THE 개념

블랙라벨

정답과 해설

BLACKLABEL

Ⅰ. 도형의 방정식

01. 평면좌표

1 두 점 사이의 거리

기본 + 필수연습 본문 pp.012~021

01 (1) 6 (2) 12
02 -2
03 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{13}$
04 5, 9
05 -1, 11
06 12
07 $\frac{32}{3}$
08 18
09 최댓값 : 3, 최솟값 : -1
10 (1) $P(0, 1)$ (2) $Q(-3, 4)$
11 $10+5\sqrt{2}$
12 10
13 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형
14 $2\sqrt{2}$
15 $x=0$, $y=2$ 또는 $x=\sqrt{3}$, $y=-1$
16 $5\sqrt{2}$
17 $2\sqrt{13}$
18 10
19 (1) 12 (2) $P\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$
20 16
21 30
22 풀이 참조
23 풀이 참조
24 $10x-4y-3=0$
25 $x=\frac{13}{3}$

01

(1) 수직선 위의 두 점 $A(-4)$, $B(-10)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=|-10-(-4)|=|-6|=6$

(2) 수직선 위의 원점 $O(0)$과 점 $A(12)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=|12|=12$

답 (1) 6 (2) 12

02

수직선 위의 두 점 $O(0)$, $A(p)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=|p|=4$
이때 $p<0$이므로
$-p=4$ $\therefore p=-4$
또한, 수직선 위의 두 점 $A(p)$, $B(q)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=|q-p|=6$
이때 $q>p$, $p=-4$이므로
$q-(-4)=6$ $\therefore q=2$
$\therefore p+q=-4+2=-2$

답 -2

03

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}$
$=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

(2) 좌표평면 위의 원점 $O(0, 0)$과 점 $A(-3, 2)$ 사이의 거리는
$\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{13}$

04

좌표평면 위의 두 점 $A(a-1, 4)$, $B(5, a-4)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로
$\sqrt{\{5-(a-1)\}^2+(a-4-4)^2}=\sqrt{10}$
$\sqrt{(6-a)^2+(a-8)^2}=\sqrt{10}$
양변을 제곱하면
$(6-a)^2+(a-8)^2=10$
$a^2-14a+45=0$, $(a-5)(a-9)=0$
$\therefore a=5$ 또는 $a=9$
따라서 구하는 a의 값은 5, 9이다.

답 5, 9

05

$\overline{AC}+\overline{BC}=12$이므로 $|x-3|+|x-7|=12$

(i) $x<3$일 때,
$-(x-3)-(x-7)=12$에서
$-2x+10=12$, $-2x=2$
$\therefore x=-1$

(ii) $3\le x<7$일 때,
$x-3-(x-7)=4\ne 12$이므로
조건을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.

(iii) $x \geq 7$일 때,

$x-3+x-7=12$에서

$2x-10=12$, $2x=22$

$\therefore\ x=11$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x의 값은 -1, 11이다.

답 -1, 11

06

$\overline{PA}+\overline{PB} \leq 4\overline{AB}$에서

$|x-(-1)|+|x-2| \leq 4 \times |2-(-1)|$이므로

$|x+1|+|x-2| \leq 12$

(i) $x<-1$일 때,

$-(x+1)-(x-2) \leq 12$에서

$-2x+1 \leq 12$, $-2x \leq 11$

$\therefore\ x \geq -\dfrac{11}{2}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\dfrac{11}{2} \leq x < -1$

(ii) $-1 \leq x < 2$일 때,

$x+1-(x-2)=3 \leq 12$이므로

$-1 \leq x < 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(iii) $x \geq 2$일 때,

$x+1+x-2 \leq 12$에서

$2x-1 \leq 12$, $2x \leq 13$

$\therefore\ x \leq \dfrac{13}{2}$

그런데 $x \geq 2$이므로 $2 \leq x \leq \dfrac{13}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\dfrac{11}{2} \leq x \leq \dfrac{13}{2}$이므로 구하는 정수 x는 -5, -4, -3, $\cdots$, 6의 12개이다.

답 12

07

$\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(3+3)^2+(a-4)^2}=2\sqrt{(3-4)^2+(a-5)^2}$

양변을 제곱하면

$36+(a-4)^2=4\{1+(a-5)^2\}$

$a^2-8a+52=4a^2-40a+104$

$3a^2-32a+52=0$ ← $(a-2)(3a-26)=0$ $\quad \therefore\ a=2$ 또는 $a=\dfrac{26}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 $\dfrac{32}{3}$이다.

답 $\dfrac{32}{3}$

08

두 점 $A(5-x,\ 0)$, $B(0,\ x-3)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(5-x)\}^2+(x-3-0)^2}$

$=\sqrt{(x-5)^2+(x-3)^2}$

$=\sqrt{2x^2-16x+34}$

$=\sqrt{2(x-4)^2+2}$

따라서 $x=4$일 때, 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이므로

$a=4$, $m=\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+m^2=4^2+(\sqrt{2})^2=18$

답 18

09

두 점 $A(x+1,\ 0)$, $B(0,\ 2x-3)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(x+1)\}^2+(2x-3-0)^2}$

$=\sqrt{(x+1)^2+(2x-3)^2}$

$=\sqrt{5x^2-10x+10}$

이때 $\overline{AB} \leq 5$이므로

$\sqrt{5x^2-10x+10} \leq 5$

양변을 제곱하면 $\quad a \geq 0$, $b \geq 0$일 때, $a \leq b$이면 $a^2 \leq b^2$이다.

$5x^2-10x+10 \leq 25$

$x^2-2x-3 \leq 0$, $(x+1)(x-3) \leq 0$

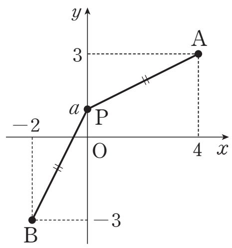
$\therefore\ -1 \leq x \leq 3$

따라서 x의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

10

(1) 오른쪽 그림과 같이 y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면



$\overline{PA}=\overline{PB}$에서

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(0-4)^2+(a-3)^2$

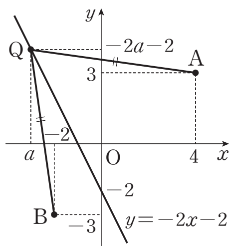
$=(0+2)^2+(a+3)^2$

$a^2-6a+25=a^2+6a+13$

$12a=12 \quad \therefore a=1$

$\therefore$ P$(0, 1)$

(2) 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-2x-2$ 위의 점 Q의 좌표를 $(a, -2a-2)$라 하면



$\overline{QA}=\overline{QB}$에서

$\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$이므로

$(a-4)^2+(-2a-5)^2$

$=(a+2)^2+(-2a+1)^2$

$5a^2+12a+41=5a^2+5$

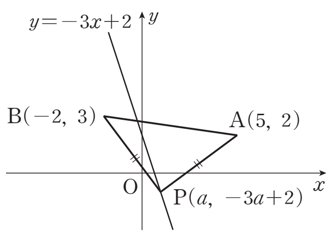
$12a=-36 \quad \therefore a=-3$

$\therefore$ Q$(-3, 4)$

답 P$(0, 1)$ (2) Q$(-3, 4)$

11

다음 그림과 같이 직선 $y=-3x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -3a+2)$라 하자.



$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-5)^2+(-3a)^2=(a+2)^2+(-3a-1)^2$

$10a^2-10a+25=10a^2+10a+5$

$20a=20 \quad \therefore a=1$

즉, P$(1, -1)$이므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=5$,

$\overline{AB}=\sqrt{(5+2)^2+(2-3)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PAB의 둘레의 길이는

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{AB}=5+5+5\sqrt{2}=10+5\sqrt{2}$

답 $10+5\sqrt{2}$

12

삼각형 ABC의 외심을 O(a, b)라 하면

$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$에서 $\overline{AO}^2=\overline{BO}^2=\overline{CO}^2$

$\overline{AO}^2=\overline{BO}^2$에서

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+b^2$

$a^2+2a+1+b^2-4b+4=a^2-6a+9+b^2$

$8a-4b-4=0 \quad \therefore 2a-b-1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, $\overline{AO}^2=\overline{CO}^2$에서

$(a+1)^2+(b-2)^2=(a-6)^2+(b-2)^2$

$a^2+2a+1+b^2-4b+4=a^2-12a+36+b^2-4b+4$

$14a=35 \quad \therefore a=\frac{5}{2}, b=4$ ($\because$ ㉠)

$\therefore ab=\frac{5}{2}\times 4=10$

답 10

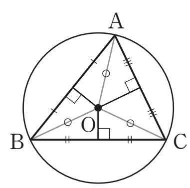
보충 설명

삼각형의 외심의 성질

(1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

(2) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

⇨ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$=(외접원의 반지름의 길이)



13

A$(-1, -3)$, B$(1, 2)$, C$(4, -1)$이므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(2+3)^2}=\sqrt{29}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-4)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{29}$

이때 $\overline{AB}=\overline{CA}=\sqrt{29}$이므로

△ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형이다.

답 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

14

삼각형 AOB에서 $\angle AOB=90°$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

이때 $O(0, 0)$, $A(a, a+4)$, $B(-a, -a+4)$이므로

$\{a^2+(a+4)^2\}+\{(-a)^2+(-a+4)^2\}$

$=\{a-(-a)\}^2+\{(a+4)-(-a+4)\}^2$

$4a^2+32=8a^2$, $4a^2=32$, $a^2=8$

$\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

답 $2\sqrt{2}$

15

$\triangle OAB$가 정삼각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}$에서 $\overline{OA}^2=\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

이때 $\overline{OA}^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$, $\overline{OB}^2=x^2+y^2$,

$\overline{AB}^2=(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2$이므로

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2$에서 $x^2+y^2=4$ ……㉠

$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$에서 $x^2+y^2=(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2$이므로

$y=-\sqrt{3}x+2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(-\sqrt{3}x+2)^2=4$

$x^2-\sqrt{3}x=0$, $x(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=0, y=2$ 또는 $x=\sqrt{3}, y=-1$ ($\because$ ㉡)

답 $x=0, y=2$ 또는 $x=\sqrt{3}, y=-1$

16

세 점 (a, b), $(0, 4)$, $(5, -1)$을 각각 A, B, C라 하면

$\sqrt{a^2+(b-4)^2}=\overline{BA}$,

$\sqrt{(5-a)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(b+1)^2}=\overline{CA}$

$\therefore \sqrt{a^2+(b-4)^2}+\sqrt{(5-a)^2+(b+1)^2}$

$=\overline{BA}+\overline{CA}$

$\geq\overline{BC}$ ← 점 A가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.

$=\sqrt{(5-0)^2+(-1-4)^2}$

$=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

답 $5\sqrt{2}$

17

$\sqrt{x^2+y^2-2x+8y+17}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}$

$=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$

에서 세 점 (x, y), $(1, -4)$, $(-3, 2)$를 각각 A, B, C라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}=\overline{BA}$,

$\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=\overline{CA}$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$

$=\overline{BA}+\overline{CA}$

$\geq\overline{BC}$ ← 점 A가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.

$=\sqrt{(-3-1)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{16+36}$

$=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$이다.

답 $2\sqrt{13}$

18

세 점 (x, y), $(1, -2)$, $(-4, k)$를 각각 A, B, C라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\overline{BA}$,

$\sqrt{(x+4)^2+(y-k)^2}=\overline{CA}$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-k)^2}$

$=\overline{BA}+\overline{CA}$

$\geq\overline{BC}$ ← 점 A가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.

$=\sqrt{(-4-1)^2+(k+2)^2}$

$=\sqrt{k^2+4k+29}$

즉, 점 A가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때 최솟값 $\sqrt{k^2+4k+29}$를 가지므로 $\sqrt{k^2+4k+29}=13$

양변을 제곱하면

$k^2+4k+29=169$, $k^2+4k-140=0$

$(k+14)(k-10)=0$

$\therefore k=10$ ($\because k>0$)

답 10

19

(1) y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, y)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(1^2+y^2)+\{3^2+(y+2)^2\}$

$=2y^2+4y+14$

$=2(y+1)^2+12$

따라서 $y=-1$, 즉 $\mathrm{P}(0,\ -1)$일 때 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 12를 갖는다.

(2) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$

$=\{(x-4)^2+(y-3)^2\}+\{(x-5)^2+(y-2)^2\}$

$=2x^2-18x+2y^2-10y+54$

$=2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+1$

따라서 $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{5}{2}$일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$은 최솟값 1을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이다.

답 (1) 12 (2) $\mathrm{P}\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

20

직선 $y=x+2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ a+2)$라 하면

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=\frac{1}{2}\{(a-3)^2+(a+2-1)^2\}-\{(a+1)^2+(a+2)^2\}$

$=\frac{1}{2}(2a^2-4a+10)-(2a^2+6a+5)$

$=-a^2-8a$

$=-(a+4)^2+16$

따라서 $a=-4$, 즉 $\mathrm{P}(-4,\ -2)$일 때 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최댓값 16을 갖는다.

답 16

21

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$

$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$

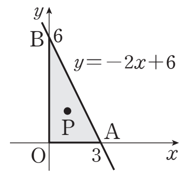
$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$

따라서 $x=1$, $y=2$, 즉 $\mathrm{P}(1,\ 2)$일 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 30을 갖는다.

답 30

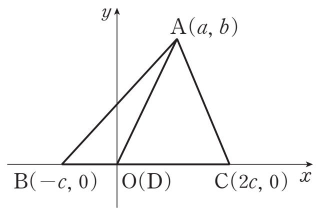
보충 설명

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$는 직선 AB, 즉 직선 $y=-2x+6$보다 아래쪽에 있으므로 점 P는 삼각형 OAB의 내부에 있다.



22

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓으면 점 D는 원점 $(0,\ 0)$이다.



이때 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 $\mathrm{C}(2c,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a+c)^2+b^2=a^2+b^2+c^2+2ac$,

$\overline{\mathrm{AC}}^2=(a-2c)^2+b^2=a^2+b^2+4c^2-4ac$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}^2=a^2+b^2$, $\overline{\mathrm{BD}}^2=c^2$이므로

$2\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+2ac)+(a^2+b^2+4c^2-4ac)$

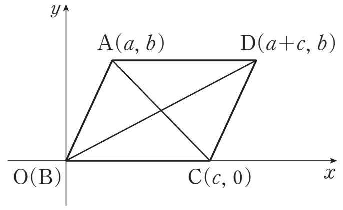
$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$=3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{BD}}^2)$

답 풀이 참조

23

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면 위에 평행사변형 ABCD를 놓으면 점 B는 원점 $(0,\ 0)$이다.



이때 평행사변형 ABCD의 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $C(c, 0)$, $D(a+c, b)$라 하면

$\overline{AC}^2=(a-c)^2+b^2=a^2+b^2+c^2-2ac$,

$\overline{BD}^2=(a+c)^2+b^2=a^2+b^2+c^2+2ac$

이때 $\overline{AB}^2=a^2+b^2$, $\overline{BC}^2=c^2$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BD}^2&=(a^2+b^2+c^2-2ac)+(a^2+b^2+c^2+2ac)\\&=2(a^2+b^2+c^2)\\&=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

24

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $A(4, 1)$, $B(-1, 3)$이고 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=4$이므로

$\{(x-4)^2+(y-1)^2\}-\{(x+1)^2+(y-3)^2\}=4$

$x^2+y^2-8x-2y+17-(x^2+y^2+2x-6y+10)=4$

$\therefore\ 10x-4y-3=0$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$10x-4y-3=0$

답 $10x-4y-3=0$

25

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $A(2, 6)$, $B(0, 2)$, $C(4, -2)$이고 $\overline{PA}^2-2\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=0$이므로

$$\{(x-2)^2+(y-6)^2\}-2\{x^2+(y-2)^2\}+\{(x-4)^2+(y+2)^2\}=0$$

$$(x^2+y^2-4x-12y+40)-2(x^2+y^2-4y+4)+(x^2+y^2-8x+4y+20)=0$$

$12x-52=0$

$\therefore\ x=\dfrac{13}{3}$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 $x=\dfrac{13}{3}$

답 $x=\dfrac{13}{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.022~023

01 $\dfrac{34}{3}$	**02** 5	**03** 4	**04** 52
05 1시간	**06** 2	**07** 1	**08** ⑤
09 2	**10** 14	**11** $\dfrac{21}{2}$	**12** $\dfrac{9}{2}$

01

$\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로

$|a-(-1)|=2\times|a-4|$, $|a+1|=2\times|a-4|$

양변을 제곱하면

$a^2+2a+1=4(a^2-8a+16)$

$3a^2-34a+63=0$ ← $(3a-7)(a-9)=0$ $\quad\therefore a=\frac{7}{3}$ 또는 $a=9$

구하는 모든 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\dfrac{34}{3}$이다.

답 $\dfrac{34}{3}$

02

$\overline{PR}+\overline{QR}<6$에서 $|x-(-3)|+|x-1|<6$이므로

$|x+3|+|x-1|<6$

(i) $x<-3$일 때,

$-(x+3)-(x-1)<6$에서

$-2x-2<6$, $-2x<8$

$\therefore\ x>-4$

그런데 $x<-3$이므로 $-4<x<-3$

(ii) $-3\le x<1$일 때,

$x+3-(x-1)=4<6$이므로

$-3\le x<1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(iii) $x\ge1$일 때,

$x+3+x-1<6$에서

$2x+2<6$, $2x<4$

$\therefore\ x<2$

그런데 $x\ge1$이므로 $1\le x<2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-4<x<2$이므로 구하는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1의 5개이다.

답 5

03

정사각형 ABCD의 넓이가 5이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

따라서 대각선 AC의 길이는 $\sqrt{10}$이므로

$\overline{AC}^2=10$, 즉

$(k+1-2)^2+(1-2)^2=10$에서

$k^2-2k-8=0$, $(k+2)(k-4)=0$

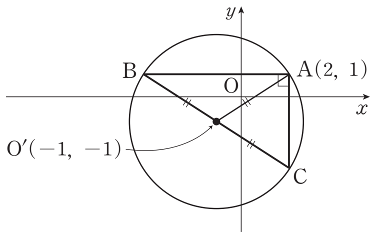
$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 4

04

삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

또한, 외심은 $\overline{BC}$의 중점이므로 삼각형 ABC의 외심을 O′이라 하면 다음 그림과 같다.



즉, $\overline{O'A}=\overline{O'B}=\overline{O'C}=\frac{1}{2}\overline{BC}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\overline{O'A})^2=4\overline{O'A}^2$

$=4\{(2+1)^2+(1+1)^2\}$

$=52$

답 52

05

동서 방향을 x축, 남북 방향을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자.

A는 점 $(3, 0)$, B는 점 $(0, -4)$에서 출발한다고 할 때, t시간 후의 A, B의 위치를 각각

$A(3-4t, 0)$, $B(0, -4+2t)$라 하면

두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(3-4t)\}^2+(-4+2t-0)^2}$

$=\sqrt{20t^2-40t+25}$

$=\sqrt{20(t-1)^2+5}$

이므로 $t=1$일 때, 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

따라서 출발하여 1시간이 지난 후 A, B 사이의 거리가 최소가 된다.

답 1시간

06

점 (a, b)가 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$b=2a+1$ ······㉠

이때 점 (a, b), 즉 $(a, 2a+1)$이 두 점 $A(1, 1)$, $B(3, -1)$로부터 같은 거리에 있으므로

$\sqrt{(a-1)^2+(2a)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(2a+2)^2}$

$\sqrt{5a^2-2a+1}=\sqrt{5a^2+2a+13}$

양변을 제곱하면

$5a^2-2a+1=5a^2+2a+13$

$4a=-12$ $\therefore a=-3$, $b=-5$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a-b=-3-(-5)=2$

답 2

07

점 $P(a, b)$가 직선 $x+y-4=0$ 위에 있으므로

$a+b-4=0$ $\therefore b=-a+4$ ······㉠

이때 $P(a, -a+4)$, $A(2, 0)$, $B(-4, 0)$이고

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:5$에서

$\overline{BP}=5\overline{AP}$, 즉 $\overline{BP}^2=25\overline{AP}^2$이므로

$(a+4)^2+(-a+4)^2=25\{(a-2)^2+(-a+4)^2\}$

$2a^2+32=25(2a^2-12a+20)$

$48a^2-300a+468=0$, $4a^2-25a+39=0$

$(a-3)(4a-13)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a$는 정수)

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-3+4=1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a-2b=3-2\times1=1$

답 1

08

ㄱ. $\overline{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2}$

$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (참)

ㄴ. $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2}$

$=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$ (∵ ㄱ)

$\overline{CA}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}$

$=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

즉, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$을 만족시키므로 피타고라스 정리에 의하여

$\angle B=90°$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sqrt{5}:2\sqrt{5}:5$

$=1:2:\sqrt{5}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

09

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\{(a+2)^2+b^2\}+\{(a-2)^2+b^2\}+\{a^2+(b-6)^2\}$

$=3a^2+3b^2-12b+44$

$=3a^2+3(b-2)^2+32$

따라서 $a=0$, $b=2$, 즉 $P(0, 2)$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되므로

$a+b=0+2=2$

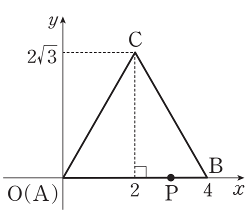
답 2

보충 설명

삼각형의 무게중심의 성질 | 삼각형의 내부에 있는 점 중에서 삼각형의 세 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점은 무게중심이다. 즉, 문제에서 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 본문 p.026의 **개념05**에서 '좌표평면 위의 삼각형의 무게중심'을 배우면 문제를 빠르게 풀 수 있다.

10

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면 위에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 놓으면 점 A는 원점 (0, 0)이다.



이때 삼각형 ABC의 나머지 두 꼭짓점의 좌표는 각각

$B(4, 0)$, $C(2, 2\sqrt{3})$ 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 높이는 $2\sqrt{3}$이다.

또한, 점 P는 x축 위의 점이므로

$P(a, 0)$ $(0\le a\le 4)$이라 하면

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\{(a-4)^2+0^2\}+\{(a-2)^2+(2\sqrt{3})^2\}$

$=2a^2-12a+32$

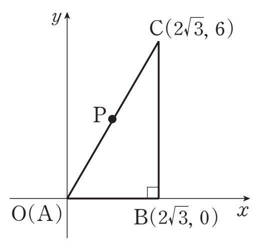
$=2(a-3)^2+14$

따라서 $a=3$, 즉 $P(3, 0)$일 때 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 최솟값 14를 갖는다.

답 14

11

다음 그림과 같이 직선 AB를 x축, 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓으면 점 A는 원점 (0, 0)이다.



이때 삼각형 ABC의 나머지 두 꼭짓점의 좌표는 각각 $B(2\sqrt{3}, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 6)$이므로 직선 AC의 방정식은

$y=\dfrac{6}{2\sqrt{3}}x$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x$

점 P는 변 CA 위의 점이므로 점 P의 좌표를

$(a, \sqrt{3}a)$ $(0\le a\le 2\sqrt{3})$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\{a^2+(\sqrt{3}a)^2\}+\{(a-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}a)^2\}$

$=8a^2-4\sqrt{3}a+12$

$=8\left(a-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\dfrac{21}{2}$

따라서 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 즉 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 최솟값 $\dfrac{21}{2}$을 갖는다.

답 $\dfrac{21}{2}$

12

$A(1, -1)$, $B(5, 3)$이므로 $P(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2-8$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=\{(x-5)^2+(y-3)^2\}-8$

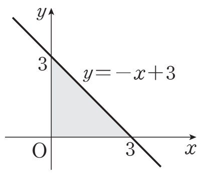
$8x+8y=24$ $\quad\therefore x+y=3$

(가)

즉, 점 P가 나타내는 도형은 x절편이 3, y절편이 3인 직선이다.

(나)

따라서 직선 $y=-x+3$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

(다)

답 $\frac{9}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2-8$을 x, y에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(나)	점 P가 나타내는 도형이 직선임을 확인한 경우	20%
(다)	점 P가 나타내는 도형 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 경우	40%

2 선분의 내분점

기본 + 필수연습

본문 pp.028~035

26 (1) 3 (2) 4 **27** (1) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (2) $(2, 0)$

28 5 **29** 7 **30** 2

31 -75 **32** 10 **33** $0<t<\frac{5}{7}$

34 $\frac{19}{2}$ **35** 35 **36** $C(-30, -6)$

37 9 **38** $2\sqrt{10}$ **39** $D\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

40 -4 **41** 0 **42** 22 **43** 9

44 $\frac{23}{2}$

26

(1) 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\frac{1\times7+2\times1}{1+2}=3$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표는

$\frac{1+7}{2}=4$

답 (1) 3 (2) 4

27

(1) $\frac{2\times4+1\times0}{2+1}=\frac{8}{3}$, $\frac{2\times(-2)+1\times2}{2+1}=-\frac{2}{3}$

따라서 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$이다.

(2) $\frac{0+4}{2}=2$, $\frac{2+(-2)}{2}=0$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 $(2, 0)$이다.

답 (1) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (2) $(2, 0)$

28

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의

x좌표는 $\frac{3\times6+1\times(-2)}{3+1}=4$,

y좌표는 $\frac{3\times a+1\times(-3)}{3+1}=\frac{3a-3}{4}$이므로

$P\left(4, \frac{3a-3}{4}\right)$

이때 점 P가 x축 위에 있으므로 ← x축 위의 점의 y좌표는 0이다.

$\frac{3a-3}{4}=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 a의 값과 점 P의 x좌표의 합은

$1+4=5$

답 5

29

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 (a, b)는

$a=\frac{2+5+5}{3}=4$, $b=\frac{3+(-1)+7}{3}=3$

$\therefore a+b=4+3=7$

답 7

30

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(7,\ 3)$이므로

$$\frac{3\times 3a+2\times(2a-2)}{3+2}=7,\ \frac{3\times(2a-b)+2\times 3b}{3+2}=3$$

즉, $\frac{13a-4}{5}=7$에서

$13a-4=35,\ 13a=39 \qquad \therefore\ a=3$

$\frac{6a+3b}{5}=3$에서 $6a+3b=15$

$18+3b=15,\ 3b=-3 \qquad \therefore\ b=-1$

$\therefore\ a+b=3+(-1)=2$

답 2

31

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-11)+1\times 7}{2+1},\ \frac{2\times 6+1\times(-3)}{2+1}\right)$$

$\therefore\ \mathrm{P}(-5,\ 3)$

또한, 선분 OP를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표 $(a,\ b)$는

$$a=\frac{1\times(-5)+3\times 0}{1+3}=-\frac{5}{4}$$

$$b=\frac{1\times 3+3\times 0}{1+3}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ 80ab=80\times\left(-\frac{5}{4}\right)\times\frac{3}{4}=-75$$

답 -75

32

선분 AB를 삼등분하는 두 점은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점과 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-2)+2\times 4}{1+2},\ \frac{1\times 15+2\times(-9)}{1+2}\right)$$

$\therefore\ (2,\ -1)$

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-2)+1\times 4}{2+1},\ \frac{2\times 15+1\times(-9)}{2+1}\right)$$

$\therefore\ (0,\ 7)$

이때 $a>c$이므로 $\mathrm{P}(2,\ -1)$, $\mathrm{Q}(0,\ 7)$에서

$a=2,\ b=-1,\ c=0,\ d=7$

$\therefore\ a-b-c+d=2-(-1)-0+7=10$

답 10

33

두 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(-8,\ 5)$에 대하여 선분 AB를 $(1-t):t\ (0<t<1)$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t)\times(-8)+t\times 1}{(1-t)+t},\ \frac{(1-t)\times 5+t\times(-2)}{(1-t)+t}\right)$$

$\therefore\ (9t-8,\ -7t+5)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$9t-8<0,\ -7t+5>0$

$9t-8<0$에서 $9t<8 \qquad \therefore\ t<\frac{8}{9}$

$-7t+5>0$에서 $-7t>-5 \qquad \therefore\ t<\frac{5}{7}$

$\therefore\ 0<t<\frac{5}{7}\ (\because\ 0<t<1)$

답 $0<t<\frac{5}{7}$

34

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -4)$, $\mathrm{B}(2,\ a)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 2+1\times(-1)}{2+1},\ \frac{2\times a+1\times(-4)}{2+1}\right)$$

$$\therefore\ \left(1,\ \frac{2a-4}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+3$ 위에 있으므로

$$\frac{2a-4}{3}=2\times 1+3$$

$2a-4=15,\ 2a=19$

$$\therefore\ a=\frac{19}{2}$$

답 $\frac{19}{2}$

35

이차함수 $y=ax^2\ (a>0)$의 그래프와 직선 $y=2x+3$이 만나는 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식 $ax^2=2x+3$, 즉 $ax^2-2x-3=0$의 두 근이다.

서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{3}{a}$

또한, 두 점 P, Q의 중점 M은 제1사분면 위의 점이므로 M의 x좌표는 선분 MH의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore a=2$

$\therefore \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\dfrac{3}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

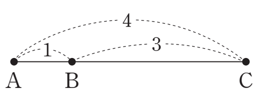
이때 두 점 P, Q는 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=(\beta-\alpha)^2+\{2\beta+3-(2\alpha+3)\}^2\\&=(\beta-\alpha)^2+4(\beta-\alpha)^2\\&=5(\beta-\alpha)^2\\&=5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\&=5\times\left\{1^2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\ (\because ㉠)\\&=5\times7=35\end{aligned}$$

답 35

36

$3\overline{AC}=4\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=4:3$이고, 점 C가 선분 AB의 연장선 위의 점이므로 다음 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 $1:3$으로 내분하는 점이다.



A$(6,\ 2)$, B$(-3,\ 0)$이므로 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

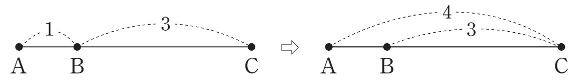
$\dfrac{1\times a+3\times6}{1+3}=-3$에서 $a=-30$

$\dfrac{1\times b+3\times2}{1+3}=0$에서 $b=-6$

$\therefore$ C$(-30,\ -6)$

답 C$(-30,\ -6)$

다른 풀이



점 C가 선분 AB를 $4:3$으로 외분하므로

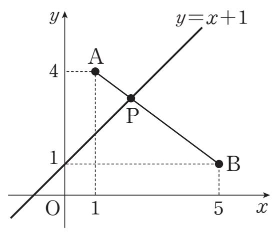
$a=\dfrac{4\times(-3)-3\times6}{4-3}=-30$

$b=\dfrac{4\times0-3\times2}{4-3}=-6$

$\therefore$ C$(-30,\ -6)$

37

두 점 A$(1,\ 4)$, B$(5,\ 1)$과 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이므로 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다.

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{5m+n}{m+n},\ \dfrac{m+4n}{m+n}\right)$이고,

점 P는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{m+4n}{m+n}=\dfrac{5m+n}{m+n}+1$, $\dfrac{m+4n}{m+n}=\dfrac{6m+2n}{m+n}$

$m+4n=6m+2n$ $\qquad\therefore 5m=2n$

서로소인 두 자연수 m, n에 대하여

$m:n=2:5$이므로 $m=2$, $n=5$

$\therefore 2m+n=2\times2+5=9$

답 9

다른 풀이

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{1-4}{5-1}=-\dfrac{3}{4}$이므로

직선 AB의 방정식을 $y=-\dfrac{3}{4}x+a$ (a는 상수)라 하면

이 직선이 점 A$(1,\ 4)$를 지나므로 $4=-\dfrac{3}{4}\times1+a$에서

$a=\dfrac{19}{4}$

$\therefore y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{19}{4}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

이때 선분 AB는 ㉠에서 $1\le x\le5$일 때이다.

㉠과 $y=x+1$을 연립하여 풀면

$x=\frac{15}{7}$, $y=\frac{22}{7}$

즉, 선분 AB와 직선 $y=x+1$의 교점 P의 좌표는

$\left(\frac{15}{7}, \frac{22}{7}\right)$이므로

$\overline{AP}:\overline{BP}=\left(\frac{15}{7}-1\right):\left(5-\frac{15}{7}\right)=\frac{8}{7}:\frac{20}{7}=2:5$

따라서 $m=2$, $n=5$이므로

$2m+n=2\times2+5=9$

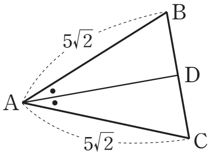
38

A$(-3, 1)$, B$(2, 6)$, C$(4, 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+3)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(4+3)^2+(0-1)^2}=5\sqrt{2}$

$\angle$A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점이 D이므로



$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=5\sqrt{2}:5\sqrt{2}=1:1$

즉, 점 D는 선분 BC의 중점이므로

$D\left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ $\therefore$ D$(3, 3)$

따라서 선분 AD의 길이는

$\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

답 $2\sqrt{10}$

39

A$(2, 3)$, B$(-2, 1)$, C$(5, -3)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-2)^2+(-3-3)^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}=2:3$

이때 I가 $\triangle$ABC의 내심이므로 직선 AI는 $\angle$BAC의 이등분선이다.

따라서 점 D는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{2\times5+3\times(-2)}{2+3}, \frac{2\times(-3)+3\times1}{2+3}\right)$

$\therefore D\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

답 $D\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

40

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치한다.

이때 선분 OB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{9+b}{2}\right)$이므로

$\frac{5+a}{2}=3$, $\frac{9+b}{2}=2$

따라서 $a=1$, $b=-5$이므로

$a+b=1+(-5)=-4$

답 -4

41

마름모에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 중점은 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+b}{2}, \frac{-2+c}{2}\right)$

또한, 선분 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{a+0}{2}\right)$, 즉 $\left(-1, \frac{a}{2}\right)$이므로

$\frac{-4+b}{2}=-1$, $\frac{-2+c}{2}=\frac{a}{2}$

$\therefore b=2$, $c=a+2$

즉, $a-c=-2$, $b=2$이므로

$a+b-c=-2+2=0$

답 0

42

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(4, 7)$이므로

$\frac{0+a+4}{3}=4$, $\frac{3+4+b}{3}=7$

$\therefore a=8$, $b=14$

$\therefore a+b=8+14=22$

답 22

43

삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A(p, q), B(r, s), C(t, u)라 하자.

이때 점 P$(0, 3)$은 변 AB의 중점이므로

$\frac{p+r}{2}=0$, $\frac{q+s}{2}=3$에서

$p+r=0$, $q+s=6$ ……㉠

점 Q$(a, -1)$은 변 BC의 중점이므로

$\frac{r+t}{2}=a$, $\frac{s+u}{2}=-1$에서

$r+t=2a$, $s+u=-2$ ……㉡

점 R$(4, b)$는 변 CA의 중점이므로

$\frac{t+p}{2}=4$, $\frac{u+q}{2}=b$에서

$t+p=8$, $u+q=2b$ ……㉢

또한, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(3, 2)$이므로

$\frac{p+r+t}{3}=3$, $\frac{q+s+u}{3}=2$

$\therefore\ p+r+t=9$, $q+s+u=6$ ……㉣

㉠, ㉡, ㉢에서

$2(p+r+t)=0+2a+8=2a+8$

$2(q+s+u)=6+(-2)+2b=2b+4$

㉣에서 $2a+8=18$, $2b+4=12$

$\therefore\ a=5$, $b=4$ $\quad\therefore\ a+b=5+4=9$

답 9

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 $(3, 2)$는 삼각형 ABC의 세 변의 중점 P$(0, 3)$, Q$(a, -1)$, R$(4, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 무게중심과 일치한다.

즉, $\frac{0+a+4}{3}=3$, $\frac{3+(-1)+b}{3}=2$이므로

$a=5$, $b=4$ $\quad\therefore\ a+b=5+4=9$

44

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(5, 5)$이므로

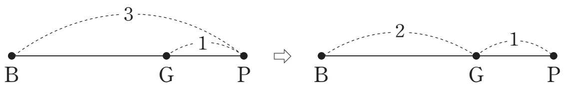
$\frac{1+5-p+8}{3}=5$, $\frac{5+1+6+q}{3}=5$ $\quad\therefore\ p=-1$, $q=3$

즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 B$(6, 1)$, C$(8, 9)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PG}}$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PG}}=3:1$이고,

점 P가 선분 BG의 연장선 위의 점이므로

점 G는 선분 BP를 $2:1$로 내분하는 점이다.



P(a, b), B$(6, 1)$, G$(5, 5)$이므로

$\frac{2\times a+1\times 6}{2+1}=5$에서 $a=\frac{9}{2}$, $\frac{2\times b+1\times 1}{2+1}=5$에서 $b=7$

$\therefore\ a+b=\frac{9}{2}+7=\frac{23}{2}$

답 $\frac{23}{2}$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(5, 5)$이므로

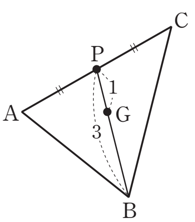
$\frac{1+5-p+8}{3}=5$, $\frac{5+1+6+q}{3}=5$ $\quad\therefore\ p=-1$, $q=3$

즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 B$(6, 1)$, C$(8, 9)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{PB}}=3\overline{\mathrm{PG}}$에서 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PG}}=3:1$

무게중심 G에 대하여

$\overline{\mathrm{BG}}:\overline{\mathrm{PG}}=2:1$이므로 점 P는 오른쪽 그림과 같이 변 AC의 중점이다.



즉, $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점 P의 좌표는

$\left(\frac{1+8}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{9}{2}, 7\right)$

따라서 $a=\frac{9}{2}$, $b=7$이므로 $a+b=\frac{23}{2}$

STEP 1 개념 마무리 본문 p.036

13 16 **14** $\frac{1}{5}<t<\frac{2}{3}$ **15** -6

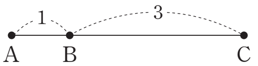
16 5 **17** -6 **18** P$\left(\frac{11}{2}, 4\right)$

13

$-4<8$이므로 수직선 위에서 점 A는 점 B보다 왼쪽에 있다.

또한, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$이므로 점 C의 위치는 다음과 같이 경우를 나누어 나타낼 수 있다.

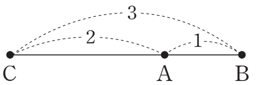
(ⅰ) 점 B가 선분 AC를 $1:3$으로 내분하는 경우



즉, $\dfrac{1\times a+3\times(-4)}{1+3}=8$이므로

$a=44$

(ⅱ) 점 A가 선분 CB를 $2:1$로 내분하는 경우



즉, $\dfrac{2\times 8+1\times a}{2+1}=-4$이므로

$a=-28$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a의 값의 합은

$44+(-28)=16$

답 16

14

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(-4,\ -2)$에 대하여 선분 AB를 $t:(1-t)$ $(0<t<1)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{-4t+(1-t)}{t+(1-t)},\ \dfrac{-2t+4(1-t)}{t+(1-t)}\right)$

$\therefore\ (-5t+1,\ -6t+4)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-5t+1<0,\ -6t+4>0$

$\therefore\ \dfrac{1}{5}<t<\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{1}{5}<t<\dfrac{2}{3}$

15

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 8+2\times 2}{1+2},\ \dfrac{1\times 0+2\times a}{1+2}\right)$

$\therefore\ \left(4,\ \dfrac{2a}{3}\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

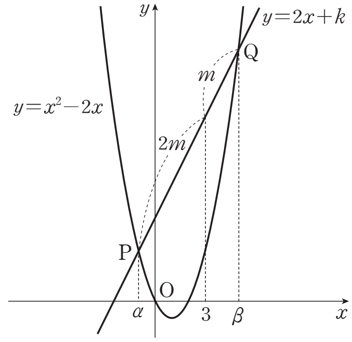
$\dfrac{2a}{3}=-4$에서 $2a=-12$

$\therefore\ a=-6$

답 -6

16

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $\alpha<\beta$이고 다음 그림과 같다.



곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=2x+k$ $(k>0)$가 만나는 점의 x좌표는 이차방정식

$x^2-2x=2x+k$, 즉 $x^2-4x-k=0$ ······㉠

의 실근과 같으므로 α, β는 이차방정식 ㉠의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ ······㉡

$\alpha\beta=-k$ ······㉢

이때 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 x좌표가 3이므로

$\dfrac{2\times\beta+1\times\alpha}{2+1}=3$에서 $\dfrac{\alpha+2\beta}{3}=3$

$\therefore\ \alpha+2\beta=9$ ······㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $\alpha=-1,\ \beta=5$

㉢에서 $-k=(-1)\times 5=-5$

$\therefore\ k=5$

답 5

17

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4,\ 2)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=4,\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=2$, 즉 $x_1+x_2=8,\ y_1+y_2=4$

또한, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1,\ 3)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2+a}{3}=-1,\ \dfrac{8+a}{3}=-1\qquad \therefore\ a=-11$

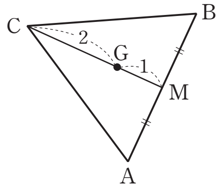
$\dfrac{y_1+y_2+b}{3}=3,\ \dfrac{4+b}{3}=3\qquad \therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=-11+5=-6$

답 -6

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 G$(-1, 3)$, 선분 AB의 중점을 M$(4, 2)$라 하면 점 G는 선분 CM을 $2:1$로 내분하므로



$\dfrac{2\times4+1\times a}{2+1}=-1$, $\dfrac{2\times2+1\times b}{2+1}=3$

$\dfrac{a+8}{3}=-1$에서 $a=-11$

$\dfrac{b+4}{3}=3$에서 $b=5$

$\therefore a+b=-11+5=-6$

18

A$(-1, 2)$, B$(4, 2)$, C$(7, 6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(2-2)^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(7-4)^2+(6-2)^2}=5$

$\therefore \overline{AB}:\overline{BC}=1:1$

이때 $\angle$B의 이등분선이 선분 AC와 만나는 점이 D이므로 점 D는 선분 AC의 중점이다.

즉, $\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{AD}:\overline{CD}=1:1$이므로 점 P는 선분 BC의 중점이다. ← 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용한다.

따라서 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{4+7}{2}, \dfrac{2+6}{2}\right)$ $\quad\therefore$ P$\left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$

답 P$\left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$

STEP 2 개념 마무리			본문 p.037
1 11	**2** $4\sqrt{10}$	**3** 13	**4** $\dfrac{7}{4}$
5 8	**6** $(a-3)^2+b^2=288$		

1

A$(1, 5)$, B(a, b)이므로 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{b-5}{a-1}$

직선 AB가 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$과 평행하므로

$\dfrac{b-5}{a-1}=-1$, $b-5=-a+1$

$\therefore a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$㉠

점 P는 선분 AB 위에 있고, $2\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로 점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분한다.

즉, 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times a+2\times1}{1+2}, \dfrac{1\times b+2\times5}{1+2}\right)$

$\therefore$ P$\left(\dfrac{a+2}{3}, \dfrac{b+10}{3}\right)$

이때 점 P는 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$\dfrac{b+10}{3}=\dfrac{a+2}{3}+1$, $b+10=a+2+3$

$\therefore a-b=5$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{11}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\dfrac{11}{2}\times\dfrac{1}{2}=11$

답 11

다른 풀이

직선 AB와 직선 $x+y-3=0$이 평행하므로 직선 AB의 기울기는 -1이다.

직선 AB의 방정식을 $y=-x+k$ (k는 상수)라 하면 이 직선이 점 A$(1, 5)$를 지나므로

$5=-1+k$ $\quad\therefore k=6$

즉, 직선 AB의 방정식은 $y=-x+6$이므로

$y=x+1$, $y=-x+6$을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{5}{2}$, $y=\dfrac{7}{2}$ $\quad\therefore$ P$\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

또한, $2\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로 점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분한다.

즉, 두 점 $\left(\dfrac{a+2}{3}, \dfrac{b+10}{3}\right)$과 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$이 일치하므로

$\dfrac{a+2}{3}=\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{b+10}{3}=\dfrac{7}{2}$

$\therefore a=\dfrac{11}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\dfrac{11}{2}\times\dfrac{1}{2}=11$

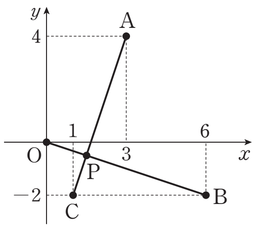
2

다음 그림에서

$\overline{PO}+\overline{PB}\ge\overline{OB}$, $\overline{PA}+\overline{PC}\ge\overline{AC}$이고,

이를 동시에 만족시키는 점 P가 존재하므로

$\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\ge\overline{OB}+\overline{AC}$



$\overline{OB}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\therefore\ \overline{OB}+\overline{AC}=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$

따라서 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은 $4\sqrt{10}$이다.

답 $4\sqrt{10}$

3

세 점 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PAB에 대하여

$\overline{BP}<\overline{AP}+\overline{AB}$ ……㉠, $\overline{AP}<\overline{BP}+\overline{AB}$ ……㉡

또한, 세 점 P, A, B가 일직선 위에 있을 때

$\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{AB}$ ……㉢

(ⅰ) $\overline{AP}\le\overline{BP}$일 때,

㉠, ㉢에서 $\overline{BP}\le\overline{AP}+\overline{AB}$

$\overline{BP}-\overline{AP}\le\overline{AB}$

이때 $\overline{BP}-\overline{AP}\ge0$, $\overline{AB}\ge0$이므로

$|\overline{AP}-\overline{BP}|^2=|\overline{BP}-\overline{AP}|^2\le\overline{AB}^2$

(ⅱ) $\overline{BP}\le\overline{AP}$일 때,

㉡에서 $\overline{AP}<\overline{BP}+\overline{AB}$

$\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$

이때 $\overline{AP}-\overline{BP}\ge0$, $\overline{AB}\ge0$이므로

$|\overline{AP}-\overline{BP}|^2<\overline{AB}^2$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$|\overline{AP}-\overline{BP}|^2\le\overline{AB}^2$ ← $\overline{AP}\le\overline{BP}$일 때, 최댓값을 갖는다.

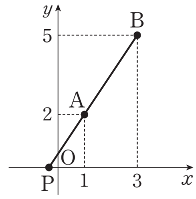
$=(3-1)^2+(5-2)^2=13$

이므로 $|\overline{AP}-\overline{BP}|^2$의 최댓값은 13이다.

답 13

보충 설명

점 P의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$일 때, 세 점 P, A, B는 일직선 위에 있고, 이때 $|\overline{AP}-\overline{BP}|^2$이 최댓값을 갖는다.



4

A(0, 0), B(0, 2)이므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=4$에서

$(x^2+y^2)+\{x^2+(y-2)^2\}=4$

$2x^2+2y^2-4y+4=4$, $x^2+y^2-2y=0$

$\therefore\ x^2+(y-1)^2=1$

이때 $x^2=1-(y-1)^2\ge0$이므로

$(y-1)^2\le1$, $-1\le y-1\le1$

$\therefore\ 0\le y\le2$

$x^2=1-(y-1)^2$을 $y-x^2$에 대입하면

$y-x^2=y-\{1-(y-1)^2\}$

$=y^2-y$

$=\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\ (0\le y\le2)$

따라서 $y-x^2$은 $y=2$일 때 최댓값 2를 갖고, $y=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{4}$을 가지므로 $y-x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}$

답 $\dfrac{7}{4}$

5

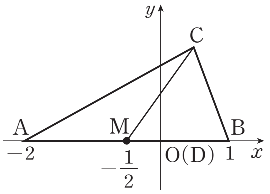
$\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

선분 CD가 $\angle$BCA의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AD}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

즉, 점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 점 D를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓으면 점 D는 원점 $(0, 0)$이다.



이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, B의 좌표는 각각 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$이므로

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$\overline{CM}$은 선분 AB를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{CM}=\frac{3}{2}$

$C(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면

$\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2}=\frac{3}{2}$

$\therefore a^2+a+b^2=2$ ······㉠

또한, $\overline{AC}=2\overline{BC}$, 즉 $\overline{AC}^2=4\overline{BC}^2$이므로

$(a+2)^2+b^2=4\{(a-1)^2+b^2\}$

$\therefore a^2+b^2=4a$ ······㉡

㉠−㉡을 하면

$a=2-4a$, $5a=2$ $\quad\therefore a=\frac{2}{5}$

$k^2=\overline{CD}^2$

$=a^2+b^2=4a$ $(\because$ ㉡$)$

$=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

$\therefore 5k^2=5\times\frac{8}{5}=8$

답 8

보충 설명

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{6}{5}$ $(\because b>0)$

$k^2=\overline{CD}^2$

$=a^2+b^2$

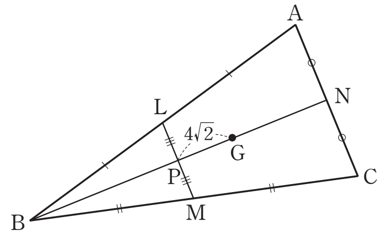
$=\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{40}{25}=\frac{8}{5}$

$\therefore 5k^2=5\times\frac{8}{5}=8$

6

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 중점이 각각 L, M이므로 $\overline{LM}/\!/\overline{AC}$

따라서 점 P는 선분 LM의 중점이다.



$L(2, 1)$, $M(4, -1)$이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ $\quad\therefore P(3, 0)$

또한, $\overline{NP}=\overline{BP}$, $\overline{PG}=4\sqrt{2}$이고,

삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overline{BG}:\overline{GN}=2:1$이므로

$(\overline{BP}+\overline{PG}):(\overline{NP}-\overline{PG})=2:1$

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$2(\overline{NP}-4\sqrt{2})=\overline{NP}+4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{NP}=12\sqrt{2}$

이때 $N(a, b)$, $P(3, 0)$이므로

$\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$

따라서 구하는 관계식은

$(a-3)^2+b^2=288$

답 $(a-3)^2+b^2=288$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 G는 삼각형 ABC의 세 변의 중점 L, M, N을 꼭짓점으로 하는 삼각형 LMN의 무게중심과 일치하므로

$G\left(\frac{2+4+a}{3}, \frac{1-1+b}{3}\right)$

$\therefore G\left(\frac{a+6}{3}, \frac{b}{3}\right)$

이때 $P(3, 0)$이고, $\overline{PG}=4\sqrt{2}$에서

$\overline{PG}^2=32$이므로

$\left(\frac{a-3}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2=32$, $\frac{1}{9}(a-3)^2+\frac{1}{9}b^2=32$

$\therefore (a-3)^2+b^2=288$

02. 직선의 방정식

1 직선의 방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.046~056

01 (1) $y=3x-7$ (2) $x=-3$

02 (1) $y=-x+2$ (2) $y=6$ (3) $y=\frac{3}{2}x-6$

03 (1) 기울기 : $-\frac{7}{5}$, y절편 : $\frac{3}{5}$

(2) 기울기 : 정의되지 않는다., y절편 : 없다.

(3) 기울기 : 0, y절편 : 5

04 제2사분면 **05** $(-2,\ -1)$

06 $x-2y-4=0$

07 (1) $y=-4x+3$ (2) $y=x-3$ **08** -2

09 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$

10 (1) $y=\frac{1}{3}x+2$ (2) -8 **11** 14 **12** 48

13 -7 **14** 14 **15** -2

16 $y=-4x+9$ **17** $y=2x-6$

18 2

19 (1) 제1, 2, 3사분면 (2) 제2, 3사분면

20 제1사분면 **21** ㄴ, ㄷ

22 $y=-x+3$ **23** $\sqrt{2}$ **24** $-\frac{3}{10}$

25 $\frac{1}{3}<k<\frac{5}{3}$ **26** $-1\le m\le\frac{3}{4}$

27 $2x-y+6=0$ **28** $-\frac{8}{3}$

01

(1) 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-(-1)=3(x-2)$

$\therefore\ y=3x-7$

(2) 직선 위의 모든 점의 x좌표가 -3이므로 직선의 방정식은

$x=-3$

답 (1) $y=3x-7$ (2) $x=-3$

02

(1) 두 점 $(-3,\ 5)$, $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1-5}{1-(-3)}\{x-(-3)\}$

$\therefore\ y=-x+2$

(2) 직선 위의 모든 점의 y좌표가 6이므로 직선의 방정식은

$y=6$

(3) x절편이 4이고 y절편이 -6인 직선의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$ $\qquad\therefore\ y=\frac{3}{2}x-6$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=6$ (3) $y=\frac{3}{2}x-6$

03

(1) $7x+5y-3=0$에서 $y=-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 $-\frac{7}{5}$이고, y절편은 $\frac{3}{5}$이다.

(2) $-3x-1=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 정의되지 않고, y절편은 없다.

(3) $-5y+25=0$에서 $y=5$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 0이고, y절편은 5이다.

답 (1) 기울기 : $-\frac{7}{5}$, y절편 : $\frac{3}{5}$

(2) 기울기 : 정의되지 않는다., y절편 : 없다.

(3) 기울기 : 0, y절편 : 5

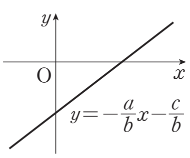
04

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ $(\because\ b\neq0)$

$a<0$, $b>0$이므로 $-\frac{a}{b}>0$

$b>0$, $c>0$이므로 $-\frac{c}{b}<0$

따라서 (기울기)>0, (y절편)<0이므로 직선은 오른쪽 그림과 같고 제2사분면을 지나지 않는다.



답 제2사분면

05

주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$2x+y+5+k(x-3y-1)=0$

이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2x+y+5=0$, $x-3y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$이다.

답 $(-2,\ -1)$

06

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x-y+3+k(2x-3y-5)=0$ (k는 실수) ……㉠

으로 나타낼 수 있고 직선 ㉠이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$6+1+3+k(4+3-5)=0$

$10+2k=0$　　$\therefore k=-5$

$k=-5$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$3x-y+3-5(2x-3y-5)=0$

$\therefore x-2y-4=0$

답 $x-2y-4=0$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $3x-y=-3$, $2x-3y=5$를 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-3$

따라서 구하는 직선은 두 점 $(-2,\ -3)$, $(2,\ -1)$을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$y-(-3)=\frac{-1-(-3)}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-2$

07

(1) 두 점 $(3,\ 3)$, $(-1,\ -5)$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{3+(-5)}{2}\right)$, 즉 $(1,\ -1)$

따라서 점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 -4인 직선의 방정식은

$y-(-1)=-4(x-1)$　　$\therefore y=-4x+3$

(2) x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

따라서 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$　　$\therefore y=x-3$

답 (1) $y=-4x+3$ (2) $y=x-3$

08

$x-2y+3=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

직선 $x-2y+3=0$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선은 점 $(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이다. 이 직선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore x-2y+4=0$

이 직선이 직선 $ax+by+4=0$과 일치하므로

$a=1$, $b=-2$

$\therefore ab=1\times(-2)=-2$

답 -2

09

직선 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\sqrt{3}$　　$\therefore \theta=60^\circ$ ($\because 0^\circ<\theta<90^\circ$)

직선 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분하는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\theta}{2}=30^\circ$이므로 구하는 직선의 기울기는

$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

한편, 직선 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$의 x절편은

$0=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$　　$\therefore x=3$

따라서 점 $(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$　　$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$

답 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$

10

(1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times7+1\times(-5)}{2+1},\ \frac{2\times1+1\times7}{2+1}\right),\ \text{즉 } (3,\ 3)$$

따라서 두 점 $(3,\ 3)$, $(-3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{1-3}{-3-3}(x-3)\qquad \therefore\ y=\frac{1}{3}x+2$$

(2) x절편이 2, y절편이 -3인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\qquad \therefore\ 3x-2y-6=0$$

이 직선이 직선 $3x+ay+b=0$과 일치하므로

$a=-2$, $b=-6$

$\therefore\ a+b=(-2)+(-6)=-8$

답 (1) $y=\frac{1}{3}x+2$ (2) -8

11

x절편이 y절편의 3배이므로 x절편과 y절편을 각각 $3k$, k $(k>0)$라 하면 이 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3k}+\frac{y}{k}=1\qquad \therefore\ x+3y-3k=0\qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$-1+12-3k=0$, $3k=11$

$\therefore\ k=\frac{11}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$x+3y-11=0$

이 직선이 직선 $x+ay+b=0$과 일치하므로

$a=3$, $b=-11$

$\therefore\ a-b=3-(-11)=14$

답 14

12

두 점 $(5,\ 7)$, $(8,\ 4)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-7=\frac{4-7}{8-5}(x-5)\qquad \therefore\ y=-x+12$$

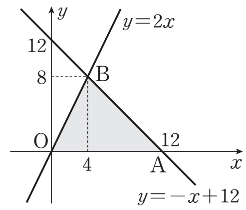
즉, 직선 l이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 $(12,\ 0)$이고, 두 직선 l, $y=2x$가 만나는 점 B의 x좌표는

$-x+12=2x$, $3x=12$ $\qquad\therefore\ x=4$

$\therefore$ B$(4,\ 8)$

따라서 삼각형 OAB는 오른쪽 그림과 같으므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\times12\times8=48$$



답 48

13

세 점 A$(2,\ 1)$, B$(4,\ -2)$, C$(-k-1,\ k+2)$가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다.

즉, $\frac{-2-1}{4-2}=\frac{(k+2)-1}{(-k-1)-2}$에서

$-\frac{3}{2}=\frac{k+1}{-k-3}$, $3k+9=2k+2$

$\therefore\ k=-7$

답 -7

14

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, A$(-2k+1,\ 2)$, B$(-2,\ k-3)$, C$(k+1,\ k+3)$에 대하여 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{(k-3)-2}{-2-(-2k+1)}=\frac{(k+3)-2}{(k+1)-(-2k+1)}$$

$$\frac{k-5}{2k-3}=\frac{k+1}{3k}$$

$3k^2-15k=2k^2-k-3\qquad \therefore\ k^2-14k+3=0$

따라서 모든 k의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 14이다.

답 14

15

세 점 A$(a,\ a^3)$, B$(b,\ b^3)$, C$(2,\ 8)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같다.

$$\frac{8-a^3}{2-a}=\frac{8-b^3}{2-b}$$

$$\frac{(2-a)(a^2+2a+4)}{2-a}=\frac{(2-b)(b^2+2b+4)}{2-b}$$

$a^2+2a+4=b^2+2b+4$ ($\because$ $a\neq2$, $b\neq2$)

$a^2-b^2+2a-2b=0$

$(a-b)(a+b)+2(a-b)=0$

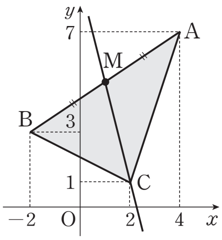
$(a-b)(a+b+2)=0$

$\therefore$ $a+b=-2$ ($\because$ $a\neq b$)

답 -2

16

삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점 C를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 변 AB의 중점을 지나야 한다.



변 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{7+3}{2}\right)$ $\quad\therefore$ $\mathrm{M}(1, 5)$

따라서 두 점 $\mathrm{C}(2, 1)$, $\mathrm{M}(1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

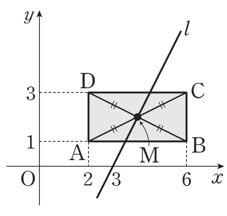
$y-1=\frac{5-1}{1-2}(x-2)$ $\quad\therefore$ $y=-4x+9$

답 $y=-4x+9$

17

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선 l은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 네 꼭짓점을 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(6, 1)$, $\mathrm{C}(6, 3)$, $\mathrm{D}(2, 3)$이라 하고 두 대각선의 교점을 M이라 하면 점 M은 선분 AC의 중점이므로



$\mathrm{M}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ $\quad\therefore$ $\mathrm{M}(4, 2)$

또한, 직선 l의 x절편이 3이므로 직선 l은 점 $(3, 0)$을 지난다.

따라서 두 점 $(3, 0)$, $\mathrm{M}(4, 2)$를 지나는 직선 l의 방정식은

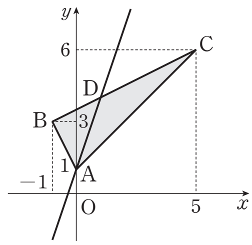
$y-0=\frac{2-0}{4-3}(x-3)$ $\quad\therefore$ $y=2x-6$

답 $y=2x-6$

18

다음 그림과 같이 변 BC 위의 점 D에 대하여 꼭짓점 A와 점 D를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 삼등분하는 두 직선 중 점 B에 가까운 직선이려면

△ADB와 △ACD의 넓이의 비가 1 : 2이어야 한다.



즉, $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:2$이므로 점 D는 변 BC를 1 : 2로 내분하는 점이다.

이때 $\mathrm{B}(-1, 3)$, $\mathrm{C}(5, 6)$이므로

$\mathrm{D}\left(\frac{1\times5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times6+2\times3}{1+2}\right)$

$\therefore$ $\mathrm{D}(1, 4)$

두 점 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{D}(1, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{1-0}(x-0)$

$\therefore$ $3x-y+1=0$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=3+(-1)=2$

답 2

19

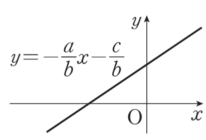
(1) $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

(기울기)$=-\frac{a}{b}$, (y절편)$=-\frac{c}{b}$

$ab<0$, $bc<0$에서 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$이므로

(기울기)>0, (y절편)>0

따라서 직선은 오른쪽 그림과 같고 제1, 2, 3사분면을 지난다.



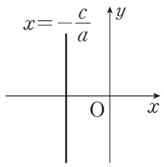
(2) $ac>0$, $bc=0$에서 $b=0$이므로

$ax+c=0$ $\quad\therefore$ $x=-\frac{c}{a}$

이때 $ac>0$이므로

$-\dfrac{c}{a}<0$

따라서 직선은 오른쪽 그림과 같고 제2, 3사분면을 지난다.



답 (1) 제1, 2, 3사분면 (2) 제2, 3사분면

20

$ax+by+c=0$에서 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$이므로

$(\text{기울기})=-\dfrac{a}{b}>0$, $(y\text{절편})=-\dfrac{c}{b}<0$

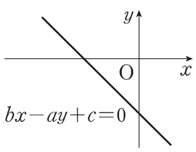
$\therefore ab<0,\ bc>0$

이때 a, c는 서로 부호가 다르므로 $ac<0$

$bx-ay+c=0$에서 $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$이므로

$(\text{기울기})=\dfrac{b}{a}<0$, $(y\text{절편})=\dfrac{c}{a}<0$

따라서 직선 $bx-ay+c=0$은 오른쪽 그림과 같고 제1사분면을 지나지 않는다.



답 제1사분면

21

직선 l의 기울기는 음수이고, y절편은 양수이므로

$a<0,\ b>0$

직선 m의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로

$c>0,\ d<0$

ㄱ. $a<0$, $c>0$에서 $ac<0$ (거짓)

ㄴ. $b>0$, $d<0$에서 $b>d$ (참)

ㄷ. 두 직선 l, m의 x절편은 각각 $-\dfrac{b}{a}$, $-\dfrac{d}{c}$이고 주어진 그림에서

$-\dfrac{b}{a}<-\dfrac{d}{c}\qquad \therefore \dfrac{b}{a}>\dfrac{d}{c}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

22

$(k+1)^2x-ky-k^2-1=0$을 k에 대하여 정리하면

$k^2x+2kx+x-ky-k^2-1=0$

$\therefore (x-1)k^2+(2x-y)k+x-1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-1=0,\ 2x-y=0$

$\therefore x=1,\ y=2$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 2)$이므로 점 $\text{P}(1, 2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-2=-(x-1)\qquad \therefore y=-x+3$

답 $y=-x+3$

23

$(3k+1)x-(k-2)y-2k-3=0$을 k에 대하여 정리하면

$x+2y-3+k(3x-y-2)=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y-3=0,\ 3x-y-2=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=1$

따라서 점 P의 좌표가 $(1, 1)$이므로 선분 OP의 길이는

$\overline{\text{OP}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

24

점 (a, b)는 직선 $x+3y-2=0$ 위의 점이므로

$a+3b-2=0\qquad \therefore a=2-3b$

이것을 $5ax-2by+2=0$에 대입하면

$5(2-3b)x-2by+2=0$

이 식을 b에 대하여 정리하면

$10x+2+b(-15x-2y)=0$

이 등식이 b에 대한 항등식이므로

$10x+2=0,\ -15x-2y=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{1}{5},\ y=\dfrac{3}{2}$

즉, 이 직선은 b의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right)$을 지난다.

따라서 $p=-\frac{1}{5}$, $q=\frac{3}{2}$이므로

$pq=\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{10}$

답 $-\frac{3}{10}$

25

$(k+1)x-(k-1)y+4=0$을 k에 대하여 정리하면

$x+y+4+k(x-y)=0$ ……㉠

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

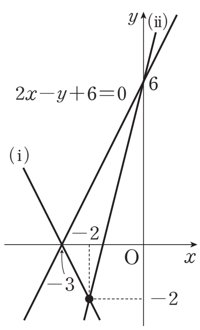
$x+y+4=0$, $x-y=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-2$

따라서 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(-3, 0)$을 지날 때,

$1-3k=0$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 6)$을 지날 때,

$10-6k=0$

$\therefore k=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$\frac{1}{3}<k<\frac{5}{3}$

답 $\frac{1}{3}<k<\frac{5}{3}$

26

$m(x+1)+y-2=0$ ……㉠

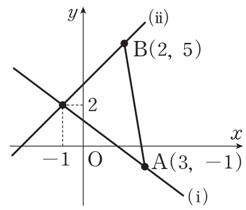
이 등식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0$, $y-2=0$

$\therefore x=-1$, $y=2$

따라서 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 A$(3, -1)$을 지날 때,

$4m-3=0$ $\therefore m=\frac{3}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 B$(2, 5)$를 지날 때,

$3m+3=0$ $\therefore m=-1$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{3}{4}$

답 $-1\le m\le\frac{3}{4}$

27

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+y-1+k(3x+2y-5)=0$, 즉

$3(k+1)x+(2k+1)y-5k-1=0$ (k는 실수) ……㉠

으로 나타낼 수 있다.

직선 ㉠의 기울기가 2이므로

$-\frac{3(k+1)}{2k+1}=2$, $-3k-3=4k+2$

$7k=-5$ $\therefore k=-\frac{5}{7}$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$3\left(-\frac{5}{7}+1\right)x+\left(-\frac{10}{7}+1\right)y+\frac{25}{7}-1=0$

$\therefore 2x-y+6=0$

답 $2x-y+6=0$

다른 풀이

$3x+y-1=0$, $3x+2y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=4$

즉, 두 직선 $3x+y-1=0$, $3x+2y-5=0$의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$이다.

따라서 구하는 직선은 점 $(-1, 4)$를 지나고 기울기가 2이므로 직선의 방정식은

$y-4=2\{x-(-1)\}$ $\therefore 2x-y+6=0$

28

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(a+1)x+2y+1+k\{2x-(a-1)y+3\}=0$, 즉

$(2k+a+1)x+(-ak+k+2)y+3k+1=0$ (k는 실수) ······㉠

으로 나타낼 수 있다.

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$3k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$\left(a+\frac{1}{3}\right)x+\left(\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}\right)y=0$

이 직선의 기울기가 3이므로

$-\dfrac{a+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}}=3,\ -a-\frac{1}{3}=a+5$

$2a=-\frac{16}{3} \qquad \therefore a=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

STEP 1 개념 마무리 본문 pp.057~058

01 ②	**02** $\sqrt{3}+1$	**03** 1	**04** 2
05 486	**06** 14	**07** $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$	
08 $\frac{5}{4}$	**09** $\frac{1}{2}\le m\le 1$		**10** 1
11 $-\frac{17}{3}$	**12** 5		

01

ㄱ. 점 $(2,\ -3)$을 지나고 y축에 수직인 직선은 직선 위의 모든 점의 y좌표가 -3이므로 직선의 방정식은 $y=-3$이다. (참)

ㄴ. 점 $(4,\ 5)$를 지나고 기울기가 0인 직선의 방정식은

$y-5=0\times(x-4) \qquad \therefore y=5$ (거짓)

ㄷ. 점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-4$ (참)

ㄹ. 두 점 $(0,\ -2)$, $(3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \qquad \therefore 2x-3y-6=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

02

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

점 $(-2,\ 1)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-1=\sqrt{3}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+1$

$\ =\sqrt{3}+1$

답 $\sqrt{3}+1$

03

이차함수 $y=-x^2+2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 2)$이므로

$A(0,\ 2)$

이차함수 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -4)$이므로

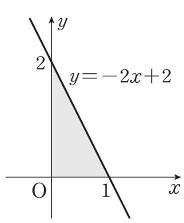
$B(3,\ -4)$

즉, 직선 AB의 방정식은

$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{0-3}(x-3)$

$\therefore y=-2x+2$

따라서 직선 $y=-2x+2$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 직선 AB와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

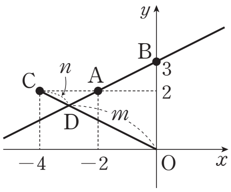


$\frac{1}{2}\times1\times2=1$

답 1

04

두 점 A$(-2, 2)$, B$(0, 3)$에 대하여 직선 AB의 방정식은



$y-3=\frac{3-2}{0-(-2)}x$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$ ······㉠

또한, 두 점 O$(0, 0)$, C$(-4, 2)$에 대하여 직선 OC의 방정식은

$y=\frac{2}{-4}x$ $\quad\therefore\ y=-\frac{1}{2}x$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=\frac{3}{2}$

즉, 직선 AB와 선분 OC의 교점 D의 좌표는

$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

한편, 점 D는 선분 OC를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

D$\left(\frac{-4m}{m+n}, \frac{2m}{m+n}\right)$

따라서 $\frac{-4m}{m+n}=-3$이므로

$\frac{2m}{m+n}=\frac{3}{2}$을 이용해도 그 결과는 같다.

$-4m=-3m-3n$, $m-3n=0$

$\therefore\ m=3n$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=3$, $n=1$

$\therefore\ m-n=3-1=2$

답 2

05

두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{1}=1$, $x+3y=3$

$\therefore\ x=-3y+3$ ······㉠

직선 l 위의 임의의 점 (x, y)에 대하여 등식

$x^2+ay^2+bx+c=0$이 성립하므로

㉠을 주어진 등식에 대입하면

$(-3y+3)^2+ay^2+b(-3y+3)+c=0$

$9y^2-18y+9+ay^2-3by+3b+c=0$

$\therefore\ (a+9)y^2-3(b+6)y+3b+c+9=0$

이 등식이 y의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$a+9=0$, $b+6=0$, $3b+c+9=0$

$\therefore\ a=-9$, $b=-6$, $c=9$

$\therefore\ abc=(-9)\times(-6)\times9=486$

답 486

06

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{-2-a}{2-1}=\frac{-14-(-2)}{a-2}$, $-2-a=\frac{-12}{a-2}$

$(a+2)(a-2)=12$

$a^2=16$ $\quad\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

즉, 두 점 A$(1, 4)$, B$(2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{-2-4}{2-1}(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-6x+10$

따라서 이 직선의 y절편은 10이므로

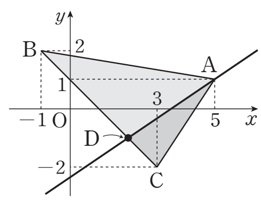
$b=10$

$\therefore\ a+b=4+10=14$

답 14

07

삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여



$\triangle$ABD : $\triangle$ADC$=3:1$이므로 점 D는 $\overline{\text{BC}}$를 $3:1$로 내분하는 점이다.

이때 B$(-1, 2)$, C$(3, -2)$이므로

D$\left(\frac{3\times3+1\times(-1)}{3+1}, \frac{3\times(-2)+1\times2}{3+1}\right)$

$\therefore$ D$(2, -1)$

따라서 두 점 A$(5, 1)$, D$(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

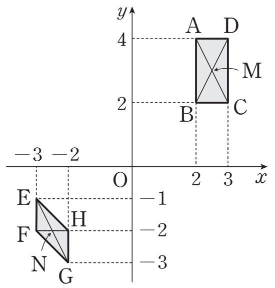
$y-1=\frac{-1-1}{2-5}(x-5)$

$\therefore\ y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

답 $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

08

다음 그림과 같이 두 사각형의 꼭짓점을 나타내면 □ABCD는 직사각형, □EFGH는 평행사변형이다.



직사각형 ABCD와 평행사변형 EFGH의 두 대각선의 교점을 각각 M, N이라 하면 두 사각형 ABCD, EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 M과 N을 동시에 지난다.

즉, 점 M은 선분 AC의 중점이므로 (선분 BD의 중점이기도 하다.)

A$(2,\ 4)$, C$(3,\ 2)$에서

$$\mathrm{M}\left(\frac{2+3}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) \qquad \therefore \mathrm{M}\left(\frac{5}{2},\ 3\right)$$

또한, 점 N은 선분 FH의 중점이므로 (선분 EG의 중점이기도 하다.)

F$(-3,\ -2)$, H$(-2,\ -2)$에서

$$\mathrm{N}\left(\frac{-3+(-2)}{2},\ \frac{-2+(-2)}{2}\right) \qquad \therefore \mathrm{N}\left(-\frac{5}{2},\ -2\right)$$

즉, 직선 MN의 방정식은

$$y-3=\frac{3-(-2)}{\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore y=x+\frac{1}{2}$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$$a^2+b^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

09

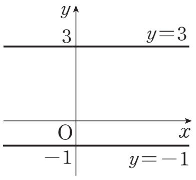
$y=(1-m^2)x-2m+1$ ……㉠

(i) $1-m^2=0$, 즉 $m=1$ 또는 $m=-1$일 때,

$m=1$이면 ㉠에서 $y=-1$

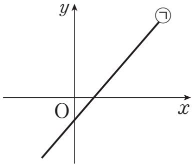
$m=-1$이면 ㉠에서 $y=3$

오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는 경우는 직선 $y=-1$일 때, 즉 $m=1$일 때이다.



(ii) $1-m^2>0$, 즉 $-1<m<1$일 때,

기울기가 양수인 직선 ㉠이 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 y절편이 양수가 아니어야 하므로



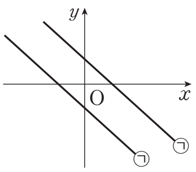
$-2m+1\le 0 \qquad \therefore m\ge\frac{1}{2}$

이때 $-1<m<1$이므로

$\frac{1}{2}\le m<1$

(iii) $1-m^2<0$, 즉 $m<-1$ 또는 $m>1$일 때,

기울기가 음수인 직선 ㉠은 y절편에 관계없이 제2사분면을 반드시 지나므로 이 범위에서 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.



(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$\frac{1}{2}\le m\le 1$

답 $\frac{1}{2}\le m\le 1$

10

주어진 두 직선을

$x+y-2=0$ ……㉠

$kx-y+k+1=0$ ……㉡

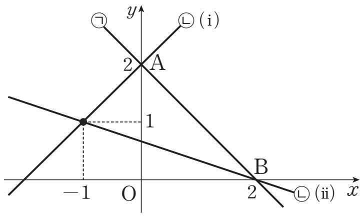
이라 하자.

직선 ㉠이 y축, x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

A$(0,\ 2)$, B$(2,\ 0)$

또한, ㉡에서 $-y+1+k(x+1)=0$이므로 직선 ㉡은 정수 k의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

즉, 두 직선 ㉠, ㉡은 다음 그림과 같다.



(i) 직선 ㉡이 점 A$(0, 2)$를 지날 때,

$k\times 0-2+k+1=0$에서 $k=1$

(ii) 직선 ㉡이 점 B$(2, 0)$을 지날 때,

$2k-0+k+1=0$에서 $k=-\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{3}<k<1$이므로 정수 k는 0의 1개이다.

답 1

다른 풀이

주어진 두 직선을

$x+y-2=0$ ……㉠

$kx-y+k+1=0$ ……㉡

이라 하자.

$k=-1$이면 ㉡에서 $-x-y=0$, 즉 $x+y=0$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 평행하다.(만나지 않는다.)

두 직선의 기울기가 서로 같고 y절편은 다르다.

$\therefore k\neq -1$

두 직선의 교점의 x좌표는 ㉠+㉡에서

$(k+1)x+k-1=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{1-k}{1+k}$

$x=\dfrac{1-k}{1+k}$를 ㉠에 대입하면 교점의 y좌표는

$\dfrac{1-k}{1+k}+y-2=0$ $\quad\therefore y=\dfrac{1+3k}{1+k}$

즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

$\left(\dfrac{1-k}{1+k}, \dfrac{1+3k}{1+k}\right)$

이때 두 직선이 제1사분면에서 만나므로

$\dfrac{1-k}{1+k}>0$, $\dfrac{1+3k}{1+k}>0$

양변에 각각 $(1+k)^2$을 곱하면

$\underbrace{(1-k)(1+k)>0}_{(k+1)(k-1)<0}$, $\underbrace{(1+3k)(1+k)>0}_{(k+1)(3k+1)>0}$

$(k+1)(k-1)<0$에서

$-1<k<1$ ……㉢

$(k+1)(3k+1)>0$에서

$k<-1$ 또는 $k>-\dfrac{1}{3}$ ……㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 $-\dfrac{1}{3}<k<1$

따라서 정수 k는 0의 1개이다.

11

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$kx-y-2+m\{-7x+(k+1)y-1\}=0$ (단, m은 실수)

$\therefore (-7m+k)x+(km+m-1)y-m-2=0$ ……㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-m-2=0$ $\quad\therefore m=-2$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$(k+14)x+(-2k-3)y=0$

$\therefore y=\dfrac{k+14}{2k+3}x$

이 직선의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{k+14}{2k+3}=-1$, $k+14=-2k-3$

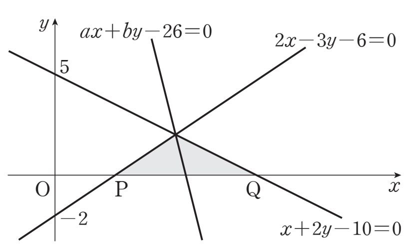
$3k=-17$ $\quad\therefore k=-\dfrac{17}{3}$

답 $-\dfrac{17}{3}$

12

두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$의 교점을 지나고, 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$이 x축과 만나는 두 점의 중점을 지난다.

두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$을 좌표평면 위에 나타내고, 두 직선이 x축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 다음 그림과 같다.



직선 $2x-3y-6=0$이 x축과 만나는 점 P는

$2x-6=0$에서 $x=3$ $\quad\therefore$ P$(3, 0)$

또한, 직선 $x+2y-10=0$이 x축과 만나는 점 Q는

$x-10=0$에서 $x=10$ $\quad\therefore$ Q$(10, 0)$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+10}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{13}{2}, 0\right)$

한편, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x-3y-6+k(x+2y-10)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (k+2)x+(2k-3)y-10k-6=0$ ……㉠

직선 ㉠이 점 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$을 지나므로

$\frac{13}{2}k+13-10k-6=0, \ -\frac{7}{2}k+7=0$

$\therefore k=2$

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$4x+y-26=0$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$a+b=4+1=5$

답 5

다른 풀이

두 직선의 방정식 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$을 연립하여 풀면

$x=6$, $y=2$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(6, 2)$이다.

또한, 두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(3, 0)$, $(10, 0)$

이때 두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$의 교점을 지나고, 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 점 $(3, 0)$, $(10, 0)$의 중점 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$을 지난다.

따라서 구하는 직선은 두 점 $(6, 2)$, $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{0-2}{\frac{13}{2}-6}(x-6)$$

$y-2=-4(x-6)$

$\therefore 4x+y-26=0$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$a+b=4+1=5$

2 두 직선의 위치 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.063~068

29 (1) $y=-2x-7$ (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$

30 (1) $y=x-5$ (2) $y=-2x+25$

31 (1) -2 (2) 1 (3) $a\neq-2$, $a\neq1$인 모든 실수

32 (1) 8 (2) 47

33 (1) $y=2x+2$ (2) $-\frac{3}{2}$ **34** $\frac{7}{3}$ **35** -5

36 $\frac{15}{2}$ **37** 17 **38** $\frac{2}{3}$ **39** 2

40 0 **41** 8 **42** $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

29

(1) 직선 $y=-2x+5$의 기울기가 -2이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.

따라서 점 $(-4, 1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+4)$ $\quad\therefore y=-2x-7$

(2) 직선 $x+2y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 점 $(-4, 1)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x+4)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x-1$

답 (1) $y=-2x-7$ (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$

30

(1) 직선 $y=-x+1$의 기울기가 -1이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-m=-1$ $\quad\therefore m=1$

따라서 점 $(10, 5)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-5=x-10$ $\quad\therefore y=x-5$

(2) 직선 $5x-10y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{2}m=-1 \qquad \therefore m=-2$

따라서 점 $(10, 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-5=-2(x-10) \qquad \therefore y=-2x+25$

답 (1) $y=x-5$ (2) $y=-2x+25$

31

(1) 두 직선 $ax+2y+2=0$, $x+(a+1)y+2=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}\neq\frac{2}{2}$

$\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}$에서 $a^2+a=2$

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

그런데 $a=1$이면 두 직선이 일치하므로

$a=-2$

(2) (1)에 의하여 $a=1$

(3) (1)에 의하여 $a\neq-2$, $a\neq1$인 모든 실수

답 (1) -2 (2) 1 (3) $a\neq-2$, $a\neq1$인 모든 실수

32

$y=-\frac{1}{4}x+1$에서 $x+4y-4=0$

(1) 두 직선 $2x+ay+3=0$, $x+4y-4=0$의 교점의 개수가 0이려면 두 직선이 서로 평행해야 하므로

$\frac{2}{1}=\frac{a}{4}\neq\frac{3}{-4} \qquad \therefore a=8$

(2) 두 직선 $2x+ay+3=0$, $x+4y-4=0$의 교점의 개수가 1이려면 두 직선의 기울기가 달라야 하므로

$\frac{2}{1}\neq\frac{a}{4}$, 즉 $a\neq8$

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6+7+9+10=47$

답 (1) 8 (2) 47

33

두 점 $(2, -1)$, $(5, 5)$를 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{5+1}{5-2}=2$

(1) 직선 l에 평행한 직선 m의 기울기는 2이다.

따라서 기울기가 2이고 점 $(1, 4)$를 지나는 직선 m의 방정식은

$y-4=2(x-1) \qquad \therefore y=2x+2$

(2) 직선 l에 수직인 직선 n의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. $\leftarrow 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}(x-4) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+3$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$이므로

$ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times3=-\frac{3}{2}$

답 (1) $y=2x+2$ (2) $-\frac{3}{2}$

34

두 직선의 방정식 $2x+y-4=0$, $x-3y-9=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-2$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(3, -2)$이다.

직선 $6x+2y+1=0$, 즉 $y=-3x-\frac{1}{2}$의 기울기는 -3이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기도 -3이다.

즉, 점 $(3, -2)$를 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y+2=-3(x-3) \qquad \therefore y=-3x+7$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=-3x+7 \qquad \therefore x=\frac{7}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{7}{3}$이다.

답 $\frac{7}{3}$

다른 풀이

두 직선 $2x+y-4=0$, $x-3y-9=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$2x+y-4+k(x-3y-9)=0$ (단, k는 실수)

$\therefore (k+2)x-(3k-1)y-9k-4=0$ ······㉠

직선 ㉠과 직선 $6x+2y+1=0$이 평행하므로

$\dfrac{k+2}{6}=\dfrac{-(3k-1)}{2}\neq\dfrac{-9k-4}{1}$ ······㉡

$\dfrac{k+2}{6}=\dfrac{-(3k-1)}{2}$에서

$2(k+2)=-6(3k-1)$

$2k+4=-18k+6 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{10}$

$k=\dfrac{1}{10}$을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{7}{20}\neq-\dfrac{49}{10}$가 성립한다.

따라서 $k=\dfrac{1}{10}$을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$3x+y-7=0$이므로 이 직선의 x절편은 $\dfrac{7}{3}$이다.

35

직선 $ax+2by-3=0$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$a+2b-3=0$ ······㉠

또한, 두 직선 $ax+2by-3=0$, $x-by+a=0$은 서로 평행하므로

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2b}{-b}\neq\dfrac{-3}{a}$

즉, $\dfrac{a}{1}=\dfrac{2b}{-b}$에서 $-ab=2b$

$\therefore a=-2$ ($\because b\neq0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$-2+2b-3=0$, $2b-5=0 \qquad \therefore b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore ab=(-2)\times\dfrac{5}{2}=-5$

답 -5

36

두 직선 $(m-4)x+3y-4=0$, $(m-2)x-y+5=0$에 대하여

(i) 두 직선이 서로 평행하면

$\dfrac{m-4}{m-2}=\dfrac{3}{-1}\neq\dfrac{-4}{5}$

$\dfrac{m-4}{m-2}=\dfrac{3}{-1}$에서 $-m+4=3m-6$

$4m=10 \qquad \therefore m=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

(ii) 두 직선이 서로 수직이면

$(m-4)(m-2)+3\times(-1)=0$

$m^2-6m+5=0$, $(m-1)(m-5)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$

$\therefore b=5$ ($\because b>3$)

(i), (ii)에서 $a+b=\dfrac{5}{2}+5=\dfrac{15}{2}$

답 $\dfrac{15}{2}$

37

두 직선 l과 m은 서로 수직이므로

$1\times4+(-a)\times b=0$

$4-ab=0 \qquad \therefore ab=4$ ······㉠

두 직선 l과 n은 서로 평행하므로

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-a}{-(b-3)}\neq\dfrac{1}{-1}$

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-a}{-(b-3)}$에서 $a=b-3$

$\therefore a-b=-3$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-3)^2+2\times4$

$=17$

답 17

보충 설명

㉡에서 $a=b-3$을 ㉠에 대입하면

$(b-3)\times b=4$, $b^2-3b-4=0$

$(b+1)(b-4)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=4$

이때 $a=b-3$이므로

$\begin{cases}a=-4\\b=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=1\\b=4\end{cases}$

$\therefore a^2+b^2=17$

38

$2x-3y-6=0$ ······㉠

$x+y-8=0$ ······㉡

$kx-y-4=0$ ······㉢

이라 하면 ㉠, ㉡은 서로 평행하지 않으므로 ㉠, ㉡, ㉢이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선 중 두 직선만 평행할 때,

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{2}{k}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{-6}{-4}$ $\quad\therefore k=\frac{2}{3}$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{k}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-8}{-4}$ $\quad\therefore k=-1$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 직선 ㉢이 지나면 된다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=2$이므로 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(6, 2)$이다.

직선 ㉢이 점 $(6, 2)$를 지나야 하므로

$6k-2-4=0$ $\quad\therefore k=1$

(i), (ii)에서 모든 상수 k의 값은 $\frac{2}{3}$, -1, 1이므로 구하는 합은

$\frac{2}{3}+(-1)+1=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

39

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$은 서로 평행하지 않으므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax-y-1=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$이므로 $a=2$

(ii) 두 직선 $x+y-3=0$, $ax-y-1=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{a}=\frac{1}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$이므로 $a=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선의 방정식 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

즉, 이 두 직선의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이고 나머지 한 직선 $ax-y-1=0$이 점 $(2, 1)$을 지나야 하므로

$2a-1-1=0$ $\quad\therefore a=1$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a의 값은 2, -1, 1이므로 구하는 합은

$2+(-1)+1=2$

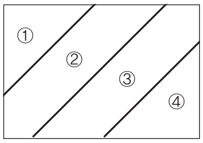
답 2

보충 설명

한 평면 위의 서로 다른 세 직선에 의하여 평면이 나누어지는 영역의 개수는 세 직선의 위치 관계에 따라 다음과 같이 달라진다.

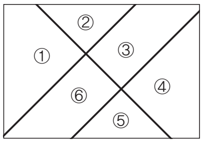
(1) 세 직선이 모두 평행할 때,

오른쪽 그림과 같이 4개의 영역으로 나누어진다.



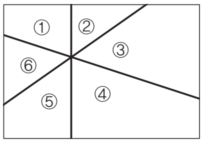
(2) 두 직선만 평행할 때,

오른쪽 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진다.

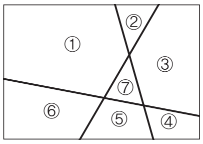


(3) 어느 두 직선도 평행하지 않을 때,

① 세 직선이 한 점에서 만날 때, 오른쪽 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진다.



② 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 때, 세 직선에 의하여 삼각형이 만들어지고 오른쪽 그림과 같이 7개의 영역으로 나누어진다.



40

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$ $\quad\therefore (3, -2)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-(-1)}{4-2}=-1$이므로 선분 AB와 수직인 직선의 기울기는 1이다. ← $(-1)\times1=-1$

즉, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(3, -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선이므로

$y-(-2)=1\times(x-3)$

$\therefore x-y-5=0$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로

$a+b=1+(-1)=0$

답 0

41

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \qquad \therefore \left(5, \frac{a+b}{2}\right)$

선분 AB의 수직이등분선 $2x-y-7=0$이 이 점을 지나므로

$2\times5-\frac{a+b}{2}-7=0$

$\therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 직선 AB의 기울기는 $\frac{b-a}{7-3}=\frac{b-a}{4}$이고,

선분 AB의 수직이등분선의 방정식 $2x-y-7=0$에서

$y=2x-7$이므로

$\frac{b-a}{4}\times2=-1$

$\therefore a-b=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore ab=4\times2=8$

답 8

42

선분 OA의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \qquad \therefore (2, 1)$

직선 OA의 기울기는 $\frac{2-0}{4-0}=\frac{1}{2}$이므로 선분 OA와 수직인 직선의 기울기는 -2이다. $\leftarrow \frac{1}{2}\times(-2)=-1$

즉, 선분 OA의 수직이등분선은 점 $(2, 1)$을 지나고 기울기가 -2인 직선이므로

$y-1=-2(x-2) \qquad \therefore y=-2x+5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

선분 OB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \qquad \therefore (1, 2)$

직선 OB의 기울기는 $\frac{4-0}{2-0}=2$이므로 선분 OB와 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. $\leftarrow 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

즉, 선분 OB의 수직이등분선은 점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선이므로

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$이다.

답 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

다른 풀이

삼각형 OAB의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형 OAB의 외심과 같다.

삼각형의 외심에서 $\underbrace{\text{세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같으므로}}_{\text{외접원의 반지름}}$ 구하는 점을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PO}=\overline{PA}$에서

$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}$

$\therefore 2a+b=5 \qquad \cdots\cdots ㉢$

$\overline{PO}=\overline{PB}$에서

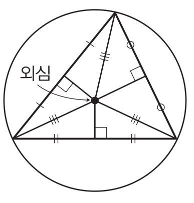
$\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}$

$\therefore a+2b=5 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$이다.

보충 설명



삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나고 이 점은 삼각형의 외심과 같다. 따라서 두 변의 수직이등분선의 방정식을 각각 구한 후 두 식을 연립하여 풀거나, 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점까지의 거리가 같다는 성질을 이용하여 교점의 좌표를 구할 수 있다.

STEP 1 개념 마무리

본문 p.069

13 ⑤	**14** -6	**15** 4	**16** 4
17 28	**18** -2		

13

$l: x+ky-1=0,\ m: kx+(2k+3)y-3=0$에서

ㄱ. $k=3$이면 두 직선 l, m은

$l: x+3y-1=0,\ m: 3x+9y-3=0$

이때 $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{-1}{-3}$이므로 두 직선 l, m은 일치한다. (참)

ㄴ. $k=-1$이면 두 직선 l, m은

$l: x-y-1=0,\ m: -x+y-3=0$

이때 $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}\neq\frac{-1}{-3}$이므로 두 직선 l, m은 서로 평행하다. (참)

ㄷ. $k=0$이면 두 직선 l, m은

$l: x-1=0,\ m: 3y-3=0$

$\therefore l: x=1,\ m: y=1$

즉, 두 직선 l, m은 서로 수직이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

14

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x+by-3=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{2}=\frac{a}{b}\neq\frac{1}{-3}$　　$\therefore b=2a$　　……㉠

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x+(b+5)y+2=0$이 서로 수직이므로

$2+a(b+5)=0$　　……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2+a(2a+5)=0$

$2a^2+5a+2=0,\ (a+2)(2a+1)=0$

$\therefore a=-2,\ b=-4$ 또는 $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$ ($\because$ ㉠)

이때 a, b는 정수이므로

$a+b=-2+(-4)=-6$

답 -6

15

점 $(2, -1)$을 지나고 직선 $y=x+3$에 평행한 직선 l의 방정식은

$y+1=x-2$　　$\therefore y=x-3$

또한, 점 $(3, 4)$를 지나고 직선 $x+2y-2=0$, 즉

$y=-\frac{1}{2}x+1$과 수직인 직선 m의 방정식은

$y-4=2(x-3)$　　$\therefore y=2x-2$

두 직선 $l: y=x-3$, $m: y=2x-2$의 교점의 x좌표는

$x-3=2x-2$에서 $x=-1$

$x=-1$을 $y=x-3$에 대입하면 $y=-4$

따라서 두 직선 l, m의 교점의 좌표는 $(-1, -4)$이므로

$a=-1,\ b=-4$

$\therefore ab=(-1)\times(-4)=4$

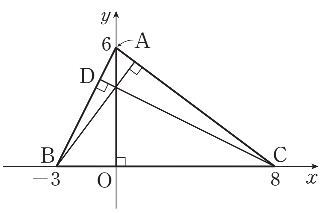
답 4

16

삼각형의 세 꼭짓점에서 각 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만나므로 두 수선의 교점을 나머지 한 수선이 지나게 된다.

세 점 $A(0, 6)$, $B(-3, 0)$, $C(8, 0)$은 다음 그림과 같으므로 점 A에서 변 BC에 그은 수선은 y축이고 수선 OA의 방정식은

$x=0$　　……㉠



한편, 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면

직선 AB의 기울기가 $\frac{0-6}{-3-0}=2$이므로 직선 CD의

기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $C(8, 0)$을 지나는 수선 CD의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-8)$　　$\therefore y=-\frac{1}{2}x+4$　　……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=4$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로

$a=0,\ b=4$

$\therefore\ a+b=0+4=4$

답 4

17

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $x-y=0,\ 2x+y-9=0$은 서로 평행하지 않으므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 두 직선 $x-y=0,\ 8x-ky+48=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{1}{8}=\frac{-1}{-k}\neq\frac{0}{48}$이므로 $k=8$

(ii) 두 직선 $2x+y-9=0,\ 8x-ky+48=0$이 서로 평행할 때,

$\frac{2}{8}=\frac{1}{-k}\neq\frac{-9}{48}$이므로 $k=-4$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선의 방정식 $x-y=0,\ 2x+y-9=0$을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=3$

즉, 이 두 직선의 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이고, 나머지 한 직선 $8x-ky+48=0$이 점 $(3,\ 3)$을 지나야 하므로

$24-3k+48=0$

$3k=72\qquad\therefore\ k=24$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 k의 값은 $8,\ -4,\ 24$이므로 구하는 합은

$8+(-4)+24=28$

답 28

18

네 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, B, $\mathrm{C}(5,\ 1)$, D를 꼭짓점으로 하는 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로를 수직이등분한다.

직선 AC의 기울기가 $\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 BD의 기울기는 2이다.

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{3+1}{2}\right)\qquad\therefore\ (3,\ 2)$

따라서 직선 BD는 기울기가 2이고 점 $(3,\ 2)$를 지나는 직선이므로

$y-2=2(x-3)\qquad\therefore\ 2x-y-4=0$

따라서 $a=2,\ b=-4$이므로

$a+b=2+(-4)=-2$

답 -2

3 점과 직선 사이의 거리

기본 + 필수연습 본문 pp.073~077

43 12	**44** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$	**45** 5, 7	**46** -3
47 $\frac{1}{5}$	**48** 9	**49** 5	**50** 81
51 4	**52** $\frac{27}{8}$		

53 $x-5y+3=0,\ 5x+y+1=0$

54 $-36,\ 16$

43

점 $(0,\ 1)$과 직선 $\sqrt{3}x+y+23=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|\sqrt{3}\times0+1+23|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{24}{2}=12$$

답 12

44

평행한 두 직선 $3x-y+2=0,\ 3x-y+8=0$ 사이의 거리를 d라 하면 d는 직선 $3x-y+2=0$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 $3x-y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|3\times0-2+8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

45

점 $(3,\ -2)$와 직선 $4x+3y-k=0$ 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이므로

$\frac{|4\times3+3\times(-2)-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$

$\frac{|6-k|}{5}=\frac{1}{5}$, $|k-6|=1$

$k-6=\pm1$ $\quad\therefore k=5$ 또는 $k=7$

답 5, 7

46

직선 $ax+by+2=0$이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$a+b+2=0$

$\therefore a+b=-2$ $\quad\cdots\cdots$㉠

원점과 직선 $ax+by+2=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$\frac{|2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

양변을 제곱하면 $\frac{4}{a^2+b^2}=\frac{10}{25}$

$\therefore a^2+b^2=10$ $\quad\cdots\cdots$㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로 이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(-2)^2=10+2ab$

$2ab=-6$ $\quad\therefore ab=-3$

답 -3

보충 설명

㉠에서 $b=-a-2$를 ㉡에 대입하면

$a^2+(-a-2)^2=10$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

㉠에서 $a=-3$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-3$이므로

$ab=-3$

47

$(3k+1)x+(k-5)y+k+11=0$에서

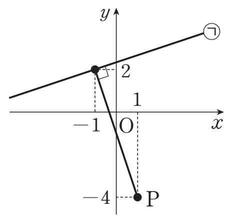
$x-5y+11+k(3x+y+1)=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

㉠이 k에 대한 항등식이면

$x-5y+11=0$, $3x+y+1=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$이므로 직선 ㉠은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

이때 점 P$(1,\ -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 최대가 되려면 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 2)$, P$(1,\ -4)$를 지나는 직선이 직선 ㉠과 수직이어야 한다.



이때 직선 ㉠의 기울기는 $-\frac{3k+1}{k-5}$이므로

$-\frac{3k+1}{k-5}\times\frac{-4-2}{1-(-1)}=-1$

$-9k-3=k-5$ $\quad\therefore k=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

다른 풀이

점 P$(1,\ -4)$와 직선 $(3k+1)x+(k-5)y+k+11=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|3k+1-4(k-5)+k+11|}{\sqrt{(3k+1)^2+(k-5)^2}}$

$=\frac{32}{\sqrt{10k^2-4k+26}}$

이때 $f(k)=10k^2-4k+26$이라 하면 $f(k)$가 최솟값을 가질 때, d가 최댓값을 갖는다.

$f(k)=10k^2-4k+26$

$=10\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{128}{5}$

이므로 $f(k)$는 $k=\frac{1}{5}$일 때 최솟값 $\frac{128}{5}$을 갖는다.

따라서 구하는 실수 k의 값은 $\frac{1}{5}$이다.

48

직선 $2x-3y-4=0$ 위의 한 점 $(2,\ 0)$과

직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\frac{|2\times2-3\times0+k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$

$|k+4|=13$, $k+4=\pm13$

$\therefore k=9$ $(\because k>0)$

답 9

49

두 직선 $x+ay+2=0$, $x+2y+b=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{2}\neq\frac{2}{b}$ $\quad\therefore a=2,\ b\neq2$

평행한 두 직선 $x+2y+2=0$, $x+2y+b=0$ 사이의 거리는

직선 $x+2y+2=0$ 위의 한 점 $(-2,\ 0)$과

직선 $x+2y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-2+2\times0+b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$|-2+b|=1,\ b-2=\pm1$ $\quad\therefore b=3\ (\because b>1)$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

50

두 직선 $(a-1)x-3y+2=0$, $-2x+(a+4)y+5=0$이 서로 평행하므로

$\frac{a-1}{-2}=\frac{-3}{a+4}\neq\frac{2}{5}$

$\frac{a-1}{-2}=\frac{-3}{a+4}$에서 $(a-1)(a+4)=6$

$a^2+3a-10=0,\ (a+5)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

즉, 두 직선 $x-3y+2=0$, $-2x+6y+5=0$ 사이의 거리가 d이고, d는 직선 $x-3y+2=0$ 위의 한 점 $(-2,\ 0)$과 직선 $-2x+6y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{|-2\times(-2)+6\times0+5|}{\sqrt{(-2)^2+6^2}}=\frac{9}{2\sqrt{10}}$

$\therefore 40d^2=40\times\frac{81}{40}=81$

답 81

51

두 점 $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 5)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$y-3=\frac{5-3}{2-1}(x-1)$ $\quad\therefore 2x-y+1=0$

점 $C(3,\ -1)$과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|2\times3-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=4$

답 4

다른 풀이

세 점 $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 5)$, $C(3,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|1\times5+2\times(-1)+3\times3-2\times3-3\times5-1\times(-1)|$

$=\frac{1}{2}\times|5-2+9-6-15+1|$

$=\frac{1}{2}\times8=4$

52

두 직선의 방정식 $x+5y+2=0$, $3x+2y-7=0$을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=-1$

즉, 두 직선의 교점 $(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y=m(x-3)-1$, 즉

$mx-y-3m-1=0$ (m은 상수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이라 하면 원점에서 직선 ㉠까지의 거리가 1이므로

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

즉, $|3m+1|=\sqrt{m^2+1}$의 양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=m^2+1$

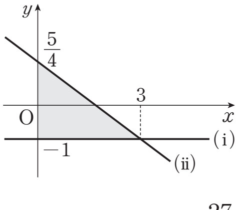
$8m^2+6m=0,\ 2m(4m+3)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{3}{4}$

(i) $m=0$일 때, ㉠은 $y=-1$

(ii) $m=-\frac{3}{4}$일 때, ㉠은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 두 직선은 각각 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times3\times\left(\frac{5}{4}+1\right)=\frac{27}{8}$

답 $\frac{27}{8}$

다른 풀이

두 직선 $x+5y+2=0$, $3x+2y-7=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+5y+2+k(3x+2y-7)=0$, 즉

$(1+3k)x+(5+2k)y+2-7k=0$ (k는 실수) ⋯⋯㉡

이라 하면 원점과 직선 ㉡ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|2-7k|}{\sqrt{(1+3k)^2+(5+2k)^2}}=1$$

즉, $|2-7k|=\sqrt{13k^2+26k+26}$의 양변을 제곱하여 정리하면

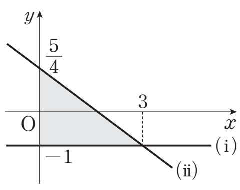
$18k^2-27k-11=0$, $(3k+1)(6k-11)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=\frac{11}{6}$

(i) $k=-\frac{1}{3}$일 때, ㉡은 $y=-1$

(ii) $k=\frac{11}{6}$일 때, ㉡은 $3x+4y-5=0$

(i), (ii)에서 두 직선은 각각 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 삼각형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times3\times\left(\frac{5}{4}+1\right)=\frac{27}{8}$$

53

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $2x+3y-1=0$, $3x-2y+2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|3x-2y+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$|2x+3y-1|=|3x-2y+2|$

$2x+3y-1=\pm(3x-2y+2)$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$x-5y+3=0$ 또는 $5x+y+1=0$

답 $x-5y+3=0$, $5x+y+1=0$

54

두 직선 $3x+4y-4=0$, $5x+12y-k=0$이 만나서 생기는 각의 이등분선이 점 $(2, -1)$을 지나므로 점 $(2, -1)$에서 두 직선에 이르는 거리는 같다.

즉, $\frac{|3\times2+4\times(-1)-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5\times2+12\times(-1)-k|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

에서

$\frac{2}{5}=\frac{|-2-k|}{13}$, $|k+2|=\frac{26}{5}$, $k+2=\pm\frac{26}{5}$

따라서 $k=-\frac{36}{5}$ 또는 $k=\frac{16}{5}$이므로

$5k=-36$ 또는 $5k=16$

답 -36, 16

STEP 1 개념 마무리 본문 p.078

19 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **20** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **21** $\sqrt{6}$ **22** 233

23 69 **24** $\frac{13}{8}$

19

$(-k+1)x+(2k-3)y+5k-4=0$에서

$x-3y-4+k(-x+2y+5)=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 두 직선 $x-3y-4=0$, $-x+2y+5=0$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=7$, $y=1$ $\quad\therefore$ P$(7, 1)$

따라서 점 P$(7, 1)$과 직선 $x+3y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|7+3\times1-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

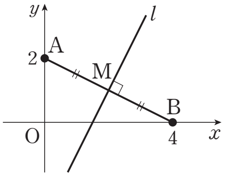
답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

20

접은 선을 직선 l이라 하면 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이다.

직선 AB의 기울기는

$\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기는 2이다.



또한, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \qquad \therefore M(2, 1)$

즉, 기울기가 2이고 점 $M(2, 1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-1=2(x-2) \qquad \therefore 2x-y-3=0$

따라서 원점에서 접은 선 l까지의 거리는

$\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

21

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{3}{5}$이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{3}{5}}$이다.

(가)

두 점 A, B는 직선 $y=\frac{3}{a}x-\frac{2}{a}$, 즉 $3x-ay-2=0$,

두 점 C, D는 직선 $y=\frac{3}{a}x-\frac{5}{a}$, 즉 $3x-ay-5=0$

위에 있고 이 두 직선은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{\frac{3}{5}}$이어야 한다.

즉, 직선 $3x-ay-2=0$ 위의 한 점 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$과

직선 $3x-ay-5=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{\frac{3}{5}}$이므로

$\frac{\left|3\times\frac{2}{3}-a\times 0-5\right|}{\sqrt{3^2+(-a)^2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$

(나)

$\frac{3}{\sqrt{9+a^2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}$에서 양변을 제곱하면

$\frac{9}{a^2+9}=\frac{3}{5}$, $45=3a^2+27$

$a^2=6 \qquad \therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$

(다)

답 $\sqrt{6}$

단계	채점 기준	배점
(가)	정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구한 경우	30%
(나)	평행한 두 직선 사이의 거리를 a에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(다)	양수 a의 값을 구한 경우	30%

22

두 점 $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$에 대하여 직선 AB의 방정식은

$y-2=\frac{4-2}{-3-1}(x-1) \qquad \therefore x+2y-5=0$

$-4\le a\le 1$인 실수 a에 대하여 점 P의 좌표를

(a, a^2+4a-7), 직선 AB와 점 P 사이의 거리를 d라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$,

$d=\frac{|a+2(a^2+4a-7)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$=\frac{|2a^2+9a-19|}{\sqrt{5}}$

삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 d이므로

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times d$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{|2a^2+9a-19|}{\sqrt{5}}$

$=\left|2\left(a+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{233}{8}\right|$

이때 $f(a)=2\left(a+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{233}{8}$이라 하면

$-4\le a\le 1$에서 $f(a)$의 최댓값은 $f(1)=-8$,

최솟값은 $f\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{233}{8}$이므로

$-\frac{233}{8}\le f(a)\le -8$

즉, $\triangle PAB=|f(a)|$에서 $8\le\triangle PAB\le\frac{233}{8}$

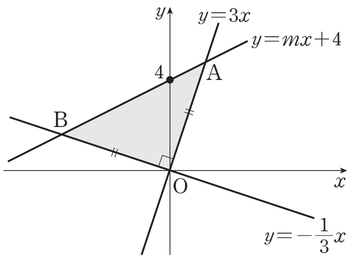
따라서 $M=\frac{233}{8}$, $m=8$이므로

$Mm=\frac{233}{8}\times 8=233$

답 233

23

직선 $y=mx+4$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 4)$를 지나는 직선이고 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$는 서로 수직이므로 주어진 세 직선은 다음 그림과 같다.



두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$와 직선 $y=mx+4$의 교점을 각각 A, B라 하면 점 A의 x좌표는

$3x=mx+4$, $(3-m)x=4$

$\therefore x=\frac{4}{3-m}$, $y=\frac{12}{3-m}$ $(\because m\neq3)$

$m=3$이면 삼각형이 만들어지지 않는다.

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{4}{3-m}, \frac{12}{3-m}\right)$ ……㉠

같은 방법으로 점 B의 x좌표는

$-\frac{1}{3}x=mx+4$, $\left(m+\frac{1}{3}\right)x=-4$

$\therefore x=\frac{-12}{3m+1}$, $y=\frac{4}{3m+1}$ $\left(\because m\neq-\frac{1}{3}\right)$

$m=-\frac{1}{3}$이면 삼각형이 만들어지지 않는다.

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{-12}{3m+1}, \frac{4}{3m+1}\right)$ ……㉡

이때 $\triangle$OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3-m}\right)^2+\left(\frac{12}{3-m}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-12}{3m+1}\right)^2+\left(\frac{4}{3m+1}\right)^2}$$

위의 식을 정리하면 $\frac{4\sqrt{10}}{|3-m|}=\frac{4\sqrt{10}}{|3m+1|}$에서

$|3-m|=|3m+1|$

$\therefore 3-m=3m+1$ 또는 $3-m=-3m-1$

(i) $3-m=3m+1$일 때,

$4m=2$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) $3-m=-3m-1$일 때,

$2m=-4$ $\quad\therefore m=-2$

그런데 $m>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=\frac{1}{2}$이므로 직선 $y=mx+4$는

$y=\frac{1}{2}x+4$ $\quad\therefore x-2y+8=0$

직선 $x-2y+8=0$과 원점 O 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

또한, $m=\frac{1}{2}$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$\mathrm{A}\left(\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$

이므로 선분 AB의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(-\frac{24}{5}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}-\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$$

따라서 이등변삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{1}{2}\times\frac{16\sqrt{5}}{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{64}{5}$$

따라서 $p=5$, $q=64$이므로

$p+q=5+64=69$

답 69

보충 설명

$\triangle$OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 직각이등변삼각형이므로 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하지 않고도 그 넓이를 구할 수 있다.

즉, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{10}}{5}\times\frac{8\sqrt{10}}{5}=\frac{64}{5}$$

24

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{2}, 6\right)$이고, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{12}{5}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-6=\frac{5}{12}\left(x+\frac{5}{2}\right)$ $\quad\therefore y=\frac{5}{12}x+\frac{169}{24}$ ……㉠

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는 $(0, 12)$이고, 직선 AC의 기울기는 0이므로 선분 AC의 수직이등분선의 방정식은

$x=0$ ……㉡

따라서 점 O는 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=0$, $y=\frac{169}{24}$ $\quad\therefore \mathrm{O}\left(0, \frac{169}{24}\right)$

한편, 점 I에서 직선 AC와 직선 BC에 이르는 거리가 서로 같고, 직선 AC의 방정식은 $y=12$, 직선 BC의 방정식은 $12x-5y=0$이므로 점 I의 좌표를 $(0, a)$ $(0<a<12)$라 하면 ← 점 I는 $\angle$B의 이등분선 $x=0$ 위에 있다.

$12-a=\dfrac{|-5a|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$

$12-a=\dfrac{5}{13}a$ ($\because$ $0<a<12$)

$\dfrac{18}{13}a=12$ $\qquad\therefore$ $a=\dfrac{26}{3}$

따라서 $\mathrm{I}\left(0,\ \dfrac{26}{3}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=\left|\dfrac{169}{24}-\dfrac{26}{3}\right|=\dfrac{13}{8}$

답 $\dfrac{13}{8}$

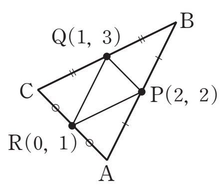
STEP 2 개념 마무리

본문 p.079

1 $y=2x-2$		**2** -5	**3** 30
4 ③	**5** $\sqrt{2}$	**6** $(1,\ 2)$	

1

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점이 각각 P$(2,\ 2)$, Q$(1,\ 3)$, R$(0,\ 1)$이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여 직선 AB와 직선 QR은 평행하다.



이때 직선 QR의 기울기는

$\dfrac{1-3}{0-1}=2$

따라서 직선 AB는 점 P$(2,\ 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2=2(x-2)$ $\qquad\therefore$ $y=2x-2$

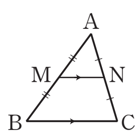
답 $y=2x-2$

보충 설명

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질 |

(1) 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$



(2) 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점 M을 지나고 변 BC에 평행한 직선과 변 AC의 교점을 N이라 하면

$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{NC}}$

다른 풀이

A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$이라 하면

변 AB의 중점이 P$(2,\ 2)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$, $\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$ $\qquad$ ……㉠

변 BC의 중점이 Q$(1,\ 3)$이므로

$\dfrac{x_2+x_3}{2}=1$, $\dfrac{y_2+y_3}{2}=3$ $\qquad$ ……㉡

변 CA의 중점이 R$(0,\ 1)$이므로

$\dfrac{x_3+x_1}{2}=0$, $\dfrac{y_3+y_1}{2}=1$ $\qquad$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x_1+x_2=4$, $x_2+x_3=2$, $x_3+x_1=0$이고,

이 세 식을 변끼리 더하면

$2(x_1+x_2+x_3)=6$

$x_1+x_2+x_3=3$

$\therefore$ $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-1$

또한, ㉠, ㉡, ㉢에서 $y_1+y_2=4$, $y_2+y_3=6$, $y_3+y_1=2$이고,

이 세 식을 변끼리 더하면

$2(y_1+y_2+y_3)=12$

$y_1+y_2+y_3=6$

$\therefore$ $y_1=0$, $y_2=4$, $y_3=2$

$\therefore$ A$(1,\ 0)$, B$(3,\ 4)$, C$(-1,\ 2)$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{4-0}{3-1}(x-1)$ $\qquad\therefore$ $y=2x-2$

2

$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b=f(x,\ y)g(x,\ y)$ $\qquad$ ……㉠

에서 좌변의 x^2항의 계수가 2이므로

$f(x,\ y)=x+py+q$, $g(x,\ y)=2x+ry+s$

(p, q, r, s는 상수)

라 하자.

이때 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$은 서로 수직인 두 직선의 방정식을 나타내므로

$1\times2+pr=0$ $\qquad\therefore$ $p=-\dfrac{2}{r}$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b=\left(x-\dfrac{2}{r}y+q\right)(2x+ry+s)$

……㉡

등식 ㉡에서 우변의 xy항은

$x\times ry+\left(-\frac{2}{r}y\right)\times 2x=\left(r-\frac{4}{r}\right)xy$

이고, 좌변의 xy항의 계수가 -3이므로

$r-\frac{4}{r}=-3$, $r^2+3r-4=0$

$(r+4)(r-1)=0$ $\quad\therefore r=-4$ 또는 $r=1$

(i) $r=-4$일 때

이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b$

$=\left(x+\frac{1}{2}y+q\right)(2x-4y+s)$

$=2x^2-3xy-2y^2+(2q+s)x+\left(-4q+\frac{1}{2}s\right)y+qs$

이므로

$a=-2$, $2q+s=-1$, $-4q+\frac{1}{2}s=7$, $b=qs$

$2q+s=-1$, $-4q+\frac{1}{2}s=7$을 연립하여 풀면

$q=-\frac{3}{2}$, $s=2$ $\quad\therefore qs=\left(-\frac{3}{2}\right)\times 2=-3$

$\therefore a=-2$, $b=-3$

(ii) $r=1$일 때

이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b$

$=(x-2y+q)(2x+y+s)$

$=2x^2-3xy-2y^2+(2q+s)x+(q-2s)y+qs$

이므로

$a=-2$, $2q+s=-1$, $q-2s=7$, $b=qs$

$2q+s=-1$, $q-2s=7$을 연립하여 풀면

$q=1$, $s=-3$ $\quad\therefore qs=1\times(-3)=-3$

$\therefore a=-2$, $b=-3$

(i), (ii)에서 $a+b=-2+(-3)=-5$

답 -5

3

$ab-6a+3b-18=0$에서

$a(b-6)+3(b-6)=0$

$(a+3)(b-6)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $b=6$

(i) $a=-3$일 때,

직선 $x+3y+4=0$과 직선 $x-ay+4=0$, 즉

$x+3y+4=0$는 일치하므로 두 직선 $x+3y+4=0$,

$2x+by+8=0$은 한 점에서 만나야 한다.

즉, $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{b}$에서 $b\neq 6$

이때 b는 $|b|\leq 10$인 정수이므로 b의 값으로 가능한 것은

$-10, -9, -8, \cdots, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$의 20개이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 20이다.

(ii) $b=6$일 때,

직선 $x+3y+4=0$과 직선 $2x+by+8=0$, 즉

$2x+6y+8=0$은 일치하므로 두 직선 $x+3y+4=0$,

$x-ay+4=0$은 한 점에서 만나야 한다.

즉, $\frac{1}{1}\neq\frac{3}{-a}$에서 $a\neq -3$

이때 a는 $|a|\leq 5$인 정수이므로 a의 값으로 가능한 것은

$-5, -4, -2, -1, 0, \cdots, 3, 4, 5$의 10개이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 10이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$20+10=30$

답 30

보충 설명

$a=-3$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=6$일 때, 두 직선

$x+3y+4=0$, $\underbrace{2x+8=0}_{x+4=0}$은 한 점에서 만난다.

4

A(8, 6)이므로 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x$ $\quad\therefore 3x-4y=0$

또한, H(8, 0)이므로 $0<a<8$인 실수 a에 대하여 점 B의

좌표를 $(a, 0)$라 하면

$\overline{\mathrm{BI}}=\frac{|3\times a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3a}{5}$, $\overline{\mathrm{BH}}=8-a$

이때 $\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BH}}$이므로

$\frac{3a}{5}=8-a$, $3a=40-5a$

$8a=40$ $\quad\therefore a=5$

즉, B(5, 0)이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{6-0}{8-5}(x-5)$ $\quad\therefore y=2x-10$

따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

답 ③

다른 풀이 1

$\mathrm{A}(8,\ 6)$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=6$, $\overline{\mathrm{OH}}=8$

$\triangle\mathrm{OAH}$는 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$$

$\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BH}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{OB}}=8-x$이고

$\underbrace{\text{두 삼각형 OBI, OAH는 서로 닮음}}_{\text{AA 닮음}}$이므로

$(8-x):x=10:6$, $10x=48-6x$, $16x=48$

$\therefore\ x=3$

즉, $\mathrm{B}(5,\ 0)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{6-0}{8-5}(x-5)\qquad\therefore\ y=2x-10$

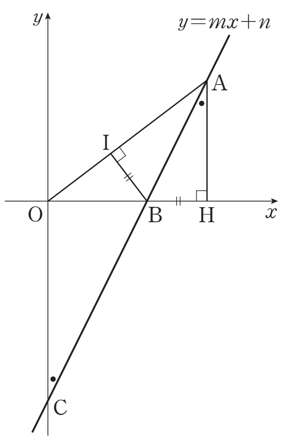
따라서 $m=2$, $n=-10$이므로

$m+n=2+(-10)=-8$

다른 풀이 2

다음 그림과 같이 직선 $y=mx+n$과 y축의 교점을 C라 하면 두 직선 OC, AH가 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{OCB}=\angle\mathrm{HAB}$



한편, $\underbrace{\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{BH}}\text{이고 }\overline{\mathrm{AB}}\text{는 공통}}_{\text{RHS 합동}}$이므로 두 직각삼각형 AIB, AHB는 서로 합동이다.

즉, $\angle\mathrm{BAI}=\angle\mathrm{BAH}=\angle\mathrm{OCA}$이므로

$\triangle\mathrm{OCA}$는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

따라서 점 C의 좌표는 $(0,\ -10)$이므로 직선 AC의 y절편 n은 -10이고 기울기 m은

$m=\dfrac{6-(-10)}{8-0}=2$

$\therefore\ m+n=2+(-10)=-8$

5

$xy+x+y-1=0$에서 $x(y+1)+y+1=2$

$\therefore\ (x+1)(y+1)=2\qquad\cdots\cdots㉠$

이때 x, y는 정수이므로 ㉠을 만족시키는 $x+1$, $y+1$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

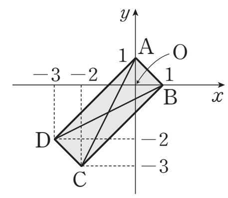
$x+1$	1	2	-1	-2
$y+1$	2	1	-2	-1

즉, 각 경우에 정수 x, y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	1	-2	-3
y	1	0	-3	-2

즉, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(-2,\ -3)$, $(-3,\ -2)$이고 이 네 점을 각각 A, B, C, D라 하면 도형 F는 사각형 ABCD이다.

오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 이 넓이를 이등분하는 직선 l은 이 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지난다.



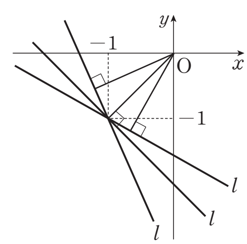
또한, 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 교점은 선분 AC의 중점과 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+(-2)}{2},\ \dfrac{1+(-3)}{2}\right)\qquad\therefore\ (-1,\ -1)$

즉, 직선 l은 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

한편, 오른쪽 그림에서 점 $(-1,\ -1)$을 지나는 직선 l과 원점 사이의 거리가 최대가 되려면 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발이 점 $(-1,\ -1)$이어야 한다.



따라서 구하는 최댓값은 두 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

6

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리가 같다.

두 직선 $2x-4y+11=0$, $4x-2y-5=0$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

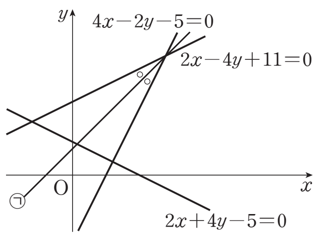
$$\frac{|2a-4b+11|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|4a-2b-5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

$|2a-4b+11|=|4a-2b-5|$

$2a-4b+11=\pm(4a-2b-5)$

$\therefore a+b-8=0$ 또는 $a-b+1=0$

이때 오른쪽 그림과 같이 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 내각의 이등분선 중에서 두 직선 $2x-4y+11=0$, $4x-2y-5=0$이 이루는 각의 이등분선의 기울기는 양수이므로 이등분선의 방정식은



$x-y+1=0$ ……㉠ ← 직선 $x+y-8=0$의 기울기는 -1이다.

또한, 두 직선 $2x-4y+11=0$, $2x+4y-5=0$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (c, d)라 하면

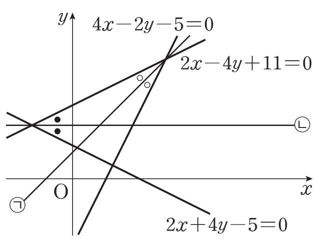
$$\frac{|2c-4d+11|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{|2c+4d-5|}{\sqrt{2^2+4^2}}$$

$|2c-4d+11|=|2c+4d-5|$

$2c-4d+11=\pm(2c+4d-5)$

$\therefore c=-\frac{3}{2}$ 또는 $d=2$

이때 오른쪽 그림과 같이 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 내각의 이등분선 중에서 두 직선 $2x-4y+11=0$, $2x+4y-5=0$이 이루는 각의 이등분선은 x축과 평행한 직선이므로



$y=2$ ……㉡ ← 직선 $x=-\frac{3}{2}$은 y축과 평행하다.

삼각형의 내심은 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이므로 ㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 삼각형의 내심의 좌표는 $(1, 2)$이다.

답 $(1, 2)$

03. 원의 방정식

1 원의 방정식

기본＋필수연습 본문 pp.086~092

01 (1) $(x+2)^2+(y-6)^2=13$ (2) $x^2+y^2=25$

02 (1) 중심의 좌표 : $(1, 3)$, 반지름의 길이 : $2\sqrt{2}$

(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 2

03 $(x-1)^2+(y-3)^2=18$ **04** (1) 3 (2) $(-6, -6)$

05 $(x-2)^2+y^2=5$ **06** 4 **07** $\sqrt{7}$

08 (1) -1 (2) $-5<k<7$ **09** -6, 2 **10** 16π

11 $(x-4)^2+(y+2)^2=5$ **12** -2

13 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=4$

(2) 194π

14 6π **15** 3π **16** 2

01

(1) 중심의 좌표가 $(-2, 6)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$인 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-6)^2=13$

(2) 중심이 원점이고 점 $(4, -3)$을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=25$

답 (1) $(x+2)^2+(y-6)^2=13$

(2) $x^2+y^2=25$

02

(1) $x^2+y^2-2x-6y+2=0$에서

$x^2-2x+1+y^2-6y+9=8$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=(2\sqrt{2})^2$

따라서 중심의 좌표는 $(1, 3)$이고, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

(2) $x^2+y^2-4x=0$에서

$x^2-4x+4+y^2=4$

$\therefore (x-2)^2+y^2=2^2$

따라서 중심의 좌표는 $(2, 0)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

답 (1) 중심의 좌표 : $(1, 3)$, 반지름의 길이 : $2\sqrt{2}$

(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 2

03

원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$

선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(6-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{72}}{2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=18$

답 $(x-1)^2+(y-3)^2=18$

다른 풀이 본문 p.084 한 걸음 더 참고

두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(4, 6)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x+2)(x-4)+y(y-6)=0$

$x^2-2x-8+y^2-6y=0$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=18$

04

(1) $x^2+y^2+8x-6y-2a+15=0$에서

$x^2+8x+16+y^2-6y+9=2a+10$

$\therefore (x+4)^2+(y-3)^2=2a+10$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(-4, 3)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{2a+10}$이다.

이때 주어진 원이 y축에 접하므로

(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|-4|=4$

즉, $2a+10=4^2$이므로 $2a=6$

$\therefore a=3$

(2) 구하는 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면 이 원의 넓이가 36π이므로

$\pi r^2=36\pi$, $r^2=36$

$\therefore r=6$ ($\because r>0$)

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

(반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|=|$(중심의 y좌표)$|$

즉, 구하는 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면

$6=|a|=|b|$

이때 이 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로

$a<0$, $b<0$에서

$a=-6$, $b=-6$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-6, -6)$이다.

답 (1) 3 (2) $(-6, -6)$

05

원의 중심이 x축 위에 있으므로 이 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 두 점 $\mathrm{A}(4, 1)$, $\mathrm{B}(1, 2)$를 지나므로

$(4-a)^2+1^2=r^2$

$\therefore a^2-8a+17=r^2$ ······㉠

$(1-a)^2+2^2=r^2$

$\therefore a^2-2a+5=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=5$

답 $(x-2)^2+y^2=5$

06

두 점 $\mathrm{A}(-7, -3)$, $\mathrm{B}(5, 6)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times5+2\times(-7)}{1+2}, \frac{1\times6+2\times(-3)}{1+2}\right)$

$\therefore (-3, 0)$

즉, 점 $(-3, 0)$을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은

$(x+3)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$4^2+3^2=r^2$ $\quad\therefore r^2=25$

따라서 원 $(x+3)^2+y^2=25$가 점 $(0, k)$를 지나므로

$3^2+k^2=25$, $k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

답 4

07

원의 중심 C는 선분 PQ의 중점이므로 그 좌표는

$\mathrm{C}\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{C}(2, 1)$

또한, 선분 PQ가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{(0-4)^2+(3+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$

즉, 주어진 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=8$

이 원이 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표는

$(x-2)^2+(0-1)^2=8$에서

$(x-2)^2=7$, $x-2=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{7}$

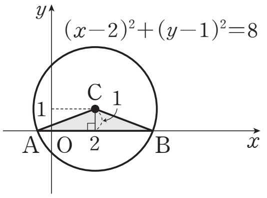
따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2+\sqrt{7}-(2-\sqrt{7})$

$=2\sqrt{7}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times1$

$=\sqrt{7}$



답 $\sqrt{7}$

다른 풀이

두 점 $\mathrm{P}(4, -1)$, $\mathrm{Q}(0, 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x-4)(x-0)+(y+1)(y-3)=0$ ······㉠

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=8$

이 원이 x축과 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 ㉠에서

$x(x-4)+1\times(-3)=0$

$x^2-4x-3=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-3)}=2\pm\sqrt{7}$

따라서 선분 AB의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=(2+\sqrt{7})-(2-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times1=\sqrt{7}$

08

(1) $x^2+y^2+2kx+y+1=0$에서

$(x+k)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=k^2-\frac{3}{4}$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $\left(-k, -\frac{1}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2-\frac{3}{4}}$이다.

이때 이 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$이므로

$k^2-\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $k^2=1$ $\quad\therefore k=\pm1$

(i) $k=1$일 때,

원의 중심의 좌표는 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$이므로 원의 중심이 제3사분면 위에 있다.

(ii) $k=-1$일 때,

원의 중심의 좌표는 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$이므로 원의 중심이 제4사분면 위에 있다.

(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -1이다.

(2) $x^2+y^2+12x-6y+k^2-2k+10=0$에서

$(x+6)^2+(y-3)^2=-k^2+2k+35$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$-k^2+2k+35>0$이어야 하므로

$k^2-2k-35<0$, $(k+5)(k-7)<0$

$\therefore -5<k<7$

답 (1) -1 (2) $-5<k<7$

09

$x^2+y^2+4x-2y+k^2+4k-16=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=-k^2-4k+21$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(-2, 1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{-k^2-4k+21}$이다.

이때 이 원의 반지름의 길이가 3이므로

$-k^2-4k+21=3^2$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

답 -6, 2

10

$x^2+y^2-6x+2y+k^2-10k+19=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=-k^2+10k-9$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(3,\ -1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{-k^2+10k-9}$이다.
이때 이 원의 넓이가 최대가 되려면
$-k^2+10k-9>0$이고, 반지름의 길이인 $\sqrt{-k^2+10k-9}$의 값이 최대가 되어야 한다.
$-k^2+10k-9>0$에서
$k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$
$\therefore\ 1<k<9$
또한, $\sqrt{-k^2+10k-9}=\sqrt{-(k-5)^2+16}$이므로
$1<k<9$에서 $k=5$일 때, 반지름의 길이 $\sqrt{-k^2+10k-9}$는 최댓값 $\sqrt{16}=4$를 갖는다.
따라서 구하는 원의 넓이의 최댓값은
$\pi\times4^2=16\pi$

답 16π

11

원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}=$(원의 반지름의 길이)
이때 $\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-2)^2+(b+1)^2$, $\overline{\mathrm{BP}}^2=(a-3)^2+b^2$,
$\overline{\mathrm{CP}}^2=(a-6)^2+(b+1)^2$에서
$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a-2)^2+(b+1)^2=(a-3)^2+b^2$
$\therefore\ a+b=2$ ……㉠
$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로
$(a-3)^2+b^2=(a-6)^2+(b+1)^2$
$\therefore\ 3a-b=14$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-2$
따라서 원의 중심은 $\mathrm{P}(4,\ -2)$이고, 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$
이므로 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y+2)^2=5$ ← $x^2+y^2-8x+4y+15=0$

답 $(x-4)^2+(y+2)^2=5$

다른 풀이
구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C는 상수)
이라 하면 이 원이
점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$을 지나므로
$5+2A-B+C=0$ ……㉢
점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 지나므로
$9+3A+C=0$ ……㉣
점 $\mathrm{C}(6,\ -1)$을 지나므로
$37+6A-B+C=0$ ……㉤
㉤−㉢을 하면 $32+4A=0$
$\therefore\ A=-8$, $B=4$, $C=15$ ($\because$ ㉢, ㉣)
따라서 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-8x+4y+15=0$ ← $(x-4)^2+(y+2)^2=5$

12

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}=$(원의 반지름의 길이)
이때 $\overline{\mathrm{AP}}^2=(a+2)^2+(b-6)^2$,
$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a+8)^2+(b+2)^2$,
$\overline{\mathrm{CP}}^2=(a-4)^2+(b+6)^2$에서
$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a+2)^2+(b-6)^2=(a+8)^2+(b+2)^2$
$\therefore\ 3a+4b=-7$ ……㉠
$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$이므로
$(a+8)^2+(b+2)^2=(a-4)^2+(b+6)^2$
$\therefore\ 3a-b=-2$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-1$
즉, 원의 중심은 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$이고, 반지름의 길이는
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(-1+2)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{50}$
이므로 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+1)^2=50$
점 $\mathrm{D}(2,\ k)$가 이 원 위에 있으므로
$(2+1)^2+(k+1)^2=50$ $\quad\therefore\ k^2+2k-40=0$
이때 k에 대한 이차방정식 $k^2+2k-40=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 -2이다.
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-40)=41>0$

답 -2

13

(1) 직선 $y=2x+1$ 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)$이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

즉, 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a-1)^2=a^2$ ······㉠

원 ㉠이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$(2-a)^2+(3-2a-1)^2=a^2$

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

㉠에서 구하는 모든 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=4$

(2) 점 $(-8, -1)$을 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제3사분면 위에 있다.

즉, 원의 반지름의 길이를 a $(a>0)$라 하면 중심의 좌표는 $(-a, -a)$이므로 원의 방정식은

$(x+a)^2+(y+a)^2=a^2$ ······㉠

이 원이 점 $(-8, -1)$을 지나므로

$(-8+a)^2+(-1+a)^2=a^2$

$a^2-18a+65=0$, $(a-5)(a-13)=0$

$\therefore\ a=5$ 또는 $a=13$

㉠에서 조건을 만족시키는 두 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+5)^2=25$, $(x+13)^2+(y+13)^2=169$

이므로 이 두 원의 넓이의 합은

$25\pi+169\pi=194\pi$

답 (1) $(x-1)^2+(y-3)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=4$

(2) 194π

14

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$에서 $\overline{BP}=3\overline{AP}$이므로

$\overline{BP}^2=9\overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{BP}^2=9\overline{AP}^2$에서

$(x-4)^2+y^2=9\{(x+4)^2+y^2\}$

$8x^2+80x+8y^2+128=0$, $x^2+10x+y^2+16=0$

$\therefore\ (x+5)^2+y^2=9$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-5, 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

답 6π

다른 풀이

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 C, D라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:3$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이때 $C(-2, 0)$, $D(-8, 0)$이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+(-8)}{2}, 0\right)$, 즉 $(-5, 0)$이고, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times|-8-(-2)|=3$이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-5, 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

15

점 P의 좌표를 (a, b)라 하고 선분 OP의 중점을 $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$ $\quad\therefore\ a=2x$, $b=2y$ ······㉠

점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2-4x+4y-4=0$, 즉

$(x-2)^2+(y+2)^2=12$ 위의 점이므로

$(a-2)^2+(b+2)^2=12$

㉠을 위의 식에 대입하면

$(2x-2)^2+(2y+2)^2=12$ $\quad\therefore\ (x-1)^2+(y+1)^2=3$

따라서 선분 OP의 중점 $Q(x, y)$가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 3π

16

$P(a, b)$, $G(x, y)$라 하면

$x=\frac{a+(-4)+2}{3}$, $y=\frac{b+2+8}{3}$

$\therefore\ a=3x+2$, $b=3y-10$ ······㉠

점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=36$

㉠을 위의 식에 대입하면

$(3x+2)^2+(3y-10)^2=36$

$\therefore\ \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=4$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

STEP 1 **개념 마무리** 본문 p.093

01 1 **02** $-1\le k<\frac{1}{3}$ 또는 $2<k\le\frac{10}{3}$
03 $\frac{17}{10}$ **04** 9 **05** -58 **06** -3

01

$x^2+y^2-4ax+2ay+10a-15=0$에서
$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-10a+15$
즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(2a, -a)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5a^2-10a+15}$이다.
이때 $f(a)=5a^2-10a+15$라 하면
$f(a)=5(a-1)^2+10$
즉, $f(a)$는 $a=1$일 때 최솟값 10을 갖는다.
따라서 주어진 원의 넓이가 최소일 때의 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$이므로
$p=2, q=-1$
$\therefore p+q=2+(-1)=1$

답 1

02

$x^2+y^2+2(k+1)x-2k^2+9k-1=0$에서
$\{x+(k+1)\}^2+y^2=3k^2-7k+2$
즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(-k-1, 0)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{3k^2-7k+2}$이다.
이 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이하이므로
$0<\sqrt{3k^2-7k+2}\le2\sqrt{3}$
$\therefore 0<3k^2-7k+2\le12$
$3k^2-7k+2>0$에서 $(3k-1)(k-2)>0$
$\therefore k<\frac{1}{3}$ 또는 $k>2$ ······㉠
$3k^2-7k+2\le12$에서 $3k^2-7k-10\le0$
$(k+1)(3k-10)\le0$
$\therefore -1\le k\le\frac{10}{3}$ ······㉡
따라서 실수 k의 값의 범위는 ㉠, ㉡의 공통부분이므로
$-1\le k<\frac{1}{3}$ 또는 $2<k\le\frac{10}{3}$

답 $-1\le k<\frac{1}{3}$ 또는 $2<k\le\frac{10}{3}$

03

$x+y=0$ ······㉠
$2x-y-3=0$ ······㉡
$x-4y+2=0$ ······㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=-1$이므로
두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1, -1)$,
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-\frac{2}{5}, y=\frac{2}{5}$이므로
두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$,
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2, y=1$이므로
두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이다.
세 교점을 각각 $A(1, -1)$, $B\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $C(2, 1)$이라 하고,
삼각형 ABC의 외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=r$
이때 $\overline{AP}^2=(a-1)^2+(b+1)^2$,
$\overline{BP}^2=\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\left(b-\frac{2}{5}\right)^2$,
$\overline{CP}^2=(a-2)^2+(b-1)^2$에서
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-1)^2+(b+1)^2=\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\left(b-\frac{2}{5}\right)^2$
$\therefore a-b=\frac{3}{5}$ ······㉣
$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로
$(a-1)^2+(b+1)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$
$\therefore a+2b=\frac{3}{2}$ ······㉤
㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{10}, b=\frac{3}{10}$
따라서 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 외접원의 중심이 $P\left(\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right)$이므로 반지름의 길이 r은
$r=\overline{AP}=\sqrt{\left(\frac{9}{10}-1\right)^2+\left(\frac{3}{10}+1\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{10}}$
$\therefore r^2=\frac{17}{10}$

답 $\frac{17}{10}$

04

세 점 $A(-2, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, 2)$를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$이고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$이므로 선분 BC의 수직이등분선의 방정식은

$y-\frac{3}{2}=-3\left(x-\frac{7}{2}\right) \qquad \therefore y=-3x+12$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 선분 BC의 수직이등분선 위에 있으므로 이 원의 중심을 $P(a, -3a+12)$라 하자.

또한, 삼각형 ABC의 외접원의 중심에서 두 점 A, B에 이르는 거리가 같으므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서

$(a+2)^2+(-3a+9)^2=(a-2)^2+(-3a+11)^2$

$10a^2-50a+85=10a^2-70a+125$

$20a=40 \qquad \therefore a=2$

즉, 직선 $y=mx+n$이 점 $P(2, 6)$을 지나므로

$2m+n=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또한, 직선 $y=mx+n$이 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$의 넓이를 이등분하려면 이 직선은 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$의 중심 $(5, -3)$을 지나야 하므로

$5m+n=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-3, n=12 \qquad \therefore m+n=-3+12=9$

답 9

05

점 $(-2, 5)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있다. 즉, 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$이므로 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 5)$를 지나므로

$(-2+r)^2+(5-r)^2=r^2$

$\therefore r^2-14r+29=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=7^2-1\times29=20>0$

이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근을 r_1, r_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$r_1r_2=29$

또한, 두 원의 중심의 좌표는 $(-r_1, r_1)$, $(-r_2, r_2)$이므로

$$\begin{aligned} ad+bc&=(-r_1)\times r_2+r_1\times(-r_2)\\ &=-r_1r_2-r_1r_2=-2r_1r_2\\ &=(-2)\times29=-58 \end{aligned}$$

답 -58

06

$P(p, q)$, $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{p}{4}, y=\frac{q}{4}$

$\therefore p=4x, q=4y \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 $P(p, q)$는 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=20$ 위의 점이므로

$(p-4)^2+(q-6)^2=20$

㉠을 위의 식에 대입하면

$(4x-4)^2+(4y-6)^2=20$

$\therefore x^2+y^2-2x-3y+2=0$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$x^2+y^2-2x-3y+2=0$이므로

$a=-2, b=-3, c=2$

$\therefore a+b+c=-2+(-3)+2=-3$

답 -3

2 원과 직선의 위치 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.098~104

17 (1) $-4<k<4$ (2) $k=\pm4$ (3) $k<-4$ 또는 $k>4$

18 $a>2\sqrt{2}$ **19** $2x-y+5=0$

20 $x^2+y^2+\frac{4}{3}y-1=0$ **21** $-17\le k\le3$

22 7 **23** $2\sqrt{10}$ **24** 4 **25** -66

26 -6 **27** 6 **28** 45 **29** $\frac{6}{5}$

30 324 **31** $x^2+y^2+5y=0$ **32** 6

33 2

17

$y=-x+k$를 $x^2+y^2=8$에 대입하면

$x^2+(-x+k)^2=8$

$\therefore\ 2x^2-2kx+k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-8)=-k^2+16$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면

$-k^2+16>0,\ k^2-16<0$

$\therefore\ -4<k<4$

(2) 원과 직선이 접하면

$-k^2+16=0,\ k^2=16$

$\therefore\ k=\pm4$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면

$-k^2+16<0,\ k^2-16>0$

$\therefore\ k<-4$ 또는 $k>4$

답 (1) $-4<k<4$ (2) $k=\pm4$ (3) $k<-4$ 또는 $k>4$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면 $d=\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$이고 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면

$d<2\sqrt{2}$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$

$\therefore\ -4<k<4$

(2) 원과 직선이 접하면

$d=2\sqrt{2}$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ k=\pm4$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면

$d>2\sqrt{2}$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}$

$\therefore\ k<-4$ 또는 $k>4$

18

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(a, 1)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+1^2}$이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 1이므로 두 원이 서로 만나지 않으려면 $2+1<\sqrt{a^2+1}$이어야 한다.

즉, $\sqrt{a^2+1}>3$에서

$a^2+1>9,\ a^2-8>0$

$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})>0$

$\therefore\ a<-2\sqrt{2}$ 또는 $a>2\sqrt{2}$

이때 a는 양수이므로 구하는 a의 값의 범위는

$a>2\sqrt{2}$

답 $a>2\sqrt{2}$

보충 설명

$\sqrt{a^2+1}<2-1$일 때도 두 원은 만나지 않는다.

즉, $\sqrt{a^2+1}<1$에서 $a^2+1<1$ $\quad\therefore\ a^2<0$

그런데 위의 부등식을 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

19

두 원 $x^2+y^2=10$, $(x-2)^2+(y+1)^2=25$, 즉 $x^2+y^2-10=0$, $x^2+y^2-4x+2y-20=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-10-(x^2+y^2-4x+2y-20)=0$

$4x-2y+10=0$

$\therefore\ 2x-y+5=0$

답 $2x-y+5=0$

20

$(x+2)^2+(y+4)^2=9$에서

$x^2+y^2+4x+8y+11=0$ ……㉠

$(x-1)^2+(y-1)^2=9$에서

$x^2+y^2-2x-2y-7=0$ ……㉡

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+4x+8y+11+k(x^2+y^2-2x-2y-7)=0$

$(k\neq-1)$ ……㉢

이라 하면 원 ㉢이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$16-8k=0$ $\quad\therefore\ k=2$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$3x^2+3y^2+4y-3=0$

$\therefore\ x^2+y^2+\frac{4}{3}y-1=0$

답 $x^2+y^2+\frac{4}{3}y-1=0$

21

원의 반지름의 길이를 r, 원의 중심 $(-2, 5)$와 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$\underset{\text{|(중심의 }x\text{좌표)|}}{r=2}, \ d=\frac{|4\times(-2)+3\times5+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k+7|}{5}$$

이때 원이 직선과 만나므로 $d\le r$이어야 한다.

즉, $\frac{|k+7|}{5}\le 2$에서

$|k+7|\le 10$, $-10\le k+7\le 10$

$\therefore -17\le k\le 3$

답 $-17\le k\le 3$

22

$x^2+y^2-8x-6y+k=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=25-k$

즉, 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25-k}$ $(k<25)$이다.

이때 이 원이 x축과 만나려면

$\sqrt{25-k}\ge 3$ ······㉠

이 원이 y축과 만나지 않으려면

$\sqrt{25-k}<4$ ······㉡

즉, ㉠, ㉡에서 $3\le\sqrt{25-k}<4$이므로

$9\le 25-k<16$, $-16\le -k<-9$

$\therefore 9<k\le 16$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16의 7개이다.

답 7

다른 풀이

(i) 원 $x^2+y^2-8x-6y+k=0$이 x축과 만나므로 원의 방정식에 $y=0$을 대입한 이차방정식 $x^2-8x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-k\ge 0$ $\therefore k\le 16$

(ii) 원 $x^2+y^2-8x-6y+k=0$이 y축과 만나지 않으므로 원의 방정식에 $x=0$을 대입한 이차방정식 $y^2-6y+k=0$의 판별식을 D'이라 하면

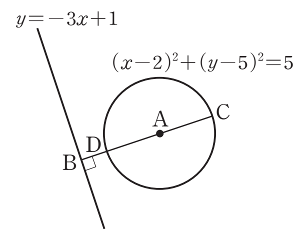
$\frac{D'}{4}=9-k<0$ $\therefore k>9$

(i), (ii)에서 $9<k\le 16$이므로 조건을 만족시키는 정수 k는 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16의 7개이다.

23

$x^2+y^2-4x-10y+24=0$에서 $(x-2)^2+(y-5)^2=5$

다음 그림과 같이 원의 중심을 A라 하고 점 A에서 직선 $y=-3x+1$에 내린 수선의 발을 B, 직선 AB가 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자.



원의 중심 A$(2, 5)$와 직선 $y=-3x+1$, 즉 $3x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\frac{|3\times2+5-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

원 위의 점 P에서 직선 $y=-3x+1$에 내린 수선의 발을 Q라 하면

(i) 선분 PQ의 길이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 C, 점 B이므로 그 최댓값은

$\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$

(ii) 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 D, 점 B이므로 그 최솟값은

$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=\sqrt{10}-\sqrt{5}$

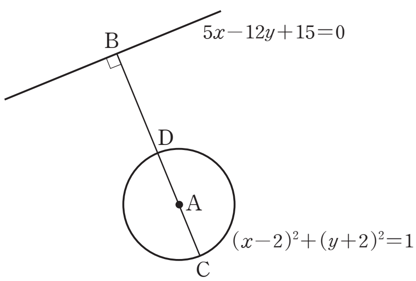
(i), (ii)에서 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{10}$이다.

답 $2\sqrt{10}$

24

$x^2+y^2-4x+4y+7=0$에서 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$

다음 그림과 같이 원의 중심을 A라 하고 점 A에서 직선 $5x-12y+15=0$에 내린 수선의 발을 B, 직선 AB가 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자.



원의 중심 $A(2,\ -2)$와 직선 $5x-12y+15=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\frac{|5\times2-12\times(-2)+15|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{49}{13}$$

원 위의 점 P에서 직선 $5x-12y+15=0$에 내린 수선의 발을 Q라 하면

(i) 선분 PQ의 길이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 C, 점 B이므로 그 최댓값은

$$\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{AC}=\frac{49}{13}+1=\frac{62}{13}$$

(ii) 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 D, 점 B이므로 그 최솟값은

$$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=\frac{49}{13}-1=\frac{36}{13}$$

(i), (ii)에서 점 P와 직선 $5x-12y+15=0$ 사이의 거리 d는

$$\frac{36}{13}\le d\le\frac{62}{13}$$

즉, 정수 d는 3, 4이고 $d=3$인 점이 2개, $d=4$인 점이 2개 존재한다.

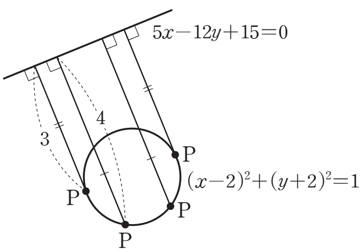
따라서 조건을 만족시키는 점 P의 개수는

$2+2=4$

답 4

보충 설명

조건을 만족시키는 점 P는 오른쪽 그림과 같이 4개 존재한다.



25

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-3ax+7y+3 -\{x^2+y^2+(2b-5)x+(a+b)y+4\}=0$$

$\therefore\ (-3a-2b+5)x+(7-a-b)y-1=0$

이 직선이 직선 $5x-y+2=0$과 일치해야 하므로

$\dfrac{-3a-2b+5}{5}=\dfrac{7-a-b}{-1}=\dfrac{-1}{2}$에서

$-3a-2b+5=-\dfrac{5}{2},\ 7-a-b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 6a+4b=15,\ 2a+2b=13$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{11}{2},\ b=12$

$\therefore\ ab=\left(-\dfrac{11}{2}\right)\times12=-66$

답 -66

26

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x-2y+k-(x^2+y^2+4x+4y)=0$

$\therefore\ -8x-6y+k=0$

이 직선이 점 $(-6,\ 7)$을 지나므로

$6+k=0\qquad\therefore\ k=-6$

답 -6

27

$(x-1)^2+(y-3)^2=10$에서

$x^2+y^2-2x-6y=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-5x+ky-6-(x^2+y^2-2x-6y)=0$

$-3x+(k+6)y-6=0$

$\therefore\ y=\dfrac{3}{k+6}x+\dfrac{6}{k+6}$

이 직선이 직선 $y=-4x+1$에 수직이므로

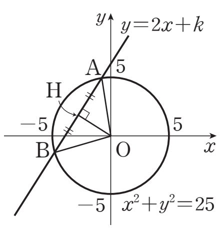
$\dfrac{3}{k+6}\times(-4)=-1$

$k+6=12\qquad\therefore\ k=6$

답 6

28

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면



$\overline{AB}=8$

원의 중심 O에서 직선 $y=2x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=4$

이때 원 $x^2+y^2=25$의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=5$이므로 직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$$
$$=\sqrt{25-16}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH}=\frac{|0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=3$이므로 $|k|=3\sqrt{5}$

$\therefore\ k^2=45$

답 45

29

$x^2+y^2+(3a-2)x+4ay+a=0$을 a에 대하여 정리하면

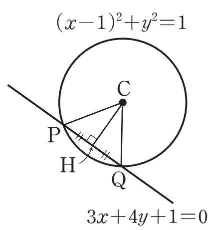
$x^2+y^2-2x+a(3x+4y+1)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x^2+y^2-2x=0$, $3x+4y+1=0$이어야 한다.

즉, 주어진 원이 실수 a의 값에 관계없이 항상 지나는 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2-2x=0$, 즉 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $3x+4y+1=0$의 교점이다.

오른쪽 그림과 같이 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심을 C라 하고 점 C$(1, 0)$에서 직선 $3x+4y+1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|3\times1+4\times0+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}$$

이때 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 반지름의 길이는 $\overline{CP}=1$이므로 직각삼각형 CPH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}$$
$$=\sqrt{1^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

30

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O'의 두 교점을 A, B라 하면 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-2x-8-(x^2+y^2+x-2y-5)=0$

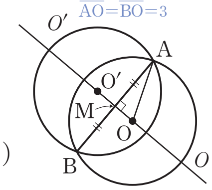
$\therefore\ -3x+2y-3=0$

또한, 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O′이라 하면

$x^2+y^2-2x-8=0$에서 $(x-1)^2+y^2=9$이므로

원 O의 중심 O의 좌표는 $(1, 0)$이고, 반지름의 길이는 3이다.
$\overline{AO}=\overline{BO}=3$

이때 직선 OO′은 선분 AB를 수직이등분하므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면



$\overline{OM}=$(점 O와 직선 AB 사이의 거리)

$$=\frac{|-3\times1+2\times0-3|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

직각삼각형 AOM에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OM}^2}$$
$$=\sqrt{3^2-\left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{81}{13}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

이때 $\overline{AB}=2\overline{AM}$이므로 두 원의 공통현의 길이는

$$k=2\times\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore\ 13k^2=13\times\left(\frac{18}{\sqrt{13}}\right)^2=324$$

답 324

다른 풀이

원 O'을 이용하여 구할 수도 있다.

$x^2+y^2+x-2y-5=0$에서 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$이므로 원 O'의 중심 O′의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이고, 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다. 즉,
$\overline{AO'}=\overline{BO'}=\frac{5}{2}$

$\overline{O'M}=$(점 O′과 직선 AB 사이의 거리)

$$=\frac{\left|-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times1-3\right|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{13}}$$

이므로 직각삼각형 AO′M에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AO'}^2-\overline{O'M}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

이때 $\overline{AB}=2\overline{AM}$이므로 두 원의 공통현의 길이는

$k=2\times\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{18}{\sqrt{13}}$

$\therefore\ 13k^2=13\times\left(\frac{18}{\sqrt{13}}\right)^2=324$

31

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+4kx-10+m(x^2+y^2-10x+6y+2)=0$

$(m\neq-1)$ ……㉠

이라 하면 원 ㉠이 원점을 지나므로

$-10+2m=0 \qquad \therefore\ m=5$

또한, 원 ㉠이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$8k-5-19m=0$

$8k=100\ (\because\ m=5)$

$\therefore\ k=\frac{25}{2}$

$m=5,\ k=\frac{25}{2}$를 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2+50x-10+5(x^2+y^2-10x+6y+2)=0$

$6x^2+6y^2+30y=0$

$\therefore\ x^2+y^2+5y=0$

답 $x^2+y^2+5y=0$

32

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2y-8+k(x^2+y^2-ax-4y+8)=0\ (k\neq-1)$

……㉠

이라 하면 원 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$-5+5k=0 \qquad \therefore\ k=1$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x^2+2y^2-ax-2y=0$

$\therefore\ \left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{a^2+4}{16}$

이 원의 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{a^2+4}{16}=\frac{5}{2},\ a^2=36$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0)$

답 6

33

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이므로 구하는 원의 중심은 공통현의 중점이다.

이때 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통현을 수직이등분하므로 공통현의 중점은 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x-1-(x^2+y^2-2y-9)=0$

$-4x+2y+8=0$

$\therefore\ 2x-y-4=0$ ……㉠

$x^2+y^2-4x-1=0$에서

$(x-2)^2+y^2=5,$

$x^2+y^2-2y-9=0$에서

$x^2+(y-1)^2=10$

이므로 두 원의 중심 $(2, 0)$, $(0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{1-0}{0-2}(x-2),\ y=-\frac{1}{2}x+1$

$\therefore\ x+2y-2=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=0$

즉, 구하는 원의 중심의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로

$a=2,\ b=0$

$\therefore\ a+b=2+0=2$

답 2

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.105~106

07 ③ **08** $1-\sqrt{10}<k<1+\sqrt{10}$ **09** $\frac{5}{2}$

10 22 **11** 52

12 $a<-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 또는 $a>\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **13** -2

14 $\frac{9}{5}$ **15** 4 **16** $\frac{27}{2}$ **17** $3\sqrt{7}$

18 50

07

ㄱ. 원의 방정식 $x^2+y^2-2kx-4ky-2k-1=0$에

$x=-1$, $y=0$을 대입하면

$(-1)^2+0^2-2k\times(-1)-4k\times0-2k-1=0$

즉, k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 주어진 원은 반드시 점 $(-1, 0)$을 지난다. (참)

ㄴ. $x^2+y^2-2kx-4ky-2k-1=0$에서

$(x-k)^2+(y-2k)^2=5k^2+2k+1$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(k, 2k)$이므로 원의 중심은 직선 $y=2x$ 위에 있다. (참)

ㄷ. $x^2+y^2-2kx-4ky-2k-1=0$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-2kx-2k-1=0$

원과 x축의 교점의 x좌표는 이 이차방정식의 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-2k-1)$$
$$=k^2+2k+1=(k+1)^2\ge0$$

즉, 주어진 원은 x축과 접하거나 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

08

$y=3x-k$를 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에 대입하면

$x^2+(3x-k)^2-2x-4(3x-k)+4=0$

$\therefore 10x^2-2(3k+7)x+k^2+4k+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(3k+7)\}^2-10(k^2+4k+4)$$
$$=-k^2+2k+9$$

이때 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-k^2+2k+9>0$

$k^2-2k-9<0$, $(k-1)^2<10$

$-\sqrt{10}<k-1<\sqrt{10}$

$\therefore 1-\sqrt{10}<k<1+\sqrt{10}$

답 $1-\sqrt{10}<k<1+\sqrt{10}$

다른 풀이

$x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$이므로

원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$이고, 반지름의 길이는 1이다.

원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $y=3x-k$, 즉 $3x-y-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3\times1-2-k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|1-k|}{\sqrt{10}}$$

이때 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<1$이어야 하므로

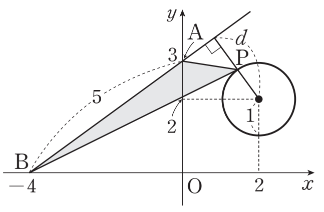
$\frac{|1-k|}{\sqrt{10}}<1$, $|1-k|<\sqrt{10}$

$-\sqrt{10}<k-1<\sqrt{10}$

$\therefore 1-\sqrt{10}<k<1+\sqrt{10}$

09

다음 그림과 같이 삼각형 PAB에서 선분 AB의 길이는 $\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$로 일정하므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.



직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore 3x-4y+12=0$

원의 중심 $(2, 2)$와 직선 AB, 즉 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3\times2-4\times2+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$2-1=1$

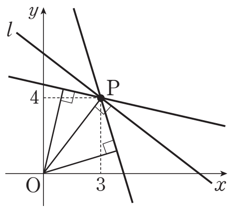
따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times5\times1=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

10

오른쪽 그림과 같이 점 P(3, 4)를 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 직선은 직선 OP에 수직인 직선이다.

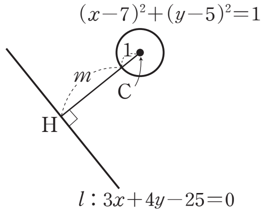


이때 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 점 P(3, 4)를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선 l의 방정식은

$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \qquad \therefore 3x+4y-25=0$

한편, 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-7)^2+(y-5)^2=1$의 중심을 C라 하고 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 C(7, 5)와 직선 l 사이의 거리는



$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|3\times7+4\times5-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$=\frac{16}{5}$

즉, 원 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$m=\overline{\mathrm{CH}}-$(원의 반지름의 길이)

$=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$

$\therefore 10m=10\times\frac{11}{5}=22$

답 22

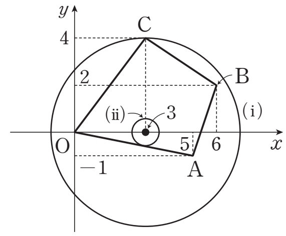
11

$x^2+y^2-6x+10=k$라 하면

$(x-3)^2+y^2=k-1 \qquad \cdots\cdots$㉠

이때 점 P는 사각형 OABC의 둘레 위의 점이므로 (3, 0)이 될 수 없다. 즉, $k-1>0$이므로 도형 ㉠은 중심의 좌표가 (3, 0)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k-1}$인 원이다.

또한, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 최대일 때 k가 최댓값을 갖고, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 최소일 때 k가 최솟값을 갖는다.



위의 그림에서

(i) 도형 ㉠이 점 C(3, 4)를 지날 때,

$16=k-1 \qquad \therefore k=17$

(ii) 도형 ㉠이 원점과 점 A(5, −1)을 지나는 직선에 접할 때,

원점과 점 A(5, −1)을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{5}x$, 즉 $x+5y=0$이므로 원의 중심 (3, 0)과 직선 $x+5y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{3}{\sqrt{26}}$

즉, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 $\frac{3}{\sqrt{26}}$이므로

$\sqrt{k-1}=\frac{3}{\sqrt{26}},\ k-1=\frac{9}{26} \qquad \therefore k=\frac{35}{26}$

(i), (ii)에서 $M=17,\ m=\frac{35}{26}$이므로

$M+26m=17+26\times\frac{35}{26}=52$

답 52

12 본문 p.095 한 걸음 더 참고

원 $x^2+y^2=4$는 중심의 좌표가 (0, 0), 반지름의 길이가 2이다.

또한, 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$은

$(x+a)^2+(y-2a)^2=4$

이므로 중심의 좌표가 $(-a,\ 2a)$, 반지름의 길이가 2이다.

이때 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-a)^2+(2a)^2}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}|a|$

두 원의 반지름의 길이가 2로 같으므로 두 원이 서로 만나지 않는 경우는 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때뿐이다.

따라서 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합보다 커야 하므로

$\sqrt{5}|a|>2+2,\ |a|>\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ a<-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 또는 $a>\frac{4\sqrt{5}}{5}$

답 $a<-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 또는 $a>\frac{4\sqrt{5}}{5}$

13

$x^2+y^2=30$에서 $x^2+y^2-30=0$

$(x-2a)^2+y^2=14$에서

$x^2+y^2-4ax+4a^2-14=0$

이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-30-(x^2+y^2-4ax+4a^2-14)=0$

$4ax-4a^2-16=0$

$\therefore\ ax-a^2-4=0$

이 직선이 점 $(-4, 3)$을 지나므로

$-4a-a^2-4=0$

$a^2+4a+4=0,\ (a+2)^2=0$

$\therefore\ a=-2$

답 -2

14

점 P의 좌표를 (x, y)라 하자.

조건 (가)에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$, 즉 $2\overline{BP}=\overline{AP}$이므로

$4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

즉, $4\{x^2+(y-3)^2\}=(x-3)^2+y^2$에서

$4(x^2+y^2-6y+9)=x^2-6x+9+y^2$

$\therefore\ x^2+y^2+2x-8y+9=0$ ······㉠

조건 (나)에서 두 선분 AP, BP가 서로 수직이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이때 이 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

즉, 이 원의 방정식은

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\therefore\ x^2+y^2-3x-3y=0$ ······㉡

조건 (가), (나)를 만족시키는 점 P는 두 원 ㉠, ㉡의 두 교점이므로 이 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x-8y+9-(x^2+y^2-3x-3y)=0$

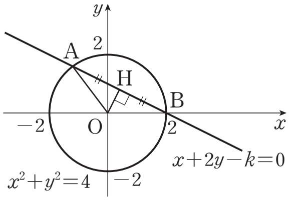
$\therefore\ 5x-5y+9=0$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{9}{5}$이다.

답 $\frac{9}{5}$

15

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면



$\overline{AB}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

원의 중심 O에서 직선 $x+2y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 원 $x^2+y^2=4$의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$이므로 직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ······㉠

한편, 원의 중심 $O(0, 0)$과 직선 $x+2y-k=0$ 사이의 거리는

$\overline{OH}=\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이므로

$|k|=2$ $\quad\therefore\ k^2=4$

답 4

16

원과 직선의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 직선 $x+y-2=0$ 위의 점이므로

$a+b-2=0$ $\quad\therefore\ a+b=2$ ······㉠

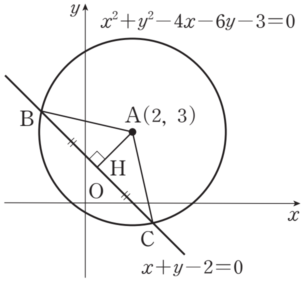
한편, $x^2+y^2-4x-6y-3=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=16$

이 원의 중심을 A라 하면 A$(2, 3)$이고, 반지름의 길이는 4이다.

또한, 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 B, C라 하면 직선 BC의 방정식은 $x+y-2=0$이고, 원의 중심 A에서 직선 $x+y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH}=\frac{|2+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$



직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{23}{2}}=\frac{\sqrt{46}}{2}$$

즉, $r=\frac{\sqrt{46}}{2}$이므로

$$a+b+r^2=2+\left(\frac{\sqrt{46}}{2}\right)^2 \ (\because ㉠)$$
$$=\frac{27}{2}$$

답 $\frac{27}{2}$

17

점 C의 좌표는 $(3, 3)$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$x^2+y^2=16$에서 $x^2+y^2-16=0$

$(x-3)^2+(y-3)^2=4$에서

$x^2+y^2-6x-6y+14=0$

이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-6x-6y+14)=0$

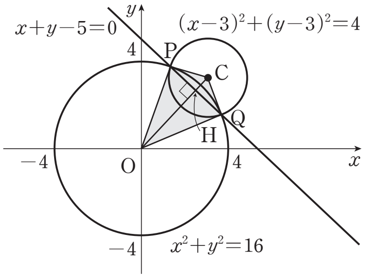
$6x+6y-30=0 \qquad \therefore x+y-5=0$

두 원의 중심을 이은 선분과 공통현은 수직으로 만나므로

$\overline{PQ}\perp\overline{OC}$

다음 그림과 같이 $\overline{OC}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 H라 하면 $\overline{OH}$는 점 O와 직선 PQ, 즉 $x+y-5=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{OH}=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$



직각삼각형 POH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 사각형 POQC의 넓이는

$$2\times\triangle OCP=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{PH}\right)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$
$$=3\sqrt{7}$$

답 $3\sqrt{7}$

18

$(x+4)^2+(y-2)^2=k$에서

$x^2+y^2+8x-4y+20-k=0$

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-6y+9+m(x^2+y^2+8x-4y+20-k)=0$

(단, $m\neq-1$)

$\therefore (m+1)x^2+(m+1)y^2+(8m+4)x-(4m+6)y$
$-km+20m+9=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

원 ㉠이 x축, y축에 동시에 접하려면

㉠에서 $|(x$의 계수$)|=|(y$의 계수$)|$이어야 한다.

즉, $8m+4=-4m-6$ 또는 $8m+4=4m+6$에서

$m=-\frac{5}{6}$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

(ⅰ) $m=-\frac{5}{6}$일 때,

㉠에서

$\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}y^2-\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}y+\frac{5}{6}k-\frac{23}{3}=0$

$x^2+y^2-16x-16y+5k-46=0$

$\therefore\ (x-8)^2+(y-8)^2=174-5k$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$174-5k=64\quad \therefore\ k=22$ (반지름의 길이)=|(중심의 x좌표)| =|(중심의 y좌표)|

그런데 $k=22$일 때 주어진 두 원은 만나지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다. (*)

(ⅱ) $m=\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서

$\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+8x-8y-\frac{1}{2}k+19=0$

$x^2+y^2+\frac{16}{3}x-\frac{16}{3}y-\frac{1}{3}k+\frac{38}{3}=0$

$\therefore\ \left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{14}{9}+\frac{1}{3}k$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$\frac{14}{9}+\frac{1}{3}k=\frac{64}{9}$, $3k=50$ (반지름의 길이)=|(중심의 x좌표)| =|(중심의 y좌표)|

$\therefore\ k=\frac{50}{3}$ (*)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=\frac{50}{3}$이므로

$3k=3\times\frac{50}{3}=50$

답 50

보충 설명 본문 p.095 한 걸음 더 참고

(*)에서 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$, 즉

$(x+2)^2+(y-3)^2=4$이므로 주어진 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-2, 3)$, $(-4, 2)$이고, 반지름의 길이는 각각 2, $\sqrt{k}$이다.

이때 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-4+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5}$이므로

$k=22$일 때, $\underbrace{\sqrt{5}<\sqrt{22}-2}_{d<r-r'}$

$k=\frac{50}{3}$일 때, $\underbrace{\sqrt{\frac{50}{3}}-2<\sqrt{5}<\sqrt{\frac{50}{3}}+2}_{r-r'<d<r+r'}$

따라서 $k=22$일 때 한 원이 다른 원의 내부에 있고, $k=\frac{50}{3}$일 때 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다.

3 원의 접선의 방정식

기본+필수연습 본문 pp.111~116

34 $y=-x\pm3\sqrt{2}$		**35** $x+\sqrt{5}y=12$	
36 $y=-2x-1\pm3\sqrt{5}$		**37** $40\sqrt{3}$	**38** 5
39 4	**40** 7	**41** $4\sqrt{2}$	**42** 9
43 $8\sqrt{5}$	**44** $\overline{PQ}=\sqrt{51}$, $\overline{RS}=3\sqrt{3}$		**45** 5

34

원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이고, 접선의 기울기가 -1이므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-x\pm3\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore\ y=-x\pm3\sqrt{2}$

답 $y=-x\pm3\sqrt{2}$

다른 풀이

접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식을

$y=-x+k$ (k는 상수)라 하자.

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$, $|k|=3\sqrt{2}$

$\therefore\ k=\pm3\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-x\pm3\sqrt{2}$

35

원 $x^2+y^2=24$ 위의 점 $(2, 2\sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은

$2\times x+2\sqrt{5}\times y=24$

$\therefore\ x+\sqrt{5}y=12$

답 $x+\sqrt{5}y=12$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$과 접점 $(2, 2\sqrt{5})$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2\sqrt{5}-0}{2-0}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 접선의 기울기는

$-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$이고, 점 $(2, 2\sqrt{5})$를 지나는 접선의 방정식은 $y-2\sqrt{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ← $x+\sqrt{5}y=12$

36

구하는 접선이 직선 $x-2y+4=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$에 수직이므로 접선의 기울기는 -2이다. ← $\frac{1}{2}\times(-2)=-1$

이 접선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라 하면 원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|2\times1+(-3)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3$$

$$\frac{|-1-k|}{\sqrt{5}}=3,\ |k+1|=3\sqrt{5},\ k+1=\pm3\sqrt{5}$$

$\therefore\ k=-1\pm3\sqrt{5}$

$\therefore\ y=-2x-1\pm3\sqrt{5}$

답 $y=-2x-1\pm3\sqrt{5}$

다른 풀이

구하는 접선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라 하고 $(x-1)^2+(y+3)^2=9$에 대입하면

$(x-1)^2+(-2x+k+3)^2=9$

$5x^2-2(2k+7)x+k^2+6k+10=9$

$\therefore\ 5x^2-2(2k+7)x+k^2+6k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+7)\}^2-5(k^2+6k+1)=0$$

$k^2+2k-44=0 \qquad \therefore\ k=-1\pm3\sqrt{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x-1\pm3\sqrt{5}$

37

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°인 직선의 기울기는

$\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 원 $x^2+y^2=15$의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$이므로 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 접선의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\sqrt{15}\times\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm2\sqrt{5}$

이때 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{5}$가 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면

$A(-2\sqrt{15}, 0)$, $B(0, 2\sqrt{5})$

직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{5}$가 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하면

$C(2\sqrt{15}, 0)$, $D(0, -2\sqrt{5})$

$\therefore\ \square$ADCB

$$=\frac{1}{2}\times\{2\sqrt{15}-(-2\sqrt{15})\}\times\{2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})\}$$

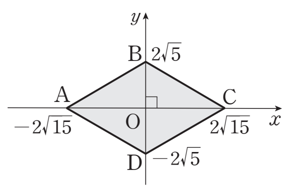
$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{15}\times4\sqrt{5}=40\sqrt{3}$$

답 $40\sqrt{3}$

보충 설명

두 대각선이 서로 직교하는 사각형 ADCB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$



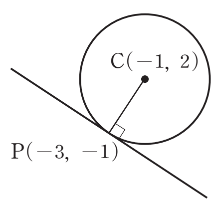
38

$x^2+y^2+2x-4y=8$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

원의 중심을 C라 하면 $C(-1, 2)$이고, 점 C와 접점 $P(-3, -1)$을 지나는 직선 CP의 기울기는

$$\frac{-1-2}{-3-(-1)}=\frac{3}{2}$$



이때 구하는 접선은 직선 CP에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 $P(-3, -1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{2}{3}\{x-(-3)\}$　　$\therefore 2x+3y+9=0$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

답 5

다른 풀이

$x^2+y^2+2x-4y=8$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ 위의 점 $\mathrm{P}(-3,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$(-3+1)\times(x+1)+(-1-2)\times(y-2)=13$

$\therefore 2x+3y+9=0$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a+b=2+3=5$

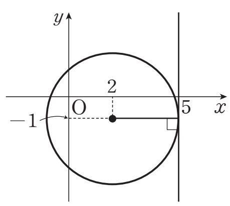
39

$x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$

즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{5-a}$이다.

이때 점 $(5,\ b)$에서의 접선이 y축과 평행하므로 오른쪽 그림에서



$2+\sqrt{5-a}=5$, $-1=b$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로

$ab=(-4)\times(-1)=4$

답 4

40

$x^2+y^2-6x+4y+12=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=1$

접선의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 점 $(1,\ -3)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-(-3)=m(x-1)$　　$\therefore mx-y-m-3=0$

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $mx-y-m-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|3m+2-m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

$|2m-1|=\sqrt{m^2+1}$, $4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0$, $m(3m-4)=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}\ (\because m>0)$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로 $p+q=3+4=7$

답 7

다른 풀이

$x^2+y^2-6x+4y+12=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=1$

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$(x_1-3)(x-3)+(y_1+2)(y+2)=1$　　······㉠

접점 $(x_1,\ y_1)$이 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 위에 있으므로

$(x_1-3)^2+(y_1+2)^2=1$　　······㉡

직선 ㉠이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$-2(x_1-3)-(y_1+2)=1$

$2x_1+y_1-3=0$　　$\therefore y_1=-2x_1+3$　　······㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(x_1-3)^2+(-2x_1+5)^2=1$

$5x_1^2-26x_1+33=0$, $(x_1-3)(5x_1-11)=0$

$\therefore x_1=3$ 또는 $x_1=\frac{11}{5}$

이것을 ㉢에 대입하면

$x_1=3$일 때, $y_1=-3$

$x_1=\frac{11}{5}$일 때, $y_1=-\frac{7}{5}$

즉, ㉠에서 접선의 방정식은

$y=-3$ 또는 $4x-3y-13=0$

따라서 기울기가 양수인 접선은 $4x-3y-13=0$이므로 그 기울기는 $\frac{4}{3}$, 즉 $p=3$, $q=4$

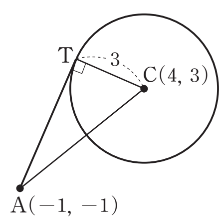
$\therefore p+q=3+4=7$

41

$x^2+y^2-8x-6y+16=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 $\overline{\mathrm{CT}}\perp\overline{\mathrm{AT}}$이므로 $\triangle\mathrm{CTA}$는 $\angle\mathrm{CTA}=90°$인 직각삼각형이다.



이때 C$(4,\ 3)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=\sqrt{41}$

원의 반지름의 길이는 3이므로

$\overline{CT}=3$

따라서 직각삼각형 CTA에서

$\overline{AT}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CT}^2}$

$=\sqrt{41-9}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

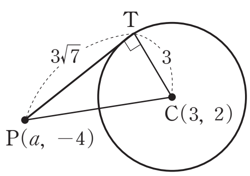
답 $4\sqrt{2}$

42

$x^2+y^2-6x-4y+4=0$에서

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 접점을 T라 하면



$\overline{PT}=3\sqrt{7}$

$\overline{CT}\perp\overline{PT}$이므로 △CTP는

$\angle CTP=90°$인 직각삼각형이다.

이때 C(3, 2)이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{a^2-6a+45}$ ……㉠

원의 반지름의 길이는 3이므로

$\overline{CT}=3$

따라서 직각삼각형 CTP에서

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{CT}^2+\overline{PT}^2}$

$=\sqrt{3^2+(3\sqrt{7})^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2-6a+45}=6\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

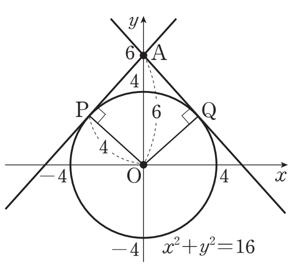
$a^2-6a+45=72,\ a^2-6a-27=0$

$(a+3)(a-9)=0$ $\quad\therefore a=9\ (\because a>0)$

답 9

43

점 A(0, 6)과 원 $x^2+y^2=16$은 오른쪽 그림과 같으므로



$\overline{AO}=6,\ \overline{OP}=4$

이때 △APO는

$\angle APO=90°$인

직각삼각형이므로

$\overline{AP}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

즉, 삼각형 APO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4=4\sqrt{5}$

$\therefore$ □APOQ$=2\times$△APO

$=2\times4\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

답 $8\sqrt{5}$

44

두 원 $C:x^2+(y-2)^2=4,\ C':(x-4)^2+(y+4)^2=9$의 반지름의 길이는 각각 2, 3이고 중심을 각각 C, C′이라 하면

C(0, 2), C′(4, −4)

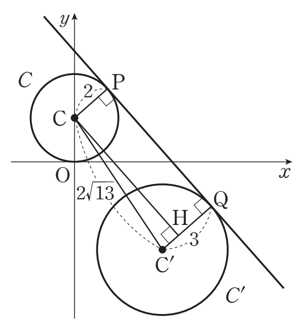
두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(4-0)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}>2+3$

이므로 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

다음 그림과 같이 점 C에서 선분 C′Q에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CP}=\overline{HQ}$이므로

$\overline{C'H}=\overline{C'Q}-\overline{HQ}=3-2=1$



△CC′H는 $\angle C'HC=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'H}^2}$

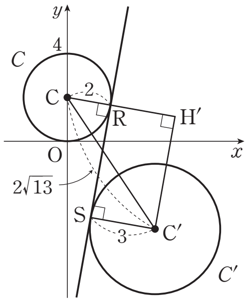
$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-1^2}=\sqrt{51}$

한편, 다음 그림과 같이 점 C′에서 직선 CR에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 $\overline{C'S}=\overline{H'R}$이므로

$\overline{CH'}=\overline{CR}+\overline{H'R}$

$=\overline{CR}+\overline{C'S}$

$=2+3=5$



$\triangle CC'H'$은 $\angle C'H'C=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{RS}=\overline{H'C'}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{CH'}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-5^2}=3\sqrt{3}$

답 $\overline{PQ}=\sqrt{51}$, $\overline{RS}=3\sqrt{3}$

45

중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ ⋯⋯㉠

원 ㉠이 점 $A(2,\ 5)$를 지나므로

$(2-a)^2+(5-b)^2=b^2$

$\therefore\ a^2-4a-10b+29=0$ ⋯⋯㉡

또한, 원 ㉠이 점 $B(4,\ 1)$을 지나므로

$(4-a)^2+(1-b)^2=b^2$

$\therefore\ a^2-8a-2b+17=0$ ⋯⋯㉢

㉢에서 $2b=a^2-8a+17$을 ㉡에 대입하여 정리하면

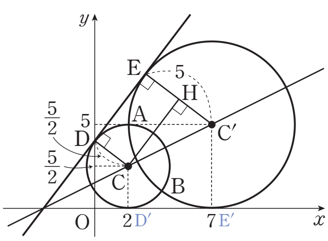
$4a^2-36a+56=0$, $a^2-9a+14=0$

$(a-2)(a-7)=0$ $\therefore\ a=2$ 또는 $a=7$

㉡ 또는 ㉢에서

$a=2$일 때 $b=\frac{5}{2}$, $a=7$일 때 $b=5$

즉, 두 점 A, B에서 만나는 서로 다른 두 원의 중심을 각각 $C\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$, $C'(7,\ 5)$라 하면 각 원과 x축 위에 있지 않은 접선의 접점 D, E는 다음 그림과 같다.



두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(7-2)^2+\left(5-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

점 C에서 선분 EC′에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle CC'H$는 $\angle C'HC=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{DE}=\overline{CH}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'H}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(5-\frac{5}{2}\right)^2}$

$=5$ ← 두 원의 중심 C, C′에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D′, E′이라 하면 $\overline{DE}=\overline{D'E'}=7-2=5$

답 5

STEP 1 개념 마무리

본문 p.117

19 10 **20** $\left(0,\ \frac{2-2\sqrt{2}}{3}\right)$

21 $\frac{1}{3}<a<1$ **22** 4 **23** $\frac{20}{3}$

24 -14

19

구하는 접선은 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

또한, 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$

따라서 두 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=|5-(-5)|=10$

답 10

다른 풀이 1

접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k$ (k는 상수)라 하자.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉

$x+2y-2k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5},\ |-2k|=5$$

$2k=\pm5 \qquad \therefore\ k=\pm\frac{5}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$$

다른 풀이 2

접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k$ (k는 상수)라 하고

$x^2+y^2=5$에 대입하면 $x^2+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=5$

$\therefore\ \frac{5}{4}x^2-kx+k^2-5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times\frac{5}{4}\times(k^2-5)=0$

$-4k^2+25=0,\ k^2=\frac{25}{4}$

$\therefore\ k=\pm\frac{5}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{5}{2}$$

20

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $A(-1,\ 1)$에서의 접선 l의 방정식은

$-x+y=2 \qquad \therefore\ l: x-y+2=0 \qquad \cdots\cdots㉠$

같은 방법으로 원 위의 점 $B(1,\ 1)$, $C(0,\ -\sqrt{2})$에서의 접선 m, n의 방정식은 각각

$x+y=2 \qquad \therefore\ m: x+y-2=0 \qquad \cdots\cdots㉡$

$0\times x-\sqrt{2}y=2 \qquad \therefore\ n: y+\sqrt{2}=0$

(가)

두 직선 l, m의 교점이 P이므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=2 \qquad \therefore\ P(0,\ 2)$

같은 방법으로 두 직선 m, n의 교점 Q, 두 직선 n, l의 교점 R의 좌표를 각각 구하면

$Q(2+\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $R(-2-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

(나)

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{3},\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\therefore\ \left(0,\ \frac{2-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

(다)

답 $\left(0,\ \frac{2-2\sqrt{2}}{3}\right)$

단계	채점 기준	배점
(가)	세 접선 l, m, n의 방정식을 각각 구한 경우	40%
(나)	세 점 P, Q, R의 좌표를 각각 구한 경우	40%
(다)	삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구한 경우	20%

21

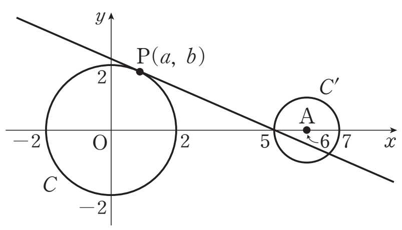
원 C의 중심이 $O(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 2이므로

$C: x^2+y^2=4$

원 C'의 중심이 $A(6,\ 0)$, 반지름의 길이가 1이므로

$C': (x-6)^2+y^2=1$

원 C 위의 점 $P(a,\ b)$에 대하여 $b>0$일 때, 점 P에서의 접선이 원 C'과 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



원 $C: x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=4 \qquad \therefore\ ax+by-4=0 \qquad \cdots\cdots㉠$

점 $P(a,\ b)$는 원 $C: x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=4 \qquad \cdots\cdots㉡$

직선 ㉠과 원 $C': (x-6)^2+y^2=1$이 두 점에서 만나려면 원 C'의 중심 $A(6,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원 C'의 반지름의 길이보다 작아야 한다.

즉, $\frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$에서

$\frac{|6a-4|}{2}<1$ ($\because$ ㉡)

$|6a-4|<2,\ -2<6a-4<2$

$2<6a<6 \qquad \therefore\ \frac{1}{3}<a<1$

답 $\frac{1}{3}<a<1$

22

접선의 기울기를 m이라 하면 점 $(0,\ 2)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-2=mx$, 즉 $mx-y+2=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같으므로

$\dfrac{|0-0+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$2=\sqrt{2m^2+2}$, $2m^2+2=4$

$m^2=1 \qquad \therefore\ m=\pm1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x-y+2=0$ 또는 $-x-y+2=0$

직선 $x-y+2=0$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$x-0+2=0 \qquad \therefore\ x=-2$

직선 $-x-y+2=0$이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$-x-0+2=0 \qquad \therefore\ x=2$

따라서 $k=-2$ 또는 $k=2$이므로

$k^2=4$

답 4

23

직선 $x+ay+b=0$이 원 $x^2+y^2=16$의 접선이므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+ay+b=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같다.

즉, $\dfrac{|0+0+b|}{\sqrt{1^2+a^2}}=4$에서

$|b|=4\sqrt{1+a^2}$

이 식의 양변을 제곱하면

$b^2=16a^2+16$ ……㉠

또한, 직선 $x+ay+b=0$이 점 $(-4,\ -1)$을 지나므로

$-4-a+b=0 \qquad \therefore\ b=a+4$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a+4)^2=16a^2+16$

$15a^2-8a=0$, $a(15a-8)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\dfrac{8}{15}$

$a=0$이면 ㉡에서 $b=4$이므로

접선의 방정식은 $x+4=0$, 즉 $x=-4$이다.

이때 원 $x^2+y^2=16$과 직선 $x=-4$의 접점의 좌표는 $(-4,\ 0)$이므로 제3사분면 위의 점이 아니다.

따라서 $a=\dfrac{8}{15}$이므로 $b=\dfrac{68}{15}$ $(\because$ ㉡$)$ $\leftarrow \mathrm{P}\left(-\frac{60}{17},\ -\frac{32}{17}\right)$

$\therefore\ 4a+b=4\times\dfrac{8}{15}+\dfrac{68}{15}=\dfrac{20}{3}$

답 $\dfrac{20}{3}$

24

선분 AB는 두 원의 공통현이므로 두 원의 중심을 지나는 직선은 선분 AB를 수직이등분한다.

이때 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{11-7}{7-3}=1$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+7}{2},\ \dfrac{7+11}{2}\right)$, 즉 $(5,\ 9)$

즉, 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1이고, 점 $(5,\ 9)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y-9=-(x-5) \qquad \therefore\ x+y-14=0$ ……㉠

또한, 서로 다른 두 원이 모두 y축에 접하므로 두 공통외접선 중 하나는 y축이다. 즉, $x=0$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 $y=14$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(0,\ 14)$이므로 $a=0$, $b=14$

$\therefore\ a-b=0-14=-14$

답 -14

STEP 2 개념 마무리

본문 p.118

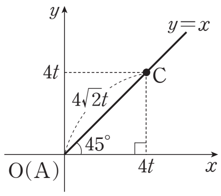
1 10시간 **2** 10 **3** 24π **4** $4\sqrt{2}$
5 $\dfrac{64}{5}$ **6** -4

1

A 지점을 원점, 서쪽에서 동쪽으로의 방향을 x축의 양의 방향, 남쪽에서 북쪽으로의 방향을 y축의 양의 방향, 1 km를

1로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 ㈎에서 태풍의 중심은 A 지점으로부터 북동쪽 방향을 향해 움직이므로 직선 $y=x$ 위에 있다.



또한, 태풍이 시속 $4\sqrt{2}$ km로 이동하므로 발생한 지 t시간 후의 태풍의 중심을 C라 하면 C$(4t,\ 4t)$이다.

조건 ㈏에서 완전한 원 모양의 태풍의 반지름의 길이는 시속 4 km로 증가하므로 발생한 지 t시간 후의 태풍의 반지름의 길이는 $4t$ km이다.

즉, 태풍이 발생한 지 t시간 후의 태풍의 가장자리를 나타내는 원의 방정식은

$(x-4t)^2+(y-4t)^2=(4t)^2$ ······㉠

한편, B 지점을 좌표평면 위에 나타내면 점 $(40,\ 80)$이고 B 지점이 태풍의 영향권에 처음으로 들어오는 순간은 점 $(40,\ 80)$이 원 ㉠ 위에 있을 때이다.

$x=40,\ y=80$을 ㉠에 대입하면

$(40-4t)^2+(80-4t)^2=(4t)^2$

$t^2-60t+500=0,\ (t-10)(t-50)=0$

$\therefore\ t=10$ 또는 $t=50$

따라서 태풍이 발생한 시각으로부터 B 지점이 태풍의 영향권에 처음으로 들어오는 데까지 10시간이 걸린다.

답 10시간

2

세 점 A$(1,\ 3)$, B$(2,\ 6)$, C$(4,\ 2)$를 지나는 원의 중심을 Q$(a,\ b)$라 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}=\overline{CQ}=$(원의 반지름의 길이)

이때 $\overline{AQ}^2=(a-1)^2+(b-3)^2$,

$\overline{BQ}^2=(a-2)^2+(b-6)^2$,

$\overline{CQ}^2=(a-4)^2+(b-2)^2$에서

$\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b-6)^2$

$\therefore\ a+3b=15$ ······㉠

$\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-6)^2=(a-4)^2+(b-2)^2$

$\therefore\ a-2b=-5$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=4$

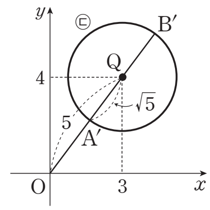
즉, 원의 중심이 Q$(3,\ 4)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{AQ}=\sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원은

$(x-3)^2+(y-4)^2=5$ ······㉢

오른쪽 그림과 같이 원 ㉢ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리는 점 P의 위치가 각각 점 A′일 때 최솟값 $5-\sqrt{5}$, 점 B′일 때 최댓값 $5+\sqrt{5}$를 갖는다.



$\therefore\ 5-\sqrt{5}\le\overline{OP}\le5+\sqrt{5}$

이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로 정수인 $\overline{OP}$의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 6, 7의 5개이고, 원 ㉢은 지름 A′B′에 대하여 대칭이므로 원 위의 점 중 이를 만족시키는 점 P의 개수는

$2\times5=10$

답 10

3

구하는 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 조건 ㈏에서 이 원은 x축, y축에 동시에 접하므로 원의 중심의 위치에 따라 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이고, 조건 ㈎에서 점 $(r,\ r)$은 곡선 $y=x^2-3x-1$ 위의 점이므로

$r=r^2-3r-1,\ r^2-4r-1=0$

$\therefore\ r=2+\sqrt{5}\ (\because\ r>0)$

(ii) 원의 중심이 제2사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이고, 조건 ㈎에서 점 $(-r,\ r)$은 곡선 $y=x^2-3x-1$ 위의 점이므로

$r=r^2+3r-1,\ r^2+2r-1=0$

$\therefore\ r=-1+\sqrt{2}\ (\because\ r>0)$

(iii) 원의 중심이 제3사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(-r,\ -r)$이고, 조건 ㈎에서 점 $(-r,\ -r)$은 곡선 $y=x^2-3x-1$ 위의 점이므로

$-r=r^2+3r-1,\ r^2+4r-1=0$

$\therefore\ r=-2+\sqrt{5}\ (\because\ r>0)$

(iv) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$이고, 조건 (가)에서

점 $(r, -r)$은 곡선 $y=x^2-3x-1$ 위의 점이므로

$-r=r^2-3r-1$, $r^2-2r-1=0$

$\therefore r=1+\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

(i)~(iv)에서 모든 원의 넓이의 합은

$\pi(2+\sqrt{5})^2+\pi(-1+\sqrt{2})^2+\pi(-2+\sqrt{5})^2+\pi(1+\sqrt{2})^2$

$=\{(9+4\sqrt{5})+(3-2\sqrt{2})+(9-4\sqrt{5})+(3+2\sqrt{2})\}\pi$

$=24\pi$

답 24π

4

주어진 원의 중심의 좌표를 (a, b), 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

이때 이 원이

점 A$(0, 2)$를 지나므로

$a^2+(2-b)^2=r^2$ ······㉠

점 B$(4, -2)$도 지나므로

$(4-a)^2+(-2-b)^2=r^2$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+(2-b)^2=(4-a)^2+(-2-b)^2$

$-4b+4=-8a+4b+20$

$8a-8b=16$, $a-b=2$

$\therefore b=a-2$ ······㉢

한편, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에서 $y=0$을 대입하면

$(x-a)^2+b^2=r^2$이므로

$x^2-2ax+a^2+b^2-r^2=0$

이때 두 점 A, B를 지나는 원이 x축과 만나는 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식

$x^2-2ax+a^2+b^2-r^2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2+b^2-r^2$

$\therefore \overline{PQ}=|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{4a^2-4(a^2+b^2-r^2)}$

$=2\sqrt{r^2-b^2}=2\sqrt{a^2-4b+4}$ ($\because$ ㉠)

$=2\sqrt{a^2-4(a-2)+4}$ ($\because$ ㉢)

$=2\sqrt{(a-2)^2+8}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

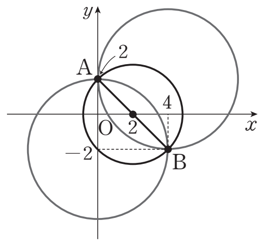
답 $4\sqrt{2}$

다른 풀이

두 점 A$(0, 2)$, B$(4, -2)$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right)$, 즉 $(2, 0)$

즉, 두 점 A, B는 x축 위의 점 $(2, 0)$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 x축에 의해 생기는 현의 길이가 가장 짧은 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이므로



$\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$

5

점 A$(2, 6)$에서 원 $x^2+y^2=8$에 접선을 그었을 때의 접점의 좌표를 (a, b)라 하면 접점은 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=8$ ······㉠

또한, 접선의 방정식은 $ax+by=8$이고, 이 직선이 점 A$(2, 6)$을 지나므로

$2a+6b=8$, $a+3b=4$

$\therefore a=4-3b$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(4-3b)^2+b^2=8$, $10b^2-24b+8=0$

$5b^2-12b+4=0$, $(b-2)(5b-2)=0$

$\therefore b=\frac{2}{5}$ 또는 $b=2$

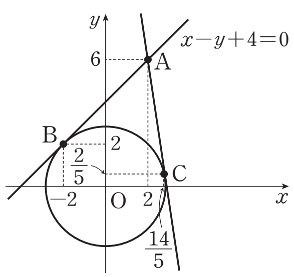
㉡에서 $b=\frac{2}{5}$일 때 $a=\frac{14}{5}$, $b=2$일 때 $a=-2$이므로

B$(-2, 2)$, C$\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$라 하자.

두 점 A$(2, 6)$, B$(-2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-6=\frac{2-6}{-2-2}(x-2)$

$\therefore x-y+4=0$



점 C$\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$와 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{14}{5}-\frac{2}{5}+4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{32}{5\sqrt{2}}$$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{32}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2+2)^2+(6-2)^2}\times\frac{32}{5\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{32}{5\sqrt{2}}=\frac{64}{5}$$

답 $\frac{64}{5}$

6

$x^2+y^2-4x+8y+16=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=4$ ……㉠

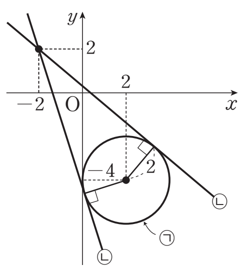
원 ㉠의 중심의 좌표는 $(2,\ -4)$이고 반지름의 길이는 2이다.

$\frac{y-2}{x+2}=k$ (k는 상수)라 하면

$y-2=k(x+2)$ $\quad\therefore\ y=k(x+2)+2$ ……㉡

즉, 직선 ㉡은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 2)$를 지나고 원 위의 한 점을 지나는 직선이다.

이때 k의 값은 직선 ㉡의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉡이 원 ㉠에 접할 때 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.



직선 ㉡이 원 ㉠에 접할 때 원 ㉠의 중심 $(2,\ -4)$와 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$kx-y+2k+2=0$

$$\frac{|2k+4+2k+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|4k+6|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

$|4k+6|=2\sqrt{k^2+1}$, $|2k+3|=\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3k^2+12k+8=0$ ……㉢

이때 직선 ㉡의 기울기 k의 최댓값 M과 최솟값 m의 합은 이차방정식 ㉢의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$M+m=-\frac{12}{3}=-4$$

답 -4

04. 도형의 이동

1 평행이동

기본 + 필수연습 본문 pp.122~125

01 (1) $(-3,\ 1)$ (2) $(-6,\ 14)$
02 (1) $4x-9y+50=0$ (2) $y=x^2-6x-6$
03 (1) $(-8,\ 5)$ (2) $(-4,\ 1)$ **04** 10
05 4 **06** 4 **07** 1 **08** -8
09 (1) 6 (2) 10 **10** 1

01

(1) 점 $(-10,\ 5)$를 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-10+7,\ 5-4)$, 즉 $(-3,\ 1)$

(2) 평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x-2,\ y+6)$에 의하여 점 $(-4,\ 8)$이 옮겨지는 점의 좌표는
$(-4-2,\ 8+6)$, 즉 $(-6,\ 14)$

답 (1) $(-3,\ 1)$ (2) $(-6,\ 14)$

02

(1) 직선 $4x-9y-3=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$4(x+2)-9(y-5)-3=0$
$\therefore\ 4x-9y+50=0$

(2) 평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x+1,\ y-4)$는 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하는 것이므로 구하는 포물선의 방정식은
$y+4=(x-1)^2-4(x-1)-7$
$\therefore\ y=x^2-6x-6$

답 (1) $4x-9y+50=0$ (2) $y=x^2-6x-6$

다른 풀이

(2) $y=x^2-4x-7=(x-2)^2-11$이므로 이 포물선을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y+4=\{(x-1)-2\}^2-11$
$\quad=(x-3)^2-11=x^2-6x-2$
$\therefore\ y=x^2-6x-6$

03

(1) 점 $(-2, 6)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(10, -3)$이라 하면

$-2+a=10$, $6+b=-3$ $\quad\therefore a=12$, $b=-9$

즉, 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 12만큼, y축의 방향으로 -9만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 (x, y)가 옮겨지는 점의 좌표는

$(x+12, y-9)$

이 점이 점 $(4, -4)$와 일치하므로

$x+12=4$, $y-9=-4$

$\therefore x=-8$, $y=5$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-8, 5)$이다.

(2) 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-3, y+4)$는 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(x, y)$가 옮겨지는 점의 좌표는

$(x-3, y+4)$

이 점이 점 $(-7, 5)$와 일치하므로

$x-3=-7$, $y+4=5$

$\therefore x=-4$, $y=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(-4, 1)$이다.

답 (1) $(-8, 5)$ (2) $(-4, 1)$

다른 풀이

(1) 구하는 점은 점 $(10, -3)$을 점 $(-2, 6)$으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(4, -4)$가 옮겨지는 점이다.

점 $(10, -3)$을 점 $(-2, 6)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -12만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하는 것이므로 구하는 점의 좌표는

$(4-12, -4+9)$, 즉 $(-8, 5)$

04

점 $(a, 3)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $b-1$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-3, 3+(b-1))$, 즉 $(a-3, b+2)$

이 점이 점 $(3, 6)$과 일치하므로

$a-3=3$, $b+2=6$

$\therefore a=6$, $b=4$

$\therefore a+b=6+4=10$

답 10

05

점 $(1, -2)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $3p$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(1-p, -2+3p)$

이 점이 직선 $y=-2x+4$ 위에 있으므로

$-2+3p=-2(1-p)+4$

$-2+3p=2p+2$

$\therefore p=4$

답 4

06

점 $(2, -1)$을 점 $(3, -4)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $3x+ay+b=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$3(x-1)+a(y+3)+b=0$

$\therefore 3x+ay+3a+b-3=0$

이 직선이 직선 $3x+2y+5=0$과 일치하므로

$a=2$, $3a+b-3=5$

$\therefore a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=2+2=4$

답 4

07

직선 $y=kx+4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=k(x-2)+4$

$\therefore y=kx-2k+1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 원 $x^2-8x+y^2-6y+24=0$, 즉 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$의 중심의 좌표는 $(4, 3)$이고, 직선 ㉠이 이 원의 중심을 지나므로

$3=4k-2k+1$, $2k=2$

$\therefore k=1$

답 1

08

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-4, y+6)$은 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하는 것이다.
이 평행이동에 의하여 직선 $4x+2y+k=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은
$4(x+4)+2(y-6)+k=0$
$\therefore 4x+2y+k+4=0$ ……㉠
직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=20$과 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$와 같다.
즉, $\dfrac{|0+0+k+4|}{\sqrt{4^2+2^2}}=2\sqrt{5}$에서 $\dfrac{|k+4|}{2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$
$|k+4|=20$, $k+4=\pm 20$
$\therefore k=-24$ 또는 $k=16$
따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 k의 값의 합은
$-24+16=-8$

답 -8

09

(1) $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=8$
이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x-a)+1\}^2+\{(y-b)-2\}^2=8$
$\therefore (x-a+1)^2+(y-b-2)^2=8$
이 원이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=c$와 일치하므로
$-a+1=-3$, $-b-2=4$, $8=c$
따라서 $a=4$, $b=-6$, $c=8$이므로
$a+b+c=4+(-6)+8=6$

(2) 포물선 $y=-2x^2+4x-7$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-b=-2(x-a)^2+4(x-a)-7$
$\therefore y=-2x^2+(4a+4)x-2a^2-4a+b-7$
이 포물선이 포물선 $y=-2x^2-4x+5$와 일치하므로
$4a+4=-4$, $-2a^2-4a+b-7=5$
따라서 $a=-2$, $b=12$이므로
$a+b=-2+12=10$

답 (1) 6 (2) 10

다른 풀이

(1) 원 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$, 즉 $(x+1)^2+(y-2)^2=8$의 중심의 좌표는 $(-1, 2)$이고 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=c$의 중심의 좌표는 $(3, -4)$이다.
즉, 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-1, 2)$가 점 $(3, -4)$로 옮겨졌으므로 $a=4$, $b=-6$
또한, 원은 평행이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $c=8$
$\therefore a+b+c=4+(-6)+8=6$

(2) $y=-2x^2+4x-7=-2(x-1)^2-5$
이므로 포물선 $y=-2x^2+4x-7$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -5)$이고
$y=-2x^2-4x+5=-2(x+1)^2+7$
이므로 포물선 $y=-2x^2-4x+5$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 7)$이다.
즉, 주어진 평행이동에 의하여 점 $(1, -5)$가 점 $(-1, 7)$로 옮겨졌으므로 $a=-2$, $b=12$
$\therefore a+b=-2+12=10$

10

$x^2+y^2-8x+10y+37=0$에서
$(x-4)^2+(y+5)^2=4$
원 $(x-4)^2+(y+5)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
$\{(x-a)-4\}^2+\{(y-b)+5\}^2=4$
$\therefore \{x-(a+4)\}^2+\{y-(b-5)\}^2=4$
이 원의 중심의 좌표는 $(a+4, b-5)$이고 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로
$a+4<0$, $b-5>0$
$\therefore a<-4$, $b>5$ ……㉠
또한, 평행이동한 원이 x축, y축에 동시에 접하였으므로 원의 중심의 x좌표, y좌표의 절댓값과 원의 반지름의 길이는 같다.
즉, $|a+4|=|b-5|=2$에서
$-(a+4)=b-5=2$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a=-6$, $b=7$
$\therefore a+b=-6+7=1$

답 1

STEP 1 개념 마무리

본문 p.126

01 $(10,\ -2)$ **02** 6 **03** 16
04 1 **05** -2 **06** $\frac{3}{2}$

01

점 $A(-3,\ 2a-1)$을 점 $A'(2,\ 7)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 $-2a+8$만큼 평행이동하는 것이고, 점 $B(b,\ 5)$를 점 $B'(5,\ 3)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 $-b+5$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.
두 평행이동이 일치하므로
$5=-b+5,\ -2a+8=-2 \qquad \therefore a=5,\ b=0$
따라서 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이므로 점 $(5,\ 0)$이 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는
$(5+5,\ 0-2)$, 즉 $(10,\ -2)$

답 $(10,\ -2)$

02

점 $A(6,\ -2)$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점 B는
$B(6+6,\ -2+a)$, 즉 $B(12,\ -2+a)$
$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{OB}$에서 $2\overline{OA}=\overline{OB}$이므로
$2\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{12^2+(-2+a)^2}$
양변을 제곱하면
$4\times\{6^2+(-2)^2\}=12^2+(-2+a)^2$
$160=144+4-4a+a^2$
$a^2-4a-12=0$
$(a+2)(a-6)=0$
$\therefore a=6\ (\because a>0)$

답 6

03

직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y+1=a(x-2)+b \qquad \therefore y=ax-2a+b-1$
이 직선과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 서로 수직이므로
$a\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ ← 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.
$\therefore a=2$
또한, 직선 $y=2x+b-5$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 y축 위의 점에서 만나므로 두 직선의 y절편이 같아야 한다.
즉, $b-5=3$에서 $b=8$
$\therefore ab=2\times8=16$

답 16

04

$x^2+y^2+2x+4y-4=0$에서
$(x+1)^2+(y+2)^2=9 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2+8x+2y+8=0$에서
$(x+4)^2+(y+1)^2=9 \quad \cdots\cdots$ ㉡
원 ㉠의 중심 $(-1,\ -2)$를 원 ㉡의 중심 $(-4,\ -1)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.
즉, 이 평행이동에 의하여 직선 $l : 3x+4y-1=0$이 옮겨지는 직선 l'의 방정식은
$3(x+3)+4(y-1)-1=0$
$\therefore l' : 3x+4y+4=0$
평행한 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리는 직선 l' 위의 한 점 $(0,\ -1)$과 직선 l 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|3\times0+4\times(-1)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

답 1

05

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$(x-3)^2+(y-2)^2=4$

이 원에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을

$y=x+k$ (k는 상수)라 하자.

원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|3-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

$|k+1|=2\sqrt{2} \qquad \therefore\ k=-1\pm2\sqrt{2}$

$\therefore\ x-y-1+2\sqrt{2}=0$ 또는 $x-y-1-2\sqrt{2}=0$

따라서 $a=-1+2\sqrt{2}$, $b=-1-2\sqrt{2}$ 또는 $a=-1-2\sqrt{2}$, $b=-1+2\sqrt{2}$이므로

$a+b=-2$

답 -2

다른 풀이

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 1인 두 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 평행이동한 원에 접하는 두 직선 $x-y+a=0$, $x-y+b=0$과 일치한다.

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=1\times x\pm\underbrace{\sqrt{4}}_{\text{반지름의 길이}}\times\sqrt{1^2+1}$ ← 본문 p.107 개념08 참고

$\therefore\ y=x+2\sqrt{2}$, $y=x-2\sqrt{2}$

이 두 직선을 각각 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=(x-3)+2\sqrt{2}$, $y-2=(x-3)-2\sqrt{2}$

$\therefore\ y=x-1+2\sqrt{2}$, $y=x-1-2\sqrt{2}$

따라서 $a=-1+2\sqrt{2}$, $b=-1-2\sqrt{2}$ 또는 $a=-1-2\sqrt{2}$, $b=-1+2\sqrt{2}$이므로

$a+b=-2$

06

$f(x)=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$

이므로 이차함수 $y=2(x-2)^2-3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하면

$y-2a=2\{(x-a)-2\}^2-3$

$\therefore\ y=2(x-a-2)^2+2a-3$

즉, 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a+2,\ 2a-3)$이고, 이 그래프가 x축에 접하려면 꼭짓점의 y좌표가 0이어야 하므로

$2a-3=0 \qquad \therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동하면

$y-2a=2(x-a)^2-8(x-a)+5$

$\therefore\ y=2x^2-4(a+2)x+2a^2+10a+5$

이 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 x에 대한 이차방정식 $2x^2-4(a+2)x+2a^2+10a+5=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4}=4(a+2)^2-2(2a^2+10a+5)=0$$

$-4a+6=0$, $4a=6$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

2 대칭이동

기본 + 필수연습

본문 pp.131~139

11 (1) $(-10,\ -5)$ (2) $(10,\ 5)$ (3) $(10,\ -5)$ (4) $(-5,\ 10)$

12 (1) $x^2+y^2+4x-2y-6=0$
(2) $x^2+y^2-4x+2y-6=0$
(3) $x^2+y^2-4x-2y-6=0$
(4) $x^2+y^2-2x-4y-6=0$

13 $y=x+12$

14 $x-2y+2=0$

15 (1) -2 (2) 5, 9

16 -6

17 (1) 3 (2) 2

18 80

19 $6x-2y+15=0$

20 -5

21 $3x-2y+16=0$

22 풀이 참조

23 (1) 7 (2) 35

24 $-\dfrac{1}{2}$

25 (1) 11 (2) 29

26 -14

27 $\sqrt{10}$

28 $7\sqrt{2}$

29 $\dfrac{27\sqrt{2}}{40}$

11

(1) x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 y좌표의 부호만 바뀌므로

$(-10,\ -5)$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x좌표의 부호만 바뀌므로

$(10,\ 5)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x좌표, y좌표의 부호가 각각 바뀌므로
$(10,\ -5)$

(4) 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x좌표, y좌표가 서로 바뀌면서 부호도 각각 바뀌므로
$(-5,\ 10)$

답 (1) $(-10,\ -5)$ (2) $(10,\ 5)$
(3) $(10,\ -5)$ (4) $(-5,\ 10)$

12

(1) x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
y 대신 $-y$를 대입하면
$x^2+(-y)^2+4x+2\times(-y)-6=0$, 즉
$x^2+y^2+4x-2y-6=0$이다.

(2) y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
x 대신 $-x$를 대입하면
$(-x)^2+y^2+4\times(-x)+2y-6=0$, 즉
$x^2+y^2-4x+2y-6=0$이다.

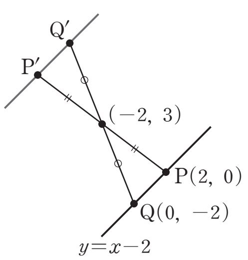
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$(-x)^2+(-y)^2+4\times(-x)+2\times(-y)-6=0$, 즉
$x^2+y^2-4x-2y-6=0$이다.

(4) 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입하면
$(-y)^2+(-x)^2+4\times(-y)+2\times(-x)-6=0$, 즉
$x^2+y^2-2x-4y-6=0$이다.

답 (1) $x^2+y^2+4x-2y-6=0$
(2) $x^2+y^2-4x+2y-6=0$
(3) $x^2+y^2-4x-2y-6=0$
(4) $x^2+y^2-2x-4y-6=0$

13

직선 $y=x-2$ 위의 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ -2)$를 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q를 점 $(-2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 $\mathrm{P}'(a,\ b)$, $\mathrm{Q}'(c,\ d)$라 하자.



두 선분 PP′, QQ′의 중점이 모두 점 $(-2,\ 3)$이므로

$\frac{2+a}{2}=-2,\ \frac{0+b}{2}=3 \qquad \therefore\ a=-6,\ b=6$

$\frac{0+c}{2}=-2,\ \frac{-2+d}{2}=3 \qquad \therefore\ c=-4,\ d=8$

$\therefore\ \mathrm{P}'(-6,\ 6),\ \mathrm{Q}'(-4,\ 8)$

직선 P′Q′의 방정식은

$y-6=\frac{8-6}{-4-(-6)}\{x-(-6)\}$

$\therefore\ y=x+12$

구하는 직선은 직선 P′Q′과 일치하므로 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=x+12$이다.

답 $y=x+12$

다른 풀이

직선 $y=x-2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $(-2,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 선분 PP′의 중점이 점 $(-2,\ 3)$이므로

$\frac{x+x'}{2}=-2,\ \frac{y+y'}{2}=3$

$\therefore\ x=-x'-4,\ y=-y'+6$

이때 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$-y'+6=(-x'-4)-2 \qquad \therefore\ y'=x'+12$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=x+12$이다.

14

직선 $y=2x$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하자.

선분 PP′의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2}+2$

$\therefore\ x+y=-x'-y'+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 PP′과 직선 $y=-x+2$는 서로 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}\times(-1)=-1$ ← 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$\therefore\ x-y=x'-y' \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-y'+2,\ y=-x'+2$

이때 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$-x'+2=2(-y'+2)$

$\therefore x'-2y'+2=0$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x-2y+2=0$이다.

답 $x-2y+2=0$

15

(1) 점 $(7,\ k)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-7,\ k)$

점 $(-7,\ k)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-5,\ k+3)$

점 $(-5,\ k+3)$이 직선 $x+3y+2=0$ 위에 있으므로

$-5+3(k+3)+2=0,\ 3k+6=0$

$\therefore k=-2$

(2) 점 $A(k-1,\ 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B는

$B(1-k,\ -6)$

점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C는

$C(-6,\ 1-k)$

선분 BC의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\{-6-(1-k)\}^2+\{1-k-(-6)\}^2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{2(k-7)^2}=2\sqrt{2}$

$(k-7)^2=4,\ k-7=\pm2$

$\therefore k=5$ 또는 $k=9$

답 (1) -2 (2) 5, 9

16

점 $(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P는

$P(a,\ -b)$

점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q는

$Q(-a,\ b)$

점 $(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 R은

$R(-a,\ -b)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-a-a}{3},\ \frac{-b+b-b}{3}\right)$, 즉 $\left(-\frac{a}{3},\ -\frac{b}{3}\right)$

이 점이 점 $(4,\ -2)$와 일치하므로

$-\frac{a}{3}=4,\ -\frac{b}{3}=-2$

$\therefore a=-12,\ b=6$

$\therefore a+b=-12+6=-6$

답 -6

17

(1) 직선 $3x-4y+1=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x+4y+1=0\qquad\therefore 3x-4y-1=0$

이 직선이 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=16$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(a,\ 2)$를 지나야 하므로

$3a-4\times2-1=0,\ 3a-9=0$

$\therefore a=3$

(2) 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(y-3)^2+(x-1)^2=r^2$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$(-1-1)^2+(3-3)^2=r^2$

$r^2=4\qquad\therefore r=2\ (\because r>0)$

답 (1) 3 (2) 2

다른 풀이

(2) 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 r인 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 3)$이고 반지름의 길이는 r이므로 이 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$(-1-1)^2+(3-3)^2=r^2$

$r^2=4\qquad\therefore r=2\ (\because r>0)$

18

직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y-2x=9\qquad\therefore 2x-y+9=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로 원의 중심 $(3,\ -5)$와 직선 $2x-y+9=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같아야 한다.

$\dfrac{|2\times3-(-5)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{k}$

$\sqrt{k}=\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ k=80$

답 80

19

직선 $6x+2y-5=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$6(x-4)+2(y+7)-5=0$

$\therefore\ 6x+2y-15=0$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$6\times(-x)+2y-15=0$

$\therefore\ 6x-2y+15=0$

답 $6x-2y+15=0$

20

$y=-x^2+8x+3k-1$

$\quad=-(x-4)^2+3k+15$

이 포물선을 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-4=-(x-4)^2+3k+15$

$\therefore\ y=-(x-4)^2+3k+19$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-(x-4)^2+3k+19$

$\therefore\ y=(x-4)^2-3k-19$

따라서 $f(x)=(x-4)^2-3k-19$이고

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값 $-3k-19$를 가지므로

$-3k-19=-4,\ -3k=15$

$\therefore\ k=-5$

답 -5

21

점 $(-2, 5)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x+2)+5$ ……㉠

이 직선을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-10=m\{(x+3)+2\}+5$ $\quad\therefore\ y=mx+5m+15$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-mx+5m+15$ ……㉡

직선 ㉡이 직선 $2x-3y+10=0$, 즉 $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{10}{3}$과 서로 수직이므로

$(-m)\times\dfrac{2}{3}=-1$ $\quad\therefore\ m=\dfrac{3}{2}$

따라서 처음 직선의 방정식은 ㉠에서

$y=\dfrac{3}{2}(x+2)+5$ $\quad\therefore\ 3x-2y+16=0$

답 $3x-2y+16=0$

22

(1) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

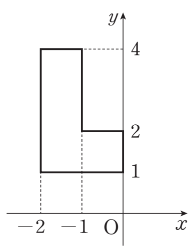
$f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(x+1, -(y-2))=0$

$\therefore\ f(x+1, -y+2)=0$

따라서 방정식 $f(x+1, -y+2)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면

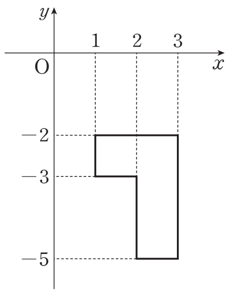
$f(-x, y)=0$

방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$f(-(x-2), y+3)=0$

$\therefore f(-x+2, y+3)=0$

따라서 방정식 $f(-x+2, y+3)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



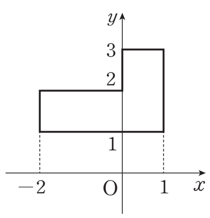
(3) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y, x)=0$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$f(y-2, x)=0$

따라서 방정식 $f(y-2, x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(4) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

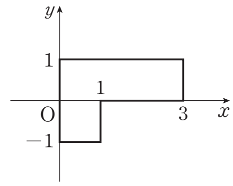
$f(-y, -x)=0$

방정식 $f(-y, -x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(-y, -(x-1))=0$

$\therefore f(-y, -x+1)=0$

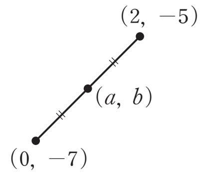
따라서 방정식 $f(-y, -x+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

23

(1) 점 (a, b)는 두 점 $(2, -5)$, $(0, -7)$을 이은 선분의 중점이므로



$a=\dfrac{2+0}{2}$, $b=\dfrac{-5-7}{2}$

$\therefore a=1, b=-6$

$\therefore a-b=1-(-6)=7$

(2) $x^2+y^2-4x-10y=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2=29$

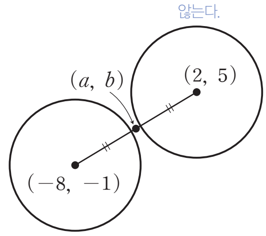
$x^2+y^2+16x+2y+c=0$에서

$(x+8)^2+(y+1)^2=65-c$

이때 두 원의 반지름의 길이가 같아야 하므로 ← 원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

$29=65-c \qquad \therefore c=36$

또한, 두 원이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 점 (a, b)는 두 원의 중심 $(2, 5)$, $(-8, -1)$을 이은 선분의 중점이다.



즉, $a=\dfrac{2-8}{2}=-3$, $b=\dfrac{5-1}{2}=2$이므로

$a+b+c=-3+2+36=35$

답 (1) 7 (2) 35

24

점 A$(2, 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-3=m(x-2) \qquad \therefore y=mx-2m+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠ 위의 점 $(3, m+3)$을 B라 하고, 두 점 A, B를 점 $(0, 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A$'(a, b)$, B$'(c, d)$라 하자.

두 선분 AA′, BB′의 중점이 모두 점 $(0, 1)$이므로

$\dfrac{2+a}{2}=0$, $\dfrac{3+b}{2}=1$ $\quad\therefore a=-2,\ b=-1$

$\dfrac{3+c}{2}=0$, $\dfrac{(m+3)+d}{2}=1$ $\quad\therefore c=-3,\ d=-m-1$

즉, $\mathrm{A}'(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}'(-3,\ -m-1)$이고, 직선 ㉠을 점 $(0, 1)$에 대하여 대칭이동한 직선은 직선 A′B′이므로 이 직선의 방정식은

$y-(-1)=\dfrac{-m-1-(-1)}{-3-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore\ mx-y+2m-1=0$

또한, 직선 $mx-y+2m-1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$mx+y+2m-1=0$

이 직선이 다시 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나므로

$2m+3+2m-1=0$

$4m=-2$ $\quad\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

다른 풀이

점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-3=m(x-2)$

이 직선을 점 $(0,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

x 대신 $\underset{2\times0-x}{\underline{-x}}$, y 대신 $\underset{2\times1-y}{\underline{2-y}}$를 대입하면

$2-y-3=m(-x-2)$

$\therefore\ mx-y+2m-1=0$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$mx+y+2m-1=0$

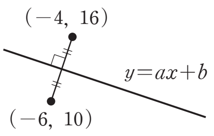
이 직선이 다시 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나므로

$2m+3+2m-1=0$

$4m=-2$ $\quad\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

25

(1) 두 점 $(-6, 10)$, $(-4, 16)$을 이은 선분의 중점



$\left(\dfrac{-6-4}{2}, \dfrac{10+16}{2}\right)$, 즉

$(-5, 13)$이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$13=-5a+b$ $\quad\cdots\cdots$㉠

두 점 $(-6, 10)$, $(-4, 16)$을 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$가 서로 수직이므로

$\dfrac{16-10}{-4-(-6)}\times a=-1$

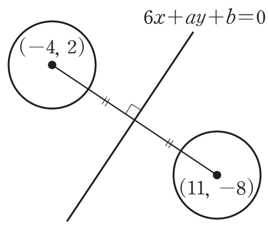
$\therefore\ 3a=-1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{34}{3}$

$\therefore\ a+b=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{34}{3}=11$

(2) $x^2+y^2+8x-4y+4=0$에서

$(x+4)^2+(y-2)^2=16$



두 원의 중심 $(-4, 2)$, $(11, -8)$을 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{-4+11}{2}, \dfrac{2-8}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{2}, -3\right)$이 직선

$6x+ay+b=0$ 위에 있으므로

$21-3a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

두 원의 중심을 지나는 직선과 직선 $6x+ay+b=0$, 즉

$y=-\dfrac{6}{a}x-\dfrac{b}{a}$가 서로 수직이므로

$\dfrac{-8-2}{11-(-4)}\times\left(-\dfrac{6}{a}\right)=-1$ $\quad\therefore\ \dfrac{4}{a}=-1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-33$

$\therefore\ a-b=-4-(-33)=29$

답 (1) 11 (2) 29

26

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

원의 중심 $(2,\ -1)$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

두 점 $(2,\ -1)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{2+a}{2}, \dfrac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$\dfrac{-1+b}{2}=\dfrac{2+a}{2}+2$ $\quad\therefore\ a-b=-7$ $\quad\cdots\cdots$㉠

두 점 $(2,\ -1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선과 직선 $y=x+2$가 서로 수직이므로

$$\frac{b-(-1)}{a-2}\times 1=-1$$

$b+1=-a+2 \qquad \therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=4$

즉, 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-4)^2=10$ ← 원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

이때 이 원이 직선 $3x+4y+k=0$과 접하므로 원의 중심 $(-3,\ 4)$와 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같다.

$$\frac{|3\times(-3)+4\times 4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{10}$$

$$\frac{|k+7|}{5}=\sqrt{10},\ |k+7|=5\sqrt{10}$$

$k+7=\pm 5\sqrt{10}$

$\therefore k=-7\pm 5\sqrt{10}$

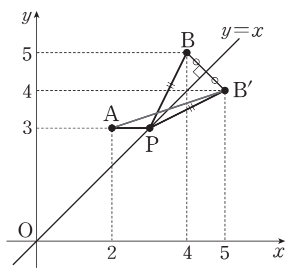
따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-7+5\sqrt{10}+(-7-5\sqrt{10})=-14$

답 -14

27

점 $\mathrm{B}(4,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $\mathrm{B}'(5,\ 4)$



이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq \overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(5-2)^2+(4-3)^2}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

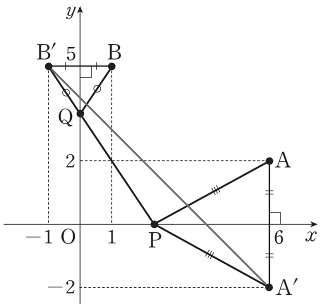
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

답 $\sqrt{10}$

28

점 $\mathrm{A}(6,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $\mathrm{A}'(6,\ -2)$

점 $\mathrm{B}(1,\ 5)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 $\mathrm{B}'(-1,\ 5)$



이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}},\ \overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\\&\geq \overline{\mathrm{A'B'}}\\&=\sqrt{(-1-6)^2+\{5-(-2)\}^2}\\&=7\sqrt{2}\end{aligned}$$

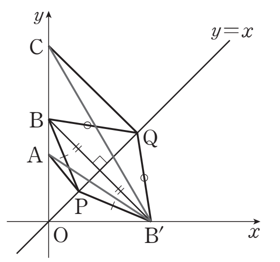
따라서 구하는 최솟값은 $7\sqrt{2}$이다.

답 $7\sqrt{2}$

29

점 $\mathrm{B}(0,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$\mathrm{B}'(3,\ 0)$



이때 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB'}},\ \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}+\overline{\mathrm{B'Q}}+\overline{\mathrm{QC}}\\&\geq \overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{B'C}}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QC}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q는 직선 $\mathrm{AB'}$, 직선 $\mathrm{B'C}$가 각각 직선 $y=x$와 만나는 점이다.

직선 AB′의 방정식은

$y=\frac{0-2}{3-0}x+2 \qquad \therefore y=-\frac{2}{3}x+2$

이 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표는

$x=-\frac{2}{3}x+2,\ \frac{5}{3}x=2$

$\therefore x=\frac{6}{5} \qquad \therefore \mathrm{P}\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$

또한, 직선 B′C의 방정식은

$y=\frac{5-0}{0-3}x+5 \qquad \therefore y=-\frac{5}{3}x+5$

이 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표는

$x=-\frac{5}{3}x+5,\ \frac{8}{3}x=5$

$\therefore x=\frac{15}{8} \qquad \therefore \mathrm{Q}\left(\frac{15}{8}, \frac{15}{8}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{15}{8}-\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{8}-\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{27\sqrt{2}}{40}$

답 $\frac{27\sqrt{2}}{40}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.140~142

07 $\frac{4}{3}$	**08** -7	**09** $\frac{1}{6}$	**10** ③
11 $2\sqrt{2}$	**12** 14	**13** $3\sqrt{2}$	**14** ⑤
15 7	**16** 10	**17** $2x-3y+25=0$	
18 8	**19** 9	**20** $(-8,\ -6)$	
21 $6+4\sqrt{2}$	**22** $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$		**23** $5\sqrt{2}$

07

점 B의 y좌표가 2이므로 점 B의 좌표를 $(a,\ 2)$라 하면

조건 ㈎에서 두 직선 OA, OB는 서로 수직이므로

직선 OB의 기울기

$\frac{4}{1}\times\frac{2}{a}=-1 \qquad \therefore a=-8$

직선 OA의 기울기

즉, $\mathrm{B}(-8,\ 2)$이고, 조건 ㈏에서 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$\mathrm{C}(2,\ -8)$

이때 직선 AC의 방정식은

$y=\frac{-8-4}{2-1}(x-1)+4$

$\therefore y=-12x+16$

이 직선의 x절편은 $0=-12x+16$에서 $x=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 직선 AC의 x절편은 $\frac{4}{3}$이다.

답 $\frac{4}{3}$

08

점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-(-3)=m(x-4)$

$\therefore mx-y-4m-3=0$

이 직선을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입한다.

$m\times(-y)-(-x)-4m-3=0$

$\therefore x-my-4m-3=0$

이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

x 대신 $-x$를 대입한다.

$-x-my-4m-3=0$

$\therefore x+my+4m+3=0$

이 직선이 다시 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 지나므로

$4-3m+4m+3=0,\ m+7=0$

$\therefore m=-7$

답 -7

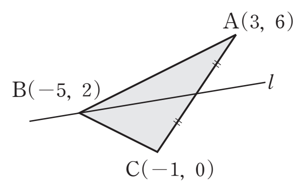
09

직선 $kx+y-5k-2=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$-kx+y-5k-2=0 \qquad \therefore l : kx-y+5k+2=0$

$kx-y+5k+2=0$에서 $(x+5)k-y+2=0$이므로 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\mathrm{B}(-5,\ 2)$를 지난다.

한편, 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(3,\ 6)$, $\mathrm{B}(-5,\ 2)$, $\mathrm{C}(-1,\ 0)$이므로 다음 그림과 같이 직선 l은 삼각형 ABC의 한 꼭짓점 B를 지나는 직선이다.



직선 l이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 변 AC의 중점 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 3)$을 지난다.

즉, $k-3+5k+2=0$이므로 $6k-1=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

10

ㄱ. 원 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y)^2+(-x)^2-2\times(-y)+2\times(-x)-7=0$

$\therefore\ x^2+y^2-2x+2y-7=0$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치한다.

ㄴ. 직선 $2x-2y-3=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2\times(-y)-2\times(-x)-3=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치한다.

ㄷ. 포물선 $y=x^2+3$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-x=(-y)^2+3$

$\therefore\ x=-y^2-3$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치하지 않는다.

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

11

$C: x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0$에서

$C: (x-a)^2+(y-2a)^2=1$

즉, 원 C의 중심의 좌표는 $(a,\ 2a)$이고 반지름의 길이는 1이다.

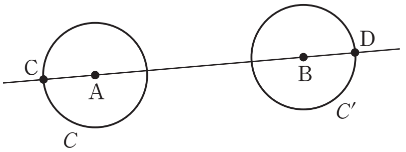
원 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C'의 방정식은

$(y-a)^2+(x-2a)^2=1$

$\therefore\ C': (x-2a)^2+(y-a)^2=1$

즉, 원 C'의 중심의 좌표는 $(2a,\ a)$이고 반지름의 길이는 1이다.

다음 그림과 같이 두 원 C, C'의 중심을 각각 A, B라 하고, 직선 AB가 두 원 C, C'과 만나는 점 중 선분 AB 위의 점이 아닌 점을 각각 C, D라 하면 원 C 위의 점과 원 C_1 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 선분 CD의 길이와 같다.



$\mathrm{A}(a,\ 2a)$, $\mathrm{B}(2a,\ a)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2a-a)^2+(a-2a)^2}=\sqrt{2}a\ (\because\ a>0)$

이때 $\overline{\mathrm{CD}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BD}}=6$

$1+\sqrt{2}a+1=6$, $\sqrt{2}a=4$

$\therefore\ a=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

12

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=-\frac{1}{2}(y-a)-3$, 즉 $2x+y+6-a=0$

$\therefore\ l: 2x+y+6-a=0$

(가)

직선 l이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$와 접하려면 원의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 l 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$$\frac{|2\times(-1)+3+6-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

(나)

$|a-7|=5$, $a-7=\pm5$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=12$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

$2+12=14$

(다)

답 14

단계	채점 기준	배점
(가)	직선 l의 방정식을 구한 경우	40%
(나)	직선과 원의 위치 관계를 이용하여 식을 세운 경우	40%
(다)	모든 상수 a의 값 및 그 합을 구한 경우	20%

13

$C : x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$C : (x+1)^2+(y-3)^2=9$

원 C를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$\{(x-1)+1\}^2+\{(y+1)-3\}^2=9$

$\therefore\ x^2+(y-2)^2=9$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

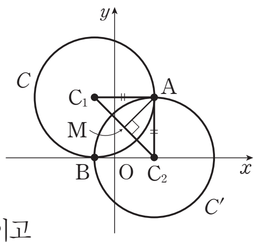
$y^2+(x-2)^2=9$

$\therefore\ C' : (x-2)^2+y^2=9$

즉, 두 원 C, C'의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면

$C_1(-1,\ 3)$, $C_2(2,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 선분 C_1C_2에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



삼각형 AC_1C_2는

$\overline{AC_1}=\overline{AC_2}=3$인 이등변삼각형이고

$\overline{C_1C_2}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{C_1M}=\dfrac{1}{2}\overline{C_1C_2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 직각삼각형 AC_1M에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC_1}^2-\overline{C_1M}^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

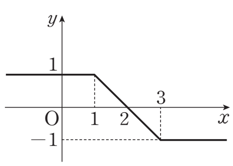
이므로 두 원 C, C'의 서로 다른 두 교점 사이의 거리는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=3\sqrt{2}$

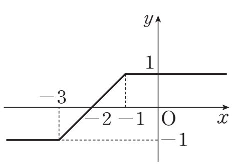
답 $3\sqrt{2}$

14

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 [그림 3]과 같고, [그림 3]의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 [그림 4]와 같다.

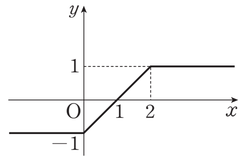


[그림 3]

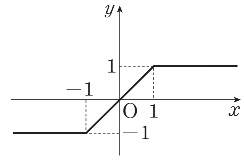


[그림 4]

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 [그림 5]와 같고, [그림 5]의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 [그림 6]과 같다.

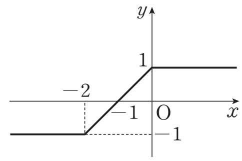


[그림 5]

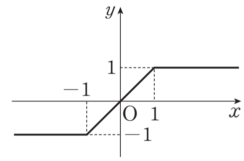


[그림 6]

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 [그림 7]과 같고, [그림 7]의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 [그림 8]과 같다.



[그림 7]



[그림 8]

따라서 [그림 2]에 대한 설명으로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

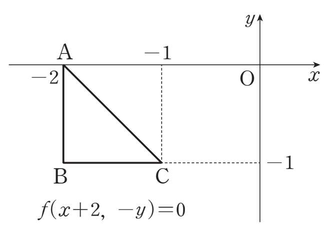
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(x,\ -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$f(x+2,\ -y)=0$

즉, 방정식 $f(x+2,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x+2,\ -y)=0$이 나타내는 도형의 꼭짓점을 위의 그림과 같이 A, B, C로 정하면 도형 위의 점과 원점 사

이의 거리는 B$(-2,\ -1)$에서 최댓값을 갖고, C$(-1,\ -1)$에서 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ M=\overline{\mathrm{OB}}$

$=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}$,

$m=\overline{\mathrm{OC}}$

$=\sqrt{(-1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ M^2+m^2=5+2=7$

답 7

16

도형을 평행이동 또는 대칭이동하면 모양과 크기는 변하지 않고, 점은 점으로 옮겨지므로 구하는 점은 네 점 A$(0,\ 4)$, B$(1,\ 3)$, C$(2,\ 4)$, D$(1,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 두 대각선의 교점이 주어진 도형의 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 점과 일치한다.

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 선분 AC의 중점이고 그 좌표는 $\left(\dfrac{0+2}{2},\ \dfrac{4+4}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$이다.

한편, 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y,\ x)=0$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(-y,\ x)=0$

방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$f(-(y+3),\ x-2)=0$

$\therefore\ f(-y-3,\ x-2)=0$

즉, 점 $(1,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4,\ 1)$

점 $(4,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4,\ -1)$

점 $(4,\ -1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(6,\ -4)$

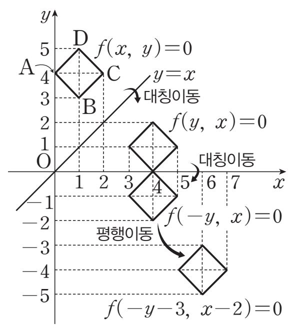
따라서 방정식 $f(-y-3,\ x-2)=0$이 나타내는 도형의 두 대각선의 교점은 점 $(6,\ -4)$이므로

$a=6,\ b=-4 \qquad \therefore\ a-b=6-(-4)=10$

답 10

보충 설명

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 정사각형 ABCD를 실제로 이동하면 다음 그림과 같다.



다른 풀이

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 선분 AC의 중점이고 그 좌표는 $\left(\dfrac{0+2}{2},\ \dfrac{4+4}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$이다.

이 점이 주어진 이동에 의하여 점 $(a,\ b)$로 옮겨지므로

$-b-3=1,\ a-2=4$

$\therefore\ a=6,\ b=-4$

$\therefore\ a-b=6-(-4)=10$

17

어떤 도형이 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 도형이 직선 $2x+3y-1=0$과 일치하였으므로 처음 도형 역시 직선이다.

처음 직선을 l이라 하고 직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선을 m, 직선 m을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 n, 직선 n을 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 직선을 p라 하면 $p : 2x+3y-1=0$이므로 직선 p에서부터 직선 n, 직선 m, 직선 l이 되도록 반대로 이동하면 직선 l의 방정식을 얻을 수 있다.

(i) 직선 p를 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 직선 n의 방정식

직선 $2x+3y-1=0$ 위의 임의의 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, 점 $(a,\ b)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자.

두 점 $(a,\ b)$, $(x,\ y)$를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{a+x}{2},\ \dfrac{b+y}{2}\right)$가 점 $(2,\ 1)$과 일치하므로

$\dfrac{a+x}{2}=2,\ \dfrac{b+y}{2}=1$

$\therefore\ a=4-x,\ b=2-y$ ······㉠

점 $(a,\ b)$는 직선 $2x+3y-1=0$ 위에 있으므로

$2a+3b-1=0$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 직선 n의 방정식은

$2(4-x)+3(2-y)-1=0$

$\therefore\ n: 2x+3y-13=0$

(ii) 직선 n을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 m의 방정식

직선 $2x+3y-13=0$을 y축에 대하여 대칭이동하면

$2\times(-x)+3y-13=0$

$\therefore\ m: 2x-3y+13=0$

(iii) 직선 m을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선 l의 방정식

직선 $2x-3y+13=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$2(x+3)-3(y-2)+13=0$

$\therefore\ l: 2x-3y+25=0$

따라서 처음 도형의 방정식은 $2x-3y+25=0$이다.

답 $2x-3y+25=0$

다른 풀이

어떤 도형이 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 도형이 직선 $2x+3y-1=0$과 일치하였으므로 처음 도형 역시 직선이다.

처음 직선을 l이라 하고, 직선 l의 방정식을

$ax+by+c=0$ ($a,\ b,\ c$는 상수)이라 하자.

$l: f(x,\ y)=0$이라 할 때, 각 이동에 따른 도형의 방정식을 순서대로 나타내면

$$\begin{aligned} f(x,\ y)=0 &\longrightarrow f(x-3,\ y+2)=0 \\ &\longrightarrow f(-x-3,\ y+2)=0 \\ &\longrightarrow f(\underbrace{-4+x-3}_{-(2\times2-x)-3},\ \underbrace{2-y+2}_{(2\times1-y)+2})=0 \end{aligned}$$

한편, 도형의 방정식 $f(x-7,\ -y+4)=0$에서

$a(x-7)+b(-y+4)+c=0$

$\therefore\ ax-by-7a+4b+c=0$

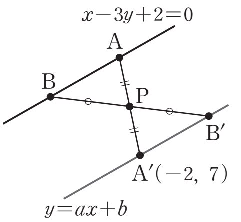
이 직선이 직선 $2x+3y-1=0$과 일치하므로

$a=2,\ b=-3,\ -7a+4b+c=-1$ $\qquad\therefore\ c=25$

따라서 처음 도형의 방정식은

$2x-3y+25=0$

18



두 점 A, B를 점 P에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A′, B′이므로

△APB, △A′PB′에서

$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A}'\text{P}}$, $\overline{\text{BP}}=\overline{\text{B}'\text{P}}$,

$\angle\text{APB}=\angle\text{A}'\text{PB}'$ (맞꼭지각)

이므로

△APB≡△A′PB′ (SAS 합동)

즉, $\overline{\text{AB}}\,/\!/\,\overline{\text{A}'\text{B}'}$이므로 두 직선 AB, A′B′의 기울기는 서로 같다.

직선 AB의 방정식 $x-3y+2=0$에서 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$이므로

직선 A′B′의 방정식 $y=ax+b$에서

$a=\dfrac{1}{3}$

또한, 점 $\text{A}'(-2,\ 7)$은 직선 A′B′ 위에 있으므로

$7=-2a+b$에서

$b-\dfrac{2}{3}=7\ \left(\because\ a=\dfrac{1}{3}\right)$

$\therefore\ b=\dfrac{23}{3}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{23}{3}=8$

답 8

19

두 이차함수의 그래프가 점 $\text{P}(a,\ b)$에 대하여 대칭이면 각 그래프의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이므로 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이다.

$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$이므로

꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$

$y=-x^2+6x+5=-(x-3)^2+14$이므로

꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 14)$

점 $\text{P}(a,\ b)$는 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 14)$를 이은 선분의 중점이므로

$a=\dfrac{-1+3}{2}=1,\ b=\dfrac{2+14}{2}=8$

$\therefore\ a+b=1+8=9$

답 9

20

모눈종이를 접은 선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자.
모눈종이를 반으로 접었더니 점 $(4, 0)$이 점 $(-2, 2)$와 일치하였으므로 점 $(4, 0)$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동한 점이 점 $(-2, 2)$이다.
두 점 $(4, 0)$, $(-2, 2)$를 이은 선분의 중점
$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(1, 1)$은 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$1=a+b$ ……㉠

또한, 두 점 $(4, 0)$, $(-2, 2)$를 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$는 서로 수직이므로

$\frac{2-0}{-2-4}\times a=-1 \qquad \therefore -\frac{1}{3}a=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$
즉, 모눈종이를 접은 선의 방정식은 $y=3x-2$이다.
한편, 점 $(4, -10)$을 직선 $y=3x-2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면 두 점 $(4, -10)$, (p, q)를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+p}{2}, \frac{-10+q}{2}\right)$는 직선 $y=3x-2$ 위에 있으므로

$\frac{-10+q}{2}=3\times\frac{4+p}{2}-2$

$\therefore 3p-q=-18$ ……㉢

또한, 두 점 $(4, -10)$, (p, q)를 지나는 직선과 직선 $y=3x-2$는 서로 수직이므로

$\frac{q-(-10)}{p-4}\times 3=-1$

$\therefore p+3q=-26$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $p=-8$, $q=-6$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(-8, -6)$이다.

답 $(-8, -6)$

21

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.
$C : x^2+y^2-4x-12=0$에서
$C : (x-2)^2+y^2=16$
이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(2, 0)$이다.
점 $(2, 0)$을 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(k, 0)$이라 하면 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$을 이은 선분의 중점이 직선 $x=a$ 위에 있으므로

$\frac{2+k}{2}=a \qquad \therefore k=2a-2$

즉, 원 C를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(2a-2, 0)$이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 그 방정식은
$\{x-(2a-2)\}^2+y^2=16$
이 원이 원 C의 중심 $(2, 0)$을 지나므로
$\{2-(2a-2)\}^2=16$, $(2-a)^2=4$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$)
한편, 원 C를 직선 $y=-x+b$에 대하여 대칭이동한 원이 원 C와 접하므로 직선 $y=-x+b$가 원 C의 접선이다.
즉, 원 C의 중심 $(2, 0)$과 직선 $x+y-b=0$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이 4와 같으므로

(*) $\frac{|2+0-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$, $|b-2|=4\sqrt{2}$

$b-2=\pm 4\sqrt{2}$
$\therefore b=2+4\sqrt{2}$ ($\because b>0$)
$\therefore a+b=4+(2+4\sqrt{2})=6+4\sqrt{2}$

답 $6+4\sqrt{2}$

다른 풀이

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.
$C : x^2+y^2-4x-12=0$에서
$C : (x-2)^2+y^2=16$
이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(2, 0)$이다.
원 C를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 원을 C'이라 하면 원 C'의 중심은 x축 위의 점이다. 원 C'의 중심의 좌표를 $(k, 0)$이라 하면 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(a, 0)$이므로

$a=\frac{2+k}{2}$ ……㉠

원 C'이 원 C의 중심을 지나므로 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$을 이은 선분의 길이는 원 C'의 반지름의 길이와 같다.

이때 두 원 C, C'의 반지름의 길이는 4로 같으므로 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$을 이은 선분의 길이도 4이다.

즉, $|k-2|=4$이므로 $k-2=\pm 4$

$\therefore\ k=6$ 또는 $k=-2$

k의 값을 ㉠에 대입하면

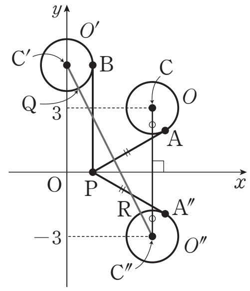
$k=6$일 때, $a=\dfrac{2+6}{2}=4$

$k=-2$일 때, $a=\dfrac{2+(-2)}{2}=0$

따라서 양수 a의 값은 4이다.

다음은 (*)와 같다.

오른쪽 그림과 같이 선분 $C'C''$이 두 원 O', O''과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 선분 QR의 길이와 같다.



이때 $C'(0,\ 5)$, $C''(4,\ -3)$이므로

$\overline{C'C''}=\sqrt{(4-0)^2+(-3-5)^2}$

$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

또한, 두 원 O', O''의 반지름의 길이는 모두 $\sqrt{2}$이므로

$\overline{QR}=\overline{C'C''}-\overline{C'Q}-\overline{RC''}$

$=4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$이다.

답 $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

22

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.

원 $O:(x-4)^2+(y-3)^2=2$를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 원이 O'이므로 두 원 O, O'의 중심을 각각 C, C'이라 하면 두 점 C, C'이 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이다.

$C(4,\ 3)$이고 $C'(a,\ b)$라 하면 선분 CC'의 중점 $\left(\dfrac{4+a}{2},\ \dfrac{3+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$\dfrac{3+b}{2}=2\times\dfrac{4+a}{2}$ $\qquad\therefore\ 2a-b=-5$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

직선 CC'과 직선 $y=2x$가 서로 수직이므로

$\dfrac{b-3}{a-4}\times 2=-1$ $\qquad\therefore\ a+2b=10$ $\qquad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=5$ $\qquad\therefore\ C'(0,\ 5)$

$\therefore\ O':x^2+(y-5)^2=2$

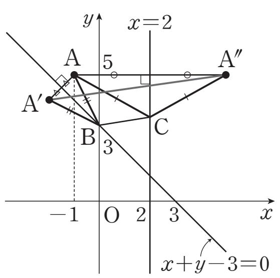
한편, 원 O를 x축에 대하여 대칭이동한 원을 O''이라 하고 원 O 위의 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면 원 O 위의 한 점 A, 원 O' 위의 한 점 B, x축 위의 한 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A''P}+\overline{PB}$

즉, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 원 O' 위의 한 점과 원 O'' 위의 한 점 사이의 거리의 최솟값이다.

23

점 $A(-1, 5)$와 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 B, 직선 $x=2$ 위의 점 C에 대하여 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 존재하는 경우는 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 A를 직선 $x+y-3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 A', 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$\overline{AB}=\overline{A'B},\ \overline{AC}=\overline{A''C}$

이므로

(삼각형 ABC의 둘레의 길이) $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{A''C}$

$\geq\overline{A'A''}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

(i) 점 A'의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

선분 AA'의 중점 $\left(\dfrac{-1+a}{2},\ \dfrac{5+b}{2}\right)$가 직선 $x+y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{-1+a}{2}+\dfrac{5+b}{2}-3=0$

$\therefore\ a+b=2$ $\qquad\cdots\cdots$㉡

직선 AA′과 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$이 서로 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-(-1)}\times(-1)=-1$$

$\therefore\ a-b=-6$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=4 \qquad \therefore\ \mathrm{A}'(-2,\ 4)$

(ii) 점 A를 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 점이 A″이므로

$\mathrm{A}''(5,\ 5)$ $2\times2-(-1)$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}\ge\overline{\mathrm{A'A''}}\ (\because\ ㉠)\\ &=\sqrt{\{5-(-2)\}^2+(5-4)^2}\\ &=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

답 $5\sqrt{2}$

STEP 2 개념 마무리 본문 p.143

1 20 **2** $\frac{11}{2}$ **3** 32 **4** 16

5 ③

1

좌표평면 위의 점 A$(-4,\ -1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점이 B이므로

B$(-4+m,\ -1)$

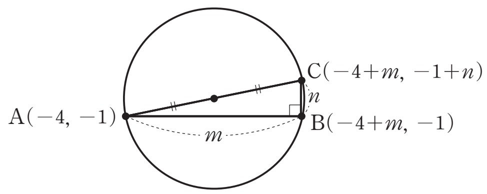
이때 x축의 방향으로만 평행이동하였으므로 선분 AB는 x축에 평행하다.

또한, 점 B$(-4+m,\ -1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이 C이므로

C$(-4+m,\ -1+n)$

이때 y축의 방향으로만 평행이동하였으므로 선분 BC는 y축에 평행하다.

즉, 다음 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 두 변 AB, BC가 이루는 각의 크기가 90°이므로 삼각형 ABC는 ∠B=90°인 직각삼각형이고, 세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.



직각삼각형 ABC의 외심은 빗변 AC의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-4+(-4+m)}{2},\ \frac{-1+(-1+n)}{2}\right)$$

$$\therefore\ \left(-4+\frac{m}{2},\ -1+\frac{n}{2}\right)$$

이 점이 점 $(1,\ 0)$과 일치하므로

$$-4+\frac{m}{2}=1,\ -1+\frac{n}{2}=0$$

$\therefore\ m=10,\ n=2$

$\therefore\ mn=10\times2=20$

답 20

다른 풀이

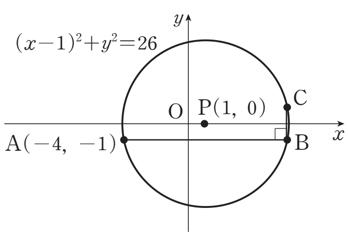
세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 P라 하면

P$(1,\ 0)$

이때 점 A$(-4,\ -1)$은 원 위의 점이므로 원의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{0-(-1)\}^2}\\ &=\sqrt{26}\end{aligned}$$

즉, 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=26$이므로 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 평행이동한 점 중 원 위의 점이므로

B$(6,\ -1)$ ← 점 B의 y좌표는 -1이므로 $(x-1)^2+y^2=26$에 $y=-1$을 대입하면 $(x-1)^2=25$ $\quad\therefore\ x=-4$ 또는 $x=6$

같은 방법으로 점 C는 점 B를 y축의 방향으로 평행이동한 점 중 원 위의 점이므로

C$(6,\ 1)$ ← 점 C의 x좌표는 6이므로 $(x-1)^2+y^2=26$에 $x=6$을 대입하면 $y^2=1$ $\quad\therefore\ y=-1$ 또는 $y=1$

따라서 $m=10,\ n=2$이므로

$mn=10\times2=20$

2

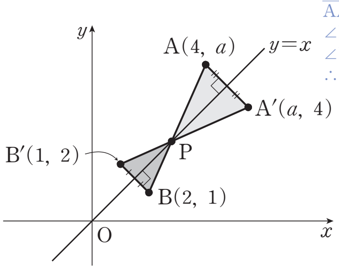
두 점 A$(4, a)$, B$(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A$'$, B$'$이므로

A$'(a, 4)$, B$'(1, 2)$

두 직선 AA$'$, BB$'$은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA$'$, BB$'$은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA$'$, BPB$'$은 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AA'}} /\!/ \overline{\mathrm{BB'}}$이므로
$\angle$PAA$'=\angle$PBB$'$
$\angle$PA$'$A$=\angle$PB$'$B
$\therefore$ $\triangle$APA$' \backsim \triangle$BPB$'$
(AA 닮음)



한편, 두 삼각형 APA$'$, BPB$'$의 넓이의 비가 $9:4$이므로 두 삼각형 APA$'$, BPB$'$의 닮음비는 $3:2$이다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{BB'}}=3:2$

$\overline{\mathrm{AA'}}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)$ ($\because$ $a>4$),

$\overline{\mathrm{BB'}}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$에서

$\sqrt{2}(a-4):\sqrt{2}=3:2$

$2\sqrt{2}(a-4)=3\sqrt{2}$, $a-4=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $a=\dfrac{11}{2}$

답 $\dfrac{11}{2}$

다른 풀이 1

두 점 A$(4, a)$, B$(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A$'$, B$'$이므로

A$'(a, 4)$, B$'(1, 2)$

두 직선 AA$'$, BB$'$은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA$'$, BB$'$은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA$'$, BPB$'$은 서로 닮음이고, 두 삼각형의 넓이의 비가 $9:4$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $3:2$이다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$

즉, 점 P는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times2+2\times4}{3+2}, \dfrac{3\times1+2\times a}{3+2}\right)$ $\quad\therefore$ P$\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{2a+3}{5}\right)$

두 직선 AB, A$'$B$'$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 직선 AB, A$'$B$'$의 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

즉, $\dfrac{14}{5}=\dfrac{2a+3}{5}$이므로 $a=\dfrac{11}{2}$

다른 풀이 2

두 점 A$(4, a)$, B$(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A$'$, B$'$이므로

A$'(a, 4)$, B$'(1, 2)$

두 직선 AA$'$, BB$'$은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA$'$, BB$'$은 서로 평행하다.

즉, 두 삼각형 APA$'$, BPB$'$은 서로 닮음이고, 두 삼각형의 넓이의 비가 $9:4$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $3:2$이다.

따라서 점 A와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리, 점 B와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리의 비도 $3:2$이므로

$\dfrac{|4-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}:\dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3:2$

$2|4-a|=3$, $|4-a|=\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ $a=\dfrac{11}{2}$ ($\because$ $a>4$)

3

포물선 $y=x^2-3x-1$ 위의 두 점 A(a, a^2-3a-1), B(b, b^2-3b-1) $(a\neq b)$이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이라 하자.

직선 AB는 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는 -1이다. 즉,

$\dfrac{a^2-3a-1-(b^2-3b-1)}{a-b}=-1$

$(a^2-b^2)-3(a-b)=-(a-b)$

$(a-b)(a+b)-2(a-b)=0$

$(a-b)(a+b-2)=0$

$\therefore$ $a+b-2=0$ ($\because$ $a\neq b$)

$\therefore$ $b=-a+2$ $\quad\cdots\cdots$㉠

또한, 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2-3a-1+b^2-3b-1}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\dfrac{a^2-3a-1+b^2-3b-1}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore$ $a^2-4a+b^2-4b-2=0$

㉠을 위의 식에 대입하면

$a^2-4a+(-a+2)^2-4(-a+2)-2=0$

$a^2-4a+a^2-4a+4+4a-8-2=0$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=-1$ ($\because$ ㉠)

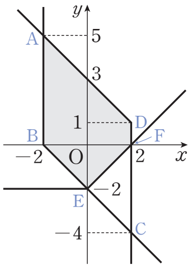
따라서 $A(-1, 3)$, $B(3, -1)$ 또는 $A(3, -1)$, $B(-1, 3)$이므로

$d^2=\overline{AB}^2$

$\quad=(-1-3)^2+\{3-(-1)\}^2=32$

답 32

따라서 세 도형 $y=-f(x+2)$, $x=f(y+1)$, $x=-f(2-y)$로 둘러싸인 두 도형 중 넓이가 더 큰 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 도형과 같으므로 구하는 넓이는



$\overbrace{5\times4}^{\text{평행사변형 ABCD의 넓이}}-\underbrace{\frac{1}{2}\times4\times2}_{\text{삼각형 ECF의 넓이}}$

$=20-4=16$

답 16

4

(ⅰ) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=f(x)$

이것을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$-y=f(x+2)\qquad\therefore\ y=-f(x+2)$

즉, $y=-f(x+2)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

(ⅱ) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=f(y)$

이것을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$x=f(y+1)$

즉, $x=f(y+1)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=f(-x)\qquad\therefore\ y=-f(-x)$

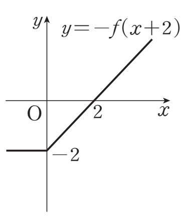
이것을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=-f(-y)$

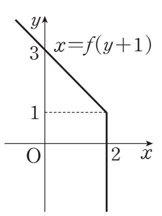
이것을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$x=-f(-(y-2))\qquad\therefore\ x=-f(2-y)$

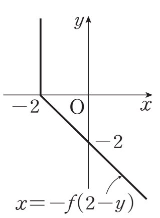
즉, $x=-f(2-y)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



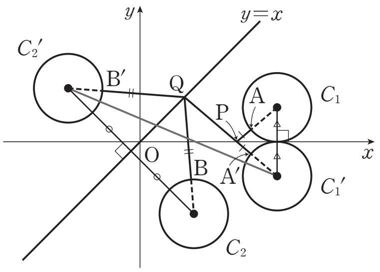
[그림 3]

5

원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1', 원 C_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2'이라 하면

C_1' : $(x-8)^2+(y+2)^2=4$,

C_2' : $(x+4)^2+(y-3)^2=4$



위의 그림과 같이 원 C_1 위의 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 원 C_2 위의 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 두 점 A′, B′은 각각 원 C_1', 원 C_2' 위의 점이고

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$

이때 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$는 네 점 A′, P, Q, B′이 두 원 C_1', C_2'의 중심 $(8, -2)$, $(-4, 3)$을 이은 선분 위에 있을 때 최솟값을 갖고, 두 원 C_1', C_2'의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq\overline{A'B'}$

$=\sqrt{(-4-8)^2+\{3-(-2)\}^2}-2-2$

$=13-4=9$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 9이다.

답 ③

Ⅱ. 집합과 명제

05. 집합

1 집합

기본 + 필수연습 본문 pp.148~151

01 ㄱ, ㄷ **02** (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$
03 (1) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$
(2) $\{x\mid x=3n+1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 33\}$
04 ㄱ, ㄷ, ㄹ, $n(A)=15$, $n(C)=3$, $n(D)=0$
05 $S=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ **06** 64
07 $B*(A*B)=\{5,\ 13,\ 26,\ 34,\ 101,\ 109,\ 170,\ 178\}$
08 ㄴ **09** 10 **10** 5

01

ㄱ. '우리 반에서 안경을 쓴 사람의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.
ㄴ. '높다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
ㄷ. '5보다 작은 정수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이고, 이 집합의 원소는 4, 3, 2, ⋯이다.
ㄹ. '가깝다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

02

(1) 2는 자연수이므로 $2\in N$
(2) $-\dfrac{1}{2}$은 정수가 아닌 유리수이므로 $-\dfrac{1}{2}\notin Z$
(3) $2-\sqrt{2}$는 무리수이므로 $2-\sqrt{2}\notin Q$
(4) 0은 실수이므로 $0\in R$

답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$

03

(1) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$
(2) $\{x\mid x=3n+1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 33\}$

답 (1) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$
(2) $\{x\mid x=3n+1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 33\}$

다른 풀이
(2) $\{x\mid x=3n-2,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 34\}$

04

ㄱ. $A=\{4, 8, 12, \cdots, 60\}$은 유한집합이고, $n(A)=15$이다.
ㄴ. 양의 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
ㄷ. $x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$
$\therefore\ -1<x<3$
즉, $C=\{0,\ 1,\ 2\}$이므로 유한집합이고, $n(C)=3$이다.
ㄹ. $x^2+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.
즉, $D=\varnothing$이므로 유한집합이고 $n(D)=0$이다.
따라서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이고,
$n(A)=15$, $n(C)=3$, $n(D)=0$이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, $n(A)=15$, $n(C)=3$, $n(D)=0$

05

두 집합 $A=\{3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 4, 5\}$에 대하여
$x\in A$, $y\in B$일 때, $x-y$의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	3	4	5
3	0	-1	-2
5	2	1	0
7	4	3	2
9	6	5	4

$\therefore\ S=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

답 $S=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

06

두 집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in B$일 때, $xy(x+y)$의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	2	3
1	$1\times2\times(1+2)=6$	$1\times3\times(1+3)=12$
2	$2\times2\times(2+2)=16$	$2\times3\times(2+3)=30$

$\therefore\ S=\{6,\ 12,\ 16,\ 30\}$

따라서 집합 S의 모든 원소의 합은

$6+12+16+30=64$

답 64

07

두 집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2x-1\,|\,x\in A\}$에 대하여 $B=\{1,\ 3\}$이므로 $a\in A$, $b\in B$일 때, a^2+b^2의 값은 다음 표와 같다.

a \ b	1	3
1	$1^2+1^2=2$	$1^2+3^2=10$
2	$2^2+1^2=5$	$2^2+3^2=13$

$\therefore\ A*B=\{2,\ 5,\ 10,\ 13\}$

또한, $b\in B$, $c\in A*B$일 때, b^2+c^2의 값은 다음 표와 같다.

b \ c	2	5	10	13
1	$1^2+2^2=5$	$1^2+5^2=26$	$1^2+10^2=101$	$1^2+13^2=170$
3	$3^2+2^2=13$	$3^2+5^2=34$	$3^2+10^2=109$	$3^2+13^2=178$

$\therefore\ B*(A*B)=\{5,\ 13,\ 26,\ 34,\ 101,\ 109,\ 170,\ 178\}$

답 $B*(A*B)=\{5,\ 13,\ 26,\ 34,\ 101,\ 109,\ 170,\ 178\}$

08

ㄱ. $n(\{0,\ 1,\ \{0,\ 1,\ 3\},\ 5\})=4$, $n(\{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\})=5$ 이므로

$n(\{0,\ 1,\ \{0,\ 1,\ 3\},\ 5\})-n(\{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\})$

$=4-5=-1$ (거짓)

ㄴ. $n(\{a,\ b\})=2$, $n(\{a,\ \varnothing\})=2$이므로

$n(\{a,\ b\})=n(\{a,\ \varnothing\})$ (참)

ㄷ. 두 자리 자연수 중 3의 배수는

$3\times4,\ 3\times5,\ 3\times6,\ \cdots,\ 3\times33$이므로

$n(\{x\,|\,x$는 두 자리 자연수 중 3의 배수$\})=30$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

09

집합 $A=\{-i,\ i,\ 1\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in A$일 때, $x+y$의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	$-i$	i	1
$-i$	$-2i$	0	$1-i$
i	0	$2i$	$1+i$
1	$1-i$	$1+i$	2

즉, $B=\{1-i,\ 1+i,\ -2i,\ 2i,\ 0,\ 2\}$이므로 $n(B)=6$

또한, $x\in A$, $y\in A$일 때, xy의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	$-i$	i	1
$-i$	-1	1	$-i$
i	1	-1	i
1	$-i$	i	1

즉, $C=\{-i,\ i,\ -1,\ 1\}$이므로 $n(C)=4$

$\therefore\ n(B)+n(C)=6+4=10$

답 10

10

$x+2y=8$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 3)$, $(4,\ 2)$, $(6,\ 1)$이므로

$n(A)=3$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2a\}$이므로

$n(B)=2a$

이때 $n(B)-n(A)=7$이므로

$2a-3=7$, $2a=10$

$\therefore\ a=5$

답 5

STEP 1 개념 마무리

본문 p.152

01 3	**02** ②	**03** 80	**04** ②
05 7	**06** 3		

01

ㄱ. 10보다 크고 12보다 작은 짝수는 없으므로 공집합이다.

ㄷ. '2000보다 큰 수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

'잘한다', '가깝다', '많다'와 같은 조건은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 ㄴ, ㄹ, ㅁ은 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ의 2개이고,

공집합인 것은 ㄱ의 1개이므로

$m=2,\ n=1 \qquad \therefore m+n=3$

답 3

02

ㄱ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in M$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\notin M$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\notin M$

ㄹ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in M$

따라서 집합 M의 원소인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

03

집합 $A=\{l,\ m,\ n\}$에 대하여 $l,\ m,\ n$은 서로 다른 자연수이므로 $l<m<n$이라 하자.

$B=\{x\,|\,x=a+b,\ a\in A,\ b\in A,\ a\neq b\}$에서

$B=\{l+m,\ l+n,\ m+n\}=\{6,\ 12,\ 14\}$

이때 $l+m<l+n<m+n$이므로

$$\begin{cases} l+m=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ l+n=12 & \cdots\cdots ㉡ \\ m+n=14 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(l+m+n)=32$

$\therefore l+m+n=16 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉠, ㉡, ㉢을 ㉣에 각각 대입하여 풀면

$l=2,\ m=4,\ n=10$

$\therefore lmn=2\times4\times10=80$

답 80

04

① $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로 유한집합이다.

② $(x-1)(x-2)\le0$에서 $1\le x\le2$

이때 1보다 크거나 같고 2보다 작거나 같은 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

③ 절댓값이 0보다 작은 실수는 없다.

즉, $\varnothing$이므로 유한집합이다.

④ $\{(0,\ 0)\}$이므로 유한집합이다.

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$이므로 유한집합이다.

답 ②

05

$x\in A$일 때, $(x+2)(x+11)$의 값이 6의 배수가 되는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x+2$가 6의 배수인 경우

$x=4,\ 10,\ 16$

(ii) $x+11$이 6의 배수인 경우

$x=1,\ 7,\ 13,\ 19$

(iii) $x+2$가 2의 배수이고, $x+11$이 3의 배수인 경우

$x+2$가 2의 배수가 되도록 하는 x는

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

이 중에서 $x+11$이 3의 배수가 되도록 하는 x를 구하면

$x=4,\ 10,\ 16$

(iv) $x+2$가 3의 배수이고, $x+11$이 2의 배수인 경우

$x+2$가 3의 배수가 되도록 하는 x는

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19

이 중에서 $x+11$이 2의 배수가 되도록 하는 x를 구하면

$x=1,\ 7,\ 13,\ 19$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$x=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19$

각각의 x에 대하여 집합 B가 6의 배수인 원소를 가지므로 그 개수는 7이다.

답 7

06

$A=\{z\,|\,z=i^n,\ n$은 자연수$\}$

$\quad=\{i,\ -1,\ -i,\ 1\}$

이므로 $z\in A$이면

$z^2=1$ 또는 $z^2=-1$

이때 $z_1\in A$, $z_2\in A$이면 $z_1{}^2=1$ 또는 $z_1{}^2=-1$이고,

$z_2{}^2=1$ 또는 $z_2{}^2=-1$이므로 $z_1{}^2+z_2{}^2$의 값은 다음 표와 같다.

$z_1{}^2$ \ $z_2{}^2$	1	-1
1	2	0
-1	0	-2

즉, $B=\{-2,\ 0,\ 2\}$이므로 $n(B)=3$

답 3

보충 설명

***i*의 거듭제곱의 성질** |

$i^{4n-3}=i,\ i^{4n-2}=-1,\ i^{4n-1}=-i,\ i^{4n}=1$ (단, n은 자연수)

2 집합 사이의 포함 관계

기본+필수연습 본문 pp.157~164

11 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ **12** 8
13 풀이 참조 **14** (1) 8 (2) 8 (3) 4
15 ㄴ, ㄹ **16** ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ **17** -2
18 3 **19** 5 **20** 2 **21** 1
22 7 **23** 8 **24** 16 **25** 480
26 128 **27** 8 **28** 24 **29** 7
30 31

11

(1) $(x+2)(x-4)\le 0$에서 $-2\le x\le 4$

즉, $\{x\,|\,(x+2)(x-4)\le 0\}=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$이므로

$\{-2,\ 3\}\subset\{x\,|\,(x+2)(x-4)\le 0\}$

(2) $x(x^2-1)=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

즉, $\{x\,|\,x(x^2-1)=0\}=\{-1,\ 0,\ 1\}$에서

$0\in\{x\,|\,x(x^2-1)=0\}$이지만 $0\notin\{1,\ 2\}$이므로

$\{x\,|\,x(x^2-1)=0\}\not\subset\{1,\ 2\}$

답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$

12

두 집합 A, B가 서로 같은 집합이므로 두 집합의 모든 원소가 같다.

즉, $a+2=3$, $6=b-1$이므로

$a=1$, $b=7$

$\therefore\ a+b=1+7=8$

답 8

13

(1) 집합 $A=\{x\,|\,x$는 5 이하의 짝수인 자연수$\}=\{2,\ 4\}$이므로 집합 A의 부분집합은 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2,\ 4\}$의 $\underbrace{4}_{2^2}$개이다.

(2) 집합 $B=\{0,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}$에서 집합 B의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{0,\ \varnothing\}$, $\{0,\ \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$의 $\underbrace{7}_{2^3-1}$개이다.

답 풀이 참조

14

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$n(A)=4$

(1) 1을 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(2) 2를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(3) 1을 포함하고, 2를 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

답 (1) 8 (2) 8 (3) 4

15

집합 A의 원소는 $\varnothing$, -2, 0, 2, $\{0\}$, $\{0, 2\}$이다.

ㄱ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로

$\{\varnothing\}\subset A$ (거짓)

ㄴ. $\{0, 2\}$는 집합 A의 원소이므로

$\{\{0, 2\}\}\subset A$ (참)

ㄷ. $\{-2, 0, 2\}$는 집합 A의 원소가 아니므로

$\{-2, 0, 2\}\not\in A$ (거짓) ← -2, 0, 2는 집합 A의 원소이므로 $\{-2, 0, 2\}\subset A$

ㄹ. 0, $\{0\}$은 집합 A의 원소이므로

$\{0, \{0\}\}\subset A$ (참)

ㅁ. $\{-2, 0\}$은 집합 A의 원소가 아니므로

$\{\varnothing, \{-2, 0\}\}\not\subset A$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

16

집합 $f(A)=\{X\,|\,X\subset A\}$는 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $X\subset A$이면 $X\in f(A)$이다.

집합 $A=\{\varnothing, a, b, \{a, b\}\}$에 대하여

ㄱ. $\varnothing\subset A$이므로 $\varnothing\in f(A)$ (참)

ㄴ. $\varnothing\in A$이므로 $\{\varnothing\}\subset A$

$\therefore\ \{\varnothing\}\in f(A)$ (참)

ㄷ. $a\in A$이므로 $\{a\}\subset A$

$\therefore\ \{a\}\in f(A)$ (참)

ㄹ. $a\not\in f(A)$, $b\not\in f(A)$이므로 $\{a, b\}\not\subset f(A)$ (거짓)

ㅁ. $A\subset A$이므로 $A\in f(A)$

$\therefore\ \{A\}\subset f(A)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

보충 설명

ㄹ. $\{a, b\}\subset A$이므로 $\{a, b\}\in f(A)$

또한, $\{a, b\}\in f(A)$이므로 $\{\{a, b\}\}\subset f(A)$

17

$A\subset B$이므로 $1\in A$에서 $1\in B$이다.

즉, $a^2-3=1$ 또는 $7-a=1$이므로

$a^2-3=1$에서 $a^2=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

$7-a=1$에서 $a=6$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로

$A\subset B$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1, 11\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로

$A\not\subset B$

(iii) $a=6$일 때,

$A=\{1, 19\}$, $B=\{1, 3, 33\}$이므로

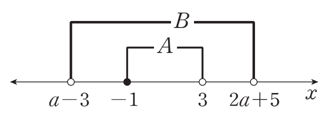
$A\not\subset B$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 -2이다.

답 -2

18

$A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a-3<-1$, $3\le 2a+5$이므로

$a-3<-1$에서 $a<2$ ······㉠

$3\le 2a+5$에서

$2a\ge -2$ $\quad\therefore\ a\ge -1$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le a<2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 3

19

$A=\{x\,|\,x^2+x-6\le 0\}$에서

$x^2+x-6\le 0$, $(x+3)(x-2)\le 0$

$\therefore\ -3\le x\le 2$

$\therefore\ A=\{x\,|\,-3\le x\le 2\}$

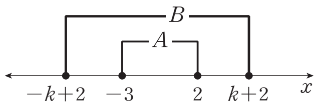
$B=\{x\,|\,|x-2|\le k\}$에서

$|x-2|\le k,\ -k\le x-2\le k$

$\therefore\ -k+2\le x\le k+2$

$\therefore\ B=\{x\,|\,-k+2\le x\le k+2\}$

이때 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $-k+2\le -3$, $2\le k+2$이므로

$-k+2\le -3$에서 $k\ge 5$ ……㉠

$2\le k+2$에서 $k\ge 0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k\ge 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다.

답 5

20

$A=B$이면 $A\subset B$, 즉 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소이므로 $4\in A$에서 $4\in B$이다.

즉, $a^2-5=4$ 또는 $a+2=4$이므로

$a^2-5=4$에서 $a^2=9$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$

$a+2=4$에서 $a=2$

(i) $a=-3$일 때,

$A=\{-6, 4, 17\}$, $B=\{-1, 4, 7\}$이므로

$A\ne B$

(ii) $a=3$일 때,

$A=\{0, 4, 17\}$, $B=\{4, 5, 7\}$이므로

$A\ne B$

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{-1, 4, 7\}$, $B=\{-1, 4, 7\}$이므로

$A=B$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$를 만족시키는 상수 a의 값은 2이다.

답 2

다른 풀이

$A=B$이면 $B\subset A$, 즉 집합 B의 모든 원소가 집합 A의 원소이므로 $7\in B$에서 $7\in A$이다.

즉, $a-3=7$ 또는 $2a^2-1=7$이므로

$a-3=7$에서 $a=10$

$2a^2-1=7$에서 $2a^2=8$, $a^2=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=10$일 때,

$A=\{4, 7, 199\}$, $B=\{7, 12, 95\}$이므로

$A\ne B$

(ii) $a=-2$일 때,

$A=\{-5, 4, 7\}$, $B=\{-1, 0, 7\}$이므로

$A\ne B$

(iii) $a=2$일 때,

$A=\{-1, 4, 7\}$, $B=\{-1, 4, 7\}$이므로

$A=B$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$를 만족시키는 상수 a의 값은 2이다.

21

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로

$A=B$

$0\in B$에서 $0\in A$이므로

$a=0$ 또는 $\dfrac{b}{a}=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $b=0$

그런데 $a\ne 0$ 이므로 $b=0$

$\therefore\ A=\{a, 0, 4\}$, $B=\{a^2, 4a, 0\}$

$4\in A$에서 $4\in B$이므로

$a^2=4$ 또는 $4a=4$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{-2, 0, 4\}$, $B=\{-8, 0, 4\}$이므로

$A\ne B$

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{0, 2, 4\}$, $B=\{0, 4, 8\}$이므로

$A\ne B$

(iii) $a=1$일 때,

$A=\{0, 1, 4\}$, $B=\{0, 1, 4\}$이므로

$A=B$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 a의 값은 1이다.

$\therefore a=1$

$\therefore a-b=1-0=1$

답 1

22

$A=B$에서 $x+1\neq x+5$이므로

$x+1=x^2-1$ 또는 $x+1=3x-1$

$x+1=x^2-1$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$x+1=3x-1$에서 $2x=2$

$\therefore x=1$

(i) $x=-1$일 때,

$A=\{-2, -1, 0\}$, $B=\{-4, 0, 4\}$이므로

$A\neq B$

(ii) $x=2$일 때,

$A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{3, 5, 7\}$이므로

$A=B$

(iii) $x=1$일 때,

$A=\{0, 2, 3\}$, $B=\{0, 2, 6\}$이므로

$A\neq B$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$를 만족시키는 실수 x의 값은 2이고, 이때 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 7이다.

답 7

23

집합 A의 원소 중에서 3의 배수는 3, 6, 9이고, 10의 약수는 1, 2, 5, 10이다.

따라서 집합 A의 부분집합 중에서 세 원소 3, 6, 9는 모두 포함하고, 네 원소 1, 2, 5, 10은 모두 포함하지 않는 집합의 개수는

$2^{10-3-4}=2^3=8$

답 8

24

집합 A에 대하여 $1\in X$, $2\in X$, $13\notin X$를 만족시키는 집합 A의 부분집합 X의 개수는 집합 $\{3, 5, 7, 11\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

답 16

25

집합 $A=\{x\,|\,x$는 $1\leq x\leq 9$인 자연수$\}$에 대하여

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로 $n(A)=9$

또한, 집합 A의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 집합 A의 부분집합 중에서 소수인 네 원소 2, 3, 5, 7 중 적어도 1개를 포함하는 집합의 개수는

$2^9-2^{9-4}=512-32=480$

답 480

26

$A=\{x\,|\,x$는 20 이하의 6의 양의 배수$\}$

$\quad=\{6, 12, 18\}$

$B=\{x\,|\,x$는 20 이하의 양의 짝수$\}$

$\quad=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$

이때 $A\subset X\subset B$이므로 집합 X는

집합 $B=\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 세 원소 6, 12, 18을 반드시 포함하는 집합이다.

따라서 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{10-3}=2^7=128$

답 128

27

$2x^2-3x-9\le 0$에서

$(2x+3)(x-3)\le 0 \qquad \therefore -\dfrac{3}{2}\le x\le 3$

$\therefore A=\{x\,|\,2x^2-3x-9\le 0,\ x$는 정수$\}$

$=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

또한, $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore B=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}$

$=\{-1, 3\}$

이때 $B\subset X\subset A$이므로 집합 X는

집합 $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 집합 B의 두 원소 -1, 3을 반드시 포함하는 집합이다.

따라서 $B\subset X\subset A$를 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

28

$n(A)=m$이라 하면

$k=4m$ (단, $\underbrace{m\le 7}_{(*)}$, m은 자연수) ······㉠

이때 $A\subset X\subset B$이므로 집합 X는

집합 $B=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$의 부분집합 중에서 집합 A의 m개의 원소 $4, 8, 12, \cdots, k$를 반드시 포함하는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{15-m}=512=2^9$

즉, $15-m=9$이므로 $m=6$

$\therefore k=4\times 6=24$ ($\because$ ㉠)

답 24

보충 설명

$(*)$에서 $A\subset B$이므로 $k\le 30$

이때 $k=4m$이므로 $4m\le 30$

$\therefore m\le 7.\times\times\times$

이때 m은 자연수이므로 $m\le 7$이다.

29

조건 (가), (나)에서 x와 $\dfrac{12}{x}$가 모두 자연수이므로 집합 A는 집합 $\underbrace{\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}}_{12\text{의 양의 약수}}$의 부분집합이다.

또한, 조건 (나)에서 $1\in A$이면 $12\in A$, $2\in A$이면 $6\in A$, $3\in A$이면 $4\in A$이므로 1과 12, 2와 6, 3과 4는 각각 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이어야 한다.

따라서 구하는 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$

답 7

보충 설명

조건을 만족시키는 집합 A는

$\{1, 12\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 6, 12\}$, $\{1, 3, 4, 12\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 7개이다.

30

조건 (가)에서 집합 B는 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합이고, 조건 (나)에서 $1\notin B$, $2\notin B$, $3\notin B$이다.

따라서 구하는 집합 B의 개수는 집합 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5-1=31$

답 31

STEP 1 개 념 마 무 리

본문 pp.165~166

07 ②	**08** ④	**09** ②	**10** 9
11 $2<k\le 3$	**12** 48	**13** 6	**14** 7
15 8	**16** 5	**17** 80	**18** 16

07

집합 A의 원소는 $\varnothing$, 0, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, 1\}$이다.

① 1은 집합 A의 원소가 아니므로

$\{\varnothing, 1\}\not\subset A$ (거짓)

② $\varnothing$, 0은 집합 A의 원소이므로

$\{\varnothing, 0\}\subset A$ (참)

③ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$은 집합 A의 원소가 아니므로

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\notin A$ (거짓)

④ $\{\varnothing, 1\}$은 집합 A의 원소이므로
$\{\varnothing, 1\} \in A$ (거짓)
⑤ $\{\varnothing\}$은 집합 A의 원소이므로
$\{\{\varnothing\}\} \subset A$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

08

집합 $A=\{\varnothing, 0, 1\}$에 대하여
$P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0\}, \{1\}, \{\varnothing, 0\}, \{\varnothing, 1\}, \{0, 1\},$
$\{\varnothing, 0, 1\}\}$
ㄱ. $\varnothing \in P(A)$ (참)
ㄴ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset P(A)$ (참)
ㄷ. $\{\varnothing, 0\}$은 집합 $P(A)$의 원소가 아니므로
$\{\varnothing, 0\} \not\subset P(A)$ (거짓)
ㄹ. $\{\varnothing\} \in P(A)$이므로 $\{\{\varnothing\}\} \subset P(A)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

다른 풀이
집합 $P(A)$의 원소를 다 구할 필요 없이 집합 $P(A)$가 집합 A의 부분집합을 원소로 갖는 집합임을 이용하여 참, 거짓을 판별해 보자.
ㄱ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset A$
$\therefore \varnothing \in P(A)$ (참)
ㄴ. $\varnothing$은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset P(A)$ (참)
ㄷ. ㄱ에서 $\varnothing \in P(A)$
그런데 $0 \notin P(A)$이므로 $\{\varnothing, 0\} \not\subset P(A)$ (거짓)
ㄹ. $\varnothing \in A$이므로 $\{\varnothing\} \subset A$
즉, $\{\varnothing\} \in P(A)$이므로 $\{\{\varnothing\}\} \subset P(A)$ (참)

09

집합 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 $a \in A$, $b \in A$일 때, $a+b$, ab의 값은 각각 다음 표와 같다.

〈$a+b$의 값〉

a \ b	-1	0	1	2
-1	-2	-1	0	1
0	-1	0	1	2
1	0	1	2	3
2	1	2	3	4

〈ab의 값〉

a \ b	-1	0	1	2
-1	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4

$\therefore B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
$C=\{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$
$\therefore A \subset C \subset B$

답 ②

10

$A \subset B$이므로 $5 \in A$에서 $5 \in B$
즉, $3-a=5$ 또는 $b+5=5$이어야 한다.
$3-a=5$에서 $a=-2$
$b+5=5$에서 $b=0$
(i) $a=-2$일 때,
$A=\{-1, 5\}$, $B=\{1, 5, b+5\}$
이때 $A \subset B$이므로 $-1 \in A$에서 $-1 \in B$
즉, $b+5=-1$이어야 하므로 $b=-6$
$\therefore a+b=-2+(-6)=-8$
(ii) $b=0$일 때,
$A=\{5, a+1\}$, $B=\{1, 3-a, 5\}$
이때 $a \neq 4$이고 $A \subset B$이므로 $(a+1) \in A$에서 $(a+1) \in B$
즉, $a+1=1$ 또는 $a+1=3-a$이어야 한다.
따라서 $a=0$ 또는 $a=1$이므로
$a+b=0+0=0$ 또는 $a+b=1+0=1$
(i), (ii)에서
$a+b$의 최댓값 M은 1, 최솟값 m은 -8이므로
$M-m=1-(-8)=9$

답 9

11

$x^2-x-12 \le 0$에서
$(x+3)(x-4) \le 0$ $\quad \therefore -3 \le x \le 4$
$\therefore A=\{x \mid -3 \le x \le 4\}$

$|x-1|<k$에서 $-k<x-1<k$

$\therefore\ -k+1<x<k+1$

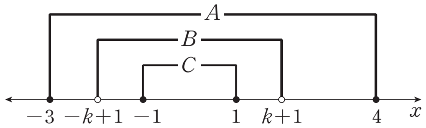
$\therefore\ B=\{x|-k+1<x<k+1\}$

$x^2\le1$에서 $x^2-1\le0$

$(x+1)(x-1)\le0 \qquad \therefore\ -1\le x\le1$

$\therefore\ C=\{x|-1\le x\le1\}$

이때 $C\subset B\subset A$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $-3\le -k+1<-1$, $1<k+1\le4$이므로

$-3\le -k+1<-1$에서 $-4\le -k<-2$

$\therefore\ 2<k\le4$ ······㉠

$1<k+1\le4$에서 $0<k\le3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는

$2<k\le3$

답 $2<k\le3$

12

$A_{25}=\{x|x$는 $\sqrt{25}$ 이하의 홀수$\}=\{x|x$는 5 이하의 홀수$\}$

$=\{1, 3, 5\}$

이때 $A_n\subset A_{25}$이려면 $\sqrt{n}<7$이어야 하므로

$n<49$

따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

답 48

보충 설명

$A_1=A_2=A_3=\cdots=A_8=\{1\}$,

$A_9=A_{10}=A_{11}=\cdots=A_{24}=\{1, 3\}$,

$A_{25}=A_{26}=A_{27}=\cdots=A_{48}=\{1, 3, 5\}$,

$A_{49}=A_{50}=A_{51}=\cdots=A_{80}=\{1, 3, 5, 7\}$

13

$A=B$이면 $A\subset B$이므로

$3\in A$에서 $3\in B$

즉, $3^2=b$이므로 $b=9$

$\therefore\ B=\{x|x^2=9,\ x$는 실수$\}=\{3, -3\}$

또한, $A=B$이면 $B\subset A$이므로 $-3\in B$에서 $-3\in A$

즉, $a=-3$이므로

$a+b=-3+9=6$

답 6

14

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore\ B=\{-2, 3\}$

이때 $A=B$이므로

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 근이 -2, 3이므로 둘 중 하나는 중근이다.

$A=\underline{\{x|x^3+ax^2+bx+c=0\}=\{-2, 3\}}$

$\therefore\ x^3+ax^2+bx+c=(x+2)^2(x-3)$

또는 $x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x-3)^2$

(i) $x^3+ax^2+bx+c=(x+2)^2(x-3)$일 때,

$c=-12$이므로 $c>0$인 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x-3)^2$일 때,

$c=18$

(i), (ii)에서 $x^3+ax^2+bx+c=(x+2)(x-3)^2$이므로

$Q(x)=x-3$

$\therefore\ Q(10)=10-3=7$

답 7

15

집합 A의 부분집합 중 원소 2 또는 4는 포함하고 원소 5는 포함하지 않는 집합의 개수는 원소 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수에서 세 원소 2, 4, 5를 모두 포함하지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

이때 집합 A의 원소의 개수는 n이므로

$2^{n-1}-2^{n-3}=96$

$2^2\times2^{n-3}-2^{n-3}=96$, $4\times2^{n-3}-2^{n-3}=96$

$3\times2^{n-3}=96$, $2^{n-3}=32$, $2^{n-3}=2^5$

즉, $n-3=5$이므로 $n=8$

답 8

16

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 원소로 짝수는 적어도 하나 포함하고, 연속된 두 자연수는 포함하지 않는 부분집합을 B라 하자.

(ⅰ) $2\in B$, $4\notin B$일 때,

$2\in B$이고 연속된 두 자연수는 포함하지 않아야 하므로

$1\notin B$, $3\notin B$

따라서 집합 B로 가능한 경우는 $\{2\}$, $\{2, 5\}$의 2가지이다.

(ⅱ) $2\notin B$, $4\in B$일 때,

$4\in B$이고 연속된 두 자연수는 포함하지 않아야 하므로

$3\notin B$, $5\notin B$

따라서 집합 B로 가능한 경우는 $\{4\}$, $\{1, 4\}$의 2가지이다.

(ⅲ) $2\in B$, $4\in B$일 때,

연속된 두 자연수는 포함하지 않아야 하므로

$1\notin B$, $3\notin B$, $5\notin B$

따라서 집합 B로 가능한 경우는 $\{2, 4\}$의 1가지이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 부분집합 B의 개수는

$2+2+1=5$

답 5

17

조건 (가)에서 $n(B)=2$이므로 집합 A의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하여 집합 B의 원소로 정하면 가능한 집합 B의 개수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(가)

그 각각의 집합 B에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 집합 C의 개수는

집합 A의 부분집합 중에서 집합 B의 2개의 원소를 반드시 포함하는 집합의 개수

$2^{5-2}=2^3=8$ ($\because$ $n(A)=5$, $n(B)=2$)

(나)

따라서 조건을 만족시키는 두 집합 B, C의 순서쌍 (B, C)의 개수는

$10\times8=80$

(다)

답 80

단계	채점 기준	배점
(가)	조건 (가)를 만족시키는 집합 B의 개수를 구한 경우	40%
(나)	조건 (가)를 만족시키는 어떤 집합 B에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 집합 C의 개수를 구한 경우	40%
(다)	두 집합 B, C의 순서쌍 (B, C)의 개수를 구한 경우	20%

18

조건 (가)에서 x와 $10-x$가 모두 자연수이므로

$x\ge1$, $10-x\ge1$에서 $1\le x\le9$

즉, 집합 A는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 부분집합이다.

또한, 조건 (가)에서 $1\in A$이면 $9\in A$, $2\in A$이면 $8\in A$, $3\in A$이면 $7\in A$, $4\in A$이면 $6\in A$이고 $5\in A$이면 $5\in A$이므로 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 각각 어느 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이어야 하고 5도 집합 A의 원소가 될 수 있다.

이때 조건 (나)에서 집합 A는 원소의 개수가 홀수이므로 5는 반드시 집합 A의 원소이어야 한다.

따라서 구하는 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

답 16

보충 설명

조건을 만족시키는 집합 A는

$\{5\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{4, 5, 6\}$,

$\{1, 2, 5, 8, 9\}$, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 4, 5, 6, 9\}$,

$\{2, 3, 5, 7, 8\}$, $\{2, 4, 5, 6, 8\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$,

$\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$,

$\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$의 16개이다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.167

1 28	**2** ③	**3** 10	**4** 24
5 256	**6** 32		

1

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 X에 대하여 $M(X)\ge3$을 만족시키는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $M(X)=3$일 때,

$3\in X$, $4\notin X$, $5\notin X$이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1-2}=2^2=4$

집합 X의 가장 큰 원소가 3이므로 3보다 큰 4, 5는 X의 원소가 될 수 없다.

(ii) $M(X)=4$일 때,

$4\in X$, $5\notin X$이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$ 집합 X의 가장 큰 원소가 4이므로 4보다 큰 5는 X의 원소가 될 수 없다.

(iii) $M(X)=5$일 때,

$5\in X$이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$4+8+16=28$

답 28

다른 풀이

$M(X)\geq 3$을 만족시키려면 집합 A의 부분집합 X는 3 이상의 원소를 적어도 하나 포함하여야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합에서 3 이상의 원소를 하나도 포함하지 않는 집합, 즉 $\{1, 2\}$의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^5-2^2=32-4=28$

2

ㄱ. $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$이므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore 1\in A(3)$ (참)

ㄴ. $6^1=6$, $6^2=36$, $6^3=216$, $\cdots$이므로

$A(6)=\{6\}$

이때 ㄱ에서 $A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$이므로

$A(6)\not\subset A(3)$ (거짓)

ㄷ. $3^3=27$이므로 $A(27)=A(7)$

이때 $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, $\cdots$이므로

$A(3^3)=\{1, 3, 7, 9\}=A(3)$

즉, $A(3^n)=A(3)$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 n이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

보충 설명

$A(3^n)=A(3)$을 만족시키는 자연수 n은

$n=2k-1$ (k는 자연수)이다.

3

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 원소의 합이 10 이상이 되려면 그 집합은 적어도 3개 이상의 원소를 가져야 하므로 다음과 같이 나누어 부분집합을 구할 수 있다.

원소가 1개일 때, 원소의 합의 최댓값은 5
원소가 2개일 때, 원소의 합의 최댓값은 $4+5=9$

(i) 원소가 3개인 부분집합

원소의 합이 10 이상인 부분집합은 $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$의 4개

(ii) 원소가 4개인 부분집합

원소가 4개인 부분집합은 모두 원소의 합이 10 이상이므로 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$의 5개

(iii) 원소가 5개인 부분집합

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 1개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$4+5+1=10$

답 10

다른 풀이

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 모든 원소의 합을 S라 하면

$S=1+2+3+4+5=15$

(i) 부분집합의 원소의 합이 10일 때,

$10=S-5$이므로 이 부분집합은 집합 A의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 합이 5가 되는 수들을 제외한 원소들의 집합으로 생각할 수 있다.

즉, 이 부분집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 원소의 합이 5인 부분집합의 개수와 같다.

이때 원소의 합이 5인 부분집합은 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{5\}$이므로 원소의 합이 10인 부분집합은 3개이다.

(ii) 부분집합의 원소의 합이 11일 때,

$11=S-4$이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면 원소의 합이 4인 부분집합은 $\{1, 3\}$, $\{4\}$이므로 원소의 합이 11인 부분집합은 2개이다.

(iii) 부분집합의 원소의 합이 12일 때,

$12=S-3$이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면 원소의 합이 3인 부분집합은 $\{1, 2\}$, $\{3\}$이므로 원소의 합이 12인 부분집합은 2개이다.

(iv) 부분집합의 원소의 합이 13 또는 14일 때,

$13=S-2$, $14=S-1$이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면 원소의 합이 2 또는 1인 부분집합은 $\{2\}$, $\{1\}$이므로 원소의 합이 13 또는 14인 부분집합은 2개이다.

(v) 부분집합의 원소의 합이 15일 때,

집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 1개이다.

(i)~(v)에서 구하는 부분집합의 개수는

$3+2+2+2+1=10$

4

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 원소 중에서 두 원소의 차가 4인 원소는 1, 5 또는 2, 6 또는 3, 7이다.

(i) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 5, 1일 때,

$1\in X$, $5\in X$, $\underbrace{6\notin X,\ 7\notin X}_{\text{5보다 큰 6, 7은 집합 }X\text{의 원소가 될 수 없다.}}$이어야 하므로

집합 X의 개수는 $2^{7-4}=2^3=8$

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 6, 2일 때,

$2\in X$, $6\in X$, $\underbrace{1\notin X,\ 7\notin X}_{\text{2보다 작은 1과 6보다 큰 7은 집합 }X\text{의 원소가 될 수 없다.}}$이어야 하므로

집합 X의 개수는 $2^{7-4}=2^3=8$

(iii) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 7, 3일 때,

$3\in X$, $7\in X$, $\underbrace{1\notin X,\ 2\notin X}_{\text{3보다 작은 1, 2는 집합 }X\text{의 원소가 될 수 없다.}}$이어야 하므로

집합 X의 개수는 $2^{7-4}=2^3=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$8+8+8=24$

답 24

다른 풀이

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 원소 중에서 두 원소의 차가 4인 원소는 1, 5 또는 2, 6 또는 3, 7이다.

(i) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 5, 1일 때,

집합 X의 개수는 집합 $\{2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$

(ii) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 6, 2일 때,

집합 X의 개수는 집합 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$

(iii) 집합 X의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소가 각각 7, 3일 때,

집합 X의 개수는 집합 $\{4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$

(i), (ii), (iii)에서 $8+8+8=24$

5

$A=\{x\mid x\text{는 60의 양의 약수}\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{240}{n},\ n\text{과 }x\text{는 자연수}\right\}$에서

$B=\{x\mid x\text{는 240의 양의 약수}\}$이므로 $A\subset B$

$60=2^2\times3\times5$, $240=2^4\times3\times5$이므로

$n(A)=(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$

$n(B)=(4+1)\times(1+1)\times(1+1)=20$

따라서 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{20-12}=2^8=256$

답 256

보충 설명

소인수분해를 이용하여 약수의 개수 구하기 |

자연수 N이

$N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)

으로 소인수분해 될 때, N의 약수의 개수는

$\underbrace{(m+1)}_{a^m\text{의 약수의 개수}}\times\underbrace{(n+1)}_{b^n\text{의 약수의 개수}}$

6

집합 $A=\{-3, -1, 0, 2, 4\}$의 부분집합 중에서

(i) -3을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) -1을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(iii) 0을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(iv) 2를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(v) 4를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

(i)~(v)에서

$S(A_1)+S(A_2)+S(A_3)+\cdots+S(\underbrace{A_n}_{n(A)=5\text{이므로 }n=32})$

$=16\times(-3)+16\times(-1)+16\times0+16\times2+16\times4$

$=16\times\{(-3)+(-1)+0+2+4\}$

$=16\times2=32$

답 32

06. 집합의 연산

① 집합의 연산

기본 + 필수연습 본문 pp.174~178

01 (1) $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$
(3) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$ (4) $\{8,\ 10\}$
02 32 **03** $\{3,\ 4,\ 7,\ 8\}$
04 ㄱ, ㄷ, ㄹ **05** 1 **06** $\{2,\ 9,\ 12\}$
07 6 **08** ㄱ, ㄷ, ㅂ **09** 7
10 $1<k\le 6$ **11** 4 **12** 32 **13** 4

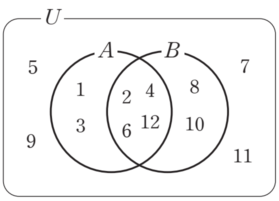
01

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$이므로
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$,
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$
(1) $A\cap B=\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$
(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$
(3) $B^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$
(4) $B-A=\{8,\ 10\}$

답 (1) $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ (2) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$
(3) $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$ (4) $\{8,\ 10\}$

보충 설명

벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



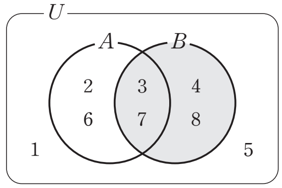
02

집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합 중에서 집합 $\{3,\ 5\}$와 서로소인 집합의 개수는 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로 ← 집합 $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}$의 부분집합의 개수와 같다.
$2^{7-2}=2^5=32$

답 32

03

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $(A\cup B)^C=\{1,\ 5\}$,
$A-B=\{2,\ 6\}$, $B-A=\{4,\ 8\}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

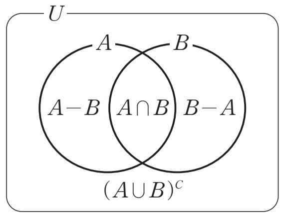


$\therefore\ B=\{3,\ 4,\ 7,\ 8\}$

답 $\{3,\ 4,\ 7,\ 8\}$

보충 설명

벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 집합은 다음과 같다.



04

ㄱ. $(A\cap B)\subset A$이므로
$A\cup(A\cap B)=A$ (참)
ㄴ. $(B-A)\cap A=\varnothing$이므로
$(B-A)\not\subset A$ (거짓)
ㄷ. $B\cup\varnothing=B$ (참)
ㄹ. $\varnothing^C=U$ (참)
따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

05

$A\cap B=\{1,\ 2\}$이므로 $2\in A$
즉, $a^2+a=2$이므로 $a^2+a-2=0$
$(a+2)(a-1)=0\qquad\therefore\ a=-2$ 또는 $a=1$
(i) $a=-2$일 때,
$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{-2,\ 1,\ 2\}$이므로 $A\cap B=\{1,\ 2\}$
(ii) $a=1$일 때,
$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 4,\ 5\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A=\{1, 2\}$, $B=\{-2, 1, 2\}$이므로

$A\cup B=\{-2, 1, 2\}$

따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은

$-2+1+2=1$

답 1

06

$(A-B)\subset A$에서 $5\in A$이므로 $a^2-4=5$

$a^2=9$　　$\therefore$ $a=3$ 또는 $a=-3$

(ⅰ) $a=3$일 때,

$A=\{3, 5, 9, 12\}$, $B=\{2, 9, 12\}$이므로

$A-B=\{3, 5\}$

(ⅱ) $a=-3$일 때,

$A=\{3, 5, 9, 12\}$, $B=\{3, 6, 8\}$이므로

$A-B=\{5, 9, 12\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $B=\{2, 9, 12\}$

답 $\{2, 9, 12\}$

07

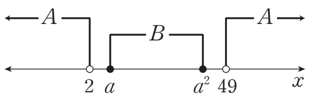
$A=\{x\mid(x-2)(x-49)>0\}=\{x\mid x<2$ 또는 $x>49\}$

a가 자연수이므로 $a\le a^2$에서

$B=\{x\mid(x-a)(x-a^2)\le 0\}$

$=\{x\mid a\le x\le a^2\}$

이때 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이 되기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $a\ge 2$, $a^2\le 49$를 동시에 만족시켜야 하므로

$a\ge 2$, $-7\le a\le 7$　　$\therefore$ $2\le a\le 7$

따라서 구하는 자연수 a는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 6

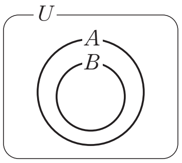
08

두 집합 A^C, B가 서로소이므로 $A^C\cap B=\varnothing$

즉, $B-A=\varnothing$에서 $A\cap B=B$이므로

$B\subset A$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $B-A=\varnothing$ (참)

ㄴ. $A\cap B=B$ (거짓)

ㄷ. $B\subset A$ (참)

ㄹ. $B\subset A$이므로 $A\cup B=A$ (거짓)

ㅁ. $A^C\cup B\ne U$ (거짓)

ㅂ. ㄹ에서 $A\cup B=A$이므로

$(A\cup B)^C=A^C$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅂ

09

$A\cap B=B$이므로 $B\subset A$이다.

(ⅰ) $B=\varnothing$인 경우

방정식 $mx=x+3$, 즉 $(m-1)x=3$의 해가 존재하지 않아야 한다.

이 방정식이 $0\times x=3$의 꼴일 때 해가 없으므로

$m=1$

(ⅱ) $B\ne\varnothing$인 경우 ← $m\ne 1$일 때, $mx=x+3$은 일차방정식이므로 $n(B)=1$이다.

$B=\{1\}$일 때, $m=4$

$B=\{3\}$일 때, $3m=6$　　$\therefore$ $m=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$1+4+2=7$

답 7

10

$A\cup C=C$에서 $A\subset C$

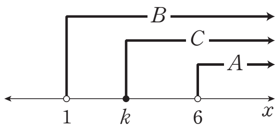
$B\cap C=C$에서 $C\subset B$

$\therefore$ $A\subset C\subset B$

이때 $A=\{x\mid 7-x<1\}=\{x\mid x>6\}$,

$B=\{x\mid 3x+1>4\}=\{x\mid x>1\}$, $C=\{x\mid x\ge k\}$이므로

$A\subset C\subset B$이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore$ $1<k\le 6$

답 $1<k\le 6$

보충 설명

$k=1$이면 $1\notin B$, $1\in C$이므로 $C\not\subset B$

$k=6$이면 $6\in C$, $6\notin A$이므로 $A\subset C$

11

$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$

$\therefore \{-2\}\subset X$ ……㉠

$B^C\cap X=X$에서 $X\subset B^C$

$\therefore X\subset\{-2, 2, 3\}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\{-2\}\subset X\subset\{-2, 2, 3\}$

이를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{-2, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 -2를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

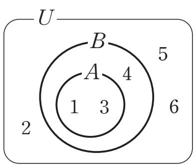
따라서 집합 X의 개수는

$2^{3-1}=2^2=4$

답 4

12

세 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 4\}$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $A\subset B$이므로 $A\cap X=B\cap X$를 만족시키려면

$(B-A)\not\subset X$

이때 $B-A=\{4\}$이므로 집합 X는 집합 U의 부분집합 중에서 4를 반드시 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

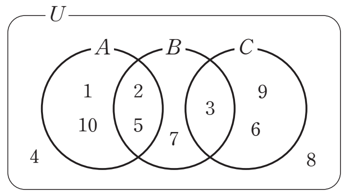
$2^{6-1}=2^5=32$

답 32

13

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{3, 6, 9\}$이고, 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$A\cap C=\varnothing$이므로 $(A\cap C)\cup X=\varnothing\cup X=X$

즉, $(A\cap B)\cup X=(A\cap C)\cup X$에서 $(A\cap B)\cup X=X$이므로

$(A\cap B)\subset X$

$\therefore \{2, 5\}\subset X$ ……㉠

또한, 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로

$X\subset A$

$\therefore X\subset\{1, 2, 5, 10\}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\{2, 5\}\subset X\subset\{1, 2, 5, 10\}$

이를 만족시키는 집합 X는 집합 $\{1, 2, 5, 10\}$의 부분집합 중에서 2, 5를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

답 4

STEP 1 개 념 마 무 리

본문 pp.179~180

01 2	**02** 369	**03** 5	**04** 4
05 ④	**06** ③	**07** 14	**08** 12
09 ①	**10** 6	**11** 128	**12** 8

01

모든 자연수 a에 대하여 $a^2+1>a$이므로

$A=\{x\,|\,x^2-(a^2+a+1)x+a^3+a\le 0\}$

$\quad=\{x\,|\,x^2-(a^2+a+1)x+a(a^2+1)\le 0\}$

$\quad=\{x\,|\,(x-a)\{x-(a^2+1)\}\le 0\}$

$\quad=\{x\,|\,a\le x\le a^2+1\}$

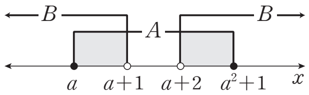
또한, 모든 자연수 a에 대하여 $a+1<a+2$이므로

$B=\{x\,|\,x^2-(2a+3)x+(a+1)(a+2)>0\}$

$\quad=\{x\,|\,\{x-(a+1)\}\{x-(a+2)\}>0\}$

$\quad=\{x\,|\,x<a+1$ 또는 $x>a+2\}$

이때 자연수 a에 대하여 $a<a+1<a+2$이므로
$A\cap B=\{x|2\le x<3$ 또는 $4<x\le 5\}$를 만족시키기 위해서는 $A\cap B$가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $a=2$, $a+1=3$, $a+2=4$, $a^2+1=5$이므로
$a=2$

답 2

02

집합 B의 원소는 모두 자연수의 제곱수이고,
$(A\cap B)\subset B$에서 $\{c, d\}\subset B$이므로 c, d는 자연수의 제곱수이다.
이때 $c+d=25$이므로 $c+d=9+16=3^2+4^2$의 경우만 가능하다.
$\therefore A\cap B=\{c, d\}=\{9, 16\}$
한편, $(A\cap B)\subset A$에서 $9\in A$, $16\in A$이고
$(A\cap B)\subset B$에서 $9\in B$, $16\in B$이므로
$\sqrt{9}\in A$, $\sqrt{16}\in A$ $\quad\therefore 3\in A$, $4\in A$
즉, $A=\{3, 4, 9, 16\}$, $B=\{9, 16, 81, 256\}$이므로
$A\cup B=\{3, 4, 9, 16, 81, 256\}$
따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은
$3+4+9+16+81+256=369$

답 369

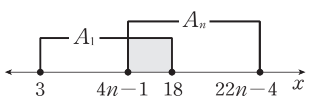
03

두 집합 A, B가 서로소가 아니므로 $A\cap B\neq\varnothing$이다.
$x^2-1\in A$에서 $x^2-1\in B$이면 A, B는 서로소가 아니므로
(i) $x^2-1=2$일 때, $x^2=3$에서
$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$
그런데 x는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $x^2-1=x+1$일 때, $x^2-x-2=0$에서
$(x+1)(x-2)=0 \quad\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
$x=-1$일 때, $A=\{0, 1, 5\}$, $B=\{0, 2\}$에서
$A\cap B=\{0\}$이므로 집합 A, B는 서로소가 아니다.
$x=2$일 때, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$에서
$A\cap B=\{3\}$이므로 집합 A, B는 서로소가 아니다.
한편, $x+1\in B$에서 $x+1\in A$이면 A, B는 서로소가 아니므로
(iii) $x+1=1$, 즉 $x=0$일 때,
$A=\{-1, 1, 5\}$, $B=\{1, 2\}$에서
$A\cap B=\{1\}$이므로 집합 A, B는 서로소가 아니다.
(iv) $x+1=5$, 즉 $x=4$일 때,
$A=\{1, 5, 15\}$, $B=\{2, 5\}$에서
$A\cap B=\{5\}$이므로 집합 A, B는 서로소가 아니다.
(v) $x+1=x^2-1$일 때,
(ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=2$
(i)~(v)에서 구하는 정수 x의 값은 -1, 2, 0, 4이므로 그 합은
$-1+2+0+4=5$

답 5

04

$A_1=\{x|3\le x\le 18\}$, $A_2=\{x|7\le x\le 40\}$,
$A_3=\{x|11\le x\le 62\}$, $\cdots$, $A_n=\{x|4n-1\le x\le 22n-4\}$
이므로 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n\neq\varnothing$이 성립하려면
$A_1\cap A_n\neq\varnothing$이어야 한다.
즉, 오른쪽 그림에서
$4n-1\le 18$, $4n\le 19$
$\therefore n\le\dfrac{19}{4}$



따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 4이다.

답 4

보충 설명

$A_1=\{x|3\le x\le 18\}$, $A_2=\{x|7\le x\le 40\}$,
$A_3=\{x|11\le x\le 62\}$, $A_4=\{x|15\le x\le 84\}$,
$A_5=\{x|19\le x\le 106\}$이므로
$\underbrace{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}_{\{x|15\le x\le 18\}}\neq\varnothing$, $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5=\varnothing$

05

$45=3^2\times 5$이므로
$C=\{x|x$는 45와 서로소인 수$\}$
$=\{x|x$는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수$\}$

이때 $A=\{x|x$는 3의 배수$\}$, $B=\{x|x$는 5의 배수$\}$이므로

$A^C=\{x|x$는 3의 배수가 아닌 수$\}$

$B^C=\{x|x$는 5의 배수가 아닌 수$\}$

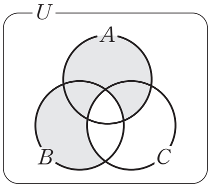
$\therefore C=A^C\cap B^C$

답 ④

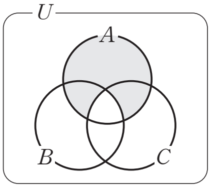
06

①~⑤의 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.

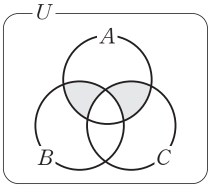
① $\{A\cup(B-C)\}-(B\cap C)$



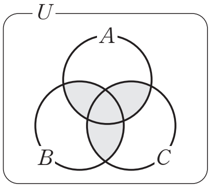
② $\{A\cup(B\cap C)\}-(B\cap C)$



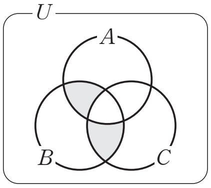
③ $\{A\cap(B\cup C)\}-(B\cap C)$



④ $\{A\cap(B\cup C)\}\cup(B\cap C)$



⑤ $\{B\cap(A\cup C)\}-(A\cap C)$

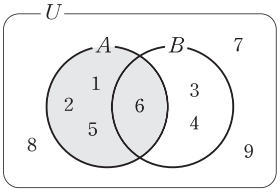


따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ③이다.

답 ③

07

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A\cap B=\{6\}$, $A^C\cap B=\{3, 4\}$, $A^C\cap B^C=\{7, 8, 9\}$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



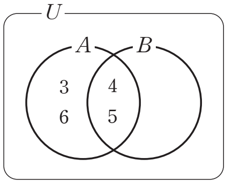
따라서 $A=\{1, 2, 5, 6\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+2+5+6=14$

답 14

08

조건 (가)에서 $A=\{3, 4, 5, 6\}$, $A^C\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$이므로 집합 A를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



조건 (나)를 만족시키는 집합 X에 대하여 $a\in X$라 하면

$X=\{a\}$

(i) $a\in(A-B)$, 즉 $a\in\{3, 6\}$일 때,

$A\cup X=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup X)-B=\{3, 6\}$

즉, 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 2이다.

(ii) $a\in(A\cap B)$, 즉 $a\in\{4, 5\}$일 때,

$A\cup X=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$(A\cup X)-B=\{3, 6\}$

즉, 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 2이다.

(iii) $a\in(B-A)$일 때,

$A\cup X=\{3, 4, 5, 6, a\}$이므로

$(A\cup X)-B=\{3, 6\}$

즉, 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 2이다.

(iv) $a\in(A^C\cap B^C)$일 때,

$A\cup X=\{3, 4, 5, 6, a\}$이므로

$(A\cup X)-B=\{3, 6, a\}$

즉, 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수는 3이다.

(i)~(iv)에서 조건 (나)를 만족시키려면 $A^C\cap B^C=\varnothing$이어야 하므로 $A^C\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$에서

$B=\{1, 2, 4, 5\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

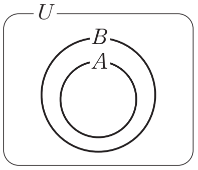
$1+2+4+5=12$

답 12

09

서로 다른 두 집합 A, B에 대하여 집합 $A-B$, $B-A$는 항상 서로소이므로 $(A-B)\subset(B-A)$를 만족시키기 위해서는 $A-B=\varnothing$이어야 한다.

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



① $A\subset B$

② $B-A\neq\varnothing$일 때, $B\not\subset A$

③ $A\neq\varnothing$일 때, $A\cap B=A\neq\varnothing$

④ $B\neq U$일 때, $A\cup B=B\neq U$

⑤ $B=U$일 때, $A\cup B=U$

따라서 항상 성립하는 것은 ①이다.

답 ①

10

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}$,

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$

(가)

이때 $(A\cap B)-X=\varnothing$이므로

$(A\cap B)\subset X$

또한, $(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore$ $(A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$

즉, 집합 X는 집합 $A\cup B$의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

(나)

그런데 집합 X의 모든 원소의 합이 29이고,

$1+2+3+6=12$이므로 1, 2, 3, 6을 제외한 집합 X의 원소의 합은 17이 되어야 한다.

이때 4, 8, 9, 12, 18, 24 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 17이 되는 경우는 8, 9를 선택하는 경우뿐이므로

$X=\{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$

따라서 집합 X의 원소의 개수는 6이다.

(다)

답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	두 집합 $A\cap B$, $A\cup B$의 원소를 구한 경우	20%
(나)	집합 X의 연산과 포함 관계에 대한 조건을 이용하여 집합 X가 반드시 갖는 원소를 찾은 경우	40%
(다)	집합 X의 모든 원소의 합에 대한 조건을 이용하여 집합 X를 구하고, 그 원소의 개수를 구한 경우	40%

11

$A=\{x\,|\,x$는 10 미만의 소수$\}=\{2, 3, 5, 7\}$,

$B=\{x\,|\,x^2\leq 25$, x는 자연수$\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$A\cup C=B\cup C$에서 $\{2, 3, 5, 7\}\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cup C$

이므로 집합 C는 두 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공통인 원소 2, 3, 5를 제외한 나머지 원소 1, 4, 7을 반드시 원소로 가져야 한다.

즉, 집합 C는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 부분집합 중에서 1, 4, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{10-3}=2^7=128$

답 128

12

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$C=\{5, 10, 15, 20\}$

조건 (가)에서 $X-A=\varnothing$이므로

$X\subset A$ ……㉠

조건 (나)에서 X는 B와 서로소이므로

$X\cap B=\varnothing$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $X\subset(A-B)=\{5, 7, 8, 9, 10\}$

한편, 조건 (다)에서 $n(X\cap C)=2$이므로 $X\cap C=\{5, 10\}$

즉, 집합 X는 집합 $\{5, 7, 8, 9, 10\}$의 부분집합 중에서 5, 10을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

2 집합의 연산 법칙

기본 + 필수연습 본문 pp.183~186

14 $\{2, 7\}$

15 (1) $\{6\}$ (2) $\{1, 2, 5, 6\}$ (3) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (4) $\{1, 2\}$

16 (1) A (2) B **17** 18 **18** 16

19 12 **20** 28 **21** 22 **22** 5

23 ㄴ, ㄷ

14

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$ ← 분배법칙

$=\{2, 5, 6, 7\}\cap\{2, 3, 4, 5, 7\}$

$=\{2, 5, 7\}$

답 $\{2, 5, 7\}$

다른 풀이

$A\cap B=\{2, 5\}$, $A\cap C=\{5, 7\}$이므로

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2, 5\}\cup\{5, 7\}$

$=\{2, 5, 7\}$

15

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$

(1) $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$ ← 드모르간의 법칙

$=U-(A\cup B)$

$=\{6\}$

(2) $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$ ← 드모르간의 법칙

$=U-(A\cap B)$

$=\{1, 2, 5, 6\}$

(3) $(B^C-A)^C=(B^C\cap A^C)^C$ ← 차집합의 성질

$=B\cup A$ ← 드모르간의 법칙

$=A\cup B$ ← 교환법칙

$=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(4) $A\cap(A-B^C)^C=A\cap\{A\cap(B^C)^C\}^C$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(A\cap B)^C$

$=A-(A\cap B)$ ← 차집합의 성질

$=\{1, 2, 3, 4\}-\{3, 4\}$

$=\{1, 2\}$

답 (1) $\{6\}$ (2) $\{1, 2, 5, 6\}$ (3) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (4) $\{1, 2\}$

다른 풀이

(4) $A\cap(A-B^C)^C=A\cap\{A\cap(B^C)^C\}^C$ ← 차집합의 성질

$=A\cap(A\cap B)^C$

$=A\cap(A^C\cup B^C)$ ← 드모르간의 법칙

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$ ← 분배법칙

$=\varnothing\cup(A-B)$ ← 차집합의 성질

$=A-B$

$=\{1, 2, 3, 4\}-\{3, 4, 5\}$

$=\{1, 2\}$

16

(1) $(A\cup B)\cap(A\cup B^C)=A\cup(B\cap B^C)$ ← 분배법칙

$=A\cup\varnothing$

$=A$

(2) $\{A-(B-A^C)^C\}\cup(B-A)$

$=\{A-(B\cap A)^C\}\cup(B\cap A^C)$ ← 차집합의 성질

$=\{A\cap(B\cap A)\}\cup(B\cap A^C)$ ← 차집합의 성질

$=\{A\cap(A\cap B)\}\cup(B\cap A^C)$ ← 교환법칙

$=\{(A\cap A)\cap B\}\cup(B\cap A^C)$ ← 결합법칙

$=(A\cap B)\cup(B\cap A^C)$

$=(B\cap A)\cup(B\cap A^C)$ ← 교환법칙

$=B\cap(A\cup A^C)$ ← 분배법칙

$=B\cap U=B$

답 (1) A (2) B

17

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$(B^C-A)^C-B=(B^C\cap A^C)^C\cap B^C$ ← 차집합의 성질

$=(B\cup A)\cap B^C$ ← 드모르간의 법칙

$=(B\cap B^C)\cup(A\cap B^C)$ ← 분배법칙

$=\varnothing\cup(A-B)$ ← 차집합의 성질

$=A-B$

$=\{8, 10\}$

따라서 집합 $(B^C-A)^C-B$의 모든 원소의 합은

$8+10=18$

답 18

18

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C=\{1, 2\}$이므로

$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore (A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ← 대칭차집합의 성질

$=\{3, 4, 5, 6, 7\}-\{3, 6\}$

$=\{4, 5, 7\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$4+5+7=16$

답 16

19

A_k는 자연수 k의 배수인 자연수의 집합이므로

$A_4\cap(A_3\cup A_2)=(A_4\cap A_3)\cup(A_4\cap A_2)$

$=A_{12}\cup A_4$ ← 4, 2의 최소공배수

$=A_4$ ← 4, 3의 최소공배수

따라서 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 50\}$의 원소 중에서 4의 배수는 12개이므로 구하는 원소의 개수는 12이다.

답 12

20

$A_{12}\cap A_8=A_{24}$이므로 $A_m\subset(A_{12}\cap A_8)$에서 ← 12, 8의 최소공배수

$A_m\subset A_{24}$

즉, m은 24의 배수이므로 m의 최솟값은 24이다.

$(A_{16}\cup A_{12})\subset A_n$에서

$A_{16}\subset A_n$, $A_{12}\subset A_n$

즉, n은 16의 약수이면서 12의 약수이므로 n은 16과 12의 공약수이다. 이 중에서 n의 최댓값은 16과 12의 최대공약수인 4이다.

따라서 m의 최솟값과 n의 최댓값의 합은

$24+4=28$

답 28

21

50 이하의 자연수 n에 대하여 다음 두 조건이 성립해야 한다.

(i) $A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 $2n$은 n과 2의 최소공배수이므로 n은 홀수이다.

(ii) 50이 집합 A_2-A_n의 원소이므로 n은 50의 약수가 아니다. ← $50\notin A_n$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n은 50 이하의 자연수 중에서 50의 약수 1, 2, 5, 10, 25, 50이 아닌 홀수이므로 그 개수는

$25-3=22$ ← 1, 5, 25 / 홀수의 개수

답 22

22

$A\bigstar B=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$=A\cup(B\cap B^C)$ ← 분배법칙

$=A\cup\varnothing=A$,

$A\bigstar A=(A\cup A)\cap(A\cup A^C)$

$=A\cap U$

$=A$

$\therefore (A\bigstar B)\bigstar A=A\bigstar A$

$=A$

$=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 $(A\bigstar B)\bigstar A$의 원소의 개수는 5이다.

답 5

23

ㄱ. $A*A^C=(A\cup A^C)-(A\cap A^C)$

$=U-\varnothing$

$=U$ (거짓)

ㄴ. $A^C*B^C=(A^C\cup B^C)-(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap B)^C-(A\cup B)^C$ ← 드모르간의 법칙

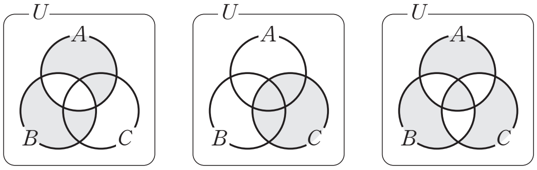
$=(A\cap B)^C\cap(A\cup B)$ ← 차집합의 성질

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$ ← 교환법칙

$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ← 차집합의 성질

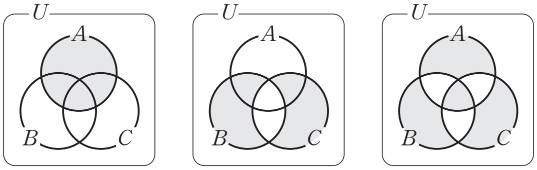
$=A*B$ (참)

ㄷ. $(A*B)*C$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$(A*B)$ $*$ C $=$ $(A*B)*C$

또한, $A*(B*C)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



A $*$ $(B*C)$ $=$ $A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

보충 설명

ㄷ. $(A\cup B)-(A\cap B)$는 대칭차집합이므로 연산 $*$에 대한 결합법칙 $(A*B)*C=A*(B*C)$가 성립함을 알 수 있다.

STEP 1 개념 마무리

본문 p.187

13 16	**14** ②	**15** ①	**16** ㄴ, ㄷ
17 ③	**18** ㄱ		

13

집합 A는 자연수를 6으로 나눈 나머지의 집합이므로

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $B=\{1, 5\}$이고

$(B^C\cup C)\cap B=(B^C\cap B)\cup(C\cap B)$ ← 분배법칙

$=\varnothing\cup(B\cap C)$ ← 교환법칙

$=B\cap C$

$=\{5\}$

이므로 집합 C는 집합 A의 부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{6-1-1}=2^4=16$

답 16

14

ㄱ. $(A-B)^C\cap A=(A\cap B^C)^C\cap A$ ← 차집합의 성질

$=(A^C\cup B)\cap A$ ← 드모르간의 법칙

$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$ ← 분배법칙

$=\varnothing\cup(A\cap B)$ ← 교환법칙

$=A\cap B$ (참)

ㄴ. $(A\cap B)-(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$ ← 차집합의 성질

$=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)$ ← 드모르간의 법칙

$=\{A\cap(A^C\cup C^C)\}\cap B$ ← 교환법칙, 결합법칙

$=\{(A\cap A^C)\cup(A\cap C^C)\}\cap B$ ← 분배법칙

$=\{\varnothing\cup(A\cap C^C)\}\cap B$

$=(A\cap C^C)\cap B$

$=A\cap(B\cap C^C)$ ← 교환법칙, 결합법칙

$=A\cap(B-C)$ (참)

ㄷ. $\{A\cup(A^C\cap B)\}\cap\{\underbrace{A\cap(A\cup B)}_{=A}\}$

$=\{(A\cup A^C)\cap(A\cup B)\}\cap A$ ← 분배법칙

$=\{U\cap(A\cup B)\}\cap A$

$=(A\cup B)\cap A=A$ (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

15

$\{A\cap(A\cup B^C)^C\}\cup(A\cap B)$

$=\{A\cap(A^C\cap B)\}\cup(A\cap B)$ ← 드모르간의 법칙

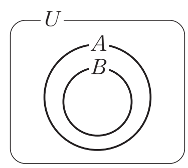
$=\{(A\cap A^C)\cap B\}\cup(A\cap B)$ ← 결합법칙

$=(\varnothing\cap B)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

즉, $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$이다.

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A\cap B=B$ (참)

ㄴ. $B\subset A$이므로 $A^C\subset B^C$ (참)

ㄷ. $A-B\neq\varnothing$ (거짓)

ㄹ. $A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$

이때 ㄷ에서 $A-B\neq\varnothing$이므로 $A^C\cup B\neq U$ (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

16

ㄱ. A_3은 3의 배수인 자연수의 집합이고, A_4는 4의 배수인 자연수의 집합이므로 $A_3 \cap A_4 = A_{12}$

$\therefore A_3 \cap A_4 \neq A_6$ (거짓)

ㄴ. B_2는 2와 서로소인 자연수의 집합이므로 홀수의 집합이다.

최대공약수가 1인 두 자연수

또한, A_2는 2의 배수인 자연수의 집합이므로 짝수의 집합이다.

$\therefore A_2 \cup B_2 = \{x \mid x$는 자연수$\}$ (참)

ㄷ. B_2는 홀수의 집합이고 B_3은 3과 서로소인 자연수의 집합이므로

$B_2 \cap B_3 = \{1, 5, 7, 11, \cdots\}$

또한, B_6은 6과 서로소인 자연수의 집합이고 $6 = 2 \times 3$이므로 B_6은 2와 서로소이면서 3과 서로소인 자연수의 집합이다.

즉, $B_6 = \{1, 5, 7, 11, \cdots\}$이므로

$B_2 \cap B_3 = B_6$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

17

ㄱ. $A \triangle U = (A - U) \cup (U - A)$

$\quad = \varnothing \cup A^C$

$\quad = A^C$ (참)

ㄴ. $B \triangle (B - A) = \{B - (B - A)\} \cup \{(B - A) - B\}$

$\quad = (A \cap B) \cup \varnothing$

$\quad = A \cap B$

즉, $A \cap B = \varnothing$이면 두 집합 A, B는 서로소이므로

$A \neq B$ (거짓)

ㄷ. $A \triangle A = (A - A) \cup (A - A)$

$\quad = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

$A \triangle A \triangle A = (A \triangle A) \triangle A$

$\quad = \varnothing \triangle A$

$\quad = (\varnothing - A) \cup (A - \varnothing)$

$\quad = \varnothing \cup A = A$

$A \triangle A \triangle A \triangle A = (A \triangle A \triangle A) \triangle A$

$\quad = A \triangle A = \varnothing$

$\vdots$

즉, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\underbrace{A \triangle A \triangle A \triangle \cdots \triangle A}_{A\text{가 } n\text{개}} = \begin{cases} A & (n\text{이 홀수}) \\ \varnothing & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore \underbrace{A \triangle A \triangle A \triangle \cdots \triangle A}_{A\text{가 } 99\text{개}} = A \text{ (참)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

18

$X \circledcirc Y = X^C - Y$

$\quad = X^C \cap Y^C$

$\quad = (X \cup Y)^C$

ㄱ. $A \circledcirc B = (A \cup B)^C = (B \cup A)^C = B \circledcirc A$ (참)

ㄴ. $(A \circledcirc B)^C = \{(A \cup B)^C\}^C = A \cup B$

$A^C \circledcirc B^C = (A^C \cup B^C)^C = A \cap B$

$\therefore (A \circledcirc B)^C \neq A^C \circledcirc B^C$ (거짓)

ㄷ. $(A \circledcirc B) \circledcirc C = (A \cup B)^C \circledcirc C$

$\quad = \{(A \cup B)^C \cup C\}^C$

$\quad = (A \cup B) \cap C^C$

$\quad = (A \cup B) - C$

$A \circledcirc (B \circledcirc C) = A \circledcirc (B \cup C)^C$

$\quad = \{A \cup (B \cup C)^C\}^C$

$\quad = A^C \cap (B \cup C)$

$\quad = (B \cup C) \cap A^C$

$\quad = (B \cup C) - A$

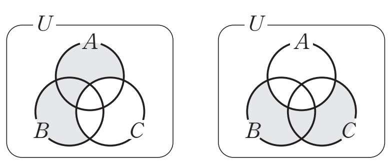
$\therefore (A \circledcirc B) \circledcirc C \neq A \circledcirc (B \circledcirc C)$ (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

보충 설명

ㄷ을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$(A \circledcirc B) \circledcirc C \quad \neq \quad A \circledcirc (B \circledcirc C)$

3 유한집합의 원소의 개수

기본 + 필수연습

본문 pp.190~193

24 6 **25** (1) 8 (2) 9 (3) 3 (4) 17
26 (1) 5 (2) 16 **27** 14 **28** 21
29 42 **30** 13 **31** 9 **32** 4
33 130

24

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=20+15-29=6$

답 6

25

(1) $n(B^C)=n(U)-n(B)$

$=35-27=8$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=21+27-30=18$

$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=27-18=9$

(3) $n(A\cap B^C)=n(A-B)$

$=n(A)-n(A\cap B)$

$=21-18=3$

(4) $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$에서

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=35-18=17$

답 (1) 8 (2) 9 (3) 3 (4) 17

26

(1) $n(A-B^C)=n(A\cap (B^C)^C)$

$=n(A\cap B)=13$

이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=32+21-13=40$

$\therefore n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=45-40=5$

(2) $(C-A)\cup(C-B)=(C\cap A^C)\cup(C\cap B^C)$

$=C\cap(A^C\cup B^C)$

$=C\cap(A\cap B)^C$

$=C-(A\cap B)$

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$

$=15+18-28=5$

$n((A\cap B)\cup(A\cap C))=n(A\cap(B\cup C))$

$=n(A)-n(A-(B\cup C))$

$=15-3$

$=12$

$\therefore n(A\cap B\cap C)$

$=n(A\cap B)+n(A\cap C)$

$-n((A\cap B)\cup(A\cap C))$

$=9+5-12=2$

$\therefore n((C-A)\cup(C-B))=n(C-(A\cap B))$

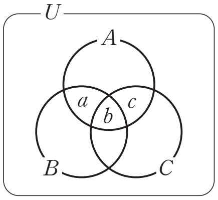
$=n(C)-n(A\cap B\cap C)$

$=18-2=16$

답 (1) 5 (2) 16

다른 풀이

(2) 다음 벤 다이어그램과 같이 집합 $A\cap(B\cup C)$의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c라 하자.



$n(A\cap(B\cup C))=n(A)-n(A-(B\cup C))$

$=15-3=12$

$\therefore a+b+c=12$ ……㉠

$n(A\cap B)=9$이므로

$a+b=9$ ……㉡

$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$

$=15+18-28=5$

$\therefore b+c=5$ ……㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=3$

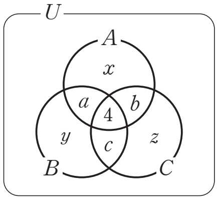
이것을 ㉢에 대입하면 $b=2$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=b=2$

$\therefore\ n((C-A)\cup(C-B))=n(C-(A\cap B))$
$=n(C)-n(A\cap B\cap C)$
$=18-2=16$

27

세 집합 A, B, C에 대하여 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, x, y, z라 하자.



$n(A\cap B\cap C)=4$이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$에서

$a+b+c+x+y+z+4=40$

$\therefore\ a+b+c+x+y+z=36$ ······㉠

$n(A)=21$, $n(B)=17$, $n(C)=20$이므로

$a+b+x+4=21$ $\quad\therefore\ a+b+x=17$ ······㉡

$c+a+y+4=17$ $\quad\therefore\ c+a+y=13$ ······㉢

$b+c+z+4=20$ $\quad\therefore\ b+c+z=16$ ······㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$a+b+c+(a+b+c+x+y+z)=46$

$a+b+c+36=46$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a+b+c=10$

$\therefore\ n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=a+b+c+4$
$=10+4=14$

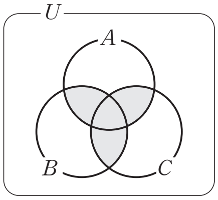
답 14

다른 풀이

$U=A\cup B\cup C$이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$

집합 $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)$ (*)
$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-8$ ······㉤

이때

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$40=21+17+20-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+4$

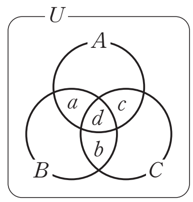
$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=62-40=22$

㉤에서

$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))=22-8=14$

보충 설명

오른쪽 벤 다이어그램과 같이 $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d라 하면 (*)에서



$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=a+b+c+d$
$=(a+d)+(b+d)+(c+d)-2d$
$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)$

28

방문객 전체의 집합을 U, 안경을 착용한 경험이 있는 방문객의 집합을 A, 렌즈를 착용한 경험이 있는 방문객의 집합을 B라 하면

$n(U)=30$, $n(A)=17$, $n(B)=15$, $n(A^C\cap B^C)=7$

이때

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=30-7=23$

이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=17+15-23=9$

안경을 착용한 경험이 없거나 렌즈를 착용한 경험이 없는 방문객의 집합은 $A^C \cup B^C$이므로

$$n(A^C \cup B^C) = n((A \cap B)^C) = n(U) - n(A \cap B) = 30 - 9 = 21$$

따라서 구하는 방문객 수는 21이다.

답 21

29

학생 전체의 집합을 U, 두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B라 하자.

조건 (가)에서 두 동아리 A, B 중 어느 것도 가입하지 않은 학생은 없으므로

$A^C \cap B^C = \varnothing$, 즉 $(A \cup B)^C = \varnothing$

$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 100$

또한, 조건 (나)에서 $n(A) = 66$, $n(B) = 58$이므로 동아리 A에만 가입한 학생 수는

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 100 - 58 = 42$$

답 42

30

학생 전체의 집합을 U, 케이팝을 좋아하는 학생의 집합을 A, 힙합을 좋아하는 학생의 집합을 B, 발라드를 좋아하는 학생의 집합을 C라 하면

$n(U) = 200$, $n(A) = 90$, $n(B) = 75$,

$n(A \cap B) = 38$, $n(C - (A \cup B)) = 60$

이때 케이팝, 힙합, 발라드 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생의 집합은 $(A \cup B \cup C)^C$이고

$n(A \cup B \cup C)$

$= n(A \cup B) + n(C - (A \cup B))$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C - (A \cup B))$

$= 90 + 75 - 38 + 60 = 187$

이므로

$$n((A \cup B \cup C)^C) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 200 - 187 = 13$$

따라서 구하는 학생 수는 13이다.

답 13

31

$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$에서

$n(A \cap B) = 12$이고, $(B - A) \subset A^C$이므로

$$n(B) \le n(A^C) + n(A \cap B) = n(U) - n(A) + n(A \cap B) = 33 - 24 + 12 = 21$$

$\therefore M = 21$

또한, $B \subset A$, 즉 $A \cap B = B$일 때, $n(B)$가 최소이므로

$m = 12$

$\therefore M - m = 21 - 12 = 9$

답 9

32

$n(A \cap B) = 10$, $n(A \cap B \cap C) = 5$이므로

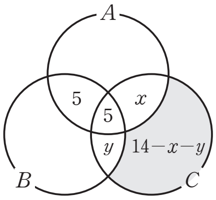
$n((A \cap B) - C) = 5$

또한, $n((A \cap C) - B) = x$, $n((B \cap C) - A) = y$라 하면

$n(C) = 19$이므로

$$n(C - (A \cup B)) = 19 - (5 + x + y) = 14 - x - y \quad \cdots\cdots ㉠$$

오른쪽 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내면 ㉠은 색칠한 부분의 원소의 개수이다.



이때 ㉠이 최소가 되려면 x, y가 각각 최대가 되어야 한다.

그런데 $n(A) = 14$이므로 x의 최댓값은

$14 - 5 - 5 = 4$

또한, $n(B) = 16$이므로 y의 최댓값은

$16 - 5 - 5 = 6$

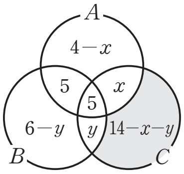
㉠에서 $n(C - (A \cup B))$의 최솟값은

$14 - 4 - 6 = 4$

답 4

보충 설명

모든 집합의 원소의 개수는 항상 0보다 크거나 같으므로 오른쪽 벤 다이어그램에서



$x \ge 0$, $4 - x \ge 0$, $y \ge 0$, $6 - y \ge 0$

$\therefore 0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 6$

33

학생 전체의 집합을 U, 수학 경시대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 A, 영어 경시대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=300$, $n(A)=124$, $n(B)=173$

이때 어느 것에도 참가 신청을 하지 않은 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로

$$\begin{aligned} n(A^C\cap B^C)&=n((A\cup B)^C) \\ &=n(U)-n(A\cup B) \\ &=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\} \\ &=300-124-173+n(A\cap B) \\ &=3+n(A\cap B) \quad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$(A\cap B)\subset A$이고 $(A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$에서

$n(A\cap B)\le 124 \quad \cdots\cdots ㉡$

또한, $n(A\cup B)\le n(U)$이므로

$n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$에서

$124+173-n(A\cap B)\le 300$

$\therefore\ n(A\cap B)\ge -3$

그런데 집합의 원소의 개수는 0보다 크거나 같으므로

$n(A\cap B)\ge 0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서 $0\le n(A\cap B)\le 124$이므로

㉠에서 $0\le n(A^C\cap B^C)-3\le 124$

$\therefore\ 3\le n(A^C\cap B^C)\le 127$

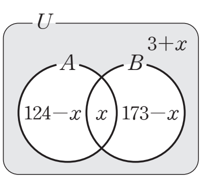
따라서 $M=127$, $m=3$이므로

$M+m=127+3=130$

답 130

보충 설명

$n(A\cap B)=x$라 하고 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내 보자.



즉, $x\ge 0$, $124-x\ge 0$, $173-x\ge 0$이므로

$0\le x\le 124$

$\therefore\ 3\le 3+x\le 127$

STEP 1 개념 마무리 본문 p.194

19 27	**20** 29	**21** 5	**22** 13
23 21	**24** 16		

19

$A\cap B^C=A-B=A$이므로 $A\subset B^C$

$\therefore\ A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 A, B는 서로소이므로

$$\begin{aligned} n(A\cup B)&=n(A)+n(B) \\ &=11+16=27 \end{aligned}$$

답 27

20

$$\begin{aligned} n(A^C\cup B^C)&=n((A\cap B)^C) \\ &=n(U)-n(A\cap B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ n(A\cap B)&=n(U)-n(A^C\cup B^C) \\ &=50-43=7 \end{aligned}$$

이때 $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned} n((A-B)\cup(B-A))&=n((A\cup B)-(A\cap B)) \\ &=n(A\cup B)-n(A\cap B) \\ &=36-7=29 \end{aligned}$$

답 29

21

학생 전체의 집합을 U, 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

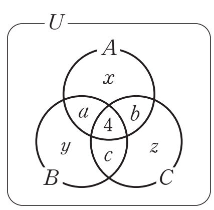
$n(U)=22$, $n(A)=11$, $n(B)=9$, $n(C)=15$,

$n(A\cap B\cap C)=4$

이때 한 문제도 맞히지 못한 학생은 없으므로

$(A\cup B\cup C)^C=\varnothing \qquad \therefore\ A\cup B\cup C=U$

오른쪽 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, x, y, z라 하자.



$n(A\cup B\cup C)=n(U)=22$에서

$a+b+c+x+y+z+4=22$

$\therefore\ a+b+c+x+y+z=18$ ……㉠

$n(A)=11,\ n(B)=9,\ n(C)=15$이므로

$a+b+x+4=11 \qquad \therefore\ a+b+x=7$ ……㉡

$c+a+y+4=9 \qquad \therefore\ c+a+y=5$ ……㉢

$b+c+z+4=15 \qquad \therefore\ b+c+z=11$ ……㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$a+b+c+(a+b+c+x+y+z)=23$

$a+b+c+18=23$ (∵ ㉠)

$\therefore\ a+b+c=5$

이때 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생의 집합은

$\{(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\}-(A\cap B\cap C)$이고,

이 집합의 원소의 개수는 $a+b+c$이다.

따라서 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는 5이다.

답 5

다른 풀이

학생 전체의 집합을 U, 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

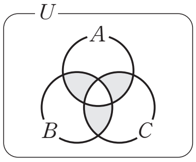
$n(U)=22,\ n(A)=11,\ n(B)=9,\ n(C)=15,$

$n(A\cap B\cap C)=4$

이때 한 문제도 맞히지 못한 학생은 없으므로

$(A\cup B\cup C)^C=\varnothing \qquad \therefore\ A\cup B\cup C=U$

또한, 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생의 집합은



$\{(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\}$
$-(A\cap B\cap C)$

이므로

$n(\{(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)\}-(A\cap B\cap C))$

$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$ ……㉤

이때

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$22=11+9+15-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+4$

$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=17$

㉤에서 구하는 학생 수는

$17-3\times4=5$

22

학생 전체의 집합을 U, 핸드볼을 신청한 학생의 집합을 A, 플로어볼을 신청한 학생의 집합을 B, 소프트볼을 신청한 학생의 집합을 C라 하면

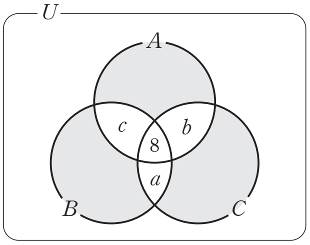
$n(U)=40,\ n(A)=25,\ n(B)=22,\ n(C)=28,$

$n(A\cap B\cap C)=8$

이때 학생들은 적어도 한 가지를 신청했으므로

$(A\cup B\cup C)^C=\varnothing \qquad \therefore\ A\cup B\cup C=U$

다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c라 하자.



$n(A\cup B\cup C)=n(U)=40$이고

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$40=25+22+28-(8+c)-(8+a)-(8+b)+8$

$40=59-(a+b+c) \qquad \therefore\ a+b+c=19$

세 가지 중 오직 한 가지만 신청한 학생 수는 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수이므로

$n(A\cup B\cup C)-n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$

$=40-(a+b+c+8)$

$=40-27=13$

따라서 구하는 학생 수는 13이다.

답 13

23

조건 (나)에서

$B\cap(A\cup B^C)=(B\cap A)\cup(B\cap B^C)$

$=(A\cap B)\cup\varnothing$

$=A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore\ n(A\cap B)\neq0$ ……㉠

이때 $(A-B)\subset B^C$에서

$n(A-B)\le n(B^C)$

$=n(U)-n(B)$

$=n(U)-\{n(B-A)+n(A\cap B)\}$

$=35-\{13+n(A\cap B)\}$ ($\because$ 조건 (가), (다))

$=22-n(A\cap B)$

따라서 $n(A-B)$가 최댓값을 가지려면 $n(A\cap B)$가 최솟값을 가져야 한다. 이때 ㉠에서 $n(A\cap B)\ne 0$이므로

$n(A\cap B)=1$일 때, $n(A-B)$는 최댓값 21을 갖는다.

답 21

24

학생 전체의 집합을 U, 두 소설 A, B를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$n(U)=28$, $n(B-A)=12$

이때 두 소설 A, B를 모두 읽은 학생의 집합은 $A\cap B$이고 $B=U$, $A\subset B$일 때, $n(A\cap B)$가 최대이므로

$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)$

$\le n(U)-n(B-A)$

$=28-12=16$

따라서 두 소설 A, B를 모두 읽은 학생 수의 최댓값은 16이다.

답 16

STEP 2 **개념 마무리** 본문 p.195

1 729	**2** 72	**3** 30	**4** 112
5 ⑤	**6** 16		

1

$A\cup B=U$이므로

$S(A\cup B)=S(U)$

$=1+2+3+\cdots+9=45$ ……㉠

또한, $A\cap B=\{1, 3, 5\}$이므로

$S(A\cap B)=1+3+5=9$

집합 $A-B$의 원소의 합을 a라 하면

$S(A)=a+9$

집합 $B-A$의 원소의 합을 b라 하면

$S(B)=b+9$

㉠에서

$S(A\cup B)=a+b+9=45$

$\therefore b=36-a$ ……㉡

$\therefore S(A)S(B)=(a+9)(b+9)$

$=(a+9)(45-a)$ ($\because$ ㉡)

$=-a^2+36a+405$

$=-(a^2-36a+18^2-18^2)+405$

$=-(a-18)^2+729$

따라서 $S(A)S(B)$의 값은 $a=18$일 때 최대이고 최댓값은 729이다.

답 729

보충 설명

(1) $S(A)S(B)$의 값이 최대가 되도록 하는 두 집합 A, B를 구해 보자.

$S(A)S(B)$의 값은 $a=18$, $b=36-a=18$일 때 최대이고, $(A\cap B)^C=\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$이므로 두 집합 A, B가

$\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

일 때, $S(A)S(B)$의 값은 최대이다.

(2) 본문 p.222의 **개념15**에서 '산술평균과 기하평균'의 관계를 이용하면 다음과 같이 풀 수도 있다.

두 집합 A, B의 원소는 모두 양수이므로

$S(A)>0$, $S(B)>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$S(A)+S(B)\ge 2\sqrt{S(A)S(B)}$

(단, 등호는 $S(A)=S(B)$일 때 성립)

이때

$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=45+9=54$

이므로

$2\sqrt{S(A)S(B)}\le 54$

$\sqrt{S(A)S(B)}\le 27$

$\therefore S(A)S(B)\le 729$

따라서 $S(A)S(B)$의 최댓값은 729이다.

2

집합 $A_n \cap A_3$은 n과 3의 공배수의 집합이고 $A_n \cap A_3 = A_{3n}$에서 n과 3의 최소공배수가 $3n$이므로 자연수 n은 3과 서로소이다.

$120 \in {A_n}^C$에서 $120 \notin A_n$이므로 120은 n의 배수가 아니다.

즉, n은 120의 약수가 아니다.

따라서 n은 3과 서로소이면서 120의 약수가 아니다.

(ⅰ) 120 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 40이고, 3은 소수이므로 3과 서로소인 수의 개수는
$120-40=80$

(ⅱ) $120=2^3 \times 3 \times 5$이므로 3과 서로소이면서 120의 약수인 수의 개수는 $2^3 \times 5$의 약수의 개수와 같으므로
$(3+1) \times (1+1)=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$80-8=72$

답 72

3

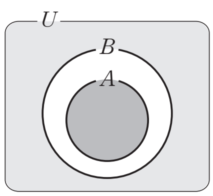
$(A-B) \cup (B-A) = B-A$이므로

$(A-B) \subset (B-A)$

그런데 $A-B$와 $B-A$는 서로소이므로

$A-B=\varnothing \qquad \therefore A \subset B$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $n(A)=n(A^C-B)$이므로 그림에서 색칠한 두 부분의 원소의 개수는 서로 같다.

또한, $n(U)=10$이므로

$n(A)+n(A^C-B) \leq 10$

$2 \times n(A) \leq 10 \qquad \therefore n(A) \leq 5$

한편, $\{1, 2\} \subset A$이므로 집합 A의 원소의 합 $S(A)$가 최대가 되려면 집합 A는 집합 U의 부분집합 중에서 원소의 개수가 5이고, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이며, 1, 2를 제외한 나머지 세 원소는 최대한 큰 값이어야 한다.

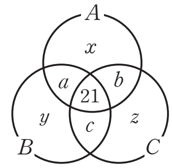
따라서 $S(A)$는 $\underbrace{A=\{1, 2, 8, 9, 10\}}_{\text{이때 } A=B\text{이다.}}$일 때 최대이고, 그 최댓값은

$1+2+8+9+10=30$

답 30

4

세 집합 A, B, C에 대하여 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 x, y, z, a, b, c라 하자.



$n(A \cap B \cap C)=21$, $n(A \cup B \cup C)=77$이므로

$x+y+z+a+b+c+21=77$

$\therefore x+y+z+a+b+c=56 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\therefore n(A \triangle B)+n(B \triangle C)+n(C \triangle A)$

$=n((A \cup B)-(A \cap B))+n((B \cup C)-(B \cap C))$
$\quad +n((C \cup A)-(C \cap A))$

$=(x+b+y+c)+(y+a+z+b)+(x+a+z+c)$

$=2(x+y+z+a+b+c)$

$=2 \times 56$ ($\because$ ㉠)

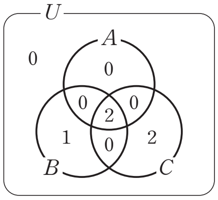
$=112$

답 112

5

ㄱ. $n(A \cap B \cap C)=0$이면
$n(B \cap C)=2$에서 $n(A^C \cap B \cap C)=2$
이때 $n(B-A)=1$이므로
$n(B-A) \geq n(A^C \cap B \cap C)$를 만족시키지 않는다.
$\therefore n(A \cap B \cap C) \neq 0$ (참)

ㄴ. $n(A \cap B \cap C)=2$이면
$n(B \cap C)=n(A \cap B \cap C)+n(A^C \cap B \cap C)$에서
$2=2+n(A^C \cap B \cap C)$이므로
$n(A^C \cap B \cap C)=0$
이때 $n(C-A)=n(A^C \cap B \cap C)+n(A^C \cap B^C \cap C)$이므로
$2=0+n(A^C \cap B^C \cap C)$
$\therefore n(A^C \cap B^C \cap C)=2$
또한, $n(B-A)=1$, $n(U)=5$이므로
각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(C)=n(A\cap B\cap C)+n(A^C\cap B^C\cap C)$

$=2+2=4$ (참)

ㄷ. $n(B\cap C)=2$이므로 ㄱ에 의하여

$n(A\cap B\cap C)=1$ 또는 $n(A\cap B\cap C)=2$

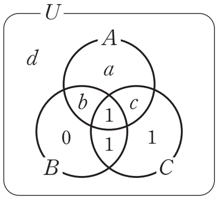
(i) $n(A\cap B\cap C)=1$일 때,

$n(B\cap C)=2$에서 $n(A^C\cap B\cap C)=1$

$n(B-A)=1$에서 $n(A^C\cap B\cap C^C)=0$

$n(C-A)=2$에서 $n(A^C\cap B^C\cap C)=1$

즉, 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d라 하면



$n(A)=a+b+c+1$, $n(B)=b+2$, $n(C)=c+3$

이때 $n(U)=5$이므로

$a+b+c+d+3=5 \qquad \therefore\ a+b+c+d=2$

$n(A)\times n(B)\times n(C)$의 값이 최대가 되기 위해서는

$a=d=0,\ b=1,\ c=1$ 또는 $a=d=0,\ b=2,\ c=0$이

$n(A)\times n(B)\times n(C)=3\times4\times3=36$

어야 하므로 $n(A)\times n(B)\times n(C)=3\times4\times3=36$

$n(A)\times n(B)\times n(C)=36$

또한, $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 값이 최소가 되기 위해서는 $a=b=c=0$, $d=2$이어야 하므로

$n(A)\times n(B)\times n(C)=1\times2\times3=6$

(ii) $n(A\cap B\cap C)=2$일 때,

$n(A)=2$, $n(B)=3$, $n(C)=4$이므로

$n(A)\times n(B)\times n(C)=2\times3\times4=24$

(i), (ii)에서 $n(A)\times n(B)\times n(C)$의 최댓값은 36, 최솟값은 6이므로 그 합은

$36+6=42$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

6

$(C-A)\cap(C-B)=(C\cap A^C)\cap(C\cap B^C)$

$=C\cap(A^C\cap B^C)=C\cap(A\cup B)^C$

$=C-(A\cup B)$

$\therefore\ n((C-A)\cap(C-B))=n(C-(A\cup B))$

$n(A)=12$, $n(B)=9$, $n(A\cap B)=5$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=12+9-5=16$

(i) $n(C-(A\cup B))$가 최대일 때,

$n(U)=30$, $n(A\cup B)=16$, $n(C)=18$이므로

$n(A\cup B)+n(C)\geq n(U)$

따라서 $A\cup B\cup C=U$일 때 $n(C-(A\cup B))$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$M=n(U)-n(A\cup B)=30-16=14$

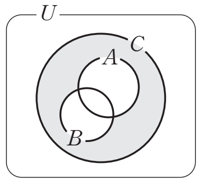
(ii) $n(C-(A\cup B))$가 최소일 때,

$n(A\cup B)=16$, $n(C)=18$이므로 $n(A\cup B)\leq n(C)$

따라서 $(A\cup B)\subset C$일 때

$n(C-(A\cup B))$가 최소이므로

구하는 최솟값은



$m=n(C)-n(A\cup B)=18-16=2$

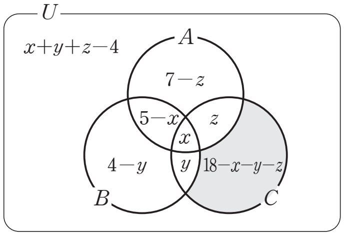
(i), (ii)에서 $M+m=14+2=16$

답 16

다른 풀이

$n(A\cap B\cap C)=x$, $n((B\cap C)-A)=y$,

$n((A\cap C)-B)=z$라 하고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



집합의 원소의 개수는 0보다 크거나 같으므로

$0\leq x\leq5,\ 0\leq y\leq4,\ 0\leq z\leq7,\ 4\leq x+y+z\leq18$

따라서 $n\{(C-A)\cap(C-B)\}=18-x-y-z$의 값은

$x+y+z=4$일 때 최댓값 $M=14$를 갖고,

$x=5,\ y=4,\ z=7$일 때 최솟값 $m=2$를 갖는다.

$\therefore\ M+m=14+2=16$

07. 명제

1 명제와 조건

기본 + 필수연습

본문 pp.201~205

01 ㄴ(거짓), ㄷ(참) **02** 풀이 참조
03 (1) $\{1, 3, 5\}$, $\{1\}$ (2) $2x-1\geq 3$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$
04 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
05 (1) 거짓 (2) 참 **06** 풀이 참조
07 4 **08** 3 **09** 4 **10** 3
11 $-3\leq a\leq 2$

01

ㄱ. '아름답다'의 기준이 명확하지 않아 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㄴ. $36=2^2\times 3^2$에서 36의 약수의 개수는 $3\times 3=9$이므로 거짓인 명제이다.
ㄷ. 홀수와 홀수의 곱은 항상 홀수이므로 참인 명제이다.
ㄹ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
따라서 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ(거짓), ㄷ(참)

보충 설명

ㄷ. 두 홀수를 각각 $2m+1$, $2n+1$ (m, n은 정수)이라 하면
$$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1$$
$$=2(2mn+m+n)+1$$
이므로 두 홀수의 곱은 항상 홀수이다.
ㄹ. $x>-1$인 실수 x에 대하여 참이고,
$x\leq -1$인 실수 x에 대하여 거짓이다.

02

(1) 21은 소수가 아니다.
$21=3\times 7$이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
(2) 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.
정삼각형의 이웃하는 두 변의 길이는 같으므로 주어진 명제가 참이다. 즉, 그 부정은 거짓이다.
(3) $2+3=5$
주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.
(4) $5>8$
주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

답 풀이 참조

03

전체집합 $U=\{x|x$는 6 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
(1) $P=\{1, 3, 5\}$, $Q=\{1\}$
(2) $\sim q: 2x-1\geq 3$
$\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로
$Q^C=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

답 (1) $\{1, 3, 5\}$, $\{1\}$
(2) $2x-1\geq 3$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

04

전체집합 $U=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 3, 5, 7\}$
(1) 조건 'p 그리고 q'의 진리집합은 $P\cap Q$이므로
$P\cap Q=\{1, 3\}$
(2) 조건 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C$이므로
$$P^C\cup Q^C=(P\cap Q)^C$$
$$=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

답 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

05

(1) $2x+3<x+10$에서 $x<7$
$x=10$이면 $x>7$이므로 주어진 명제는 거짓이다. ← $23<20$
(2) $x^2+4x+3=0$에서 $(x+3)(x+1)=0$
$x=-3$이면 $(x+3)(x+1)=0$이므로 주어진 명제는 참이다. ← $x=-1$일 때에도 $(x+3)(x+1)=0$이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

06

(1) 어떤 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2<0$이다.

모든 실수 x, y에 대하여

$x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$이므로 $x^2+y^2\geq 0$

따라서 주어진 명제는 참이다. 즉, 그 부정은 거짓이다.

(2) 모든 자연수 x에 대하여 $x^2+2x+1>0$이다.

$x^2+2x+1>0$에서 $(x+1)^2>0$

따라서 주어진 명제의 부정은 참이다.

답 풀이 참조

07

$p : x^2-3x-28>0$에서 $(x+4)(x-7)>0$

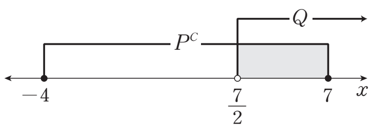
$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>7$

$q : 2x-7>0$에서 $x>\dfrac{7}{2}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x<-4$ 또는 $x>7\}$, $Q=\left\{x\,\middle|\,x>\dfrac{7}{2}\right\}$

이때 $P^C=\{x\,|\,-4\leq x\leq 7\}$이므로 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은

$P^C\cap Q=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{7}{2}<x\leq 7\right\}$

이므로 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합, 즉 집합 $P^C\cap Q$의 원소 중 정수는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 4

08

$p : x^2-4x+3>0$에서 $(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x<1$ 또는 $x>3$

$q : x^2-7x+10<0$에서 $(x-2)(x-5)<0$

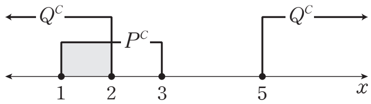
$\therefore\ 2<x<5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 조건 'p 또는 q'의 부정의 진리집합 S는

$S=(P\cup Q)^C=P^C\cap Q^C$

이때 $P=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>3\}$, $Q=\{x\,|\,2<x<5\}$이므로

$P^C=\{x\,|\,1\leq x\leq 3\}$, $Q^C=\{x\,|\,x\leq 2$ 또는 $x\geq 5\}$



즉, $S=P^C\cap Q^C=\{x\,|\,1\leq x\leq 2\}$이므로 집합 S의 원소 중 가장 큰 수는 2, 가장 작은 수는 1이다.

따라서 구하는 합은

$2+1=3$

답 3

09

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C\cup Q^C$이다.

이때 $P=\{x\,|\,x\neq 2\}$이므로 $P^C=\{2\}$이고,

집합 $P^C\cup Q^C$의 원소의 개수가 1이므로

$P^C\cup Q^C=\{2\}$

$\therefore\ Q^C=\{2\}$ 또는 $Q^C=\varnothing$

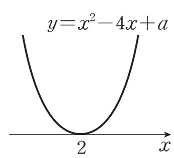
즉, $Q=\{x\,|\,x^2-4x+a>0\}$에서

$Q^C=\{x\,|\,x^2-4x+a\leq 0\}$이므로

이차부등식 $x^2-4x+a\leq 0$의 해는 $x=2$ 하나뿐이거나 해가 없어야 한다.

(i) 이차부등식 $x^2-4x+a\leq 0$의 해가 $x=2$일 때,

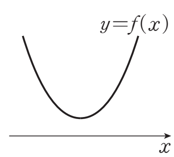
이차함수 $y=x^2-4x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 중근 $x=2$를 가져야 한다.



즉, $2^2-4\times 2+a=0$에서 $a=4$

(ii) 이차부등식 $x^2-4x+a\leq 0$의 해가 없을 때,

$f(x)=x^2-4x+a$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-a<0\qquad\therefore\ a>4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a \geq 4$

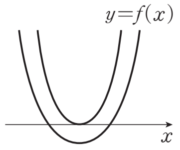
따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

10

명제 '모든 실수 x에 대하여 $2x^2-4kx+5k>0$이다.'가 거짓이려면 이 명제의 부정 '어떤 실수 x에 대하여 $2x^2-4kx+5k \leq 0$이다.'는 참이어야 한다.

$f(x)=2x^2-4kx+5k$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $2x^2-4kx+5k=0$의 판별식을 D라 하면 $D \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-2\times 5k \geq 0$

$4k^2-10k \geq 0$, $2k(2k-5) \geq 0$

$\therefore\ k \leq 0$ 또는 $k \geq \frac{5}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 3이다.

답 3

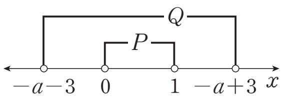
11

$|x+a|<3$에서 $-3<x+a<3$

$\therefore\ -a-3<x<-a+3$

$P=\{x\,|\,0<x<1\}$, $Q=\{x\,|\,-a-3<x<-a+3\}$이라 하자.

0<x<1인 모든 실수 x에 대하여 $|x+a|<3$이 성립하려면 $P\cap Q=P$, 즉 $P\subset Q$이어야 한다.



따라서 $-a-3 \leq 0$이고 $1 \leq -a+3$이어야 하므로

$-3 \leq a \leq 2$

답 $-3 \leq a \leq 2$

STEP 1 개 념 마 무 리

본문 p.206

01 ④	02 ③	03 11	04 ④
05 37	06 $-3<a<4$		

01

①, ②, ③, ⑤ 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

답 ④

보충 설명

① 마름모에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 사다리꼴에 포함된다. 즉, 마름모는 사다리꼴이므로 참인 명제이다.

② 모든 실수 x에 대하여 $|x| \geq 0$이므로 $|x|+1>0$이다. 즉, $|x|+1=0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

③ 2보다 큰 모든 짝수는 2로 나누어떨어지므로 소수가 아니다. 즉, 2를 제외한 모든 소수는 홀수이므로 참인 명제이다.

⑤ 16의 약수 중에서 16은 8의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.

02

세 실수 x, y, z에 대하여 조건

$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

의 부정은

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

즉, '$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$'이거나 'x, y, z 중 서로 같은 것이 적어도 한 쌍 있다.'라고 할 수 있다.

따라서 주어진 조건의 부정과 서로 같은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ③

보충 설명

ㄱ. $x=0$, $y=1$, $z=2$일 때,
$xyz=0$이지만 $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

ㄴ. $x=1$, $y=1$, $z=2$일 때,
$(x-y)(y-z)(z-x)=0$이지만 $x=y \neq z$

ㅁ. $x=1$, $y=2$, $z=3$일 때,
x, y, z 중 서로 다른 것이 적어도 한 쌍 있지만
$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

03

전체집합을 U, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$U=\{(x, y)\,|\,0\le x<4,\ 0\le y<4,\ x,\ y$는 정수$\}$

$\quad=\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \cdots, (3, 3)\}$

$p : x^2-4x+y^2-4y+7=0$에서

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

$\therefore\ P=\{(x, y)\,|\,x^2-4x+y^2-4y+7=0,\ x,\ y$는 정수$\}$

$\qquad=\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

또한, $q : x-y=1$에서

$Q=\{(x, y)\,|\,x-y=1,\ x,\ y$는 정수$\}$

$\quad=\{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$

한편, 조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

이때

$P\cup Q=\{(1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

이므로 조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는

$n(P^C\cap Q^C)=n(U)-n(P\cup Q)$

$\qquad\qquad\qquad=4\times4-5=11$

답 11

다른 풀이

$p : x^2-4x+y^2-4y+7=0$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

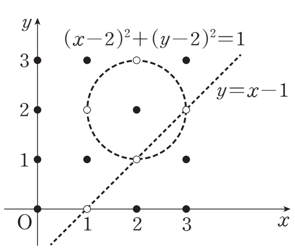
즉, 조건 p를 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 위의 점이다.

또한, $q : x-y=1$에서 $y=x-1$

즉, 조건 q를 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 직선 $y=x-1$ 위의 점이다.

따라서 조건 '$\sim p$이고 $\sim q$'를 만족시키는 순서쌍 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 위의 점도 아니고 직선 $y=x-1$ 위의 점도 아니다.

이때 x, y는 $0\le x<4$, $0\le y<4$인 정수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)가 나타내는 점은 다음 그림의 11개이다.



04

$P=\{x\,|\,x\ge2\}$, $Q=\{x\,|\,x<-1\}$이므로

$P^C=\{x\,|\,x<2\}$, $Q^C=\{x\,|\,x\ge-1\}$

$\therefore\ P^C\cap Q^C=\{x\,|\,-1\le x<2\}$

답 ④

05

$p : x^2+1<k$에서 $x^2<k-1$

$\therefore\ -\sqrt{k-1}<x<\sqrt{k-1}$

$q : |x-4|\le2$에서 $-2\le x-4\le2$

$\therefore\ 2\le x\le6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-\sqrt{k-1}<x<\sqrt{k-1}\}$,

$Q=\{x\,|\,2\le x\le6\}$

(가)

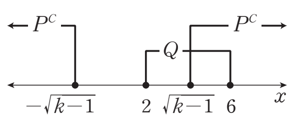
명제 '어떤 실수 x에 대하여 $\sim p$ 그리고 q이다.'가 참이므로 $P^C\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

(나)

이때 $P^C=\{x\,|\,x\le-\sqrt{k-1}$ 또는 $x\ge\sqrt{k-1}\}$이고,

$k\ge2$이므로 $-\sqrt{k-1}<0$

$P^C\cap Q\ne\varnothing$이므로 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $\sqrt{k-1}\le6$이어야 하므로 양변을 제곱하면

$k-1\le36\qquad\therefore\ k\le37$

이때 $k\ge2$이므로 $2\le k\le37$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 37이다.

(다)

답 37

단계	채점 기준	배점
(가)	두 조건 p, q의 진리집합을 각각 구한 경우	30%
(나)	주어진 명제가 참이 되도록 하는 진리집합 사이의 관계를 구한 경우	30%
(다)	실수 k의 최댓값을 구한 경우	40%

06

두 조건 p, q를 각각 $p: x^2+x-2\le 0$,
$q: x^2+2ax+a^2-4<0$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2+x-2\le 0$에서 $(x+2)(x-1)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 1$

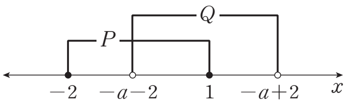
$x^2+2ax+a^2-4<0$에서 $(x+a-2)(x+a+2)<0$

$\therefore\ -a-2<x<-a+2$

$\therefore\ P=\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$, $Q=\{-a-2<x<-a+2\}$

즉, $x^2+x-2\le 0$을 만족시키는 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+a^2-4<0$이 성립하려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다.

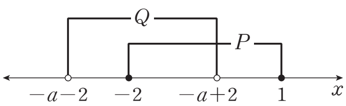
(i) $-a-2\ge -2$, 즉 $a\le 0$일 때,



$-a-2<1$이어야 하므로 $a>-3$

$\therefore\ -3<a\le 0$

(ii) $-a-2<-2$, 즉 $a>0$일 때,



$-a+2>-2$이어야 하므로 $a<4$

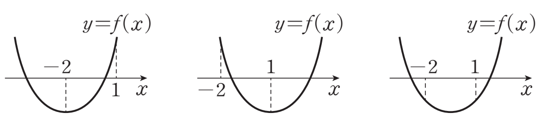
$\therefore\ 0<a<4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는
$-3<a<4$

답 $-3<a<4$

다른 풀이

$x^2+x-2\le 0$, 즉 $-2\le x\le 1$인 어떤 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+a^2-4<0$이 성립해야 하므로
$f(x)=x^2+2ax+a^2-4$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 세 그림 중 하나이어야 한다.



즉, $f(-2)<0$ 또는 $f(1)<0$이어야 한다.

(i) $f(-2)<0$에서

$a^2-4a<0$, $a(a-4)<0$　　$\therefore\ 0<a<4$

(ii) $f(1)<0$에서

$a^2+2a-3<0$, $(a+3)(a-1)<0$　　$\therefore\ -3<a<1$

(i), (ii)에서 $-3<a<4$

2 명제 사이의 관계

기본 + 필수연습 본문 pp.210~216

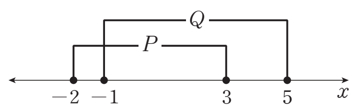
12 (1) 거짓, 반례 : -2 (2) 참
13 풀이 참조 **14** (1) 충분조건 (2) 필요조건
15 ㄷ, ㅁ **16** (1) -2 (2) 6 **17** 4
18 $-3<a<-1$ 또는 $a>1$ **19** 5
20 -2 **21** 7 **22** ㄴ, ㄷ
23 ㄴ, ㄷ, ㄹ **24** 25 **25** 6 **26** 7
27 ㄷ, ㄹ **28** A, C

12

주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

(1) '$p: -2\le x\le 3$', '$q: -1\le x\le 5$'에서

$P=\{x\,|\,-2\le x\le 3\}$, $Q=\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$



이때 $-2\in P$이지만 $-2\notin Q$이므로 $P\not\subset Q$

따라서 주어진 명제는 거짓이고, 그 반례는 $x=-2$이다.

(2) '$p: x^2+y^2=0$', '$q: x+y=0$'에서

$P=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=0\}$, $Q=\{(x,\ y)\,|\,x+y=0\}$

이때 $x^2\ge 0$, $y^2\ge 0$이므로

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이므로

$P=\{(0,\ 0)\}$

또한, $x=0$이고 $y=0$일 때, $x+y=0$이므로

$(0,\ 0)\in Q$　　$\therefore\ P\subset Q$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓, 반례 : -2 (2) 참

보충 설명

(1)에서 $-2\le x<-1$인 모든 x의 값은 이 명제의 반례가 된다.

13

(1) 역 : x가 3의 배수이면 x는 9의 배수이다. (거짓)

(반례) $x=3$이면 x는 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.

대우 : x가 3의 배수가 아니면 x는 9의 배수가 아니다. (참)

(2) 역 : x, y가 모두 짝수이면 $x+y$는 짝수이다. (참)

대우 : x가 홀수 또는 y가 홀수이면 $x+y$는 홀수이다. (거짓)

(반례) $x=1$, $y=1$이면 x, y가 모두 홀수이지만 $x+y=2$이므로 짝수이다.

답 풀이 참조

보충 설명

(1)에서 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

'p : x가 9의 배수이다.', 'q : x가 3의 배수이다.'에서

$P=\{9, 18, 27, 36, \cdots\}$, $Q=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$

이때 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 그 대우도 참이다.

14

(1) $p : 2x+3<5$에서 $x<1$,

$q : -\frac{1}{2}x+1>0$에서 $x<2$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

($q \longrightarrow p$의 반례)

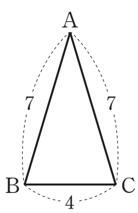
$x=\frac{3}{2}$이면 $-\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{4}>0$이지만

$2x+3=6>5$이다.

(2) $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

($p \longrightarrow q$의 반례)

오른쪽 그림의 $\triangle$ABC는 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.



답 (1) 충분조건 (2) 필요조건

15

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim p$가 참이고,

명제 $\sim r \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow r$이 참이다.

ㄱ. 두 명제 $\sim r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

ㄴ. 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

ㄹ. 명제 $\sim q \longrightarrow r$은 참이다.

ㅂ. 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$이 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$이 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ㄷ, ㅁ이다.

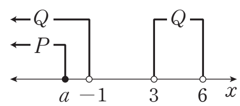
답 ㄷ, ㅁ

16

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

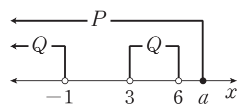
$P=\{x \mid x\le a\}$, $Q=\{x \mid x<-1$ 또는 $3<x<6\}$

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $a<-1$이어야 하므로 정수 a의 최댓값은 -2이다.

(2) 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 명제 $q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $a\ge 6$이어야 하므로 정수 a의 최솟값은 6이다.

답 (1) -2 (2) 6

17

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

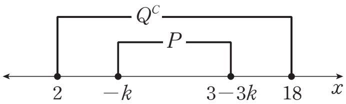
$p : 3k-1\le 2-x\le k+2$에서 $-k\le x\le 3-3k$이므로

$P=\{x \mid -k\le x\le 3-3k\}$

$q : x<2$ 또는 $x>18$에서 $\sim q : 2\le x\le 18$이므로

$\sim q$의 진리집합은 $Q^C=\{x \mid 2\le x\le 18\}$

명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 참이 되려면 $P \subset Q^C$이어야 하므로 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $2 \le -k$이고 $3-3k \le 18$이어야 한다.

$2 \le -k$에서 $k \le -2$ ……㉠

$3-3k \le 18$에서 $k \ge -5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-5 \le k \le -2$

따라서 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k는 -5, -4, -3, -2의 4개이다.

답 4

18

명제 ㈎에서

두 조건 p, q를 각각 $p : x>0$, $q : x-a^2+1<0$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x>0\}$

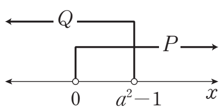
또한, $x-a^2+1<0$에서 $x<a^2-1$이므로

$Q=\{x \mid x<a^2-1\}$

이때 명제 ㈎가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \varnothing$이어야 하므로

$a^2-1>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore$ $a<-1$ 또는 $a>1$ ……㉠



명제 ㈏에서

두 조건 r, s를 각각 $r : (x+3)(x+a+3) \le 0$, $s : x<0$이라 하고, 두 조건 r, s의 진리집합을 각각 R, S라 하면

$R=\{x \mid (x+3)(x+a+3) \le 0\}$,

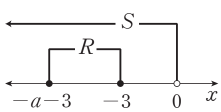
$S=\{x \mid x<0\}$

(ⅰ) $a>0$일 때,

$R=\{x \mid -a-3 \le x \le -3\}$

이므로 $R \subset S$이다.

따라서 $a>0$인 모든 실수 a에 대하여 명제 ㈏는 참이 된다.



(ⅱ) $a=0$일 때,

$R=\{-3\}$이므로 $R \subset S$이다.

따라서 $a=0$일 때 명제 ㈏는 참이 된다.

(ⅲ) $a<0$일 때,

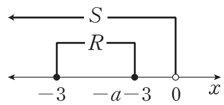
$R=\{x \mid -3 \le x \le -a-3\}$

이므로 명제 ㈏가 참이 되려면

$R \subset S$이어야 한다.

즉, $-a-3<0$이어야 하므로

$a>-3$ $\therefore$ $-3<a<0$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 명제 ㈏가 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a>-3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 두 명제 ㈎, ㈏가 모두 참이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-3<a<-1$ 또는 $a>1$

답 $-3<a<-1$ 또는 $a>1$

19

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$a \le k$이고 $b \le 2$이면 $a+b \le 7$이다.'

도 역시 참이다.

즉, $a \le k$이고 $b \le 2$이면 $a+b \le k+2$이고 대우가 참이므로 $k+2 \le 7$이다.

$\therefore$ $k \le 5$

따라서 실수 k의 최댓값은 5이다.

답 5

20

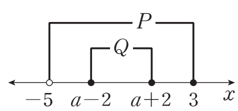
$q : |x-a| \le 2$에서 $-2 \le x-a \le 2$

$\therefore$ $a-2 \le x \le a+2$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid -5<x \le 3\}$, $Q=\{x \mid a-2 \le x \le a+2\}$

명제 $p \longrightarrow q$의 역은 $q \longrightarrow p$이고 이것이 참이 되려면 $Q \subset P$이어야 하므로 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-5<a-2$이고 $a+2\le 3$이어야 한다.

$-5<a-2$에서 $a>-3$, $a+2\le 3$에서 $a\le 1$

$\therefore\ -3<a\le 1$

따라서 명제 $p \longrightarrow q$의 역이 참이 되게 하는 모든 정수 a는 -2, -1, 0, 1이므로 그 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

답 -2

21

명제 $p \longrightarrow q$의 대우가 거짓이므로 명제 $p \longrightarrow q$도 거짓이다.

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P의 원소이지만 집합 Q의 원소는 아닌 것, 즉 집합 $P-Q$의 원소이므로

$X=P-Q=\{1, 2, 3\}$

따라서 집합 X의 진부분집합의 개수는 $2^3-1=7$

답 7

22

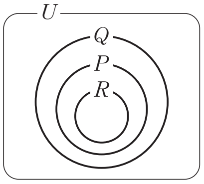
p는 q이기 위한 충분조건이므로 $p \Longrightarrow q$

$\therefore\ P\subset Q$ ······㉠

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow p$

$\therefore\ R\subset P$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $R\subset P\subset Q$이므로 세 집합 P, Q, R을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $R\subset Q$이지만 $Q\subset R$인지 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $P\cap Q=P$이고,

$R\subset P$이므로 $P^C\subset R^C$

$\therefore\ (P\cap Q)^C\subset R^C$ (참)

ㄷ. $P\cup Q=Q$이고,

$R\subset Q$이므로 $Q^C\subset R^C$

$\therefore\ (P\cup Q)^C\subset R^C$ (참)

ㄹ. $P^C\cap R^C=(P\cup R)^C=P^C$이고,

$P\subset Q$이므로 $Q^C\subset P^C$

$\therefore\ Q^C\subset (P^C\cap R^C)$

즉, $Q^C\subset (P^C\cap R^C)$이지만 $(P^C\cap R^C)\subset Q^C$인지 알 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

23

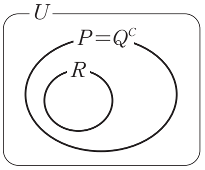
p는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이므로

$p \Longleftrightarrow \sim q \qquad \therefore\ P=Q^C$ ······㉠

$\sim r$은 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow \sim r$, 즉 $r \Longrightarrow \sim q \qquad \therefore\ R\subset Q^C$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $R\subset Q^C=P$이므로 세 집합 P, Q, R을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $R\subset Q^C$에서 $Q\subset R^C$

$\therefore\ Q\not\subset R$ (거짓)

ㄴ. $R\subset P$에서 $P^C\subset R^C$ (참)

ㄷ. $R\subset P$에서 $P\cap R=R$ (참)

ㄹ. $P=Q^C$에서 $P\cup Q=Q^C\cup Q=U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

24

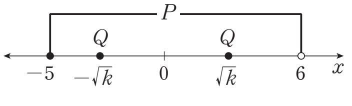
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

$q: x^2=k$에서 $x=\pm\sqrt{k}$ (k는 자연수)이므로

$Q=\{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\}$

이때 $Q\subset P$이어야 하므로 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음과 같아야 한다.



즉, $-5\le -\sqrt{k}<0$이어야 하므로

$0<\sqrt{k}\le 5 \qquad \therefore\ 0<k\le 25$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는

$1, 2, 3, \cdots, 25$의 25개이다.

답 25

25

$p : 3|x-2|<9-2x$에서

(i) $x<2$일 때,

$-3(x-2)<9-2x$이므로

$-3x+6<9-2x$

$-x<3$ $\quad\therefore x>-3$

그런데 $x<2$이므로 $-3<x<2$

(ii) $x\geq 2$일 때,

$3(x-2)<9-2x$이므로

$3x-6<9-2x$

$5x<15$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $x\geq 2$이므로 $2\leq x<3$

(i), (ii)에서 $-3<x<3$

즉, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-3<x<3\}$, $Q=\{x|a<x<b\}$

이때 p가 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이다.

따라서 $a=-3$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-3)=6$

답 6

보충 설명

절댓값의 성질을 이용하여 연립부등식으로 풀 수도 있다.

$3|x-2|<9-2x$에서 $|x-2|<3-\frac{2}{3}x$

$-3+\frac{2}{3}x<x-2<3-\frac{2}{3}x$

$-3+\frac{2}{3}x<x-2$에서 $x>-3$ ……㉠

$x-2<3-\frac{2}{3}x$에서 $x<3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-3<x<3$

26

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하면

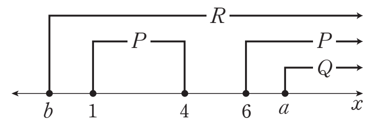
$P=\{x|1\leq x\leq 4$ 또는 $x\geq 6\}$, $Q=\{x|x\geq a\}$,

$R=\{x|x\geq b\}$

q는 p이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset P$, r은 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$

$\therefore Q\subset P\subset R$

이때 세 집합 P, Q, R을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $b\leq 1$, $a\geq 6$이어야 하므로 a의 최솟값은 6, b의 최댓값은 1이다.

따라서 구하는 합은

$6+1=7$

답 7

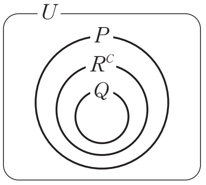
27

명제 $p \longrightarrow \sim r$의 역이 참이므로 $\sim r \Longrightarrow p$이고,

명제 $r \longrightarrow \sim q$의 대우가 참이므로 $q \Longrightarrow \sim r$이다.

즉, $q \Longrightarrow \sim r \Longrightarrow p$이므로

$Q\subset R^C\subset P$



ㄱ. $Q\subset P$이지만 $P\subset Q$인지 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $R^C\subset P$이지만 $P\subset R$인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $Q\subset P$ (참)

ㄹ. $R^C\subset P$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

28

네 조건 p, q, r, s를 각각

p : A가 범인이다., q : B가 범인이다.

r : C가 범인이다., s : D가 범인이다.

라 하면

(나)에서 $s \Longrightarrow p$

(다)에서 $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $p \Longrightarrow r$

(라)에서 $\sim s \Longrightarrow \sim q$이므로 $q \Longrightarrow s$

따라서 $q \Longrightarrow s \Longrightarrow p \Longrightarrow r$이다.

(i) A가 범인일 때,

C도 범인이므로 범인이 두 명이 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

(ii) B가 범인일 때,

D, A, C도 범인이므로 네 명 모두가 범인이 되어 조건 ㈎에 모순이다.

(iii) C가 범인일 때,

C 한 사람만 범인이므로 조건 ㈎에 모순이다.

(iv) D가 범인일 때,

A, C도 범인이므로 범인이 세 명이 되어 조건 ㈎에 모순이다.

(i)~(iv)에서 범인은 A, C이다.

답 A, C

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.217~218

07 64	**08** ①	**09** 13	**10** 5
11 28	**12** ③, ⑤	**13** 2	**14** ⑤
15 12	**16** ③	**17** ③	

07

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이면 $P \subset Q^C$이므로 $Q \subset P^C$이다.

$P=\{x \mid x$는 소수$\}$에서 $P=\{2, 3, 5, 7\}$이므로 집합 Q는 집합 $P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$의 부분집합이다.

따라서 집합 Q의 개수는

$2^6=64$

답 64

08

ㄱ. $P-Q=\varnothing$에서 $P \subset Q$이므로

명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄴ. ㄱ에서 $P \subset Q$이므로 $P \cup Q=Q$

이때 $P \cup Q=U$이므로 $Q=U$

모든 집합은 전체집합의 부분집합이므로

$P^C \subset Q$

즉, 명제 $\sim p \longrightarrow q$는 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 $P \subset Q$이고, $P \neq Q$이므로

$Q \not\subset P$

즉, 명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이다.

ㄹ. ㄴ에서 $Q=U$이고, $P \neq \varnothing$이므로

$P^C \neq U$ $\therefore Q \not\subset P^C$

즉, 명제 $q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

09

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $P^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$Q=\{3, 6, 9\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^C의 원소이지만 집합 Q의 원소는 아닌 것, 즉 집합 P^C-Q의 원소이므로

$P^C-Q=\{1, 5, 7\}$에서 구하는 합은

$1+5+7=13$

답 13

10

$p: x^2-7x-18>0$에서 $(x+2)(x-9)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>9$

$q: 2a-7 \leq 2x-1<3a$에서 $2a-6 \leq 2x<3a+1$

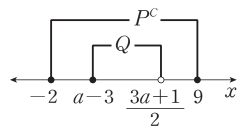
$\therefore a-3 \leq x<\dfrac{3a+1}{2}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid x<-2$ 또는 $x>9\}$이므로

$P^C=\{x \mid -2 \leq x \leq 9\}$, $Q=\left\{x \,\middle|\, a-3 \leq x<\dfrac{3a+1}{2}\right\}$

이때 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $Q \subset P^C$이어야 하므로 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-2 \leq a-3$이고, $\dfrac{3a+1}{2} \leq 9$이어야 하므로

$a \geq 1$이고, $a \leq \frac{17}{3}$ $\quad \therefore 1 \leq a \leq \frac{17}{3}$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

11

조건 $x^2-3x<0$의 진리집합을 P라 하면

$x(x-3)<0$에서 $0<x<3$

$\therefore P=\{1, 2\}$

명제 '집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.'가 참이 되려면 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

$A=\{1\}$ 또는 $A=\{2\}$ 또는 $A=\{1, 2\}$

명제 '집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x \in A$이다.'가 참이 되려면 $A \cap B \neq \varnothing$이어야 한다.

(i) $A=\{1\}$일 때,

집합 B는 1을 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(ii) $A=\{2\}$일 때,

집합 B는 2를 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이므로 집합 B의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(iii) $A=\{1, 2\}$일 때,

집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 U의 부분집합 B의 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 U의 부분집합 B의 개수는

$2^{4-1-1}=2^2=4$

1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 U의 부분집합 B의 개수는

$2^{4-2}=2^2=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$8+8+(4+4+4)=28$

답 28

12

① 명제 : 두 실수 x, y에 대하여 $xy>0$이면 $x>0$, $y>0$이다. (거짓)

(반례) $x=-1$, $y=-1$이면 $xy=1>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

역 : 두 실수 x, y에 대하여 $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이다. (참)

② 명제 : 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이면 $A \cup B=B$이다. (참)

역 : 두 집합 A, B에 대하여 $A \cup B=B$이면 $A \subset B$이다. (참)

③ 명제 : $\triangle$ABC가 정삼각형이면 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$이다. (참)

역 : $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\triangle$ABC가 정삼각형이다. (거짓)

(반례) $\overline{AB}=\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$이면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이지만 $\triangle$ABC는 정삼각형이 아닌 이등변삼각형이다.

④ 명제 : 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다. (거짓)

(반례) 한 변의 길이가 4인 정사각형과 가로, 세로의 길이가 각각 2, 8인 직사각형의 넓이는 모두 16으로 같지만 합동이 아니다.

역 : 두 직사각형이 합동이면 두 직사각형의 넓이는 같다. (참)

⑤ 명제 : $\triangle$ABC$\equiv\triangle$DEF이면 대응변의 길이가 같고, 대응각의 크기가 같으므로 $\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEF이다. (참)

역 : $\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEF이면 $\triangle$ABC$\equiv\triangle$DEF이다. (거짓)

(반례) $\triangle$ABC가 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고, $\triangle$DEF가 한 변의 길이가 2인 정삼각형이면 $\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEF이지만 $\triangle$ABC와 $\triangle$DEF는 합동이 아니다.

따라서 명제는 참이고 그 역은 거짓인 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

13

$p : x^2+7x+10=0$에서

$(x+5)(x+2)=0$ $\quad \therefore x=-5$ 또는 $x=-2$

$q: x^2+5x+4<0$에서

$(x+4)(x+1)<0 \qquad \therefore -4<x<-1$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하면

$P=\{-5, -2\}$, $Q=\{x \mid -4<x<-1\}$,

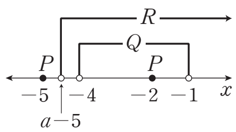
$R=\{x \mid x>a-5\}$

이때 명제 $p \longrightarrow r$이 거짓이므로 $P \not\subset R$

명제 $q \longrightarrow r$의 대우가 참이므로 명제 $q \longrightarrow r$도 참이다.

$\therefore Q \subset R$

즉, 세 집합 P, Q, R을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-5 \le a-5 \le -4 \qquad \therefore 0 \le a \le 1$

따라서 정수 a는 0, 1의 2개이다.

답 2

14

① $p: \dfrac{1}{ab}<3$, $q: ab \ge \dfrac{1}{3}$에서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로

p는 q이기 위한 충분조건도, 필요조건도 아니다.

($p \longrightarrow q$의 반례)

$a=1$, $b=-1$이면 $\dfrac{1}{ab}<3$이지만 $ab<\dfrac{1}{3}$이다.

($q \longrightarrow p$의 반례)

$a=1$, $b=\dfrac{1}{3}$이면 $ab \ge \dfrac{1}{3}$이지만 $\dfrac{1}{ab}=3$이다.

② $p: a+b=ab$, $q: \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$에서

$ab \ne 0$이므로 $a+b=ab$의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \qquad \therefore p \Longrightarrow q$

또한, $ab \ne 0$이므로 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$의 양변에 ab를 곱하면

$a+b=ab \qquad \therefore q \Longrightarrow p$

즉, $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

③ $p: a>0, b>0$, $q: |a+b|=|a|+|b|$에서

$a>0$, $b>0$이면 $|a|=a$, $|b|=b$, $|a+b|=a+b$이므로

$|a+b|=|a|+|b| \qquad \therefore p \Longrightarrow q$

그런데 $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

($q \longrightarrow p$의 반례)

$a=b=-1$이면 $|a+b|=|a|+|b|$이지만 $a<0$, $b<0$이다.

④ $p: a^3>b^3$, $q: |a|>|b|$에서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로

p는 q이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.

($p \longrightarrow q$의 반례)

$a=1$, $b=-2$이면 $a^3>b^3$이지만 $|a|<|b|$이다.

($q \longrightarrow p$의 반례)

$a=-2$, $b=1$이면 $|a|>|b|$이지만 $a^3<b^3$이다.

⑤ $p: a$ 또는 b가 무리수, $q: a+b$는 무리수에서

명제 $q \longrightarrow p$의 대우

'a, b가 모두 유리수이면 $a+b$는 유리수이다.'

가 참이므로 $q \Longrightarrow p$

그런데 $p \not\Longrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

($p \longrightarrow q$의 반례)

$a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a 또는 b가 무리수이지만 $a+b=0$은 무리수가 아니다.

따라서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid a<x\le 3a+2\}$,

$Q=\left\{x \,\middle|\, x<2a-1 \text{ 또는 } x \ge \dfrac{2a^2+1}{3}\right\}$,

$Q^C=\left\{x \,\middle|\, 2a-1 \le x < \dfrac{2a^2+1}{3}\right\}$

이때 조건 q의 진리집합 Q가 전체집합이 아니므로 Q^C는 공집합이 아니다. 즉,

$2a-1<\dfrac{2a^2+1}{3}$에서 $6a-3<2a^2+1$

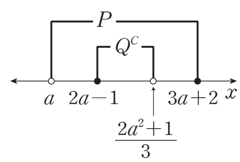
$a^2-3a+2>0$, $(a-1)(a-2)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, $\sim p$가 q이기 위한 충분조건이므로

$P^C \subset Q \qquad \therefore Q^C \subset P$

즉, 두 집합 P, Q^C을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a<2a-1$, $\dfrac{2a^2+1}{3}\le 3a+2$이어야 한다.

(i) $a<2a-1$에서 $a>1$

(ii) $\dfrac{2a^2+1}{3}\le 3a+2$에서

$2a^2+1\le 9a+6$, $2a^2-9a-5\le 0$

$(2a+1)(a-5)\le 0$ $\quad\therefore -\dfrac{1}{2}\le a\le 5$

(i), (ii)에서 $1<a\le 5$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$2<a\le 5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$

답 12

16

$p \longrightarrow q$가 참이므로 $p \Longrightarrow q$ $\quad\therefore P\subset Q$ ……㉠

$\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $\sim p \Longrightarrow q$ $\quad\therefore P^C\subset Q$ ……㉡

$\sim r \longrightarrow p$가 참이므로 $\sim r \Longrightarrow p$ $\quad\therefore R^C\subset P$ ……㉢

㉠, ㉡에서 $(P\cup P^C)\subset Q$이므로 $U=Q$ ……㉣

㉠, ㉢에서 $R^C\subset P\subset Q$

ㄱ. ㉡에서 $P^C\subset Q$ (참)

ㄴ. ㉢에서 $R^C\subset P$이므로 $P^C\subset R$이지만 $R\subset P^C$인지 알 수 없다.

즉, $R-P^C=\varnothing$인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. ㉣에서 $(R^C\cup P^C)\subset U=Q$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

17

네 조건 p, q, r, s를 다음과 같이 정하자.

p : 여학생보다 남학생이 더 선호하는 프로그램이다.

q : 학교 밖에서 진행하는 프로그램이다.

r : 외부 교사가 운영하는 프로그램이다.

s : 체육 영역의 프로그램이다.

각 조사 결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(가) : $p \Longrightarrow q$, (나) : $r \Longrightarrow q$, (다) : $s \Longrightarrow p$

이때 $s \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow q$에서 $s \Longrightarrow q$

각 명제의 대우도 참이므로

$\sim q \Longrightarrow \sim p$, $\sim q \Longrightarrow \sim r$, $\sim p \Longrightarrow \sim s$, $\sim q \Longrightarrow \sim s$

또한, 추론한 내용을 p, q, r, s를 이용하여 명제로 나타내면 다음과 같다.

① $s \longrightarrow \sim r$ ② $\sim r \longrightarrow \sim q$

③ $\sim q \longrightarrow \sim s$ ④ $p \longrightarrow s$

⑤ $p \longrightarrow \sim r$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

답 ③

3 명제의 증명

기본 + 필수연습 본문 pp.224~231

29	풀이 참조	**30**	5	**31~36**	풀이 참조		
37	(1) 121 (2) 23			**38**	$\frac{1}{5}$, $x=4$		
39	2	**40**	$2\sqrt{2}$	**41**	18	**42**	6
43	34 m	**44**	(1) 72 (2) 6			**45**	25

29

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=a+2\sqrt{ab}+b-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}\ge 0$

즉, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge(\sqrt{a+b})^2$에서

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 0$, $\sqrt{a+b}\ge 0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$

(단, 등호는 $ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립)

답 풀이 참조

30

$4a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{4a\times\frac{1}{a}}$$
$$=2\times 2=4$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 4a=\frac{1}{a}\text{, 즉 } a=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

즉, $4a+\frac{1}{a}+1\geq 4+1=5$이므로

구하는 최솟값은 5이다.

답 5

31

주어진 명제의 대우

'두 실수 x, y에 대하여 $x\leq 2$, $y\leq 2$이면 $x+y\leq 4$이다.'

가 참임을 보이면 된다.

$x\leq 2$, $y\leq 2$이므로

$x+y\leq 2+2=4$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

32

주어진 명제의 대우

'세 양의 정수 a, b, c에 대하여 a, b, c가 모두 홀수이면 $a^2+b^2+c^2$은 홀수이다.'

가 참임을 보이면 된다.

a, b, c가 모두 홀수이므로

$a=2l-1$, $b=2m-1$, $c=2n-1$ (l, m, n은 자연수)

로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(2l-1)^2+(2m-1)^2+(2n-1)^2\\&=4l^2-4l+1+4m^2-4m+1+4n^2-4n+1\\&=2(2l^2-2l+2m^2-2m+2n^2-2n+1)+1\end{aligned}$$

이때 $2l^2-2l+2m^2-2m+2n^2-2n+1$은 자연수이므로 $a^2+b^2+c^2$은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

33

주어진 명제의 결론을 부정하여 p가 3의 배수가 아니라고 가정하면 $p=3k-2$ 또는 $p=3k-1$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다.

(i) $p=3k-2$일 때,

$$\begin{aligned}8p^2+1&=8(3k-2)^2+1\\&=3(24k^2-32k+11)\end{aligned}$$

(ii) $p=3k-1$일 때,

$$\begin{aligned}8p^2+1&=8(3k-1)^2+1\\&=3(24k^2-16k+3)\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $8p^2+1$은 3의 배수이다.

이때 3의 배수 중에서 소수는 3뿐이고 $8p^2+1>3$이므로 $8p^2+1$은 소수가 아니다. 즉, $8p^2+1$이 소수라는 가정에 모순이다.

따라서 1보다 큰 자연수 p에 대하여 $8p^2+1$이 소수이면 p는 3의 배수이다.

답 풀이 참조

34

주어진 명제의 결론을 부정하여 m, n 중 적어도 하나가 홀수라 가정하자.

(i) m은 짝수, n은 홀수일 때,

$m=2a$, $n=2b-1$ (a, b는 자연수)로 나타내면

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(2a)^2+(2b-1)^2=4a^2+4b^2-4b+1\\&=4(a^2+b^2-b)+1\end{aligned}$$

(ii) m은 홀수, n은 짝수일 때,

$m=2a-1$, $n=2b$ (a, b는 자연수)로 나타내면

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(2a-1)^2+(2b)^2=4a^2-4a+1+4b^2\\&=4(a^2+b^2-a)+1\end{aligned}$$

(iii) m, n 모두 홀수일 때,

$m=2a-1$, $n=2b-1$ (a, b는 자연수)로 나타내면

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(2a-1)^2+(2b-1)^2\\&=4a^2-4a+4b^2-4b+2\\&=4(a^2+b^2-a-b)+2\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 m^2+n^2은 4의 배수가 아니므로 m^2+n^2이 4의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 두 자연수 m, n에 대하여 m^2+n^2이 4의 배수이면 m, n은 모두 짝수이다.

답 풀이 참조

35

(1) $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}$

$=\frac{1}{2}(2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca})$

$=\frac{1}{2}\{(a-2\sqrt{ab}+b)+(b-2\sqrt{bc}+c)+(c-2\sqrt{ca}+a)\}$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}\geq 0$

$\therefore\ a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

(단, 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, $\sqrt{c}-\sqrt{a}=0$, 즉 $a=b=c$일 때 성립)

(2) $(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

즉, $(\sqrt{2(a+b)})^2\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$에서

$\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(단, 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=b$일 때 성립)

답 풀이 참조

36

$(a^2+b^2+1)-(ab+a+b)$

$=a^2+b^2+1-ab-a-b$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2\times 1-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}\geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

(단, 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립)

답 풀이 참조

다른 풀이

a에 대한 이차방정식 $a^2+b^2+1=ab+a+b$, 즉
$a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(b+1)\}^2-4(b^2-b+1)$

$=-3b^2+6b-3=-3(b-1)^2$

이때 $(b-1)^2\geq 0$ ……㉠

이므로 모든 실수 b에 대하여 $D\leq 0$이다.

따라서 모든 실수 a, b에 대하여

$a^2-(b+1)a+b^2-b+1\geq 0$ ……㉡

즉, $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$가 성립한다.

또한, ㉠에서 등호는 $b=1$일 때 성립하므로 $b=1$을 이차부등식 ㉡에 대입하면

$a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$

즉, 등호는 $a=b=1$일 때 성립한다.

37

(1) $\left(4a+\frac{1}{a}\right)\left(9a+\frac{16}{a}\right)=36a^2+64+9+\frac{16}{a^2}$

$=36a^2+\frac{16}{a^2}+73$ ……㉠

0이 아닌 실수 a에 대하여 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$36a^2+\frac{16}{a^2}\geq 2\sqrt{36a^2\times\frac{16}{a^2}}$

$=2\times 6\times 4=48$

$\left(\text{단, 등호는 } 36a^2=\frac{16}{a^2}\text{, 즉 } a=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

㉠에서 (주어진 식)$\geq 48+73=121$이므로 구하는 최솟값은 121이다.

(2) $x^2+\frac{49}{x^2-9}=x^2-9+\frac{49}{x^2-9}+9$ ……㉠

$x>3$에서 $x^2-9>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2-9+\frac{49}{x^2-9}\geq 2\sqrt{(x^2-9)\times\frac{49}{x^2-9}}$

$=2\times 7=14$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2-9=\frac{49}{x^2-9}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$

㉠에서 (주어진 식)$\geq 14+9=23$이므로 구하는 최솟값은 23이다.

답 (1) 121 (2) 23

38

$x>3$에서 $x-3>0$, $x^2-3x+1>0$

즉, $\dfrac{x-3}{x^2-3x+1}>0$이므로 $\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$이 최소일 때,

$\dfrac{x-3}{x^2-3x+1}$은 최대이다.

$$\frac{x^2-3x+1}{x-3}=\frac{x(x-3)+1}{x-3}=x+\frac{1}{x-3}$$
$$=x-3+\frac{1}{x-3}+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x-3+\frac{1}{x-3}\ge 2\sqrt{(x-3)\times\frac{1}{x-3}}=2$$
$$\left(단,\ 등호는\ x-3=\frac{1}{x-3},\ 즉\ x=4일\ 때\ 성립\right)$$

㉠에서 $x=4$일 때 $\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$은 최솟값 $2+3=5$를 가지므로 $\dfrac{x-3}{x^2-3x+1}$의 최댓값은 $\dfrac{1}{5}$이다.

답 $\dfrac{1}{5}$, $x=4$

39

$\dfrac{3}{a}>0$, $\dfrac{2}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{6}{ab}}\ \left(단,\ 등호는\ \frac{3}{a}=\frac{2}{b}일\ 때\ 성립\right)$$

이때 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=12$이므로 $12\ge 2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$ $\qquad\therefore\ 6\ge\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$

양변을 제곱하면 $36\ge\dfrac{6}{ab}$ $\qquad\therefore\ ab\ge\dfrac{1}{6}$

$$\therefore\ 2a+3b=ab\times\frac{2a+3b}{ab}=ab\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)=12ab$$
$$\ge 12\times\frac{1}{6}=2$$
$$\left(단,\ 등호는\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}일\ 때\ 성립\right)$$

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 2이다.

답 2

다른 풀이

$$(2a+3b)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)=12+\frac{9b}{a}+\frac{4a}{b} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{9b}{a}\times\frac{4a}{b}}=12$$
$$\left(단,\ 등호는\ \frac{9b}{a}=\frac{4a}{b},\ 즉\ \frac{3}{a}=\frac{2}{b}일\ 때\ 성립\right)$$

이때 $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=12$이므로 ㉠에서

$12(2a+3b)\ge 12+12=24$

$$\therefore\ 2a+3b\ge 2\ \left(단,\ 등호는\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}일\ 때\ 성립\right)$$

따라서 $2a+3b$의 최솟값은 2이다.

40

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+3b\ge 2\sqrt{3ab}$ (단, 등호는 $a=3b$일 때 성립)

이때 $a+3b=4$이므로 $4\ge 2\sqrt{3ab}$ $\qquad\cdots\cdots ㉠$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{3b})^2=a+2\sqrt{3ab}+3b$$
$$=4+2\sqrt{3ab}$$
$$\le 4+4=8\ (\because ㉠)$$
$$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{3b}\le\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$\left(단,\ 등호는\ a=2,\ b=\frac{2}{3}일\ 때\ 성립\right)$$

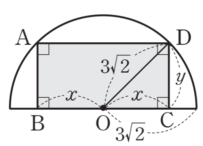
따라서 구하는 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

41

반원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 $\overline{OD}=3\sqrt{2}$

직사각형 ABCD의 가로의 길이를 $2x$ $(0<x<3\sqrt{2})$, 세로의 길이를 y $(0<y<3\sqrt{2})$라 하면 직각삼각형 OCD에서 피타고라스 정리에 의하여



$x^2+y^2=18$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}$ (단, 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때 성립)

$\quad=2xy\ (\because\ x>0,\ y>0)$

이때 $x^2+y^2=18$이므로

$2xy\le 18$ (단, 등호는 $x=y=3$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 18이다.

답 18

42

직선 AB의 기울기를 k $(k<0)$라 하면 이 직선이 점 P$(3, 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=k(x-3)$ $\quad\therefore y=kx-3k+1$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}\left(3-\dfrac{1}{k}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, -3k+1)$

$$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{k}\right)(-3k+1)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-9k-\frac{1}{k}+6\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-9k>0$, $-\dfrac{1}{k}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$-9k+\left(-\frac{1}{k}\right)\ge 2\sqrt{-9k\times\left(-\frac{1}{k}\right)}$$
$$=2\times3=6$$
$$\left(\text{단, 등호는 } -9k=-\frac{1}{k}\text{, 즉 } k=-\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

㉠에서

$$\triangle\mathrm{OAB}\ge\frac{1}{2}\times(6+6)=6$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 6이다.

답 6

다른 풀이

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면 직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ← x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식

이 직선이 점 P$(3, 1)$을 지나므로

$\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

$a>0$, $b>0$에서 $\dfrac{3}{a}>0$, $\dfrac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{1}{b}}\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a}=\frac{1}{b}\text{일 때 성립}\right)$$

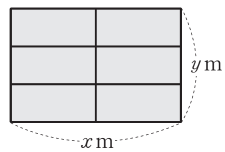
㉡에서 $1\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{ab}}$, 즉 $2\sqrt{\dfrac{3}{ab}}\le1$의 양변을 제곱하면

$\dfrac{12}{ab}\le1 \quad \therefore ab\ge12\ (\because ab>0)$

$\therefore \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}ab\ge6$ (단, 등호는 $a=6$, $b=2$일 때 성립)

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 6이다.

43



오른쪽 그림과 같이 큰 직사각형의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m라 하면 줄 전체의 길이가 144 m이므로

$4x+3y=144 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x+3y\ge2\sqrt{4x\times3y}=4\sqrt{3xy}$$
(단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

㉠에서

$144\ge4\sqrt{3xy}$, $\sqrt{3xy}\le36$

$3xy\le1296 \quad \therefore xy\le432$

(단, 등호는 $x=18$, $y=24$일 때 성립)

즉, 큰 직사각형 모양의 구역 전체의 넓이는 $x=18$, $y=24$일 때 최대가 된다.

이때 작은 직사각형의 가로의 길이는 $\dfrac{x}{2}=9$(m), 세로의 길이는 $\dfrac{y}{3}=8$(m)이므로 작은 직사각형 하나의 둘레의 길이는

$2\times(9+8)=34$(m)

답 34 m

44

(1) a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+1^2\right\}\{(\sqrt{2}a)^2+b^2\}\ge\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}a\text{, 즉 } b=4a\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $\dfrac{a}{2}+b=9$이므로

$\dfrac{9}{8}(2a^2+b^2)\ge81$

$\therefore 2a^2+b^2\ge72$ (단, 등호는 $a=2$, $b=8$일 때 성립)

따라서 $2a^2+b^2$의 최솟값은 72이다.

(2) a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+1^2+2^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}$$
$$\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a}=\sqrt{b}=\frac{\sqrt{c}}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore\ 6(a+b+c)\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2$

이때 $a+b+c=6$이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2\le 36$

이때 $\sqrt{a}>0$, $\sqrt{b}>0$, $\sqrt{c}>0$이므로

$0<\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}\le 6$

(단, 등호는 $a=1$, $b=1$, $c=4$일 때 성립)

따라서 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}$의 최댓값은 6이다.

답 (1) 72 (2) 6

45

a, b는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{3^2+(-4)^2\}(a^2+b^2)\ge(3a-4b)^2$

(단, 등호는 $3b=-4a$일 때 성립)

$25(a^2+b^2)\ge(3a-4b)^2$

$\therefore\ \dfrac{(3a-4b)^2}{a^2+b^2}\le 25\ (\because\ a^2+b^2>0)$

따라서 구하는 최댓값은 25이다.

답 25

STEP 1 개 념 마 무 리 본문 pp.232~233

18 풀이 참조	**19** 풀이 참조	**20** ④	**21** ⑤
22 9	**23** $\frac{25}{4}$	**24** 8	**25** 4
26 $\frac{17}{4}$	**27** ⑤		

18

주어진 명제의 대우

'두 자연수 x, y에 대하여 xy가 $\boxed{\text{홀수}}$이면 x^2+y^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.'

가 참임을 보이면 된다.

xy가 홀수이면 x, y는 모두 홀수이므로

$x=2m+1$, $y=2n+1$ (m, n은 음이 아닌 정수)로 나타낼 수 있다. 이때

$x^2+y^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2$

$=2(\boxed{2m^2+2m+2n^2+2n+1})$

이므로 x^2+y^2은 $\boxed{\text{짝수}}$이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$\therefore$ (가) : 홀수, (나) : 짝수, (다) : $2m^2+2m+2n^2+2n+1$

답 풀이 참조

19

주어진 명제의 결론을 부정하여 $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이라 하자.

(i) $a\ne0$, $b=0$이면

$a+b\sqrt{2}=a$에서 $a\ne0$이므로

$a+b\sqrt{2}=0$이라는 가정에 모순이다.

(ii) $a=0$, $b\ne0$이면

$a+b\sqrt{2}=b\sqrt{2}$에서 $b\ne0$이므로

$a+b\sqrt{2}=0$이라는 가정에 모순이다.

(iii) $a\ne0$, $b\ne0$이면

$a+b\sqrt{2}=0$에서 $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$

이때 a, b가 유리수이므로 $-\dfrac{a}{b}$도 유리수이다.

즉, (무리수)$=$(유리수)가 되어 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 두 유리수 a, b에 대하여 $a+b\sqrt{2}=0$이면 $a=0$이고 $b=0$, 즉 $a=b=0$이다.

답 풀이 참조

20

$(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2-\left(\dfrac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=a^2+b^2+c^2-\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

$=\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)}{3}$

$=\dfrac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3}$

$=\dfrac{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)}{3}$

$=\dfrac{\boxed{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}}{3}\ge 0$

$(\because\ (a-b)^2\ge0,\ (b-c)^2\ge0,\ (c-a)^2\ge0)$

이때 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\boxed{\geq}$ 0, $\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}$ $\boxed{\geq}$ 0이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}$가 성립한다.

단, 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉

$\boxed{a=b=c}$일 때 성립한다.

∴ ㈎ : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$,

㈏ : $\geq$, ㈐ : $a=b=c$

답 ④

21

ㄱ. $a \geq b \geq 0$이므로 $\sqrt{a-b} \geq 0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geq 0$

이때 $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=(a-b)-(a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$

$=2\sqrt{a}\sqrt{b}-2b$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \geq 0$

∴ $\sqrt{a-b} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

(단, 등호는 $a=b$ 또는 $b=0$일 때 성립) (참)

ㄴ. (i) $|a| \geq |b|$일 때,

$|a+b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로

$|a+b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a+b)^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|+ab) \geq 0$ ($\because$ $|ab| \geq -ab$)

∴ $|a+b| \geq |a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a+b|>0$, $|a|-|b|<0$

∴ $|a+b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서 $|a+b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$이고 $ab \leq 0$일 때 성립) (참)

ㄷ. (i) $|a| \geq |b|$일 때,

$|a-b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$ ($\because$ $|ab| \geq ab$)

∴ $|a-b| \geq |a|-|b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$이고 $ab \geq 0$일 때 성립) (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄴ. $|a|=|a+b+(-b)|$

$\leq |a+b|+|-b|=|a+b|+|b|$

∴ $|a+b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$이고 $ab \leq 0$일 때 성립) (참)

22

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)$

$=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+3$ ······㉠

㈎

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}}=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \times \frac{a}{c}}=2$ (단, 등호는 $c=a$일 때 성립)

$\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}}=2$ (단, 등호는 $b=c$일 때 성립)

㈏

∴ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2+2+2=6$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

㉠에서 (주어진 식)$\geq 6+3=9$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

㈐

답 9

단계	채점 기준	배점
㈎	주어진 식을 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+3$으로 정리한 경우	40%
㈏	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$의 최솟값을 구한 경우	40%
㈐	주어진 식의 최솟값을 구한 경우	20%

23

$a+b=1$이므로

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\right)=4+\frac{a}{4b}+\frac{4b}{a}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{a}{4b}+\frac{4b}{a}+\frac{17}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{a}{4b}>0$, $\frac{4b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{4b}+\frac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{4b}\times\frac{4b}{a}}=2$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4b}=\frac{4b}{a}\text{, 즉 } a=4b\text{일 때 성립}\right)$

㉠에서 $(\text{주어진 식})\geq 2+\frac{17}{4}=\frac{25}{4}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{4}{5},\ b=\frac{1}{5}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{4}$이다.

답 $\frac{25}{4}$

보충 설명

다음과 같이 잘못 풀지 않도록 주의한다.

$a>0$, $b>0$에서 $\frac{4}{a}>0$, $\frac{1}{4b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}\times\frac{1}{4b}}=\frac{2}{\sqrt{ab}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉, $\frac{4}{a}+\frac{1}{4b}$의 값은 $\sqrt{ab}$가 최대일 때 최소가 된다.

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

이때 $a+b=1$이므로 $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 구하는 최솟값은 4이다.

이와 같이 오답이 나오는 이유는 ㉡, ㉢에서 등호가 성립할 조건이 각각

㉡ : $\frac{4}{a}=\frac{1}{4b}$, 즉 $a=\frac{16}{17}$, $b=\frac{1}{17}$일 때

㉢ : $a=b=\frac{1}{2}$일 때

으로 서로 다르기 때문이다.

이와 같이 산술평균과 기하평균의 관계를 활용하여 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제를 풀 때에는 등호가 성립할 조건이 일치하는 경우에만 함께 활용할 수 있음에 주의한다.

24

$x=a+\frac{1}{b}$, $y=b+\frac{1}{a}$이므로

$$x^2+y^2=\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$$

$$=\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(b^2+\frac{2b}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)$$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{1}{a^2}}=2$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립)

$\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}\times\frac{2b}{a}}=4$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$b^2+\frac{1}{b^2}\geq 2\sqrt{b^2\times\frac{1}{b^2}}=2$ (단, 등호는 $b=1$일 때 성립)

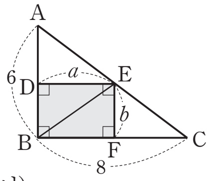
$\therefore\ x^2+y^2\geq 2+4+2=8$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.

답 8

25

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 나머지 꼭짓점을 각각 D, E, F라 하면



(△ABC의 넓이)

=(△ABE의 넓이)+(△BCE의 넓이)

에서 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 6\times a+\frac{1}{2}\times 8\times b$

$\therefore\ 3a+4b=24$

즉, $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}=\frac{6a+8b}{ab}=\frac{2(3a+4b)}{ab}=\frac{48}{ab}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이므로 $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}$의 값이 최소이려면 ab의 값이 최대이어야 한다.

한편, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\geq 2\sqrt{3a\times 4b}$ (단, 등호는 $3a=4b$일 때 성립)

$4\sqrt{3ab}\leq 24$, $\sqrt{3ab}\leq 6$, $3ab\leq 36$

$\therefore\ ab\leq 12$ (단, 등호는 $a=4$, $b=3$일 때 성립)

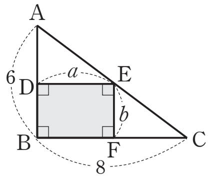
㉠에서

$$\frac{8}{a}+\frac{6}{b}\geq\frac{48}{12}=4$$

따라서 $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}$의 최솟값은 4이다.

답 4

다른 풀이



오른쪽 그림과 같이 직사각형의 나머지 꼭짓점을 각각 D, E, F라 하면 두 삼각형 ADE와 EFC는 닮음이다.

즉, $\overline{AD}:\overline{DE}=\overline{EF}:\overline{FC}$이므로

$6-b:a=b:8-a$, $ab=(6-b)(8-a)$

$ab=48-6a-8b+ab$

$\therefore\ 6a+8b=48$ ……㉡

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6a+8b\geq 2\sqrt{48ab}$ (단, 등호는 $6a=8b$일 때 성립)

㉡에서 $48\geq 2\sqrt{48ab}$ $\quad\therefore\ 6\geq\sqrt{3ab}$

양변을 제곱하면

$36\geq 3ab$ $\quad\therefore\ ab\leq 12$ (단, 등호는 $a=4$, $b=3$일 때 성립) ……㉢

$$\frac{8}{a}+\frac{6}{b}=\frac{6a+8b}{ab}\geq\frac{48}{12}=4\ (\because ㉡, ㉢)$$

따라서 $\frac{8}{a}+\frac{6}{b}$의 최솟값은 4이다.

26

a, b는 실수이고 $\frac{25}{4a^2}=\left(\frac{5}{2a}\right)^2$, $\frac{36}{b^2}=\left(\frac{6}{b}\right)^2$이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)\left\{\left(\frac{5}{2a}\right)^2+\left(\frac{6}{b}\right)^2\right\}\geq\left(a\times\frac{5}{2a}+b\times\frac{6}{b}\right)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 }\frac{6a}{b}=\frac{5b}{2a}\text{일 때 성립}\right)$$

이때 $a^2+b^2=4$이므로

$$4\left(\frac{25}{4a^2}+\frac{36}{b^2}\right)\geq\left(\frac{5}{2}+6\right)^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{36}{b^2}\geq\left(\frac{17}{4}\right)^2$$

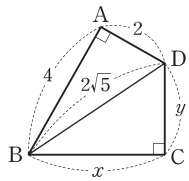
$$\therefore\ \sqrt{\frac{25}{4a^2}+\frac{36}{b^2}}\geq\frac{17}{4}$$

$$\left(\text{단, 등호는 }a^2=\frac{20}{17},\ b^2=\frac{48}{17}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{17}{4}$이다.

답 $\frac{17}{4}$

27



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$x+y>2\sqrt{5}$ ……㉠

또한, $\overline{BD}$는 직각삼각형 BCD의 빗변이므로

$x^2+y^2=20$

x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$(x+y)^2\leq 40$, $-2\sqrt{10}\leq x+y\leq 2\sqrt{10}$

$\therefore\ 2\sqrt{5}<x+y\leq 2\sqrt{10}$ ($\because$ ㉠)

따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 범위는

$6+2\sqrt{5}<2+4+x+y\leq 6+2\sqrt{10}$

이므로 구하는 최댓값은 $6+2\sqrt{10}$이다.

$x=\sqrt{10}$, $y=\sqrt{10}$일 때 최댓값을 갖는다.

답 ⑤

STEP 2 개념 마무리

본문 p.234

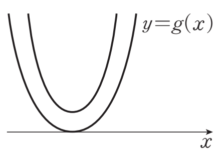
1 11	**2** 18	**3** 16	**4** ③
5 $-\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$		**6** 16	

1

(i) $a=-3$일 때, $f(x)=9$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\geq -1$

(ii) $a\neq -3$일 때,



$g(x)=f(x)+1$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -1$, 즉 $g(x)\geq 0$이어야 하므로 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때

$$g(x)=f(x)+1$$
$$=(a+3)x^2+2(a+3)x+10$$

이므로

① $a+3>0$에서 $a>-3$ ······㉠

② 이차방정식 $g(x)=0$, 즉

$(a+3)x^2+2(a+3)x+10=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-10(a+3)\le 0$$

$a^2-4a-21\le 0$, $(a+3)(a-7)\le 0$

$\therefore\ -3\le a\le 7$ ······㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-3<a\le 7$

(i), (ii)에서 $-3\le a\le 7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -3, -2, -1, $\cdots$, 7의 11개이다.

답 11

2

명제 '직선 l 위의 어떤 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}>90°$이다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정 '직선 l 위의 모든 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}\le 90°$이다.'는 참이다.

(가)

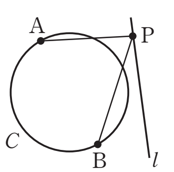
이때 두 점 A, B와 직선 l 위의 점 P에 대하여 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C를 생각하자.

$\angle\mathrm{APB}>90°$이면 점 P는 원 C의 내부에 있고

$\angle\mathrm{APB}=90°$이면 점 P는 원 C 위에 있고

$\angle\mathrm{APB}<90°$이면 점 P는 원 C의 외부에 있다.

즉, 명제 '직선 $l:y=-2x+k$ 위의 모든 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}\le 90°$이다.'가 참이려면 직선 l은 원 C와 접하거나 원 C와 만나지 않아야 한다.



(나)

두 점 A$(-3,\ 3)$, B$(7,\ -7)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{3+(-7)}{2}\right),\ \text{즉 } (2,\ -2)$$

원 C의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(7+3)^2+(-7-3)^2}=5\sqrt{2}$$

원 C의 중심 $(2,\ -2)$와 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이보다 크거나 같아야 하므로

$$\frac{|2\times 2-2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\ge 5\sqrt{2},\ |2-k|\ge 5\sqrt{10}$$

$\therefore\ k\ge 2+5\sqrt{10}$ ($\because$ k는 자연수)

이때 $17<2+5\sqrt{10}<18$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 18이다.

(다)

답 18

단계	채점 기준	배점
(가)	이용할 수 있는 참인 명제를 찾은 경우	20%
(나)	명제가 참이 될 조건을 밝힌 경우	40%
(다)	자연수 k의 최솟값을 구한 경우	40%

3

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$이어야 한다.

$p:\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-10}}=-\sqrt{\dfrac{x+5}{x-10}}$에서

$x+5\ge 0$, $x-10<0$ $\quad\therefore\ -5\le x<10$

$\therefore\ P=\{x\,|\,-5\le x<10\}$

$q:x^2-5x-nx+5n<0$에서

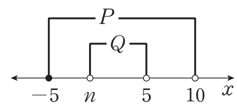
$(x-5)(x-n)<0$ ······㉠

(i) $n<5$일 때,

㉠의 해는 $n<x<5$

$\therefore\ Q=\{x\,|\,n<x<5\}$

이때 $Q\subset P$가 되도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-5\le n<5$

(ii) $n=5$일 때,

㉠은 $(x-5)^2<0$이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 없다.

$\therefore\ Q=\varnothing$

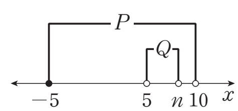
이때 항상 $Q\subset P$이므로 $n=5$일 때 조건을 만족시킨다.

(iii) $n>5$일 때,

㉠의 해는 $5<x<n$

$\therefore\ Q=\{x\,|\,5<x<n\}$

이때 $Q\subset P$가 되도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$5<n\le 10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-5\le n\le 10$이므로 정수 n은 -5, -4, -3, $\cdots$, 10의 16개이다.

답 16

보충 설명

음수의 제곱근의 성질 | a, b가 실수일 때,

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\ne 0$

4

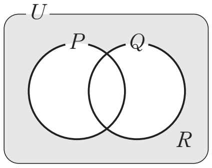
명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q^C\subset P$, 즉 $Q^C-P=\varnothing$이어야 한다.

즉, 주어진 명제가 거짓임을 보이는 반례를 원소로 갖는 집합 집합 R은

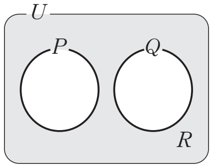
$R=Q^C-P=Q^C\cap P^C$

또한, $P-Q\ne\varnothing$이고, $R\ne\varnothing$이므로 세 집합 P, Q, R을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $P\cap Q\ne\varnothing$일 때,



(ⅱ) $P\cap Q=\varnothing$일 때,



ㄱ. (ⅰ), (ⅱ)에서 $R\subset P^C$ (참)

ㄴ. (ⅰ), (ⅱ)에서 $R\subset Q^C$이고,
$P-Q\ne\varnothing$이므로 $R\ne Q^C$
또한, $R\ne\varnothing$에서 $Q^C\ne\varnothing$
$\therefore$ $Q^C\not\subset R$ (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $R\subset P^C$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $R\subset Q^C$
즉, $R\subset(P^C\cup Q^C)$이므로
$R\subset(P\cap Q)^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5

$x^2+y^2-xy+ay+2>0$에서

$\left(x^2-xy+\dfrac{y^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}y^2+ay+2>0$

$\therefore$ $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+ay+2>0$

위의 부등식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립하고,

$\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2\ge 0$이므로 $\dfrac{3}{4}y^2+ay+2>0$이어야 한다.

이차방정식 $\dfrac{3}{4}y^2+ay+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times\dfrac{3}{4}\times 2=a^2-6<0$, $a^2<6$

$\therefore$ $-\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$

답 $-\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$

다른 풀이

주어진 부등식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-yx+y^2+ay+2>0$ ……㉠

㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-yx+y^2+ay+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-y)^2-4\times1\times(y^2+ay+2)<0$

$3y^2+4ay+8>0$ ……㉡

또한, ㉡이 모든 실수 y에 대하여 성립하므로 y에 대한 이차방정식 $3y^2+4ay+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(2a)^2-3\times 8<0$

$4a^2-24<0$, $a^2-6<0$

$\therefore$ $-\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$

6

$(x-y)^2=A$라 하면

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}&=\frac{\{(x+y)^2\}^2}{A}=\frac{\{(x-y)^2+4xy\}^2}{A}\\&=\frac{(A+4)^2}{A}\ (\because xy=1)\\&=\frac{A^2+8A+16}{A}=A+8+\frac{16}{A}\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때 $x\ne y$이므로 $A>0$, $\dfrac{16}{A}>0$이다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$A+\dfrac{16}{A}\ge 2\sqrt{A\times\dfrac{16}{A}}=8$

$\left(\text{단, 등호는 } A=\dfrac{16}{A},\ \text{즉 } A=4\text{일 때 성립}\right)$

㉠에서 (주어진 식)$\ge 8+8=16$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

답 16

Ⅲ. 함수와 그래프

08. 함수

1 함수

기본 + 필수연습 본문 pp.243~253

01 (1) 함수이다., 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$,
공역 : $\{1, 2, 3\}$, 치역 : $\{1, 2, 3\}$
(2) 함수이다., 정의역 : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
공역 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역 : $\{1, 3, 7, 9\}$
02 (1) 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y$는 실수$\}$
(2) 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\le -4\}$
(3) 정의역 : $\{x|x\ne 0$인 실수$\}$,
치역 : $\{y|y\ne 0$인 실수$\}$
03 (1) $f\ne g$ (2) $f=g$ **04** ㄴ
05 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ (3) ㄴ (4) ㄷ
06 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ
07 ㄱ, ㄴ **08** 3 **09** 4 **10** 7
11 6 **12** $-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}$ **13** -2 **14** 36
15 3 **16** 27 **17** ㄱ, ㄴ, ㄷ
18 풀이 참조 **19** 1 **20** 5 **21** 8, 20
22 5 **23** $-1<m<1$
24 (1) $a=\frac{1}{2}, b=-1$ (2) $a=-3, b=4$
25 7 **26** 6 **27** 40 **28** 9
29 48

01

(1) 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이고, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역과 치역은 모두 $\{1, 2, 3\}$이다.

(2) 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이고, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 공역은 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역은 $\{1, 3, 7, 9\}$이다.

답 (1) 함수이다., 정의역 : $\{1, 2, 3, 4\}$,
공역 : $\{1, 2, 3\}$, 치역 : $\{1, 2, 3\}$
(2) 함수이다., 정의역 : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
공역 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역 : $\{1, 3, 7, 9\}$

02

(1) 함수 $y=4-x$의 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$,
치역은 $\{y|y$는 실수$\}$이다.

(2) 함수 $y=-(2x-3)^2-4$의 정의역은 $\{x|x$는 실수$\}$,
치역은 $\{y|y\le -4\}$이다.

(3) 함수 $y=-\frac{2}{x}$의 정의역은 $\{x|x\ne 0$인 실수$\}$,
치역은 $\{y|y\ne 0$인 실수$\}$이다.

답 (1) 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y$는 실수$\}$
(2) 정의역 : $\{x|x$는 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\le -4\}$
(3) 정의역 : $\{x|x\ne 0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y|y\ne 0$인 실수$\}$

03

(1) $f(1)=1+1=2$, $g(1)=-1^2+1=0$이므로
$f(1)\ne g(1)$ $\therefore f\ne g$

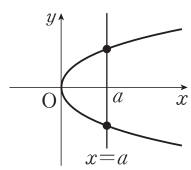
(2) (i) $f(-1)=-|-1|+2=1$,
$g(-1)=-(-1)^2+2=1$이므로
$f(-1)=g(-1)$
(ii) $f(0)=2$, $g(0)=2$이므로
$f(0)=g(0)$
(iii) $f(1)=-1+2=1$, $g(1)=-1^2+2=1$이므로
$f(1)=g(1)$
(i), (ii), (iii)에서 $f=g$

답 (1) $f\ne g$ (2) $f=g$

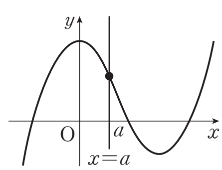
04

실수 전체의 집합에서 정의된 함수의 그래프이려면 정의역의 임의의 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프가 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나야 한다.

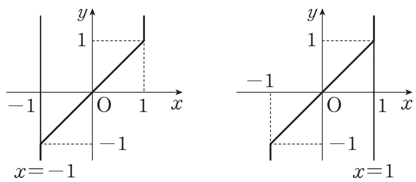
ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $a>0$인 임의의 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 두 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 임의의 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



ㄷ. 다음 그림과 같이 직선 $x=-1$ 또는 직선 $x=1$과 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



따라서 함수의 그래프인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

05

(1) 일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

(2) 일대일대응은 일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

(3) 항등함수는 정의역의 모든 원소 x $(x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$에 대하여 $y=x$가 성립해야 하므로 그 그래프는 ㄴ이다.

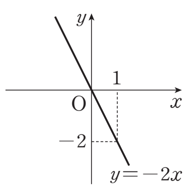
(4) 상수함수는 치역의 원소가 1개이어야 하므로 그 그래프는 ㄷ이다.

답 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ (3) ㄴ (4) ㄷ

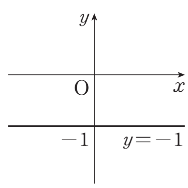
06

각 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

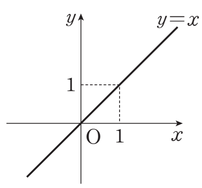
ㄱ.



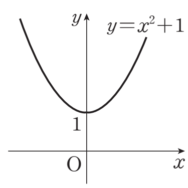
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.



(1) 일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄷ이다.

(2) 일대일대응은 일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄷ이다.

(3) 항등함수는 그 그래프가 직선 $y=x$인 함수이므로 ㄷ이다.

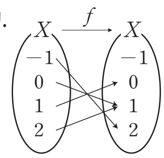
(4) 상수함수는 치역의 원소가 1개, 즉 그 그래프가 x축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ

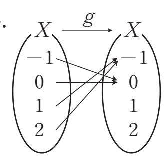
07

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

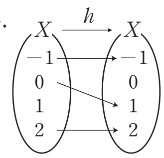
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이때 ㄷ은 X의 원소 1에 대응하는 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 X에서 X로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

08

집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 $f(-1)=0\in X$, $f(0)=-1\in X$이므로 f가 X에서 X로의 함수가 되기 위해서는 $f(1)\in X$이어야 한다.

(i) $f(1)=-1$일 때,

$f(1)=2a-2=-1$에서

$2a=1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(1)=0$일 때,

$f(1)=2a-2=0$에서

$2a=2 \qquad \therefore a=1$

(iii) $f(1)=1$일 때,

$f(1)=2a-2=1$에서

$2a=3 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은

$\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3$

답 3

09

두 집합 $X=\{0, 2, 4\}$, $Y=\{1, 5\}$에 대하여 $f(0)=5\in Y$이므로 f가 X에서 Y로의 함수가 되기 위해서는 $f(2)\in Y$, $f(4)\in Y$이어야 한다.

(ⅰ) $f(2)=1$일 때,

$f(2)=2^2-2a+5=1$에서

$9-2a=1 \quad \therefore a=4$

즉, $f(x)=x^2-4x+5$이면

$f(4)=5\in Y$이므로 f는 X에서 Y로의 함수이다.

(ⅱ) $f(2)=5$일 때,

$f(2)=2^2-2a+5=5$에서

$9-2a=5 \quad \therefore a=2$

즉, $f(x)=x^2-2x+5$이면

$f(4)=13\notin Y$이므로 f는 X에서 Y로의 함수가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수 a의 값은 4이다.

답 4

다른 풀이

f가 X에서 Y로의 함수가 되기 위해서는

$f(2)\in Y$, $f(4)\in Y$이어야 한다.

(ⅰ) $f(4)=1$일 때,

$f(4)=4^2-4a+5=1$에서

$21-4a=1 \quad \therefore a=5$

즉, $f(x)=x^2-5x+5$이면

$f(2)=-1\notin Y$이므로 f는 X에서 Y로의 함수가 아니다.

(ⅱ) $f(4)=5$일 때,

$f(4)=4^2-4a+5=5$에서

$21-4a=5 \quad \therefore a=4$

즉, $f(x)=x^2-4x+5$이면

$f(2)=1\in Y$이므로 f는 X에서 Y로의 함수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수 a의 값은 4이다.

10

정의역이 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$이므로

$f(1)=(3^1$, 즉 3을 7로 나눈 나머지$)=3$

$f(2)=(3^2$, 즉 9를 7로 나눈 나머지$)=2$

$f(3)=(3^3$, 즉 27을 7로 나눈 나머지$)=6$

$f(4)=(3^4$, 즉 81을 7로 나눈 나머지$)=4$

$f(5)=(3^5$, 즉 243을 7로 나눈 나머지$)=5$

$f(6)=(3^6$, 즉 729를 7로 나눈 나머지$)=1$

$f(7)=(3^7$, 즉 2187을 7로 나눈 나머지$)=3$

$\vdots$

즉, 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 구하는 합은

$6+1=7$

답 7

다른 풀이

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 이용하여 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $\cdots$의 값을 구할 수 있다.

$f(4)=(3^4$, 즉 $3^2\times3^2$을 7로 나눈 나머지$)$

$=(\underbrace{2\times2}_{f(2)\times f(2)}$, 즉 4를 7로 나눈 나머지$)=4$

$f(5)=(3^5$, 즉 $3^2\times3^3$을 7로 나눈 나머지$)$

$=(\underbrace{2\times6}_{f(2)\times f(3)}$, 즉 12를 7로 나눈 나머지$)=5$

$f(6)=(3^6$, 즉 $3^3\times3^3$을 7로 나눈 나머지$)$

$=(\underbrace{6\times6}_{f(3)\times f(3)}$, 즉 36을 7로 나눈 나머지$)=1$

$f(7)=(3^7$, 즉 $3^6\times3^1$을 7로 나눈 나머지$)$

$=(\underbrace{1\times3}_{f(6)\times f(1)}$, 즉 3을 7로 나눈 나머지$)=3$

$\vdots$

따라서 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 구하는 합은

$6+1=7$

보충 설명

함수 f의 치역을 S라 하면 어떤 자연수를 7로 나눈 나머지로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

$S\subset\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이때 임의의 자연수 x에 대하여 3^x은 7의 배수가 될 수 없으므로

$0\notin S$

$\therefore S\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

또한,

$3^7=3\times3^6=3\times(7+2)^3$

$=3\times(7^3+3\times7^2\times2+3\times7\times2^2+2^3)$

$=3\times\{7\times(7^2+3\times7\times2+3\times2^2)+7+1\}$

$=7\times(3\times7^2+3^2\times7\times2+3^2\times2^2+3)+3$

에서 3^7을 7로 나눈 나머지는 3을 7로 나눈 나머지와 같다.

즉, $f(1)=f(7)$이고, 같은 방법으로

$f(2)=f(8)$, $f(3)=f(9)$, $\cdots$

따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값만 구해도 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$임을 알 수 있다.

11

정의역이 $X=\{1,\ 3\}$인 두 함수 f, g의 치역이 서로 같으므로 $f(1)=g(1)$, $f(3)=g(3)$ 또는 $f(1)=g(3)$, $f(3)=g(1)$이다.

(i) $f(1)=g(1)$, $f(3)=g(3)$일 때,

$1+2a+b=b+3a$, $9+6a+b=3b+3a$이므로

$a=1$, $3a-2b=-9$

$\therefore a=1,\ b=6$

(ii) $f(1)=g(3)$, $f(3)=g(1)$일 때,

$1+2a+b=3b+3a$, $9+6a+b=b+3a$이므로

$a+2b=1$, $3a=-9$

$\therefore a=-3,\ b=2$

그런데 a, b는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=6$이므로

$ab=1\times6=6$

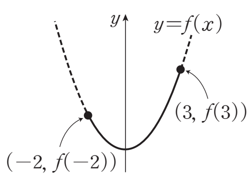
답 6

12

$f(x)=ax^2+b\ (a\neq0)$라 하면 함수 f의 치역이 $\{y\,|\,-1\le y\le5\}$이므로 $-2\le x\le3$에서 $f(x)$의 최솟값은 -1, 최댓값은 5이다.

(i) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프는 아래로 볼록하므로 $-2\le x\le3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(0)=-1$, $f(3)=5$이므로

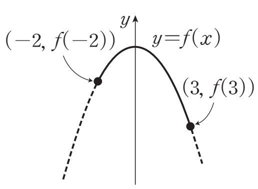
$b=-1$, $9a+b=5$

$\therefore a=\dfrac{2}{3},\ b=-1$

$\therefore a+b=\dfrac{2}{3}+(-1)=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $a<0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+b$의 그래프는 위로 볼록하므로 $-2\le x\le3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(0)=5$, $f(3)=-1$이므로

$b=5$, $9a+b=-1$

$\therefore a=-\dfrac{2}{3},\ b=5$

$\therefore a+b=-\dfrac{2}{3}+5=\dfrac{13}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 값은 $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{13}{3}$이다.

답 $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{13}{3}$

13

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore X=\{x\,|\,x^2-2x-3=0\}=\{-1,\ 3\}$

즉, 두 함수 f, g의 정의역은 $X=\{-1,\ 3\}$이고, 두 함수 f, g가 서로 같은 함수이므로 $f(-1)=g(-1)$, $f(3)=g(3)$이 성립한다.

$f(-1)=g(-1)$에서 $1-a+b=-1$

$\therefore a-b=2$ ······㉠

$f(3)=g(3)$에서 $9+3a+b=7$

$\therefore 3a+b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-2$

$\therefore a+b=0+(-2)=-2$

답 -2

14

두 함수 $f(x)=x^3-5x$, $g(x)=-x^2+3x+b$에 대하여 $f=g$이므로 $f(-2)=g(-2)$, $f(a)=g(a)$가 성립한다.

$f(-2)=g(-2)$에서 $2=-10+b$

$\therefore b=12$

$f(a)=g(a)$에서

$a^3-5a=-a^2+3a+12$

$a^3+a^2-8a-12=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -8 & -12 \\ & & -2 & 2 & 12 \\ \hline -2 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$(a+2)^2(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a\neq-2)$

$\therefore ab=3\times12=36$

답 36

15

두 함수 $f(x)=2x^2+3x+1$, $g(x)=x+5$에 대하여 $f=g$가 되기 위해서는 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 한다.

즉, $2x^2+3x+1=x+5$에서

$2x^2+2x-4=0$, $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 함수 f, g의 정의역 X는 집합 $\{-2, 1\}$의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$

답 3

보충 설명

부분집합의 개수 | 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 부분집합의 개수 : 2^n

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수 : 2^n-1

(3) 집합 A의 원소 중에서 특정한 원소 k개를 포함하는(포함하지 않는) 부분집합의 개수 : 2^{n-k} (단, $k<n$)

(4) 집합 A의 원소 중에서 특정한 원소 k개 중 적어도 하나를 포함하는 부분집합의 개수 : 2^n-2^{n-k} (단, $k<n$)

16

주어진 등식의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1) \qquad \therefore f(2)=3\times3=9$

주어진 등식의 양변에 $x=2$, $y=1$을 대입하면

$f(2+1)=f(2)f(1) \qquad \therefore f(3)=9\times3=27$

주어진 등식의 양변에 $x=3$, $y=2$를 대입하면

$f(3+2)=f(3)f(2) \qquad \therefore f(5)=27\times9=243$

또한, 주어진 등식의 양변에 $x=3$, $y=-2$를 대입하면

$f(1)=f(3)f(-2)$이므로

$3=27f(-2) \qquad \therefore f(-2)=\dfrac{1}{9}$

$\therefore f(5)\times f(-2)=243\times\dfrac{1}{9}=27$

답 27

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(5)\times f(-2)&=f(5+(-2))\\ &=f(3)\\ &=f(1)\times f(1)\times f(1)\\ &=3^3=27 \end{aligned}$$

17

$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \cdots\cdots ㉠$

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$이므로 $f(0)=0$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

ㄱ에서 $f(0)=0$이므로 $f(-x)+f(x)=0$ (참)

ㄷ. $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=3f(x)$

$f(4x)=f(3x+x)=f(3x)+f(x)=4f(x)$

$\vdots$

$\therefore f(nx)=nf(x)$ (단, n은 자연수)

$\therefore f(ax+by)=f(ax)+f(by)$

$=af(x)+bf(y)$ (단, a, b는 자연수)

(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

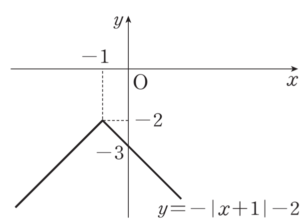
18

(1) $y=-|x+1|-2$

$=\begin{cases} (x+1)-2 & (x<-1) \\ -(x+1)-2 & (x\geq-1) \end{cases}$

$=\begin{cases} x-1 & (x<-1) \\ -x-3 & (x\geq-1) \end{cases}$

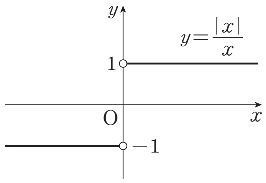
따라서 $y=-|x+1|-2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $y=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} \dfrac{-x}{x} & (x<0) \\ \dfrac{x}{x} & (x>0) \end{cases}$

$=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x>0) \end{cases}$

따라서 $y=\dfrac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) (ⅰ) $y<0$일 때,

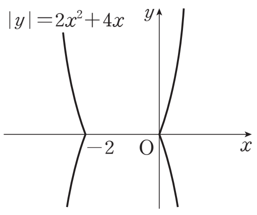
$-y=2x^2+4x$에서

$y=-2x^2-4x=-2(x+1)^2+2$

(ⅱ) $y\geq0$일 때,

$y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|y|=2x^2+4x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

다른 풀이

(3) $|y|=2x^2+4x$의 그래프는 $y=2x^2+4x$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분만 그린 후, 이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

19

(ⅰ) $x\geq0$, $y\geq0$일 때, $y=-2x+1$

(ⅱ) $x\geq0$, $y<0$일 때,

$-y=-2x+1$에서 $y=2x-1$

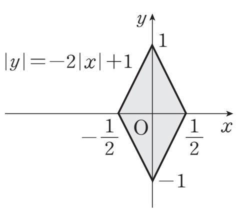
(ⅲ) $x<0$, $y\geq0$일 때, $y=2x+1$

(ⅳ) $x<0$, $y<0$일 때,

$-y=2x+1$에서 $y=-2x-1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$|y|=-2|x|+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$

답 1

다른 풀이

$|y|=-2|x|+1$의 그래프는 $y=-2x+1$의 그래프에서 $x\geq0$, $y\geq0$인 부분만 그린 후, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것과 같다.

20

함수 $y=||x-3|-|x+2||$에서

(ⅰ) $x<-2$일 때, $x-3<0$, $x+2<0$이므로

$y=||x-3|-|x+2||$

$=|-(x-3)+(x+2)|=5$

(ⅱ) $-2\leq x<3$일 때, $x-3<0$, $x+2\geq0$이므로

$y=||x-3|-|x+2||$

$=|-(x-3)-(x+2)|=|-2x+1|$

즉, $-2\leq x<\dfrac{1}{2}$일 때 $y=-2x+1$,

$\dfrac{1}{2}\leq x<3$일 때 $y=2x-1$이다.

(ⅲ) $x\geq3$일 때, $x-3\geq0$, $x+2>0$이므로

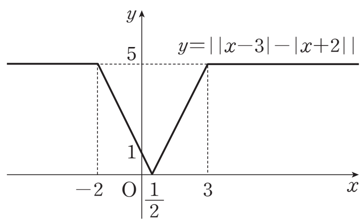
$y=||x-3|-|x+2||$

$=|x-3-(x+2)|=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$y=||x-3|-|x+2||=\begin{cases}5 & (x<-2)\\ -2x+1 & \left(-2\leq x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(\dfrac{1}{2}\leq x<3\right)\\ 5 & (x\geq3)\end{cases}$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 0이므로

$M=5$, $m=0$

$\therefore M+m=5+0=5$

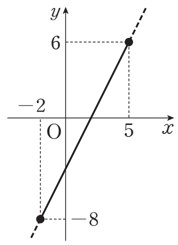
답 5

21

함수 $f(x)=ax+b\ (a\neq0)$가 일대일대응이므로 f의 치역은 $Y=\{y\,|\,-8\leq y\leq 6\}$과 일치한다.

(ⅰ) $a>0$일 때,

일차함수 $f(x)=ax+b$는 x의 값이 커질 때 $f(x)$의 값도 커지므로



$f(-2)=-8,\ f(5)=6$

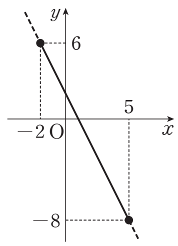
즉, $-2a+b=-8,\ 5a+b=6$이므로

$a=2,\ b=-4$

$\therefore\ a^2+b^2=2^2+(-4)^2=20$

(ⅱ) $a<0$일 때,

일차함수 $f(x)=ax+b$는 x의 값이 커질 때 $f(x)$의 값은 작아지므로



$f(-2)=6,\ f(5)=-8$

즉, $-2a+b=6,\ 5a+b=-8$이므로

$a=-2,\ b=2$

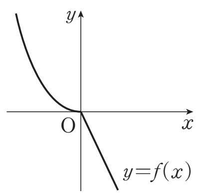
$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 값은 8, 20이다.

답 8, 20

22

$x<0$일 때, $f(x)=x^2$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x\geq0$일 때 직선 $y=(k^2-6k)x$의 기울기는 음수가 되어야 하므로

$k^2-6k<0,\ k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

따라서 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

23

$f(x)=m|x-2|+x-2$에서

(ⅰ) $x<2$일 때,

$$\begin{aligned} f(x)&=-m(x-2)+x-2 \\ &=(1-m)x+2m-2 \end{aligned}$$

(ⅱ) $x\geq2$일 때,

$$\begin{aligned} f(x)&=m(x-2)+x-2 \\ &=(m+1)x-2m-2 \end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x<2$일 때와 $x\geq2$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 $(1-m)(m+1)>0$이므로

$(m-1)(m+1)<0$

$\therefore\ -1<m<1$

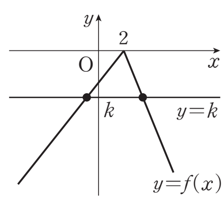
답 $-1<m<1$

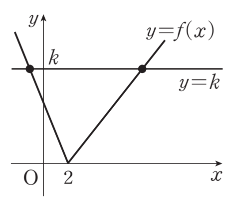
보충 설명

이 문제의 함수

$$\begin{aligned} f(x)&=m|x-2|+x-2 \\ &=\begin{cases} (1-m)x+2m-2 & (x<2) \\ (m+1)x-2m-2 & (x\geq2) \end{cases} \end{aligned}$$

와 같이 함수가 구간에 따라 서로 다른 두 일차함수로 정의된 경우, 각 일차함수의 그래프의 기울기의 부호가 다르면 그래프와 직선 $y=k$ (k는 실수)가 만나지 않거나 두 점에서 만나는 경우가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 될 수 없다.





24

(1) 함수 f는 항등함수이므로

$f(-2)=-2$, $f(3)=3$

$f(-2)=4a-4=-2$

$4a=2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$f(3)=3b+6=3$

$3b=-3 \qquad \therefore b=-1$

(2) 함수 f는 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(5)$

$f(1)=f(2)$에서 $1+a+b=4+2a+b$

$\therefore a=-3$

$f(1)=f(5)$에서 $1+a+b=2$

$\therefore a+b=1$

$a=-3$을 위의 식에 대입하면 $b=4$

답 (1) $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ (2) $a=-3$, $b=4$

25

함수 $f(x)=x^3-5x^2+7x$가 항등함수가 되려면

정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이어야 한다.

즉, $x^3-5x^2+7x=x$에서

$x^3-5x^2+6x=0$, $x(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 함수 f의 정의역 X는 집합 $\{0, 2, 3\}$의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$

답 7

26

함수 g는 항등함수이므로

$g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$

$\therefore f(2)=g(2)=h(2)=2$

또한, $h(2)=2$이고 함수 h는 상수함수이므로

$h(1)=2$, $h(2)=2$, $h(3)=2$

즉, $g(1)+h(1)=f(1)$에서

$f(1)=1+2=3$

이때 함수 f는 일대일대응이고 $f(2)=2$, $f(1)=3$이므로

$f(3)=1$

$\therefore f(3)+g(3)+h(3)=1+3+2=6$

답 6

27

(i) X에서 Y로의 함수의 개수

집합 X의 원소 0, 1, 2, 3에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 4, 5의 2개씩이므로

$a=\underbrace{2\times2\times2\times2}_{2^4}=16$

(ii) X에서 Z로의 일대일대응의 개수

집합 X의 원소 0에 대응할 수 있는 집합 Z의 원소는 6, 7, 8, 9의 4개,

집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Z의 원소는 0에 대응한 원소를 제외한 3개,

집합 X의 원소 2에 대응할 수 있는 집합 Z의 원소는 0, 1에 대응한 원소를 제외한 2개,

집합 X의 원소 3에 대응할 수 있는 집합 Z의 원소는 0, 1, 2에 대응한 원소를 제외한 1개이므로

$b=\underbrace{4\times3\times2\times1}_{4!}=24$

(i), (ii)에서 $a+b=16+24=40$

답 40

28

집합 $X=\{-2, 0, 2\}$에서 X로의 함수 f에 대하여 $f(-2)$, $f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2의 3개씩이다.

이때 함수 f가 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$f(-2)=f(2)$

즉, $f(2)$의 값은 $f(-2)$의 값과 같다.

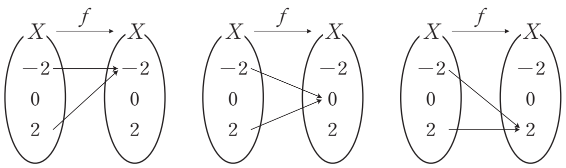
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times3\times1=9$

답 9

보충 설명

정의역 X의 원소 -2, 2에 대응할 수 있는 공역의 원소는 다음 그림과 같이 -2, 0, 2의 3개이다.



29

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$으로의 일대일대응 f에 대하여 $f(1)f(5)<0$을 만족시키려면

$f(1)>0$, $f(5)<0$ 또는 $f(1)<0$, $f(5)>0$

(i) $f(1)>0$, $f(5)<0$일 때,

$f(1)>0$이어야 하므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3의 2개이고,

$f(5)<0$이어야 하므로 $f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 -3, -1의 2개이다.

집합 X의 나머지 세 원소 2, 3, 4는 각각 $f(1)$, $f(5)$의 값을 제외한 집합 Y의 나머지 세 원소에 하나씩 대응되어야 하므로 일대일대응 f의 개수는

$2\times2\times\underbrace{3\times2\times1}_{3!}=24$

(ii) $f(1)<0$, $f(5)>0$일 때,

$f(1)<0$이어야 하므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 -3, -1의 2개이고,

$f(5)>0$이어야 하므로 $f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 3의 2개이다.

집합 X의 나머지 세 원소 2, 3, 4는 각각 $f(1)$, $f(5)$의 값을 제외한 집합 Y의 나머지 세 원소에 하나씩 대응되어야 하므로 일대일대응 f의 개수는

$2\times2\times\underbrace{3\times2\times1}_{3!}=24$

(i), (ii)에서 구하는 일대일대응 f의 개수는

$24+24=48$

답 48

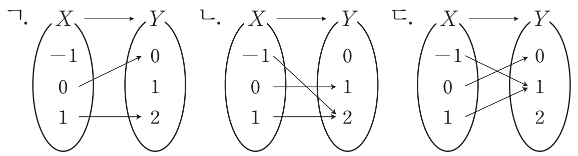
STEP 1 개 념 마 무 리

본문 pp.254~256

01 ⑤	**02** 4	**03** 12	**04** $\frac{15}{8}$
05 6	**06** 4	**07** $\frac{1}{2}$	**08** ③
09 126	**10** ㄴ	**11** 4	**12** ②
13 5	**14** 1	**15** 10	**16** 14
17 18	**18** 18		

01

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 ㄱ은 집합 X의 원소 -1에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

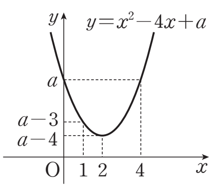
02

정의역이 실수 전체의 집합인 이차함수

$y=x^2-4x+a$

$=(x-2)^2+a-4$

에 대하여 함수 $y=x^2-4x+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1\le x\le4$에서 $a-4\le y\le a$이다.



이때 집합 $X=\{x|1\le x\le4\}$에서 집합 $Y=\{y|1\le y\le8\}$로의 대응 $y=x^2-4x+a$가 함수이려면

$1\le a-4\le y\le a\le8$이 성립해야 하므로

$a-4\ge1$에서 $a\ge5$이고 $a\le8$

$\therefore 5\le a\le8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 5, 6, 7, 8의 4개이다.

답 4

03

$f(3)=a-3$, $f(6)=a-6$, $f(9)=a-9$이므로

함수 f의 치역은

$\{a-3, a-6, a-9\}$

함수 f의 치역이 정의역과 같으므로

$\{a-3, a-6, a-9\}=\{3, 6, 9\}$

이때 $a-9<a-6<a-3$이므로

$a-9=3$, $a-6=6$, $a-3=9$

$\therefore a=12$

답 12

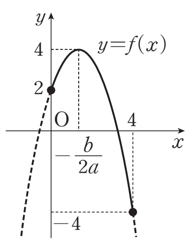
04

$a<0$이므로 함수 $y=ax^2+bx+2$의 그래프는 위로 볼록하고 y축과의 교점의 y좌표는 2이다.

$$f(x)=ax^2+bx+2$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+2$$

라 하면 함수 f의 정의역은 $\{x \mid 0\le x\le 4\}$, 치역은 $\{y \mid -4\le y\le 4\}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-\dfrac{b}{2a}>0$에서 $b>0$ $(\because a<0)$

이때 $f(x)$는 $0\le x\le 4$에서 최댓값 4를 가져야 하므로

$-\dfrac{b^2}{4a}+2=4 \qquad \therefore 8a=-b^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또한, $f(4)=-4$이어야 하므로

$16a+4b+2=-4 \qquad \therefore 8a+2b+3=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-b^2+2b+3=0$, $b^2-2b-3=0$

$\underbrace{(b+1)(b-3)=0}_{(*)} \qquad \therefore b=3$ $(\because b>0)$

$b=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\dfrac{9}{8}$

$\therefore a+b=-\dfrac{9}{8}+3=\dfrac{15}{8}$

답 $\dfrac{15}{8}$

보충 설명

$(*)$에서 $b=-1$ 또는 $b=3$이므로

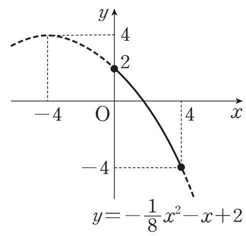
(i) $b=-1$일 때,

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{8}$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{8}x^2-x+2$$

$$=-\frac{1}{8}(x+4)^2+4$$

그런데 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 4$에서 최댓값 4를 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.



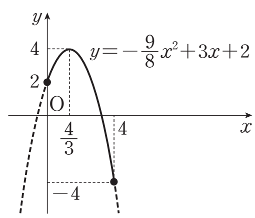
(ii) $b=3$일 때,

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\dfrac{9}{8}$

$$\therefore f(x)=-\frac{9}{8}x^2+3x+2$$

$$=-\frac{9}{8}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+4$$

이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 4$에서 최댓값 4를 가지므로 조건을 만족시킨다.



05

정의역이 $X=\{1, 3\}$인 두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=|x-2|$가 서로 같으므로

$f(1)=g(1)$, $f(3)=g(3)$

$f(1)=-1+a+b$, $g(1)=1$이므로

$-1+a+b=1 \qquad \therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=-9+3a+b$, $g(3)=1$이므로

$-9+3a+b=1 \qquad \therefore 3a+b=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-2$

$\therefore a-b=4-(-2)=6$

답 6

06

두 함수 $f(x)=x^2-3x-4$, $g(x)=-2x+2$가 서로 같은 함수이려면 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이어야 한다.

$x^2-3x-4=-2x+2$에서

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 X의 원소가 2개이므로 이차방정식 $ax^2+bx+12=0$의 해가 $x=-2$ 또는 $x=3$이어야 한다.

해가 $x=-2$ 또는 $x=3$이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a(x+2)(x-3)=0$

$a(x^2-x-6)=0 \qquad \therefore ax^2-ax-6a=0$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+12=0$과 일치하므로

$b=-a$, $12=-6a$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$b-a=2-(-2)=4$

답 4

07

$0\le x<1$에서 $f(x)=x^2$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고,

$-1\le x<0$에서 $f(x)=-x$이므로

$f\left(\frac{7}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}+2\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

같은 방법으로

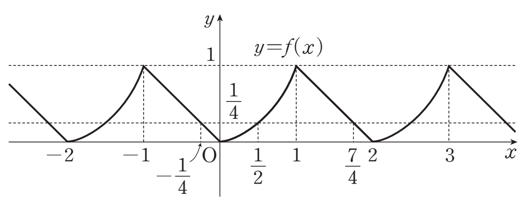
$f(3000)=f(2998)=f(2996)=\cdots=f(0)=0$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(3000)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 그림과 같다.



08

$f(xy)=f(x)f(y) \qquad \cdots\cdots ㉠$

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=\{f(1)\}^2$

$f(1)\{f(1)-1\}=0$

그런데 $f(1)\neq0$이므로

$f(1)=1$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 $y=\frac{1}{x}$을 대입하면

$f(1)=f(x)\times f\left(\frac{1}{x}\right)$

ㄱ에서 $f(1)=1$이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ $(\because \underbrace{f(x)\neq0}_{(*)})$ (참)

ㄷ. $f(x^n)=f(x^{n-1})\times f(x)$ ← $f(x^n)=f(x^{n-1}\times x)=f(x^{n-1})\times f(x)$

$=f(x^{n-2})\times\{f(x)\}^2$

$=f(x^{n-3})\times\{f(x)\}^3$

$\vdots$

$=\{f(x)\}^n$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

보충 설명

$(*)$에서 $f(x)=0$을 만족시키는 양수 x가 존재한다고 하면

$\underbrace{f(1)}_{=1\ (\because ㄱ)}=\underbrace{f(x)}_{=0}f\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $1=0$이 되어 모순이다.

따라서 모든 양수 x에 대하여 $f(x)\neq0$이다.

09

$f(x-y)=f(x)-f(y) \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=0$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(-y)=f(0)-f(y)$, $f(-y)=-f(y)$ $(\because f(0)=0)$

$\therefore f(y)=-f(-y) \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 y 대신 $-y$를 대입하면

$f(x+y)=f(x)-f(-y)$

$=f(x)+f(y)$ $(\because ㉡)$

따라서

$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$

$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3f(1)$

$f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)=4f(1)$

$\vdots$

$f(n)=nf(1)$ (n은 자연수)

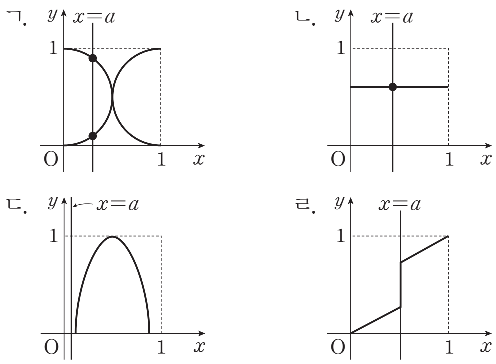
이므로

$f(42)=42f(1)=42\times3=126$

답 126

10

주어진 그래프가 집합 $X=\{x\,|\,0\le x\le1\}$에서 집합 $Y=\{y\,|\,0\le y\le1\}$로의 함수의 그래프이려면 $0\le a\le1$인 임의의 실수 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$를 그었을 때, 그래프가 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나야 한다.



ㄱ은 두 점에서 만나는 경우가 존재하고,

ㄷ은 만나지 않는 경우가 존재하며,

ㄹ은 무수히 많은 점에서 만나는 경우가 존재한다.

따라서 함수의 그래프인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

11

$2|y|=-|x|+a$에서 $|y|=-\dfrac{1}{2}|x|+\dfrac{a}{2}$

(i) $x\ge0$, $y\ge0$일 때,

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}$

(ii) $x\ge0$, $y<0$일 때,

$-y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}\qquad\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{a}{2}$

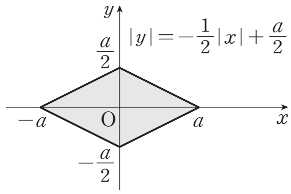
(iii) $x<0$, $y\ge0$일 때,

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,

$-y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}\qquad\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{a}{2}$

(i)~(iv)에서 a는 양수이므로 $|y|=-\dfrac{1}{2}|x|+\dfrac{a}{2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 16이므로

$\dfrac{1}{2}\times2a\times a=16$

$a^2=16\qquad\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

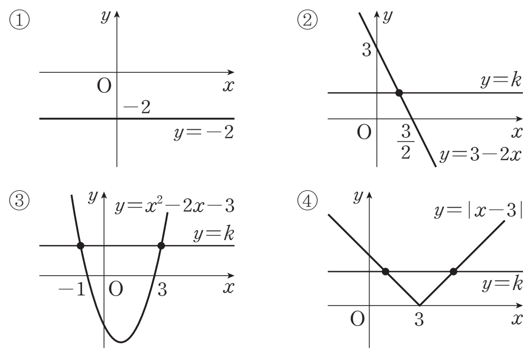
답 4

보충 설명

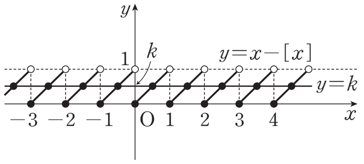
$2|y|=-|x|+a$, 즉 $|y|=-\dfrac{1}{2}|x|+\dfrac{a}{2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{2}$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 그린 후, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것과 같다.

12

일대일함수의 그래프이려면 치역의 임의의 원소 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$를 그었을 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나야 한다.



⑤



따라서 일대일함수인 것은 ②이다.

답 ②

다른 풀이

실수 전체의 집합에서 함수 f가 일대일함수이려면 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$를 만족시켜야 한다.

① $f(x)=-2$에서 $1 \neq 2$이지만 $f(1)=f(2)=-2$이므로 일대일함수가 아니다.

② $f(x)=3-2x$에서 $f(x_1)=f(x_2)$이면
$3-2x_1=3-2x_2$
즉, $x_1=x_2$이므로 일대일함수이다.

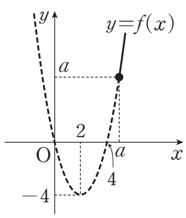
③ $f(x)=x^2-2x-3$에서 $-1 \neq 3$이지만
$f(-1)=f(3)=0$이므로 일대일함수가 아니다.

④ $f(x)=|x-3|$에서 $2 \neq 4$이지만 $f(2)=f(4)=1$이므로 일대일함수가 아니다.

⑤ $f(x)=x-[x]$에서 $0 \neq 1$이지만 $f(0)=f(1)=0$이므로 일대일함수가 아니다.

13

$f(x)=x^2-4x$
$=(x-2)^2-4$



즉, $x \geq a$에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$a \geq 2$ ……㉠

또한, 치역은 $\{y \mid y \geq a\}$이어야 하므로

$f(a)=a$

즉, $a^2-4a=a$에서

$a^2-5a=0$, $a(a-5)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$

답 5

14

함수 $f(x)$가 항등함수가 되려면 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=x$가 성립해야 한다.

(i) $x<2$일 때,
$-x^2+2=x$에서
$x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $x \geq 2$일 때,
$(x+1)^2-7=x$에서
$x^2+x-6=0$
$(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=2$ ($\because x \geq 2$)

(i), (ii)에서 정의역 X의 원소는 -2, 1, 2이므로 그 합은
$-2+1+2=1$

답 1

15

함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 정의역 $X=\{1, 4\}$에서 항등함수이므로 $f(1)=1$, $f(4)=4$가 성립한다.

$f(1)=1+a+b=1$에서

$a+b=0$ ……㉠

$f(4)=16+4a+b=4$에서

$4a+b=-12$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=4$

(가)

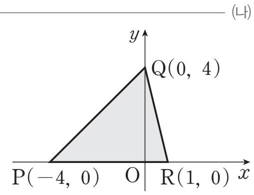
또한, 함수 $g(x)=-x^3+4x^2+cx$가 정의역 $X=\{1, 4\}$에서 상수함수이므로 $g(1)=g(4)$가 성립한다.

즉, $-1+4+c=-64+64+4c$에서

$3+c=4c$ $\therefore c=1$

(나)

따라서 세 점 P, Q, R은
P$(-4, 0)$, Q$(0, 4)$, R$(1, 0)$
이므로 삼각형 PQR은 오른쪽 그림과 같고 그 넓이는



$\frac{1}{2} \times 5 \times 4=10$

(다)

답 10

단계	채점 기준	배점
㈎	함수 f가 항등함수임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 경우	40%
㈏	함수 g가 상수함수임을 이용하여 c의 값을 구한 경우	40%
㈐	삼각형 PQR의 넓이를 구한 경우	20%

16

조건 ㈎에서 f가 항등함수이므로

$f(x)=x \qquad \therefore f(4)=4$

조건 ㈏에서 $f(x)g(x)+2h(x)=24$이므로

$xg(x)+2h(x)=24 \qquad \cdots\cdots ㉠$

조건 ㈎에서 g가 상수함수이므로 다음과 같이 $g(x)$의 값에 따라 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $g(x)=2$일 때,

㉠에서 $2x+2h(x)=24$이므로

$h(x)=-x+12$

$\therefore h(2)=10,\ h(4)=8,\ h(6)=6,\ h(8)=4,\ h(10)=2$

함숫값이 모두 집합 X의 원소이므로 h는 X에서 X로의 함수이다.

(ii) $g(x)=4$일 때,

㉠에서 $4x+2h(x)=24$이므로

$h(x)=-2x+12$

그런데 $h(6)=0$은 집합 X의 원소가 아니므로 h는 X에서 X로의 함수가 아니다.

(iii) $g(x)=6$일 때,

㉠에서 $6x+2h(x)=24$이므로

$h(x)=-3x+12$

그런데 $h(4)=0$은 집합 X의 원소가 아니므로 h는 X에서 X로의 함수가 아니다.

(iv) $g(x)=8$일 때,

㉠에서 $8x+2h(x)=24$이므로

$h(x)=-4x+12$

그런데 $h(4)=-4$는 집합 X의 원소가 아니므로 h는 X에서 X로의 함수가 아니다.

(v) $g(x)=10$일 때,

㉠에서 $10x+2h(x)=24$이므로

$h(x)=-5x+12$

그런데 $h(4)=-8$은 집합 X의 원소가 아니므로 h는 X에서 X로의 함수가 아니다.

(i)~(v)에서 $g(x)=2,\ h(4)=8$

$\therefore f(4)+g(4)+h(4)=4+2+8=14$

답 14

17

조건 ㈎에서 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{a, b, c, d, e\}$로의 함수 f가 일대일함수이므로 X의 각 원소에 대한 함숫값은 모두 다른 값이 되어야 한다.

또한, 조건 ㈏에서 $f(1)=b$이므로 $f(2), f(3), f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 b를 제외한 a, c, d, e 중 하나이다.

그런데 조건 ㈐에서 $f(2)\neq c$이므로

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 a, d, e의 3개,

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, d, e 중에서 $f(2)$의 값을 제외한 3개,

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 a, c, d, e 중에서 $f(2), f(3)$의 값을 제외한 2개이므로

조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는

$3\times3\times2=18$

답 18

18

조건 ㈏에서 정의역 A의 어떤 원소 n에 대하여

$f(n+2)-f(n)=4$

이고 함수 f의 공역이 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$f(n+2)=5,\ f(n)=1$인 경우만 가능하다.

(i) $n=1$일 때,

$f(1)=1,\ f(3)=5$

조건 ㈎에서 f가 일대일대응이므로 집합 A의 나머지 원소 2, 3, 4에 대하여

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개,

$f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중에서 $f(2)$의 값을 제외한 2개,

$f(5)$의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중에서 $f(2), f(4)$의 값을 제외한 1개이므로

일대일대응 f의 개수는

$3\times2\times1=6$

(ii) $n=2$일 때,

$f(2)=1$, $f(4)=5$

(i)과 같은 방법으로 일대일대응 f의 개수는

$3\times2\times1=6$

(iii) $n=3$일 때,

$f(3)=1$, $f(5)=5$

(i)과 같은 방법으로 일대일대응 f의 개수는

$3\times2\times1=6$

(i), (ii), (iii)에서 일대일대응 f의 개수는

$6+6+6=18$

답 18

2 합성함수

기본 + 필수연습 본문 pp.260~267

30 (1) 1 (2) 2

31 (1) $(f\circ f)(x)=9x+20$

(2) $(g\circ f)(x)=8x^2+8x+1$

32 3	**33** 11	**34** 4	**35** -3
36 7	**37** 2	**38** -2	
39 (1) 0 (2) 4		**40** $f\left(\frac{x-1}{6}\right)=2x+17$	
41 11	**42** (1) $f^{25}(x)=x+75$ (2) 186		
43 6	**44** (1) e (2) a		**45** 4
46 (1) 풀이 참조 (2) 3		**47** $\frac{4}{3}$	

30

(1) $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(1)=1$

(2) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=2$

답 (1) 1 (2) 2

31

(1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x+5)$

$=3(3x+5)+5$

$=9x+20$

(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)$

$=2(2x+1)^2-1$

$=2(4x^2+4x+1)-1$

$=8x^2+8x+1$

답 (1) $(f\circ f)(x)=9x+20$

(2) $(g\circ f)(x)=8x^2+8x+1$

32

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x<2)\\ x-2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$에서

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-2\times\frac{3}{2}+4=1$이므로

$(f\circ f)\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=f(1)=-2\times1+4=2$

또한, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$이고

$(f\circ f)\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\frac{1}{2}+4=3$

이므로

$(f\circ f\circ f)\left(\frac{5}{2}\right)=f\left((f\circ f)\left(\frac{5}{2}\right)\right)=f(3)=3-2=1$

$\therefore (f\circ f)\left(\frac{3}{2}\right)+(f\circ f\circ f)\left(\frac{5}{2}\right)=2+1=3$

답 3

33

19보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17의 7개이므로

$f(19)=7$

$(f\circ f)(19)=f(f(19))=f(7)$에서

7보다 작은 소수는 2, 3, 5의 3개이므로

$f(7)=3$

$\therefore (f\circ f)(19)=3$

$(f\circ f\circ f)(19)=f((f\circ f)(19))=f(3)$에서

3보다 작은 소수는 2의 1개이므로

$f(3)=1$

$\therefore (f\circ f\circ f)(19)=1$

$\therefore f(19)+(f\circ f)(19)+(f\circ f\circ f)(19)$

$=7+3+1=11$

답 11

34

$(g\circ f)(2)=0$에서

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(a-4)$

$=(a-4)^2-b$

$\therefore (a-4)^2-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(f\circ g)(\sqrt{2})=1$에서

$(f\circ g)(\sqrt{2})=f(g(\sqrt{2}))=f(2-b)$

$=a-2(2-b)$

$=a-4+2b$

$\therefore a-4+2b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $a-4=1-2b$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$(1-2b)^2-b=0,\ 4b^2-5b+1=0$

$(4b-1)(b-1)=0$

$\therefore b=1$ ($\because$ b는 정수)

이것을 ㉡에 대입하면

$a-4+2\times1=1 \qquad \therefore a=3$

$\therefore a+b=3+1=4$

답 4

35

$f(x)=4x+a,\ g(x)=ax+4$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+4)$

$=4(ax+4)+a$

$=4ax+16+a$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4x+a)$

$=a(4x+a)+4$

$=4ax+a^2+4$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이므로

$4ax+16+a=4ax+a^2+4$

즉, $16+a=a^2+4$에서

$a^2-a-12=0,\ (a+3)(a-4)=0$

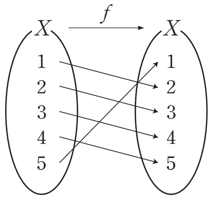
$\therefore a=-3$ ($\because$ $a<0$)

답 -3

36

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow X$가

$f(x)=\begin{cases} 1 & (x=5) \\ x+1 & (x\neq5) \end{cases}$ 이므로 함수 f는 다음 그림과 같다.



이때 $f\circ g=g\circ f$이므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서

$f(g(1))=g(f(1)),\ f(3)=g(2)$ ($\because$ $g(1)=3$)

$\therefore g(2)=4$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서

$f(g(2))=g(f(2)),\ f(4)=g(3)$

$\therefore g(3)=5$

$(f\circ g)(3)=(g\circ f)(3)$에서

$f(g(3))=g(f(3)),\ f(5)=g(4)$

$\therefore g(4)=1$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서

$f(g(4))=g(f(4)),\ f(1)=g(5)$

$\therefore g(5)=2$

$\therefore g(3)+g(5)=5+2=7$

답 7

37

$g\circ(h\circ f)=(g\circ h)\circ f$이므로

$(g\circ(h\circ f))(k)=((g\circ h)\circ f)(k)$

$=(g\circ h)(f(k))=(g\circ h)(2k-1)$

$=(2k-1)^2-2(2k-1)+5$

$=4k^2-8k+8$

즉, $4k^2-8k+8=13$에서 $4k^2-8k-5=0$

$(2k+1)(2k-5)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=\frac{5}{2}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=2$

답 2

38

$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이므로

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(a)&=((h\circ g)\circ f)(a)\\&=(h\circ g)(f(a))=(h\circ g)(2a+3)\\&=(2a+3)^2-3(2a+3)+8\\&=4a^2+6a+8\end{aligned}$$

즉, $4a^2+6a+8<18$에서 $4a^2+6a-10<0$

$2a^2+3a-5<0$, $(2a+5)(a-1)<0$

$\therefore\ -\frac{5}{2}<a<1$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 최솟값은 -2이다.

답 -2

39

(1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$이므로

$(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5$

$\therefore\ h(x)=-2x^2+8$

$\therefore\ h(2)=-2\times2^2+8=0$

(2) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h\left(\frac{1}{2}x+1\right)$이므로

$(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h\left(\frac{1}{2}x+1\right)=-x^2+5$ ······㉠

$\frac{1}{2}x+1=t$로 놓으면 $x=2t-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$h(t)=-(2t-2)^2+5=-4t^2+8t+1$

즉, $h(x)=-4x^2+8x+1$이므로

$h(0)=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (g\circ h)(0)&=g(h(0))\\&=g(1)=-1^2+5=4\end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) 4

다른 풀이

(1) $(f\circ h)(2)=f(h(2))=g(2)$이므로

$\frac{1}{2}h(2)+1=-2^2+5=1$

$\therefore\ h(2)=0$

(2) ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$h(0)=-(-2)^2+5=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (g\circ h)(0)&=g(h(0))\\&=g(1)=-1^2+5=4\end{aligned}$$

40

$f\left(\frac{2x-5}{4}\right)=6x+4$에서

$\frac{2x-5}{4}=t$로 놓으면

$2x-5=4t\qquad\therefore\ x=2t+\frac{5}{2}$

이것을 $f\left(\frac{2x-5}{4}\right)=6x+4$에 대입하면

$$\begin{aligned}f(t)&=6\left(2t+\frac{5}{2}\right)+4\\&=12t+19\end{aligned}$$

위의 식에 $t=\frac{x-1}{6}$을 대입하면

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x-1}{6}\right)&=12\times\frac{x-1}{6}+19\\&=2x+17\end{aligned}$$

답 $f\left(\frac{x-1}{6}\right)=2x+17$

41

$(f\circ g)(x)=2\{g(x)\}^2-1$에서

$f(g(x))=2\{g(x)\}^2-1$

이때 $g(x)=t$로 놓으면

$f(t)=2t^2-1\qquad\therefore\ f(x)=2x^2-1$

g는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(2x^2-1)\\&=a(2x^2-1)+b\\&=2ax^2-a+b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2-\{g(x)\}^2&=2-(ax+b)^2\\&=-a^2x^2-2abx-b^2+2\end{aligned}$$

이때 $(g\circ f)(x)=2-\{g(x)\}^2$에서

$2ax^2-a+b=-a^2x^2-2abx-b^2+2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$2a=-a^2$, $0=-2ab$, $-a+b=-b^2+2$

$2a=-a^2$에서 $a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$ $\quad \therefore a=-2$ ($\because a\neq 0$)

$a=-2$이면 $-2ab=0$에서

$4b=0$ $\quad \therefore b=0$

이때 $a=-2$, $b=0$은 $-a+b=-b^2+2$를 만족시킨다.

$\therefore g(x)=-2x$

따라서 $f(x)=2x^2-1$, $g(x)=-2x$이므로

$f(3)+g(3)=17+(-6)=11$

답 11

42

(1) $f^1(x)=f(x)=x+3$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$=f(x+3)=(x+3)+3=x+6$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f(x+6)=(x+6)+3=x+9$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여 $f^n(x)=x+3n$

$\therefore f^{25}(x)=x+3\times 25=x+75$

(2) $f^{60}(x)=x+3\times 60=x+180$이므로

$f^{60}(6)=6+180=186$

답 (1) $f^{25}(x)=x+75$ (2) 186

43

$f^1(1)=f(1)=2$이고

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(2)=3$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(3)=1$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(1)=2$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $63=3\times 21$이므로

$f^{63}(1)=f^3(1)=1$

또한, $f^1(3)=f(3)=1$이고

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f(1)=2$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(2)=3$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(3)=1$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(3)$의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $64=3\times 21+1$이므로

$f^{64}(3)=f^1(3)=1$

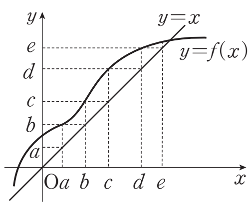
한편, $f(4)=4$이므로 자연수 n에 대하여

$f^n(4)=4$ $\quad \therefore f^{65}(4)=4$

$\therefore f^{63}(1)+f^{64}(3)+f^{65}(4)=1+1+4=6$

답 6

44



직선 $y=x$를 이용하여 점선과 y축이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

(1) $f(c)=d$, $f(d)=e$이므로

$(f\circ f)(c)=f(f(c))$

$=f(d)=e$

(2) $f(x)=t$로 놓으면

$(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))=f(f(t))=d$

이때 $f(c)=d$이므로 $f(t)=c$

또한, $f(b)=c$이므로 $t=b$

따라서 $f(x)=b$를 만족시키는 x의 값은 a이므로 구하는 x의 값은 a이다.

답 (1) e (2) a

45

주어진 그래프에서 $f(0)=3$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=0$이므로

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(2)=4$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(4)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=3$

$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(3)=1$

$f^6(1)=(f\circ f^5)(1)=f(f^5(1))=f(1)=2$

$\vdots$

따라서 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 2, 4, 0, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $567=5\times113+2$이므로

$f^{567}(1)=f^2(1)=4$

답 4

46

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2) \end{cases}$,

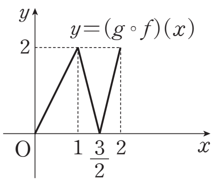
$g(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2) \end{cases}$이므로

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=\begin{cases} -2f(x)+2 & (0\le f(x)<1) \\ 2f(x)-2 & (1\le f(x)\le 2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 2(x+1)-2 & (0\le x<1) \\ 2(-2x+4)-2 & \left(1\le x\le \frac{3}{2}\right) \\ -2(-2x+4)+2 & \left(\frac{3}{2}<x\le 2\right) \end{cases}$$

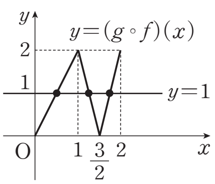
$f(x)=1$을 만족시키는 x의 값

$$=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -4x+6 & \left(1\le x\le \frac{3}{2}\right) \\ 4x-6 & \left(\frac{3}{2}<x\le 2\right) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 실근의 개수는 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 3이다.



답 (1) 풀이 참조 (2) 3

다른 풀이

(2) $(g\circ f)(x)=1$, 즉 $g(f(x))=1$에서

$-2f(x)+2=1$ 또는 $2f(x)-2=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{2}$

(i) $f(x)=\frac{1}{2}$일 때,

$-2x+4=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{7}{4}$

(ii) $f(x)=\frac{3}{2}$일 때,

$x+1=\frac{3}{2}$ 또는 $-2x+4=\frac{3}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

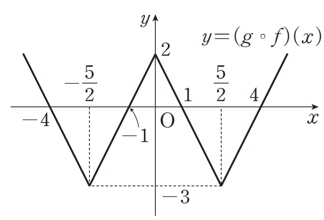
47

$f(x)=-2|x|+5=\begin{cases} 2x+5 & (x<0) \\ -2x+5 & (x\ge 0) \end{cases}$,

$g(x)=|x|-3=\begin{cases} -x-3 & (x<0) \\ x-3 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} -f(x)-3 & (f(x)<0) \\ f(x)-3 & (f(x)\ge 0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -(2x+5)-3 & \left(x<-\frac{5}{2}\right) \\ 2x+5-3 & \left(-\frac{5}{2}\le x<0\right) \\ -2x+5-3 & \left(0\le x\le \frac{5}{2}\right) \\ -(-2x+5)-3 & \left(x>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -2x-8 & \left(x<-\frac{5}{2}\right) \\ 2x+2 & \left(-\frac{5}{2}\le x<0\right) \\ -2x+2 & \left(0\le x\le \frac{5}{2}\right) \\ 2x-8 & \left(x>\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

즉, 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $x<-\frac{5}{2}$일 때,

$(g\circ f)(x)=-2x-8$이므로

$-2x-8=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}x=-\frac{15}{2}$ $\quad\therefore x=-3$

(ii) $-\frac{5}{2}\le x<0$일 때,

$(g\circ f)(x)=2x+2$이므로

$2x+2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}x=-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore x=-\frac{5}{3}$

(iii) $0\le x\le\frac{5}{2}$일 때,

$(g\circ f)(x)=-2x+2$이므로

$-2x+2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}x=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore x=1$

(iv) $x>\frac{5}{2}$일 때,

$(g\circ f)(x)=2x-8$이므로

$2x-8=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}x=\frac{15}{2}$ $\quad\therefore x=5$

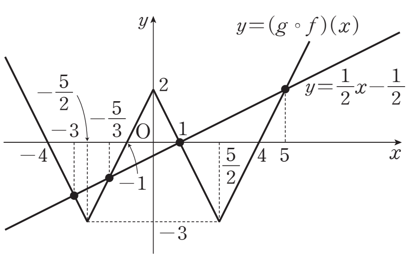
(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$-3+\left(-\frac{5}{3}\right)+1+5=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

보충 설명

방정식 $(g\circ f)(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$의 실근은 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.



STEP 1 개념 마무리			본문 pp.268~269
19 18	**20** 4	**21** 16	**22** 6
23 $k=0$ 또는 $k>4$		**24** $-\frac{1}{4}$	**25** 2
26 $\frac{14}{9}$	**27** 13	**28** 5	**29** -3
30 4			

19

$(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(a)$

$\qquad\qquad=2a^2-3a$

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(a-2)$

$\qquad\qquad=2(a-2)^2-4(a-2)+a=2a^2-11a+16$

이때 $(f\circ f)(0)=(f\circ f)(1)$이므로

$2a^2-3a=2a^2-11a+16$

$8a=16$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2-4x+2$이므로

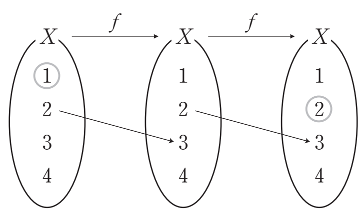
$f(4)=2\times4^2-4\times4+2=18$

답 18

20

함수 $f:X\longrightarrow X$가 일대일대응이려면 집합 X의 모든 원소가 집합 X의 모든 원소에 각각 하나씩 대응되어야 한다.

이때 $f(2)=3$이므로 함수 $f\circ f$를 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



또한, 함수 f가 일대일대응이고 $f(2)=3$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 가능한 것은 1, 2, 4의 3개이다.

(i) $f(1)=1$이면

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1\neq2$

(ii) $f(1)=2$이면

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3\neq2$

(iii) $f(1)=4$이면

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=2$

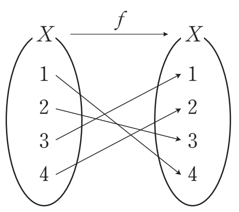
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)=4$, $f(2)=3$, $f(4)=2$이고 함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=1$

$\therefore (f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=4$

답 4

보충 설명

함수 f의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



21

$g(x)=-2x^2+8x-7$

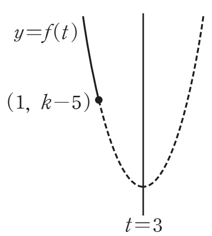
$\quad=-2(x-2)^2+1$

즉, 함수 $y=g(x)$의 치역은 $\{y|y\leq 1\}$이므로 $g(x)=t$로 놓으면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$, 즉 $y=f(t)$의 정의역은 $\{t|t\leq 1\}$이고

$y=f(t)=t^2-6t+k$

$\quad=(t-3)^2+k-9$

따라서 정의역이 $\{t|t\leq 1\}$인 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 치역은 $\{y|y\geq k-5\}$이다.



이때 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 최솟값이 11이므로

$k-5=11 \qquad \therefore k=16$

답 16

22

$f(x)=2x-3$, $g(x)=x^2+2x$에서

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$

$\quad=(2x-3)^2+2(2x-3)$

$\quad=4x^2-8x+3$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+2x)$

$\quad=2(x^2+2x)-3$

$\quad=2x^2+4x-3$

즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$에서

$4x^2-8x+3=2x^2+4x-3$

$2x^2-12x+6=0 \qquad \therefore x^2-6x+3=0$

따라서 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 모든 실근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다.

답 6

보충 설명

이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3=6>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 두 실근은 $x=3\pm\sqrt{6}$이므로 구하는 합은

$3+\sqrt{6}+(3-\sqrt{6})=6$

23

$(f\circ g)(x)=|x^2-4|$, $h(x)=-x+3$이고

$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$이므로

$(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$

$\quad=(f\circ g)(h(x))$

$\quad=(f\circ g)(-x+3)$

$\quad=|(-x+3)^2-4|$

$\quad=|x^2-6x+5|$

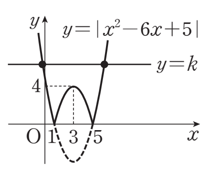
즉, 방정식 $|x^2-6x+5|=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-6x+5|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이때 $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$이므로

$y=|x^2-6x+5|$

$=\begin{cases} x^2-6x+5 & (x<1 \text{ 또는 } x>5) \\ -x^2+6x-5 & (1\leq x\leq 5) \end{cases}$

따라서 함수 $y=|x^2-6x+5|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 k의 값 또는 k의 값의 범위는



$k=0$ 또는 $k>4$

답 $k=0$ 또는 $k>4$

보충 설명

함수 $y=|x^2-6x+5|$의 그래프는 함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

24

조건 (가)의 $(f\circ g)(x)=\{g(x)-1\}^2+4$에서

$f(g(x))=\{g(x)-1\}^2+4$

이때 $g(x)=t$로 놓으면

$$f(t)=(t-1)^2+4$$
$$=t^2-2t+5$$

$\therefore f(x)=x^2-2x+5$

또한, $g(x)=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)이므로

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$
$$=g(x^2-2x+5)$$
$$=a(x^2-2x+5)+b$$
$$=ax^2-2ax+5a+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$2\{g(x)\}^2+\frac{3}{2}=2(ax+b)^2+\frac{3}{2}$$
$$=2a^2x^2+4abx+2b^2+\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (나)에서 ㉠=㉡이므로

$ax^2-2ax+5a+b=2a^2x^2+4abx+2b^2+\frac{3}{2}$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a=2a^2$, $-2a=4ab$, $5a+b=2b^2+\frac{3}{2}$

$a=2a^2$에서 $2a^2-a=0$

$a(2a-1)=0 \qquad a=\frac{1}{2}$ ($\because a\neq0$)

$a=\frac{1}{2}$을 $-2a=4ab$에 대입하면

$-1=2b \qquad \therefore b=-\frac{1}{2}$

또한, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$은 $5a+b=2b^2+\frac{3}{2}$을 만족시킨다.

$\therefore ab=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

25

$f(x)=-x+4$, $g(x)=\begin{cases}3-x & (x\le2)\\ x-1 & (x>2)\end{cases}$에서

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로

$h(f(x))=g(x)$

$\therefore h(-x+4)=\begin{cases}3-x & (x\le2)\\ x-1 & (x>2)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$ (*)

$-x+4=t$로 놓으면 $x=4-t$

이것을 ㉠에 대입하면

$$h(t)=\begin{cases}3-(4-t) & (4-t\le2)\\ (4-t)-1 & (4-t>2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}t-1 & (t\ge2)\\ -t+3 & (t<2)\end{cases}$$

$\therefore h(3)=3-1=2$

답 2

다른 풀이

(*)에서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$h(3)=3-1=2$

26

$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(\frac{1}{2}<x\le1\right)\end{cases}$이므로

$$f^1\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\frac{1}{2}+1=0$$
$$f^2\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f^1)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^1\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(0)$$
$$=-2\times0+1=1$$
$$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)$$
$$=2\times1-1=1$$
$$f^4\left(\frac{1}{2}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)$$
$$=2\times1-1=1$$
$$\vdots$$

즉, $n\neq1$인 모든 자연수 n에 대하여 $f^n\left(\frac{1}{2}\right)=1$이므로

$f^{55}\left(\frac{1}{2}\right)=1$

또한, $f^1\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)=-2\times\frac{1}{9}+1=\frac{7}{9}$

$$f^2\left(\frac{1}{9}\right)=(f\circ f^1)\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(f^1\left(\frac{1}{9}\right)\right)=f\left(\frac{7}{9}\right)$$
$$=2\times\frac{7}{9}-1=\frac{5}{9}$$

$f^3\left(\frac{1}{9}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{9}\right)\right)=f\left(\frac{5}{9}\right)$

$=2\times\frac{5}{9}-1=\frac{1}{9}$

$f^4\left(\frac{1}{9}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{9}\right)\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)$

$=-2\times\frac{1}{9}+1=\frac{7}{9}$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n\left(\frac{1}{9}\right)$의 값은 $\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}$이 이 순서대로 반복된다.

이때 $56=3\times18+2$이므로

$f^{56}\left(\frac{1}{9}\right)=f^2\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}$

$\therefore f^{55}\left(\frac{1}{2}\right)+f^{56}\left(\frac{1}{9}\right)=1+\frac{5}{9}=\frac{14}{9}$

답 $\frac{14}{9}$

27

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (-1\le x<0) \\ -2x+1 & (0\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$f^1\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\times\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2}$

$f^2\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ f^1)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^1\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$f^3\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(0)$

$=-2\times0+1=1$

$f^4\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(1)$

$=-2\times1+1=-1$

$f^5\left(\frac{1}{4}\right)=(f\circ f^4)\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(f^4\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f(-1)$

$=2\times(-1)+1=-1$

$\vdots$

즉, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}, f^2\left(\frac{1}{4}\right)=0, f^3\left(\frac{1}{4}\right)=1,$

$f^4\left(\frac{1}{4}\right)=f^5\left(\frac{1}{4}\right)=f^6\left(\frac{1}{4}\right)=\cdots=-1$이므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^n\left(\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}+0+1+(n-3)\times(-1)$

$=-n+\frac{9}{2}$

이때 $-n+\frac{9}{2}\le-8$에서 $n\ge\frac{25}{2}=12.5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 13이다.

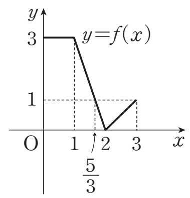
답 13

28

$(f\circ f)(a)=3$, 즉 $f(f(a))=3$에서 $f(a)=t$로 놓으면

$f(t)=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$0\le t\le1$

즉, $0\le f(a)\le1$이므로 $\frac{5}{3}\le a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 $M=3$, 최솟값은 $m=\frac{5}{3}$이므로

$Mm=3\times\frac{5}{3}=5$

답 5

보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

두 점 $(1, 3)$, $(2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{0-3}{2-1}(x-1)\qquad\therefore y=-3x+6$

두 점 $(2, 0)$, $(3, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{1-0}{3-2}(x-2)\qquad\therefore y=x-2$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 3 & (0\le x<1) \\ -3x+6 & (1\le x<2) \\ x-2 & (2\le x\le3)\end{cases}$

이때 $0\le f(a)\le1$ $(0\le a\le3)$이라 하면

(i) $1\le a<2$일 때,

$0\le-3a+6\le1\qquad\therefore \frac{5}{3}\le a\le2$

그런데 $1\le a<2$이므로 $\frac{5}{3}\le a<2$

(ii) $2\le a\le 3$일 때,

$0\le a-2\le 1 \qquad \therefore 2\le a\le 3$

(i), (ii)에서 $0\le f(a)\le 1$을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

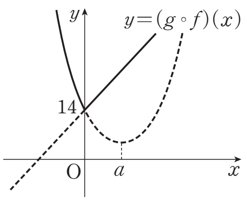
$\frac{5}{3}\le a\le 3$

29

$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+8 & (x<0) \\ x+8 & (x\ge 0)\end{cases}$, $g(x)=x+6$에서

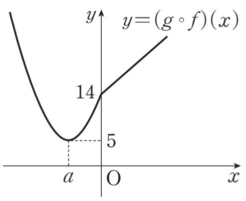
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+6$$
$$=\begin{cases} (x^2-2ax+8)+6 & (x<0) \\ (x+8)+6 & (x\ge 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases} (x-a)^2-a^2+14 & (x<0) \\ x+14 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이때 $a\ge 0$이면 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은 $\{y\,|\,y\ge 14\}$이다.



즉, 조건을 만족시키지 않으므로 $a<0$이어야 한다.

$a<0$일 때, 합성함수 $g\circ f$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 5\}$이려면 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $-a^2+14=5$이므로

$a^2=9 \qquad \therefore a=-3\ (\because a<0)$

답 -3

30

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$(f\circ f)(x)=f(x)$, 즉 $f(f(x))=f(x)$에서

$f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

(i) $0\le t<1$일 때,

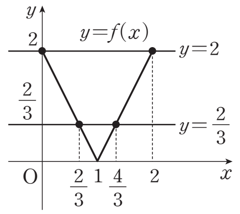
$-2t+2=t,\ 3t=2 \qquad \therefore t=\frac{2}{3}$

(ii) $1\le t\le 2$일 때,

$2t-2=t \qquad \therefore t=2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\frac{2}{3}$ 또는 $f(x)=2$이므로

방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$, 즉 $f(x)=\frac{2}{3}$ 또는 $f(x)=2$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$, $y=2$가 만나는 점의 x좌표와 같다.



$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$

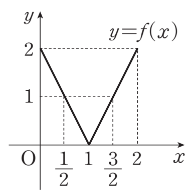
따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$0+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2=4$

답 4

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (0\le x<1) \\ 2x-2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$에서



$(f\circ f)(x)$

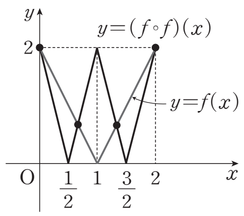
$=f(f(x))$

$$=\begin{cases} -2f(x)+2 & \overbrace{(0\le f(x)<1)}^{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}} \\ 2f(x)-2 & \underbrace{(1\le f(x)\le 2)}_{0\le x\le\frac{1}{2}\text{ 또는 }\frac{3}{2}\le x\le 2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2(-2x+2)-2 & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right) \\ -2(-2x+2)+2 & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \\ -2(2x-2)+2 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right) \\ 2(2x-2)-2 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} -4x+2 & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right) \\ 4x-2 & \left(\frac{1}{2}<x<1\right) \\ -4x+6 & \left(1\le x<\frac{3}{2}\right) \\ 4x-6 & \left(\frac{3}{2}\le x\le 2\right)\end{cases}$$

따라서 두 함수 $y=(f\circ f)(x)$, $y=f(x)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



(ⅰ) $0\le x\le\frac{1}{2}$일 때, $(f\circ f)(x)=f(x)$에서

$-4x+2=-2x+2 \qquad \therefore\ x=0$

(ⅱ) $\frac{1}{2}<x<1$일 때, $(f\circ f)(x)=f(x)$에서

$4x-2=-2x+2 \qquad \therefore\ x=\frac{2}{3}$

(ⅲ) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때, $(f\circ f)(x)=f(x)$에서

$-4x+6=2x-2 \qquad \therefore\ x=\frac{4}{3}$

(ⅳ) $\frac{3}{2}\le x\le 2$일 때, $(f\circ f)(x)=f(x)$에서

$4x-6=2x-2 \qquad \therefore\ x=2$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 모든 실근은

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$이므로 그 합은

$0+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2=4$

보충 설명

방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$의 실근과 방정식 $f(x)=x$의 실근은 같은 것일까?

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f(t)=t$이므로 $f(x)=x$와 같다고 생각할 수 있다.

그러나 $f(k)=t\ (k\ne t)$를 만족시키는 k에 대하여

$f(f(k))=f(t)=t$이므로 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$는

$x=t$ 이외에 $x=k$를 근으로 갖는다.

즉, 방정식 $(f\circ f)(x)=f(x)$의 실근과 방정식 $f(x)=x$의 실근이 같지 않을 수 있음에 주의하자.

3 역함수

기본 + 필수연습

본문 pp.274~280

48 (1) 2 (2) 17

49 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

50 (1) 4 (2) 2 **51** $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$

52 $-2<a<2$ **53** 3 **54** -3

55 5 **56** 3 **57** 10 **58** 0

59 -5 **60** (1) c (2) a **61** a

62 $\sqrt{2}$ **63** 10 **64** 21

48

(1) $f^{-1}(7)=a$에서 $f(a)=7$이므로

$2a+3=7 \qquad \therefore\ a=2$

(2) $f^{-1}(a)=7$에서 $f(7)=a$이므로

$a=2\times7+3=17$

답 (1) 2 (2) 17

49

(1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2-x$를 x에 대하여 풀면

$-x=y-2 \qquad \therefore\ x=-y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=-x+2$

(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$을 x에 대하여 풀면

$\frac{2}{3}x=y+\frac{1}{3} \qquad \therefore\ x=\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

50

(1) $(f\circ g^{-1})^{-1}(4)=(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$

$=g(3)=4$

(2) $((f\circ g)^{-1}\circ f)(1)=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(1)$

$$=(g^{-1}\circ \underbrace{(f^{-1}\circ f)}_{\text{집합 }X\text{에서의 항등함수}})(1)$$

$$=g^{-1}(1)=2$$

답 (1) 4 (2) 2

51

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표와 같으므로

$7x-1=x,\ 6x=1 \qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$이다.

답 $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

52

$f(x)=a|x+4|+2x+1$에서

(i) $x<-4$일 때,

$f(x)=-a(x+4)+2x+1$

$\quad=(2-a)x-4a+1$

(ii) $x\geq-4$일 때,

$f(x)=a(x+4)+2x+1$

$\quad=(2+a)x+4a+1$

(i), (ii)에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 $x<-4$일 때와 $x\geq-4$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(2-a)(2+a)>0$이므로

$(a+2)(a-2)<0$

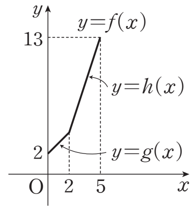
$\therefore\ -2<a<2$

따라서 $-2<a<2$일 때 함수 f의 역함수가 존재한다.

답 $-2<a<2$

53

$g(x)=ax+2,\ h(x)=bx-2$라 하면 집합 $X=\{x\,|\,0\leq x\leq5\}$에서 집합 $Y=\{y\,|\,2\leq y\leq13\}$로의 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (0\leq x<2) \\ h(x) & (2\leq x\leq5) \end{cases}$의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이고 $f(0)=2$이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $h(5)=13,\ g(2)=h(2)$가 성립해야 한다.

$h(5)=13$에서

$5b-2=13 \qquad \therefore\ b=3$

$g(2)=h(2)$에서

$2a+2=2b-2$

이때 $b=3$이므로

$2a+2=4 \qquad \therefore\ a=1$

$\therefore\ ab=1\times3=3$

답 3

보충 설명

함수 f가 일대일대응이므로 두 직선 $y=g(x),\ y=h(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$\therefore\ ab>0$

이때 $f(0)=g(0)=2$이고 함수 f의 치역이 $Y=\{y\,|\,2\leq y\leq13\}$이므로 $a>0,\ b>0$인 경우만 가능하다.

54

$(f\circ g^{-1})(-7)=f(g^{-1}(-7))$에서

$g^{-1}(-7)=k$라 하면 $g(k)=-7$이므로

$3k-1=-7 \qquad \therefore\ k=-2$

$\therefore\ (f\circ g^{-1})(-7)=f(-2)$

$\quad=-2\times|-2|+1$

$\quad=-4+1=-3$

답 -3

55

$f^{-1}(3)=5$이므로 $f(5)=3$

$\therefore\ f(3)=f(f(5))$

$\quad=(f\circ f)(5)=5$

답 5

다른 풀이

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=3 \qquad \cdots\cdots㉠$

$f(3)=k$라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$f(k)=3$

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이고,
$f(k)=3$에서 $k=5$ ($\because f^{-1}(3)=5$)
$\therefore f(3)=5$

56

$g(2)=2\times2-1=3$이므로
$(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(3)$
$f^{-1}(3)=m$이라 하면 $f(m)=3$이므로
$-2m+5=3 \qquad \therefore m=1$
$\therefore (f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(3)=1$
한편, $(f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))$에서
$g^{-1}(2)=n$이라 하면 $g(n)=2$
$x<1$일 때, $g(x)=3x-2<1$
$x\geq1$일 때, $g(x)=2x-1\geq1$
즉, $g(n)\geq1$이므로 $n\geq1$이고 $g(n)=2$에서
$2n-1=2 \qquad \therefore n=\frac{3}{2}$
$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-2\times\frac{3}{2}+5=2$
$\therefore (f^{-1}\circ g)(2)+(f\circ g^{-1})(2)=1+2=3$

답 3

57

$$\begin{aligned}(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(0)&=(f\circ g^{-1}\circ f\circ f^{-1})(0)\\&=(f\circ g^{-1})(0)\\&=f(g^{-1}(0))\end{aligned}$$
이때 $g^{-1}(0)=k$라 하면 $g(k)=0$이므로
$-k+3=0 \qquad \therefore k=3$
$$\begin{aligned}\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(0)&=f(3)\\&=3^2+1=10\end{aligned}$$

답 10

58

$g(-1)=2\times(-1)+3=1$이므로
$$\begin{aligned}(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)&=(f^{-1}\circ g)(-1)\\&=f^{-1}(g(-1))\\&=f^{-1}(1)\end{aligned}$$
이때 $f^{-1}(1)=m$이라 하면 $f(m)=1$이므로
$2m^2-1=1,\ m^2=1 \qquad \therefore m=1$ ($\because m\geq0$)
$\therefore \underline{(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=f^{-1}(1)=1}$ (*)
한편, $(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$
이때 $g^{-1}(3)=n$이라 하면 $g(n)=3$이므로
$2n+3=3 \qquad \therefore n=0$
$\therefore (g\circ f^{-1})^{-1}(3)=f(0)=2\times0^2-1=-1$
$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)+(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=1+(-1)=0$

답 0

보충 설명

(*)에서 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=(f^{-1}\circ g)(-1)=k$라 하면
$(f\circ(f^{-1}\circ g))(-1)=f(k)$
$\therefore g(-1)=f(k)$
즉, $1=2k^2-1$에서 $k=1$ ($\because k\geq0$)
$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(-1)=k=1$

59

$(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ h=f$에서
$$\begin{aligned}((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ h)(-2)=f(-2)&\\&=-2\times(-2)+1\\&=5\end{aligned}$$
즉, $(f^{-1}\circ g)^{-1}(h(-2))=5$에서
$h(-2)=(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(11)$
이때 $f^{-1}(11)=k$라 하면 $f(k)=11$에서
$-2k+1=11 \qquad \therefore k=-5$
$\therefore h(-2)=f^{-1}(11)=-5$

답 -5

다른 풀이

$(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ h=f$에서
$g^{-1}\circ f\circ h=f$
즉, $g\circ(g^{-1}\circ f\circ h)=g\circ f$에서
$f\circ h=g\circ f$
또한, $f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g\circ f$에서
$h=f^{-1}\circ g\circ f$
$$\begin{aligned}\therefore h(-2)&=(f^{-1}\circ g\circ f)(-2)\\&=f^{-1}(g(f(-2)))\\&=f^{-1}(g(5))\\&=f^{-1}(11)\end{aligned}$$

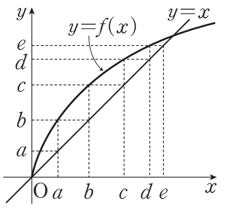
이때 $f^{-1}(11)=k$라 하면 $f(k)=11$이므로

$-2k+1=11$ $\qquad\therefore k=-5$

$\therefore h(-2)=f^{-1}(11)=-5$

60

직선 $y=x$를 이용하여 점선과 y축이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $f^{-1}(d)=k$라 하면

$f(k)=d$이므로 $k=c$

$\therefore f^{-1}(d)=c$

(2) $(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=f^{-1}(f^{-1}(c))$

이때 $f^{-1}(c)=l$이라 하면 $f(l)=c$이므로 $l=b$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(b)$

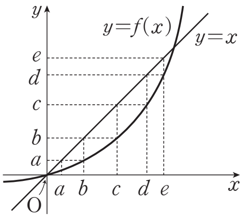
또한, $f^{-1}(b)=m$이라 하면 $f(m)=b$이므로 $m=a$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(b)=a$

답 (1) c (2) a

61

직선 $y=x$를 이용하여 점선과 x축이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$(f\circ f)(k)=f(f(k))=c$에서 $f(k)=l$이라 하면

$f(l)=c$이므로 $l=d$

즉, $f(k)=d$이므로 $k=e$이다.

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(s)=e$

$(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(s)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(s)))=e$에서

$f^{-1}(f^{-1}(s))=m$이라 하면

$f^{-1}(m)=e$, 즉 $f(e)=m$이므로 $m=d$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(s))=d$

$f^{-1}(s)=n$이라 하면

$f^{-1}(n)=d$, 즉 $f(d)=n$이므로 $n=c$

$\therefore f^{-1}(s)=c$

따라서 $f(c)=s$이므로 $s=b$

$\therefore f(s)=f(b)=a$

답 a

다른 풀이

$(f\circ f)(k)=f(f(k))=c$에서

$f(k)=d$ $\qquad\therefore k=e$

즉, $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(s)=e$에서

$(f\circ(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}))(s)=f(e)$

$(f^{-1}\circ f^{-1})(s)=d$

또한, $(f\circ(f^{-1}\circ f^{-1}))(s)=f(d)=c$이므로

$f^{-1}(s)=c$

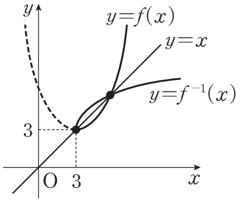
따라서 $f(c)=s$이므로 $s=b$

$\therefore f(s)=f(b)=a$

62

$f(x)=x^2-6x+12=(x-3)^2+3\ (x\geq 3)$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



즉, 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+12=x$, 즉 $x^2-7x+12=0$의 두 실근이므로

$(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

따라서 P$(3,\ 3)$, Q$(4,\ 4)$ 또는 P$(4,\ 4)$, Q$(3,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

63

점 $(3,\ 7)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(3)=7,\ f^{-1}(3)=7$

$f(3)=7$에서 $7=3(a^2-1)+b$

$\therefore 3a^2+b=10$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한, $f^{-1}(3)=7$, 즉 $f(7)=3$에서

$3=7(a^2-1)+b$

$\therefore\ 7a^2+b=10$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=10$

$\therefore\ a+b=0+10=10$

답 10

다른 풀이

일차함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(3, 7)$을 지나므로

$f^{-1}(3)=7 \qquad \therefore\ f(7)=3$

즉, 일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(7, 3)$을 지난다.

또한, 일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 7)$을 지나므로 두 점 $(3, 7)$, $(7, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-7=\frac{3-7}{7-3}(x-3)$$

$\therefore\ y=-x+10 \qquad \therefore\ f(x)=-x+10$

이 함수식이 $f(x)=(a^2-1)x+b$와 일치하므로

$a^2-1=-1,\ b=10 \qquad \therefore\ a=0,\ b=10$

$\therefore\ a+b=0+10=10$

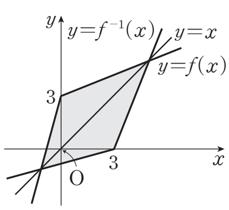
보충 설명

일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 직선 $y=x$ 위의 점이 아닌 점 $(3, 7)$을 지나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 일치한다.

따라서 $f(x)=-x+10$, $f^{-1}(x)=-x+10$이다.

64

$$f(x)=\begin{cases} 4x+3 & (x<0) \\ \frac{1}{2}x+3 & (x\geq 0) \end{cases}$$ 에서



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 교점의 x좌표는

$x<0$일 때, $4x+3=x$에서 $x=-1$

$x\geq 0$일 때, $\frac{1}{2}x+3=x$에서 $x=6$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(6, 6)$이다.

한편, 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{\{6-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}=7\sqrt{2}$

점 $(0, 3)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times 7\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{2}$$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2S=2\times\frac{21}{2}=21$$

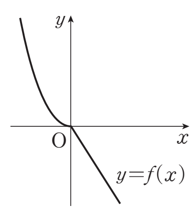
답 21

STEP 1 개 념 마 무 리 본문 pp.281~282

31 -1	**32** -1	**33** $\frac{3}{2}$	**34** 6
35 4	**36** 3	**37** -1	**38** ④
39 ⑤	**40** 7	**41** -1	**42** 0

31

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ (a-1)x+a^2-1 & (x\geq 0) \end{cases}$$



에서 함수 f의 역함수가 존재하려면 f가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $f(0)=0$이고 직선 $y=(a-1)x+a^2-1$의 기울기는 음수이어야 하므로

$a-1<0,\ a^2-1=0$

$a^2-1=0$에서 $(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a<1)$

답 -1

32

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2x & (x<1) \\ 2x^2-1 & (x\geq 1) \end{cases}$$ 에서

$x<1$일 때, $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1<1$

$x\geq 1$일 때, $f(x)=2x^2-1\geq 1$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$

즉, $f(k)\geq 1$이므로 $k\geq 1$이고 $f(k)=7$에서

$2k^2-1=7$, $k^2=4$ $\quad\therefore k=2$ ($\because k\geq 1$)

따라서 $f^{-1}(7)=2$이므로 $f^{-1}(7)+f(t)=-1$에서

$2+f(t)=-1$ $\quad\therefore f(t)=-3$

즉, $f(t)<1$이므로 $t<1$이고 $f(t)=-3$에서

$-t^2+2t=-3$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-1$ ($\because t<1$)

답 -1

33

$f^{-1}(3)=5$에서 $f(5)=3$

$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$

$\therefore g(k)=f(5)$

그런데 $g(x)=f(4x-1)$이므로

$g(k)=f(4k-1)=f(5)$

이때 함수 f는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

즉, $4k-1=5$에서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$g^{-1}(3)=k=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이

$g(x)=f(4x-1)$에서 $y=g(x)$로 놓으면

$y=f(4x-1)$

x와 y를 서로 바꾸면

$x=f(4y-1)$

즉, $f^{-1}(x)=4y-1$에서 $\leftarrow f^{-1}\circ f=I$

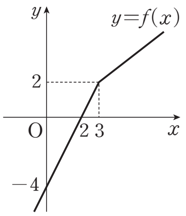
$y=\frac{1}{4}\{f^{-1}(x)+1\}$

따라서 $g^{-1}(x)=\frac{1}{4}\{f^{-1}(x)+1\}$이므로

$g^{-1}(3)=\frac{1}{4}\{f^{-1}(3)+1\}=\frac{1}{4}\times(5+1)=\frac{3}{2}$

34

$$f(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x<3) \\ x-1 & (x\geq 3) \end{cases}$$ 에서



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 f는 일대일대응이다.

즉, f의 역함수가 존재하고

$(f\circ g)(x)=x$이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$

또한, $x<3$일 때 $f(x)=2x-4<2$이고,

$x\geq 3$일 때 $f(x)=x-1\geq 2$이다.

(i) $g(0)=a$라 하면 $f(a)=0$

즉, $f(a)<2$이므로 $a<3$이고 $f(a)=0$에서

$2a-4=0$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore g(0)=2$

(ii) $g(3)=b$라 하면 $f(b)=3$

즉, $f(b)\geq 2$이므로 $b\geq 3$이고 $f(b)=3$에서

$b-1=3$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore g(3)=4$

(i), (ii)에서

$g(0)+g(3)=2+4=6$

답 6

다른 풀이 1

함수 f는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

이때 $(f\circ g)(x)=x$이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$

(i) $x<3$일 때,

$y=2x-4$라 하면 $y<2$이고 $x=\frac{y}{2}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x}{2}+2$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x}{2}+2$ $(x<2)$

(ii) $x\geq 3$일 때,

$y=x-1$이라 하면 $y\geq 2$이고 $x=y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+1$

$\therefore f^{-1}(x)=x+1$ $(x\geq 2)$

(i), (ii)에서 $g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+2 & (x<2) \\ x+1 & (x\geq 2) \end{cases}$

$\therefore g(0)+g(3)=\left(\frac{0}{2}+2\right)+(3+1)=2+4=6$

다른 풀이 2

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x$이므로

$$f(g(x))=\begin{cases}2g(x)-4 & (g(x)<3)\\ g(x)-1 & (g(x)\ge3)\end{cases}$$

(i) $g(x)<3$일 때,

$2g(x)-4=x$, $2g(x)=x+4$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x+2$ $(\underbrace{x<2}_{\frac{1}{2}x+2<3\text{에서 }\frac{1}{2}x<1\quad\therefore x<2})$

(ii) $g(x)\ge3$일 때,

$g(x)-1=x \qquad \therefore g(x)=x+1$ $(\underbrace{x\ge2}_{x+1\ge3\text{에서 }x\ge2})$

(i), (ii)에서 $g(0)+g(3)=2+4=6$

35

$f(1)=2$에서 $f^{-1}(2)=1$이고

$f(3)=1$에서 $f^{-1}(1)=3$이므로

$$\begin{aligned}(f\circ f)^{-1}(2)&=(f^{-1}\circ f^{-1})(2)\\&=f^{-1}(f^{-1}(2))\\&=f^{-1}(1)=3\end{aligned}$$

또한, $g(3)=1$이고, $g(1)=3$에서 $g^{-1}(3)=1$이므로

$$\begin{aligned}((f\circ g)^{-1}\circ g)(3)&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(3)\\&=g^{-1}(f^{-1}(g(3)))\\&=g^{-1}(f^{-1}(1))\\&=g^{-1}(3)=1\end{aligned}$$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(2)+((f\circ g)^{-1}\circ g)(3)=3+1=4$

답 4

36

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(x)&=((f^{-1}\circ f)\circ f^{-1})(x)\\&=f^{-1}(x)\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(x)=5x-4$

이때 $(f\circ f^{-1}\circ f)^{-1}(k)=11$에서

$$\begin{aligned}(f\circ f^{-1}\circ f)^{-1}(k)&=(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(k)\\&=((f^{-1}\circ f)\circ f^{-1})(k)\\&=f^{-1}(k)=5k-4\end{aligned}$$

즉, $5k-4=11$이므로

$5k=15 \qquad \therefore k=3$

답 3

다른 풀이

$$\begin{aligned}(f\circ f^{-1}\circ f)^{-1}(x)&=(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(x)\\&=5x-4\end{aligned}$$

이므로 $(f\circ f^{-1}\circ f)^{-1}(k)=11$에서

$5k-4=11 \qquad \therefore k=3$

37

$h^{-1}(6)=k$라 하면 $h(k)=6$이므로

$6-3k=6 \qquad \therefore k=0 \qquad \therefore h^{-1}(6)=0$

$$\begin{aligned}\therefore (g^{-1}\circ f\circ h^{-1})(6)&=((g^{-1}\circ f)\circ h^{-1})(6)\\&=(f^{-1}\circ g)^{-1}(h^{-1}(6))\\&=(f^{-1}\circ g)^{-1}(0)\end{aligned}$$

이때 $(f^{-1}\circ g)^{-1}(0)=l$이라 하면

$(f^{-1}\circ g)(l)=0$

(i) $l<1$일 때,

$(f^{-1}\circ g)(l)=2l+2=0 \qquad \therefore l=-1$

(ii) $l\ge1$일 때,

$(f^{-1}\circ g)(l)=3l+1=0 \qquad \therefore l=-\frac{1}{3}$

그런데 $l\ge1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $l=-1$

$$\begin{aligned}\therefore (g^{-1}\circ f\circ h^{-1})(6)&=(f^{-1}\circ g)^{-1}(0)\\&=-1\end{aligned}$$

또한, $(f^{-1}\circ g)^{-1}(7)=m$이라 하면

$(f^{-1}\circ g)(m)=7$

(iii) $m<1$일 때,

$(f^{-1}\circ g)(m)=2m+2=7 \qquad \therefore m=\frac{5}{2}$

그런데 $m<1$을 만족시키지 않는다.

(iv) $m\ge1$일 때,

$(f^{-1}\circ g)(m)=3m+1=7 \qquad \therefore m=2$

(iii), (iv)에서 $m=2$

$$\begin{aligned}\therefore (h\circ g^{-1}\circ f)(7)&=(h\circ(g^{-1}\circ f))(7)\\&=(h\circ(f^{-1}\circ g)^{-1})(7)\\&=h((f^{-1}\circ g)^{-1}(7))\\&=h(2)=6-3\times2=0\end{aligned}$$

$\therefore (g^{-1}\circ f\circ h^{-1})(6)+(h\circ g^{-1}\circ f)(7)$

$=-1+0=-1$

답 -1

38 본문 p.273 한 걸음 더 참고

$g(2-3x)$에서 $h(x)=2-3x$라 하자.

$y=2-3x$라 하고 x에 대하여 풀면

$3x=-y+2 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

$\therefore\ h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

즉, $g(2-3x)=g(h(x))=(g\circ h)(x)$의 역함수는

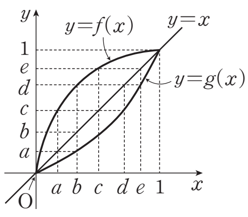
$$\begin{aligned}(g\circ h)^{-1}(x)&=(h^{-1}\circ g^{-1})(x)\\&=h^{-1}(g^{-1}(x))\\&=h^{-1}(f(x))\\&=-\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $g(2-3x)$의 역함수는 $-\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}$이다.

답 ④

39

직선 $y=x$를 이용하여 점선과 y축이 만나는 점의 y좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



$g(b)=a$에서 $g^{-1}(a)=b$이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f^{-1})^{-1}(a)&=(f\circ g^{-1})(a)\\&=f(g^{-1}(a))\\&=f(b)=d\end{aligned}$$

또한, $g(d)=c$에서 $g^{-1}(c)=d$, $g(e)=d$에서 $g^{-1}(d)=e$이므로

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g\circ g)^{-1}(a)&=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(a)\\&=g^{-1}(g^{-1}(f(a)))\\&=g^{-1}(g^{-1}(c))\\&=g^{-1}(d)=e\end{aligned}$$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})^{-1}(a)+(f^{-1}\circ g\circ g)^{-1}(a)=d+e$

답 ⑤

40

$y=f(x-3)+2$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=f(y-3)+2$

즉, $f(y-3)=x-2$에서

$g(f(y-3))=g(x-2)$

이때 두 함수 f, g는 서로 역함수 관계이므로 ← $g\circ f=I$

$y-3=g(x-2)$

$\therefore\ y=g(x-2)+3$

따라서 함수 $y=f(x-3)+2$의 역함수의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것과 같으므로

$m=2,\ n=3$

$\therefore\ 2m+n=2\times2+3=7$

답 7

41

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -5)$를 지나므로

$f(x)=a(x-3)-5$ ($a\neq0$인 상수)

라 할 수 있다.

$f(x)=ax-3a-5$에서

$y=ax-3a-5$라 하고 x에 대하여 풀면

$ax=y+3a+5 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{a}y+3+\frac{5}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x+3+\frac{5}{a}$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x+3+\frac{5}{a}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치하므로

$f(x)=f^{-1}(x)$에서

$ax-3a-5=\frac{1}{a}x+3+\frac{5}{a}$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=\frac{1}{a},\ -3a-5=3+\frac{5}{a}$

위의 두 식을 연립하면

$-3a-5=5a+3 \qquad \therefore\ a=-1$

따라서 $f(x)=-x-2$이므로

$f(-4)+f(1)=2+(-3)=-1$

답 -1

다른 풀이 1

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -5)$를 지나므로

$f(3)=-5$ ······㉠

또한, $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $f^{-1}(3)=-5$에서

$f(-5)=3$ ······㉡

이때 $y=f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

㉠에서 $3a+b=-5$, ㉡에서 $-5a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

따라서 $f(x)=-x-2$이므로

$f(-4)+f(1)=2+(-3)=-1$

다른 풀이 2

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -5)$를 지나므로

$f(x)=ax-3a-5$ ($a\neq0$인 상수)라 하면

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f(f(x))\\&=a(ax-3a-5)-3a-5\\&=a^2x-3a^2-8a-5\end{aligned}$$

$f=f^{-1}$에서 $(f\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$이므로

$a^2x-3a^2-8a-5=x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a^2=1$, $-3a^2-8a-5=0$

(i) $a^2=1$에서

$a=-1$ 또는 $a=1$

(ii) $-3a^2-8a-5=0$에서

$3a^2+8a+5=0$, $(3a+5)(a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{5}{3}$ 또는 $a=-1$

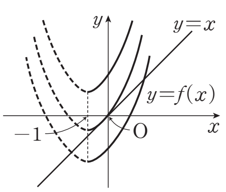
(i), (ii)에서 $a=-1$이므로 $f(x)=-x-2$

$\therefore f(-4)+f(1)=2+(-3)=-1$

42

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$ $(x\geq-1)$

$x\geq-1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ k-1)$이고 아래로 볼록한 이차함수의 그래프의 일부분이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 만나려면 방정식 $f(x)=x$가 $x\geq-1$에서 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x$에서

$x^2+2x+k=x$ $\quad\therefore x^2+x+k=0$

이 이차방정식이 $x\geq-1$에서 실근을 가지려면

$g(x)=x^2+x+k$라 할 때, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 $x\geq-1$에서 x축과 만나야 한다.

이때 $g(x)=x^2+x+k=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}$이므로

$k-\frac{1}{4}\leq0$

$\therefore k\leq\frac{1}{4}$

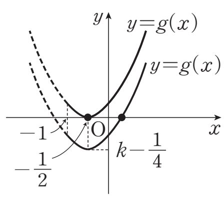
따라서 정수 k의 최댓값은 0이다.

답 0

보충 설명

함수 $g(x)=x^2+x+k$ $(x\geq-1)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ k-\frac{1}{4}\right)$이므로

$k-\frac{1}{4}\leq0$ 즉, $k\leq\frac{1}{4}$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x\geq-1$에서 반드시 x축과 만난다.



또한, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{1}{2}$이므로 k의 값의 범위에 따라 교점의 개수는 다음과 같이 달라진다.

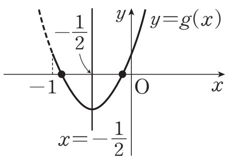
(i) $k=\frac{1}{4}$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축은 $x=-\frac{1}{2}$인 한 점에서 만난다.

(ii) $0\leq k<\frac{1}{4}$이면 함수

$g(-1)=k\geq0$

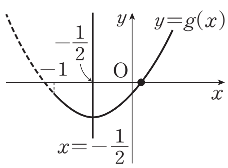
$y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축은 서로 다른 두 점에서 만난다.



(iii) $k<0$이면 함수 $y=g(x)$의

$g(-1)=k<0$

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.



STEP 2 개념 마무리

본문 p.283

1 10	**2** 7	**3** 200	**4** 12
5 ⑤	**6** $(3-\sqrt{5},\ 3-\sqrt{5})$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$		

1

정의역이 $\{a,\ b\}$이고 계수가 실수인 두 이차함수 f, g에 대하여 $f=g$가 성립하므로

$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$

따라서 정의역의 두 원소 a, b는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 근이다.

방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $x^2+(p+1)x+p-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-p-1$, $ab=p-1$

그런데 $a^2+b^2=7$이므로 $(a+b)^2-2ab=7$에서

$(-p-1)^2-2(p-1)=7$

$p^2=4$ $\qquad\therefore p=-2$ 또는 $p=2$

(i) $p=-2$일 때,

$a+b=1$, $ab=-3$, $a^2+b^2=7$이므로

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\qquad=1\times\{7-(-3)\}=10$

(ii) $p=2$일 때,

$a+b=-3$, $ab=1$, $a^2+b^2=7$이므로

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\qquad=(-3)\times(7-1)=-18$

(i), (ii)에서 a^3+b^3의 최댓값은 10이다.

답 10

2

함수 f가 X에서 X로의 일대일대응이므로

$\{f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

조건 (가)에서

$f(2)-f(3)=f(5)$

$\therefore f(2)=f(3)+f(5)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f(4)-f(1)=f(5)$

$\therefore f(4)=f(1)+f(5)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $f(2)>f(3)$, $f(2)>f(5)$이고,

조건 (나)에서 $f(1)<f(2)<f(4)$이므로

$f(3)<f(2)<f(4)$, $f(5)<f(2)<f(4)$

즉, $f(2)=4$, $f(4)=5$이므로

$\{f(1),\ f(3),\ f(5)\}=\{1,\ 2,\ 3\}$

그런데 ㉡에서 $f(4)=f(1)+f(5)$이므로

$f(1)=2$, $f(5)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(5)=2$

(i) $f(1)=2$, $f(5)=3$일 때,

$f(2)=4$, $f(3)=1$이므로

$f(3)+f(5)=f(2)$

즉, ㉠을 만족시킨다.

(ii) $f(1)=3$, $f(5)=2$일 때,

$f(2)=4$, $f(3)=1$이므로

$f(3)+f(5)=3\neq f(2)$

즉, ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=1$, $f(4)=5$, $f(5)=3$

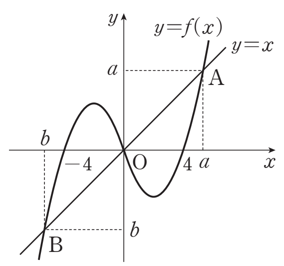
$\therefore f(2)+f(5)=4+3=7$

답 7

3

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & (x<0) \\ x^2-4x & (x\geq 0) \end{cases}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



정의역이 $X=\{a,\ b,\ 0\}$인 함수 $f(x)$가 항등함수이므로

$f(a)=a$, $f(b)=b$가 성립해야 한다.

(i) $f(a)=a$일 때,

$a>0$이므로 $f(a)=a^2-4a$에서

$a^2-4a=a$, $a^2-5a=0$

$a(a-5)=0$ $\qquad\therefore a=5$ $(\because a>0)$

(ⅱ) $f(b)=b$일 때,

$b<0$이므로 $f(b)=-b^2-4b$에서

$-b^2-4b=b$, $b^2+5b=0$

$b(b+5)=0$ $\quad\therefore b=-5$ ($\because b<0$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=5$, $b=-5$

따라서 $\mathrm{A}(5,\ 5)$, $\mathrm{B}(-5,\ -5)$이므로

$l=\sqrt{(-5-5)^2+(-5-5)^2}=\sqrt{200}$

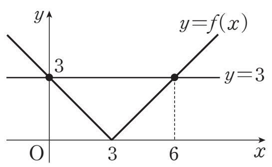
$\therefore l^2=200$

답 200

4

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases}-x+3 & (x<3)\\ x-3 & (x\geq 3)\end{cases}$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$(f\circ f\circ f)(x)=3$에서

$f((f\circ f)(x))=3$

$(f\circ f)(x)=k$라 하면

$f(k)=3$

이때 위의 그림에서 $k=0$ 또는 $k=6$

$\therefore (f\circ f)(x)=0$ 또는 $(f\circ f)(x)=6$

(ⅰ) $(f\circ f)(x)=0$, 즉 $f(f(x))=0$일 때,

$f(x)=l$이라 하면 $f(l)=0$

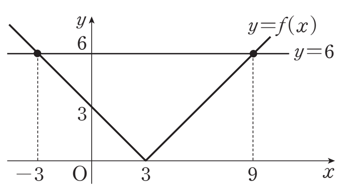
위의 그림에서 $l=3$

$f(x)=3$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=6$

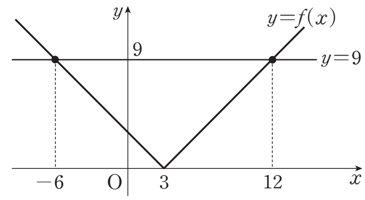
(ⅱ) $(f\circ f)(x)=6$, 즉 $f(f(x))=6$일 때,

$f(x)=m$이라 하면 $f(m)=6$



위의 그림에서 $m=-3$ 또는 $m=9$

$\therefore f(x)=-3$ 또는 $f(x)=9$



그런데 위의 그림에서 $f(x)=-3$을 만족시키는 x는 없으므로 $f(x)=9$를 만족시키는 x의 값은

$x=-6$ 또는 $x=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=3$의 해는

$x=0$ 또는 $x=6$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=12$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$0+6+(-6)+12=12$

답 12

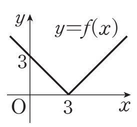
다른 풀이

방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=3$의 해는 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 x좌표와 같으므로 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프를 그려서 풀 수 있다.

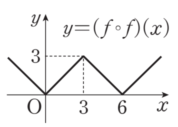
함수 $f(x)=|x-3|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

또한, $(f\circ f)(x)=f(f(x))=|f(x)-3|$이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)-3$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y\leq 0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 [그림 2]와 같다.

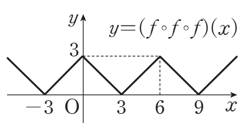
같은 방법으로 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프는 함수 $y=(f\circ f)(x)-3$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y\leq 0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 [그림 3]과 같다.



[그림 1]

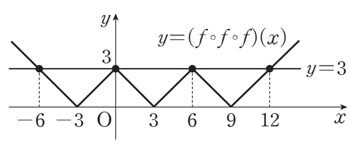


[그림 2]



[그림 3]

이때 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=3$은 다음 그림과 같이 네 점 $(-6,\ 3)$, $(0,\ 3)$, $(6,\ 3)$, $(12,\ 3)$에서 만난다.



따라서 방정식 $(f\circ f\circ f)(x)=3$의 해는

$x=-6$ 또는 $x=0$ 또는 $x=6$ 또는 $x=12$

이므로 그 합은

$-6+0+6+12=12$

5

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

조건 ㈎에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$(f\circ f)(x)=x$이므로 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$f(x)=f^{-1}(x)$이다.

$\therefore f(3)=f^{-1}(3)$ (참)

ㄴ. 조건 ㈏에서 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $f(x)=2x$이므로 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x$를 만족시키는 원소 x가 적어도 하나 존재한다.

즉, $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립해야 하므로 $f(1)=3$이면 반드시 $f(2)=4$이어야 한다. (참)

ㄷ. 조건 ㈏에서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1)=2$이고 $f(2)\neq4$일 때,

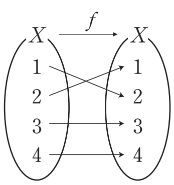
조건 ㈎에서 $(f\circ f)(1)=1$이므로

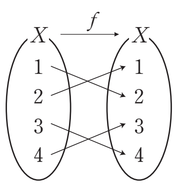
$f(f(1))=f(2)=1$

또한, 조건 ㈎에서

$f(3)=3$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=3$

이므로 가능한 함수 f는 다음과 같이 2개이다.





(ii) $f(2)=4$이고 $f(1)\neq2$일 때,

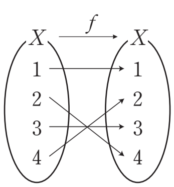
조건 ㈎에서 $(f\circ f)(2)=2$이므로

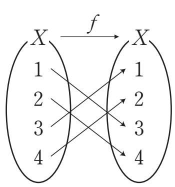
$f(f(2))=f(4)=2$

또한, 조건 ㈎에서

$f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$

이므로 가능한 함수 f는 다음과 같이 2개이다.





(iii) $f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때,

조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 가능한 함수 f의 개수는 4이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄱ. 함수 f가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$(f\circ f)(x)=x$에서 $(f^{-1}\circ(f\circ f))(x)=f^{-1}(x)$

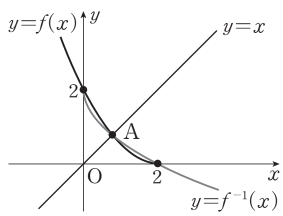
따라서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 $f(3)=f^{-1}(3)$ (참)

6

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$$

$$=\frac{1}{2}(x-2)^2\ (x\leq2)$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 A라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 점 A와 두 점 $(0, 2)$, $(2, 0)$의 세 개이다.

이때 점 A의 x좌표는 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-2x+2=x$, 즉 $x^2-6x+4=0$의 실근 중 $x\leq2$인 값이다.

이차방정식 $x^2-6x+4=0$에서

$x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4}=3\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=3-\sqrt{5}$ ($\because x\leq2$)

$\therefore \mathrm{A}(3-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(3-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$, $(0, 2)$, $(2, 0)$이다.

답 $(3-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$, $(0, 2)$, $(2, 0)$

09. 유리식과 유리함수

1 유리식

기본 + 필수연습 　　　　본문 pp.290~297

01 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ　　**02** (1) 풀이 참조 (2) $\dfrac{x+3}{x-1}$

03 (1) $\dfrac{x-2}{2x-1}$ (2) $\dfrac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$

04 $\dfrac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

05 (1) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ (2) $a+1$　　**06** $\dfrac{24}{25}$

07 4　　**08** 2　　**09** 48

10 (1) $\dfrac{60}{(x-4)(x+26)}$ (2) $\dfrac{40}{21}$　　**11** 18

12 $\dfrac{36}{55}$　　**13** (1) $\dfrac{x+2}{x+4}$ (2) $\dfrac{10x+3}{7x+2}$　　**14** 13

15 (1) 322 (2) 3　　**16** 4　　**17** 11

18 (1) $\dfrac{16}{15}$ (2) $\dfrac{23}{3}$　　**19** 1

01

다항식이 아닌 유리식은 분모가 일차 이상의 다항식이므로 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

02

(1) $\dfrac{2}{x^2-x-2}=\dfrac{2}{(x+1)(x-2)}$,

$\dfrac{3x-1}{x^2-1}=\dfrac{3x-1}{(x+1)(x-1)}$이므로

두 식을 통분하면

$\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$, $\dfrac{(x-2)(3x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

(2) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{x+3}{x-1}$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\dfrac{x+3}{x-1}$

03

(1) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4x-9}{2x^2+5x-3}-\dfrac{x-1}{2x-1}$

$=\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4x-9}{(x+3)(2x-1)}-\dfrac{x-1}{2x-1}$

$=\dfrac{x(2x-1)}{(x+3)(2x-1)}+\dfrac{4x-9}{(x+3)(2x-1)}-\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(2x-1)}$

$=\dfrac{2x^2-x+4x-9-(x^2+2x-3)}{(x+3)(2x-1)}$

$=\dfrac{x^2+x-6}{(x+3)(2x-1)}$

$=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(2x-1)}$

$=\dfrac{x-2}{2x-1}$

(2) $\dfrac{x^2+9x+18}{x^2-x-6}\div\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+x-2}\times\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2+8x+6}$

$=\dfrac{(x+3)(x+6)}{(x+2)(x-3)}\times\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+6)(x-3)}\times\dfrac{(x-3)(x-4)}{2(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$

답 (1) $\dfrac{x-2}{2x-1}$ (2) $\dfrac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$

04

$\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{2x+5}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+3}$

$=\left(\cancel{2}+\dfrac{1}{x-1}\right)-\left(\cancel{1}+\dfrac{1}{x}\right)-\left(\cancel{2}+\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\cancel{1}+\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)-\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(x+2)(x+3)-x(x-1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{6x+6}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

답 $\dfrac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

05

(1) $\dfrac{x}{2x^2-3x+1}-\dfrac{x}{2x^2+3x+1}+\dfrac{2}{4x^2-1}$

$=\dfrac{x}{(x-1)(2x-1)}-\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}+\dfrac{2}{(2x-1)(2x+1)}$

$=\left(\dfrac{1}{x-1}-\cancel{\dfrac{1}{2x-1}}\right)-\left(\dfrac{1}{x+1}-\cancel{\dfrac{1}{2x+1}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2x-1}}-\cancel{\dfrac{1}{2x+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

(2) $\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}=\dfrac{a}{\dfrac{(a+1)-1}{a+1}}$

$=\dfrac{a}{\dfrac{a}{a+1}}$

$=\dfrac{a(a+1)}{a}=a+1$

답 (1) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ (2) $a+1$

06

$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x=4k,\ y=3k$

$\therefore\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2\times4k\times3k}{(4k)^2+(3k)^2}=\dfrac{24k^2}{25k^2}=\dfrac{24}{25}$

답 $\dfrac{24}{25}$

07

$\dfrac{7x-1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{bx-3}{x^2+x+1}$의 우변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{bx-3}{x^2+x+1}=\dfrac{a(x^2+x+1)-(bx-3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{(a-b)x^2+(a+b+3)x+a-3}{x^3-1}$

즉, $\dfrac{7x-1}{x^3-1}=\dfrac{(a-b)x^2+(a+b+3)x+a-3}{x^3-1}$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a-b=0,\ a+b+3=7,\ a-3=-1$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로

$ab=2\times2=4$

답 4

08

$\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}$의 우변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}$

$=\dfrac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x}$

즉, $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x^3-x}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b+c=0,\ a-c=0,\ -b=1$

$-b=1$에서 $b=-1$이므로 두 식 $a+c-1=0,\ a-c=0$을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{2},\ b=-1,\ c=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a-b+c=\dfrac{1}{2}-(-1)+\dfrac{1}{2}=2$

답 2

09

$\dfrac{a}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{b}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2}$의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{b}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{a(x^2-x+1)^2+b(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{a(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)+b(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)}{(x^4+x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(a+b)x^4-2(a-b)x^3+3(a+b)x^2-2(a-b)x+a+b}{(x^4+x^2+1)^2}$

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=4,\ a-b=0,\ 3(a+b)=c$

두 식 $a+b=4$, $a-b=0$을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$

$\therefore\ c=3(a+b)=3\times4=12$

$\therefore\ abc=2\times2\times12=48$

답 48

다른 풀이

$\dfrac{a}{(x^2+x+1)^2}+\dfrac{b}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2}$의 좌변을 통분하면

$$\frac{a(x^2-x+1)^2+b(x^2+x+1)^2}{(x^4+x^2+1)^2}=\frac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2}$$

분모가 같으므로 분자끼리 비교하면

$a(x^2-x+1)^2+b(x^2+x+1)^2=4x^4+cx^2+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=0$을 대입하면 $a+b=4$ ……㉠

$x=1$을 대입하면 $a+9b=8+c$ ……㉡

$x=-1$을 대입하면 $9a+b=8+c$ ……㉢

㉢$-$㉡에서 $8a-8b=0$ $\quad\therefore\ a=b=2$ ($\because$ ㉠)

이것을 ㉡에 대입하여 풀면 $c=12$

$\therefore\ abc=2\times2\times12=48$

10

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&=\frac{6}{(x-1)-(x-4)}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}\right)\\
&\quad+\frac{6}{(x+2)-(x-1)}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\\
&\quad+\frac{6}{(x+5)-(x+2)}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{6}{(x+26)-(x+23)}\left(\frac{1}{x+23}-\frac{1}{x+26}\right)\\
&=2\left\{\left(\frac{1}{x-4}-\cancel{\frac{1}{x-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x-1}}-\cancel{\frac{1}{x+2}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{x+23}}-\frac{1}{x+26}\right)\right\}\\
&=2\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+26}\right)\\
&=2\times\frac{x+26-(x-4)}{(x-4)(x+26)}\\
&=2\times\frac{30}{(x-4)(x+26)}\\
&=\frac{60}{(x-4)(x+26)}
\end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&=\frac{4}{3-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{5-3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\
&\quad+\frac{4}{7-5}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{4}{21-19}\times\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\\
&=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)\right\}\\
&=2\times\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}
\end{aligned}$$

답 (1) $\dfrac{60}{(x-4)(x+26)}$ (2) $\dfrac{40}{21}$

11

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)(x+6)}+\frac{3}{(x+6)(x+12)}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}\right)\\
&\qquad+\frac{3}{6}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+12}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\cancel{\frac{1}{x+2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+6}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{x+6}}-\frac{1}{x+12}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}\right)\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{x+12-x}{x(x+12)}\\
&=\frac{6}{x(x+12)}
\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{6}{x(x+12)}=\dfrac{b}{x(x+a)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=12$, $b=6$

$\therefore\ a+b=12+6=18$

답 18

12

$f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

(단, $x\neq-1$, $x\neq1$)

$$\therefore \frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{72}{55}=\frac{36}{55}$$

답 $\frac{36}{55}$

13

(1) (주어진 식)

$$=\frac{\dfrac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}}{\dfrac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}=\frac{\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}}{\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\frac{x+2}{x+4}$$

(2) (주어진 식)

$$=1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{3x+1}{x}}}=1+\frac{1}{2+\dfrac{x}{3x+1}}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{2(3x+1)+x}{3x+1}}=1+\frac{1}{\dfrac{7x+2}{3x+1}}$$

$$=1+\frac{3x+1}{7x+2}=\frac{7x+2+(3x+1)}{7x+2}$$

$$=\frac{10x+3}{7x+2}$$

답 (1) $\frac{x+2}{x+4}$ (2) $\frac{10x+3}{7x+2}$

다른 풀이

(1) 분자, 분모에 각각 $(x+2)(x+3)(x+4)$를 곱하면

(주어진 식)

$$=\frac{\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)\times(x+2)(x+3)(x+4)}{\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)\times(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{(x+2)\{(x+4)-(x+3)\}}{(x+4)\{(x+3)-(x+2)\}}$$

$$=\frac{x+2}{x+4}$$

14

$$\frac{25}{81}=\frac{1}{\dfrac{81}{25}}=\frac{1}{3+\dfrac{6}{25}}$$

$$=\frac{1}{3+\dfrac{1}{\dfrac{25}{6}}}=\frac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{6}}}$$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=6$이므로

$a+b+c=3+4+6=13$

답 13

15

(1) $\underbrace{x^2-7x+1=0}_{x=0\text{이면 }0-7\times0+1\neq0}$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-7+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=7$

$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=7^3-3\times7=322$$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$에서

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$\therefore a=b=c$

$$\therefore \frac{c}{a+b}+\frac{2a}{b+c}+\frac{3b}{c+a}$$

$$=\frac{a}{a+a}+\frac{2a}{a+a}+\frac{3a}{a+a}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$$

답 (1) 322 (2) 3

16

$\underbrace{x^2+4x-1=0}_{x=0\text{이면 }0+4\times0-1\neq0}$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+4-\frac{1}{x}=0$

$\therefore 4+x=\frac{1}{x}$ $\qquad$ ……㉠,

$x-\frac{1}{x}=-4$ $\qquad$ ……㉡

$$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{4+\dfrac{1}{4+x}}$$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{1}{x}-x=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=-(-4)$ ($\because$ ㉡)

$=4$

답 4

17

$\dfrac{x^2-xy-8y^2}{x^2-xy+y^2}=-2$의 양변에 x^2-xy+y^2을 곱하면

$x^2-xy-8y^2=-2(x^2-xy+y^2)$

$3x^2-3xy-6y^2=0$, $x^2-xy-2y^2=0$

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=2y$ ($\because xy>0$) ← $xy>0$이므로 x, y의 부호는 일치한다. 따라서 $x+y=0$, 즉 $x=-y$가 될 수 없다.

$\therefore \dfrac{2x+7y}{3x-5y}=\dfrac{2\times2y+7y}{3\times2y-5y}=\dfrac{11y}{y}=11$

답 11

18

$(x+y):(y+z):(z+x)=4:7:5$이므로

$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{5}=k$ $(k\neq0)$로 놓으면

$x+y=4k$ ……㉠

$y+z=7k$ ……㉡

$z+x=5k$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=16k$

$\therefore x+y+z=8k$

위의 식에 ㉠, ㉡, ㉢을 각각 대입하면

$z=4k$, $x=k$, $y=3k$

(1) $\dfrac{yz+zx}{xy+yz}=\dfrac{12k^2+4k^2}{3k^2+12k^2}=\dfrac{16k^2}{15k^2}=\dfrac{16}{15}$

(2) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{k^3+27k^3+64k^3}{12k^3}=\dfrac{92k^3}{12k^3}=\dfrac{23}{3}$

답 (1) $\dfrac{16}{15}$ (2) $\dfrac{23}{3}$

19

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$에서

$b+c=ak$ ……㉠

$c+a=bk$ ……㉡

$a+b=ck$ ……㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$

(i) $a+b+c\neq0$일 때, $k=2$

(ii) $a+b+c=0$일 때,

$b+c=-a$이므로 ㉠에서 ← $c+a=-b$ 또는 $a+b=-c$를 각각 ㉡, ㉢에 대입해도 $k=-1$을 구할 수 있다.

$-a=ak$ $\therefore k=-1$ ($\because a\neq0$)

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$2+(-1)=1$

답 1

다른 풀이

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$에서

(i) $a+b+c=0$일 때,

$\dfrac{-a}{a}=\dfrac{-b}{b}=\dfrac{-c}{c}=-1$

$\therefore k=-1$

(ii) $a+b+c\neq0$일 때,

$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

$\therefore k=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+2=1$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.298

01 24	**02** 4	**03** 7	**04** 10
05 1	**06** 75		

01

$m\neq-4$, $m\neq4$이므로

$\dfrac{4m+16}{m^2-16}=\dfrac{4(m+4)}{(m+4)(m-4)}=\dfrac{4}{m-4}$

위의 식의 값이 정수가 되어야 하므로

$m-4$의 값이 될 수 있는 것은
m은 정수이므로 $m-4$도 정수이다.
$-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4$ ← $m-4=\pm$(4의 약수)

$\therefore\ m=0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$0+2+3+5+6+8=24$

답 24

02

$$\frac{a}{x}-\frac{b}{x-1}-\frac{c}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x-1)^2}{x(x-1)^2}-\frac{bx(x-1)}{x(x-1)^2}-\frac{cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^2-2ax+a-(bx^2-bx)-cx}{x(x-1)^2}$$
$$=\frac{(a-b)x^2-(2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$$

즉, $\dfrac{x-2}{x(x-1)^2}=\dfrac{(a-b)x^2-(2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a-b=0,\ 2a-b+c=-1,\ a=-2$

따라서 $a=-2,\ b=-2,\ c=1$이므로

$abc=(-2)\times(-2)\times1=4$

답 4

03

$$\langle A,\ B\rangle=\frac{A-B}{AB}=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$$

이므로

$\langle x+3,\ x+1\rangle+\langle x+5,\ x+3\rangle+\langle x+7,\ x+5\rangle$
$$=\left(\frac{1}{x+1}-\cancel{\frac{1}{x+3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+3}}-\cancel{\frac{1}{x+5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+5}}-\frac{1}{x+7}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7} \quad\cdots\cdots ㉠$$
$$\langle x+a,\ x+1\rangle=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+a} \quad\cdots\cdots ㉡$$

이때 ㉠=㉡이므로

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+a}$$

$\therefore\ a=7$

답 7

04

$$\frac{14}{31}=\frac{1}{\frac{31}{14}}=\frac{1}{2+\frac{3}{14}}$$
$$=\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{14}{3}}}=\frac{1}{2+\frac{1}{5-\frac{1}{3}}}$$

따라서 $p=2,\ q=5,\ r=3$

$\therefore\ p+q+r=2+5+3=10$

답 10

05

$abc=1$이므로

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{c\times a}{c\times(ab+a+1)}+\frac{ac\times b}{ac\times(bc+b+1)}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{ca}{abc+ca+c}+\frac{abc}{abc\times c+abc+ca}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{ca}{1+ca+c}+\frac{1}{c+1+ca}+\frac{c}{ca+c+1}$$
$$=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$

답 1

06

조건 ㈎에서 $\dfrac{3a+b}{3}=\dfrac{2b+c}{4}=\dfrac{2c}{5}=k\ (k>0)$로 놓으면
$a,\ b,\ c$가 자연수이므로 $k>0$

$3a+b=3k \quad\cdots\cdots ㉠$

$2b+c=4k \quad\cdots\cdots ㉡$

$2c=5k \quad\cdots\cdots ㉢$

㉢에서 $c=\dfrac{5}{2}k$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2b+\dfrac{5}{2}k=4k,\ 2b=\dfrac{3}{2}k \qquad \therefore\ b=\dfrac{3}{4}k$

이것을 ㉠에 대입하면

$3a+\dfrac{3}{4}k=3k,\ 3a=\dfrac{9}{4}k \qquad \therefore\ a=\dfrac{3}{4}k$

따라서 $a:b:c=\dfrac{3}{4}k:\dfrac{3}{4}k:\dfrac{5}{2}k=3:3:10$이므로

$a=3n,\ b=3n,\ c=10n$ (n은 자연수)으로 놓을 수 있다.

즉, 세 자연수 a, b, c의 최소공배수는 $3\times10\times n$이므로

조건 (나)에서 $30n=90$ $\therefore n=3$

$\therefore a=9,\ b=9,\ c=30$

$\therefore 3a+2b+c=27+18+30=75$

답 75

다른 풀이

$3+4+5\neq0$이므로 조건 (가)의 식에서 가비의 리를 이용하면

$$\frac{3a+b}{3}=\frac{2b+c}{4}=\frac{2c}{5}=\frac{3a+3b+3c}{12}=\frac{a+b+c}{4}$$

즉, $2b+c=a+b+c$에서 $a=b$이므로

$\dfrac{4a}{3}=\dfrac{2c}{5}=k\ (k>0)$로 놓으면 $a=b=\dfrac{3}{4}k$, $c=\dfrac{5}{2}k$

따라서 $a:b:c=\dfrac{3}{4}k:\dfrac{3}{4}k:\dfrac{5}{2}k=3:3:10$이므로

$a=3n$, $b=3n$, $c=10n$ (n은 자연수)으로 놓을 수 있다.

즉, 세 자연수 a, b, c의 최소공배수는 $3\times10\times n$이므로

조건 (나)에서 $30n=90$ $\therefore n=3$

$\therefore a=9,\ b=9,\ c=30$

$\therefore 3a+2b+c=27+18+30=75$

2 유리함수

기본+필수연습

본문 pp.304~313

20 (1) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{5}{4}\text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$
(3) $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$

21 ㄱ, ㄷ, ㄹ **22** 풀이 참조

23 $y=\dfrac{x-2}{2x+4}$ **24** -12 **25** ㄱ, ㄷ

26 $-\dfrac{5}{4}$ **27** 6 **28** $-\dfrac{1}{2}$

29 (1) 3 (2) 3 **30** 9 **31** 81

32 ㄱ, ㄷ **33** $-\dfrac{16}{5}$ **34** 14 **35** $\dfrac{15}{4}$

36 $k<0$ 또는 $0<k<\dfrac{1}{9}$ 또는 $k>1$ **37** $\dfrac{31}{16}$

38 (1) $f^{60}(x)=x$ (2) 5 **39** $\dfrac{1}{21}$ **40** 3

41 1 **42** $2\sqrt{10}$

20

(1) $-4x+5\neq0$에서 $x\neq\dfrac{5}{4}$이므로 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{5}{4}\text{인 실수}\right\}$이다.

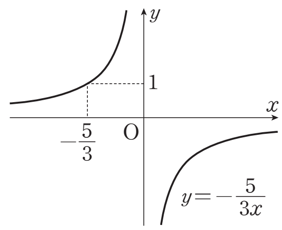
(2) 모든 실수 x에 대하여 $2x^2+3\neq0$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$이다.

(3) $x+2\neq0$에서 $x\neq-2$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$이다.

답 (1) $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{5}{4}\text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x\,|\,x\text{는 실수}\}$
(3) $\{x\,|\,x\neq-2\text{인 실수}\}$

21

함수 $y=-\dfrac{5}{3x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄴ. 함수 $y=-\dfrac{5}{3x}$의 정의역은

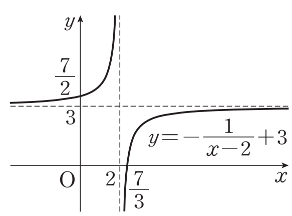
$\{x\,|\,x\neq0\text{인 실수}\}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

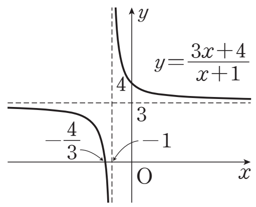
22

(1) 함수 $y=-\dfrac{1}{x-2}+3$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2\text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq3\text{인 실수}\}$, 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=3$이다.

(2) $y=\frac{3x+4}{x+1}=\frac{3(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+3$이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq3$인 실수$\}$, 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=3$이다.

답 풀이 참조

23

$y=\frac{-4x-2}{2x-1}$를 x에 대하여 풀면

$(2x-1)y=-4x-2$, $2xy-y=-4x-2$

$(2y+4)x=y-2$

$\therefore x=\frac{y-2}{2y+4}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{x-2}{2x+4}$

답 $y=\frac{x-2}{2x+4}$

24

$y=\frac{-x+1}{x-3}=\frac{-(x-3)-2}{x-3}=-\frac{2}{x-3}-1$

한편, 함수 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{2(x-a)}{x-a+1}+b$

$=\frac{2(x-a+1)-2}{x-a+1}+b$

$=-\frac{2}{x-a+1}+2+b$

이 함수의 그래프가 함수 $y=-\frac{2}{x-3}-1$의 그래프와 일치하므로

$-a+1=-3$, $2+b=-1$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$ab=4\times(-3)=-12$

답 -12

✦25

ㄱ. $y=-\frac{1}{3x+3}=-\frac{1}{3(x+1)}$

즉, 함수 $y=-\frac{1}{3x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-\frac{x-1}{3x+6}=-\frac{(x+2)-3}{3(x+2)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3}$

즉, 함수 $y=-\frac{x-1}{3x+6}$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{x+1}{6-6x}=\frac{(x-1)+2}{-6(x-1)}=-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{6}$

즉, 함수 $y=\frac{x+1}{6-6x}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y=-\frac{1}{3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

26

$f(0)=\frac{a}{b}=1$　　$\therefore a=b$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=\frac{-2x+a}{x+b}=\frac{-2(x+b)+2b+a}{x+b}=\frac{2b+a}{x+b}-2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=-2$

$\therefore b=1$

㉠에서 $a=1$이므로

$f(x)=\frac{-2x+1}{x+1}$

$\therefore f(3)=\frac{-2\times3+1}{3+1}=-\frac{5}{4}$

답 $-\frac{5}{4}$

다른 풀이

함수 $f(x)=\frac{-2x+a}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=-2$

따라서 $b=1$이므로 $f(x)=\frac{-2x+a}{x+1}$

또한, $f(0)=1$이므로 $a=1$ $\qquad \therefore f(x)=\frac{-2x+1}{x+1}$

$\therefore f(3)=\frac{-2\times3+1}{3+1}=-\frac{5}{4}$

27

$y=\frac{bx-1}{ax-6}=\frac{\frac{b}{a}(ax-6)+\frac{6b}{a}-1}{ax-6}=\frac{\frac{6b}{a}-1}{ax-6}+\frac{b}{a}$

이므로 유리함수 $y=\frac{bx-1}{ax-6}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{6}{a},\ y=\frac{b}{a}$

이때 함수 $y=\frac{bx-1}{ax-6}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이므로

$\frac{6}{a}=3,\ \frac{b}{a}=2$

따라서 $a=2,\ b=4$이므로

$a+b=2+4=6$

답 6

다른 풀이

유리함수 $y=\frac{bx-1}{ax-6}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{6}{a},\ y=\frac{b}{a}$

이때 함수 $y=\frac{bx-1}{ax-6}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq2$인 실수$\}$이므로

$\frac{6}{a}=3,\ \frac{b}{a}=2$

따라서 $a=2,\ b=4$이므로

$a+b=2+4=6$

28

$f(x)=\frac{bx}{ax+1}=\frac{\frac{b}{a}(ax+1)-\frac{b}{a}}{ax+1}=-\frac{\frac{b}{a}}{ax+1}+\frac{b}{a}$

이므로 유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{a},\ y=\frac{b}{a}$

이때 함수 $f(x)$의 정의역과 치역이 같으므로

$-\frac{1}{a}=\frac{b}{a} \qquad \therefore b=-1$

또한, 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{1}{a},\ \frac{b}{a}\right)$, 즉 점 $\left(-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{a}\right)$이

직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$-\frac{1}{a}=-\frac{3}{a}+4,\ \frac{2}{a}=4 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

다른 풀이

유리함수 $f(x)=\frac{bx}{ax+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{1}{a},\ y=\frac{b}{a}$

$-\frac{1}{a}=\frac{b}{a}$에서 $b=-1$

두 점근선의 교점 $\left(-\frac{1}{a},\ \frac{-1}{a}\right)$이 직선 $y=3x+4$ 위의 점이

므로

$-\frac{1}{a}=-\frac{3}{a}+4,\ \frac{2}{a}=4 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

29

(1) $y=\frac{bx-1}{3-ax}=\frac{-bx+1}{ax-3}$

$=\frac{-\frac{b}{a}(ax-3)+1-\frac{3b}{a}}{ax-3}=\frac{1-\frac{3b}{a}}{ax-3}-\frac{b}{a}$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{3}{a},\ y=-\frac{b}{a}$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점

$\left(\frac{3}{a},\ -\frac{b}{a}\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{3}{a}=3,\ -\frac{b}{a}=-2 \qquad \therefore a=1,\ b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

(2) $y=\frac{-6x+5}{3x-3}=\frac{-2(3x-3)-1}{3x-3}=-\frac{1}{3(x-1)}-2$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=-2$

따라서 두 점근선의 교점 $(1,\ -2)$는 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$의 교점이므로

$-2=1+a,\ -2=-1+b$

$\therefore a=-3,\ b=-1$

$\therefore ab=(-3)\times(-1)=3$

답 (1) 3 (2) 3

30

$y=\frac{3x+b}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+b}{x+a}=\frac{-3a+b}{x+a}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=3$

이때 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-a,\ 3)$에 대하여 대칭이므로

$a=3,\ c=3$

또한, 함수 $y=\frac{3x+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(3,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{3\times3+b}{3+3},\ 12=b+9$

$\therefore b=3$

$\therefore a+b+c=3+3+3=9$

답 9

31

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=4,\ y=1$이므로 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-4}+1\ (k\neq0)$

이때 유리함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{-4}+1 \qquad \therefore k=-4$

따라서 $y=\frac{-4}{x-4}+1=\frac{-4+(x-4)}{x-4}=\frac{x-8}{x-4}$이므로

$a=-8,\ b=1,\ c=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-8)^2+1^2+(-4)^2=81$

답 81

32

유리함수 $y=\frac{c}{ax+b}+d$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{a},\ y=d$

이므로 주어진 그래프에서

$-\frac{b}{a}<0,\ d>0$

또한, 함수 $y=\frac{c}{ax}$의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$\frac{c}{a}<0$

ㄱ. $-\frac{b}{a}<0$에서 $\frac{b}{a}>0$이므로 $ab>0$ (참)

ㄴ. $\frac{c}{a}<0$에서 $ac<0$ (거짓)

ㄷ. 함수 $y=\frac{c}{ax+b}+d$의 그래프와 y축의 교점의 y좌표가 0보다 크므로 $\frac{c}{b}+d>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

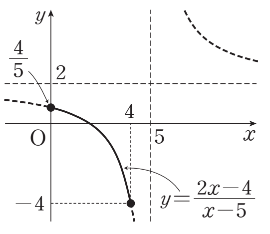
답 ㄱ, ㄷ

33

$y=\frac{2x-4}{x-5}=\frac{2(x-5)+6}{x-5}=\frac{6}{x-5}+2$

이므로 함수 $y=\frac{2x-4}{x-5}$의 그래프는 함수 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le4$에서 함수 $y=\frac{2x-4}{x-5}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=0$일 때 최댓값 $\frac{4}{5}$,

$x=4$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

즉, $M=\frac{4}{5},\ m=-4$이므로

$M+m=\frac{4}{5}+(-4)=-\frac{16}{5}$

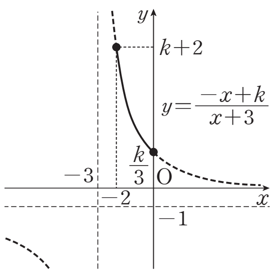
답 $-\frac{16}{5}$

34

$y=\frac{-x+k}{x+3}=\frac{-(x+3)+3+k}{x+3}=\frac{3+k}{x+3}-1$

이므로 함수 $y=\frac{-x+k}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\frac{3+k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k>-3$에서 $k+3>0$ 이므로 $-2\le x\le 0$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$일 때 최솟값 2를 가지므로

$\frac{k}{3}=2$ $\therefore k=6$

또한, $x=-2$일 때 최댓값 M을 가지므로

$M=k+2=8$

$\therefore k+M=6+8=14$

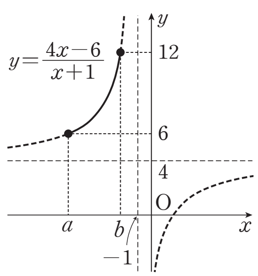
답 14

35

$y=\frac{4x-6}{x+1}=\frac{4(x+1)-10}{x+1}=-\frac{10}{x+1}+4$

이므로 함수 $y=\frac{4x-6}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{10}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a\le x\le b$에서 함수 $y=\frac{4x-6}{x+1}$이 최댓값 12, 최솟값 6을 가지려면 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하고 $x=a$일 때 최솟값 6, $x=b$일 때 최댓값 12를 갖는다.



즉, $\frac{4a-6}{a+1}=6$에서

$4a-6=6a+6$, $2a=-12$

$\therefore a=-6$

또한, $\frac{4b-6}{b+1}=12$에서

$4b-6=12b+12$, $8b=-18$

$\therefore b=-\frac{9}{4}$

$\therefore b-a=-\frac{9}{4}-(-6)=\frac{15}{4}$

답 $\frac{15}{4}$

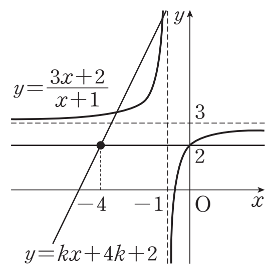
36

$y=\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+3$

또한, $y=kx+4k+2=k(x+4)+2$에서

직선 $y=kx+4k+2$는 기울기 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, 2)$를 지난다.

즉, 함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+4k+2$는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $k=0$일 때,

직선 $y=kx+4k+2$, 즉 $y=2$는 점근선 $y=3$과 평행하므로 함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$의 그래프와 한 점 $(0, 2)$에서 만난다.

(ii) $k\ne 0$일 때,

함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=kx+4k+2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $\frac{3x+2}{x+1}=kx+4k+2$, 즉 $kx^2+(5k-1)x+4k=0$이 서로 다른 두 근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(5k-1)^2-4\times k\times 4k>0$

$9k^2-10k+1>0$, $(k-1)(9k-1)>0$

$\therefore k<\frac{1}{9}$ 또는 $k>1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$k<0$ 또는 $0<k<\frac{1}{9}$ 또는 $k>1$

답 $k<0$ 또는 $0<k<\frac{1}{9}$ 또는 $k>1$

37

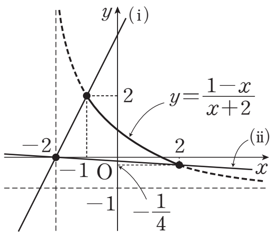
$y=\frac{1-x}{x+2}=\frac{-(x+2)+3}{x+2}=\frac{3}{x+2}-1$

또한, $y=mx+2m=m(x+2)$에서

직선 $y=mx+2m$은 기울기 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=\frac{1-x}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=mx+2m$이 만나야 한다.

따라서 함수 $y=\frac{1-x}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=mx+2m$은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=mx+2m$이 점 $(-1,\ 2)$를 지날 때,

$2=-m+2m \qquad \therefore m=2$

(ii) 직선 $y=mx+2m$이 점 $\left(2,\ -\frac{1}{4}\right)$을 지날 때,

$-\frac{1}{4}=2m+2m,\ 4m=-\frac{1}{4}$

$\therefore m=-\frac{1}{16}$

(i), (ii)에서 함수 $y=\frac{1-x}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=mx+2m$이 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{16}\le m\le 2$

따라서 실수 m의 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{1}{16}\right)=\frac{31}{16}$

답 $\frac{31}{16}$

38

(1) $f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-1}{x-1}$$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{-1}{x-1}\right)$

$$=\frac{\frac{-1}{x-1}-1}{\frac{-1}{x-1}}=\frac{\frac{-x}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}}=x$$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(x)$

$f^5(x)=f(f^4(x))=f(f(x))=f^2(x)$

$f^6(x)=f(f^5(x))=f(f^2(x))=f^3(x)=x$

⋮

따라서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(x)$는

$f(x)=\frac{x-1}{x},\ f^2(x)=\frac{-1}{x-1},\ f^3(x)=x$

가 이 순서대로 반복되므로

$f^{60}(x)=f^{3\times 20}(x)=x$

(2) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$에서 $f^1\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{3}{2}$

$f^2\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(f^1\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=5$

$f^3\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(f^2\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=f(5)=\frac{2}{3}$

$f^4\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(f^3\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{5}$

$f^5\left(-\frac{1}{5}\right)=f\left(f^4\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{3}{2}$

⋮

따라서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n\left(-\frac{1}{5}\right)$의 값은

$-\frac{3}{2},\ 5,\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{5}$이 이 순서대로 반복되므로

$f^{50}\left(-\frac{1}{5}\right)=f^{4\times 12+2}\left(-\frac{1}{5}\right)=f^2\left(-\frac{1}{5}\right)=5$

답 (1) $f^{60}(x)=x$ (2) 5

다른 풀이

(2) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$이므로

$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}=-\frac{1}{x}$$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$=\frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{-x-1}{x-1}$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{-x-1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{-x-1}{x-1}-1}{\frac{-x-1}{x-1}+1}=\frac{\frac{-2x}{x-1}}{\frac{-2}{x-1}}=x$$

따라서 $f^{4k-3}(x)=f(x)$, $f^{4k-2}(x)=f^2(x)$, $f^{4k-1}(x)=f^3(x)$, $f^{4k}(x)=x$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$f^{50}(x)=f^{4\times13-2}(x)=f^2(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore f^{50}\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{5}}=5$$

39

$f(x)=\dfrac{x}{1-2x}$이므로

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{2x}{1-2x}}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-4x}{1-2x}}=\frac{x}{1-4x}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{1-4x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{1-4x}}{1-\frac{2x}{1-4x}}=\frac{\frac{x}{1-4x}}{\frac{1-6x}{1-4x}}=\frac{x}{1-6x}$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{x}{1-6x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{1-6x}}{1-\frac{2x}{1-6x}}=\frac{\frac{x}{1-6x}}{\frac{1-8x}{1-6x}}=\frac{x}{1-8x}$$

$\vdots$

$$\therefore f^{10}(x)=\frac{x}{1-20x}$$

이때 $f^{10}(a)=1$에서

$$\frac{a}{1-20a}=1,\ a=1-20a$$

$$21a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{21}$$

답 $\dfrac{1}{21}$

40

$y=\dfrac{ax+1}{4x-3}$을 x에 대하여 풀면

$y(4x-3)=ax+1$

$4xy-3y=ax+1$, $(4y-a)x=3y+1$

$$\therefore x=\frac{3y+1}{4y-a}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{3x+1}{4x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{4x-a}$$

이때 $f=f^{-1}$이므로 $\dfrac{ax+1}{4x-3}=\dfrac{3x+1}{4x-a}$

$\therefore a=3$

답 3

다른 풀이 1

$f=f^{-1}$에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

$$y=\frac{ax+1}{4x-3}=\frac{\frac{a}{4}(4x-3)+\frac{3}{4}a+1}{4x-3}=\frac{\frac{3}{4}a+1}{4x-3}+\frac{a}{4}$$

에서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{3}{4}$, $y=\dfrac{a}{4}$이므로

$$\frac{a}{4}=\frac{3}{4} \qquad \therefore a=3$$

다른 풀이 2

함수 $f(x)=\dfrac{ax+1}{4x-3}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{4x-a}$

이때 $f=f^{-1}$이므로 $\dfrac{ax+1}{4x-3}=\dfrac{3x+1}{4x-a}$

$\therefore a=3$

41

$f(x)=\dfrac{4}{x-a}+b$에서 조건 (나)에 의하여

$(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

$y=\dfrac{4}{x-a}+b$를 x에 대하여 풀면

$(y-b)(x-a)=4$, $xy-ay-bx+ab=4$

$$(y-b)x=ay+4-ab \qquad \therefore x=\frac{ay+4-ab}{y-b}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+4-ab}{x-b}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{ax+4-ab}{x-b}$

$\qquad\qquad =\dfrac{a(x-b)+4}{x-b}=\dfrac{4}{x-b}+a$

$f(x)=f^{-1}(x)$에서 $\dfrac{4}{x-a}+b=\dfrac{4}{x-b}+a$

$\therefore a=b$

한편, 조건 ㈎에서 $f(0)=1$이므로 $\dfrac{4}{-a}+b=1$

이 식에 $a=b$를 대입하면 $\dfrac{4}{-a}+a=1$

$4-a^2=-a \qquad \therefore a^2-a-4=0$ ← $D=(-1)^2-4\times(-4)=17>0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 1이다.

답 1

다른 풀이

함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-a}+b=\dfrac{b(x-a)+4}{x-a}=\dfrac{bx-ab+4}{x-a}$의

역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{ax-ab+4}{x-b}$

조건 ㈏에서 $(f\circ f)(x)=x$이므로 $f(x)=f^{-1}(x)$

즉, $\dfrac{bx-ab+4}{x-a}=\dfrac{ax-ab+4}{x-b}$이므로

$a=b$

한편, 조건 ㈎에서 $f(0)=1$이므로 $\dfrac{4}{-a}+b=1$

이 식에 $a=b$를 대입하면 $\dfrac{4}{-a}+a=1$

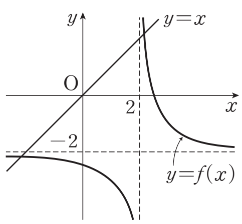
$4-a^2=-a \qquad \therefore a^2-a-4=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 1이다.

42

$f(x)=\dfrac{5-2x}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}-2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 두 점 P, Q는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다.

함수 $y=\dfrac{5-2x}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 (a, a)라 하면

$\dfrac{5-2a}{a-2}=a$

$5-2a=a^2-2a,\ a^2=5$

$\therefore a=-\sqrt{5}$ 또는 $a=\sqrt{5}$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점의 좌표는 $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\{\sqrt{5}-(-\sqrt{5})\}^2+\{\sqrt{5}-(-\sqrt{5})\}^2}=2\sqrt{10}$

답 $2\sqrt{10}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.314~315

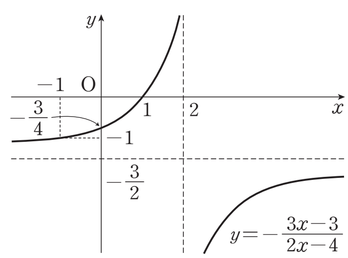
07 ㄱ, ㄴ	**08** $k<0$ 또는 $0<k\le 2$	**09** ④
10 -2	**11** ⑤	**12** 1
13 제1사분면	**14** $\dfrac{3}{4}$	**15** $-\dfrac{18}{5}$
16 2	**17** $\dfrac{1}{2}$	**18** 6

07

$y=-\dfrac{3x-3}{2x-4}=-\dfrac{\frac{3}{2}(2x-4)+3}{2x-4}$

$\quad =-\dfrac{3}{2(x-2)}-\dfrac{3}{2}$

즉, 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-\dfrac{3}{2}$이므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\frac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다. (참)

ㄴ. 주어진 함수의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄷ. $x=-1$일 때, $y=-\frac{3\times(-1)-3}{2\times(-1)-4}=-1$

즉, 정의역이 $\{x \mid x\geq -1, x\neq 2\}$이면 치역은 $\left\{y \,\middle|\, y\geq -1 \text{ 또는 } y<-\frac{3}{2}\right\}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

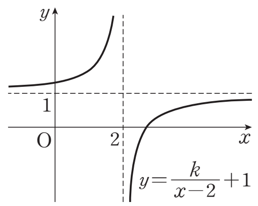
08

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k}{x-2}+1$ ……㉠

(i) $k<0$일 때,

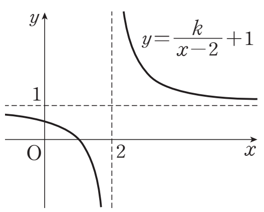
㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 k의 값에 관계없이 항상 제3사분면을 지나지 않는다.



$\therefore k<0$

(ii) $k>0$일 때,

㉠의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때, $y\geq 0$이어야 한다.



즉, $\frac{k}{-2}+1\geq 0$이므로 $k\leq 2$

$\therefore 0<k\leq 2$

(i), (ii)에서 구하는 상수 k의 값의 범위는

$k<0$ 또는 $0<k\leq 2$

답 $k<0$ 또는 $0<k\leq 2$

09

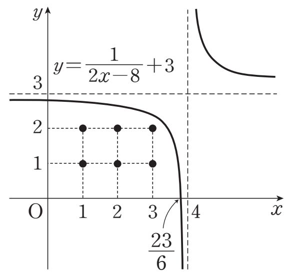
$y=\frac{1}{2x-8}+3=\frac{1}{2(x-4)}+3$

즉, 함수 $y=\frac{1}{2x-8}+3$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=3$이다.

또한, 함수 $y=\frac{1}{2x-8}+3$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2x-8}+3=0$, $2x-8=-\frac{1}{3}$ $\quad\therefore x=\frac{23}{6}$ ← $3<\frac{23}{6}<4$

곡선 $y=\frac{1}{2x-8}+3$과 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 점의 좌표는

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)

의 6개이다.

답 ④

보충 설명

$f(x)=\frac{1}{2x-8}+3$이라 하면

$f(1)=\frac{1}{2\times1-8}+3=3-\frac{1}{6}$, ← $2<3-\frac{1}{6}<3$이므로 (1, 1), (1, 2)

$f(2)=\frac{1}{2\times2-8}+3=3-\frac{1}{4}$, ← $2<3-\frac{1}{4}<3$이므로 (2, 1), (2, 2)

$f(3)=\frac{1}{2\times3-8}+3=3-\frac{1}{2}$ ← $2<3-\frac{1}{2}<3$이므로 (3, 1), (3, 2)

따라서 조건을 만족시키는 점의 좌표는

(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)

의 6개이다.

10

$f(x)=\frac{2x+k-6}{x-3}=\frac{2(x-3)+k}{x-3}=\frac{k}{x-3}+2$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=2$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은

$x=3+2$, $y=2-1$, 즉 $x=5$, $y=1$이고, 이 두 직선의 교점의 좌표는 $(5,\ 1)$이다.

점 $(5,\ 1)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로

$1=\dfrac{k}{5-3}+2$, $\dfrac{k}{2}=-1$ $\qquad \therefore k=-2$

답 -2

11

$f(x)=0$, 즉 $\dfrac{4}{x-a}-4=0$에서

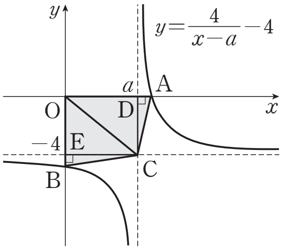
$\dfrac{4}{x-a}=4$, $x-a=1$

$\therefore x=a+1$ $\qquad \therefore \mathrm{A}(a+1,\ 0)$

또한, $f(0)=\dfrac{4}{-a}-4$이므로 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{4}{a}-4\right)$

함수 $y=\dfrac{4}{x-a}-4\ (a>1)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=-4$이므로 $\mathrm{C}(a,\ -4)$

이때 다음 그림과 같이 점 C에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 □OBCA의 넓이는 두 삼각형 OCA, OCB의 넓이의 합과 같다.



$\therefore$ □OBCA$=$△OCA$+$△OCB

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CD}}+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{CE}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(a+1)\times4+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{a}+4\right)\times a$

$=4a+4$

즉, $4a+4=24$에서 $4a=20$

$\therefore a=5$

답 ⑤

12

$y=\dfrac{x-3}{2x-8}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-8)+1}{2x-8}$

$=\dfrac{1}{2x-8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2(x-4)}+\dfrac{1}{2}$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$, $y=\dfrac{1}{2}$

이때 두 점근선의 교점 $\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$이 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$의 교점이므로

$\dfrac{1}{2}=4+a$ $\qquad \therefore a=-\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{1}{2}=-4+b$ $\qquad \therefore b=\dfrac{9}{2}$

$\therefore a+b=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}=1$

답 1

다른 풀이

함수 $y=\dfrac{x-3}{2x-8}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$, $y=\dfrac{1}{2}$

즉, 함수 $y=\dfrac{x-3}{2x-8}$의 그래프가 두 직선 $y=\pm(x-4)+\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

$y=x-4+\dfrac{1}{2}=x-\dfrac{7}{2}$ $\qquad \therefore a=-\dfrac{7}{2}$

$y=-x+4+\dfrac{1}{2}=-x+\dfrac{9}{2}$ $\qquad \therefore b=\dfrac{9}{2}$

$\therefore a+b=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}=1$

13

$f(x)=\dfrac{ax-b}{x-c}=\dfrac{a(x-c)-b+ac}{x-c}=\dfrac{ac-b}{x-c}+a$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=c$, $y=a$

이때 주어진 그래프에서 $a<0$, $c>0$

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축은 x축보다 위쪽에서 만나므로

$f(0)=\dfrac{b}{c}>0$ $\qquad \therefore b>0\ (\because c>0)$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

(i) $a<0$이므로 그래프는 위로 볼록하다.

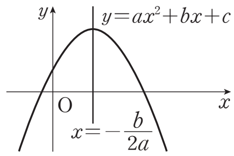
(ii) $a<0$, $b>0$이므로 축의 방정식은

$$x=-\frac{b}{2a}>0$$

즉, 축은 y축의 오른쪽에 위치한다.

(iii) $c>0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 y축의 교점은 원점보다 위쪽에 위치한다.

(i), (ii), (iii)에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 존재한다.



답 제1사분면

14

$$y=\frac{ax+b}{x+3}=\frac{a(x+3)-3a+b}{x+3}=\frac{-3a+b}{x+3}+a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=a$ $\qquad\therefore\ a=-2$

(가)

함수 $y=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프가 점 $(-4,\ -1)$을 지나므로

$$-1=\frac{-4a+b}{-1}$$

$\therefore\ -4a+b=1$

위의 식에 $a=-2$를 대입하면 $-4\times(-2)+b=1$

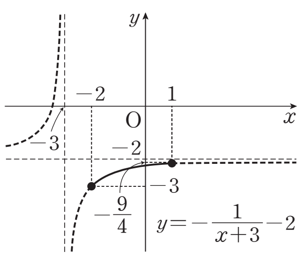
$8+b=1$ $\qquad\therefore\ b=-7$

(나)

$$\therefore\ y=\frac{-3a+b}{x+3}+a=\frac{-3\times(-2)-7}{x+3}-2$$

$$=-\frac{1}{x+3}-2$$

즉, 함수 $y=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $-2\le x\le 1$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $x=1$일 때 최댓값 M, $x=-2$일 때 최솟값 m을 갖는다.

$$M=-\frac{1}{1+3}-2=-\frac{9}{4},$$

$$m=-\frac{1}{-2+3}-2=-3$$

$$\therefore\ \frac{M}{m}=\left(-\frac{9}{4}\right)\div(-3)=\frac{3}{4}$$

(다)

답 $\frac{3}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $y=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프의 점근선의 방정식을 구하여 a의 값을 구한 경우	30%
(나)	함수 $y=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프가 지나는 점을 이용하여 b의 값을 구한 경우	30%
(다)	$-2\le x\le 1$에서 함수 $y=\frac{ax+b}{x+3}$의 그래프를 그리고, 최댓값 M, 최솟값 m을 각각 구한 후, $\frac{M}{m}$의 값을 구한 경우	40%

15

$f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$라 하면

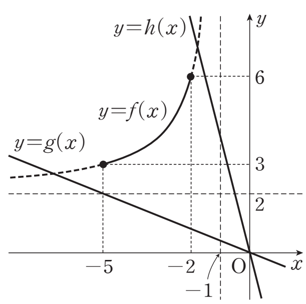
$$f(x)=\frac{2x-2}{x+1}=\frac{2(x+1)-4}{x+1}=-\frac{4}{x+1}+2$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또한, $g(x)=ax$, $h(x)=bx$라 하면 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 모두 원점을 지나는 직선이다.

따라서 $-5\le x\le -2$에서 부등식 $ax\le\frac{2x-2}{x+1}\le bx$가 항상 성립하려면 이 범위에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 사이에 존재해야 한다.

이때 $f(-5)=3$, $f(-2)=6$이므로 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(ⅰ) 직선 $y=h(x)$, 즉 함수 $y=bx$의 그래프가 점 $(-2, 6)$을 지날 때, b의 값이 최대이므로

$-2b=6$, $b=-3$

$\therefore M=-3$

(ⅱ) 직선 $y=g(x)$, 즉 함수 $y=ax$의 그래프가 점 $(-5, 3)$을 지날 때, a의 값이 최소이므로

$-5a=3$, $a=-\dfrac{3}{5}$

$\therefore m=-\dfrac{3}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$M+m=-3+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{18}{5}$$

답 $-\dfrac{18}{5}$

16

$$y=\frac{-x+2}{x+1}=\frac{-(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-1$$

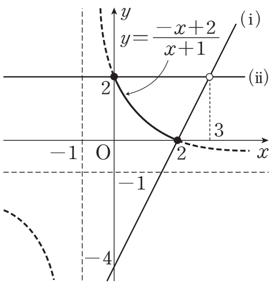
즉, 함수 $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

한편, $\dfrac{y-2}{x-3}=k$라 하면

$y-2=k(x-3)$　　$\therefore y=k(x-3)+2$　　⋯⋯㉠

즉, k는 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 ㉠의 기울기이다.

이때 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\dfrac{-x+2}{x+1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때, 기울기 k는 최대이므로

$0=-k+2$　　$\therefore k=2$

$\therefore M=2$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$를 지날 때, 기울기 k는 최소이므로

$2=-3k+2$, $3k=0$　　$\therefore k=0$

$\therefore m=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M+m=2+0=2$

답 2

17

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{x+1+x-1}{x-1}}{\dfrac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

따라서 $f^{2k-1}(x)=f(x)$, $f^{2k}(x)=x$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$f^{375}(x)=f^{2\times 188-1}(x)=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

이때 $g(-3)=a$라 하면 $f^{375}(a)=-3$이므로

$\dfrac{a+1}{a-1}=-3$, $a+1=-3a+3$

$4a=2$　　$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore g(-3)=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

다른 풀이

$g=(f^{375})^{-1}=(f^{-1})^{375}$이므로 $g(-3)=(f^{-1})^{375}(-3)$이다.

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=-3$에서 $x=\dfrac{1}{2}$이므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$, 즉 $f^{-1}(-3)=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$에서 $x=-3$이므로

$f(-3)=\dfrac{1}{2}$, 즉 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$

$\therefore (f^{-1})^2(-3)=f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$

따라서 자연수 n에 대하여 $(f^{-1})^n(-3)$의 값은 $\frac{1}{2}$, -3이 이 순서대로 반복되고, $375=2\times187+1$이므로

$$g(-3)=(f^{375})^{-1}(-3)=(f^{-1})^{375}(-3)$$
$$=f^{-1}(-3)=\frac{1}{2}$$

보충 설명

$$(f^{375})^{-1}=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{375\text{개}})^{-1}$$
$$=\underbrace{f^{-1}\circ f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}}_{375\text{개}}$$
$$=(f^{-1})^{375}$$

18

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 그 접점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, $f(a)=a$에서 $\frac{3a-9}{a+b}=a$

$3a-9=a^2+ab$

$\therefore a^2+(b-3)a+9=0$ ······㉠

이때 조건을 만족시키는 실수 a가 단 한 개 존재하므로 a에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(b-3)^2-4\times1\times9=0$에서

$(b-3)^2=36$, $b-3=\pm6$

$\therefore b=9$ ($\because b\neq-3$)

이것을 ㉠에 대입하면

$a^2+6a+9=0$, $(a+3)^2=0$

$\therefore a=-3$

$\therefore a+b=-3+9=6$

답 6

다른 풀이

함수 $f(x)=\frac{3x-9}{x+b}$의 역함수는

$f^{-1}(x)=\frac{-bx-9}{x-3}$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 $x=a$인 점에서 접하므로 $f(a)=f^{-1}(a)$에서

$\frac{3a-9}{a+b}=\frac{-ab-9}{a-3}$

$(3a-9)(a-3)=(a+b)(-ab-9)$

$3a^2-18a+27+a^2b+9a+ab^2+9b=0$

이것을 a에 대하여 정리하면

$(b+3)a^2+(b^2-9)a+9b+27=0$

$(b+3)a^2+(b-3)(b+3)a+9(b+3)=0$

$\therefore a^2+(b-3)a+9=0$ ($\because b\neq-3$) ······㉡

이때 조건을 만족시키는 실수 a가 단 한 개 존재하므로 a에 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=(b-3)^2-4\times1\times9=0$에서

$(b-3)^2=36$, $b-3=\pm6$

$\therefore b=9$ ($\because b\neq-3$)

이것을 ㉡에 대입하면

$a^2+6a+9=0$, $(a+3)^2=0$

$\therefore a=-3$

$\therefore a+b=-3+9=6$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.316

1 $\frac{14}{31}$ **2** ④ **3** 6 **4** 8
5 0 **6** 72

1

1학년의 남녀 학생 수를 각각 $5a$, $4a$ (a는 자연수), 2학년의 남녀 학생 수를 각각 $4b$, $3b$ (b는 자연수), 3학년의 남녀 학생 수를 각각 $8c$, $7c$ (c는 자연수)라 하면 전체 남녀 학생 수는 다음 표와 같다.

	남자	여자	합계
1학년	$5a$	$4a$	$9a$
2학년	$4b$	$3b$	$7b$
3학년	$8c$	$7c$	$15c$
전체 학생	$5a+4b+8c$	$4a+3b+7c$	$9a+7b+15c$

이때 이 학교의 전체 남학생과 여학생 수의 비가 11 : 9이므로

$(5a+4b+8c):(4a+3b+7c)=11:9$

$9(5a+4b+8c)=11(4a+3b+7c)$

$45a+36b+72c=44a+33b+77c$

$\therefore a+3b=5c$ ······㉠

한편, 1학년과 3학년 전체 학생 수의 비가 7 : 10이므로

$9a:15c=7:10$

$10\times 9a=7\times 15c$, $90a=105c$

$6a=7c \qquad \therefore \dfrac{a}{7}=\dfrac{c}{6}$

$\dfrac{a}{7}=\dfrac{c}{6}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$a=7k,\ c=6k \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$7k+3b=5\times 6k$, $3b=23k$

$\therefore b=\dfrac{23}{3}k$

따라서 전체 여학생 수에 대한 3학년 여학생 수의 비는

$$\frac{7c}{4a+3b+7c}=\frac{7\times 6k}{4\times 7k+3\times \frac{23}{3}k+7\times 6k}$$

$$=\frac{42k}{28k+23k+42k}=\frac{42k}{93k}=\frac{14}{31}$$

답 $\dfrac{14}{31}$

2

조건 ㈎에서 $\dfrac{\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}}{a+2-a}=-1$이므로

$\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}=-2$, $\dfrac{-2k}{a(a+2)}=-2$

$\therefore k=a(a+2)$

즉, $f(a)=\dfrac{k}{a}=a+2$, $f(a+2)=\dfrac{k}{a+2}=a$이므로

$\mathrm{P}(a,\ a+2)$, $\mathrm{Q}(a+2,\ a)$

$\therefore \mathrm{R}(-a,\ -a-2)$, $\mathrm{S}(-a-2,\ -a)$ ($\because$ 조건 ㈏)

이때 직선 PS의 기울기는

$\dfrac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)}=1$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\perp\overline{\mathrm{PS}}$가 되어 □PQRS는 직사각형이다.

$\therefore$ □PQRS$=\overline{\mathrm{PS}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$$=\sqrt{(-a-2-a)^2+\{-a-(a+2)\}^2}\times\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}$$

$$=\sqrt{(2a+2)^2+(2a+2)^2}\times\sqrt{2^2+(-2)^2}$$

$$=(2a+2)\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$$

$$=8a+8$$

조건 ㈏에서 $8a+8=8\sqrt{5}$

$a+1=\sqrt{5} \qquad \therefore a=\sqrt{5}-1$

$\therefore k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)=4$

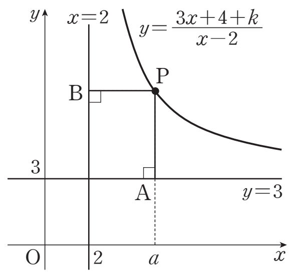
답 ④

3

$$y=\frac{3x+4+k}{x-2}=\frac{3(x-2)+10+k}{x-2}=\frac{k+10}{x-2}+3$$

즉, 함수 $y=\dfrac{3x+4+k}{x-2}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k+10}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=3$이다.

다음 그림과 같이 함수 $y=\dfrac{3x+4+k}{x-2}$ $(x>2)$의 그래프 위의 점 P에서 점근선 $y=3$에 내린 수선의 발을 A, 점근선 $x=2$에 내린 수선의 발을 B라 하자.



점 P의 x좌표를 a $(a>2)$라 하면

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{k+10}{a-2}+3\right)$, $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}\left(2,\ \dfrac{k+10}{a-2}+3\right)$

즉, $\overline{\mathrm{PA}}=\left(\dfrac{k+10}{a-2}+3\right)-3=\dfrac{k+10}{a-2}$, $\overline{\mathrm{PB}}=a-2$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{k+10}{a-2}+a-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $a>2$, $k>0$이므로 $\dfrac{k+10}{a-2}>0$, $a-2>0$

㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\frac{k+10}{a-2}+a-2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{k+10}{a-2}\times(a-2)}$$

$$=2\sqrt{k+10}$$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{k+10}{a-2}=a-2\text{일 때 성립}\right)$

그런데 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값이 8이어야 하므로

$2\sqrt{k+10}=8$, $\sqrt{k+10}=4$

$k+10=16 \qquad \therefore k=6$

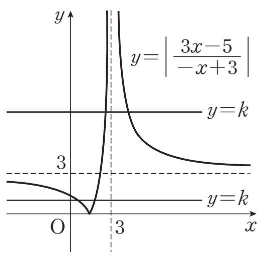
답 6

4

$$y=\frac{3x-5}{-x+3}=\frac{-3(-x+3)+4}{-x+3}$$
$$=\frac{4}{-x+3}-3=-\frac{4}{x-3}-3$$

이므로 함수 $y=\frac{3x-5}{-x+3}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(ⅰ) 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 개수는 1이므로

$N(0)=1$

(ⅱ) 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 2이므로

$N(1)=2$

(ⅲ) 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 2이므로

$N(2)=2$

(ⅳ) 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 개수는 1이므로

$N(3)=1$

(ⅴ) 함수 $y=\left|\frac{3x-5}{-x+3}\right|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수는 2이므로

$N(4)=2$

(ⅰ)~(ⅴ)에서

$N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+N(4)$

$=1+2+2+1+2=8$

답 8

보충 설명

$$N(k)=\begin{cases}0 \ (k<0) \\ 1 \ (k=0 \text{ 또는 } k=3) \\ 2 \ (0<k<3 \text{ 또는 } k>3)\end{cases}$$

5

유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$$f(x)=\frac{k}{x+1}+1 \ (k<0)$$

라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로 ← 점 $(0, -3)$을 대입해도 k의 값을 구할 수 있다.

$0=\frac{k}{4}+1 \qquad \therefore k=-4$

즉, $f(x)=-\frac{4}{x+1}+1=\frac{x-3}{x+1}=f^1(x)$이므로

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$$
$$=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}=\frac{\frac{-2x-6}{x+1}}{\frac{2x-2}{x+1}}=\frac{-x-3}{x-1}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{-x-3}{x-1}\right)$$
$$=\frac{\frac{-x-3}{x-1}-3}{\frac{-x-3}{x-1}+1}=\frac{\frac{-4x}{x-1}}{\frac{-4}{x-1}}=x$$

따라서 $f^{3k-2}(x)=f(x)$, $f^{3k-1}(x)=f^2(x)$, $f^{3k}(x)=x$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$f^{1000}(x)=f^{3\times 334-2}(x)=f(x)=\frac{x-3}{x+1}$$
$$f^{1001}(x)=f^{3\times 334-1}(x)=f^2(x)=\frac{-x-3}{x-1}$$

$\therefore f^{1000}(0)+f^{1001}(0)=-3+3=0$

답 0

다른 풀이

유리함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+1\ (k<0)$

라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{4}+1 \qquad \therefore k=-4$

즉, $f(x)=-\dfrac{4}{x+1}+1=\dfrac{x-3}{x+1}$에서

$f^1(0)=-3$

$f^2(0)=f(f^1(0))=f(-3)=3$

$f^3(0)=f(f^2(0))=f(3)=0$

$f^4(0)=f(f^3(0))=f(0)=-3$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여 $f^n(0)$의 값은 $-3,\ 3,\ 0$이 이 순서대로 반복되므로

$f^{1000}(0)=f^{3\times333+1}(0)=f^1(0)=-3$

$f^{1001}(0)=f^{3\times333+2}(0)=f^2(0)=3$

$\therefore f^{1000}(0)+f^{1001}(0)=-3+3=0$

6

함수 $y=\dfrac{x-2a}{x+2}$에서 $y=0$일 때 $x=2a$, $x=0$일 때 $y=-a$이므로

$A(2a,\ 0)$, $B(0,\ -a)$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

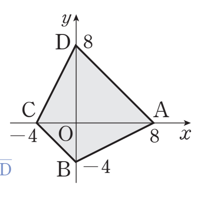
$C(-a,\ 0)$, $D(0,\ 2a)$

이때 $a>0$이고 $\overline{BC}=4\sqrt{2}$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(-a)^2+a^2}=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\therefore a=4$

따라서 $A(8,\ 0)$, $B(0,\ -4)$, $C(-4,\ 0)$, $D(0,\ 8)$이므로



사각형 ABCD의 넓이는

$\triangle ACD+\triangle ABC$ — $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\times12\times8+\dfrac{1}{2}\times12\times4$ $\quad =\frac{1}{2}\times12\times12=72$

$=48+24=72$

답 72

10. 무리식과 무리함수

1 무리식

기본 + 필수연습 본문 pp.320~322

01 (1) $x\ge8$ (2) $x\ge8$ (3) $x>-\dfrac{5}{6}$ (4) $-9\le x<\dfrac{1}{2}$

02 (1) -4 (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

03 (1) $-2a-b+2c$ (2) $-2x-1$

04 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ **05** -14 **06** $-2\sqrt{3}$ **07** 9

01

(1) $x-8\ge0$이므로 $x\ge8$

(2) $3x-1\ge0$, $\dfrac{1}{2}x-4\ge0$이므로

$x\ge\dfrac{1}{3}$, $x\ge8 \qquad \therefore x\ge8$

(3) $6x+5>0$이므로 $x>-\dfrac{5}{6}$

(4) $x+9\ge0$, $3-6x>0$이므로

$x\ge-9$, $x<\dfrac{1}{2} \qquad \therefore -9\le x<\dfrac{1}{2}$

답 (1) $x\ge8$ (2) $x\ge8$ (3) $x>-\dfrac{5}{6}$ (4) $-9\le x<\dfrac{1}{2}$

02

(1) $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})$

$=(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x+2})^2$

$=(x-2)-(x+2)=-4$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$\quad+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

답 (1) -4 (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

03

(1) $a-c<0$, $c-b>0$, $a<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-c)^2}+\sqrt{(c-b)^2}+\sqrt{a^2}&=|a-c|+|c-b|+|a|\\&=-(a-c)+(c-b)-a\\&=-2a-b+2c\end{aligned}$$

(2) $1-x\geq 0$, $x+2\geq 0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(x+2)^2}&=|1-x|-|x+2|\\&=(1-x)-(x+2)\\&=-2x-1\end{aligned}$$

답 (1) $-2a-b+2c$ (2) $-2x-1$

04

$x=\sqrt{6}$일 때, $x+2>0$, $x-2>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}&=\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}\\&=\frac{(x+2)+2\sqrt{x^2-4}+(x-2)}{(x+2)-(x-2)}\\&=\frac{2x+2\sqrt{x^2-4}}{4}\\&=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\end{aligned}$$

위의 식에 $x=\sqrt{6}$을 대입하면

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{(\sqrt{6})^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

답 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

05

$$\begin{aligned}x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}&=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\&=\frac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$x=2-\sqrt{3}$일 때, $x>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}&=\frac{(\sqrt{x}+2)^2+(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\&=\frac{x+4\sqrt{x}+4+x-4\sqrt{x}+4}{x-4}\\&=\frac{2x+8}{x-4}\end{aligned}$$

위의 식에 $x=2-\sqrt{3}$을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{2(2-\sqrt{3})+8}{(2-\sqrt{3})-4}&=\frac{12-2\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}\\&=\frac{(12-2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=-30+16\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $a=-30$, $b=16$이므로

$a+b=-30+16=-14$

답 -14

06

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$일 때, $x>0$, $y>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}&=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\&=\frac{x+2\sqrt{xy}+y+x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}\\&=\frac{2x+2y}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때

$$x+y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{3},$$

$$x-y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}=-1$$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$\frac{2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}$

07

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\end{aligned}$$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=\sqrt{100}-1=10-1=9$

답 9

STEP 1 개념 마무리

본문 p.323

01 7	**02** ④	**03** $2n$	**04** 5
05 $2\sqrt{5}-2$	**06** $3-2\sqrt{3}$	**07** 0	

01

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+2ax+6}$의 값이 실수가 되려면 $ax^2+2ax+6\geq 0$이어야 한다.

(i) $a=0$일 때,

$6\geq 0$이므로 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때,

$a>0$이고, 이차방정식 $ax^2+2ax+6=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq 0$이어야 하므로 ← 이차부등식 $ax^2+2ax+6\geq 0$이 항상 성립하려면 $a>0$, $D\leq 0$

$\frac{D}{4}=a^2-6a\leq 0$, $a(a-6)\leq 0$

$\therefore\ 0<a\leq 6$ ($\because\ a>0$)

(i), (ii)에서 $0\leq a\leq 6$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, $\cdots$, 6의 7개이다.

답 7

02

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}&=\frac{b+\sqrt{ab}+a+\sqrt{ab}}{(a+\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})}\\&=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab+(a+b)\sqrt{ab}+ab}\\&=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a+b+2\sqrt{ab})}\\&=\frac{1}{\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}&=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}\\&=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\\&=\frac{1}{\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

03

자연수 n에 대하여

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+2n}<\sqrt{n^2+2n+1}$이므로

$n<\sqrt{n^2+2n}<n+1$ ⋯⋯㉠

즉, $f(\sqrt{n^2+2n})=n$이므로

$g(\sqrt{n^2+2n})=\sqrt{n^2+2n}-n$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{2n}{g(\sqrt{n^2+2n})}&=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}-n}\\&=\frac{2n(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}\\&=\frac{2n(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(n^2+2n)-n^2}\\&=\sqrt{n^2+2n}+n\end{aligned}$$

이때 ㉠에서 $2n<\sqrt{n^2+2n}+n<2n+1$이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2n}{g(\sqrt{n^2+2n})}\right)&=f(\sqrt{n^2+2n}+n)\\&=2n\end{aligned}$$

답 $2n$

04

$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}=-\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$에서 $x+3\geq 0$, $x-1<0$이므로

$x\geq -3$, $x<1$ $\quad\therefore\ -3\leq x<1$

따라서 $x+3\geq 0$, $x-2<0$이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}&=|x+3|+|x-2|\\&=(x+3)-(x-2)\\&=5\end{aligned}$$

답 5

05

$a=2-\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{5}$일 때,

$a+b=(2-\sqrt{2})+(1-\sqrt{5})=3-\sqrt{2}-\sqrt{5}<0$,

$a-b=(2-\sqrt{2})-(1-\sqrt{5})=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}>0$ ← $\sqrt{2}>1$, $\sqrt{5}>2$

이므로

$$\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(a-b)^2}=|a+b|+|a-b|$$
$$=-(a+b)+(a-b)$$
$$=-2b$$
$$=-2(1-\sqrt{5})$$
$$=2\sqrt{5}-2$$

답 $2\sqrt{5}-2$

06

$a=2+\sqrt{3}$에서 $a-2=\sqrt{3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2-4a+4=3 \qquad \therefore a^2-4a+1=0$

$$\therefore \frac{6}{a^3-4a^2-3a+2}=\frac{6}{a(a^2-4a+1)-4a+2}$$
$$=\frac{6}{-4a+2}=\frac{3}{-2a+1}$$
$$=\frac{3}{-2(2+\sqrt{3})+1}=\frac{3}{-3-2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3(3-2\sqrt{3})}{-(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}$$
$$=3-2\sqrt{3}$$

답 $3-2\sqrt{3}$

07

$\sqrt{a}=\dfrac{1-x}{2}$의 양변을 제곱하면

$a=\dfrac{(1-x)^2}{4}=\dfrac{x^2-2x+1}{4}$이므로

$a+x=\dfrac{x^2+2x+1}{4}=\dfrac{(x+1)^2}{4}\geq 0$,

$a-x+2=\dfrac{x^2-6x+9}{4}=\dfrac{(x-3)^2}{4}\geq 0$

$\therefore \sqrt{a+x}-\sqrt{a-x+2}$

$$=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4}}-\sqrt{\frac{(x-3)^2}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}(|x+1|-|x-3|)$$
$$=\frac{1}{2}\{x+1+(x-3)\}\ (\because -1\leq x\leq 1)$$
$$=\frac{1}{2}(2x-2)=x-1$$

이때 $-1\leq x\leq 1$에서 $-2\leq x-1\leq 0$이므로 주어진 식의 최댓값은 0이다.

답 0

2 무리함수

기본+필수연습

본문 pp.328~335

08 풀이 참조 **09** 5

10 ㄱ, ㄴ, ㄹ **11** $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}\ (x\geq 1)$

12 -5 **13** 5 **14** 10 **15** 2

16 풀이 참조 **17** (1) -1 (2) 5 **18** $\frac{86}{5}$

19 (1) $-\frac{1}{8}<k\leq 0$ (2) $k=-\frac{1}{8}$ 또는 $k>0$

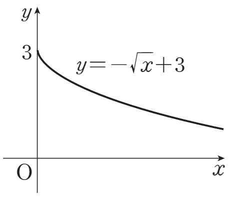
(3) $k<-\frac{1}{8}$

20 1 **21** 130 **22** $\sqrt{2}$ **23** 5

24 (1) 21 (2) 23 **25** 4

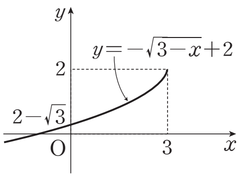
08

(1) 함수 $y=-\sqrt{x}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프인 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 3\}$이다.

(2) $y=-\sqrt{3-x}+2=-\sqrt{-(x-3)}+2$이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프인 함수 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x|x\leq 3\}$, 치역은 $\{y|y\leq 2\}$이다.

답 풀이 참조

09

무리함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y=a\sqrt{x-2}-4$

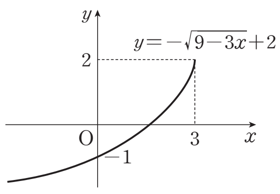
이때 이 함수의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=a\sqrt{1}-4 \qquad \therefore a=5$

답 5

10

$y=-\sqrt{9-3x}+2=-\sqrt{-3(x-3)}+2$이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\sqrt{9-3x}\ge0$에서 $-\sqrt{9-3x}+2\le2$이므로 치역은 $\{y\mid y\le2\}$이다. (참)

ㄴ. $x=0$을 $y=-\sqrt{9-3x}+2$에 대입하면

$y=-\sqrt{9}+2=-3+2=-1$

즉, y축과의 교점의 y좌표는 -1이다. (참)

ㄷ. 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄹ. 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

11

함수 $y=\sqrt{2-3x}+1$의 치역은 $\{y\mid y\ge1\}$이다.

$y=\sqrt{2-3x}+1$을 x에 대하여 풀면

$y-1=\sqrt{2-3x}$

$(y-1)^2=2-3x,\ 3x=2-(y-1)^2$

$\therefore x=-\frac{1}{3}(y-1)^2+\frac{2}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}\ (x\ge1)$

답 $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}\ (x\ge1)$

12

함수 $y=\sqrt{2x+7}-4$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{-2x+7}-4 \qquad \therefore y=-\sqrt{-2x+7}+4$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=-\sqrt{-2(x-m)+7}+4+n$

$\therefore y=-\sqrt{-2x+2m+7}+4+n$

이 함수의 그래프가 $y=-\sqrt{-2x+3}+1$의 그래프와 일치하므로

$2m+7=3,\ 4+n=1 \qquad \therefore m=-2,\ n=-3$

$\therefore m+n=-2+(-3)=-5$

답 -5

13

함수 $y=\sqrt{6-3x}-1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{6+3x}-1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{3(x-a)+6}-1+b$

$\ =\sqrt{3(x-a+2)}+b-1$

이 함수의 정의역은 $\{x\mid x\ge a-2\}$이고, 치역은 $\{y\mid y\ge b-1\}$이므로

$a-2=1,\ b-1=1 \qquad \therefore a=3,\ b=2$

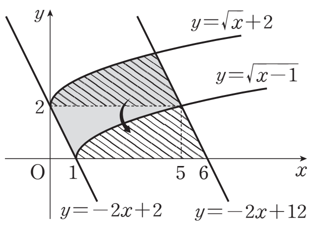
$\therefore a+b=3+2=5$

답 5

14

함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{x}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

두 함수 $y=\sqrt{x-1}$, $y=\sqrt{x}+2$의 그래프와 두 직선 $y=-2x+2$, $y=-2x+12$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 밑변의 길이, 높이가 각각 5, 2인 평행사변형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$5\times2=10$

답 10

15

주어진 함수의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{-a}-2$, $\sqrt{-a}=2$

$-a=4$ $\quad\therefore a=-4$

따라서 $f(x)=\sqrt{-4(x-1)}-2$이므로

$f(-3)=\sqrt{16}-2=2$

답 2

16

함수 $y=-\dfrac{4}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이

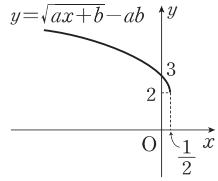
$x=2$, $y=1$이므로

$a=-2$, $b=1$

$\therefore y=\sqrt{ax+b}-ab=\sqrt{-2x+1}+2$

$\quad=\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+2$

따라서 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}-ab$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

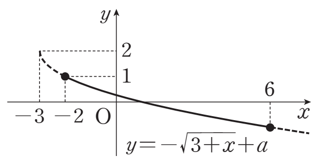


답 풀이 참조

17

(1) 함수 $y=-\sqrt{3+x}+a$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-2\leq x\leq 6$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 함수는



$x=-2$일 때, 최댓값 1을 가지므로

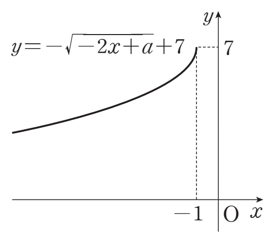
$1=-\sqrt{3+(-2)}+a$, $1=-1+a$ $\qquad\therefore a=2$

따라서 주어진 함수는 $y=-\sqrt{3+x}+2$이고, 이 함수는 $x=6$일 때, 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$-\sqrt{3+6}+2=-\sqrt{9}+2=-1$

(2) 함수 $y=-\sqrt{-2x+a}+7=-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}+7$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이다.

이때 $x=-1$에서 최댓값을 가지므로 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $x=\dfrac{a}{2}=-1$에서 최댓값 7을 가지므로

$a=-2$, $M=7$

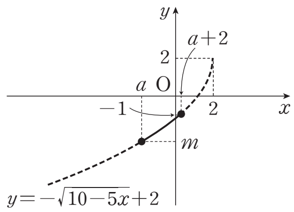
$\therefore a+M=-2+7=5$

답 (1) -1 (2) 5

18

함수 $y=-\sqrt{10-5x}+2=-\sqrt{-5(x-2)}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 $a\le x\le a+2$에서 $x=a+2$일 때 최댓값 -1을 갖고, $x=a$일 때 최솟값 m을 갖는다.



즉, $-1=-\sqrt{10-5(a+2)}+2$에서

$\sqrt{-5a}=3$의 양변을 제곱하면

$-5a=9 \qquad \therefore a=-\dfrac{9}{5}$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \,\middle|\, -\dfrac{9}{5}\le x\le \dfrac{1}{5}\right\}$이고,

$x=-\dfrac{9}{5}$일 때, 최솟값 m을 가지므로

$m=-\sqrt{10-5\times\left(-\dfrac{9}{5}\right)}+2=-\sqrt{19}+2$

$\therefore a+(m-2)^2=-\dfrac{9}{5}+(-\sqrt{19}+2-2)^2$

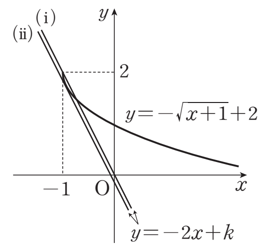
$=-\dfrac{9}{5}+19=\dfrac{86}{5}$

답 $\dfrac{86}{5}$

19

함수 $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-2x+k$는 기울기가 -2이고 y절편이 k이다.

이때 함수 $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$의 위치 관계는 다음 그림의 두 직선 (i), (ii)를 기준으로 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y=-2x+k$가 점 $(-1, 2)$를 지날 때,

$2=2+k \qquad \therefore k=0$

(ii) 직선 $y=-2x+k$가 함수 $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프에 접할 때,

$-2x+k=-\sqrt{x+1}+2$

$2x-k+2=\sqrt{x+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $(2x-k+2)^2=x+1$

$4x^2+(8-4k)x+k^2-4k+4=x+1$

$\therefore 4x^2+(7-4k)x+k^2-4k+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(7-4k)^2-4\times4\times(k^2-4k+3)=0$

$8k+1=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{1}{8}$

(1) 직선 $y=-2x+k$가 직선 (i)과 일치하거나 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-\dfrac{1}{8}<k\le 0$

(2) 직선 $y=-2x+k$가 직선 (i)보다 위쪽에 있거나 직선 (ii)와 일치해야 하므로

$k=-\dfrac{1}{8}$ 또는 $k>0$

(3) 직선 $y=-2x+k$가 직선 (ii)보다 아래쪽에 있어야 하므로

$k<-\dfrac{1}{8}$

답 (1) $-\dfrac{1}{8}<k\le 0$

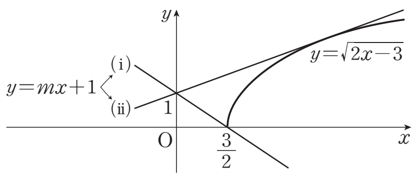
(2) $k=-\dfrac{1}{8}$ 또는 $k>0$

(3) $k<-\dfrac{1}{8}$

20

함수 $y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx+1$은 기울기가 m이고 y절편이 1이다.

이때 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$의 위치 관계는 다음 그림의 두 직선 (i), (ii)를 기준으로 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y=mx+1$이 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$을 지날 때,

$0=\frac{3}{2}m+1 \qquad \therefore m=-\frac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 함수 $y=\sqrt{2x-3}$의 그래프에 접할 때,

그림에서 직선의 기울기가 양수이므로 $m>0$

$mx+1=\sqrt{2x-3}$의 양변을 제곱하면

$(mx+1)^2=2x-3$

$m^2x^2+2mx+1=2x-3$

$\therefore m^2x^2+2(m-1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4m^2=0$

$3m^2+2m-1=0$, $(3m-1)(m+1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{3}$ ($\because m>0$)

두 함수의 그래프가 만나려면 직선 $y=mx+1$은 직선 (i) 또는 직선 (ii)와 일치하거나 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-\frac{2}{3}\le m\le\frac{1}{3}$

따라서 실수 m의 최댓값은 $a=\frac{1}{3}$, 최솟값은 $b=-\frac{2}{3}$이므로

$a-b=\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

답 1

21

$f(x)=\sqrt{a(x-2)+b}$에서

$f(5)=10$, $f(10)=5$ ($\because f^{-1}(5)=10$)이므로

$\sqrt{3a+b}=10$, $\sqrt{8a+b}=5$

위의 식의 양변을 각각 제곱하면

$3a+b=100$, $8a+b=25$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-15$, $b=145$

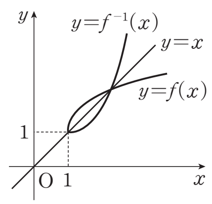
$\therefore a+b=-15+145=130$

답 130

22

함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위에 존재하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x-1}+1=x$에서 $\sqrt{x-1}=x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-1=(x-1)^2$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 교점 P, Q의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

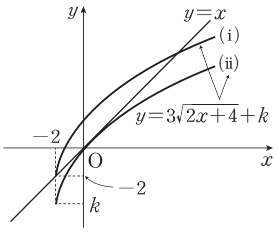
답 $\sqrt{2}$

23

함수 $f(x)=3\sqrt{2x+4}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 무리함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉, 함수 $y=3\sqrt{2x+4}+k$의 그래프가 곡선 (i)과 일치하거나 두 곡선 (i)과 (ii) 사이에 존재해야 한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



(i) 함수 $y=3\sqrt{2x+4}+k$의 그래프가 점 $(-2,\ -2)$를 지날 때,

$-2=3\sqrt{2\times(-2)+4}+k \qquad \therefore\ k=-2$

(ii) 함수 $y=3\sqrt{2x+4}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 접할 때,

$3\sqrt{2x+4}+k=x$에서 $3\sqrt{2x+4}=x-k$

위의 식의 양변을 제곱하면 $9(2x+4)=(x-k)^2$

$\therefore\ x^2-2(k+9)x+k^2-36=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+9)\}^2-(k^2-36)=0$

$18k+117=0 \qquad \therefore\ k=-\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-\dfrac{13}{2}<k\leq-2$

따라서 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$의 5개이다.

답 5

24

(1) 정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수 $f(x)=\sqrt{3x+1}$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

이때 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키는 함수 g는 함수 f의 역함수이다.

$(g\circ g)(5)=g(g(5))$에서

$g(5)=a$라 하면 $f(a)=5$

즉, $\sqrt{3a+1}=5$에서 $3a+1=25 \qquad \therefore\ a=8$

$\therefore\ g(5)=8$

$g(8)=b$라 하면 $f(b)=8$

즉, $\sqrt{3b+1}=8$에서 $3b+1=64 \qquad \therefore\ b=21$

$\therefore\ g(8)=21$

$\therefore\ (g\circ g)(5)=g(g(5))=g(8)=21$

(2) $(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$f(3)=\dfrac{2\times3+1}{3-2}=7$이므로

$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(7)$

이때 $g^{-1}(7)=a$라 하면 $g(a)=7$

즉, $\sqrt{2a+3}=7$에서 $2a+3=49 \qquad \therefore\ a=23$

$\therefore\ g^{-1}(7)=23$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(7)=23$

답 (1) 21 (2) 23

25

함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x} & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right)\\ 1-\sqrt{2x+1} & \left(x\geq-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$에 대하여

$(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=40$에서 $(f\circ f)^{-1}(a)=40$

$\therefore\ (f\circ f)(40)=a$

$f(40)=1-\sqrt{2\times40+1}=1-9=-8,$

$f(-8)=\sqrt{-2\times(-8)}=4$

이므로 $(f\circ f)(40)=f(-8)=4$

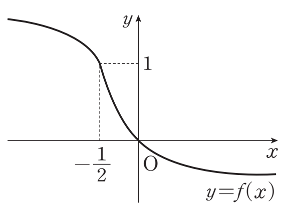
$\therefore\ a=4$

답 4

보충 설명

함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-2x} & \left(x<-\dfrac{1}{2}\right)\\ 1-\sqrt{2x+1} & \left(x\geq-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$의 그래프는

다음 그림과 같고 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.



함수 $f(x)$는 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $f\circ f$도 일대일대응이다.

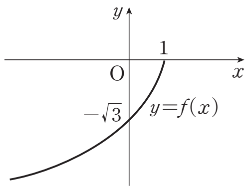
즉, 함수 $f\circ f$도 역함수가 존재한다.

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.336~337

08 ③	**09** -24	**10** $-2\le k\le 2$	
11 0	**12** 풀이 참조	**13** 17	**14** 16
15 3	**16** 3	**17** 4	**18** $\frac{1}{8}$
19 5			

08

$f(x)=-\sqrt{3-3x}=-\sqrt{-3(x-1)}$이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $3-3x\ge 0$에서 $x\le 1$이므로 정의역은 $\{x\,|\,x\le 1\}$이고,
$\sqrt{3-3x}\ge 0$에서 $-\sqrt{3-3x}\le 0$이므로 치역은
$\{y\,|\,y\le 0\}$이다. (참)

ㄴ. 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=-\frac{1}{3}x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=-\frac{1}{3}y^2\ (x\le 0,\ y\le 0)\qquad \therefore\ y^2=-3x$

이때 $y=\pm\sqrt{-3x}$이고 $y\le 0$이므로

$y=-\sqrt{-3x}$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$y=-\sqrt{-3(x-1)}=-\sqrt{3-3x}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

09

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-3)+b}+c-1$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\sqrt{a(x-3)+b}+c-1$

$\therefore\ y=-\sqrt{ax-3a+b}-c+1$

이 함수의 그래프가 $y=-\sqrt{-3x+7}+5$의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ -3a+b=7,\ -c+1=5$

따라서 $a=-3,\ b=-2,\ c=-4$이므로

$abc=(-3)\times(-2)\times(-4)=-24$

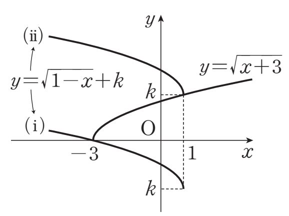
답 -24

10

함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고,

함수 $y=\sqrt{1-x}+k=\sqrt{-(x-1)}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로

두 함수 $y=\sqrt{x+3}$, $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나려면 다음 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 곡선 (i) 또는 곡선 (ii)와 일치하거나 두 곡선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때,

$0=\sqrt{1-(-3)}+k$

$0=2+k$

$\therefore\ k=-2$

(ii) 점 $(1,\ k)$가 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프 위의 점일 때,

$k=\sqrt{1+3}=2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-2\le k\le 2$

답 $-2\le k\le 2$

본문 p.336

11

함수 $y=\sqrt{2-x}+3=\sqrt{-(x-2)}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또한, 이차함수 $y=-(x-a)^2+7$의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(a, 7)$인 포물선이다.

함수 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 $x=2$에서의 함숫값이 서로 같아야 하므로 이차함수 $y=-(x-a)^2+7$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나야 한다.

즉, $3=-(2-a)^2+7$에서

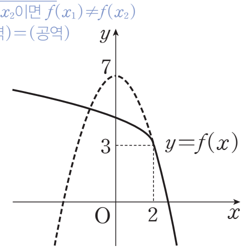
$(2-a)^2=4$, $a^2-4a=0$

$a(a-4)=0$ $\quad\therefore a=0$ 또는 $a=4$

(i) $a=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

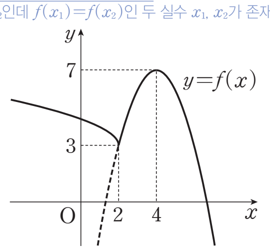
(i) $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
(ii) (치역)=(공역)



(ii) $a=4$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

$x_1 \neq x_2$인데 $f(x_1)=f(x_2)$인 두 실수 x_1, x_2가 존재한다.



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 0이다.

답 0

12

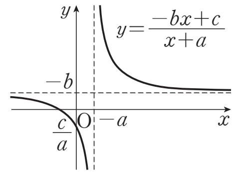
$$y=\frac{-bx+c}{x+a}=\frac{-b(x+a)+c+ab}{x+a}=\frac{c+ab}{x+a}-b$$

즉, 함수 $y=\frac{-bx+c}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=-b$이므로

$-a>0$, $-b>0$

$\therefore a<0$, $b<0$



또한, 함수 $y=\frac{-bx+c}{x+a}$의 그래프의 y절편이 음수이므로

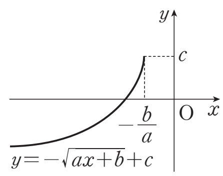
$\frac{c}{a}<0$ $\quad\therefore c>0$ ($\because a<0$)

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

에서 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는

함수 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

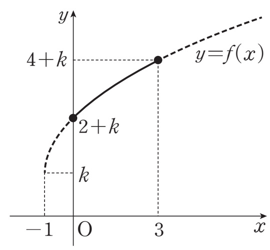
이때 $a<0$, $-\frac{b}{a}<0$, $c>0$이므로 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

13

$f(x)=2\sqrt{x+1}+k$라 하면 $0\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$는

$x=3$에서 최댓값 $M=f(3)=4+k$를 갖고,

$x=0$에서 최솟값 $m=f(0)=2+k$를 갖는다.

$M+m=40$에서

$(4+k)+(2+k)=40$, $2k=34$

$\therefore k=17$

답 17

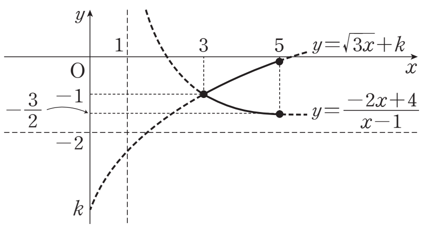
14

$$y=\frac{-2x+4}{x-1}=\frac{-2(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}-2$$

즉, 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-2$이고, $3\le x\le 5$에서 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$의

그래프는 다음 그림과 같다.



$3\le x\le 5$에서 두 함수 $y=\frac{-2x+4}{x-1}$와 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 한 점에서 만나면서 k의 값이 최대이려면 위의 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 점 $(3,\ -1)$을 지나야 한다.

즉, $-1=\sqrt{3\times3}+k$에서 $-1=3+k$

$\therefore\ k=-4$

따라서 $M=-4$이므로 $M^2=16$이다.

답 16

15

무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 2이므로 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프는 점 $(2,\ 2)$를 지난다.

즉, $\sqrt{2a}=2$에서 $2a=4$ $\quad\therefore\ a=2$

함수 $y=\sqrt{ax+b}$, 즉 $y=\sqrt{2x+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접하므로

$\sqrt{2x+b}=x$의 양변을 제곱하면

$2x+b=x^2$, $x^2-2x-b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

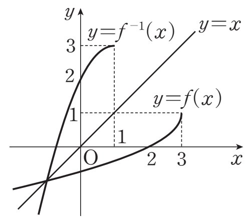
$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-b)=0$, $1+b=0$ $\quad\therefore\ b=-1$

$\therefore\ a-b=2-(-1)=3$

답 3

16

무리함수 $f(x)=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$f(x)=-\sqrt{a(x-3)}+1\ (a<0)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

무리함수의 그래프의 시작점의 좌표가 (3, 1)이다.

이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1$, $\sqrt{-a}=1$ $\quad\therefore\ a=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-\sqrt{-(x-3)}+1=-\sqrt{-x+3}+1$

따라서 $b=3$, $c=1$이므로

$a+b+c=-1+3+1=3$

답 3

다른 풀이

주어진 그래프로부터 $k<0$인 상수 k에 대하여

$f^{-1}(x)=k(x-1)^2+3\ (x\le1)$

이라 할 수 있다.

함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=k+3$ $\quad\therefore\ k=-1$

$\therefore\ f^{-1}(x)=-(x-1)^2+3$

이때 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 함수 $f(x)$는 함수 $f^{-1}(x)$의 역함수이다.

$y=-(x-1)^2+3$에서

$(x-1)^2=-y+3$

$x-1=-\sqrt{-y+3}$ $(\because\ x\le1)$

$\therefore\ x=-\sqrt{-y+3}+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\sqrt{-x+3}+1\ (x\le3)$

$\therefore\ f(x)=-\sqrt{-x+3}+1\ (x\le3)$

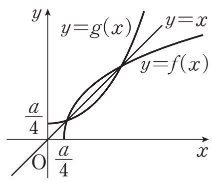
즉, $a=-1$, $b=3$, $c=1$이므로

$a+b+c=-1+3+1=3$

17

방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $f(x)=\sqrt{4x-a}$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위에 존재하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



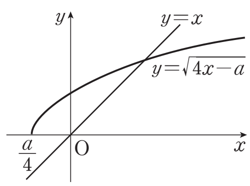
즉, $x=\sqrt{4x-a}$에서 $x^2=4x-a$

$\therefore\ x^2-4x+a=0$ ······㉠

이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-a>0 \quad \therefore\ a<4$ ······㉡

이때 오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{a}{4}<0$이면 함수 $y=\sqrt{4x-a}$의 그래프와 직선 $y=x$는 한 점에서만 만나므로



$a\ge0$ ······㉢

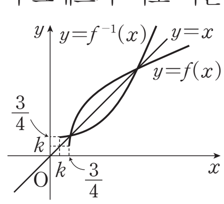
따라서 ㉡, ㉢에서 $0\le a<4$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 4

18

함수 $f(x)=\sqrt{4x-3}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다.



즉, 구하는 두 교점의 좌표를

직선 $y=x$ 위의 점

(α, α), (β, β)라 할 수 있다. (가)

$\sqrt{4x-3}+k=x$에서 $\sqrt{4x-3}=x-k$

위의 식의 양변을 제곱하면 $4x-3=x^2-2kx+k^2$

$\therefore\ x^2-2(k+2)x+k^2+3=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+2)$, $\alpha\beta=k^2+3$ ······㉠ (나)

또한, 두 교점 (α, α), (β, β) 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=6$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$6=\{2(k+2)\}^2-4(k^2+3)$ ($\because$ ㉠) (다)

$4(k^2+4k+4)-4k^2-12-6=0$

$16k-2=0$, $16k=2 \quad \therefore\ k=\dfrac{1}{8}$ (라)

답 $\dfrac{1}{8}$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 교점의 좌표를 (α, α), (β, β)로 나타낸 경우	20%
(나)	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 k에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(다)	$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$를 이용하여 k에 대한 방정식을 구한 경우	30%
(라)	k의 값을 구한 경우	20%

19

$x\ge-1$에서 $(f^{-1}\circ g)(x)=5x$, 즉 $f^{-1}(g(x))=5x$이므로

$g(x)=f(5x)$

$$\therefore\ g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{15}{2}\right)=\sqrt{2\times\frac{15}{2}+10}=\sqrt{25}=5$$

답 5

STEP 2 **개념 마무리** 본문 p.338

1 $(\sqrt{2}-1)^n$ **2** $27\sqrt{3}$ **3** ③ **4** $0<k<\frac{1}{2}$

5 $\sqrt{2}$ **6** 2

1

$x=\left\{\frac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right\}^2$에서

$\sqrt{2}+1=a$, $\sqrt{2}-1=b$로 놓으면

$ab=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=2-1=1$이므로

$$x-1=\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2-1$$
$$=\frac{a^{2n}+b^{2n}+2(ab)^n}{4}-1$$
$$=\frac{a^{2n}+b^{2n}+2}{4}-1$$
$$=\frac{a^{2n}+b^{2n}-2}{4}$$
$$=\frac{a^{2n}+b^{2n}-2(ab)^n}{4}=\left(\frac{a^n-b^n}{2}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{a^n-b^n}{2}\right)^2}$$
$$=\left|\frac{a^n+b^n}{2}\right|-\left|\frac{a^n-b^n}{2}\right|$$
$$=\frac{a^n+b^n}{2}-\left(\frac{a^n-b^n}{2}\right)$$ ← $a>b>0$이므로 $a^n-b^n>0$
$$=\frac{a^n+b^n-a^n+b^n}{2}$$
$$=b^n=(\sqrt{2}-1)^n$$

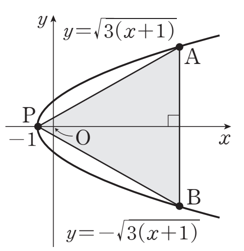
답 $(\sqrt{2}-1)^n$

2

무리함수 $y=\sqrt{k(x+1)}$의 그래프가 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{3k}$ $\quad\therefore k=3$

즉, 두 함수 $y=\sqrt{3(x+1)}$, $y=-\sqrt{3(x+1)}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x축에 대하여 대칭이다.



또한, x축 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$에 대하여 $\triangle\mathrm{APB}$가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다.

이때 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>-1,\ b>0)$라 하면 점 B의 좌표는 $(a,\ -b)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$

$(a+1)^2+b^2=4b^2$ $\quad\therefore (a+1)^2=3b^2$ ⋯⋯㉠

한편, 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 함수 $y=\sqrt{3(x+1)}$의 그래프 위에 있으므로

$b=\sqrt{3(a+1)}$ $\quad\therefore b^2=3(a+1)$ ⋯⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(a+1)^2=9(a+1)$

$a^2-7a-8=0$, $(a+1)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>-1$)

이것을 ㉡에 대입하면

$b^2=3\times(8+1)=27$ $\quad\therefore b=3\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2b=2\times3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 APB의 한 변의 길이가 $6\sqrt{3}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}$$

답 $27\sqrt{3}$

다른 풀이

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle\mathrm{APB}$는 정삼각형이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PH}}$ ⋯⋯㉢

이때 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a,\ \sqrt{3(a+1)})$, $(a,\ -\sqrt{3(a+1)})$ $(a>-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3(a+1)}$, $\underbrace{\overline{\mathrm{PH}}=a+1}_{\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PO}}+\overline{\mathrm{OH}}=1+a}$이므로 ㉢에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3(a+1)}=a+1$, $3\sqrt{a+1}=a+1$

$a^2-7a-8=0$, $(a+1)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>-1$)

따라서 정삼각형 APB의 한 변의 길이가

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3\times(8+1)}=6\sqrt{3}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{3})^2=27\sqrt{3}$$

보충 설명

점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$은 x축 위의 점이면서 두 함수 $y=\sqrt{3(x+1)}$, $y=-\sqrt{3(x+1)}$의 그래프의 교점이다. 이때 두 그래프가 x축에 대하여 대칭이므로 $\triangle\mathrm{ABP}$가 정삼각형이려면 두 점 A, B도 x축에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ b)$이면 $\mathrm{B}(a,\ -b)$이다.

3

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$이므로

$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

이차함수 ㉠의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=\frac{1}{4}a+\frac{9}{2},\ \frac{1}{4}a=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ a=-2$

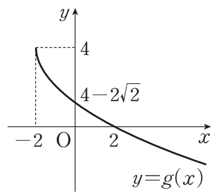
즉, $f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}=-2x^2+2x+4$이므로

$b=2,\ c=4$

$\therefore\ g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$

ㄱ. 함수 $g(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq -2\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\leq 4\}$이다. (참)

ㄴ. $g(0)=-2\sqrt{2}+4>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)



ㄷ. 방정식 $f(x)=0$에서

$-2x^2+2x+4=0$

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2\ (\because\ \alpha<\beta)$

즉, $-1\leq x\leq 2$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은

$g(-1)=-2+4=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

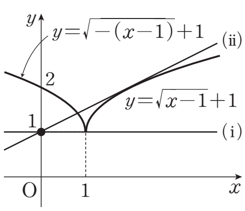
4

$y=\sqrt{|x-1|}+1$에서

$x\geq 1$일 때 $y=\sqrt{x-1}+1$,

$x<1$일 때 $y=\sqrt{-(x-1)}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=kx+1$은 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 직선 $y=kx+1$이 함수 $y=\sqrt{|x-1|}+1$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때,

$k=0$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 그래프와 접할 때,

$\sqrt{x-1}+1=kx+1$에서 $\sqrt{x-1}=kx$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x-1=k^2x^2$ $\quad\therefore\ k^2x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4k^2=0,\ (1+2k)(1-2k)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ k>0)$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

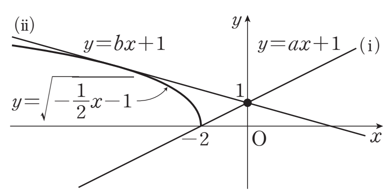
$0<k<\frac{1}{2}$

답 $0<k<\frac{1}{2}$

5

함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}=\sqrt{-\frac{1}{2}(x+2)}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

한편, 두 직선 $y=ax+1,\ y=bx+1$은 항상 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $x\leq -2$에서 부등식 $ax+1\leq\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}\leq bx+1$이 항상 성립하려면 함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}$의 그래프와 두 직선 $y=ax+1,\ y=bx+1$은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때,

기울기 a가 최소이므로

$0=-2a+1,\ a=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ m=\frac{1}{2}$

(가)

(ii) 직선 $y=bx+1$이 함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}$의 그래프와 접할 때,

기울기 b가 최대이므로 $bx+1=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}$의 양변을 제곱하면

$b^2x^2+2bx+1=-\frac{1}{2}x-1$

$b^2x^2+\left(2b+\frac{1}{2}\right)x+2=0$

$\therefore 2b^2x^2+(4b+1)x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4b+1)^2-4\times 2b^2\times 4=0$

$16b^2+8b+1-32b^2=0,\ 16b^2-8b-1=0$

$b=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-16\times(-1)}}{16}$

$=\frac{4\pm 4\sqrt{2}}{16}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{4}$

$\therefore b=\frac{1-\sqrt{2}}{4}$ $(\because b<0)$ $\qquad \therefore M=\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

(나)

(i), (ii)에서

$2m-4M=2\times\frac{1}{2}-4\times\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

$=1-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

(다)

답 $\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	a의 최솟값 m을 구한 경우	40%
(나)	b의 최댓값 M을 구한 경우	40%
(다)	$2m-4M$의 값을 구한 경우	20%

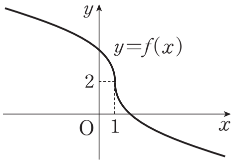
6

함수 $y=\sqrt{-3x+a}+2=\sqrt{-3\left(x-\frac{a}{3}\right)}+2$의 그래프는

함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또한, 함수 $y=-\sqrt{3x-3}+2=-\sqrt{3(x-1)}+2$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $y=\sqrt{-3\left(x-\frac{a}{3}\right)}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 일치해야 하므로

$\frac{a}{3}=1$에서 $a=3$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\sqrt{-3x+3}+2 & (x<1)\\ -\sqrt{3x-3}+2 & (x\ge 1)\end{cases}$

이때 $x<1$에서 $f(x)>2$, $x\ge 1$에서 $f(x)\le 2$이다.

$f^{-1}(-1)=p$라 하면 $f(p)=-1$

$f(p)<2$이므로 $p\ge 1$

즉, $-\sqrt{3p-3}+2=-1$에서

$p\ge 1$이므로 $f(x)=-\sqrt{3x-3}+2$에 $x=p$를 대입

$\sqrt{3p-3}=3,\ 3p-3=9$

$3p=12 \qquad \therefore p=4$

$f^{-1}(5)=q$라 하면 $f(q)=5$

$f(q)>2$이므로 $q<1$

즉, $\sqrt{-3q+3}+2=5$에서

$q<1$이므로 $f(x)=\sqrt{-3x+3}+2$에 $x=q$를 대입

$\sqrt{-3q+3}=3,\ -3q+3=9$

$-3q=6 \qquad \therefore q=-2$

$\therefore f^{-1}(-1)+f^{-1}(5)=4+(-2)=2$

답 2

보충 설명

다음과 같은 방법으로 a의 값을 구할 수도 있다.

$f(1)=-\sqrt{3\times 1-3}+2=2$이므로 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 함수 $y=\sqrt{-3x+a}+2$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나야 한다.

즉, $2=\sqrt{-3+a}+2$이므로 $a=3$