)^5+(-\beta^2)^5$
$=-2-\alpha^{10}-\beta^{10}=-2-\alpha-\beta$
$=-\{f(2)+g(2)\}=-1$
$f(6)+g(6)=2\times(-1)^6+(-\alpha^2)^6+(-\beta^2)^6$
$=2+\alpha^{12}+\beta^{12}=2+\alpha^6+\beta^6$
$=-\{f(3)+g(3)\}=-(-4)=4$
$\therefore \{f(1)+g(1)\}+\{f(2)+g(2)\}+\cdots$
$+\{f(6)+g(6)\}$
$=-1+1+(-4)+1+(-1)+4=0$
또한,
$f(7)+g(7)=2\times(-1)^7+(-\alpha^2)^7+(-\beta^2)^7$
$=-2-\alpha^{14}-\beta^{14}=-2-\alpha^2-\beta^2$
$=f(1)+g(1)=-1$
이므로
$f(n+6)+g(n+6)=f(n)+g(n)$
$\therefore F(50)+G(50)$
$=\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)\}$
$+\{g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(50)\}$
$=\{f(1)+g(1)+f(2)+g(2)+\cdots$
$+f(6)+g(6)\}$
$+\{f(7)+g(7)+f(8)+g(8)+\cdots$
$+f(12)+g(12)\}$
$+\cdots$
$+\{f(43)+g(43)+f(44)+g(44)+\cdots$
$+f(48)+g(48)\}$
$+\{f(49)+g(49)\}+\{f(50)+g(50)\}$
$=\{f(49)+g(49)\}+\{f(50)+g(50)\}$
$=\{f(1)+g(1)\}+\{f(2)+g(2)\}$
$=-1+1=0$

16

두 연립방정식

$\begin{cases} 4x-y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases},\ \begin{cases} x-by=5 & \cdots\cdots ㉢ \\ x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

은 공통근을 갖고, 이는 두 방정식 ㉡, ㉣의 공통근이므로
㉡에서 $y=-x+4$를 ㉣에 대입하면
$x^2+(-x+4)^2=8,\ 2x^2-8x+8=0$
$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$
$\therefore x=2,\ y=2\ (\because y=-x+4)$
이것을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면
$4\times2-2=a,\ 2-2b=5$
$\therefore a=6,\ b=-\dfrac{3}{2}$ 답 $a=6,\ b=-\dfrac{3}{2}$

17

$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=z^2 & \cdots\cdots ㉡ \\ xy=-12 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠의 양변을 제곱하면
$(x+y+z)^2$
$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$
$=(x^2+y^2)+z^2+2xy+2z(x+y)$
$=z^2+z^2+2\times(-12)+2z(6-z)\ (\because ㉠, ㉡, ㉢)$
$=12z-24=36$
$12z=60 \qquad \therefore z=5$
$z=5$를 ㉠에 대입하면 $x+y=1$
즉, $x+y=1$, $xy=-12$를 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-t-12=0$의 두 근이므로
$(t+3)(t-4)=0 \qquad \therefore t=-3$ 또는 $t=4$
따라서 $x=-3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=-3$이므로
$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=3+4+5=12$ 답 12

• 다른 풀이 1 •

㉠에서 $z=6-(x+y)$이므로
$z^2=\{6-(x+y)\}^2$
이것을 ㉡에 대입하면
$x^2+y^2=36-12(x+y)+(x+y)^2$
$x^2+y^2=36-12(x+y)+x^2+2xy+y^2$
$36-12(x+y)+2\times(-12)=0\ (\because ㉢)$

$12(x+y)=12 \qquad \therefore x+y=1$

㉢과 $x+y=1$을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=-3$

한편, $z=6-(x+y)=6-1=5$이므로

$|x|+|y|+|z|=3+4+5=12$

• 다른 풀이 2 •

㉠에서 $x+y=6-z \qquad \cdots\cdots$㉣

㉡에서 $(x+y)^2-2xy=z^2$

㉢, ㉣을 위의 식에 대입하면

$(6-z)^2-2\times(-12)=z^2$

$12z=60 \qquad \therefore z=5$

즉, $x^2+y^2=25,\ xy=-12$이므로

$(|x|+|y|)^2=x^2+2|xy|+y^2$

$\qquad\qquad\quad =25+24=49$

$\therefore |x|+|y|=7$

$\therefore |x|+|y|+|z|=7+5=12$

18 $(x+1)(y+1)=k$에서

$xy+(x+y)+1-k=0 \qquad \cdots\cdots$㉠

$(x-2)(y-2)=k$에서

$xy-2(x+y)+4-k=0 \qquad \cdots\cdots$㉡

㉠$-$㉡을 하면

$3(x+y)-3=0 \qquad \therefore x+y=1$

$y=1-x$를 ㉠에 대입하면

$x(1-x)+2-k=0$

$\therefore x^2-x+k-2=0$

위의 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-4(k-2)\geq 0$에서

$-4k\geq -9 \qquad \therefore k\leq \frac{9}{4}$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{4}$이다. 답 ④

19 (ⅰ) $x<y$일 때,

$\begin{cases} x^2-y-3=-2y \\ 2x^2+y-3=-y \end{cases}$에서 $\begin{cases} x^2+y=3 \\ x^2+y=\frac{3}{2} \end{cases}$

이 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x\geq y$일 때,

$\begin{cases} x^2-y-3=-2x & \cdots\cdots㉠ \\ 2x^2+y-3=-x & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡을 하면

$3x^2-6=-3x,\ x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$4-y-3=4 \qquad \therefore y=-3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

$1-y-3=-2 \qquad \therefore y=0$

이때 $\alpha\beta\neq 0$이므로 $x=1,\ y=0$은 성립하지 않는다.

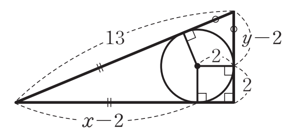
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 해는 $x=-2,\ y=-3$이므로

$\alpha=-2,\ \beta=-3$

$\therefore \alpha\beta=6$ 답 ⑤

20 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면 다음 그림에서

$\begin{cases} x^2+y^2=13^2 & \cdots\cdots㉠ \\ (x-2)+(y-2)=13 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$



㉡에서 $y=17-x$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2+(17-x)^2=13^2$

$2x^2-34x+120=0$

$x^2-17x+60=0,\ (x-5)(x-12)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=12$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$ $(\because ㉡)$

따라서 직각을 낀 두 변의 길이의 차는

$12-5=7$ 답 ②

• 다른 풀이 •

㉡에서 $x+y=17$이므로

$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$

$\quad =17^2-13^2=120$

$\therefore |x-y|=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$

$\qquad\qquad =\sqrt{17^2-2\times 120}$

$\qquad\qquad =\sqrt{49}=7$

21 정육면체 모양의 그릇 A의 한 모서리의 길이를 $a\ (a>1)$라 하면 직육면체 모양의 그릇 B는 그릇 A보다 밑면의 가로의 길이는 1만큼 길고, 세로의 길이는 1만큼 짧으며 높이는 같으므로 그릇 B의 가로, 세로의 길이와 높이는 각각 $a+1,\ a-1,\ a$이다.

이때 두 그릇 A, B의 부피는 각각 $a^3,\ a(a^2-1)$이고, 그릇 B의 부피는 그릇 A의 부피의 $\frac{15}{16}$이므로

$a(a^2-1)=\frac{15}{16}a^3$

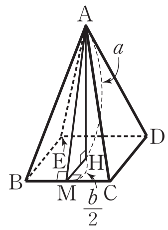
$16a^3-16a=15a^3,\ a^3-16a=0$

$a(a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>1)$

따라서 두 그릇의 높이는 4이다. 답 ①

22 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 파낸 정사각뿔의 각 꼭짓점을 A, B, C, D, E라 하고, 점 A에서 밑면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 변 BC의 중점을 M이라 하자.



$\overline{AH}=a$, $\overline{HM}=\frac{b}{2}$이므로

삼각형 AMH에서

$\overline{AM}=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times b\times\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$

정육면체에서 정사각뿔을 파내고 남은 입체도형의 겉넓이는 정육면체의 바깥 부분과 정사각뿔의 옆면의 넓이의 합과 같으므로

$(\text{겉넓이})=5a^2+(a^2-b^2)+4\times\frac{b}{2}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$

$\quad=6a^2-b^2+2b\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$

이 값이 $50+4\sqrt{10}$과 같고 a, b는 유리수이므로

$6a^2-b^2=50$ ……㉠

$2b\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=4\sqrt{10}$ ……㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$4b^2\left(a^2+\frac{b^2}{4}\right)=160$

$\therefore b^2\left(a^2+\frac{b^2}{4}\right)=40$

㉠에서 $a^2=\frac{b^2+50}{6}$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$b^2\left(\frac{b^2+50}{6}+\frac{b^2}{4}\right)=40$

$b^4+20b^2-96=0$, $(b^2+24)(b^2-4)=0$

$\therefore b^2=4\ (\because b^2>0)$, $a^2=\frac{4+50}{6}=9$

$\therefore a=3$, $b=2$

따라서 입체도형의 부피는 정육면체의 부피에서 정사각뿔의 부피를 빼면 되므로

$3^3-\frac{1}{3}\times2^2\times3=23$

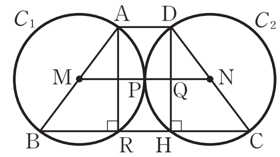
답 23

23 해결단계

❶ 단계	두 원의 반지름의 길이를 r이라 하고 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	l과 S를 r에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	r의 값을 구하여 $\overline{BD}^2$의 값을 구한다.

두 선분 AB, CD를 지름으로 하는 원을 각각 C_1, C_2라 하고, 두 선분 AB, DC의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 원 C_1, C_2의 중심이다.

이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 두 원 C_1, C_2는 반지름의 길이가 같다.



두 원 C_1, C_2가 오직 한 점에서 만나므로 이 점을 P라 하고 두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 R, H, 두 선분 MN과 DH의 교점을 Q라 하자.

점 P는 선분 MN의 중점이고 $\overline{AD}=\overline{RH}=4$이므로

$\overline{PQ}=2$

원의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\overline{QN}=r-2$이고,

$\triangle NDQ\backsim\triangle CDH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{HC}=2\overline{QN}=2r-4\qquad\therefore \overline{BR}=2r-4$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BR}+\overline{RH}+\overline{HC}=(2r-4)+4+(2r-4)$

$\quad=4r-4$

즉, 사각형 ABCD의 둘레의 길이 l은

$l=\overline{AD}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$

$\quad=4+2r+(4r-4)+2r=8r$

한편, $\triangle CDH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{HC}^2}=\sqrt{(2r)^2-(2r-4)^2}=\sqrt{16r-16}$

사각형 ABCD의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\{4+(4r-4)\}\times\sqrt{16r-16}$

$\quad=2r\sqrt{16r-16}$

이때 $S^2+8l=6720$이므로

$4r^2(16r-16)+8\times8r=6720$

$r^3-r^2+r-105=0$

$(r-5)(r^2+4r+21)=0$

$\therefore r=5$

따라서 직각삼각형 BHD에서

$\overline{BH}=\overline{BR}+\overline{RH}=(2r-4)+4=2r=10$,

$\overline{DH}=\sqrt{16r-16}=8$이므로

$\overline{BD}^2=\overline{BH}^2+\overline{DH}^2$

$\quad=10^2+8^2=164$

답 164

24 두 이차방정식 $x^2+px+q=0$, $x^2+qx+p=0$의 공통근을 k라 하면

$k^2+pk+q=0$ ……㉠, $k^2+qk+p=0$ ……㉡

㉠－㉡을 하면

$(p-q)k-(p-q)=0$

$(p-q)(k-1)=0\qquad\therefore k=1\ (\because p\neq q)$

주어진 두 이차방정식의 공통이 아닌 두 근의 비가 1 : 3이므로 한 근을 α라 하면 다른 한 근은 3α이다.

이때 α는 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 근, 3α는 이차방정식 $x^2+qx+p=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+1=-p$, $\alpha=q$ ……㉢

$3\alpha+1=-q$, $3\alpha=p$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $\alpha+1=-3\alpha$이므로

$4\alpha=-1\qquad\therefore \alpha=-\frac{1}{4}$

$3\alpha=p$, $\alpha=q$이므로 $p=-\frac{3}{4}$, $q=-\frac{1}{4}$

$\therefore 32(p^2-q^2)=32\times\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\right)=16$ 답 16

• 다른 풀이 •

*에서 주어진 두 이차방정식의 공통근이 $x=1$이므로 이것을 이차방정식 $x^2+px+q=0$에 대입하면

$1+p+q=0$

$\therefore q=-p-1$ ⋯⋯ⓜ

ⓜ을 두 이차방정식 $x^2+px+q=0$, $x^2+qx+p=0$에 대입하면

$x^2+px+q=0$에서 $x^2+px-p-1=0$

$(x-1)(x+p+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-p-1$

$x^2+qx+p=0$에서 $x^2-(p+1)x+p=0$

$(x-1)(x-p)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=p$

이때 주어진 두 이차방정식의 공통이 아닌 두 근의 비가 $1:3$이므로

$(-p-1):p=1:3$, $p=3(-p-1)$

$4p=-3$ $\therefore p=-\frac{3}{4}$

이것을 ⓜ에 대입하면

$q=-p-1=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$

$\therefore 32(p^2-q^2)=32\times\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\right)=16$

25 두 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$, $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0$ ⋯⋯㉠, $\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$, $(a-b)\alpha-\frac{a-b}{ab}=0$

$(a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$

$\therefore \alpha=\frac{1}{ab}$ ($\because a\neq b$) *

이때 $a+b=1$에서 $b=1-a$이므로

$\alpha=\frac{1}{a(1-a)}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{a^2(1-a)^2}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a}=0$

위의 식의 양변에 $a^2(1-a)^2$을 곱하면

$1+a^2(1-a)+a(1-a)^2=0$

$-a^2+a+1=0$

$\therefore a-a^2=-1$

$\therefore \alpha=\frac{1}{a-a^2}=\frac{1}{-1}=-1$ 답 −1

• 다른 풀이 1 •

*에서 $\alpha=\frac{1}{ab}$은 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$의 근이므로 이 식에 대입하면

$\frac{1}{(ab)^2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=0$, $\frac{1}{(ab)^2}+\frac{a+b}{ab}=0$

이때 $a+b=1$이므로

$\frac{1}{(ab)^2}+\frac{1}{ab}=0$, $1+ab=0$

$\therefore ab=-1$

$\therefore \alpha=\frac{1}{ab}=-1$

• 다른 풀이 2 •

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a\alpha^2+a^2\alpha+1=0$ ⋯⋯㉢

㉡의 양변에 b를 곱하면

$ab^2+\alpha^2b+1=0$ ⋯⋯㉣

㉢, ㉣에서 두 상수 a, b는 이차방정식 $\alpha x^2+\alpha^2x+1=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-\frac{\alpha^2}{\alpha}=-\alpha$

이때 $a+b=1$이므로 $-\alpha=1$

$\therefore \alpha=-1$

26 ㄱ. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$이고, 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$의 두 근의 곱도 $\frac{c}{a}$이므로 서로 같다. (참)

ㄴ. 두 이차방정식의 실수인 공통근을 $x=\alpha$라 하고 두 이차방정식에 각각 대입하면

$a\alpha^2-b\alpha+c=0$ ⋯⋯㉠

$a\alpha^2-2b\alpha+c=0$ ⋯⋯㉡

㉠−㉡을 하면

$b\alpha=0$

이때 $ac>0$에서 $c\neq0$이므로 주어진 두 이차방정식은 0을 근으로 갖지 않는다. 즉, $\alpha\neq0$이므로

$b=0$

㉠에서 $a\alpha^2+c=0$이므로 $\alpha^2=-\frac{c}{a}$

그런데 $ac>0$에서 a와 c는 같은 부호이므로

$\alpha^2<0$

즉, α가 실수라는 조건에 모순이다.

따라서 $ac>0$이면 두 이차방정식은 실수인 공통근을 갖지 않는다. (참)

ㄷ. (반례) $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$일 때 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$, 즉 $x^2-\sqrt{3}x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3-4=-1<0$

이므로 허근을 갖지만 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$,

즉 $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=3-1=2>0$

이므로 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

27 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=49$의 한 근이 2이므로

$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)(2-\delta)=49$

네 수 α, β, γ, δ는 서로 다른 정수이므로 $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$, $2-\delta$도 서로 다른 정수이다.

이때 49를 서로 다른 네 정수의 곱으로 나타내면

$49=(-1)\times1\times(-7)\times7$이므로 $2-\alpha$, $2-\beta$, $2-\gamma$, $2-\delta$는 각각 -1, 1, -7, 7 중에서 하나의 값을 갖는다.

$(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma)+(2-\delta)=-1+1-7+7$

$=0$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=8$ 답 ④

28 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{4+\sqrt{z}}$의 양변을 제곱하면

$x+y+2\sqrt{xy}=4+\sqrt{z}$, $x+y+\sqrt{4xy}=4+\sqrt{z}$

x, y, z는 양의 정수이고, $\sqrt{z}$는 무리수이므로

$x+y=4$, $z=4xy$

$x+y=4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$

그런데 $x=2$, $y=2$이면 $\sqrt{z}=4$이므로 $\sqrt{z}$가 무리수라는 조건에 모순이다.

$\therefore z=4\times1\times3=12$ 답 ③

29 $x^2+2mx+2m^2-2=0$에서

$x=-m\pm\sqrt{m^2-(2m^2-2)}$

$=-m\pm\sqrt{-m^2+2}$

이때 x가 정수이려면 $-m^2+2\geq0$이어야 하므로

$m^2\leq2$ $\quad\therefore -\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$

m은 정수이므로 조건을 만족시키는 정수 m의 값은

$m=-1$ 또는 $m=0$ 또는 $m=1$

(i) $m=-1$일 때,

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(ii) $m=0$일 때,

$x^2-2=0$ $\quad\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 x는 정수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $m=1$일 때,

$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 m은 -1, 1의 2개이다. 답 2

• 다른 풀이 •

x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2m$

$\therefore m=-\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\quad$ ……㉠

$\alpha\beta=2m^2-2$

$\therefore m^2=\frac{\alpha\beta+2}{2}$ $\quad$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha\beta+2}{2}$

$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}=\frac{\alpha\beta+2}{2}$

$\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}=1$ $\quad\therefore \alpha^2+\beta^2=4$

이 방정식을 만족시키는 정수 α, β는

$\begin{cases}\alpha=2\\\beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=-2\end{cases}$

(i) $\begin{cases}\alpha=2\\\beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=2\end{cases}$일 때,

㉠에 대입하면 $m=-1$

(ii) $\begin{cases}\alpha=-2\\\beta=0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=0\\\beta=-2\end{cases}$일 때,

㉠에 대입하면 $m=1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 m은 -1과 1의 2개이다.

30 방정식 $(x^2+y^2+x-3y-2)^2+(xy-2x+2y-7)^2=0$에서 x, y가 정수이므로

$x^2+y^2+x-3y-2=0$ $\quad$ ……㉠

$xy-2x+2y-7=0$ $\quad$ ……㉡

㉡에서 $xy-2x+2y-4=3$

$x(y-2)+2(y-2)=3$, $(x+2)(y-2)=3$

$x+2$, $y-2$는 정수이므로 $x+2$, $y-2$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$x+2$	-3	-1	1	3
$y-2$	-1	-3	3	1

즉, ㉡을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(-5, 1)$, $(-3, -1)$, $(-1, 5)$, $(1, 3)$이고, 이 중에서 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$이다.

$\therefore x+y=4$ 답 4

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.69~70

01 11	02 -100	03 17	04 252	05 -4
06 21	07 45	08 6	09 46	

10 x의 최댓값: $\frac{7}{3}$, $y=z=\frac{4}{3}$

11 갑: $200\sqrt{3}$ m/분, 을: $250\sqrt{3}$ m/분　　12 88

01 해결단계

❶ 단계	주어진 삼차방정식을 인수분해하여 세 실근을 1, α, β로 놓고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이임을 이용하여 경우를 나누고 그때의 삼각형의 넓이를 각각 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 경우를 찾아 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 계산한다.

$f(x)=x^3-3x^2+(k+2)x-k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & k+2 & -k \\ & & 1 & -2 & k \\ \hline & 1 & -2 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-2x+k)$

$f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2-2x+k=0$

방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 1, α, β $(\alpha>\beta)$라 하자.

α, β는 이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 두 실근이므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k>0$　　$\therefore k<1$　　……㉠

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k$　　……㉡

한편, 세 실근 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 피타고라스 정리를 만족시켜야 한다.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

피타고라스 정리에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=1$, $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$4-2k=1$ ($\because$ ㉡)　　$\therefore k=\frac{3}{2}$

그런데 $k>1$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 α인 경우

피타고라스 정리에 의하여

$\alpha^2=1+\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2=1$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=1$　　$\therefore \alpha-\beta=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉡)

이 식과 $\alpha+\beta=2$를 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{5}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}$　　$\therefore k=\frac{15}{16}$ ($\because$ ㉡)

즉, ㉠을 만족시키므로 이때의 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\beta=\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{3}{8}$이므로

$p=8$, $q=3$　　$\therefore p+q=11$　　답 11

02 해결단계

❶ 단계	$\alpha_k(k=1, 2, 3, \cdots, 100)$가 주어진 방정식의 근임을 이용하여 α_k^{100}을 α_k에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{100}$의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 것을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

방정식 $x^{100}-10x+1=0$의 근이 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_{100}이므로 $\alpha_k^{100}-10\alpha_k+1=0$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 100)$

$\therefore \alpha_k^{100}=10\alpha_k-1$

또한, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{100}=0$

$\therefore \alpha_1^{100}+\alpha_2^{100}+\alpha_3^{100}+\cdots+\alpha_{100}^{100}$

$=(10\alpha_1-1)+(10\alpha_2-1)+(10\alpha_3-1)+\cdots+(10\alpha_{100}-1)$

$=10(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{100})-100$

$=-100$　　답 -100

03 해결단계

❶ 단계	$a^3+b^3+c^3=3abc$를 이용하여 $a=b=c$임을 구한다.
❷ 단계	방정식 $x^2-x+1=0$을 이용하여 $x^3=-1$임을 구한다.
❸ 단계	$x^{2000}-x^{151}+18$의 값을 구한다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ ($\because a+b+c\neq0$)

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

그런데 a, b, c는 양의 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$　　$\therefore a=b=c$

즉,

$ax^2-bx+c=ax^2-ax+a=a(x^2-x+1)=0$

이므로 $x^2-x+1=0$ ($\because a>0$)

위의 식의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$, $x^3+1=0$

$x^3=-1$　　$\therefore x^6=1$

$\therefore x^{2000}-x^{151}+18=x^2(x^6)^{333}-x(x^6)^{25}+18$

$=x^2-x+18$

$=(x^2-x+1)+17$

$=17$ ($\because x^2-x+1=0$)　　답 17

04 해결단계

❶ 단계	아들이 1시간 동안 만드는 공예품의 개수를 y라 하고, 아버지가 1시간 동안 만드는 공예품의 개수를 구한다.
❷ 단계	x시간 동안 아버지와 아들이 만드는 공예품의 개수의 합이 360임을 이용하여 방정식을 세운다.
❸ 단계	아들 혼자 180개의 공예품을 만드는 데 $(x+3)$시간이 걸리는 것을 이용하여 방정식을 세운다.
❹ 단계	연립방정식을 풀어 x, y의 값을 각각 구한 후 아들이 180개의 공예품을 만드는 동안 아버지가 만들 수 있는 공예품의 개수를 구한다.

아들이 1시간 동안 만드는 공예품의 개수를 y라 하면 아버지가 1시간 동안 만드는 공예품의 개수는 $y+4$이다.
아들과 아버지가 x시간 동안 만드는 공예품의 개수는 각각 xy, $x(y+4)$이고 그 합이 360이므로
$xy+x(y+4)=360$
$\therefore xy+2x=180$ ······㉠
아들이 혼자 180개의 공예품을 만드는 데 걸리는 시간이 $(x+3)$시간이므로
$(x+3)y=180$
$\therefore xy+3y=180$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $xy+2x=xy+3y$이므로
$y=\frac{2}{3}x$
이것을 ㉠에 대입하면
$\frac{2}{3}x^2+2x=180$
$x^2+3x-270=0$
$(x+18)(x-15)=0$
$\therefore x=15\ (\because x>0),\ y=10$
따라서 아버지가 1시간 동안 만드는 공예품의 개수가 14이고, 아들이 혼자 180개의 공예품을 만드는 데 걸리는 시간은 18시간이므로 아버지가 18시간 동안 만들 수 있는 공예품의 개수는
$18\times14=252$ 답 252

05 해결단계

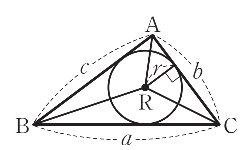
❶ 단계	$x^2=t$로 놓고 주어진 방정식을 푼다.
❷ 단계	주어진 방정식이 실근과 허근을 모두 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	주어진 방정식이 정수인 근을 갖도록 하는 a의 값의 합을 구한다.

$x^4+(1-2a)x^2+a^2-a-12=0$에서
$x^2=t$로 놓으면
$t^2+(1-2a)t+a^2-a-12=0$
$t^2+(1-2a)t+(a-4)(a+3)=0$
$(t-a+4)(t-a-3)=0$
즉, $(x^2-a+4)(x^2-a-3)=0$이므로
$x^2=a-4$ 또는 $x^2=a+3$
방정식 $x^2=a-4$는 $a-4\ge0$이면 실근을 갖고,
$a-4<0$이면 허근을 갖는다.
방정식 $x^2=a+3$은 $a+3\ge0$이면 실근을 갖고,
$a+3<0$이면 허근을 갖는다.
따라서 방정식 $x^4+(1-2a)x^2+a^2-a-12=0$이 실근과 허근을 모두 가지므로 $a+3\ge0$, $a-4<0$이어야 한다.
$\therefore -3\le a<4$ ······㉠
이때 방정식이 정수인 근을 가지려면 $x^2=a+3$에서 $a+3$이 제곱수이어야 하고, $0\le a+3<7$ ($\because$ ㉠)이므로 $a+3$의 값은 0 또는 1 또는 4이다.
$a+3=0$일 때, $a=-3$
$a+3=1$일 때, $a=-2$
$a+3=4$일 때, $a=1$
따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값이 -3, -2, 1이므로 구하는 합은
$-3+(-2)+1=-4$ 답 -4

06 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 인수분해한 후, $(a+1)(b+1)(c+1)$의 값을 구한다.
❷ 단계	a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이임을 이용하여 $a+b+c$의 값을 구한다.
❸ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 내접원의 반지름의 길이의 제곱을 구한다.

$ab+a+b=14$에서 $ab+a+b+1=15$
$\therefore (a+1)(b+1)=15$ ······㉠
$bc+b+c=29$에서 $bc+b+c+1=30$
$\therefore (b+1)(c+1)=30$ ······㉡
$ac+a+c=17$에서 $ac+a+c+1=18$
$\therefore (a+1)(c+1)=18$ ······㉢
㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면
$\{(a+1)(b+1)(c+1)\}^2=15\times30\times18=90^2$
$\therefore (a+1)(b+1)(c+1)=90$ ($\because$ a, b, c는 자연수)
이때 서로 다른 세 자연수 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 두 변의 길이의 합이 나머지 한 변의 길이보다 커야 한다.
즉, $a+1$, $b+1$, $c+1$은 각각 3, 5, 6 중에서 하나의 값을 가지므로
$(a+1)+(b+1)+(c+1)=3+5+6$
$\therefore a+b+c=11$
한편, 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 R이라 하면



$\triangle ABC$
$=\triangle ABR+\triangle BCR+\triangle CAR$
이고
$\triangle ABC=\frac{\sqrt{231}}{4}$이므로
$\frac{\sqrt{231}}{4}=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$
$\frac{\sqrt{231}}{4}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$
$\frac{\sqrt{231}}{4}=\frac{1}{2}r\times11\ (\because a+b+c=11)$
$\therefore r=\frac{\sqrt{231}}{22}$
따라서 $r^2=\left(\frac{\sqrt{231}}{22}\right)^2=\frac{21}{44}$이므로
$44r^2=21$ 답 21

07 해결단계

❶ 단계	계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이면 $1+\sqrt{2}i$도 근임을 이해하고, 나머지 한 근을 α라 한 후, 근과 계수의 관계를 이용한다.
❷ 단계	하나의 공통근을 갖기 위해서는 실근이 공통근이어야 함을 이해한 후, 공통근을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 공통근을 이용하여 a, b, c의 값을 구한 후, abc의 값을 계산한다.

세 실수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}i$이므로 $1+\sqrt{2}i$도 이 삼차방정식의 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)+\alpha=-a$

$\therefore a=-(2+\alpha)$ ……㉠

$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)\times\alpha+\alpha\times(1-\sqrt{2}i)=b$

$\therefore b=2\alpha+3$ ……㉡

$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)\alpha=-c \qquad \therefore c=-3\alpha$ ……㉢

그런데 주어진 두 방정식이 허근을 공통근으로 가지면 켤레복소수도 반드시 공통근이 되므로 2개의 공통근을 갖는다.

따라서 공통근은 α이므로 이차방정식 $x^2+ax+2=0$은 α를 근으로 갖는다.

$\therefore \alpha^2+a\alpha+2=0$ ……㉣

㉠을 ㉣에 대입하면 $\alpha^2-(2+\alpha)\alpha+2=0$

$-2\alpha+2=0 \qquad \therefore \alpha=1$

이것을 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$a=-3$, $b=5$, $c=-3$

$\therefore abc=45$

답 45

08 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식의 네 근이 $\pm\alpha$, $\pm\beta$ 꼴임을 파악한다.
❷ 단계	α, β의 관계를 이용하여 k의 값을 구한다.
❸ 단계	주어진 방정식의 네 근을 구하여 p, q의 값을 구한 후, $p+q$의 값을 계산한다.

$f(x)=x^4-3x^2+k$라 하고 사차방정식 $f(x)=0$의 한 근을 α라 하면

$f(-\alpha)=(-\alpha)^4-3(-\alpha)^2+k$

$=\alpha^4-3\alpha^2+k$

$=f(\alpha)$

즉, $x=-\alpha$도 사차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

사차방정식 $f(x)=0$의 네 근을 $\pm\alpha$, $\pm\beta$라 하고, $x^2=t$로 놓으면 이차방정식 $t^2-3t+k=0$의 두 근은 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=3$, $\alpha^2\beta^2=k$

또한, 사차방정식의 두 근의 합이 1이므로 $\alpha+\beta=1$이라 하면

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$에서

$1=3+2\alpha\beta \qquad \therefore \alpha\beta=-1$

즉, $k=(\alpha\beta)^2=1$이므로 $f(x)=x^4-3x^2+1$

이때

$x^4-3x^2+1=(x^4-2x^2+1)-x^2$

$=(x^2-1)^2-x^2$

$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$

이므로 $f(x)=0$에서

$x^2+x-1=0$ 또는 $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 차는

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$

이므로 $p=1$, $q=5$

$\therefore p+q=6$

답 6

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$\alpha+\beta=1$ 대신 $\alpha-\beta=1$ 또는 $-\alpha+\beta=1$ 또는 $-\alpha-\beta=1$로 놓고 계산해도 상관없다. α, β는 값이 정해지지 않은 수이므로 부호를 조정하면 결국 다른 세 등식으로 계산했을 때와 같은 결과를 얻게 된다.

09 해결단계

❶ 단계	주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.
❷ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 삼차방정식이 서로 다른 세 정수인 근을 갖도록 하는 조건을 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

$f(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & a & 2b & 4b & 8a \\ & & -2a & 4(a-b) & -8a \\ \hline & a & -2(a-b) & 4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{2(a-b)}{a}$, (두 근의 곱)$=\dfrac{4a}{a}=4$

곱이 4인 서로 다른 두 정수인 근은

$x=1$, $x=4$ 또는 $x=-1$, $x=-4$

(i) 두 근이 $x=1$, $x=4$일 때,

두 근의 합은 5이므로 $\dfrac{2(a-b)}{a}=5$

$\therefore 2b=-3a$

즉, 자연수 k에 대하여 $|a|=2k$, $|b|=3k$이고 a, b의 부호가 서로 반대이므로 $|a|\le50$, $|b|\le50$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, -3)$, $(4, -6)$, $(6, -9)$, $\cdots$, $(32, -48)$,

$(-2, 3)$, $(-4, 6)$, $(-6, 9)$, $\cdots$, $(-32, 48)$

의 32개이다.

(ii) 두 근이 $x=-1$, $x=-4$일 때,

두 근의 합은 -5이므로 $\dfrac{2(a-b)}{a}=-5$

$\therefore 2b=7a$

즉, 자연수 k'에 대하여 $|a|=2k'$, $|b|=7k'$이고 a, b의 부호가 같으므로 $|a|\le 50$, $|b|\le 50$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 7)$, $(4, 14)$, $(6, 21)$, $\cdots$, $(14, 49)$,

$(-2, -7)$, $(-4, -14)$, $(-6, -21)$, $\cdots$,

$(-14, -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$32+14=46$ 답 46

• 다른 풀이 •

삼차방정식 $ax^3+2bx^2+4bx+8a=0$의 서로 다른 세 정수근을 각각 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{2b}{a}$ ……㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{4b}{a}$ ……㉡

$\alpha\beta\gamma=-8$

α, β, γ가 서로 다른 세 정수이므로 $\alpha\beta\gamma=-8$을 만족시키는 순서쌍 (α, β, γ)는 $(-1, 1, 8)$, $(-4, 1, 2)$, $(-2, 1, 4)$, $(-1, 2, 4)$, $(-4, -2, -1)$

㉠에서

$-2(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{4b}{a}$

㉡을 위의 식에 대입하면

$-2(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

이를 만족시키는 경우는

$(-2, 1, 4)$, $(-4, -2, -1)$

(i) (α, β, γ)가 $(-2, 1, 4)$일 때,

㉠에서 $-\dfrac{2b}{a}=3$이므로

$2b=-3a$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, -3)$, $(4, -6)$, $(6, -9)$, $\cdots$, $(32, -48)$,

$(-2, 3)$, $(-4, 6)$, $(-6, 9)$, $\cdots$, $(-32, 48)$

의 32개이다.

(ii) (α, β, γ)가 $(-4, -2, -1)$일 때,

㉠에서 $-\dfrac{2b}{a}=-7$이므로

$2b=7a$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 7)$, $(4, 14)$, $(6, 21)$, $\cdots$, $(14, 49)$,

$(-2, -7)$, $(-4, -14)$, $(-6, -21)$, $\cdots$,

$(-14, -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$32+14=46$

10 해결단계

❶ 단계	주어진 두 방정식을 변형하여 y와 z에 대한 식을 구한다.
❷ 단계	y와 z를 두 근으로 하는 이차방정식을 구한다.
❸ 단계	y, z가 실수이므로 판별식을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❹ 단계	x의 최댓값을 구한 후, 이때의 y와 z의 값을 각각 구한다.

두 방정식 $x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=9$에서

$y+z=5-x$ ……㉠

$y^2+z^2=9-x^2$ ……㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$y^2+2yz+z^2=25-10x+x^2$

㉡을 위의 식에 대입하면

$9-x^2+2yz=25-10x+x^2$

$2yz=2x^2-10x+16$

$\therefore yz=x^2-5x+8$ ……㉢

㉠, ㉢에서 y, z를 두 근으로 하는 미지수가 t인 이차방정식은

$t^2-(5-x)t+(x^2-5x+8)=0$ ……㉣

이고, 이 방정식의 두 근인 y, z가 실수이므로 판별식을 D라 하면 $D=\{-(5-x)\}^2-4(x^2-5x+8)\ge 0$에서

$3x^2-10x+7\le 0$, $(x-1)(3x-7)\le 0$

$\therefore 1\le x\le \dfrac{7}{3}$

따라서 x의 최댓값은 $\dfrac{7}{3}$이고, 이때의 y와 z의 값은

$x=\dfrac{7}{3}$일 때의 방정식 ㉣의 두 근이다.

즉, $t^2-\dfrac{8}{3}t+\dfrac{16}{9}=0$이므로

$\left(t-\dfrac{4}{3}\right)^2=0$ $\therefore t=\dfrac{4}{3}$ (중근)

$\therefore y=z=\dfrac{4}{3}$ 답 x의 최댓값 : $\dfrac{7}{3}$, $y=z=\dfrac{4}{3}$

• 다른 풀이 •

$x+y+z=5$에서

$x=5-(y+z)$

$y+z=t$로 놓으면 $x=5-t$이고, x의 최댓값은 t, 즉 $y+z$가 최소일 때이다.

$x^2+y^2+z^2=9$에서

$x^2+(y+z)^2-2yz=9$

$(5-t)^2+t^2-2yz=9$

$\therefore yz=t^2-5t+8$

두 실수 y, z를 근으로 갖는 k에 대한 이차방정식은

$k^2-tk+t^2-5t+8=0$ ……㉤

이 이차방정식이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(-t)^2-4(t^2-5t+8)\ge 0$에서

$-3t^2+20t-32\ge 0$

$3t^2-20t+32\le 0$

$(3t-8)(t-4)\le 0$

$\therefore \dfrac{8}{3}\le t\le 4$

t의 최솟값이 $\frac{8}{3}$이므로 x의 최댓값은

$5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$

또한, $t=\frac{8}{3}$을 ⓜ에 대입하면

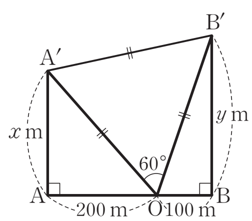
$k^2-\frac{8}{3}k+\frac{16}{9}=0$

$\left(k-\frac{4}{3}\right)^2=0 \qquad \therefore k=\frac{4}{3}$ (중근)

$\therefore y=z=\frac{4}{3}$

11 해결단계

❶ 단계	갑과 을이 40초 동안 달린 거리를 각각 x m, y m라 하고, $\overline{\mathrm{OA'}}$, $\overline{\mathrm{OB'}}$, $\overline{\mathrm{A'B'}}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{\mathrm{OA'}}=\overline{\mathrm{OB'}}=\overline{\mathrm{A'B'}}$임을 이해한 후, x, y에 대하여 정리한다.
❸ 단계	연립방정식을 풀어 x, y의 값을 구한 후, 갑과 을의 속력을 각각 구한다.



오른쪽 그림과 같이

$\overline{\mathrm{AA'}}=x$ m, $\overline{\mathrm{BB'}}=y$ m라

하면 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OA'}}=\sqrt{x^2+200^2}$ (m),

$\overline{\mathrm{OB'}}=\sqrt{y^2+100^2}$ (m),

$\overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(y-x)^2+300^2}$ (m)

이때 $\overline{\mathrm{OA'}}=\overline{\mathrm{OB'}}$, $\angle \mathrm{A'OB'}=60^\circ$이므로 $\triangle \mathrm{A'OB'}$은 정삼각형이다.

즉, $\overline{\mathrm{OA'}}=\overline{\mathrm{OB'}}=\overline{\mathrm{A'B'}}$이므로

$\sqrt{x^2+200^2}=\sqrt{y^2+100^2}=\sqrt{(y-x)^2+300^2}$

$\sqrt{x^2+200^2}=\sqrt{y^2+100^2}$ 의 양변을 제곱하면

$x^2+40000=y^2+10000$

$\therefore x^2-y^2+30000=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\sqrt{x^2+200^2}=\sqrt{(y-x)^2+300^2}$의 양변을 제곱하면

$x^2+40000=x^2-2xy+y^2+90000$

$\therefore y^2-2xy+50000=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠$\times 5-$㉡$\times 3$을 하면

$5x^2+6xy-8y^2=0$

$(x+2y)(5x-4y)=0$

$\therefore y=\frac{5}{4}x\ (\because x>0,\ y>0) \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2-\frac{25}{16}x^2+30000=0,\ \frac{9}{16}x^2=30000$

$x^2=\frac{160000}{3} \qquad \therefore x=\frac{400}{\sqrt{3}}\ (\because x>0)$

이것을 ㉢에 대입하면 $y=\frac{500}{\sqrt{3}}$

(속력)$=\frac{(거리)}{(시간)}$, 1분=60초, 40초$=\frac{2}{3}$분

따라서 갑의 속력은 $\frac{400}{\sqrt{3}}\div\frac{2}{3}=200\sqrt{3}$ (m/분)이고,

을의 속력은 $\frac{500}{\sqrt{3}}\div\frac{2}{3}=250\sqrt{3}$ (m/분)이다.

답 갑 : $200\sqrt{3}$ m/분, 을 : $250\sqrt{3}$ m/분

12 해결단계

❶ 단계	$(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$, $(\gamma+\delta)^2=\gamma\delta$를 이용하여 α, β를 근으로 갖는 이차방정식과 γ, δ를 근으로 갖는 이차방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 두 이차방정식의 좌변이 주어진 사차방정식의 좌변의 인수임을 이용하여 식을 세운다.
❸ 단계	항등식의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

$(\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$에서 $\alpha+\beta=t$로 놓으면 $\alpha\beta=t^2$

α, β는 x에 대한 이차방정식 $x^2-tx+t^2=0$의 두 근이다.

$(\gamma+\delta)^2=\gamma\delta$에서 $\gamma+\delta=s$로 놓으면 $\gamma\delta=s^2$

γ, δ는 x에 대한 이차방정식 $x^2-sx+s^2=0$의 두 근이다.

사차방정식 $x^4-px^3+114x^2-qx+49=0$의 서로 다른 네 근이 α, β, γ, δ이므로 사차식

$x^4-px^3+114x^2-qx+49$는 두 이차식 x^2-tx+t^2, x^2-sx+s^2으로 나누어떨어진다. 즉,

$x^4-px^3+114x^2-qx+49$

$=(x^2-tx+t^2)(x^2-sx+s^2)$

$=x^4-(t+s)x^3+(t^2+s^2+ts)x^2-ts(t+s)x+(ts)^2$

위의 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p=t+s$, $t^2+s^2+ts=114$, $q=ts(t+s)$, $t^2s^2=49$

이때 $\alpha+\beta>0$, $\gamma+\delta>0$에서 $t>0$, $s>0$이므로

$ts=7$

$t^2+s^2+ts=114$에서

$(t+s)^2-ts=114$

$(t+s)^2=114+7=121$

$\therefore t+s=11\ (\because t+s>0)$

따라서 $p=t+s=11$, $q=ts(t+s)=7\times 11=77$이므로

$p+q=88$

답 88

07. 여러 가지 부등식

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.73~75

01 ④	02 ⑤	03 ②	04 12	05 ①
06 ③	07 $a\le\frac{1}{2}$	08 1 cm 이상 2 cm 이하		
09 ③	10 ④	11 $a>\frac{3}{2}$	12 6	13 ②
14 ④	15 5	16 ③	17 ①	18 ④
19 ②	20 ⑤	21 ④		

01 ① (반례) $a=-2$, $b=1$이면

$a<b$이지만 $a^2>b^2$이다. (거짓)

② (반례) $a=-3$, $b=2$이면

$a<b$이지만 $|a|>|b|$이다. (거짓)

③ (반례) $a=-3$, $b=-2$, $c=-1$이면

$a<b<c$이지만 $ac>bc$이다. (거짓)

④ $0<a<b<c$이므로 $\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$

양변에 a를 곱하면 $\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$ (참)

⑤ (반례) $a=-2$, $b=2$, $c=-1$, $d=1$이면

$a<b$, $c<d$이지만 $ac=bd$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

02 $(2a-b)x+3a-2b<0$에서

$(2a-b)x<-3a+2b$ ……㉠

부등식 ㉠의 해가 $x<-3$이므로 $2a-b>0$ ……㉡

즉, $x<\frac{-3a+2b}{2a-b}$이므로 $\frac{-3a+2b}{2a-b}=-3$에서

$-3a+2b=-6a+3b$ $\quad\therefore b=3a$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $-a>0$ $\quad\therefore a<0$

㉢을 $(4a-b)x+a-2b<0$에 대입하면

$(4a-3a)x+a-6a<0$, $ax<5a$

$\therefore x>5$ ($\because a<0$)

답 ⑤

03 $|4x+2|-1\le k$에서 $|4x+2|\le k+1$

(i) $k+1<0$, 즉 $k<-1$일 때,

$|4x+2|<0$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k+1\ge0$, 즉 $k\ge-1$일 때,

$-k-1\le4x+2\le k+1$에서 $-k-3\le4x\le k-1$

$\therefore \frac{-k-3}{4}\le x\le\frac{k-1}{4}$ ……㉠

㉠은 $-2\le x\le1$과 같아야 하므로

$\frac{-k-3}{4}=-2$, $\frac{k-1}{4}=1$ $\quad\therefore k=5$

(i), (ii)에서 $k=5$

답 ②

04 $\overline{AP}=|x-4|$, $\overline{BP}=|x-8|$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=|x-4|+|x-8|$

$|x-4|+|x-8|\le10$에서

(i) $x<4$일 때,

$-(x-4)-(x-8)\le10$ $\quad\therefore x\ge1$

$\therefore 1\le x<4$

(ii) $4\le x<8$일 때,

$(x-4)-(x-8)\le10$

즉, $0\times x\le6$이므로 이 부등식은 $4\le x<8$인 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore 4\le x<8$

(iii) $x\ge8$일 때,

$(x-4)+(x-8)\le10$ $\quad\therefore x\le11$

$\therefore 8\le x\le11$

(i), (ii), (iii)에서 $1\le x\le11$이므로

$1\le\overline{OP}\le11$

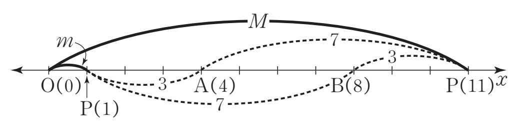
따라서 $M=11$, $m=1$이므로

$M+m=12$

답 12

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

주어진 조건을 만족시키는 점 P를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은 11, 최솟값은 1이다.

05 $x+5\ge2x-1$에서 $-x\ge-6$

$\therefore x\le6$ $\quad\therefore a=6$

$\frac{3x-2}{2}>x+1$에서 $3x-2>2x+2$

$\therefore x>4$ $\quad\therefore b=4$

$a=6$, $b=4$를 주어진 연립부등식에 대입하면

$\begin{cases} 6x-4<0 & \cdots\cdots㉠ \\ 4x+6\ge0 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6x<4$ $\quad\therefore x<\frac{2}{3}$

㉡에서 $4x\ge-6$ $\quad\therefore x\ge-\frac{3}{2}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-\frac{3}{2}\le x<\frac{2}{3}$

답 ①

06 (i) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}<x-\frac{3a+2}{4}$에서

$-\frac{1}{2}x<-\frac{3a+3}{4}$ $\quad\therefore x>\frac{3a+3}{2}$

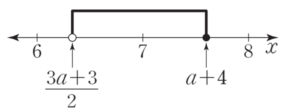
(ii) $x-\dfrac{3a+2}{4}\le\dfrac{3}{4}x-\dfrac{a-1}{2}$에서

$\dfrac{1}{4}x\le\dfrac{a+4}{4}\qquad\therefore\ x\le a+4$

$\dfrac{3a+3}{2}\ge a+4$, 즉 $a\ge5$일 때 주어진 부등식의 해는 없으므로 $\dfrac{3a+3}{2}<a+4$, 즉 $a<5$이어야 한다.

(i), (ii)에서 $\dfrac{3a+3}{2}<x\le a+4\ (a<5)$

이를 만족시키는 정수 x의 값이 7뿐이므로



$6\le\dfrac{3a+3}{2}<7$,

$7\le a+4<8$을 만족시켜야 한다.

$6\le\dfrac{3a+3}{2}<7$에서 $12\le3a+3<14$

$9\le3a<11\qquad\therefore\ 3\le a<\dfrac{11}{3}\qquad$ ……㉠

$7\le a+4<8$에서 $3\le a<4\qquad$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3\le a<\dfrac{11}{3}$

답 ③

07 $3(x-2)-1<5(x-3)$에서

$3x-6-1<5x-15,\ 2x>8$

$\therefore\ x>4\qquad$ ……㉠

$ax-1\ge x-3$에서 $(a-1)x\ge-2\qquad$ ……㉡

(i) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때,

㉡의 양변을 $a-1$로 나누면

$x\le-\dfrac{2}{a-1}$

이때 $-\dfrac{2}{a-1}>0$이므로 위의 부등식과 ㉠을 동시에 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으려면

$-\dfrac{2}{a-1}\le4$

$a-1<0$이므로 위의 부등식의 양변에 $a-1$을 곱하면

$4(a-1)\le-2,\ 4a\le2\qquad\therefore\ a\le\dfrac{1}{2}$

(ii) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,

이것을 부등식 ㉡에 대입하면 $0\times x\ge-2$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

즉, 연립부등식의 해가 존재하므로 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때,

㉡의 양변을 $a-1$로 나누면

$x\ge-\dfrac{2}{a-1}$

이때 $-\dfrac{2}{a-1}<0$이므로 위의 부등식과 ㉠을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

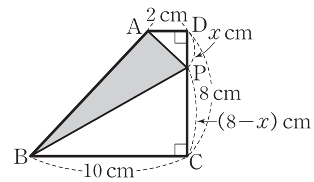
$x>4$

즉, 연립부등식의 해가 존재하므로 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a\le\dfrac{1}{2}$

답 $a\le\dfrac{1}{2}$

08 □ABCD



$=\dfrac{1}{2}\times(2+10)\times8$

$=48(\text{cm}^2)$

$\overline{\text{DP}}=x$ cm라 하면

$\overline{\text{CP}}=(8-x)$ cm이므로

$\triangle\text{ABP}=48-\left\{\dfrac{1}{2}\times2\times x+\dfrac{1}{2}\times10\times(8-x)\right\}$

$=48-(-4x+40)$

$=4x+8(\text{cm}^2)$

삼각형 ABP의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$ 이상 $\dfrac{1}{3}$ 이하이므로

$48\times\dfrac{1}{4}\le4x+8\le48\times\dfrac{1}{3}$

$12\le4x+8\le16,\ 4\le4x\le8$

$\therefore\ 1\le x\le2$

따라서 선분 DP의 길이는 1 cm 이상 2 cm 이하이다.

답 1 cm 이상 2 cm 이하

09 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$은 x^2의 계수가 a이고, 해가 $x=3$뿐이므로 $a(x-3)^2\ge0\ (a<0)$과 같다.

즉, $ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$이므로

$b=-6a,\ c=9a$

이것을 $bx^2+cx+6a<0$에 대입하면

$-6ax^2+9ax+6a<0$

이때 $a<0$이므로 $2x^2-3x-2<0$ $\quad -a>0$

$(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<x<2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 0, 1의 2개이다.

답 ③

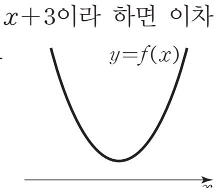
10 부등식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

(i) $m=2$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $m\ne2$일 때,

$f(x)=(m-2)x^2-2(m-2)x+3$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $m>2$이고, 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-3(m-2)<0$에서

$(m-2)(m-5)<0\qquad\therefore\ 2<m<5$

(i), (ii)에서 $2\le m<5$

답 ④

11 $a(2x^2+1) \le (x-1)^2$에서

$2ax^2+a \le x^2-2x+1$

$\therefore (2a-1)x^2+2x+a-1 \le 0$ ······㉠

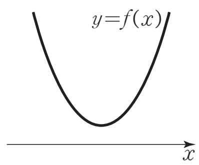
이때 $2a-1=0$, 즉 $a=\frac{1}{2}$이면

$2x-\frac{1}{2} \le 0$에서 $x \le \frac{1}{4}$

즉, 부등식 ㉠의 해가 존재하므로 $a \ne \frac{1}{2}$

따라서 부등식 ㉠의 해가 존재하지 않으려면

$f(x)=(2a-1)x^2+2x+a-1$이라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $2a-1>0$에서 $a>\frac{1}{2}$

(ii) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-(2a-1)(a-1)<0$에서

$2a^2-3a>0$, $a(2a-3)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a>\frac{3}{2}$ 답 $a>\frac{3}{2}$

12 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하고 x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로 이차부등식 $f(x) \le 0$의 해는 $1 \le x \le 3$

또한, 이차부등식 $a(x-1)^2+b(x+1)-2b+c \le 0$에서

$a(x-1)^2+b(x-1)+c \le 0$

$x-1=t$로 놓으면

$at^2+bt+c \le 0$

즉, 부등식 $f(t) \le 0$과 같으므로 주어진 그래프에서

$1 \le t \le 3$

이때 $t=x-1$이므로

$1 \le x-1 \le 3$ $\therefore 2 \le x \le 4$

따라서 x의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은

$4+2=6$ 답 6

• 다른 풀이 •

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하고, x축과 만나는 점의 x좌표가 1, 3이므로

$f(x)=a(x-1)(x-3)=ax^2-4ax+3a$ (단, $a>0$)

라 할 수 있다.

$f(x)=ax^2+bx+c$이므로

$b=-4a$, $c=3a$ ······㉠

㉠을 이차부등식 $a(x-1)^2+b(x+1)-2b+c \le 0$에 대입하면

$a(x-1)^2-4a(x+1)+8a+3a \le 0$

$\therefore ax^2-6ax+8a \le 0$

이때 $a>0$이므로 위의 부등식의 양변을 a로 나누면

$x^2-6x+8 \le 0$, $(x-2)(x-4) \le 0$

$\therefore 2 \le x \le 4$

따라서 x의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은

$4+2=6$

13 $x^2+|x|-6 \le 0$에서

(i) $x<0$일 때, $x^2-x-6 \le 0$

$(x+2)(x-3) \le 0$ $\therefore -2 \le x \le 3$

그런데 $x<0$이므로 $-2 \le x<0$

(ii) $x \ge 0$일 때, $x^2+x-6 \le 0$

$(x+3)(x-2) \le 0$ $\therefore -3 \le x \le 2$

그런데 $x \ge 0$이므로 $0 \le x \le 2$

(i), (ii)에서 $-2 \le x \le 2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$|x|^2=x^2$이므로 $x^2+|x|-6 \le 0$에서

$|x|^2+|x|-6 \le 0$, $(|x|+3)(|x|-2) \le 0$

$\therefore 0 \le |x| \le 2$ ($\because |x| \ge 0$)

$\therefore -2 \le x \le 2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

14 $2[x]^2+[x]-3<0$에서

$(2[x]+3)([x]-1)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<[x]<1$

그런데 $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=-1, 0$

(i) $[x]=-1$일 때, $-1 \le x<0$

(ii) $[x]=0$일 때, $0 \le x<1$

(i), (ii)에서 $-1 \le x<1$ 답 ④

15 땅 전체의 넓이는

$20 \times 30=600(\mathrm{m}^2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{2}x$ m인 직각이등변삼각형의 나머지 두 변의 길이는 x m이므로 통행로와 광장의 넓이는

$20x+30x-x^2+4 \times \frac{1}{2}x^2=x^2+50x(\mathrm{m}^2)$

이때 통행로와 광장을 제외한 땅의 넓이가 $325\ \mathrm{m}^2$ 이상이어야 하므로

$600-(x^2+50x) \ge 325$

$x^2+50x-275 \le 0$, $(x+55)(x-5) \le 0$

$-55 \le x \le 5$ $\therefore 0<x \le 5$ ($\because x>0$)

따라서 x의 최댓값은 5이다. 답 5

16 (i) $x^2-3x-18\le0$에서 $(x+3)(x-6)\le0$

$\therefore -3\le x\le6$

그런데 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-18\le0 \\ x^2+ax+b\le0 \end{cases}$의 해가

$3\le x\le6$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근 중에서 작은 근은 3이다.

(ii) $x^2-12x+32<0$에서 $(x-4)(x-8)<0$

$\therefore 4<x<8$

그런데 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ x^2-12x+32<0 \end{cases}$의 해가

$4<x<7$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근 중에서 큰 근은 7이다.

(i), (ii)에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 3, 7이므로

$x^2+ax+b=(x-3)(x-7)=x^2-10x+21$

따라서 $a=-10$, $b=21$이므로

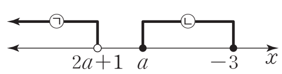
$a+b=11$ 답 ③

17 $2x-1<x+2a$에서 $x<2a+1$ ······㉠

$x^2-(a-3)x-3a\le0$에서

$(x+3)(x-a)\le0$ ······㉡

(i) $a<-3$일 때,



부등식 ㉡의 해는

$a\le x\le-3$이고, ㉠과

공통부분이 없어야 하므로

$2a+1\le a$ $\quad\therefore a\le-1$

그런데 $a<-3$이므로 $a<-3$

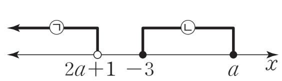
(ii) $a=-3$일 때,

㉡에서 $(x+3)^2\le0$이므로 $x=-3$이고,

㉠에서 $x<-5$이므로 ㉠, ㉡은

공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.

(iii) $a>-3$일 때,



부등식 ㉡의 해는

$-3\le x\le a$이고, ㉠과

공통부분이 없어야 하므로

$2a+1\le-3$, $2a\le-4$ $\quad\therefore a\le-2$

그런데 $a>-3$이므로 $-3<a\le-2$

(i), (ii), (iii)에서 $a\le-2$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ①

18 삼각형의 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$x+2<x+(x+1)$ $\quad\therefore x>1$ ······㉠

또한, 둔각삼각형이 되기 위해서는 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$ ($\because x>0$) ······㉡

㉠, ㉡에서 $1<x<3$ 답 ④

19 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2+4k+a=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k-1)\}^2-(2k^2+4k+a)<0$

$k^2+6k+a-1>0$

이때 이차부등식 $k^2+6k+a-1>0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$k^2+6k+a-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=3^2-(a-1)<0$

$10-a<0$ $\quad\therefore a>10$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 최솟값은 11이다.

답 ②

20 이차방정식 $3x^2+kx+2=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로

$D=k^2-4\times3\times2\ge0$, $k^2\ge24$

$\therefore k\le-2\sqrt{6}$ 또는 $k\ge2\sqrt{6}$ ······㉠

두 근이 모두 음수이므로

(두 근의 합)$=-\frac{k}{3}<0$ $\quad\therefore k>0$ ······㉡

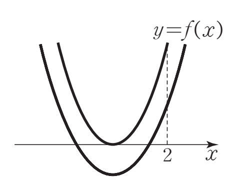
(두 근의 곱)$=\frac{2}{3}>0$

㉠, ㉡에서 $k\ge2\sqrt{6}$ 답 ⑤

21 이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$에서

$f(x)=x^2-2x+k+2$라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 작으려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+2)\ge0$

$-k-1\ge0$ $\quad\therefore k\le-1$

(ii) $f(2)>0$에서 $4-4+k+2>0$

$\therefore k>-2$

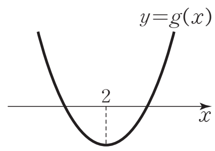
(iii) $f(x)=x^2-2x+k+2=(x-1)^2+k+1$에서 꼭짓점의 x좌표가 1이므로 2보다 작다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-2<k\le-1$ ……㉠

또한, 이차방정식 $x^2-(k+2)x-3=0$에서

$g(x)=x^2-(k+2)x-3$이라 하자.

이차방정식 $g(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있어야 하므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $g(2)<0$이므로

$4-2(k+2)-3<0$

$-2k-3<0 \quad \therefore k>-\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}<k\le-1$ **답** ④

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.76~82

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 $\frac{6}{5}<x\le\frac{15}{11}$	
05 ①	06 2	07 150	08 ③	09 ④
10 $a>-2$	11 $x<a$ 또는 $x>b$		12 9	13 ⑤
14 4	15 ①	16 14	17 ②	18 ④
19 $-3\le m<2$		20 ①	21 9	22 ④
23 ③	24 5	25 2	26 15	27 1
28 ④	29 $a\le x\le b$	30 ②	31 8	32 13
33 $3+\sqrt{3}$	34 $\frac{1}{2}\le a\le1$		35 ②	36 15
37 5	38 12	39 ①	40 ③	41 ②
42 ①				

01 $ax+1>bx+3$에서 $(a-b)x>2$ ……㉠

① $a>b$, 즉 $a-b>0$이면 ㉠에서 $x>\frac{2}{a-b}$

② $a<b$, 즉 $a-b<0$이면 ㉠에서 $x<\frac{2}{a-b}$

③ $a=0$, $b>0$이면
㉠에서 $-bx>2$

$bx<-2 \quad \therefore x<-\frac{2}{b}$ ($\because b>0$)

④ $a<0$, $b=0$이면

㉠에서 $ax>2 \quad \therefore x<\frac{2}{a}$ ($\because a<0$)

⑤ $a=b$, 즉 $a-b=0$이면
㉠에서 $0\times x>2$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

따라서 주어진 부등식에 대한 설명으로 옳지 않은 것은 ②이다. **답** ②

02 $\left|\left[\frac{x}{3}-1\right]-2\right|<1$에서 $-1<\left[\frac{x}{3}-1\right]-2<1$이므로

$1<\left[\frac{x}{3}-1\right]<3$

이때 $\left[\frac{x}{3}-1\right]$의 값은 정수이므로

$\left[\frac{x}{3}-1\right]=2$

즉, $2\le\frac{x}{3}-1<3$이므로

$3\le\frac{x}{3}<4 \quad \therefore 9\le x<12$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 9, 10, 11이므로 그 합은

$9+10+11=30$ **답** ⑤

03 $|x|+|x-a|<b$에서 a, b는 양수이므로

(ⅰ) $x<0$일 때,
$-x-(x-a)<b$, $-2x<-a+b$
$\therefore x>\frac{a-b}{2}$
그런데 $x<0$이므로 $\frac{a-b}{2}<x<0$ ($\because a<b$)

(ⅱ) $0\le x<a$일 때,
$x-(x-a)<b$
$0\times x<-a+b$에서 $-a+b>0$이므로 이 부등식은 $0\le x<a$인 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
$\therefore 0\le x<a$

(ⅲ) $x\ge a$일 때,
$x+(x-a)<b$, $2x<a+b$
$\therefore x<\frac{a+b}{2}$
그런데 $x\ge a$이므로 $a\le x<\frac{a+b}{2}$ ($\because a<b$)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$

ㄱ. $f(2,\ 3)$은 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$를 만족시키는 정수 x의 개수이다.
따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2의 3개이므로 $f(2,\ 3)=3$ (참)

ㄴ. $f(n,\ n+2)$는 $\frac{n-(n+2)}{2}<x<\frac{n+(n+2)}{2}$, 즉 $-1<x<n+1$을 만족시키는 정수 x의 개수이다.
따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, …, n의 $(n+1)$개이므로
$f(n,\ n+2)=n+1$ (참)

ㄷ. $f(n+2,\ n+4)$는
$\frac{(n+2)-(n+4)}{2}<x<\frac{(n+2)+(n+4)}{2}$, 즉
$-1<x<n+3$을 만족시키는 정수 x의 개수이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, $\cdots$, $n+2$의 $(n+3)$개이므로

$f(n+2,\ n+4)=n+3$

$\therefore f(n,\ n+2)\neq f(n+2,\ n+4)$ ($\because$ ㄴ) (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

04

$2x+3y=3$에서 $3y=3-2x$

$\therefore y=\dfrac{3-2x}{3}$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$3(x-1)\leq\dfrac{3-2x}{3}+1<x$

(i) $3(x-1)\leq\dfrac{3-2x}{3}+1$에서 $9(x-1)\leq3-2x+3$

$11x\leq15 \qquad \therefore x\leq\dfrac{15}{11}$

(ii) $\dfrac{3-2x}{3}+1<x$에서 $3-2x+3<3x$

$-5x<-6 \qquad \therefore x>\dfrac{6}{5}$

(i), (ii)에서 $\dfrac{6}{5}<x\leq\dfrac{15}{11}$ 답 $\dfrac{6}{5}<x\leq\dfrac{15}{11}$

05

$ax-2a<x-2$에서 $(a-1)x<2(a-1)$ ……㉠

$ax-5a\leq x+5$에서 $(a-1)x\leq5a+5$ ……㉡

(i) $a<1$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $x>2$

부등식 ㉡의 해는 $x\geq\dfrac{5a+5}{a-1}$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x\geq3$이려면

$\dfrac{5a+5}{a-1}=3$이어야 하므로

$5a+5=3a-3$

$2a=-8 \qquad \therefore a=-4$

(ii) $a=1$일 때,

㉠에서 $0\times x<0$이므로 주어진 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a>1$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $x<2$

부등식 ㉡의 해는 $x\leq\dfrac{5a+5}{a-1}$이므로

주어진 연립부등식의 해가 $x\geq3$일 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 -4이다.

답 ①

06

$\dfrac{x}{3}-\dfrac{1-a}{6}<\dfrac{x}{2}-\dfrac{a}{6}$에서

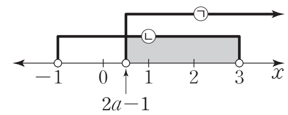
$2x-1+a<3x-a$

$\therefore x>2a-1$ ……㉠

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x가 2개이려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $0\leq2a-1<1$에서 $1\leq2a<2$

$\therefore \dfrac{1}{2}\leq a<1$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=1$이므로

$4p^2+q^2=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2=2$ 답 2

07

$\left[\dfrac{1}{4}x-1\right]=1$에서 $1\leq\dfrac{1}{4}x-1<2$

$2\leq\dfrac{1}{4}x<3 \qquad \therefore 8\leq x<12$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 8, 9, 10, 11이다.

(i) $\dfrac{5-2x}{3}\leq\dfrac{x+2}{4}-6$에서 $4(5-2x)\leq3(x+2)-72$

$11x\geq86 \qquad \therefore x\geq\dfrac{86}{11}$

(ii) $-2(x-21)\geq\dfrac{a-x}{2}$에서 $-4(x-21)\geq a-x$

$3x\leq84-a \qquad \therefore x\leq\dfrac{84-a}{3}$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해가 존재해야 하므로

$\dfrac{86}{11}\leq x\leq\dfrac{84-a}{3}$

이때 위의 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값이 8, 9, 10, 11이어야 하므로

$11\leq\dfrac{84-a}{3}<12$, $33\leq84-a<36$

$\therefore 48<a\leq51$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 49, 50, 51이므로 그 합은

$49+50+51=150$ 답 150

08

$(x-a)(x+2a-4)<-16$에서

$x^2+(a-4)x-2a^2+4a+16<0$

위의 부등식을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않아야 하므로 x에 대한 이차방정식

$x^2+(a-4)x-2a^2+4a+16=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-4)^2-4(-2a^2+4a+16)\leq0$에서

$9a^2-24a-48\leq0$, $3a^2-8a-16\leq0$

$(3a+4)(a-4)\leq0$

$\therefore -\dfrac{4}{3}\leq a\leq4$

따라서 $M=4$, $m=-\frac{4}{3}$이므로

$4M+3m=4\times4+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=12$ **답** ③

09

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $-3<x<2$이므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a>0)$라 하면

$f(-x+100)=a(-x+103)(-x+98)$

$f(-x+100)<0$에서 $a(-x+103)(-x+98)<0$

$(x-103)(x-98)<0$ $(\because a>0)$

$\therefore 98<x<103$

따라서 해 중에서 가장 큰 자연수는 102이다. **답** ④

• 다른 풀이 •

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $-3<x<2$이므로 부등식 $f(-x+100)<0$의 해는 $-3<-x+100<2$에서

$-103<-x<-98$ $\quad\therefore 98<x<103$

10

$a(x^2+x+1)>2x$에서 $ax^2+(a-2)x+a>0$

$f(x)=ax^2+(a-2)x+a$라 하면

(i) $a<0$일 때,

부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x가 존재하기 위해서는 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4a^2>0$에서

$3a^2+4a-4<0$, $(a+2)(3a-2)<0$

$\therefore -2<a<\frac{2}{3}$

그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(ii) $a=0$일 때,

$f(x)=-2x$이므로 부등식 $f(x)>0$, 즉 $-2x>0$을 만족시키는 실수 x는 $x<0$일 때 존재한다.

(iii) $a>0$일 때,

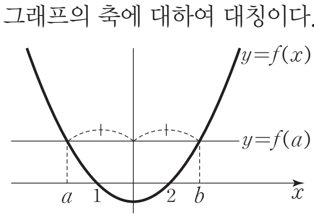
부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 실수 x는 항상 존재한다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 상수 a의 값의 범위는

$a>-2$ **답** $a>-2$

11

$f(x)=(x-1)(x-2)$라 하면 등식 $(a-1)(a-2)=(b-1)(b-2)$에서 $f(a)=f(b)$이므로 다음 그림과 같이 두 실수 a, b $(a<b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축에 대하여 대칭이다.



따라서 부등식 $(x-1)(x-2)>(a-1)(a-2)$, 즉 $f(x)>f(a)$의 해는

$x<a$ 또는 $x>b$ $(\because a<b)$ **답** $x<a$ 또는 $x>b$

• 다른 풀이 •

$h(x)=(x-1)(x-2)-(a-1)(a-2)$라 하자.

$(a-1)(a-2)=(b-1)(b-2)$이므로

$h(a)=h(b)=0$

$h(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$h(x)=(x-a)(x-b)$

$(x-1)(x-2)>(a-1)(a-2)$에서

$(x-1)(x-2)-(a-1)(a-2)>0$

부등식 $h(x)>0$, 즉 $(x-a)(x-b)>0$의 해는

$x<a$ 또는 $x>b$ $(\because a<b)$

12

이차방정식 $x^2+2ax+2a^2-b^2+4b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-(2a^2-b^2+4b)=0$

$-a^2+b^2-4b=0$ $\quad\therefore a^2=b^2-4b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

a가 실수이므로 $a^2\ge0$에서 $b^2-4b\ge0$

$b(b-4)\ge0$ $\quad\therefore b\le0$ 또는 $b\ge4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편, $f(x)=x^3+ax^2+(b-2a^2)x-ab$라 하면

$f(a)=a^3+a^3+ab-2a^3-ab=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & a & b-2a^2 & -ab \\ & & a & 2a^2 & ab \\ \hline & 1 & 2a & b & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-a)(x^2+2ax+b)$

$f(x)=0$에서 $x=a$ 또는 $x^2+2ax+b=0$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 허근과 실근을 모두 가져야 하고 $x=a$는 실근이므로 이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2-b<0$

㉠을 위의 부등식에 대입하면 $b^2-4b-b<0$

$b^2-5b<0$, $b(b-5)<0$ $\quad\therefore 0<b<5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $4\le b<5$

따라서 $p=4$, $q=5$이므로

$p+q=9$ **답** 9

13

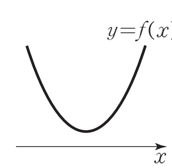
모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-kx+2>0$이 성립하려면

(i) $k=0$일 때, $2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\ne0$일 때,

$f(x)=kx^2-kx+2$라 하면

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $k>0$이고 이차방정식

$kx^2-kx+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-k)^2-8k<0$에서

$k(k-8)<0 \quad \therefore 0<k<8$

(i), (ii)에서 $0 \le k<8$ ……㉠

또한, 부등식 $(k+3)x^2-kx+1<0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으려면

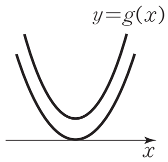
(iii) $k+3=0$, 즉 $k=-3$일 때,

$3x+1<0$에서 $x<-\frac{1}{3}$

즉, 부등식을 만족시키는 실수 x가 존재한다.

(iv) $k+3 \ne 0$, 즉 $k \ne -3$일 때,

$g(x)=(k+3)x^2-kx+1$이라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $k+3>0$에서 $k>-3$이고, 이차방정식 $(k+3)x^2-kx+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-k)^2-4(k+3) \le 0$에서

$k^2-4k-12 \le 0$, $(k+2)(k-6) \le 0$

$\therefore -2 \le k \le 6$

이때 $k>-3$이므로 $-2 \le k \le 6$

(iii), (iv)에서 $-2 \le k \le 6$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0 \le k \le 6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 0, 1, 2, …, 6의 7개이다. 답 ⑤

14

주어진 부등식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(2y+a)x+y^2+4y+b \ge 0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2+(2y+a)x+y^2+4y+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2y+a)^2-4(y^2+4y+b) \le 0$

$\therefore 4(a-4)y \le 4b-a^2$ ……㉠

이때 부등식 ㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립해야 하므로

$a-4=0$, $4b-a^2 \ge 0 \quad \therefore a=4, b \ge 4$

따라서 구하는 상수 b의 최솟값은 4이다. 답 4

15

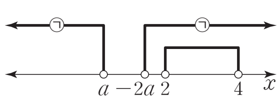
$x^2+ax>2a^2$에서 $x^2+ax-2a^2>0$

$\therefore (x+2a)(x-a)>0$ ……㉠

$2<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하기 위해서는 $2<x<4$가 부등식 ㉠의 해의 범위에 포함되어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $x<a$ 또는 $x>-2a$이므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.

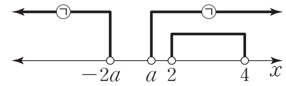


$-2a \le 2 \quad \therefore a \ge -1$

그런데 $a<0$이므로 $-1 \le a<0$

(ii) $a \ge 0$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $x<-2a$ 또는 $x>a$이므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore a \le 2$

그런데 $a \ge 0$이므로 $0 \le a \le 2$

(i), (ii)에서 $-1 \le a \le 2$

따라서 a의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은 1이다. 답 ①

16

$x^2-2x-3<3|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때,

$x^2-2x-3<-3(x-1)$, $x^2+x-6<0$

$(x+3)(x-2)<0 \quad \therefore -3<x<2$

그런데 $x<1$이므로 $-3<x<1$

(ii) $x \ge 1$일 때,

$x^2-2x-3<3(x-1)$, $x^2-5x<0$

$x(x-5)<0 \quad \therefore 0<x<5$

그런데 $x \ge 1$이므로 $1 \le x<5$

(i), (ii)에서 $-3<x<5$ ……㉠

이때 이차부등식 $ax^2+2x+b>0$은 x^2의 계수가 a이고, 해가 ㉠과 같아야 하므로 $a(x+3)(x-5)>0$ $(a<0)$과 같다.

즉, $ax^2+2x+b=ax^2-2ax-15a$이므로

$2=-2a$, $b=-15a$

따라서 $a=-1$, $b=15$이므로

$a+b=14$ 답 14

17

$(|x|-1)(x-3)>2$에서

(i) $x<0$일 때,

$(-x-1)(x-3)>2$, $x^2-2x-1<0$

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 근이 $x=1 \pm \sqrt{2}$이므로

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

그런데 $x<0$이므로 $1-\sqrt{2}<x<0$

(ii) $x \ge 0$일 때,

$(x-1)(x-3)>2$, $x^2-4x+1>0$

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 근이 $x=2 \pm \sqrt{3}$이므로

$x<2-\sqrt{3}$ 또는 $x>2+\sqrt{3}$

그런데 $x \ge 0$이므로

$0 \le x<2-\sqrt{3}$ 또는 $x>2+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $1-\sqrt{2}<x<2-\sqrt{3}$ 또는 $x>2+\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=2-\sqrt{3}$, $\gamma=2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=5-\sqrt{2}$ 답 ②

18 $[x]=n$ (n은 정수)이라 하면

$n\le x<n+1$ ⋯⋯㉠

$n-1\le x-1<n$이므로

$[x-1]=n-1$

$[x-1]^2+3[x]-3<0$에서

$(n-1)^2+3n-3<0$, $n^2+n-2<0$

$(n+2)(n-1)<0$

$\therefore\ -2<n<1$

이때 n은 정수이므로 $n=-1$ 또는 $n=0$

(i) $n=-1$일 때,

㉠에서 $-1\le x<0$

(ii) $n=0$일 때,

㉠에서 $0\le x<1$

(i), (ii)에서 $-1\le x<1$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$[x-1]$, $[x]$의 값은 모두 정수이므로

$[x-1]=[x]-1$

$$[x-1]^2+3[x]-3=([x]-1)^2+3([x]-1)$$
$$=([x]-1)([x]+2)<0$$

이므로 $-2<[x]<1$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=-1$ 또는 $[x]=0$

$\therefore\ -1\le x<1$

19 함수 $y=(m+3)x^2+2x$의 그래프가 함수 $y=2(m+4)x-5$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로

$(m+3)x^2+2x>2(m+4)x-5$에서

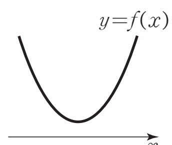
$(m+3)x^2-2(m+3)x+5>0$

(i) $m+3=0$, 즉 $m=-3$일 때,

$5>0$이므로 위의 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $m+3\ne 0$, 즉 $m\ne -3$일 때,

$f(x)=(m+3)x^2-2(m+3)x+5$라 하면 부등식 $f(x)>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, $m+3>0$이고, 이차방정식 $(m+3)x^2-2(m+3)x+5=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=\{-(m+3)\}^2-5(m+3)<0$

$m^2+m-6<0$, $(m+3)(m-2)<0$

$\therefore\ -3<m<2$

(i), (ii)에서 $-3\le m<2$ 답 $-3\le m<2$

20 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 항상 크거나 같아야 한다.

$f(x)=x^2-mx+4m=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+4m$,

$g(x)=-x^2+3x+3m-3=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3m-\frac{3}{4}$

이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{m^2}{4}+4m$, 함수 $g(x)$의 최댓값은 $3m-\frac{3}{4}$

즉, $-\frac{m^2}{4}+4m\ge 3m-\frac{3}{4}$에서

$\frac{m^2}{4}-m-\frac{3}{4}\le 0$, $m^2-4m-3\le 0$

$(m-2+\sqrt{7})(m-2-\sqrt{7})\le 0$ ← 이차방정식 $x^2-4x-3=0$의 두 근이 $2\pm\sqrt{7}$이다.

$\therefore\ 2-\sqrt{7}\le m\le 2+\sqrt{7}$ 답 ①

21 주어진 그래프에서 $f(x)=a(x+1)(x-2)$ $(a>0)$, $g(x)=-a(x-1)(x-3)$ $(a>0)$이라 하자.

$f(x)=g(x)$에서

$a(x+1)(x-2)=-a(x-1)(x-3)$

$a(x^2-x-2)=-a(x^2-4x+3)$

$x^2-x-2=-x^2+4x-3$ ($\because a\ne 0$)

$2x^2-5x+1=0$ $\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

즉, 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$이다.

이때 $\{f(x)\}^2>f(x)g(x)$에서

$\{f(x)\}^2-f(x)g(x)>0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}>0$

(i) $f(x)>0$, $f(x)-g(x)>0$일 때,

주어진 그래프에 의하여 $x<-1$ 또는 $x>\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

(ii) $f(x)<0$, $f(x)-g(x)<0$일 때,

주어진 그래프에 의하여 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}<x<2$

(i), (ii)에서

$x<-1$ 또는 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}<x<2$ 또는 $x>\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

따라서 구하는 10 이하의 자연수 x는 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 9개이다. 답 9

• 다른 풀이 •

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 주어진 그래프에서

$0<\alpha<1$, $2<\beta<3$ ⋯⋯㉠

$\{f(x)\}^2>f(x)g(x)$에서 $f(x)\{f(x)-g(x)\}>0$

(i) $f(x)>0$, $f(x)-g(x)>0$일 때,

$f(x)>0$에서 $x<-1$ 또는 $x>2$

$f(x)-g(x)>0$, 즉 $f(x)>g(x)$에서

$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$

$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>\beta$ ($\because$ ㉠)

(ⅱ) $f(x)<0$, $f(x)-g(x)<0$일 때,

$f(x)<0$에서 $-1<x<2$

$f(x)-g(x)<0$, 즉 $f(x)<g(x)$에서

$\alpha<x<\beta$

$\therefore \alpha<x<2$ ($\because$ ㉠)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x<-1$ 또는 $\alpha<x<2$ 또는 $x>\beta$

따라서 구하는 10 이하의 자연수 x는 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10의 9개이다.

22 $f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$에서

(ⅰ) $x\le-1$ 또는 $x\ge3$일 때,

$f(x)\ge0$, 즉 $|f(x)|=f(x)$이므로

$g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}=\dfrac{2f(x)}{2}=f(x)$

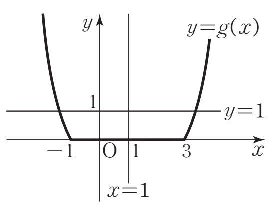
(ⅱ) $-1<x<3$일 때,

$f(x)<0$, 즉 $|f(x)|=-f(x)$이므로

$g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}=\dfrac{f(x)-f(x)}{2}=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge3) \\ 0 & (-1<x<3) \end{cases}$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. (거짓)

ㄴ. 두 함수 $y=g(x)$와 $y=1$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 부등식 $g(x)\le0$의 해는 $-1\le x\le3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

23 어떤 상품의 가격을 내리기 전의 판매 가격을 a, 그때의 판매량을 b라 하면

(총 판매액)=(판매 가격)×(판매량)이므로

가격을 내리기 전의 총 판매액은

ab

가격을 내린 후의 총 판매액은

$a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\times b\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)$

이때 가격을 내린 후의 총 판매액이 가격을 내리기 전의 총 판매액의 $\dfrac{10}{9}$배 이상이어야 하므로

$a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\times b\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)\ge\dfrac{10}{9}ab$

$\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\left(1+\dfrac{2x}{100}\right)\ge\dfrac{10}{9}$ ($\because a>0, b>0$)

$9(100-x)(50+x)\ge50000$, $9x^2-450x+5000\le0$

$(3x-50)(3x-100)\le0$ $\quad\therefore \dfrac{50}{3}\le x\le\dfrac{100}{3}$

따라서 $p=\dfrac{50}{3}$, $q=\dfrac{100}{3}$이므로

$p+q=50$ 답 ③

24 직육면체 A와 정육면체 B의 겉넓이를 각각 S_A, S_B라 하면

$S_A=2(x+1)(x-1)+2(x+1)(2x-1)+2(x-1)(2x-1)$

$=10x^2-4x-2$

$S_B=6x^2$

S_A가 S_B의 1.5배 이상이므로

$10x^2-4x-2\ge1.5\times6x^2$, $x^2-4x-2\ge0$

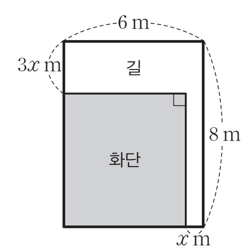
이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 근이 $x=2\pm\sqrt{6}$이므로 위의 이차부등식의 해는

$x\le2-\sqrt{6}$ 또는 $x\ge2+\sqrt{6}$ $\quad\therefore x\ge2+\sqrt{6}$ ($\because x>1$)

이때 직육면체 A는 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양의 블록으로 이루어져 있으므로 x는 자연수이다.

따라서 x의 최솟값은 5이다. 답 5

25 주어진 그림에서 화단과 길을 겹치지 않게 모아 다음 그림과 같이 변형하여도 화단과 길의 면적은 각각 같다.



화단의 면적은 $(8-3x)(6-x)(\text{m}^2)$이고,

길의 면적은 $8x+3x(6-x)(\text{m}^2)$이므로

필요한 총 비용은

$2(8-3x)(6-x)+\{8x+3x(6-x)\}$(만 원)

이때 총 비용이 56만 원 이하이어야 하므로

$2(8-3x)(6-x)+\{8x+3x(6-x)\}\le56$

$3x^2-26x+40\le0$, $(x-2)(3x-20)\le0$

$\therefore 2\le x\le\dfrac{20}{3}$

그런데 $x>0$, $8-3x>0$, $6-x>0$에서 $0<x<\dfrac{8}{3}$이므로

$2\le x<\dfrac{8}{3}$

따라서 x의 최솟값은 2이다. 답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	직사각형 모양의 땅에 화단과 길을 만드는 데 필요한 총 비용을 x에 대한 식으로 나타내고 부등식을 세운 경우	50%
(나)	(가)의 부등식을 푼 경우	30%
(다)	x의 최솟값을 구한 경우	20%

26 보관창고와 A지점 사이의 거리를 t km라 하면 하루에 드는 총 운송비는

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2$(원)

이때 하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하이어야 하므로

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2\le 155000$

$600t^2-8000t-15000\le 0$, $3t^2-40t-75\le 0$

$(3t+5)(t-15)\le 0$, $-\frac{5}{3}\le t\le 15$

$\therefore 0<t\le 15$ ($\because 0<t<20$)

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있으므로

$a=15$ 답 15

27 $x^2-5x+4<0$에서 $(x-1)(x-4)<0$

$\therefore 1<x<4$ ……㉠

$x^2-7x+10\le 0$에서 $(x-2)(x-5)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2\le x<4$

$2\le x<4$가 방정식 $a[x]^2+b[x]+c=0$의 해이고, $[x]$는 정수이므로 $2\le x<4$에서

$[x]=2$ 또는 $[x]=3$

따라서 방정식 $a[x]^2+b[x]+c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=2+3=5$ $\therefore \frac{b}{a}=-5$

$\frac{c}{a}=2\times 3=6$

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{a}=-5+6=1$ 답 1

28 $x+a-3>0$에서 $x>-a+3$이므로 모든 양수 x에 대하여 부등식이 성립하기 위해서는

$-a+3\le 0$ $\therefore a\ge 3$ ……㉠

또한, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+ax+a>0$이 성립하기 위해서는 이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D=a^2-4a<0$에서

$a(a-4)<0$ $\therefore 0<a<4$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3\le a<4$ 답 ④

29 주어진 그래프에서

(i) $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$a\le x\le b$

(ii) $g(x)\le h(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$x\le 0$ 또는 $x\ge a$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)\le g(x)\le h(x)$의 해는

$a\le x\le b$ 답 $a\le x\le b$

30 (i) $-x^2+3x+2\le mx+n$에서

$x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le 0$

$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$

(ii) $mx+n\le x^2-x+4$에서

$x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le 0$

$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$

(i), (ii)에서

$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ ……㉠

즉, $m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$이므로

$2m^2-4m+2\le 0$, $2(m-1)^2\le 0$

$(m-1)^2\le 0$ $\therefore m=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $12\le 4n\le 12$이므로

$4n=12$ $\therefore n=3$

$\therefore m^2+n^2=1^2+3^2=10$ 답 ②

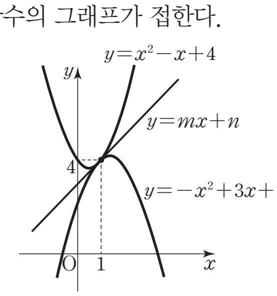
• 다른 풀이 •

두 이차함수 $y=-x^2+3x+2$, $y=x^2-x+4$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면 $-x^2+3x+2=x^2-x+4$에서

$2x^2-4x+2=0$, $2(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

즉, 점 $(1, 4)$에서 두 이차함수의 그래프가 접한다.

이때 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 두 이차함수의 그래프 사이에 직선 $y=mx+n$이 위치해야 하므로 직선 $y=mx+n$은 점 $(1, 4)$에서 두 이차함수의 그래프에 접해야 한다.



$y-4=m(x-1)$에서

$y=mx-m+4$

이 직선이 함수 $y=x^2-x+4$의 그래프와 접하려면 이차방정식 $x^2-x+4=mx-m+4$, 즉

$x^2-(m+1)x+m=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+1)\}^2-4m=0$

$m^2-2m+1=0$, $(m-1)^2=0$ $\qquad\therefore m=1$

즉, 직선의 방정식은 $y=x+3$이므로 $n=3$

$\therefore m^2+n^2=1^2+3^2=10$

31

$|x-k|>5$에서

$x-k<-5$ 또는 $x-k>5$

$\therefore x<k-5$ 또는 $x>k+5$ $\qquad\cdots\cdots㉠$

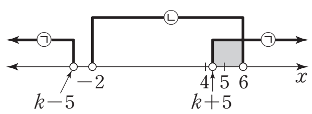
$x^2-4x-12<0$에서 $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore -2<x<6$ $\qquad\cdots\cdots㉡$

이때 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 5가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $k+5<6$, 즉 $k<1$일 때,

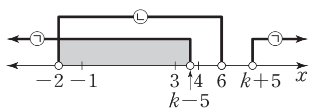
$k-5<-4$이므로 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 5이려면 조건을 만족시키는 x는 5뿐이어야 한다.



따라서 $4\le k+5<5$이므로 $-1\le k<0$

(ii) $k+5\ge6$, 즉 $k\ge1$일 때,

$k-5\ge-4$이므로 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 5이려면 조건을 만족시키는 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이어야 한다.



따라서 $3<k-5\le4$이므로

$8<k\le9$

(i), (ii)에서 $-1\le k<0$ 또는 $8<k\le9$이므로 정수 k의 최댓값은 9, 최솟값은 -1이다.

따라서 $M=9$, $m=-1$이므로

$M+m=8$ **답** 8

32 해결단계

❶ 단계	$[a]$의 값의 범위에 따른 부등식의 해를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 $[a]$의 값의 범위를 구하고, a의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	p, q의 값을 구한 후, $p+q$의 값을 계산한다.

$$\begin{cases}(x-2)(x-[a])<0 & \cdots\cdots㉠\\ (x-4)\left(x-\dfrac{[a]}{2}\right)>0 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$$

양수 a에 대하여 $[a]=0, 1, 2, \cdots$이고, $\frac{1}{2}[a]\le[a]$

㉠에서

(i) $[a]<2$이면

$[a]<x<2$이므로 ㉠이 정수인 해를 가지려면 $[a]=0$

그런데 $[a]=0$이면

㉡에서 $x<0$ 또는 $x>4$

이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 정수인 해는 없다.

(ii) $[a]=2$이면

㉠에서 $(x-2)^2<0$이므로 부등식 ㉠의 해가 존재하지 않는다. 즉, ㉠, ㉡을 만족시키는 정수인 해는 없다.

(iii) $[a]>2$이면

$2<x<[a]$이므로 ㉠이 정수인 해를 가지려면 $[a]\ge4$

그런데 $[a]=4$이면

㉠에서 $2<x<4$, ㉡에서 $x<2$ 또는 $x>4$

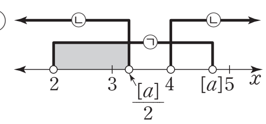
이므로 ㉠, ㉡을 만족시키는 정수인 해는 없다.

$\therefore [a]>4$

(i), (ii), (iii)에서 $[a]>4$

이때 주어진 연립부등식이 정수인 해를 1개 가지므로 다음 그림과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

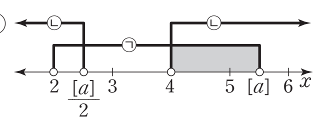
①



즉, $3<\frac{[a]}{2}\le4$이고 $4<[a]\le5$인 경우

$3<\frac{[a]}{2}\le4$에서 $6<[a]\le8$이므로 이것을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

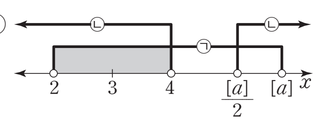
②



즉, $2<\frac{[a]}{2}\le3$이고 $5<[a]\le6$인 경우

$[a]=6$이고 정수인 해는 $x=5$로 해의 개수가 1이다.

③



즉, $4<\frac{[a]}{2}$인 경우 $\frac{[a]}{2}<[a]-1<[a]$이므로 정수인 해는 $x=3$ 이외에도 $x=[a]-1$이 존재한다.

①, ②, ③에서

$[a]=6$이므로 $6\le a<7$

따라서 $p=6$, $q=7$이므로

$p+q=13$ **답** 13

33

원 C의 내부의 큰 원의 반지름의 길이를 x라 하면 작은 원의 반지름의 길이는 $6-x$이다.

큰 원의 반지름의 길이가 작은 원의 반지름의 길이보다 크므로

$x>6-x$, $2x>6$ $\qquad\therefore x>3$ $\qquad\cdots\cdots㉠$

색칠한 부분의 넓이가 원 C의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이상이 되려면

내접하는 두 원의 넓이의 합이 원 C의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 이하가 되어야 하므로

$\pi\{x^2+(6-x)^2\}\le\frac{2}{3}\times\pi\times6^2$, $x^2-6x+6\le0$

이차방정식 $x^2-6x+6=0$의 근이 $x=3\pm\sqrt{3}$이므로 위의 이차부등식의 해는

$3-\sqrt{3}\le x\le3+\sqrt{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3<x\le3+\sqrt{3}$

따라서 큰 원의 반지름의 길이의 최댓값은 $3+\sqrt{3}$이다.

답 $3+\sqrt{3}$

34 4개월 된 태아의 키는 18 cm 이상 20 cm 이하이므로

$18\le16-4a^2+6a\le20$

(i) $18\le16-4a^2+6a$에서 $4a^2-6a+2\le0$

$2a^2-3a+1\le0$, $(2a-1)(a-1)\le0$

$\therefore \frac{1}{2}\le a\le1$

(ii) $16-4a^2+6a\le20$에서 $4a^2-6a+4\ge0$

$2a^2-3a+2\ge0$, $2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\ge0$

위의 부등식은 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}\le a\le1$

답 $\frac{1}{2}\le a\le1$

35 민석이가 하루에 7쪽씩 x일 동안 읽으면 3쪽이 남으므로 이 책의 쪽수는 $(7x+3)$쪽이고, 이 책을 다 읽는 데 $(x+1)$일이 걸린다.

이때 10쪽씩 읽으면 7쪽씩 읽을 때보다 4일 빨리 다 읽으므로

$10(x-4)<7x+3\le10(x-3)$

(i) $10(x-4)<7x+3$에서

$10x-40<7x+3$, $3x<43$

$\therefore x<\frac{43}{3}$

(ii) $7x+3\le10(x-3)$에서

$7x+3\le10x-30$, $3x\ge33$

$\therefore x\ge11$

(i), (ii)에서 $11\le x<\frac{43}{3}$

따라서 책은 하루에 7쪽씩 최대 14일을 읽을 때 3쪽이 남으므로 이 책의 최대 쪽수는

$7\times14+3=101$(쪽)

답 ②

36 함수 $f(x)=-x^2+2kx+k^2+4$의 그래프가 y축과 만나는 점이 A이므로

$\mathrm{A}(0,\ k^2+4)$

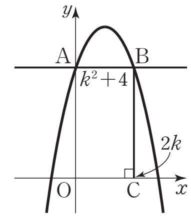
점 B는 점 A와 y좌표가 같고 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로 점 B의 x좌표는 $-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$에서

$x^2-2kx=0$, $x(x-2k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

$\therefore \mathrm{B}(2k,\ k^2+4)$

사각형 OCBA의 둘레의 길이가 $g(k)$이므로



$g(k)=2\times2k+2\times(k^2+4)$

$=2k^2+4k+8$

부등식 $14\le g(k)\le78$에서

$14\le2k^2+4k+8\le78$

$7\le k^2+2k+4\le39$

(i) $k^2+2k+4\ge7$에서 $k^2+2k-3\ge0$

$(k+3)(k-1)\ge0$ $\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge1$

그런데 $k>0$이므로 $k\ge1$

(ii) $k^2+2k+4\le39$에서 $k^2+2k-35\le0$

$(k+7)(k-5)\le0$ $\therefore -7\le k\le5$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le5$

(i), (ii)에서 $1\le k\le5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$1+2+3+4+5=15$

답 15

37 이차방정식 $x^2-\sqrt{a}x+1-a=0$이 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(-\sqrt{a})^2-4(1-a)\ge0$, $5a-4\ge0$

$\therefore a\ge\frac{4}{5}$ ……㉠

또한, 이차방정식 $x^2-\sqrt{a}x+1-a=0$의 두 근이 모두 양수이므로 두 근의 합과 곱도 양수이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt{a}>0$에서 $a>0$ ……㉡

$1-a>0$에서 $a<1$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\frac{4}{5}\le a<1$

따라서 $p=\frac{4}{5}$, $q=1$이므로

$5p+q=5\times\frac{4}{5}+1=5$

답 5

38 이차방정식 $x^2+(k^2+3k-10)x+k^2-3k-18=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 주어진 이차방정식은 항상 실근을 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(k^2+3k-10)$, $\alpha\beta=k^2-3k-18$

(i) 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$에서

$k^2-3k-18<0$

$(k+3)(k-6)<0$ $\therefore -3<k<6$

(ii) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta<0$에서

$-(k^2+3k-10)<0$, $k^2+3k-10>0$

$(k+5)(k-2)>0 \qquad \therefore k<-5$ 또는 $k>2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $2<k<6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 3, 4, 5이므로 그 합은

$3+4+5=12$ 답 12

39 $f(x)=x^2+2(k-1)|x|+k^2-3k-4$라 하면

$f(x)=|x|^2+2(k-1)|x|+k^2-3k-4$

이때 $|x|=t$로 놓으면

$f(t)=t^2+2(k-1)t+k^2-3k-4\ (t\ge 0)$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위해서는 방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-3k-4)>0$에서

$k+5>0 \qquad \therefore k>-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 두 근이 모두 양수이므로 두 근의 합과 곱도 양수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2(k-1)>0$에서 $k<1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$k^2-3k-4>0$에서 $(k+1)(k-4)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>4 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서 $-5<k<-1$ 답 ①

• 다른 풀이 •

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가져야 하므로 $x<0$, $x\ge 0$일 때 각각 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $x<0$일 때,

$g(x)=x^2-2(k-1)x+k^2-3k-4$라 하면 이차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 개의 음의 실근을 가져야 한다.

① 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\frac{D_1}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-3k-4)>0$에서

$k+5>0 \qquad \therefore k>-5$

② 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=0$의 왼쪽에 있어야 하므로

$k-1<0$에서 $k<1$

③ $g(0)>0$에서 $k^2-3k-4>0$

$(k+1)(k-4)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>4$

①, ②, ③에서 $-5<k<-1$

(ⅱ) $x\ge 0$일 때,

$h(x)=x^2+2(k-1)x+k^2-3k-4$라 하면 이차방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 개의 음이 아닌 실근을 가져야 한다.

④ 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$\frac{D_2}{4}=(k-1)^2-(k^2-3k-4)>0$에서

$k+5>0 \qquad \therefore k>-5$

⑤ 이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=0$의 오른쪽에 있어야 하므로

$-(k-1)>0$에서 $k<1$

⑥ $h(0)\ge 0$에서 $k^2-3k-4\ge 0$

$(k+1)(k-4)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 4$

④, ⑤, ⑥에서 $-5<k\le -1$

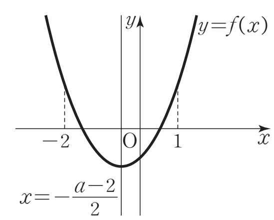
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5<k<-1$

40 $f(x)=x^2+(a-2)x-2a+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$이 $-2<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 이차함수

$f(x)=x^2+(a-2)x-2a+4$

$=\left(x+\frac{a-2}{2}\right)^2-2a+4-\frac{(a-2)^2}{4}$

의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(-2a+4)>0$에서

$a^2+4a-12>0$, $(a+6)(a-2)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>2$

(ⅱ) $f(-2)>0$에서 $4-2(a-2)-2a+4>0$

$-4a+12>0 \qquad \therefore a<3$

(ⅲ) $f(1)>0$에서 $1+(a-2)-2a+4>0$

$-a+3>0 \qquad \therefore a<3$

(ⅳ) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축인 직선

$x=-\frac{a-2}{2}$가 -2와 1 사이에 있어야 하므로

$-2<-\frac{a-2}{2}<1$, $-2<a-2<4$

$\therefore 0<a<6$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $2<a<3$ 답 ③

41 $P(x)=3x^3+x+11$, $Q(x)=x^2-x+1$이므로

$P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2$

$=(3x^3+x+11)-3(x+1)(x^2-x+1)+mx^2$

$=3x^3+x+11-3(x^3+1)+mx^2$

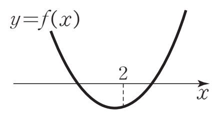
$=mx^2+x+8$

$f(x)=mx^2+x+8$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 근은 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이다.

이때 한 근이 2보다 작고, 다른 한 근이 2보다 크므로 $m\neq0$이고 이 경우는 다음과 같다.

(i) $m>0$일 때,

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



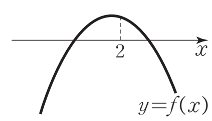
$f(2)=4m+10<0$에서

$m<-\dfrac{5}{2}$

그런데 $m>0$이므로 이를 만족시키는 정수 m은 존재하지 않는다.

(ii) $m<0$일 때,

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(2)=4m+10>0$에서

$m>-\dfrac{5}{2}$

$\therefore -\dfrac{5}{2}<m<0$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{5}{2}<m<0$

따라서 조건을 만족시키는 정수 m은 -2, -1의 2개이다.

답 ②

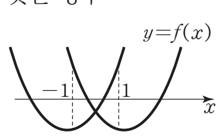
42 해결단계

❶ 단계	이차방정식이 $-1\le x\le1$에서 한 개의 실근을 갖도록 하는 m의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	이차방정식이 $-1\le x\le1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 m의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 범위를 이용하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $\dfrac{9}{2}p+q$의 값을 계산한다.

$f(x)=x^2-(m+1)x+2m$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$이 $-1\le x\le1$에서 적어도 한 개의 실근을 가져야 한다.

(i) $-1\le x\le1$에서 한 개의 실근을 갖는 경우

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(-1)$과 $f(1)$의 값이 0이거나 부호가 서로 달라야 한다.



즉, $f(-1)f(1)\le0$에서

$(1+m+1+2m)(1-m-1+2m)\le0$

$m(3m+2)\le0$

$\therefore -\dfrac{2}{3}\le m\le0$

그런데 $m=0$일 때 $f(x)=x^2-x$이므로 $f(x)=0$에서 $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

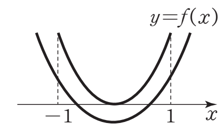
따라서 $m=0$일 때 $-1\le x\le1$에서 서로 다른 두 근을 가지므로 $m\neq0$

$\therefore -\dfrac{2}{3}\le m<0$

서로 다른 두 실근 또는 중근

(ii) $-1\le x\le1$에서 두 개의 실근을 갖는 경우

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



① 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+1)\}^2-4\times2m\ge0$에서

$m^2-6m+1\ge0$

이때 이차방정식 $m^2-6m+1=0$의 근이 $m=3\pm2\sqrt{2}$이므로 위의 부등식의 해는

$m\le3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\ge3+2\sqrt{2}$

② $f(-1)\ge0$에서 $(-1)^2+(m+1)+2m\ge0$

$3m+2\ge0\qquad\therefore m\ge-\dfrac{2}{3}$

③ $f(1)\ge0$에서 $1^2-(m+1)+2m\ge0$

$\therefore m\ge0$

④ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 -1과 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2-(m+1)x+2m$

$=\left(x-\dfrac{m+1}{2}\right)^2-\dfrac{m^2-6m+1}{4}$

에서 대칭축이 $x=\dfrac{m+1}{2}$이므로

$-1<\dfrac{m+1}{2}<1$, $-2<m+1<2$

$\therefore -3<m<1$

①~④에서 $0\le m\le3-2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $-\dfrac{2}{3}\le m\le3-2\sqrt{2}$

*따라서 $p=-\dfrac{2}{3}$, $q=3-2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{9}{2}p+q=\dfrac{9}{2}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)+(3-2\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ 답 ①

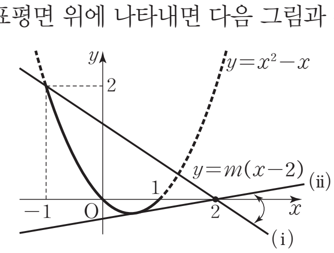
• 다른 풀이 •

$x^2-(m+1)x+2m=0$에서

$x^2-x=m(x-2)$

$f(x)=x^2-x$, $g(x)=m(x-2)$라 하면 주어진 이차방정식이 $-1\le x\le1$에서 적어도 한 개의 실근을 갖기 위해서는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 $-1\le x\le1$에서 적어도 한 번 만나야 한다.

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선이므로 두 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



두 함수의 그래프가 $-1\le x\le1$에서 적어도 한 번 만나려면 직선 $y=m(x-2)$가 (i) 또는 (ii)이거나 두 가지 경우 사이에 존재하면 된다.

(ⅰ) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때,

$2=m(-1-2) \qquad \therefore\ m=-\dfrac{2}{3}$

(ⅱ) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때, 이차방정식 $x^2-(m+1)x+2m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+1)\}^2-8m=0$

$m^2-6m+1=0 \qquad \therefore\ m=3\pm2\sqrt{2}$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제4사분면에서 접하므로

$m=3-2\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 실수 m의 값의 범위는

$-\dfrac{2}{3}\le m\le 3-2\sqrt{2}$

다음은 *와 같다.

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.83~84

01 10	02 6	03 $a>b$	04 ⑤	05 5
06 5	07 21	08 $1+\sqrt{3}<x<3$		09 $0\le a<\frac{1}{4}$
10 15	11 $-\frac{9}{4}$	12 $\frac{2}{3}<p<1$ 또는 $1<p\le\frac{4}{3}$		

01 해결단계

❶ 단계	주어진 부등식의 해를 구한다.
❷ 단계	$x\le5$일 때 ❶ 단계에서 구한 해가 항상 성립함을 이용하여 $a+b$의 최솟값을 구한다.

부등식 $|x-a|\le|x-b|$의 양변을 제곱하면

$x^2-2ax+a^2\le x^2-2bx+b^2$

$2(a-b)x\ge a^2-b^2$, $2(a-b)x\ge(a+b)(a-b)$

이때 $a<b$에서 $a-b<0$이므로 부등식의 해는

$x\le\dfrac{a+b}{2} \qquad \cdots\cdots㉠$

$x\le5$일 때 ㉠이 항상 성립하려면 $\dfrac{a+b}{2}\ge5$이어야 하므로 $a+b\ge10$이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 10이다. 답 10

• 다른 풀이 •

$|x-a|\le|x-b|$에서 $a<b$이므로

(ⅰ) $x<a$일 때,

$-(x-a)\le-(x-b)$

$\therefore\ a\le b$

즉, $x<a$이면 주어진 부등식을 항상 만족시킨다.

(ⅱ) $a\le x<b$일 때,

$x-a\le-(x-b)$

$2x\le a+b \qquad \therefore\ x\le\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore\ a\le x\le\dfrac{a+b}{2}$

(ⅲ) $x\ge b$일 때,

$x-a\le x-b$, $-a\le-b$

$\therefore\ a\ge b$

그런데 $a<b$이므로 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x\le\dfrac{a+b}{2}$

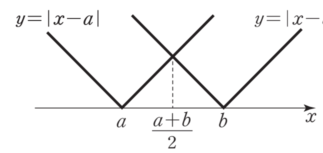
이때 $x\le5$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$5\le\dfrac{a+b}{2} \qquad \therefore\ a+b\ge10$

따라서 $a+b$의 최솟값은 10이다.

BLACKLABEL 특강 참고

부등식 $|x-a|\le|x-b|$를 만족시키는 x의 값을 두 함수 $y=|x-a|$, $y=|x-b|$의 그래프를 이용하여 구할 수 있다.
두 그래프의 교점의 x좌표를 구하면
$|x-a|=|x-b|$에서 $x-a=\pm(x-b)$
$x-a=x-b$는 $a<b$를 만족시키지 않으므로
$x-a=-x+b$에서 $x=\dfrac{a+b}{2}$
이때 $a<b$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $|x-a|\le|x-b|$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $x\le\dfrac{a+b}{2}$이다.

02 해결단계

❶ 단계	부등식 $|[x]-3|\le4$의 해를 구한다.
❷ 단계	a의 값의 범위에 따라 부등식 $(a^2-3a-4)x\ge a+1$의 해를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 정수 a의 값의 합을 구한다.

$|[x]-3|\le4$에서 $-4\le[x]-3\le4$이므로

$-1\le[x]\le7$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 7$

$[x]=-1$일 때, $-1\le x<0$

$[x]=0$일 때, $0\le x<1$

$[x]=1$일 때, $1\le x<2$

$\vdots$

$[x]=7$일 때, $7\le x<8$

$\therefore\ -1\le x<8 \qquad \cdots\cdots㉠$

한편, $(a^2-3a-4)x\ge a+1$에서

$(a+1)(a-4)x\ge a+1 \qquad \cdots\cdots㉡$

(ⅰ) $a<-1$일 때,

$(a+1)(a-4)>0$이므로

㉡의 해는 $x\ge\dfrac{1}{a-4}$

그런데 $a<-1$이면 $-\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{a-4}<0$이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$의 8개이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때,

$0\times x\geq 0$이므로 ㉡의 해는 모든 실수이다.

즉, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, $\cdots$, 7의 9개이다.

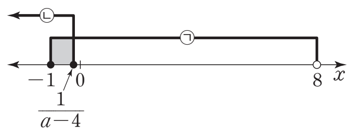
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-1<a<4$일 때,

$(a+1)(a-4)<0$이므로

㉡의 해는 $x\leq\dfrac{1}{a-4}$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 1이려면 $x=-1$이어야 하므로 ㉡의 해는 다음과 같아야 한다.



즉, $-1\leq\dfrac{1}{a-4}<0$에서

$a-4\leq -1$ $\quad\therefore a\leq 3$

즉, $-1<a\leq 3$이므로 정수 a는 0, 1, 2, 3이다.

(iv) $a=4$일 때,

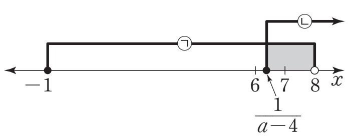
㉡에서 $0\times x\geq 5$이므로 주어진 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

(v) $a>4$일 때,

$(a+1)(a-4)>0$이므로

㉡의 해는 $x\geq\dfrac{1}{a-4}$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 x의 개수가 1이려면 $x=7$이어야 하므로 ㉡의 해는 다음과 같아야 한다.



즉, $6<\dfrac{1}{a-4}\leq 7$에서

$\dfrac{1}{7}\leq a-4<\dfrac{1}{6}$ $\quad\therefore \dfrac{29}{7}\leq a<\dfrac{25}{6}$

이것을 만족시키는 정수 a는 없다.

(i)~(v)에서 정수 a는 0, 1, 2, 3이고 그 합은

$0+1+2+3=6$ **답** 6

03 해결단계

❶ 단계	$x^2+x+1>0$임을 파악하고 x^2+x+1을 부등식의 양변에 곱한다.
❷ 단계	$a-b$를 t로 치환하여 t의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	a, b의 대소 관계를 구한다.

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 주어진 부등식의 양변에 x^2+x+1을 곱하면

$(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)>b(x^2+x+1)$

$(a-b+1)x^2+(a-b-2)x+(a-b+1)>0$

$a-b=t$로 놓으면

$(t+1)x^2+(t-2)x+(t+1)>0$

이때 위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

(i) $t+1>0$에서 $t>-1$

(ii) 이차방정식 $(t+1)x^2+(t-2)x+(t+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(t-2)^2-4(t+1)^2<0$에서

$-3t^2-12t<0$, $t(t+4)>0$

$\therefore t<-4$ 또는 $t>0$

(i), (ii)에서 $t>0$

따라서 $a-b>0$이므로 $a>b$ **답** $a>b$

04 해결단계

❶ 단계	반례를 찾아 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	이차방정식의 판별식을 이용하여 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. (반례) $ax^2-bx+c<0$에서 $a=1$, $b=2$, $c=1$이면

$x^2-2x+1<0$

그런데 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

즉, $c>0$이지만 부등식 $x^2-2x+1<0$의 해는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 이차부등식 (가)의 해가 존재하면 이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 할 때

$D_1=(-b)^2-4ac>0$

$\therefore b^2-4ac>0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

한편, (나)의 부등식 $a(x-1)^2-b(x-1)+c<0$에서

$ax^2-(2a+b)x+(a+b+c)<0$

이차방정식 $ax^2-(2a+b)x+(a+b+c)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(2a+b)\}^2-4a(a+b+c)$

$\quad=b^2-4ac>0$ ($\because$ ㉠)

즉, (가)의 해가 존재하면 (나)의 해도 존재한다. (참)

ㄷ. 두 이차부등식 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 해를 $x=t$라 하면

$at^2-bt+c<0$ $\quad\cdots\cdots$㉡

$at^2-(2a+b)t+(a+b+c)<0$ $\quad\cdots\cdots$㉢

㉡+㉢을 하면

$2at^2-2(a+b)t+(a+b+2c)<0$

즉, $x=t$는 이차부등식 $2ax^2-2(a+b)x+(a+b+2c)<0$의 해이므로 이차방정식 $2ax^2-2(a+b)x+(a+b+2c)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면

$\dfrac{D_3}{4}=\{-(a+b)\}^2-2a(a+b+2c)>0$에서

$-a^2+b^2-4ac>0$

$\therefore a^2-b^2+4ac<0$ (참)

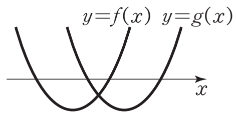
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

•다른 풀이•

$f(x)=ax^2-bx+c$, $g(x)=a(x-1)^2-b(x-1)+c$

라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프이다.

ㄴ. 이차부등식 (가)의 해가 존재하면 곡선 $y=f(x)$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, (나)의 해도 존재한다. (참)

ㄷ. 두 이차부등식 (가), (나)의 해가 존재하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 $\alpha+1$, $\beta+1$이다.

즉, (가)에서

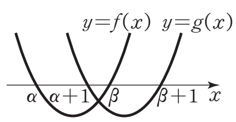
$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \qquad \therefore \alpha<x<\beta$

(나)에서

$a(x-\alpha-1)(x-\beta-1)<0$

$\therefore \alpha+1<x<\beta+1$

이때 두 이차부등식 (가), (나)를 동시에 만족시키는 해가 존재하므로 오른쪽 그림에서



$\alpha+1<\beta$

$\therefore \beta-\alpha>1$

한편, $ax^2-bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\therefore \beta-\alpha=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}}=\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}$

이때 $\beta-\alpha>1$이므로 $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a^2}}>1$

$\sqrt{b^2-4ac}>\sqrt{a^2}$ $(\because \sqrt{a^2}>0)$

부등식의 양변을 제곱하면 $b^2-4ac>a^2$

$\therefore a^2-b^2+4ac<0$ (참)

05 해결단계

❶ 단계	$g(x)=f(x)-f(c)$라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 c의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	정수 c의 개수를 구한다.

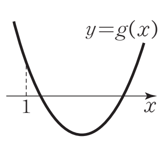
$f(x)\le f(c)$, 즉 $f(x)-f(c)\le 0$에서

$g(x)=f(x)-f(c)$라 하면

$g(x)=x^2-8x-(c^2-8c)$

$\quad=x^2-8x-c^2+8c$

이때 $g(x)\le 0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $x>1$에 포함되므로 오른쪽 그림과 같이 $g(1)>0$이어야 한다.



즉, $g(1)=1-8-c^2+8c>0$이므로

$c^2-8c+7<0$, $(c-1)(c-7)<0$

$\therefore 1<c<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 c는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

답 5

•다른 풀이•

$f(x)=x^2-8x$이므로 $f(x)\le f(c)$에서

$x^2-8x\le c^2-8c$

$x^2-c^2-8x+8c\le 0$

$(x-c)(x+c)-8(x-c)\le 0$

$(x-c)(x+c-8)\le 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $c<-c+8$, 즉 $c<4$일 때,

㉠에서 $c\le x\le -c+8$

이를 만족시키는 x의 값의 범위가 $x>1$에 포함되어야 하므로 $1<c$

이때 $c<4$이므로 $1<c<4$

(ii) $c\ge -c+8$, 즉 $c\ge 4$일 때,

㉠에서 $-c+8\le x\le c$

이를 만족시키는 x의 값의 범위가 $x>1$에 포함되어야 하므로

$1<-c+8 \qquad \therefore c<7$

이때 $c\ge 4$이므로 $4\le c<7$

(i), (ii)에서 $1<c<7$이므로 조건을 만족시키는 정수 c는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

06 해결단계

❶ 단계	주어진 두 부등식의 해를 각각 구한다.
❷ 단계	n의 값을 기준으로 경우를 나누어 ❶ 단계에서 구한 두 부등식의 해의 공통부분을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구한다.

$x^2-x+n-n^2>0$에서

$x^2-x+n(1-n)>0$

$\{x-(1-n)\}(x-n)>0$

이때 자연수 n에 대하여 $1-n<n$이므로

$x<1-n$ 또는 $x>n \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x^2-(n^2-n+1)x+n^2-n^3\le 0$에서

$x^2-(n^2-n+1)x+n^2(1-n)\le 0$

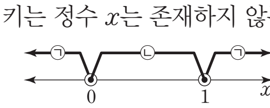
$\{x-(1-n)\}(x-n^2)\le 0$

이때 자연수 n에 대하여 $1-n<n^2$이므로

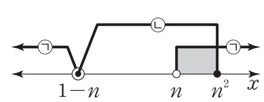
$1-n\le x\le n^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

(i) $n=1$일 때,

㉠에서 $x<0$ 또는 $x>1$, ㉡에서 $0\le x\le 1$이므로 조건을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.



(ii) $n\ge 2$일 때,



2 이상의 자연수 n에 대하여 $n<n^2$이므로

㉠, ㉡에서 $n<x\le n^2$

조건을 만족시키는 정수 x는 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $\cdots$, n^2의 (n^2-n)개이다.

$n^2-n\le30$에서

$n^2-n-30\le0$, $(n+5)(n-6)\le0$

$\therefore -5\le n\le6$

그런데 $n\ge2$이므로 $2\le n\le6$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n은

2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 답 5

07 해결단계

❶ 단계	이차방정식 $f(x)=2x-3$의 두 근이 1, 7임을 이용하여 $f(x)$의 식을 세운다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 $f(x)$의 식을 이용하여 부등식 $f(x+1)\ge2x-1$, $f(2-x)\le-2x+1$의 해를 각각 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 해의 공통부분을 구하여 a, b의 값을 각각 구한 후, $a-b$의 값을 계산한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-3$의 두 교점의 x좌표가 1, 7이므로 이차방정식 $f(x)=2x-3$, 즉 $f(x)-2x+3=0$의 두 근이 1, 7이다.

$f(x)-2x+3=k(x-1)(x-7)$ $(k>0)$이라 하면

$f(x)=k(x-1)(x-7)+2x-3$

(i) $f(x+1)\ge2x-1$에서

$k(x+1-1)(x+1-7)+2(x+1)-3\ge2x-1$

$kx(x-6)+2x-1\ge2x-1$

$kx(x-6)\ge0$, $x(x-6)\ge0$ $(\because k>0)$

$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge6$

(ii) $f(2-x)\le-2x+1$에서

$k(2-x-1)(2-x-7)+2(2-x)-3\le-2x+1$

$k(1-x)(-5-x)-2x+1\le-2x+1$

$k(x+5)(x-1)\le0$, $(x+5)(x-1)\le0$ $(\because k>0)$

$\therefore -5\le x\le1$

(i), (ii)에서 $-5\le x\le0$

즉, 조건을 만족시키는 정수 x는

-5, -4, -3, -2, -1, 0의 6개이고 그 합은

$-5+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0=-15$

따라서 $a=6$, $b=-15$이므로

$a-b=6-(-15)=21$ 답 21

• 다른 풀이 •

$g(x)=f(x)-(2x-3)$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-3$의 교점의 x좌표가 1, 7이므로 방정식 $g(x)=0$의 두 실근이 1, 7이다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $g(x)$의 최고차항의 계수도 양수이므로

$g(x)=k(x-1)(x-7)$ $(k>0)$ ……㉠

이라 할 수 있다.

(i) $f(x+1)\ge2x-1$에서 $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이므로

$f(t)\ge2(t-1)-1$, $f(t)\ge2t-3$

$f(t)-(2t-3)\ge0$ $\therefore g(t)\ge0$

즉, ㉠에서 $k(t-1)(t-7)\ge0$

$(t-1)(t-7)\ge0$ $(\because k>0)$

$t\le1$ 또는 $t\ge7$

$t=x+1$을 대입하면 $x+1\le1$ 또는 $x+1\ge7$

$\therefore x\le0$ 또는 $x\ge6$

(ii) $f(2-x)\le-2x+1$에서 $2-x=t$로 놓으면 $x=2-t$이므로

$f(t)\le-2(2-t)+1$, $f(t)\le2t-3$

$f(t)-(2t-3)\le0$ $\therefore g(t)\le0$

즉, ㉠에서 $k(t-1)(t-7)\le0$

$(t-1)(t-7)\le0$ $(\because k>0)$

$1\le t\le7$

$t=2-x$를 대입하면 $1\le2-x\le7$

$-1\le-x\le5$ $\therefore -5\le x\le1$

(i), (ii)에서 $-5\le x\le0$이므로 조건을 만족시키는 정수 x는 -5, -4, -3, -2, -1, 0의 6개이고 그 합은

$-5+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0=-15$

따라서 $a=6$, $b=-15$이므로

$a-b=6-(-15)=21$

08 해결단계

❶ 단계	부등식 $x^2-3x<0$의 해를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 해를 이용하여 x의 값을 기준으로 경우를 나누어 부등식 $x^2-[x]x-2>0$의 해를 구한다.

$x^2-3x<0$에서 $x(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$

$0<x<3$일 때 부등식 $x^2-[x]x-2>0$의 해를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<x<1$일 때,

$[x]=0$이므로 $x^2-2>0$

$\therefore x<-\sqrt{2}$ 또는 $x>\sqrt{2}$

그런데 $0<x<1$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $1\le x<2$일 때,

$[x]=1$이므로 $x^2-x-2>0$

$(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>2$

그런데 $1\le x<2$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $2\le x<3$일 때,

$[x]=2$이므로 $x^2-2x-2>0$

이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 근이 $x=1\pm\sqrt{3}$이므로

$x<1-\sqrt{3}$ 또는 $x>1+\sqrt{3}$

그런데 $2\le x<3$이므로 $1+\sqrt{3}<x<3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$1+\sqrt{3}<x<3$ 답 $1+\sqrt{3}<x<3$

09 해결단계

❶ 단계	$0<x<1$일 때 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 함을 파악한다.
❷ 단계	꼭짓점의 x좌표의 범위에 따른 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하고, a의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

함수 $f(x)=x^2-4ax+a=(x-2a)^2+a-4a^2$에서

$0<x<1$일 때의 함숫값이 항상 양수가 되려면 이 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이어야 한다.

(i) $2a\le0$, 즉 $a\le0$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(0)=a\ge0$에서

$0<x<1$에서 0을 포함하지 않으므로

$a=0$

(ii) $0<2a<1$, 즉 $0<a<\frac{1}{2}$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(2a)=a-4a^2>0$

$a(4a-1)<0 \quad \therefore 0<a<\frac{1}{4}$

(iii) $2a\ge1$, 즉 $a\ge\frac{1}{2}$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(1)=1-3a\ge0$

$0<x<1$에서 1을 포함하지 않으므로

$\therefore a\le\frac{1}{3}$

그런데 $a\ge\frac{1}{2}$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

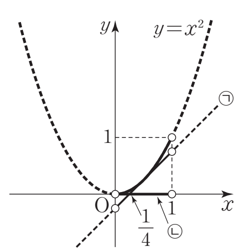
(i), (ii), (iii)에서 구하는 상수 a의 값의 범위는

$0\le a<\frac{1}{4}$ **답** $0\le a<\frac{1}{4}$

• 다른 풀이 •

$x^2-4ax+a>0$에서 $x^2>4ax-a$

즉, 함수 $f(x)=x^2-4ax+a$에서 $0<x<1$일 때의 함숫값이 항상 양수가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $0<x<1$에서 포물선 $y=x^2$이 직선 $y=4ax-a$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.



이때 직선 $y=4ax-a=4a\left(x-\frac{1}{4}\right)$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$을 지나므로 $0<x<1$에서 직선 $y=4ax-a$는 직선 ㉠과 ㉡ 사이에 있거나 직선 ㉡이어야 한다.

(i) 직선 $y=4ax-a$가 ㉠일 때,

이차방정식 $x^2=4ax-a$, 즉 $x^2-4ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-a=0$에서

$a(4a-1)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a\ne0)$

(ii) 직선 $y=4ax-a$가 ㉡일 때, $a=0$

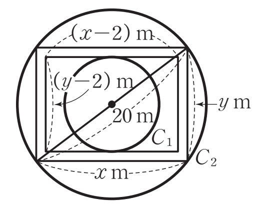
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$0\le a<\frac{1}{4}$

10 해결단계

❶ 단계	통행로의 바깥 경계선의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하고, 안쪽 경계선의 가로, 세로의 길이를 구한다.
❷ 단계	두 원의 지름의 길이를 이용하여 x, y의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	x의 값에 따른 y의 값을 구하여 통행로의 가짓수를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 통행로의 바깥 경계선의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면 안쪽 경계선의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-2)$m, $(y-2)$m이다.



바깥 경계선의 직사각형은 원 C_2의 경계 또는 내부에 있어야 하므로

$x^2+y^2\le20^2$ ……㉠

또한, 안쪽 경계선의 직사각형은 원 C_1의 경계 또는 외부에 있어야 하므로

$x-2\ge10$, $y-2\ge10$

$\therefore x\ge12$, $y\ge12$

(i) $x=12$일 때,

㉠에서 $12^2+y^2\le20^2$

$y^2\le256 \quad \therefore 12\le y\le16$

그런데 y는 자연수이므로 12, 13, 14, 15, 16의 5개이다.

(ii) $x=13$일 때,

㉠에서 $13^2+y^2\le20^2$

$y^2\le231 \quad \therefore 12\le y\le\sqrt{231}$

그런데 y는 자연수이므로 12, 13, 14, 15의 4개이다.

(iii) $x=14$일 때,

㉠에서 $14^2+y^2\le20^2$

$y^2\le204 \quad \therefore 12\le y\le\sqrt{204}$

그런데 y는 자연수이므로 12, 13, 14의 3개이다.

(iv) $x=15$일 때,

㉠에서 $15^2+y^2\le20^2$

$y^2\le175 \quad \therefore 12\le y\le\sqrt{175}$

그런데 y는 자연수이므로 12, 13의 2개이다.

(v) $x=16$일 때,

㉠에서 $16^2+y^2\le20^2$

$y^2\le144 \quad \therefore y=12$

즉, 자연수 y는 12의 1개이다.

(i)~(v)에서 구하는 통행로의 가짓수는

$5+4+3+2+1=15$ **답** 15

11 해결단계

❶ 단계	두 이차방정식 ㉠, ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 m의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	그래프의 위치 관계를 이용하여 이차방정식 ㉠의 두 근이 이차방정식 ㉡의 두 근보다 항상 크기 위한 조건을 찾는다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계를 모두 만족시키는 m의 값의 범위를 구한 후, a, b의 값을 각각 구하여 $a+b$의 값을 계산한다.

$x^2+2mx+1=0$ ……㉠

$x^2+2x+m=0$ ……㉡

이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=m^2-1>0$에서

$(m+1)(m-1)>0$

$\therefore m<-1$ 또는 $m>1$ ……㉢

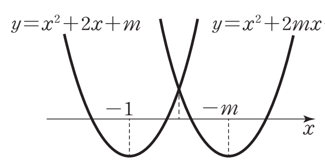
이차방정식 ㉡도 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉡의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1-m>0$에서

$m<1$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $m<-1$ ……㉤

이때 이차방정식 ㉠의 두 근이 이차방정식 ㉡의 두 근보다 항상 크려면 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y=x^2+2mx+1$, $y=x^2+2x+m$의 그래프의 교점의 y좌표가 0보다 커야 한다.



이때 교점의 x좌표는 $x^2+2mx+1=x^2+2x+m$에서

$2(m-1)x=m-1$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉤)

$x=\frac{1}{2}$에서의 함수 $y=x^2+2x+m$의 함숫값이 0보다 크면 되므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+m>0$

$\therefore m>-\frac{5}{4}$ ……㉥

㉤, ㉥에서 $-\frac{5}{4}<m<-1$

따라서 $a=-\frac{5}{4}$, $b=-1$이므로

$a+b=-\frac{9}{4}$

답 $-\frac{9}{4}$

12 해결단계

❶ 단계	주어진 연립부등식의 해를 p에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	p의 값의 범위를 나누어 각 경우에 따른 x의 값의 범위를 구하고 1, 2, 3 중에서 적어도 2개를 포함하는지 확인한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 p의 값의 범위를 구한다.

$x^2-(3p-2)x\geq 0$에서

$x\{x-(3p-2)\}\geq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 3p-2$ $\left(\because p>\frac{2}{3}\right)$ ……㉠

또한, $x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p<0$에서

$x^2-(p^2+p+2)x+p(p^2+2)<0$

$(x-p)\{x-(p^2+2)\}<0$

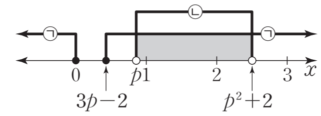
이때 모든 실수 p에 대하여 $p^2-p+2>0$이므로

$p<p^2+2$

$\therefore p<x<p^2+2$ ……㉡

(i) $\frac{2}{3}<p<1$일 때,

$3p-2<p$이고, $\frac{4}{9}<p^2<1$에서 $\frac{22}{9}<p^2+2<3$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같고 1과 2를 포함한다.



즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $p=1$일 때,

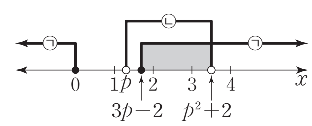
㉠에서 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 1$

㉡에서 $1<x<3$

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 $1<x<3$이고 2만 포함하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $1<p\leq\frac{4}{3}$일 때,

$3p-2>p$이고, $1<p^2\leq\frac{16}{9}$에서 $3<p^2+2\leq\frac{34}{9}$이므로 연립부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같고 2와 3을 포함한다.



즉, 주어진 조건을 만족시킨다.

(iv) $p>\frac{4}{3}$일 때,

$3p-2>2$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 1과 2를 포함할 수 없다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 p의 값의 범위는

$\frac{2}{3}<p<1$ 또는 $1<p\leq\frac{4}{3}$

답 $\frac{2}{3}<p<1$ 또는 $1<p\leq\frac{4}{3}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

㉠의 $x\leq 0$에서 1, 2, 3을 포함하지 않으므로 두 부등식 $x\geq 3p-2$, $p<x<p^2+2$를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 1, 2, 3 중에서 적어도 2개를 포함해야 한다.
이때 $3p-2<p^2+2$이므로 p와 $3p-2$의 대소 관계를 비교하면 $\frac{2}{3}<p<1$, $p=1$, $p>1$로 나누어 생각할 수 있다.
그런데 $p>1$이면 $p^2+2>3$이고 $3p-2>1$이므로 연립부등식의 해가 1, 2, 3 중에서 적어도 2개를 포함하려면 $3p-2\leq 2$이어야 한다.
따라서 p의 값의 범위를 $\frac{2}{3}<p<1$, $p=1$, $1<p\leq\frac{4}{3}$, $p>\frac{4}{3}$로 나누어 풀어야 한다.

III 경우의 수

08. 순열과 조합

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.87~89

01 40	02 ④	03 ③	04 ①	05 ④
06 ④	07 ②	08 ②	09 12	10 1200
11 ④	12 40	13 ③	14 ②	15 126
16 ②	17 ④	18 420	19 ③	20 ①
21 ③				

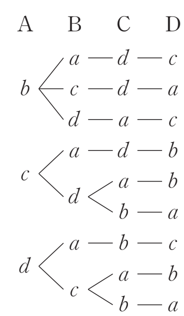
01 $100=2^2\times5^2$이므로 100과 서로소인 자연수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.
100 이하의 자연수 중에서 2의 배수의 개수는 50, 5의 배수의 개수는 20, 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 개수는 10이므로 2의 배수 또는 5의 배수의 개수는
$50+20-10=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$100-60=40$ 답 40

02 나오는 두 개의 공에 적힌 수의 차가 2 이하인 경우는 다음과 같다.
(i) 두 수의 차가 0일 때,
$(0, 0), (1, 1), \cdots, (5, 5)$의 6가지
(ii) 두 수의 차가 1일 때,
$(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)$의 10가지
(iii) 두 수의 차가 2일 때,
$(0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3)$의 8가지
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+10+8=24$ 답 ④

• 다른 풀이 •
나오는 두 개의 공에 적힌 수의 차가 2 이하인 경우의 수는 두 개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수에서 나오는 두 공에 적힌 수의 차가 3 이상인 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.
6개의 공 중에서 한 개씩 두 개의 공을 꺼내는 경우의 수는
$6\times6=36$
이때 나오는 두 공에 적힌 수의 차가 3 이상인 경우는 다음과 같다.
(i) 두 수의 차가 3일 때,
$(0, 3), (3, 0), (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2)$의 6가지
(ii) 두 수의 차가 4일 때,
$(0, 4), (4, 0), (1, 5), (5, 1)$의 4가지
(iii) 두 수의 차가 5일 때,
$(0, 5), (5, 0)$의 2가지
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$6+4+2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$36-12=24$

03 $x+3y<10-2z$에서 $x+3y+2z<10$
이때 x, y, z는 자연수이므로
$x\ge1, y\ge1, z\ge1$
즉, $3y+3\le x+3y+2z<10$에서
$3y<7$ $\quad\therefore y=1, 2$
(i) $y=1$일 때,
$x+2z<7$이므로 자연수 x, z의 순서쌍 (x, z)는
$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)$의 6개
(ii) $y=2$일 때,
$x+2z<4$이므로 자연수 x, z의 순서쌍 (x, z)는
$(1, 1)$의 1개
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$6+1=7$ 답 ③

04 4명의 대사들을 A, B, C, D라 하고 대사들의 현재 근무지를 각각 a, b, c, d라 하자. 이전에 파견되었던 나라에 연속으로 파견되지 않도록 4명의 대사들을 각 나라에 파견하는 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 9이다. 답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

교란순열(완전순열)
일렬로 나열되어 있는 서로 다른 n개를 다시 배열하여 어떠한 것도 이전의 자리가 아닌 자리로 나열하는 순열의 수는
$n!\left\{1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right\}$
이 문제의 경우, 위의 방법을 이용하면 이전에 파견되었던 나라에 연속으로 파견되지 않도록 4명의 대사들을 파견하는 방법의 수는
$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=4!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)$$
$$=4\times3-4+1$$
$$=9$$

05

$(a+b-2c)^2=a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$ ⋯⋯㉠

이므로 서로 다른 항의 개수는 6이다.

$(2x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$ ⋯⋯㉡

이므로 서로 다른 항의 개수는 3이다.

이때 ㉠, ㉡의 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 구하는 전개식의 서로 다른 항의 개수는

$6\times3=18$

답 ④

06

$N=200p=2^3\times5^2\times p$ (p는 소수)에서

(i) $p=2$일 때,

$N=2^4\times5^2$이므로 양의 약수의 개수는

$(4+1)\times(2+1)=5\times3=15$

$\therefore k=15$

(ii) $p=5$일 때,

$N=2^3\times5^3$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(3+1)=4\times4=16$

$\therefore k=16$

(iii) $p\neq2$, $p\neq5$일 때,

$N=2^3\times5^2\times p^1$이므로 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=4\times3\times2=24$

$\therefore k=24$

(i), (ii), (iii)에서 모든 k의 값의 합은

$15+16+24=55$

답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

자연수의 양의 약수의 개수와 총합

a, b, c가 서로 다른 소수이고 p, q, r이 양의 정수일 때, 자연수 $N=a^pb^qc^r$에 대하여

(1) N의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$

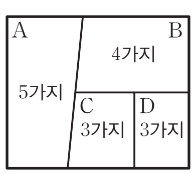
(2) N의 양의 약수의 총합은

$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

(3) N의 약수의 개수가 홀수이면 그 수는 제곱수이다.

(4) N의 약수의 개수가 3이면 그 수는 소수의 제곱수이다.

07



A영역에 칠할 수 있는 색은 5가지, B영역에 칠할 수 있는 색은 A영역에 칠한 색을 제외한 4가지, C영역에 칠할 수 있는 색은 두 영역 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지, D영역에 칠할 수 있는 색은 두 영역 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3=180$

답 ②

• 다른 풀이 •

네 영역 A, B, C, D 중에서 이웃하지 않은 영역은 A, D뿐이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 네 영역 모두 다른 색을 칠하는 경우

칠하는 방법의 수는 5가지 색 중에서 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

(ii) 두 영역 A, D에 같은 색을 칠하는 경우

칠하는 방법의 수는 5가지 색 중에서 3개를 선택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$120+60=180$

08

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 구하는 금액의 가짓수는 500원짜리 동전 8개와 100원짜리 동전 3개를 사용하여 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전 8개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ⋯, 4000원의 9가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외하므로 구하는 금액의 수는

$9\times4-1=35$

답 ②

• 다른 풀이 •

지불할 수 있는 금액(단위 : 원)을 모두 구하면

100, 200, 300, 500, 600, 700, 800, 1000, 1100, 1200, 1300, 1500, 1600, 1700, 1800, 2000, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700, 2800, 3000, 3100, 3200, 3300, 3500, 3600, 3700, 3800, 4000, 4100, 4200, 4300

이므로 구하는 금액의 수는 35이다.

BLACKLABEL 특강 참고

(1) 지불 방법의 수 : 곱의 법칙을 적용한 후, 0원을 지불하는 경우를 제외한다.

(2) 지불 금액의 수 : 지불 방법 중에서 중복되는 금액이 있는 경우 큰 단위의 화폐를 작은 단위의 화폐로 바꾸어 생각한다.

09

6의 배수가 되려면 2의 배수이면서 동시에 3의 배수이어야 한다.

이때 3의 배수가 되려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되어야 하므로 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 1, 2, 4, 5를 택해야 한다.

네 개의 숫자의 합이 $1+2+4+5=12$

또한, 2의 배수가 되려면 일의 자리의 수는 2 또는 4이어야 하므로

(i) 일의 자리의 수가 2인 경우

6의 배수인 네 자리 자연수의 개수는 1, 4, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=3\times2\times1=6$

(ii) 일의 자리의 수가 4인 경우

6의 배수인 네 자리 자연수의 개수는 1, 2, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=3\times2\times1=6$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

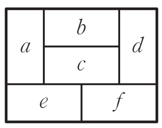
$6+6=12$ **답** 12

BLACKLABEL 특강 필수 개념

배수 판별법

(1) 2의 배수 : 일의 자리의 수가 0 또는 2의 배수
(2) 3의 배수 : 각 자리의 수의 합이 3의 배수
(3) 4의 배수 : 끝의 두 자리가 00이거나 4의 배수
(4) 5의 배수 : 일의 자리의 수가 0 또는 5
(5) 6의 배수 : 2의 배수와 3의 배수의 조건을 동시에 만족
(6) 8의 배수 : 끝의 세 자리가 000이거나 8의 배수
(7) 9의 배수 : 각 자리의 수의 합이 9의 배수

10 오른쪽 그림과 같이 각각의 지역을 a, b, c, d, e, f라 하고 서로 이웃한 2개 지역을 짝 지으면



(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f)의 10개이다.

이때 이웃한 2개의 지역을 하나로 생각하여 5개의 지역을 5명의 조사원에게 할당하는 경우의 수는 5!이므로 구하는 경우의 수는

$10\times5!=10\times120=1200$ **답** 1200

11 남학생 12명을 일렬로 세우는 방법의 수는 12!

이때 남학생끼리는 서로 이웃한 학생 수가 항상 짝수가 되어야 하므로 다음 그림과 같이 남학생 12명을 일렬로 배열한 상태에서 2명씩 묶어 그 사이사이 및 양 끝의 7개의 자리에 여학생 2명을 각각 세워야 한다.

∨남남∨남남∨남남∨남남∨남남∨남남∨

즉, 여학생을 세우는 방법의 수는

${}_7P_2=7\times6=42$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $42\times12!$

$\therefore N=42$ **답** ④

12 어머니는 두 자녀 사이에 앉아야 하므로 양 끝을 제외하고 앉을 수 있다.

(i) 어머니가 2번째 또는 7번째 자리에 앉을 때,

한쪽 끝에 두 자녀 중 한 자녀가 앉고 다른 한쪽에 남은 자녀와 아버지가 앉으면 되므로 경우의 수는

$(2\times2!)\times2=8$

(ii) 어머니가 3, 4, 5, 6번째 자리에 앉을 때,

① 어머니 왼쪽에 1명이 앉는 경우

어머니 왼쪽에 두 자녀 중 한 명이 앉고, 오른쪽에 남은 자녀와 아버지가 앉으면 되므로 경우의 수는

$2\times2!=4$

② 어머니 왼쪽에 2명이 앉는 경우

어머니 왼쪽에 두 자녀 중 한 명과 아버지가 앉고 오른쪽에 남은 자녀가 앉으면 되므로

$2\times2!\times1=4$

①, ②에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$(4+4)\times4=32$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$8+32=40$ **답** 40

• 다른 풀이 •

아버지, 어머니, 두 자녀가 서로 이웃하므로 다음 그림과 같이 빈 의자 4개가 일렬로 배열된 상태에서 4명을 묶어 그 사이사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 하나에 앉도록 해야 한다.

∨(의자)∨(의자)∨(의자)∨(의자)∨

이때 어머니는 두 번째 또는 세 번째에 앉아야 하고, 아버지와 두 자녀가 남은 자리에 앉는 경우에서 두 자녀가 한쪽에 같이 앉는 경우를 제외해야 하므로 경우의 수는

$2\times(3!-2!)=2\times(6-2)=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times8=40$

13 전체 8명을 일렬로 세우는 방법의 수는 8!

이때 양 끝에 여학생을 세우는 방법의 수는 양 끝에 여학생 2명을 선택하여 세우고, 나머지 6명을 그 사이에 일렬로 세워야 하므로

${}_3P_2\times6!$

따라서 적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 방법의 수는

$8!-{}_3P_2\times6!=(8\times7-3\times2)\times6!$

$=50\times720=36000$ **답** ③

• 다른 풀이 •

적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 방법은 다음과 같다.

(i) 왼쪽 끝에 남학생을 세우는 경우

남학생 5명 중에서 1명을 선택하여 왼쪽 끝에 세우고, 나머지 7명을 남은 자리에 일렬로 배열하면 되므로

${}_5P_1\times7!=5\times7!$

(ii) 오른쪽 끝에 남학생을 세우는 경우

남학생 5명 중에서 1명을 선택하여 오른쪽 끝에 세우고, 나머지 7명을 남은 자리에 일렬로 배열하면 되므로

${}_5P_1\times7!=5\times7!$

(iii) 양쪽 끝에 남학생을 세우는 경우

남학생 5명 중에서 2명을 선택하여 양쪽 끝에 세우고,

나머지 6명을 그 사이에 일렬로 배열하면 되므로

$_5P_2 \times 6! = 5 \times 4 \times 6! = 20 \times 6!$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$5\times 7! + 5\times 7! - 20\times 6! = 10\times 7! - 20\times 6!$

$= (10\times 7 - 20)\times 6!$

$= 50\times 6! = 36000$

14 VISUAL의 6개의 문자를 알파벳 순서대로 나열하면

A, I, L, S, U, V

(i) A로 시작하는 문자열의 개수는 $5! = 120$

(ii) I로 시작하는 문자열의 개수는 $5! = 120$

(iii) LA로 시작하는 문자열의 개수는 $4! = 24$

(iv) LI로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면

LIASUV, LIASVU, LIAUSV, LIAUVS,

LIAVSU, LIAVUS의 6개

(i)~(iv)에서 $120+120+24+6=270$이므로 270번째에 오는 문자열은 LIAVUS이다. 답 ②

15 꺼낸 4개의 공의 색이 3종류가 되려면 종류별로 각각 1개, 1개, 2개의 공을 꺼내야 한다.

(i) 흰 공을 2개 꺼내는 경우

흰 공을 2개 꺼내고, 빨간 공과 파란 공을 각각 1개씩 꺼내야 하므로 경우의 수는

$_4C_2 \times {_3C_1} \times {_3C_1} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1}\times 3\times 3 = 54$

(ii) 빨간 공을 2개 꺼내는 경우

빨간 공을 2개 꺼내고, 흰 공과 파란 공을 각각 1개씩 꺼내야 하므로 경우의 수는

$_3C_2 \times {_4C_1} \times {_3C_1} = \dfrac{3\times 2}{2\times 1}\times 4\times 3 = 36$

(iii) 파란 공을 2개 꺼내는 경우

빨간 공 2개를 꺼내는 경우와 같으므로 경우의 수는 36

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$54+36+36=126$ 답 126

16 (i) $a>b>c>d$를 만족시키는 네 자리 자연수는 0부터 9까지의 10개의 숫자 중에서 4개를 택한 다음 크기 순서에 맞게 각 자리의 숫자로 정하면 되므로 그 개수는

$_{10}C_4 = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = 210$

$\therefore m=210$

(ii) $a<b<c<d$를 만족시키는 네 자리 자연수에서 천의 자리의 숫자는 0일 수 없으므로 1부터 9까지의 9개의 숫자 중에서 4개를 택한 다음 크기 순서에 맞게 각 자리의 숫자로 정하면 되므로 그 개수는

$_9C_4 = \dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1} = 126$

$\therefore n=126$

(i), (ii)에서

$m+n=210+126=336$ 답 ②

17 8개의 점 중에서 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$_8C_4 = \dfrac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} = 70$

이때 택한 4개의 점으로 사각형을 만들 수 없는 경우는 다음과 같다.

(i) 일직선 위에 있는 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$_4C_4 = 1$

(ii) 일직선 위에 있는 3개의 점과 호 위에 있는 한 개의 점을 택하는 경우의 수는

$_4C_3 \times {_4C_1} = {_4C_1}\times {_4C_1} = 4\times 4 = 16$

(i), (ii)에서 사각형을 만들 수 없는 경우의 수는

$1+16=17$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$70-17=53$ 답 ④

• 다른 풀이 •

반원의 지름 위의 점이 4개이고 호 위의 점이 4개이므로 다음과 같이 사각형의 개수를 구할 수 있다.

(i) 지름 위에 있는 점을 꼭짓점으로 하지 않는 경우

호 위에 있는 4개의 점을 택하여 사각형을 만들면 되므로 경우의 수는

$_4C_4 = 1$

(ii) 지름 위에 있는 점 1개를 꼭짓점으로 하는 경우

호 위에 있는 3개의 점을 택하여 사각형을 만들면 되므로 경우의 수는

$_4C_1 \times {_4C_3} = {_4C_1}\times {_4C_1} = 4\times 4 = 16$

(iii) 지름 위에 있는 점 2개를 꼭짓점으로 하는 경우

호 위에 있는 2개의 점을 택하여 사각형을 만들면 되므로 경우의 수는

$_4C_2 \times {_4C_2} = \dfrac{4\times 3}{2\times 1}\times \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = 6\times 6 = 36$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 사각형의 개수는

$1+16+36=53$

18 두 학생이 공통으로 신청하는 동아리가 1개 이하가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 학생이 공통으로 신청하는 동아리가 없는 경우

두 학생 중 한 명이 먼저 2개를 선택하고, 다른 학생이 남아 있는 5개의 동아리 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$_7C_2\times{}_5C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=21\times10=210$

(ⅱ) 두 학생이 공통으로 신청하는 동아리가 1개인 경우
두 학생이 공통으로 신청하는 동아리를 선택하는 경우의 수는
$_7C_1=7$
남은 6개의 동아리 중에서 두 학생이 각각 한 개씩 선택하는 경우의 수는
$_6C_1\times{}_5C_1=6\times5=30$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는 $7\times30=210$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$210+210=420$ 답 420

• 다른 풀이 •

두 학생이 공통으로 신청하는 동아리가 1개 이하인 경우의 수는 두 학생이 동아리를 신청하는 모든 경우의 수에서 두 학생이 공통으로 신청하는 동아리가 2개인 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.
두 학생이 서로 다른 7개의 동아리 중에서 각각 2개의 동아리를 선택하는 경우의 수는
$_7C_2\times{}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times\dfrac{7\times6}{2\times1}=21\times21=441$
이때 두 학생이 2개의 동아리를 공통으로 택하는 경우의 수는
$_7C_2=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$441-21=420$

19

지원자 11명 중에서 4명을 선발하는 경우의 수는
$_{11}C_4=\dfrac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$
남학생 또는 여학생만으로 4명을 선발하는 경우의 수는
$_6C_4+{}_5C_4={}_6C_2+{}_5C_1=\dfrac{6\times5}{2\times1}+5=15+5=20$
따라서 남학생과 여학생이 적어도 한 명씩은 포함되도록 하는 경우의 수는
$330-20=310$ 답 ③

• 다른 풀이 •

남학생 6명과 여학생 5명 중에서 남학생과 여학생이 적어도 한 명씩은 포함되도록 4명을 선발하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) 남학생 1명, 여학생 3명을 선발하는 경우의 수는
$_6C_1\times{}_5C_3={}_6C_1\times{}_5C_2=6\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=60$

(ⅱ) 남학생 2명, 여학생 2명을 선발하는 경우의 수는
$_6C_2\times{}_5C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=150$

(ⅲ) 남학생 3명, 여학생 1명을 선발하는 경우의 수는
$_6C_3\times{}_5C_1=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times5=100$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$60+150+100=310$

20

어른 5명, 어린이 3명 중에서 4명을 뽑아 일렬로 앉힐 때, 어린이가 2명 이상 뽑히는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 뽑은 4명 중에서 어린이가 2명 포함되는 경우
어른 5명 중에서 2명, 어린이 3명 중에서 2명을 뽑은 후, 어린이 2명이 모두 이웃하도록 앉혀야 하므로 경우의 수는
$_5C_2\times{}_3C_2\times\underbrace{3!}_{\text{2명의 어린이를 1명으로 생각}}\times\overbrace{2!}^{\text{2명의 어린이가 자리 바꿈}}=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times3\times6\times2=360$

(ⅱ) 뽑은 4명 중에서 어린이가 3명 포함되는 경우
어른 5명 중에서 1명, 어린이는 3명을 모두 뽑은 후, 어린이 3명이 모두 이웃하도록 앉혀야 하므로 경우의 수는
$_5C_1\times{}_3C_3\times\underbrace{2!}_{\text{3명의 어린이를 1명으로 생각}}\times\overbrace{3!}^{\text{3명의 어린이가 자리 바꿈}}=5\times1\times2\times6=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$360+60=420$ 답 ①

21

낚시터에서 2명 이상의 낚시꾼이 내려야 하므로 6명의 낚시꾼이 각 낚시터에 내릴 수 있는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 낚시꾼이 2명, 2명, 2명으로 나누어 내리는 경우
낚시꾼 6명을 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}\times1\times\dfrac{1}{6}=15$
이때 낚시꾼들이 내릴 낚시터를 정하는 경우의 수는
$_4P_3=4\times3\times2=24$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$15\times24=360$

(ⅱ) 낚시꾼이 2명, 4명으로 나누어 내리는 경우
낚시꾼 6명을 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$_6C_2\times{}_4C_4=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times1=15$
이때 낚시꾼들이 내릴 낚시터를 정하는 경우의 수는
$_4P_2=4\times3=12$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$15\times12=180$

(ⅲ) 낚시꾼이 3명, 3명으로 나누어 내리는 경우
낚시꾼 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$_6C_3\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{2!}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\dfrac{1}{2}=10$
이때 낚시꾼들이 내릴 낚시터를 정하는 경우의 수는
$_4P_2=4\times3=12$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$10\times12=120$

(ⅳ) 낚시꾼 6명이 한 번에 내리는 경우
낚시꾼들이 내릴 낚시터를 정하는 경우의 수는
$_4P_1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$360+180+120+4=664$ 답 ③

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.90~95

01 12	02 ③	03 10	04 9	05 135
06 ②	07 ⑤	08 ④	09 660	10 ④
11 4320	12 144	13 72	14 192	15 1008
16 풀이 참조	17 12	18 ③	19 175	20 ①
21 ②	22 ③	23 ③	24 252	25 ②
26 ②	27 3600	28 130	29 432	30 35
31 ④	32 82	33 900	34 30	35 ④

01

$1\le m\le n\le 20$이고, m, n의 최대공약수가 3이므로

$m=3a$, $n=3b$ (단, a, b는 서로소인 자연수, $a\le b\le 6$)

따라서 두 자연수의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$의 12가지이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 12이다. 답 12

02

$8^x\times 4^y\times 2^z=2^{17}$에서 $2^{3x}\times 2^{2y}\times 2^z=2^{17}$

$2^{3x+2y+z}=2^{17}$

$\therefore 3x+2y+z=17$

(i) $x=1$일 때,

$2y+z=14$이므로 자연수 y, z의 순서쌍 (y, z)는

$(1, 12)$, $(2, 10)$, $(3, 8)$, $(4, 6)$, $(5, 4)$, $(6, 2)$의 6개

(ii) $x=2$일 때,

$2y+z=11$이므로 자연수 y, z의 순서쌍 (y, z)는

$(1, 9)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$의 5개

(iii) $x=3$일 때,

$2y+z=8$이므로 자연수 y, z의 순서쌍 (y, z)는

$(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$의 3개

(iv) $x=4$일 때,

$2y+z=5$이므로 자연수 y, z의 순서쌍 (y, z)는

$(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개

(v) $x=5$일 때,

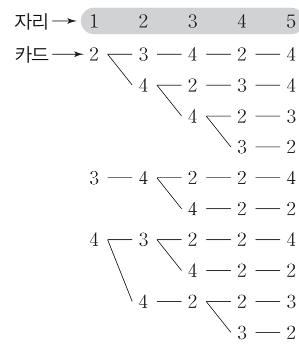
$2y+z=2$이고, 이것을 만족시키는 자연수 y, z의 순서쌍 (y, z)는 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$6+5+3+2=16$ 답 ③

03

수형도를 이용하여 k번째 자리에는 숫자 k가 적힌 카드가 나오지 않도록 다섯 개의 숫자 2, 2, 3, 4, 4를 나열하면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 10이다. 답 10

04

천의 자리의 숫자를 a, 십의 자리의 숫자를 b라 하면 비밀번호가 9로 나누어떨어지므로 비밀번호의 각 자리의 숫자의 합 $a+2+b+5$는 9의 배수이어야 한다.

이때 a, b는 모두 1부터 9까지의 자연수 중 하나이므로

$\underbrace{2}_{1+1}+7\le a+b+7\le \underbrace{18}_{9+9}+7$

$9\le a+b+7\le 25$

$\therefore a+b+7=9$ 또는 $a+b+7=18$

(i) $a+b+7=9$일 때,

$a+b=2$이므로 $a=b=1$로 1개이다.

(ii) $a+b+7=18$일 때,

$a+b=11$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(7, 4)$, $(8, 3)$, $(9, 2)$의 8개이다.

(i), (ii)에서 가능한 비밀번호의 개수는

$1+8=9$ 답 9

05

$ab+bc+ca$의 값이 짝수가 되는 경우는 a, b, c가 모두 짝수이거나 a, b, c 중 한 개만 홀수일 때이다.

(i) a, b, c가 모두 짝수일 때,

가능한 짝수는 2, 4, 6의 3가지이므로 경우의 수는

$3\times 3\times 3=27$

(ii) a, b, c 중 한 개만 홀수일 때,

가능한 짝수는 2, 4, 6의 3가지이고, 홀수는 1, 3, 5, 7의 4가지이므로 경우의 수는

$(3\times 3\times 4)\times 3=108$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$27+108=135$ 답 135

06

교통비가 5000원 미만이 되도록 길을 선택하는 경우는 다음과 같다.

(i) A → C → A를 선택할 때,

A → C일 때 2000원, C → A일 때 2000원의 교통비가 드는 도로를 이용하는 방법의 수는

$2\times 2=4$

(ii) A → B → C → A를 선택할 때,

A → B일 때 1000원, B → C일 때 1500원, C → A 일 때 2000원의 교통비가 드는 도로를 이용하는 방법의 수는

$2\times2\times2=8$

(iii) A → C → B → A를 선택할 때,

A → C일 때 2000원, C → B일 때 1500원, B → A 일 때 1000원의 교통비가 드는 도로를 이용하는 방법의 수는

$2\times2\times2=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$4+8+8=20$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

A → C에서 3000원의 교통비가 드는 도로를 이용하면 C → A에서 최소 2000원, C → B → A에서 $1500+1000=2500$(원)의 교통비가 드는 도로를 이용해야 하므로 교통비가 5000원 이상이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
A → B → C → B → A를 선택할 때,
A → B일 때 1000원, B → C일 때 1500원, C → B일 때 1500원, B → A일 때 1000원의 교통비가 드는 도로를 이용하면 교통비가 5000원이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

07

ㄱ. $A=2^2\times3^3$의 양의 약수의 개수는

$(2+1)\times(3+1)=12$ (참)

ㄴ. (i) $m=0$일 때,

$2^0\times3^0,\ 2^1\times3^0,\ \cdots,\ \underbrace{2^6\times3^0}_{=64}$의 7개

(ii) $m=1$일 때,

$2^0\times3^1,\ 2^1\times3^1,\ \cdots,\ \underbrace{2^5\times3^1}_{=32\times3=96}$의 6개

(iii) $m=2$일 때,

$2^0\times3^2,\ 2^1\times3^2,\ 2^2\times3^2,\ \underbrace{2^3\times3^2}_{=8\times9=72}$의 4개

(iv) $m=3$일 때,

$2^0\times3^3,\ \underbrace{2^1\times3^3}_{=2\times27=54}$의 2개

(v) $m=4$일 때,

$\underbrace{2^0\times3^4}_{=1\times81=81}$의 1개

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 A의 개수는

$7+6+4+2+1=20$ (참)

ㄷ. $A=2^l\times3^m$의 양의 약수의 개수는 $(l+1)(m+1)$이므로 $(l+1)(m+1)=12$를 만족시키는 $l,\ m$의 순서쌍 $(l,\ m)$은

$(0,\ 11),\ (1,\ 5),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (5,\ 1),\ (11,\ 0)$의 6개이다.

따라서 조건을 만족시키는 A의 개수는 6이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

경우의 수에서 배우는 내용은 대학수학 전반에서 기본적이고 중요한 역할을 하므로 절대 소홀히 하면 안 된다. 이 문제에서 가장 중요한 아이디어는 $A=2^l\times3^m$일 때, A의 양의 약수의 개수는 $(l+1)(m+1)$이라는 점이다. 이것은 2와 3이 서로소이므로 가능한 것이다. 만약 $A=2^2\times4^m$이면 A의 양의 약수의 개수는 $(2+1)\times(m+1)=3(m+1)$이 아니라 $A=2^{2+2m}$에서 $2+2m+1=2m+3$이다.

08

$a+b$의 값이 3의 배수가 되려면 $a,\ b$ 모두 3의 배수이거나 $a,\ b$를 각각 3으로 나눈 나머지가 1, 2 또는 2, 1이어야 한다.

(i) $a,\ b$가 모두 3의 배수일 때,

가능한 3의 배수는 3, 6, 9의 3가지이므로 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) $a,\ b$를 각각 3으로 나눈 나머지가 1, 2 또는 2, 1일 때,

3으로 나눈 나머지가 1인 경우는 1, 4, 7, 10의 4가지, 3으로 나눈 나머지가 2인 경우는 2, 5, 8의 3가지이므로 경우의 수는

$4\times3+3\times4=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+24=30$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$a,\ b$는 1부터 10까지의 서로 다른 두 자연수이므로

$3\le a+b\le19$

즉, $a+b$의 값이 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $a+b=3$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2개

(ii) $a+b=6$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$의 4개

(iii) $a+b=9$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (7,\ 2),\ (8,\ 1)$의 8개

(iv) $a+b=12$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 10),\ (3,\ 9),\ (4,\ 8),\ (5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (8,\ 4),\ (9,\ 3),\ (10,\ 2)$의 8개

(v) $a+b=15$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 10),\ (6,\ 9),\ (7,\ 8),\ (8,\ 7),\ (9,\ 6),\ (10,\ 5)$의 6개

(vi) $a+b=18$일 때,

서로 다른 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(8,\ 10),\ (10,\ 8)$의 2개

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$2+4+8+8+6+2=30$

09

조건 (가), (나), (다)에서 영역 ㉠에 칠할 수 있는 색은 노란색을 제외한 5가지,

영역 ㉥에 칠할 수 있는 색은 영역 ㉠에 칠한 색과 노란색을 제외한 4가지이다.

(i) 영역 ㉢에만 노란색으로 칠하는 경우

영역 ㉤에 칠할 수 있는 색은 세 영역 ㉠, ㉢, ㉥에 칠한 색을 제외한 3가지,

영역 ㉡에 칠할 수 있는 색은 네 영역 ㉠, ㉢, ㉤, ㉥에 칠한 색을 제외한 2가지,
영역 ㉣에 칠할 수 있는 색은 네 영역 ㉠, ㉢, ㉤, ㉥에 칠한 색을 제외한 2가지이다.
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는 $3\times2\times2=12$

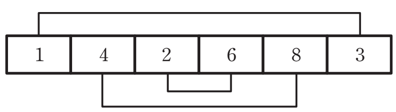
(ii) 영역 ㉤에만 노란색으로 칠하는 경우
(i)과 같으므로 경우의 수는 12

(iii) 두 영역 ㉢, ㉤ 모두 노란색으로 칠하는 경우
영역 ㉡에 칠할 수 있는 색은 세 영역 ㉠, ㉢, ㉥에 칠한 색을 제외한 3가지,
영역 ㉣에 칠할 수 있는 색은 세 영역 ㉠, ㉢, ㉥에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$3\times3=9$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$5\times4\times(12+12+9)=660$ **답** 660

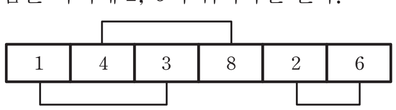
10 모든 이웃하는 두 수의 곱이 4의 배수이어야 하므로 1과 3은 반드시 4의 배수와 이웃해야 한다. 이때 4의 배수는 4, 8뿐이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 양 끝자리에 1과 3이 위치할 경우
양 끝자리에 1, 3이 위치하면 그와 이웃한 자리에는 4의 배수인 4, 8이 위치하고 남는 자리에는 2, 6이 위치하면 된다.



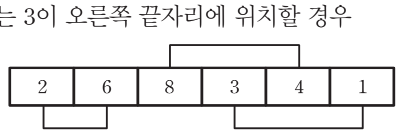
1, 3이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지,
4, 8이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지,
2, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지이다.
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$2\times2\times2=8$

(ii) 1 또는 3 중 하나만 끝자리에 위치할 경우
① 1 또는 3이 왼쪽 끝자리에 위치할 경우
1이 왼쪽 끝자리에 위치할 때 1의 오른쪽과 3의 양 옆자리에는 4의 배수가 위치해야 하므로 왼쪽 끝자리부터 (1, 4의 배수, 3, 4의 배수)의 순서로 위치하고 남는 자리에 2, 6이 위치하면 된다.



1, 3이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지,
4, 8이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지,
2, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지이다.
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$2\times2\times2=8$

② 1 또는 3이 오른쪽 끝자리에 위치할 경우

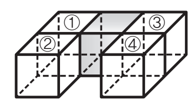


1 또는 3이 왼쪽 끝자리에 위치하는 경우와 같으므로 경우의 수는 8
①, ②에서 구하는 경우의 수는 $8+8=16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$8+16=24$ **답** ④

11 5명에게 서로 다른 연필 4자루를 각각 하나씩 나누어 주는 경우의 수는
${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$
연필을 받지 못하는 1명에게 지우개 한 개를 나누어 주는 경우의 수는
${}_3P_1=3$
남은 지우개 2개를 지우개를 받지 않은 4명에게 나누어 주는 방법의 수는
${}_4P_2=4\times3=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times3\times12=4320$ **답** 4320

12 오른쪽 그림과 같이 색칠하지 않은 상자를 ①, ②, ③, ④라 하면 짝수가 적힌 공을 넣을 수 있는 상자는



(①, ③) 또는 (①, ④) 또는 (②, ③) 또는 (②, ④)
이므로 짝수가 적힌 공을 넣는 경우의 수는
$4\times{}_3P_2=4\times3\times2=24$
나머지 세 상자에 홀수가 적힌 공을 넣는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times6=144$ **답** 144

13 B 지점과 D 지점 사이를 잇는 도로를 이용할 수 있다고 하면 A 지점을 출발한 후 5개의 지점 B, C, D, E, F를 들르는 방법의 수는
$5!=120$
이 중에서 2개의 지점 B, D를 연속하여 들르는 방법의 수는
$\underbrace{4!}_{\text{2개의 지점 B, D를 1개의 지점으로 생각}}\times\underbrace{2!}_{\text{2개의 지점 B, D가 자리 바꿈}}=48$
따라서 구하는 방법의 수는
$120-48=72$ **답** 72

14 영화관의 좌석에 왼쪽부터 차례대로 번호를 부여하면 다음과 같다.

A열	1번	2번	3번	4번	5번
B열	1번	2번	3번	4번	5번

(i) 아이가 B열 1번에 앉는 경우
아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의

수에서 B열 2번을 제외하고 남은 세 자리에 앉는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$_4P_2-{}_3P_2=4\times3-3\times2$

$=12-6=6$

할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (2번, 3번) 또는 (3번, 4번) 또는 (4번, 5번)에 앉고 서로 바꿔 앉는 경우의 수와 같으므로

$3\times2!=6$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times6=36$

(ii) 아이가 B열 2번에 앉는 경우

아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의 수에서 아이의 양옆 자리를 제외한 두 자리에 앉는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$_4P_2-2!=4\times3-2$

$=12-2=10$

할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (3번, 4번) 또는 (4번, 5번)에 앉고 서로 바꿔 앉는 경우의 수와 같으므로

$2\times2!=4$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$10\times4=40$

(iii) 아이가 B열 3번에 앉는 경우

아버지 또는 어머니가 아이와 이웃하여 앉는 경우의 수는 아버지와 어머니가 남은 네 자리에 앉는 경우의 수에서 아이의 양옆 자리를 제외한 두 자리에 앉는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$_4P_2-2!=4\times3-2$

$=12-2=10$

할아버지와 할머니가 이웃하여 앉는 경우의 수는 할아버지와 할머니가 A열 (1번, 2번) 또는 (4번, 5번)에 앉고 서로 바꿔 앉는 경우의 수와 같으므로

$2\times2!=4$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$10\times4=40$

(iv) 아이가 B열 4번에 앉는 경우

아이가 B열 2번에 앉는 경우와 같으므로 경우의 수는 40

(v) 아이가 B열 5번에 앉는 경우

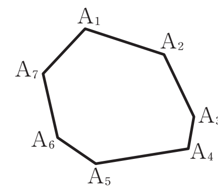
아이가 B열 1번에 앉는 경우와 같으므로 경우의 수는 36

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$36+40+40+40+36=192$ 답 192

15 해결단계

❶ 단계	각 꼭짓점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_7이라 하고, 조건 (가), (나)를 이용하여 짝수와 홀수는 각각 적어도 2개씩은 이웃해야 함을 파악한다.
❷ 단계	칠각형에 배치하였을 때, 홀수끼리 모두 이웃하고 짝수끼리 모두 이웃해야 함을 파악한다.
❸ 단계	❷ 단계를 만족시키는 하나의 경우에 따라 칠각형의 각 꼭짓점에 7개의 수를 적는 방법이 각각 7가지씩 존재함을 이용하여 조건을 만족시키는 방법의 수를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 칠각형의 각 꼭짓점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_7이라 하고, 조건을 만족시키도록 각 꼭짓점에 적은 수를 $[A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7]$로 나타내자.

조건 (가), (나)에서 [짝홀짝], [홀짝홀]과 같이 홀수 양쪽에 짝수, 짝수 양쪽에 홀수를 배정하면 안 되므로 [홀홀] 또는 [짝짝]과 같이 홀수와 짝수는 최소 2개씩 이웃해야 한다.

그런데 짝수가 3개이므로 [홀짝짝홀]이면 남은 짝수의 양쪽에는 홀수가 배정되므로 조건을 만족시키지 못한다.

즉, 짝수 3개는 모두 이웃해야 한다.

마찬가지로 [짝홀홀홀짝]이면 남은 홀수 한 개의 양쪽에 짝수가 배정되므로 조건을 만족시키지 못한다. 즉, 홀수는 짝수개 단위로 이웃해야 한다.

이때 [짝짝짝], [홀홀], [홀홀]을 만족시키도록 칠각형의 각 꼭짓점에 수를 적으면 [홀홀], [홀홀]은 이웃하게 되므로 칠각형의 각 꼭짓점의 수는 짝수끼리 모두 이웃하고, 홀수끼리 모두 이웃하도록 배정되어야 한다.

따라서 일렬로 나열한 일곱 개의 수를 칠각형 위에 적는 경우는 일렬로 나열한 수마다 일곱 가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는

$7\times\underbrace{4!}_{\text{홀수끼리 자리 바꿈}}\times\overbrace{3!}^{\text{짝수끼리 자리 바꿈}}=1008$ 답 1008

16

서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수 $_nP_r$은 n개 중 하나를 A라 할 때, 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 택한 r개 중에 A가 포함되지 않을 때,

A를 제외한 ($\boxed{n-1}$)개에서 r개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 $_{n-1}P_r$이다.

(ii) 택한 r개 중에 A가 포함될 때,

n개 중 A를 포함하여 r개를 택하고 일렬로 나열하는 경우의 수는 A를 이미 택했다고 가정하고 나머지 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열한 후, A의 위치를 고려하면 된다.

A를 제외한 ($\boxed{n-1}$)개에서 $(r-1)$개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\boxed{_{n-1}P_{r-1}}$이고, 각 경우에 대하여 A를 이미 배열된 $(r-1)$개의 양 끝 또는 사이사이에 배열하는 방법이 $\boxed{r}$가지이므로 그 경우의 수는 $r\times{}_{n-1}P_{r-1}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

${}_{n}\mathrm{P}_{r}={}_{n-1}\mathrm{P}_{r}+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$\therefore$ (가): $n-1$, (나): ${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$, (다): r 　　　답 풀이 참조

17 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}$은 1부터 $n+2$까지의 $(n+2)$개의 자연수 중에서 n개의 자연수를 택하는 경우의 수이다.

이것을 택한 수 중에서 가장 큰 수에 따라 경우를 나누어 구할 수도 있다.

(ⅰ) 1부터 $n+2$까지의 $(n+2)$개의 자연수 중에서 n개를 택할 때, 가장 큰 수가 $\boxed{n}$인 경우의 수는 n을 먼저 택하고 n, $n+1$, $n+2$를 제외한 나머지 $(n-1)$개의 자연수 중에서 $(n-1)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$이다.

(ⅱ) 1부터 $n+2$까지의 $(n+2)$개의 자연수 중에서 n개를 택할 때, 가장 큰 수가 $\boxed{n+1}$인 경우의 수는 $n+1$을 먼저 택하고 $n+1$, $n+2$를 제외한 나머지 n개의 자연수 중에서 $(n-1)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n}\mathrm{C}_{n-1}$이다.

(ⅲ) 1부터 $n+2$까지의 $(n+2)$개의 자연수 중에서 n개를 택할 때, 가장 큰 수가 $\boxed{n+2}$인 경우의 수는 $n+2$를 먼저 택하고 $n+2$를 제외한 나머지 $(n+1)$개의 자연수 중에서 $(n-1)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)은 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여

${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+2}\mathrm{C}_{n}$

$\therefore f(n)=n,\ g(n)=n+1,\ h(n)=n+2$

$\therefore f(2)+g(3)+h(4)=2+4+6=12$ 　　　답 12

18 1, 2, 3을 제외한 4, 5, 6, ⋯ 13 중에서 7개 이상의 수를 뽑은 후, 뽑은 수에 1과 2를 추가하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_{7}+{}_{10}\mathrm{C}_{8}+{}_{10}\mathrm{C}_{9}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

$={}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{10}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{0}$

$=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}+\dfrac{10\times9}{2\times1}+10+1$

$=120+45+10+1=176$ 　　　답 ③

19 A가 뽑은 카드에 적힌 수의 최댓값이 9이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) B가 뽑은 3장의 카드 중에서 10이 적힌 카드가 있을 때, B는 4 이상 8 이하인 자연수가 적힌 카드 중에서 $\underset{3,\,10\text{ 제외}}{\underline{1\text{장}}}$을 더 뽑아야 하므로 경우의 수는

${}_{5}\mathrm{C}_{1}=5$

A는 8 이하의 자연수가 적힌 카드 중에서 B가 뽑은 2장을 제외한 6장의 카드에서 2장을 뽑아야 하므로 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$5\times15=75$

(ⅱ) B가 뽑은 3장의 카드 중에서 10이 적힌 카드가 없을 때, B는 4 이상 8 이하인 자연수가 적힌 카드 중에서 $\underset{3\text{ 제외}}{\underline{2\text{장}}}$을 뽑아야 하므로 경우의 수는

${}_{5}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

A는 8 이하의 자연수가 적힌 카드 중에서 B가 뽑은 3장을 제외한 5장의 카드에서 2장을 뽑아야 하므로 경우의 수는

${}_{5}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$10\times10=100$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$75+100=175$ 　　　답 175

20 9를 9개의 1로 분리하여 나열한 후, 그 사이에 +를 2개 넣어 세 묶음으로 나누면 된다.

9를 1로 분리하여 나열하면

1○1○1○1○1○1○1○1○1

따라서 구하는 방법의 수는 위의 8개의 ○ 안에 +를 2개 넣는 방법의 수와 같으므로

${}_{8}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$ 　　　답 ①

• 다른 풀이 •

합하여 9가 되는 세 자연수를 순서쌍으로 나타내면

(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)

이때 순서가 바뀌면 서로 다른 경우이므로 중복된 숫자의 개수에 따라 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) 세 숫자가 모두 다른 경우, 즉 (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)일 때,

3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수가 $3!=6$이므로 이때의 경우의 수는

$3\times6=18$

(ⅱ) 세 숫자 중에서 두 개가 같은 경우, 즉 (1, 1, 7), (1, 4, 4), (2, 2, 5)일 때,

(1, 1, 7)의 경우 (1, 1, 7), (1, 7, 1), (7, 1, 1)을 다른 경우로 생각하므로 이때의 경우의 수는

$3\times3=9$

(ⅲ) 세 숫자가 모두 같은 경우, 즉 (3, 3, 3)뿐이므로 경우의 수는 1가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$18+9+1=28$

21 세 방향의 직선 $-$, $/$, $\backslash$을 각각 a, b, c라 하면 a가 3개, b가 3개, c가 4개이고 사각형을 만들 수 있는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) a 중에서 2개, b 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$$

(ⅱ) a 중에서 2개, c 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times\frac{4\times3}{2\times1}=3\times6=18$$

(ⅲ) b 중에서 2개, c 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times\frac{4\times3}{2\times1}=3\times6=18$$

(ⅳ) a 중에서 2개, b 중에서 1개, c 중에서 1개를 택하는 경우

$${}_3C_2\times{}_3C_1\times{}_4C_1={}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_1=3\times3\times4=36$$

(ⅴ) a 중에서 1개, b 중에서 2개, c 중에서 1개를 택하는 경우

$${}_3C_1\times{}_3C_2\times{}_4C_1={}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_1=3\times3\times4=36$$

(ⅵ) a 중에서 1개, b 중에서 1개, c 중에서 2개를 택하는 경우

$${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_2=3\times3\times\frac{4\times3}{2\times1}=3\times3\times6=54$$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 사각형의 개수는

$9+18+18+36+36+54=171$ 답 ②

• 다른 풀이 •

만들 수 있는 사각형의 개수는 10개의 직선 중에서 4개를 택하는 경우의 수에서 사각형을 만들 수 없는 경우의 수를 빼면 된다.

3개의 평행한 직선과 다른 하나의 직선을 택하거나 4개의 평행한 직선을 택하면 사각형을 만들지 못하므로 구하는 사각형의 개수는

$${}_{10}C_4-\{2\times{}_3C_3\times(3+4)+{}_4C_3\times(3+3)+{}_4C_4\}=171$$

22 서로 만나지 않도록 3개의 선분을 그으려면 두 변 AB, CD에서 택한 각각의 3개의 점을 위에서부터 첫 번째 점끼리, 두 번째 점끼리, 세 번째 점끼리 각각 연결하면 된다.

이때 변 AB 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

마찬가지로 변 CD 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수도 20이므로 구하는 방법의 수는

$20\times20=400$ 답 ③

23 (ⅰ) 6개의 모서리 중에서 4개, 5개, 6개의 모서리에 색을 칠하면 네 꼭짓점이 모두 연결되므로 경우의 수는

$${}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6={}_6C_2+{}_6C_1+{}_6C_6$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}+6+1=15+7=22$$

(ⅱ) 3개의 모서리에 색을 칠하면 세 모서리가 삼각형을 이루지 않아야 하므로 경우의 수는

$${}_6C_3-4=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}-4=20-4=16$$

(ⅲ) 2개 이하의 모서리에 색을 칠하여 네 개의 꼭짓점을 모두 연결할 수는 없다.

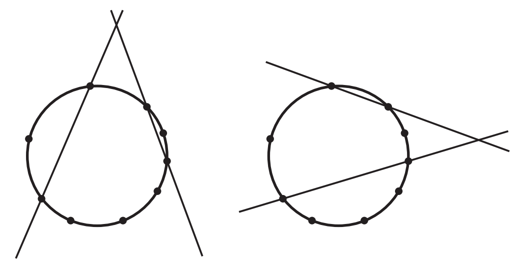
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$22+16=38$ 답 ③

24 9개의 점 중에서 임의로 4개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

이때 서로 다른 4개의 점으로 만들어지는 두 직선이 원의 외부에서 만나는 경우는 다음과 같이 2가지이다.



따라서 구하는 경우의 수는

$126\times2=252$ 답 252

25 영국, 이탈리아에서 각각 적어도 1박을, 프랑스에서 적어도 2박을 해야 하므로 4박은 항상 E, I, F, F가 들어간다. 여행을 하는 나라의 순서는 상관하지 않고 나머지 3박을 지낼 나라의 개수를 정하면 다음과 같다.

(ⅰ) 3박을 모두 한 나라에서 할 때,

3박 할 나라를 결정하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$

(ⅱ) 3박을 두 개의 나라에서 할 때,

2박 할 나라와 1박 할 나라를 결정하는 방법의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

(ⅲ) 3박을 세 개의 나라에서 할 때,

세 나라에서 각각 1박씩 지내면 되므로 그 방법의 수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 나머지 3박을 할 나라의 개수를 정하는 방법의 수는

$3+6+1=10$

이때 3개국을 여행하는 순서를 정하는 방법의 수는

같은 나라는 연속해서 머무르므로 나라의 순서만 정하면 된다.

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 여행 코스의 개수는

$10\times6=60$ 답 ②

26 남학생이 4명, 여학생이 3명이므로 전체 7명 중에서 초콜릿을 받을 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

남학생 1명, 여학생 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4$

따라서 남학생을 적어도 2명 이상 포함하여 4명의 학생을 뽑는 경우의 수는

$35 - 4 = 31$

뽑은 4명의 학생에게 서로 다른 4개의 초콜릿을 1개씩 나누어주는 경우의 수는 $4!$이므로 구하는 경우의 수는

$31 \times 4! = 31 \times 24 = 744$ **답** ②

• 다른 풀이 •

7명의 학생 중 적어도 남학생을 2명 이상 포함하여 4명을 뽑아 서로 다른 4개의 초콜릿을 1개씩 나누어주는 경우는 다음과 같다.

(i) 남학생 2명, 여학생 2명을 뽑는 경우

${}_4C_2 \times {}_3C_2 \times 4! = 6 \times 3 \times 24 = 432$

(ii) 남학생 3명, 여학생 1명을 뽑는 경우

${}_4C_3 \times {}_3C_1 \times 4! = 4 \times 3 \times 24 = 288$

(iii) 남학생만 4명을 뽑는 경우

${}_4C_4 \times 4! = 24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$432 + 288 + 24 = 744$

27 A팀이 B팀을 게임 스코어 3 : 1로 이기려면 3번째 게임까지 2번 승, 1번 패하고, 4번째 게임에서 이겨야 한다.

세 번의 경기 중에서 A팀이 이기는 두 번의 경기를 고르는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

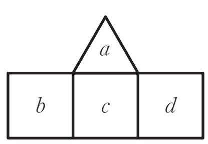
한편, 이 게임에 필요한 선수는 A팀은 2명, B팀은 3명이고 각 팀은 5명의 선수로 구성되어 있으므로 선수를 뽑아 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5P_2 \times {}_5P_3 = (5 \times 4) \times (5 \times 4 \times 3) = 20 \times 60 = 1200$

따라서 구하는 경우의 수는

$3 \times 1200 = 3600$ **답** 3600

28 오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 왼쪽부터 차례로 b, c, d라 하면



조건 (가)에서 $a > b$, $a > c$, $a > d$

조건 (나)에서 $b \neq c$, $c \neq d$

(i) $b = d$일 때,

6개의 자연수 중에서 a, b, c에 들어갈 서로 다른 3개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

택한 3개의 수 중 가장 큰 수를 a, 나머지 수를 b, c로 정하면 되므로 경우의 수는

$1 \times 2! = 2$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$20 \times 2 = 40$

(ii) $b \neq d$일 때,

6개의 자연수 중에서 a, b, c, d에 들어갈 서로 다른 4개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4 = {}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

택한 4개의 수 중 가장 큰 수를 a, 나머지 수를 b, c, d로 정하면 되므로 경우의 수는

$1 \times 3! = 6$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$15 \times 6 = 90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$40 + 90 = 130$ **답** 130

• 다른 풀이 •

조건 (가), (나)에서 정삼각형에 적을 수 있는 수는 3, 4, 5, 6이다.

(i) 정삼각형에 3을 적는 경우

정사각형에 적을 수 있는 수는 1, 2이므로 가운데 정사각형에 적을 수 있는 수는 2가지, 양옆에 있는 정사각형에 적을 수 있는 수는 각각 1가지이다.

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$2 \times 1 \times 1 = 2$

(ii) 정삼각형에 4를 적는 경우

정사각형에 적을 수 있는 수는 1, 2, 3이므로 가운데 정사각형에 적을 수 있는 수는 3가지, 양옆에 있는 정사각형에 적을 수 있는 수는 각각 2가지이다.

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3 \times 2 \times 2 = 12$

(iii) 정삼각형에 5를 적는 경우

정사각형에 적을 수 있는 수는 1, 2, 3, 4이므로 가운데 정사각형에 적을 수 있는 수는 4가지, 양옆에 있는 정사각형에 적을 수 있는 수는 각각 3가지이다.

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4 \times 3 \times 3 = 36$

(iv) 정삼각형에 6을 적는 경우

정사각형에 적을 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5이므로 가운데 정사각형에 적을 수 있는 수는 5가지, 양옆에 있는 정사각형에 적을 수 있는 수는 각각 4가지이다.

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$5 \times 4 \times 4 = 80$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$2 + 12 + 36 + 80 = 130$

29 7개의 공 중에서 4개의 공을 꺼내는 경우는 다음과 같다.

(i) 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 숫자가 없는 경우

숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 공을 1개씩 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_1C_1 \times {}_1C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 4! = 144$

(ⅱ) 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

① 숫자 3이 적힌 공이 한 쌍 있는 경우

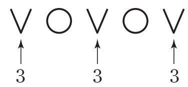
숫자 3이 적힌 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{2}=1$

나머지 2개의 공에 적힌 숫자는 서로 달라야 하므로 각각의 공에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면 (1, 2), (1, 4), (2, 4)이다.

따라서 서로 다른 숫자가 적힌 2개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_{1}C_{1}\times{}_{1}C_{1}+{}_{1}C_{1}\times{}_{3}C_{1}+{}_{1}C_{1}\times{}_{3}C_{1}=7$



숫자 3이 적힌 2개의 공을 서로 이웃하지 않도록 나열하려면 남은 2개의 공을 일렬로 나열한 뒤, 양 끝과 사이사이에 숫자 3이 적힌 공을 나열해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{2}P_{2}\times{}_{3}P_{2}=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times7\times12=84$

② 숫자 4가 적힌 공이 한 쌍 있는 경우

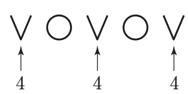
숫자 4가 적힌 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

${}_{3}C_{2}=3$

나머지 2개의 공에 적힌 숫자는 서로 달라야 하므로 각각의 공에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면 (1, 2), (1, 3), (2, 3)이다.

따라서 서로 다른 숫자가 적힌 2개의 공을 뽑는 경우의 수는

${}_{1}C_{1}\times{}_{1}C_{1}+{}_{1}C_{1}\times{}_{2}C_{1}+{}_{1}C_{1}\times{}_{2}C_{1}=5$



숫자 4가 적힌 2개의 공을 서로 이웃하지 않도록 나열하려면 남은 2개의 공을 일렬로 나열한 뒤, 양 끝과 사이사이에 숫자 4가 적힌 공을 나열해야 하므로 구하는 경우의 수는

${}_{2}P_{2}\times{}_{3}P_{2}=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times5\times12=180$

(ⅲ) 꺼낸 4개의 공 중에서 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

숫자 3이 적힌 공과 숫자 4가 적힌 공을 각각 2개씩 꺼내어 교대로 나열해야 하므로 숫자 3이 적힌 공과 숫자 4가 적힌 공을 각각 2개씩 꺼내는 경우의 수는

${}_{2}C_{2}\times{}_{3}C_{2}=3$

같은 숫자가 적힌 공이 이웃하지 않도록 교대로 나열하는 경우의 수는

$2\times2!\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times8=24$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$144+84+180+24=432$ **답** 432

30 해결단계

❶ 단계	1을 포함한 홀수 3개, 2를 포함한 짝수 3개를 택하는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	숫자를 배열하는 방법에 따른 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

9개의 자연수 1, 2, 3, …, 9 중에서 1을 제외한 홀수 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{4}C_{2}$이고, 2를 제외한 짝수 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{3}C_{2}$이므로 6개의 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_{4}C_{2}\times{}_{3}C_{2}=\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{3\times2}{2\times1}=18$

이때 1의 양옆에 짝수를 배열하거나 2의 양옆에 홀수를 배열하여 여섯 자리 자연수를 만드는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (짝수, 1, 짝수)로 배열하는 경우

1의 양쪽에 짝수를 배열하는 경우의 수는

${}_{3}P_{2}=3\times2=6$

(짝수, 1, 짝수)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 홀수 2개, 짝수 1개와 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times24=144$

(ⅱ) (홀수, 2, 홀수)로 배열하는 경우

2의 양쪽에 홀수를 배열하는 경우의 수는

${}_{3}P_{2}=3\times2=6$

(홀수, 2, 홀수)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 홀수 1개, 짝수 2개와 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times24=144$

(ⅲ) (짝수, 1, 2, 홀수)로 배열하는 경우

1의 왼쪽에 배열할 짝수를 택하는 경우의 수는 2가지, 2의 오른쪽에 배열할 홀수를 택하는 경우의 수는 2가지, (짝수, 1, 2, 홀수)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 홀수 1개, 짝수 1개와 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$2\times2\times6=24$

(ⅳ) (홀수, 2, 1, 짝수)로 배열하는 경우

2의 왼쪽에 배열할 홀수를 택하는 경우의 수는 2가지, 1의 오른쪽에 배열할 짝수를 택하는 경우의 수는 2가지, (홀수, 2, 1, 짝수)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 홀수 1개, 짝수 1개와 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$2\times2\times6=24$

(ⅴ) (짝수, 1, 짝수), (홀수, 2, 홀수)로 배열하는 경우

1의 양쪽에 짝수를 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

2의 양쪽에 홀수를 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

(짝수, 1, 짝수)와 (홀수, 2, 홀수)의 묶음의 순서를 바꾸는 경우의 수는 2가지

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$18\times\{144+144-\overbrace{(24+24+8)}^{\text{(i), (ii)가 동시에 일어나는 경우의 수}}\}=18\times232$$
$$=2^4\times3^2\times29$$

따라서 $p=4$, $q=2$, $r=29$이므로

$p+q+r=35$ **답** 35

31 (i) 4명의 특정 선수를 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$$

(ii) 나머지 9명 중에서 3명, 3명을 뽑아 (i)의 각 팀에 배정하는 방법의 수는

$$\left({}_9C_3\times{}_6C_3\times\frac{1}{2!}\right)\times2!$$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times\frac{1}{2}\times2$$
$$=1680$$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$3\times1680=5040$ **답** ④

32 학생은 총 8명이고, 각 조에는 적어도 3명을 배정해야 하므로 두 개의 조는 3명, 5명 또는 4명, 4명으로 구성되어야 한다.

(i) 3명, 5명씩 2개조로 나누는 경우

① 3명인 조에 여학생 2명이 포함되려면 남학생 6명을 1명, 5명으로 나누어 남학생 1명이 있는 조에 여학생을 배정하면 되므로 경우의 수는

$${}_6C_1\times{}_5C_5=6\times1=6$$

② 5명인 조에 여학생 2명이 포함되려면 남학생 6명을 3명, 3명으로 나눈 후, 여학생 2명을 2개의 조 중에서 하나에 배정하면 되므로 경우의 수는

$$\left({}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}\right)\times2!=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}\times2$$
$$=20$$

①, ②에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6+20=26$

(ii) 4명, 4명씩 2개조로 나누는 경우

남학생 6명을 2명, 4명으로 나누어 남학생 2명이 있는 조에 여학생 2명을 배정하면 되므로 경우의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_4=\frac{6\times5}{2\times1}\times1=15$$

(i), (ii)에서 구한 2개조를 두 구역 A, B에 모두 배정하는 방법의 수는

$(26+15)\times2!=82$ **답** 82

33 조건 (가)에서 상자 3개에 홀수가 적힌 카드를 1장 이상 넣어야 하므로 서로 다른 5장의 홀수 카드는 각 상자에 (2장, 2장, 1장) 또는 (3장, 1장, 1장)씩 넣을 수 있다.

즉, 홀수 카드 5장을 나누어 같은 종류의 세 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_5C_2\times\overset{={}_3C_1}{{}_3C_2}\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}+\overset{={}_5C_2}{{}_5C_3}\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$$
$$=\frac{5\times4}{2\times1}\times3\times1\times\frac{1}{2}+\frac{5\times4}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=15+10=25$$

조건 (나)에서 각 상자에 넣은 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이려면 세 상자에 짝수가 모두 들어가야 하므로 서로 다른 4장의 짝수 카드는 각 상자에 (2장, 1장, 1장)씩 넣을 수 있다.

즉, 짝수 카드 4장을 나누어 세 상자에 넣는 방법의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times3!$$ 같은 상자에 서로 다른 홀수 카드를 넣었으므로 서로 다른 종류의 상자이다.

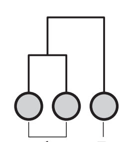
$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}\times6=36$$

따라서 구하는 경우의 수는

$25\times36=900$ **답** 900

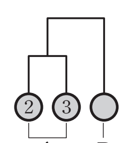
단계	채점 기준	배점
(가)	홀수 카드 5장을 세 상자에 넣는 방법의 수를 구한 경우	40%
(나)	짝수 카드 4장을 세 상자에 넣는 방법의 수를 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 방법의 수를 구한 경우	20%

34 실력이 1위인 팀은 실력이 2위인 팀과 3위인 팀이 시합을 하기 전에 두 팀과 먼저 시합하면 안 된다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 토너먼트가 진행되는 대진표 영역을 각각 A, B라 하면 실력이 2위인 팀과 3위인 팀이 시합을 할 수 있는 경우는 다음과 같다.

(i) 실력이 2위인 팀과 3위인 팀이 영역 A에 배정되는 경우



두 팀이 먼저 시합할 수 있으므로 나머지 팀은 임의로 배정할 수 있다.

남은 4개의 팀 중 두 팀의 경기에서 승리한 팀과 시합하는 팀을 고르는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

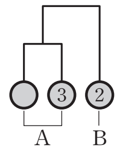
남은 3개의 팀을 2팀, 1팀으로 분할하여 배정하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4\times3=12$

(ii) 실력이 3위인 팀이 A, 2위인 팀이 영역 B에 배정되는 경우



실력이 3위인 팀이 반드시 이겨야 하므로 실력이 4위, 5위, 6위인 팀 중에서 실력이 3위인 팀과 경기하게 되는 팀을 고르는 경우의 수는

$_3C_1=3$

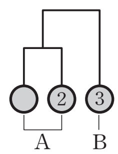
남은 3개의 팀을 2팀, 1팀으로 분할하여 배정하는 경우의 수는

$_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times3=9$

(iii) 실력이 2위인 팀이 A, 3위인 팀이 영역 B에 배정되는 경우



(ii)와 같으므로 경우의 수는 9

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$12+9+9=30$ 답 30

35 모든 공의 개수가 16이고, 각 상자에 들어갈 공의 개수의 최솟값은 4이므로 각 상자에 들어 있는 공의 수가 4 또는 8이어야 한다.

상자를 검은 공이 들어 있는 개수가 가장 작은 것부터 순서대로 각각 A, B, C라 하면 각 상자에 흰 공 10개를 각 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 세 상자 A, B, C에 들어 있는 공의 개수가 각각 4, 4, 8일 때,

세 상자에 흰 공을 각각 3, 2, 5개를 나누어 넣어야 하므로

$${}_{10}C_3\times{}_7C_2\times{}_5C_5=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}\times1$$
$$=120\times21=2520$$

(ii) 세 상자 A, B, C에 들어 있는 공의 개수가 각각 4, 8, 4일 때,

세 상자에 흰 공을 각각 3, 6, 1개를 나누어 넣어야 하므로

$${}_{10}C_3\times{}_7C_6\times{}_1C_1=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times7\times1$$
$$=120\times7\times1=840$$

(iii) 세 상자 A, B, C에 들어 있는 공의 개수가 각각 8, 4, 4일 때,

세 상자에 흰 공을 각각 7, 2, 1개를 나누어 넣어야 하므로

$${}_{10}C_7\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\times3\times1$$
$$=120\times3\times1=360$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$2520+840+360=3720$ 답 ④

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.96~97

01 16	**02** 53	**03** 944	**04** 266	**05** 9번
06 9	**07** 20	**08** 504	**09** 60	**10** 594
11 860	**12** 4235			

01 해결단계

❶ 단계	구슬을 1개, 2개, 4개씩 꺼내는 횟수를 각각 x, y, z라 하고 방정식을 세운다.
❷ 단계	z의 값에 따라 조건을 만족시키는 x, y의 값을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 구슬을 모두 꺼내는 방법의 수를 구한다.

구슬을 1개씩 꺼내는 횟수를 x, 2개씩 꺼내는 횟수를 y, 4개씩 꺼내는 횟수를 z라 하면

$x+2y+4z=12$ ……㉠

$x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$에서

$4z\le x+2y+4z=12$이므로

$4z\le12$, $z\le3$ $\therefore z=0, 1, 2, 3$

(i) $z=0$일 때,

㉠에서 $x+2y=12$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(12, 0)$, $(10, 1)$, $(8, 2)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(2, 5)$, $(0, 6)$의 7개이다.

(ii) $z=1$일 때,

㉠에서 $x+2y+4=12$

$\therefore x+2y=8$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(8, 0)$, $(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(0, 4)$의 5개이다.

(iii) $z=2$일 때,

㉠에서 $x+2y+8=12$

$\therefore x+2y=4$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(4, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$의 3개이다.

(iv) $z=3$일 때,

㉠에서 $x+2y+12=12$

$\therefore x+2y=0$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$의 1개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$7+5+3+1=16$ 답 16

02 해결단계

❶ 단계	학생을 A, B, C, D, 각각의 학생이 현재 앉아 있는 의자를 a, b, c, d, 현재 비어 있는 의자를 e라 한다.
❷ 단계	의자 e가 비어 있을 때, 수형도를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	의자 e에 학생이 앉을 때, 수형도를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 각각의 학생이 현재 앉아 있는 의자를 a, b, c, d라 하자.
현재 비어 있는 의자를 e라 할 때, 4명의 학생이 자신이 앉던 의자에 앉지 않고 다른 의자로 옮겨 앉는 경우는 다음과 같다.

(i) 의자 e가 비어 있는 경우

4명의 학생이 이전에 앉은 의자에 다시 앉지 않도록 하는 모든 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.

A B C D

b — a — d — c
b — c — d — a
b — d — a — c
c — a — d — b
c — d — a — b
c — d — b — a
d — a — b — c
d — c — a — b
d — c — b — a

따라서 구하는 방법의 수는 9이다.

(ii) 의자 e에 앉아 있는 학생이 있는 경우

의자 e에 앉을 학생을 고르는 경우의 수는 4이고, A가 앉았다고 가정할 때, 세 명의 학생 B, C, D가 자신이 앉던 의자에 앉지 않고 다른 의자로 옮겨 앉는 경우는 다음과 같다.

① 의자 a에 앉아 있는 학생이 없는 경우

3명의 학생이 이전에 앉은 의자에 다시 앉지 않도록 하는 모든 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같이 2가지이다.

B C D

c — d — b
d — b — c

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times2=8$

② 의자 a에 앉아 있는 학생이 있는 경우

의자 a에 앉을 학생을 고르는 경우의 수는 3이고, B가 앉았다고 가정할 때, 두 명의 학생 C, D가 이전에 앉은 의자에 다시 앉지 않도록 하는 모든 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같이 3가지이다.

C D

b — c
d — b
d — c

C, D가 a에 앉았다고 가정할 때, 같은 방법으로 3가지이므로 구하는 방법의 수는

$4\times3\times3=36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+8+36=53$ 답 53

03 해결단계

❶ 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 다섯 자리 자연수에서 1의 개수로 가능한 경우를 파악한다.
❷ 단계	1의 개수에 따라 조건을 만족시키는 다섯 자리 자연수의 개수를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

1이 적힌 카드가 3장이고 조건 (가), (나)에서 1끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열하여 만든 다섯 자리 자연수에는 1이 최대 세 번 포함될 수 있다.

(i) 1이 포함되지 않는 경우

첫 번째 자리에는 0이 올 수 없으므로 경우의 수는

$4\times4!=4\times24=96$

(ii) 1이 한 개 포함되는 경우

1로 시작되는 다섯 자리 자연수의 개수는 ${}_5P_4=120$

1이 아닌 수로 시작되는 경우의 수는 첫 번째 자리에 0이 올 수 없으므로

1이 들어갈 수 있는 자릿수의 개수

$4\times4\times{}_4P_3=4\times4\times4\times3\times2=384$

첫 번째 자리에 들어갈 수 있는 수는 2, 3, 4, 5의 4가지

즉, 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$120+384=504$

(iii) 1이 두 개 포함되는 경우

1로 시작되는 경우는

1○1○○, 1○○1○, 1○○○1

의 3가지이고, 각 경우에 대하여 ○에 수를 배열하는 방법이 ${}_5P_3$가지씩 존재하므로 경우의 수는

$3\times{}_5P_3=3\times5\times4\times3=180$

1이 아닌 수 □로 시작되는 경우는

□1○1○, □1○○1, □○1○1

의 3가지이고, 각 경우에 대하여 ○에 수를 배열하는 방법이 ${}_4P_2$가지씩 존재하므로 경우의 수는

$4\times3\times{}_4P_2=4\times3\times4\times3=144$

□에 들어갈 수 있는 수는 2, 3, 4, 5의 4가지

즉, 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$180+144=324$

(iv) 1이 세 개 포함되는 경우

1○1○1의 1가지이고, 각 경우에 대하여 ○에 수를 배열하는 방법이 ${}_5P_2$가지씩 존재하므로 경우의 수는

$1\times{}_5P_2=1\times5\times4=20$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$96+504+324+20=944$ 답 944

04 해결단계

❶ 단계	0부터 9까지의 수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류한다.
❷ 단계	일의 자리의 수가 1 또는 7일 때, ❶ 단계에서 나눈 수의 분류와 일의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지가 1임을 이용하여 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되지 않도록 하는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	일의 자리의 수가 3 또는 9일 때, ❶ 단계에서 나눈 수의 분류와 일의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지가 0임을 이용하여 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되지 않도록 하는 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

0부터 9까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류하면 다음과 같다.
나머지가 0인 경우 : 0, 3, 6, 9
나머지가 1인 경우 : 1, 4, 7
나머지가 2인 경우 : 2, 5, 8
조건 ㈎에서 적힌 수는 홀수이므로 1000은 주어진 조건을 만족시키지 못하고 조건 ㈐에서 적힌 수는 5의 배수가 아니므로 일의 자리의 수는 0, 5가 될 수 없다. 즉, 1부터 999까지의 수를 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(i) □□1 또는 □□7일 때,
백의 자리와 십의 자리에는 각각 0부터 9까지의 숫자가 들어갈 수 있으므로 경우의 수는
$10\times10=100$
조건 ㈏에서 각 자리의 수의 합이 3의 배수이면 안 되고, 일의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지가 1이므로 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지의 합은 2가 아니어야 한다.
이때 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지의 합이 2가 되려면 나머지가 각각 0, 2 또는 1, 1 또는 2, 0이어야 하므로 경우의 수는
$100-(4\times3+3\times3+3\times4)=100-33=67$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$67\times2=134$
(ii) □□3 또는 □□9일 때,
같은 방법으로 일의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지가 0이므로 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지의 합은 0 또는 3이 아니어야 한다.
이때 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지의 합이 0 또는 3이려면 나머지가 각각 0, 0 또는 1, 2 또는 2, 1이어야 하므로 경우의 수는
$100-(4\times4+3\times3+3\times3)=100-34=66$
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$66\times2=132$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$134+132=266$
답 266

BLACKLABEL 특강 참고

조건 ㈐에서 카드에 적힌 수는 5의 배수가 아니고, 조건 ㈏에서 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 아니므로 카드에 적힌 수는 3의 배수가 아니다. 따라서 조건을 만족시키는 수는 1부터 1000까지의 홀수 중에서 3의 배수도 아니고, 5의 배수도 아닌 수이다.

05 해결단계

❶ 단계	1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 각각 1번, 2번, 3번 포함하는 수의 개수를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 결과를 이용하여 1부터 1000까지의 자연수 중에서 5를 포함하지 않는 수의 개수를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 1000을 말한 사람의 번호를 구한다.

1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 포함하는 수는 다음과 같다.
(i) 5를 한 번 포함하는 경우
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중에서 5가 한 번 들어가고 나머지 자리에는 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자가 들어갈 수 있으므로 그 개수는
$3\times9\times9=243$
(ii) 5를 두 번 포함하는 경우
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중에서 5가 두 번 들어가고, 나머지 자리에는 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자가 들어갈 수 있으므로 그 개수는
$3\times9=27$
(iii) 5를 세 번 포함하는 경우
555의 1개
(i), (ii), (iii)에서 1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 포함하는 수의 개수는
$243+27+1=271$
즉, 1부터 1000까지의 자연수 중에서 5를 포함하지 않는 수의 개수는
$1000-271=729$
따라서 1번부터 10번까지의 사람이 주어진 규칙대로 수를 하나씩 말할 때 1000을 말하는 사람은 9번이다.
답 9번

• 다른 풀이 1 •

1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 포함하지 않는 수는 다음과 같다.
(i) 한 자리 자연수인 경우
0부터 9까지의 수 중에서 0과 5를 제외한 수이므로 8가지
(ii) 두 자리 자연수인 경우
십의 자리에는 0과 5를 제외한 0부터 9까지의 8개의 숫자가 들어가고, 일의 자리에는 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자가 들어갈 수 있으므로 그 개수는
$8\times9=72$
(iii) 세 자리 자연수인 경우
백의 자리에는 0과 5를 제외한 0부터 9까지의 8개의 숫자가 들어가고, 십의 자리, 일의 자리에는 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자가 들어갈 수 있으므로 그 개수는
$8\times9\times9=648$
(i), (ii), (iii)에서 1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 포함하지 않는 수의 개수는
$8+72+648=728$
따라서 1000은 729번째로 말하게 되므로 1000을 말하는 사람은 9번이다.

• 다른 풀이 2 •

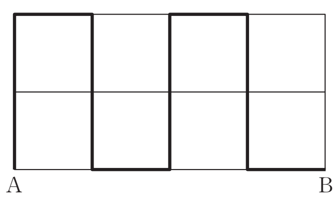
1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 포함하지 않은 수의 개수는 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자를 3개의 자

리에 각각 넣어 만들 수 있는 자연수의 개수와 같다.
즉, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 5를 제외한 0부터 9까지의 9개의 숫자를 각각 넣은 후, 0을 제외하면 되므로 그 개수는
$9\times9\times9-1=729-1=728$
따라서 1000은 729번째로 말하게 되므로 1000을 말하는 사람은 9번이다.

06 해결단계

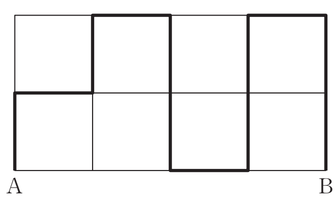
❶단계	세로 방향으로 이동한 길이의 합을 구한다.
❷단계	길이가 2인 세로 방향의 도로의 개수에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❸단계	❷단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

가로 방향으로 이동한 길이의 합이 4이고 전체 이동한 길이가 12이므로 세로 방향으로 이동한 길이의 합은 8이다.
(i) 길이가 2인 세로 방향의 도로 4개를 지나는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 4개를 지나는 경우의 수는 위의 그림과 같이 길이가 2인 세로 방향의 도로 5개 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) 길이가 2인 세로 방향의 도로 3개를 지나는 경우



길이가 2인 세로 방향의 도로 3개를 지나는 경우의 수는 위의 그림과 같이 두 번째 줄의 가로 방향의 도로 4개 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$5+4=9$ 답 9

07 해결단계

❶단계	검은색 블록의 개수에 따라 좌우의 구별 없이 만들 수 있는 막대기의 개수를 구한다.
❷단계	❶ 단계에서 구한 결과를 이용하여 조건을 만족시키는 막대기의 개수를 구한다.

(i) 검은색 블록이 없는 경우
5개의 흰색 블록을 붙여 만들면 되므로 막대기를 만드는 방법의 수는 1

(ii) 검은색 블록이 1개인 경우
5개 중에서 검은색 블록이 위치할 1곳을 택하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
이때 중앙에 검은색 블록이 위치할 때 막대기는 좌우 대칭이므로 좌우의 구별 없이 막대기를 만드는 방법의 수는
$\frac{5-1}{2}+1=3$

(iii) 검은색 블록이 2개인 경우
5개 중에서 검은색 블록이 위치할 2곳을 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
이때 중앙에 흰색 블록이 위치하고 흰색 블록 양 옆에 검은색 블록이 위치하거나 막대기의 양 끝에 검은색 블록이 위치할 때 막대기는 좌우대칭이므로 좌우대칭이 되도록 막대기를 만드는 방법의 수는
${}_2C_1=2$
즉, 좌우의 구별 없이 막대기를 만드는 방법의 수는
$\frac{10-2}{2}+2=6$

(iv) 검은색 블록이 3개인 경우
흰색 블록이 3개인 경우, 즉 검은색 블록이 2개인 경우와 같으므로 방법의 수는 6

(v) 검은색 블록이 4개인 경우
흰색 블록이 4개인 경우, 즉 검은색 블록이 1개인 경우와 같으므로 방법의 수는 3

(vi) 검은색 블록이 5개인 경우
흰색 블록이 5개인 경우, 즉 검은색 블록이 없는 경우와 같으므로 방법의 수는 1

(i)~(vi)에서 조건에 맞게 만들 수 있는 막대기의 개수는
$2\times(1+3+6)=20$ 답 20

• 다른 풀이 •

5개의 각 자리에 흰색, 검은색이 올 수 있으므로 만들 수 있는 막대기의 개수는
$2^5=32$
이때 좌우대칭인 막대기는 중앙과 왼쪽 두 자리에 흰색 또는 검은색 블록을 배치하고, 오른쪽 두 자리에는 왼쪽 두 자리에 배치한 블럭과 대칭이 되는 블럭을 배치하면 되므로 그 개수는
$2\times2\times2=8$
즉, 좌우비대칭인 막대기의 개수는
$\frac{32-8}{2}=12$
따라서 조건에 맞게 만들 수 있는 막대기의 개수는
$8+12=20$

08 해결단계

❶ 단계	첫날 자동차 A에 탔던 2명을 P, Q라 하고, P, Q가 모두 첫날과 다른 자리에 앉는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	첫날 자동차 B에 탔던 세 명이 자동차 A의 남은 자리에 앉는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 첫날 자동차 A에 탔던 2명이 모두 첫날과 다른 자리에 앉는 경우의 수를 구한다.

첫날 자동차 A에 탔던 2명을 P, Q라 하자.

(i) P가 첫날 Q가 앉은 자리에 앉는 경우

Q는 7개의 자리 중에서 운전석과 첫날 앉은 자리를 제외한 5개의 자리에 앉을 수 있으므로 경우의 수는 5

(ii) P가 첫날 Q가 앉지 않은 자리에 앉는 경우

P는 7개의 자리 중에서 운전석과 P, Q가 첫날 앉은 두 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있고, Q는 7개의 자리 중에서 운전석과 Q가 첫날 앉은 자리, P가 다음 날에 앉은 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있으므로 경우의 수는

$4\times4=16$

(i), (ii)에서 P, Q가 첫날과 다른 자리에 앉는 경우의 수는

$5+16=21$

한편, 첫날 자동차 B에 탔던 세 명이 운전석과 P, Q가 앉은 두 자리를 제외한 4개의 자리에 앉는 경우의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times24=504$ **답** 504

• 다른 풀이 •

첫날 자동차 A에 탔던 두 명을 P, Q라 하자.

P, Q는 모두 첫날과 다른 자리에 앉아야 하므로 P, Q가 자동차 A에 앉을 수 있는 전체 경우의 수에서 P 또는 Q가 첫날과 같은 자리에 앉는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) P, Q가 자동차 A에 앉는 경우

운전자는 자리를 바꾸지 않으므로 P, Q는 7개의 자리 중에서 운전석을 제외한 6개의 자리에 앉을 수 있으므로 경우의 수는

${}_6P_2=6\times5=30$

(ii) P, Q가 첫날 앉은 자리에 앉는 경우

P, Q 모두 첫날 앉은 자리에 앉으면 되므로 1가지

(iii) P와 Q 중에서 한 명만 첫날 앉은 자리에 앉는 경우

P만 첫날 앉은 자리에 앉는다면 Q는 7개의 자리 중에서 운전석과 P, Q가 첫날 앉은 두 자리를 제외한 4개의 자리에 앉을 수 있으므로 경우의 수는 4

같은 방법으로 Q만 첫날 앉은 자리에 앉는 경우의 수는 4이다.

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+4=8$

(i), (ii), (iii)에서 P, Q 모두 첫날과 다른 자리에 앉는 경우의 수는

$30-(1+8)=21$

한편, 첫날 자동차 B에 탔던 세 명이 운전석과 P, Q가 앉은 두 자리를 제외한 4개의 자리에 앉는 경우의 수는

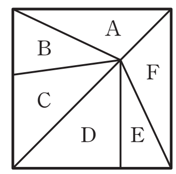
${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times24=504$

09 해결단계

❶ 단계	6개의 삼각형을 A, B, C, D, E, F라 한다.
❷ 단계	특정한 색을 칠하는 횟수에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 서로 다른 6개의 삼각형을 A, B, C, D, E, F라 하자.

(i) 세 가지 색을 각각 1번, 1번, 4번 칠하는 경우

조건 (나)를 만족시키는 경우가 존재하지 않는다.

(ii) 세 가지 색을 각각 1번, 2번, 3번 칠하는 경우

1번, 2번, 3번 칠할 색을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

3번 칠하는 색을 칠할 수 있는 삼각형은 (A, C, E), (B, D, F)의 2가지

남은 3개의 삼각형 중에서 2번 칠하는 색을 칠할 수 있는 삼각형을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times2\times3=36$

(iii) 세 가지 색을 각각 2번씩 칠하는 경우

같은 색을 칠할 수 있는 삼각형끼리 묶으면

(A, C), (B, E), (D, F)

(A, D), (B, E), (C, F)

(A, D), (B, F), (C, E)

(A, E), (B, D), (C, F)

의 4가지

각 경우에 대하여 칠할 색을 정하는 경우의 수는

$3!=6$

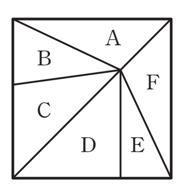
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4\times6=24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$36+24=60$ **답** 60

• 다른 풀이 •



오른쪽 그림과 같이 서로 다른 6개의 삼각형을 A, B, C, D, E, F라 하자.

빨간색을 칠하는 횟수에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 빨간색을 3번 칠하는 경우

빨간색을 칠할 수 있는 삼각형은

(A, C, E), (B, D, F)의 2가지

① 빨간색을 (A, C, E)에 칠한 경우

B, D, F에 노란색, 파란색을 적어도 한 번씩 칠하기 위해서는 노란색을 2번, 파란색을 1번 칠하거나 노란색을 1번, 파란색을 2번 칠해야 한다.

B, D, F 중에서 같은 색을 칠하는 두 삼각형을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2$이고, 두 삼각형에 칠하는 색을 고르는 경우의 수는 ${}_2C_1$이므로 구하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1=3\times2=6$

② 빨간색을 (B, D, F)에 칠한 경우

①과 같은 방법으로 6가지

①, ②에서 6개의 삼각형에 색을 칠하는 경우의 수는

$6+6=12$

(ii) 빨간색을 2번 칠하는 경우

빨간색을 칠할 수 있는 삼각형은

(A, C), (A, D), (A, E), (B, D), (B, E), (B, F), (C, E), (C, F), (D, F)의 9가지

① 빨간색을 (A, C)에 칠한 경우

B, D, E, F를 (B, E), (D, F)로 나누어 노란색, 파란색을 칠하거나

(E), (B, D, F)로 나누어 노란색, 파란색을 칠하면 되므로 경우의 수는

$2\times2=4$

② 빨간색을 (A, D)에 칠한 경우

B, C, E, F를 (B, E), (C, F) 또는 (B, F), (C, E)로 나누어 노란색, 파란색을 칠하면 되므로 경우의 수는

$2\times2=4$

③ ①, ② 이외의 다른 곳에 빨간색을 칠한 경우

① 또는 ②와 같은 방법으로 4가지

①, ②, ③에서 6개의 삼각형에 색을 칠하는 경우의 수는

$9\times4=36$

(iii) 빨간색을 1번 칠하는 경우

빨간색을 칠할 수 있는 삼각형은 A, B, C, D, E, F의 6가지

① 빨간색을 A에 칠한 경우

B, C, D, E, F를 (C, E), (B, D, F)로 나누어 노란색, 파란색을 칠하면 되므로 경우의 수는 2

② ① 이외의 다른 곳에 빨간색을 칠한 경우

①과 같은 방법으로 2가지

①, ②에서 삼각형에 색을 칠하는 경우의 수는

$6\times2=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$12+36+12=60$

10 해결단계

❶ 단계	A, B가 동시에 선택한 과목이 수학일 때, 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	A, B가 동시에 선택한 과목이 사회일 때, 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

(i) A, B가 동시에 선택한 과목이 수학일 때,

4개의 수학 과목 중 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A, B가 2개씩 선택하는 경우의 수는

$\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times2!=90$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4\times90=360$

(ii) A, B가 동시에 선택한 과목이 사회일 때,

3개의 사회 과목 중 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

① A, B가 각각 수학과 사회를 1개씩 선택하는 경우의 수는

$({}_4C_1\times{}_3C_1)\times({}_2C_1\times{}_1C_1)=24$

② A, B 중에서 1명은 수학과 사회를 1개씩 선택하고 1명은 수학을 2개 선택하는 경우의 수는

$2\times({}_4C_1\times{}_2C_1)\times{}_3C_2=48$

③ A, B 모두 수학을 2개씩 선택하는 경우의 수는

$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times2!=6$

①, ②, ③에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times(24+48+6)=234$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$360+234=594$ 답 594

11 해결단계

❶ 단계	한 방에 넣었을 때 꼬리잡기를 할 수 없는 조합을 찾은 후, 5명을 방의 개수에 따라 배정하는 방법을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 결과를 이용하여 경우의 수를 구한다.

(i) 5개의 방에 각각 한 명씩 배정하는 경우

$5!=120$

(ii) 4개의 방에 배정하는 경우

5개의 방 중에서 다섯 명이 들어갈 방 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

다섯 명을 2명, 1명, 1명, 1명으로 나누어 방을 배정하고 한 방에 들어갈 때 서로 잡을 수 없는 경우는

(A, C), (A, E), (B, D), (C, E)

의 4가지이므로

$5\times4\times\underbrace{4!}_{\text{4개의 방에 (2명, 1명, 1명, 1명)을 배정하는 경우의 수}}=480$

(iii) 3개의 방에 배정하는 경우

5개의 방 중에서 다섯 명이 들어갈 방 3개를 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

다섯 명을 2명, 2명, 1명으로 나누거나 3명, 1명, 1명으로 나누어 방을 배정하고 한 방에 들어갈 때 서로 잡을 수 없는 경우는

[(A, C), (B, D), E], [(A, E), (B, D), C],
[(B, D), (C, E), A], [(A, C, E), B, D]

의 4가지이므로

$10\times4\times\underbrace{3!}_{\text{3개의 방에 (2명, 2명, 1명) 또는 (3명, 1명, 1명)을 배정하는 경우의 수}}=240$

(iv) 2개의 방에 배정하는 경우

5개의 방 중에서 다섯 명이 들어갈 방 2개를 뽑는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

다섯 명을 3명, 2명으로 나누어 방을 배정하고 한 방에 들어갈 때 서로 잡을 수 없는 경우는

[(A, C, E), (B, D)]

의 1가지이므로

$10\times1\times\underbrace{2!}_{\text{2개의 방에 (3명, 2명)을 배정하는 경우의 수}}=20$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$120+480+240+20=860$ **답** 860

12 해결단계

❶ 단계	원판을 쌓아 만든 탑을 위에서 보았을 때 2개만 보이도록 하는 조건을 찾는다.
❷ 단계	8개의 원판을 4개, 4개로 나누는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❶ 단계에서 구한 조건을 이용하여 4개의 원판을 쌓아 만든 탑이 위에서 보았을 때 2개의 원판만 보이도록 하는 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계에서 구한 값을 이용하여 조건을 만족시키도록 두 개의 탑을 쌓는 경우의 수를 구한다.

맨 위에 쌓이는 원판은 위에서 항상 볼 수 있고, 크기가 가장 큰 원판은 어느 위치에 배정되어도 위에서 볼 수 있으므로 맨 위에 쌓이는 원판과 크기가 가장 큰 원판만 위에서 보이도록 탑이 쌓여야 한다.

또한, 위에서 보이는 두 원판 사이에는 맨 위에 쌓이는 원판보다 작은 크기의 원판이 배정될 수 있다.

이때 원판이 8개이므로 높이가 같은 두 개의 탑은 각각 원판 4개로 이루어져야 한다.

크기가 다른 8개의 원판을 4개, 4개로 나누는 경우의 수는

$_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=35$

원판 4개를 크기가 작은 순서대로 1, 2, 3, 4라 하면 원판 4개로 탑을 쌓는 경우는 원판 4의 위치에 따라 다음과 같다.

(i) 원판 4가 위에서 두 번째 위치에 오는 경우

원판 4 위에 배정될 한 개의 원판을 뽑고, 나머지 원판 2개를 원판 4 아래에 배정하면 되므로 경우의 수는

$_3C_1\times2!=3\times2=6$

(ii) 원판 4가 위에서 세 번째 위치에 오는 경우

원판 4 위에 배정될 2개의 원판을 뽑아 큰 원판은 맨 위에, 작은 원판은 그 아래 배정하고, 남은 1개의 원판은 맨 밑에 배정하면 되므로 경우의 수는

$_3C_2\times1={}_3C_1=3$

(iii) 원판 4가 마지막 위치에 오는 경우

원판 3을 맨 위에 배정하고, 원판 1, 2를 그 아래에 배정하면 되므로 경우의 수는

$2!=2$

(i), (ii), (iii)에서 원판 4개로 조건에 맞게 탑을 쌓는 경우의 수는

$6+3+2=11$

원판 4개짜리 탑이 2개 있으므로 구하는 경우의 수는

$35\times11\times11=4235$ **답** 4235

IV 행렬

09. 행렬과 그 연산

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.101~103

01 ④	02 ②	03 4	04 0	05 ③
06 ①	07 ①	08 ①	09 ②	10 12
11 $6\sqrt{5}$	12 -2	13 250	14 ③	15 ④
16 ①	17 ③	18 ③	19 ④	20 7
21 ⑤				

01 행렬 A의 각 성분을 구하면 다음과 같다.

$a_{11}=(1^2+1^2=2$를 3으로 나눈 나머지$)=2$

$a_{12}=(1^2+2^2=5$를 3으로 나눈 나머지$)=2$

$a_{13}=(1^2+3^2=10$을 3으로 나눈 나머지$)=1$

$a_{21}=(2^2+1^2=5$를 3으로 나눈 나머지$)=2$

$a_{22}=(2^2+2^2=8$을 3으로 나눈 나머지$)=2$

$a_{23}=(2^2+3^2=13$을 3으로 나눈 나머지$)=1$

$a_{31}=(3^2+1^2=10$을 3으로 나눈 나머지$)=1$

$a_{32}=(3^2+2^2=13$을 3으로 나눈 나머지$)=1$

$a_{33}=(3^2+3^2=18$을 3으로 나눈 나머지$)=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$2+2+1+2+2+1+1+1+0=12$ 답 ④

02 지점 1에서 지점 1, 2, 3으로 가는 통로의 수는 각각 0, 1, 2이므로

$a_{11}=0,\ a_{12}=1,\ a_{13}=2$

지점 2에서 지점 1, 2, 3으로 가는 통로의 수는 각각 2, 0, 1이므로

$a_{21}=2,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1$

지점 3에서 지점 1, 2, 3으로 가는 통로의 수는 각각 0, 1, 1이므로

$a_{31}=0,\ a_{32}=1,\ a_{33}=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 제3행의 모든 성분의 합은

$0+1+1=2$ 답 ②

03 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x-y=5$ ……㉠, $x^2+y^2=7+xy$ ……㉡

㉠에서 $y=2x-5$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x-5)^2=7+x(2x-5)$

$3x^2-15x+18=0,\ 3(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

㉢에서 $x=2$일 때, $y=-1$ 또는 $x=3$일 때, $y=1$

이때 x, y가 모두 양수이므로 $x=3,\ y=1$

$\therefore x+y=3+1=4$ 답 4

04 $A+B=E$이므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ -b+a & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=1,\ b-a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

즉, $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이므로

$A-B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은

$0+1+(-1)+0=0$ 답 0

05 $a_{ij}=2i+j-1$이므로

$a_{11}=2\times1+1-1=2,\ a_{12}=2\times1+2-1=3,$

$a_{13}=2\times1+3-1=4,\ a_{21}=2\times2+1-1=4,$

$a_{22}=2\times2+2-1=5,\ a_{23}=2\times2+3-1=6$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$b_{ij}=4i-2j$이므로

$b_{11}=4\times1-2\times1=2,\ b_{12}=4\times1-2\times2=0,$

$b_{13}=4\times1-2\times3=-2,\ b_{21}=4\times2-2\times1=6,$

$b_{22}=4\times2-2\times2=4,\ b_{23}=4\times2-2\times3=2$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(4A-3B)-3(A-B)$

$=2A-\frac{3}{2}B-3A+3B=-A+\frac{3}{2}B$

$=-\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+(-3)+(-7)+5+1+(-3)=-6$ 답 ③

06 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ……㉠

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore A-2B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 답 ①

07 $2X-(A+B)=3(A-2B)$에서

$2X=4A-5B$

$\therefore X=2A-\frac{5}{2}B$

$=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -20 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -10 & -1 \\ 24 & -2 \end{pmatrix}$ 답 ①

08 $xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix} a & -1 \\ 5 & b \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b & 2 \\ 3 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} ax+by & -x+2y \\ 5x+3y & bx-ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ax+by=3$ ……㉠

$-x+2y=-4$ ……㉡

$5x+3y=7$ ……㉢

$bx-ay=-7$ ……㉣

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=-1$

이것을 ㉠, ㉣에 대입하면

$2a-b=3,\ a+2b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{5},\ b=-\frac{17}{5}$

$\therefore 3a+b=-\frac{3}{5}-\frac{17}{5}=-4$ 답 ①

09 $A=(1\ \ 0),\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ C=(1\ \ -2\ \ 3),$

$D=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

이라 하면 행렬 A, B, C, D는 각각 1×2, 2×1, 1×3, 2×3 행렬이므로 이 중 두 행렬을 곱하여 만들 수 있는 서로 다른 행렬은 AB, AD, BA, BC의 4개이다.

답 ②

10 $a_{ij}=i-2j+1$이므로

$a_{11}=1-2\times1+1=0,\ a_{12}=1-2\times2+1=-2,$

$a_{21}=2-2\times1+1=1,\ a_{22}=2-2\times2+1=-1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$b_{ij}=i\times j+1$이므로

$b_{11}=1\times1+1=2,\ b_{12}=1\times2+1=3,$

$b_{21}=2\times1+1=3,\ b_{22}=2\times2+1=5$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 AB의 (1, 1) 성분은 -6이고, (2, 2) 성분은 -2이므로 그 곱은

$-6\times(-2)=12$ 답 12

11 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times1=5$

$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{5}\ (\because \alpha>\beta)$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha^2-\beta^2 & -2\alpha\beta \end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은

$2(\alpha^2-\beta^2)=2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$=2\times3\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{5}$

12 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^8=A^4A^4=\begin{pmatrix} 1 & -4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -8a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

이때 A^8의 모든 성분의 합이 18이므로

$1+(-8a)+0+1=18$

$-8a=16\quad\therefore a=-2$ 답 -2

13 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\0 & -4\end{pmatrix}$

$=-4E$

따라서 n은 1000 이하의 4의 배수이므로 구하는 자연수 n의 개수는 250이다. 답 250

14 $A+B=O$이므로 $B=-A$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$-A^2=E \qquad \therefore A^2=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$A+B=O$이므로 $A=-B$

이것을 $AB=E$에 대입하면

$-B^2=E \qquad \therefore B^2=-E$

$B^3=B^2B=(-E)B=-B$

$B^4=(B^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore (A+A^2+\cdots+A^{2000})+(B+B^2+\cdots+B^{2000})$

$=(A+A^2+A^3+A^4)+(A^5+A^6+A^7+A^8)+\cdots$
$+(A^{1997}+A^{1998}+A^{1999}+A^{2000})$
$+(B+B^2+B^3+B^4)+(B^5+B^6+B^7+B^8)+\cdots$
$+(B^{1997}+B^{1998}+B^{1999}+B^{2000})$

$=(A-E-A+E)+(A-E-A+E)+\cdots$
$+(A-E-A+E)$
$+(B-E-B+E)+(B-E-B+E)+\cdots$
$+(B-E-B+E)$

$=O$ 답 ③

15 $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$AC+BC=(A+B)C$

$=\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$

16 $(A+B)^2=\begin{pmatrix}4 & -6\\0 & 16\end{pmatrix}$ ……㉠

$AB+BA=\begin{pmatrix}4 & -2\\-4 & 8\end{pmatrix}$ ……㉡

$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$이므로

$(A+B)^2-(AB+BA)=A^2+B^2$

㉠－㉡을 하면

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & 8\end{pmatrix}$

$\therefore (A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA$

$=A^2+B^2-(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix}0 & -4\\4 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -2\\-4 & 8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4 & -2\\8 & 0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A-B)^2$의 모든 성분의 합은

$-4+(-2)+8+0=2$ 답 ①

17 ㄱ. (반례) $A=O$, $B=O$이면 $AB=B$가 성립하지만 $A\neq E$이다. (거짓)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

즉, $AB=O$, $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다. (거짓)

ㄷ. $A-B=2E$에서 $B=A-2E$이므로

$AB=A(A-2E)=A^2-2A=(A-2E)A=BA$

이때 $AB=O$이면 $BA=O$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

18 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하면

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=-1$, $c=2$ ……㉠

$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b\\2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+b=0$, $2c+d=-1$

$\therefore b=2$, $d=-5$ ($\because$ ㉠)

따라서 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -5\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$($p$, q는 실수)이라 하면

$\begin{pmatrix}p+2q\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+2q=4,\ q=1$

$\therefore\ p=2,\ q=1$

즉, $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$이고

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

19

주어진 표에서 각 세트에 들어가는 과자와 사탕의 개수를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}$

이때 '고소한 세트'와 '달콤한 세트'의 개수가 각각 10, 15이므로 전체 과자와 사탕의 개수를 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}10&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}=(\overset{\text{전체 과자의 개수}}{80}\quad\underset{\text{전체 사탕의 개수}}{70})$$

이때 과자와 사탕의 한 개 당 가격이 각각 500원, 800원이므로 전체를 구입할 때 필요한 금액을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix}80&70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\800\end{pmatrix}$$

답 ④

20

행렬 $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-5A+3E=O$ ……㉠

㉠의 양변에 A를 곱하면

$A^3-5A^2+3A=O$

$\therefore\ A^3-5A^2+4A-E$

$=A^3-5A^2+3A+A-E=A-E$

$=\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$1+3+1+2=7$

답 7

21

(i) $A=kE$(k는 실수)일 때,

$A^2-5A+6E=O$에서

$k^2E^2-5kE+6E=O$이므로

$(k^2-5k+6)E=O,\ (k-2)(k-3)E=O$

$\therefore\ k=2$ 또는 $k=3$ ($\because\ E\neq O$)

즉, $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ 또는 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$이므로

$m=4$ 또는 $m=6$

(ii) $A\neq kE$(k는 실수)일 때,

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

이때 $A^2-5A+6E=O$이므로

$m=a+d=5$

(i), (ii)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$4+5+6=15$

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

케일리-해밀턴 정리의 역이 성립하지 않기 때문에 주어진 행렬 A의 이차식과 케일리-해밀턴 정리로 얻은 식이 항상 같은 것은 아니다.

(i) $A=kE$(k는 실수)일 때, 주어진 이차식과 케일리-해밀턴 정리로 얻은 식은 다르다.

(ii) $A\neq kE$(k는 실수)일 때, 주어진 이차식과 케일리-해밀턴 정리로 얻은 식은 동일하다.

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.104~109

01 ③	02 5	03 ④	04 8	05 ②
06 ⑤	07 ②	08 60	09 ④	10 ②
11 ②	12 3	13 ⑤	14 26	15 ⑤
16 ③	17 ⑤	18 8	19 ③	20 ④
21 10	22 2	23 16	24 A	25 ①
26 ①	27 63	28 6	29 ①	30 16
31 3	32 5	33 5	34 3	35 ④
36 -1				

01

정류장 B_1에 1번, 2번 버스가 정차하므로

$a_{11}=1,\ a_{12}=1,\ a_{13}=0$

정류장 B_2에 1번, 3번 버스가 정차하므로

$a_{21}=1,\ a_{22}=0,\ a_{23}=1$

정류장 B_3에 2번 버스가 정차하므로

$a_{31}=0,\ a_{32}=1,\ a_{33}=0$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

답 ③

02

1은 1의 배수이므로

$a_{11}=1+k$

2는 1의 배수이므로

$a_{21}=2+k$

3은 2의 약수도 배수도 아니므로

$a_{32}=3+2=5$

4는 3의 약수도 배수도 아니므로

$a_{43}=4+3=7$

$\therefore a_{11}+a_{21}+a_{32}+a_{43}=(1+k)+(2+k)+5+7$
$=2k+15$
즉, $2k+15=25$이므로 $k=5$ 답 5

03

$x^2-(2i+3j)x+6ij\le 0$에서
$(x-2i)(x-3j)\le 0$ ……㉠
행렬 A의 (i, j) 성분을 a_{ij}라 할 때, $i, j=1, 2$이므로 a_{ij}는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.
(i) $i=j=1$일 때, ㉠에서
$(x-2)(x-3)\le 0$
$\therefore 2\le x\le 3$
즉, 조건을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합 a_{11}은
$a_{11}=2+3=5$
(ii) $i=1, j=2$일 때, ㉠에서
$(x-2)(x-6)\le 0$
$\therefore 2\le x\le 6$
즉, 조건을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합 a_{12}는
$a_{12}=2+3+4+5+6=20$
(iii) $i=2, j=1$일 때, ㉠에서
$(x-4)(x-3)\le 0$
$\therefore 3\le x\le 4$
즉, 조건을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합 a_{21}은
$a_{21}=3+4=7$
(iv) $i=j=2$일 때, ㉠에서
$(x-4)(x-6)\le 0$
$\therefore 4\le x\le 6$
즉, 조건을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합 a_{22}는
$a_{22}=4+5+6=15$
(i)~(iv)에서 행렬 A는
$A=\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$ 답 ④

04

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$
(단, $a, b, \cdots, i$는 1 이상 9 이하의 서로 다른 자연수)
로 놓으면
$abc=144$, $def=140$, $ghi=18$,
$adg=36$, $beh=42$, $cfi=240$
$ghi=18$, $cfi=240$에서 $i=\frac{18}{gh}=\frac{240}{cf}$이므로 i는 18과 240의 최대공약수인 6의 약수이다.
i가 1 또는 2 또는 3이면 cf는 240 또는 120 또는 80이고, 이것을 만족시키는 9 이하의 자연수 c, f는 없으므로
$i=6$
$\therefore gh=3$ ……㉠, $cf=40$ ……㉡
$def=140$, $beh=42$에서 $e=\frac{140}{df}=\frac{42}{bh}$이므로 e는 140과 42의 최대공약수인 14의 약수이다.
e가 1 또는 2이면 df는 140 또는 70이고, 이것을 만족시키는 9 이하의 자연수 d, f는 없으므로
$e=7$
$\therefore df=20$ ……㉢, $bh=6$ ……㉣
㉠에서 $g=1, h=3$ 또는 $g=3, h=1$
이때 $g=3, h=1$이면 ㉣에서 $b=6$
즉, $b=i$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
$\therefore g=1, h=3, b=2$
㉡, ㉢에서 f는 20의 약수이므로
$f=4$ 또는 $f=5$ ($\because g=1, b=2$)
$f=4$이면 $c=10$이고, 이는 조건을 만족시키지 않으므로
$f=5$ $\therefore c=8$
$\therefore a_{13}=c=8$ 답 8

05

ㄱ. 행렬 M에서 $a_{12}=a_{14}=1$이므로 A_1은 A_2, A_4와 악수하였다. (참)
ㄴ. 행렬 M에서 $a_{12}=a_{32}=a_{42}=1$이고, $a_{52}=0$이므로 A_2는 A_1, A_3, A_4와 악수하였다.
따라서 A_2와 악수한 사람은 모두 3명이다. (참)
ㄷ. $a_{ij}=a_{ji}$이므로 $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b \\ 1 & 1 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & b & c & 0 \end{pmatrix}$이라 하면
$8+2a+2b+2c=12$
$2(a+b+c)=4$ $\therefore a+b+c=2$
이때 $a=0, b=1, c=1$이면 $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
이므로 악수를 한 번만 한 사람은 없다. (거짓)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

06

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a+b=2$, $a^2+b^2=3$ ……㉠
$a^3+b^3=x$, $a^5+b^5=y$ ……㉡
㉠을 $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$에 대입하면
$2ab=1$ $\therefore ab=\frac{1}{2}$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=8-3\times\frac{1}{2}\times 2=5$
$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$
$=3\times 5-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{29}{2}$
따라서 ㉡에서 $x=5$, $y=\frac{29}{2}$이므로
$xy=\frac{145}{2}$ 답 ⑤

07 $a_{ij}=4i-3j$이므로
$a_{11}=4\times1-3\times1=1$, $a_{12}=4\times1-3\times2=-2$,
$a_{21}=4\times2-3\times1=5$, $a_{22}=4\times2-3\times2=2$
$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -2\\5 & 2\end{pmatrix}$
이때 $A=B$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-y^2=1$ ······㉠
$-2y^2-z^2=-2$ ······㉡
$x+y+z=5$ ······㉢
㉠$-$㉡을 하면
$x^2+y^2+z^2=3$ ······㉣
$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서
$25=3+2(xy+yz+zx)$ ($\because$ ㉢, ㉣)
$\therefore xy+yz+zx=11$ 답 ②

08 $A=B$이므로
$\begin{pmatrix}x^3+y^3+z^3 & x+y+z\\xy+yz+zx & xyz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3xyz & a\\b & 64\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x^3+y^3+z^3=3xyz$ ······㉠
$x+y+z=a$ ······㉡
$xy+yz+zx=b$ ······㉢
$xyz=64$ ······㉣
㉠에서 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$이므로
$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$
이때 세 양수 x, y, z에 대하여 $x+y+z>0$이므로
$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$
$\therefore x=y=z$
㉣에서 $xyz=64$이므로 $x=y=z=4$
따라서 ㉡, ㉢에서
$a=x+y+z=12$, $b=xy+yz+zx=48$이므로
$a+b=12+48=60$ 답 60

09 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$이고 $b_{ij}=2a_{ji}-1$이므로
$B=\begin{pmatrix}2a_{11}-1 & 2a_{21}-1\\2a_{12}-1 & 2a_{22}-1\end{pmatrix}$
$\therefore 3A-B=\begin{pmatrix}a_{11}+1 & 3a_{12}-2a_{21}+1\\3a_{21}-2a_{12}+1 & a_{22}+1\end{pmatrix}$
이때 $3A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$이므로
$\begin{pmatrix}a_{11}+1 & 3a_{12}-2a_{21}+1\\3a_{21}-2a_{12}+1 & a_{22}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a_{11}+1=1$에서 $a_{11}=0$
$3a_{12}-2a_{21}+1=2$, $3a_{21}-2a_{12}+1=-2$를 연립하여 풀면
$a_{12}=-\frac{3}{5}$, $a_{21}=-\frac{7}{5}$
$a_{22}+1=3$에서 $a_{22}=2$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=0+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)+2=0$ 답 ④

10 $2A-B=A+kB$에서 $A=(k+1)B$이므로
$a_{ij}=(k+1)b_{ij}$, $a_{ij}=(k+1)ka_{ij}$
$(k^2+k-1)a_{ij}=0$
이때 $A\neq O$이므로
$k^2+k-1=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 -1이다. 답 ②

11 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17 & 4\\4 & 1\end{pmatrix}$을
$(x^2+y^2)A-(x-y)E=B$에 대입하면
$\begin{pmatrix}4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2\\x^2+y^2 & -(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4\\4 & 1\end{pmatrix}$
두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x-y=-1$에서 $y=x+1$ ······㉠
$x^2+y^2=4$ ······㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$x^2+(x+1)^2=4$, $2x^2+2x-3=0$
$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$
따라서 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\\y=\frac{1-\sqrt{7}}{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\\y=\frac{1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$
$\therefore \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$
$=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\times\frac{1+\sqrt{7}}{2}+\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\times\frac{1-\sqrt{7}}{2}$
$=\frac{-8-2\sqrt{7}}{4}+\frac{-8+2\sqrt{7}}{4}$
$=-4$ 답 ②

12 $kA=\begin{pmatrix}2k & k\\-k & mk\end{pmatrix}$이므로
$D(kA)=2mk^2+k^2=(2m+1)k^2$
$A-E=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & m-1\end{pmatrix}$이므로
$D(A-E)=m-1+1=m$

이때 $D(kA)=D(A-E)$이므로

$(2m+1)k^2=m$

이때 m, k가 정수이므로 $k^2=\frac{m}{2m+1}$에서

(i) $m=0$일 때,

$\frac{m}{2m+1}=0$이므로 $k^2=0$ $\quad\therefore k=0$

(ii) $m=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots$일 때,

$\frac{m}{2m+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{m}}\le1$이므로 $\frac{m}{2m+1}=1$

따라서 $m=-1$이고 $k^2=1$이므로 $k=\pm1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 3이다.

답 3

13 ㄱ. $L(A)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$

$L(B)=|x_2-x_1|+|-y_2-(-y_1)|$

$=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$

$\therefore L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $2A=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}$이므로

$L(2A)=|2x_2-2x_1|+|2y_2-2y_1|$

$=2(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)$

$=2L(A)=2L(B)(\because$ ㄱ$)$ (참)

ㄷ. $A+B=2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$L(A+B)=2|x_2-x_1|$

$L(A)+L(B)=2L(A)$ ($\because$ ㄱ)

$=2(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)$

$\therefore L(A+B)\le L(A)+L(B)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

14 $A+B=\begin{pmatrix} a & -3 \\ 3 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b & -3 \\ 3 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & -6 \\ 6 & b-a \end{pmatrix}$

이때 $A+B=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a-b & -6 \\ 6 & b-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=7$에서 $a=b+7$ ……㉠

$A^2=\begin{pmatrix} a & -3 \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -3 \\ 3 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-9 & -3a-3b \\ 3a+3b & b^2-9 \end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix} -b & -3 \\ 3 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -3 \\ 3 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2-9 & 3a+3b \\ -3a-3b & a^2-9 \end{pmatrix}$

$A^2+B^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2-18 & 0 \\ 0 & a^2+b^2-18 \end{pmatrix}=kE$에서

$k=a^2+b^2-18$

㉠을 위의 식에 대입하면

$k=(b+7)^2+b^2-18$

$=2b^2+14b+31$

$=2\left(b+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{13}{2}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $m=\frac{13}{2}$이므로

$4m=4\times\frac{13}{2}=26$

답 26

15 $BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$에서 모든 성분 $a+c$, $b+d$, c, d가 홀수이어야 하므로 c, d는 홀수이고, a, b는 짝수이다.

9 이하의 자연수 중에서 홀수의 개수는 5이고, 짝수의 개수는 4이므로 서로 다른 행렬 A의 개수는

${}_5P_2\times{}_4P_2=5\times4\times4\times3=240$

답 ⑤

16 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$에서

$f(AB)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

또한, $f(A)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(B)=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$f(A)f(B)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\therefore f(AB)+f(A)f(B)$

$=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $f(AB)+f(A)f(B)$의 모든 성분의 합은

$4+(-8)+6+(-8)=-6$

답 ③

17 연립방정식 $\begin{cases} x_1=2y_2+y_3 \\ x_2=y_1+2y_2 \end{cases}$를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ……㉠

연립방정식 $\begin{cases} y_1=z_1+2z_2 \\ y_2=2z_1-z_2 \\ y_3=-z_1+z_2 \end{cases}$를 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ……㉡

$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$$=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

• 다른 풀이 •

$\begin{cases} x_1=2y_2+y_3 \\ x_2=y_1+2y_2 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1=z_1+2z_2 \\ y_2=2z_1-z_2 \\ y_3=-z_1+z_2 \end{cases}$ 에서

$x_1=2y_2+y_3$

$\quad=2(2z_1-z_2)+(-z_1+z_2)=3z_1-z_2$

$x_2=y_1+2y_2$

$\quad=(z_1+2z_2)+2(2z_1-z_2)=5z_1$

이므로 주어진 관계식을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

답 ⑤

18 삼차방정식 $x^3-3x^2-2x+k=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$ ……㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$ ……㉡

$\alpha\beta\gamma=-k$ ……㉢

$AB=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha+\alpha\beta & \alpha+\beta \\ \gamma\alpha+\beta & \beta\gamma+1 \end{pmatrix}$이고 행렬 AB의 모든 성분의 합이 1이므로

$(\alpha+\alpha\beta)+(\alpha+\beta)+(\gamma\alpha+\beta)+(\beta\gamma+1)=1$

$2(\alpha+\beta)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1=1$

$2(\alpha+\beta)-2=0$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ \alpha+\beta=1,\ \gamma=2$ ($\because$ ㉠)

$\gamma=2$를 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta+2\beta+2\alpha=-2$

$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-2$

$\therefore\ \alpha\beta=-4$ ($\because\ \alpha+\beta=1$)

따라서 ㉢에서

$k=-\alpha\beta\gamma=-(-4)\times2=8$

답 8

19 $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면 조건 ㈎에서

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p=q$, $r=s$

$$\therefore\ B=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$$

조건 ㈏에서

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}$,

$4A=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4a & 4a \end{pmatrix}$이고 $AB=4A$이므로

$$\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4a & 4a \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+r=4$ ……㉠

또한, $BA=\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}$,

$8B=8\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8p & 8p \\ 8r & 8r \end{pmatrix}$이고 $BA=8B$이므로

$$\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8p & 8p \\ 8r & 8r \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p=0$, $r=0$ 또는 $1+a=8$

$p=0$, $r=0$이면 ㉠을 만족시키지 못하므로

$1+a=8$ $\quad\therefore\ a=7$

따라서 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ 7+r & 7+r \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A+B$의 $(1, 2)$성분과 $(2, 1)$성분의 합은

$(1+p)+(7+r)=8+(p+r)=8+4$ ($\because$ ㉠)

$\qquad=12$

답 ③

20 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서

$a=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0$,

$b=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-1003+1004)$

$\quad=502$,

$c=0$,

$d=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=0$

이므로

$a+b+c+d=0+502+0+0=502$

답 ④

21 $AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(AB)^2=(AB)(AB)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(AB)^3=(AB)^2(AB)=\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -7\\0 & 8\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore (AB)^n=\begin{pmatrix}1 & 1-2^n\\0 & 2^n\end{pmatrix}$

$B(AB)^nA=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1-2^n\\0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$

이때 행렬 $B(AB)^nA$의 모든 성분의 합이 2049가 되려면

$2^{n+1}+1=2049$, $2^{n+1}=2048=2^{11}$

$n+1=11$ $\therefore n=10$ 답 10

22

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$

또한, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}$

$=(A^3)^{33}A+(A^3)^{33}B+(A^3)^{32}A^2B^2+(A^3)^{32}AB^3$

$+(A^3)^{32}B^3B+(A^3)^{31}A^2B^3B^2+\cdots+A(B^3)^{33}$

$+(B^3)^{33}B$

$=(A+B+A^2B^2-A-B-A^2B^2)$

$+(A+B+A^2B^2-A-B-A^2B^2)+\cdots$

$+(A+B+A^2B^2-A-B-A^2B^2)$

$+A+B+A^2B^2-A-B$

$=A^2B^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore a+b+c+d=1+0+0+1=2$ 답 2

23

$1+i=a_1+ib_1$이므로 $a_1=1$, $b_1=1$

$(1+i)^2=2i=a_2+ib_2$이므로 $a_2=0$, $b_2=2$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=1$, $c=1$

이때 $A^2=\begin{pmatrix}1 & b\\1 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\1 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b & b+bd\\1+d & b+d^2\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b & b+bd\\1+d & b+d^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+b\\1+d\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+b=0$, $1+d=2$

$\therefore b=-1$, $d=1$

즉, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\0 & -4\end{pmatrix}$

$=-4E$

$\vdots$

$A^8=16E$

따라서 자연수 k의 최솟값은 16이다. 답 16

24 해결단계

❶ 단계	방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω에 대한 관계식을 구한다.
❷ 단계	행렬 A의 거듭제곱을 이용하여 규칙성을 찾고 주어진 식을 규칙을 갖는 것끼리 묶어 간단히 한다.

$x^3-1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω가 이 방정식의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$A=\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\\omega^2 & -1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\\omega^2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\\omega^2 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega^4 & -\omega^3-\omega^2\\-\omega^3-\omega^2 & \omega^4+1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega & -1-\omega^2\\-1-\omega^2 & \omega+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \omega\\\omega & -\omega^2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & \omega\\\omega & -\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\\omega^2 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega+\omega^3 & -\omega^2-\omega\\-\omega^2-\omega^4 & \omega^3+\omega^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega+1 & 1\\-\omega^2-\omega & 1+\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega^2 & 1\\1 & -\omega\end{pmatrix}$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-\omega^2 & 1\\ 1 & -\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\ \omega^2 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\omega^3+\omega^2 & -\omega^4-1\\ -\omega-\omega^3 & \omega^2+\omega\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+\omega^2 & -\omega-1\\ -\omega-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\ \omega^2 & -1\end{pmatrix}=A$$
$$\vdots$$
$\therefore\ A^{3k+1}=A,\ A^{3k+2}=A^2,\ A^{3k+3}=A^3$

(단, k는 음이 아닌 정수)

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{1000}$
$$=(A+A^2+A^3)+(A+A^2+A^3)+\cdots+(A+A^2+A^3)+A$$
$$=333(A+A^2+A^3)+A$$
$$=333\left\{\begin{pmatrix}-\omega & \omega^2\\ \omega^2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & \omega\\ \omega & -\omega^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega^2 & 1\\ 1 & -\omega\end{pmatrix}\right\}+A$$
$$=333\begin{pmatrix}-\omega-1-\omega^2 & \omega^2+\omega+1\\ \omega^2+\omega+1 & -1-\omega^2-\omega\end{pmatrix}+A$$
$$=O+A=A$$

답 A

25

ㄱ. $(A-E)^2=A^2-2A+E=E-2A+E$
$=-2A+2E=O$

즉, $2A=2E$이므로 $A=E$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A$$

즉, $A\neq O$이고, $A^2=A$이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이면

$$AC=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$BC=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

즉, $C\neq O$이고, $AC=BC$이지만 $A\neq B$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

행렬에서 두 행렬이 모두 영행렬이 아니더라도 그 곱은 영행렬일 수 있다. 이것은 두 실수의 곱이 0일 때, 두 실수 중 적어도 하나는 0인 것과는 대조된다. 행렬에서는 두 행렬의 곱이 영행렬이더라도 두 행렬 모두 영행렬이 아닐 수 있다는 점은 실수 연산의 성질과 비교되는 중요한 특징이다.

ㄴ. $A^2=A$에서 $A^2-A=O$, $A(A-E)=O$이다.
이때 $A\neq O$라고 해서 반드시 $A-E=O$, 즉 $A=E$는 아니다.

ㄷ. $AC=BC$에서 $AC-BC=O$, $(A-B)C=O$이다.
이때 $C\neq O$라고 해서 반드시 $A-B=O$, 즉 $A=B$는 아니다.

26

ㄱ. $A+B=E$에서 $A=E-B$

$\therefore\ A^2-B^2=(E-B)^2-B^2=E-2B$
$=(E-B)-B=A-B$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=2A$$

즉, $A^2=2A$이지만 $A\neq O$이고, $A\neq 2E$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이면

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A,$$
$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=B$$

즉, $AB=A$이고, $BA=B$이지만 $A\neq B$이므로 $AB\neq BA$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

27

$A^2+2A-E=O$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$A^2B+2AB-B=O$

이때 $AB=3E$를 위의 식에 대입하면

$3A+6E-B=O$에서 $B=3A+6E$

$\therefore\ B^2=(3A+6E)^2=9A^2+36A+36E$
$=9(-2A+E)+36A+36E$
$=18A+45E$

따라서 $p=18$, $q=45$이므로

$p+q=18+45=63$

답 63

28

조건 (가)에서

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이므로

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\therefore\ AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}-b & a\\ -d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ -a & -b\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$c=-b$, $d=a$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$

이때 조건 (나)에서

$$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ -6 & 8\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=8$, $ab=3$

$ab=3$에서 $b=\dfrac{3}{a}$($\because\ a>0$)을 $a^2-b^2=8$에 대입하면

$a^2-\dfrac{9}{a^2}=8$, $a^4-8a^2-9=0$

$(a^2+1)(a^2-9)=0$, $(a^2+1)(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=3,\ b=1(\because a>0)$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$3+1+(-1)+3=6$ 답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	a, b, c, d의 관계식을 구하여 행렬 A를 나타낸 경우	30%
(나)	(가)에서 구한 행렬 A를 $A^2=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$에 대입하여 연립방정식의 해를 구한 경우	50%
(다)	행렬 A의 모든 성분의 합을 구한 경우	20%

29 $A+B=2E$에서 $B=2E-A$이므로

$AB=A(2E-A)=2A-A^2$

$BA=(2E-A)A=2A-A^2$

$\therefore AB=BA$ ……㉠

이때 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$에서

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ($\because$ ㉠)

$4E=A^2+B^2+2AB$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}+2AB$, $2AB=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(AB)^2=(AB)(AB)$

$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(AB)^3=(AB)^2(AB)$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$(AB)^n=\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\times n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)

$\therefore A^{10}B^{10}=(AB)^{10}$ ($\because$ ㉠)

$=\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+(-10)+0+1=-8$ 답 ①

30 $A^2+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^3+AB=2A$ $\quad\therefore AB=-A^3+2A$

이때 $AB=-A^3+2A^2$이므로

$-A^3+2A^2=-A^3+2A$

$\therefore A^2=A,\ A^3=A^2=A$

즉, $B=-A^2+2E=-A+2E$이므로

$(A-B)^3=\{A-(-A+2E)\}^3$

$=\{2(A-E)\}^3$

$=8(A^3-3A^2+3A-E)$

$=8(A-3A+3A-E)$

$=8A-8E$

따라서 $a=8,\ b=-8$이므로

$a-b=8-(-8)=16$ 답 16

31 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=2,\ c+d=3$ ……㉠

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+3b \\ 2c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+3b=4,\ 2c+3d=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=0,\ c=6,\ d=-3$

$\therefore (pA+qE)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\left\{p\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2p+q & 0 \\ 6p & -3p+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4p+2q \\ 15p-q \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} 4p+2q \\ 15p-q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4p+2q=m,\ 15p-q=n$

$\therefore m+n=19p+q=70$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 51), (2, 32), (3, 13)$의 3개이다. 답 3

• 다른 풀이 •

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$($x, y$는 실수)이라 하면

$\begin{pmatrix} x+2y \\ x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=2,\ x+3y=-1$

$\therefore x=8,\ y=-3$

즉, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$이고 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=A\left\{8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}=8A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\therefore (pA+qE)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = pA\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= p\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4p+2q \\ 15p-q \end{pmatrix}$

즉, $m=4p+2q$, $n=15p-q$이므로

$m+n=19p+q=70$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 51)$, $(2, 32)$, $(3, 13)$의 3개이다.

32 $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ······㉠

$A^2-2A+2E=O$에서 $A^2=2A-2E$이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ······㉡

이때 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

㉠에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-2b \\ c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-2b=-2$, $c-2d=1$ ······㉢

㉡에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2a+b \\ -2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2a+b=-6$, $-2c+d=6$ ······㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=\frac{14}{3}$, $b=\frac{10}{3}$, $c=-\frac{13}{3}$, $d=-\frac{8}{3}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -13 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -35 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$40+(-35)=5$

답 5

• 다른 풀이 •

$A^2-2A+2E=O$에서 $A^2=2A-2E$이고

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ······㉤

이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ······㉥

$p\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$($p$, q는 실수)라 하면

$\begin{pmatrix} p-2q \\ -2p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p-2q=5$, $-2p+q=5$

$\therefore p=-5$, $q=-5$

즉, $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = A\left\{-5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$= -5A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= -5\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ($\because$ ㉤, ㉥)

$= \begin{pmatrix} 40 \\ -35 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$40+(-35)=5$

33 (i) $A=kE$ $(k\neq 0)$일 때,

$A^2=k^2E=\begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $A\neq kE$ $(k\neq 0)$일 때,

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-2aA+(a^2-bc)E=O$

조건 (가)에서

$2a=16$ $\quad\therefore a=8$

$a^2-bc=64-bc=48$ $\quad\therefore bc=16$

이때 $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 2ab \\ 2ac & a^2+bc \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 80 & 16b \\ 16c & 80 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 A^2의 모든 성분이 양수이려면 b, c가 모두 자연수이어야 한다.

따라서 $bc=16$을 만족시키는 자연수 b, c의 순서쌍은 $(1, 16)$, $(2, 8)$, $(4, 4)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$의 5개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 행렬 A의 개수는 5이다.

답 5

34 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-2A+E=O$

$A^2=2A-E$

$A^3=A(2A-E)=2A^2-A$

$\quad=2(2A-E)-A=3A-2E$

$A^4=A(3A-2E)=3A^2-2A$

$\quad=3(2A-E)-2A=4A-3E$

$\vdots$

$A^n=nA-(n-1)E$ (단, n은 자연수)

$\therefore A^{1000}-A^{999}$

$\quad=(1000A-999E)-(999A-998E)$

$\quad=A-E$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$2a-b=2\times1-(-1)=3$ 답 3

BLACKLABEL 특강 필수 원리

A^n(n은 자연수)을 추정하는 방법

(1) A^2, A^3, A^4, $\cdots$을 차례로 구하여 A^n을 추정한다.

(2) 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 A^2을 $pA+qE$ (p, q는 상수) 꼴로 나타낸 후 A^3, A^4, $\cdots$도 차례로 $pA+qE$ 꼴로 나타내어 A^n을 추정한다.

35 $A\neq kE$이므로 행렬 A에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-(1+x)A+xE=O$

이때 $A^2-3A+2E=O$이므로 $x=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^n의 모든 성분의 합은

$1+(2^n-1)+0+2^n=2^{n+1}$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $2^{n+1}>100$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 6이다. 답 ④

36 $A^3B-5A^2B+5AB^2-AB^3=O$에서

$(A^3-5A^2)B-A(B^3-5B^2)=O$ ⋯⋯㉠

이때 $A=\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-5A+(4-x^2)E=O$

$A^3-5A^2+(4-x^2)A=O$

$\therefore A^3-5A^2=(x^2-4)A$ ⋯⋯㉡

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y^2 & 2 \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$B^2-5B+(6-2y^2)E=O$

$B^3-5B^2+(6-2y^2)B=O$

$\therefore B^3-5B^2=(2y^2-6)B$ ⋯⋯㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$(x^2-4)AB-(2y^2-6)AB=O$

$(x^2-2y^2+2)AB=O$

한편, $AB=\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y^2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+x^2y^2 & 2+2x^2 \\ 3+4y^2 & 10 \end{pmatrix}$에서

$AB\neq O$이므로 $x^2-2y^2+2=0$

$x^2=2y^2-2$에서 $2y^2-2\geq0$이므로

$y\leq-1$ 또는 $y\geq1$

$\therefore x^2+y^2-2y=3y^2-2y-2=3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$

따라서 x^2+y^2-2y는 $y=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 -1

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.110~111

01 10	02 11	03 3	04 18000원	05 288
06 12	07 2	08 146	09 86	10 ④
11 1003				

01 해결단계

❶ 단계	a_{ii}의 특징을 파악한다.
❷ 단계	a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\cdots$의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구한다.

$a_{ij}=\left[\frac{i^2-4j-12}{2}\right]$에서

$a_{ii}=\left[\frac{i^2-4i-12}{2}\right]=\left[\frac{(i+2)(i-6)}{2}\right]$

$a_{11}=\left[\frac{3\times(-5)}{2}\right]=\left[-\frac{15}{2}\right]=-8$

$a_{22}=\left[\frac{4\times(-4)}{2}\right]=[-8]=-8$

$a_{33}=\left[\frac{5\times(-3)}{2}\right]=\left[-\frac{15}{2}\right]=-8$

$a_{44}=\left[\frac{6\times(-2)}{2}\right]=[-6]=-6$

$a_{55}=\left[\frac{7\times(-1)}{2}\right]=\left[-\frac{7}{2}\right]=-4$

$a_{66}=\left[\frac{8\times0}{2}\right]=[0]=0$

$a_{77}=\left[\frac{9\times1}{2}\right]=\left[\frac{9}{2}\right]=4$

$a_{88}=\left[\frac{10\times2}{2}\right]=[10]=10$

$a_{99}=\left[\frac{11\times3}{2}\right]=\left[\frac{33}{2}\right]=16$

$a_{1010}=\left[\frac{12\times4}{2}\right]=[24]=24$

$\vdots$

6 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{nn}\geq0$이고,

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{88}+a_{99}=-4<0$

$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}+a_{1010}=20>0$

이므로 $n\geq10$일 때, $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}>0$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 10이다.

답 10

02 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 이용하여 두 행렬 A, B를 구한다.
❷ 단계	A^n의 규칙성을 파악한다.
❸ 단계	행렬 C의 모든 성분의 합을 구하여 n의 값을 구한다.

$a_{ij}-a_{ji}=0$, $b_{ij}+b_{ji}=0$이므로

$a_{ij}=a_{ji}$에서 $a_{12}=a_{21}$

$b_{ij}=-b_{ji}$에서 $b_{11}=b_{22}=0$, $b_{21}=-b_{12}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$A-2B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}-2b_{12} \\ a_{12}+2b_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a_{11}=1$

$a_{12}-2b_{12}=1$ ……㉠

$a_{12}+2b_{12}=1$ ……㉡

$a_{22}=1$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a_{12}=1$, $b_{12}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^n-C=B$에서 $C=A^n$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

따라서 행렬 C의 모든 성분의 합은 $4\times2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$2^{n+1}=2^{12}$에서 $n=11$

답 11

03 해결단계

❶ 단계	$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하고 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 조건 ㈎를 만족시키는 연립방정식을 세운다.
❷ 단계	조건 ㈏를 a, b, c, d에 대한 식으로 나타내고, ❶ 단계에서 구한 식과 연립하여 a, b, c, d에 대한 관계식을 구한다.
❸ 단계	조건 ㈐를 만족시키는 a, b, c, d의 값을 구하여 행렬 M의 개수를 구한다.

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 조건 ㈎에서

$AM=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$,

$MA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -b \\ d & -d \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$b=0$, $a-c=d$, $b-d=-d$ ……㉠

조건 ㈏에서 $a+b+c+d=4$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=0$, $c+d=2$

이때 조건 ㈐에서

$c=0$, $d=2$ 또는 $c=1$, $d=1$ 또는 $c=2$, $d=0$

따라서 조건을 만족시키는 행렬 M은

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$의 3개이다.

답 3

04 해결단계

❶ 단계	A 문구점, B 문구점의 제 1일의 매출액과 제 2일의 매출액을 각각 행렬로 나타낸다.
❷ 단계	두 문구점의 이틀 동안의 매출액이 서로 같도록 하는 x에 대한 방정식을 세운다.
❸ 단계	❷ 단계에서 얻은 방정식을 풀어 B 문구점의 제 2일의 매출액을 구한다.

A 문구점의 제 1일의 매출액과 제 2일의 매출액을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2500 \\ 1500 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25500 \\ 28500 \end{pmatrix}$

B 문구점의 제 1일의 매출액과 제 2일의 매출액을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 7 & x(x-2) \\ x & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21000+1000x(x-2) \\ 3000x+3000 \end{pmatrix}$

두 문구점의 이틀 동안의 매출액이 서로 같으려면

$21000+1000x(x-2)+3000x+3000=25500+28500$

$1000x(x-2)+3000x-30000=0$

$x^2+x-30=0$, $(x+6)(x-5)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=5$

$\therefore x=5$ ($\because x\geq2$)

따라서 B 문구점의 제 2일의 매출액은

$3000\times5+3000=18000$(원)

답 18000원

05 해결단계

❶ 단계	$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$를 만족시키기 위한 두 행렬 A, B의 관계를 파악한다.
❷ 단계	❶ 단계의 조건을 만족시키는 점 (x, y)가 나타내는 도형의 둘레의 길이 l을 구한 후, l^2의 값을 구한다.

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$에서

$A^2-B^2=A^2-AB+BA-B^2$

$\therefore AB=BA$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&|x|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|y-2|&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|y-2|&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&|x|\end{pmatrix}$$

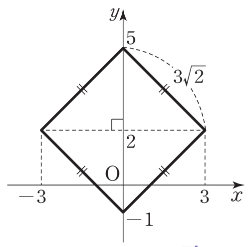
이므로

$$\begin{pmatrix}2|y-2|+1&3\\|x|+|y-2|&|x|+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2|y-2|+1&|x|+|y-2|\\3&|x|+1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$|x|+|y-2|=3$ ……㉠

따라서 ㉠을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같으므로 구하는 도형의 둘레의 길이는 한 변의 길이가 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$인 마름모의 둘레의 길이이다.



즉, $l=4\times3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$이므로

$l^2=288$

답 288

06 해결단계

❶ 단계	$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$에서 규칙을 찾아 $A^n=E$를 만족시키는 n의 값을 구한다.
❷ 단계	$E+A+A^2+\cdots+A^{12}$을 규칙성을 갖는 것들끼리 적당히 묶어 간단히 한 후, $\dfrac{abc}{d}$의 값을 구한다.

$$A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix}a_4\\b_4\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_3\\b_3\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=A^4\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

$\therefore A^4=E$

$\therefore E+A+A^2+\cdots+A^{12}$
$=(E+A+A^2+A^3)+A^4(E+A+A^2+A^3)$
$\quad+(A^4)^2(E+A+A^2+A^3)+(A^4)^3$
$=4E+3A+3A^2+3A^3$

따라서 $a=4$, $b=3$, $c=3$, $d=3$이므로

$$\frac{abc}{d}=\frac{4\times3\times3}{3}=12$$

답 12

07 해결단계

❶ 단계	$A+B=3E$를 이용하여 두 행렬 A, B의 관계를 파악한다.
❷ 단계	B의 거듭제곱의 특징을 찾는다.
❸ 단계	k에 대한 방정식을 세워 k의 값을 구한다.

$A+B=3E$ ……㉠

에서

$A(A+B)=A^2+AB=3A$

$(A+B)A=A^2+BA=3A$

$\therefore AB=BA$ ……㉡

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$
$\qquad=A^2+2AB+B^2$ ($\because$ ㉡)

이므로 $(A+B)^2=A^2+B^2$에서

$A^2+2AB+B^2=A^2+B^2$

$\therefore AB=O$

㉠에서 $A=3E-B$이고, 이것을 위의 식에 대입하면

$(3E-B)B=O$, $3B-B^2=O$

$\therefore B^2=3B$ ……㉢

$A+kB=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}$에서

$A+kB-(A+B)=A+kB-3E$ ($\because$ ㉠)

$$=\begin{pmatrix}4&2\\1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$$

$\therefore (k-1)B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ ……㉣

$$(k-1)^2B^2=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}=3(k-1)B$$

즉, $(k-1)^2B^2=3(k-1)B$이고 ㉢에서

$3(k-1)^2B=3(k-1)B$

$(k-1)^2=k-1$

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$

$k=1$이면 ㉣에서 $(k-1)B=O$이므로

$(k-1)B\neq\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

$\therefore k=2$

답 2

08 해결단계

❶ 단계	A^n의 규칙성을 찾는다.
❷ 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 $m-n$이 6과 n의 최소공배수의 배수임을 파악한다.
❸ 단계	$m-n$의 값이 최대, 최소일 때의 $m+n$의 값을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$에서

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$$

$\therefore A^6=E$

조건 (가)에서 $m-n=6l$ (l은 자연수)이라 할 수 있다.

조건 (나)에서 $m=nk$ (k는 자연수)라 하면

$m-n=nk-n=n(k-1)$

즉, $m-n$은 6의 배수이면서 n의 배수이므로 6과 n의 최소공배수의 배수이다.

따라서 n의 값에 따른 m의 값은 다음과 같다.

$n=10$일 때, $m=40, 70, 100$ ←$m-n$은 30의 배수

$n=11$일 때, $m=77$ ←$m-n$은 66의 배수

$n=12$일 때, $m=24, 36, 48, \cdots, 96$ ←$m-n$은 12의 배수

$n=13$일 때, $m=91$ ←$m-n$은 78의 배수

$\vdots$

그러므로 $m-n$의 값은 $n=10$, $m=100$일 때 최대이고, $n=12$, $m=24$일 때 최소이다.

$\therefore p=100+10=110$, $q=24+12=36$

$\therefore p+q=110+36=146$ **답** 146

09 해결단계

❶ 단계	B^n의 규칙성을 찾는다.
❷ 단계	$A_{n+1}=B^nA_n$을 이용하여 행렬 A_7의 모든 성분의 합을 구한다.

$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 1\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\12 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\4n & 1\end{pmatrix}$

이때 $A_{n+1}=B^nA_n$에서

$n=1$일 때, $A_2=BA_1=BE=B$

$n=2$일 때, $A_3=B^2A_2=B^2B=B^3$

$n=3$일 때, $A_4=B^3A_3=B^3B^3=B^6$

$n=4$일 때, $A_5=B^4A_4=B^4B^6=B^{10}$

$n=5$일 때, $A_6=B^5A_5=B^5B^{10}=B^{15}$

$n=6$일 때, $A_7=B^6A_6=B^6B^{15}=B^{21}$

따라서 행렬 $A_7=B^{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\84 & 1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$1+0+84+1=86$ **답** 86

10 해결단계

❶ 단계	ㄱ의 반례를 구하여 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	A^2, B^2과 같은 행렬을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	C를 A, B에 대한 식으로 나타내어 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$

이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

ㄴ. $AB=A$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$ABA=A^2$

이때 $BA=B$이므로 $A^2=AB=A$

$BA=B$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$BAB=B^2$

이때 $AB=A$이므로 $B^2=BA=B$

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

ㄷ. $A+B+C=O$이면 $C=-A-B$이므로

$AB=BC$에서

$AB=B(-A-B)$

$\therefore AB+BA=-B^2$ ……㉠

$BC=CA$에서

$B(-A-B)=(-A-B)A$

$\therefore A^2=B^2$ ……㉡

이때

$BA-CB=BA-(-A-B)B$

$=BA+AB+B^2=O$ ($\because$ ㉠)

이므로 $BA=CB$

$CB-AC=(-A-B)B-A(-A-B)$

$=-AB-B^2+A^2+AB=O$ ($\because$ ㉡)

이므로 $CB=AC$

$\therefore BA=CB=AC$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

11 해결단계

❶ 단계	행렬 A에 대하여 케일리-해밀턴 정리를 이용하여 A^2을 A, E에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	A의 거듭제곱의 규칙성을 찾는다.
❸ 단계	행렬 $A^{1000}+A-2E$의 모든 성분의 합을 구하여 $a+b$의 값을 구한다.

행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-3A+2E=O$

$\therefore A^2=3A-2E$

$A^3=A^2A=(3A-2E)A=3A^2-2A$

$=3(3A-2E)-2A=7A-6E$

$A^4=A^3A=(7A-6E)A=7A^2-6A$

$=7(3A-2E)-6A=15A-14E$

$\vdots$

$A^n=(2^n-1)A-(2^n-2)E$ (단, n은 자연수)

$\therefore A^{1000}+A-2E$

$=(2^{1000}-1)A-(2^{1000}-2)E+A-2E$

$=2^{1000}A-2^{1000}E$

$=2^{1000}(A-E)$

$=2^{1000}\left\{\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$=2^{1000}\begin{pmatrix}2 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$2^{1000}\times(2+2-1-1)=2^{1001}$

이때 a는 소수, b는 자연수이므로

$a=2$, $b=1001$

$\therefore a+b=2+1001=1003$ **답** 1003