THE 개념 블랙라벨

정답과 해설

BLACKLABEL

I. 다항식

01. 다항식의 연산

1 다항식의 사칙연산

기본 + 필수연습 본문 pp.014~019

01 (1) 차수 : 4, 상수항 : y^3+4
(2) 차수 : 3, 상수항 : $3x^4+4$
02 (1) $4y^2x^3+(3y^2+1)x-y^2-2y+1$
(2) $x+1-2y+(4x^3+3x-1)y^2$
03 (1) $A+B=3x^3-6x^2-4x-3$, $A-B=-x^3+4x+7$
(2) $A+B=4x^2+xy+3y^2$, $A-B=-2x^2-3xy+5y^2$
04 (1) $-15x^3+11x^2-2x$
(2) $6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$
05 (1) 몫 : x^2-x+2, 나머지 : -2
(2) 몫 : $4x+1$, 나머지 : $4x+1$
06 x^3-2x^2+3
07 (1) $-5x^2-7x+10$ (2) $3x^2-21x+8$
08 (1) x^2-2xy (2) x^2+4y^2
09 x^2+3x-2 **10** (1) 12 (2) 5
11 -42 **12** 6 **13** $2x-1$ **14** 11
15 4

01

(1) x에 대한 최고차항은 $3x^4$이므로 차수는 4이고, 상수항은 y^3+4이다.

(2) y에 대한 최고차항은 y^3이므로 차수는 3이고, 상수항은 $3x^4+4$이다.

답 (1) 차수 : 4, 상수항 : y^3+4
(2) 차수 : 3, 상수항 : $3x^4+4$

02

(1) 다항식 $4x^3y^2+3xy^2-y^2+x-2y+1$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$4y^2x^3+(3y^2+1)x-y^2-2y+1$

(2) 다항식 $4x^3y^2+3xy^2-y^2+x-2y+1$을 y에 대한 오름차순으로 정리하면
$x+1-2y+(4x^3+3x-1)y^2$

답 (1) $4y^2x^3+(3y^2+1)x-y^2-2y+1$
(2) $x+1-2y+(4x^3+3x-1)y^2$

03

(1) $A+B=(x^3-3x^2+2)+(2x^3-3x^2-4x-5)$
$=(1+2)x^3+(-3-3)x^2-4x+(2-5)$
$=3x^3-6x^2-4x-3$
$A-B=(x^3-3x^2+2)-(2x^3-3x^2-4x-5)$
$=(1-2)x^3+(-3+3)x^2+4x+(2+5)$
$=-x^3+4x+7$

(2) $A+B=(x^2-xy+4y^2)+(3x^2+2xy-y^2)$
$=(1+3)x^2+(-1+2)xy+(4-1)y^2$
$=4x^2+xy+3y^2$
$A-B=(x^2-xy+4y^2)-(3x^2+2xy-y^2)$
$=(1-3)x^2+(-1-2)xy+(4+1)y^2$
$=-2x^2-3xy+5y^2$

답 (1) $A+B=3x^3-6x^2-4x-3$, $A-B=-x^3+4x+7$
(2) $A+B=4x^2+xy+3y^2$, $A-B=-2x^2-3xy+5y^2$

04

(1) $(5x^2-2x)(-3x+1)$
$=5x^2(-3x+1)-2x(-3x+1)$
$=-15x^3+5x^2+6x^2-2x$
$=-15x^3+11x^2-2x$

(2) $(2x^2-3xy+4y^2)(3x+2y)$
$=2x^2(3x+2y)-3xy(3x+2y)+4y^2(3x+2y)$
$=6x^3+4x^2y-9x^2y-6xy^2+12xy^2+8y^3$
$=6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$

답 (1) $-15x^3+11x^2-2x$ (2) $6x^3-5x^2y+6xy^2+8y^3$

05

(1)

$$
\begin{array}{r}
x^2-\ x+2 \\
3x+1\,\overline{)\,3x^3-2x^2+5x} \\
\underline{3x^3+\ x^2\qquad} \\
-3x^2+5x \\
\underline{-3x^2-\ x} \\
6x \\
\underline{6x+2} \\
-2
\end{array}
$$

← 나누어지는 식의 상수항은 0으로 생각한다.

따라서 $3x^3-2x^2+5x$를 $3x+1$로 나눈 몫은 x^2-x+2이고 나머지는 -2이다.

(2)

$$
\begin{array}{r}
4x+1 \\
x^2+x-2\,\overline{)\,4x^3+5x^2-3x-1} \\
\underline{4x^3+4x^2-8x\qquad} \\
x^2+5x-1 \\
\underline{x^2+\ x-2} \\
4x+1
\end{array}
$$

따라서 $4x^3+5x^2-3x-1$을 x^2+x-2로 나눈 몫은 $4x+1$이고 나머지는 $4x+1$이다.

답 (1) 몫 : x^2-x+2, 나머지 : -2
(2) 몫 : $4x+1$, 나머지 : $4x+1$

06

다항식 $f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫이 $x-1$, 나머지가 $-2x+4$이므로

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x^2-x+1)(x-1)-2x+4 \\
&=(x^3-x^2-x^2+x+x-1)-2x+4 \\
&=x^3-2x^2+3
\end{aligned}
$$

답 x^3-2x^2+3

07

(1) $A-3B=(x^2-4x+1)-3(2x^2+x-3)$
$=x^2-4x+1-6x^2-3x+9$
$=-5x^2-7x+10$

(2) $2A-(B-3A)=2A-B+3A$
$=5A-B$
$=5(x^2-4x+1)-(2x^2+x-3)$
$=5x^2-20x+5-2x^2-x+3$
$=3x^2-21x+8$

답 (1) $-5x^2-7x+10$ (2) $3x^2-21x+8$

08

(1) $A-(B-C)$
$=A-B+C$
$=(x^2-xy+2y^2)-(x^2+xy+y^2)+(x^2-y^2)$
$=x^2-2xy$

(2) $(A+2B)-(B+C)$
$=A+B-C$
$=(x^2-xy+2y^2)+(x^2+xy+y^2)-(x^2-y^2)$
$=x^2+4y^2$

답 (1) x^2-2xy (2) x^2+4y^2

09

$A-B=5x^2-3x+8$ ……㉠
$A+2B=-x^2+6x-7$ ……㉡
㉡$-$㉠을 하면 $3B=-6x^2+9x-15$
$\therefore B=-2x^2+3x-5$
이것을 ㉠에 대입하면
$A-(-2x^2+3x-5)=5x^2-3x+8$
$\therefore A=5x^2-3x+8+(-2x^2+3x-5)$
$=3x^2+3$
$\therefore A+B=(3x^2+3)+(-2x^2+3x-5)$
$=x^2+3x-2$

답 x^2+3x-2

다른 풀이

A, B를 각각 구하지 않고 $A+B$를 다음과 같이 구할 수 있다.
$A+B=m(A-B)+n(A+2B)$라 하면
$A+B=(m+n)A+(-m+2n)B$이므로
$m+n=1$, $-m+2n=1$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
\therefore A+B&=\frac{1}{3}(A-B)+\frac{2}{3}(A+2B) \\
&=\frac{1}{3}(5x^2-3x+8)+\frac{2}{3}(-x^2+6x-7) \\
&=\frac{5}{3}x^2-x+\frac{8}{3}-\frac{2}{3}x^2+4x-\frac{14}{3} \\
&=x^2+3x-2
\end{aligned}
$$

10

(1) $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)(4x^3-3x^2+2x-1)$의 전개식에서 x^3항이 나오는 경우는

$2x^3\times(-1)$, $3x^2\times 2x$, $4x\times(-3x^2)$, $5\times 4x^3$의 네 가지이다. 즉, x^3항은

$-2x^3+6x^3-12x^3+20x^3=12x^3$

따라서 x^3의 계수는 12이다.

(2) $(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)(4x^3-3x^2+2x-1)$의 전개식에서 x^6항이 나오는 경우는

$x^4\times(-3x^2)$, $2x^3\times 4x^3$의 두 가지이다. 즉, x^6항은

$-3x^6+8x^6=5x^6$

따라서 x^6의 계수는 5이다.

답 (1) 12 (2) 5

11

$(x-3y-2)(x+ay+b)$에서 xy항이 나오는 경우는

$x\times ay$, $(-3y)\times x$의 두 가지이다. 즉, xy항은

$axy-3xy=(a-3)xy$이고, xy의 계수는 4이므로

$a-3=4$ $\quad\therefore a=7$

또한, y항이 나오는 경우는

$(-3y)\times b$, $(-2)\times ay$의 두 가지이다. 즉, y항은

$-3by-2ay=(-2a-3b)y$이고, y의 계수는 4이므로

$-2a-3b=4$

$\therefore b=-6$ ($\because a=7$)

$\therefore ab=7\times(-6)=-42$

답 -42

다른 풀이

주어진 식을 전개하면 다음과 같다.

$(x-3y-2)(x+ay+b)$

$=x(x+ay+b)-3y(x+ay+b)-2(x+ay+b)$

$=x^2+axy+bx-3xy-3ay^2-3by-2x-2ay-2b$

$=x^2+(a-3)xy+(b-2)x-3ay^2+(-2a-3b)y-2b$

이때 xy의 계수와 y의 계수가 모두 4이므로

$a-3=4$, $-2a-3b=4$

$\therefore a=7$, $b=-6$

$\therefore ab=-42$

12

$(1+x+x^2+\cdots+x^{100})^2$

$=(1+x+x^2+\cdots+x^{100})(1+x+x^2+\cdots+x^{100})$

위의 식을 전개했을 때, x^5항이 나오는 경우는

$1\times x^5$, $x\times x^4$, $x^2\times x^3$, $x^3\times x^2$, $x^4\times x$, $x^5\times 1$

의 6가지이다. 즉, x^5항은

$x^5+x^5+x^5+x^5+x^5+x^5=6x^5$

따라서 x^5의 계수는 6이다.

답 6

13

$4x^3-3x-5=f(x)(2x^2+x-1)-6$이므로

$(2x^2+x-1)f(x)=4x^3-3x+1$

즉, $f(x)$는 $4x^3-3x+1$을 $2x^2+x-1$로 나눈 몫이므로 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-1 \\ \hline
2x^2+x-1 & 4x^3 \qquad\quad -3x+1 \\
 & 4x^3+2x^2-2x \\ \hline
 & \quad -2x^2-x+1 \\
 & \quad -2x^2-x+1 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\therefore f(x)=2x-1$

답 $2x-1$

14

다항식 $3x^3+5x+a$를 x^2+x+1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x-3 \\ \hline
x^2+x+1 & 3x^3 \qquad\quad +5x+a \\
 & 3x^3+3x^2+3x \\ \hline
 & \quad -3x^2+2x+a \\
 & \quad -3x^2-3x-3 \\ \hline
 & \qquad\qquad 5x+a+3
\end{array}$$

이때 나머지가 $5x+14$이므로

$a+3=14$ $\quad\therefore a=11$

답 11

15

$x^3-x^2+2x=x(x^2-x+2)$

다항식 $f(x)$를 x^3-x^2+2x로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2+ax+3이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^3-x^2+2x)Q_1(x)+x^2+ax+3\\&=x(x^2-x+2)Q_1(x)+(x^2-x+2)+(a+1)x+1\\&=(x^2-x+2)\{xQ_1(x)+1\}+(a+1)x+1\end{aligned}$$

다항식 $f(x)$를 x^2-x+2로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $4x+b$이므로

$Q_2(x)=xQ_1(x)+1$이고 $(a+1)x+1=4x+b$

따라서 $a+1=4$, $1=b$이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=4$

답 4

STEP 1 개념 마무리

본문 p.020

01 ④	**02** 13	**03** -15	**04** 14
05 -8	**06** $2x-3$		

01

$2X-B=A-5B$에서 $2X=A-4B$

$$\begin{aligned}\therefore X&=\frac{1}{2}A-2B\\&=\frac{1}{2}(2x^2+6xy+2y^2)-2\left(-\frac{1}{2}x^2+2xy+y^2\right)\\&=x^2+3xy+y^2+x^2-4xy-2y^2\\&=2x^2-xy-y^2\end{aligned}$$

답 ④

02

$(2x^2+ax+1)(-2x^2+bx+3)$의 전개식에서

(i) x^3항

$$\begin{aligned}2x^2\times bx+ax\times(-2x^2)&=2bx^3-2ax^3\\&=(2b-2a)x^3\end{aligned}$$

(ii) x^2항

$$\begin{aligned}2x^2\times3+ax\times bx+1\times(-2x^2)&=6x^2+abx^2-2x^2\\&=(ab+4)x^2\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 x^3의 계수와 x^2의 계수가 모두 6이므로

$2b-2a=6 \quad \therefore a-b=-3 \quad \cdots\cdots$㉠

$ab+4=6 \quad \therefore ab=2 \quad \cdots\cdots$㉡

$$\begin{aligned}\therefore a^2+b^2&=(a-b)^2+2ab\\&=(-3)^2+2\times2\ (\because ㉠, ㉡)\\&=13\end{aligned}$$

답 13

03

$$\begin{aligned}&(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)\\&=\{(x+2)(x-2)\}\{(x+3)(x-1)\}\\&=(x^2-4)(x^2+2x-3)\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

← $\{(x+3)(x-2)\}\{(x+2)(x-1)\}$ 또는 $\{(x+3)(x+2)\}\{(x-1)(x-2)\}$로 전개해도 그 결과는 같다.

㉠에서 x^2항은 $x^2\times(-3)+(-4)\times x^2=-7x^2$

x^2의 계수는 -7

㉠에서 x항은 $(-4)\times2x=-8x$

x의 계수는 -8

따라서 구하는 계수의 합은 -15이다.

답 -15

04

(i) $(1+2x)^2=(1+2x)(1+2x)$

의 전개식에서 x^2항이 나오는 경우는

$2x\times2x$의 한 가지이므로 x^2항은

$4x^2$

(ii) $(1+2x+3x^2)^2=(1+2x+3x^2)(1+2x+3x^2)$

의 전개식에서 x^2항이 나오는 경우는

$1\times3x^2$, $2x\times2x$, $3x^2\times1$의 세 가지이므로 x^2항은

$3x^2+4x^2+3x^2=10x^2$

(i), (ii)에서 x^2항은 $4x^2+10x^2=14x^2$
따라서 x^2의 계수는 14이다.

답 14

05

$A=(x+2)(x^2-2)+3$
$\quad=x^3+2x^2-2x-1$
다항식 A를 x^2+1로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x^2+1 & x^3+2x^2-2x-1 \\ & x^3\qquad\;\; +x \\ \hline & \quad 2x^2-3x-1 \\ & \quad 2x^2\qquad +2 \\ \hline & \qquad\;\; -3x-3 \end{array}$$

따라서 다항식 A를 x^2+1로 나눈 몫은 $x+2$이고 나머지는 $-3x-3$이므로
$Q(x)=x+2,\ R(x)=-3x-3$
$\therefore\ Q(2)+R(3)=(2+2)+(-3\times3-3)$
$\qquad\qquad\qquad=-8$

답 -8

06

다항식 $f(x)$를 $3x^2-x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(3x^2-x+1)Q(x)+3x+8$
$\therefore\ x^2f(x)=x^2(3x^2-x+1)Q(x)+x^2(3x+8)$
이때 $x^2(3x^2-x+1)Q(x)$를 $3x^2-x+1$로 나누면 나누어 떨어지므로 $x^2f(x)$를 $3x^2-x+1$로 나눈 나머지는 $x^2(3x+8)=3x^3+8x^2$을 $3x^2-x+1$로 나눈 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline 3x^2-x+1 & 3x^3+8x^2 \\ & 3x^3-x^2+x \\ \hline & \qquad 9x^2-x \\ & \qquad 9x^2-3x+3 \\ \hline & \qquad\qquad 2x-3 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$이다.

답 $2x-3$

2 곱셈 공식

기본+필수연습 본문 pp.024~029

16 (1) $4a^2-9b^2$
(2) $6x^2+7x-20$
(3) $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$
(4) $8a^3-36a^2+54a-27$
(5) a^3-8b^3
(6) $a^3-4a^2-20a+48$
(7) $a^3+8b^3-8c^3+12abc$
(8) $a^4+9a^2b^2+81b^4$
17 (1) 60 (2) 84 (3) -432 **18** (1) 4 (2) 52
19 (1) $4x^4-37x^2+9$ (2) $x^4-4x^3-34x^2+76x+105$
20 $4a^2-b^2-c^2+2bc$ **21** 56
22 (1) a^8-16 (2) $3a^2+3b^2-2ab-2a-2b+3$
(3) $a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$ (4) a^6+7a^3-8
23 $1-x^{18}$ **24** 16 **25** (1) 7 (2) 343
26 $30\sqrt{2}-4$ **27** $6\sqrt{3}$ **28** (1) 14 (2) 38 (3) 20
29 19 **30** 673

16

(1) $(2a-3b)(2a+3b)=(2a)^2-(3b)^2$
$\qquad=4a^2-9b^2$
(2) $(2x+5)(3x-4)$
$=(2\times3)x^2+\{2\times(-4)+5\times3\}x+5\times(-4)$
$=6x^2+7x-20$
(3) $(a-b+1)^2$
$=a^2+(-b)^2+1^2+2\times a\times(-b)$
$\qquad+2\times(-b)\times1+2\times1\times a$
$=a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$
(4) $(2a-3)^3$
$=(2a)^3-3\times(2a)^2\times3+3\times2a\times3^2-3^3$
$=8a^3-36a^2+54a-27$
(5) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=a^3-(2b)^3$
$\qquad=a^3-8b^3$
(6) $(a-2)(a+4)(a-6)$
$=a^3+(-2+4-6)a^2$
$\quad+\{(-2)\times4+4\times(-6)+(-6)\times(-2)\}a$
$\quad+(-2)\times4\times(-6)$
$=a^3-4a^2-20a+48$

(7) $(a+2b-2c)(a^2+4b^2+4c^2-2ab+4bc+2ca)$

$=a^3+(2b)^3+(-2c)^3-3\times a\times 2b\times(-2c)$

$=a^3+8b^3-8c^3+12abc$

(8) $(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

$=a^4+a^2\times(3b)^2+(3b)^4$

$=a^4+9a^2b^2+81b^4$

답 (1) $4a^2-9b^2$

(2) $6x^2+7x-20$

(3) $a^2+b^2-2ab+2a-2b+1$

(4) $8a^3-36a^2+54a-27$

(5) a^3-8b^3

(6) $a^3-4a^2-20a+48$

(7) $a^3+8b^3-8c^3+12abc$

(8) $a^4+9a^2b^2+81b^4$

17

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-6)^2+2\times 12$

$=60$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$=(-6)^2+4\times 12$

$=84$

(3) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-6)^3+3\times 12\times(-6)$

$=-432$

답 (1) 60 (2) 84 (3) -432

18

(1) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2=14+2=16$

$\therefore\ a+\frac{1}{a}=4\ (\because\ a>0)$

(2) $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=4^3-3\times 4\ (\because\ (1))$

$=52$

답 (1) 4 (2) 52

19

(1) $2x^2-3=X$로 놓으면

$(2x^2+5x-3)(2x^2-5x-3)$

$=(X+5x)(X-5x)=X^2-(5x)^2$

$=(2x^2-3)^2-25x^2$

$=4x^4-12x^2+9-25x^2$

$=4x^4-37x^2+9$

(2) $(x-7)(x-3)(x+1)(x+5)$

$=\{(x-3)(x+1)\}\{(x-7)(x+5)\}$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-35)$

$x^2-2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-3)(X-35)$

$=X^2-38X+105$

$=(x^2-2x)^2-38(x^2-2x)+105$

$=x^4-4x^3+4x^2-38x^2+76x+105$

$=x^4-4x^3-34x^2+76x+105$

답 (1) $4x^4-37x^2+9$

(2) $x^4-4x^3-34x^2+76x+105$

20

$b-c=X$로 놓으면

$(2a+b-c)(2a-b+c)=\{2a+(b-c)\}\{2a-(b-c)\}$

$=(2a+X)(2a-X)$

$=(2a)^2-X^2$

$=4a^2-(b-c)^2$

$=4a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=4a^2-b^2-c^2+2bc$

답 $4a^2-b^2-c^2+2bc$

21

$(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)$

$=\{(2x+1)(2x+3)\}\{(2x-1)(2x+5)\}$

$=(4x^2+8x+3)(4x^2+8x-5)$

$4x^2+8x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+3)(X-5)$

$=X^2-2X-15$

$=(4x^2+8x)^2-2(4x^2+8x)-15$

$=16x^4+64x^3+64x^2-8x^2-16x-15$

$=16x^4+64x^3+56x^2-16x-15$

따라서 x^2의 계수는 56이다.

답 56

다른 풀이

$(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)$

$=\{(2x-1)(2x+1)\}\{(2x+3)(2x+5)\}$

$=(4x^2-1)(4x^2+16x+15)$

위의 전개식에서 x^2항이 나오는 경우는

$4x^2\times15$, $(-1)\times4x^2$의 두 가지이므로 x^2항은

$60x^2-4x^2=56x^2$

따라서 x^2의 계수는 56이다.

22

(1) $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})(a^2+2)(a^4+4)$

$=(a^2-2)(a^2+2)(a^4+4)$

$=(a^4-4)(a^4+4)$

$=a^8-16$

(2) $(a-b+1)^2+(a+b-1)^2+(a-b-1)^2$

$=a^2+b^2+1-2ab-2b+2a$

$+a^2+b^2+1+2ab-2b-2a$

$+a^2+b^2+1-2ab+2b-2a$

$=3a^2+3b^2-2ab-2a-2b+3$

(3) $(a-2b)^3(a+2b)^3=\{(a-2b)(a+2b)\}^3$

$=(a^2-4b^2)^3$

$=(a^2)^3-3\times(a^2)^2\times(4b^2)$

$+3\times a^2\times(4b^2)^2-(4b^2)^3$

$=a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$

(4) $(a-1)(a+2)(a^2+a+1)(a^2-2a+4)$

$=\{(a-1)(a^2+a+1)\}\{(a+2)(a^2-2a+4)\}$

$=(a^3-1)(a^3+8)$

$=a^6+7a^3-8$

답 (1) a^8-16

(2) $3a^2+3b^2-2ab-2a-2b+3$

(3) $a^6-12a^4b^2+48a^2b^4-64b^6$

(4) a^6+7a^3-8

23

$(1-x)(1+x+x^2)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$

$=(1-x^3)(1+x^3+x^6)(1+x^9)$ ← 순서대로 곱셈 공식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$을 적용한다.

$=(1-x^9)(1+x^9)$

$=1-x^{18}$

답 $1-x^{18}$

24

$(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)(x^2+2y^2)(x^4+4y^4)$

$=(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)(x^4+4y^4)$

$=(x^4-4y^4)(x^4+4y^4)$ ← 순서대로 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$을 적용한다.

$=x^8-16y^8$

이때 $x^4=8$, $y^4=\sqrt{3}$에서 $x^8=64$, $y^8=3$이므로

(주어진 식)$=64-16\times3=16$

답 16

25

(1) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$x+y=1$, $x^3+y^3=4$이므로

$4=1-3xy \qquad \therefore xy=-1$

즉, $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\times(-1)=3$이므로

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=3^2-2\times(-1)^2=7$

(2) $x^2-7x+1=0$에서

$x=0$이면 $0-7\times0+1\neq0$

$x-7+\frac{1}{x}=0$ $(\because x\neq0)$ $\qquad \therefore x+\frac{1}{x}=7$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}+3x+\frac{3}{x}$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=7^3=343$

답 (1) 7 (2) 343

26

$x-\frac{1}{x}=2$이므로

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=2^2+4=8$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \frac{3x^6-2x^4+2x^2+3}{x^3}$

$=3x^3-2x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}$

$=3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3\times\{(2\sqrt{2})^3-3\times2\sqrt{2}\}-2\times2$

$=30\sqrt{2}-4$

답 $30\sqrt{2}-4$

27

$a^2=4-2\sqrt{3}$, $b^2=4+2\sqrt{3}$이므로

$a^2b^2=(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})=4^2-(2\sqrt{3})^2=4$

$\therefore\ ab=2\ (\because\ a>0,\ b>0)$

이때 $a^2+b^2=(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})=8$이므로

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=8+2\times2=12$

$\therefore\ a+b=2\sqrt{3}\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 주어진 식의 값은

$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}=\frac{a^3+b^3}{ab}$

$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$

$=\frac{(2\sqrt{3})^3-3\times2\times2\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{24\sqrt{3}-12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

답 $6\sqrt{3}$

28

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\times(-5)=14$

(2) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=2\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$

$=2\times\{14-(-5)\}$ ($\because$ (1))

$=38$

(3) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(14+5)+3\times(-6)$ ($\because$ (1))

$=20$

답 (1) 14 (2) 38 (3) 20

29

$a-b=5$, $a-c=3$에서 두 식을 변끼리 빼면

$c-b=2\qquad\therefore\ b-c=-2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\{5^2+(-2)^2+(-3)^2\}=19$

답 19

30

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(x+y+z)=48\qquad\therefore\ x+y+z=12$

직육면체의 대각선의 길이가 $\sqrt{62}$이므로

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{62}$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=62$

직육면체의 부피가 42이므로 $xyz=42$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$62=12^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=41$

따라서 주어진 식의 값은

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=41^2-2\times42\times12=673$

답 673

STEP 1	개념 마무리	본문 pp.030~031

07 -80	**08** 997	**09** ①	**10** ②
11 61	**12** 123	**13** 240	**14** 3
15 15	**16** 5	**17** 32	**18** 48

07

$x+2y=X$, $x-2y=Y$로 놓으면

$(x+2y+3z)(x+2y-3z)(x-2y+3z)(x-2y-3z)$

$=(X+3z)(X-3z)(Y+3z)(Y-3z)$

$=(X^2-9z^2)(Y^2-9z^2)$

$=\{(x+2y)^2-9z^2\}\{(x-2y)^2-9z^2\}$

$=(x^2+4xy+4y^2-9z^2)(x^2-4xy+4y^2-9z^2)$

위의 전개식에서 x^2y^2항이 나오는 경우는

$x^2\times 4y^2$, $4xy\times(-4xy)$, $4y^2\times x^2$

의 세 가지이다. 즉, x^2y^2항은

$4x^2y^2-16x^2y^2+4x^2y^2=-8x^2y^2$

이므로 x^2y^2의 계수는 -8이다.

또한, 전개식에서 y^2z^2항이 나오는 경우는

$4y^2\times(-9z^2)$, $(-9z^2)\times 4y^2$

의 두 가지이다. 즉, y^2z^2항은

$-36y^2z^2-36y^2z^2=-72y^2z^2$

이므로 y^2z^2의 계수는 -72이다.

따라서 x^2y^2의 계수와 y^2z^2의 계수의 합은

$-8+(-72)=-80$

답 -80

08

$1000=x$라 하면

$2001=2x+1$, $3998=4x-2$, $4002=4x+2$이므로

$2001^3+3998\times 4002$

$=(2x+1)^3+(4x-2)(4x+2)$

$=8x^3+12x^2+6x+1+16x^2-4$

$=8x^3+28x^2+6x-3$ ← 수의 나눗셈에서 음수는 나머지가 될 수 없으므로 -3은 나머지가 아니다.

$=(8x^3+28x^2+5x)+x-3$

이때 $8x^3$, $28x^2$, $5x$는 모두 x, 즉 1000으로 나누어떨어지므로 $2001^3+3998\times 4002$를 1000으로 나눈 나머지는 $x-3$을 1000으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 $x-3=1000-3=997$이므로 구하는 나머지는 997이다.

답 997

09

ㄱ. $(2x-5y)^3$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times 5y+3\times 2x\times(5y)^2-(5y)^3$

$=8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$ (참)

ㄴ. $(ab+bc-2ca)^2$

$=(ab)^2+(bc)^2+(-2ca)^2+2(ab^2c-2abc^2-2a^2bc)$

$=a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2+2abc(b-2c-2a)$

$=a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2-2abc(2a-b+2c)$

$\neq a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2+abc(2a-b+2c)$ (거짓)

ㄷ. $(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)(a^8+16a^4b^4+256b^8)$

$=(a^2-4b^2)(a^2+4b^2)(a^8+16a^4b^4+256b^8)$

$=(a^4-16b^4)(a^8+16a^4b^4+256b^8)$

$=a^{12}-4096b^{12}\neq a^{12}-4096b^8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

10

$\left|\dfrac{x-2y}{x+2y}\right|^2=\left(\dfrac{x-2y}{x+2y}\right)^2=\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+4xy+4y^2}$

이때 $x^2+4y^2=12xy$이므로

$\left|\dfrac{x-2y}{x+2y}\right|^2=\dfrac{12xy-4xy}{12xy+4xy}=\dfrac{8xy}{16xy}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \left|\dfrac{x-2y}{x+2y}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

11

$x^2-4x+1=0$에서

$x=0$이면 $0-4\times 0+1\neq 0$

$x-4+\dfrac{1}{x}=0$ ($\because x\neq 0$) $\quad\therefore x+\dfrac{1}{x}=4$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\times4=52$

$\therefore\ x^3+2x^2-4x-3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3$

$=52+2\times14-4\times4-3=61$

답 61

12

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$7=3^2-2xy \qquad \therefore\ xy=1$

(가)

$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times1\times3=18$

(나)

이때 $(x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$이므로

$x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)$

$=18\times7-1^2\times3=123$

(다)

답 123

단계	채점 기준	배점
(가)	xy의 값을 구한 경우	30%
(나)	x^3+y^3의 값을 구한 경우	30%
(다)	x^5+y^5의 값을 구한 경우	40%

보충 설명

두 문자 x, y에 대하여 x^n+y^n ($n\geq4$인 자연수)의 값은 $x+y$, xy, x^2+y^2, x^3+y^3의 값을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$

(2) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$

(3) $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$

$=(x^2+y^2)^3-3(xy)^2(x^2+y^2)$

(4) $x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-(xy)^3(x+y)$

13

$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 $\overline{AB}=8$이므로

$a+b=8$

두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$a^3+b^3=224$

이때 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$224=8^3-3ab\times8$, $224=512-24ab$

$24ab=288 \qquad \therefore\ ab=12$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=8^2-2\times12=40$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(a^2+b^2)=6\times40=240$

답 240

14

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

즉, $a=b$, $b=c$, $c=a$이므로

$a=b=c$

$\therefore\ \frac{b}{2a}+\frac{2c}{b}+\frac{a}{2c}=\frac{a}{2a}+\frac{2b}{b}+\frac{c}{2c}$

$=\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=3$

답 3

15

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=15$이므로

$3^2=15+2(ab+bc+ca) \qquad \therefore\ ab+bc+ca=-3$

이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$에서

$\frac{ab+bc+ca}{abc}=3$

$\frac{-3}{abc}=3 \qquad \therefore abc=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}&=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\times\frac{a+b+c}{abc}\\&=3^2-2\times\frac{3}{-1}=15\end{aligned}$$

답 15

다른 풀이

$a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=15$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$에서

$ab+bc+ca=-3$, $abc=-1$

이때

$$\begin{aligned}a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2&=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\\&=(-3)^2-2\times(-1)\times3=15\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\frac{15}{(-1)^2}=15$$

16

$x+2y-4z=12$, $x^2+4y^2+16z^2=48$에서

$x=a$, $2y=b$, $-4z=c$로 놓으면

$a+b+c=12$, $a^2+b^2+c^2=48$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$12^2=48+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=48$

즉, $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca=48$이므로

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$\therefore \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

즉, $a=b$, $b=c$, $c=a$이므로

$a=b=c$

따라서 $x=2y=-4z$이고 $x+2y-4z=12$이므로

$x=2y=-4z=4$

$\therefore x=4,\ y=2,\ z=-1$

$\therefore x+y+z=5$

답 5

17

조건 (가)에서 $(4-a)(4-2b)(4-3c)=0$이므로

$a=4$ 또는 $2b=4$ 또는 $3c=4$이므로
$4-a=0$ 또는 $4-2b=0$ 또는 $4-3c=0$

$(4-a)(4-2b)(4-3c)$

$=4^3-(a+2b+3c)\times4^2+(2ab+6bc+3ca)\times4-6abc$

에서

$64-16(a+2b+3c)+4(2ab+6bc+3ca)-6abc=0$

이때 조건 (나)에서

$16(a+2b+3c)=4(2ab+6bc+3ca)$이므로

$64-6abc=0 \qquad \therefore 6abc=64$

$\therefore 3abc=\frac{1}{2}\times6abc=\frac{1}{2}\times64=32$

답 32

18

$\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$라 하면 주어진 직육면체의 겉넓이가 94이므로

$2(ab+bc+ca)=94 \qquad \therefore ab+bc+ca=47 \qquad \cdots\cdots㉠$

한편, △BFG, △DGH, △DBC는 모두 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BG}^2=\overline{BF}^2+\overline{FG}^2=c^2+a^2$

$\overline{GD}^2=\overline{GH}^2+\overline{DH}^2=b^2+c^2$

$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$

△BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 100이므로

$(c^2+a^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)=100$

$\therefore a^2+b^2+c^2=50 \qquad \cdots\cdots㉡$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$(a+b+c)^2=50+2\times47$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=144$

$\therefore a+b+c=12$ ($\because a>0,\ b>0,\ c>0$)

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times12=48$

답 48

STEP 2 개념 마무리 본문 p.032

1 8	**2** 7	**3** 64	**4** 3
5 $\frac{1}{2}$	**6** 30		

1

$(3-2x)^2(x^2+ax-3)^2$
$=\{(3-2x)(x^2+ax-3)\}^2$
$=\{-2x^3-(2a-3)x^2+3(a+2)x-9\}^2$
$=\{-2x^3-(2a-3)x^2+3(a+2)x-9\}$
$\times\{-2x^3-(2a-3)x^2+3(a+2)x-9\}$
의 전개식에서 x^4항이 나오는 경우는
$-2x^3\times 3(a+2)x$, $-(2a-3)x^2\times\{-(2a-3)x^2\}$,
$3(a+2)x\times(-2x^3)$
의 세 가지이다. 즉, x^4항은
$-2x^3\times 3(a+2)x-(2a-3)x^2\times\{-(2a-3)x^2\}$
$+3(a+2)x\times(-2x^3)$
$=(-6a-12)x^4+(4a^2-12a+9)x^4+(-6a-12)x^4$
$=(4a^2-24a-15)x^4$
이때 x^4의 계수가 49이므로
$4a^2-24a-15=49$
$4a^2-24a-64=0$, $a^2-6a-16=0$
$(a+2)(a-8)=0$
$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

답 8

보충 설명

곱셈 공식을 이용하면
$(3-2x)^2=4x^2-12x+9$
$(x^2+ax-3)^2$
$=x^4+a^2x^2+9+2\times x^2\times ax+2\times ax\times(-3)$
$+2\times(-3)\times x^2$
$=x^4+2ax^3+(a^2-6)x^2-6ax+9$
따라서 $(3-2x)^2(x^2+ax-3)^2$을 전개한 것은
$(4x^2-12x+9)\{x^4+2ax^3+(a^2-6)x^2-6ax+9\}$를 전개한 것과 같음을 이용할 수도 있다.

2

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{9}{2}$에서 $\overline{CH}=2$이므로
$\overline{AB}=\frac{9}{2}$, $\overline{AH}=\overline{AB}-\overline{BH}=\frac{9}{2}-x$
이때 $\triangle AHC\backsim\triangle CHB$ (AA 닮음)이므로
$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$
즉, $\left(\frac{9}{2}-x\right):2=2:x$에서
$4=\frac{9}{2}x-x^2\qquad\therefore 2x^2-9x+8=0\qquad\cdots\cdots$ ㉠
$2x^3-7x^2-x+15$를 $2x^2-9x+8$로 나누면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r}
x\ +1\\
2x^2-9x+8\ \overline{)\ 2x^3-7x^2-\ x+15}\\
\underline{2x^3-9x^2+8x}\\
2x^2-9x+15\\
\underline{2x^2-9x+\ 8}\\
7
\end{array}
$$

따라서 다항식 $2x^3-7x^2-x+15$를 $2x^2-9x+8$로 나눈 몫은 $x+1$이고 나머지는 7이므로
$2x^3-7x^2-x+15=(2x^2-9x+8)(x+1)+7$
$=7$ ($\because$ ㉠)

답 7

3

$(x+y)^8=X$, $(x-y)^8=Y$로 놓으면
$\{(x+y)^8+(x-y)^8\}^2-\{(x+y)^8-(x-y)^8\}^2$
$=(X+Y)^2-(X-Y)^2$
$=4XY$
$=4(x+y)^8(x-y)^8$
$=4\{(x+y)(x-y)\}^8$
$=4(x^2-y^2)^8=4\times(\sqrt{2})^8$ ($\because x^2-y^2=\sqrt{2}$)
$=64$

답 64

4

$x^2+2x+4=(x^2+x+3)+(x+1)$이므로
$A=x^2+x+3$, $B=x+1$로 놓으면
$(x^2+2x+4)^3=(A+B)^3$
$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
이때 A^3, $3A^2B$, $3AB^2$은 모두 A, 즉 x^2+x+3으로 나누어떨어지므로 $(x^2+2x+4)^3$을 x^2+x+3으로 나눈 나머지는

B^3, 즉 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$을 x^2+x+3으로 나눈 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ x^2+x+3 & x^3+3x^2+3x+1 \\ & x^3+\ x^2+3x \\ \hline & \quad 2x^2 \qquad +1 \\ & \quad 2x^2+2x+6 \\ \hline & \qquad -2x-5 \end{array}$$

따라서 $R(x)=-2x-5$이므로

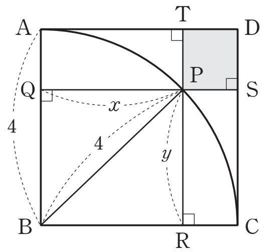
$R(-4)=-2\times(-4)-5=3$

답 3

5

$\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$라 하면 직사각형 PQBR의 둘레의 길이가 10이므로

$2(x+y)=10 \qquad \therefore x+y=5$



또한, $\overline{PB}=\overline{AB}=4$, $\overline{BR}=\overline{PQ}=x$이고 △PBR은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=4^2=16$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$16=5^2-2xy$, $2xy=9$

$\therefore xy=\dfrac{9}{2}$

이때 $\overline{PS}=4-x$, $\overline{PT}=4-y$이므로

$$\begin{aligned}\square\mathrm{PSDT}&=(4-x)(4-y)\\&=16-4(x+y)+xy\\&=16-4\times5+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

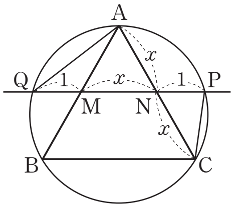
6

두 점 M, N이 각각 두 변 AB, AC의 중점이므로

△AMN∽△ABC (AA 닮음)이고 닮음비는 1 : 2이다.

△AMN은 한 변의 길이가 x인 정삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{AN}=\overline{NC}=x$



오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{QM}=\overline{NP}=1$

두 삼각형 AQN과 PCN에서

$\angle QAN=\angle CPN$ (호 QC에 대한 원주각)

$\angle ANQ=\angle PNC$ (맞꼭지각)

$\therefore$ △AQN∽△PCN (AA 닮음)

즉, $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$이므로

$(1+x):x=x:1$

$x^2=x+1 \qquad \therefore x^2-x-1=0$

$x>0$이므로 위의 식의 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0$, 즉 $x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

$\therefore 10\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=10\times3=30$

답 30

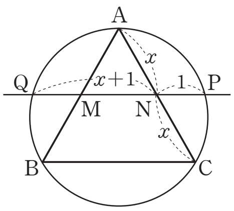
다른 풀이

원에서의 비례 관계에 의하여

$\overline{NA}\times\overline{NC}=\overline{NP}\times\overline{NQ}$

$x\times x=1\times(x+1)$, $x^2=x+1$

$\therefore x^2-x-1=0$



$x>0$이므로 위의 식의 양변을 x로 나누면

$x-1-\dfrac{1}{x}=0$, 즉 $x-\dfrac{1}{x}=1$

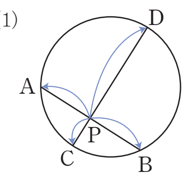
$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$

$\therefore 10\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=10\times3=30$

보충 설명

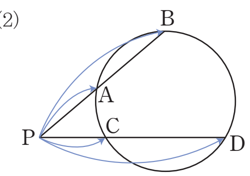
원에서의 비례 관계 | 원에서 두 현 AB, CD 또는 그 연장선의 교점을 P라 하면 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$가 성립한다.

(1)



점 P가 원의 내부에 있는 경우

(2)



점 P가 원의 외부에 있는 경우

02. 항등식과 나머지정리

1 항등식

기본 + 필수연습

본문 pp.036~041

01 (1) 방정식 (2) 항등식 (3) 항등식 (4) 항등식
02 $a=1$, $b=2$, $c=2$ **03** 6
04 $a=3$, $b=3$ **05** -4 **06** 7
07 2 **08** (1) $a=5$, $b=7$, $c=5$ (2) -3
09 1 **10** 4 **11** -1 **12** 24
13 2 **14** (1) 1024 (2) 1 (3) 0 (4) 512
15 1024

01

(1) $3x+1=0$은 $x=-\frac{1}{3}$을 대입하면 등식이 성립하고,

$x\neq-\frac{1}{3}$인 x의 값을 대입하면 등식이 성립하지 않으므로 방정식이다.

(2) $x+2x=3x$는 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 항등식이다.

(3) $(x+2)^2=x^2+4x+4$는 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 항등식이다.

(4) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$는 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립하므로 항등식이다.

답 (1) 방정식 (2) 항등식 (3) 항등식 (4) 항등식

02

등식 $a(x+y)+b(x-y)+2=3x-y+c$에서

$ax+ay+bx-by+2=3x-y+c$

$\therefore (a+b)x+(a-b)y+2=3x-y+c$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=3$ ……㉠

$a-b=-1$ ……㉡

$c=2$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=2$

답 $a=1$, $b=2$, $c=2$

03

$x^2+ax+4=x(x+2)+b$에서

$x^2+ax+4=x^2+2x+b$

위의 식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면
계수비교법 사용

$a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=6$

답 6

다른 풀이

$x^2+ax+4=x(x+2)+b$는 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $4=b$
수치대입법 사용

$b=4$를 주어진 등식에 대입하면

$x^2+ax+4=x(x+2)+4$

양변에 $x=1$을 대입하면
수치대입법 사용

$1+a+4=1\times3+4$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=6$

04

$2x^2-x+a=2(x-1)^2+b(x-1)+4$가 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

양변에 $x=1$을 대입하면
수치대입법 사용

$2-1+a=4$ $\therefore a=3$

$a=3$을 주어진 등식에 대입하면

$2x^2-x+3=2(x-1)^2+b(x-1)+4$

양변에 $x=0$을 대입하면
수치대입법 사용

$3=2-b+4$

$\therefore b=3$

답 $a=3$, $b=3$

다른 풀이

$2x^2-x+a=2(x-1)^2+b(x-1)+4$에서

$2x^2-x+a=2(x^2-2x+1)+b(x-1)+4$

$\therefore 2x^2-x+a=2x^2+(-4+b)x-b+6$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $\underbrace{\text{양변의 동류항의 계수를 비교하면}}_{\text{계수비교법 사용}}$

$-1=-4+b,\ a=-b+6$

$\therefore a=3,\ b=3$

05

$(x-2y)a+(3y-x)b+2x-3y=0$에서

$ax-2ay+3by-bx+2x-3y=0$

$\therefore (a-b+2)x+(-2a+3b-3)y=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b+2=0,\ -2a+3b-3=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-1$

$\therefore a+b=-3+(-1)=-4$

답 -4

06

$x+2y=1$에서 $x=-2y+1$을 $ax^2-3bxy+cy=3$에 대입한 후 전개하고 정리하면

$(4a+6b)y^2-(4a+3b-c)y+a-3=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$4a+6b=0,\ -(4a+3b-c)=0,\ a-3=0$

$\therefore a=3,\ b=-2,\ c=6$

$\therefore a+b+c=7$

답 7

07

$2x^2+axy-y^2+3x+b=(x+cy+1)(2x+y+d)$에서

우변을 전개한 후 정리하면

$2x^2+axy-y^2+3x+b$

$=2x^2+(1+2c)xy+cy^2+(d+2)x+(cd+1)y+d$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$1+2c=a,\ c=-1,\ d+2=3,\ cd+1=0,\ d=b$

$\therefore a=-1,\ b=1,\ c=-1,\ d=1$

$\therefore a+2b+3c+4d=-1+2-3+4=2$

답 2

08

(1) 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ax^3+bx^2-3x-2=cx^3+(c+2)x^2+(-c+2)x-2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=c,\ b=c+2,\ -3=-c+2$

$\therefore a=5,\ b=7,\ c=5$

(2) 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립한다.

양변에 $x=0$을 대입하면 $-2=-2a$ $\quad\therefore a=1$

양변에 $x=1$을 대입하면 $-3=3b$ $\quad\therefore b=-1$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $12=6c$ $\quad\therefore c=2$

$\therefore ab-c=1\times(-1)-2=-3$

답 (1) $a=5,\ b=7,\ c=5$ (2) -3

09

$(k+1)x-2(k-1)y-k-3=0$에서 좌변을 전개한 후 k에 대하여 정리하면

$(x-2y-1)k+(x+2y-3)=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-2y-1=0,\ x+2y-3=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=\frac{1}{2}$

$\therefore xy=1$

답 1

다른 풀이

$(k+1)x-2(k-1)y-k-3=0$이 k에 대한 항등식이므로

k에 어떤 값을 대입해도 등식이 항상 성립한다.

양변에 $k=-1$을 대입하면

$4y-2=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}$

양변에 $k=1$을 대입하면

$2x-4=0 \quad \therefore x=2$

$\therefore xy=1$

10

$(x^2-1)f(x)=2x^6+ax^3+b$에서

$(x+1)(x-1)f(x)=2x^6+ax^3+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=2-a+b$

$\therefore a-b=2 \quad \cdots\cdots㉠$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2+a+b$

$\therefore a+b=-2 \quad \cdots\cdots㉡$

$f(x)$를 알 수 없으므로 좌변의 식의 값이 0이 되도록 x의 값을 대입해본다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-2$

$\therefore a-2b=0-2\times(-2)=4$

답 4

11

x^4-ax^3+b를 x^2+x+1로 나눈 몫이 x^2+a, 나머지가 $cx+2$이므로

$x^4-ax^3+b=(x^2+x+1)(x^2+a)+cx+2$

$\qquad\qquad =x^4+x^3+(a+1)x^2+(a+c)x+a+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-a=1$, $0=a+1$, $0=a+c$, $b=a+2$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=1$

$\therefore abc=-1$

답 -1

12

ax^3+11x^2+bx-4를 $(x+2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

ax^3+11x^2+bx-4는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로

$ax^3+11x^2+bx-4=(x+2)^2Q(x)$

$\qquad =(x^2+4x+4)Q(x)$

$Q(x)=ax+c$ (c는 상수)라 하면 ← $Q(x)$는 최고차항의 계수가 a인 일차식이다.

ax^3+11x^2+bx-4

$=(x^2+4x+4)(ax+c)$

$=ax^3+(c+4a)x^2+(4c+4a)x+4c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$11=c+4a$, $b=4c+4a$, $-4=4c$

따라서 $c=-1$에서 $a=3$, $b=8$이므로

$ab=24$

답 24

다른 풀이

$ax^3+11x^2+bx-4=(x+2)^2Q(x)$는 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-8a+44-2b-4=0$

$\therefore 4a+b=20 \quad \cdots\cdots㉠$

한편, $Q(x)=ax+c$ (c는 상수)라 하면

$ax^3+11x^2+bx-4=(x^2+4x+4)(ax+c)$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-4=4c$에서 $c=-1$

즉, $ax^3+11x^2+bx-4=(x^2+4x+4)(ax-1)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a+11+b-4=9(a-1)$

$\therefore 8a-b=16 \quad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=8$

$\therefore ab=24$

13

$x^4+ax^2-b=(x+1)(x^2+2)f(x)+x^2+1$

$\qquad =(x^3+x^2+2x+2)f(x)+x^2+1$

$f(x)=x+c$ (c는 상수)라 하면 ← $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차식이다.

x^4+ax^2-b

$=(x^3+x^2+2x+2)(x+c)+x^2+1$

$=x^4+(1+c)x^3+(3+c)x^2+(2+2c)x+2c+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1+c=0,\ 3+c=a,\ 2+2c=0,\ 2c+1=-b$

즉, $c=-1$에서 $a=2,\ b=1$

따라서 $f(x)=x-1$이므로

$f(a)+b=f(2)+1=1+1=2$

답 2

다른 풀이

$x^4+ax^2-b=(x+1)(x^2+2)f(x)+x^2+1$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+a-b=2$

$\therefore\ a-b=1$ ……㉠

양변에 $x^2=-2$를 대입하면

$4-2a-b=-1$

$\therefore\ 2a+b=5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=1$

즉, $x^4+2x^2-1=(x+1)(x^2+2)f(x)+x^2+1$에서

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2+2)f(x)&=x^4+2x^2-1-x^2-1\\&=x^4+x^2-2\\&=(x^2-1)(x^2+2)\\&=(x-1)(x+1)(x^2+2)\end{aligned}$$

이므로 $f(x)=x-1$

$\therefore\ f(a)+b=f(2)+1=1+1=2$

14

$(1+x-2x^2)^{10}=a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+a_{18}x^{18}+\cdots+a_1x+a_0$ ……㉠

(1) ㉠의 좌변의 최고차항의 계수는 $(-2)^{10}$, 우변의 최고차항의 계수는 a_{20}이므로

$a_{20}=(-2)^{10}=1024$

(2) ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=1$

(3) ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1+1-2)^{10}=a_{20}+a_{19}+a_{18}+\cdots+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=0$ ……㉡

(4) ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1-1-2)^{10}=a_{20}-a_{19}+a_{18}-\cdots-a_1+a_0$

$\therefore\ a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}=1024$ ……㉢

㉡+㉢을 하면

$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})=1024$

$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=512$

답 (1) 1024 (2) 1 (3) 0 (4) 512

15

$x^{11}+2=a_{11}(x-1)^{11}-a_{10}(x-1)^{10}+a_9(x-1)^9-\cdots+a_1(x-1)-a_0$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{11}+2=a_{11}-a_{10}+a_9-\cdots+a_1-a_0$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-a_{11}-a_{10}-a_9-\cdots-a_1-a_0$ ……㉢

㉡−㉢을 하면

$2^{11}=2(a_{11}+a_9+a_7+\cdots+a_1)$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}=2^{10}=1024$

답 1024

STEP 1 개념 마무리

본문 p.042

01 20	**02** -12	**03** -54	**04** 1
05 5	**06** ④		

01

등식 $(a+b-4)x+ab+2=0$이 x에 대한 항등식이므로

$a+b-4=0,\ ab+2=0$

$\therefore\ a+b=4,\ ab=-2$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=4^2-2\times(-2)=20\end{aligned}$$

답 20

02

$x^2+(2k+a+2)x+ak+3b-9=0$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4+2(2k+a+2)+ak+3b-9=0$

$\therefore\ (4+a)k+2a+3b-1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$4+a=0,\ 2a+3b-1=0$

$\therefore\ a=-4,\ b=3$

$\therefore\ ab=-12$

답 -12

03

$3x-y=2$에서 $y=3x-2$를 $ax^2+bxy+cy^2=4$에 대입하면

$ax^2+bx(3x-2)+c(3x-2)^2=4$

$\therefore\ (a+3b+9c)x^2+(-2b-12c)x+4c-4=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+3b+9c=0,\ -2b-12c=0,\ 4c-4=0$

$\therefore\ a=9,\ b=-6,\ c=1$

$\therefore\ abc=-54$

답 -54

04

모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x^2-x+a}{2x^2+bx+3}=k$ (k는 상수)라 하면

$x^2-x+a=k(2x^2+bx+3)$

$\therefore\ (2k-1)x^2+(bk+1)x+(3k-a)=0$

(가)

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2k-1=0,\ bk+1=0,\ 3k-a=0$

따라서 $k=\dfrac{1}{2}$에서 $a=\dfrac{3}{2},\ b=-2$이므로

(나)

$2a+b=2\times\dfrac{3}{2}+(-2)=1$

(다)

답 1

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식의 값을 k로 놓고 x에 대한 항등식을 구한 경우	40%
(나)	k, a, b의 값을 각각 구한 경우	40%
(다)	$2a+b$의 값을 구한 경우	20%

05

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$을 x^2+5x+4로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$은 x^2+5x+4로 나누어떨어지므로

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)=(x^2+5x+4)Q(x)$

$\therefore\ (x-1)\{(x+2)(x+a)+b\}=(x+1)(x+4)Q(x)$ ……㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2(a-1+b)=0$

$\therefore\ a+b=1$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$-5\{-2(a-4)+b\}=0,\ -2a+8+b=0$

$\therefore\ 2a-b=8$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

$\therefore\ a-b=3-(-2)=5$

답 5

06

$(3x^2+x-1)^5=a_{10}x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_0$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{a_{10}}{2^{10}}+\dfrac{a_9}{2^9}+\dfrac{a_8}{2^8}+\cdots+a_0$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=-\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$\left(-\dfrac{3}{4}\right)^5=\dfrac{a_{10}}{2^{10}}-\dfrac{a_9}{2^9}+\dfrac{a_8}{2^8}-\cdots-\dfrac{a_1}{2}+a_0$ ……㉢

㉡$-$㉢을 하면

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^5-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^5=2\left(\dfrac{a_9}{2^9}+\dfrac{a_7}{2^7}+\dfrac{a_5}{2^5}+\dfrac{a_3}{2^3}+\dfrac{a_1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_7}{2^7}+\frac{a_9}{2^9}&=\frac{1}{2}\times\frac{1-(-3)^5}{4^5}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1-(-243)}{1024}=\frac{244}{2048}\\&=\frac{61}{512}\end{aligned}$$

답 ④

2 나머지정리

기본 + 필수연습

본문 pp.046~054

16 (1) -15 (2) 7 **17** -1 **18** 2
19 (1) 몫 : $2x^2-7x+7$, 나머지 : -1
(2) 몫 : x^2-2x+1, 나머지 : 2
20 -14 **21** -2 **22** -60
23 $-x+3$ **24** 2 **25** $-x^2+x+3$
26 -25 **27** -8 **28** 21 **29** 120
30 3 **31** 몫 : x^2-x+5, 나머지 : $-3x+2$
32 40 **33** 51 **34** 13

16

(1) $f(x)=x^3+27x^2-x+k$라 하면
다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 12이므로
$f(-1)=12$
이때
$f(-1)=(-1)^3+27\times(-1)^2-(-1)+k$
$=27+k$
에서 $27+k=12$이므로
$k=-15$

(2) $f(x)=8x^3+12x^2+5$라 하면
다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$이다.
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+12\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5$
$=7$

답 (1) -15 (2) 7

17

$f(x)=x^3-2x-a$라 하면
다항식 $f(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로
$f(1)=0$
이때
$f(1)=1^3-2\times1-a=-1-a$
에서 $-1-a=0$이므로
$a=-1$

답 -1

18

다항식 $f(x)$를 $(x-3)(2x-a)$로 나눈 몫은 $x+1$이고 나머지는 6이므로
$f(x)=(x-3)(2x-a)(x+1)+6$ ……㉠
이때 $f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=0$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$f(2)=-1\times(4-a)\times3+6$
$=-12+3a+6$
$=3a-6$
에서 $3a-6=0$이므로
$a=2$

답 2

19

(1) $x+1=0$에서 $x=-1$이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

-1	2	-5	0	6
		-2	7	-7
	2	-7	7	-1

$\therefore 2x^3-5x^2+6=(x+1)(2x^2-7x+7)-1$
따라서 $2x^3-5x^2+6$을 $x+1$로 나눈 몫은 $2x^2-7x+7$이고 나머지는 -1이다.

(2) $3x+1=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

$-\frac{1}{3}$	3	-5	1	3
		-1	2	-1
	3	-6	3	2

$\therefore 3x^3-5x^2+x+3=\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+2$
$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\times3(x^2-2x+1)+2$
$=(3x+1)(x^2-2x+1)+2$
따라서 $3x^3-5x^2+x+3$을 $3x+1$로 나눈 몫은 x^2-2x+1이고 나머지는 2이다.

답 (1) 몫 : $2x^2-7x+7$, 나머지 : -1
(2) 몫 : x^2-2x+1, 나머지 : 2

20

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+9$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(-2)=3$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$이므로

$-16+4a-2b+9=3$, $\frac{1}{4}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+9=3$

$\therefore\ 2a-b=5$, $a+2b=-25$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-11$

$\therefore\ a+b=-14$

답 -14

21

$f(x)$를 x^2-x+1로 나눈 몫이 $3x^2-2x+1$이고 나머지가 -4이므로

$f(x)=(x^2-x+1)(3x^2-2x+1)-4$

나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=(1^2-1+1)\times(3\times1^2-2\times1+1)-4=-2$

답 -2

22

$f(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지가 -12이므로 나머지정리에 의하여

$f(-4)=-12$ ······㉠

$g(x)=(x^2+2x-3)f(x)$라 하면 나머지정리에 의하여

$g(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지는

$g(-4)=\{(-4)^2+2\times(-4)-3\}f(-4)$

$=5f(-4)=5\times(-12)$ ($\because$ ㉠)

$=-60$

답 -60

23

$P(x)$를 x^2-16으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-16)Q(x)+ax+b$

$=(x-4)(x+4)Q(x)+ax+b$ ······㉠

$P(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지가 -1이고, $x+4$로 나눈 나머지가 7이므로 나머지정리에 의하여

$P(4)=-1$, $P(-4)=7$

$x=4$, $x=-4$를 ㉠에 각각 대입하면

$P(4)=4a+b=-1$, $P(-4)=-4a+b=7$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 $-x+3$이다.

답 $-x+3$

다른 풀이

다항식 $f(x)$를 $x-4$, $x+4$로 나눈 나머지를 각각 R_1, R_2라 하면 $R_1=-1$, $R_2=7$

㉠에서 $ax+b=a(x-4)-1=a(x+4)+7$이므로

$ax-4a-1=ax+4a+7$

즉, $-4a-1=4a+7$에서 $8a=-8$ $\therefore\ a=-1$

또한, $-x+b=-(x-4)-1$이므로 $b=3$

따라서 구하는 나머지는 $-x+3$이다.

24

$f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-1$이므로

$f(x)=(x-3)^2Q(x)+2x-1$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=5$

또한, $f(x)$를 $x+4$로 나눈 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여

$f(-4)=-2$

$(x^2-2x-1)f(x)$를 $(x-3)(x+4)$로 나눈 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2-2x-1)f(x)=(x-3)(x+4)Q'(x)+ax+b$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$2f(3)=3a+b$

$\therefore\ 3a+b=10$ ($\because$ $f(3)=5$) ······㉡

㉠의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$23f(-4)=-4a+b$

$\therefore\ -4a+b=-46$ ($\because$ $f(-4)=-2$) ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=-14$

따라서 $R(x)=8x-14$이므로 $R(2)=2$

답 2

25

다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $(x^2+1)(x-2)Q(x)$는 x^2+1로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지와 같다.

즉, ax^2+bx+c를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+4$이므로

$ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+4$

$\therefore f(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+a(x^2+1)+x+4$ ……㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 1이므로 ㉠에서

$f(2)=5a+6=1$ $\therefore a=-1$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$-(x^2+1)+x+4=-x^2+x+3$

답 $-x^2+x+3$

다른 풀이

$f(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x^2+1)(x-2)Q(x)+a(x^2+1)+bx+c-a$

$=(x^2+1)\{(x-2)Q(x)+a\}+bx+c-a$ ……㉡

$f(x)$를 x^2+1로 나눈 나머지가 $x+4$이므로

㉡에서 $bx+c-a=x+4$ $\therefore b=1$, $c-a=4$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 1이므로 ㉡에서

$f(2)=4a+2b+c=1$ $\therefore 4a+c=-1$

$c-a=4$, $4a+c=-1$을 연립하여 풀면

$a=-1$, $c=3$

따라서 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

26

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+5$ ……㉠

다항식 $Q(x)$를 $x+2$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 10이므로

$Q(x)=(x+2)Q_1(x)+10$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$f(x)=(x-1)\{(x+2)Q_1(x)+10\}+5$

$=(x-1)(x+2)Q_1(x)+10x-5$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-2)=10\times(-2)-5=-25$

답 -25

다른 풀이

다항식 $Q(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지가 10이므로 나머지정리에 의하여 $Q(-2)=10$

이때 구하는 나머지는 $f(-2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-3Q(-2)+5=(-3)\times10+5=-25$

27

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫은 $Q(x)$, 나머지는 4이므로

$f(x)=(x+1)Q(x)+4$ ……㉠

또한, $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 12이므로

$Q(x)=(x-3)Q_1(x)+12$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)\{(x-3)Q_1(x)+12\}+4$

$=(x+1)(x-3)Q_1(x)+12x+16$

따라서 $R(x)=12x+16$이므로

$R(-2)=12\times(-2)+16=-8$

답 -8

28

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$이므로

$f(x)=3x^3+ax^2+bx-36$이라 하면 인수정리에 의하여

$f(-3)=0$, $f(2)=0$

$f(-3)=0$에서 $-81+9a-3b-36=0$

$\therefore 3a-b=39$ ……㉠

$f(2)=0$에서 $24+4a+2b-36=0$

$\therefore\ 2a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9,\ b=-12$

$\therefore\ a-b=21$

답 21

29

$f(x)=x^3+ax^2+7x+b$라 하면 인수정리에 의하여

$f(-2)=0,\ f(1)=0$

$f(-2)=0$에서 $-8+4a-14+b=0$

$\therefore\ 4a+b=22$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=0$에서 $1+a+7+b=0$

$\therefore\ a+b=-8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10,\ b=-18$

따라서 $f(x)=x^3+10x^2+7x-18$이므로 나머지정리에 의하여 $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는

$f(3)=27+90+21-18=120$

답 120

30

$f(x)-3$을 x^2-9로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$$f(x)-3=(x^2-9)Q(x)$$
$$=(x+3)(x-3)Q(x)$$

즉, $f(x)=(x+3)(x-3)Q(x)+3$이므로

$f(-3)=f(3)=3$

$f(x+1)$을 x^2+2x-8로 나눈 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x+1)=(x^2+2x-8)Q'(x)+ax+b$$
$$=(x+4)(x-2)Q'(x)+ax+b$$

위의 식의 양변에 $x=-4,\ x=2$를 각각 대입하면

$f(-3)=-4a+b,\ f(3)=2a+b$

즉, $-4a+b=3,\ 2a+b=3$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

답 3

31

$f(x)=x^4+2x^2+4x-8$이라 하고, $f(x)$를 $\underbrace{x-1}_{x=1}$로 나누는 조립제법과 그 몫을 $\underbrace{x+2}_{x=-2}$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

1	1	0	2	4	-8	
		1	1	3	7	
-2	1	1	3	7	-1	$\cdots\cdots$(i)
		-2	2	-10		
	1	-1	5	-3		$\cdots\cdots$(ii)

(i) $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$x^3+x^2+3x+7,\ -1$이므로

$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+3x+7)-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) x^3+x^2+3x+7을 $x+2$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$x^2-x+5,\ -3$이므로

$x^3+x^2+3x+7=(x+2)(x^2-x+5)-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-1)\{(x+2)(x^2-x+5)-3\}-1$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2-x+5)-3(x-1)-1$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2-x+5)-3x+2$$

$\therefore$ 몫 : x^2-x+5, 나머지 : $-3x+2$

답 몫 : x^2-x+5, 나머지 : $-3x+2$

32

$f(x)=x^4+ax+b$라 하면

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)$$
$$=(x-2)\{(x-2)Q(x)\}$$

$f(x)$를 $x-2$로 나누는 조립제법과 그 몫을 $x-2$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$\boxed{2}$	1	0	0	a	b	
		$\boxed{2}$	4	$\boxed{8}$	$\boxed{2a+16}$	
$\boxed{2}$	1	2	4	$\boxed{a+8}$	$2a+b+16$	$\cdots\cdots$(i)
		2	$\boxed{8}$	24		
	1	4	$\boxed{12}$	$a+32$		$\cdots\cdots$(ii)

(i) $f(x)$를 $x-2$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$x^3+2x^2+4x+a+8,\ 2a+b+16$이므로

$2a+b+16=0$

$\therefore\ 2a+b=-16$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x^3+2x^2+4x+a+8$을 $x-2$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $x^2+4x+12$, $a+32$이므로

$a+32=0$

$\therefore\ a=-32$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b=48$

따라서 $a=-32$, $b=48$, $Q(x)=x^2+4x+12$이므로

$$\begin{aligned}a+b+Q(2)&=-32+48+(2^2+4\times2+12)\\&=40\end{aligned}$$

답 40

보충 설명

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(x^3+2x^2+4x-24)+0\\&=(x-2)\{(x-2)(x^2+4x+12)+0\}+0\\&=(x-2)^2(x^2+4x+12)\end{aligned}$$

$\therefore\ Q(x)=x^2+4x+12$

33

$f(x)=x^3-x^2+ax-b$라 하고, $f(x)$를 $\underset{x=1}{\underline{x-1}}$로 나누는 조립제법과 그 몫을 $\underset{x=3}{\underline{x-3}}$으로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$\boxed{1}$	1	-1	a	$-b$	
		1	0	$\boxed{a}$	
$\boxed{3}$	1	0	$\boxed{a}$	$a-b$	……(i)
		$\boxed{3}$	$\boxed{9}$		
	1	$\boxed{3}$	$a+9$		……(ii)

(i) $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫과 나머지는 각각 x^2+a, $a-b$이므로

$a-b=2$ ……㉠

(ii) x^2+a를 $x-3$으로 나눈 몫과 나머지는 각각 $x+3$, $a+9$이므로

$a+9=3$

$\therefore\ a=-6$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=-8$

따라서 $a=-6$, $b=-8$, $Q(x)=x+3$이므로

$Q(ab)=Q(48)=48+3=51$

답 51

34

$f(x)=2x^3-5x+3$이라 하고, $f(x)$를 $\underset{x=-1}{\underline{x+1}}$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

-1	2	0	-5	3	
		-2	2	3	
-1	2	-2	-3	6	……(i)
		-2	4		
-1	2	-4	1		……(ii)
		-2			
	2	-6			……(iii)

(i) $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $2x^2-2x-3$, 6이므로

$f(x)=(x+1)(2x^2-2x-3)+6$ ……㉠

(ii) $2x^2-2x-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $2x-4$, 1이므로

$2x^2-2x-3=(x+1)(2x-4)+1$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)\{(x+1)(2x-4)+1\}+6\\&=(x+1)^2(2x-4)+(x+1)+6 \quad \text{……㉡}\end{aligned}$$

(iii) $2x-4$를 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는 각각 2, -6이므로

$2x-4=2(x+1)-6$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)^2\{2(x+1)-6\}+(x+1)+6\\&=2(x+1)^3-6(x+1)^2+(x+1)+6\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$, $b=-6$, $c=1$, $d=6$

$\therefore\ a-b-c+d=2+6-1+6=13$

답 13

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.055~056

07 48	**08** 17	**09** $2x+5$	**10** -102
11 -11	**12** $-\frac{1}{2}x^2+1$		**13** 6
14 6	**15** x	**16** 97	**17** $-6x-4$
18 9			

07

$f(2x+4)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여

$f(8)=6$

따라서 $xf(x)$를 $x-8$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$8f(8)=8\times6=48$

답 48

08

$f(x)=x^3+x^2+2x+1$을 $x-a$로 나눈 나머지가 R_1, $f(x)$를 $x+a$로 나눈 나머지가 R_2이므로 나머지정리에 의하여

$R_1=f(a)=a^3+a^2+2a+1$,

$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$

이때 $R_1+R_2=6$이므로

$(a^3+a^2+2a+1)+(-a^3+a^2-2a+1)=6$

$2a^2+2=6$

$\therefore\ a^2=2$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$, 즉 $x-2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(2)=2^3+2^2+2\times2+1=17$

답 17

09

$f(x)$를 x^2+6x+8로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+6x+8)Q(x)+ax+b$

$\quad=(x+2)(x+4)Q(x)+ax+b$ ······㉠

이때 조건 (가), (나)에서

$f(-2)=f(0)=1$, $f(-4)=f(-2)-4=1-4=-3$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-2a+b=1$ ······㉡

㉠의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$f(-4)=-4a+b=-3$ ······㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=5$

따라서 구하는 나머지는 $2x+5$이다.

답 $2x+5$

10

x^5을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5=(x+1)Q(x)+a$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a=-1$

(가)

$\therefore\ x^5=(x+1)Q(x)-1$ ······㉠

㉠에 $x=102$를 대입하면

$102^5=103Q(102)-1$ —(*)

$\quad=103\{Q(102)-1\}+103-1$

$\quad=103\{Q(102)-1\}+102$

따라서 102^5을 103으로 나눈 나머지가 102이므로

$b=102$

(나)

$\therefore\ ab=(-1)\times102=-102$

(다)

답 -102

단계	채점 기준	배점
(가)	a의 값을 구한 경우	40%
(나)	b의 값을 구한 경우	50%
(다)	ab의 값을 구한 경우	10%

보충 설명

다항식의 나눗셈에서

(나머지의 차수)<(나누는 식의 차수)

이므로 나누는 식이 일차식인 경우 나머지는 상수가 된다.

이때 이 상수는 음수가 될 수 있다.

그러나 수의 나눗셈에서는

$0\le$(나머지)<(나누는 수)

이므로 이 문제에서 $0\le b<103$이어야 한다.

따라서 (*)에서 음수인 나머지 -1을 변형하여 범위에 맞는 나머지를 구해야 한다.

11

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(3^2+3a+b)=0$, $9+3a+b=0$ ($\because 3^n\neq 0$)

$\therefore b=-3a-9$ ……㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}x^n(x^2+ax+b)&=x^n(x^2+ax-3a-9)\\&=x^n(x-3)(x+a+3)\end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

이 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(a+6)=3^n$, $a+6=1$ $\quad\therefore a=-5$

$\therefore b=-3\times(-5)-9=6$ ($\because$ ㉡)

$\therefore a-b=-11$

답 -11

12

다항식 $f(x)$를 x^3-8로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^3-8)Q(x)+ax^2+bx+c\\&=(x-2)(x^2+2x+4)Q(x)+ax^2+bx+c\end{aligned}$$

이때 다항식 $f(x)$를 x^2+2x+4로 나눈 나머지가 $x+3$이므로 ax^2+bx+c를 x^2+2x+4로 나눈 나머지도 $x+3$이다.

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(x-2)(x^2+2x+4)Q(x)\\&\qquad+a(x^2+2x+4)+x+3\\&=(x^2+2x+4)\{(x-2)Q(x)+a\}+x+3\end{aligned}$$ ……㉠

또한, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2x-5$이므로

$f(2)=2\times2-5=-1$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=a(2^2+2\times2+4)+2+3=12a+5$

즉, $12a+5=-1$에서 $12a=-6$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+2x+4)\left\{(x-2)Q(x)-\frac{1}{2}\right\}+x+3\\&=(x-2)(x^2+2x+4)Q(x)\\&\qquad-\frac{1}{2}(x^2+2x+4)+x+3\\&=(x^3-8)Q(x)-\frac{1}{2}x^2+1\end{aligned}$$

따라서 다항식 $f(x)$를 x^3-8로 나누었을 때의 나머지는 $-\dfrac{1}{2}x^2+1$이다.

답 $-\dfrac{1}{2}x^2+1$

13

$4x^3+2ax^2+(3a-1)x+2$를 $2x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$4x^3+2ax^2+(3a-1)x+2=(2x-1)Q(x)+R$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면

$R=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}(3a-1)+2=2a+2$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4+2a+(3a-1)+2=Q(1)+R$

이때 $Q(1)=0$이므로 $R=5a+5$

즉, $2a+2=5a+5$이므로

$3a=-3$ $\quad\therefore a=-1$, $R=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$4x^3-2x^2-4x+2=(2x-1)Q(x)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$32-8-8+2=3Q(2)$

$3Q(2)=18$ $\quad\therefore Q(2)=6$

$\therefore Q(2)+R=6$

답 6

다른 풀이

직접 나눗셈을 하여 $Q(x)$, R을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+(a+1)x+2a \\ \hline
2x-1 & 4x^3+2ax^2+(3a-1)x+2 \\
 & 4x^3-2x^2 \\ \hline
 & 2(a+1)x^2+(3a-1)x+2 \\
 & 2(a+1)x^2-(a+1)x \\ \hline
 & 4ax+2 \\
 & 4ax-2a \\ \hline
 & 2a+2
\end{array}$$

$\therefore Q(x)=2x^2+(a+1)x+2a$, $R=2a+2$

이때 $Q(1)=0$이므로

$2+(a+1)+2a=0 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $Q(x)=2x^2-2$, $R=0$이므로

$Q(2)+R=Q(2)=2\times2^2-2=6$

14

$f(x)=x^3+ax^2-4x-3$에 대하여

$g(x)=f(x+2)$라 하면 $g(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$g(-1)=0$

즉, $g(-1)=f(-1+2)=f(1)=0$이므로

$f(1)=1^3+a\times1^2-4\times1-3=0$

$\therefore a=6$

답 6

15

$f(x)-1$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여

$f(-2)-1=0$, $f(2)-1=0$

$\therefore f(-2)=1, f(2)=1$ ……㉠

$xf(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$xf(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$\qquad\qquad=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입하면

$-3f(-2)=-3a+b$, $f(2)=a+b$

$\therefore -3a+b=-3, a+b=1$ ($\because$ ㉠)

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

따라서 구하는 나머지는 x이다.

답 x

다른 풀이

$f(x)-1$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)-1=(x+2)(x-2)Q'(x)$

즉, $f(x)=(x+2)(x-2)Q'(x)+1$이므로

$f(x+1)=(x+1+2)(x+1-2)Q'(x+1)+1$

$\qquad\qquad=(x+3)(x-1)Q'(x+1)+1$

$\therefore xf(x+1)=x(x+3)(x-1)Q'(x+1)+x$

$\qquad\qquad=x(x^2+2x-3)Q'(x+1)+x$

$\qquad\qquad=(x^2+2x-3)\times xQ'(x+1)+x$

따라서 $xf(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나눈 몫은 $xQ'(x+1)$이고 나머지는 x이다.

16

$P(x)$를 $\underset{x=-2}{\underline{x+2}}$로 나누는 조립제법은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
-2 & a & b & c & 1 \\
 & & \boxed{-4} & \boxed{-2} & \boxed{6} \\
\hline
 & 2 & 1 & -3 & 7
\end{array}
$$

즉, $a=2$, $b+(-4)=1$, $c+(-2)=-3$이므로

$a=2$, $b=5$, $c=-1$

$\therefore P(x)=2x^3+5x^2-x+1$

다항식 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 $P(3)$이므로

$P(3)=2\times3^3+5\times3^2-3+1=97$

답 97

다른 풀이

주어진 조립제법에서

$P(x)=(x+2)(2x^2+x-3)+7$

따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로

$P(3)=(3+2)\times(2\times3^2+3-3)+7=97$

17

$f(x)=x^6+1$이라 하고, $f(x)$를 $\underset{x=-1}{\underline{x+1}}$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrrrr|rl}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & \cdots\cdots(\text{i}) \\
 & & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & & \cdots\cdots(\text{ii})
\end{array}
$$

(i) $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$, 2이므로

$f(x)=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)+2$ ……㉠

(ii) $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는 각각 $x^4-2x^3+3x^2-4x+5$, -6이므로

$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

$=(x+1)(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)-6$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)\{(x+1)(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)-6\}+2$

$=(x+1)^2(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)-6(x+1)+2$

$=(x+1)^2(x^4-2x^3+3x^2-4x+5)-6x-4$

따라서 구하는 나머지는 $-6x-4$이다.

답 $-6x-4$

18

$f(x)=8x^3+8x^2-4x+3$이라 하고, $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누는 조립제법을 연속으로 사용하면 다음과 같다.

$x=-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$	8	8	-4	3	
		-4	-2	3	
$-\frac{1}{2}$	8	4	-6	6	……(i)
		-4	0		
$-\frac{1}{2}$	8	0	-6		……(ii)
		-4			
	8	-4			……(iii)

(i) $f(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$8x^2+4x-6$, 6이므로

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x-6)+6$ ……㉠

(ii) $8x^2+4x-6$을 $x+\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지는 각각

$8x$, -6이므로

$8x^2+4x-6=8x\left(x+\frac{1}{2}\right)-6$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{8x\left(x+\frac{1}{2}\right)-6\right\}+6$

$=8x\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{2}\right)+6$ ……㉡

(iii) $8x$를 $x+\frac{1}{2}$로 나눈 몫과 나머지는 각각 8, -4이므로

$8x=8\left(x+\frac{1}{2}\right)-4$

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x)=\left\{8\left(x+\frac{1}{2}\right)-4\right\}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{2}\right)+6$

$=8\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{2}\right)+6$

$=(2x+1)^3-(2x+1)^2-3(2x+1)+6$

(i), (ii), (iii)에서

$a=1$, $b=-1$, $c=-3$, $d=6$

$\therefore ad+bc=1\times6+(-1)\times(-3)=9$

답 9

STEP 2 개 념 마 무 리

본문 p.057

1 2	**2** 3	**3** -2	**4** -2
5 -6	**6** $-\frac{1}{24}$		

1

$f(x)=2x^2-4x+k$이므로

$f(x^2)=2x^4-4x^2+k$

이때 다항식 $f(x^2)$을 다항식 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어떨어지므로

$f(x^2)=f(x)Q(x)$에서

$2x^4-4x^2+k=(2x^2-4x+k)Q(x)$

$Q(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$2x^4-4x^2+k$

$=(2x^2-4x+k)(x^2+ax+b)$

$=2x^4+(2a-4)x^3+(2b-4a+k)x^2$

$+(-4b+ak)x+bk$

즉, $2a-4=0$, $2b-4a+k=-4$, $-4b+ak=0$, $bk=k$

이므로

$a=2$, $b=1$, $k=2$

답 2

2

x^4+x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$Q(x)=x^2+mx+n$ (m, n은 상수)이다. ← $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

x^4+x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)(x^2+mx+n)+x$
$=x^4+mx^3+nx^2-x^3-mx^2-nx+x^2+mx+n+x$
$=x^4+(m-1)x^3+(n-m+1)x^2+(-n+m+1)x+n$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$1=m-1$, $0=n-m+1$, $a=-n+m+1$, $b=n$

즉, $m=2$, $n=1$이므로

$a=2$, $n=1$

$\therefore a+b=3$

답 3

다른 풀이

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\
\cline{2-2}
x^2-x+1 & x^4+x^3+ax+b \\
 & x^4-x^3+x^2 \\
\cline{2-2}
 & 2x^3-x^2+ax+b \\
 & 2x^3-2x^2+2x \\
\cline{2-2}
 & x^2+(a-2)x+b \\
 & x^2-x+1 \\
\cline{2-2}
 & (a-1)x+b-1
\end{array}
$$

$\therefore (a-1)x+b-1=x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면 $a-1=1$, $b-1=0$이므로

$a=2$, $b=1$ $\qquad \therefore a+b=3$

3

2 이상의 자연수 n에 대하여 $P(x)$가 n차 다항식이라 하면 $P(x^2-1)$은 $2n$차 다항식이고 $2n \geq 4$이므로
$P(x^2-1)-x^2$도 $2n$차 다항식이다.

또한, $x^2P(x)$는 $(n+2)$차 다항식이므로 $x^2P(x)+a$도 $(n+2)$차 다항식이다.

이때 $P(x^2-1)-x^2=x^2P(x)+a$에서 좌변과 우변의 차수가 같아야 하므로

$2n=n+2$ $\qquad \therefore n=2$

(가)

즉, $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로
$P(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$P(x^2-1)-x^2=x^2P(x)+a$에서

$(x^2-1)^2+p(x^2-1)+q-x^2=x^2(x^2+px+q)+a$

$\therefore x^4+(p-3)x^2+1-p+q=x^4+px^3+qx^2+a$

(나)

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=p$, $p-3=q$, $1-p+q=a$

$\therefore a=-2$

(다)

답 -2

단계	채점 기준	배점
(가)	$P(x)$의 차수를 구한 경우	40%
(나)	x에 대한 항등식을 구한 경우	40%
(다)	a의 값을 구한 경우	20%

4

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 -2이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)=2$, $f(-2)=-2$ $\qquad$ ……㉠

$f(x)$를 x^4-16으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지 $R(x)$는 삼차 이하의 다항식이고

$f(x)=(x^4-16)Q(x)+R(x)$
$\quad =(x^2-4)(x^2+4)Q(x)+R(x)$
$\quad =(x+2)(x-2)(x^2+4)Q(x)+R(x)$ $\qquad$ ……㉡

이때 ㉡의 양변에 $x=2$, $x=-2$를 각각 대입하면

$R(2)=f(2)=2$, $R(-2)=f(-2)=-2$ ($\because$ ㉠)

한편, $f(x)$를 x^2+4로 나눈 나머지가 $9x-16$이므로 ㉡에서 삼차 이하의 다항식 $R(x)$를 x^2+4로 나눈 나머지도 $9x-16$이다.

$R(x)$를 x^2+4로 나눈 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$R(x)=(x^2+4)(ax+b)+9x-16$

$R(2)=2$에서

$8\times(2a+b)+9\times2-16=2$

$\therefore 2a+b=0$ $\qquad$ ……㉢

$R(-2)=-2$에서

$8\times(-2a+b)+9\times(-2)-16=-2$

$\therefore -2a+b=4$ $\qquad$ ……㉣

ⓒ, ⓓ을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

따라서 $R(x)=(x^2+4)(-x+2)+9x-16$이므로

$R(3)=(3^2+4)\times(-3+2)+9\times3-16=-2$

답 -2

5

조건 ㈎에서 $(x-1)P(x-2)=(x-7)P(x)$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $0=-6P(1)$

$\therefore P(1)=0$

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면 $6P(5)=0$

$\therefore P(5)=0$

삼차 다항식 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을

$ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 조건 ㈏에서

$P(x)=(x^2-4x+2)(ax+b)+2x-10$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=0$이므로

$P(1)=-(a+b)-8=0 \qquad \therefore a+b=-8$ ······ ㉢

㉡의 양변에 $x=5$를 대입하면 $P(5)=0$이므로

$P(5)=7(5a+b)=0 \qquad \therefore 5a+b=0$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-10$

이것을 ㉡에 대입하면

$P(x)=(x^2-4x+2)(2x-10)+2x-10$

$\therefore P(4)=(4^2-4\times4+2)\times(2\times4-10)+2\times4-10$

$=-6$

답 -6

다른 풀이

조건 ㈎에서 $P(1)=0$, $P(5)=0$

즉, $P(x)$는 $x-1$, $x-5$를 인수로 갖는 삼차 다항식이므로

$P(x)=a(x-1)(x-5)(x-k)$ (a, k는 상수, $a\neq0$) ······ ㉤

라 할 수 있다.

이때 $P(x-2)=a(x-3)(x-7)(x-k-2)$이므로

$(x-1)P(x-2)=(x-7)P(x)$에서

$a(x-1)(x-3)(x-7)(x-k-2)$

$=a(x-7)(x-1)(x-5)(x-k)$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$(x-3)(x-k-2)=(x-5)(x-k)$ ($\because a\neq0$)

에서 $k=3$

이것을 ㉤에 대입하면

$P(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$ ······ ㉥

$P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가

$2x-10$이므로

$a(x-1)(x-3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$

$\therefore a(x^2-4x+3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$ ······ ㉦

이때 $x^2-4x+2=0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하면

$\alpha^2-4\alpha+2=0$이므로 ㉦의 양변에 $x=\alpha$를 대입하면

$a(\alpha-5)=2\alpha-10=2(\alpha-5) \qquad \therefore a=2$

이것을 ㉥에 대입하면 $P(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$

$\therefore P(4)=2\times3\times1\times(-1)=-6$

6

$g(x)=xf(x)-1$의 양변에

$x=1$을 대입하면 $g(1)=f(1)-1=1-1=0$

$x=2$를 대입하면 $g(2)=2f(2)-1=2\times\frac{1}{2}-1=0$

$x=3$을 대입하면 $g(3)=3f(3)-1=3\times\frac{1}{3}-1=0$

$x=4$를 대입하면 $g(4)=4f(4)-1=4\times\frac{1}{4}-1=0$

따라서 $g(x)$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$를 모두 인수로 가지므로 차수가 가장 낮은 다항식 $g(x)$는

$g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (a는 상수) ······ ㉠

라 할 수 있다.

이때 $g(x)=xf(x)-1$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=-1$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=a\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)=24a$

이므로 $24a=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{24}$

따라서 $g(x)$의 최고차항의 계수는 $-\frac{1}{24}$이다.

답 $-\frac{1}{24}$

03. 인수분해

1 인수분해

기본 + 필수연습 본문 pp.062~063

01 (1) $ax^2(x+2y)$ (2) $(a-2)(b-2)$

02 (1) $(a+2b+c)(a+2b-c)$ (2) $(a-2b+3c)^2$
(3) $-(3a-2b)^3$ (4) $(a+5b)(a^2-5ab+25b^2)$
(5) $(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca)$ 또는
$\frac{1}{2}(a+2b-c)\{(a-2b)^2+(2b+c)^2+(c+a)^2\}$
(6) $(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

03 (1) $-(a-2)(a-b)$ (2) $(a-b)(a-b+c)$
(3) $3x^2(2a-3b)^2$ (4) $(a+b)(a-b)(a+c)$
(5) $(a+4b)(a^2-ab+7b^2)$
(6) $(a^2+b^2-2c^2)^2$

04 $4\sqrt{3}$ **05** 2

01

(1) $ax^3+2ax^2y=ax^2(x+2y)$

(2) $a(b-2)-2(b-2)=(a-2)(b-2)$

답 (1) $ax^2(x+2y)$
(2) $(a-2)(b-2)$

02

(1) $a^2+4ab+4b^2-c^2=(a+2b)^2-c^2$
$=(a+2b+c)(a+2b-c)$

(2) $a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca$
$=(a-2b+3c)^2$

(3) $-27a^3+54a^2b-36ab^2+8b^3$
$=-(27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3)$
$=-(3a-2b)^3$

(4) $a^3+125b^3=(a+5b)(a^2-5ab+25b^2)$

(5) $a^3+8b^3-c^3+6abc$
$=(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca)$
$=\frac{1}{2}(a+2b-c)\{(a-2b)^2+(2b+c)^2+(c+a)^2\}$

(6) $a^4+9a^2b^2+81b^4=a^4+18a^2b^2+81b^2-9a^2b^2$
$=(a^2+9b^2)^2-(3ab)^2$
$=(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

답 풀이 참조

03

(1) $a(2-a)-2b+ab=-a(a-2)+b(a-2)$
$=-(a-2)(a-b)$

(2) $(a-b)^2+ac-bc=(a-b)^2+c(a-b)$
$=(a-b)(a-b+c)$

(3) $12a^2x^2-36abx^2+27b^2x^2=3x^2(4a^2-12ab+9b^2)$
$=3x^2(2a-3b)^2$

(4) $a^3-b^2c-ab^2+a^2c=a(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(a+c)$
$=(a+b)(a-b)(a+c)$

(5) $(a+b)^3+27b^3$
$=\{(a+b)+3b\}\{(a+b)^2-3b(a+b)+9b^2\}$
$=(a+4b)(a^2+2ab+b^2-3ab-3b^2+9b^2)$
$=(a+4b)(a^2-ab+7b^2)$

(6) $a^4+b^4+4c^4+2a^2b^2-4b^2c^2-4c^2a^2$
$=(a^2)^2+(b^2)^2+(-2c^2)^2+2(a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)$
$=(a^2+b^2-2c^2)^2$

답 (1) $-(a-2)(a-b)$ (2) $(a-b)(a-b+c)$
(3) $3x^2(2a-3b)^2$ (4) $(a+b)(a-b)(a+c)$
(5) $(a+4b)(a^2-ab+7b^2)$
(6) $(a^2+b^2-2c^2)^2$

04

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$
$=(xy+1)(x+y)$

이때

$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$,

$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$

따라서 주어진 식의 값은

$(1+1)\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

답 $4\sqrt{3}$

05

$AB=x^3-y^3-6xy-8$

$=x^3+(-y)^3+(-2)^3-3\times x\times(-y)\times(-2)$

$=(x-y-2)(x^2+y^2+4+xy-2y+2x)$

$=\frac{1}{2}(x-y-2)\{(x+y)^2+(x+2)^2+(y-2)^2\}$

이때 $AB=0$이 되려면

$x-y-2=0$ ……㉠

또는 $x+y=0,\ x+2=0,\ y-2=0$ ……㉡

㉠에서 $x-y=2$

㉡에서 $x=-2,\ y=2$이므로 $x-y=-4$

따라서 $x-y$의 최댓값은 2이다.

답 2

STEP 1 개념 마무리 본문 p.064

01	-51	**02**	②	**03**	⑤	**04**	③
05	16	**06**	$-3(x-y+3)(x+2)(y-1)$				

01

$x^2(y-1)+y^2(x+1)=x^2y-x^2+xy^2+y^2$

$=xy(x+y)-(x^2-y^2)$

$=xy(x+y)-(x+y)(x-y)$

$=(x+y)\{xy-(x-y)\}$

$x+y=3,\ xy=-10$이므로

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$=3^2-4\times(-10)=49$

이때 $x>y$이므로

$x-y=7$

따라서 주어진 식의 값은

$3\times(-10-7)=-51$

답 -51

02

$4x^6+6x^3-x^4-3x^2$

$=x^4(4x^2-1)+3x^2(2x-1)$

$=x^4(2x+1)(2x-1)+3x^2(2x-1)$

$=x^2(2x-1)\{x^2(2x+1)+3\}$

$=x^2(2x-1)(2x^3+x^2+3)$

이때

ㄷ. $2x^3-x^2=x^2(2x-1)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

03

① $9a^2-36b^2=9(a^2-4b^2)=9(a+2b)(a-2b)$

② $8a^3-b^3c^6=(2a-bc^2)(4a^2+2abc^2+b^2c^4)$

③ $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3=(2x-y)^3$

④ $a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca=(a+2b-3c)^2$

⑤ $a^6-1=(a^3+1)(a^3-1)$

$=(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$

$=(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

다른 풀이

⑤ $a^6-1=(a^2-1)(a^4+a^2+1)$

$=(a+1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

04

$(x+1)^6-64$

$=\{(x+1)^3+8\}\{(x+1)^3-8\}$

$=\{(x+1)+2\}\{(x+1)^2-2(x+1)+4\}$

$\times\{(x+1)-2\}\{(x+1)^2+2(x+1)+4\}$

$=(x+3)(x-1)(x^2+2x+1-2x-2+4)$

$\times(x^2+2x+1+2x+2+4)$

$=(x+3)(x-1)(x^2+3)(x^2+4x+7)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

05

$a+b+c=ab+bc+ca=4$이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\times4=16-8=8$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=4\times(8-4)=16$

답 16

06

$x-y+3=A$, $-x-2=B$, $y-1=C$라 하면
$A+B+C=(x-y+3)+(-x-2)+(y-1)=0$
즉, $A^3+B^3+C^3-3ABC=0$에서
$A^3+B^3+C^3=3ABC$이므로
$(x-y+3)^3-(x+2)^3+(y-1)^3$
$=(x-y+3)^3+(-x-2)^3+(y-1)^3$
$=3(x-y+3)(-x-2)(y-1)$
$=-3(x-y+3)(x+2)(y-1)$

답 $-3(x-y+3)(x+2)(y-1)$

2 복잡한 식의 인수분해

기본 + 필수연습

본문 pp.068~076

06 (1) $(x-2y-1)(x-2y-4)$
(2) $(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)$
07 (1) $(x+4)(x+1)(x-1)(x-4)$
(2) $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$
08 (1) $(a-c)(a+b-c)$
(2) $(x+y+2)(x-2y-1)$
09 (1) $(x+3)(x-1)^2$
(2) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$
10 $(x^2-x+1)(x^2-4x+1)$
11 (1) 0 (2) 45 **12** 16
13 (1) -10 (2) 12 **14** 4
15 1 **16** $(x+2y-5)(x-3y+1)$
17 $3(x+y)(y+z)(z+x)$
18 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$
19 10 **20** 10 **21** (1) $\dfrac{2026}{2023}$ (2) 10505
22 39 **23** $b=c$인 이등변삼각형
24 정삼각형

06

(1) $x-2y=X$로 놓으면
$(x-2y)(x-2y-5)+4$
$=X(X-5)+4=X^2-5X+4$
$=(X-1)(X-4)$
$=(x-2y-1)(x-2y-4)$

(2) $(x+1)(x-2)(x+3)(x+6)+54$
$=\{(x+1)(x+3)\}\{(x-2)(x+6)\}+54$
$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-12)+54$
이때 $x^2+4x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+3)(X-12)+54$
$=X^2-9X+18$
$=(X-3)(X-6)$
$=(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)$

답 (1) $(x-2y-1)(x-2y-4)$
(2) $(x^2+4x-3)(x^2+4x-6)$

07

(1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-17x^2+16=X^2-17X+16$
$=(X-1)(X-16)$
$=(x^2-1)(x^2-16)$
$=(x+4)(x+1)(x-1)(x-4)$

(2) $x^4+9x^2+25=(x^4+10x^2+25)-x^2$
$=(x^2+5)^2-x^2$
$=(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

답 (1) $(x+4)(x+1)(x-1)(x-4)$
(2) $(x^2+x+5)(x^2-x+5)$

08

(1) 주어진 식을 b에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a-c)b+a^2-2ac+c^2$
$=b(a-c)+(a-c)^2$
$=(a-c)(a+b-c)$

(2) 주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+(1-y)x-2y^2-5y-2$

$=x^2+(1-y)x-(y+2)(2y+1)$

$=(x+y+2)(x-2y-1)$

답 (1) $(a-c)(a+b-c)$

(2) $(x+y+2)(x-2y-1)$

09

(1) $f(x)=x^3+x^2-5x+3$이라 하면

$f(1)=1+1-5+3=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-3)$

$=(x-1)(x+3)(x-1)$

$=(x+3)(x-1)^2$

(2) $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$이라 하면

$f(1)=1-1-7+1+6=0$,

$f(-1)=1+1-7-1+6=0$

이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$=(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$

답 (1) $(x+3)(x-1)^2$

(2) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$

10 본문 p.067 한 걸음 더 참고

$x^4-5x^3+6x^2-5x+1$

$=x^2\left(x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-4x+1)$

답 $(x^2-x+1)(x^2-4x+1)$

11

(1) $2x+y=X$로 놓으면

$(2x+y)^2-2(2x+y)-3$

$=X^2-2X-3$

$=(X+1)(X-3)$

$=(2x+y+1)(2x+y-3)$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-3$이므로

$a+b+c=2+1+(-3)=0$

(2) $(x^2+x)(x^2+5x+6)-15$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)-15$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-15$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15$

$x^2+3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X+2)-15$

$=X^2+2X-15$

$=(X-3)(X+5)$

$=(x^2+3x-3)(x^2+3x+5)$

따라서 $a=3$, $b=3$, $c=5$이므로

$abc=45$

답 (1) 0 (2) 45

12

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$

$=\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}+k$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$

$x^2+10x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+16)(X+24)+k$

$=\underline{X^2+40X+384+k}_{(*)}$

이때 위의 식이 이차식 $f(x)$에 대하여 $\{f(x)\}^2$으로 인수분해되므로 위의 식은 X에 대한 완전제곱식이어야 한다.
즉, $(X+20)^2=X^2+40X+400$에서
$384+k=400$이므로 $k=16$

답 16

다른 풀이

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\{f(x)\}^2=(x^2+ax+b)^2$$
$$=x^4+a^2x^2+b^2+2ax^3+2abx+2bx^2$$
$$=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한,

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$$
$$=(x^2+10x)^2+40(x^2+10x)+384+k \leftarrow (*)$$
$$=x^4+20x^3+140x^2+400x+384+k \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 항등식의 성질에 의하여
$2a=20$, $a^2+2b=140$, $2ab=400$, $b^2=384+k$
따라서 $a=10$, $b=20$이므로
$k=16$

13

(1) $x^2=X$, $y^2=Y$로 놓으면

$$x^4-10x^2y^2+9y^4=X^2-10XY+9Y^2$$
$$=(X-Y)(X-9Y)$$
$$=(x^2-y^2)(x^2-9y^2)$$
$$=(x+3y)(x+y)(x-y)(x-3y)$$

이때 $a>b>c>d$이므로
$a=3$, $b=1$, $c=-1$, $d=-3$

$$\therefore a+2b+3c+4d=3+2\times1+3\times(-1)+4\times(-3)$$
$$=-10$$

(2) $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$$=(x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

이때 $a>c$이므로
$a=2$, $b=3$, $c=-2$, $d=3$
$\therefore ad-bc=2\times3-3\times(-2)=12$

답 (1) -10 (2) 12

14

$$x^4-7x^2+1=(x^4+2x^2+1)-9x^2$$
$$=(x^2+1)^2-(3x)^2$$
$$=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$$

즉, $f(x)g(x)=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$이므로
$f(x)=x^2+3x+1$, $g(x)=x^2-3x+1$ 또는
$f(x)=x^2-3x+1$, $g(x)=x^2+3x+1$
$\therefore f(1)+g(1)=5+(-1)=4$

답 4

보충 설명

$$x^4-7x^2+1=(x^4-2x^2+1)-5x^2$$
$$=(x^2-1)^2-5x^2$$
$$=(x^2+\sqrt{5}x-1)(x^2-\sqrt{5}x+1)$$

로도 인수분해 가능하지만 각 항의 계수가 모두 정수인 조건을 만족시키지 않는다.

15

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2+2y^2-5xy-5y+kx-3$$
$$=2x^2+(-5y+k)x+2y^2-5y-3$$
$$=2x^2+(-5y+k)x+(y-3)(2y+1)$$

이 다항식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$$-(y-3)-2(2y+1)=-5y+k \leftarrow y\text{의 계수가 }-5\text{로 같아지는 경우를 찾는다.}$$
$$-5y+1=-5y+k$$
$$\therefore k=1$$

답 1

16

$x+y-z=1$에서 $z=x+y-1$
이것을 주어진 식에 대입하여 인수분해하면

$$x^2-xy-6y^2-9x+12y+5z$$
$$=x^2-xy-6y^2-9x+12y+5(x+y-1)$$
$$=x^2-(y+4)x-(6y^2-17y+5)$$
$$=x^2-(y+4)x-(2y-5)(3y-1)$$
$$=(x+2y-5)(x-3y+1)$$

답 $(x+2y-5)(x-3y+1)$

17

주어진 식을 전개하면

$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$

$-x^3-y^3-z^3$

$=x^3+xy^2+z^2x+2x^2y+2xyz+2zx^2$

$+x^2y+y^3+yz^2+2xy^2+2y^2z+2xyz$

$+zx^2+y^2z+z^3+2xyz+2yz^2+2z^2x$

$-x^3-y^3-z^3$

$=3x^2y+3zx^2+3xy^2+3z^2x+6xyz+3y^2z+3yz^2$

위의 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$3(y+z)x^2+3(y^2+2yz+z^2)x+3y^2z+3yz^2$

$=3(y+z)x^2+3(y+z)^2x+3yz(y+z)$

$=3(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$

$=3(x+y)(y+z)(z+x)$

답 $3(x+y)(y+z)(z+x)$

다른 풀이

$f(x, y, z)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$이라 하면

$f(x, y, z)$는 대칭식이고 이 식의 y 대신 $-x$를 대입하면

$f(x, -x, z)=(x-x+z)^3-x^3-(-x)^3-z^3$

$=z^3-x^3+x^3-z^3=0$

따라서 $x+y$가 $f(x, y, z)$의 인수이므로 $y+z$, $z+x$도 인수이다.

이때 $f(x, y, z)$는 3차식이므로

$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$=A(x+y)(y+z)(z+x)$ (단, A는 상수)

위의 식은 항등식이므로 $x=y=z=1$을 대입하여 정리하면

$A=3$

$\therefore$ $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$

18

$a^2=A$, $b^2=B$, $c^2=C$로 놓으면

$(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2$

$=(A+B+C)(AB+BC+CA)-ABC$

$=A^2B+ABC+CA^2+AB^2+B^2C+ABC$

$+ABC+BC^2+C^2A-ABC$

$=A^2B+CA^2+AB^2+B^2C+BC^2+C^2A+2ABC$

위의 식을 A에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(B+C)A^2+(B^2+2BC+C^2)A+B^2C+BC^2$

$=(B+C)A^2+(B+C)^2A+BC(B+C)$

$=(B+C)\{A^2+(B+C)A+BC\}$

$=(A+B)(B+C)(C+A)$

$=(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$

답 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$

다른 풀이

$a^2=A$, $b^2=B$, $c^2=C$로 놓으면

$(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2$

$=(A+B+C)(AB+BC+CA)-ABC$

$f(A, B, C)=(A+B+C)(AB+BC+CA)-ABC$

라 하면 $f(A, B, C)$는 대칭식이고

이 식의 B 대신 $-A$를 대입하면

$f(A, -A, C)=(A-A+C)(-A^2-AC+CA)+A^2C$

$=-A^2C+A^2C=0$

따라서 $A+B$가 $f(A, B, C)$의 인수이므로 $B+C$, $C+A$도 인수이다.

이때 $f(A, B, C)$가 3차식이므로

$(A+B+C)(AB+BC+CA)-ABC$

$=k(A+B)(B+C)(C+A)$ (단, k는 상수)

위의 식은 항등식이므로 $A=B=C=1$을 대입하여 정리하면

$k=1$

$\therefore$ $(A+B+C)(AB+BC+CA)-ABC$

$=(A+B)(B+C)(C+A)$

$=(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$

19

$f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$이라 하면

$f(-1)=-2-3+12-7=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2-5x-7)=(x+1)^2(2x-7)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-7$이므로

$a+b-c=10$

답 10

20

$f(x)=2x^3+4x^2+(a+6)x+a+4$라 하면

$f(-1)=-2+4-(a+6)+a+4=0$

이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 4 & a+6 & a+4 \\ & & -2 & -2 & -a-4 \\ \hline & 2 & 2 & a+4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+2x+a+4)$

따라서 $a=-1$, $b=a+4=3$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+3^2=10$

답 10

21

(1) $2024=x$로 놓으면

$$\frac{2025^3+1}{2024^3-1}=\frac{(x+1)^3+1}{x^3-1}$$

$$=\frac{\{(x+1)+1\}\{(x+1)^2-(x+1)+1\}}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x+2}{x-1}=\frac{2026}{2023}$$

(2) $100=x$로 놓으면

$\sqrt{101\times102\times103\times104+1}$

$=\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

$=\sqrt{\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+1}$

$=\sqrt{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1}$

$x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=\sqrt{(X+4)(X+6)+1}$

$=\sqrt{X^2+10X+25}$

$=\sqrt{(X+5)^2}$

$=\sqrt{(x^2+5x+5)^2}=x^2+5x+5$ ← $x=100$이므로 $x^2+5x+5\geq0$

$=100^2+5\times100+5=10505$

답 (1) $\frac{2026}{2023}$ (2) 10505

22

$15=x$로 놓으면

$(15^2+2\times15)^2-11\times(15^2+2\times15)+24$

$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$

이때 $x^2+2x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-11X+24$

$=(X-3)(X-8)$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$

$=(x+3)(x-1)(x+4)(x-2)$

$=18\times14\times19\times13$

$=(2\times3^2)\times(2\times7)\times19\times13$

$=2^2\times3^2\times7\times13\times19$

$\therefore a+b+c=7+13+19=39$

답 39

23

$a^2(b-c)-b^2(b+c)+c^2(b+c)=0$에서

$(b-c)a^2-(b^2-c^2)(b+c)=0$

$(b-c)a^2-(b-c)(b+c)^2=0$

$(b-c)\{a^2-(b+c)^2\}=0$

$(b-c)(a+b+c)(a-b-c)=0$

그런데 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$이고, $b+c>a$에서 $a-b-c<0$

$\therefore b=c$

따라서 주어진 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형

24

$a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$로 놓으면

$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$

에서

$x^3+y^3+z^3=3xyz$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 $x+y+z>0$

$\therefore x=y=z$

즉, $a+b=b+c=c+a$이므로

$a=b=c$

따라서 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.077~078

07 1	**08** ④	**09** -19	**10** 4
11 8	**12** 26		
13 $(x+y+2)(x+y-2)(x-y+1)(x-y-1)$			
14 10	**15** -2	**16** ①	**17** ⑤
18 13			

07

$(x^2-x)^2+2x^2-2x-15=(x^2-x)^2+2(x^2-x)-15$에서

$x^2-x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2+2X-15$

$=(X+5)(X-3)$

$=(x^2-x+5)(x^2-x-3)$

따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$이므로

$a+b+c=1$

답 1

08

$x(x-1)(x^2-x-1)-2=(x^2-x)(x^2-x-1)-2$에서

$x^2-x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X-1)-2$

$=X^2-X-2$

$=(X-2)(X+1)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)$

이때

ㄷ. $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

ㄹ. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

09

$(x^2+5x-3)(x^2+5x+5)+k=(x+2)(x+3)f(x)$이므로 양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-9)\times(-1)+k=0$, $9+k=0$ $\therefore k=-9$

즉, $(x^2+5x-3)(x^2+5x+5)-9$에서

$x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-3)(X+5)-9$

$=X^2+2X-24$

$=(X+6)(X-4)$

$=(x^2+5x+6)(x^2+5x-4)$

$=(x+2)(x+3)(x^2+5x-4)$

따라서 $f(x)=x^2+5x-4$이므로

$f(-3)=(-3)^2+5\times(-3)-4=-10$

$\therefore f(-3)+k=-10+(-9)=-19$

답 -19

10

x^4-14x^2+1을 인수분해하면

$x^4-14x^2+1=(x^4+2x^2+1)-16x^2$

$=(x^2+1)^2-(4x)^2$

$=(x^2+4x+1)(x^2-4x+1)$

(가)

이때 $f(x)$, $g(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$f(x)=x^2-4x+1$, $g(x)=x^2+4x+1$ 또는

$f(x)=x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-4x+1$

$\therefore f(x)+g(x)=2x^2+2$

(나)

나머지정리에 의하여 $f(x)+g(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는

$f(-1)+g(-1)=2\times(-1)^2+2=4$

(다)

답 4

단계	채점 기준	배점
(가)	$x^4-14x+1$을 인수분해한 경우	50%
(나)	$f(x)+g(x)$를 구한 경우	20%
(다)	$f(x)+g(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구한 경우	30%

11

x^4-ax^2+9는 최고차항의 계수가 1, 상수항이 9이고

x^2+bx-3을 인수로 가지므로

$x^4-ax^2+9=(x^2+bx-3)(x^2+cx-3)$

을 만족시키는 상수 c가 존재한다.

$\therefore\ x^4-ax^2+9$

$\quad =x^4+(b+c)x^3+(bc-6)x^2-(3b+3c)x+9$

위의 등식에서 양변의 계수를 비교하면

$b+c=0,\ bc-6=-a,\ 3b+3c=0$

$b+c=0$에서 $c=-b$

이것을 $bc-6=-a$에 대입하면

$a=b^2+6$

이때 a는 두 자리 자연수이고 b는 정수이므로

$b^2=2^2$일 때 $a=10$, $b^2=3^2$일 때 $a=15$,

$b^2=4^2$일 때 $a=22$, $\cdots$, $b^2=9^2$일 때 $a=87$

$b^2=1^2$일 때 $a=7$이므로 한 자리 자연수이고 $b^2=10^2$일 때 $a=106$이므로 세 자리 자연수이다.

따라서 두 자리 자연수 a는 8개이다.

답 8

12

주어진 식을 z에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$y^3+xy^2+y^2z-x^3-x^2y-x^2z$

$=(y^2-x^2)z+y^3-x^3+xy^2-x^2y$

$=(y^2-x^2)z+(y^3-x^3)+xy(y-x)$

$=(y+x)(y-x)z+(y-x)(y^2+xy+x^2)+xy(y-x)$

$=(y-x)\{(y+x)z+y^2+2xy+x^2\}$

$=(y-x)\{(y+x)z+(y+x)^2\}$

$=(y-x)(x+y)(x+y+z)=55$

이때 $55=5\times11$이고, $x<y<z$인 세 자연수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $y-x<x+y<x+y+z$이므로

$y-x=1,\ x+y=5,\ x+y+z=11$이어야 한다.

따라서 $x=2,\ y=3,\ z=6$이므로

$x+2y+3z=2+2\times3+3\times6=26$

답 26

13

$x+y=a,\ x-y=b$로 놓으면

$x^2+y^2=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=\dfrac{a^2+b^2}{2}$,

$xy=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=\dfrac{a^2-b^2}{4}$

$\therefore\ (x+y)^2(x-y)^2-5(x^2+y^2)+6xy+4$

$\quad =a^2b^2-5\times\dfrac{a^2+b^2}{2}+6\times\dfrac{a^2-b^2}{4}+4$

$\quad =a^2b^2-a^2-4b^2+4$

$\quad =a^2(b^2-1)-4(b^2-1)$

$\quad =(a^2-4)(b^2-1)$

$\quad =(a+2)(a-2)(b+1)(b-1)$

$\quad =(x+y+2)(x+y-2)(x-y+1)(x-y-1)$

답 $(x+y+2)(x+y-2)(x-y+1)(x-y-1)$

14

$h(x)=6x^4+x^3+5x^2+x-1$이라 하면 $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$이므로

$h(x)$는 $x+\dfrac{1}{2}$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$-\frac{1}{2}$	6	1	5	1	-1
		-3	1	-3	1
	6	-2	6	-2	0

$h(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(6x^3-2x^2+6x-2)$

$\quad =(2x+1)(3x^3-x^2+3x-1)$

$\quad =(2x+1)\{x^2(3x-1)+(3x-1)\}$

$\quad =(2x+1)(3x-1)(x^2+1)$

따라서 $a=2$이고,

$f(x)=3x-1,\ g(x)=x^2+1$ 또는

$f(x)=x^2+1,\ g(x)=3x-1$이므로

$f(a)+g(a)=f(2)+g(2)=5+5=10$

답 10

보충 설명

$h(x)=6x^4+x^3+5x^2+x-1$에서 $|\alpha|\geq1$이면 $f(\alpha)\neq0$이므로 $-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6}$ 중에서 $f(\alpha)=0$이 되는 α의 값을 찾는다.

15

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$,

$g(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$\quad =x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)$

$\quad =(x+2)(x+1)(x-1)$

또한, $g(1)=2+(a-2)+a-2a=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
따라서 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & a-2 & a & -2a \\ & & 2 & a & 2a \\ \hline & 2 & a & 2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(2x^2+ax+2a)$
이때 $x-1$은 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 공통인수이고 두 다항식의 차수가 가장 높은 공통인수 $p(x)$가 이차식이므로
$p(x)=(x-1)(x+1)$ 또는 $p(x)=(x-1)(x+2)$
(ⅰ) $p(x)=(x-1)(x+1)$일 때,
$x+1$은 $2x^2+ax+2a$의 인수이어야 하므로
$2-a+2a=0$, $2+a=0$ $\quad\therefore a=-2$
(ⅱ) $p(x)=(x-1)(x+2)$일 때,
$x+2$는 $2x^2+ax+2a$의 인수이어야 하므로
$8-2a+2a=0$
그런데 $8\neq0$이므로 $p(x)\neq(x-1)(x+2)$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값은 -2이다.

답 -2

16

$42=x$로 놓으면
$42\times(42-1)\times(42+6)+5\times42-5$
$=x(x-1)(x+6)+5x-5$
$=x(x-1)(x+6)+5(x-1)$
$=(x-1)\{x(x+6)+5\}$
$=(x-1)(x^2+6x+5)$
$=(x-1)(x+1)(x+5)$
$=(42-1)\times(42+1)\times(42+5)$
$=41\times43\times47$
$\therefore p+q+r=41+43+47=131$

답 ①

17

$f(x)=x^4-2(a^2+ab+b^2)x^2+(a+b)^2(a^2+b^2)$이라 하면
$f(x)$가 $x-c$로 나누어떨어지므로 $f(c)=0$이다. 즉,
$c^4-2(a^2+ab+b^2)c^2+(a+b)^2(a^2+b^2)=0$
$\{c^2-(a+b)^2\}\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$
$\{(a+b)^2-c^2\}(a^2+b^2-c^2)=0$
$(a+b+c)(a+b-c)(a^2+b^2-c^2)=0$
그런데 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a+b+c>0$이고, $a+b>c$에서 $a+b-c>0$
$\therefore a^2+b^2=c^2$
따라서 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ⑤

18

색종이의 한 변의 길이를 A라 하면
(작품의 가로의 길이)$=A\times$(가로 방향으로 놓인 개수),
(작품의 세로의 길이)$=A\times$(세로 방향으로 놓인 개수)
이므로 색종이의 한 변의 길이 A는 작품의 가로, 세로의 길이의 공통인수이다.
$f(n)=n^3+8n^2+17n+10$이라 하면
$f(-1)=-1+8-17+10=0$
이므로 $f(n)$은 $n+1$을 인수로 갖는다.
따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 8 & 17 & 10 \\ & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(n)=(n+1)(n^2+7n+10)=(n+1)(n+2)(n+5)$
또한, 세로의 길이 n^2+7n+6을 인수분해하면
$n^2+7n+6=(n+1)(n+6)$
따라서 작품의 가로, 세로의 길이의 공통인수는 $n+1$이므로 색종이의 한 변의 길이는 $n+1$이다.
$\therefore$ (가로 방향으로 놓인 개수)$=(n+2)(n+5)$,
(세로 방향으로 놓인 개수)$=n+6$
따라서 사용된 색종이의 개수는 $(n+2)(n+5)(n+6)$이므로
$(n+2)(n+5)(n+6)=(n+a)(n+b)(n+c)$에서
$a+b+c=2+5+6=13$

답 13

STEP 2 개념 마무리 본문 p.079

1 8	**2** $(a+b+c)^3$	**3** 27
4 9	**5** 8	**6** 15

1

$x^2+4x-c=(x-a)(x+b)$

$=x^2+(b-a)x-ab$

이므로 $b-a=4$, $ab=c$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c $(c\le 100)$는

$a=1$, $b=5$일 때 $c=5$,

$a=2$, $b=6$일 때 $c=12$,

$a=3$, $b=7$일 때 $c=21$, $\cdots$,

$a=8$, $b=12$일 때 $c=96$ ← $a=9$, $b=13$일 때 $c=117$이므로 $c>100$

따라서 조건을 만족시키는 c는 5, 12, 21, $\cdots$, 96의 8개이다.

답 8

2

$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3+3(a+b)\{c^2+(a+b)c+ab\}$

이때 $a+b=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^3-3abX+c^3+3X\{c^2+Xc+ab\}$

$=X^3-3abX+c^3+3c^2X+3cX^2+3abX$

$=X^3+3cX^2+3c^2X+c^3$

$=(X+c)^3=(a+b+c)^3$

답 $(a+b+c)^3$

다른 풀이

$a+b+c=Y$로 놓으면

$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$+3abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=Y\{Y^2-3(ab+bc+ca)\}$

$+3abc+3(Y-c)(Y-a)(Y-b)$

$=4Y^3-3(a+b+c)Y^2$

$=4Y^3-3Y^3=Y^3=(a+b+c)^3$

3

$x-1$이 $f(x)=x^4+ax^3+bx-1$의 인수이므로

$f(1)=1+a+b-1=0$

$a+b=0 \qquad \therefore b=-a$

이것을 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=x^4+ax^3-ax-1$

또한, $f(-1)=1-a+a-1=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & a & 0 & -a & -1 \\
 & & 1 & a+1 & a+1 & 1 \\
\hline
-1 & 1 & a+1 & a+1 & 1 & 0 \\
 & & -1 & -a & -1 & \\
\hline
 & 1 & a & 1 & 0 &
\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+ax+1)$ ……㉠

이때 $f(x)$는 x의 계수와 상수항이 정수인 네 일차식의 곱으로 인수분해되므로 x^2+ax+1은

$(x+m)(x+n)$ (m, n은 정수)으로 인수분해된다.

$\therefore x^2+ax+1=(x+m)(x+n)$

$=x^2+(m+n)x+mn$

즉, $m+n=a$, $mn=1$이므로

$m=1$, $n=1$ 또는 $m=-1$, $n=-1$

(i) $m=1$, $n=1$일 때, $a=2$

(ii) $m=-1$, $n=-1$일 때, $a=-2$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+1)$

$=(x-1)(x+1)^3$

$\therefore f(a)=f(2)=1\times 3^3=27$

답 27

4

조건 (가)에서 $(x+3)f(x)=(x-4)g(x)$는 x에 대한 항등식이므로 $f(x)$는 $x-4$를 인수로 갖고, $g(x)$는 $x+3$을 인수로 갖는다.

따라서 조건 (나)의 $f(x)g(x)$는 $x-4$, $x+3$을 모두 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
4 & 1 & -11 & 23 & 95 & -300 \\
 & & 4 & -28 & -20 & 300 \\
\hline
-3 & 1 & -7 & -5 & 75 & 0 \\
 & & -3 & 30 & -75 & \\
\hline
 & 1 & -10 & 25 & 0 &
\end{array}$$

$f(x)g(x)=(x-4)(x+3)(x^2-10x+25)$

$=(x-4)(x+3)(x-5)^2$

$\therefore f(x)=(x-4)(x-5)$, $g(x)=(x+3)(x-5)$

$\therefore f(3)-g(4)=2-(-7)=9$

답 9

5

(ⅰ) $a^3-ab^2-b^2c+a^2c=0$의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(a^2-b^2)c+a^3-ab^2=0$

$(a^2-b^2)c+a(a^2-b^2)=0$, $(a^2-b^2)(c+a)=0$

$(a+b)(a-b)(c+a)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>0$, $c+a>0$

$\therefore a=b$

(ⅱ) $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$의 좌변을 c에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

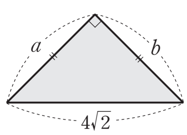
$-(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$

$-(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

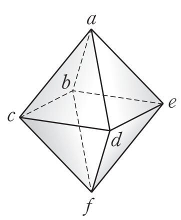


(ⅰ), (ⅱ)에서 △ABC는 빗변의 길이가 $c=4\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $a=b=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

답 8

6



오른쪽 그림과 같이 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 a, b, c, d, e, f라 하면 여덟 개의 정삼각형의 면에 적힌 수의 합은

$abc+acd+ade+abe$

$\quad+fbc+fcd+fde+fbe$

$=a(bc+cd+de+be)+f(bc+cd+de+be)$

$=(a+f)(bc+cd+de+be)$

$=(a+f)\{c(b+d)+e(b+d)\}$

$=(a+f)(b+d)(c+e)=105$

이때 a, b, c, d, e, f는 모두 자연수이고, $105=3\times5\times7$이므로

$(a+f)+(b+d)+(c+e)=3+5+7=15$

답 15

Ⅱ. 방정식과 부등식

04. 복소수

1 복소수와 그 연산

기본 + 필수연습 본문 pp.085~087

01 ㄱ, ㄹ

02 (1) $x=4$, $y=4$ (2) $x=3$, $y=1$

03 (1) $2\sqrt{3}+6i$ (2) $\sqrt{7}$ (3) $9i$

04 (1) $2+2i$ (2) $3-3i$ (3) $2i$ (4) $-i$

05 (1) $a=-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

(2) $a=3$, $b=21$

06 0

01

ㄱ. 허수는 허수부분이 0이 아닌 복소수이다. (참)

ㄴ. 0은 실수이므로 복소수이다. (거짓)

ㄷ. $3-i$의 실수부분은 3이고 허수부분은 -1이다. (거짓)

ㄹ. 복소수 z가 실수이면 허수부분은 0이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

02

(1) $x+(x-y)i=4$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=4$, $x-y=0$

$\therefore x=4$, $y=4$

(2) $(x+2y)-(-2x+y)i=5+5i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+2y=5$, $-(-2x+y)=5$

두 식을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=1$

답 (1) $x=4$, $y=4$ (2) $x=3$, $y=1$

03

(1) $\overline{2\sqrt{3}-6i}=2\sqrt{3}+6i$

(2) $\sqrt{7}$은 실수이므로 $\overline{\sqrt{7}}=\sqrt{7}$

(3) $-9i$는 순허수이므로 $\overline{-9i}=9i$

답 (1) $2\sqrt{3}+6i$ (2) $\sqrt{7}$ (3) $9i$

04

(1) $3(1+i)+i(i-1)=3+3i+i^2-i$

$=3+3i-1-i$

$=2+2i$

(2) $(1-i)-2i(i+1)=1-i-2i^2-2i$

$=1-i+2-2i$

$=3-3i$

(3) $(1+i)^2=1+2i+i^2$

$=1+2i-1=2i$

(4) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-2i-1}{1+1}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

답 (1) $2+2i$ (2) $3-3i$ (3) $2i$ (4) $-i$

05

(1) $(a-bi)^2=-6+8i$에서

$a^2-b^2-2abi=-6+8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=-6$ ……㉠, $-2ab=8$ ……㉡

㉡에서 $a=-\dfrac{4}{b}$ $(b\neq0)$

이 식을 ㉠에 대입하면

$\left(-\dfrac{4}{b}\right)^2-b^2=-6$, $\dfrac{16}{b^2}-b^2=-6$

$b^4-6b^2-16=0$, $(b^2+2)(b^2-8)=0$

이때 b는 실수이므로 $b^2+2\neq0$

$b^2=8$ $\quad\therefore b=\pm2\sqrt{2}$

$b=2\sqrt{2}$를 $a=-\dfrac{4}{b}$에 대입하면 $a=-\sqrt{2}$

$b=-2\sqrt{2}$를 $a=-\dfrac{4}{b}$에 대입하면 $a=\sqrt{2}$

따라서 구하는 실수 a, b의 값은

$a=-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=12-9i$에서

$\dfrac{a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\dfrac{b(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{a+ai}{2}+\dfrac{b-bi}{2}$

$=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}i$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{a+b}{2}=12$, $\dfrac{a-b}{2}=-9$

즉, $a+b=24$, $a-b=-18$

따라서 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=21$

답 (1) $a=-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

(2) $a=3$, $b=21$

06

$z\neq4$에서 $z-4\neq0$

(i) $b=0$일 때,

$z=a$이므로 $\dfrac{iz}{z-4}=\dfrac{a}{a-4}i$

이 복소수의 허수부분이 0이므로

$\dfrac{a}{a-4}=0$ $\quad\therefore a=0$

따라서 $a^2+b^2-4a=0$

(ii) $b\neq0$일 때, $z=a+bi$이므로

$\dfrac{iz}{z-4}=\dfrac{i(a+bi)}{a+bi-4}$

$=\dfrac{ai-b}{(a-4)+bi}$

$=\dfrac{(ai-b)\{(a-4)-bi\}}{\{(a-4)+bi\}\{(a-4)-bi\}}$

$=\dfrac{a(a-4)i+ab-b(a-4)+b^2i}{(a-4)^2+b^2}$

$=\dfrac{4b+\{a(a-4)+b^2\}i}{(a-4)^2+b^2}$

$=\dfrac{4b}{(a-4)^2+b^2}+\dfrac{a(a-4)+b^2}{(a-4)^2+b^2}i$

이 복소수의 허수부분이 0이므로

$\dfrac{a(a-4)+b^2}{(a-4)^2+b^2}=0$, $a(a-4)+b^2=0$

$\therefore a^2+b^2-4a=0$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2-4a=0$

답 0

STEP 1 개념 마무리 본문 p.088

01 2	**02** 3	**03** -1	**04** 1
05 5	**06** 2		

01

$\sqrt{2}-i^2=\sqrt{2}+1$, $\sqrt{121}i=11i$, $\sqrt{(-5)^2}=5$이므로

주어진 복소수 중에서 실수인 것은

$\sqrt{2}-i^2$, $2\pi+3$, $3-\sqrt{10}$, $\sqrt{(-5)^2}$

이고, 허수인 것은

$\sqrt{121}i$, $-3i+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 허수의 개수는 2이다.

답 2

02

$(a-4)+(b-1)i$가 순허수이므로

$a-4=0$, $b-1\neq0$

$\therefore a=4$, $b\neq1$

$a=4$를 $a+b^2=5$에 대입하면

$4+b^2=5$, $b^2=1$

$\therefore b=-1$ ($\because b\neq1$)

$\therefore a+b=4+(-1)=3$

답 3

03

$z=(x^2-4)+(x-2)(x+1)i$ ……㉠

에서 $z<0$이려면 z는 실수이어야 하므로

$(x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ⅰ) $x=-1$을 ㉠에 대입하면

$z=-3<0$

(ⅱ) $x=2$를 ㉠에 대입하면

$z=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 x의 값은 -1이다.

답 -1

04

$|x-y|+(x-2)i=5-4i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=5$, $x-2=-4$ ……㉠

㉠에서 $x=-2$

이것을 $|x-y|=5$에 대입하면

$|-2-y|=5$에서

$-2-y=-5$ 또는 $-2-y=5$

$\therefore y=-7$ 또는 $y=3$

이때 $xy<0$이므로 $y=3$

$\therefore x+y=-2+3=1$

답 1

05

$(3+2i)x^2-5x(2y+i)=\overline{8-12i}$에서

$3x^2+2x^2i-10xy-5xi=8+12i$

$\therefore (3x^2-10xy)+(2x^2-5x)i=8+12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x^2-10xy=8$ ……㉠, $2x^2-5x=12$ ……㉡

㉡에서 $2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x$는 정수)

이것을 ㉠에 대입하면

$3\times4^2-10\times4y=8$

$40y=40$ $\therefore y=1$

$\therefore x+y=4+1=5$

답 5

06

$\dfrac{1}{1-ai}=\dfrac{1}{2}+bi$의 좌변에서

$\dfrac{1}{1-ai}=\dfrac{1+ai}{(1-ai)(1+ai)}=\dfrac{1+ai}{1+a^2}$

즉, $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{a}{1+a^2}i=\dfrac{1}{2}+bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{1}{1+a^2}=\dfrac{1}{2}$ ……㉠, $\dfrac{a}{1+a^2}=b$ ……㉡

㉠에서 $1+a^2=2$, $a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

이것을 ㉡에 대입하면 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+2b=1+2\times\frac{1}{2}=2$

답 2

2 복소수의 성질

기본 + 필수연습

본문 pp.092~099

07 (1) $-i$ (2) $4i$ (3) $8i$ (4) 1

08 (1) $2-3i$ (2) $-6i$ (3) 13 (4) $-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$

09 $1+i$ 또는 $-1-i$

10 (1) $-6-3i$ (2) $-10-\sqrt{3}i$

11 (1) $-i$ (2) -1 (3) $-i$

12 (1) $-1-i$ (2) $-50+50i$

13 (1) 5 (2) $-\frac{4}{3}$

14 $2+10i$

15 $3+\sqrt{3}i$

16 (1) 4 (2) 5

17 -2, 2

18 10

19 (1) -3 (2) 6

20 0

21 (1) $3-4i$ (2) $1+2i$

22 $2+i$, $2-i$

23 $-1-\sqrt{2}i$

24 ㄱ

25 $2b$

07

(1) $(-i)^{29}=(-1)^{29}\times i^{29}$

$=(-1)\times(i^4)^7\times i=-i$

(2) $i-i^3+i^5-i^7=i-(-i)+i^4\times i-i^4\times i^3$

$=i+i+i-(-i)$

$=4i$

(3) $(1-i)^2=1-2i-1=-2i$이므로

$(1-i)^6=\{(1-i)^2\}^3=(-2i)^3=(-2)^3\times i^3$

$=(-8)\times(-i)=8i$

(4) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i-1}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^4=(-i)^4=(-1)^4\times i^4=1$

답 (1) $-i$ (2) $4i$ (3) $8i$ (4) 1

08

(1) $\overline{(\bar{z})}=\overline{(\overline{2-3i})}=\overline{2+3i}=2-3i$

(2) $z-\bar{z}=2-3i-\overline{2-3i}$

$=2-3i-(2+3i)$

$=2-3i-2-3i=-6i$

(3) $z\times\bar{z}=(2-3i)(\overline{2-3i})$

$=(2-3i)(2+3i)$

$=4+9=13$

(4) $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{2-3i}{\overline{2-3i}}=\frac{2-3i}{2+3i}$

$=\frac{(2-3i)^2}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{4-12i-9}{4+9}$

$=\frac{-5-12i}{13}=-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$

답 (1) $2-3i$ (2) $-6i$ (3) 13 (4) $-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$

09

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

이때 $z^2=2i$이므로

$a^2-b^2=0$ ……㉠, $2ab=2$ ……㉡

㉠에서 $a^2=b^2$ $\therefore a=\pm b$

(i) $a=b$를 ㉡에 대입하면

$2b^2=2$, $b^2=1$

즉, $b=\pm1$이므로

$a=1$, $b=1$ 또는 $a=-1$, $b=-1$

(ii) $a=-b$를 ㉡에 대입하면

$-2b^2=2$ $\therefore b^2=-1$

이를 만족시키는 실수 a, b는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 복소수 z는 $1+i$ 또는 $-1-i$이다.

답 $1+i$ 또는 $-1-i$

10

(1) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{-4}\sqrt{-9}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}i}+\sqrt{4}i\times\sqrt{9}i$

$=\sqrt{9}\times\frac{1}{i}-6$

$=-6-3i$

(2) $\sqrt{-5}\sqrt{-2}\sqrt{2}\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=\sqrt{5}i\times\sqrt{2}i\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i}$

$=-10+\sqrt{3}\times\dfrac{1}{i}=-10-\sqrt{3}i$

답 (1) $-6-3i$ (2) $-10-\sqrt{3}i$

11

(1) $1-i+i^2-i^3=1-i-1+i=0$이므로

$1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{50}$

$=(1-i+i^2-i^3)+i^4(1-i+i^2-i^3)$

$\quad+i^8(1-i+i^2-i^3)+\cdots+i^{44}(1-i+i^2-i^3)$

$\quad+i^{48}(1-i+i^2)$

$=i^{48}(1-i+i^2)$

$=(i^4)^{12}\times(1-i-1)$

$=-i$

(2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{50}=i^{50}=(i^4)^{12}\times i^2=-1$

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{101}=(-i)^{101}=(-1)^{101}\times(i^4)^{25}\times i=-i$

답 (1) $-i$ (2) -1 (3) $-i$

다른 풀이

(1) $z=1-i+i^2-i^3+\cdots+i^{50}$이라 하면

$iz=i-i^2+i^3-\cdots-i^{50}+i^{51}$

즉, $z+iz=1+\underbrace{i^{51}}_{=(i^4)^{12}\times i^3}$이므로

$(1+i)z=1-i \qquad \therefore z=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

12

(1) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}=\dfrac{1}{i}-1-\dfrac{1}{i}+1=0$이므로

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{2002}}$

$=\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\dfrac{1}{i^4}\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)$

$\quad+\dfrac{1}{i^8}\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^4}\right)+\cdots+\dfrac{1}{i^{2000}}\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}\right)$

$=\dfrac{1}{i^{2000}}\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}\right)=\dfrac{1}{(i^4)^{500}}\left(\dfrac{1}{i}-1\right)$

$=-1-i$

(2) $1-2i+3i^2-4i^3+\cdots-100i^{99}$

$=(1-2i+3i^2-4i^3)+i^4(5-6i+7i^2-8i^3)$

$\quad+i^8(9-10i+11i^2-12i^3)+\cdots$

$\quad+i^{96}(97-98i+99i^2-100i^3)$

$=(1-2i-3+4i)+i^4(5-6i-7+8i)$

$\quad+i^8(9-10i-11+12i)+\cdots$

$\quad+i^{96}(97-98i-99+100i)$

$=(-2+2i)+i^4(-2+2i)+i^8(-2+2i)+\cdots$

$\quad+i^{96}(-2+2i)$

$=25(-2+2i)=-50+50i$

답 (1) $-1-i$ (2) $-50+50i$

13

(1) $z=\dfrac{1-\sqrt{5}i}{3}$에서 $3z-1=-\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면

$9z^2-6z+1=-5$, $9z^2-6z+6=0$

즉, $3z^2-2z+2=0$이므로

$3z^2-2z+7=(3z^2-2z+2)+5$

$=0+5=5$

(2) $x+y=\dfrac{-1-\sqrt{5}i}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}i}{2}=-1$,

$xy=\dfrac{-1-\sqrt{5}i}{2}\times\dfrac{-1+\sqrt{5}i}{2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

이므로

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\times\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{4}{3}$

답 (1) 5 (2) $-\dfrac{4}{3}$

14

$z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$ ······㉠

즉, $z-1=-2i$의 양변을 제곱하면

$z^2-2z+1=-4$ $\quad\therefore z^2-2z+5=0$ ······㉡

이때 z^3-3z^2+2z+2를 z^2-2z+5로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r}
z\ -1 \\
z^2-2z+5\ \overline{)\ z^3-3z^2+2z+2} \\
\underline{z^3-2z^2+5z} \\
-z^2-3z+2 \\
\underline{-z^2+2z-5} \\
-5z+7
\end{array}$$

$\therefore z^3-3z^2+2z+2$

$=(z^2-2z+5)(z-1)-5z+7$

$=-5z+7$ ($\because$ ㉡)

$=-5(1-2i)+7$ ($\because$ ㉠)

$=2+10i$

답 $2+10i$

15

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$, $4z^2+4z+4=0$

$\therefore z^2+z+1=0$ ······㉠

㉠의 양변에 $z-1$을 곱하면

$(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z^3-1=0$ $\quad\therefore z^3=1$ ······㉡

$\therefore z^4+2z^3+3z^2+4z+5=z^3(z+2)+3z^2+4z+5$

$=3z^2+5z+7$ ($\because$ ㉡)

$=3(z^2+z+1)+2z+4$

$=2z+4$ ($\because$ ㉠)

$=2\times\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+4$

$=3+\sqrt{3}i$

답 $3+\sqrt{3}i$

16

(1) $z=(1+i)x^2+(1-i)x-6-12i$

$=(x^2+x-6)+(x^2-x-12)i$

0이 아닌 복소수 z에 대하여 $z-\overline{z}=0$, 즉 $z=\overline{z}$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$\therefore x^2+x-6\neq0$, $x^2-x-12=0$

(i) $x^2+x-6\neq0$에서 $(x+3)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq2$

(ii) $x^2-x-12=0$에서 $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=4$

(2) $\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$

$=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}$

$=(-1+2i)\overline{(-1+2i)}=(-1+2i)(-1-2i)$

$=1+4=5$

답 (1) 4 (2) 5

17

$z=(3+i)x^2-5x-2-4i$

$=(3x^2-5x-2)+(x^2-4)i$

복소수 z에 대하여 $\overline{(\overline{z})}=\overline{z}$, 즉 $z=\overline{z}$이므로 z는 실수이다.

$\therefore x^2-4=0$

즉, $(x+2)(x-2)=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$

답 -2, 2

18

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=3-i$, $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}=2+i$이므로

$\alpha+\beta=3+i$, $\alpha\beta=2-i$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(3+i)^2-4(2-i)$

$=(9+6i+i^2)-8+4i=10i$

따라서 복소수 $(\alpha-\beta)^2$의 허수부분은 10이다.

답 10

19

(1) $z=(1-2i)x^2+(5-3i)x+6+2i$

$=(x^2+5x+6)+(-2x^2-3x+2)i$

z가 순허수이므로

$x^2+5x+6=0$, $-2x^2-3x+2\neq0$

(ⅰ) $x^2+5x+6=0$에서 $(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

(ⅱ) $-2x^2-3x+2\neq0$에서 $2x^2+3x-2\neq0$

$(x+2)(2x-1)\neq0$

$\therefore x\neq-2$이고 $x\neq\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-3$

(2) $z=x(2-i)+3(-4+i)=(2x-12)+(-x+3)i$

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 하므로

$2x-12=0,\ -x+3\neq0$

$\therefore x=6$

답 (1) -3 (2) 6

20

$z=(1+i)x^2+(i-3)x+2-2i$

$=(x^2-3x+2)+(x^2+x-2)i$

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$x^2+x-2=0$ 또는 $x^2-3x+2=0$

(ⅰ) $x^2+x-2=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

(ⅱ) $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x=1$이면 $z=0$이므로

$x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$(-2)+2=0$

답 0

21

(1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$2iz-\bar{z}=2i(a+bi)-(a-bi)$

$=(-a-2b)+(2a+b)i$

즉, $(-a-2b)+(2a+b)i=5+2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a-2b=5,\ 2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-4$

$\therefore z=3-4i$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(1+i)\bar{z}+(1+2i)z$

$=(1+i)(a-bi)+(1+2i)(a+bi)$

$=(a+b)+(a-b)i+(a-2b)+(2a+b)i$

$=(2a-b)+3ai$

즉, $(2a-b)+3ai=3i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a-b=0,\ 3a=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

$\therefore z=1+2i$

답 (1) $3-4i$ (2) $1+2i$

22

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$z+\bar{z}=4,\ z\bar{z}=5$에서

$(a+bi)+(a-bi)=4,\ (a+bi)(a-bi)=5$

$\therefore 2a=4,\ a^2+b^2=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=\pm1$

$\therefore z=2+i$ 또는 $z=2-i$

답 $2+i,\ 2-i$

23

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

조건 (가)의 좌변에서

$(z+\bar{z})i+z\bar{z}$

$=\{(a+bi)+(a-bi)\}i+(a+bi)(a-bi)$

$=2ai+a^2+b^2$

즉, $(a^2+b^2)+2ai=3-2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2=3,\ 2a=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=\pm\sqrt{2}$ ······㉠

조건 (나)에서 $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

이때 $2b<0$이므로 $b<0$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1,\ b=-\sqrt{2}$

$\therefore z=-1-\sqrt{2}i$

답 $-1-\sqrt{2}i$

다른 풀이

복소수 z에 대하여 $z+\bar{z}$, $z\bar{z}$는 실수이므로 조건 ㈎에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$z+\bar{z}=-2$ ……ⓒ, $z\bar{z}=3$

$\therefore (z-\bar{z})^2=(z+\bar{z})^2-4z\bar{z}$
$=(-2)^2-4\times3$
$=-8$

$\therefore z-\bar{z}=-2\sqrt{2}i$ ……ⓓ ($\because$ 조건 ㈏)

ⓒ+ⓓ을 하면 $2z=-2-2\sqrt{2}i$

$\therefore z=-1-\sqrt{2}i$

24

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a<0$, $b<0$

ㄱ. $a+b<0$이므로

$(\sqrt{a+b})^2=\sqrt{a+b}\sqrt{a+b}$
$=-\sqrt{(a+b)^2}$
$=-|a+b|$
$=-\{-(a+b)\}$
$=a+b$ (참)

ㄴ. $a<0$, $-b>0$이므로

$\sqrt{a}\sqrt{-b}=\sqrt{-ab}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{-a}i$의 켤레복소수는

$-\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{-a}i$, 즉 $-\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

25

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a\neq0$, $b\neq0$이므로 $a>0$, $b<0$

$\therefore \sqrt{ab}-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}\sqrt{b}-\sqrt{b^2}$
$=\sqrt{ab}-\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}-\sqrt{b^2}$
$=-2|b|=(-2)\times(-b)=2b$

답 $2b$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.100~101

07 16	**08** 22	**09** 1	**10** 1
11 $5-11i$	**12** -8	**13** -1	**14** 8
15 ⑤	**16** 4	**17** 3	
18 $-a-b+c$			

07

음이 아닌 정수 n에 대하여

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$이므로

$i+i^2+i^3+i^4=i^2+i^3+i^4+i^5=\cdots=0$

$\therefore (i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$
$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})$
$=\{(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$
$+(i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16})+i^{17}+i^{18}\}$
$+\{(i^2+i^3+i^4+i^5)+(i^6+i^7+i^8+i^9)+\cdots$
$+(i^{14}+i^{15}+i^{16}+i^{17})+i^{18}+i^{19}\}$
$=(i^{17}+i^{18})+(i^{18}+i^{19})$
$=(i-1)+(-1-i)=-2$

따라서 $a=-2$, $b=0$이므로

$4(a+b)^2=16$

답 16

다른 풀이

$i+i^{19}=i-i=0$이므로

$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$
$=i+\{(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})\}$
$+i^{19}$
$=(i+i)+(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+\cdots+(i^{19}+i^{19})$
$=2(i+i^2+i^3+\cdots+i^{19})$
$=2\{(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)+\cdots$
$+(i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16})+i^{17}+i^{18}+i^{19}\}$
$=2(i-1-i)=-2$

08

$\dfrac{1}{i}=-i$, $\dfrac{1}{i^2}=-1$, $\dfrac{1}{i^3}=i$, $\dfrac{1}{i^4}=1$이므로

$\dfrac{1}{i}=-i$

$\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}=-i-1$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=-i-1+i=-1$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=-i-1+i+1=0$

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}=0+\frac{1}{i}=-i$

$\vdots$

즉, 등식 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^n}=-i$가 성립하도록 하는 자연수 n은 $n=4k+1$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 꼴이다.

이때 n은 두 자리 자연수이므로 $10\leq n<100$, 즉

$10\leq 4k+1<100$, $9\leq 4k<99$

$\therefore 2.\times\times\times\leq k<24.\times\times\times$ ← $k=3, 4, 5, \cdots, 24$

따라서 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 n은

13, 17, 21, $\cdots$, 97의 22개이다.

답 22

09

$a=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2a-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2-4a+4=0$

$\therefore a^2-a+1=0$ ……㉠

㉠의 양변에 $a+1$을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0$, $a^3+1=0$

$\therefore a^3=-1$ ……㉡

$\therefore 1-a+a^2-a^3+\cdots-a^{15}$

$=(1-a+a^2)-a^3(1-a+a^2)+\cdots$

$+a^{12}(1-a+a^2)-a^{15}$

$=0-(a^3)^5$ ($\because$ ㉠)

$=-(-1)^5$ ($\because$ ㉡)

$=1$

답 1

10

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1001}=(-i)^{1001}$

$=(-1)^{1001}\times(i^4)^{250}\times i=-i$

$\therefore d\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1001}\right)=d(-i)=\sqrt{(-i)\times i}$

$=\sqrt{1}=1$

답 1

11

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=3+2i$이므로

$z_1-z_2=3-2i$

$\overline{z_1}\times\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=5+5i$이므로

$z_1z_2=5-5i$

$\therefore (z_1-3)(z_2+3)=z_1z_2+3(z_1-z_2)-9$

$=5-5i+3(3-2i)-9$

$=5-11i$

답 $5-11i$

12

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$\bar{z}^2=(a-bi)^2=a^2-b^2-2abi$

즉, $a^2-b^2-2abi=-2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$ ……㉠, $-2ab=-2$ ……㉡

㉠에서 $a^2=b^2$ $\therefore a=\pm b$

(ⅰ) $a=b$를 ㉡에 대입하면

$-2b^2=-2$, $b^2=1$

즉, $b=\pm1$이므로

$a=1$, $b=1$ 또는 $a=-1$, $b=-1$

(ⅱ) $a=-b$를 ㉡에 대입하면

$2b^2=-2$ $\therefore b^2=-1$

이를 만족시키는 실수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $z=1+i$ 또는 $z=-1-i$

이때 $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=2$,

$z^2=(a+bi)(a+bi)=a^2-b^2+2abi=2i$이므로

$z^4+z^3\bar{z}+z\bar{z}^3+\bar{z}^4$

$=(z^2)^2+z\bar{z}(z^2+\bar{z}^2)+(\bar{z}^2)^2$

$=(2i)^2+2(2i-2i)+(-2i)^2$

$=-4+0-4$

$=-8$

답 -8

다른 풀이

$\bar{z}^2=-2i$이므로 $\overline{(\bar{z})^2}=\overline{-2i}=2i$

이때

$\overline{(\bar{z})^2}=\overline{\bar{z}\times\bar{z}}=\overline{(\bar{z})}\times\overline{(\bar{z})}=z\times z=z^2$

이므로 $z^2=2i$

$\therefore z^4+z^3\bar{z}+z\bar{z}^3+\bar{z}^4$

$=(z^2)^2+z\bar{z}(z^2+\bar{z}^2)+(\bar{z}^2)^2$

$=(2i)^2+z\bar{z}\times(2i-2i)+(-2i)^2$

$=-4+0-4=-8$

13

$z=(1+i)a^2-(1+3i)a+2(i-1)$

$=(a^2-a-2)+(a^2-3a+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2-a-2=0,\ a^2-3a+2\neq0$

(i) $a^2-a-2=0$에서

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-3a+2\neq0$에서

$(a-1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq1$이고 $a\neq2$

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 -1

14

$$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{a-4bi}{a+4bi}=\frac{(a-4bi)^2}{(a+4bi)(a-4bi)}$$

$$=\frac{a^2-16b^2-8abi}{a^2+16b^2}$$

에서 $\frac{\bar{z}}{z}$가 순허수이므로

$a^2-16b^2=0,\ -8ab\neq0$

$a^2-16b^2=0$에서 $a^2=16b^2$

$\therefore a=\pm4b$

즉, 조건을 만족시키는 두 정수 a, b는

$b=-2$일 때 $a=\pm8$, $b=-1$일 때 $a=\pm4$

$b=1$일 때 $a=\pm4$, $b=2$일 때 $a=\pm8$

$-8ab\neq0$이므로 $a\neq0$이고 $b\neq0$

따라서 복소수 z는 $z=\pm8-8i$ 또는 $z=\pm4-4i$ 또는 $z=\pm4+4i$ 또는 $z=\pm8+8i$의 8개이다.

답 8

15

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 0이 아닌 실수)에 대하여

$iz=i(a+bi)=-b+ai,\ \bar{z}=a-bi$

$iz=\bar{z}$에서 $-b+ai=a-bi$

이때 $a\neq0,\ b\neq0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-b$

$\therefore z=a-ai,\ \bar{z}=a+ai$

ㄱ. $z+\bar{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$ (참)

ㄴ. $iz=\bar{z}$의 양변에 i를 곱하면 $i\bar{z}=-z$ (참)

ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 z로 나누면 $\frac{\bar{z}}{z}=i$이므로

$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1}{i}=-i$

$\therefore \frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=i+(-i)=0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이 1

ㄴ. $\bar{z}=a+ai$이므로

$i\bar{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$ (참)

ㄷ. $z=a-ai,\ \bar{z}=a+ai$이므로

$$\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+ai}{a-ai}+\frac{a-ai}{a+ai}$$

$$=\frac{(a+ai)^2+(a-ai)^2}{(a-ai)(a+ai)}=0\ (참)$$

다른 풀이 2

ㄷ. $iz=\bar{z}$의 양변을 제곱하면

$-z^2=\bar{z}^2\qquad\therefore z^2+\bar{z}^2=0\qquad\cdots\cdots㉠$

이때 $z\bar{z}=2a^2\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $z\bar{z}$로 나누면

$\frac{\bar{z}}{z}+\frac{z}{\bar{z}}=0$ (참)

16

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z-(1-3i)=(a+bi)-(1-3i)$

$=(a-1)+(b+3)i$

조건 ㈎에서 $z-(1-3i)$가 양의 실수이므로

$a-1>0,\ b+3=0$

$\therefore\ a>1,\ b=-3$

조건 ㈏에서 $z\bar{z}=13$이므로

$(a+bi)(a-bi)=13$

즉, $a^2+b^2=13$이므로 $b=-3$을 대입하면

$a^2+9=13,\ a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$

따라서 $z=2-3i,\ \bar{z}=2+3i$이므로

$z+\bar{z}=(2-3i)+(2+3i)=4$

답 4

17

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$이므로

$x+1>0,\ x-2<0$ 또는 $x+1=0$

(i) $x+1>0,\ x-2<0$일 때,

$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=|x+1|+|x-2|$

$=x+1-(x-2)=3$

(ii) $x+1=0$일 때,

$x=-1$이므로

$\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=0+\sqrt{(-3)^2}=3$

(i), (ii)에서 구하는 식의 값은 3이다.

답 3

18

$a\neq0,\ b\neq0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서

$a<0,\ b<0$

㈎

$c\neq0,\ d\neq0$이므로 $\dfrac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}=-\sqrt{\dfrac{d}{c}}$에서

$c<0,\ d>0$

㈏

즉, $a<0,\ b-d<0,\ c-d<0$이므로

$|a|+\sqrt{(b-d)^2}-|c-d|=-a-(b-d)+(c-d)$

$=-a-b+c$

㈐

답 $-a-b+c$

단계	채점 기준	배점
㈎	a, b의 부호를 구한 경우	30%
㈏	c, d의 부호를 구한 경우	30%
㈐	주어진 식을 간단히 정리한 경우	40%

STEP 2 개념 마무리

본문 p.102

1 -4 **2** 24 **3** 1 **4** ㄱ, ㄷ
5 6 **6** ㄱ, ㄴ

1

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=2+2i$이므로 $1,\ -1,\ i,\ -i$ 중에서 하나의 값을 갖는 8개의 수의 합이 $2+2i$가 되는 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 1이 4개, -1이 2개, i가 2개인 경우

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$

$=1+1+1+1+1+1+(-1)+(-1)=4$

(ii) 1이 3개, -1이 1개, i가 3개, $-i$가 1개인 경우

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$

$=1+1+1+1+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$

$=0$

(iii) 1이 2개, i가 4개, $-i$가 2개인 경우

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$

$=1+1+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)$

$+(-1)+(-1)$

$=-4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최솟값은 -4이다.

답 -4

보충 설명 1

$1,\ -1,\ i,\ -i$의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)라 하면

$a\times1+b\times(-1)+c\times i+d\times(-i)=2+2i$

즉, $(a-b)+(c-d)i=2+2i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=2$, $c-d=2$

이때 $a+b+c+d=8$이고, $a=b+2$, $c=d+2$를 이 식에 대입하여 정리하면 $b+d=2$

b, d는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 (b, d)는

$(2, 0)$ 또는 $(1, 1)$ 또는 $(0, 2)$이다.

즉, 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(4, 2, 2, 0)$ 또는

$(3, 1, 3, 1)$ 또는 $(2, 0, 4, 2)$이다.

보충 설명 2

1, -1, i, $-i$에 대하여 각 값을 제곱한 값은 순서대로 1, 1, -1, -1이다. 즉, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_8^2$의 값이 최소가 되려면 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_8이 갖는 값 중에서 i 또는 $-i$가 최대한 많아야 한다.

따라서 (i), (ii), (iii) 중에서 (iii)의 경우에 최솟값을 갖는다는 것을 쉽게 알 수 있다.

2

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z_1^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{1+2i-1}=\dfrac{1}{i}=-i$

즉, $z_1^4=(z_1^2)^2=(-i)^2=-1$,

$z_1^8=(z_1^4)^2=(-1)^2=1$이므로

$z_1^8=z_1^{16}=z_1^{24}=\cdots=1$

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$z_2^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{3+2\sqrt{3}i-1}{4}$

$=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

이므로

$z_2^3=z_2^2\times z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4i}{4}=i$

즉, $z_2^6=(z_2^3)^2=i^2=-1$,

$z_2^{12}=(z_2^6)^2=(-1)^2=1$이므로

$z_2^{12}=z_2^{24}=z_2^{36}=\cdots=1$

따라서 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=2$를 만족시키려면 자연수 n이 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n=1$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=1$을 동시에 만족시켜야 하므로 자연수 n의 최솟값은 8과 12의 최소공배수인 24이다.

답 24

보충 설명

z_1^n이 $\sqrt{2}$를 포함하거나 z_2^n이 $\sqrt{3}$을 포함하면

$z_1^n+z_2^n=2$를 만족시킬 수 없으므로 이 경우는 생각하지 않아도 된다. 또한,

$z_1^2=-i$, $z_1^4=-1$, $z_1^6=i$, $z_1^8=1$, $\cdots$

$z_2^3=i$, $z_2^6=-1$, $z_2^9=-i$, $z_2^{12}=1$, $\cdots$

이 중에서 $z_1^n+z_2^n=2$를 만족시키는 자연수 n은

$z_1^n=1$, $z_2^n=1$을 동시에 만족시킨다.

3

$\dfrac{z}{1+z^2}$가 실수이므로 $\dfrac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}$ ······ (가)

이때 $\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{1+z^2}}=\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z^2}}=\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}$이므로

$\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}$

$z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2)$ ······ (나)

즉, $z+z\overline{z}^2=\overline{z}+z^2\overline{z}$에서

$z-\overline{z}+z\overline{z}^2-z^2\overline{z}=0$, $(z-\overline{z})-z\overline{z}(z-\overline{z})=0$

$\therefore (z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore z\overline{z}=1$ ······ (다)

답 1

단계	채점 기준	배점
(가)	$\dfrac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}$임을 이용한 경우	40%
(나)	z, $\overline{z}$에 대한 관계식을 구한 경우	40%
(다)	$z\overline{z}$의 값을 구한 경우	20%

4

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$),

$w=c+di$ (c, d는 실수, $d\neq0$)라 하면

$z-w=(a-c)+(b-d)i$,

$zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$

가 모두 실수이므로 $b-d=0$, $ad+bc=0$

$b-d=0$에서 $d=b$를 $ad+bc=0$에 대입하면

$(a+c)b=0 \qquad \therefore c=-a \ (\because b\neq 0)$

$\therefore z=a+bi$, $w=-a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)

ㄱ. $\bar{z}+w=(a-bi)+(-a+bi)=0$

$z+\bar{w}=(a+bi)+(-a-bi)=0$

$\therefore \bar{z}+w=z+\bar{w}$ (참)

ㄴ. $z\bar{w}=(a+bi)(-a-bi)=-(a+bi)^2$

$\bar{z}w=(a-bi)(-a+bi)=-(a-bi)^2$

$\therefore z\bar{w}\neq\bar{z}w$ (거짓)

ㄷ. $z+w=(a+bi)+(-a+bi)=2bi$이므로

$\overline{z+w}=-2bi$

$-z-w=-(z+w)=-2bi$

$\therefore \overline{z+w}=-z-w$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이

ㄱ. $z-w$가 실수이므로

$z-w=\overline{z-w}$

즉, $z-w=\bar{z}-\bar{w}$에서

$z+\bar{w}=\bar{z}+w$ (참)

5

$z=a+bi$ $(a>0,\ b>0)$에서 $\bar{z}=a-bi$

이때

$z^2+\bar{z}=(a+bi)^2+(a-bi)$

$\qquad=(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i$

즉, $(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i=0$이므로

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0$, $2ab-b=0$

$2ab-b=0$에서 $(2a-1)b=0$

$\therefore a=\frac{1}{2} \ (\because b>0)$

이것을 $a^2-b^2+a=0$에 대입하면

$\frac{1}{4}-b^2+\frac{1}{2}=0,\ b^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore b=\frac{\sqrt{3}}{2} \ (\because b>0)$

즉, $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$이므로

$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=z^2z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1-3}{4}=-1$

$\therefore z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$ ← $z^4=-z\neq 1$, $z^5=-z^2\neq 1$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 6

다른 풀이

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4z^2-4z+1=-3$

$\therefore z^2-z+1=0$

양변에 $z+1$을 곱하면

$(z+1)(z^2-z+1)=0$, $z^3+1=0$

$\therefore z^3=-1$

$\therefore z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

6

서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $abc<0$이므로

세 수 중에서 음수는 1개 또는 3개이다.

그런데 $a+b+c=0$이므로 세 수 모두 음수가 될 수는 없다.

즉, 서로 다른 세 수 a, b, c 중에서 한 개는 음수, 두 개는 양수이다.

이때 ab, bc, ca는 두 수끼리의 곱이므로 ab, bc, ca 중에서 한 개는 양수, 두 개는 음수이다.

그런데 $ab<bc<ca$이므로

$ab<bc<0<ca$

이때 ca는 두 양수의 곱이므로

$a>0$, $c>0 \qquad \therefore b<0$

ㄱ. $ab<bc$, $b<0$이므로 $c<a$

즉, $a-c>0$이므로

$|a-c|=a-c$ (참)

ㄴ. $b<0$, $c>0$이므로 $\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{bc}$ (참)

ㄷ. $b<0<c<a$이므로 $c-b>0$, $b-a<0$

$\therefore \frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{b-a}}=-\sqrt{\frac{c-b}{b-a}}\neq\sqrt{\frac{c-b}{b-a}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

05. 이차방정식

1 이차방정식의 풀이

기본 + 필수연습 본문 pp.106~111

01 (1) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

(2) $x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

02 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}$ (실근) (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근)

03 -5 **04** -1 **05** 3 **06** 0

07 3

08 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ (2) $x=-8$ 또는 $x=0$

09 $x=-2\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}i$ **10** -1

11 $\sqrt{2}$ **12** 2 **13** $2\sqrt{2}$

01

(1) $6x^2-5x-4=0$에서

$(2x+1)(3x-4)=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

(2) $(1-\sqrt{3})x^2-(3-\sqrt{3})x+2=0$에서

x^2의 계수가 무리수이므로

양변에 $1+\sqrt{3}$을 곱하여 유리화하면

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x^2-(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})x+2(1+\sqrt{3})=0$

$-2x^2-2\sqrt{3}x+2+2\sqrt{3}=0$

$x^2+\sqrt{3}x-1-\sqrt{3}=0$

$(x+1+\sqrt{3})(x-1)=0$

$\therefore x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

답 (1) $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

(2) $x=-1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$

02

(1) $2x^2+x-8=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times(-8)}}{2\times2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}$$

즉, 주어진 방정식의 근은 실근이다.

(2) $3x^2-4x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times2}}{3}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$$

즉, 주어진 방정식의 근은 허근이다.

답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}$ (실근) (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$ (허근)

03

$(a^2-6)x-2=a(x+1)$에서

$(a^2-a-6)x=a+2$

$\therefore (a+2)(a-3)x=a+2$ ……㉠

(i) ㉠의 해가 무수히 많으려면

$(a+2)(a-3)=0,\ a+2=0$

$\therefore a=-2$

(ii) ㉠의 해가 없으려면

$(a+2)(a-3)=0,\ a+2\neq0$

$\therefore a=3$

(i), (ii)에서 $p=-2$, $q=3$이므로

$p^2-q^2=(-2)^2-3^2=-5$

답 -5

04

$2ax-a=-2x-1$에서

$(2a+2)x=a-1$

이 방정식의 해가 없으려면

$2a+2=0,\ a-1\neq0$

$\therefore a=-1$

$a=-1$을 방정식 $a^2x-1=a(3+x)$에 대입하면

$x-1=-3-x,\ 2x=-2$ $\therefore x=-1$

따라서 주어진 방정식의 근은 -1이다.

답 -1

05

$2(a+7)x^2-48x+a^2-97=0$ ⋯⋯㉠

은 이차방정식이므로 $a\neq-7$

이 이차방정식이 $x=-1$을 근으로 가지므로

$2(a+7)\times(-1)^2-48\times(-1)+a^2-97=0$

$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a\neq-7$)

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$24x^2-48x-72=0$

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 3이다.

답 3

06

$x=-2$가 방정식

$(2x+1)^2+a(2x+1)-3=0$ ⋯⋯㉠

의 근이므로

$\{2\times(-2)+1\}^2+a\{2\times(-2)+1\}-3=0$

$9-3a-3=0$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$(2x+1)^2+2(2x+1)-3=0$

$4x^2+8x=0$, $x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

따라서 다른 한 근은 0이다.

답 0

07

$x=1$이 방정식

$x^2+k(2p-1)x-(3p^2-2)k+q-4=0$

의 근이므로

$1+k(2p-1)-(3p^2-2)k+q-4=0$

위의 식을 k에 대하여 정리하면

$-(3p^2-2p-1)k+q-3=0$

위의 등식은 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

항등식의 성질에 의하여

$3p^2-2p-1=0$ ⋯⋯㉠, $q-3=0$ ⋯⋯㉡

㉠에서 $(3p+1)(p-1)=0$

$\therefore p=1$ ($\because p>0$)

㉡에서 $q=3$

$\therefore pq=1\times3=3$

답 3

08

(1) (i) $x<0$일 때,

$x^2-4x-5=0$에서

$(x+1)(x-5)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2+4x-5=0$에서

$(x+5)(x-1)=0$이므로

$x=-5$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=1$

(2) (i) $x<-3$일 때,

$-(x+1)-(x+3)=-x+4$에서

$-x=8$ $\therefore x=-8$

이때 $x=-8$은 $x<-3$을 만족시킨다.

(ii) $-3\leq x<-1$일 때,

$-(x+1)+(x+3)=-x+4$에서

$x=2$

그런데 $-3\leq x<-1$이므로 해는 없다.

(iii) $x\geq-1$일 때,

$(x+1)+(x+3)=-x+4$에서

$3x=0$ $\therefore x=0$

이때 $x=0$은 $x\geq-1$을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-8$ 또는 $x=0$

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=1$ (2) $x=-8$ 또는 $x=0$

다른 풀이

(1) $x^2=|x|^2$이므로 $x^2+4|x|-5=0$에서

$|x|^2+4|x|-5=0$, $(|x|+5)(|x|-1)=0$

$\therefore$ $|x|=-5$ 또는 $|x|=1$

이때 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=1$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x=-1$ 또는 $x=1$

09

$|x^2+4x+7|=2$에서

$x^2+4x+7=\pm 2$

(i) $x^2+4x+7=2$일 때,

$x^2+4x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times 5}$

$=-2\pm i$

(ii) $x^2+4x+7=-2$일 때,

$x^2+4x+9=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times 9}$

$=-2\pm\sqrt{5}i$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}i$

답 $x=-2\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{5}i$

보충 설명

고등학교 교육과정 내에서는 절댓값 안의 수가 허수인 경우는 다루지 않지만 주어진 문제의 경우는 방정식의 해는 모두 허수이지만 절댓값 안의 식의 값은 실수이기 때문에 해당되지 않는다.

10

$[x]^2-4[x]-5=0$에서

$([x]+1)([x]-5)=0$

$\therefore$ $[x]=-1$ 또는 $[x]=5$

$\therefore$ $-1\leq x<0$ 또는 $5\leq x<6$

따라서 구하는 최솟값은 -1이다.

답 -1

11

$x^2+[x]-3=0$에서

(i) $-1<x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$x^2-1-3=0$, $x^2=4$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $-1<x<0$이므로 해는 없다.

(ii) $0\leq x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$x^2-3=0$, $x^2=3$

$\therefore$ $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

그런데 $0\leq x<1$이므로 해는 없다. $\leftarrow \sqrt{3}>1$

(iii) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2+1-3=0$, $x^2=2$

$\therefore$ $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

그런데 $1\leq x<2$이므로 $x=\sqrt{2}$ $\leftarrow 1<\sqrt{2}<2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=\sqrt{2}$

답 $\sqrt{2}$

12

처음 공장에서 생산하고 있던 직육면체 모양의 상자의 부피는

$20\times 10\times 4=800(\text{cm}^3)$

이때 가로와 세로의 길이를 각각 x cm씩 줄이고 높이는 유지한 새로운 상자를 만들었더니 기존 상자의 부피보다 28%만큼 줄었으므로

$(20-x)\times(10-x)\times 4=800\times\left(1-\frac{28}{100}\right)$

$x^2-30x+200=144$

$x^2-30x+56=0$, $(x-2)(x-28)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=28$

이때 $0<x<10$이므로 $x=2$

답 2

13

$\triangle$ABC는 직각이등변삼각형이고 $\overline{AB}=6$이므로

$\overline{BC}=6\sqrt{2}$

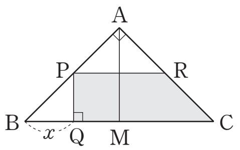
$0<x<3\sqrt{2}$

이때 $\overline{BQ}=x$라 하면 $\overline{QC}=6\sqrt{2}-x$

또한, $\triangle$PBQ는 이등변삼각형이므로

$\overline{PQ}=\overline{BQ}=x$

한편, 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{QM}=3\sqrt{2}-x$

$\therefore\ \overline{PR}=2\overline{QM}=6\sqrt{2}-2x$

□PQCR의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times x\times\{(6\sqrt{2}-x)+(6\sqrt{2}-2x)\}=12$

$x(12\sqrt{2}-3x)=24$

$x^2-4\sqrt{2}x+8=0,\ (x-2\sqrt{2})^2=0$

$\therefore\ x=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

STEP 1 개념 마무리 본문 p.112

01 2	**02** $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$	
03 2	**04** 2	**05** $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$
06 15		

01

$xa^3-(2x+1)a^2+4=0$에서

$(a^3-2a^2)x-a^2+4=0$

$\therefore\ a^2(a-2)x=(a+2)(a-2)$ ······㉠

(i) ㉠의 해가 무수히 많으려면

$a^2(a-2)=0,\ (a+2)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2$

(ii) ㉠의 해가 없으려면

$a^2(a-2)=0,\ (a+2)(a-2)\neq0$

$\therefore\ a=0$

(i), (ii)에서 $p=2,\ q=0$이므로

$p+q=2$

답 2

02

$(\sqrt{3}-2)x^2+(4-2\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$에서

x^2의 계수가 무리수이므로

양변에 $\sqrt{3}+2$를 곱하여 유리화하면

$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)x^2+(\sqrt{3}+2)(4-2\sqrt{3})x+\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)=0$

$x^2-2x-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)=0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}-2)=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

답 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

03

$x=-3$이 방정식 $x^2+(a+2)x+8a-8=0$의 근이므로

$(-3)^2+(a+2)\times(-3)+8a-8=0$

$5a=5$ $\therefore\ a=1$

즉, $x=1$이 방정식 $kx^2-7x+2k^2+4=0$의 근이므로

$k-7+2k^2+4=0$

$2k^2+k-3=0,\ (2k+3)(k-1)=0$

$\therefore\ k=1$ ($\because$ k는 정수)

$\therefore\ a+k=1+1=2$

답 2

04

$\underbrace{(x-1)^2}_{=|x-1|^2}+|x-1|-6=0$에서

$|x-1|=t\ (t\geq0)$로 놓으면

$t^2+t-6=0,\ (t+3)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t\geq0)$

즉, $|x-1|=2$이므로

$x-1=-2$ 또는 $x-1=2$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 두 근의 합은 $(-1)+3=2$

답 2

05

$3x^2-x-2[x]^2+[x]-1=0$에서

(i) $-1\leq x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$3x^2-x-4=0$

$(x+1)(3x-4)=0$ $\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

이때 $-1 \le x < 0$이므로 $x=-1$

(ii) $0 \le x < 1$일 때, $[x]=0$이므로

$3x^2-x-1=0$

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

이때 $0 \le x < 1$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

(iii) $1 \le x < 2$일 때, $[x]=1$이므로

$3x^2-x-2=0$

$(3x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=1$

이때 $1 \le x < 2$이므로 $x=1$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$-1+\frac{1+\sqrt{13}}{6}+1=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

답 $\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

06

$n+2=\sqrt{n^2+4n+4}$이므로 자연수 n에 대하여

$\sqrt{n^2+4n+4} > \sqrt{n^2+3n} > \sqrt{n^2+2}$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는 $n+2$이다.

피타고라스 정리에 의하여

$(n+2)^2=(\sqrt{n^2+3n})^2+(\sqrt{n^2+2})^2$

$n^2+4n+4=n^2+3n+n^2+2$

$n^2-n-2=0$, $(n+1)(n-2)=0$

$\therefore n=2$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 4, $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$이므로 삼각형의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{6}=\sqrt{15}$$

$\therefore S^2=15$

답 15

2 이차방정식의 근

기본 + 필수연습

본문 pp.116~124

14 (1) $k<-3$ (2) $k=-3$ (3) $k>-3$

15 4

16 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) -4 (3) 0 (4) 76

17 (1) $x^2-6x-7=0$
(2) $x^2+2x-4=0$
(3) $x^2-x+\frac{37}{4}=0$

18 (1) $2\left(x-\frac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$
(2) $3\left(x-\frac{2-\sqrt{11}i}{3}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{11}i}{3}\right)$

19 200

20 -1

21 6

22 -2

23 (1) -18 (2) 6

24 $-\frac{7}{2}$

25 2

26 2

27 (1) 13 (2) $\frac{8}{3}$

28 7

29 (1) $x^2+8x+8=0$ (2) $x^2-8x+8=0$

30 3

31 4

32 (1) -9 (2) $\frac{65}{8}$

33 12

14

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2+16=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+16)$$

$$=k^2-4k+4-k^2-16$$

$$=-4k-12$$

(1) $\frac{D}{4}=-4k-12>0$이어야 하므로

$4k<-12$ $\quad\therefore k<-3$

(2) $\frac{D}{4}=-4k-12=0$이어야 하므로

$4k=-12$ $\quad\therefore k=-3$

(3) $\frac{D}{4}=-4k-12<0$이어야 하므로

$4k>-12$ $\quad\therefore k>-3$

답 (1) $k<-3$ (2) $k=-3$ (3) $k>-3$

15

$x^2-4-a(x-2)=x^2-ax+2a-4$

이차방정식 $x^2-ax+2a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4(2a-4)=0$이어야 하므로

$a^2-8a+16=0$, $(a-4)^2=0$

$\therefore a=4$

답 4

16

이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$

(1) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-2)^2-2\times4=-4$

(3) $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$
$=\dfrac{\beta+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}$
$=\dfrac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$
$=\dfrac{-2+2}{4-2+1}=\dfrac{0}{3}=0$

(4) $(3\alpha-4)(3\beta-4)=9\alpha\beta-12(\alpha+\beta)+16$
$=9\times4-12\times(-2)+16=76$

답 (1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) -4 (3) 0 (4) 76

17

(1) (두 근의 합)$=7+(-1)=6$,
(두 근의 곱)$=7\times(-1)=-7$
이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-6x-7=0$

(2) (두 근의 합)$=(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})=-2$,
(두 근의 곱)$=(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$
$=(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$
$=1-5=-4$
이므로 구하는 이차방정식은
$x^2+2x-4=0$

(3) (두 근의 합)$=\left(\dfrac{1}{2}-3i\right)+\left(\dfrac{1}{2}+3i\right)=1$,
(두 근의 곱)$=\left(\dfrac{1}{2}-3i\right)\left(\dfrac{1}{2}+3i\right)=\dfrac{1}{4}+9=\dfrac{37}{4}$
이므로 구하는 이차방정식은
$x^2-x+\dfrac{37}{4}=0$

답 (1) $x^2-6x-7=0$ (2) $x^2+2x-4=0$
(3) $x^2-x+\dfrac{37}{4}=0$

18

(1) 이차방정식 $2x^2-3x-4=0$을 풀면
$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{4}$
$\therefore 2x^2-3x-4$
$=2\left(x-\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$

(2) 이차방정식 $3x^2-4x+5=0$을 풀면
$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times5}}{3}=\dfrac{2\pm\sqrt{11}i}{3}$
$\therefore 3x^2-4x+5$
$=3\left(x-\dfrac{2-\sqrt{11}i}{3}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{11}i}{3}\right)$

답 (1) $2\left(x-\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right)$
(2) $3\left(x-\dfrac{2-\sqrt{11}i}{3}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{11}i}{3}\right)$

19

계수가 모두 실수이므로 한 근이 $4+3i$이면 다른 한 근은 $4-3i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(4+3i)+(4-3i)=a$, $(4+3i)(4-3i)=b$

즉, $a=8$, $b=25$이므로

$ab=8\times25=200$

답 200

20

(i) $kx^2-4(k+1)x+4(k+3)=0$이 이차방정식이므로

$k\neq 0$ ……㉠

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-2(k+1)\}^2-4k(k+3)>0$

$-4k+4>0$ $\therefore k<1$ ……㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 k의 값은

$-1, -2, -3, \cdots$이다.

(ii) $(k+2)x^2-2kx+k+5=0$이 이차방정식이므로

$k\neq -2$ ……㉢

이 이차방정식이 허근을 가지므로 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(k+2)(k+5)<0$

$-7k-10<0$ $\therefore k>-\frac{10}{7}$ ……㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시키는 정수 k의 값은

$-1, 0, 1, 2, \cdots$이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 -1이다.

답 -1

21

이차방정식 $(3-a)x^2-(a-b)x+(b-3)=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a-b)\}^2-4(3-a)(b-3)=0$

$a^2-2ab+b^2-4(3b-9-ab+3a)=0$

$a^2+2ab+b^2-12(a+b)+36=0$

$(a+b)^2-12(a+b)+36=0$

$\{(a+b)-6\}^2=0$

$\therefore a+b=6$

답 6

보충 설명

$(3-a)x^2-(a-b)x+(b-3)=0$이 이차방정식이므로 $a\neq 3$이다.

22 본문 p.113 한 걸음 더 참고

x에 대한 이차식 $x^2-2(k+a)x+(k+1)^2+a^2-b-3$이 완전제곱식으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k+1)^2+a^2-b-3=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+a)\}^2-\{(k+1)^2+a^2-b-3\}=0$

$(2a-2)k+b+2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ b+2=0$

$\therefore a=1,\ b=-2$

$\therefore ab=-2$

답 -2

23

(1) 이차방정식 $x^2-ax-3a=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-3a,$

이때 두 근의 합이 6이므로 $a=6$

따라서 두 근의 곱은

$\alpha\beta=-3a=-3\times 6=-18$

(2) 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=2$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-k}{2}=-3$

$\therefore k=6$

답 (1) -18 (2) 6

24

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$

$$\begin{aligned}(|\alpha|+|\beta|)^2&=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2\\&=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|\\&=3^2-2\times\frac{k}{2}+2\times\left|\frac{k}{2}\right|\\&=9-k+|k|\end{aligned}$$

이때 $(|\alpha|+|\beta|)^2=16$이고,

$k\geq0$이면 $9-k+k=9\neq16$이므로 $k<0$

따라서 $9-k-k=16$에서

$-2k=7 \qquad \therefore k=-\frac{7}{2}$

답 $-\frac{7}{2}$

25

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b \qquad \cdots\cdots㉠$

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 두 근은 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$, $(\alpha+2)(\beta+2)=3b$

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$, 즉 $\alpha+\beta+4=-3a$에서

$-a+4=-3a$ ($\because$ ㉠)

$2a=-4 \qquad \therefore a=-2$

$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$, 즉 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3b$에서

$b-2a+4=3b$ ($\because$ ㉠)

$2b=-2a+4=8$ ($\because a=-2$)

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=-2+4=2$

답 2

26

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b \qquad \cdots\cdots㉠$

이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=b$, $\frac{1}{\alpha\beta}=a$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=b$, 즉 $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=b$에서

$\frac{a}{b}=b$ ($\because$ ㉠) $\qquad \therefore a=b^2$

$\frac{1}{\alpha\beta}=a$에서 $\frac{1}{b}=a$ ($\because$ ㉠), 즉 $b=\frac{1}{a}$이므로

이것을 $a=b^2$에 대입하면 $a=\frac{1}{a^2}$

이차방정식 $a^2+a+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\times1\times1=-3<0$이므로 허근을 갖는다.

$a^3-1=0$, $(a-1)(a^2+a+1)=0$

이때 a, b는 실수이므로 $a=1$, $b=\frac{1}{a}=1$

$\therefore a+b=2$

답 2

27

(1) 두 근의 비가 $3:5$이므로 두 근을 3α, 5α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+5\alpha=m-5 \qquad \cdots\cdots㉠$

$3\alpha\times5\alpha=m+2 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠에서 $8\alpha=m-5 \qquad \therefore \alpha=\frac{m-5}{8}$

이것을 ㉡에 대입하면

$3\times\frac{m-5}{8}\times5\times\frac{m-5}{8}=m+2$

$15(m-5)^2=64(m+2)$

$15m^2-150m+375=64m+128$

$15m^2-214m+247=0$

$(m-13)(15m-19)=0$

$\therefore m=13$ ($\because$ m은 정수)

(2) 두 근의 차가 2이므로 두 근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-(p-2) \qquad \cdots\cdots㉠$

$\alpha(\alpha+2)=p^2-3p-5 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠에서 $2\alpha+2=-p+2$이므로

$2\alpha=-p \qquad \therefore \alpha=-\frac{p}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면

$-\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}+2\right)=p^2-3p-5$

$\therefore 3p^2-8p-20=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-3\times(-20)=76>0$

이므로 두 근은 실근이고 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 p의 값의 합은 $\frac{8}{3}$이다.

답 (1) 13 (2) $\frac{8}{3}$

보충 설명

(1) ㉠에서 $m=8\alpha+5$를 ㉡을 정리한 식 $15\alpha^2=m+2$에 대입하여 α의 값을 먼저 구해도 된다.

28

이차방정식 $x^2-mx+2m-4=0$의 두 근을 α, $2\alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2\alpha+1)=m$ ……㉠

$\alpha(2\alpha+1)=2m-4$ ……㉡

㉠에서 $m=3\alpha+1$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$2\alpha^2-5\alpha+2=0$

$(2\alpha-1)(\alpha-2)=0$ $\quad\therefore \alpha=2$ ($\because$ α는 정수)

$\therefore m=3\times2+1=7$

답 7

29

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-1$

(1) 두 근 $\alpha+3\beta$, $3\alpha+\beta$의 합과 곱은 각각

$(\alpha+3\beta)+(3\alpha+\beta)=4(\alpha+\beta)$

$=-8$

$(\alpha+3\beta)(3\alpha+\beta)=3\alpha^2+3\beta^2+10\alpha\beta$

$=3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+10\alpha\beta$

$=8$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+8x+8=0$

(2) 두 근 α^2+1, β^2+1의 합과 곱은 각각

$(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=\alpha^2+\beta^2+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$

$=8$

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1$

$=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1$

$=8$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-8x+8=0$

답 (1) $x^2+8x+8=0$ (2) $x^2-8x+8=0$

30

이차방정식 $3x^2-7x+k-1=0$의 두 근이 $[a]$, $a-[a]$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$[a]+(a-[a])=\dfrac{7}{3}$ ……㉠

$[a](a-[a])=\dfrac{k-1}{3}$ ……㉡

㉠에서 $a=\dfrac{7}{3}$이므로 $[a]=\left[\dfrac{7}{3}\right]=2$

이것을 ㉡에 대입하면

$2\times\left(\dfrac{7}{3}-2\right)=\dfrac{k-1}{3}$

즉, $\dfrac{2}{3}=\dfrac{k-1}{3}$에서

$k-1=2$ $\quad\therefore k=3$

답 3

31

방정식 $f(x)+x-1=0$의 두 근 α, β에 대하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3$이므로

$f(x)+x-1=a(x^2-x-3)$ ($a\neq0$인 상수) ……㉠

이라 할 수 있다.

$f(1)=-6$이므로 $x=1$을 ㉠에 대입하면

$-6+1-1=a(1^2-1-3)$

$-6=-3a$ $\quad\therefore a=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)+x-1=2(x^2-x-3)$

$\therefore f(x)=2x^2-2x-6-x+1$

$=2x^2-3x-5$

$\therefore f(3)=2\times3^2-3\times3-5=4$

답 4

32

(1) 이차방정식 $x^2-(m-3)x+n+4=0$에서 m, n이 유리수이고 한 근이

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

이므로 다른 한 근은 $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=m-3,$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=n+4$$

즉, $m-3=-1$, $n+4=-\frac{1}{2}$에서

$m=2$, $n=-\frac{9}{2}$이므로

$$mn=2\times\left(-\frac{9}{2}\right)=-9$$

(2) 이차방정식 $x^2-pqx+p-q=0$에서 p, q는 실수이고 한 근이

$$\frac{1-2i}{1+i}=\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{-1-3i}{1+1}=\frac{-1-3i}{2}$$

이므로 다른 한 근은 $\frac{-1+3i}{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-1-3i}{2}+\frac{-1+3i}{2}=pq,$$
$$\frac{-1-3i}{2}\times\frac{-1+3i}{2}=p-q$$

즉, $pq=-1$, $p-q=\frac{5}{2}$이므로

$$p^3-q^3=(p-q)^3+3pq(p-q)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)^3+3\times(-1)\times\frac{5}{2}=\frac{65}{8}$$

답 (1) -9 (2) $\frac{65}{8}$

33

이차방정식 $kx^2+(k-12)x+1=0$에서 k는 0이 아닌 실수이고, 한 근이 실수부분이 0인 허수이므로 그 근을 ai라 하면 다른 한 근은 $-ai$이다.

└ 순허수

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$ai+(-ai)=-\frac{k-12}{k}$$

즉, $-\frac{k-12}{k}=0$이므로

$k-12=0$ $\quad\therefore k=12$

답 12

STEP 1 개념 마무리 본문 pp.125~126

07 30	**08** 6	**09** 1	**10** 0
11 4	**12** 6	**13** 3	
14 23	**15** $2x^2+3x-7$		
16 $x^2-6x+6=0$		**17** 10	**18** $-\frac{3}{2}$

07

(i) 이차방정식 $x^2-7x-2k=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(-7)^2-4\times1\times(-2k)=49+8k\geq0$

$\therefore k\geq-\frac{49}{8}$ ← -6.125

즉, $k\geq-\frac{49}{8}$를 만족시키는 정수 k의 값은

-6, -5, -4, $\cdots$이다.

(ii) 이차방정식 $x^2+4x-k=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때,

$\frac{D_2}{4}=2^2-1\times(-k)=4+k\geq0$

$\therefore k\geq-4$

즉, $k\geq-4$를 만족시키는 정수 k의 값은

-4, -3, -2, $\cdots$이다.

(i), (ii)에서 두 이차방정식 중 어느 하나만 실근을 갖도록 하는 정수 k의 값은 -6, -5이므로 그 곱은

$(-6)\times(-5)=30$

답 30

08

주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4yx+4y^2+3y-6=0$ $\quad\cdots\cdots㉠$

이때 x, y는 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠은 실근을 가진다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2y)^2-(4y^2+3y-6)\geq0$ ← 판별식은 y에 대한 식이 된다.

$-3y+6\geq0$ $\therefore y\leq2$

따라서 y의 최댓값은 $M=2$

$y=2$를 ㉠에 대입하면

$x^2-4\times2\times x+4\times2^2+3\times2-6=0$

$x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$

$\therefore x=4$ $\therefore k=4$

$\therefore M+k=2+4=6$

답 6

09

x에 대한 이차식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1$이 완전제곱식으로 인수분해되므로 x에 대한 이차방정식

$x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2+a^2-b+1)=0$이어야 한다.

$\therefore -2ak+b-1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a=0$, $b-1=0$ $\therefore a=0$, $b=1$

$\therefore a+b=1$

답 1

10

이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-4\alpha+k+2=0$, $\beta^2-4\beta+k+2=0$에서

$\alpha^2-2\alpha+k=2\alpha-2$, $\beta^2-2\beta+k=2\beta-2$

즉, $(\alpha^2-2\alpha+k)(\beta^2-2\beta+k)=-4$에서

$(2\alpha-2)(2\beta-2)=-4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=-1$

$\therefore \alpha\beta-(\alpha+\beta)=-2$ ……㉠

한편, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=k+2$

이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$k+2-4=-2$ $\therefore k=0$

답 0

11

이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=2$ ……㉠

$f(x)$를 x^2-6x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-6x+2)Q(x)+R(x)$

$\quad=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$

위의 식의 양변에 $x=\alpha$, $x=\beta$를 각각 대입하면

$f(\alpha)=\beta$에서 $a\alpha+b=\beta$ ……㉡

$f(\beta)=\alpha$에서 $a\beta+b=\alpha$ ……㉢

㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$6a+2b=6$ ($\because$ ㉠) $\therefore b=-3a+3$ ……㉣

㉡, ㉢을 변끼리 빼면

$a(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$

이때 $\alpha\neq\beta$이므로 $a=-1$ ← 이차방정식 $x^2-6x+2=0$은 중근을 갖지 않으므로 $\alpha\neq\beta$이다.

이것을 ㉣에 대입하면 $b=6$

따라서 $R(x)=-x+6$이므로

$R(2)=4$

답 4

12

이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+3=0$의 두 실근의 절댓값이 서로 같고 부호가 다르므로 한 근을 α라 하면 다른 근은 $-\alpha$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(a^2-5a-6)$ ……㉠

$\alpha\times(-\alpha)=\underline{-a+3}$ ……㉡

두 실근의 부호가 다르므로 $-a+3<0$ $\therefore a>3$

㉠에서 $a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

(i) $a=-1$일 때,

$a=-1$을 ㉡에 대입하면

$-\alpha^2=4$, $\alpha^2=-4$

이를 만족시키는 실수 α는 존재하지 않으므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖지 않는다.

(ⅱ) $a=6$일 때,

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$-\alpha^2=-3,\ \alpha^2=3$

$\therefore\ \alpha=-\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 6이다.

답 6

13

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근은 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$ ……㉠

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2b$ ……㉡

이차방정식 $x^2-2ax+3b=0$의 두 실근이 $\alpha^2+\beta^2,\ \alpha\beta$가 되려면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=2a,\ \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=3b$

이어야 한다.

위의 식에 ㉠, ㉡을 각각 대입하면

$a^2-b=2a,\ b(a^2-2b)=3b$

$\therefore\ b=a^2-2a,$ ……㉢

$b(a^2-2b-3)=0$ ……㉣

(ⅰ) ㉣에서 $b=0$일 때,

㉢에서 $a^2-2a=0,\ a(a-2)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=2$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0),\ (2,\ 0)$

(ⅱ) ㉣에서 $b\neq0$일 때,

$a^2-2b-3=0$이므로 ㉢을 대입하면

$a^2-2(a^2-2a)-3=0$

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

㉢에 의하여 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ -1),\ (3,\ 3)$

그런데 $a=3,\ b=3$이면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$,

즉 $x^2+3x+3=0$이 $\underbrace{\text{실근을 갖지 않는다.}}_{(\text{판별식})<0}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 두 실수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ -1)$의 3개이다.

답 3

보충 설명

순서쌍 $(a,\ b)$가 $(0,\ 0)$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2=0$

순서쌍 $(a,\ b)$가 $(1,\ -1)$일 때, 두 이차방정식은

$x^2+x-1=0,\ x^2-2x-3=0$

순서쌍 $(a,\ b)$가 $(2,\ 0)$일 때, 두 이차방정식은

$x^2+2x=0,\ x^2-4x=0$

순서쌍 $(a,\ b)$가 $(3,\ 3)$일 때, 두 이차방정식은

$x^2+3x+3=0,\ x^2-6x+9=0$

14

이차방정식 $x^2+nx+132=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+1$ (α는 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-n$ ……㉠

$\alpha(\alpha+1)=132$ ……㉡

㉡에서 $\alpha^2+\alpha-132=0$

$(\alpha+12)(\alpha-11)=0$

$\therefore\ \alpha=-12$ 또는 $\alpha=11$

이때 ㉠에서 $n=-2\alpha-1$이므로

(ⅰ) $\alpha=-12$일 때,

$n=-2\times(-12)-1=23$

(ⅱ) $\alpha=11$일 때,

$n=-2\times11-1=-23$

(ⅰ), (ⅱ)에서 자연수 n의 값은 23이다.

답 23

15

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-4$

또한, $f(\alpha)=\alpha+1,\ f(\beta)=\beta+1$이므로

$f(\alpha)-\alpha-1=0,\ f(\beta)-\beta-1=0$

즉, $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $f(x)-x-1=0$의 두 근이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 2이므로

$f(x)-x-1=2(x-\alpha)(x-\beta)$

$=2(x^2+x-4)$

$=2x^2+2x-8$

$\therefore\ f(x)=2x^2+3x-7$

답 $2x^2+3x-7$

16

$\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면

$\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$

$\therefore \alpha+\beta=6$ (가)

또한, 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$100-60+\alpha\beta=46$ ($\because \alpha+\beta=6$)

$\therefore \alpha\beta=6$ (나)

따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$ (다)

답 $x^2-6x+6=0$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\alpha+\beta$의 값을 구한 경우	40%
(나)	$\alpha\beta$의 값을 구한 경우	40%
(다)	이차방정식을 구한 경우	20%

17

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$

$\therefore \alpha=-\beta-1$ ······㉠, $\beta=-\alpha-1$ ······㉡

또한, $x=\alpha$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$

이때 ㉠에서 $\alpha+1=-\beta$를 위의 식에 대입하면

$\alpha^2-\beta=0 \qquad \therefore \alpha^2=\beta$

$\therefore f(\beta)=f(\alpha^2)$

$=-4\alpha$

$=-4(-\beta-1)$ ($\because$ ㉠)

$=4\beta+4$ ······㉢

또한, $x=\beta$도 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\beta^2+\beta+1=0$

이때 ㉡에서 $\beta+1=-\alpha$를 위의 식에 대입하면

$\beta^2-\alpha=0 \qquad \therefore \beta^2=\alpha$

$\therefore f(\alpha)=f(\beta^2)$

$=-4\beta$

$=-4(-\alpha-1)$ ($\because$ ㉡)

$=4\alpha+4$ ······㉣

㉢, ㉣에서

$f(\beta)-4\beta-4=0$, $f(\alpha)-4\alpha-4=0$

이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이다.

즉, $f(x)-4x-4=x^2+x+1$이므로

$f(x)=x^2+5x+5$

$\therefore p=5$, $q=5$

$\therefore p+q=10$

답 10

18

허근 α에 대하여 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\alpha^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

이때 $\alpha^2=qi$이므로

$a^2-b^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2$ ······㉠

한편, 주어진 이차방정식에서 p는 실수이고, 한 근이 $\alpha=a+bi$이면 다른 근은 $a-bi$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+bi)+(a-bi)=2p+6$에서

$2a=2p+6 \qquad \therefore a=p+3$ ······㉡

$(a+bi)(a-bi)=3p+9$에서

$a^2+b^2=3p+9$

$\therefore 2a^2=3p+9$ ($\because$ ㉠) ······㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$2(p+3)^2=3p+9$

$2p^2+9p+9=0$, $(p+3)(2p+3)=0$

$\therefore p=-3$ 또는 $p=-\frac{3}{2}$

이때 $p=-3$이면 처음 주어진 이차방정식이 $x^2=0$이므로 허근을 갖지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 p의 값은 $-\frac{3}{2}$이다.

답 $-\frac{3}{2}$

보충 설명

이차방정식 $x^2-(2p+6)x+3p+9=0$이 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(p+3)^2-(3p+9)<0$

$p^2+3p<0$, $p(p+3)<0$

$\therefore\ -3<p<0$

따라서 $p=-3$은 조건을 만족시키지 않는다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.127

1 0	**2** -1	**3** 2	**4** -1
5 5	**6** -7		

1

$2+\sqrt{3}$이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore\ (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$, $c=-a$

따라서 주어진 방정식은

$ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$

$\therefore\ x^2-2\sqrt{3}x-1=0\ (\because\ a\neq 0)$

이 이차방정식의 근은 근의 공식에 의하여

$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\times(-1)}=\sqrt{3}\pm 2$이므로

$2+\sqrt{3}$이 아닌 다른 한 근은 $\beta=-2+\sqrt{3}$

$$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$$
$$=(2+\sqrt{3})+(-2-\sqrt{3})=0$$

답 0

다른 풀이

$\alpha=2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3}=2$의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+3=4$

$\therefore\ \alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1=0$

따라서 $\alpha=2+\sqrt{3}$은 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$의 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+\beta=2\sqrt{3}\qquad\therefore\ \beta=-2+\sqrt{3}$

$$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\underbrace{\frac{1}{-2+\sqrt{3}}}_{-2-\sqrt{3}}=0$$

2

(i) $x\geq\frac{1}{2}$일 때,

$|2x-1|=x+a$에서 $2x-1=x+a$이므로

$x=a+1\qquad\cdots\cdots$㉠

이때 $x\geq\frac{1}{2}$에서 ㉠의 해가 존재하지 않으려면

$a+1<\frac{1}{2}\qquad\therefore\ a<-\frac{1}{2}$

(ii) $x<\frac{1}{2}$일 때,

$|2x-1|=x+a$에서 $-2x+1=x+a$이므로

$3x=1-a\qquad\therefore\ x=\frac{1-a}{3}\qquad\cdots\cdots$㉡

이때 $x<\frac{1}{2}$에서 ㉡의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{1-a}{3}\geq\frac{1}{2}$, $2(1-a)\geq 3$

$2-2a\geq 3\qquad\therefore\ a\leq-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -1이다.

답 -1

3

(i) $|x-1|<2$, 즉 $\underbrace{-1<x<3}_{-2<x-1<2\text{이므로 } -1<x<3}$일 때,

$||x-1|-2|=x-1$에서

$-|x-1|+2=x-1$

$\therefore\ |x-1|=-x+3\qquad\cdots\cdots$㉠

① $\underbrace{-1<x<1}_{-1<x<3\text{이면서 } x<1\text{인 경우를 의미한다.}}$일 때,

㉠에서 $-(x-1)=-x+3$에서 $0\times x=2$

이를 만족시키는 x는 없다.

② $1 \le x < 3$일 때,
$-1<x<3$이면서 $x \ge 1$인 경우를 의미한다.
㉠에서 $x-1=-x+3$이므로 $2x=4$
$\therefore x=2$
①, ②에서 방정식의 해는
$x=2$

(ii) $|x-1| \ge 2$, 즉 $x \le -1$ 또는 $x \ge 3$일 때,
$x-1 \le 2$ 또는 $x-1 \ge 2$이므로 $x \le -1$ 또는 $x \ge 3$
$||x-1|-2|=x-1$에서
$|x-1|-2=x-1$
$\therefore |x-1|=x+1$ ……㉡
③ $x \le -1$일 때,
$x \le -1$ 또는 $x \ge 3$이면서 $x<1$인 범위를 의미한다.
㉡에서 $-(x-1)=x+1$이므로 $x=0$
그런데 $x \le -1$이므로 해는 없다.
④ $x \ge 3$일 때,
$x \le -1$ 또는 $x \ge 3$이면서 $x \ge 1$인 범위를 의미한다.
㉡에서 $x-1=x+1$이므로 $0 \times x=2$
이를 만족시키는 x는 없다.
③, ④에서 방정식의 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
$x=2$

답 2

4

$2x^2+xy-y^2-x+2y+m$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+m$
이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+m=0$ ……㉠
의 판별식이 y에 대한 완전제곱식 또는 0이어야 한다.
㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(y-1)^2-4\times2\times(-y^2+2y+m)$
$=y^2-2y+1+8y^2-16y-8m$
$=9y^2-18y-8m+1$ ……㉡
이차식 ㉡이 y에 대한 완전제곱식 또는 0이어야 하므로 y에 대한 이차방정식 $9y^2-18y-8m+1=0$의 판별식을 D'이라 하면
$\frac{D'}{4}=(-9)^2-9(-8m+1)=0$
$72m+72=0$ $\therefore m=-1$

답 -1

보충 설명 1

$m=-1$을 이차식 ㉠에 대입하여 인수분해하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y-1$
$=2x^2+(y-1)x-(y-1)^2$
$=\{x+(y-1)\}\{2x-(y-1)\}$
$=(x+y-1)(2x-y+1)$
따라서 주어진 이차식이 계수가 정수인 두 일차식으로 인수분해됨을 확인할 수 있다.

보충 설명 2

x, y에 대한 이차식 A가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건 | x, y에 대한 이차식 A를 x에 대한 내림차순으로 정리한 것을 간단히 ax^2+bx+c라 하고 이것을 실수 범위에서 인수분해하면
ax^2+bx+c
$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$
여기서 괄호 안의 두 식이 x, y에 대한 일차식이 되려면 근호 안의 식 b^2-4ac가 y에 대한 완전제곱식 또는 0이 되어야 한다.
따라서 x, y에 대한 이차식 A가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 A를 x(또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리했을 때, x(또는 y)에 대한 이차식 A의 판별식이 y(또는 x)에 대한 완전제곱식 또는 0이어야 한다.

5

이차방정식 $f(x)=0$의 이차항의 계수가 1이고, 두 근이 α, β이므로
$f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
이때 $\alpha+\beta=2\alpha\beta=k$라 하면
$f(x)=x^2-kx+\frac{k}{2}$
방정식 $f(x+1)=x+1$에서
$(x+1)^2-k(x+1)+\frac{k}{2}=x+1$
$\therefore x^2+(1-k)x-\frac{k}{2}=0$
이 이차방정식의 두 근이 γ, δ이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\gamma+\delta=k-1$, $\gamma\delta=-\frac{k}{2}$

$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$

$=(k-1)^2+k$

$=k^2-k+1$

즉, $\gamma^2+\delta^2=7$에서 $k^2-k+1=7$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$

이때 $\alpha+\beta=k$, $\gamma+\delta=k-1$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=k+(k-1)=2k-1$

$k=-2$일 때,

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\times(-2)-1=-5$

$k=3$일 때,

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\times3-1=5$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 최댓값은 5이다.

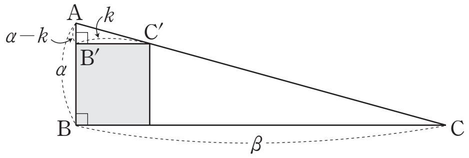
답 5

6

이차방정식 $x^2-4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$ ……㉠

직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면 다음 그림에서 두 삼각형 ABC, AB′C′은 닮음이다.



즉, $\alpha:\beta=(\alpha-k):k$에서 $\alpha k=\beta(\alpha-k)$이므로

$\alpha k=\alpha\beta-\beta k$, $(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore k=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

$=\dfrac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

즉, 정사각형의 넓이 $k^2=\dfrac{1}{4}$과 둘레의 길이 $4k=2$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x-2)=0$

$\therefore 4x^2-9x+2=0$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-7$

답 -7

06. 이차방정식과 이차함수

1 이차방정식과 이차함수

기본 + 필수연습 본문 pp.135~141

01	5	**02**	(1) $a<\frac{9}{2}$ (2) $a=\frac{9}{2}$ (3) $a>\frac{9}{2}$				
03	52	**04**	(1) $k>-7$ (2) $k=-7$ (3) $k<-7$				
05	6	**06**	-12	**07**	14	**08**	-1
09	8	**10**	Q$(6,\ -5)$			**11**	4
12	2	**13**	$a=2$, $b=1$				
14	$y=-x+\frac{15}{4}$			**15**	-1, 1, $\frac{5}{4}$		
16	6	**17**	24				

01

이차방정식 $-x^2+ax+3=0$의 두 실근이 -1, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+b=a$ ……㉠

$(-1)\times b=-3$

즉, $b=3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a=2$

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

02

이차방정식 $2x^2+6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=3^2-2\times a=9-2a$

(1) $\dfrac{D}{4}=9-2a>0$ $\quad\therefore a<\dfrac{9}{2}$

(2) $\dfrac{D}{4}=9-2a=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{9}{2}$

(3) $\dfrac{D}{4}=9-2a<0$ $\quad\therefore a>\dfrac{9}{2}$

답 (1) $a<\dfrac{9}{2}$ (2) $a=\dfrac{9}{2}$ (3) $a>\dfrac{9}{2}$

03

이차함수 $y=x^2+ax+4$의 그래프와 직선 $y=-3x+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$x^2+ax+4=-3x+b$, 즉 $x^2+(a+3)x+4-b=0$의 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=-(a+3)$, $(-1)\times 2=4-b$

따라서 $a=-4$, $b=6$이므로

$a^2+b^2=(-4)^2+6^2=52$

답 52

04

이차방정식 $x^2+5x+2=-x+k$, 즉 $x^2+6x+2-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-(2-k)=7+k$

(1) $\frac{D}{4}=7+k>0$ $\quad\therefore k>-7$

(2) $\frac{D}{4}=7+k=0$ $\quad\therefore k=-7$

(3) $\frac{D}{4}=7+k<0$ $\quad\therefore k<-7$

답 (1) $k>-7$ (2) $k=-7$ (3) $k<-7$

05

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+5=-a$, $(-3)\times 5=b$

$\therefore a=-2, b=-15$

즉, $f(x)=x^2-2x-15$이므로

$y=f(x)+7=x^2-2x-8$

이차함수 $y=f(x)+7$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-2x-8=0$의 실근과 같으므로

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 이차함수 $y=f(x)+7$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(4, 0)$이므로 이 두 점 사이의 거리는

$4-(-2)=6$

답 6

06

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하면 이차방정식 $x^2-2kx+k+8=0$의 두 근은 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k+8$

이때 $\overline{PQ}=|\alpha-\beta|=4$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=16$

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$이므로

$4k^2=16+4(k+8)$

$\therefore k^2-k-12=0$

따라서 k에 대한 이 이차방정식에서 모든 실수 k의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -12이다.

답 -12

다른 풀이 1

$\overline{PQ}=4$이므로 점 P의 좌표를 $(\alpha, 0)$, 점 Q의 좌표를 $(\alpha+4, 0)$이라 할 수 있다.

두 점 P, Q는 이차함수 $y=x^2-2kx+k+8$의 그래프와 x축의 교점이므로 α, $\alpha+4$는 이차방정식 $x^2-2kx+k+8=0$의 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k$ ······㉠

$\alpha\times(\alpha+4)=k+8$ ······㉡

㉠에서 $2\alpha+4=2k$, 즉 $\alpha=k-2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k-2+4)=k+8$

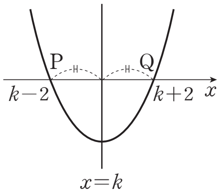
$(k-2)(k+2)=k+8$, $k^2-4=k+8$

$\therefore k^2-k-12=0$

따라서 k에 대한 이 이차방정식에서 모든 실수 k의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -12이다.

다른 풀이 2

이차함수 $y=x^2-2kx+k+8$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이고, $\overline{PQ}=4$이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q의 x좌표는 $k-2$, $k+2$이다.



이것은 이차방정식 $x^2-2kx+k+8=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(k-2)(k+2)=k+8 \qquad \therefore k^2-k-12=0$

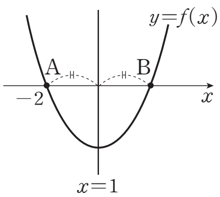
따라서 k에 대한 이 이차방정식에서 모든 실수 k의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -12이다.

07

$f(-3)=f(5)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{-3+5}{2} \qquad \therefore x=1$

이때 A$(-2, 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ B$(4, 0)$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 A$(-2, 0)$, B$(4, 0)$에서 만나고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)=2(x+2)(x-4)$

$\therefore f(5)=2\times(5+2)\times(5-4)=14$

답 14

다른 풀이

$f(-3)=f(5)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$

즉, $f(x)=2(x-1)^2+k$ (k는 상수)라 할 수 있다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 한 교점 A의 x좌표가 -2이므로 $x=-2$는 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

즉, $f(-2)=0$에서

$2\times(-2-1)^2+k=0 \qquad \therefore k=-18$

따라서 $f(x)=2(x-1)^2-18$이므로

$f(5)=2\times(5-1)^2-18=14$

08

(i) 이차함수 $y=x^2-2(a-1)x+a^2+2$의 그래프가 x축과 만날 때,

이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a^2+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=\{-(a-1)\}^2-(a^2+2)\geq 0$

$-2a-1\geq 0 \qquad \therefore a\leq -\dfrac{1}{2}$

즉, $a\leq -\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 정수 a의 값은

$-1, -2, -3, \cdots$이다.

(ii) 이차함수 $y=ax^2-2(a+2)x+a-3$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때,

이차방정식 $ax^2-2(a+2)x+a-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(a+2)\}^2-a(a-3)<0$

$7a+4<0 \qquad \therefore a<-\dfrac{4}{7}$

즉, $a<-\dfrac{4}{7}$를 만족시키는 정수 a의 값은

$-1, -2, -3, \cdots$이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 a의 최댓값은 -1이다.

답 -1

09

이차함수 $y=x^2-(a+2k)x+k^2+4k+2b$의 그래프가 x축에 접하려면 x에 대한 이차방정식

$x^2-(a+2k)x+k^2+4k+2b=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=\{-(a+2k)\}^2-4(k^2+4k+2b)=0$

$\therefore 4(a-4)k+a^2-8b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a-4=0,\ a^2-8b=0 \qquad \therefore a=4,\ b=2$

$\therefore ab=8$

답 8

10

이차함수 $y=x^2+mx+1$의 그래프와 직선 $y=x-11$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+mx+1=x-11$, 즉

$x^2+(m-1)x+12=0$ ······㉠

의 실근과 같으므로 $x=2$는 이차방정식 ㉠의 근이다.

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$2^2+2(m-1)+12=0$, $2m+14=0$

$\therefore m=-7$

이것을 ㉠에 대입하면 $x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=6$

따라서 점 Q의 x좌표는 6이고, $x=6$을 $y=x-11$에 대입하면

$y=6-11=-5$ $\quad\therefore$ Q$(6, -5)$

답 Q$(6, -5)$

다른 풀이

이차함수 $y=x^2+mx+1$의 그래프와 직선 $y=x-11$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+mx+1=x-11$, 즉

$x^2+(m-1)x+12=0$

의 실근과 같다.

점 Q의 x좌표를 a (a는 실수)라 하면 점 P의 x좌표는 2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2a=12$ $\quad\therefore a=6$

이때 점 Q는 직선 $y=x-11$ 위의 점이므로 $x=6$을 $y=x-11$에 대입하면

$y=6-11=-5$

$\therefore$ Q$(6, -5)$

11

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 두 점 C, D는 각각 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발이므로

C$(\alpha, 0)$, D$(\beta, 0)$

또한, 두 점 A, B는 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로 α, β는 이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉

$x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 실근과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+1)$, $\alpha\beta=k^2$ ······㉠

이때 선분 CD의 길이가 6이므로

$|\alpha-\beta|=6$

위의 식의 양변을 제곱하면

$|\alpha-\beta|^2=6^2$, $(\alpha-\beta)^2=36$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\{2(k+1)\}^2-4k^2=36$

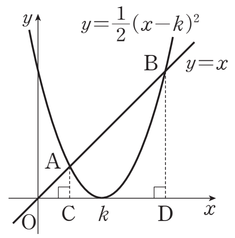
$4k^2+8k+4-4k^2-36=0$, $8k-32=0$

$\therefore k=4$

답 4

다른 풀이

이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(k, 0)$이고, 아래로 볼록하므로 다음 그림과 같다.



이때 $\overline{CD}=6$이므로 점 C의 좌표를 $(\alpha, 0)$이라 하면

D$(\alpha+6, 0)$, A(α, α), B$(\alpha+6, \alpha+6)$

또한, 두 점 A, B는 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식 $\frac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 실근과 같다.

즉, 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 두 실근이 α, $\alpha+6$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+6)=2(k+1)$ ······㉡

$\alpha\times(\alpha+6)=k^2$ ······㉢

㉡에서 $2k+2=2\alpha+6$, 즉 $\alpha=k-2$이므로

이것을 ㉢에 대입하면

$(k-2)(k-2+6)=k^2$

$(k-2)(k+4)=k^2$, $k^2+2k-8=k^2$

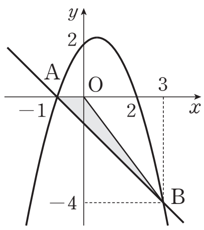
$2k-8=0$ $\quad\therefore k=4$

12

이차함수 $y=-x^2+ax+2$의 그래프와 직선 $y=-x+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-x^2+ax+2=-x+b$, 즉

$x^2-(a+1)x+b-2=0$ ······㉠

의 실근과 같으므로 두 점 A, B의 x좌표인 -1, 3은 이차방정식 ㉠의 근이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+3=a+1$, $(-1)\times3=b-2$
$\therefore a=1$, $b=-1$
두 점 A, B는 직선 $y=-x-1$ 위의 점이므로
A$(-1, 0)$, B$(3, -4)$
따라서 삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times1\times4=2$



답 2

13

(ⅰ) 직선 $y=-x+a$가 이차함수 $y=x^2+3x+6$의 그래프와 접할 때,
이차방정식 $x^2+3x+6=-x+a$, 즉
$x^2+4x+6-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$\frac{D_1}{4}=2^2-(6-a)=0$
$a-2=0$ $\quad\therefore a=2$
(ⅱ) 직선 $y=-x+a$가 이차함수 $y=x^2+bx+3$의 그래프와 접할 때,
이차방정식 $x^2+bx+3=-x+a$, 즉
$x^2+(b+1)x+3-a=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(b+1)^2-4(3-a)=0$
$b^2+2b+4a-11=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠
$a=2$를 ㉠에 대입하면
$b^2+2b-3=0$, $(b+3)(b-1)=0$
$\therefore b=1$ $(\because b>0)$

답 $a=2$, $b=1$

14

구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하자.
이차함수 $y=x^2+2kx+k^2+k+4$의 그래프가
직선 $y=mx+n$과 접하므로
x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+k^2+k+4=mx+n$, 즉
$x^2+(2k-m)x+k^2+k-n+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-m)^2-4(k^2+k-n+4)=0$
$-4(m+1)k+m^2+4n-16=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$m+1=0$, $m^2-16+4n=0$
따라서 $m=-1$, $n=\frac{15}{4}$이므로 구하는 직선의 방정식은
$y=-x+\frac{15}{4}$

답 $y=-x+\frac{15}{4}$

15

x에 대한 두 이차함수 $y=a^2x^2+2ax+2$, $y=x^2+x+1$의
이차함수이므로 $a^2\neq0$ $\quad\therefore a\neq0$
그래프가 오직 한 점에서 만나기 위해서는 x에 대한 방정식
$a^2x^2+2ax+2=x^2+x+1$, 즉
$(a^2-1)x^2+(2a-1)x+1=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠
의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.
(ⅰ) $a^2\neq1$일 때,
이차방정식 ㉠은 중근을 가져야 하므로
㉠의 판별식을 D라 하면
$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)=0$
$-4a+5=0$ $\quad\therefore a=\frac{5}{4}$
(ⅱ) $a=1$일 때,
㉠에서 $x+1=0$ $\quad\therefore x=-1$
즉, $a=1$일 때 방정식 ㉠은 하나의 실근을 갖는다.
(ⅲ) $a=-1$일 때,
㉠에서 $-3x+1=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$
즉, $a=-1$일 때 방정식 ㉠은 하나의 실근을 갖는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 a의 값은 -1, 1, $\frac{5}{4}$이다.

답 -1, 1, $\frac{5}{4}$

16

두 이차함수 $y=-2x^2+2ax+b$, $y=2x^2+4$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-2x^2+2ax+b=2x^2+4$, 즉
$4x^2-2ax+4-b=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

의 실근과 같다.

두 그래프가 만나지 않으므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-4(4-b)<0$

$\therefore a^2+4b-16<0$ ……㉡

부등식 ㉡을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면 다음과 같다.

(i) $a=1$일 때,

㉡에서 $1^2+4b-16<0$

$\therefore b<\frac{15}{4}$

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개이다.

(ii) $a=2$일 때,

㉡에서 $2^2+4b-16<0$

$\therefore b<3$

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$의 2개이다.

(iii) $a=3$일 때,

㉡에서 $3^2+4b-16<0$

$\therefore b<\frac{7}{4}$

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$의 1개이다.

(iv) $a\geq4$일 때,

조건을 만족시키는 자연수 b가 존재하지 않으므로 순서쌍 (a, b)는 없다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+2+1=6$

답 6

17

두 이차함수 $y=-(x-2)^2+a$, $y=2(x-2)^2-3$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 방정식 $-(x-2)^2+a=2(x-2)^2-3$, 즉 $3x^2-12x-a+9=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-12}{3}=4$, $\alpha\beta=\frac{-a+9}{3}$ ……㉠

한편, 두 이차함수 $y=-(x-2)^2+a$, $y=2(x-2)^2-3$의 그래프는 모두 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 교점의 y좌표는 서로 같다.(*)

이때 두 교점 사이의 거리가 6이므로

$|\alpha-\beta|=6$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=36$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$4^2-4\times\frac{-a+9}{3}=36$ $\quad\therefore a=24$

답 24

보충 설명

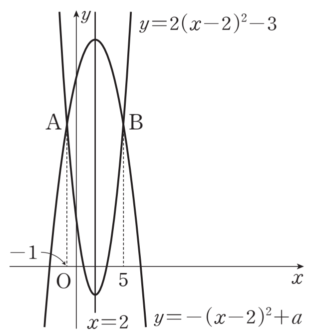
(*)에서 두 이차함수 $y=-(x-2)^2+a$, $y=2(x-2)^2-3$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$로 서로 같으므로 두 이차함수의 그래프는 모두 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 이차함수의 그래프의 두 교점도 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 그 y좌표의 값은 서로 같다.

다른 풀이

두 이차함수 $y=-(x-2)^2+a$, $y=2(x-2)^2-3$의 그래프의 축이 직선 $x=2$로 서로 같다.

다음 그림과 같이 두 이차함수의 그래프의 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B 사이의 거리가 6이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 -1, 5이다.



$x=5$일 때, 두 이차함수의 함숫값이 서로 같으므로

$-(5-2)^2+a=2\times(5-2)^2-3$

$-9+a=2\times9-3$

$\therefore a=24$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.142~143

01 -28	**02** 2	**03** -4	**04** 2
05 ④	**06** -2	**07** 2	**08** 1
09 $\frac{9}{4}$	**10** -2	**11** 24	**12** $a<\frac{1}{2}$

01

선분 AB는 x축과 평행하고 조건 (나)에서

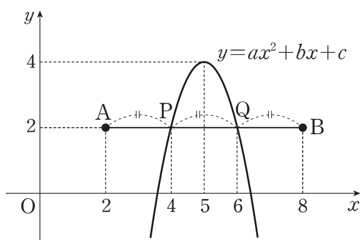
$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=2$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$P(4, 2)$, $Q(6, 2)$

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이므로

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는

$\frac{4+6}{2}=5$이다.



조건 (가)에서 꼭짓점의 y좌표는 4이므로

주어진 이차함수의 식을

$y=a(x-5)^2+4\ (a<0)$

라 하면 이 이차함수의 그래프가 점 $P(4, 2)$를 지나므로

$2=a(4-5)^2+4$

$2=a+4 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore y=-2(x-5)^2+4$

$\quad =-2(x^2-10x+25)+4$

$\quad =-2x^2+20x-46$

따라서 $a=-2$, $b=20$, $c=-46$이므로

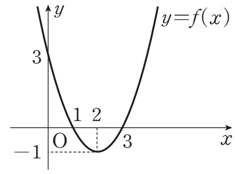
$a+b+c=(-2)+20+(-46)=-28$

답 -28

02 본문 p.131 한 걸음 더 참고

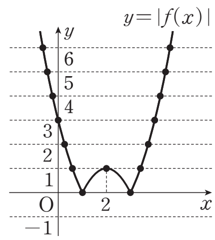
$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로

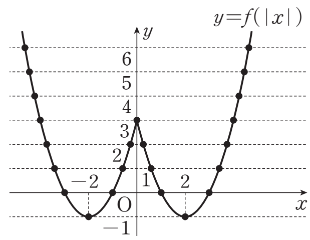
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 두 방정식 $|f(x)|=k$, $f(|x|)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 각각 m, n이므로 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 각각 m, n이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$의 그래프를 각각 그린 후, 정수 k의 값에 따른 m, n의 값을 구하면 다음과 같다.





(i) $k<-1$일 때,

$\quad m=0$, $n=0$이므로 $m+n=0$

(ii) $k=-1$일 때,

$\quad m=0$, $n=2$이므로 $m+n=2$

(iii) $k=0$일 때,

$\quad m=2$, $n=4$이므로 $m+n=6$

(iv) $k=1$일 때,

$\quad m=3$, $n=4$이므로 $m+n=7$

(v) $k=2$일 때,

$\quad m=2$, $n=4$이므로 $m+n=6$

(vi) $k=3$일 때,

$\quad m=2$, $n=3$이므로 $m+n=5$

(vii) $k\geq4$일 때,

$\quad m=2$, $n=2$이므로 $m+n=4$

(i)~(vii)에서 조건을 만족시키는 정수 k의 값은 0, 2의 2개이다.

답 2

03

$A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$이라 하면 α, β는 이차방정식 $2x^2-2x+k=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{k}{2}$ ······㉠

$\overline{AB}=3$이므로 $|\alpha-\beta|=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=9$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 위의 식에 ㉠을 대입하면

$9=1-2k,\ 2k=-8$ $\therefore\ k=-4$

답 -4

다른 풀이

$y=2x^2-2x+k=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{2}$

즉, 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{1}{2}$

이때 $\overline{AB}=3$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각

$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$과 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$, 즉 -1과 2이다.

따라서 -1, 2는 이차방정식 $2x^2-2x+k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)\times2=\frac{k}{2}$ $\therefore\ k=-4$

04

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이라 하면

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$

두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$은 직선 $x=-3$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=-3$ $\therefore\ \alpha+\beta=-6$ ······㉠

이차방정식 $f(2x-5)=0$의 해는

$2x-5=\alpha$ 또는 $2x-5=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x-5)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+5}{2}+\frac{\beta+5}{2}=\frac{\alpha+\beta+10}{2}$$
$$=\frac{-6+10}{2}\ (\because ㉠)$$
$$=2$$

답 2

05

세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$라 하면

$f(x)=a(x+1)(x-1)$,

$g(x)=-a(x+2)(x-1)$,

$h(x)=a(x-1)(x-2)$라 할 수 있다.

$f(x)+g(x)+h(x)$

$=a(x+1)(x-1)-a(x+2)(x-1)+a(x-1)(x-2)$

$=a(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}$

$=a(x-1)(x-3)$

이므로 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$a(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은

$1+3=4$

답 ④

06

(i) 이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+a^2+a-3$의 그래프가 x축과 만날 때,

이차방정식 $x^2+2(a-1)x+a^2+a-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2-(a^2+a-3)\geq0$

$-3a+4\geq0$ $\therefore\ a\leq\frac{4}{3}$

즉, $a\leq\frac{4}{3}$를 만족시키는 정수 a의 값은 $1, 0, -1, \cdots$이다.

(가)

(ii) 이차함수 $y=-x^2-3x+2a$의 그래프가 x축과 만나지 않을 때,

이차방정식 $-x^2-3x+2a=0$, 즉

$x^2+3x-2a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times(-2a)<0$

$8a+9<0$ $\therefore\ a<-\frac{9}{8}$

즉, $a<-\frac{9}{8}$를 만족시키는 정수 a의 값은

$-2, -3, -4, \cdots$이다.

(나)

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 정수 a의 최댓값은 -2이다.
(다)

답 -2

단계	채점 기준	배점
(가)	이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+a^2+a-3$의 그래프가 x축과 만나도록 하는 정수 a의 값을 구한 경우	40%
(나)	이차함수 $y=-x^2-3x+2a$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 정수 a의 값을 구한 경우	40%
(다)	(가), (나)를 이용하여 정수 a의 최댓값을 구한 경우	20%

07

이차함수 $y=-x^2+2x+3$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-x^2+2x+3=ax+b$, 즉

$x^2+(a-2)x+b-3=0$ ……㉠

의 실근과 같다.

이차방정식 ㉠의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이고 a, b가 모두 유리수이므로 ㉠의 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-(a-2)$ $\quad\therefore a=-2$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b-3$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a+b=(-2)+4=2$

답 2

08

이차함수 $y=x^2-ax+3a$의 그래프가 직선 $y=ax-a^2+5$와 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식

$x^2-ax+3a=ax-a^2+5$, 즉

$x^2-2ax+a^2+3a-5=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a^2+3a-5)\geq 0$

$-3a+5\geq 0$ $\quad\therefore a\leq\frac{5}{3}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 1

09

이차함수 $y=x^2+ax+k^2-k+b$의 그래프가 직선 $y=2kx+a$에 접하므로 이차방정식

$x^2+ax+k^2-k+b=2kx+a$, 즉

$x^2+(a-2k)x+k^2-k-a+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2k)^2-4(k^2-k-a+b)=0$

$a^2-4ak+4k^2-4k^2+4k+4a-4b=0$

$\therefore -4(a-1)k+a^2+4a-4b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-4(a-1)=0$, $a^2+4a-4b=0$

따라서 $a=1$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$a+b=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

답 $\frac{9}{4}$

10

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$을 지나므로

$f(x)=x(x-4)$

이때 $f(3)=3\times(-1)=-3$이므로 직선 $y=g(x)$는 점 $(3, -3)$을 지난다.

$g(x)=ax+b$ (a, b는 실수)라 하면 $g(3)=-3$이므로

$3a+b=-3$ $\quad\therefore b=-3a-3$

$\therefore g(x)=ax-3a-3$

또한, 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 접하므로 이차방정식 $ax-3a-3=x(x-4)$, 즉

$x^2-(a+4)x+3a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4(3a+3)=0$

$a^2+8a+16-12a-12=0$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore g(x)=2x-9$

방정식 $f(x)+3g(x)=0$에서

$x(x-4)+3(2x-9)=0$

$\therefore x^2+2x-27=0$

따라서 방정식 $f(x)+3g(x)=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.
근의 공식을 이용하여 구하면 $x=-1\pm2\sqrt{7}$이다.

답 -2

다른 풀이

이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, 0)$, $(4, 0)$을 지나므로

$f(x)=x(x-4)$

$g(x)=ax+b$ (a, b는 실수)라 하면 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 $x=3$에서 접하므로 방정식

$x(x-4)=ax+b$, 즉 $x^2-(a+4)x-b=0$ ……㉠

이 중근 $x=3$을 갖는다.

이때 $x=3$을 중근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-3)^2=0$ $\quad\therefore\ x^2-6x+9=0$ ……㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$a+4=6,\ -b=9$ $\quad\therefore\ a=2,\ b=-9$

$\therefore\ g(x)=2x-9$

$\therefore\ f(x)+3g(x)=x(x-4)+3(2x-9)$

$\qquad\qquad\qquad\ =x^2+2x-27$

따라서 방정식 $f(x)+3g(x)=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

11

두 이차함수 $y=x^2-3x+a$, $y=-2x^2+bx+3$의 그래프가 접하므로 이차방정식 $x^2-3x+a=-2x^2+bx+3$, 즉

$3x^2-(b+3)x+a-3=0$ ……㉠

의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(b+3)\}^2-4\times3\times(a-3)=0$

$\therefore\ (b+3)^2-12a+36=0$ ……㉡

이때 접점의 x좌표가 2이므로 $x=2$는 이차방정식 ㉠의 근이다.

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$3\times2^2-(b+3)\times2+a-3=0$

$\therefore\ a=2b-3$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(b+3)^2-12(2b-3)+36=0$

$b^2-18b+81=0,\ (b-9)^2=0$

$\therefore\ b=9,\ a=2\times9-3=15$ ($\because$ ㉢)

$\therefore\ a+b=15+9=24$

답 24

다른 풀이

두 이차함수 $y=x^2-3x+a$, $y=-2x^2+bx+3$의 그래프가 접하고 접점의 x좌표가 2이므로 이차방정식

$x^2-3x+a=-2x^2+bx+3$, 즉

$3x^2-(3+b)x+a-3=0$ ……㉣

은 중근 $x=2$를 갖는다.

이때 $x=2$를 중근으로 갖고 이차항의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x-2)^2=0$ $\quad\therefore\ 3x^2-12x+12=0$ ……㉤

㉣, ㉤이 일치하므로

$-(3+b)=-12,\ a-3=12$

$\therefore\ a=15,\ b=9$ $\quad\therefore\ a+b=24$

12

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

조건 ㈎에서 $f(-1-x)=f(-1+x)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이다.

이때 $f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x+1)^2+a$ (a는 상수)

라 할 수 있다.

또한, 조건 ㈏에서 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지므로

$a=0$ $\quad\therefore\ f(x)=(x+1)^2$

같은 방법으로 조건 ㈎의 $g(2-x)=g(2+x)$에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고, $g(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$g(x)=(x-2)^2+b$ (b는 상수)

라 할 수 있다.

또한, 조건 ㈏에서 이차방정식 $g(x)=0$, 즉

$x^2-4x+4+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(4+b)>0$ $\quad\therefore\ b<0$ ……㉠

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$(x+1)^2=(x-2)^2+b$에서

$x^2+2x+1=x^2-4x+4+b$

$6x=b+3$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{b+3}{6}$

이 방정식의 해가 $x=\alpha$이므로 $\alpha=\dfrac{b+3}{6}$

그런데 ㉠에서 $b+3<3$이므로 $\dfrac{b+3}{6}<\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha<\dfrac{1}{2}$

답 $\alpha<\dfrac{1}{2}$

2 이차함수의 최대, 최소

기본 + 필수연습

본문 pp.146~151

18 (1) 최솟값 : -2, 최댓값은 없다.

(2) 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값은 없다.

19 (1) 최댓값 : 13, 최솟값 : 4

(2) 최댓값 : -7, 최솟값 : -31

20 (1) 5 (2) $-\frac{7}{4}$ **21** -6 **22** 10

23 (1) 4 (2) 3 **24** $1-2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

25 25 **26** -4 **27** (1) -15 (2) -6

28 8 **29** 최댓값 : 7, 최솟값 : $-\frac{25}{8}$

30 690 **31** 900원 **32** 34

18

(1) $y=3x^2+6x+1$

$=3(x^2+2x+1)-2$

$=3(x+1)^2-2$

이므로 $x=-1$에서 최솟값 -2를 갖고, 최댓값은 없다.

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

이므로 $x=1$에서 최댓값 $\frac{3}{2}$을 갖고, 최솟값은 없다.

답 (1) 최솟값 : -2, 최댓값은 없다.

(2) 최댓값 : $\frac{3}{2}$, 최솟값은 없다.

다른 풀이 본문 p.144 한 걸음 더 참고

(1) $y=3x^2+6x+1$에서 $3x^2+6x-y+1=0$

이차방정식 $3x^2+6x-y+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-3(-y+1)\geq 0$

$3y+6\geq 0$ $\quad\therefore y\geq -2$

따라서 주어진 이차함수의 최솟값은 -2이고 최댓값은 없다.

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1$에서 $x^2-2x+2y-2=0$

이차방정식 $x^2-2x+2y-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2y-2)\geq 0$

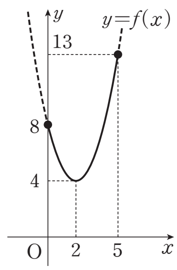
$-2y+3\geq 0$ $\quad\therefore y\leq\frac{3}{2}$

따라서 주어진 이차함수의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 없다.

19

(1) $f(x)=x^2-4x+8=(x-2)^2+4$

이므로 $0\leq x\leq 5$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이다.



따라서 꼭짓점의 x좌표 2는 $0\leq x\leq 5$에 속하고, $f(0)=8$, $f(2)=4$, $f(5)=13$이므로

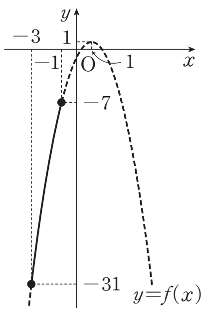
$f(x)$의 최댓값은 13, 최솟값은 4이다.

(2) $f(x)=-2x^2+4x-1$

$=-2(x^2-2x+1)+1$

$=-2(x-1)^2+1$

이므로 $-3\leq x\leq -1$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림의 실선 부분이다.



꼭짓점의 x좌표 1은 $-3\leq x\leq -1$에 속하지 않고 $f(-3)=-31$, $f(-1)=-7$이므로

$f(x)$의 최댓값은 -7, 최솟값은 -31이다.

답 (1) 최댓값 : 13, 최솟값 : 4

(2) 최댓값 : -7, 최솟값 : -31

20

(1) $f(x)=2x^2-4x+a$

$=2(x^2-2x+1)+a-2$

$=2(x-1)^2+a-2$

즉, $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-2$를 가지므로

$a-2=3$ $\quad\therefore a=5$

(2) $f(x)=-3x^2+3x+k$

$$=-3\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+k+\frac{3}{4}$$

$$=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{3}{4}$$

즉, $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{3}{4}$을 가지므로

$k+\frac{3}{4}=-1 \qquad \therefore k=-\frac{7}{4}$

답 (1) 5 (2) $-\frac{7}{4}$

21

$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

즉, $f(x)$는 $x=-\frac{a}{2}$에서 최솟값 $-\frac{a^2}{4}+b$를 가지므로

$-\frac{a}{2}=-2 \qquad \therefore a=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=3$에서 $1+a+b=3 \qquad \therefore a+b=2$

위의 식에 ㉠을 대입하여 정리하면 $b=-2$

따라서 구하는 최솟값은 $-\frac{4^2}{4}-2=-6$

답 -6

다른 풀이

이차함수 $f(x)$는 x^2의 계수가 1이고 $x=-2$에서 최솟값을 가지므로

$f(x)=(x+2)^2+q$ (q는 상수)

라 하면 $f(1)=3$에서

$(1+2)^2+q=3 \qquad \therefore q=-6$

따라서 이차함수 $f(x)=(x+2)^2-6$의 최솟값은 -6이다.

22

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$을 지나므로 축의 방정식은

$x=\frac{(-4)+2}{2}=-1$

즉, 이차함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 18을 가지므로

$f(x)=a(x+1)^2+18$ $(a<0)$

이라 할 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$f(2)=0$에서

$a\times(2+1)^2+18=0 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+1)^2+18$이므로

$f(1)=-2\times(1+1)^2+18=10$

답 10

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=k(x+4)(x-2)$ ($k\neq0$인 상수)

라 할 수 있다.

이때 $f(x)$는 최댓값을 가지므로 $k<0$이고

$f(x)=k(x+4)(x-2)$

$=k(x^2+2x-8)$

$=k\{(x+1)^2-9\}$

$=k(x+1)^2-9k$

즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $-9k$를 가지므로

$-9k=18 \qquad \therefore k=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+4)(x-2)$이므로

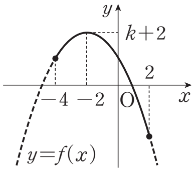
$f(1)=-2\times(1+4)\times(1-2)=10$

23

(1) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+k$라 하면

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+k+2$

$-4\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-2$일 때 최대이고 $x=2$일 때 최소이다.



즉, 최솟값은 $f(2)=-4$이므로

$-\frac{1}{2}\times(2+2)^2+k+2=-4$

$k-6=-4 \qquad \therefore k=2$

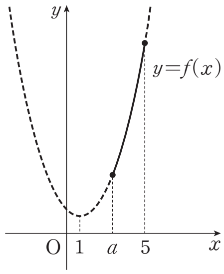
$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+4$

따라서 주어진 이차함수는 $x=-2$일 때 최댓값 4를 갖는다.

(2) $f(x)=2x^2-4x+5$라 하면

$f(x)=2(x-1)^2+3$

$1<a<5$일 때, $a\le x\le 5$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=5$일 때 최대이고 $x=a$일 때 최소이다.



즉, 최솟값은 $f(a)=11$이므로 $2a^2-4a+5=11$

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because 1<a<5$)

답 (1) 4 (2) 3

24

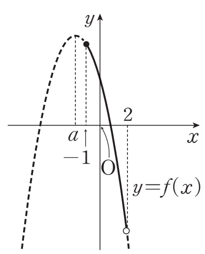
$f(x)=-x^2+2ax+a^2$이라 하면

$f(x)=-(x-a)^2+2a^2$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a, 2a^2)$이고 위로 볼록한 포물선이다.

(i) $a\le -1$일 때,

$-1\le x<2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $f(-1)$이다.



즉, $f(-1)=6$에서

$-1-2a+a^2=6$

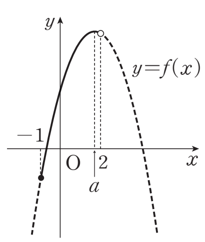
$a^2-2a-7=0$

$\therefore a=1\pm2\sqrt{2}$ ← $1-2\sqrt{2}=-1.\times\times\times$, $1+2\sqrt{2}=3.\times\times\times$

그런데 $a\le -1$이므로 $a=1-2\sqrt{2}$

(ii) $-1<a<2$일 때,

$-1\le x<2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $f(a)$이다.



즉, $f(a)=6$에서

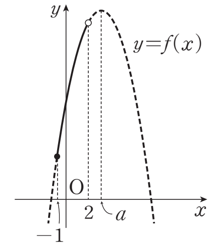
$2a^2=6$, $a^2=3$

$\therefore a=\pm\sqrt{3}$ ← $-\sqrt{3}=-1.\times\times\times$, $\sqrt{3}=1.\times\times\times$

그런데 $-1<a<2$이므로 $a=\sqrt{3}$

(iii) $a\ge 2$일 때,

$-1\le x<2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 없다.



(i), (ii), (iii)에서

$a=1-2\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{3}$

답 $1-2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

25

$y=(2x-1)^2-4(2x-1)+3$에서 $2x-1=t$로 놓으면

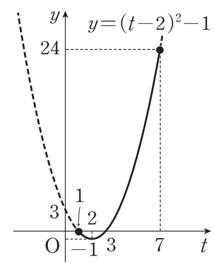
$1\le x\le 4$이므로 $1\le t\le 7$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3$

$\quad=(t-2)^2-1$ $(1\le t\le 7)$

즉, $1\le t\le 7$에서 이차함수 $y=(t-2)^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=7$일 때 최대이고 $t=2$일 때 최소이다.



$t=7$일 때, 최댓값 M은

$M=(7-2)^2-1=24$

$t=2$일 때, 최솟값 m은

$m=-1$

$\therefore M-m=24-(-1)=25$

답 25

26

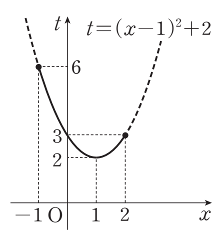
$y=-(x^2-2x+3)^2+4x^2-8x+14$

$\quad=-(x^2-2x+3)^2+4(x^2-2x+3)+2$

에서 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le 2$에서 $t=(x-1)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$2\le t\le 6$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2+4t+2$

$\quad=-(t-2)^2+6$ $(2\le t\le 6)$

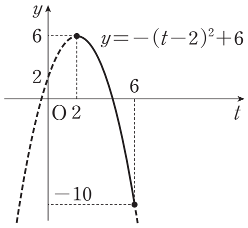
즉, $2\le t\le 6$에서 이차함수

$y=-(t-2)^2+6$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$t=2$일 때 최댓값 6을 갖고,

$t=6$일 때 최솟값 -10을 갖는다.



따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$6+(-10)=-4$

답 -4

27

(1) $4x^2+3y^2+4x-12y-2$

$=4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+3(y^2-4y+4)-15$

$=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3(y-2)^2-15$

이때 x, y는 실수이므로

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$, $(y-2)^2\ge 0$

따라서 주어진 식은 $x=-\frac{1}{2}$, $y=2$일 때 최솟값 -15를 갖는다.

(2) $-2x+y^2=4$에서 $y^2=2x+4$ ……㉠

이때 x, y가 실수이므로 $y^2\ge 0$

즉, $2x+4\ge 0$이므로 $x\ge -2$

㉠을 $2x^2-y^2+6x$에 대입하면

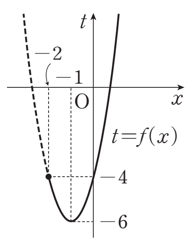
$2x^2-(2x+4)+6x=2x^2+4x-4$

$=2(x+1)^2-6$

$f(x)=2(x+1)^2-6$이라 하면

$x\ge -2$에서 이차함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최솟값 -6을 갖는다.



따라서 $\underline{2x^2-y^2+6x}$의 최솟값은 -6이다.

$x=-1$, $y=\pm\sqrt{2}$일 때

답 (1) -15 (2) -6

보충 설명

여러 문자가 포함된 식에서 한 문자로 통일할 때에는 제한 범위에 주의한다.

28

$-2x^2-y^2+16x-4y-37$

$=-2(x^2-8x+16)-(y^2+4y+4)-1$

$=-2(x-4)^2-(y+2)^2-1$

이때 x, y는 실수이므로

$(x-4)^2\ge 0$, $(y+2)^2\ge 0$

따라서 주어진 식은 $x=4$, $y=-2$일 때 최댓값 -1을 갖는다.

즉, $p=4$, $q=-2$, $r=-1$이므로

$pqr=4\times(-2)\times(-1)=8$

답 8

29

$2x-y=5$에서 $y=2x-5$이므로

$xy=x(2x-5)$

$=2x^2-5x$

$=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

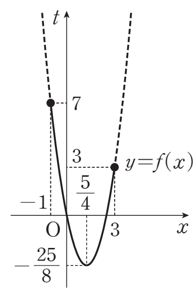
$f(x)=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$라 하면

$-1\le x\le 3$에서 이차함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f(x)$는

$x=-1$에서 최댓값 7,

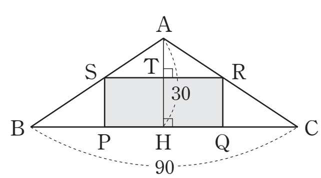
$x=\frac{5}{4}$에서 최솟값 $-\frac{25}{8}$를 갖는다.



답 최댓값 : 7, 최솟값 : $-\frac{25}{8}$

30

다음 그림과 같이 $\overline{AH}$와 $\overline{SR}$의 교점을 T라 하자.



□PQRS는 직사각형이므로 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{SR}$

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ASR$ (AA 닮음)

$\overline{AH}:\overline{AT}=\overline{BC}:\overline{SR}$이므로

$30:\overline{AT}=90:\overline{SR}$ $\therefore$ $\overline{SR}=3\overline{AT}$

이때 $\overline{\mathrm{AT}}=x$라 하면 $0<x<30$이고

$\overline{\mathrm{SR}}=3x$, $\overline{\mathrm{TH}}=30-\overline{\mathrm{AT}}=30-x$

직사각형 PQRS의 넓이를 y라 하면

$y=\overline{\mathrm{SR}}\times\overline{\mathrm{TH}}=3x\times(30-x)$

$\quad=-3x^2+90x$

$\quad=-3(x-15)^2+675$

즉, $\overline{\mathrm{AT}}=15$일 때, 직사각형의 넓이는 최대이고 그때의 넓이는 675이다.

$\overline{\mathrm{AT}}=15$이면 $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{TH}}=30-15=15$

따라서 $p=15$, $q=675$이므로

$p+q=15+675=690$

답 690

31

가격을 내리기 전, 전구 한 개의 판매 이익은

$1000-500=500$(원)

전구 한 개의 가격을 $50x$원 내릴 때, $10x$개가 더 팔리므로 하루 판매 이익을 y원이라 하면

$y=(500-50x)(60+10x)$

$\quad=-500x^2+2000x+30000$

$\quad=-500(x-2)^2+32000$

이때 $\underbrace{0\le x\le 10}_{\text{전구 한 개의 판매 이익이 500원이므로 }500-50x\ge 0\text{에서 }x\le 10}$이므로 $x=2$일 때 y는 최대이다.

따라서 하루 판매 이익이 최대가 되도록 하는 전구 한 개의 판매 가격은

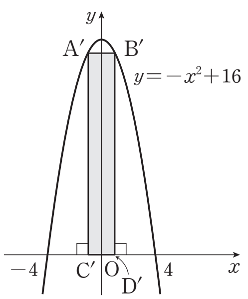
$1000-50\times 2=900$(원)

답 900원

32

주어진 이차함수 $y=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 $y=-x^2+16$의 그래프이다.

네 점 A, B, C, D를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′, C′, D′이라 하면 오른쪽 그림과 같다.



이때 □ACDB가 직사각형이므로 □A′C′D′B′도 직사각형이고, 두 사각형의 둘레의 길이는 같다.

점 D′의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<4)$이라 하면

$\mathrm{B}'(a, -a^2+16)$ ← □A′C′D′B′은 직사각형이므로 $\mathrm{A}'(-a, -a^2+16)$, $\mathrm{C}'(-a, 0)$

$\therefore \overline{\mathrm{A'B'}}=2a$, $\overline{\mathrm{B'D'}}=-a^2+16$

따라서 직사각형 A′C′D′B′의 둘레의 길이는

$2(2a-a^2+16)=-2a^2+4a+32$

$\qquad\qquad\qquad=-2(a-1)^2+34$

이때 $0<a<4$이므로 $a=1$일 때 직사각형 A′C′D′B′의 둘레의 길이의 최대이고 그때의 둘레의 길이는 34이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 34이다.

답 34

STEP 1 개념 마무리

본문 p.152

13 11	**14** 54	**15** 2	**16** $-\frac{51}{2}$
17 4	**18** 70		

13

$\underbrace{\text{이차함수 }y=ax^2-4x+b}_{a\neq 0}$가 $x=-1$에서 최댓값 M을 가지므로

$y=ax^2-4x+b$

$\quad=a(x+1)^2+M$

$\quad=a(x^2+2x+1)+M$

$\quad=ax^2+2ax+a+M$

즉, $-4=2a$, $b=a+M$에서

$a=-2$, $M=b-a=b+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 이차함수 $y=ax^2-4x+b$, 즉 $y=-2x^2-4x+b$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$-2-4+b=3 \qquad \therefore b=9$

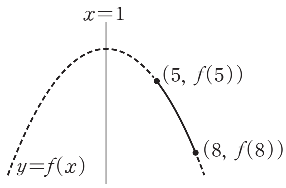
$\therefore M=11$ ($\because$ ㉠)

답 11

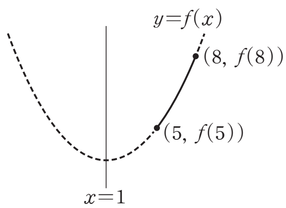
14

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -2, 4이므로 0이 아닌 상수 a에 대하여

$f(x)=a(x+2)(x-4)$
$\quad=a(x^2-2x-8)$
$\quad=a(x-1)^2-9a$
라 할 수 있다.
(i) $a<0$일 때,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 위로 볼록하고 축은 직선 $x=1$이다.



$5\le x\le 8$에서
함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(5)$이고 조건 ㈏에 의하여
$f(5)=80,\ 7a=80 \qquad \therefore\ a=\frac{80}{7}$
이것은 $a<0$을 만족시키지 않는다.
(ii) $a>0$일 때,
이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록하고 축은 직선 $x=1$이다.

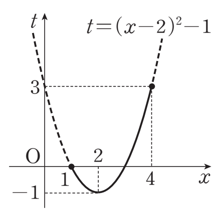


$5\le x\le 8$에서
함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(8)$이고 조건 ㈏에 의하여
$f(8)=80,\ 40a=80 \qquad \therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2$
따라서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이므로
$f(-5)=2\times(-3)\times(-9)=54$

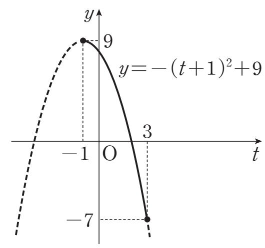
답 54

15

$f(x)=-(x^2-4x+3)^2-2x^2+8x+2$
$\quad=-(x^2-4x+3)^2-2(x^2-4x+3)+8$
이때 $x^2-4x+3=t$로 놓으면
$t=(x-2)^2-1$
$1\le x\le 4$에서 이차함수
$t=(x-2)^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
$-1\le t\le 3$



이때 주어진 함수는
$y=-t^2-2t+8$
$\quad=-(t+1)^2+9\ (-1\le t\le 3)$
$-1\le t\le 3$에서 함수
$y=-(t+1)^2+9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=-1$일 때, 최댓값 M은
$M=9$
$t=3$일 때, 최솟값 m은
$m=-(3+1)^2+9=-7$
$\therefore\ M+m=9+(-7)=2$

답 2

16

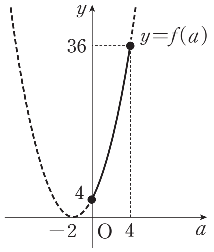
$2x^2+3y^2+z^2+6x-12y+4z-5$
$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+3(y-2)^2+(z+2)^2-\frac{51}{2}$
이때 $x,\ y,\ z$는 실수이므로
$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\ge 0,\ (y-2)^2\ge 0,\ (z+2)^2\ge 0$
따라서 주어진 식은 $x=-\frac{3}{2},\ y=2,\ z=-2$일 때 최솟값
$-\frac{51}{2}$을 갖는다.

답 $-\frac{51}{2}$

17

이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 방정식 $x^2-5x+4=0$의 실근과 같다.
즉, $x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$
$\therefore\ \mathrm{B}(1,\ 0),\ \mathrm{C}(4,\ 0)$
이때 점 P는 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위를 따라 점 A에서 점 C까지 움직이므로
$0\le a\le 4$
또한, 점 P는 이차함수 $y=x^2-5x+4$의 그래프 위의 점이므로
$b=a^2-5a+4$
$\therefore\ 9a+b=a^2+4a+4=(a+2)^2$

$f(a)=(a+2)^2$이라 하면 $0\le a\le 4$일 때 $y=f(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 꼭짓점의 a좌표 -2는 $0\le a\le 4$에 속하지 않는다.



즉, $f(a)$의 최솟값은 $a=0$일 때이므로 4이다.
따라서 $9a+b$의 최솟값은 4이다.

답 4

18

입장료 수익이 최대일 때의 직사각형 모양의 공원의 가로의 길이가 a m, 세로의 길이가 b m이고 공원의 둘레의 길이는 340 m가 되어야 하므로

$2(a+b)=340 \qquad \therefore a+b=170 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 공원의 넓이는 $ab\,\text{m}^2$이므로 1인당 공원 입장료는

$\frac{1}{10}ab$원이다.

한편, 입장료를 1000원에서 $2x$원 내리면 방문객의 수는 100명에서 x명 증가하므로 공원의 입장료 수익을 y원이라 하면

$y=(1000-2x)(100+x)$
$\quad=-2x^2+800x+100000$
$\quad=-2(x-200)^2+180000$

1인당 입장료에서 $1000-2x>0$
$\therefore x<500$

$x<500$에서 $x=200$일 때 y는 최댓값 180000을 가지므로 공원의 입장료 수익이 최대일 때의 1인당 입장료는

$1000-2\times 200=600$(원)

즉, $\frac{1}{10}ab=600$이므로 $ab=6000 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$\therefore |a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$
$\quad=\sqrt{170^2-4\times 6000}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\quad=\sqrt{4900}=70$

답 70

STEP 2 개념 마무리

본문 p.153

1 27	**2** 8	**3** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$	
4 $-1<k<\frac{9}{4}$		**5** 50	**6** 1

1

$y=2x^2-2ax=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$

즉, 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프의 꼭짓점은

$A\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)$

또한, $2x^2-2ax=0$에서

$2x(x-a)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=a$

즉, 이차함수 $y=2x^2-2ax$의 그래프가 x축과 만나는 두 점은 $O(0, 0)$, $B(a, 0)$

이때 x축 위의 두 점 B, C에 대하여 선분 BC의 길이가 3이므로 $C(a+3, 0)$

최고차항의 계수가 -1인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 a, $a+3$이므로

$f(x)=-(x-a)(x-a-3)$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 A를 지나므로

$f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}$

즉, $-\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)=-\frac{a^2}{2}$에서

$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$)

$\therefore A(3, -18)$

따라서 $A(3, -18)$, $B(6, 0)$, $C(9, 0)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 18=27$

답 27

2

두 점 O, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 A에서 이차함수 $y=x^2-5x$의 그래프에 접할 때 삼각형 OAB의 넓이는 최대가 된다.

두 점 O, B를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-4-0}{4-0}=-1$

기울기가 -1이고 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=-x+k$라 하자.

방정식 $x^2-5x=-x+k$, 즉 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-k)=0$, $4+k=0$

$\therefore\ k=-4$

즉, 직선의 방정식은 $y=-x-4$이다.

이때 이차함수 $y=x^2-5x$의 그래프와 직선 $y=-x-4$의 교점의 x좌표는 $x^2-5x=-x-4$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 실근과 같으므로

$x^2-4x+4=0$에서

$(x-2)^2=0\qquad\therefore\ x=2$

즉, $a=2$이므로

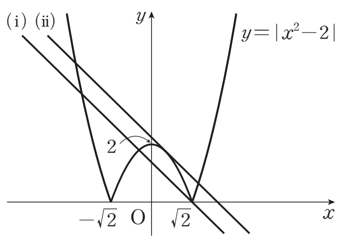
$b=-2-4=-6$

$\therefore\ a-b=2-(-6)=8$

답 8

3

방정식 $|x^2-2|+x-k=0$, 즉 $|x^2-2|=-x+k$가 서로 다른 세 실근을 가지면 두 함수 $y=|x^2-2|$와 $y=-x+k$의 그래프는 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만난다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(\sqrt{2}, 0)$을 지날 때,

$0=-\sqrt{2}+k\qquad\therefore\ k=\sqrt{2}$

(ii) 두 함수 $y=-x^2+2$, $y=-x+k$의 그래프가 접할 때,

이차방정식 $-x^2+2=-x+k$, 즉

$x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k-2)=0$

$-4k+9=0\qquad\therefore\ k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값은 $\sqrt{2}$, $\frac{9}{4}$이므로

그 곱은

$\sqrt{2}\times\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

답 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

4

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-3) & (x\ge1)\\ -(x+2)(x-1) & (x<1)\end{cases}$$

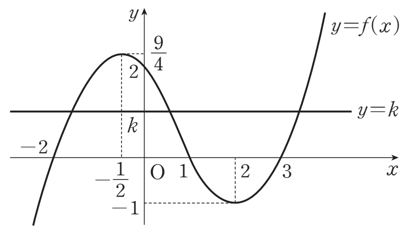
← x축과의 교점의 x좌표가 1, 3이다.

← x축과의 교점의 x좌표가 −2, 1이다.

$$=\begin{cases}x^2-4x+3 & (x\ge1)\\ -x^2-x+2 & (x<1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x-2)^2-1 & (x\ge1)\\ -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} & (x<1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-1<k<\frac{9}{4}$

답 $-1<k<\frac{9}{4}$

5

조건 (가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4ax-10$의 교점의 x좌표가 1, 5이므로 이차방정식 $f(x)=4ax-10$, 즉 $f(x)-4ax+10=0$의 두 실근은 1, 5이다.

이때 $f(x)$의 이차항의 계수가 a이므로

$f(x)-4ax+10=a(x-1)(x-5)$

$=a(x^2-6x+5)$

라 할 수 있다.

$\therefore\ f(x)=ax^2-6ax+5a+4ax-10$

$=ax^2-2ax+5a-10$

$=a(x-1)^2+4a-10$

한편, $a>0$이므로 $1\le x\le 5$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다.
즉, 조건 (나)에서

$f(1)=-8,\ 4a-10=-8 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 100a=50$

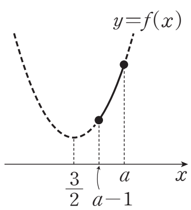
답 50

6

$f(x)=x^2-3x+a+5$라 하면

$$f(x)=x^2-3x+a+5$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+a+\frac{11}{4}$$

(i) $a-1>\frac{3}{2}$, 즉 $a>\frac{5}{2}$일 때,



$f(x)$의 최솟값은 $f(a-1)$이므로

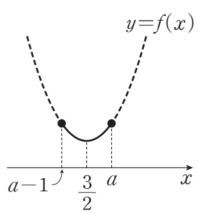
$(a-1)^2-3(a-1)+a+5=4$

$a^2-4a+5=0$ ← (판별식)$=(-2)^2-5<0$

$\therefore\ (a-2)^2=-1$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a-1\le\frac{3}{2}\le a$, 즉 $\frac{3}{2}\le a\le\frac{5}{2}$일 때,

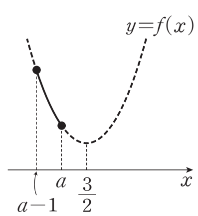


$f(x)$의 최솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\right)$이므로

$a+\frac{11}{4}=4 \qquad \therefore\ a=\frac{5}{4}$

그런데 $\frac{3}{2}\le a\le\frac{5}{2}$이므로 조건을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(iii) $a<\frac{3}{2}$일 때,



$f(x)$의 최솟값은 $f(a)$이므로

$a^2-3a+a+5=4$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

(i), (ii), (iii)에서 $a=1$

답 1

07. 여러 가지 방정식

1 삼차방정식과 사차방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.160~167

01 (1) $x=-2$ 또는 $x=-1\pm2i$
(2) $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

02 (1) $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$
(2) $x=-2$ 또는 $x=5$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{23}i}{2}$

03 (1) $x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm2$
(2) $x=1\pm i$ 또는 $x=-1\pm i$

04 $x=\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

05 (1) 0 (2) -7 (3) -6 (4) $\frac{7}{6}$ **06** 15

07 1 **08** -16 **09** $\frac{35}{2}$ **10** $a>\frac{1}{8}$

11 $\frac{7}{4}$ **12** 3 **13** 256 **14** 2

15 -198 **16** $4x^3-3x^2+2x+1=0$ **17** $\frac{21}{4}$

18 (1) 1 (2) -1 **19** -1 **20** -18

01

(1) $f(x)=x^3+4x^2+9x+10$이라 하면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 4 & 9 & 10 \\ & & -2 & -4 & -10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x+2)(x^2+2x+5)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2+2x+5)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-1\pm2i$

(2) $f(x)=x^4-3x^3-8x+24$라 하면 $f(2)=0,\ f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & -8 & 24 \\ & & 2 & -2 & -4 & -24 \\ \hline 3 & 1 & -1 & -2 & -12 & \boxed{0} \\ & & 3 & 6 & 12 & \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x-3)(x^2+2x+4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x-3)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 (1) $x=-2$ 또는 $x=-1\pm2i$

(2) $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

02

(1) $(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$에서

$x^2-5x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t(t+13)+42=0$

$t^2+13t+42=0$, $(t+6)(t+7)=0$

즉, $(x^2-5x+6)(x^2-5x+7)=0$이므로

$(x-2)(x-3)(x^2-5x+7)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)-72=0$에서

$\underline{\{(x+1)(x-4)\}\{(x-1)(x-2)\}}-72=0$

$(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)-72=0$ 상수항의 합이 같은 두 쌍의 일차식으로 묶는다.

$x^2-3x=t$로 놓으면

$(t-4)(t+2)-72=0$

$t^2-2t-80=0$, $(t-10)(t+8)=0$

즉, $(x^2-3x-10)(x^2-3x+8)=0$이므로

$(x+2)(x-5)(x^2-3x+8)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=5$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{23}i}{2}$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x=-2$ 또는 $x=5$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{23}i}{2}$

03

(1) $x^4-7x^2+12=0$에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-7t+12=0$, $(t-3)(t-4)=0$

$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=4$

따라서 $x^2=3$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=0$

이때 $x^2-2x+2=0$, $x^2+2x+2=0$의 근을 각각 구하면

$x=1\pm i$, $x=-1\pm i$

$\therefore$ $x=1\pm i$ 또는 $x=-1\pm i$

답 (1) $x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm2$

(2) $x=1\pm i$ 또는 $x=-1\pm i$

04

$x^4+4x^3+2x^2+4x+1=0$에서 $\underline{x\neq0}$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

방정식에 $x=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않는다.

$x^2+4x+2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+4t=0$, $t(t+4)=0$

$\therefore$ $t=0$ 또는 $t=-4$

(i) $t=0$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=0$일 때,

$x^2+1=0$ $\quad\therefore$ $x=\pm i$

(ii) $t=-4$, 즉 $x+\dfrac{1}{x}=-4$일 때,

$x^2+4x+1=0$ $\quad\therefore$ $x=-2\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $x=\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

답 $x=\pm i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

05

삼차방정식 $\underline{x^3-7x+6=0}$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식은

$6x^3-7x^2+1=0$

$\therefore$ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{7}{6}$

(1) $\alpha+\beta+\gamma=0$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7$

(3) $\alpha\beta\gamma=-6$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-7}{-6}=\dfrac{7}{6}$

답 (1) 0 (2) -7 (3) -6 (4) $\dfrac{7}{6}$

06

a, b가 실수이므로 주어진 삼차방정식의 한 근이 $1+2i$이면 $1-2i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=7$

$5+2\alpha=7$ $\quad\therefore \alpha=1$

즉, 세 근이 1, $1+2i$, $1-2i$이므로

$1+(1+2i)+(1-2i)=-a$ $\quad\therefore a=-3$

$1\times(1+2i)(1-2i)=-b$ $\quad\therefore b=-5$

$\therefore ab=15$

답 15

다른 풀이

주어진 근 $x=1+2i$를 삼차방정식에 대입하면

$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+7(1+2i)+b=0$

$\therefore (-3a+b-4)+(4a+12)i=0$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-3a+b-4=0$, $4a+12=0$ $\quad\therefore a=-3$, $b=-5$

$\therefore ab=15$

07

방정식 $x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$-1+(k+1)-(4k-3)+k+7=0$

$-2k+10=0$ $\quad\therefore k=5$

따라서 주어진 방정식은

$x^3+6x^2+17x+12=0$이다.

삼차식 $x^3+6x^2+17x+12$는 $x+1$을 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 17 & 12 \\ & & -1 & -5 & -12 \\ \hline & 1 & 5 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+6x^2+17x+12=(x+1)(x^2+5x+12)$

즉, 삼차방정식 $(x+1)(x^2+5x+12)=0$의 -1이 아닌 나머지 두 근 α, β는 이차방정식 $x^2+5x+12=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=12$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\qquad\qquad=(-5)^2-2\times12=1$

답 1

08

방정식 $x^4-x^3+ax+b=0$의 두 근이 1, -2이므로

$1-1+a+b=0$ $\quad\therefore a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$16+8-2a+b=0$ $\quad\therefore 2a-b=24$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=-8$

따라서 주어진 방정식은 $x^4-x^3+8x-8=0$이다.

사차식 x^4-x^3+8x-8은 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 0 & 8 & -8 \\ & & 1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 8 & \boxed{0} \\ & & -2 & 4 & -8 & \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4-x^3+8x-8=(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$

즉, 사차방정식 $(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$의 1, -2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$\qquad=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$

$\qquad=(2^2-2\times4)^2-2\times4^2$

$\qquad=-16$

답 -16

09 본문 p.159 한 걸음 더 참고

방정식 $x^4-(a-9)x^2+2b+6=0$은 짝수 차수의 항과 상수항으로만 이루어져 있으므로 한 근이 -2이면 2도 근이다.

또한, 방정식 $x^4-(a-9)x^2+2b+6=0$에서

$x^2=X$로 놓으면 X에 대한 이차방정식

$X^2-(a-9)X+2b+6=0$ ……㉠

의 한 근은 $2^2=(-2)^2=4$이다.

(i) $\alpha=2$ 또는 $\beta=2$일 때,

$\alpha^2+\beta^2=5$에서

$\alpha=2$, $\beta^2=1$ 또는 $\alpha^2=1$, $\beta=2$

즉, 방정식 ㉠의 다른 한 근이 1이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 근 4, 1을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a-9=5$, $2b+6=4$이므로

$a=14$, $b=-1$ $\quad\therefore a+b=13$

(ii) $\gamma=2$일 때,

$\alpha=-\beta$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$에서

$\alpha^2=\beta^2=\dfrac{5}{2}$

즉, 방정식 ㉠의 다른 한 근이 $\dfrac{5}{2}$이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 근 4, $\dfrac{5}{2}$를 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a-9=\dfrac{13}{2}$, $2b+6=10$이므로

$a=\dfrac{31}{2}$, $b=2$ $\quad\therefore a+b=\dfrac{35}{2}$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $\dfrac{35}{2}$이다.

답 $\dfrac{35}{2}$

다른 풀이

사차방정식 $x^4-(a-9)x^2+2b+6=0$의 한 근이 -2이므로

$x=-2$를 대입하면

$(-2)^4-(a-9)\times(-2)^2+2b+6=0$

$-4a+2b+58=0$ $\quad\therefore b=2a-29$ ……㉡

㉡을 주어진 사차방정식에 대입하면

$x^4-(a-9)x^2+4a-52=0$

이때 $f(x)=x^4-(a-9)x^2+4a-52$라 하면

$f(-2)=0$, $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x+2$, $x-2$를 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & 0 & -(a-9) & 0 & 4a-52 \\
 & & -2 & 4 & 2a-26 & -4a+52 \\ \hline
2 & 1 & -2 & -a+13 & 2a-26 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 0 & -2a+26 & \\ \hline
 & 1 & 0 & -a+13 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+2)(x-2)(x^2-a+13)$

즉, 주어진 사차방정식은

$(x+2)(x-2)(x^2-a+13)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{a-13}$

(i) $\gamma\neq2$일 때,

$\alpha=2$이고 $|\beta|=\sqrt{a-13}$ 또는 $|\alpha|=\sqrt{a-13}$이고 $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5$에서 $a-13=1$ $\quad\therefore a=14$

$a=14$를 ㉡에 대입하면 $b=-1$

$\therefore a+b=13$

(ii) $\gamma=2$일 때,

$|\alpha|=|\beta|=\sqrt{a-13}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5$에서 $2(a-13)=5$ $\quad\therefore a=\dfrac{31}{2}$

$a=\dfrac{31}{2}$을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=\dfrac{35}{2}$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 $\dfrac{35}{2}$이다.

10

$f(x)=x^3+(2a-1)x-2a$라 하면

$f(1)=1+(2a-1)-2a=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 0 & 2a-1 & -2a \\
 & & 1 & 1 & 2a \\ \hline
 & 1 & 1 & 2a & \boxed{0}
\end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+x+2a)$

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x-1)(x^2+x+2a)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x^2+x+2a=0$

이때 $x=1$은 실근이므로 주어진 방정식이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+2a=0$이 허근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-8a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{8}$

답 $a>\frac{1}{8}$

11

$f(x)=x^3-(4a+1)x^2+7ax-3a$라 하면

$f(1)=1-(4a+1)+7a-3a=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -(4a+1) & 7a & -3a \\ & & 1 & -4a & 3a \\ \hline & 1 & -4a & 3a & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-4ax+3a)$

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x-1)(x^2-4ax+3a)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x^2-4ax+3a=0$

(i) 삼차방정식이 중근 $x=1$을 가질 때,

이차방정식 $x^2-4ax+3a=0$이 $x=1$을 근으로 가져야 하므로

$1-4a+3a=0 \qquad \therefore a=1$

(ii) 삼차방정식이 $x\neq1$인 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2-4ax+3a=0$이 1이 아닌 중근을 가져야 하므로 $a\neq1$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3a=0$

$4a^2-3a=0,\ a(4a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 $1,\ 0,\ \frac{3}{4}$

이므로 그 합은

$1+0+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

답 $\frac{7}{4}$

보충 설명

(i) $a=0$이면 $x^3-x^2=0$에서

$x^2(x-1)=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=1$

(ii) $a=1$이면 $x^3-5x^2+7x-3=0$에서

$(x-1)^2(x-3)=0$

$\therefore x=1$ (중근) 또는 $x=3$

(iii) $a=\frac{3}{4}$이면 $x^3-4x^2+\frac{21}{4}x-\frac{9}{4}=0$에서

$4x^3-16x^2+21x-9=0,\ (x-1)(2x-3)^2=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ (중근)

12

$f(x)=x^3+x^2+(k^2-5)x-k^2+3$이라 하면

$f(1)=1+1+(k^2-5)-k^2+3=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & k^2-5 & -k^2+3 \\ & & 1 & 2 & k^2-3 \\ \hline & 1 & 2 & k^2-3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2x+k^2-3)$

즉, 주어진 삼차방정식은

$(x-1)(x^2+2x+k^2-3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x^2+2x+k^2-3=0$

주어진 삼차방정식이 삼중근을 갖거나 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식

$x^2+2x+k^2-3=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이 $\underbrace{x=1\text{을 중근으로 갖거나}}_{\text{삼중근을 갖는 경우}}$ 허근을 가져야 한다.

(i) ㉠이 $x=1$을 중근으로 가질 때,

$x=1$을 $x^2+2x+k^2-3=0$에 대입하면

$1+2+k^2-3=0,\ k^2=0 \qquad \therefore k=0$

이때 이차방정식 ㉠은 $\underbrace{x^2+2x-3=0}_{(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1}$이므로 중근을 갖지 않는다.

(ii) ㉠이 허근을 가질 때,

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k^2-3)<0 \qquad \therefore k^2>4$

이를 만족시키는 자연수 k의 값은 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots$이다.

(i), (ii)에서 자연수 k의 최솟값은 3이다.

답 3

13

삼차방정식 $x^3+3x^2+6x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6,\ \alpha\beta\gamma=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 삼차방정식의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로

$\alpha^3+3\alpha^2+6\alpha+2=0,\ \beta^3+3\beta^2+6\beta+2=0,$

$\gamma^3+3\gamma^2+6\gamma+2=0$

즉, $\alpha^3+\alpha^2+2=-2\alpha^2-6\alpha$, $\beta^3+\beta^2+2=-2\beta^2-6\beta$,

$\gamma^3+\gamma^2+2=-2\gamma^2-6\gamma$이므로

$(\alpha^3+\alpha^2+2)(\beta^3+\beta^2+2)(\gamma^3+\gamma^2+2)$

$=(-2\alpha^2-6\alpha)(-2\beta^2-6\beta)(-2\gamma^2-6\gamma)$

$=-8\alpha\beta\gamma(\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3)$

$=-8\alpha\beta\gamma\{\alpha\beta\gamma+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+9(\alpha+\beta+\gamma)+27\}$

$=-8\times(-2)\times\{-2+3\times6+9\times(-3)+27\}$ ($\because$ ㉠)

$=256$

답 256

14

삼차방정식 $x^3+ax^2+4x-5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=5$

이때 $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=-\frac{2}{5}$에서

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{2}{5}$, $\frac{-a}{5}=-\frac{2}{5}$

$\therefore a=2$

답 2

15

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 3α, 5α $(\alpha\neq0)$라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha+5\alpha=27$

$9\alpha=27$ $\qquad\therefore \alpha=3$

즉, 삼차방정식의 세 근이 3, 9, 15이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3\times9+9\times15+15\times3=a$, $3\times9\times15=-b$

따라서 $a=207$, $b=-405$이므로

$a+b=-198$

답 -198

16

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

이때 구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이므로

$$(\text{세 근의 합})=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

$$(\text{두 근끼리의 곱의 합})=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$(\text{세 근의 곱})=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 삼차방정식은 (x^3의 계수가 4이다.)

$4\left(x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=0$

$\therefore 4x^3-3x^2+2x+1=0$

답 $4x^3-3x^2+2x+1=0$

17

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

또한, 삼차방정식 $x^3-3x^2+x-2=0$의 세 근이

$\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=3$ $\qquad$ ……㉠

$\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}=1$ $\qquad$ ……㉡

$\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=2$ $\qquad$ ……㉢

㉢에서 $\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{1}{(-c)^2}=\frac{1}{c^2}$이므로

$\frac{1}{c^2}=2$ $\qquad\therefore c^2=\frac{1}{2}$

㉠에서

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}$

이므로

$\frac{a}{c}=3,\ a=3c \qquad \therefore\ a^2=9c^2=\frac{9}{2}$

㉡에서

$$\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{b}{(-c)^2}=\frac{b}{c^2}$$

이므로

$\frac{b}{c^2}=1,\ b=c^2 \qquad \therefore\ b^2=c^4=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=\frac{9}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

답 $\frac{21}{4}$

18

$x^3=-1$에서

$x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

이때 ω는 허근이므로 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이다.

$\therefore\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

(1) $1-\omega+\omega^2-\cdots-\omega^{999}$

$=(1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)$
$\quad+\omega^6(1-\omega+\omega^2)-\cdots+\omega^{996}(1-\omega+\omega^2)-\omega^{999}$

$=-\omega^{999}=-(\omega^3)^{333}=-(-1)^{333}=1$

(2) 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

또한, $\overline{\omega}$가 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로

방정식 $x^3=-1$의 근이기도 하다. 즉,

$\overline{\omega}^3=-1$

$$\therefore\ \frac{\omega^{10}}{\omega-1}+\frac{\overline{\omega}^{10}}{\overline{\omega}-1}=\frac{\omega^{10}(\overline{\omega}-1)+\overline{\omega}^{10}(\omega-1)}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$$
$$=\frac{-\omega(\overline{\omega}-1)-\overline{\omega}(\omega-1)}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{-2\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{-2+1}{1-1+1}=-1$$

답 (1) 1 (2) -1

19

$x^3=8$에서

$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x^2+2x+4=0$

이때 ω는 허근이므로 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 근이다.

$\therefore\ \omega^3=8,\ \omega^2+2\omega+4=0$

또한, 방정식 $x^2+2x+4=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 $\overline{\omega}$도 근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2,\ \omega\overline{\omega}=4$

$$\therefore\ \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2+4}=\frac{\overline{\omega}^2}{-2\omega}=\frac{\omega^2\overline{\omega}^2}{-2\omega^3}=\frac{(\omega\overline{\omega})^2}{-2\omega^3}$$
$$=\frac{16}{-16}=-1$$

답 -1

20

$x^3=1$에서

$x^3-1=0,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 ω는 허근이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\therefore\ \omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

한편, $f(n)=\omega^{2n}-\omega^n+1,\ f(n+1)=\omega^{2n+2}-\omega^{n+1}+1,$
$f(n+2)=\omega^{2n+4}-\omega^{n+2}+1$이므로

$f(n)+f(n+1)+f(n+2)$
$=\omega^{2n}-\omega^n+1+\omega^{2n+2}-\omega^{n+1}+1+\omega^{2n+4}-\omega^{n+2}+1$
$=\omega^{2n}(1+\omega^2+\omega^4)-\omega^n(1+\omega+\omega^2)+3$
$=\omega^{2n}(1+\omega+\omega^2)-\omega^n(1+\omega+\omega^2)+3\ (\because\ \omega^3=1)$
$=3\ (\because\ \omega^2+\omega+1=0)$

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$
$\quad=f(1)+\{f(2)+f(2+1)+f(2+2)\}+\cdots$
$\qquad+\{f(8)+f(8+1)+f(8+2)\}$
$\quad=f(1)+3\times3$
$\quad=\omega^2-\omega+1+9$
$\quad=(-\omega-1)-\omega+10\ (\because\ \omega^2+\omega+1=0)$
$\quad=-2\omega+9$

따라서 $a=-2,\ b=9$이므로

$ab=-18$

답 -18

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.168~169

01 4	**02** -1	**03** -16	**04** 0
05 -1	**06** -3	**07** -14	**08** -2
09 14	**10** $13+2i$	**11** ④	**12** 20

01

$f(x)=x^3+x^2+2x-4$라 하면

$f(1)=1+1+2-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x^2+2x+4)$

이때 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+2x+4)=0$이고, 이 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$

$\therefore$ $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=4+2\times(-2)+4=4$

답 4

02

$f(x)=x^3-4x^2+4x-3$이라 하면

$f(3)=27-4\times9+4\times3-3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 4 & -3 \\ & & 3 & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-3)(x^2-x+1)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2-x+1)=0$

$\therefore$ $x=3$ 또는 $x^2-x+1=0$

이때 삼차방정식의 한 허근 α는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 이 이차방정식의 근이다.

이차방정식 $x^2-x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=1$, $\alpha\overline{\alpha}=1$

$$\therefore\ \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}=\frac{\alpha^2+\overline{\alpha}^2}{\alpha\overline{\alpha}}$$

$$=\frac{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

$$=\frac{1^2-2\times1}{1}=-1$$

답 -1

03

사차방정식 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)-120=0$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-120=0$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120=0$

이때 $x^2-5x=t$로 놓으면

$(t+4)(t+6)-120=0$

$t^2+10t-96=0$

$(t-6)(t+16)=0$

즉, 주어진 사차방정식은

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$이므로

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$ (판별식)$=(-5)^2-4\times1\times16$ $=-39<0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=6$ 또는 $x^2-5x+16=0$

따라서 주어진 사차방정식의 한 허근 ω는 이차방정식 $x^2-5x+16=0$의 근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0$

$\therefore$ $\omega^2-5\omega=-16$

답 -16

04

$x^4+x^2+25=0$에서

$(x^4+10x^2+25)-9x^2=0$

$(x^2+5)^2-(3x)^2=0$

$(x^2-3x+5)(x^2+3x+5)=0$

$\therefore$ $x^2-3x+5=0$ 또는 $x^2+3x+5=0$

이때 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라 하고 이차방정식 $x^2+3x+5=0$의 두 근을 γ, δ라 하여도 일반성을 잃지 않는다.
각 방정식에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$, $\gamma+\delta=-3$, $\gamma\delta=5$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}&=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\\&=\frac{3}{5}+\frac{-3}{5}=0\end{aligned}$$

답 0

다른 풀이

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^4으로 나누면

$$1+\frac{1}{x^2}+\frac{25}{x^4}=0$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $25t^4+t^2+1=0$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$은 t에 대한 사차방정식
$25t^4+t^2+1=0$의 네 근이다.
이때 사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 네 근의 합은
$-\frac{(x^3\text{의 계수})}{(x^4\text{의 계수})}$와 같으므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=-\frac{0}{25}=0$$

05

사차방정식 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$의 한 허근이 α이므로
$\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+1=0$
$\alpha\neq0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$$\alpha^2+2\alpha+3+\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$$

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+3=0$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+3=0$$

$$\therefore\ \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$$

이때 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=t$로 놓으면

$t^2+2t+1=0$
$(t+1)^2=0$ $\quad\therefore\ t=-1$

즉, $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-1$에서 $\alpha^2+\alpha+1=0$

따라서 α는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 이 방정식의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=-1$

답 -1

06

$f(x)=x^3+(3-k)x^2+(2-3k)x-2k$라 하면
$f(-1)=-1+3-k-(2-3k)-2k=0$,
$f(-2)=-8+4(3-k)-2(2-3k)-2k=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 3-k & 2-3k & -2k\\
 & & -1 & k-2 & 2k\\
\hline
-2 & 1 & 2-k & -2k & 0\\
 & & -2 & 2k & \\
\hline
 & 1 & -k & 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x+2)(x-k)$
즉, 주어진 방정식은
$(x+1)(x+2)(x-k)=0$
이 방정식이 중근을 가지므로
$k=-1$ 또는 $k=-2$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$-1+(-2)=-3$

답 -3

다른 풀이

$f(x)=x^3+(3-k)x^2+(2-3k)x-2k$라 하면
$f(-1)=-1+3-k-(2-3k)-2k=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 3-k & 2-3k & -2k\\
 & & -1 & k-2 & 2k\\
\hline
 & 1 & 2-k & -2k & 0
\end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x+1)\{x^2+(2-k)x-2k\}$
이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면 이차방정식
$x^2+(2-k)x-2k=0$ ······㉠
이 $x=-1$을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 한 근이 $x=-1$일 때,

$1-(2-k)-2k=0$, $-k-1=0$

$\therefore k=-1$

(ii) 이차방정식 ㉠이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-k)^2-4\times1\times(-2k)=0$

$k^2+4k+4=0$, $(k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 또는 $k=-2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+(-2)=-3$

07

(i) $a=1$일 때,

주어진 삼차방정식은

$(x-1)(x^2+x+7)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+7=0$

즉, 두 실근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+7=0$의 근이다.

이때 이차방정식 $x^2+x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times7=-27<0$

이므로 α, β가 실근이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(가)

(ii) $a\neq1$일 때,

$x=1$은 이차방정식 $x^2-(2-3a)x+7=0$의 근이므로

$1-(2-3a)+7=0$, $3a+6=0$ $\qquad\therefore a=-2$

즉, 주어진 방정식은

$(x+2)(x^2-8x+7)=0$

$(x+2)(x-1)(x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=7$

$\therefore \alpha=-2, \beta=7$ 또는 $\alpha=7, \beta=-2$

(나)

(i), (ii)에서 $\alpha\beta=-14$

(다)

답 -14

단계	채점 기준	배점
(가)	$a=1$일 때, α, β가 실근이 아님을 확인한 경우	40%
(나)	$a\neq1$일 때, α, β의 값을 각각 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 $\alpha\beta$의 값을 구한 경우	20%

08

$x^2-2x+p=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=p$

α, β는 삼차방정식 $x^3-3x^2+qx+2=0$의 근이기도 하므로 나머지 한 근을 γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\alpha+\beta+\gamma=3$에서 $\alpha+\beta=2$이므로 $\gamma=1$

$\alpha\beta\gamma=-2$에서 $\alpha\beta=p$, $\gamma=1$이므로 $p=-2$

또한, $x^3-3x^2+qx+2=0$의 한 근이 $\gamma=1$이므로

$1-3+q+2=0$ $\qquad\therefore q=0$

$\therefore p+q=-2$

답 -2

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2x+p=0$의 두 근을 α, β라 하면

$x^2-2x+p=(x-\alpha)(x-\beta)$

이때 이차방정식 $x^2-2x+p=0$의 두 근이 모두 삼차방정식 $x^3-3x^2+qx+2=0$의 근이므로 삼차방정식의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\begin{aligned}x^3-3x^2+qx+2&=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\\&=(x-\gamma)(x^2-2x+p)\\&=x^3-(\gamma+2)x^2+(p+2\gamma)x-p\gamma\end{aligned}$$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-3=-(\gamma+2)$, $q=p+2\gamma$, $2=-p\gamma$

$-3=-(\gamma+2)$에서 $\gamma=1$

$\gamma=1$을 $2=-p\gamma$에 대입하여 풀면 $p=-2$

$p=-2$, $\gamma=1$을 $q=p+2\gamma$에 대입하면 $q=0$

$\therefore p+q=-2$

09

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=10$에서

$f(\alpha)-10=0$, $f(\beta)-10=0$, $f(\gamma)-10=0$

즉, α, β, γ는 방정식 $f(x)-10=0$의 근이다.

이때 $f(x)=x^3+4x^2+x+4$이므로

$f(x)-10=x^3+4x^2+x-6$

따라서 α, β, γ는 삼차방정식 $x^3+4x^2+x-6=0$의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-4)^2-2\times1=14$

답 14

다른 풀이

삼차방정식 $x^3+4x^2+x-6=0$에서

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
 & & 1 & 5 & 6 \\
\hline
-2 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-3$

이 삼차방정식의 세 근이 α, β, γ이므로

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)^2+(-3)^2=14$

10

a, b가 실수이므로 주어진 사차방정식 $x^4-x^3+ax^2+bx-12=0$의 한 근이 $1-i$이면 $1+i$도 근이다.

$1-i$와 $1+i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$

$\therefore\ x^2-2x+2=0$

이때 $\alpha=1+i$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$x^4-x^3+ax^2+bx-12$

$=(x^2-2x+2)\{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma\}$

에서 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$-1=-(\beta+\gamma)-2\qquad\therefore\ \beta+\gamma=-1$

또한, 양변의 상수항을 비교하면

$-12=2\beta\gamma\qquad\therefore\ \beta\gamma=-6$

$\therefore\ \beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma$

$=(-1)^2-2\times(-6)=13$

따라서 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(1+i)^2+13=13+2i$

답 $13+2i$

11

$x^3+8=0$에서 $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$

즉, 허근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이다.

ㄱ. α, β는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 허근이고 방정식의 계수가 모두 실수이므로 α, β는 서로 켤레복소수이다.

$\therefore\ \overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$ (참)

ㄴ. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times4=-4$ (참)

ㄷ. α, β는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 허근이므로

$\alpha^2-2\alpha+4=0$, $\beta^2-2\beta+4=0$

$\therefore\ \alpha^2+4=2\alpha$, $\beta^2+4=2\beta$

ㄴ에서

$\alpha^2=-\beta^2-4=-(\beta^2+4)=-2\beta\neq-\beta$

같은 방법으로 $\beta^2=-2\alpha\neq-\alpha$ (거짓)

ㄹ. β는 방정식 $x^3+8=0$의 근이므로

$\beta^3+8=0\qquad\therefore\ \beta^3=-8$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\qquad\therefore\ 2-\alpha=\beta$

즉, $(2-\alpha)^3=\beta^3=-8$이므로

$(2-\alpha)^{3n}=(-8)^n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

12

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 ω는 허근이므로 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이다.

$\therefore\ \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ \omega^{8n}+(\omega+1)^{8n}+1$

$=\omega^{8n}+(-\omega^2)^{8n}+1$ ($\because\ \omega+1=-\omega^2$)

$=\omega^{8n}+\omega^{16n}+1$

$=\{(\omega^3)^2\times\omega^2\}^n+\{(\omega^3)^5\times\omega\}^n+1$

$=\omega^{2n}+\omega^n+1$ ($\because\ \omega^3=1$)

(i) $n=3k$ (k는 자연수)일 때,

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{2\times3k}+\omega^{3k}+1$

$=\omega^{6k}+\omega^{3k}+1$

$=1+1+1=3$

(ii) $n=3k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^{n}+1&=\omega^{2(3k+1)}+\omega^{3k+1}+1\\&=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1\\&=\omega^{2}+\omega+1=0\end{aligned}$$

(iii) $n=3k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때,

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^{n}+1&=\omega^{2(3k+2)}+\omega^{3k+2}+1\\&=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1\\&=\omega+\omega^{2}+1=0\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 $\omega^{8n}+(\omega+1)^{8n}+1=0$을 만족시키는 자연수 n에 대하여

$n\neq 3k$ (k는 자연수)

이므로 그 개수는

$30-10=20$

답 20

2 연립방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.175~180

21 (1) $\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{50}{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{13}\\y=-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=\sqrt{13}\\y=\dfrac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

22 $(0,\ -1)$, $(6,\ 1)$

23 6 **24** 4 **25** $\dfrac{39}{4}$

26 (1) $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}i\\y=1-\sqrt{2}i\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2}i\\y=1+\sqrt{2}i\end{cases}$

27 2 **28** 34 **29** 75 **30** 6

31 2 **32** 0 **33** 6 **34** 9

21

(1) $\begin{cases}2x+y=20 & \cdots\cdots㉠\\2x^2+(y-4)^2=166 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=20-2x$

이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(16-2x)^2=166$

$3x^2-32x+45=0$, $(3x-5)(x-9)=0$

$\therefore x=\dfrac{5}{3}$ 또는 $x=9$

$x=\dfrac{5}{3}$를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{50}{3}$,

$x=9$를 ㉠에 대입하면 $y=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{50}{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=9\\y=2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots㉠\\x^2-2xy+4y^2=13 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $(2x-y)(x-2y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=\dfrac{1}{2}x$

(i) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-4x^2+16x^2=13$, $13x^2=13$, $x^2=1$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

즉, $x=-1$일 때 $y=-2$, $x=1$일 때 $y=2$

(ii) $y=\dfrac{1}{2}x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=13$, $x^2=13$

$\therefore x=-\sqrt{13}$ 또는 $x=\sqrt{13}$

즉, $x=-\sqrt{13}$일 때 $y=-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,

$x=\sqrt{13}$일 때 $y=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{13}\\y=-\dfrac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$ 또는

$\begin{cases}x=\sqrt{13}\\y=\dfrac{\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

답 풀이 참조

22

$3xy-2x-3y-3=0$에서

$x(3y-2)-(3y-2)-5=0$

$\therefore\ (x-1)(3y-2)=5$

이때 x, y가 정수이므로 $x-1$, $3y-2$의 값도 정수이고, 각 값은 다음 표와 같다.

$x-1$	-5 (i)	-1 (ii)	1 (iii)	5 (iv)
$3y-2$	-1	-5	5	1

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(0, -1)$, $(6, 1)$

답 $(0, -1)$, $(6, 1)$

보충 설명

$(x-1)(3y-2)=5$를 만족시키는 정수 $x-1$, $3y-2$의 값에 대하여 x, y의 값은 각각 다음과 같다.

(i) $x-1=-5$, $3y-2=-1$일 때,

$x=-4$, $y=\frac{1}{3}$이므로 y가 정수가 아니다.

(ii) $x-1=-1$, $3y-2=-5$일 때,

$x=0$, $y=-1$이므로 x, y는 정수이다.

(iii) $x-1=1$, $3y-2=5$일 때,

$x=2$, $y=\frac{7}{3}$이므로 y가 정수가 아니다.

(iv) $x-1=5$, $3y-2=1$일 때,

$x=6$, $y=1$이므로 x, y는 정수이다.

따라서 (i), (iii)은 정수 조건이 있는 주어진 방정식의 해가 아닌 경우이다.

23

$$\begin{cases} 2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=2x-5$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-5)=k$

$\therefore\ x^2-4x+10-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 $D=0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(10-k)=0$

$\therefore\ k=6$

답 6

24

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2xy-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=-x+2$를 ㉡에 대입하면

$x^2+2x(-x+2)-k=0$

$\therefore\ x^2-4x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 주어진 연립방정식이 실근을 가져야 하므로 $D\geq 0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k\geq 0$

$4-k\geq 0 \qquad \therefore\ k\leq 4$

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 4이다.

답 4

25

$$\begin{cases} y-2x-a=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=b-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=2x+a$를 ㉡에 대입하면

$x^2+(2x+a)^2=b-2$

$\therefore\ 5x^2+4ax+a^2-b+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지므로 $D=0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=(2a)^2-5(a^2-b+2)=0$

$-a^2+5b-10=0$

$\therefore\ 5b=a^2+10$

이 식을 $a+5b$에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} a+5b &= a+(a^2+10) \\ &= a^2+a+10 \\ &= \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{39}{4} \end{aligned}$$

따라서 $a+5b$의 최솟값은 $a=-\frac{1}{2}$일 때, $\frac{39}{4}$이다.

$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{41}{20}$일 때이다.

답 $\frac{39}{4}$

26

(1) $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-1)(y-1)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

㉠에서 $u=6$

㉡에서 $xy-(x+y)=2$이므로 $v-u=2$ $\quad\therefore v=8$

따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이다.

$(t-2)(t-4)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

㉠에서 $(x+y)^2-2xy+2(x+y)=2$이므로

$u^2-2v+2u=2$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $(x+y)^2-xy=1$이므로

$u^2-v=1$ $\quad\cdots\cdots ㉣$

㉣에서 $v=u^2-1$을 ㉢에 대입하면

$u^2-2(u^2-1)+2u=2$, $u^2-2u=0$

$u(u-2)=0$ $\quad\therefore u=0$ 또는 $u=2$

$u=0$을 ㉣에 대입하면 $v=-1$,

$u=2$를 ㉣에 대입하면 $v=3$

(i) $u=0$, $v=-1$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-1)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

(ii) $u=2$, $v=3$일 때,

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+3=0$의 두 근이다.

근의 공식에 의하여 $t=1\pm\sqrt{2}i$

$\therefore \begin{cases} x=1+\sqrt{2}i \\ y=1-\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{2}i \\ y=1+\sqrt{2}i \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}i \\ y=1-\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=1-\sqrt{2}i \\ y=1+\sqrt{2}i \end{cases}$

답 풀이 참조

다른 풀이

(1) $\begin{cases} x+y=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-1)(y-1)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+6$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$(x-1)(-x+5)=3$, $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=4$,

$x=4$를 ㉢에 대입하면 $y=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$\times 2-$㉠을 하여 상수항을 소거하면

$x^2+2xy+y^2-2x-2y=0$

$(x+y)^2-2(x+y)=0$

$(x+y)(x+y-2)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=-x+2$

(i) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+x^2=1$, $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

즉, $x=-1$일 때 $y=1$, $x=1$일 때 $y=-1$

(ii) $y=-x+2$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x(-x+2)+(-x+2)^2=1$

$x^2-2x+3=0$ $\quad\therefore x=1\pm\sqrt{2}i$

즉, $x=1+\sqrt{2}i$일 때 $y=1-\sqrt{2}i$,

$x=1-\sqrt{2}i$일 때 $y=1+\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}i \\ y=1-\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=1-\sqrt{2}i \\ y=1+\sqrt{2}i \end{cases}$

27

$x+y=2a+6$, $xy=a^2+4a+13$이므로 실수 x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-(2a+6)t+(a^2+4a+13)=0$

이때 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2+4a+13)\geq 0$

$2a-4\geq 0$ $\quad\therefore a\geq 2$

따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

28

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각

x, y $(x>0,\ y>0)$라 하면 대각선의 길이가 13이므로

$x^2+y^2=169$ $\quad\cdots\cdots$㉠

가로의 길이를 2만큼 늘이고, 세로의 길이를 2만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이는 처음 직사각형의 넓이보다 10만큼 크므로

$(x+2)(\underbrace{y-2}_{\text{길이는 양수이므로 } y>2})=xy+10,\ -2x+2y=14$

$\therefore y=x+7$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2+(x+7)^2=169,\ 2x^2+14x+49=169$

$x^2+7x-60=0,\ (x+12)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ $(\because x>0)$

$x=5$를 ㉡에 대입하면 $y=12$

따라서 처음 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 5, 12이므로 둘레의 길이는

$2\times(5+12)=34$

답 34

29

$\underbrace{\text{두 자리 자연수 } N\text{의 십의 자리의 숫자를 } a\text{, 일의 자리의 숫자를 } b\text{라 하면}}_{a=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,9\text{이고 } b=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,9}$

$N=10a+b$

이때 자연수 N의 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 74이므로

$a^2+b^2=74$ $\quad\cdots\cdots$㉠

또한, 일의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자를 바꾼 수는 처음 수보다 18만큼 작으므로

$10b+a=10a+b-18$

$9a-9b=18,\ a-b=2$

$\therefore a=b+2$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(b+2)^2+b^2=74,\ 2b^2+4b+4=74$

$b^2+2b-35=0,\ (b+7)(b-5)=0$

$\therefore b=5$ $(\because 0\leq b<10)$

$b=5$를 ㉡에 대입하면 $a=7$

$\therefore N=7\times 10+5=75$

답 75

30

$\overline{PA}=x,\ \overline{PB}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하자.

$\overline{PA}+2\overline{PB}=10$, 즉 $x+2y=10$에서

$x=10-2y$ $\quad\cdots\cdots$㉠

또한, △PAB는 ∠APB$=90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$

이때 $\overline{AB}=2\sqrt{10}$이므로

$x^2+y^2=40$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(10-2y)^2+y^2=40$

$5y^2-40y+100=40,\ y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0$ $\quad\therefore y=2$ 또는 $y=6$

㉠에서 $y=2$일 때 $x=6$, $y=6$일 때 $x=-2$

이때 $x>0,\ y>0$이므로

$x=6,\ y=2$ $\quad\therefore \overline{PA}=6,\ \overline{PB}=2$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PB}=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$

답 6

31

두 이차방정식 $x^2+(3k-1)x-k+2=0$,

$x^2+(2k-1)x+2k+2=0$의 공통근이 $x=\alpha$이므로

$\begin{cases} \alpha^2+(3k-1)\alpha-k+2=0 & \cdots\cdots㉠ \\ \alpha^2+(2k-1)\alpha+2k+2=0 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $k\alpha-3k=0$

$k(\alpha-3)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $\alpha=3$

(i) $k=0$일 때,

두 이차방정식이 $x^2-x+2=0$으로 일치하므로 $\underbrace{\text{공통근이 2개}}_{\text{근의 공식에 의하여 } x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}}$가 되어 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=3$일 때,

$\alpha=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$8+8k=0 \qquad \therefore k=-1$

이때 $k=-1$이면 두 이차방정식

$x^2-4x+3=0$, $x^2-3x=0$의 공통근은 $x=3$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=-1$, $\alpha=3$이므로

$k+\alpha=2$

답 2

32

이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이고, 이차방정식 $x^2-qx+p=0$의 두 근이 α, γ이므로 두 이차방정식의 공통근이 α이다.

$$\therefore \begin{cases} \alpha^2-p\alpha+q=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-q\alpha+p=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면

$(q-p)\alpha+(q-p)=0$, $(\alpha+1)(q-p)=0$

$\therefore \alpha=-1$ ($\because p\neq q$)

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$p+q=-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

한편, 각 이차방정식에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p$, $\alpha+\gamma=q$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha+\beta+\gamma&=(\alpha+\beta)+(\alpha+\gamma)-\alpha\\&=p+q-(-1)\\&=-1+1\ (\because ㉢)\\&=0\end{aligned}$$

답 0

33

$2x^2+4y^2+4xy-2x+1=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-2x+1)=0$

$\therefore (x+2y)^2+(x-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x+2y$, $x-1$도 실수이다.

따라서 $x+2y=0$, $x-1=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-\frac{1}{2}$

$\therefore x-10y=1-10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$

답 6

다른 풀이

주어진 방정식의 좌변을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$4y^2+4xy+2x^2-2x+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

y가 실수이므로 y에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2x)^2-4(2x^2-2x+1)\geq 0$

$-4x^2+8x-4\geq 0$, $x^2-2x+1\leq 0$

$\therefore (x-1)^2\leq 0$

이때 x도 실수이므로 $x-1=0 \qquad \therefore x=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$4y^2+4y+1=0$, $(2y+1)^2=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}$

$\therefore x-10y=1-10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$

34

$x^2+4y^2+x^2y^2-10xy+9=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2y^2-6xy+9)=0$

$\therefore (x-2y)^2+(xy-3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x-2y$, $xy-3$도 실수이다.

$\therefore x-2y=0$, $xy-3=0$

$x-2y=0$에서 $x=2y$

이것을 $xy-3=0$에 대입하면

$2y^2-3=0 \qquad \therefore y^2=\frac{3}{2}$

또한, $x-2y=0$에서 $x^2=4y^2$이므로 $x^2=4\times\frac{3}{2}=6$

$\therefore x^2+2y^2=6+2\times\frac{3}{2}=9$

답 9

다른 풀이

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(y^2+1)x^2-10yx+4y^2+9=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-5y)^2-(y^2+1)(4y^2+9)\geq 0$

$-4y^4+12y^2-9\geq 0$

$4y^4-12y^2+9\leq 0$, $(2y^2-3)^2\leq 0$

이때 y도 실수이므로

$2y^2-3=0$, $y^2=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

(i) $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}x^2-5\sqrt{6}x+15=0$

$x^2-2\sqrt{6}x+6=0$, $(x-\sqrt{6})^2=0$ $\quad\therefore x=\sqrt{6}$

(ii) $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{5}{2}x^2+5\sqrt{6}x+15=0$

$x^2+2\sqrt{6}x+6=0$, $(x+\sqrt{6})^2=0$ $\quad\therefore x=-\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 $x^2=6$

$\therefore x^2+2y^2=6+2\times\frac{3}{2}=9$

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.181~182

13 -3	**14** 6	**15** ①	**16** 1
17 4, 36	**18** ③	**19** 75	**20** ⑤
21 3	**22** 18	**23** 5	**24** 2

13

주어진 두 연립방정식의 해가 일치하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} 2x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

의 해와 같다.

㉠에서 $2x=1-2y$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}-y$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{1}{2}-y\right)^2-y^2=-1$

$-y+\frac{1}{4}=-1$ $\quad\therefore y=\frac{5}{4}$

$y=\frac{5}{4}$를 ㉢에 대입하면 $x=-\frac{3}{4}$

즉, 주어진 두 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=-\frac{3}{4} \\ y=\frac{5}{4} \end{cases}$ 이므로

$3x+y=a$에서

$a=3\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}=-1$

$x-y=b$에서

$b=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-2$

$\therefore a+b=-1+(-2)=-3$

답 -3

14

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$일 때,

$x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2-y^2=9$

즉, $0\times y^2=9$이므로 이를 만족시키는 실수 y의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$일 때,

$x=2y$를 ㉡에 대입하면

$(2y)^2-y^2=9$, $3y^2=9$

$y^2=3$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{3}$

즉, $y=-\sqrt{3}$일 때 $x=-2\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$일 때 $x=2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 x, y의 값은

$\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore xy=6$

답 6

15

$$\begin{cases} x^2-4y^2=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x-y)^2-x+y=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $2(x-y)^2-(x-y)-15=0$

이때 $x-y=t$로 놓으면 $2t^2-t-15=0$

$(2t+5)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=-\frac{5}{2}$ 또는 $t=3$

즉, $x-y=-\frac{5}{2}$ 또는 $x-y=3$이므로

$x=y-\frac{5}{2}$ 또는 $x=y+3$

(i) $x=y-\frac{5}{2}$일 때,

$x=y-\frac{5}{2}$를 ㉠에 대입하면

$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-4y^2=3$, $12y^2+20y-13=0$

$(2y-1)(6y+13)=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}$ 또는 $y=-\frac{13}{6}$

즉, $y=\frac{1}{2}$일 때 $x=-2$, $y=-\frac{13}{6}$일 때 $x=-\frac{14}{3}$

그런데 x, y는 양수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=y+3$일 때,

$x=y+3$을 ㉠에 대입하면

$(y+3)^2-4y^2=3$, $y^2-2y-2=0$

$\therefore y=1\pm\sqrt{3}$

즉, $y=1+\sqrt{3}$일 때 $x=4+\sqrt{3}$,

$y=1-\sqrt{3}$일 때 $x=4-\sqrt{3}$

그런데 x, y는 양수이어야 하므로

$x=4+\sqrt{3}$, $y=1+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $\begin{cases} x=4+\sqrt{3} \\ y=1+\sqrt{3} \end{cases}$이므로

$x-4y=4+\sqrt{3}-4(1+\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$

답 ①

16

연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a+1 \\ xy=a^2+2 \end{cases}$를 만족시키는 두 실수 x, y는

t에 대한 이차방정식

$t^2-(2a+1)t+(a^2+2)=0$

의 두 근이다.

이때 실수 x, y가 존재하지 않으려면 이 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+1)\}^2-4(a^2+2)<0$

$4a^2+4a+1-4a^2-8<0$

$4a-7<0$, $4a<7$ $\quad\therefore a<\frac{7}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 1

17

$\begin{cases} (x+2)(y+2)=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2)(y-2)=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

㉠에서 $xy+2(x+y)+4=4$이므로

$2u+v=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $xy-2(x+y)+4=k$이므로

$-2u+v=k-4$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢+㉣을 하면

$2v=k-4$ $\quad\therefore v=\frac{k-4}{2}$

$v=\frac{k-4}{2}$를 ㉢에 대입하면

$2u+\frac{k-4}{2}=0$ $\quad\therefore u=-\frac{k-4}{4}$

따라서 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2+\frac{k-4}{4}t+\frac{k-4}{2}=0$, 즉

$4t^2+(k-4)t+2(k-4)=0$

의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이 이차방정식이 오직 하나의 해를 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(k-4)^2-4\times4\times2(k-4)=0$

$k^2-40k+144=0$, $(k-4)(k-36)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=36$

답 4, 36

18

다음 그림과 같이 사이에 비어있는 칸을 A, B로 정하자.

x^2		
A	$3y^2$	xy
$-xy$	30	B

A를 공유하는 경우, 즉 $x^2+A-xy=A+3y^2+xy$에서

$x^2-2xy-3y^2=0$ ······㉠

B를 공유하는 경우, 즉 $x^2+3y^2+B=-xy+30+B$에서

$x^2+3y^2+xy-30=0$ ······㉡

㉠에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

x, y의 부호가 서로 다르거나 $x=y=0$이다.

이때 x, y는 모두 양수이므로 $x=3y$

$x=3y$를 ㉡에 대입하면

$9y^2+3y^2+3y^2-30=0$, $y^2=2$

$\therefore y=\sqrt{2}$ ($\because y>0$)

즉, $y=\sqrt{2}$일 때 $x=3\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4\sqrt{2}$

답 ③

19

가로와 세로의 길이가 각각 $3a$, $2b$ ($a>0$, $b>0$)인 직사각형의 넓이가 108이므로

$3a\times 2b=108$, $ab=18$ $\quad\therefore b=\dfrac{18}{a}$ ······㉠

한 변의 길이가 각각 $2a$, $3b$인 두 정사각형의 넓이의 합이 직사각형의 넓이의 2배와 같으므로

$(2a)^2+(3b)^2=2\times 108$

$\therefore 4a^2+9b^2=216$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4a^2+9\times\left(\dfrac{18}{a}\right)^2=216$

$a^2+\dfrac{729}{a^2}=54$, $a^4-54a^2+729=0$

$(a^2-27)^2=0$, $a^2=27$

$\therefore a=3\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

$a=3\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면 $b=\dfrac{18}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$이므로

$a+b=3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

따라서 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형의 넓이는

$(5\sqrt{3})^2=75$

답 75

20

두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+b\alpha+a=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$(a-b)\alpha-(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore a=b$ 또는 $\alpha=1$

이때 $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{2}{3}$에서 $\beta\neq\gamma$이므로 주어진 두 이차방정식의 공통근은 $x=\alpha$뿐이다.

그런데 $a=b$이면 주어진 두 이차방정식은 일치하여 2개의 공통근을 가지므로 $a\neq b$

$\therefore \alpha=1$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-(1+\beta)$, $b=\beta$ ······㉢

$\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{2}{3}$에서 $\gamma=\dfrac{2}{3}\beta$이고 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 1, γ, 즉 1, $\dfrac{2}{3}\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$b=-\left(1+\dfrac{2}{3}\beta\right)$, $a=\dfrac{2}{3}\beta$ ······㉣

㉢, ㉣에서

$a=-(1+\beta)=\dfrac{2}{3}\beta$, $b=\beta=-\left(1+\dfrac{2}{3}\beta\right)$

따라서 $\beta=-\dfrac{3}{5}$, $a=-\dfrac{2}{5}$, $b=-\dfrac{3}{5}$이므로

$ab=\left(-\dfrac{2}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{6}{25}$

답 ⑤

21

공통근을 α라 하면

$\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha^2+b\alpha+a=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $(a-b)\alpha-(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha-1)=0$ $\quad\therefore a=b$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $a=b$이면 주어진 두 이차방정식은 일치하여 2개의 공통근을 가지므로 $a\neq b$

$\therefore \alpha=1$

(가)

㉠에 $\alpha=1$을 대입하면

$1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ······㉢

이것을 $a^2+b^2=5$에 대입하면

$a^2+(-a-1)^2=5$, $a^2+a-2=0$

$(a-1)(a+2)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=-2$

$a=1$을 ㉢에 대입하면 $b=-2$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면 $b=1$

(나)

따라서 $a-b$의 최댓값은 $a=1, b=-2$일 때

$1-(-2)=3$

(다)

답 3

단계	채점 기준	배점
(가)	두 이차방정식을 연립하여 공통근을 구한 경우	40%
(나)	a, b의 값을 각각 구한 경우	40%
(다)	$a-b$의 최댓값을 구한 경우	20%

22

x^2-6x-6이 어떤 자연수의 제곱이므로

$x^2-6x-6=n^2$ (n은 자연수)이라 하면

$x^2-6x+9-n^2-15=0$

$(x-3)^2-n^2=15$

$\therefore \{(x-3)+n\}\{(x-3)-n\}=15$

자연수 x, n에 대하여 $x-3+n>x-3-n$이므로

$x-3+n, x-3-n$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3+n$	-1	-3	5	15
$x-3-n$	-15	-5	3	1

(i) $\begin{cases} x-3+n=-1 \\ x-3-n=-15 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+n=2 \\ x-n=-12 \end{cases}$ 일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=-5, n=7$

그런데 x, n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\begin{cases} x-3+n=-3 \\ x-3-n=-5 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+n=0 \\ x-n=-2 \end{cases}$ 일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, n=1$

그런데 x, n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\begin{cases} x-3+n=5 \\ x-3-n=3 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+n=8 \\ x-n=6 \end{cases}$ 일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=7, n=1$

(iv) $\begin{cases} x-3+n=15 \\ x-3-n=1 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} x+n=18 \\ x-n=4 \end{cases}$ 일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $x=11, n=7$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 7 또는 11이므로 그 합은 18이다.

답 18

23

$(x^2+16)(y^2+1)-16xy=0$에서

$x^2y^2+x^2+16y^2+16-16xy=0$

$(x^2y^2-8xy+16)+(x^2-8xy+16y^2)=0$

$\therefore (xy-4)^2+(x-4y)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$xy-4=0, x-4y=0$

$\therefore xy=4, x=4y$

$x=4y$를 $xy=4$에 대입하면

$4y^2=4, y^2=1 \qquad \therefore y=\pm1$

즉, $y=1$일 때 $x=4$, $y=-1$일 때 $x=-4$

$\therefore |x|+|y|=5$

답 5

24

이차방정식 $x^2-(m+3)x+2m+4=0$의 두 근을
α, β ($\alpha\le\beta$, α, β는 정수)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases} \alpha+\beta=m+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha\beta=2m+4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$-2\times$㉠을 하면

$\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-2$

$\alpha(\beta-2)-2(\beta-2)-4=-2$

$\therefore (\alpha-2)(\beta-2)=2$

이때 $\alpha-2, \beta-2$는 정수이고 $\alpha\le\beta$에서 $\alpha-2\le\beta-2$이므로 $\alpha-2, \beta-2$의 값은 다음 표와 같다.

$\alpha-2$	-2	1
$\beta-2$	-1	2

(i) $\alpha-2=-2, \beta-2=-1$에서 $\alpha=0, \beta=1$

즉, ㉠에서

$0+1=m+3 \qquad \therefore m=-2$

(ii) $\alpha-2=1, \beta-2=2$에서 $\alpha=3, \beta=4$

즉, ㉠에서

$3+4=m+3 \qquad \therefore m=4$

(i), (ii)에서 $m=-2$ 또는 $m=4$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$-2+4=2$

답 2

STEP 2 **개념 마무리** 본문 p.183

1 $-\frac{4}{3}$	**2** 2	**3** $\frac{25}{2}$	**4** 1
5 28	**6** 80		

1

$(x^2+a)(2x+a^2+1)=(x^2+2a+1)(x+a^2)$에서 양변을 각각 전개하여 정리하면

$x^3+x^2-x-a^3-a^2+a=0$

$f(x)=x^3+x^2-x-a^3-a^2+a$라 하면 $f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} a & 1 & 1 & -1 & -a^3-a^2+a \\ & & a & a^2+a & a^3+a^2-a \\ \hline & 1 & a+1 & a^2+a-1 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-a)\{x^2+(a+1)x+a^2+a-1\}$

따라서 주어진 방정식은

$(x-a)\{x^2+(a+1)x+a^2+a-1\}=0$이므로

$x=a$ 또는 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$

(i) $x=a$를 중근으로 가질 때,

$x=a$는 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$의 근이어야 하므로

$a^2+(a+1)a+a^2+a-1=0$

$3a^2+2a-1=0$, $(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(ii) $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4(a^2+a-1)=0$

$3a^2+2a-5=0$, $(3a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{5}{3}$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$\left(-\frac{5}{3}\right)+(-1)+\frac{1}{3}+1=-\frac{4}{3}$

답 $-\frac{4}{3}$

2

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 허근 β이면 $\overline{\beta}$도 근이다.

그런데 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$의 네 근이 α, β, α^2, β^2이고 α는 실수이므로

$\overline{\beta}=\beta^2$

$\beta=s+ti$ (s, t는 실수, $t\neq0$)라 하면 $\overline{\beta}=\beta^2$에서

$s-ti=(s^2-t^2)+2sti$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$s=s^2-t^2$, $-t=2st$

$-t=2st$에서 $t(2s+1)=0$

이때 $t\neq0$이므로 $2s+1=0$ $\quad\therefore s=-\frac{1}{2}$

$s=-\frac{1}{2}$을 $s=s^2-t^2$에 대입하면

$t^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 주어진 사차방정식의 두 허근은

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

또한, $\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{(\text{두 근의 합})=-1,\ (\text{두 근의 곱})=1}$를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+x+1=0$이므로

$x^4+ax^3+bx^2+cx-1=(x^2+x+1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면

$-1=\alpha^3$ $\quad\therefore \alpha=-1$ ($\because$ α는 실수)

따라서

$$\begin{aligned} x^4+ax^3+bx^2+cx-1&=(x^2+x+1)(x+1)(x-1) \\ &=x^4+x^3-x-1 \end{aligned}$$

이므로

$a=1$, $b=0$, $c=-1$

$\therefore a+2b-c=1+2\times0-(-1)=2$

답 2

3

$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=6 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy-(x+y)=6 \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v-u=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-3v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠－㉡을 하면

$-u+v=-1 \qquad \therefore v=u-1$

$v=u-1$을 ㉡에 대입하면

$u^2-3(u-1)=7,\ u^2-3u-4=0$

$(u+1)(u-4)=0 \qquad \therefore u=-1$ 또는 $u=4$

즉, $u=-1$일 때 $v=-2$, $u=4$일 때 $v=3$

(i) $u=-1,\ v=-2$일 때,

$x+y=-1,\ xy=-2$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이다.

$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

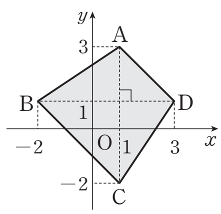
(ii) $u=4,\ v=3$일 때,

$x+y=4,\ xy=3$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이다.

$(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 다각형의 네 꼭짓점을 각각 $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(1, -2)$, $D(3, 1)$이라 하면 사각형 ABCD는 오른쪽 그림과 같으므로 그 넓이는



$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times(3+2)\times(3+2)=\frac{25}{2}$

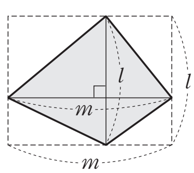
답 $\frac{25}{2}$

보충 설명

두 대각선이 수직으로 만나는 사각형의 넓이 |

두 대각선이 수직으로 만나는 사각형에서 두 대각선의 길이가 각각 l, m일 때, 이 사각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}lm$



4

$\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+ax+2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하자.

삼차방정식 ㉠의 계수가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이므로 $1-\sqrt{3}i$도 ㉠의 근이다.

(i) ㉠, ㉡의 공통근이 $1+\sqrt{3}i$ 또는 $1-\sqrt{3}i$일 때, ← $m=1+\sqrt{3}i$ 또는 $m=1-\sqrt{3}i$일 때

이차방정식 ㉡의 계수가 실수이므로 한 근이 $1+\sqrt{3}i$이면 $1-\sqrt{3}i$도 근이고, 한 근이 $1-\sqrt{3}i$이면 $1+\sqrt{3}i$도 근이다.

즉, 공통근이 $1+\sqrt{3}i$ 또는 $1-\sqrt{3}i$이면 두 근 모두 ㉡의 근이고, 두 근의 곱은

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4$

그런데 이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이다.

즉, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$는 두 방정식 ㉠, ㉡의 공통근이 될 수 없다.

실수 계수의 삼차방정식에서 두 근이 서로 켤레복소수이면 나머지 한 근은 반드시 실수이다.

(ii) ㉠, ㉡의 공통근 m이 실수일 때,

삼차방정식 ㉠의 세 근이 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, m이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+m=-a$

$\therefore a=-m-2 \qquad \cdots\cdots ㉢$

$x=m$은 이차방정식 ㉡의 근이기도 하므로

$m^2+am+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉣$

㉢을 ㉣에 대입하면

$m^2+(-m-2)m+2=0,\ -2m+2=0$

$\therefore m=1$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값은 1이다.

답 1

보충 설명

삼차방정식 ㉠의 세 근이 $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-(1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i+1)=-3$

$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=6$

$c=-(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$

따라서 주어진 삼차방정식은 $x^3-3x^2+6x-4=0$, 이차방정식은 $x^2-3x+2=0$이다.

5

$xy-2x+2-y^2=0$에서

$x(y-2)-(y^2-4)=2$

$x(y-2)-(y-2)(y+2)=2$

$\therefore (y-2)(x-y-2)=2$

이때 x, y가 자연수이므로 $y-2\geq-1$이다.

따라서 $y-2$, $x-y-2$의 값은 다음 표와 같다.

$y-2$	-1	1	2
$x-y-2$	-2	2	1

(i) $y-2=-1$, $x-y-2=-2$일 때,

$x=1$, $y=1$이므로 $xy=1$

(ii) $y-2=1$, $x-y-2=2$일 때,

$x=7$, $y=3$이므로 $xy=21$

(iii) $y-2=2$, $x-y-2=1$일 때,

$x=7$, $y=4$이므로 $xy=28$

(i), (ii), (iii)에서 xy의 최댓값은 28이다.

답 28

6

방정식 $x^2+5y^2+4xy-8y+k=0$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+4yx+5y^2-8y+k=0$ ……㉠

주어진 방정식의 실근이 한 쌍만 존재하므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2y)^2-(5y^2-8y+k)=0$

$\therefore\ y^2-8y+k=0$ ……㉡

이때 y의 값 역시 하나만 존재해야 하므로 이차방정식 ㉡도 중근을 가져야 한다. ㉡의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-4)^2-k=0$

$16-k=0$ $\quad\therefore\ k=16$

$k=16$을 ㉡에 대입하면

$y^2-8y+16=0$

$(y-4)^2=0$ $\quad\therefore\ y=4$

$y=4$, $k=16$을 ㉠에 대입하면

$x^2+4\times4\times x+5\times4^2-8\times4+16=0$

$x^2+16x+64=0$

$(x+8)^2=0$ $\quad\therefore\ x=-8$

따라서 $a=-8$, $b=4$이므로

$a^2+b^2=(-8)^2+4^2=80$

답 80

08. 여러 가지 부등식

1 연립일차부등식

기본+필수연습

본문 pp.190~196

01 ㄴ, ㄷ **02** 풀이 참조 **03** $-2<x\le3$

04 (1) $x=5$ (2) 해는 없다. **05** 9

06 (1) $x\le0$ 또는 $x\ge\frac{4}{3}$

(2) $-\frac{7}{3}\le x<-\frac{4}{3}$ 또는 $2<x\le3$

(3) $x\le-\frac{1}{5}$

07 4 **08** 12 **09** -1 **10** -7

11 $-15<a\le-8$ **12** 80 g 이상 320 g 이하

13 $\frac{5}{2}$ km 이상 $\frac{16}{5}$ km 미만 **14** 59

15 (1) $x\le-2$ 또는 $x\ge7$ (2) $\frac{4}{3}<x<\frac{8}{5}$ **16** $\frac{2}{3}$

01

ㄱ. $a<0$, $b>0$이므로 $a+b$의 부호는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $a<0$, $b>0$이므로 $\frac{b}{a}<0$ (참)

ㄷ. $a<0$, $b>0$에서

$|a-b|=|a|+|b|$이고,

$|a+b|=\underbrace{|a|-|b|}_{|a|\ge|b|일\ 때}$ 또는 $|a+b|=\underbrace{|b|-|a|}_{|a|<|b|일\ 때}$이므로

$|a-b|>|a+b|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

02

(1) $ax+3<-a$에서 $ax<-a-3$

(i) $a>0$이면 $x<-1-\frac{3}{a}$

(ii) $a=0$이면 $0\times x<-3$이므로 해는 없다.

(iii) $a<0$이면 $x>-1-\frac{3}{a}$

(2) $a^2x+1\ge a+x$에서 $(a^2-1)x\ge a-1$

$\therefore\ (a+1)(a-1)x\ge a-1$

(i) $a<-1$이면 $a+1<0$, $a-1<0$에서

$(a+1)(a-1)>0$이므로 $x\ge\frac{1}{a+1}$

(ii) $a=-1$이면 $0\times x\geq -2$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $-1<a<1$이면 $a+1>0$, $a-1<0$에서

$(a+1)(a-1)<0$이므로 $x\leq\frac{1}{a+1}$

(iv) $a=1$이면 $0\times x\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(v) $a>1$이면 $a+1>0$, $a-1>0$에서

$(a+1)(a-1)>0$이므로 $x\geq\frac{1}{a+1}$

답 풀이 참조

03

$0.5(x-3)-2\leq\frac{7}{4}-\frac{5}{4}x$의 양변에 4를 곱하면

$2(x-3)-8\leq 7-5x$

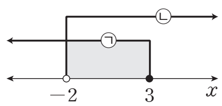
$7x\leq 21$ $\therefore x\leq 3$ ……㉠

$-\frac{3}{8}x-\frac{9}{4}<x+0.5$의 양변에 8을 곱하면

$-3x-18<8x+4$

$-11x<22$ $\therefore x>-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2<x\leq 3$

답 $-2<x\leq 3$

04

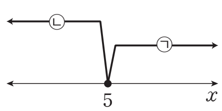
(1) $3x-2\geq x+8$에서 $2x\geq 10$

$\therefore x\geq 5$ ……㉠

$2x+4\geq 5x-11$에서 $-3x\geq -15$

$\therefore x\leq 5$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



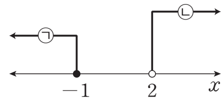
$x=5$

(2) $x-2\leq -3$에서 $x\leq -1$ ……㉠

$3x-8>-2$에서 $3x>6$

$\therefore x>2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 (1) $x=5$ (2) 해는 없다.

05

부등식 $2x-1<3x+6\leq\frac{3}{2}x+9$의 해는 연립부등식

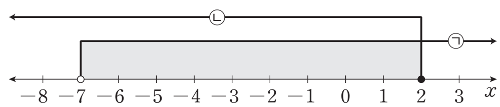
$\begin{cases} 2x-1<3x+6 \\ 3x+6\leq\frac{3}{2}x+9 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$2x-1<3x+6$에서 $x>-7$ ……㉠

$3x+6\leq\frac{3}{2}x+9$에서 $\frac{3}{2}x\leq 3$

$\therefore x\leq 2$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $-7<x\leq 2$이고, 이를 만족시키는 정수 x는 -6, -5, -4, $\cdots$, 2의 9개이다.

답 9

06

(1) $|2-3x|\geq 2$에서

$2-3x\leq -2$ 또는 $2-3x\geq 2$

$2-3x\leq -2$에서 $x\geq\frac{4}{3}$, $2-3x\geq 2$에서 $x\leq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq\frac{4}{3}$

(2) $5<|3x-1|\leq 8$에서

$-8\leq 3x-1<-5$ 또는 $5<3x-1\leq 8$

$-8\leq 3x-1<-5$에서 $-\frac{7}{3}\leq x<-\frac{4}{3}$

$5<3x-1\leq 8$에서 $2<x\leq 3$

$\therefore -\frac{7}{3}\leq x<-\frac{4}{3}$ 또는 $2<x\leq 3$

(3) $3x+2\le|2x-1|$에서

(ⅰ) $x<\frac{1}{2}$일 때,

$3x+2\le-(2x-1)$, $5x\le-1$

$\therefore x\le-\frac{1}{5}$

이때 $x<\frac{1}{2}$이므로 $x\le-\frac{1}{5}$

(ⅱ) $x\ge\frac{1}{2}$일 때,

$3x+2\le2x-1 \qquad \therefore x\le-3$

이때 $x\ge\frac{1}{2}$이므로 해는 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x\le-\frac{1}{5}$

답 (1) $x\le0$ 또는 $x\ge\frac{4}{3}$

(2) $-\frac{7}{3}\le x<-\frac{4}{3}$ 또는 $2<x\le3$

(3) $x\le-\frac{1}{5}$

07

$5(x+1)>4x+a$에서 $5x+5>4x+a$

$\therefore x>a-5$ ……㉠

$x-1\ge3(x-1)$에서 $x-1\ge3x-3$

$\therefore x\le1$ ……㉡

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x\le b$이므로 ㉠, ㉡에서

$a-5=-2$, $b=1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $a+b=4$

답 4

08

부등식 $3x-a\le4-x\le bx-1$의 해는 연립부등식

$\begin{cases}3x-a\le4-x\\4-x\le bx-1\end{cases}$의 해와 같다.

$3x-a\le4-x$에서 $4x\le4+a$

$\therefore x\le1+\frac{a}{4}$ ……㉠

$4-x\le bx-1$에서 $(b+1)x\ge5$ ……㉡

이때 주어진 연립부등식의 해가 $2\le x\le3$이려면 ㉠의 해는 $x\le3$이고, ㉡의 해는 $x\ge2$이어야 한다.

㉠에서 $1+\frac{a}{4}=3$

또한, ㉡에서 $b+1>0$이고 ㉡의 해는

$x\ge\frac{5}{b+1} \qquad \therefore \frac{5}{b+1}=2$

따라서 $a=8$, $b=\frac{3}{2}$이므로 $ab=12$

$b+1=\frac{5}{2}$이므로 $b+1>0$이 성립한다.

답 12

09

$(a-b)x+2a-b>0$에서

$(a-b)x>-2a+b$ ……㉠

$(a+2b)x+7a-2b\ge0$에서

$(a+2b)x\ge-7a+2b$

이때 $a+2b>0$이므로 이 부등식의 해는

$a>0$, $b>0$이므로 $a+2b>0$

$x\ge\frac{-7a+2b}{a+2b}$ ……㉡

이때 주어진 부등식의 해가 $k\le x<1$이려면 ㉠의 해는 $x<1$이고, ㉡의 해는 $x\ge k$이어야 한다.

㉡에서 $k=\frac{-7a+2b}{a+2b}$ ……㉢

또한, ㉠에서 $a-b<0$이고 ㉠의 해는

$a<b$

$x<\frac{-2a+b}{a-b} \qquad \therefore \frac{-2a+b}{a-b}=1$ ……㉣

㉣에서 $-2a+b=a-b \qquad \therefore 2b=3a$

$a>0$, $b>0$이고, $b=\frac{3}{2}a$이므로 $a<b$가 성립한다.

이것을 ㉢에 대입하면

$k=\frac{-7a+3a}{a+3a}=\frac{-4a}{4a}=-1$

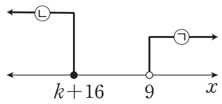
답 -1

10

$x-1>8$에서 $x>9$ ……㉠

$2x-16\le x+k$에서 $x\le k+16$ ……㉡

주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k+16\le 9$ $\quad\therefore k\le -7$

따라서 정수 k의 최댓값은 -7이다.

답 -7

11

$2(x+12)<36-3(x-1)$에서

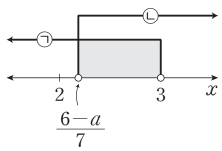
$2x+24<36-3x+3$, $5x<15$

$\therefore x<3$ ……㉠

$6-5x<a+2x$에서 $7x>6-a$

$\therefore x>\dfrac{6-a}{7}$ ……㉡

주어진 연립부등식의 해가 존재하지만 정수인 해는 존재하지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$2\le\dfrac{6-a}{7}<3$, $14\le 6-a<21$

$\therefore -15<a\le -8$

답 $-15<a\le -8$

보충 설명

연립부등식의 해 중에서 정수인 해의 존재에 대한 조건이 주어질 때에는 등호가 성립하는지를 잘 따져서 a의 값의 범위를 구해야 한다.

(i) $\dfrac{6-a}{7}=3$인 경우

$2(x+12)<36-3(x-1)$의 해는 $x<3$

$6-5x<a+2x$의 해는 $x>3$

이므로 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

따라서 연립부등식의 해가 존재한다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\dfrac{6-a}{7}=2$인 경우

$2(x+12)<36-3(x-1)$의 해는 $x<3$

$6-5x<a+2x$의 해는 $x>2$

이므로 연립부등식의 해는 $2<x<3$이다.

따라서 연립부등식의 해가 존재하지만 정수인 해는 존재하지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $2\le\dfrac{6-a}{7}<3$을 얻을 수 있다.

12

농도가 4 %인 소금물의 양을 x g이라 하면 농도가 9 %인 소금물의 양은 $(400-x)$ g이므로 농도가 5 % 이상 8 % 이하인 소금물 400 g의 소금의 양은

$$\frac{5}{100}\times 400\le\frac{4}{100}x+\frac{9}{100}(400-x)\le\frac{8}{100}\times 400$$

$2000\le 4x+9(400-x)\le 3200$

$2000\le -5x+3600\le 3200$

$-1600\le -5x\le -400$

$\therefore 80\le x\le 320$

따라서 농도가 4 %의 소금물의 양은 80 g 이상 320 g 이하이다.

답 80 g 이상 320 g 이하

13

예준이네 집과 도서관 사이의 거리를 x km $(x>0)$라 하면

$(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{3}\right|\ge\dfrac{20}{60} & \leftarrow 20\text{분}=\dfrac{20}{60}\text{시간}\\[2mm] \dfrac{x}{12}+\dfrac{x}{8}<\dfrac{40}{60} & \leftarrow 40\text{분}=\dfrac{40}{60}\text{시간}\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}\ge\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ㉠ \quad \dfrac{x}{3}>\dfrac{x}{5}\\[2mm] \dfrac{x}{12}+\dfrac{x}{8}<\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$\times 15$를 하면 $5x-3x\ge 5$

$2x\ge 5$ $\quad\therefore x\ge\dfrac{5}{2}$

㉡$\times 24$를 하면 $2x+3x<16$

$5x<16$ $\quad\therefore x<\dfrac{16}{5}$

$\therefore \dfrac{5}{2}\le x<\dfrac{16}{5}$

따라서 예준이네 집과 도서관 사이의 거리는 $\dfrac{5}{2}$ km 이상 $\dfrac{16}{5}$ km 미만이다.

답 $\dfrac{5}{2}$ km 이상 $\dfrac{16}{5}$ km 미만

보충 설명

실생활에 관련된 활용 문제를 풀 때, 단위가 다른 양이 사용된 경우 단위를 통일시킨다.

(1) $x\,\mathrm{km}=1000x\,\mathrm{m}$, $x\,\mathrm{m}=100x\,\mathrm{cm}=\dfrac{x}{1000}\,\mathrm{km}$

(2) x시간$=60x$분, x분$=60x$초$=\dfrac{x}{60}$시간

14

아이스박스의 개수를 x (x는 자연수)라 하자.

모든 아이스박스에 음료수를 10개씩 담으면 음료수가 42개 남으므로 음료수의 개수는

$10x+42$(개)

또한, 아이스박스에 음료수를 13개씩 담으면 가득 채워지지 않는 아이스박스가 1개 있고, 빈 아이스박스가 3개 남으므로

$13(x-4)<10x+42<13(x-3)$ ($x-4$)개에 넣으면 음료수가 남고, ($x-3$)개에는 가득 차지 않는다.

$\therefore \begin{cases} 13(x-4)<10x+42 & \cdots\cdots ㉠ \\ 10x+42<13(x-3) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $13x-52<10x+42$

$3x<94 \qquad \therefore x<\dfrac{94}{3}$

㉡에서 $10x+42<13x-39$

$3x>81 \qquad \therefore x>27$

$\therefore 27<x<\underset{31.\times\times}{\dfrac{94}{3}}$

따라서 자연수 x의 최댓값 M은 31, 최솟값 m은 28이므로

$M+m=59$

답 59

15

(1) (i) $x<0$일 때,

$-x-(x-5)\ge 9$, $-2x\ge 4$

$\therefore x\le -2$

그런데 $x<0$이므로 $x\le -2$

(ii) $0\le x<5$일 때,

$x-(x-5)\ge 9$

즉, $0\times x\ge 4$이므로 해는 없다.

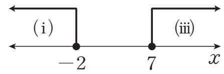
(iii) $x\ge 5$일 때,

$x+(x-5)\ge 9$, $2x\ge 14$

$\therefore x\ge 7$

그런데 $x\ge 5$이므로 $x\ge 7$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는



$x\le -2$ 또는 $x\ge 7$

(2) (i) $x<\dfrac{3}{2}$일 때,

$2-x>-(4x-6)$, $3x>4$

$\therefore x>\dfrac{4}{3}$

그런데 $x<\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{3}{2}$

(ii) $\dfrac{3}{2}\le x<2$일 때,

$2-x>4x-6$, $5x<8$

$\therefore x<\dfrac{8}{5}$

그런데 $\dfrac{3}{2}\le x<2$이므로 $\dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{8}{5}$

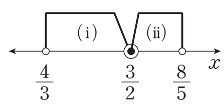
(iii) $x\ge 2$일 때,

$-(2-x)>4x-6$, $3x<4$

$\therefore x<\dfrac{4}{3}$

그런데 $x\ge 2$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는



$\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{8}{5}$

답 (1) $x\le -2$ 또는 $x\ge 7$ (2) $\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{8}{5}$

16

(i) $x<\dfrac{1}{2}$일 때,

$-(x-3)-(1-2x)\ge 2$에서 $x\ge 0$

그런데 $x<\dfrac{1}{2}$이므로 $0\le x<\dfrac{1}{2}$

(ii) $\dfrac{1}{2}\le x<3$일 때,

$-(x-3)+(1-2x)\ge 2$에서 $3x\le 2$

$\therefore x\le\dfrac{2}{3}$

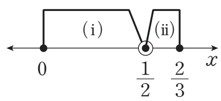
그런데 $\frac{1}{2}\le x<3$이므로 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{2}{3}$

(iii) $x\ge3$일 때,

$(x-3)+(1-2x)\ge2$에서 $x\le-4$

그런데 $x\ge3$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는



$0\le x\le\frac{2}{3}$

따라서 실수 x의 최댓값 M은 $\frac{2}{3}$, 최솟값 m은 0이므로

$M+m=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.197

01 ⑤	**02** 70	**03** $\frac{1}{3}$	**04** 400 g
05 6	**06** 38		

01

ㄱ. $a<-2$에서 $-a>2$

이때 $c>1$이므로 $c+(-a)>1+2$

$\therefore$ $c-a>3$ (참)

ㄴ. $a<-2$, $b>0$에서 $\frac{b}{a}<0$

또한, $b>0$, $c>0$에서 $\frac{c}{b}>0$

즉, $\frac{b}{a}<\frac{c}{b}$이므로 $\frac{b}{a}-\frac{c}{b}<0$ (참)

ㄷ. $a<-2$에서 $a^2>4$

또한, $0<b<1$에서 $b^2<1$이므로 $-b^2>-1$

즉, $a^2+(-b^2)>4+(-1)$이므로

$a^2-b^2>3$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

보충 설명

부등식의 사칙연산 | 두 실수 x, y에 대하여

$a<x<b$, $c<y<d$일 때, 각 연산에 대한 값의 범위는 다음과 같다. 단, 곱셈과 나눗셈은 a, b, c, d가 모두 양수일 때만 성립한다.

(1) 덧셈

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ +) & c & < & y & < & d \\ \hline & a+c & < & x+y & < & b+d \end{array}$$

(2) 뺄셈

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ -) & c & < & y & < & d \\ \hline & a-d & < & x-y & < & b-c \end{array}$$

(3) 곱셈

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \times) & c & < & y & < & d \\ \hline & ac & < & xy & < & bd \end{array}$$

(4) 나눗셈

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \div) & c & < & y & < & d \\ \hline & \frac{a}{d} & < & \frac{x}{y} & < & \frac{b}{c} \end{array}$$

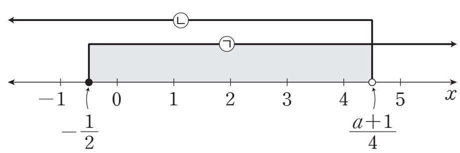
02

$2-2x\le3$에서 $-2x\le1$

$\therefore$ $x\ge-\frac{1}{2}$ ······㉠

$4x<a+1$에서 $x<\frac{a+1}{4}$ ······㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $4<\frac{a+1}{4}\le5$이므로

$\frac{a+1}{4}=4$이면 정수 x는 4개뿐이다.

$16<a+1\le20$ $\therefore$ $15<a\le19$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 16, 17, 18, 19이므로 그 합은

$16+17+18+19=70$

답 70

03

$a-3b+1\le(2a-b)x\le3a+b$ ······㉠

$2a\ne b$이므로 다음 두 가지 경우로 나누어 ㉠의 해를 구할 수 있다.

(ⅰ) $2a-b>0$일 때,

㉠의 각 변을 $2a-b$로 나누면

$$\frac{a-3b+1}{2a-b} \le x \le \frac{3a+b}{2a-b}$$

이때 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위가 $-1 \le x \le 0$이므로

$$\frac{a-3b+1}{2a-b}=-1,\ \frac{3a+b}{2a-b}=0$$

두 등식의 양변에 $2a-b$를 곱하면

$a-3b+1=-(2a-b),\ 3a+b=0$

$\therefore\ 3a-4b+1=0,\ 3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{15},\ b=\frac{1}{5}$$

그런데 $2a-b=-\frac{2}{15}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{3}<0$이므로

$2a-b>0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $2a-b<0$일 때,

㉠의 각 변을 $2a-b$로 나누면

$$\frac{3a+b}{2a-b} \le x \le \frac{a-3b+1}{2a-b}$$

이때 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위가 $-1 \le x \le 0$이므로

$$\frac{3a+b}{2a-b}=-1,\ \frac{a-3b+1}{2a-b}=0$$

두 등식의 양변에 $2a-b$를 곱하면

$3a+b=-(2a-b),\ a-3b+1=0$

$\therefore\ a=0,\ a-3b+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=0,\ b=\frac{1}{3}$$

이때 $2a-b=-\frac{1}{3}<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=0,\ b=\frac{1}{3}$이므로

$$a+b=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

04

섭취해야 하는 식품 A의 양을 $\underbrace{x}_{0\le x\le 300}$g이라 하면 섭취해야 하는 식품 B의 양은 $(300-x)$g이다.

탄수화물을 100 g 이상 얻어야 하므로

$$35\times\frac{x}{100}+40\times\frac{300-x}{100}\ge 100$$

$-5x \ge -2000 \qquad \therefore\ x \le 400 \qquad \cdots\cdots㉠$

단백질을 35 g 이상 얻어야 하므로

$$15\times\frac{x}{100}+10\times\frac{300-x}{100}\ge 35$$

$5x \ge 500 \qquad \therefore\ x \ge 100 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $100 \le x \le 400$

그런데 섭취하는 식품의 양은 최대 300 g이므로

$100 \le x \le 300$

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양의 최댓값은 300 g, 최솟값은 100 g이므로 구하는 합은 400 g이다.

답 400 g

05

$a>0,\ b>0$이므로 $|ax-1|<b$에서

$-b<ax-1<b,\ -b+1<ax<b+1$

$$\therefore\ \frac{-b+1}{a}<x<\frac{b+1}{a}$$

이 해가 $-1<x<2$와 일치하므로

$$\frac{-b+1}{a}=-1,\ \frac{b+1}{a}=2$$

두 등식의 양변에 a를 곱하면

$-b+1=-a,\ b+1=2a$

$\therefore\ a-b+1=0,\ 2a-b-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=3$

$\therefore\ ab=6$

답 6

06

$||2-x|-3| \le 6$에서

$-6 \le |2-x|-3 \le 6,\ -3 \le |2-x| \le 9$

즉, $\underbrace{|2-x|}_{\text{모든 } x\text{에 대하여 } |2-x|\ge 0} \le 9$이므로

$-9 \le 2-x \le 9,\ -11 \le -x \le 7$

$\therefore\ -7 \le x \le 11$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-7,\ -6,\ -5,\ \cdots,\ 11$이므로 그 합은

$-7+(-6)+(-5)+\ \cdots\ +11=8+9+10+11=38$

답 38

2 이차부등식

기본 + 필수연습 본문 pp.202~209

17 (1) $x<-2$ 또는 $x>\frac{9}{2}$ (2) $x\le-3$ 또는 $0\le x\le3$

18 (1) $-3\le x\le8$ (2) $x=\frac{1}{2}$ (3) 해는 없다.

19 64 **20** -6

21 (1) $-2<x<4$ (2) $x\le-3$ 또는 $x\ge5$

22 $x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{4}$ **23** -12 **24** 3

25 $-6\le k\le2$ **26** $0<k<4$ **27** 2

28 (1) $k\le3$ 또는 $k\ge11$ (2) $-3\le a<1$ **29** $\frac{3}{2}$

30 -4 **31** $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

32 $-1<a<\frac{1}{2}$ **33** 3 **34** 3

35 $20\le x\le30$

17

(1) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ 또는 $x>\frac{9}{2}$

(2) $f(x)g(x)\le0$

$\Longleftrightarrow f(x)\ge0,\ g(x)\le0$ 또는 $f(x)\le0,\ g(x)\ge0$

(i) $f(x)\ge0,\ g(x)\le0$일 때,

$f(x)\ge0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le-3$ 또는 $x\ge3$ ……㉠

$g(x)\le0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x\le-3$

(ii) $f(x)\le0,\ g(x)\ge0$일 때,

$f(x)\le0$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-3\le x\le3$ ……㉢

$g(x)\ge0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\ge0$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $0\le x\le3$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)\le0$의 해는

$x\le-3$ 또는 $0\le x\le3$

답 (1) $x<-2$ 또는 $x>\frac{9}{2}$

(2) $x\le-3$ 또는 $0\le x\le3$

18

(1) $x^2\le5x+24$에서 $x^2-5x-24\le0$

$(x+3)(x-8)\le0$

$\therefore\ -3\le x\le8$

(2) $-4x^2+4x-1\ge0$에서

$4x^2-4x+1\le0,\ (2x-1)^2\le0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $(2x-1)^2\ge0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=\frac{1}{2}$

(3) $x+2\le-x^2$에서 $x^2+x+2\le0$, 즉

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\le0$

이때 모든 실수 x에 대하여

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge\frac{7}{4}$

이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

답 (1) $-3\le x\le8$ (2) $x=\frac{1}{2}$ (3) 해는 없다.

19

x^2의 계수가 2이고 해가 $-2\le x\le4$인 이차부등식은

$2(x+2)(x-4)\le0$

$\therefore\ 2x^2-4x-16\le0$

이 부등식이 $2x^2+ax+b\le0$과 일치하므로

$a=-4,\ b=-16$

$\therefore\ ab=(-4)\times(-16)=64$

답 64

20

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+2x-2k-15<0$, 즉 $x^2-2x+2k+15>0$이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+2k+15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2k+15)<0$

$-2k-14<0 \qquad \therefore k>-7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최솟값은 -6이다.

답 -6

21

(1) 부등식 $x^2-2x-5<|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때,

$x^2-2x-5<-(x-1)$

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$

(ii) $x\geq 1$일 때,

$x^2-2x-5<x-1$

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<4$

(2) 부등식 $|x^2-2x|\geq 15$에서

(i) $x^2-2x<0$에서 $x(x-2)<0$, 즉 $0<x<2$일 때,

$-(x^2-2x)\geq 15$, $x^2-2x+15\leq 0$

$\therefore (x-1)^2+14\leq 0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^2+14\geq 14$이므로 이 부등식의 해는 없다.

(ii) $x^2-2x\geq 0$에서 $x(x-2)\geq 0$, 즉 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$일 때,

$x^2-2x\geq 15$, $x^2-2x-15\geq 0$

$(x+3)(x-5)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

그런데 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 2$이므로

$x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

답 (1) $-2<x<4$ (2) $x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

다른 풀이

(2) $|x^2-2x|\geq 15$에서

$x^2-2x\leq -15$ 또는 $x^2-2x\geq 15$

(i) $x^2-2x\leq -15$에서 $x^2-2x+15\leq 0$

$\therefore (x-1)^2+14\leq 0$

이 부등식의 해는 없다.

(ii) $x^2-2x\geq 15$에서 $x^2-2x-15\geq 0$

$(x+3)(x-5)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 5$

22

이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 $-1\leq x\leq 4$이므로

$a<0$

해가 $-1\leq x\leq 4$이고, x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-4)\leq 0 \qquad \therefore x^2-3x-4\leq 0$

양변에 음수 a를 곱하면

$ax^2-3ax-4a\geq 0$ ← 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호 방향은 반대로

이 부등식이 $ax^2+bx+c\geq 0$과 일치하므로

$b=-3a$, $c=-4a$

이것을 이차부등식 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면

$-4ax^2-3ax+a>0$

양변을 $-a$로 나누면

$4x^2+3x-1>0$ ($\because -a>0$) ← 양변을 같은 양수로 나누면 부등호 방향은 그대로

$(x+1)(4x-1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{4}$

답 $x<-1$ 또는 $x>\frac{1}{4}$

23

이차식 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 부등식 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이므로

$a<0$

해가 $x<-2$ 또는 $x>5$이고, x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)>0$ $\quad\therefore x^2-3x-10>0$

양변에 음수 a를 곱하면

$ax^2-3ax-10a<0$ ← 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호 방향은 반대로

이 부등식이 $f(x)<0$과 일치하므로

$f(x)=ax^2-3ax-10a$

즉, 부등식 $f(-x)\ge 0$에서

$ax^2+3ax-10a\ge 0$

양변을 a로 나누면

$x^2+3x-10\le 0$ ($\because a<0$) ← 양변을 같은 음수로 나누면 부등호 방향은 반대로

$(x+5)(x-2)\le 0$ $\quad\therefore -5\le x\le 2$

따라서 부등식 $f(-x)\ge 0$을 만족시키는 정수 x는

$-5, -4, -3, \cdots, 2$이므로 그 합은

$(-5)+(-4)+(-3)+\cdots+2$

$=(-5)+(-4)+(-3)=-12$

답 -12

24

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 $x=2$이므로

$a<0$

해가 $x=2$이고, x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)^2\le 0$ $\quad\therefore x^2-4x+4\le 0$

양변에 음수 a를 곱하면

$ax^2-4ax+4a\ge 0$ ← 양변에 같은 음수를 곱하면 부등호 방향은 반대로

이 부등식이 $ax^2+bx+c\ge 0$과 일치하므로

$b=-4a$, $c=4a$

이것을 이차부등식 $bx^2+2cx+12a<0$에 대입하면

$-4ax^2+8ax+12a<0$

양변을 $-4a$로 나누면

$x^2-2x-3<0$ ($\because -4a>0$) ← 양변을 같은 양수로 나누면 부등호 방향은 그대로

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

따라서 부등식을 만족시키는 정수는 0, 1, 2의 3개이다.

답 3

25

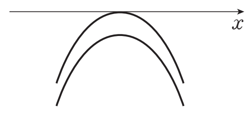
부등식 $(k-2)x^2-(k-2)x-2\le 0$에서

(i) $k=2$일 때,

$-2\le 0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\ne 2$일 때,

이차함수 $y=(k-2)x^2-(k-2)x-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 위로 볼록해야 하므로



$k-2<0$

$\therefore k<2$ $\quad\cdots\cdots$㉠

또한, 이차방정식 $(k-2)x^2-(k-2)x-2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$D=\{-(k-2)\}^2+8(k-2)\le 0$

$k^2+4k-12\le 0$, $(k+6)(k-2)\le 0$

$\therefore -6\le k\le 2$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-6\le k<2$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는

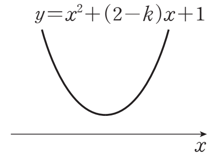
$-6\le k\le 2$

답 $-6\le k\le 2$

26

이차함수 $y=x^2+2x-2$의 그래프가 직선 $y=kx-3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+2x-2>kx-3$이 항상 성립해야 한다.

즉, $x^2+(2-k)x+1>0$에서 이차함수 $y=x^2+(2-k)x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이차방정식 $x^2+(2-k)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=(2-k)^2-4<0$

$k^2-4k<0$, $k(k-4)<0$

$\therefore 0<k<4$

답 $0<k<4$

27

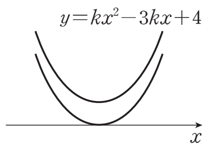
모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2-3kx+4}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-3kx+4\geq0$이 항상 성립해야 한다.

(ⅰ) $k=0$일 때,

$4\geq0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ⅱ) $k\neq0$일 때,

이차함수 $y=kx^2-3kx+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록해야 하므로



$k>0$ ……㉠

또한, 이차방정식 $kx^2-3kx+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 하므로

$D=(-3k)^2-16k\leq0$

$9k^2-16k\leq0$, $k(9k-16)\leq0$

$\therefore\ 0\leq k\leq\frac{16}{9}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $0<k\leq\frac{16}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\leq k\leq\frac{16}{9}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 0, 1의 2개이다.

답 2

28

(1) 이차함수 $y=-x^2-(k-5)x-k+2$의 그래프는 위로 볼록하므로 이차부등식 $-x^2-(k-5)x-k+2\geq0$이 해를 가지려면 이차방정식 $-x^2-(k-5)x-k+2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$이어야 한다.

$D=\{-(k-5)\}^2+4(-k+2)\geq0$

$k^2-14k+33\geq0$, $(k-3)(k-11)\geq0$

$\therefore\ k\leq3$ 또는 $k\geq11$

(2) 이차부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-4>0$이 해를 갖지 않으려면 이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-4$의 그래프는 위로 볼록해야 하므로

$a-1<0$

$\therefore\ a<1$ ……㉠

또한, 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-4=0$의 판별식을 D라 하면 $D\leq0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+4(a-1)\leq0$

$a^2+2a-3\leq0$, $(a+3)(a-1)\leq0$

$\therefore\ -3\leq a\leq1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는

$-3\leq a<1$

답 (1) $k\leq3$ 또는 $k\geq11$ (2) $-3\leq a<1$

29

이차부등식 $(a+1)x^2-5x+a+1\leq0$의 해가 오직 한 개 존재하려면 이차함수 $y=(a+1)x^2-5x+a+1$의 그래프는 아래로 볼록해야 하므로

$a+1>0$

$\therefore\ a>-1$ ……㉠

또한, 이차방정식 $(a+1)x^2-5x+a+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(-5)^2-4(a+1)^2=0$

$(a+1)^2=\frac{25}{4}$, $a+1=\pm\frac{5}{2}$

$\therefore\ a=-\frac{7}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

30

$f(x)=2x^2-a-3$이라 하면 $-3\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$-3\leq x\leq3$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하려면

$f(0)=-a-3>0$ $\therefore\ a<-3$

따라서 정수 a의 최댓값은 -4이다.

답 -4

31

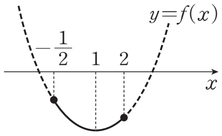
$2x^2-3x-2\leq0$에서

$(2x+1)(x-2)\leq0$ $\therefore\ -\frac{1}{2}\leq x\leq2$

한편, $f(x)=x^2-2x+a^2-3a$라 하면

$f(x)=(x-1)^2+a^2-3a-1$

즉, $-\frac{1}{2} \le x \le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $-\frac{1}{2} \le x \le 2$에서 이차부등식 $x^2-2x+a^2-3a<0$이 항상 성립하려면

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2-3a+\frac{5}{4}<0$

$4a^2-12a+5<0$, $(2a-1)(2a-5)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

답 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

32

$f(x)>g(x)$에서

$x^2+3ax-a^2>4ax+a^2$

$\therefore x^2-ax-2a^2>0$

$h(x)=x^2-ax-2a^2$이라 하면

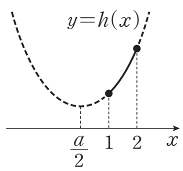
$h(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a^2$

$1 \le x \le 2$에서 이차부등식 $h(x)>0$이 항상 성립하므로

$1 \le x \le 2$에서 ($h(x)$의 최솟값)>0이다.

(i) $\frac{a}{2}<1$, 즉 $a<2$일 때,

이차함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 \le x \le 2$에서 최솟값은



$h(1)=1-a-2a^2>0$

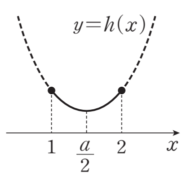
$2a^2+a-1<0$, $(2a-1)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<\frac{1}{2}$

이때 $a<2$이므로 $-1<a<\frac{1}{2}$

(ii) $1 \le \frac{a}{2}<2$, 즉 $2 \le a<4$일 때,

이차함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 \le x \le 2$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은

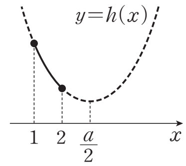


$h\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{9}{4}a^2$

그런데 $-\frac{9}{4}a^2>0$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $\frac{a}{2} \ge 2$, 즉 $a \ge 4$일 때,

이차함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $1 \le x \le 2$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은



$f(2)=4-2a-2a^2>0$

$a^2+a-2<0$, $(a+2)(a-1)<0$

$\therefore -2<a<1$

이때 $a \ge 4$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-1<a<\frac{1}{2}$

답 $-1<a<\frac{1}{2}$

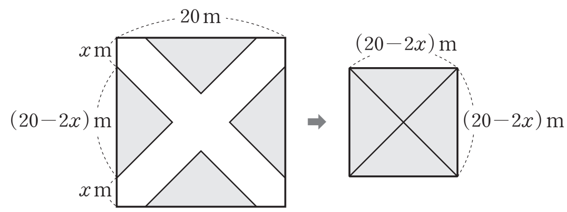
33

처음 화단의 넓이는

$20^2=400(\mathrm{m}^2)$

다음 그림과 같이 길을 제외한 화단의 넓이는 한 변의 길이가 $(20-2x)$m인 정사각형의 넓이와 같고, 각 변의 길이는 모두 양수이므로

$x>0$, $20-2x>0$에서 $0<x<10$ ······㉠



길을 제외한 화단의 넓이가 처음 화단의 넓이의 49 % 이하가 되려면

$(20-2x)^2 \le 400 \times \frac{49}{100}$

$4x^2-80x+400 \le 196$

$x^2-20x+51 \le 0$, $(x-3)(x-17) \le 0$

$\therefore 3 \le x \le 17$ ······㉡

㉠, ㉡에서 x의 값의 범위는 $3 \le x<10$

따라서 x의 최솟값은 3이다.

답 3

34

지면으로부터 공의 높이가 62 m 이상이 되려면

$12+35t-5t^2 \geq 62$

$5t^2-35t+50 \leq 0$, $t^2-7t+10 \leq 0$

$(t-2)(t-5) \leq 0$

$\therefore 2 \leq t \leq 5$

따라서 공의 높이가 62 m 이상이 되는 시각은 2초 후부터 5초 후까지이므로 3초 동안이다.

즉, $a=3$이다.

답 3

35

작년 수박 1통당 판매 가격을 a, 그때의 판매량을 b라 하면

(총 판매 금액)=(수박 1통당 판매 가격)×(판매량)

이므로 작년 총 판매 금액은

ab

올해 수박 1통당 판매 가격을 작년보다 $x\%$만큼 내렸을 때, 총 판매 금액은

$a\left(1-\frac{x}{100}\right) \times b\left(1+\frac{2x}{100}\right)$

올해 판매 목표가 작년 총 판매 금액의 12% 이상 증가이므로

$a\left(1-\frac{x}{100}\right) \times b\left(1+\frac{2x}{100}\right) \geq ab\left(1+\frac{12}{100}\right)$

$\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{2x}{100}\right) \geq 1.12$ ($\because a>0,\ b>0$)

$(100-x)(50+x) \geq 5600$

$x^2-50x+600 \leq 0$, $(x-20)(x-30) \leq 0$

$\therefore 20 \leq x \leq 30$

답 $20 \leq x \leq 30$

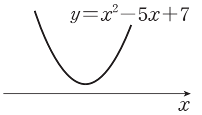
STEP 1 개념 마무리 본문 pp.210~211

07 ㄱ, ㄹ	**08** ②	**09** 56	**10** -9
11 ⑤	**12** 5	**13** 8	
14 $a<0$ 또는 $0<a<4$		**15** 9	**16** -17
17 $k \leq -\frac{\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$		**18** 25	

07

ㄱ. 이차함수 $y=x^2-5x+7$의 그래프는 아래로 볼록하다.

이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면



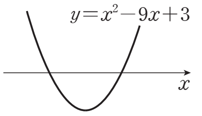
$D=(-5)^2-4\times7=-3<0$

따라서 이차부등식 $x^2-5x+7<0$의 해는 없다.

ㄴ. $\frac{2}{3}x^2 \leq 6x-2$에서 $x^2-9x+3 \leq 0$

이차함수 $y=x^2-9x+3$의 그래프는 아래로 볼록하다.

이차방정식 $x^2-9x+3=0$의 판별식을 D라 하면



$D=(-9)^2-4\times3=69>0$

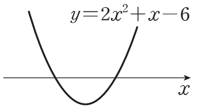
따라서 이차부등식 $\frac{2}{3}x^2 \leq 6x-2$의 해는 존재한다.

ㄷ. $(2x-1)(x+1)<5$에서

$2x^2+x-1<5$ $\therefore 2x^2+x-6<0$

이차함수 $y=2x^2+x-6$의 그래프는 아래로 볼록하다.

이차방정식 $2x^2+x-6=0$의 판별식을 D라 하면



$D=1^2-4\times2\times(-6)=49>0$

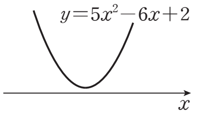
따라서 이차부등식 $(2x-1)(x+1)<5$의 해는 존재한다.

ㄹ. $4x^2-6x<-x^2-2$에서

$5x^2-6x+2<0$

이차함수 $y=5x^2-6x+2$의 그래프는 아래로 볼록하다.

이차방정식 $5x^2-6x+2=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=(-3)^2-5\times2=-1<0$

따라서 이차부등식 $4x^2-6x<-x^2-2$의 해는 없다.

따라서 해가 없는 이차부등식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

다른 풀이

ㄴ. 이차방정식 $x^2-9x+3=0$의 해는 $x=\frac{9\pm\sqrt{69}}{2}$

즉, 이차부등식 $x^2-9x+3 \leq 0$에서

$\left(x-\frac{9-\sqrt{69}}{2}\right)\left(x-\frac{9+\sqrt{69}}{2}\right) \leq 0$

$\therefore \frac{9-\sqrt{69}}{2} \leq x \leq \frac{9+\sqrt{69}}{2}$

ㄷ. 이차부등식 $2x^2+x-6<0$에서

$(x+2)(2x-3)<0$ $\therefore -2<x<\frac{3}{2}$

08

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고, 이 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -1, 2이므로 양수 k에 대하여

$f(x)=k(x+1)(x-2)$

라 할 수 있다.

부등식 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)\le 0$에서

$k\left(\frac{x-1}{2}+1\right)\left(\frac{x-1}{2}-2\right)\le 0$

$k\times\frac{x+1}{2}\times\frac{x-5}{2}\le 0$

$(x+1)(x-5)\le 0$ ($\because$ $k>0$)

$\therefore$ $-1\le x\le 5$

답 ②

다른 풀이

부등식 $f\left(\frac{x-1}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x-1}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)\le 0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-1\le t\le 2$이므로

$-1\le\frac{x-1}{2}\le 2$, $-2\le x-1\le 4$

$\therefore$ $-1\le x\le 5$

09

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 이차부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-3\le x\le 0$이므로

$a>0$

해가 $-3\le x\le 0$이고, x^2의 계수가 a $(a>0)$인 이차부등식은

$ax(x+3)\le 0$ $\qquad\therefore$ $ax^2+3ax\le 0$

즉, $f(x)=ax^2+3ax$에서 $f(1)=8$이므로

$f(1)=a+3a=8$, $4a=8$

$\therefore$ $a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+6x$이므로

$f(4)=56$

답 56

10

$\left|\frac{3}{2}x+a\right|\le 3$에서 $-3\le\frac{3}{2}x+a\le 3$

$\therefore$ $\frac{-6-2a}{3}\le x\le\frac{6-2a}{3}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

해가 ㉠과 같고, x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2\left(x-\frac{-6-2a}{3}\right)\left(x-\frac{6-2a}{3}\right)\le 0$

이 부등식이 $2x^2+4x+b\le 0$과 일치하므로

$2\left(x-\frac{-6-2a}{3}\right)\left(x-\frac{6-2a}{3}\right)=2x^2+4x+b$에서

$2\times\left\{\left(-\frac{-6-2a}{3}\right)+\left(-\frac{6-2a}{3}\right)\right\}=4$ $\qquad\therefore$ $a=\frac{3}{2}$

└ x의 계수를 비교하면

$2\times\left(-\frac{-6-2a}{3}\right)\times\left(-\frac{6-2a}{3}\right)=b$ $\qquad\therefore$ $b=-6$

└ 상수항을 비교하면

$\therefore$ $ab=-9$

답 -9

11

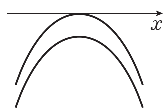
부등식 $(m-3)x^2+2(m-3)+3\le 0$에서

(i) $m=3$일 때,

$3\le 0$이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.

(ii) $m\ne 3$일 때,

이차함수 $y=(m-3)x^2+2(m-3)x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 위로 볼록해야 하므로



$m-3<0$

$\therefore$ $m<3$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

또한, 이차방정식 $(m-3)x^2+2(m-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(m-3)^2-3(m-3)\le 0$

$m^2-9m+18\le 0$, $(m-3)(m-6)\le 0$

$\therefore$ $3\le m\le 6$ $\qquad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 실수 m의 값은 존재하지 않는다.

답 ⑤

12

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+1}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

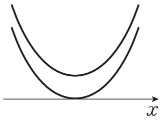
$(k+1)x^2-(k+1)x+1\ge 0$이 항상 성립해야 한다.

(i) $k=-1$일 때,

$1\ge 0$이므로 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k \neq -1$일 때,

이차함수 $y=(k+1)x^2-(k+1)x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록해야 하므로



$k+1>0$

$\therefore\ k>-1$ ……㉠

또한, 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D \le 0$이어야 하므로

$D=\{-(k+1)\}^2-4(k+1) \le 0$

$k^2-2k-3 \le 0$, $(k+1)(k-3) \le 0$

$\therefore\ -1 \le k \le 3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-1<k \le 3$

(i), (ii)에서 $-1 \le k \le 3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2+3=5$

답 5

13

부등식 $f(x) \ge g(x) \ge h(x)$의 해는 연립부등식 $\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) \ge h(x) \end{cases}$의 해와 같으므로 연립부등식 $\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) \ge h(x) \end{cases}$의 해가 모든 실수이어야 한다.

즉, 두 부등식 $f(x) \ge g(x)$, $g(x) \ge h(x)$의 해는 모든 실수이다. (가)

부등식 $f(x) \ge g(x)$에서

$x^2-2x+4 \ge -x+k$ $\quad\therefore\ x^2-x+4-k \ge 0$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-x+4-k \ge 0$을 만족시키려면 이차방정식 $x^2-x+4-k=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$D_1=(-1)^2-4(4-k) \le 0$ $\quad\therefore\ k \le \dfrac{15}{4}$ ……㉠ (나)

부등식 $g(x) \ge h(x)$에서

$-x+k \ge -x^2-4x-7$ $\quad\therefore\ x^2+3x+k+7 \ge 0$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+3x+k+7 \ge 0$을 만족시키려면 이차방정식 $x^2+3x+k+7=0$의 판별식을 D_2라 할 때,

$D_2=3^2-4(k+7) \le 0$ $\quad\therefore\ k \ge -\dfrac{19}{4}$ ……㉡ (다)

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{19}{4} \le k \le \dfrac{15}{4}$

따라서 정수 k는 $-4, -3, -2, \cdots, 3$의 8개이다. (라)

답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	두 부등식 $f(x) \ge g(x)$, $g(x) \ge h(x)$의 해를 확인한 경우	10%
(나)	모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \ge g(x)$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구한 경우	40%
(다)	모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x) \ge h(x)$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구한 경우	40%
(라)	(나), (다)를 이용하여 정수 k의 개수를 구한 경우	10%

14

이차부등식 $ax^2-4x+a-3<0$에서

$a=0$일 때는 이차부등식이 아니므로 고려하지 않는다.

(i) $a<0$일 때,

이차함수 $y=ax^2-4x+a-3$의 그래프는 위로 볼록하므로 이차부등식 $ax^2-4x+a-3<0$은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a>0$일 때,

이차함수 $y=ax^2-4x+a-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이차부등식 $ax^2-4x+a-3<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2-4x+a-3=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

즉, $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-a(a-3)>0$에서

$a^2-3a-4<0$, $(a+1)(a-4)<0$

$\therefore\ -1<a<4$

그런데 $a>0$이므로 $0<a<4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a<4$

답 $a<0$ 또는 $0<a<4$

15

이차부등식 $x^2-9<2k(x-5)$에서

$x^2-2kx+10k-9<0$

이차함수 $y=x^2-2kx+10k-9$의 그래프는 아래로 볼록하므로 이차부등식 $x^2-2kx+10k-9<0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2-2kx+10k-9=0$의 판별식을 D라 할 때, $D \le 0$이어야 한다.

즉, $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(10k-9) \le 0$에서

$k^2-10k+9 \le 0$, $(k-1)(k-9) \le 0$

$\therefore\ 1 \le k \le 9$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $1, 2, 3, \cdots, 9$의 9개이다.

답 9

16

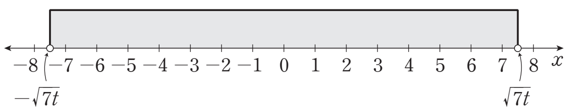
$k\geq 0$이면 이차부등식 $x^2+7k<0$의 해는 없다.

즉, $k<0$이므로 $k=-t\ (t>0)$로 놓으면

$x^2-7t<0$에서 $(x+\sqrt{7t})(x-\sqrt{7t})<0$

$\therefore\ -\sqrt{7t}<x<\sqrt{7t}$

이때 $-\sqrt{7t}<x<\sqrt{7t}$를 만족시키는 정수 x가 15개이려면 x의 값의 범위는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $7<\sqrt{7t}\leq 8$이어야 하므로

$49<7t\leq 64\qquad \therefore\ 7<t\leq \dfrac{64}{7}$

이때 $t=-k$이므로 $7<-k\leq \dfrac{64}{7}$에서

$-\dfrac{64}{7}\leq k<-7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 -9, -8이므로 그 합은

$-9+(-8)=-17$

답 -17

17

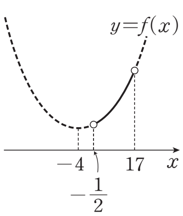
$2x^2-33x-17<0$에서

$(2x+1)(x-17)<0\qquad \therefore\ -\dfrac{1}{2}<x<17$

한편, $f(x)=x^2+8x+2+k^2$이라 하면

$f(x)=(x+4)^2+k^2-14$

즉, $-\dfrac{1}{2}<x<17$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $-\dfrac{1}{2}<x<17$에서 이차부등식 $x^2+8x+2+k^2\geq 0$이 항상 성립하므로 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0$이어야 한다.

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2+k^2$

$\qquad\qquad =k^2-\dfrac{7}{4}$

즉, $k^2-\dfrac{7}{4}\geq 0$에서 $\left(k+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(k-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\geq 0$

$\therefore\ k\leq -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k\geq \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

답 $k\leq -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k\geq \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

18

현재 음원의 한 달 이용권 가격을 a, 현재 이 이용권을 구매하는 회원 수를 b라 하면 한 달 수입은 ab이다.

이용권 가격을 $x\%$ 인상하여도 한 달 수입은 줄어들지 않아야 하므로

$a\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\times b\left(1-\dfrac{0.8x}{100}\right)\geq ab$

$\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{0.8x}{100}\right)\geq 1\ (\because\ a>0,\ b>0)$

$(100+x)(125-x)\geq 12500$

$x^2-25x\leq 0,\ x(x-25)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq x\leq 25$

따라서 x의 최댓값은 25이다.

답 25

3 연립이차부등식

기본 + 필수연습

본문 pp.215~218

36 (1) $3\leq x\leq 5$ (2) $-7\leq x<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $2<x\leq 8$

37 $\dfrac{3}{2}<k\leq \dfrac{13}{8}$ **38** $a\geq 0$

39 $0<a\leq 1$ **40** 2

41 $a>3$ **42** -3 **43** -4

44 (1) $-\dfrac{3}{2}<k\leq -1$ 또는 $k\geq 3$ (2) $k>\dfrac{7}{2}$

(3) $3\leq k<\dfrac{31}{5}$

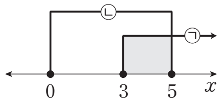
45 $-\dfrac{17}{5}<k<-\dfrac{13}{4}$

36

(1) $x-1\geq 2$에서 $x\geq 3$ ······㉠

$x(x-5)\leq 0$에서 $0\leq x\leq 5$ ······㉡

따라서 주어진 연립부등식의 해는



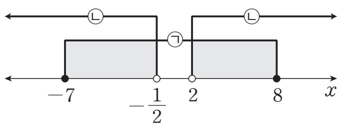
$3\leq x\leq 5$

(2) $x^2-x-56\leq 0$에서 $(x+7)(x-8)\leq 0$

$\therefore\ -7\leq x\leq 8$ ······㉠

$2x^2-3x-2>0$에서 $(2x+1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ ······㉡



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-7\leq x<-\frac{1}{2}$ 또는 $2<x\leq 8$

답 (1) $3\leq x\leq 5$

(2) $-7\leq x<-\frac{1}{2}$ 또는 $2<x\leq 8$

37

(i) 이차방정식 $x^2+2x+8k-12=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1^2-(8k-12)\geq 0$

$-8k+13\geq 0,\ 8k\leq 13$

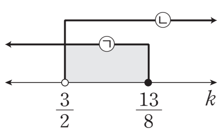
$\therefore\ k\leq\frac{13}{8}$ ······㉠

(ii) 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2<0,\ \alpha\beta=8k-12>0$

$8k>12 \qquad \therefore\ k>\frac{3}{2}$ ······㉡

(i), (ii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는



$\frac{3}{2}<k\leq\frac{13}{8}$

답 $\frac{3}{2}<k\leq\frac{13}{8}$

38

$x^2-8x+12\leq 0$에서 $(x-2)(x-6)\leq 0$

$\therefore\ 2\leq x\leq 6$ ······㉠

$x^2+(a-5)x+6-3a>0$에서

$(x-3)\{x-(2-a)\}>0$ ······㉡

(i) $2-a<3$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x<2-a$ 또는 $x>3$

(ii) $2-a=3$, 즉 $a=-1$일 때,

부등식 ㉡에서 $(x-3)^2>0$

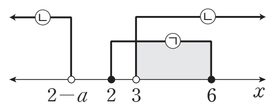
즉, 부등식 ㉡의 해는 $x\neq 3$인 모든 실수이다.

(iii) $2-a>3$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x<3$ 또는 $x>2-a$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $3<x\leq 6$이 되는 경우는 (i)이다.

이를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $2-a\leq 2$이어야 하므로

$a\geq 0$

답 $a\geq 0$

39

$x^2-x-12<0$에서 $(x+3)(x-4)<0$

$\therefore\ -3<x<4$ ······㉠

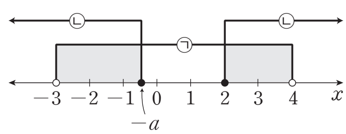
$x^2+(a-2)x-2a\geq 0$에서

$(x-2)\{x-(-a)\}\geq 0$ ······㉡

(i) $-a<2$, 즉 $a>-2$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x\leq -a$ 또는 $x\geq 2$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 4개가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $-1\leq -a<0$이어야 하므로

$0<a\leq 1$

(ii) $-a=2$, 즉 $a=-2$일 때,

부등식 ㉡의 해는 모든 실수이므로 연립부등식의 해는

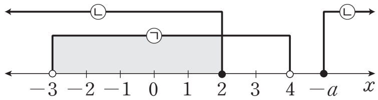
$-3<x<4$

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-a>2$, 즉 $a<-2$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x\le 2$ 또는 $x\ge -a$

이때 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $a<-2$인 a의 값에 관계없이 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 적어도 -2, -1, 0, 1, 2의 5개를 포함하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$0<a\le 1$

답 $0<a\le 1$

40

$|x-2|\le a$에서 $-a\le x-2\le a$

$\therefore\ 2-a\le x\le 2+a$ ……㉠

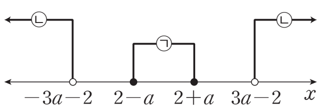
$x^2+4x-9a^2+4>0$에서

$x^2+4x-(3a+2)(3a-2)>0$

$\{x+(3a+2)\}\{x-(3a-2)\}>0$

$\therefore\ x<-3a-2$ 또는 $x>3a-2$ ($\because\ a>0$) ……㉡ (*)

이때 주어진 연립부등식의 해가 없으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



$-3a-2\le 2-a$에서 $a\ge -2$ ……㉢

$3a-2\ge 2+a$에서 $a\ge 2$ ……㉣

㉢, ㉣에서

$a\ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

답 2

보충 설명

(*)에서 $a>0$이면 $-3a<3a$

이 부등식의 양변에 -2를 더하면

$-3a-2<3a-2$

따라서 부등식 ㉡의 해는

$x<-3a-2$ 또는 $x>3a-2$

41

이차방정식 $x^2+(a^2-4a+3)x-a+2=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 두 근의 곱은 음수이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-a+2<0$ $\quad\therefore\ a>2$ ……㉠

또한, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근의 절댓값보다 크므로 두 근의 합은 음수이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

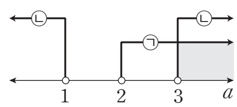
$\alpha+\beta=-(a^2-4a+3)<0$

$a^2-4a+3>0$, $(a-1)(a-3)>0$

$\therefore\ a<1$ 또는 $a>3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 실수 a의 값의 범위는

$a>3$



답 $a>3$

42

이차방정식 $x^2-2(k-1)x-2k+10=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

(i) $\dfrac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(-2k+10)\ge 0$

$k^2-9\ge 0$, $(k+3)(k-3)\ge 0$

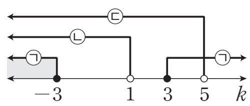
$\therefore\ k\le -3$ 또는 $k\ge 3$ ……㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(k-1)<0$

$\therefore\ k<1$ ……㉡

(iii) $\alpha\beta=-2k+10>0$

$\therefore k<5$ ……㉢



(i), (ii), (iii)에서 $k\le-3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

답 -3

43

이차방정식 $x^2-2mx-5-m=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(-5-m)=m^2+m+5$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$$ (i)

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 두 근 중 적어도 하나가 양수가 되는 경우는 모든 실수에서 두 근이 음수 또는 0이 되는 경우를 제외하면 된다.

이때 두 근이 음수 또는 0이 되는 경우는 근과 계수의 관계에 의하여

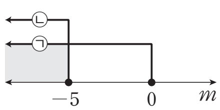
$\alpha+\beta=2m\le0$ (ii)

$\therefore m\le0$ ……㉠

$\alpha\beta=-5-m\ge0$ (iii)

$\therefore m\le-5$ ……㉡

㉠, ㉡에서 주어진 이차방정식의 두 근이 음수 또는 0이 되도록 하는 m의 값의 범위는



$m\le-5$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근 중 적어도 하나는 양수가 되도록 하는 m의 값의 범위는 $m>-5$이므로 조건을 만족시키는 정수 m의 최솟값은 -4이다.

답 -4

보충 설명

다음 경우를 고려하여 전체 범위에서 제외하면 된다.

두 근	판별식	두 근의 합	두 근의 곱
서로 다른 두 음근	$D>0$	$\alpha+\beta<0$	$\alpha\beta>0$
음근 (중근)	$D=0$	$\alpha+\beta<0$	$\alpha\beta>0$
0 (중근)	$D=0$	$\alpha+\beta=0$	$\alpha\beta=0$
음근과 0	$D>0$	$\alpha+\beta<0$	$\alpha\beta=0$

$\therefore$ (i) $D\ge0$　(ii) $\alpha+\beta\le0$　(iii) $\alpha\beta\ge0$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2mx-5-m=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(-5-m)=m^2+m+5$$

$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 두 근 중 적어도 하나는 양수가 되는 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 두 근이 모두 양수인 경우

$\alpha+\beta=2m>0$에서 $m>0$ ……㉢

$\alpha\beta=-5-m>0$에서 $m<-5$ ……㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 근 중 하나는 양수이고, 하나는 0인 경우

$\alpha+\beta=2m>0$에서 $m>0$ ……㉤

$\alpha\beta=-5-m=0$에서 $m=-5$ ……㉥

㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 두 근 중 하나는 양수이고, 하나는 음수인 경우

$\alpha\beta=-5-m<0$에서 $m>-5$

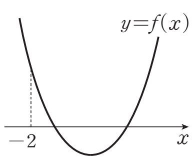
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는 $m>-5$이므로 구하는 정수 m의 최솟값은 -4이다.

44

이차방정식 $x^2-(k-1)x+1=0$에서

$f(x)=x^2-(k-1)x+1$이라 하고, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하자.

(1) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $D=\{-(k-1)\}^2-4\ge0$에서

$k^2-2k-3\ge0$, $(k+1)(k-3)\ge0$

$\therefore k\le-1$ 또는 $k\ge3$ ……㉠

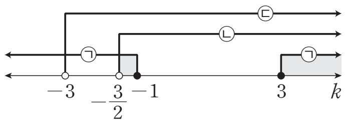
(ii) $f(-2)=4+2(k-1)+1>0$에서

$2k+3>0$　$\therefore k>-\frac{3}{2}$ ……㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

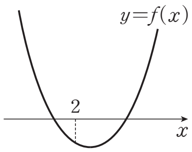
$x=\dfrac{k-1}{2}$이므로

$\dfrac{k-1}{2}>-2$에서 $k>-3$ ······㉢



(i), (ii), (iii)에서 $-\dfrac{3}{2}<k\le-1$ 또는 $k\ge3$

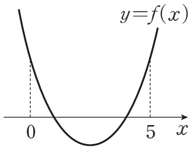
(2) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(2)=4-2(k-1)+1<0$에서

$-2k+7<0 \qquad \therefore k>\dfrac{7}{2}$

(3) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 5 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $D=\{-(k-1)\}^2-4\ge0$에서

$k\le-1$ 또는 $k\ge3$ ······㉠

(ii) $f(0)=1>0$이므로 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

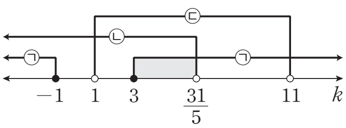
$f(5)=25-5(k-1)+1>0$에서

$31-5k>0 \qquad \therefore k<\dfrac{31}{5}$ ······㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{k-1}{2}$이므로

$0<\dfrac{k-1}{2}<5$에서 $1<k<11$ ······㉢



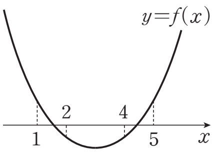
(i), (ii), (iii)에서 $3\le k<\dfrac{31}{5}$

답 (1) $-\dfrac{3}{2}<k\le-1$ 또는 $k\ge3$

(2) $k>\dfrac{7}{2}$ (3) $3\le k<\dfrac{31}{5}$

45

이차방정식 $x^2+2kx+9=0$에서 $f(x)=x^2+2kx+9$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 한 근은 1과 2 사이에, 다른 한 근은 4와 5 사이에 존재하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



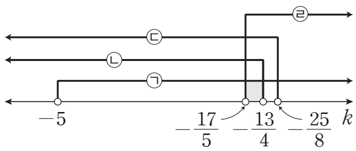
즉, $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(4)<0$, $f(5)>0$이어야 하므로

$f(1)=10+2k>0 \qquad \therefore k>-5$ ······㉠

$f(2)=13+4k<0 \qquad \therefore k<-\dfrac{13}{4}$ ······㉡

$f(4)=25+8k<0 \qquad \therefore k<-\dfrac{25}{8}$ ······㉢

$f(5)=34+10k>0 \qquad \therefore k>-\dfrac{17}{5}$ ······㉣



㉠~㉣에서 실수 k의 값의 범위는

$-\dfrac{17}{5}<k<-\dfrac{13}{4}$

답 $-\dfrac{17}{5}<k<-\dfrac{13}{4}$

STEP 1 **개념 마무리** 본문 p.219

19 -4	**20** 5	**21** 2	**22** 7
23 -2	**24** ⑤		

19

$(x-2a)^2<4a^2$에서 $x^2-4ax+4a^2<4a^2$

$x^2-4ax<0$, $x(x-4a)<0$

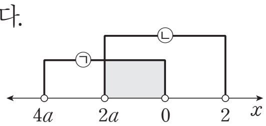
$\therefore 4a<x<0$ ($\because a<0$) ······㉠

$x^2+4a<2(a+1)x$에서

$x^2-2(a+1)x+4a<0$, $(x-2)(x-2a)<0$

$\therefore 2a<x<2$ ($\because a<0$) ······㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



즉, 주어진 연립부등식의 해는 $2a<x<0$이고, 이것은 $b-2<x<b+2$와 일치하므로

$b-2=2a$, $b+2=0$

$\therefore$ $a=-2$, $b=-2$

$\therefore$ $a+b=-4$

답 -4

20

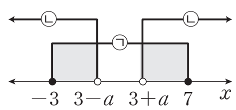
$x^2-4x-21\le 0$에서 $(x+3)(x-7)\le 0$

$\therefore$ $-3\le x\le 7$ ……㉠

$|x-3|>a$에서 $x-3<-a$ 또는 $x-3>a$ ($\because$ a는 자연수)

$\therefore$ $x<3-a$ 또는 $x>3+a$ ……㉡

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 오른쪽 그림과 같이 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재해야 한다.



a는 자연수이므로 $a>0$ $\quad\therefore 3-a<3$

$-3<3-a<3$ 또는 $3<3+a<7$

a는 자연수이므로 $a>0$ $\quad\therefore 3+a>3$

$0<a<6$ 또는 $0<a<4$ $\qquad\therefore$ $0<a<6$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

21

$x^2-2x-8>0$에서 $(x+2)(x-4)>0$

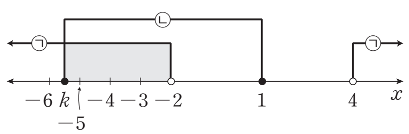
$\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>4$ ……㉠

$x^2-(k+1)x+k\le 0$에서

$(x-1)(x-k)\le 0$ ……㉡

(i) $k<1$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $k\le x\le 1$이고 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x는 -3, -4, -5이어야 한다.



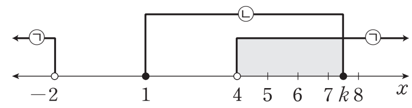
$\therefore$ $-6<k\le -5$

(ii) $k=1$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x=1$이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x는 없다.

(iii) $k>1$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $1\le x\le k$이고 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x는 5, 6, 7이어야 한다.



$\therefore$ $7\le k<8$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$-6<k\le -5$ 또는 $7\le k<8$이다.

따라서 정수 k의 값은 -5, 7이므로 구하는 합은

$-5+7=2$

답 2

22

이차방정식 $x^2+2kx-k+6=0$의 두 실근의 부호가 서로 다르므로 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱)$=-k+6<0$

따라서 $k>6$이므로 자연수 k의 최솟값은 7이다.

답 7

보충 설명

이차방정식 $x^2+2kx-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)=k^2+k-6=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

즉, $k>6$일 때 $\frac{D}{4}>36>0$

따라서 주어진 이차방정식의 두 근의 부호가 서로 다를 때, 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D>0$임을 확인할 수 있다. 이와 같이 두 실근의 부호가 서로 다른 문제에서는 판별식이 양수임을 따로 확인하지 않는다.

23

이차방정식 $x^2-2mx-3m-8=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(-3m-8)=m^2+3m+8$$

$$=\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, 두 근 중 적어도 하나가 양수가 되는 경우는 모든 실수에서 두 근이 음수 또는 0인 경우를 제외하면 된다.

이때 두 근이 음수 또는 0이 되는 경우는 근과 계수의 관계에 의하여

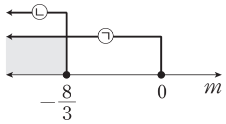
$\alpha+\beta=2m\le 0$

$\therefore\ m\le 0$ ……㉠

$\alpha\beta=-3m-8\ge 0$

$\therefore\ m\le -\frac{8}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 주어진 이차방정식의 두 근이 음수 또는 0이 되도록 하는 m의 값의 범위는 $m\le -\frac{8}{3}$



따라서 주어진 이차방정식의 두 실근 중 적어도 하나는 양수가 되도록 하는 m의 값의 범위는 $m>-\frac{8}{3}$이므로 정수 m의 최솟값은 -2이다.

답 -2

다른 풀이

이차방정식 $x^2-2mx-3m-8=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(-3m-8)$$
$$=m^2+3m+8$$
$$=\left(m+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$$

이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
즉, 두 근 중 적어도 하나는 양수가 되는 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 두 근이 모두 양수인 경우

$\alpha+\beta=2m>0$에서 $m>0$ ……㉢

$\alpha\beta=-3m-8>0$에서 $m<-\frac{8}{3}$ ……㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 근 중 하나는 양수이고, 하나는 0인 경우

$\alpha+\beta=2m>0$에서 $m>0$ ……㉤

$\alpha\beta=-3m-8=0$에서 $m=-\frac{8}{3}$ ……㉥

㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 두 근 중 하나는 양수이고, 하나는 음수인 경우

$\alpha\beta=-3m-8<0$에서 $m>-\frac{8}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는 $m>-\frac{8}{3}$이므로 구하는 정수 m의 최솟값은 -2이다.

24

이차방정식 $ax^2-4x+a=0$에서 $f(x)=ax^2-4x+a$라 하면 $0<\alpha<\beta<2$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 모두 0과 2 사이에 있어야 한다.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a^2>0$, $a^2-4<0$

$(a+2)(a-2)<0$ $\therefore\ -2<a<2$ ……㉠

(ii) $f(0)=a$, $f(2)=4a-8+a=5a-8$이고,

$f(0)f(2)>0$이므로

$f(0)f(2)=a(5a-8)>0$

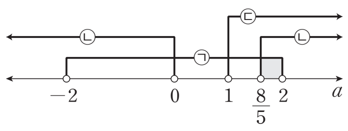
$\therefore\ a<0$ 또는 $a>\frac{8}{5}$ ……㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{2}{a}$이므로

$0<\frac{2}{a}<2$

이때 $0<\frac{2}{a}$에서 $a>0$이므로

$\frac{2}{a}<2$에서 $2<2a$ $\therefore\ a>1$ ……㉢



(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $\frac{8}{5}<a<2$

답 ⑤

보충 설명

이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 위치를 생각할 때, 경계에서의 함숫값의 부호는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록한지, 위로 볼록한지를 생각해서 따져야 한다.
그런데 풀이의 (ii)에서 $f(x)=ax^2-4x+a$의 x^2의 계수 a의 부호가 결정된 것이 아니므로

(1) $a>0$인 경우에는 $f(0)>0$, $f(2)>0$

(2) $a<0$인 경우에는 $f(0)<0$, $f(2)<0$

를 모두 고려해야 한다.
따라서 풀이의 (ii)에서는 (1), (2)를 한꺼번에 묶어서 동시에 만족시키도록 $f(0)f(2)>0$을 적용한 것이다.
만약 풀이 과정에서 $a>0$임을 미리 알아냈다면 (1)인 경우만 적용해도 된다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.220

1 -6	**2** 13	**3** $-\frac{21}{4}$	**4** 14
5 $k>3$	**6** -32		

1

$x-2y-4=0$에서 $x=2y+4$

이것을 부등식 $2x-3<y+5\le 4x+11$에 대입하면

$2(2y+4)-3<y+5\le 4(2y+4)+11$

$\therefore \begin{cases} 2(2y+4)-3<y+5 \\ y+5\le 4(2y+4)+11 \end{cases}$

$2(2y+4)-3<y+5$에서 $4y+5<y+5$

$\therefore y<0$ ……㉠

$y+5\le 4(2y+4)+11$에서 $y+5\le 8y+27$

$\therefore y\ge -\frac{22}{7}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{22}{7}\le y<0$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 y의 값은 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$

답 -6

2

$|x-5|$, $2x+6$, $3x+12$가 각각 삼각형의 세 변의 길이이므로

$|x-5|>0$, $2x+6>0$, $3x+12>0$

$|x-5|>0$에서 $x\ne 5$

$2x+6>0$에서 $x>-3$

$3x+12>0$에서 $x>-4$

즉, $-3<x<5$ 또는 $x>5$

또한, 삼각형의 결정 조건에 의하여

$3x+12-(2x+6)<|x-5|<3x+12+2x+6$이므로

$-3<x<5$ 또는 $x>5$에서 $3x+12>2x+6$이다.

$x+6<|x-5|<5x+18$

(i) $-3<x<5$일 때, $x+6<-x+5<5x+18$

$x+6<-x+5$에서 $2x<-1$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ ……㉠

$-x+5<5x+18$에서

$6x>-13$ $\therefore x>-\frac{13}{6}$ ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-\frac{13}{6}<x<-\frac{1}{2}$

이때 $-3<x<5$이므로 $-\frac{13}{6}<x<-\frac{1}{2}$

(ii) $x>5$일 때, $x+6<x-5<5x+18$

$x+6<x-5$에서 $0\times x<-11$이므로 이 부등식의 해는 없다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-\frac{13}{6}<x<-\frac{1}{2}$이므로

$a=-\frac{13}{6}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore 12ab=12\times\left(-\frac{13}{6}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$

답 13

보충 설명

a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(1) $a>0$, $b>0$, $c>0$

(2) $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$

를 만족시켜야 한다.

이때 $a>b$임이 분명한 경우에는 (2)에서 $b<a+c$는 따지지 않아도 된다. 또한, $a<b+c$에서 $a-b<c$이므로 (2)의 세 부등식 대신 $a-b<c<a+b$를 이용할 수 있다.

3

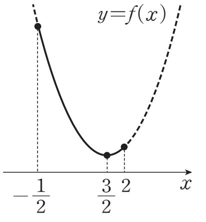
$3x-2+a\le x^2\le -2x+3+b$에서

(i) $3x-2+a\le x^2$, 즉 $x^2-3x+2-a\ge 0$일 때,

$f(x)=x^2-3x+2-a$라 하면

$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-a$

$-\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값을 갖는다.



즉, $-\frac{1}{2} \le x \le 2$에서 이차부등식 $x^2-3x-2-a \ge 0$이 항상 성립하려면 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}-a \ge 0$이어야 하므로

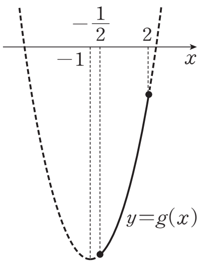
$a \le -\frac{1}{4}$

(ii) $x^2 \le -2x+3+b$, 즉 $x^2+2x-3-b \le 0$일 때,

$g(x)=x^2+2x-3-b$라 하면

$g(x)=(x+1)^2-4-b$

$-\frac{1}{2} \le x \le 2$에서 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.



즉, $-\frac{1}{2} \le x \le 2$에서 이차부등식 $x^2+2x-3-b \le 0$이 항상 성립하려면 $g(2)=5-b \le 0$이어야 하므로

$b \ge 5$

(i), (ii)에서 a의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$, b의 최솟값은 5이므로

$a-b$의 최댓값은

$-\frac{1}{4}-5=-\frac{21}{4}$

답 $-\frac{21}{4}$

4

$(x^2+kx+2)(x^2+kx+6)-5=0$에서

$x^2+kx=X$로 놓으면

$(X+2)(X+6)-5=0$, $X^2+8X+7=0$

$(X+1)(X+7)=0$

$\therefore (x^2+kx+1)(x^2+kx+7)=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+1=0$, $x^2+kx+7=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 할 때, 사차방정식 $(x^2+kx+1)(x^2+kx+7)=0$이 실근과 허근을 모두 가지려면 $D_1<0$, $D_2 \ge 0$ 또는 $D_1 \ge 0$, $D_2<0$이어야 한다.

(i) $D_1<0$, $D_2 \ge 0$일 때,

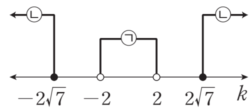
$D_1=k^2-4<0$에서 $(k+2)(k-2)<0$

$\therefore -2<k<2$ ⋯⋯㉠

또한, $D_2=k^2-28 \ge 0$에서 $(k+2\sqrt{7})(k-2\sqrt{7}) \ge 0$

$\therefore k \le -2\sqrt{7}$ 또는 $k \ge 2\sqrt{7}$ ⋯⋯㉡

이때 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.



(ii) $D_1 \ge 0$, $D_2<0$일 때,

$D_1=k^2-4 \ge 0$에서 $(k+2)(k-2) \ge 0$

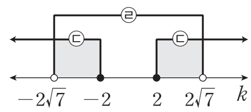
$\therefore k \le -2$ 또는 $k \ge 2$ ⋯⋯㉢

또한, $D_2=k^2-28<0$에서 $(k+2\sqrt{7})(k-2\sqrt{7})<0$

$\therefore -2\sqrt{7}<k<2\sqrt{7}$ ⋯⋯㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-2\sqrt{7}<k \le -2$ 또는 $2 \le k<2\sqrt{7}$



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-2\sqrt{7}<k \le -2$ 또는 $2 \le k<2\sqrt{7}$

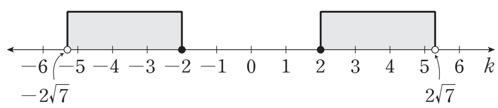
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$2+3+4+5=14$

답 14

보충 설명

조건을 만족시키는 k의 값의 범위를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



5

$f(x)=x^3+(1-2k)x^2-(k+3)x+k-3$이라 하면

$f(-1)=-1+(1-2k)+(k+3)+k-3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1-2k & -(k+3) & k-3 \\ & & -1 & 2k & -k+3 \\ \hline & 1 & -2k & k-3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-2kx+k-3)$

삼차방정식 $f(x)=0$이 음수인 근 하나와 양수인 서로 다른 두 근을 가지려면 이차방정식 $x^2-2kx+k-3=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k-3=0$의 두 근을 α, β라 하고, 판별식을 D라 하면

$\alpha>0$, $\beta>0$이고, $\alpha \ne \beta$이므로
$D>0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(ⅰ) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(k-3)=k^2-k+3$

$=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

이므로 모든 실수 k에 대하여 이차방정식

$x^2-2kx+k-3=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ⅱ) $\alpha+\beta=2k>0$에서 $k>0$

(ⅲ) $\alpha\beta=k-3>0$에서 $k>3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 실수 k의 값의 범위는 $k>3$

답 $k>3$

6

$f(x)=x^3+7x^2+(k+9)x+k+3$이라 하면

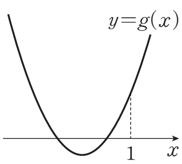
$f(-1)=-1+7-(k+9)+k+3=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 7 & k+9 & k+3 \\ & & -1 & -6 & -k-3 \\ \hline & 1 & 6 & k+3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+6x+k+3)$

$x=-1$은 삼차방정식 $f(x)=0$의 근이므로 방정식 $f(x)=0$이 1보다 작은 서로 다른 세 근을 가지려면 이차방정식 $x^2+6x+k+3=0$은 -1이 아닌 1보다 작은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^2+6x+k+3$이라 하고, 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $\frac{D}{4}=3^2-(k+3)>0$ $\quad\therefore k<6$

(ⅱ) $g(1)=1+6+k+3>0$ $\quad\therefore k>-10$

(ⅲ) $g(-1)=1-6+k+3\neq0$ $\quad\therefore k\neq2$

(ⅳ) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-3$이므로 $-3<1$에서 모든 실수 k에 대하여 성립한다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 k의 값의 범위는 $-10<k<2$ 또는 $2<k<6$

따라서 정수 k의 값은 $-9, -8, -7, \cdots, 1, 3, 4, 5$이므로 구하는 합은

$-9+(-8)+(-7)+\cdots+1+3+4+5$

$=-9+(-8)+(-7)+(-6)+(-2)=-32$

답 -32

Ⅲ. 경우의 수

09. 경우의 수

1 경우의 수

기본+필수연습 본문 pp.224~233

01 9	**02** 97	**03** 9	**04** 25
05 (1) 19 (2) 14		**06** 20	**07** 30
08 (1) 12 (2) 16		**09** 10	
10 (1) 364 (2) 13		**11** 81	
12 (1) 223 (2) 127		**13** 46	
14 (1) 15 (2) 12 (3) 16		**15** 48	**16** 29
17 (1) 11 (2) 69		**18** 4	**19** 18
20 44	**21** 16	**22** 540	**23** 780

01

모자 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 5

가방 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 4

따라서 모자 또는 가방 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는

$5+4=9$

답 9

02

10 이하의 두 자연수 x, y에 대하여 순서쌍 (x, y)의 개수는

$10\times10=100$

이때 $x+y<4$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $x=1$일 때,

$1+y<4$ $\quad\therefore y<3$

즉, 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$의 2개

(ⅱ) $x=2$일 때,

$2+y<4$ $\quad\therefore y<2$

즉, 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$의 1개

(ⅲ) $x\geq3$일 때,

$x+y<4$를 만족시키는 자연수 y는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $x+y<4$를 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 $2+1=3$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$\underline{100-3}=97$

=(전체 경우의 수)−($x+y<4$인 경우의 수)

답 97

03

하나의 주사위를 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지

이때 서로 다른 주사위 두 개를 동시에 던져 나온 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 두 주사위 모두 홀수의 눈이 나와야 하므로 구하는 경우의 수는

$3\times3=9$(가지)

답 9

04

두 지점 A, B 사이를 버스 또는 지하철을 이용하여 이동하는 경우의 수는

$2+3=5$(가지)

즉, A지점에서 출발하여 B지점까지 가는 경우의 수와 B지점에서 출발하여 A지점으로 다시 돌아오는 경우의 수가 각각 5가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times5=25$(가지)

답 25

05

(1) (i) 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우는 합이 3, 6, 9, 12인 경우이다.

눈의 수의 합이 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지

눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

눈의 수의 합이 9인 경우는

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

따라서 눈의 수의 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

(ii) 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우는 합이 5, 10인 경우이다.

눈의 수의 합이 5인 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

눈의 수의 합이 10인 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 눈의 수의 합이 5의 배수인 경우의 수는

$4+3=7$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$12+7=19$

(2) (i) 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는 합이 4, 8, 12인 경우이다.

눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

따라서 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우의 수는

$3+5+1=9$

(ii) 눈의 수의 합이 6의 배수인 경우는 합이 6, 12인 경우이다.

눈의 수의 합이 6인 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

눈의 수의 합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지

따라서 눈의 수의 합이 6의 배수인 경우의 수는

$5+1=6$

(iii) 4와 6의 최소공배수는 12이므로 나오는 눈의 수의 합이 4의 배수이면서 6의 배수, 즉 12의 배수인 경우는 (6, 6)의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$9+6-1=14$

답 (1) 19 (2) 14

06

50을 소인수분해하면 $50=2\times5^2$이므로 50과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

1부터 50까지의 자연수 중에서 2의 배수의 개수는 25, 5의 배수의 개수는 10, 2와 5의 최소공배수인 10의 배수의 개수는 5이므로 2의 배수 또는 5의 배수인 수의 개수는

$25+10-5=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$\underbrace{50-30}_{=(\text{전체 경우의 수})-(2\text{의 배수 또는 }5\text{의 배수})}=20$

답 20

07

주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수의 차가 3 이하가 되는 경우의 수는

(전체 경우의 수)$-$(눈의 수의 차가 4 또는 5인 경우의 수)

로 구할 수 있다.

이때 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

처음 나온 눈의 수와 두 번째 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내면

(i) $|a-b|=4$인 경우

$(1, 5)$, $(5, 1)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$의 4가지

(ii) $|a-b|=5$인 경우

$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 눈의 수의 차가 4 또는 5인 경우의 수는 $4+2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$36-6=30$

답 30

08

(1) $2x+4y+z=10$에서

x, y, z는 음이 아닌 정수이므로

$x\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$

즉, $4y\leq2x+4y+z=10$에서

$4y\leq10$ $\quad\therefore y=0, 1, 2$

(i) $y=0$일 때,

$2x+z=10$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 10)$, $(1, 8)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 0)$의 6개

(ii) $y=1$일 때,

$2x+z=6$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 6)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$의 4개

(iii) $y=2$일 때,

$2x+z=2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(1, 0)$의 2개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$6+4+2=12$

(2) $3x+2y<6-z$에서 $3x+2y+z<6$

이때 x, y, z는 음이 아닌 정수이므로

$x\geq0$, $y\geq0$, $z\geq0$

즉, $3x\leq3x+2y+z<6$에서

$3x<6$ $\quad\therefore x=0, 1$

(i) $x=0$일 때, $2y+z<6$이므로

$2y+z=5$를 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 5)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$의 3개

$2y+z=4$를 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$의 3개

$2y+z=3$을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 3)$, $(1, 1)$의 2개

$2y+z=2$를 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 2)$, $(1, 0)$의 2개

$2y+z=1$을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 1)$의 1개

$2y+z=0$을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 0)$의 1개

따라서 순서쌍 $(0, y, z)$의 개수는

$3+3+2+2+1+1=12$

(ii) $x=1$일 때, $2y+z<3$이므로

$2y+z=2$를 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 2)$, $(1, 0)$의 2개

$2y+z=1$을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 1)$의 1개

$2y+z=0$을 만족시키는 순서쌍 (y, z)는

$(0, 0)$의 1개

따라서 순서쌍 $(1, y, z)$의 개수는

$2+1+1=4$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$12+4=16$

답 (1) 12 (2) 16

09

이차함수 $y=ax^2+bx+2$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+2=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 이차방정식 $ax^2+bx+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-8a\geq0$ $\quad\therefore b^2\geq8a$

(i) $a=1$일 때, $b^2\geq8$이므로 이것을 만족시키는 b의 값은

3, 4, 5, 6의 4개

(ii) $a=2$일 때, $b^2\geq16$이므로 이것을 만족시키는 b의 값은 4, 5, 6의 3개
(iii) $a=3$일 때, $b^2\geq24$이므로 이것을 만족시키는 b의 값은 5, 6의 2개
(iv) $a=4$일 때, $b^2\geq32$이므로 이것을 만족시키는 b의 값은 6의 1개
(v) $a\geq5$일 때, $b^2\geq40$이므로 이것을 만족시키는 b의 값은 없다.
(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는
$4+3+2+1=10$

답 10

보충 설명

이차함수 $y=ax^2+bx+2$의 그래프가 x축과 적어도 한 점에서 만나려면 접하거나 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $ax^2+bx+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq0$이어야 한다.

10

(1) 각 상자에는 홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 카드가 5장, 짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 카드가 4장 들어 있다.
서로 다른 3개의 상자를 각각 A, B, C라 하면 각 상자에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.
(i) 세 상자 A, B, C에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 각각 홀수, 홀수, 짝수인 경우의 수는
$5\times5\times4=100$
(ii) 세 상자 A, B, C에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 각각 홀수, 짝수, 홀수인 경우의 수는
$5\times4\times5=100$
(iii) 세 상자 A, B, C에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 각각 짝수, 홀수, 홀수인 경우의 수는
$4\times5\times5=100$
(iv) 세 상자 A, B, C에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 각각 짝수, 짝수, 짝수인 경우의 수는
$4\times4\times4=64$
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$100+100+100+64=364$
(2) 주어진 다항식에서 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$이고, $p+q+r$과 $x^2-2xy+y^2$은 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 두 다항식을 곱하면 동류항이 생기지 않는다.
따라서 $(x-y)^2(p+q+r)$을 전개하였을 때, 서로 다른 항의 개수는 $3\times3=9$
또한, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$이므로 $(a-b)^3$을 전개하였을 때, 서로 다른 항의 개수는 4
이때 $(x-y)^2(p+q+r)$과 $(a-b)^3$의 전개식의 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 두 다항식의 뺄셈에서도 서로 다른 항의 개수는 변하지 않는다.
따라서 주어진 식을 전개하였을 때, 서로 다른 항의 개수는
$9+4=13$

답 (1) 364 (2) 13

보충 설명

(1) 세 상자 A, B, C에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수 또는 짝수인지에 따라 카드에 적혀 있는 세 수의 합이 홀수인지 짝수인지를 다음 표에서 확인할 수 있다.

	A	B	C	합
	홀	홀	홀	홀
(i) →	홀	홀	짝	짝
(ii) →	홀	짝	홀	짝
	홀	짝	짝	홀
(iii) →	짝	홀	홀	짝
	짝	홀	짝	홀
	짝	짝	홀	홀
(iv) →	짝	짝	짝	짝

11

주사위를 던져 나올 수 있는 수 중에서 홀수는 1, 3, 5의 3개, 짝수는 2, 4, 6의 3개이다.
a, b, c의 값이 각각 홀수 또는 짝수인지 따라 $a+b+c+abc$의 값이 홀수인지 짝수인지를 다음 표에서 확인할 수 있다.

	a	b	c	abc	$a+b+c+abc$
	홀	홀	홀	홀	짝
	홀	홀	짝	짝	짝
	홀	짝	홀	짝	짝
(i) →	홀	짝	짝	짝	홀
	짝	홀	홀	짝	짝
(ii) →	짝	홀	짝	짝	홀
(iii) →	짝	짝	홀	짝	홀
	짝	짝	짝	짝	짝

(ⅰ) a, b, c가 각각 홀수, 짝수, 짝수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

(ⅱ) a, b, c가 각각 짝수, 홀수, 짝수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

(ⅲ) a, b, c가 각각 짝수, 짝수, 홀수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$27+27+27=81$

답 81

12

(1) 오만 원짜리 지폐 3장으로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

만 원짜리 지폐 1장으로 지불하는 방법은

0장, 1장의 2가지

오천 원짜리 지폐 3장으로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

천 원짜리 지폐 6장으로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, …, 6장의 7가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 지불 방법의 수는

$4\times2\times4\times7-1=223$

(2) 오천 원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액은 만 원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 같고, 천 원짜리 지폐 5장으로 지불하는 금액은 오천 원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 같다.

즉, 만 원짜리 지폐 1장을 오천 원짜리 지폐 2장으로 바꾼 후, 오천 원짜리 지폐 5장을 천 원짜리 지폐 25장으로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 오만 원짜리 지폐 3장과 천 원짜리 지폐 $\underbrace{31}_{=25+6}$장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

오만 원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50000원, 100000원, 150000원의 4가지

천 원짜리 지폐 31장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, …, 31000원의 32가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 지불 금액의 수는

$4\times32-1=127$

답 (1) 223 (2) 127

13

100원짜리 동전 6개로 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, …, 6개의 7가지

500원짜리 동전 a개로 지불하는 방법은 $(a+1)$가지

1000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$7\times(a+1)\times3-1=104$

$21(a+1)=105$, $a+1=5$

$\therefore a=4$

따라서 500원짜리 동전은 4개 있다.

이때 500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액은 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 같고, 100원짜리 동전 5개로 지불하는 금액은 500원짜리 동전 1개로 지불하는 금액과 같다.

그러므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾼 후, 500원짜리 동전 8개를 100원짜리 동전 40개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 $\underbrace{46}_{=40+6}$개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

100원짜리 동전 46개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, …, 4600원의 47가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 지불 금액의 수는

$47-1=46$

답 46

14

(1) 2025를 소인수분해하면 $2025=3^4\times5^2$

따라서 2025의 양의 약수의 개수는

$(4+1)\times(2+1)=5\times3=15$

(2) 336을 소인수분해하면 $336=2^4\times3\times7$

336의 양의 약수 중 4의 배수의 개수는 $2^2\times3\times7$의 양의 약수의 개수와 같으므로

$2^2\times3\times7$의 양의 약수에 2^2을 곱하면 4의 배수이다.

$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=3\times2\times2=12$

(3) 360과 840을 각각 소인수분해하면

$360=2^3\times3^2\times5$, $840=2^3\times3\times5\times7$

이때 두 수의 양의 공약수의 개수는 두 수의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 360과 840의 최대공약수는 $2^3\times3\times5$이므로 구하는 양의 공약수의 개수는

$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=4\times2\times2=16$

답 (1) 15 (2) 12 (3) 16

15

$10=10\times1=(9+1)\times(0+1)$ 또는

$10=5\times2=(4+1)\times(1+1)$이므로

양의 약수의 개수가 10인 자연수를 N이라 하면

$N=a^9$ 또는 $N=b^4c$ (a, b, c는 소수, $b\neq c$) 꼴이다.

이를 만족시키는 자연수 중에서 가장 작은 자연수는 각각

$2^9=512$, $2^4\times3=48$

따라서 구하는 가장 작은 자연수는 48이다.

답 48

16

$18=2\times3^2$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $p=2$일 때,

$18p=2^2\times3^2$이므로 $18p$의 양의 약수의 개수는

$f(2)=(2+1)\times(2+1)=3\times3=9$

(ii) $p=3$일 때,

$18p=2\times3^3$이므로 $18p$의 양의 약수의 개수는

$f(3)=(1+1)\times(3+1)=2\times4=8$

(iii) $p\neq2$, $p\neq3$일 때,

$18p=2\times3^2\times p$이므로 $18p$의 양의 약수의 개수는

$f(p)=(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=2\times3\times2=12$

(i), (ii), (iii)에서 서로 다른 $f(p)$의 값은 9, 8, 12이므로 그 합은

$9+8+12=29$

답 29

17

(1) A도시에서 D도시로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → D로 가는 경우의 수는 1

(ii) A → B → D로 가는 경우의 수는 $3\times2=6$

(iii) A → C → D로 가는 경우의 수는 $2\times2=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+4=11$

(2) 같은 도시는 두 번 이상 지나지 않고 A도시에서 D도시를 거쳐 다시 A도시로 돌아오는 경우는 다음과 같다.

(i) A → B → D → A로 가는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

(ii) A → B → D → C → A로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2\times2=24$

(iii) A → C → D → A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times1=4$

(iv) A → C → D → B → A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times2\times3=24$

(v) A → D → B → A로 가는 경우의 수는

$1\times2\times3=6$

(vi) A → D → C → A로 가는 경우의 수는

$1\times2\times2=4$

(vii) A → D → A로 가는 경우의 수는 1

(i) ~ (vii)에서 구하는 경우의 수는

$6+24+4+24+6+4+1=69$

답 (1) 11 (2) 69

18

B지점과 C지점을 직접 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면 A지점에서 D지점으로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A → D로 가는 경우의 수는 2

(ii) A → B → D로 가는 경우의 수는 $3\times2=6$

(iii) A → C → D로 가는 경우의 수는 $2\times4=8$

(iv) A → B → C → D로 가는 경우의 수는

$3\times x\times4=12x$

(v) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$2\times x\times2=4x$

(i) ~ (v)에서 A지점에서 D지점으로 가는 경우의 수는

$2+6+8+12x+4x=16+16x$

즉, $16+16x=80$에서 $16x=64$

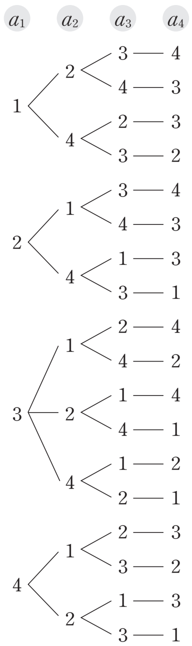
$\therefore\ x=4$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

답 4

19

$a_1=1$, $a_1=2$, $a_1=3$, $a_1=4$인 각 경우에 대하여 $a_2 \neq 3$을 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는

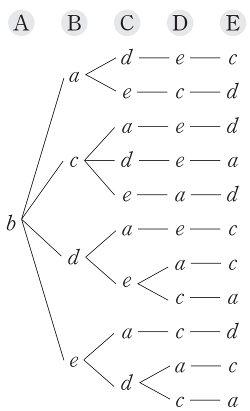
$4+4+6+4=18$

답 18

20

5명의 회원을 A, B, C, D, E라 하고 각자 가져온 책을 순서대로 a, b, c, d, e라 하자.

A가 책 b를 가져가는 경우, 나머지 네 명도 자신이 가져오지 않은 책으로 나누어 갖는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 즉, A가 책 b를 가져가는 경우의 수는 11이다.



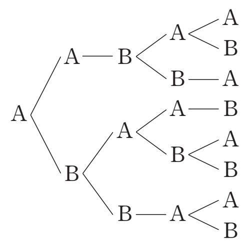
이때 A가 책 c, d, e를 가져가는 경우에 대하여도 각각 같은 경우의 수가 나오므로 구하는 경우의 수는

$11+11+11+11=44$

답 44

21

두 문자 A, B가 하나씩 적힌 카드를 뽑아 일렬로 나열할 때, 맨 앞에 A가 적힌 카드를 나열하면서 같은 문자가 연속해서 3번 이상 나오지 않도록 나열하는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



이 경우의 수는 8이고 맨 앞에 B가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수도 8이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$8+8=16$

답 16

22

가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역이 D이므로 D부터 칠한다.

D에 칠할 수 있는 색은 5가지

A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times3\times3=540$

답 540

다른 풀이

(i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ii) A와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

(iii) B와 C에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

(iv) C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

(v) A와 E, B와 C에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3=60$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$120+120+120+120+60=540$

23

인접하지 않는 두 영역 A, C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각해야 한다.

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A(C)에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

$\therefore 5\times4\times4\times3=240$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

$\therefore 5\times4\times3\times3\times3=540$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$240+540=780$

답 780

다른 풀이

사용하는 색의 개수에 따라 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 5가지 색을 모두 사용하는 경우

모두 다른 색을 칠해야 하므로 이 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ii) 4가지 색을 사용하는 경우

인접하지 않은 A와 C, B와 D, B와 E, C와 E 중 한 가지 경우만 같은 색을 칠하고 나머지는 모두 다른 색을 칠해야 한다.

① A와 C에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

② B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

③ B와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

④ C와 E에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2=120$

따라서 4가지 색을 이용하여 칠하는 경우의 수는

$120+120+120+120=480$

(iii) 3가지 색을 사용하는 경우

인접하지 않은 두 영역 중 두 가지 경우에 같은 색을 칠해야 한다.

① A와 C, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3=60$

② A와 C, B와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3=60$

③ B와 D, C와 E에 각각 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3=60$

따라서 3가지 색을 이용하여 칠하는 방법의 수는

$60+60+60=180$

(i), (ii), (iii)에서 $120+480+180=780$

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.234~235

01 53	**02** 90	**03** 8	**04** 176
05 154	**06** 22	**07** 63	**08** 8
09 38	**10** 20	**11** 30	**12** 1300

01

$\frac{N}{15}=\frac{N}{3\times5}$이므로 $\frac{N}{15}$이 기약분수이려면 N은 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 자연수이어야 한다.

100 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 33, 5의 배수의 개수는 20, 3과 5의 최소공배수인 15의 배수의 개수는 6이므로 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수 또는 5의 배수인 수의 개수는

$33+20-6=47$

따라서 구하는 자연수 N의 개수는

$100-47=53$

답 53

02

1000 이상 9999 이하의 자연수 중에서 좌우 대칭인 수의 개수는 10 이상 99 이하의 자연수의 개수와 같다.

따라서 구하는 수의 개수는

$99-9=90$

답 90

보충 설명

10 이상 99 이하의 자연수의 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 이용하여 십의 자리의 숫자와 백의 자리의 숫자가 같고, 일의 자리의 숫자와 천의 자리의 숫자가 같은 1000 이상 9999 이하의 좌우 대칭인 자연수를 만들 수 있다.

다른 풀이

0 또는 한 자리의 자연수 a, b에 대하여 좌우 대칭인 네 자리 수는 $abba$와 같이 나타낼 수 있다.

이때 $abba$가 1000 이상 9999 이하의 수이므로 $a\neq0$이다.

즉, a가 될 수 있는 수는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이고, b가 될 수 있는 수는 0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10개이므로 구하는 좌우 대칭인 수의 개수는

$9\times10=90$

03

1 kg, 3 kg, 5 kg 상품의 개수를 각각

x, y, z (x, y, z는 자연수)라 하면

$x+3y+5z=20$ ⋯⋯㉠

$x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$에서

$1+3+5z\leq x+3y+5z=20$이므로

$5z\leq16$ $\quad\therefore z=1, 2, 3$

(i) $z=1$일 때,

㉠에서 $x+3y+5=20$ $\quad\therefore x+3y=15$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 4)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$, $(12, 1)$의 4개이다.

(ii) $z=2$일 때,

㉠에서 $x+3y+10=20$ $\quad\therefore x+3y=10$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 3)$, $(4, 2)$, $(7, 1)$의 3개이다.

(iii) $z=3$일 때,

㉠에서 $x+3y+15=20$ $\quad\therefore x+3y=5$

이 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$4+3+1=8$

답 8

04

500보다 큰 세 자리의 자연수의 개수는

$999-500=499$

500보다 큰 세 자리 자연수 중에서 숫자 7이 하나도 없는 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자로 가능한 것은 5, 6, 8, 9의 4가지이고 십의 자리, 일의 자리의 숫자로 가능한 것은 각각 0, 1, 2, $\cdots$, 9 중 7을 제외한 9가지이다.

이때 $\underbrace{\text{백의 자리가 5, 십의 자리와 일의 자리가 각각 0인 경우}}_{500}$를 제외하여야 하므로 500보다 큰 세 자리 자연수 중에서 숫자 7이 하나도 없는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times9\times9-1=323$

따라서 숫자 7이 적어도 하나 있는 세 자리 자연수의 개수는

$499-323=176$

답 176

05

25의 배수는 십의 자리 이하가 00 또는 25 또는 50 또는 75인 수이다. 이때 각 자리의 숫자가 모두 다른 자연수만 생각하므로 십의 자리의 이하가 25, 50, 75인 경우만 구하면 된다.

(i) □□25 꼴인 자연수의 개수

천의 자리에는 0, 2, 5를 제외한 7가지, 백의 자리에는 천의 자리에서 사용한 수와 2, 5를 제외한 7가지의 숫자가 올 수 있으므로

$7\times7=49$

(ii) □□50 꼴인 자연수의 개수

천의 자리에는 0, 5를 제외한 8가지, 백의 자리에는 천의 자리에서 사용한 수와 0, 5를 제외한 7가지의 숫자가 올 수 있으므로

$8\times7=56$

(iii) $\square\square 75$ 꼴인 자연수의 개수

천의 자리에는 0, 5, 7을 제외한 7가지, 백의 자리에는 천의 자리에서 사용한 수와 5, 7을 제외한 7가지의 숫자가 올 수 있으므로

$7\times7=49$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 수의 개수는

$49+56+49=154$

답 154

06

직선 l 위의 점 중에서 두 개의 점을 택하여 만든 사다리꼴의 변의 길이를 a, 직선 m 위의 점 중에서 두 개의 점을 택하여 만든 사다리꼴의 변의 길이를 b라 하자.

만들어진 사다리꼴의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times3\times(a+b)=9 \qquad \therefore a+b=6$

각 직선 위의 두 점 사이의 거리가 2이므로 각 변의 길이 a, b는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $a=2$, $b=4$인 경우

$a=2$가 되도록 두 점을 택하는 경우의 수는 3

$b=4$가 되도록 두 점을 택하는 경우의 수는 4

즉, $a=2$, $b=4$인 경우의 수는

$3\times4=12$

(ii) $a=4$, $b=2$인 경우

$a=4$가 되도록 두 점을 택하는 경우의 수는 2

$b=2$가 되도록 두 점을 택하는 경우의 수는 5

즉, $a=4$, $b=2$인 경우의 수는

$2\times5=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+10=22$

답 22

07

500원짜리 동전의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a<2$일 때, ← 500원짜리로 1000원을 만들 수 없는 경우

지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 a개, 1000원짜리 지폐 3장, 5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불 금액의 수는

$(a+1)\times(3+1)\times(1+1)-1=8a+7$

즉, $8a+7=23$에서

$8a=16 \qquad \therefore a=2$

그런데 $a<2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2\le a<4$일 때, ← 500원짜리로 1000원을 만들 수 있으나 500원짜리, 1000원짜리로 5000원을 만들 수 없는 경우

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액은 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 같다.

따라서 1000원짜리 지폐 3장을 500원짜리 동전 6개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 $(a+6)$개, 5000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불 금액의 수는

$\{(a+6)+1\}\times(1+1)-1=2a+13$

즉, $2a+13=23$에서

$2a=10 \qquad \therefore a=5$

그런데 $2\le a<4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a\ge4$일 때, ← 500원짜리, 1000원짜리로 5000원을 만들 수 있는 경우

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액은 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액과 같고, 500원짜리 동전 4개, 1000원짜리 지폐 3장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같다.

따라서 1000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 16개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 $(a+16)$개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불 금액의 수는

$\{(a+16)+1\}-1=a+16$

즉, $a+16=23$이므로 $a=7$

(i), (ii), (iii)에서

$a=7$

따라서 500원짜리 동전 7개, 1000원짜리 지폐 3장, 5000원짜리 지폐 1장의 일부 또는 전부를 사용하여 지불하는 방법의 수는

$(7+1)\times(3+1)\times(1+1)-1=8\times4\times2-1=63$

답 63

08

$8x=2^3\times x$의 양의 약수의 개수가 8인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $x=2^n$ (n은 자연수) 꼴일 때,

$8x=2^3\times2^n=2^{n+3}$의 양의 약수의 개수가 8이므로

$(n+3)+1=8$ $\quad\therefore n=4$

$\therefore x=2^4=16$

(ⅱ) $x=p^n$ (p는 2가 아닌 소수, n은 자연수) 꼴일 때,

$8x=2^3\times p^n$의 양의 약수의 개수가 8이므로

$(3+1)\times(n+1)=8$, $4n+4=8$ $\quad\therefore n=1$

$\therefore x=p$

이때 x는 20 이하의 자연수이므로

$x=3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 자연수 x는 3, 5, 7, 11, 13, 16, 17, 19의 8개이다.

답 8

보충 설명

2가 아닌 두 소수 p, q에 대하여

$x=p^m\times q^n$ (m, n은 자연수, $p\neq q$) 꼴이면

$2^3\times x=2^3\times p^m\times q^n$의 양의 약수의 개수가 8이므로

$(3+1)\times(m+1)\times(n+1)=8$

$\therefore (m+1)\times(n+1)=2$

이때 위의 등식을 만족시키는 자연수 m, n은 존재하지 않는다.

09

한 번 지난 도로를 다시 지나지 않으므로 A지점에서 출발하여 C지점까지 갔다가 다시 A지점으로 돌아오는 경우는 다음 네 가지가 있다.

(ⅰ) A → C → A로 가는 경우

두 지점 A, C를 잇는 두 도로 중 하나로 갔다가 남은 도로로 돌아와야 하므로 이 경우의 수는

$2\times1=2$

(ⅱ) A → C → B → A로 가는 경우

두 지점 A, C를 잇는 두 도로 중 하나로 갔다가 두 지점 B, C를 잇는 두 도로 중 하나, 두 지점 A, B를 잇는 세 도로 중 하나로 돌아와야 하므로 이 경우의 수는

$2\times2\times3=12$

(ⅲ) A → B → C → A로 가는 경우

두 지점 A, B를 잇는 세 도로 중 하나, 두 지점 B, C를 잇는 두 도로 중 하나로 갔다가 두 지점 A, C를 잇는 두 도로 중 하나로 돌아와야 하므로 이 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(ⅳ) A → B → C → B → A로 가는 경우

두 지점 A, B를 잇는 세 도로 중 하나, 두 지점 B, C를 잇는 두 도로 중 하나로 갔다가 두 지점 B, C를 잇는 도로 중 남은 하나, 두 지점 A, B를 잇는 도로 중 남은 두 도로 중 하나로 돌아와야 하므로 이 경우의 수는

$3\times2\times1\times2=12$

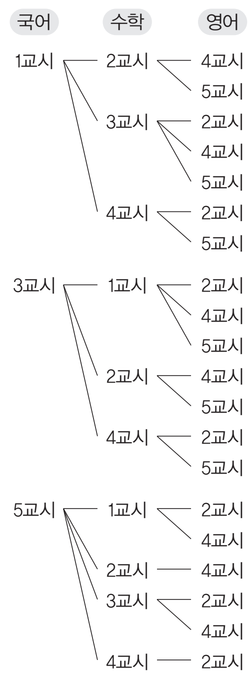
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$2+12+12+12=38$

답 38

10

국어, 수학, 영어를 각각 한 번씩 수강하는 방법의 수를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는

$7+7+6=20$

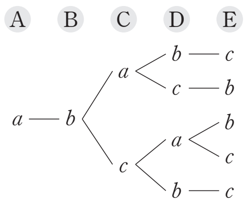
답 20

11

서로 다른 3가지 색 중에서 A영역에 칠하는 색을 a, B영역에 칠하는 색을 b, 나머지 하나의 색을 c라 하면 3가지 색 중에서 a, b, c에 해당하는 색을 고르는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

그 각각에 대하여 A, B, C, D, E의 5개의 영역에 조건에 맞게 색칠하는 방법의 수를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는

$6\times5=30$

답 30

12

두 영역 A와 C, 두 영역 B와 D에는 같은 색을 칠해도 되고, 영역 E에는 나머지 영역에 칠한 색에 관계없이 칠해도 되므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(ⅰ) 두 영역 A와 C에는 같은 색, 두 영역 B와 D에는 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색, B에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 5가지

즉, 이 경우에 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times1\times3\times5=300$

(ⅱ) 두 영역 A와 C에는 다른 색, 두 영역 B와 D에는 같은 색을 칠하는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는

$5\times4\times3\times1\times5=300$

(ⅲ) 두 영역 A와 C, 두 영역 B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같으므로 1가지

E에 칠할 수 있는 색은 5가지

즉, 이 경우에 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times1\times1\times5=100$

(ⅳ) 네 영역 A, B, C, D에 모두 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 5가지

즉, 이 경우에 색을 칠하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times5=600$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$300+300+100+600=1300$

답 1300

STEP 2 개념 마무리

본문 p.236

1 12	**2** 126	**3** 15	**4** 520
5 45	**6** 72		

1

$a\le b\le c$에서 $a+b+c\le c+c+c$

이때 $a+b+c=21$이므로

$21\le 3c$ $\quad\therefore c\ge7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

삼각형의 두 변의 길이의 합은 가장 긴 변의 길이보다 크므로

$a+b>c$

즉, $a+b+c>2c$에서 $21>2c$

$\therefore c<\frac{21}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $7\le c<\frac{21}{2}$이고, c는 자연수이므로

$c=7, 8, 9, 10$

(가)

(i) $c=7$일 때, ← $a\le b\le 7$

$a+b+7=21$, 즉 $a+b=14$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(7, 7)$의 1개이다.

(ii) $c=8$일 때, ← $a\le b\le 8$

$a+b+8=21$, 즉 $a+b=13$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 8)$, $(6, 7)$의 2개이다.

(iii) $c=9$일 때, ← $a\le b\le 9$

$a+b+9=21$, 즉 $a+b=12$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$, $(6, 6)$의 4개이다.

(iv) $c=10$일 때, ← $a\le b\le 10$

$a+b+10=21$, 즉 $a+b=11$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 10)$, $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$의 5개이다.

(나)

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+2+4+5=12$

(다)

답 12

단계	채점 기준	배점
(가)	조건을 만족시키는 c의 값의 범위를 구한 경우	40%
(나)	c의 값에 따라 순서쌍 (a, b)를 구한 경우	40%
(다)	순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한 경우	20%

2

음이 아닌 한 자리의 정수 a, b, c에 대하여 구하는 세 자리 자연수를 $100a+10b+c$ $(a\ne 0)$라 하자.

(i) b, c 중 하나가 0인 경우

나머지 두 수가 같아야 하므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$9\times \underbrace{2}_{100a+a \text{ 또는 } 100a+10a\text{의 두 가지}}=18$

(ii) a, b, c에 0이 포함되지 않는 경우

$a=b+c$이면

$a=1$일 때, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 0

$a=2$일 때, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 1

$a=3$일 때, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 2

⋮

$a=9$일 때, b, c의 값을 정하는 경우의 수는 8

즉, $a=b+c$인 경우의 수는 $0+1+2+\cdots+8=36$

이때 $b=a+c$, $c=a+b$인 경우의 수는 $a=b+c$인 경우의 수와 같으므로 (ii)의 경우의 수는

$36\times 3=108$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$18+108=126$

답 126

3

$\begin{cases}(a+b+c)(p+q+r) & \cdots\cdots ㉠\\ (a+b)(s+t) & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ 이라 하자.

㉠의 $p+q+r$과 ㉡의 $s+t$의 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 ㉠, ㉡의 전개식에서 동류항이 생기지 않는다.

즉, ㉠$-$㉡에서 서로 다른 항의 개수는 변하지 않는다.

(i) $(a+b+c)(p+q+r)$의 전개식에서

두 다항식 $a+b+c$, $p+q+r$는 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 두 다항식을 곱하여 전개하면 동류항이 생기지 않는다.

이때 a를 포함하는 항의 개수는 $a(p+q+r)$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$1\times 3=3$ ……㉢

또한, p를 포함하지 않는 항의 개수는 $(a+b+c)(q+r)$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$3\times 2=6$ ……㉣

(ii) $(a+b)(s+t)$의 전개식에서

두 다항식 $a+b$, $s+t$는 모든 항이 서로 다른 문자로 되어 있으므로 두 다항식을 곱하여 전개하면 동류항이 생기지 않는다.

이때 a를 포함하는 항의 개수는 $a(s+t)$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$1\times 2=2$ ……㉤

또한, $(a+b)(s+t)$의 전개식의 항은 모두 p를 포함하지 않으므로 p를 포함하지 않는 항의 개수는

$2\times2=4$ ……ⓑ

ⓒ, ⓓ에서 $m=3+2=5$

ⓔ, ⓑ에서 $n=6+4=10$

$\therefore m+n=5+10=15$

답 15

보충 설명

p를 포함하지 않는 항의 개수 n은 주어진 다항식의 모든 항의 개수에서 p를 포함하는 항의 개수를 빼서 구할 수 있다.

주어진 다항식의 모든 항의 개수는 $(a+b+c)(p+q+r)$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 $(a+b)(s+t)$의 전개식의 서로 다른 항의 개수의 합과 같으므로

$3\times3+2\times2=13$

또한, p를 포함하는 항의 개수는 $(a+b+c)\times p$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$3\times1=3$

$\therefore n=13-3=10$

4

$a(b+c)$의 값이 짝수인 경우는 a의 값에 따라 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) a가 짝수일 때,

a는 2, 4, 6, 8, 10 중 하나이므로 b, c의 값에 관계없이 $a(b+c)$는 짝수이다.

즉, a로 가능한 값은 5가지, b로 가능한 값은 a를 제외한 9가지, c로 가능한 값은 a, b를 제외한 8가지이므로 이 경우의 수는

$5\times9\times8=360$

(ii) a가 홀수일 때,

a는 1, 3, 5, 7, 9 중 하나이므로 $a(b+c)$가 짝수이려면 $b+c$가 짝수이어야 한다.

① b, c가 모두 홀수일 때,

a로 가능한 값은 5가지, b로 가능한 값은 a를 제외한 4가지, c로 가능한 값은 a, b를 제외한 3가지이므로 이 경우의 수는

$5\times4\times3=60$

② b, c가 모두 짝수일 때,

a로 가능한 값은 5가지, b로 가능한 값은 2, 4, 6, 8, 10의 5가지, c로 가능한 값은 b를 제외한 4가지이므로 이 경우의 수는

$5\times5\times4=100$

①, ②에서 이 경우의 수는

$60+100=160$

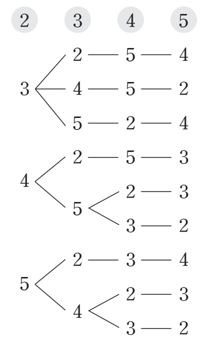
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$360+160=520$

답 520

5

1이 적혀 있는 공을 1이 붙어 있는 상자에 넣을 때, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 공은 각각 다른 번호가 붙어 있는 상자에 넣어야 하므로 이 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 1이 적혀 있는 공을 1이 붙어 있는 상자에 넣은 경우, 조건을 만족시키는 경우의 수는 9이다.

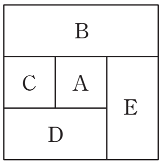
2, 3, 4, 5가 적혀 있는 공을 각각 동일한 번호가 붙어 있는 상자에 넣은 경우에 대하여도 같은 경우의 수가 나오므로 구하는 경우의 수는

$9+9+9+9+9=45$

답 45

6

오른쪽 그림과 같이 각 영역을 A, B, C, D, E라 하자.



(i) C, E를 같은 색으로 칠할 때,

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C(E)에 칠한 색을 제외한 2가지

$\therefore\ 4\times3\times2\times1\times2=48$

(ii) C, E를 다른 색으로 칠할 때,

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, C, E에 칠한 색을 제외한 1가지 ← B에 칠한 색과 같은 색

$\therefore\ 4\times3\times2\times1\times1=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$48+24=72$

답 72

다른 풀이

칠해야 하는 영역은 5개, 사용할 수 있는 색은 4개이므로 같은 색으로 칠해진 영역이 적어도 한 쌍 존재한다.

(i) 같은 색으로 칠하는 영역이 두 쌍 있을 때,

B, D를 같은 색으로 칠하고, C, E를 같은 색으로 칠하면 (B, D)에 칠할 수 있는 색은 4가지, (C, E)에 칠할 수 있는 색은 (B, D)에 칠한 색을 제외한 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 (B, D), (C, E)에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 그 경우의 수는

$4\times3\times2=24$

(ii) 같은 색으로 칠하는 영역이 한 쌍만 있을 때,

① B, D만 같은 색으로 칠할 때,

(B, D)에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 (B, D)에 칠한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 (B, D), A에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 (B, D), A, C에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 그 경우의 수는

$4\times3\times2\times1=24$

② C, E만 같은 색으로 칠할 때,

C, E만 같은 색으로 칠하는 경우의 수는 B, D만 같은 색으로 칠하는 경우의 수와 같으므로 24이다.

①, ②에서 이 경우의 수는

$24+24=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+48=72$

10. 순열과 조합

1 순열

기본 + 필수연습

본문 pp.242~248

01 (1) 504 (2) 5040 (3) 420
02 (1) 7 (2) 2 (3) 7
03 (1) 720 (2) 720
04 (1) 24 (2) 6
05 (1) 5 (2) 8
06 10
07 5
08 (1) 2880 (2) 1152 (3) 8640
09 144
10 2
11 (1) 4320 (2) 3600
12 288
13 4
14 (1) 300 (2) 144
15 40
16 1344
17 (1) 66 (2) 2451
18 257
19 40213

01

(1) ${}_9P_3=9\times8\times7=504$

(2) ${}_7P_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(3) $\dfrac{{}_7P_5}{3!}=\dfrac{7\times6\times5\times4\times3}{3\times2\times1}=420$

답 (1) 504 (2) 5040 (3) 420

02

(1) ${}_{n-1}P_2=(n-1)(n-2)$, $30=6\times5$이므로

$n-1=6 \qquad \therefore\ n=7$

(2) ${}_{10}P_{n+1}=720$에서 $720=10\times9\times8$이므로

$n+1=3 \qquad \therefore\ n=2$

(3) ${}_{11}P_3=\dfrac{11!}{(11-3)!}=\dfrac{11!}{8!}$이므로

$\dfrac{11!}{8!}=\dfrac{11!}{(n+1)!}$

즉, $n+1=8$이므로 $n=7$

답 (1) 7 (2) 2 (3) 7

03

(1) 서로 다른 6개에서 6개를 택하는 순열의 수이므로

${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

(2) 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$_{10}P_3=10\times9\times8=720$

답 (1) 720 (2) 720

04

(1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로

$_4P_3=4\times3\times2=24$

(2) A가 맨 뒤에 와야 하므로 A를 제외한 3장의 카드 중에서 첫 번째에 오는 카드와 두 번째에 오는 카드를 선택하면 된다.

즉, 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_3P_2=3\times2=6$

답 (1) 24 (2) 6

05

(1) $4\times{}_nP_1+2\times{}_nP_2={}_nP_3$에서

$4n+2n(n-1)=n(n-1)(n-2)$

$n\geq1$, $n\geq2$, $n\geq3$에서 $n\geq3$이므로

양변을 n으로 나누면

$4+2(n-1)=(n-1)(n-2)$

$2n+2=n^2-3n+2$

$n^2-5n=0$, $n(n-5)=0$

$\therefore\ n=5\ (\because\ n\geq3)$

(2) $6\times{}_nP_2:{}_nP_4=1:5$에서

$_nP_4=30\times{}_nP_2$

$n(n-1)(n-2)(n-3)=30n(n-1)$

$n\geq2$, $n\geq4$에서 $n\geq4$이므로

양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=30$

$n^2-5n-24=0$, $(n+3)(n-8)=0$

$\therefore\ n=8\ (\because\ n\geq4)$

답 (1) 5 (2) 8

06

$_{n+2}P_3={}_{n+1}P_3+330$에서

$(n+2)(n+1)n=(n+1)n(n-1)+330$

$n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\}=330$

$n(n+1)=110$

$n^2+n-110=0$, $(n+11)(n-10)=0$

$\therefore\ n=10\ (\because\ n\geq2)$

$n+2\geq3$이고 $n+1\geq3$이므로 $n\geq2$

답 10

07

$_nP_2\times{}_nP_2-{}_{n+1}P_3=4\times{}_nP_2-2(n+3)$에서

$n(n-1)\times n(n-1)-(n+1)n(n-1)$

$=4n(n-1)-2(n+3)$

$n^4-2n^3+n^2-n^3+n=4n^2-4n-2n-6$

$\therefore\ n^4-3n^3-3n^2+7n+6=0$

$f(n)=n^4-3n^3-3n^2+7n+6$이라 하면

$f(2)=16-24-12+14+6=0$,

$f(-1)=1+3-3-7+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -3 & -3 & 7 & 6 \\
 & & 2 & -2 & -10 & -6 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0 \\
 & & -1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore\ f(n)=(n-2)(n+1)(n^2-2n-3)$

$\qquad=(n+1)^2(n-2)(n-3)$

즉, 주어진 등식은

$(n+1)^2(n-2)(n-3)=0$

$\therefore\ n=2$ 또는 $n=3\ (\because\ n\geq2)$ ← $n\geq2$이고 $n+1\geq3$이므로 $n\geq2$

따라서 등식을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+3=5$

답 5

08

(1) 빨간색 화분 4개를 화분 하나로 생각하여 화분 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 빨간색 화분 4개의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times 24=2880$

(2) 빨간색 화분과 파란색 화분을 교대로 나열하는 방법은 다음 그림과 같이 2가지 경우가 있다.

그 각각에 대하여 빨 자리에 빨간색 화분을 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이고 파 자리에 파란색 화분을 나열하는 경우의 수는 $4!=24$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 24\times 24=1152$

(3) 파란색 화분 4개 중 2개를 양 끝에 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

그 각각에 대하여 양 끝에 나열한 화분 2개를 제외한 6개의 화분을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는

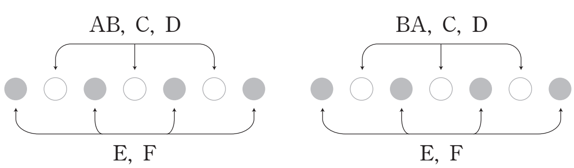
$12\times 720=8640$

답 (1) 2880 (2) 1152 (3) 8640

09

6개의 문자 A, B, C, D, E, F를 일렬로 배열할 때, A와 B는 서로 이웃하므로 A와 B를 한 묶음으로 생각한다.

또한, E와 F는 서로 이웃하지 않으므로 AB, C, D 또는 BA, C, D를 일렬로 배열한 후, 양 끝과 사이사이의 ● 자리에 E, F를 배열하면 된다.



따라서 구하는 경우의 수는

$(3!\times\underbrace{2}_{\text{AB 또는 BA의 2가지}})\times{}_4P_2=144$

답 144

10

남학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

남학생 두 명을 맨 앞의 두 자리에 세워야 하므로 여학생이 설 수 있는 곳은 다음 그림의 ◌ 자리이다.

여학생이 n명이므로 $1\le n\le 4$이고 4곳 중 n곳에 여학생을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_n$이므로

$120\times{}_4P_n=1440$

$\frac{4!}{(4-n)!}=12$, $(4-n)!=2!$

$4-n=2$ $\qquad\therefore n=2$

답 2

11

(1) 적어도 한쪽 끝에 자음이 오는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

7개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

양 끝에 모두 모음이 오는 경우의 수는 모음 U, I, E 중 2개를 양 끝에 나열한 다음 양 끝에 나열한 모음 2개를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2\times 5!=6\times 120=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-720=4320$

(2) I, C, E 중에서 적어도 2개가 이웃하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 I, C, E 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

7개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

I, C, E 중에서 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는 J, U, S, T의 4개의 문자를 일렬로 나열한 다음 양 끝과 그 사이사이의 5개의 자리에 I, C, E의 3개를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!\times{}_5P_3=24\times 60=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$

답 (1) 4320　(2) 3600

12

적어도 한쪽 끝에 홀수가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 양 끝에 모두 짝수가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

서로 다른 6장의 카드 중에서 4장을 뽑아 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

${}_6P_4=360$

양 끝에 모두 짝수가 적힌 카드가 놓이는 경우의 수는 짝수 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드 중에서 2장을 양 끝에 나열한 다음 양 끝에 나열한 2장의 카드를 제외한 4장의 카드 중에서 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2\times{}_4P_2=6\times12=72$

따라서 구하는 경우의 수는

$360-72=288$

답 288

13

적어도 한쪽 끝에 여학생이 오는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 양 끝에 모두 남학생이 오는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

$n+(7-n)=7$

이므로 7명의 학생들을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

7명의 학생 중에서 남학생이 n명이므로 양 끝에 남학생이 오는 경우의 수는

${}_nP_2\times5!=120n(n-1)$

이때 적어도 한쪽 끝에 여학생이 오는 경우의 수가 3600이므로

$5040-120n(n-1)=3600$

$120n(n-1)=1440$

$n^2-n-12=0$, $(n+3)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n\geq2$)

답 4

14

(1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이다.

그 각각에 대하여 백의 자리와 십의 자리, 일의 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$5\times{}_5P_3=5\times60=300$

(2) 홀수는 일의 자리의 숫자가 1, 3, 5이므로

□□□1, □□□3, □□□5 꼴이다.

각 경우에 대하여 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4가지이다.

그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$\underbrace{3}_{\text{□□□1 또는 □□□3 또는 □□□5의 3가지}}\times(4\times{}_4P_2)=3\times48=144$

답 (1) 300　(2) 144

다른 풀이

(1) 6개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 모든 경우의 수에서 0□□□ 꼴의 개수를 빼서 구할 수 있다.

6개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$

0□□□ 꼴인 경우의 수는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$360-60=300$

15

세 자리의 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

이때 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 세 숫자의 합에 따라 다음과 같다.

세 숫자의 합이 3일 때, $(0, 1, 2)$

세 숫자의 합이 6일 때, $(0, 1, 5)$, $(0, 2, 4)$, $(1, 2, 3)$

세 숫자의 합이 9일 때, (0, 4, 5), (1, 3, 5), (2, 3, 4)

세 숫자의 합이 12일 때, (3, 4, 5)

(i) 뽑은 3장의 카드 중에서 0이 적힌 카드가 있을 때, 즉 (0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5)일 때, 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times(2\times{}_2P_2)=4\times4=16$

(ii) 뽑은 3장의 카드 중에서 0이 적힌 카드가 없을 때, 즉 (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)일 때, 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_3P_3=4\times6=24$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$16+24=40$

답 40

보충 설명

자연수의 판별법 |

(1) 홀수 : 일의 자리의 숫자가 홀수인 수

(2) 짝수 : 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수인 수

(3) 3의 배수 : 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수

(4) 4의 배수 : 끝의 두 자리의 숫자가 00 또는 4의 배수인 수

16

천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 짝수이려면 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

(i) 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우 천의 자리와 십의 자리에는 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 백의 자리와 일의 자리에는 천의 자리와 십의 자리에 온 숫자를 제외한 7개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

${}_5P_2\times{}_7P_2=20\times42=840$

(ii) 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우 천의 자리와 십의 자리에는 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 백의 자리와 일의 자리에는 천의 자리와 십의 자리에 온 숫자를 제외한 7개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

${}_4P_2\times{}_7P_2=12\times42=504$

(i), (ii)에서 천의 자리의 숫자와 십의 자리의 숫자의 합이 짝수인 자연수의 개수는

$840+504=1344$

답 1344

17

(1) 32□□, 34□□, 35□□ 꼴인 자연수의 개수는

$3\times{}_3P_2=3\times6=18$

4□□□, 5□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_4P_3=2\times24=48$

따라서 3200보다 큰 자연수의 개수는

$18+48=66$

(2) 1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

21□□, 23□□ 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_3P_2=2\times6=12$

즉, 1234부터 2354까지의 자연수의 개수는

$24+12=36$

즉, 41번째에 오는 자연수는 24□□ 꼴인 자연수 중 5번째에 온다.

이때 24□□ 꼴인 자연수는 순서대로

2413, 2415, 2431, 2435, 2451, 2453

따라서 41번째에 오는 자연수는 2451이다.

답 (1) 66 (2) 2451

18

6개의 문자 중에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는

${}_6P_4=360$

(i) a□□□ 꼴인 문자열의 개수는

${}_5P_3=60$

(ii) ba□□, bc□□, bd□□ 꼴인 문자열의 개수는

$3\times{}_4P_2=3\times12=36$

(iii) bea□, bec□ 꼴인 문자열의 개수는

$2\times3=6$

(iv) bed□ 꼴인 문자열은 순서대로 $beda$, $bedc$, $bedf$

bed□ 꼴인 문자열 중 첫 번째

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $abcd$부터 $beda$까지의 문자열의 개수는

$60+36+6+1=103$

따라서 구하는 문자열의 개수는

$360-103=257$

답 257

다른 풀이

(ⅰ) $bed\square$ 꼴인 문자열 중 $beda$보다 뒤에 나오는 문자열은 $bedc$, $bedf$의 2개

(ⅱ) $bef\square$ 꼴인 문자열의 개수는 3

(ⅲ) $bf\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 ${}_4P_2=12$

(ⅳ) $c\square\square\square$, $d\square\square\square$, $e\square\square\square$, $f\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $4\times{}_5P_3=4\times60=240$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 문자열의 개수는

$2+3+12+240=257$

19

$1\square\square\square\square$, $2\square\square\square\square$, $3\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는

$3\times4!=3\times24=72$

이므로 75번째에 오는 자연수는 $4\square\square\square\square$ 꼴인 자연수 중 3번째에 온다.

이때 $4\square\square\square\square$ 꼴인 자연수는 순서대로

40123, 40132, 40213, 40231, ⋯

따라서 75번째에 오는 자연수는 40213이다.

답 40213

다른 풀이

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 모든 자연수의 개수는

$4\times4!=4\times24=96$

따라서 작은 수부터 순서대로 나열할 때의 75번째에 오는 수는 큰 수부터 순서대로 나열할 때의 $96-74=22$(번째)에 오는 수와 같다.

$43\square\square\square$, $42\square\square\square$, $41\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는

$3\times3!=3\times6=18$

이므로 22번째에 오는 자연수는 $40\square\square\square$ 꼴인 자연수 중 4번째에 온다.

이때 $40\square\square\square$ 꼴인 자연수는 순서대로

40321, 40312, 40231, 40213, ⋯

따라서 75번째에 오는 자연수는 40213이다.

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.249~250

01 24	**02** 114	**03** 1728	**04** 2880
05 11520	**06** 1	**07** 180	**08** 148
09 66	**10** 496	**11** G	**12** 6893

01

$100!=100\times99\times98\times\cdots\times3\times2\times1$

1부터 100까지의 자연수 중에서

2의 배수는 50개, $2^2(=4)$의 배수는 25개,

$2^3(=8)$의 배수는 12개, $2^4(=16)$의 배수는 6개,

$2^5(=32)$의 배수는 3개, $2^6(=64)$의 배수는 1개이고

5의 배수는 20개, $5^2(=25)$의 배수는 4개이므로

2, 5와 서로소인 자연수 p에 대하여

$$\begin{aligned}100!&=p\times2^{50+25+12+6+3+1}\times5^{20+4}\\&=p\times2^{97}\times5^{24}\\&=p\times2^{73}\times10^{24}\end{aligned}$$

따라서 $100!=a\times10^n$ (a는 자연수)에서 n의 최댓값은 24이다.

답 24

보충 설명

2^n의 배수 (n은 자연수)에 곱해진 2의 개수는 다음과 같다.

2의 배수에 곱해진 2의 개수는 1,

2^2의 배수에 곱해진 2의 개수는 2,

2^3의 배수에 곱해진 2의 개수는 3,

⋮

이때 $100!=100\times99\times98\times\cdots\times3\times2\times1$에서

2의 배수는 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6의 배수를 포함하고,

2^2의 배수는 2^3, 2^4, 2^5, 2^6의 배수를 포함하고,

2^3의 배수는 2^4, 2^5, 2^6의 배수를 포함하고,

2^4의 배수는 2^5, 2^6의 배수를 포함하고,

2^5의 배수는 2^6의 배수를 포함하므로

$100!$에 곱해진 2의 개수의 합은

(2의 배수의 개수)+(2^2의 배수의 개수)

+ ⋯ +(2^6의 배수의 개수)

로 구할 수 있다.

02

6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개의 수를 택하여 순서대로 a, b, c로 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=6\times5\times4=120$

이때 직선의 방정식 $ax+by+c=0$에서 x의 계수, y의 계수, 상수항을 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면 $(1, 2, 3)$과 $(2, 4, 6)$은 각각 직선 $x+2y+3=0$, $2x+4y+6=0$을 나타내고, 이 두 직선은 일치한다. 마찬가지로

$(1, 3, 2)$와 $(2, 6, 4)$, $(2, 1, 3)$과 $(4, 2, 6)$,
$(2, 3, 1)$과 $(4, 6, 2)$, $(3, 1, 2)$와 $(6, 2, 4)$,
$(3, 2, 1)$과 $(6, 4, 2)$

는 각각 동일한 직선이 되므로 2번씩 중복하여 세어진 직선의 개수는 6이다.

1, 2, 3을 일렬로 배열하는 순열의 수 ${}_3P_3$과 같다.

따라서 구하는 서로 다른 직선의 개수는

$120-6=114$

답 114

보충 설명

두 직선의 위치 관계 | $abc\neq0$, $a'b'c'\neq0$일 때, 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 위치 관계는 다음과 같다.

두 직선의 위치 관계	조건
평행하다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
일치한다.	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
한 점에서 만난다.	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

03

풍경화 4점, 정물화 2점, 인물화 3점을 각각 한 점의 그림으로 생각하여 3점의 그림을 일렬로 전시하는 경우의 수는

$3!=6$

풍경화 4점끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

정물화 2점끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

인물화 3점끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24\times2\times6=1728$

답 1728

04

연속하여 나열된 두 수의 곱이 짝수가 되기 위해서는 홀수끼리 이웃하지 않아야 한다.

짝수 2, 4, 6, 8을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

짝수들 양 끝과 사이사이의 5곳 중 4곳에 홀수 1, 3, 5, 7을 나열하는 경우의 수는

${}_5P_4=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times120=2880$

답 2880

보충 설명

연속하여 나열된 두 수의 곱이 항상 짝수가 되는 조건을 짝수와 홀수가 번갈아 나오는 것으로 착각하지 않도록 주의한다.

두 자연수의 곱에서

(짝수)$\times$(짝수)$=$(짝수), (짝수)$\times$(홀수)$=$(짝수),
(홀수)$\times$(홀수)$=$(홀수)

이므로 연속하여 나열된 두 수의 곱이 항상 짝수가 되려면 홀수끼리 연속하지만 않으면 된다.

05

맨 앞과 맨 뒤에 어른 5명 중 2명을 세우는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

맨 앞과 맨 뒤에 선 두 어른 사이에 어른 3명과 어린이 3명을 세울 때, 어린이 중에서 적어도 2명이 이웃하도록 줄을 서는 경우의 수는 이들 6명을 세우는 모든 경우의 수에서 어린이끼리 이웃하지 않는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

맨 앞과 맨 뒤에 어른을 세운 후, 나머지 6명을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는

${}_5P_2\times6!=20\times720=14400$

맨 앞과 맨 뒤에 어른을 세운 후, 나머지 어른 3명을 일렬로 세우고 어른들 사이사이의 4곳 중 3곳에 어린이 3명을 세우는 경우의 수는

어른 ○ 어른 ○ 어른 ○ 어른 ○ 어른

${}_5P_2 \times 3! \times {}_4P_3 = 20 \times 6 \times 24 = 2880$

따라서 구하는 경우의 수는

$14400 - 2880 = 11520$

답 11520

06

적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

5개의 문자를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$5! = 120$

처음 5개의 문자 중에서 자음의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는 자음 n개 중 2개를 양 끝에 놓은 후, 가운데 자리에 나머지 3개의 문자를 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_nP_2 \times 3! = 6n(n-1)$

이때 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수가 48이므로

$120 - 6n(n-1) = 48$

$n^2 - n - 12 = 0$, $(n+3)(n-4) = 0$

$\therefore n = 4$ ($\because n \ge 2$)

따라서 처음 5개의 문자 중에서 자음은 4개이므로 모음의 개수는

$5 - 4 = 1$

답 1

07

각 자리의 숫자에서 홀수와 홀수가 아닌 수가 교대로 나타나려면 구하는 다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자는 다음과 같아야 한다.

홀 홀× 홀 홀× 홀

홀× 홀 홀× 홀 홀×

(i) 홀 홀× 홀 홀× 홀인 경우

7개의 숫자 중 홀수는 1, 3, 5의 3개, 홀수가 아닌 수는 0, 2, 4, 6의 4개이므로 만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에는 3개의 홀수 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하고, 천의 자리, 십의 자리에는 4개의 홀수가 아닌 수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

${}_3P_3 \times {}_4P_2 = 6 \times 12 = 72$

(가)

(ii) 홀× 홀 홀× 홀 홀×인 경우

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3가지이다.

백의 자리, 일의 자리에는 만의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 홀수가 아닌 수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 천의 자리, 십의 자리에는 3개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$3 \times {}_3P_2 \times {}_3P_2 = 3 \times 6 \times 6 = 108$

(나)

(i), (ii)에서 각 자리의 숫자에서 홀수와 홀수가 아닌 수가 교대로 나타나는 자연수의 개수는

$72 + 108 = 180$

(다)

답 180

단계	채점 기준	배점
(가)	홀수로 시작하여 홀수와 홀수가 아닌 수가 교대로 나타나는 다섯 자리 자연수의 개수를 구한 경우	40%
(나)	홀수가 아닌 수로 시작하여 홀수와 홀수가 아닌 수가 교대로 나타나는 다섯 자리 자연수의 개수를 구한 경우	40%
(다)	홀수와 홀수가 아닌 수가 교대로 나타나는 다섯 자리 자연수의 개수를 구한 경우	20%

08

9개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 합이 8이 되는 두 수는

0과 8, 1과 7, 2와 6, 3과 5

이므로 9개의 숫자 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리 자연수를 만들 때, 각 자리의 숫자 중 어떤 두 수의 합이 8이 되는 자연수의 개수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 합이 8이 되는 두 수가 0과 8일 때,

나머지 숫자 하나로 가능한 것은 0과 8을 제외한 7가지이다. 그 각각에 대하여 이들 3개의 숫자로 세 자리 자연수를 만들 때, 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$7 \times (2 \times {}_2P_2) = 28$

(ii) 합이 8이 되는 두 수가 1과 7일 때,

나머지 숫자 하나로 0을 택하고, 3개의 숫자 0, 1, 7로 세 자리 자연수를 만들 때, 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$1\times(2\times{}_2P_2)=4$ ……㉠

나머지 숫자 하나로 0이 아닌 숫자를 택할 때, 가능한 것은 0, 1, 7을 제외한 6가지이다.

그 각각에 대하여 이들 3개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$6\times{}_3P_3=36$ ……㉡

㉠, ㉡에서 합이 8이 되는 두 수가 1과 7인 세 자리 자연수의 개수는

$4+36=40$

(iii) 합이 8이 되는 두 수가 2와 6일 때,

(ii)와 같은 방법으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4+36=40$

(iv) 합이 8이 되는 두 수가 3과 5일 때,

(ii)와 같은 방법으로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4+36=40$

(i)~(iv)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$28+40+40+40=148$

답 148

09

세 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 다섯 자리 자연수의 개수는 $\underbrace{\text{만들 수 있는 모든 자연수의 개수}}_{\text{(i)}}$에서 $\underbrace{\text{1의 바로 다음 자리에 2가 오는 경우, 2의 바로 다음 자리에 3이 오는 경우, 3의 바로 다음 자리에 1이 오는 경우}}_{\text{(ii)}}$의 수를 모두 뺀 뒤, $\underbrace{\text{순서대로 1, 2, 3이 오는 경우, 2, 3, 1이 오는 경우, 3, 1, 2가 오는 경우}}_{\text{(iii)}}$의 수를 모두 더하여 구할 수 있다.

(i) 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 자연수의 개수는 서로 다른 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$5!=120$

(ii) 1의 바로 다음 자리에 2 또는 2의 바로 다음 자리에 3 또는 3의 바로 다음 자리에 1이 오는 자연수의 개수는 순서가 정해진 연속한 두 수를 한 숫자로 생각하여 서로 다른 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3\times4!=72$

(iii) 다섯 자리 수의 각 자리에서 연속하여 순서대로 1, 2, 3 또는 2, 3, 1 또는 3, 1, 2가 오는 자연수의 개수는 순서가 정해진 세 수를 한 숫자로 생각하여 서로 다른 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3\times3!=18$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120-72+18=66$

답 66

보충 설명

1의 바로 다음 자리에 2가 오는 경우와 2의 바로 다음 자리에 3이 오는 경우를 합하면 다섯 자리 수의 각 자리에 순서대로 1, 2, 3이 오는 경우를 중복하여 센 것이므로 이를 한 번 빼주어야 한다.

이처럼 경우의 수를 구할 때는 모든 경우를 빠짐없이, 중복되지 않게 구해야 하므로 합의 법칙에 의하여 중복해서 센 경우를 빼 주어야 하는 것에 주의하자.

10

ENGLISH를 알파벳 순서로 배열하면 EGHILNS이다.

EG□□□□□, EH□□□□□,

EI□□□□□, EL□□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4\times5!=4\times120=480$

ENGH□□□, ENGI□□□ 꼴인 문자열의 개수는

$2\times3!=2\times6=12$

ENGLH□□ 꼴의 문자열의 개수는

$2!=2$

ENGLI□□ 꼴의 문자열은 순서대로

ENGLIHS, ENGLISH

따라서 사전식으로 배열할 때, ENGLISH는

$480+12+2+2=496$(번째)에 온다.

답 496

11

A□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

${}_8P_4=1680$ ← B□□□□ 꼴인 문자열의 개수도 1680이므로 $1680+1680=3360>2025$에서 첫 번째 문자는 B

BA□□□ 꼴인 문자열의 개수는

${}_7P_3=210$ ← BC□□□ 꼴인 문자열의 개수도 210이므로 $1680+210+210=2100>2025$에서 두 번째 문자는 C

BCA□□, BCD□□, BCE□□, BCF□□ 꼴인 문자열의 개수는

$4\times{}_6P_2=4\times30=120$ ← BCG□□ 꼴인 문자열의 개수도 30이므로 $1680+210+120+30=2040>2025$에서 세 번째 문자는 G

BCGA□, BCGD□ 꼴인 문자열의 개수는

$2\times{}_5P_1=2\times5=10$

즉, ABCDE부터 BCGDI까지의 문자열의 개수는

$1680+210+120+10=2020$

이므로 2025번째 문자열은 BCGE□ 꼴인 문자열 중 5번째이다. BCGE□ 꼴인 문자열은 순서대로

BCGEA, BCGED, BCGEF, BCGEH, BCGEI

따라서 2025번째 문자열은 BCGEI이고, 이 문자열의 세 번째 문자는 G이다.

답 G

다른 풀이

A□□□□ 꼴인 문자열의 개수는

${}_8P_4=1680$

BA□□□ 꼴인 문자열의 개수는

${}_7P_3=210$

BCA□□, BCD□□, BCE□□, BCF□□, BCG□□, BCH□□, BCI□□ 꼴인 문자열의 개수는

$7\times{}_6P_2=7\times30=210$

즉, ABCDE부터 BCF□□ 꼴까지의 문자열의 개수는

$1680+210+4\times30=2010$

이고, ABCDE부터 BCG□□ 꼴까지의 문자열의 개수는

$1680+210+5\times30=2040$

이때 $2010<2025<2040$이므로 2025번째 문자열은 BCG□□ 꼴이다.

따라서 구하는 세 번째 문자는 G이다.

12

1부터 9까지의 자연수 중에서 8의 약수는 1, 2, 4, 8이다.

(i) 9□□□ 꼴인 번호의 개수

9를 제외한 8개의 숫자 중 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 □□□ 자리에 일렬로 배열하는 순열의 수에서 1, 2, 4, 8, 9를 제외한 4개의 숫자 중 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 □□□ 자리에 일렬로 배열하는 순열의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_8P_3-{}_4P_3=336-24=312$

(ii) 8□□□ 꼴인 번호의 개수

8의 약수 중 8이 이미 사용되었으므로 □□□ 자리에 어떤 숫자가 와도 조건을 만족시킨다.

즉, 이 경우의 번호의 개수는 8을 제외한 8개의 숫자 중 서로 다른 3개의 숫자를 뽑아 □□□ 자리에 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로

${}_8P_3=336$

(iii) 7□□□ 꼴인 번호의 개수

(i)과 같은 방법으로

${}_8P_3-{}_4P_3=336-24=312$ ← 6□□□ 꼴인 번호의 개수도 (i)과 같은 방법으로 312이므로 $312+336+312+312=1272>1000$ 즉, 비밀번호는 6□□□ 꼴이다.

(iv) 69□□ 꼴인 번호의 개수

6, 9를 제외한 7개의 숫자 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 □□ 자리에 일렬로 배열하는 순열의 수에서 1, 2, 4, 8, 6, 9를 제외한 3개의 숫자 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 □□ 자리에 일렬로 배열하는 순열의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_7P_2-{}_3P_2=42-6=36$

(i)~(iv)에서 9876부터 6912까지의 번호의 개수는

$312+336+312+36=996$

즉, 비밀번호는 68□□ 꼴의 4번째이다.

따라서 68□□ 꼴의 번호를 순서대로 나열하면

6897, 6895, 6894, 6893, ⋯

이므로 설정할 비밀번호는 6893이다.

답 6893

2 조합

기본+필수연습 본문 pp.254~262

20 (1) 10 (2) 1 (3) 63 (4) 240
21 (1) 5 (2) 8 **22** (1) 35 (2) 15
23 (1) 40 (2) 121 **24** (1) 9 (2) 7
25 −30 **26** (1) 56 (2) 56 (3) 70 **27** 60
28 186 **29** (1) 432 (2) 840 **30** 1440
31 228 **32** 36 **33** 21 **34** 100
35 150 **36** 15 **37** 5
38 (1) 1260 (2) 280 (3) 1890 **39** 81
40 90 **41** 315 **42** 180

20

(1) $_{10}C_9=\frac{10!}{9!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$=10$

(2) $_4C_0\times{}_4C_4=1\times1=1$

(3) $_7P_2+{}_7C_2=7\times6+\frac{7\times6}{2\times1}=63$

(4) $_5C_3\times4!=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times4\times3\times2\times1=240$

답 (1) 10 (2) 1 (3) 63 (4) 240

다른 풀이

(1) $_{10}C_9={}_{10}C_1=10$

(4) $_5C_3\times4!={}_5C_2\times4!=\frac{5\times4}{2\times1}\times24=240$

21

(1) $2\times{}_{n+2}C_4=7\times{}_nC_2$에서

$2\times\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4\times3\times2\times1}=7\times\frac{n(n-1)}{2\times1}$

$n+2\geq4$, $n\geq2$에서 $n\geq2$이므로

양변을 $n(n-1)$로 나누어 정리하면

$(n+1)(n+2)=42$, $n^2+3n-40=0$

$(n+8)(n-5)=0$ $\quad\therefore n=5$ ($\because n\geq2$)

(2) $_nC_2+{}_{n+1}C_3=2\times{}_nP_2$에서

$\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}=2\times n(n-1)$

$n\geq2$, $n+1\geq3$에서 $n\geq2$이므로

양변을 $n(n-1)$로 나누어 정리하면

$3+(n+1)=12$ $\quad\therefore n=8$

답 (1) 5 (2) 8

22

(1) 서로 다른 7개에서 4개를 택하는 조합의 수이므로

$_7C_4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

(2) 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로

$_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

답 (1) 35 (2) 15

23

(1) A지역에서 한 곳을 택하는 경우의 수는 $_4C_1$이고, B지역에서 세 곳을 택하는 경우의 수는 $_5C_3$이므로

$_4C_1\times{}_5C_3=4\times\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=40$

(2) 두 지역 A, B의 관광지 중에서 네 곳을 택하는 경우의 수는 $_9C_4$이고, B지역에서만 네 곳을 택하는 경우의 수는 $_5C_4$이므로

$_9C_4-{}_5C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}-\frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$

$=126-5=121$

답 (1) 40 (2) 121

24

(1) $_{n+2}C_n+{}_{n+1}C_{n-1}=100$에서

$\frac{(n+2)!}{n!2!}+\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}=100$

$\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n}{2}=100$

$2n^2+4n+2=200$

$n^2+2n-99=0$, $(n+11)(n-9)=0$

$\therefore n=9$ ($\because n\geq1$)

(2) $_nC_{n-3}-{}_{n-1}C_{n-4}=15$에서

$\frac{n!}{(n-3)!3!}-\frac{(n-1)!}{(n-4)!3!}=15$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}=15$

$n(n-1)(n-2)-(n-1)(n-2)(n-3)=90$

$(n-1)(n-2)\{n-(n-3)\}=90$

$3(n-1)(n-2)=90$

즉, $(n-1)(n-2)=30$에서 $30=6\times5$이므로

$n=7$ ($\because n\geq4$)

답 (1) 9 (2) 7

25

이차방정식 ${}_{n}C_{3}x^2-{}_{n+1}C_{3}x-3\times{}_{n+2}C_{3}=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{{}_{n+1}C_{3}}{{}_{n}C_{3}}=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha\beta=\frac{-3\times{}_{n+2}C_{3}}{{}_{n}C_{3}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $4\times{}_{n}C_{3}={}_{n+1}C_{3}$이므로

$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$$

이때 $n\geq3$이므로

양변을 $\dfrac{n(n-1)}{3!}$로 나누어 정리하면

$4(n-2)=n+1$, $4n-8=n+1$

$3n=9 \qquad \therefore n=3$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\alpha\beta=\frac{-3\times{}_{5}C_{3}}{{}_{3}C_{3}}=-3\times{}_{5}C_{2}$$

$$=-3\times\frac{5\times4}{2\times1}=-30$$

답 -30

26

(1) 2와 5가 적힌 공을 모두 포함하여 뽑는 경우의 수는 2와 5가 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(2) 2와 5가 적힌 공을 모두 포함하지 않고 뽑는 경우의 수는 2와 5가 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 5개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(3) 2가 적힌 공은 포함하고 5가 적힌 공은 포함하지 않고 뽑는 경우의 수는 2와 5가 적힌 공을 제외한 8개의 공 중에서 4개의 공을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

답 (1) 56 (2) 56 (3) 70

27

A, B, C 중 한 개만 포함하여 뽑는 경우의 수는 A는 포함하고 B, C는 포함하지 않고 뽑는 경우, B는 포함하고 A, C는 포함하지 않고 뽑는 경우, C는 포함하고 A, B는 포함하지 않고 뽑는 경우로 나누어 구한다.

(ⅰ) A는 포함하고 B, C는 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

A, B, C를 제외한 6개의 과자 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{6}C_{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(ⅱ) B는 포함하고 A, C는 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

(ⅰ)과 같은 방법으로 ${}_{6}C_{3}=20$

(ⅲ) C는 포함하고 A, B는 포함하지 않고 뽑는 경우의 수

(ⅰ)과 같은 방법으로 ${}_{6}C_{3}=20$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$20+20+20=60$

답 60

다른 풀이

A, B, C 중에서 한 개를 뽑고, 그 각각에 대하여 A, B, C를 제외한 6개의 과자 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_{3}C_{1}\times{}_{6}C_{3}=3\times20=60$

28

10 이하의 자연수 1, 2, 3, ⋯, 10 중에서 5개의 자연수를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_{5}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

이때 6의 약수 중에서 적어도 2개 이상을 포함하여 택하는 경우의 수는 5개의 자연수를 택하는 모든 경우의 수에서 6의 약수 중에서 1개도 택하지 않거나 1개만 택하는 경우의 수를 빼면 된다.

6의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 6의 약수 중에서 1개도 택하지 않는 경우의 수

1, 2, 3, 6을 제외한 6개의 자연수 중에서 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_{6}C_{5}={}_{6}C_{1}=6$

(ii) 6의 약수 중에서 1개만 택하는 경우의 수

1, 2, 3, 6 중에서 하나를 택하고, 그 각각에 대하여 1, 2, 3, 6을 제외한 6개의 자연수 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1 \times {}_6C_4 = 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$252 - (6 + 60) = 186$

답 186

다른 풀이

(i) 6의 약수 중에서 2개만 포함하여 5개를 택하는 경우의 수

1, 2, 3, 6 중에서 2개를 택하고, 그 각각에 대하여 1, 2, 3, 6을 제외한 6개의 자연수 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2 \times {}_6C_3 = 6 \times 20 = 120$

(ii) 6의 약수 중에서 3개만 포함하여 5개를 택하는 경우의 수

1, 2, 3, 6 중에서 3개를 택하고, 그 각각에 대하여 1, 2, 3, 6을 제외한 6개의 자연수 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_3 \times {}_6C_2 = {}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$

(iii) 6의 약수 4개를 모두 포함하여 5개를 택하는 경우의 수

1, 2, 3, 6 중에서 4개를 택하고, 그 각각에 대하여 1, 2, 3, 6을 제외한 6개의 자연수 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_4 \times {}_6C_1 = 1 \times 6 = 6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120 + 60 + 6 = 186$

29

(1) 남자 4명 중 2명과 여자 3명 중 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18$

그 각각에 대하여 뽑은 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$18 \times 24 = 432$

(2) 9개의 자연수 중 4개를 뽑을 때, 2는 포함하고 7은 포함하지 않도록 뽑는 경우의 수는 2를 먼저 뽑은 다음 2, 7을 제외한 7개의 자연수 중 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_3 = 35$

그 각각에 대하여 뽑은 3개의 수와 2의 총 4개의 수를 이용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4! = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$35 \times 24 = 840$

답 (1) 432 (2) 840

30

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이고, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

5개의 홀수 중에서 2개를 택하고, 4개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60$

그 각각에 대하여 뽑은 홀수 2개와 짝수 2개의 총 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4! = 24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$60 \times 24 = 1440$

답 1440

31

네 수 a, b, c, d 중 한 개 이상이 짝수이면 네 수의 곱 $abcd$가 짝수가 된다. 즉, 구하는 경우의 수는 모든 순서쌍의 개수에서 네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 순서쌍의 개수를 빼서 구할 수 있다.

만들 수 있는 순서쌍 (a, b, c, d)의 총 개수는

$({}_5C_2 \times 2!) \times ({}_4C_2 \times 2!) = (10 \times 2) \times (6 \times 2) = 240$

네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 순서쌍의 개수는

$({}_3C_2 \times 2!) \times ({}_2C_2 \times 2!) = (3 \times 2) \times (1 \times 2) = 12$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$240 - 12 = 228$

답 228

보충 설명

1, 2, 3, 4, 5 중에서 뽑은 두 수 a, b와 6, 7, 8, 9 중에서 뽑은 두 수 c, d의 총 4개의 수를 일렬로 나열하는 것으로 착각하지 않도록 주의한다.
예를 들어 1, 2, 6, 7을 뽑았을 때, 이들 네 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이지만 1, 2를 a, b의 자리에, 6, 7을 c, d의 자리에 각각 나열하는 경우의 수는 $2!\times2!$이다.

32

정팔각형의 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 정팔각형의 변의 개수인 8을 뺀 값과 같으므로

$a={}_8C_2-8=28-8=20$

정팔각형의 8개의 꼭짓점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는

$b={}_8C_3=56$

$\therefore\ b-a=56-20=36$

답 36

33

9개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_9C_2=36$

주어진 그림에서 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 일직선 위의 점 중에서 2개의 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이다. 이때 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 9개의 점 중에서 2개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수는

$36-3\times6+3=21$

답 21

보충 설명

직선의 개수를 ${}_9C_2-3\times{}_4C_2$로 구하지 않도록 주의한다.
삼각형의 각 변 위의 네 점 중 두 점으로 만들 수 있는 직선을 모두 빼면 삼각형의 세 변을 포함한 세 직선도 제외되므로 반드시 이 세 직선을 포함하여 직선의 개수를 구해야 한다.

34

10개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

주어진 그림에서 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 5개이고, 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.
이때 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$120-5\times4=120-20=100$

답 100

35

가로 방향의 선 2개와 세로 방향의 선 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어진다.
도형의 가로 방향의 선 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

도형의 세로 방향의 선 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

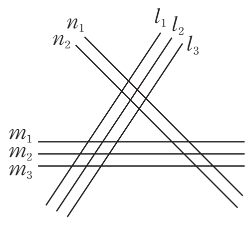
따라서 구하는 직사각형의 개수는

$10\times15=150$

답 150

36

오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 각각 l_i, m_j, n_k $(i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3,\ k=1,\ 2)$라 하면 만들 수 있는 서로 다른 평행사변형의 개수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.



(i) l_i에서 2개, m_j에서 2개의 평행선을 택하는 경우의 수

${}_3C_2\times{}_3C_2=3\times3=9$

(ii) m_j에서 2개, n_k에서 2개의 평행선을 택하는 경우의 수

${}_3C_2\times{}_2C_2=3\times1=3$

(iii) n_k에서 2개, l_i에서 2개의 평행선을 택하는 경우의 수

${}_2C_2\times{}_3C_2=1\times3=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 평행사변형의 개수는

$9+3+3=15$

답 15

37

n개의 평행선 중에서 2개, $(n+3)$개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 만들어진다.

n개의 평행선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{n}C_{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$(n+3)$개의 평행선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{n+3}C_{2}=\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}=280$

$(n-1)n(n+2)(n+3)=1120$

이때 $1120=4\times5\times7\times8$이므로

$n=5$

답 5

38

(1) 서로 다른 종류의 책 9권을 2권, 3권, 4권씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$_{9}C_{2}\times{}_{7}C_{3}\times{}_{4}C_{4}=36\times35\times1=1260$

(2) 서로 다른 종류의 책 9권을 3권, 3권, 3권씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$_{9}C_{3}\times{}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{3}\times\dfrac{1}{3!}=84\times20\times1\times\dfrac{1}{6}$

$=280$

(3) 서로 다른 종류의 책 9권을 4권, 4권, 1권씩 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$_{9}C_{4}\times{}_{5}C_{4}\times{}_{1}C_{1}\times\dfrac{1}{2!}=126\times5\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=315$

세 묶음을 서로 다른 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$315\times6=1890$

답 (1) 1260 (2) 280 (3) 1890

39

8명의 학생을 2명씩 짝지어 4개의 그룹으로 나눌 때, 적어도 한 개의 그룹은 여학생만으로 이루어지도록 하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 모든 그룹이 남녀 한 쌍으로 이루어지도록 하는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

8명의 학생을 2명씩 짝지어 4개의 그룹으로 나누는 경우의 수는

$_{8}C_{2}\times{}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}\times\dfrac{1}{4!}=28\times15\times6\times1\times\dfrac{1}{24}$

$=105$

모든 그룹이 남녀 한 쌍으로 이루어지도록 하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$105-24=81$

답 81

보충 설명

모든 그룹이 남녀 한 쌍으로 이루어지는 경우는 남학생 4명에 대하여 각각 여학생 1명씩을 대응시키는 경우로 생각할 수 있다. 즉, 여학생 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

40

3명의 학생에게 5일 동안의 봉사 당번을 배정할 때, 어떤 학생도 5일 중 3일 이상 당번을 하지 않도록 정하려면 한 학생이 1일, 두 학생이 2일씩 당번을 해야 한다.

5일을 1일, 2일, 2일의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$_{5}C_{1}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{2}\times\dfrac{1}{2!}=5\times6\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=15$

세 묶음을 서로 다른 학생 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6=90$

답 90

41

8명을 4명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$_{8}C_{4}\times{}_{4}C_{4}\times\dfrac{1}{2!}=70\times1\times\dfrac{1}{2}=35$

이때 각 조에서 다시 2명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)$

$=3\times3=9$

$=\left(6\times1\times\frac{1}{2}\right)\times\left(6\times1\times\frac{1}{2}\right)$

$=3\times3=9$

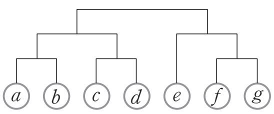
따라서 구하는 경우의 수는

$35\times9=315$

답 315

42

다음과 같이 주어진 대진표에서 배정받을 수 있는 7개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



이때 선수 A, B가 결승전 이전에 서로 대결하는 일이 없도록 하려면 a, b, c, d와 e, f, g의 두 개 조에 한 선수씩 배정되어야 하므로 A, B를 배정할 조를 고르는 경우의 수는

$2!=2$

선수 A, B를 제외한 나머지 5명의 선수를 3명과 2명의 두 개 조로 나누는 경우의 수는

${}_5C_3\times{}_2C_2=10\times1=10$

이때 a, b, c, d에 배정된 4명의 선수를 2명씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

또한, e, f, g에 배정된 3명의 선수를 2명과 1명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_1C_1=3\times1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times10\times3\times3=180$

답 180

보충 설명

e, f, g에 배정된 3명의 선수를 2명과 1명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는 부전승으로 올라가는 1팀을 택하는 경우의 수와 같으므로 다음과 같이 구할 수도 있다.

${}_3C_1=3$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.263~264

13 ③	**14** $\frac{7}{3}$	**15** 31	**16** 115
17 4	**18** 90	**19** 21600	**20** 50
21 105	**22** 97	**23** 1806	**24** 60

13

${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$이므로

ㄱ. ${}_nP_r={}_nC_r\times r!$ (참)

ㄴ. ${}_nP_r-r\times{}_{n-1}P_{r-1}$

$=\frac{n!}{(n-r)!}-\frac{r\times(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!}-\frac{r\times(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}(n-r)$

$=\frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}={}_{n-1}P_r$ (거짓)

ㄷ. ${}_{n+1}C_r=\frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!}$이고

${}_{n+1}C_{n-r+1}=\frac{(n+1)!}{(n-r+1)!r!}$이므로

${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n-r+1}$ (참)

ㄹ. $n\times{}_{n-1}C_{r-1}=\frac{n\times(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{r\times n!}{r!(n-r)!}$

$=r\times{}_nC_r$ (거짓)

ㅁ. ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$

$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}+\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}$

$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$=\frac{r\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{r+(n-r)\}(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ의 3개이다.

답 ③

14

이차방정식 ${}_{n}\mathrm{C}_2x^2-({}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_3)x+{}_{n}\mathrm{C}_3=0$의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{7}{2}$ ……㉠

(두 근의 곱)$=\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_2}$ ……㉡

㉠에서 ${}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_3=\dfrac{7}{2}\times{}_{n}\mathrm{C}_2$

$\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}+\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}$

$=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{n(n-1)}{2!}$

$n-1\geq4$에서 $n\geq5$이므로

양변을 $\dfrac{n-1}{4!}$로 나누어 정리하면

$(n-2)(n-3)(n-4)+4(n-2)(n-3)=42n$

$(n-2)(n-3)n=42n$

$(n-2)(n-3)=42$ $(\because n\geq5)$, $n^2-5n-36=0$

$(n+4)(n-9)=0$ $\quad\therefore n=9$ $(\because n\geq5)$

이것을 ㉡에 대입하면

(두 근의 곱)$=\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{{}_{9}\mathrm{C}_3}{{}_{9}\mathrm{C}_2}=\dfrac{84}{36}=\dfrac{7}{3}$

답 $\dfrac{7}{3}$

다른 풀이

$\dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_2}=\dfrac{7}{2}$에서 $2({}_{n-1}\mathrm{C}_4+{}_{n-1}\mathrm{C}_3)=7\times{}_{n}\mathrm{C}_2$

$2\times{}_{n}\mathrm{C}_4=7\times{}_{n}\mathrm{C}_2$

$2\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=7\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}$

이때 $n-1\geq4$에서 $n\geq5$이므로

양변을 $\dfrac{n(n-1)}{2}$로 나누어 정리하면

$\dfrac{(n-2)(n-3)}{6}=7$, $n^2-5n-36=0$

$(n+4)(n-9)=0$ $\quad\therefore n=9$ $(\because n\geq5)$

15

500보다 크고 800보다 작은 세 자리 자연수의 백의 자리의 숫자는 5 또는 6 또는 7이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) $a=5$일 때,

$c<b<5$이므로 1, 2, 3, 4 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

즉, 이 경우의 수는

${}_{4}\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(ii) $a=6$일 때,

$c<b<6$이므로 1, 2, 3, 4, 5 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

즉, 이 경우의 수는

${}_{5}\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(iii) $a=7$일 때,

$c<b<7$이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

즉, 이 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는

$6+10+15=31$

답 31

16

서로 다른 10장의 카드 중에서 4장을 택할 때, 흰색 카드가 2장 이상 포함되는 경우의 수는 10장의 카드 중 4장을 택하는 모든 경우의 수에서 흰색이 0장 또는 1장 포함되는 경우의 수를 빼서 구할 수 있다.

10장의 카드 중 4장을 택하는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

(i) 택한 4장의 카드가 모두 주황색 카드인 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_4={}_{6}\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ii) 택한 4장의 카드 중 3장은 주황색 카드, 1장은 흰색 카드인 경우의 수는

${}_{6}\mathrm{C}_3\times{}_{4}\mathrm{C}_1=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times4=80$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$210-(15+80)=115$

답 115

17

이 모임의 여자 회원이 x명이라 하자.

9명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

여자 회원만으로 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_xC_3=\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

남자 회원을 적어도 한 명 포함하여 대표를 뽑는 경우의 수가 80이므로

$$84-\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)=80$$

$\therefore\ x(x-1)(x-2)=24$

이때 $24=4\times3\times2$이므로

$x=4$

따라서 여자 회원의 수는 4이다.

답 4

18

크기가 서로 다른 6개의 사탕 중에서 4개를 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

그 각각에 대하여 뽑은 4개의 사탕 중에서 가장 작은 사탕의 자리는 맨 앞으로 고정되므로 가장 작은 사탕 1개를 제외한 3개의 사탕을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6=90$

답 90

19

의자 10개 중에서 흰색 의자 4개, 검은색 의자 3개를 뽑는 경우의 수는

흰색 의자 5개 중 4개

$${}_5C_4\times{}_5C_3={}_5C_1\times{}_5C_2=5\times10=50$$

검은색 의자 5개 중 3개

한편, 한가운데 의자인 4번째 의자를 중심으로 색상이 대칭이 되도록 나열해야 하므로 4번째 의자의 색상은 검은색이고, 나머지 흰색 의자 4개, 검은색 의자 2개를 색상이 대칭이 되도록 나열하는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

(i) 흰 흰 검 검 검 흰 흰

(ii) 흰 검 흰 검 흰 검 흰

(iii) 검 흰 흰 검 흰 흰 검

이때 각각의 경우에 대하여 4번째 자리에 올 검은색 의자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이고, 나머지 검은색 의자 2개를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

흰색 의자 4개를 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$50\times\{3\times(3\times2\times24)\}=21600$

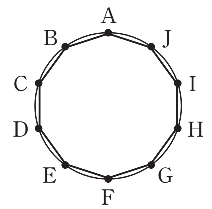
답 21600

20

원 위의 10개의 점 중에서 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

이때 오른쪽 그림과 같이 각 점을 A, B, C, …, J라 하면 정십각형과 변을 공유하는 삼각형은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.



(i) 정십각형과 한 변만 공유하는 삼각형의 개수

삼각형과 정십각형이 변 AB만을 공유할 때, 나머지 꼭짓점은 D, E, F, G, H, I 중 하나이므로 이 경우의 삼각형의 개수는

${}_6C_1=6$

같은 방법으로 변 BC, CD, DE, …, JA만을 공유하는 삼각형의 개수도 각각 6이므로 정십각형과 한 변만을 공유하는 삼각형의 개수는

$10\times6=60$

(ii) 정십각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수

삼각형 ABC, BCD, CDE, …, JAB의 10개이다.

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$120-(60+10)=50$

답 50

보충 설명

삼각형이 정십각형과 두 변을 공유하려면 반드시 이웃하는 두 변을 공유해야만 삼각형으로 만들어진다.

따라서 이와 같은 삼각형은 이웃한 두 변의 꼭짓점에 대하여 나머지 두 꼭짓점이 결정되므로 정십각형과 두 변을 공유하는 삼각형의 개수는 정십각형의 꼭짓점의 개수와 일치한다.

21

주어진 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형은 모두 점 A를 한 꼭짓점으로 하는 삼각형이다.

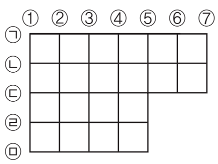
따라서 점 A를 지나고 두 선분 BD, CE를 포함한 세로 방향의 6개의 선분 중 2개를 택하고, 두 선분 BC, DE를 포함한 가로 방향의 7개의 선분 중 1개를 택하면 삼각형이 만들어지므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_6C_2 \times {}_7C_1 = 15 \times 7 = 105$

답 105

22

오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 선을 위에서부터 ㉠, ㉡, ㉢, ⋯, ㉤, 세로 방향의 선을 왼쪽에서부터 ①, ②, ③, ⋯, ⑦이라 하자.



(i) ㉠, ㉡, ㉢에서 2개, ①~⑦에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_7C_2 = 3 \times 21 = 63$$

(ii) ㉠~㉤에서 2개, ①~⑤에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

(iii) ㉠, ㉡, ㉢에서 2개, ①~⑤에서 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_5C_2 = 3 \times 10 = 30$$ ← (i), (ii)에서 중복되는 사각형의 개수

(i), (ii), (iii)에서 직사각형의 총 개수는

$63 + 100 - 30 = 133$

한편, 한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형의 개수는 각각 20, 11, 4, 1이므로 정사각형의 총 개수는

$20 + 11 + 4 + 1 = 36$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$133 - 36 = 97$

답 97

23

$7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3$이므로

서로 다른 인형 7개를 1개 이상씩 포함하는 세 묶음으로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 인형을 1개, 1개, 5개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} &= 7 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

(ii) 인형을 1개, 2개, 4개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times 15 \times 1 = 105$$

(iii) 인형을 1개, 3개, 3개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} &= 7 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= 70 \end{aligned}$$

(iv) 인형을 2개, 2개, 3개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} &= 21 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= 105 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 서로 다른 7개의 인형을 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$21 + 105 + 70 + 105 = 301$

그 각각에 대하여 세 묶음을 서로 다른 3개의 가방에 나누어 넣는 경우의 수는

$3! = 6$

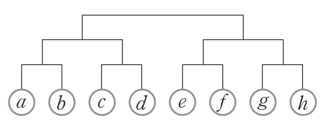
따라서 구하는 경우의 수는

$301 \times 6 = 1806$

답 1806

24

다음과 같이 주어진 대진표의 8개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 a, b, c, d, e, f, g, h라 하자.



조건 (가)에서 1반과 2반이 준결승전 이전에 서로 대결하지 않도록 하려면 a, b와 c, d 또는 e, f와 g, h의 두 개 조에 한 반씩 배정되어야 하고, 조건 (나)에서 2반과 5반이 결승전 이전에 서로 대결하지 않도록 하려면 a, b, c, d와 e, f, g, h의 두 개 조에 한 반씩 배정되어야 한다.

즉, 1반, 2반, 5반을 제외한 5개의 반을 1반, 2반과 결승전 이전에 만날 2개 반과 5반과 결승전 이전에 만날 3개 반의 두 조로 나누는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_3=10\times1=10$

그 각각에 대하여 1반, 2반과 결승전 이전에 만나는 2개의 반을 1반 또는 2반과 맨 처음에 경기하도록 짝을 정하는 경우의 수는

$2!=2$

또한, 5반과 결승전 이전에 만나는 3개의 반과 5반을 포함한 4개의 반을 2반씩 2개의 조로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times3=60$

답 60

STEP 2 개념 마무리 본문 p.265

1 112	**2** 360	**3** 10	**4** 40
5 4620	**6** 90		

1

조건 ㈎에서 A와 B는 이웃하여 앉으므로 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) A와 B가 가운데 줄에 이웃하여 앉는 경우

가운데 줄 3개의 좌석 중 2개에 두 사람 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

${}_2P_2\times2!=2\times2=4$

그 각각에 대하여

㉠ C, D, E, F의 4명이 앞줄 1개, 가운데 줄 1개, 뒷줄 2개의 좌석에 한 사람씩 앉는 경우의 수는

${}_4P_4=24$

㉡ C, D가 뒷줄 2개의 좌석에 이웃하여 앉고, 나머지 좌석에 E, F가 앉는 경우의 수는

${}_2P_2\times{}_2P_2=2\times2=4$

㉠, ㉡에서 조건 ㈏를 만족시키는 경우의 수는

$24-4=20$

즉, 이 경우의 수는

$4\times20=80$

(ii) A와 B가 뒷줄에 이웃하여 앉는 경우

뒷줄 2개의 의자에 두 사람 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2!=2$

그 각각에 대하여

㉢ C, D, E, F의 4명이 앞줄 1개, 가운데 줄 3개의 좌석에 한 사람씩 앉는 경우의 수는

${}_4P_4=24$

㉣ C, D가 가운데 줄 3개의 좌석 중 2개에 이웃하여 앉고, 나머지 좌석에 E, F가 앉는 경우의 수

${}_2P_2\times2!\times{}_2P_2=2\times2\times2=8$

㉢, ㉣에서 조건 ㈏를 만족시키는 경우의 수는

$24-8=16$

즉, 이 경우의 수는

$2\times16=32$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$80+32=112$

답 112

2

서로 다른 종류의 볼펜 3자루와 같은 종류의 지우개 3개를 5명의 학생에게 남김없이 나누어 주고, 아무것도 받지 못한 학생이 없으려면 5명 중 한 학생은 볼펜과 지우개 중에서 2개를 받고 나머지 4명의 학생은 1개씩 받아야 한다.

(i) 지우개를 2개 받는 학생이 있는 경우

지우개 2개를 하나의 세트라고 생각하면 서로 다른 볼펜 3자루, 지우개 1개, 세트 1개를 5명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

서로 다른 5가지이다.

$5!=120$

(ii) 볼펜 1자루와 지우개 1개를 받는 학생이 있는 경우

5명의 학생 중에서 지우개를 하나씩 받고 볼펜은 받지 않는 학생 두 명을 고르는 경우의 수는

${}_5C_2=10$ ← 지우개끼리는 구분되지 않으므로 조합이다.

볼펜 1자루와 지우개 1개를 하나의 세트라고 생각하면 볼펜 3자루 중에서 세트에 들어갈 볼펜을 고르는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

그 각각에 대하여 지우개 1개만 받는 2명의 학생을 제외한 나머지 3명의 학생에게 서로 다른 $\underbrace{\text{볼펜 2자루와 세트 1개}}_{\text{서로 다른 3가지이다.}}$를 나누어 주는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이 경우의 수는

$10\times3\times6=180$

(iii) 볼펜 2자루를 받는 학생이 있는 경우

5명의 학생 중에서 지우개를 하나씩 받고, 볼펜을 받지 않는 학생 세 명을 고르는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

볼펜 2자루를 하나의 세트라고 생각하면 볼펜 3자루 중에서 세트에 들어갈 볼펜 2자루를 고르는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

그 각각에 대하여 지우개 1개만 받는 3명의 학생을 제외한 나머지 2명의 학생에게 $\underbrace{\text{볼펜 세트 1개와 볼펜 1자루}}_{\text{서로 다른 2가지이다.}}$를 나누어 주는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$10\times3\times2=60$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$120+180+60=360$

답 360

3

총 $2n$명의 학생이 다른 학생과 모두 한 번씩 팔씨름을 하는 횟수는

${}_{2n}C_2=\dfrac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$

축구부 학생끼리 팔씨름을 하는 횟수는

${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

동일한 등번호의 학생끼리 팔씨름을 하는 횟수는 n

이때 주어진 규칙에 따라 팔씨름을 한 횟수가 총 135이므로

$n(2n-1)-\dfrac{n(n-1)}{2}-n=135$

$n^2-n-90=0,\ (n+9)(n-10)=0$

$\therefore\ n=10\ (\because\ n\geq2)$

답 10

4

1, 2, 3, 4, 6, 12 중 서로 다른 두 수 a, b에 대하여 a, b의 곱에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $ab=6$일 때,

a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 3)$의 2개이다.

이 중에서 1개를 택하여 양 끝에 놓고, 나머지 1개를 가운데에 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_2C_1\times\underbrace{2!\times2!}_{a,\,b\text{끼리 자리를 바꾸는 경우의 수}}=8$

(ii) $ab=12$일 때,

a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$의 3개이다.

이 중에서 1개를 택하여 양 끝에 놓고, 나머지 2개 중에서 1개를 택하여 가운데에 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times\underbrace{2!\times2!}_{a,\,b\text{끼리 자리를 바꾸는 경우의 수}}=24$

(iii) $ab=24$일 때,

a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 12)$, $(4, 6)$의 2개이다.

이 중에서 1개를 택하여 양 끝에 놓고, 나머지 1개를 가운데에 놓으면 되므로 이 경우의 수는

${}_2C_1\times\underbrace{2!\times2!}_{a,\,b\text{끼리 자리를 바꾸는 경우의 수}}=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$8+24+8=40$

답 40

5

1반 학생 3명이 3개의 조에 적어도 1명씩 들어가는 경우의 수는 1

$8=1+3+4=2+2+4=2+3+3$이므로

2반 학생 8명을 3개의 조로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 1명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_1\times{}_7C_3\times{}_4C_4=8\times35\times1=280$

(ii) 2명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는

${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\dfrac{1}{2!}=28\times15\times1\times\dfrac{1}{2}=210$

(iii) 2명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=28\times20\times1\times\frac{1}{2}=280$$

(i), (ii), (iii)에서 2반 학생 8명을 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$280+210+280=770$

그 각각에 대하여 3개의 조를 1반 학생이 한 명씩 들어 있는 3개의 조에 배정하는 경우의 수는

$3!=6$

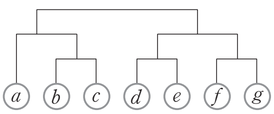
따라서 구하는 경우의 수는

$1\times770\times6=4620$

답 4620

6

다음과 같이 주어진 대진표의 7개의 자리를 왼쪽에서부터 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



(i) 실력이 3위인 팀이 a에 배정되는 경우

b, c에는 실력이 4위에서 7위인 팀이 배정되어야 하므로 대진표를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2\times\underbrace{\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)}_{\text{나머지 4팀을 } d,\ e,\ f,\ g\text{에 배정하는 경우의 수}}=6\times\left(6\times1\times\frac{1}{2}\right)=18$$

(ii) 실력이 3위인 팀이 b 또는 c에 배정되는 경우

b 또는 c에서 남은 한 자리와 a에는 실력이 4위에서 7위인 팀이 배정되어야 하므로 대진표를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1\times{}_3C_1\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)$$

$$=4\times3\times\left(6\times1\times\frac{1}{2}\right)=36$$

(iii) 실력이 3위인 팀이 d 또는 e 또는 f 또는 g에 배정되는 경우

d 또는 e 또는 f 또는 g의 남은 자리에는 실력이 4위에서 7위인 팀이 배정되어야 하므로 대진표를 정하는 경우의 수는

$$\overbrace{{}_4C_1}^{\text{3위인 팀과 짝이 되는 팀을 정하는 경우의 수}}\times{}_3C_2\times\underbrace{{}_3C_1\times{}_2C_2}_{\text{나머지 세 팀을 } a,\ b,\ c\text{에 배정하는 경우의 수}}=4\times3\times3\times1=36$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$18+36+36=90$

답 90

IV. 행렬

11. 행렬

1 행렬

기본+필수연습 본문 pp.270~273

01 (1) 행의 개수 : 1, 열의 개수 : 3
(2) 행의 개수 : 2, 열의 개수 : 3

02 ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 $\begin{pmatrix}1&4&9\\4&7&12\end{pmatrix}$

04 $a=-4$, $b=-4$, $c=2$, $d=3$

05 6 **06** -5 **07** $\begin{pmatrix}0&2&0\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

08 45 **09** 19 **10** 10

01

(1) 행렬 $\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}$은 행의 개수가 1, 열의 개수가 3이다.

(2) 행렬 $\begin{pmatrix}1&1&3\\4&0&2\end{pmatrix}$는 행의 개수가 2, 열의 개수가 3이다.

답 (1) 행의 개수 : 1, 열의 개수 : 3
(2) 행의 개수 : 2, 열의 개수 : 3

02

ㄱ. 행렬 A는 행의 개수가 2, 열의 개수가 2인 이차 정사각행렬이다. (참)

ㄴ. (3, 2) 성분은 제3행과 제2열이 만나는 곳에 위치한 성분이므로 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 4는 제1행과 제2열이 만나는 곳에 위치한 성분이므로 (1, 2) 성분이다. (참)

ㄹ. 행렬 A의 제2행의 성분은 5, 7이므로 구하는 합은 $5+7=12$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

$i=1,\ j=1$이면 $a_{11}=1^2+1^2-1=1$

$i=1,\ j=2$이면 $a_{12}=1^2+2^2-1=4$

$i=1,\ j=3$이면 $a_{13}=1^2+3^2-1=9$

$i=2,\ j=1$이면 $a_{21}=2^2+1^2-1=4$

$i=2,\ j=2$이면 $a_{22}=2^2+2^2-1=7$

$i=2,\ j=3$이면 $a_{23}=2^2+3^2-1=12$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

04

두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$a-2b=4,\ -3=a+1,\ 5=c+d,\ 2d+1=7$

$\therefore\ a=-4,\ b=-4,\ c=2,\ d=3$

답 $a=-4,\ b=-4,\ c=2,\ d=3$

05

(i) $i>j$이면 $a_{ij}=2i+j$이므로

$a_{21}=2\times2+1=5$

$a_{31}=2\times3+1=7$

$a_{32}=2\times3+2=8$

(ii) $i=j$이면 $a_{ij}=i-2j$이므로

$a_{11}=1-2\times1=-1$

$a_{22}=2-2\times2=-2$

$a_{33}=3-2\times3=-3$

(iii) $i<j$이면 $a_{ij}=-a_{ji}+k$이므로

$a_{12}=-a_{21}+k=k-5$

$a_{13}=-a_{31}+k=k-7$

$a_{23}=-a_{32}+k=k-8$

(i), (ii), (iii)에서

$A=\begin{pmatrix} -1 & k-5 & k-7 \\ 5 & -2 & k-8 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 12이므로

$-1+(k-5)+(k-7)+5+(-2)+(k-8)$
$+7+8+(-3)$

$=3k-6=12$

$3k=18\qquad\therefore\ k=6$

답 6

다른 풀이

$i=j$일 때, $a_{ij}=i-2j$이므로 $a_{ii}=-i$

즉, 행렬 A의 모든 성분의 합은

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33}$

$=(-1)+(-a_{21}+k)+(-a_{31}+k)+a_{21}$
$+(-2)+(-a_{32}+k)+a_{31}+a_{32}+(-3)$

$=3k-6=12$

$3k=18\qquad\therefore\ k=6$

06

$a_{ij}=(-1)^{i+j}+kj$이므로

$a_{11}=(-1)^2+k=k+1$

$a_{12}=(-1)^3+2k=2k-1$

$a_{13}=(-1)^4+3k=3k+1$

$a_{21}=(-1)^3+k=k-1$

$a_{22}=(-1)^4+2k=2k+1$

$a_{23}=(-1)^5+3k=3k-1$

이때 $b_{ij}=-a_{ji}$이므로

$B=\begin{pmatrix} -k-1 & -k+1 \\ -2k+1 & -2k-1 \\ -3k-1 & -3k+1 \end{pmatrix}$

이때 행렬 B의 모든 성분의 합이 60이므로

$(-k-1)+(-k+1)+(-2k+1)+(-2k-1)$
$+(-3k-1)+(-3k+1)$

$=-12k=60$

$\therefore\ k=-5$

답 -5

07

지점 1에서 지점 1, 2, 3으로 가는 일방통행로의 수는 각각 0, 2, 0이므로

$a_{11}=0,\ a_{12}=2,\ a_{13}=0$

지점 2에서 지점 1, 2, 3으로 가는 일방통행로의 수는 각각 1, 1, 1이므로

$a_{21}=1,\ a_{22}=1,\ a_{23}=1$

지점 3에서 지점 1, 2, 3으로 가는 일방통행로의 수는 각각 1, 1, 0이므로

$a_{31}=1,\ a_{32}=1,\ a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

08

두 행렬 A, B의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$x^2-y=-3x-1$ ⋯⋯㉠

$2xz=16$ ⋯⋯㉡

$x+1=z-1$ ⋯⋯㉢

$4=2y-6$ ⋯⋯㉣

㉣에서 $2y=10$ $\therefore y=5$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-5=-3x-1$

$x^2+3x-4=0,\ (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i) $x=-4$를 ㉢에 대입하면

$-3=z-1$ $\therefore z=-2$

이때 $x=-4,\ z=-2$는 ㉡을 만족시킨다.

(ii) $x=1$을 ㉢에 대입하면

$2=z-1$ $\therefore z=3$

이때 $x=1,\ z=3$은 ㉡을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=-4,\ y=5,\ z=-2$이므로

$x^2+y^2+z^2=(-4)^2+5^2+(-2)^2=45$

답 45

09

두 행렬 A, B의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$x-y=3$ ⋯⋯㉠

$\frac{5}{y}=x$ ⋯⋯㉡

$10=2xy$ ⋯⋯㉢

㉡, ㉢에서 $xy=5$이므로

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=3^2+2\times5$ (∵ ㉠)

$=19$

답 19

10

$a_{ij}=-i+2j$이므로

$a_{11}=-1+2\times1=1,\ a_{12}=-1+2\times2=3,$

$a_{21}=-2+2\times1=0,\ a_{22}=-2+2\times2=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

이때 $A=B$에서 두 행렬 A, B의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$z=1,\ x+y=3,\ xy=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y)^2-2xy+z^2$

$=3^2-2\times0+1^2$

$=10$

답 10

STEP 1 개념 마무리 본문 p.274

01 ③	**02** 5	**03** -2	**04** 4
05 10	**06** $-\frac{29}{6}$		

01

① 행렬 A는 행의 개수가 2개, 열의 개수가 3개이므로 2×3 행렬이다.

② 행렬 A의 제2행의 성분은 4, 0, -2이다.

③ 행렬 A의 제3열의 성분은 2, -2이므로 그 합은 $2+(-2)=0$

④ $(1, 3)$ 성분은 제1행과 제3열이 만나는 곳에 위치한 성분이므로 2이다.

⑤ a_{12}는 $(1, 2)$ 성분이고, $(1, 2)$ 성분은 제1행과 제2열이 만나는 곳에 위치한 성분이므로 -3이다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

02

행렬 A의 제1열의 성분은 $a-2b$, $a+b$이므로 그 합은

$(a-2b)+(a+b)=2a-b$

또한, 행렬 A의 제2행의 성분은 $a+b$, $b-3a$이므로 그 합은

$(a+b)+(b-3a)=-2a+2b$

제1열의 성분의 합이 7, 제2행의 성분의 합이 -8이므로

$2a-b=7$, $-2a+2b=-8$

이 두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

따라서 행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은

$2a+b=2\times3-1=5$

답 5

03

(i) $i\le j$이면 $a_{ij}=j-i$이므로

$a_{11}=1-1=0$, $a_{12}=2-1=1$, $a_{13}=3-1=2$,

$a_{22}=2-2=0$, $a_{23}=3-2=1$, $a_{33}=3-3=0$

(ii) $i>j$이면 $a_{ij}=-ka_{ji}$이므로

$a_{21}=-ka_{12}=-k$, $a_{31}=-ka_{13}=-2k$,

$a_{32}=-ka_{23}=-k$

(i), (ii)에서

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -k & 0 & 1 \\ -2k & -k & 0 \end{pmatrix}$$

행렬 A의 모든 성분의 합이 12이므로

$0+1+2+(-k)+0+1+(-2k)+(-k)+0$

$=-4k+4=12$

$4k=-8$ $\qquad\therefore k=-2$

답 -2

04

스위치 1만 닫혀 있을 때, 전구는 켜지지 않으므로

$a_{11}=0$

두 스위치 1, 2가 동시에 닫혀 있을 때, 전구는 켜지지 않으므로 $a_{12}=a_{21}=0$

두 스위치 1, 3이 동시에 닫혀 있을 때, 전구는 켜지므로

$a_{13}=a_{31}=1$

스위치 2만 닫혀 있을 때, 전구는 켜지지 않으므로

$a_{22}=0$

두 스위치 2, 3이 동시에 닫혀 있을 때, 전구는 켜지므로

$a_{23}=a_{32}=1$

스위치 3만 닫혀 있을 때, 전구는 켜지지 않으므로

$a_{33}=0$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 4이다.

답 4

05

두 행렬 A, B의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$x^2-2ax=5$ ……㉠

$4=2a$ ……㉡

$8y=y^2+2by$ ……㉢

$0=b-3$ ……㉣

㉡에서 $a=2$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ $(\because x>0)$

㉣에서 $b=3$이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$y^2-2y=0$, $y(y-2)=0$

$\therefore y=2$ $(\because y>0)$

따라서 xy의 값은 $5\times2=10$이다.

답 10

06

주어진 등식이 성립하려면 양변의 두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$\dfrac{b}{a}=9$ ……㉠

$ca=\dfrac{1}{2}$ ……㉡

$|a-b|=a-b$ ……ⓒ

$\frac{1}{2}=\frac{c}{b}$ ……ⓓ

ⓐ에서 $a=\frac{b}{9}$, ⓓ에서 $c=\frac{b}{2}$

이것을 ⓑ에 대입하면

$\frac{b}{2}\times\frac{b}{9}=\frac{1}{2}$

$b^2=9 \quad \therefore b=\pm3$

$\therefore a=\frac{1}{3}, b=3$ 또는 $a=-\frac{1}{3}, b=-3$ ($\because$ ⓐ)

ⓒ에서 $a-b\ge0$, 즉 $a\ge b$이므로

$a=-\frac{1}{3}, b=-3, c=-\frac{3}{2}$ ($\because$ ⓓ)

$\therefore a+b+c=-\frac{1}{3}+(-3)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{29}{6}$

답 $-\frac{29}{6}$

2 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

기본 + 필수연습

본문 pp.278~281

11 (1) $\begin{pmatrix}-6&2\\1&8\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}9&1\\-4&-1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-8&1\\2&4\end{pmatrix}$

12 (1) $\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3}\\0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-6&12\\3&-3\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}4&12\\1&3\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}12&-4\\-3&7\end{pmatrix}$

13 (1) $\begin{pmatrix}8&-15&-3\\3&14&-4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}15&-24&-7\\7&29&-2\end{pmatrix}$

14 $\begin{pmatrix}5&-2&-4\\1&-2&-2\end{pmatrix}$

15 $\begin{pmatrix}0&-4\\10&4\end{pmatrix}$ **16** $-1, \frac{7}{3}$ **17** 13

18 (1) $\begin{pmatrix}-1&\frac{10}{3}\\\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-9&5\\-2&-5\end{pmatrix}$

19 $\begin{pmatrix}1&-6\\1&-1\end{pmatrix}$ **20** $\begin{pmatrix}1&1&1\\7&8&9\end{pmatrix}$

11

(1) $A+C=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&0\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&2\\1&8\end{pmatrix}$

(2) $B-C=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&0\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1\\-4&-1\end{pmatrix}$

(3) $C-(B-A)$

$=\begin{pmatrix}-7&0\\3&5\end{pmatrix}-\left\{\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}-7&0\\3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&1\\2&4\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}-6&2\\1&8\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}9&1\\-4&-1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-8&1\\2&4\end{pmatrix}$

12

(1) $\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3}\\0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(2) $-3B=-3\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&12\\3&-3\end{pmatrix}$

(3) $2A-B=2\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&8\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12\\1&3\end{pmatrix}$

(4) $2A+3B=2\begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&8\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&-12\\-3&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&-4\\-3&7\end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix}1&\frac{4}{3}\\0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-6&12\\3&-3\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}4&12\\1&3\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}12&-4\\-3&7\end{pmatrix}$

13

(1) $3(A-B)-2B$

$=3A-3B-2B$

$=3A-5B$

$=3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 & 15 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8 & -15 & -3 \\ 3 & 14 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $2(2A-B)+3(A-2B)$

$=4A-2B+3A-6B$

$=7A-8B$

$=7\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}-8\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 7 & 21 & 14 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 & 24 & 0 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 15 & -24 & -7 \\ 7 & 29 & -2 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 8 & -15 & -3 \\ 3 & 14 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 15 & -24 & -7 \\ 7 & 29 & -2 \end{pmatrix}$

14

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

15

$5A-2(3B+A)+7B$

$=5A-6B-2A+7B$

$=3A+B$

$=3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

16

$2A+B=2\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3a & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 6a & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 6a-2 & 14 \end{pmatrix}$

$C=2A+B$에서

$\begin{pmatrix} -2 & 7-5ab \\ -2b & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 6a-2 & 14 \end{pmatrix}$이므로

$7-5ab=17$, $-2b=6a-2$

$\therefore ab=-2$, $3a+b=1$

$3a+b=1$에서 $b=1-3a$

이것을 $ab=-2$에 대입하면

$a(1-3a)=-2$

$3a^2-a-2=0$, $(3a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$ 또는 $a=1$

$a=-\frac{2}{3}$이면 $b=1-3a=3$이므로 $a+b=\frac{7}{3}$

$a=1$이면 $b=1-3a=-2$이므로 $a+b=-1$

따라서 $a+b$의 값은 -1 또는 $\frac{7}{3}$이다.

답 -1, $\frac{7}{3}$

17

$xA-yB=x\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2x & -x \\ 3x & -4x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2x & -x+3y \\ 3x-y & -4x-y \end{pmatrix}$

$C=xA-yB$에서

$\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -x+3y \\ 3x-y & -4x-y \end{pmatrix}$이므로

$4=2x$ ······㉠

$-11=-x+3y$ ······㉡

$9=3x-y$ ······㉢

$-5=-4x-y$ ······㉣

㉠에서 $x=2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$-11=-2+3y,\ 3y=-9 \qquad \therefore y=-3$

이때 $x=2,\ y=-3$은 ㉢, ㉣을 모두 만족시킨다.

$\therefore x^2+y^2=2^2+(-3)^2=13$

답 13

18

(1) $2A+3X=B$에서

$3X=B-2A$

$\therefore X=\frac{1}{3}B-\frac{2}{3}A$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -\frac{10}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

(2) $3X+2B=-2(A+B)+X$에서

$3X+2B=-2A-2B+X$

$2X=-2A-4B$

$\therefore X=-A-2B$

$=-\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

19

두 행렬 $X,\ Y$에 대하여

$2X+Y=A$ ……㉠

$X-Y=B$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $3X=A+B$이므로

$X=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B$

㉠$-2\times$㉡을 하면 $3Y=A-2B$이므로

$Y=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}B$

$\therefore X+Y=\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B\right)+\left(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}B\right)$

$=\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}B$

$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

보충 설명

행렬의 실수배를 먼저 계산하여 성분에 분수가 많이 등장하는 것이 불편할 때에는 다음과 같이 정수인 성분을 이용한 계산을 먼저 할 수 있다.

$X+Y=\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B\right)+\left(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}B\right)$

$=\frac{2}{3}A-\frac{1}{3}B=\frac{1}{3}(2A-B)$

$=\frac{1}{3}\left\{2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

20

$A=(a_{ij})$라 하면

$a_{ij}=i^2-j$이므로

$a_{11}=1^2-1=0,\ a_{12}=1^2-2=-1,\ a_{13}=1^2-3=-2,$

$a_{21}=2^2-1=3,\ a_{22}=2^2-2=2,\ a_{23}=2^2-3=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$B-2A=(b_{ij})$라 하면

$b_{ij}=ij-i+j$이므로

$b_{11}=1\times1-1+1=1$, $b_{12}=1\times2-1+2=3$,

$b_{13}=1\times3-1+3=5$, $b_{21}=2\times1-2+1=1$,

$b_{22}=2\times2-2+2=4$, $b_{23}=2\times3-2+3=7$

$\therefore\ B-2A=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&4&7\end{pmatrix}$

이때 $B=(B-2A)+2A$이므로

$$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&4&7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&-1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&3&5\\1&4&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&-4\\6&4&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\7&8&9\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}1&1&1\\7&8&9\end{pmatrix}$

STEP 1 **개념 마무리** 본문 p.282

07 55 **08** -2 **09** 22 **10** -17

11 $\begin{pmatrix}3&9\\9&3\end{pmatrix}$ **12** 110

07

$2(A+B)-3(A-B)$

$=2A+2B-3A+3B$

$=-A+5B$

$$=-\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}3&1\\-3&-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3&-2\\-1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15&5\\-15&-20\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}12&3\\-16&-24\end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 절댓값의 합은

$|12|+|3|+|-16|+|-24|=55$

답 55

08

$$mA+nB=m\begin{pmatrix}2&-1\\1&6\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}3&1\\-1&-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2m&-m\\m&6m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3n&n\\-n&-4n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2m+3n&-m+n\\m-n&6m-4n\end{pmatrix}$$

$C=mA+nB$에서

$\begin{pmatrix}12&x\\y&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m+3n&-m+n\\m-n&6m-4n\end{pmatrix}$이므로

$12=2m+3n$ ……㉠

$x=-m+n$ ……㉡

$y=m-n$ ……㉢

$10=6m-4n$ ……㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면

$m=3$, $n=2$

이것을 각각 ㉡, ㉢에 대입하면

$x=-m+n=-1$, $y=m-n=1$

$\therefore\ 3x+y=3\times(-1)+1=-2$

답 -2

09

$y=x^2+4x-7=(x+2)^2-11$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\{(x-2)+2\}^2-11-5$

$=x^2-16$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}4&-7\\0&-16\end{pmatrix}$

$y=x^2-x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\left\{(x-2)-\frac{1}{2}\right\}^2+\frac{11}{4}-5$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

$=x^2-5x+4$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}-1&3\\-5&4\end{pmatrix}$

$\therefore A-(2A-3B)=A-2A+3B$

$$=-A+3B$$
$$=-\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -15 & 28 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$-7+16+(-15)+28=22$

답 22

10

$3A+B+X=A-4B+3X$에서

$2X=2A+5B$

$\therefore X=A+\frac{5}{2}B$ ……㉠

$$=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{2} \\ -15 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -\frac{3}{2} \\ -17 & \frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 $(2, 1)$ 성분은 -17이다.

답 -17

다른 풀이

행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$의 $(2, 1)$ 성분은 -2이고

행렬 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$의 $(2, 1)$ 성분은 -6이므로

㉠에서 행렬 $X=A+\frac{5}{2}B$의 $(2, 1)$ 성분은

$-2+\frac{5}{2}\times(-6)=-17$

11

두 행렬 A, B에 대하여

$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ……㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ……㉡

㉠－㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면

$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-B$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$\therefore 6A-3B=6\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

다른 풀이 1

$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ……㉠

$A-2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ……㉡

㉠＋㉡을 하면

$2A-B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore 6A-3B=3(2A-B)=3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

다른 풀이 2

$A+B=X$, $A-2B=Y$라 하고, 이 두 식을 두 행렬 A, B에 대하여 연립하여 풀면

$A=\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y$, $B=\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}Y$

$\therefore 6A-3B=6\left(\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y\right)-3\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}Y\right)$

$$=3X+3Y$$
$$=3\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

12

$A+B=(a_{ij})$라 하면

$a_{ij}=3i-j+1$이므로

$a_{11}=3\times1-1+1=3$, $a_{12}=3\times1-2+1=2$,

$a_{13}=3\times1-3+1=1$, $a_{21}=3\times2-1+1=6$,

$a_{22}=3\times2-2+1=5$, $a_{23}=3\times2-3+1=4$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}$ ······㉠

$2A-B=(b_{ij})$라 하면

$b_{ij}=i-2j^2$이므로

$b_{11}=1-2\times1^2=-1$, $b_{12}=1-2\times2^2=-7$,

$b_{13}=1-2\times3^2=-17$, $b_{21}=2-2\times1^2=0$,

$b_{22}=2-2\times2^2=-6$, $b_{23}=2-2\times3^2=-16$

$\therefore 2A-B=\begin{pmatrix}-1&-7&-17\\0&-6&-16\end{pmatrix}$ ······㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$$3B=2\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-7&-17\\0&-6&-16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&4&2\\12&10&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-7&-17\\0&-6&-16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&11&19\\12&16&24\end{pmatrix}$$

$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&11&19\\12&16&24\end{pmatrix}$ ······㉢

이때 $X-B=A+3B$에서 $X=(A+B)+3B$이므로

㉠, ㉢을 대입하면

$$X=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}+3\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&11&19\\12&16&24\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&11&19\\12&16&24\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&13&20\\18&21&28\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$10+13+20+18+21+28=110$

답 110

다른 풀이

㉠, ㉡에서 $A+B=P$, $2A-B=Q$라 하고, 이 두 식을 두 행렬 A, B에 대하여 연립하여 풀면

$A=\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}Q$, $B=\frac{2}{3}P-\frac{1}{3}Q$

$X-B=A+3B$에서

$X=A+4B$

$$=\left(\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}Q\right)+4\left(\frac{2}{3}P-\frac{1}{3}Q\right)$$

$$=3P-Q$$

$$=3\begin{pmatrix}3&2&1\\6&5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-7&-17\\0&-6&-16\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&13&20\\18&21&28\end{pmatrix}$$

3 행렬의 곱셈

기본 + 필수연습

본문 pp.289~297

21 (1) $\begin{pmatrix}3&5\\-6&-10\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}5&4\\4&14\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}30&20\\18&12\\6&4\end{pmatrix}$

22 $x=-4$, $y=\frac{1}{2}$

23 (1) $\begin{pmatrix}4&-1\\0&9\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}8&7\\0&-27\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}32&55\\0&-243\end{pmatrix}$

24 5 **25** -2 **26** 4, 11 **27** $\frac{14}{3}$

28 $1000(b+d)$원 **29** (1) 10 (2) -120

30 10 **31** 24 **32** 11 **33** 2

34 5 **35** 52

36 2 **37** -1 **38** ㄱ **39** 1

40 -9 **41** -5

21

(1) $$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3&1\times5\\(-2)\times3&(-2)\times5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&5\\-6&-10\end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix}0&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\times0+1\times1+2\times2&0\times3+1\times2+2\times1\\3\times0+2\times1+1\times2&3\times3+2\times2+1\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&4\\4&14\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times6 & 5\times4 \\ 3\times6 & 3\times4 \\ 1\times6 & 1\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 18 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 18 & 12 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

22

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ -2 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x+4 & 1-2y \\ -2x-8 & -2+4y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$x+4=0$, $-2x-8=0$에서 $x=-4$

$1-2y=0$, $-2+4y=0$에서 $y=\frac{1}{2}$

따라서 등식이 성립하도록 하는 x, y의 값은

$x=-4$, $y=\frac{1}{2}$

답 $x=-4$, $y=\frac{1}{2}$

23

(1) $A^2=AA$

$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

(2) $A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ($\because$ (1))

$=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$

(3) $A^4=A^3A$

$=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ($\because$ (2))

$=\begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$

$\therefore A^5=A^4A$

$=\begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 32 & 55 \\ 0 & -243 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 32 & 55 \\ 0 & -243 \end{pmatrix}$

다른 풀이

(3) (1)에서 $A^2=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, (2)에서 $A^3=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$이므로

$A^5=A^2A^3$

$=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 32 & 55 \\ 0 & -243 \end{pmatrix}$

24

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4+2a \\ 14 & 8+3a \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 4+2a & 8+3a \end{pmatrix}$

$AB=BA$에서

$\begin{pmatrix} 9 & 4+2a \\ 14 & 8+3a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 4+2a & 8+3a \end{pmatrix}$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4+2a=14$, $2a=10$ $\quad\therefore a=5$

답 5

25

$AB+5X=4A$에서 $5X=4A-AB$

$\therefore X=\frac{1}{5}(4A-AB)$

이때 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$이므로

$X=\frac{1}{5}(4A-AB)$

$=\frac{1}{5}\left\{4\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-\frac{2}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=-2$

답 -2

26

$\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & 1 \\ -a & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ c & 9 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} -2ab & a+3b \\ -3b-2a & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ c & 9 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-2ab=4,\ a+3b=-5,\ -3b-2a=c$

$\therefore\ ab=-2$ ……㉠, $a+3b=-5$ ……㉡

㉡에서 $a=-3b-5$를 ㉠에 대입하면

$b(-3b-5)=-2,\ 3b^2+5b-2=0$

$(b+2)(3b-1)=0 \qquad \therefore\ b=-2$ 또는 $b=\frac{1}{3}$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2a=-2 \qquad \therefore\ a=1$

$b=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}a=-2 \qquad \therefore\ a=-6$

$\therefore\ a=-6,\ b=\frac{1}{3}$ 또는 $a=1,\ b=-2$

이때 $c=-2a-3b$이므로

(i) $a=-6,\ b=\frac{1}{3}$일 때,

$c=-2\times(-6)-3\times\frac{1}{3}=11$

(ii) $a=1,\ b=-2$일 때,

$c=-2\times1-3\times(-2)=4$

(i), (ii)에서 등식을 만족시키는 c의 값은 4, 11이다.

답 4, 11

27

$AB=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a-6 & -2a+12 \\ 4+3b & -8-6b \end{pmatrix}$

이때 $AB=O$이므로

$\begin{pmatrix} a-6 & -2a+12 \\ 4+3b & -8-6b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-6=0,\ -2a+12=0$에서 $a=6$

$4+3b=0,\ -8-6b=0$에서 $b=-\frac{4}{3}$

따라서 $a=6,\ b=-\frac{4}{3}$이므로

$a+b=6+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{14}{3}$

답 $\frac{14}{3}$

28

$PQ=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1\times5+2\times8 & 1\times4+2\times10 \\ 1\times5+3\times8 & 1\times4+3\times10 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1\times5+2\times8,\ b=1\times4+2\times10,$

$c=1\times5+3\times8,\ d=1\times4+3\times10$ ……㉠

지원이가 B약국에서 연고를 구입하고 지불해야 하는 금액은 1×4000(원)이고, 붕대를 구입하고 지불해야 하는 금액은 2×10000(원)이므로 지원이가 B약국에서 연고와 붕대를 구입하고 지불해야 하는 금액은

$1\times4000+2\times10000=1000\times(1\times4+2\times10)$

$=1000b$ ($\because$ ㉠)

상훈이가 B약국에서 연고를 구입하고 지불해야 하는 금액은 1×4000(원)이고, 붕대를 구입하고 지불해야 하는 금액은 3×10000(원)이므로 상훈이가 B약국에서 연고와 붕대를 구입하고 지불해야 하는 금액은

$1\times4000+3\times10000=1000\times(1\times4+3\times10)$

$=1000d$ ($\because$ ㉠)

따라서 지원이와 상훈이가 Q약국에서 연고와 붕대를 구입하고 지불해야 하는 금액의 합은
$1000b+1000d=1000(b+d)$(원)

답 $1000(b+d)$원

29

(1) $A^2=AA$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$
$A^3=A^2A$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$A^5=A^3A^2$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$\therefore A^5-2A^3-3A$
$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$
따라서 구하는 모든 성분의 합은
$-5+(-4)+12+7=10$

(2) $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⋮

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)

따라서 $A^{120}=\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$k=-120$

답 (1) 10 (2) -120

보충 설명

(1)에서 $A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-E$임을 이용하여
$$\begin{aligned} A^5-2A^3-3A &= A^3A^2-2A^3-3A \\ &= -EA^2-2(-E)-3A \\ &= -A^2-3A+2E \end{aligned}$$
와 같이 주어진 식을 간단히 한 후, 행렬을 대입하여 계산할 수도 있다.

30

$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$

⋮

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 2^{2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$\therefore f(n)=2^{2n}\times 2^n=2^{2n+n}=2^{3n}$
따라서 $f(k)=2^{30}$에서 $2^{3k}=2^{30}$이므로
$3k=30 \qquad \therefore k=10$

답 10

31

행렬 A가 이차 정사각행렬이므로 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore b=3,\ d=-1$

$A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a \\ 3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\therefore a=-4,\ c=2$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 곱은
$a\times b\times c\times d=(-4)\times 3\times 2\times(-1)=24$

답 24

32

두 실수 a, b에 대하여 $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$이 성립한다고 하면 $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+2b \\ -a+3b \end{pmatrix}$에서

$3a+2b=-1$, $-a+3b=4$를 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

즉, $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

따라서 $p=-1$, $q=12$이므로

$p+q=11$

답 11

33

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ ……㉠

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$(A+B)^2+(A-B)^2=2(A^2+B^2)$

$$\therefore A^2+B^2=\frac{1}{2}\{(A+B)^2+(A-B)^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$3+(-3)+(-1)+3=2$

답 2

34

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

$\therefore AB=BA$

이때

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ b & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+ab & -2-a \\ -6+4b & 2 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2a-8 \\ b+3 & ab-4 \end{pmatrix}$$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2+ab=8$ ……㉠, $-2-a=2a-8$ ……㉡

$-6+4b=b+3$ ……㉢, $2=ab-4$ ……㉣

㉡에서 $3a=6$ $\therefore a=2$

㉢에서 $3b=9$ $\therefore b=3$

$a=2$, $b=3$은 ㉠, ㉣을 만족시킨다.

$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

35

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$
$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$(A+B)^4=(A+B)^2(A+B)^2$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A+B)^6=(A+B)^4(A+B)^2$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\therefore (A+B)^{2n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $(A+B)^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$이므로

구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+0+50+1=52$

답 52

36

$A+B=E$에서 $B=E-A$이므로

$B^3=(E-A)^3=-A^3+3A^2-3A+E$

$\therefore A^3+B^3=3A^2-3A+E$ ……㉠

또한, $AB=O$에서

$A(E-A)=O$, $A-A^2=O$

$\therefore A^2=A$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$A^3+B^3=3A^2-3A+E=3A-3A+E$

$=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

답 2

다른 풀이

$A+B=E$에서 $B=E-A$이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2$

$BA=(E-A)A=A-A^2$

즉, $AB=BA=O$이므로

$A^3+B^3=(A+B)^3$

$=E^3=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+0+0+1=2$

보충 설명

두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여

$A+B=kE$ (k는 실수)이면 $B=-A+kE$이므로

$AB=A(-A+kE)=-A^2+kA$

$BA=(-A+kE)A=-A^2+kA$

$\therefore AB=BA$

37

$A+B=E$에서

$B=E-A$

위의 식의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AB=A(E-A)=A-A^2$

이때 $AB=E$이므로 위의 식에서

$E=A-A^2 \qquad \therefore A^2=A-E$

$\therefore A^3=AA^2=A(A-E)=A^2-A$

$=(A-E)-A=-E$

같은 방법으로 $B^3=-E$

$\therefore A^{100}+B^{100}=(A^3)^{33}A+(B^3)^{33}B$

$=(-E)^{33}A+(-E)^{33}B$

$=-A-B$

$=-(A+B)$

$=-E$

따라서 $k=-1$이다.

답 -1

38

ㄱ. $(A+B)^2=O$에서 $A^2+AB+BA+B^2=O$

이때 $A^2+B^2=O$이므로 $AB+BA=O$

$\therefore AB=-BA$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $AB=-BA$이므로

$A^3B^3=AAABBB$

$=AA(AB)BB=AA(-BA)BB$

$=-AABABB$

$=-A(AB)ABB=-A(-BA)ABB$

$=ABAABB$

$=(AB)AABB=(-BA)AABB$

$=-BAAABB$

B가 한 칸 앞으로 올 때마다 부호가 반대로 바뀐다.

$\vdots$

$=BBAAAB$

$=-BBBAAA$

$=-B^3A^3$ (거짓)

ㄷ. $(A+B+E)(A+B-E)$

$=A^2+AB-A+BA+B^2-B+A+B-E$

$=A^2+B^2+AB+BA-E$

$=(A^2+B^2)+AB-AB-E$ ($\because$ ㄱ)

$=O-E=-E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

다른 풀이

ㄴ. $A^2+B^2=O$에서 $A^2=-B^2$, $B^2=-A^2$

또한, ㄱ에서 $AB=-BA$이므로

$A^3B^3=A^2(AB)B^2$

$=(-B^2)(-BA)(-A^2)$

$=-B^2(BA)A^2$

$=-B^3A^3$ (거짓)

ㄷ. $(A+B+E)(A+B-E)$

$=\{(A+B)+E\}\{(A+B)-E\}$

$=(A+B)^2-E^2$

$=O-E=-E$ (거짓)

39

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

$A^4=A^3A=EA=A$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여 A^n은 A, A^2, E가 이 순서대로 계속 반복된다.

이때 $2035=3\times678+1$에서

$$A^{2035}=A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$1+(-1)+3+(-2)=1$

답 1

다른 풀이

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-\{1+(-2)\}A+\{1\times(-2)-(-1)\times3\}E=O$

이므로

$A^2+A+E=O$

$\therefore A^2=-A-E$

$A^3=A^2A=(-A-E)A$

$=-A^2-A=-(-A-E)-A$

$=E$

40

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-10\\0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore (A^2-A+2E)(A^2+A+2E)$

$=\{(A^2+2E)-A\}\{(A^2+2E)+A\}$

$=(A^2+2E)^2-A^2$

$=A^4+3A^2+4E$

$$=\begin{pmatrix}1&-10\\0&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-5\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&-25\\0&8\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$8+(-25)+0+8=-9$

답 -9

41

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 자연수 n에 대하여 A^n은 A, A^2, $-E$, $-A$, $-A^2$, E가 이 순서대로 계속 반복되고

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$

$=A^7+A^8+A^9+A^{10}+A^{11}+A^{12}$

$\vdots$

$=A+A^2+(-E)+(-A)+(-A^2)+E$

$=O$

이때 $100=6\times16+4$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$

$=\underbrace{O+O+O+\cdots+O}_{16\text{개}}+A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100}$

$=A+A^2+(-E)+(-A)$

$=A^2-E$

$$=\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\1&-3\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0+(-3)+1+(-3)=-5$

답 -5

다른 풀이

행렬 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-\{2+(-1)\}A+\{2\times(-1)-(-3)\times1\}E=O$

이므로 $A^2-A+E=O$

즉, $A^2=A-E$에서

$A^3=A^2A=(A-E)A$

$=A^2-A=(A-E)-A=-E$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$

$=A+A^2+A^3+A^3A+A^3A^2+\cdots+(A^3)^{33}A$

$=A+A^2-E-EA-EA^2+(-E)^2+\cdots$

$\quad+(-E)^{32}A+(-E)^{32}A^2+(-E)^{33}+(-E)^{33}A$

$=A^2-E$

$=\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\1 & -3\end{pmatrix}$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은

$0+(-3)+1+(-3)=-5$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.298~299

13 ⑤	**14** 25	**15** -2	
16 18600원, 1000d원		**17** $\pm3\sqrt{3}$	**18** 9
19 6	**20** ⑤	**21** -11	**22** 7
23 ③			

13

두 점 (a, b), (c, d)를 지나는 직선을 행렬 $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$에 대응시키므로 이 행렬이 나타내는 직선의 기울기는 $\dfrac{d-b}{c-a}$이다.

즉, 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}$에 대응하는 직선의 기울기는

$\dfrac{7-3}{5-1}=\dfrac{4}{4}=1$

ㄱ. $2\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\10 & 14\end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\dfrac{14-6}{10-2}=\dfrac{8}{8}=1$

ㄴ. $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 5\\8 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\-3 & -4\end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\dfrac{-4-(-2)}{-3-(-1)}=\dfrac{-2}{-2}=1$

ㄷ. $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\7 & 5\end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\dfrac{5-1}{7-3}=\dfrac{4}{4}=1$

따라서 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}$에 대응하는 직선과 서로 평행하거나 일치하는 직선에 대응하는 행렬은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2\\0 & \alpha\beta\end{pmatrix}$

이차방정식 $x^2-5x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\qquad\qquad=5^2-2\times(-2)=29$

따라서 구하는 행렬은 $\begin{pmatrix}-2 & 29\\0 & -2\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은

$-2+29+0+(-2)=25$

답 25

다른 풀이

이차방정식 $x^2-5x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$

이때 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2\\0 & \alpha\beta\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2+0+\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$\qquad=(\alpha+\beta)^2$

$\qquad=5^2=25$

15

$ABC=\begin{pmatrix}2x & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\-1\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}2x & -8x-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\-1\end{pmatrix}$

$\quad=\begin{pmatrix}4x^2+8x+3\end{pmatrix}$

이때 $f(x)=4x^2+8x+3$이라 하면

$f(x)=4(x^2+2x+1)-1$

$\quad=4(x+1)^2-1$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때, 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로

$a+b=-2$

답 -2

16

$$PQ=\begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 5 & 1.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x-1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 3x+1.5\times2 & 3(x-1)+1.5y \\ 5x+1.2\times2 & 5(x-1)+1.2y \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a=3x+1.5\times2,\ b=3(x-1)+1.5y,$
$c=5x+1.2\times2,\ d=5(x-1)+1.2y$

정우가 편의점 A에서 김밥과 우유를 구매할 때 지불해야 하는 금액이 15000원이므로

$3000x+1500\times2=15000$

$3000x=12000 \qquad \therefore\ x=4$

또한, 정우가 편의점 A에서 김밥과 우유를 구매할 때 지불해야 하는 금액은 수아가 편의점 A에서 김밥과 우유를 구매할 때 지불해야 하는 금액보다 1500원이 많으므로 수아가 지불해야 하는 금액은

$15000-1500=13500$(원)

즉, $3000(x-1)+1500y=13500$에서

$3000\times(4-1)+1500y=13500$ ($\because\ x=4$)

$1500y=4500 \qquad \therefore\ y=3$

따라서 수아가 편의점 B에서 김밥과 우유를 구매할 때 지불해야 하는 금액은

$5000(x-1)+1200y=5000\times(4-1)+1200\times3$
$=18600$(원)

이고, 행렬 PQ의 성분으로 나타내면 $1000d$원이다.

답 18600원, $1000d$원

17

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4+2p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

$A^3=A^2A$
$$=\begin{pmatrix} 4 & 4+2p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8+4p+2p^2 \\ 0 & p^3 \end{pmatrix}$$

이므로

$D(A^3)=8\times p^3-(8+4p+2p^2)\times0=8p^3$ ⋯ (가)

또한, $6A=6\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 6p \end{pmatrix}$이므로

$D(6A)=12\times6p-12\times0=72p$ ⋯ (나)

이때 $D(A^3)=3\times D(6A)$이므로

$8p^3=216p,\ p^2=27$ ($\because\ p\neq0$)

$\therefore\ p=\pm3\sqrt{3}$ ⋯ (다)

답 $\pm3\sqrt{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$D(A^3)$을 p에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(나)	$D(6A)$를 p에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(다)	실수 p의 값을 구한 경우	30%

18

조건 (나)의 등식 $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A^2을 곱하면

$$A^2A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

이때 조건 (가)에서 $A^3=3A$이므로

$$A^2\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$=3\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$$

따라서 $a=15,\ b=-6$이므로

$a+b=15+(-6)=9$

답 9

19

$A^2-AB+BA-B^2=A(A-B)+B(A-B)$
$=(A+B)(A-B)$

이때

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$이므로

$$A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 제2열의 성분은 -2, 8이므로 그 합은

$-2+8=6$

답 6

보충 설명

행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않으므로

$A^2-AB\neq(A-B)A$,

$BA-B^2\neq(A-B)B$,

$A(A-B)+B(A-B)\neq(A-B)(A+B)$

임에 주의해야 한다.

A^2-AB에서는 A가 왼쪽에 곱해져 있으므로

$A^2-AB=A(A-B)$,

$BA-B^2$에서는 B가 왼쪽에 곱해져 있으므로

$BA-B^2=B(A-B)$

로 변형해야 한다. 또한, $A(A-B)+B(A-B)$에서는

$(A-B)$가 오른쪽에 곱해져 있으므로

$A(A-B)+B(A-B)=(A+B)(A-B)$

와 같이 변형해야 한다.

이처럼 행렬의 곱셈을 이용한 식의 변형에서 곱하는 순서를 혼동하지 않도록 주의해야 한다.

20

ㄱ. $A*O=(A-O)(A+O)=AA=A^2$

즉, $A*O=O$에서 $A^2=O$

이때 $A^2=O$이지만 $A\neq O$인 행렬 A가 존재한다. (거짓)

(반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ㄴ. $A*B=A*(-B)$에서

$(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$

$A^2+AB-BA-B^2=A^2-AB+BA-B^2$

$2AB=2BA \qquad \therefore AB=BA$

이때 $AB=BA$이면

$(AB)^2=ABAB=AABB=A^2B^2$ (참)

ㄷ. $A*E=(A-E)(A+E)=A^2-E$

즉, $A*E=A$에서 $A^2-E=A$이므로

$A^2=A+E$

$\therefore A^3=A^2A=(A+E)A$

$=A^2+A=(A+E)+A$

$=2A+E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

$2A+B=E$에서

$B=E-2A$

위의 식의 양변의 왼쪽에 B를 곱하면

$B^2=B(E-2A)=B-2BA$

$=B-6E$ ($\because$ $BA=3E$)

또한, $2A+B=E$에서

$2A=E-B$

위의 식의 양변의 오른쪽에 A를 곱하면

$2A^2=(E-B)A=A-BA$

$=A-3E$ ($\because$ $BA=3E$)

$\therefore$ $4A^2+B^2=2\times2A^2+B^2$

$=2(A-3E)+(B-6E)$

$=2A+B-12E$

$=E-12E$

$=-11E$

따라서 상수 k의 값은 -11이다.

답 -11

다른 풀이

$2A+B=E$에서 $B=E-2A$

위의 식의 양변을 제곱하면

$B^2=(E-2A)^2=E-4A+4A^2$ ……㉠

또한, $B=E-2A$에서 양변의 오른쪽에 A를 곱하면

$BA=(E-2A)A=A-2A^2=3E$

$\therefore$ $2A^2=A-3E$ ……㉡

$\therefore$ $4A^2+B^2=4A^2+(4A^2-4A+E)$ ($\because$ ㉠)

$=8A^2-4A+E$

$=4(2A^2)-4A+E$

$=4(A-3E)-4A+E$ ($\because$ ㉡)

$=4A-12E-4A+E=-11E$

따라서 상수 k의 값은 -11이다.

22

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$\therefore A^4-2A^3+A+3E$
$=(A^2)^2-2A^2A+A+3E$
$=(-E)^2-2(-E)A+A+3E$
$=E+2A+A+3E$
$=3A+4E$

즉, $pA+qE=3A+4E$에서

$p\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 3p+q & 5p \\ -2p & -3p+q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 15 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$3p+q=13$, $5p=15$
$-2=-6$, $-3p+q=-5$
따라서 $p=3$, $q=4$이므로
$p+q=7$

답 7

23

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$

이때 $AB=E$이면

$\begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$1+ab=1$, $a=0$, $b=0$이므로
$ab=0$ (거짓)

ㄴ. $A-B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

$(A-B)^2=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix}$

$=-ab\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=-abE$ (거짓)

ㄷ. $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2=BB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b & 1 \end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3b & 1 \end{pmatrix}$

$B^4=B^3B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4b & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nb & 1 \end{pmatrix}$

이때 $A^n=B^n$이면 $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nb & 1 \end{pmatrix}$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$na=nb=0$
이때 n이 자연수이므로 $a=0$, $b=0$
$\therefore a+b=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

STEP 2 개념 마무리

본문 p.300

1 6	**2** 5	**3** 10	**4** 25
5 8	**6** 21		

1

(i) $i=1$, $j=1$일 때,

직선 $y=x+1$과 이차함수 $y=(x+2)^2-1$의 그래프의 교점의 개수는 이차방정식 $x+1=(x+2)^2-1$, 즉 $x^2+3x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=3^2-4\times1\times2=1>0$
즉, 두 그래프의 교점의 개수는 2이므로
행렬 A의 $(1, 1)$ 성분은 2이다.

(ii) $i=1$, $j=2$일 때,

직선 $y=x+1$과 이차함수 $y=(x+4)^2-2$의 그래프의 교점의 개수는 이차방정식 $x+1=(x+4)^2-2$, 즉 $x^2+7x+13=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=7^2-4\times1\times13=-3<0$

즉, 두 그래프의 교점의 개수는 0이므로

행렬 A의 $(1, 2)$ 성분은 0이다.

(iii) $i=2$, $j=1$일 때,

직선 $y=x+2$와 이차함수 $y=(x+2)^2-1$의 그래프의 교점의 개수는 이차방정식 $x+2=(x+2)^2-1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이 이차방정식의 판별식을 D_3이라 하면

$D_3=3^2-4\times1\times1=5>0$

즉, 두 그래프의 교점의 개수는 2이므로

행렬 A의 $(2, 1)$ 성분은 2이다.

(iv) $i=2$, $j=2$일 때,

직선 $y=x+2$와 이차함수 $y=(x+4)^2-2$의 그래프의 교점의 개수는 이차방정식 $x+2=(x+4)^2-2$, 즉 $x^2+7x+12=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이 이차방정식의 판별식을 D_4라 하면

$D_4=7^2-4\times1\times12=1>0$

즉, 두 그래프의 교점의 개수는 2이므로

행렬 A의 $(2, 2)$ 성분은 2이다.

(i)~(iv)에서 $A=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$이므로 행렬 A의 모든 성분의 합은

$2+0+2+2=6$

답 6

2

조건 (가)에서 $AB=A$이므로

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&b\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}ad+bc&2ab\\2cd&bc+ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$ad+bc=a$ ……㉠, $2ab=b$ ……㉡

$2cd=c$ ……㉢, $ad+bc=d$ ……㉣

이때 $bc\neq0$에서 $b\neq0$, $c\neq0$이므로

㉡에서 $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

㉢에서 $2d=1$ $\quad\therefore d=\frac{1}{2}$

또한, 조건 (나)에서

$A+B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d&b\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d&2b\\2c&d+a\end{pmatrix}$

의 모든 성분의 합이 $\frac{16}{3}$이므로

$2a+2b+2c+2d=\frac{16}{3}$

$\therefore a+b+c+d=\frac{8}{3}$

$a=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$을 위의 식에 대입하면

$1+b+c=\frac{8}{3}$ $\quad\therefore b+c=\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore 6(ab+cd)&=6\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)\\&=3(b+c)=3\times\frac{5}{3}=5\end{aligned}$$

답 5

3

$$\begin{aligned}A^2=AA&=\begin{pmatrix}m&0\\m-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m&0\\m-5&5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m^2&0\\m(m-5)+5(m-5)&5^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m^2&0\\m^2-5^2&5^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^3=A^2A&=\begin{pmatrix}m^2&0\\m^2-5^2&5^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m&0\\m-5&5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m^3&0\\m(m^2-5^2)+5^2(m-5)&5^3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}m^3&0\\m^3-5^3&5^3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}m^n&0\\m^n-5^n&5^n\end{pmatrix}$

행렬 A^n의 모든 성분의 합이 2^{49}이 되려면

$m^n+0+(m^n-5^n)+5^n=2^{49}$

$2m^n=2^{49}$ $\quad\therefore m^n=2^{48}$

따라서 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
$(2, 48)$, $(2^2, 24)$, $(2^3, 16)$, $(2^4, 12)$, $(2^6, 8)$, $(2^8, 6)$,
$(2^{12}, 4)$, $(2^{16}, 3)$, $(2^{24}, 2)$, $(2^{48}, 1)$
의 10개이다.

$48=2^4\times3$이므로 48의 양의 약수의 개수는
$5\times2=10$

답 10

4

$A^2+B^2=O$에서

$AA+BB=O$

위의 식의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$AAA+ABB=O$

즉, $A^3+ABB=O$에서 $AB=E$이므로

$A^3+B=O \qquad \therefore B=-A^3$

위의 식의 양변의 왼쪽에 다시 A를 곱하면

$AB=-AA^3 \qquad \therefore A^4=-E\ (\because AB=E)$

이때 행렬 C가 $C=pA^3+qA$이므로

$$\begin{aligned}(A-B)C&=(A+A^3)(pA^3+qA)\\&=pA^4+qA^2+pA^6+qA^4\\&=-pE+qA^2-pEA^2-qE\\&=(q-p)A^2-(p+q)E\end{aligned}$$

$(A-B)C=E$이므로

$(q-p)A^2-(p+q)E=E$

$\therefore (q-p)A^2=(p+q+1)E \qquad \cdots\cdots㉠$

$A^2=kE\left(k\text{는 0이 아닌 실수, } k=\dfrac{p+q+1}{q-p}\right)$일 때,

$A^2=kE$의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$AAB=kB \qquad \therefore A=kB\ (\because AB=E)$

위의 식의 양변의 오른쪽에 다시 B를 곱하면

$AB=kBB$, $E=kB^2\ (\because AB=E)$

$\therefore B^2=\dfrac{1}{k}E$

또한, $A^2+B^2=O$에서 $B^2=-A^2$이므로

$-A^2=\dfrac{1}{k}E \qquad \therefore A^2=-\dfrac{1}{k}E$

이때 $A^2=kE$이므로

$kE=-\dfrac{1}{k}E$, $k=-\dfrac{1}{k} \qquad \therefore k^2=-1$

$k^2=-1$을 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않으므로

$A^2\neq kE$이다.

따라서 ㉠에서 $q-p=0$, $p+q=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $p=-\dfrac{1}{2}$, $q=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore 100pq=100\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=25$

답 25

다른 풀이

$A^2+B^2=O$에서 $A^2=-B^2$

위의 식의 양변의 오른쪽에 A를 곱하면

$A^3=-B^2A=-B(BA)=-BE=-B$

$\therefore B=-A^3 \qquad \cdots\cdots㉡$

또한,

$$\begin{aligned}(A-B)^2&=A^2-AB-BA+B^2\\&=O-2E=-2E \qquad \cdots\cdots㉢\end{aligned}$$

$(A-B)C=E$의 양변의 왼쪽에 $(A-B)$를 곱하면

$(A-B)^2C=A-B$

$-2C=A-B\ (\because ㉢)$

$$\begin{aligned}\therefore C&=-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\\&=-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}A^3\ (\because ㉡)\end{aligned}$$

즉, $p=-\dfrac{1}{2}$, $q=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\therefore 100pq=100\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=25$

5

$A^2=AA=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2+a^2\end{pmatrix}$

이므로 $A^2-6A+8E=O$에서

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2+a^2\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a^2-6a+8+b^2 & 2ab-6b \\ 2ab-6b & a^2-6a+8+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-6a+8+b^2=0 \qquad \cdots\cdots㉠$

$2ab-6b=0 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉡에서 $2b(a-3)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $b=0$

(ⅰ) $a=3$일 때,

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3^2-6\times3+8+b^2=0$

$b^2=1 \qquad \therefore b=\pm1$

(ⅱ) $b=0$일 때,

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$a^2-6a+8=0$

$(a-2)(a-4)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$ 또는 $(3, -1)$ 또는 $(2, 0)$ 또는 $(4, 0)$이고

각 경우에 $2a+b$의 값은 순서대로 7, 5, 4, 8이다.

따라서 $2a+b$의 최댓값은 8이다.

답 8

다른 풀이

(ⅰ) $A=kE$ (k는 실수)일 때,

$A^2-6A+8E=O$에서

$(kE)^2-6(kE)+8E=O$

$k^2E-6kE+8E=O$

즉, $(k^2-6k+8)E=O$에서

$\begin{pmatrix} k^2-6k+8 & 0 \\ 0 & k^2-6k+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$k^2-6k+8=0$, $(k-2)(k-4)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=4$

즉, $A=2E$ 또는 $A=4E$이므로

$a=2$, $b=0$ 또는 $a=4$, $b=0$

(ⅱ) $A\neq kE$ (k는 실수)일 때,

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$A^2-2aA+(a^2-b^2)E=O$

이 등식이 $A^2-6A+8E=O$와 일치하므로

$2a=6$, $a^2-b^2=8$

$\therefore a=3$, $b=\pm1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 0)$ 또는 $(4, 0)$ 또는 $(3, 1)$ 또는 $(3, -1)$이고

각 경우에 $2a+b$의 값은 순서대로 4, 8, 7, 5이다.

따라서 $2a+b$의 최댓값은 8이다.

6

$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$A(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

즉, $(A^2+2A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로 조건 ㈏에서

$(A^2+2A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

또한, 조건 ㈎에서 $A^2+2A-E=O$, 즉 $A^2+2A=E$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

따라서 $x=9$, $y=12$이므로

$x+y=9+12=21$

답 21

B L A C K L A B E L