

더 ^{THE} 개념 블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L



I. 수열의 극한

유형
연습

01 수열의 극한

본문 pp.13-33

01-1 ㄱ, ㄴ, ㄷ	01-2 ㄱ	02-1 12
02-2 3	02-3 15	03-1 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 4
03-2 16	03-3 2	
04-1 (1) $-\frac{2020}{2021}$ (2) $\frac{4}{9}$	04-2 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	
04-3 $\frac{3}{2}$	05-1 (1) $a=4, b=\frac{5}{4}$ (2) $a=10, b=1$	
05-2 $\frac{2}{3}$	05-3 13	06-1 3
06-2 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	06-3 $\frac{1}{8}$	07-1 (1) 4 (2) 3
07-2 ㄴ	08-1 40	08-2 2
08-3 $\frac{5}{7}$	09-1 $\frac{17}{6}$	09-2 3
09-3 2	10-1 $\frac{1}{4}$	10-2 4
10-3 20		

01-1

ㄱ. $a_n = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$ 이

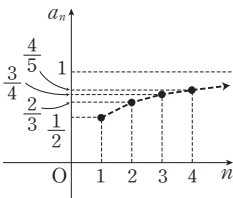
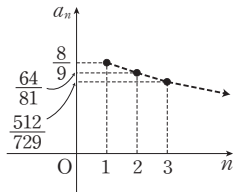
므로 오른쪽 그림과 같이 n 이 한없이 커질 때, 일반항 $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, 수열 $\left\{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄴ. $a_n = \frac{n + \sin n\pi}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 n 이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{n}{n+1}$ 의 값은 1에 한없이 가까워진다.

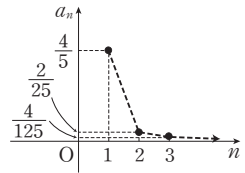
즉, 수열 $\left\{\frac{n + \sin n\pi}{n+1}\right\}$ 는 1에 수렴한다.



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 n 이 한없이 커질 때, 일반항 $\frac{3 + (-1)^{n+1}}{5^n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, 수열 $\left\{\frac{3 + (-1)^{n+1}}{5^n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

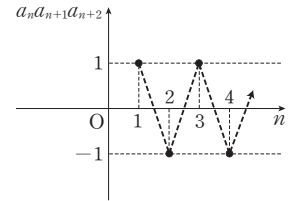


답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

01-2

ㄱ. $a_n a_{n+1} a_{n+2} = (-1)^n \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n+2}$
 $= (-1)^{3n+3} = (-1)^{n+1}$

이므로 오른쪽 그림과 같이 n 이 한없이 커질 때, $(-1)^{n+1}$ 의 값은 1과 -1이 반복되므로 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$ 는 발산(진동)한다.



ㄴ. $\frac{a_n + 2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{(-1)^n + 2 \times (-1)^{n+1}}{(-1)^{n+2}}$
 $= \frac{(-1)^n \{1 + 2 \times (-1)\}}{(-1)^{n+2}}$
 $= \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+2}} = -1$

에서 주어진 수열의 모든 항이 -1이므로 수열

$\left\{\frac{a_n + 2a_{n+1}}{a_{n+2}}\right\}$ 은 -1에 수렴한다.

ㄷ. $\frac{a_{2n-1} + 1}{a_{2n}} = \frac{(-1)^{2n-1} + 1}{(-1)^{2n}} = \frac{-1 + 1}{1} = 0$

에서 주어진 수열의 모든 항이 0이므로 수열

$\left\{\frac{a_{2n-1} + 1}{a_{2n}}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 발산하는 수열은 ㄱ이다.

답 ㄱ

02-1

$2a_n + b_n = c_n \quad \cdots \textcircled{1},$

$b_n - a_n = d_n \quad \cdots \textcircled{2}$

이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 2$

㉠, ㉡을 연립하여 a_n, b_n 을 각각 c_n, d_n 에 대하여 나타내면

$$a_n = \frac{c_n - d_n}{3}, \quad b_n = \frac{c_n + 2d_n}{3}$$

두 수열 $\{c_n\}, \{d_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - d_n}{3} = \frac{5 - 2}{3} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n + 2d_n}{3} = \frac{5 + 2 \times 2}{3} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1)(b_n + 3) = (1 + 1)(3 + 3) = 12$$

답 12

02-2

$$\frac{2a_n - 3}{a_n + 1} = b_n \text{이라 하면 } b_n \neq 2 \text{이고}$$

$$2a_n - 3 = b_n(a_n + 1)$$

$$2a_n - 3 = a_n b_n + b_n, \quad (2 - b_n)a_n = b_n + 3$$

$$\therefore a_n = \frac{b_n + 3}{2 - b_n}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 3}{2 - b_n} = \frac{\frac{3}{4} + 3}{2 - \frac{3}{4}} = 3$$

답 3

02-3

$$2a_n - 3b_n = c_n \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5 \text{이고}$$

$$3b_n = 2a_n - c_n \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2a_n)^2}{3b_n} - \frac{(3b_n)^2}{2a_n} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_n)^3 - (3b_n)^3}{6a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_n - 3b_n) \{ (2a_n)^2 + 6a_n b_n + (3b_n)^2 \}}{6a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n \{ (2a_n)^2 + 2a_n(2a_n - c_n) + (2a_n - c_n)^2 \}}{2a_n(2a_n - c_n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n(12a_n^2 - 6a_n c_n + c_n^2)}{4a_n^2 - 2a_n c_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n \left\{ 12 - 6c_n \times \frac{1}{a_n} + c_n^2 \times \left(\frac{1}{a_n} \right)^2 \right\}}{4 - 2c_n \times \frac{1}{a_n}}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n \left\{ 12 - 6c_n \times \frac{1}{a_n} + c_n^2 \times \left(\frac{1}{a_n} \right)^2 \right\}}{4 - 2c_n \times \frac{1}{a_n}} \\ = \frac{5 \times (12 - 6 \times 5 \times 0 + 5^2 \times 0)}{4 - 2 \times 5 \times 0} = 15 \end{aligned}$$

답 15

03-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 + \cdots + (4n)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)^2}{\sum_{k=1}^{2n} (2k)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1)}{\sum_{k=1}^{2n} 4k^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n}{4 \times \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 6n}{8n(2n+1)(4n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - 12 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{6}{n^2}}{8 \left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(4 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 2 - 12 \times 0 + 0}{8 \times 2 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})^2}{\sqrt{n^2 + 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2 + 2\sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n^2 + 2n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + 2\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}$$

$$= \frac{2+2}{1} = 4$$

답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 4

03-2

$$S_n = 4n^2 - 8n \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 4 - 8 = -4,$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 4n^2 - 8n - \{4(n-1)^2 - 8(n-1)\}$$

$$= 8n - 12 \quad (n \geq 2)$$

이므로

$$a_n = 8n - 12 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+2}}{S_{n+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n-12)\{8(n+2)-12\}}{4(n+2)^2 - 8(n+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n-12)(8n+4)}{4n^2 + 8n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(8 - \frac{12}{n}\right)\left(8 + \frac{4}{n}\right)}{4 + \frac{8}{n}}$$

$$= \frac{8 \times 8}{4} = 16$$

답 16

03-3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-3)^3 a_n b_n = 60, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 4n + 3) b_n = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 a_n b_n}{(n^2 + 4n + 3) b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3}{n^2 + 4n + 3} a_n \\ &= \frac{60}{3} = 20 \end{aligned}$$

$$\text{또한, } \lim_{n \rightarrow \infty} (kn+1) a_n = 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-3)^3}{n^2 + 4n + 3} a_n}{(kn+1) a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3}{(kn+1)(n^2 + 4n + 3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{n}\right)^3}{\left(k + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} \\ &= \frac{2^3}{k \times 1} = \frac{8}{k} = \frac{20}{5} \\ \therefore k &= 2 \end{aligned}$$

답 2

04-1

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2020} - n}{n - \sqrt{n^2 + 2021}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2020} - n)(\sqrt{n^2 + 2020} + n)(n + \sqrt{n^2 + 2021})}{(n - \sqrt{n^2 + 2021})(n + \sqrt{n^2 + 2021})(\sqrt{n^2 + 2020} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020(n + \sqrt{n^2 + 2021})}{-2021(\sqrt{n^2 + 2020} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2020\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2021}{n^2}}\right)}{-2021\left(\sqrt{1 + \frac{2020}{n^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{2020 \times 2}{-2021 \times 2} = -\frac{2020}{2021} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+1)(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})^2}{(3n+1)(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})^2(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})^2}{9(3n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{3 + \frac{2}{n}} + \sqrt{3 - \frac{1}{n}}\right)^2}{9\left(3 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{(2\sqrt{3})^2}{9 \times 3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) -\frac{2020}{2021} \quad (2) \frac{4}{9}$$

04-2

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 5, \quad a_8 = 23 \text{에서}$$

$$a + d = 5, \quad a + 7d = 23$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad d = 3$$

$$\therefore a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

따라서

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n (3 \times 2k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (6k - 1) = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$= 3n^2 + 2n,$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \sum_{k=1}^n \{3(2k-1)-1\} \\ &= \sum_{k=1}^n (6k-4) = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n \\ &= 3n^2 - n \end{aligned}$$

○|므로

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}} - \sqrt{a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n} - \sqrt{3n^2 - n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n^2 + 2n} - \sqrt{3n^2 - n})(\sqrt{3n^2 + 2n} + \sqrt{3n^2 - n})}{\sqrt{3n^2 + 2n} + \sqrt{3n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{3n^2 + 2n} + \sqrt{3n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{3 + \frac{2}{n}} + \sqrt{3 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

04-3

$$\sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2 + 3n + 1} < \sqrt{4n^2 + 4n + 1} \text{○|므로}$$

$$a_n = 2n, \quad b_n = \sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 2}{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} \\ &= \frac{6}{2 + 2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

05-1

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+b)^2 - an^2 + n}{3n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-a)n^2 + (4b+1)n + b^2}{3n-1} \quad \dots\dots\text{㉠} \end{aligned}$$

이때, $a \neq 4$ 이면 ㉠은 발산하므로 $a=4$

$a=4$ 를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4b+1)n + b^2}{3n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4b+1 + \frac{b^2}{n}}{3 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{4b+1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{4b+1}{3} = 2 \text{○|므로 } 4b+1=6$$

$$4b=5 \quad \therefore b=\frac{5}{4}$$

$$(2) b \neq 1 \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - bn - 1) \text{은 발산하므로}$$

$$b=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - bn - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n - 1)(\sqrt{n^2 + an} + n + 1)}{\sqrt{n^2 + an} + n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)n - 1}{\sqrt{n^2 + an} + n + 1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{a-2}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a-2}{2} = 4 \text{○|므로 } a-2=8$$

$$\therefore a=10$$

$$\text{답 (1) } a=4, b=\frac{5}{4} \quad (2) a=10, b=1$$

보충설명

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - bn - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an - (bn+1)^2}{\sqrt{n^2 + an} + bn + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)n^2 + (a-2b)n - 1}{\sqrt{n^2 + an} + bn + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)n + (a-2b) - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + b + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

따라서 극한값이 존재하려면

$$1-b^2=0 \quad \therefore b=\pm 1$$

이때, $b < 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - bn - 1) = \infty$ 이므로
 $b = 1$

05-2

$a \neq -3$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + an - b)$ 는 발산하므로
 $a = -3$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + an - b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 - 6n + 5} - 3n - b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} - 3n - b)(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n + b)}{\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n + b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6(1+b)n + 5 - b^2}{\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n + b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6(1+b) + \frac{5-b^2}{n}}{\sqrt{9 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + 3 + \frac{b}{n}} \\ &= \frac{-6(1+b)}{3+3} = -b-1 \end{aligned}$$

따라서 $-b-1=0$ 이므로 $b=-1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + an - b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} - 3n + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} - 3n + 1)(\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n - 1)}{\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{9n^2 - 6n + 5} + 3n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{9 - \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + 3 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{3+3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

05-3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(a-1)n+1\}(bn+2)}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b(a-1)n^2 + \{2(a-1)+b\}n+2}{2n+1} \end{aligned} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $b(a-1) \neq 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 은 발산하므로

$$b(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } b=0$$

(i) $a=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(a-1)n+1\}(bn+2)}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{2} = 6 \text{이므로 } b=12$$

$$\therefore a+b=1+12=13$$

(ii) $b=0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(a-1)n+1\}(bn+2)}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(a-1)n+2}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(a-1) + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{2(a-1)}{2} = a-1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a-1=6 \text{이므로 } a=7$$

$$\therefore a+b=7+0=7$$

(i), (ii)에서 $a+b$ 의 최댓값은 13이다.

답 13

06-1

$1+3\log_3 n < \log_3 a_n < 1+3\log_3 (n+1)$ 에서

$$\log_3 3n^3 < \log_3 a_n < \log_3 3(n+1)^3$$

$$3n^3 < a_n < 3(n+1)^3$$

$$\therefore \frac{3n^4}{n^4+1} < \frac{na_n}{n^4+1} < \frac{3n(n+1)^3}{n^4+1}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4}{n^4+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{n^4}} = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n+1)^3}{n^4+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{1 + \frac{1}{n^4}} = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^4+1} = 3$$

답 3

06-2

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \text{에서} \\
 & \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} \\
 &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3})} \\
 &= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{-2}, \\
 & \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{-2} \\
 & \therefore \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{-2} < a_n < \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{-2} \\
 & \therefore \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}}{-2} \right) < \sum_{k=1}^n a_k \\
 & < \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2} \right) \\
 & \text{이때,} \\
 & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}}{-2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k+3}) \\
 &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-\sqrt{7}) + (\sqrt{7}-\sqrt{9}) \\
 & \quad + \cdots + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}), \\
 & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}) \\
 &= -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{1}-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-\sqrt{7}) \\
 & \quad + \cdots + (\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1}-1) \\
 & \therefore \frac{1}{2} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}) < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1}-1) \\
 & \therefore \frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{n+1}} < \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}-\sqrt{\frac{3}{n}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

06-3

조건 (가)에서 이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{n^2+1}x + a_n = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (n^2+1) - a_n \geq 0$$

$$\therefore a_n \leq n^2+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2 - \sqrt{n^2-1}x + \frac{1}{4}a_n = 0$ 이 허근을

가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (n^2-1) - 4 \times \frac{1}{4}a_n < 0$$

$$\therefore a_n > n^2-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서 $n^2-1 < a_n \leq n^2+1$

$$\therefore \frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n-1)^3} < \frac{(n+1)a_n}{(2n-1)^3} \leq \frac{(n+1)(n^2+1)}{(2n-1)^3}$$

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{8},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{(2n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{8}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_n}{(2n-1)^3} = \frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

07-1

- (1) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2-5x+2}{3}\right)^n\right\}$ 은 첫째항과 공비가 모두

$$\frac{x^2-5x+2}{3} \text{이므로 이 수열이 수렴하려면}$$

$$-1 < \frac{x^2-5x+2}{3} \leq 1, \text{ 즉 } -3 < x^2-5x+2 \leq 3$$

- (i) $-3 < x^2-5x+2$ 에서

$$x^2-5x+5 > 0$$

$$\therefore x < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

- (ii) $x^2-5x+2 \leq 3$ 에서

$$x^2-5x-1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{5-\sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

- (i), (ii)에서

$$\frac{5-\sqrt{29}}{2} \leq x < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } \frac{5+\sqrt{5}}{2} < x \leq \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

이므로 정수 x 는 0, 1, 4, 5의 4개이다.

- (2) 등비수열 $\left\{(x-1)\left(\frac{x^2+3x-1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ 은 첫째항이

$$x-1 \text{이고, 공비가 } \frac{x^2+3x-1}{2} \text{이므로 이 수열이 수렴하}$$

$$\text{려면 } x-1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x^2+3x-1}{2} \leq 1$$

- (i) $x-1=0$ 에서 $x=1$

- (ii) $-1 < \frac{x^2+3x-1}{2} \leq 1$ 에서

$$-2 < x^2+3x-1 \leq 2$$

- ① $-2 < x^2+3x-1$ 에서

$$x^2+3x+1 > 0$$

$$\therefore x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

- ② $x^2+3x-1 \leq 2$ 에서

$$x^2+3x-3 \leq 0$$

$$\therefore \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

- ①, ②에서

$$\frac{-3-\sqrt{21}}{2} \leq x < \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \text{ 또는}$$

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2} < x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

- (i), (ii)에서 정수 x 는 -3, 0, 1의 3개이다.

답 (1) 4 (2) 3

07-2

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < r \leq 1$$

ㄱ. $-2 \leq -2r < 2$ 이므로 등비수열 $\{(-2r)^n\}$ 이 항상 수렴한다고 할 수 없다.

$$\text{ㄴ. } 0 < 1+r \leq 2 \quad \therefore 0 < \frac{1+r}{2} \leq 1$$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1+r}{2}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.

$$\text{ㄷ. } r^2-r+1 = \left(r-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$-\frac{3}{2} < r - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leq \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 3$$

따라서 등비수열 $\{(r^2-r+1)^n\}$ 이 항상 수렴한다고 할 수 없다.

그러므로 항상 수렴하는 수열은 ㄴ이다.

답 ㄴ

08-1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^{n-1} + a \times 8^{n+1}}{5 \times 2^{3n+4} - 4 \times 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4} \times 4^n + 8a \times 8^n}{80 \times 8^n - 12 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8a}{80 - 12 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n} \\ &= \frac{8a}{80} = \frac{a}{10} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{10} = 4 \text{이므로 } a = 40$$

답 40

08-2

다항식 $(4x-5)^n$ 을 $x-2$ 로 나눈 나머지가 a_n 이므로

$$a_n = (4 \times 2 - 5)^n = 3^n$$

또한, 다항식 $(4x-5)^n$ 을 $x+1$ 로 나눈 나머지가 b_n 이므로
 $b_n = \{4 \times (-1) - 5\}^n = (-9)^n$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|b_n| - 4^{n+1}}{a_n^2 - 5^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|(-9)^n| - 4^{n+1}}{(3^n)^2 - 5^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 9^n - 4 \times 4^n}{9^n - \frac{1}{5} \times 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 4 \times \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

답 2

보충설명

나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나눈 나머지는 $f(a)$

08-3

$S_n = 3^{n+1} + 1$ 에서

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3^{n+1} + 1 - (3^n + 1)$$

$$= 3^n(3-1) = 2 \times 3^n \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + S_n}{a_{n+1} + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n + 3^{n+1} + 1}{2 \times 3^{n+1} + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n + 3 \times 3^n + 1}{6 \times 3^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 3^n + 1}{7 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{7} = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{7}$

09-1

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} \text{에서}$$

(i) $|x| < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}$$

(ii) $x=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

$$\therefore f(1) = 2$$

(iii) $x=-1$ 일 때,

$$n \text{이 짝수이면 } x^n = (-1)^n = 1,$$

$$x^{n+1} = (-1)^{n+1} = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} = \frac{1+1}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

$$n \text{이 홀수이면 } x^n = (-1)^n = -1,$$

$$x^{n+1} = (-1)^{n+1} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} = \frac{1-1}{2-1} = 0$$

즉, $f(-1)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $|x| > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x^n}{2-x^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x}}{\frac{2}{x^{n+1}} - 1} = -\frac{1}{x}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x}$$

(i)~(iv)에서 $f(-3) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(-3) + f(1) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$$

답 $\frac{17}{6}$

09-2

(i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - r^n + 2}{r^n - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

(ii) $r=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - r^n + 2}{r^n - 2} = \frac{1-1+2}{1-2} = -2$$

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - r^n + 2}{r^n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r-1 + \frac{2}{r^n}}{1 - \frac{2}{r^n}} = r-1$$

(i), (ii), (iii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - r^n + 2}{r^n - 2}$ 가 2에 수렴할 수 있는 경우
 우는 (iii)이므로
 $r-1=2 \quad \therefore r=3$

답 3

09-3

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + 2bx - 1}{x^{2n} + 1}$ 에서

(i) $|x| < 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + 2bx - 1}{x^{2n} + 1} = ax^2 + 2bx - 1$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + 2bx - 1$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + 2bx - 1}{x^{2n} + 1} &= \frac{1 + a + 2b - 1}{1 + 1} \\ &= \frac{a + 2b}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = \frac{a + 2b}{2}$$

(iii) $x = -1$ 일 때,

$x^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, $x^{2n} = (-1)^{2n} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + 2bx - 1}{x^{2n} + 1} &= \frac{-1 + a - 2b - 1}{1 + 1} \\ &= \frac{a - 2b - 2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = \frac{a - 2b - 2}{2}$$

(iv) $|x| > 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + 2bx - 1}{x^{2n} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{2b}{x^{2n-1}} - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = x \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = x$$

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
 $x = -1$, $x = 1$ 에서 연속이어야 한다.

$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 에서

$$\frac{a - 2b - 2}{2} = a - 2b - 1 = -1$$

$$\therefore a - 2b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 에서

$$\frac{a + 2b}{2} = 1 = a + 2b - 1$$

$$\therefore a + 2b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

답 2

보충설명

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때,
 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이라 한다.

(1) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 정의되어 있다.

(2) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

10-1

점 $(a_n, \sqrt{n})$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4n^2$ 위에 있으므로

$$a_n^2 + (\sqrt{n})^2 = 4n^2, \text{ 즉 } a_n^2 = 4n^2 - n$$

이때, $a_n > 0$ 이므로 $a_n = \sqrt{4n^2 - n}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 - n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - \sqrt{4n^2 - n})(2n + \sqrt{4n^2 - n})}{2n + \sqrt{4n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + \sqrt{4n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

10-2

$P_n\left(2^n, \frac{1}{2^n}\right), P_{n+1}\left(2^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ 이므로

$$L_n = \overline{P_n P_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(2^{n+1} - 2^n)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right)^2} \\ &= \sqrt{\{2^n(2-1)\}^2 + \left\{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{4^n + \frac{1}{4^{n+1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + \frac{1}{4^{n+2}}}{4^n + \frac{1}{4^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 4^n + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4^n}}{4^n + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{16}\right)^n} \\ &= \frac{4}{1} = 4 \end{aligned}$$

답 4

10-3

두 실수 α, β 에 대하여 $P_n\left(\alpha, \frac{\alpha}{n} + 1\right), Q_n\left(\beta, \frac{\beta}{n} + 1\right)$ 이라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n} = \frac{1}{n}x + 1$ 의 두 실근이다.

$$\text{이때, } x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n} = \frac{1}{n}x + 1 \text{에서}$$

$$x^2 - \left(4 + \frac{2}{n}\right)x + \frac{4}{n} - 1 = 0$$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4 + \frac{2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 삼각형 $OP_n Q_n$ 의 무게중심의 y 좌표 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \left(0 + \frac{\alpha}{n} + 1 + \frac{\beta}{n} + 1\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha + \beta}{n} + 2\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 2\right) \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 30 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 30 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n} + 2\right) \\ &= 30 \times \frac{1}{3} \times 2 = 20 \end{aligned}$$

답 20



개 념 마 무 리

본문 pp.34-37

01 ①	02 $\frac{1}{5}$	03 ①	04 8
05 6	06 $\frac{1}{4}$	07 ①	08 $\frac{17}{9}$
09 -6	10 $\frac{8}{5}$	11 2	12 ⑤
13 $\frac{6}{5}$	14 ④	15 5	16 ②
17 8	18 5	19 ③	20 8
21 -4	22 0	23 $\frac{11}{6}$	24 -2

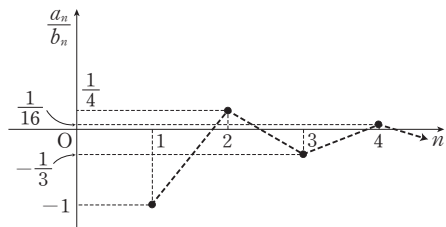
01

$$a_n = \begin{cases} n & (n \text{은 홀수}) \\ 1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\neg. b_n = (-1)^n \times n^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \begin{cases} \frac{1}{(-1)^n \times n} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{1}{(-1)^n \times n^2} & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n} & (n \text{은 홀수}) \quad \leftarrow n \text{이 홀수이면 } (-1)^n = -1 \\ \frac{1}{n^2} & (n \text{은 짝수}) \quad \leftarrow n \text{이 짝수이면 } (-1)^n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

이때, 다음 그림에서 n 이 한없이 커질 때 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 의 값은 0에 한없이 가까워진다.



즉, $b_n = (-1)^n \times n^2$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄴ. 자연수 n 에 대하여 $\cos n\pi = (-1)^n$ 이므로

$$b_n = n \cos n\pi = (-1)^n \times n$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a_n}{b_n} &= \begin{cases} \frac{1}{(-1)^n} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{1}{(-1)^n \times n} & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & (n \text{은 홀수}) \leftarrow n \text{이 홀수이면 } (-1)^n = -1 \\ \frac{1}{n} & (n \text{은 짝수}) \leftarrow n \text{이 짝수이면 } (-1)^n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

이때, n 이 홀수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$,

n 이 짝수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 으로 극한값이 서로 다르다.

즉, $b_n = n \cos n\pi$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 은 수렴하지 않는다.

ㄷ. $2n-1$ 은 홀수이므로 $b_n = a_{2n-1} = 2n-1$

$$\therefore \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{n}{2n-1} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{1}{2n-1} & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

이때, n 이 홀수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$,

n 이 짝수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ 으로 극한값

이 서로 다르다.

즉, $b_n = a_{2n-1}$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 은 수렴하지 않는다.

따라서 수열 $\{b_n\}$ 이 될 수 있는 것은 ㄱ이다.

답 ①

02

이차방정식 $x^2 - a_{n+1}x - a_n + 3 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a_{n+1})^2 - 4(-a_n + 3)$$

$$= a_{n+1}^2 + 4a_n - 12 = 0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

㉠에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 + 4a_n - 12) = 0$ 이므로

$$a^2 + 4a - 12 = 0, (a+6)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a_n > 0$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 이므로

$$a = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_{2n-1} + 2} - 1}{2a_{2n} + 1} &= \frac{\sqrt{2+2} - 1}{2 \times 2 + 1} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

03

ㄱ. $2a_n - b_n = c_n$ 이라 하면 $b_n = 2a_n - c_n$

이때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{2a_n - b_n\}$, 즉 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ 이 모두 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \beta$ (α, β 는 실수)라

하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - c_n) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ &= 2\alpha - \beta \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n = 0$, $b_n = n$ 이라 하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$ 이 모두 0으로 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{은 홀수}) \\ 0 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ 1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$ 이

라 하면 $|a_n + b_n| = 1$, $|a_n - b_n| = 1$ 이므로 두 수열 $\{|a_n + b_n|\}$, $\{|a_n - b_n|\}$ 은 모두 1로 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모두 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

04

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = \infty$ 에서 $2a_n + 1 = c_n$ 이라 하면

$$a_n = \frac{c_n - 1}{2} \text{ 이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - 1}{2} = \infty \quad \cdots \cdots ㉠$$

또한, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(2a_n - b_n) = 4$ 에서 $a_n(2a_n - b_n) = d_n$ 이라 하면

$$2a_n - b_n = \frac{d_n}{a_n} \text{이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{a_n} = 0 \quad (\because \textcircled{7}) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 1)(2a_n - b_n) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n(2a_n - b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) \\ = 2 \times 4 - 0 = 8 \quad (\because \textcircled{8}) \end{aligned}$$

답 8

05

$$\frac{a_{n+1}}{3n-2} = b_n \text{이라 하면}$$

$$a_{n+1} = (3n-2)b_n$$

$$\therefore a_n = (3n-5)b_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{또한, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{3n-2} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + 1}{n^3 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \times (3n-5)b_{n-1} + 1}{n^3 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{5}{n}\right)b_{n-1} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{3 \times 2}{1} = 6 \end{aligned}$$

답 6

06

$$\sqrt{n^2 - 4n + 3} < k < \sqrt{9n^2 + 12n - 1} \text{에서}$$

$$\sqrt{(n-2)^2 - 1} < k < \sqrt{(3n+2)^2 - 5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때, } n-3 \leq \sqrt{(n-2)^2 - 1} < n-2,$$

$$3n+1 < \sqrt{(3n+2)^2 - 5} < 3n+2$$

이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 k 는 $n-2, n-1, n, \dots, 3n+1$ (단, $n \geq 3$)

$$\therefore a_n = (3n+1) - (n-2) + 1$$

$$= 2n+4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)a_n}{(2n-3)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(2n+4)}{(2n-3)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(2 + \frac{4}{n}\right)}{\left(2 - \frac{3}{n}\right)^3} \\ &= \frac{1 \times 2}{2^3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

07

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 7 \text{에서 } a + d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_7 - S_5 = 50 \text{에서 } a_6 + a_7 = 50$$

$$(a + 5d) + (a + 6d) = 50$$

$$\therefore 2a + 11d = 50 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 3, \quad d = 4$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$$

이고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times 3 + 4(n-1)\}}{2}$$

$$= n(2n+1) = 2n^2 + n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{8S_{n+1}} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{8\{2(n+1)^2 + (n+1)\}} - (4n-1)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{16n^2 + 40n + 24} - (4n-1)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{16n^2 + 40n + 24} - (4n-1)\}\{\sqrt{16n^2 + 40n + 24} + (4n-1)\}}{\sqrt{16n^2 + 40n + 24} + (4n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{48n + 23}{\sqrt{16n^2 + 40n + 24} + (4n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{48 + \frac{23}{n}}{\sqrt{16 + \frac{40}{n} + \frac{24}{n^2}} + 4 - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{48}{\sqrt{16+4}} = 6$$

답 ①

08

조건 (나)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{2n+1} = 4$ 이므로

$$\frac{b_n}{2n+1} = c_n \text{이라 하면}$$

$$b_n = (2n+1)c_n \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 2nb_n}{(n-1)a_n + nb_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 2n(2n+1)c_n}{(n-1)a_n + n(2n+1)c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{2n+1} + 2c_n}{\frac{n-1}{n} \times \frac{a_n}{2n+1} + c_n} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

한편, 조건 (가)에서

$$n\sqrt{n}-1 < \sqrt{n+1}a_n < (n+2)\sqrt{n+1}$$

이므로 부등식의 각 변을 $(2n+1)\sqrt{n+1}$ 로 나누면

$$\begin{aligned} \frac{n\sqrt{n}-1}{(2n+1)\sqrt{n+1}} &< \frac{\sqrt{n+1}a_n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} < \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \\ \frac{n\sqrt{n}-1}{(2n+1)\sqrt{n+1}} &< \frac{a_n}{2n+1} < \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(2n+1)\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}-1}{(2n+1)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{(2n+1)\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n + 2nb_n}{(n-1)a_n + nb_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{2n+1} + 2c_n}{\frac{n-1}{n} \times \frac{a_n}{2n+1} + c_n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 2 \times 4}{1 \times \frac{1}{2} + 4} = \frac{17}{9} \end{aligned}$$

답 $\frac{17}{9}$

09

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{(a-2)n+1\}\{(b+1)n-1\}}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(a-2+\frac{1}{n}\right)\left(b+1-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= (a-2)(b+1) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - \sqrt{1 + \frac{b}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - \sqrt{1 + \frac{b}{n}} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + \sqrt{1 + \frac{b}{n}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + \sqrt{1 + \frac{b}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + \sqrt{1 + \frac{b}{n}}} \\ &= \frac{a-b}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a-b=7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 에서 $b=a-7$ 이므로

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$(a-2)(a-6)=5, \quad a^2-8a+7=0$$

$$(a-1)(a-7)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=7$$

이것을 $\textcircled{8}$ 에 대입하여 풀면

$$a=1, \quad b=-6 \text{ 또는 } a=7, \quad b=0$$

그런데 $b < 0$ 이므로 $a=1, \quad b=-6$

$$\therefore ab=1 \times (-6) = -6$$

답 -6

10

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \left(\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} - a \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} - a}{\frac{1}{2n+1}} = b \end{aligned}$$

에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} - a \right) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2+\frac{1}{n}}{8-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \left(\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} - \frac{1}{2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \left(\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} - \frac{1}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} + \frac{1}{2}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \left(\frac{2n+1}{8n-1} - \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} + \frac{1}{2}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5(2n+1)}{4(8n-1)}}{\sqrt{\frac{2n+1}{8n-1}} + \frac{1}{2}} \\ = \frac{\frac{5}{4} \times \frac{2}{8}}{\sqrt{\frac{2}{8}} + \frac{1}{2}} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{16}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{16}} = \frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

11

$$a_n = \sqrt{pn^2 + qn + r} \text{ 이므로}$$

$$a_{2n} = \sqrt{4pn^2 + 2qn + r}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4pn^2 + 2qn + r}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4p + \frac{2q}{n} + \frac{r}{n^2}} \\ &= \sqrt{4p} \end{aligned}$$

즉, $\sqrt{4p} = 4$ 이므로

$$4p = 16 \quad \therefore p = 4$$

따라서 $a_n = \sqrt{4n^2 + qn + r}$ 이므로

$$a_{2n} = \sqrt{16n^2 + 2qn + r}$$

$$a_{2n+1} = \sqrt{16n^2 + (16+2q)n + 4+q+r}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n+1} - a_{2n}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}^2 - a_{2n}^2}{a_{2n+1} + a_{2n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n + 4 + q}{\sqrt{16n^2 + (16+2q)n + 4+q+r} + \sqrt{16n^2 + 2qn + r}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 + \frac{4+q}{n}}{\sqrt{16 + \frac{16+2q}{n} + \frac{4+q+r}{n^2}} + \sqrt{16 + \frac{2q}{n} + \frac{r}{n^2}}} \\ = \frac{16}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = 2 \end{aligned}$$

답 2

12

다항식 $x^{n+1} + x^n - 2x$ 를 $x^2 - 12x + 27$, 즉 $(x-3)(x-9)$ 로 나눈 나머지가 $a_n x + b_n$ 이므로 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{n+1} + x^n - 2x = (x-3)(x-9)Q(x) + a_n x + b_n \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^{n+1} + 3^n - 6 = 3a_n + b_n$$

$$\therefore 3a_n + b_n = 4 \times 3^n - 6 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에 $x=9$ 를 대입하면

$$9^{n+1} + 9^n - 18 = 9a_n + b_n$$

$$\therefore 9a_n + b_n = 10 \times 9^n - 18 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a_n = \frac{5}{3} \times 9^n - \frac{2}{3} \times 3^n - 2$$

$$b_n = -5 \times 9^n + 6 \times 3^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 1}{3^{2n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 9^n - 2 \times 3^n - 5}{3 \times 9^n + 5 \times 9^n - 6 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{3^n} - \frac{5}{9^n}}{3 + 5 - \frac{6}{3^n}} = \frac{5}{3+5} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

답 ⑤

13

조건 (가)의 부등식의 각 변을 9^n 으로 나누면

$$1 < \frac{a_n}{9^n} < 1 + \frac{1}{9^n}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{9^n}\right) = 1$ 이므로 수열의 극한의
대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{9^n} = 1$$

조건 (나)의 부등식 $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n < b_n < \frac{3^{n+1} + 1}{2}$ 에서

$$\frac{3^{n+1} - 1}{2} < b_n < \frac{3^{n+1} + 1}{2}$$

위의 부등식의 각 변을 3^n 으로 나누면

$$\frac{3 \times 3^n - 1}{2 \times 3^n} < \frac{b_n}{3^n} < \frac{3 \times 3^n + 1}{2 \times 3^n}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^n - 1}{2 \times 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{3^n}}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^n + 1}{2 \times 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{3^n}}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3^n} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3^n b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \frac{a_n}{9^n} + \frac{1}{3^n} \times \frac{b_n}{3^n}}{\frac{a_n}{9^n} + \frac{b_n}{3^n}} \\ &= \frac{3 \times 1 + 0 \times \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{6}{5}$

단계	채점 기준	배점
(가)	조건 (가)에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{9^n}$ 의 값을 구한 경우	30%
(나)	조건 (나)에서 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3^n}$ 의 값을 구한 경우	40%
(다)	(가), (나)에서 구한 극한값을 이용하여 주어진 극한값을 구한 경우	30%

14

등비수열 $\left\{ (x-1) \left(\frac{x^2-3x-1}{3} \right)^{n-1} \right\}$ 은 첫째항이 $x-1$,

공비가 $\frac{x^2-3x-1}{3}$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

(i) $x-1=0$ 에서 $x=1$

(ii) $-1 < \frac{x^2-3x-1}{3} \leq 1$ 에서

$$-3 < x^2 - 3x - 1 \leq 3$$

① $x^2 - 3x - 1 > -3$ 에서 $x^2 - 3x + 2 > 0$

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

② $x^2 - 3x - 1 \leq 3$ 에서 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

$$(x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

①, ②에서 $-1 \leq x < 1$ 또는 $2 < x \leq 4$

(i), (ii)에서 $-1 \leq x \leq 1$ 또는 $2 < x \leq 4$ ㉠

등비수열 $\left\{ x^2 \left(\frac{3x-1}{2} \right)^n \right\}$ 은 첫째항이 $x^2 \times \frac{3x-1}{2}$, 공비

가 $\frac{3x-1}{2}$ 이므로 이 수열이 수렴하지 않으려면

(iii) $x^2 \times \frac{3x-1}{2} \neq 0$ 에서 $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$

(iv) $\frac{3x-1}{2} \leq -1$ 또는 $\frac{3x-1}{2} > 1$ 에서

$$3x \leq -1 \text{ 또는 } 3x > 3$$

$$\therefore x \leq -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x > 1$$

(iii), (iv)에서 $x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x > 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $2 < x \leq 4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 $-1, 3, 4$ 이므로 그
합은

$$-1 + 3 + 4 = 6$$

답 ④

15

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25^n + a^n} - 5^n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{25^n + a^n} - 5^n)(\sqrt{25^n + a^n} + 5^n)}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n}$$

(i) $1 \leq a < 5$ 일 때,

$$\frac{a}{25} < \frac{a}{5} < 1 \text{이므로 분모, 분자를 각각 } 5^n \text{으로 나누면}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{5}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{25}\right)^n} + 1} \\ &= \frac{0}{\sqrt{1} + 1} = 0\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 은 0에 수렴한다.

(ii) $a=5$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{\sqrt{25^n + 5^n} + 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{5^n}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 은 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

(iii) $5 < a < 25$ 일 때,

$\frac{a}{5} > 1$, $\frac{a}{25} < 1$ 이므로 분모, 분자를 각각 5^n 으로 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{5}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{25}\right)^n} + 1} = \infty$$

즉, 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 은 발산한다.

(iv) $a=25$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25^n}{\sqrt{25^n + 25^n} + 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{\sqrt{1 + 1} + 1} = \infty\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 은 발산한다.

(v) $a > 25$ 일 때,

$\sqrt{\frac{25}{a}} < 1$, $\frac{25}{a} < 1$ 이므로 분모, 분자를 각각 $(\sqrt{a})^n$ 으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{a})^n}{\sqrt{\left(\frac{25}{a}\right)^n + 1} + \left(\frac{25}{a}\right)^n} \\ &= \infty\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 은 발산한다.

(i)~(v)에서 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 이 수렴하려면 $1 \leq a \leq 5$ 따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

다른풀이

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25^n + a^n} - 5^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{25^n + a^n} - 5^n)(\sqrt{25^n + a^n} + 5^n)}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{\sqrt{25^n + a^n} + 5^n} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

위의 극한이 수렴하려면 분모, 분자에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값을 각각 p , q ($p > 0$, $q > 0$)라 할 때 $p \geq q$ 이어야 한다. $\dots\dots \textcircled{2}$

(i) $1 \leq a \leq 5$ 일 때,

①의 분모에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 5이고, 분자에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 a 이다.

이때, $a \leq 5$ 이므로 ②을 만족시킨다.

즉, 주어진 수열은 수렴한다.

(ii) $5 < a \leq 25$ 일 때,

①의 분모에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 5이고, 분자에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 a 이다.

이때, $5 < a$ 이므로 ②을 만족시키지 않는다.

즉, 주어진 수열은 발산한다.

(iii) $a > 25$ 일 때,

①의 분모에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 $\sqrt{a}$ 이고, 분자에서 밑의 절댓값 중 가장 큰 값은 a 이다.

이때, 25보다 큰 자연수 a 에 대하여 $a > \sqrt{a}$ 이므로 ②을 만족시키지 않는다.

즉, 주어진 수열은 발산한다.

(i), (ii), (iii)에서 수열 $\{\sqrt{25^n + a^n} - 5^n\}$ 이 수렴하도록 하는 자연수 a 의 값의 범위는

$$1 \leq a \leq 5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

16

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 + r^n} = 2 \text{에서}$$

(i) $|r| < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 + r^n} = 1 \neq 2$$

(ii) $r=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{n+1}}{1+r^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0 \neq 2$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{n+1}}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - r}{\frac{1}{r^n} + 1} = -r = 2$$

$$\therefore r = -2$$

(i), (ii), (iii)에서 $r = -2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1} - 2r + 1}{r^{2n} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{2n+1} + 5}{(-2)^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \times 4^n + 5}{4^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{5}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} = -2 \end{aligned}$$

답 ②

17

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} \text{에서}$$

(i) $|x| < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = 0$$

(ii) $x=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii) $x=-1$ 일 때,

$$x^{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, \quad x^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(iv) $|x| > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = x$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < 1) \\ -\frac{1}{2} & (x = -1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ x & (|x| > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x)g(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < 1) \\ -\frac{1}{2}(1-a+b) & (x = -1) \\ \frac{1}{2}(1+a+b) & (x = 1) \\ x(x^2+ax+b) & (|x| > 1) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=-1$, $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(-1)g(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) \text{에서} \\ -\frac{1}{2}(1-a+b) &= 0 = -(1-a+b) \end{aligned}$$

$$\therefore a-b=1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(1)g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}(1+a+b) = 1+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $g(x) = x^2 - 1$ 이므로

$$g(3) = 3^2 - 1 = 8$$

답 8

다른풀이

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < 1) \\ -\frac{1}{2} & (x = -1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ x & (|x| > 1) \end{cases} \text{가 } x=-1, x=1 \text{에서}$$

불연속이므로 이차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$g(-1) = g(1) = 0$$

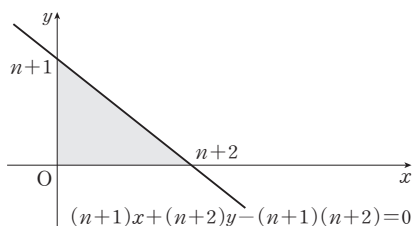
이어야 한다.

따라서 $g(x) = (x+1)(x-1)$ 이므로

$$g(3) = 4 \times 2 = 8$$

18

직선 $(n+1)x + (n+2)y - (n+1)(n+2) = 0$ 의 x 절편은 $n+2$, y 절편은 $n+1$ 이므로 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$(n+1)x + (n+2)y - (n+1)(n+2) = 0$ 에서

$$y = -\frac{n+1}{n+2}x + n+1$$

$$\therefore y = \left(\frac{1}{n+2} - 1\right)x + n+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = n + \frac{1}{n+2}$ 이므로 y 좌표가 자연수인 점은 n 개

$x=2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = n - 1 + \frac{2}{n+2}$ 이므로 y 좌표가 자연수인 점은 $(n-1)$ 개

$x=3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = n - 2 + \frac{3}{n+2}$ 이므로 y 좌표가 자연수인 점은 $(n-2)$ 개

$\vdots$

$x=n+1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = \frac{n+1}{n+2}$ 이므로 y 좌표가 자연수인 점은 0개

위의 그림의 어두운 부분의 내부에 있는 점 중 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 a_n 이므로

$$a_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 0 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 5$$

답 5

19

$\neg$. $a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2}$ 에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면

1, 2, 1, 2, ...

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다. (참)

$\neg$. $\{(-1)^{n+1}\} : 1, -1, 1, -1, \dots$

에서 수열 $\{(-1)^{n+1}\}$ 이 발산하므로

$b_n = p \times (-1)^{n+1} + q$ 에서 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하려면

$p=0$ 이어야 한다. 즉, 수열 $\{b_n\}$ 을 수렴하도록 하는 실수 p 가 존재한다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } a_n + b_n &= \frac{(-1)^n + 3}{2} + p \times (-1)^{n+1} + q \\ &= \frac{1}{2} \times (-1)^n + \frac{3}{2} - p \times (-1)^n + q \\ &= \left(\frac{1}{2} - p\right) \times (-1)^n + \frac{3}{2} + q \end{aligned}$$

이때, 수열 $\{(-1)^n\}$ 이 발산하므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 이 수렴하려면 $\frac{1}{2} - p = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore p = \frac{1}{2}, b_n = \frac{1}{2} \times (-1)^{n+1} + q$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \frac{(-1)^n + 3}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} \times (-1)^{n+1} + q \right\} \\ &= \frac{1}{4} \{(-1)^n + 3\} \{ -(-1)^n + 2q \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (2q-3) \times (-1)^n + 6q-1 \} \end{aligned}$$

에서 수열 $\{(-1)^n\}$ 이 발산하므로 수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하려면 $2q-3=0$ 이어야 한다.

$$\therefore q = \frac{3}{2}, b_n = \frac{1}{2} \times (-1)^{n+1} + \frac{3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= \left\{ \frac{(-1)^n + 3}{2} \right\}^2 + \left\{ \frac{(-1)^{n+1} + 3}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{1+6 \times (-1)^n + 9}{4} + \frac{1-6 \times (-1)^n + 9}{4} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 5 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

20

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n + n^2} - \sqrt{n^2 + 1}) = 4$ 에서

$\sqrt{a_n + n^2} - \sqrt{n^2 + 1} = b_n$ 이라 하면

$$\sqrt{a_n + n^2} = b_n + \sqrt{n^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a_n + n^2 = b_n^2 + 2b_n\sqrt{n^2+1} + n^2 + 1$$

$$\therefore a_n = b_n^2 + 2b_n\sqrt{n^2+1} + 1$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2 + 2b_n\sqrt{n^2+1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n^2 \times \frac{1}{n} + 2b_n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= 4^2 \times 0 + 2 \times 4 \times \sqrt{1+0} = 8\end{aligned}$$

답 8

21

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x-1)(x-3)(x-5)$$

이차함수 $g(x)$ 와 일차함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 1이므로

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\beta), \quad h(x) = x-\gamma$$

라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{g(n)} - h(n)\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{g(n)} - h(n)\} \{\sqrt{g(n)} + h(n)\}}{\sqrt{g(n)} + h(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n) - \{h(n)\}^2}{\sqrt{g(n)} + h(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-\alpha)(n-\beta) - (n-\gamma)^2}{\sqrt{(n-\alpha)(n-\beta)} + n - \gamma} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\gamma - \alpha - \beta)n + \alpha\beta - \gamma^2}{\sqrt{(n-\alpha)(n-\beta)} + n - \gamma} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\gamma - \alpha - \beta + \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{n}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)} + 1 - \frac{\gamma}{n}} \\ &= \frac{2\gamma - \alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

이때, α, β, γ 는 1, 3, 5 중 하나이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{g(n)} - h(n)\}$ 의 값이 최대이려면

$$\alpha=1, \beta=3, \gamma=5 \text{ 또는 } \alpha=3, \beta=1, \gamma=5$$

따라서 $g(x) = (x-1)(x-3), h(x) = x-5$ 이므로

$$g(2) + h(2) = -1 + (-3) = -4$$

답 -4

22

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k - k + 1) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n (-k + 1) \\ &= S_n - \frac{n(n+1)}{2} + n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k - a_k) &= \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - S_n \\ &= n(n+1) - S_n\end{aligned}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - k + 1)}{\sum_{k=1}^n (2k - a_k)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - \frac{n(n+1)}{2} + n}{n(n+1) - S_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{S_n}{n(n+1)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 0\end{aligned}$$

답 0

23

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x}{x^{2n} + 2} \text{에서}$$

(i) $|x| < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x}{x^{2n} + 2} = \frac{2x}{2} = x$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x}{x^{2n} + 2} = \frac{1+2}{1+2} = 1$$

(iii) $x = -1$ 일 때,

$$x^{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1, \quad x^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x}{x^{2n} + 2} = \frac{-1-2}{1+2} = -1$$

(iv) $|x| > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x}{x^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{2}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x & (|x| < 1) \\ -1 & (x = -1) \\ 1 & (x = 1) \\ \frac{1}{x} & (|x| > 1) \end{cases}$$

① $|a| < \frac{1}{2}$ 일 때, $|2a| < 1$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = 1 \text{에서}$$

$$a + 2a = 1, \quad 3a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

② $a = -\frac{1}{2}$ 일 때, $2a = -1$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

③ $a = \frac{1}{2}$ 일 때, $2a = 1$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

④ $\frac{1}{2} < |a| < 1$ 일 때, $1 < |2a| < 2$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = 1 \text{에서}$$

$$a + \frac{1}{2a} = 1, \quad 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

이때, 이 이차방정식을 만족시키는 실수 a 가 존재하지 않는다.

⑤ $a = -1$ 일 때, $2a = -2$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

⑥ $a = 1$ 일 때, $2a = 2$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

⑦ $|a| > 1$ 일 때, $|2a| > 2$ 이므로

$$f(a) + f(2a) = 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} = 1, \quad \frac{3}{2a} = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

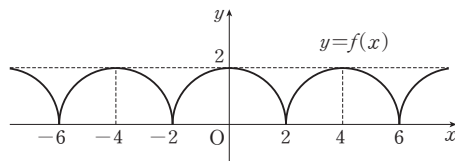
①~⑦에서 $a = \frac{1}{3}$ 또는 $a = \frac{3}{2}$ 이므로 그 합은

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$$

답 $\frac{11}{6}$

24

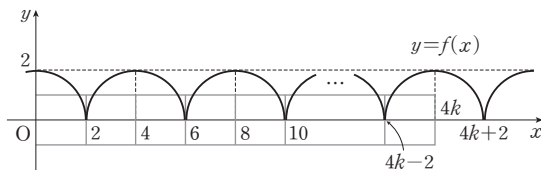
조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



가로 길이가 $4n$, 세로 길이가 2이고 두 대각선의 교점이 원점인 직사각형의 가로가 x 축과 평행하므로 직사각형의 네 꼭짓점의 좌표는

$$(2n, 1), (-2n, 1), (2n, -1), (-2n, -1)$$

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직사각형이 각각 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직사각형의 교점의 개수는 $x > 0$ 에서의 교점의 개수의 2배이다.



(i) $n = 2k - 1$ (k 는 자연수)일 때,

제 1 사분면 위에 있는 직사각형의 꼭짓점의 좌표가

$(4k - 2, 1)$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직사각형의 교점의 개수는 $2k$ 이다.

$$\therefore a_{2k-1} = 2 \times 2k = 4k$$

(ii) $n = 2k$ (k 는 자연수)일 때,

제 1 사분면 위에 있는 직사각형의 꼭짓점의 좌표가

$(4k, 1)$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직사각형의 교점의 개수는 $2k$ 이다.

$$\therefore a_{2k} = 2 \times 2k = 4k$$

(i), (ii)에서 $a_{2n-1} = 4n$, $a_{2n} = 4n$ 이므로

$$a_{2n+1} = 4(n+1) = 4n+4, \quad a_{2n+2} = 4(n+1) = 4n+4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{2n}a_{2n+1}} - a_{2n+2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{4n(4n+4)} - (4n+4) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-16n-16}{\sqrt{4n(4n+4)} + 4n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-16 - \frac{16}{n}}{\sqrt{4\left(4 + \frac{4}{n}\right)} + 4 + \frac{4}{n}} = \frac{-16}{\sqrt{16+4}} = -2$$

답 -2

01-1 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\log 2$

01-2 $\frac{2}{3}$

01-3 $\frac{1}{6}$

02-1 1

02-2 $\frac{1}{2}$

02-3 3

03-1 3

03-2 124

04-1 (1) $-2 < x < 10$ (2) $x = -2$ 또는 $-1 < x \leq 2$

04-2 $\frac{\pi}{2}$

04-3 $\neg, \cup, \cap$

05-1 $\frac{27}{8}$

05-2 383

05-3 $\frac{13}{35}$

06-1 $5 + \sqrt{10}$

06-2 159

06-3 $\sqrt{5} - 1$

07-1 $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

07-2 $4\sqrt{2} - 4$

08-1 $4 + 2\sqrt{3}$

08-2 $\frac{20}{3}$

09-1 $\frac{1}{7}$

09-2 $\frac{13}{21}$

01-1

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} (1) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{k^2 + 2k} \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \log \frac{k^2 + 2k + 1}{k^2 + 2k} \\ &= \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k+1}{k+2} \right) \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) + \log \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) + \log \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \\ &\quad + \dots + \log \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log \left\{ \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \dots \times \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \log \frac{2(n+1)}{n+2}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2(n+1)}{n+2} = \log 2$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\log 2$

01-2

$$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} a_n \text{에서 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

위의 식의 양변에 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-1}{2n+1} \right)$$

이때, 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k+1}{2k+3} - \frac{2k-1}{2k+1} \right) \\ &= \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{5}{7} - \frac{3}{5} \right) + \left(\frac{7}{9} - \frac{5}{7} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-1}{2n+1} \right) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3} + \frac{2n+1}{2n+3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

01-3

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (3n+3)x + 9n^2 - 6 = 0$ 의 두 근

이 α_n, β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -(3n+3), \alpha_n \beta_n = 9n^2 - 6$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n-1)(\beta_n-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n\beta_n - (\alpha_n+\beta_n) + 1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 6 + 3n + 3 + 1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\end{aligned}$$

이때, 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)\end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

02-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{4n}{n+1} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{4n}{n+1} \right) = 0$$

이때, $a_n - \frac{4n}{n+1} = c_n$ 으로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{이고 } a_n = c_n + \frac{4n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c_n + \frac{4n}{n+1} \right) = 4$$

또한, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$

이때, $a_n + b_n = d_n$ 으로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \text{이고 } b_n = d_n - a_n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - a_n) = -4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - b_n}{a_n - 2b_n} = \frac{2 \times 4 - (-4)}{4 - 2 \times (-4)} = \frac{12}{12} = 1$$

답 1

02-2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = 0$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2na_n - 3n^2 - 1}{3b_n + 2n^2 - n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{a_n}{n} - 3 - \frac{1}{n^2}}{3 \times \frac{b_n}{n^2} + 2 - \frac{1}{n}} \\ &= \frac{2 \times 2 - 3 - 0}{3 \times 0 + 2 - 0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

02-3

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(ak+1)^2 - 4k(k+1)}{k(k+1)} = b$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an+1)^2 - 4n(n+1)}{n(n+1)} = b$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an+1)^2 - 4n(n+1)}{n(n+1)}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+1)^2 - 4n(n+1)}{n(n+1)} = 0$$

이때, $a^2 \neq 4$ 이면 등식이 성립하지 않으므로

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)^2 - 4k(k+1)}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = b$$

따라서 $a=2$, $b=1$ 이므로 $a+b=2+1=3$

답 3

03-1

$a_n + b_n = c_n$ ㉠, $3a_n - b_n = d_n$ ㉡으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = -6$$

이때, ㉠, ㉡을 연립하여 a_n, b_n 을 c_n, d_n 에 대하여 나타내면

$$a_n = \frac{c_n + d_n}{4}, b_n = \frac{3c_n - d_n}{4} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n + d_n}{4} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \\ &= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times (-6) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3c_n - d_n}{4} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \\ &= \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times (-6) = 3 \end{aligned}$$

또한, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 + 3 = 3$$

답 3

03-2

조건 (가)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad (\beta > 0) \text{라 하면 조건 (나)에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 8b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 8 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha - 8\beta$$

$$\text{즉, } \alpha - 8\beta = 10 \text{ 이므로 } \alpha = 8\beta + 10 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

$$\text{또한, 조건 (다)에서 } \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n - 1 \right)^2 \text{ 이므로}$$

$$2\alpha = (\beta - 1)^2$$

$$2(8\beta + 10) = (\beta - 1)^2 \quad (\because \text{㉠})$$

$$16\beta + 20 = \beta^2 - 2\beta + 1, \beta^2 - 18\beta - 19 = 0$$

$$(\beta - 19)(\beta + 1) = 0$$

$$\therefore \beta = 19 \quad (\because \beta > 0), \alpha = 162 \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= \alpha - 2\beta$$

$$= 162 - 2 \times 19 = 124$$

답 124

04-1

(1) 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x-4}{6}$ 이므로

이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-4}{6} < 1$$

$$\therefore -2 < x < 10$$

(2) 주어진 등비급수의 첫째항이 $x^2 - 4$, 공비가 $\frac{2x-1}{3}$ 이

므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$x^2 - 4 = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{2x-1}{3} < 1$$

$$\text{즉, } x = -2 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } -1 < x < 2$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } -1 < x \leq 2$$

답 (1) $-2 < x < 10$ (2) $x = -2$ 또는 $-1 < x \leq 2$

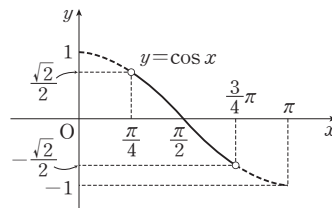
04-2

주어진 등비급수의 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}\cos x$ 이므로

이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -\sqrt{2}\cos x < 1$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



이때, $0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 조건을 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$b - a = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

04-3

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ 의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r-1}{2}$ 이고,

이 등비급수가 수렴하므로

$$-1 < \frac{r-1}{2} < 1$$

$$\therefore -1 < r < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2}\right)^n$ 의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{1-r}{2}$

$$\text{이고 } \textcircled{㉠} \text{에서 } -1 < \frac{1-r}{2} < 1, \text{ 즉}$$

$$-1 < (\text{공비}) < 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2}\right)^n \text{은 항상 수렴한다.}$$

㉡. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{4}\right)^n$ 의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{r+1}{4}$

$$\text{이고 } \textcircled{㉠} \text{에서 } 0 < \frac{r+1}{4} < 1, \text{ 즉}$$

$$-1 < (\text{공비}) < 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{4}\right)^n \text{은 항상 수렴한다.}$$

㉢. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r-1}{5}\right)^n$ 의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{2r-1}{5}$

$$\text{이고 } \textcircled{㉠} \text{에서 } -\frac{3}{5} < \frac{2r-1}{5} < 1, \text{ 즉}$$

$$-1 < (\text{공비}) < 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r-1}{5}\right)^n \text{은 항상 수렴한다.}$$

따라서 수렴하는 급수는 ㉠, ㉡, ㉢이다.

답 ㉠, ㉡, ㉢

05-1

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n a_{n+1} &= 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 3 \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{9}$ 인 등비수열

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \frac{3}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{27}{8}$$

답 $\frac{27}{8}$

05-2

$a_1=7$, $a_{n+1}=\frac{3}{7}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 7, 공비가 $\frac{3}{7}$

인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 7 \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{2n-1} = 7 \left(\frac{3}{7}\right)^{2n-2} = 7 \left(\frac{9}{49}\right)^{n-1}$$

즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 7, 공비가 $\frac{9}{49}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} &= \frac{7}{1 - \frac{9}{49}} \\ &= \frac{343}{40} \end{aligned}$$

따라서 $p=40$, $q=343$ 이므로

$$p+q=40+343=383$$

답 383

05-3

$7^0=1$ 을 8로 나눈 나머지는 1이므로

$$a_1=1$$

$7^1=7$ 을 8로 나눈 나머지는 7이므로

$$a_2=7$$

$7^2=49$ 를 8로 나눈 나머지는 1이므로

$$a_3=1$$

$7^3=343$ 을 8로 나눈 나머지는 7이므로

$$a_4=7$$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 7이 이 순서대로 반복된다.

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{6^n} &= \frac{1}{6} + \frac{7}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{7}{6^4} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^5} + \cdots \right) \\
&\quad + \left(\frac{7}{6^2} + \frac{7}{6^4} + \frac{7}{6^6} + \cdots \right) \\
&= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6^2}} + \frac{\frac{7}{6^2}}{1 - \frac{1}{6^2}} \\
&= \frac{6}{35} + \frac{7}{35} = \frac{13}{35}
\end{aligned}$$

답 $\frac{13}{35}$

06-1

첫째항이 9인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 15 \text{에서 } \frac{9}{1-r} = 15 \quad \therefore r = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a_n = 9 \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

즉, 수열 $\{\sqrt{a_n}\}$ 은 첫째항이 $\sqrt{9}=3$, 공비가 $\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 인

등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} = \frac{3}{1 - \frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{15}{5 - \sqrt{10}} = 5 + \sqrt{10}$$

답 $5 + \sqrt{10}$

06-2

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore a = 2 - 2r \quad \cdots \text{㉠}$$

이때, 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{8}{3} \text{에서 } \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore 3a^2 = 8 - 8r^2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3(4r^2 - 8r + 4) = 8 - 8r^2, \quad 20r^2 - 24r + 4 = 0$$

$$5r^2 - 6r + 1 = 0$$

$$(5r-1)(r-1) = 0 \quad \cdots \text{㉢}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$

㉢에서 $r = \frac{1}{5}$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$a = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore a_n = \frac{8}{5} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}$$

이때, 수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 $\left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{512}{125}$, 공비가

$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{\frac{512}{125}}{1 - \frac{1}{125}} = \frac{128}{31}$$

따라서 $p=31$, $q=128$ 이므로

$$p+q=31+128=159$$

답 159

06-3

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2, \quad a_4 = ar^3, \quad a_6 = ar^5$$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 서로 다른 양수이므로

$$a > 0, \quad r > 0, \quad r \neq 1 \quad \cdots \text{㉠}$$

조건 (가)에서 $2a_4 = a_3 + a_6$ 이므로

$$2ar^3 = ar^2 + ar^5, \quad ar^5 - 2ar^3 + ar^2 = 0$$

$$ar^2(r^3 - 2r + 1) = 0$$

$$ar^2(r-1)\left(r + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(r + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 1 \quad \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉢에서 $a > 0$, $0 < r < 1$ 이므로 ㉡에서

$$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

이때, 조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + \sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{a}{1-r} = 3 + \sqrt{5}$$

$$a = (3 + \sqrt{5}) \left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$= (3 + \sqrt{5}) \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2$$

$$\therefore a_2 = ar = 2 \times \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} - 1$$

답 $\sqrt{5} - 1$

07-1

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \overline{OP_1} \cos 30^\circ - \overline{P_1P_2} \cos 30^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 30^\circ - \cdots \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cdots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \overline{OP_1} \sin 30^\circ + \overline{P_1P_2} \sin 30^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 30^\circ + \cdots \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$

07-2

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} &= \overline{A_1B_2} = \overline{A_0A_1} \times \sin \frac{\pi}{4}, \\ \overline{A_2A_3} &= \overline{A_2B_3} = \overline{A_1A_2} \times \sin \frac{\pi}{4} = \overline{A_0A_1} \times \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2, \\ \overline{A_3A_4} &= \overline{A_3B_4} = \overline{A_2A_3} \times \sin \frac{\pi}{4} = \overline{A_0A_1} \times \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^3, \\ &\vdots \\ \text{이므로} \\ \overline{A_nA_{n+1}} &= \overline{A_0A_1} \times \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^n \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots) \\ \text{이때, } \overline{A_0A_1} &= 4 \text{이므로} \\ \overline{A_nA_{n+1}} &= 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\textcircled{1}\end{aligned}$$

한편, 점 B_1 의 x 좌표는 $x_1 = \overline{A_0A_1}$,
 점 B_2 의 x 좌표는 $x_2 = \overline{A_0B_2} = \overline{A_1A_2}$,
 점 B_3 의 x 좌표는 $x_3 = x_2$,
 점 B_4 의 x 좌표는
 $x_4 = \overline{A_0B_2} - \overline{A_2B_3} + \overline{A_2B_4}$
 $= \overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4}$,

점 B_5 의 좌표는 $x_5 = x_4$,

$\vdots$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= \overline{A_1A_2} - \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} - \cdots \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \cdots \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 4\end{aligned}$$

답 $4\sqrt{2} - 4$

08-1

$\triangle OA_1B_1$ 은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$$\overline{A_1B_1} = 1, \quad \overline{OA_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때, $\triangle OA_2B_2$ 는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 정삼각형이므로

$$\overline{A_2B_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{OA_3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{A_nB_n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nB_n} = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{3}$$

답 $4 + 2\sqrt{3}$

08-2

직선 $y = \frac{1}{2^n}$ 과 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 두 교점 A_n, B_n 의

x 좌표를 구하면

$$x^2 + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2 = 1, \quad x^2 = 1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2}$$

이때, $l_n = \overline{A_nB_n}$ 이므로

$$\begin{aligned}l_n &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2} - \left\{ -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2} \right\} \\ &= 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore l_n^2 &= 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)^2 \right\} = 4 \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^n} \right) \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^n} \right) \\
&= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= 4 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 4 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= 8 - \frac{4}{3} = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

답 $\frac{20}{3}$

09-1

넓이가 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 인 정사각형의 한 변의 길이는

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}, \dots$$

즉, 넓이가 S_n, S_{n+1} 인 정사각형의 닮음비가 $1 : \frac{3}{4}$ 이므로

넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$, 즉 $1 : \frac{9}{16}$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $\frac{9}{16}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{1}{7}$$

답 $\frac{1}{7}$

09-2

점 P_n 의 x 좌표를 구하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1) = 3x(x-1) \text{에서 } x < 1 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

점 P_n 의 y 좌표는

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{18} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{18} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{18} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \\
&= 1 - \frac{4}{9} + \frac{4}{63} = \frac{39}{63} = \frac{13}{21}
\end{aligned}$$

답 $\frac{13}{21}$

개념 마무리

본문 pp.64~67

01 ②	02 10	03 $-\frac{1}{7}$	04 ①, ④
05 $\frac{41}{5}$	06 24	07 $\neg$	08 ③
09 8	10 31	11 ③	12 32
13 $\frac{1}{15}$	14 4	15 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$	16 ③
17 ⑤	18 $\frac{1}{12}$	19 108	20 $\frac{4}{15}$
21 9	22 ③		

01

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \\
\text{급수 } B &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4+6} + \frac{1}{4+6+8} + \frac{1}{4+6+8+10} + \cdots \\
\text{의 제 } n \text{ 항을 } b_n \text{이라 하면} \\
b_n &= \frac{1}{4+6+8+\cdots+(2n+2)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (2k+2)} \\
&= \frac{1}{2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2n} = \frac{1}{n(n+3)} \\
\therefore B &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18} \\
C &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

따라서 세 급수 A, B, C 의 대소 관계는
 $A < C < B$

답 ②

02

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{8n}{n+1} \right) = 0$ 에서 $a_n - \frac{8n}{n+1} = b_n$ 으로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이고 } a_n = b_n + \frac{8n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{8n}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 0 + 8 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k^2 - a_{k+1}^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_1^2 - a_2^2) + (a_2^2 - a_3^2) + (a_3^2 - a_4^2) \}$$

$$+ \cdots + (a_n^2 - a_{n+1}^2) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^2 - a_{n+1}^2) = 36$$

이때, $\textcircled{7}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$ 이므로

$$a_1^2 - 8^2 = 36, \quad a_1^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\therefore a_1 = 10 \quad (\because a_1 > 0)$$

답 10

03

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{4n+3} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{7}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{7}$$

$$= 0 - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$$

답 $-\frac{1}{7}$

04

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

① $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ 에서

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \quad S_6 = 0, \quad \cdots \text{이}$$

므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{2} (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\text{에서}$$

$$S_1=0, S_2=0, S_3=0, \cdots\text{이므로 } S_n=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n=0$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

$$\textcircled{3} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\cdots\text{에서}$$

$$S_1=-\frac{1}{2}, S_2=0, S_3=-\frac{1}{4}, S_4=0, S_5=-\frac{1}{8},$$

$$S_6=0, \cdots\text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

$$\textcircled{4} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots\text{에서}$$

$$S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, S_3=\frac{1}{2}, S_4=\frac{1}{2}-\frac{3}{4},$$

$$S_5=\frac{1}{2}, S_6=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}, \cdots\text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}, S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{5} \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots\text{에서}$$

$$S_1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, S_2=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}, S_3=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}, \cdots\text{이므로}$$

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $-\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

따라서 발산하는 급수는 ①, ④이다.

답 ①, ④

05

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n + \frac{5n^2+4}{(2n+1)^2}\right\}$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{a_n + \frac{5n^2+4}{(2n+1)^2}\right\}=0$$

$$a_n + \frac{5n^2+4}{(2n+1)^2} = c_n \text{으로 놓으면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{이고 } a_n = c_n - \frac{5n^2+4}{(2n+1)^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{c_n - \frac{5n^2+4}{(2n+1)^2}\right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= 0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

또한, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{\sqrt{9^{n+1}-4^n}}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n - \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{\sqrt{9^{n+1}-4^n}}\right)=0$$

$$b_n - \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{\sqrt{9^{n+1}-4^n}} = d_n \text{으로 놓으면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \text{이고 } b_n = d_n + \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{\sqrt{9^{n+1}-4^n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_n + \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{\sqrt{9^{n+1}-4^n}}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{9}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n}}$$

$$= 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+b_n}{a_n b_n} = \frac{-\frac{5}{4} + \frac{1}{9}}{-\frac{5}{4} \times \frac{1}{9}} = \frac{41}{5}$$

답 $\frac{41}{5}$

06

조건 (가)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - b_n)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - b_n) = 0$$

조건 (나)의 $\frac{8n^2-1}{2n+1} < na_nb_n < \frac{8n^2+1}{2n-1}$ 에서

$$\frac{8n^2-1}{2n^2+n} < a_nb_n < \frac{8n^2+1}{2n^2-n}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2-1}{2n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2+1}{2n^2-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{8}{2} = 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n &= 4 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (9a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (3a_n - b_n)^2 + 6a_nb_n \} \\ &= 0^2 + 6 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

답 24

07

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1) = 10 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_nb_n + a_n - b_n - 1) = 10$$

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n - 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n - 1)(b_n + 1) - a_nb_n \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1) - \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n \\ &= 10 - 2 = 8 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\neg. \text{ (반례) } a_n = \begin{cases} 11 & (n=1) \\ 1 & (n \geq 2) \end{cases}, b_n = 0 \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1) &= (a_1 - 1)(b_1 + 1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1) \\ &= 10 \times 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \times 1 = 10 \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) &= a_1 - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 1) \\ &= 10 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = 10 \end{aligned}$$

이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 1) = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 1) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)(b_n + 1) = 0$$

이때, $(a_n - 1)(b_n + 1) = c_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{이고 } a_n = \frac{c_n}{b_n + 1} + 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

그런데 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n + 1) = 2$ 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(b_n + 1) \neq 0$ 이므로

로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n + 1)$ 은 발산한다.

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n + 1)$ 은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ㄱ

오답피하기

ㄴ. 등식

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)(b_n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1)$$

이 항상 성립하는 것은 아니므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) = 10$ 일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1) = 1 \text{인지는 알 수 없다.}$$

08

ㄴ. $b_n = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$b_1 = a_2 - a_1$$

$$b_2 = a_3 - a_2$$

$$b_3 = a_4 - a_3$$

⋮

$$+) \quad b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = a_n - a_1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - 2 \quad (\because a_1 = 2) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 이 α 로 수렴한다고 하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \alpha - 2 \quad \dots\dots\textcircled{2}\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n = \frac{2}{n}$ 라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -2 \text{이지만 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 수렴하지 않는다.}$$

(거짓)

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\textcircled{2}$ 에서 $\neg$ 에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 -2 로 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\textcircled{2}$ 이다.

답 ③

09

$f(x) = 5x^2 - x - 1$ 이라 하면

$f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 α , β 는 -1 과 0 사이 또는 0 과 1 사이에 있다.

이차방정식 $5x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{5}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta^n - \alpha^n) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta(1 - \alpha) - \alpha(1 - \beta)}{(1 - \beta)(1 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \times \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta - \alpha - \beta + 1} \\ &= \frac{1}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{5} - \frac{1}{5} + 1} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=5$ 이므로

$$p+q=3+5=8$$

답 8

보충설명

이차방정식 $5x^2 - x - 1 = 0$ 에서

$$x = \frac{1 - \sqrt{21}}{10} \quad \text{또는} \quad x = \frac{1 + \sqrt{21}}{10}$$

이때, $4 < \sqrt{21} < 5$ 이므로

$$-\frac{2}{5} < \frac{1 - \sqrt{21}}{10} < -\frac{3}{10}, \quad \frac{1}{2} < \frac{1 + \sqrt{21}}{10} < \frac{3}{5}$$

$$\therefore -1 < \alpha < 1, \quad -1 < \beta < 1$$

따라서 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ 은 각각 $\frac{\alpha}{1 - \alpha}$, $\frac{\beta}{1 - \beta}$ 로 수렴한다.

10

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \text{에서 } \frac{a}{1 - r} = 3 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

또한, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a_2 = ar$, 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{6}{5} \text{에서 } \frac{ar}{1 - r^2} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{ar}{(1 - r)(1 + r)} = \frac{6}{5}$$

$\textcircled{1}$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{3r}{1 + r} = \frac{6}{5}, \quad 15r = 6 + 6r$$

$$9r = 6 \quad \therefore r = \frac{2}{3}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a = 1$

즉, 수열 $\{a_{3n}\}$ 은 첫째항이 $a_3 = ar^2 = \frac{4}{9}$, 공비가 $r^3 = \frac{8}{27}$

인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} &= \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{8}{27}} \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{19}{27}} = \frac{12}{19}\end{aligned}$$

따라서 $p=19, q=12$ 이므로

$$p+q=19+12=31$$

답 31

11

첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 각각 $r_1,$

r_2 라 하면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < r_1 < 1, -1 < r_2 < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{8}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} = \frac{8}{3}$$

$$8(1-r_1)(1-r_2) = 3(2-r_1-r_2)$$

$$\therefore 8r_1r_2 - 5(r_1+r_2) + 2 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

수열 $\{a_nb_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 r_1r_2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \frac{4}{5} \text{ 에서 } \frac{1}{1-r_1r_2} = \frac{4}{5}$$

$$4-4r_1r_2=5 \quad \therefore r_1r_2 = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $r_1+r_2=0$

$$\therefore r_1 = -r_2$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면

$$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}$$

이때, 두 수열 $\{a_n^2\}, \{b_n^2\}$ 은 모두 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$

인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + 2 \times \frac{4}{5} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{8}{5} + \frac{4}{3} = \frac{64}{15} \end{aligned}$$

답 ③

12

$$a_na_{n+1}a_{n+2} = 2^n \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

위의 식의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} = 2^{n+1} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}, \frac{a_{n+3}}{a_n} = 2$$

$$\therefore a_{n+3} = 2a_n \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

이때, 수열 $\{a_{3n-2}\}$ 은 $\textcircled{3}$ 에 의하여

$$a_1, a_4 = 2a_1, a_7 = 2a_4, \dots$$

즉, 수열 $\{a_{3n-2}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = \frac{1}{16}$, 공비가 2인 등비수

열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_{3n-2}}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 16$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인

등비수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{3n-2}} &= \frac{16}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 32 \end{aligned}$$

답 32

13

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2a_2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^na_n \\ = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 의 n 에 $n-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2a_2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}a_{n-1} \\ = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots\textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^na_n &= -\frac{1}{4} \times \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= -\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n a_n}{2^{2n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}} \left\{ -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{6} \times \left(\frac{3}{8}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{1}{16}}{1-\frac{3}{8}} + \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

답 1/15

14

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2r}\right)^n$ 의 첫째항과 공비는 모두 $\frac{5}{2r}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{5}{2r} < 1 \text{에서 } \frac{2r}{5} < -1 \text{ 또는 } \frac{2r}{5} > 1$$

$$\therefore r < -\frac{5}{2} \text{ 또는 } r > \frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + 2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$ 에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ 이 수렴하므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + 2^{2n}}{5^n}$ 이 수렴하려면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{5}\right)^n$ 도 수렴해야 한다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{5}\right)^n$ 의 첫째항과 공비는 모두 $\frac{r}{5}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{r}{5} < 1 \quad \therefore -5 < r < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } -5 < r < -\frac{5}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{2} < r < 5$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 r 는 $-4, -3, 3, 4$ 의 4개이다.

답 4

15

$\overline{A_{2n-1}A_{2n}} = a_n$, $\overline{A_{2n}A_{2n+1}} = b_n$ 이라 하자.

정삼각형 OAB의 한 변의 길이가 6이므로

A(6, 0), B(3, $3\sqrt{3}$)이고 $\overline{OA} = 6$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 A_1 이므로

$$\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 6}{1+2}, \frac{1 \times 3\sqrt{3} + 2 \times 0}{1+2} \right), \text{ 즉 } A_1(5, \sqrt{3}) \text{이고,}$$

$$\overline{AA_1} = 2$$

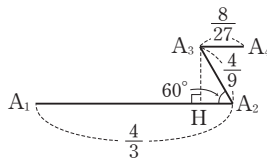
$$\overline{A_1A_2} = \frac{2}{3}\overline{AA_1}, \overline{A_2A_3} = \frac{1}{3}\overline{A_1A_2}, \dots \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{4}{3}, b_1 = \frac{4}{9}, a_2 = \frac{8}{27}, b_2 = \frac{8}{81}, \dots$$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 각각 첫째항이 $a_1 = \frac{4}{3}$,

$b_1 = \frac{4}{9}$ 이고 공비가 $\frac{2}{9}$ 인 등비수열이다.

(가)



한편, 위의 그림과 같이 점 A_3 에서 선분 A_1A_2 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle A_3A_2A_1 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{A_3H} = \frac{4}{9} \times \sin 60^\circ = \frac{4}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

$$\overline{HA_2} = \frac{4}{9} \times \cos 60^\circ = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

또한, 점 A_1 의 x좌표는 5이므로

$$A_2\left(5 + \frac{4}{3}, \sqrt{3}\right)$$

$$A_3\left(5 + \frac{4}{3} - \frac{2}{9}, \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A_4\left(5 + \frac{4}{3} - \frac{2}{9} + \frac{8}{27}, \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A_5\left(5 + \frac{4}{3} - \frac{2}{9} + \frac{8}{27} - \frac{4}{81}, \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{81}\right)$$

⋮

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5 + \frac{4}{3} - \frac{2}{9} + \frac{8}{27} - \frac{4}{81} + \dots$$

$$= 5 + \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{27} + \dots\right) - \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{81} + \dots\right)$$

$$= 5 + \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{9}} - \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{9}}$$

$$= 5 + \frac{12}{7} - \frac{2}{7} = \frac{45}{7},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{81} + \dots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{9}{7}\sqrt{3}$$

(나)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{\frac{45}{7}}{\frac{9\sqrt{3}}{7}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$A_{2n-1}A_{2n}=a_n$, $A_{2n}A_{2n+1}=b_n$ 이라 하고, 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항과 공비를 각각 구한 경우	40%
(나)	점 $A_n(x_n, y_n)$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 의 값을 각각 구한 경우	50%
(다)	(나)에서 구한 극한값을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ 의 값을 구한 경우	10%

다른풀이

$\triangle OAA_1$, $\triangle A_1A_2A_3$ 에서

$\overline{OA} : \overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = 3 : 1$ 이고,

$\angle A_1AO = \angle A_3A_2A_1 = 60^\circ$ 이므로

$\triangle OAA_1 \sim \triangle A_1A_2A_3$ (SAS 닮음)

같은 방법으로

$\triangle OAA_1 \sim \triangle A_3A_4A_5$,

$\triangle OAA_1 \sim \triangle A_5A_6A_7$,

:

$\triangle OAA_1 \sim \triangle A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$

이때, 직선 OA , A_1A_2 , A_3A_4 , $\dots$, $A_{2n-1}A_{2n}$ 은 서로 평행하므로 점 O , A_1 , A_3 , $\dots$, A_{2n+1} 은 한 직선 위에 있다.

이때, 이 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 이므로 직선 OA_{2n+1} 의 기울기도 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 이다. 즉,

$$\frac{y_{2n+1}-0}{x_{2n+1}-0} = \frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

보충설명

자연수 n 에 대하여 수열 $\{x_n\}$ 은

$$x_1=5,$$

$$x_{2n}=5+(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)-\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n-1}),$$

$$x_{2n+1}=5+(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)-\frac{1}{2}(b_1+b_2+b_3+\dots+b_n)$$

수열 $\{y_n\}$ 은

$$y_1=\sqrt{3}, y_2=\sqrt{3}, y_{2n+1}=y_{2n+2}=\sqrt{3}+b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$$

16

한 변이 선분 BC 위에 있는 세 정삼각형의 넓이의 합을 S_1 , 한 변이 선분 B_1C_1 위에 있는 세 정삼각형의 넓이의 합을 S_2 , $\dots$ 라 하자.

$\overline{BC}=1$ 이고 선분 BC 의 삼등분점이 A_1 , A_2 이므로

$$\overline{BA_1}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_2C}=\frac{1}{3}$$

즉, $\triangle B_1BA_1$, $\triangle P_1A_1A_2$, $\triangle C_1A_2C$ 는 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$

인 정삼각형이므로 넓이의 합은

$$\begin{aligned} S_1 &= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$\triangle AB_1C_1$ 은 한 변의 길이가 $\overline{AB_1}=\frac{2}{3}$ 인 정삼각형이므로

$\overline{B_1C_1}=\frac{2}{3}$ 이고, 선분 B_1C_1 을 삼등분한 점이 A_3 , A_4 이므로

$$\overline{B_1A_3}=\overline{A_3A_4}=\overline{A_4C_1}=\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

두 정삼각형 B_1BA_1 , $B_2B_1A_3$ 의 닮음비가 $\frac{1}{3} : \frac{2}{9}$, 즉 $3 : 2$

이므로 넓이의 비는 $3^2 : 2^2$, 즉 $9 : 4$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{12}$, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열이므로 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3\sqrt{3}}{20}$$

답 ③

17

$$1.\dot{4}=1.444\dots$$

$$=1+0.4+0.04+0.004+\dots$$

$$=1+\left(\frac{4}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\dots\right)$$

$$=1+\frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$$

$$0.23\bar{1}=0.23111\cdots$$

$$=0.23+0.001+0.0001+0.00001+\cdots$$

$$=0.23+\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}+\cdots\right)$$

$$=0.23+\frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{1}{900}$$

$$=\frac{208}{900}=\frac{52}{225}$$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{13}{9}$, 셋째항은 $\frac{52}{225}$ 이므로

공비를 r 라 하면 $a_3=a_1r^2$ 에서

$$\frac{52}{225}=\frac{13}{9}r^2 \quad \therefore r^2=\frac{4}{25}$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1=\frac{13}{9}$, 공비가 $r^2=\frac{4}{25}$

인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{\frac{13}{9}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{\frac{13}{9}}{\frac{21}{25}} = \frac{325}{189}$$

답 ⑤

18

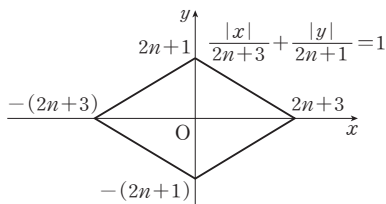
$(2n+1)|x+1|+(2n+3)|y-1|=4n^2+8n+3$ 에서

$$\frac{|x+1|}{2n+3}+\frac{|y-1|}{2n+1}=1$$

이때, 도형 $\frac{|x+1|}{2n+3}+\frac{|y-1|}{2n+1}=1$ 은

도형 $\frac{|x|}{2n+3}+\frac{|y|}{2n+1}=1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 두 도형의 넓이는 서로 같다.



도형 $\frac{|x|}{2n+3}+\frac{|y|}{2n+1}=1$ 은 위의 그림과 같으므로 넓이는

$$S_n=\frac{1}{2}\times 2(2n+1)\times 2(2n+3)$$

$$=2(2n+1)(2n+3)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\rightarrow\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right) \right\}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\rightarrow\infty} \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

19

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n=0, \lim_{n\rightarrow\infty} na_n=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n+a_{n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \{na_n+a_n+(n+1)a_{n+1}\}$$

이때,

$$\sum_{k=1}^n (k+1)a_{k+1}=2a_2+3a_3+\cdots+na_n+(n+1)a_{n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^n ka_k - a_1 + (n+1)a_{n+1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} na_n - a_1 + \lim_{n\rightarrow\infty} (n+1)a_{n+1}}_{=50-2+0}$$

$$(\because \textcircled{1} \text{에서 } \lim_{n\rightarrow\infty} (n+1)a_{n+1}=0)$$

$$=48$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n+a_{n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} na_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}$$

$$=50+10+48=108$$

답 108

풀이첨삭

*에서 $\sum_{k=1}^n (k+1)a_{k+1} \neq \sum_{k=1}^n ka_k + (n+1)a_{n+1}$ 임에 주의한다.

20

기울기가 1이고 y 절편이 양수인 직선의 방정식을 $y=x+a$ ($a>0$)

라 하면 이 직선이 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^{2n-2}}$ 에 접하므로 원점과 직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 과 같다.

$$\text{즉, } \frac{|a|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{에서}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \quad (\because a>0)$$

따라서 직선의 방정식은 $y=x+\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는

$$P_n\left(-\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}, 0\right), Q_n\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)$$

$$\therefore l_n = \overline{P_nQ_n}$$

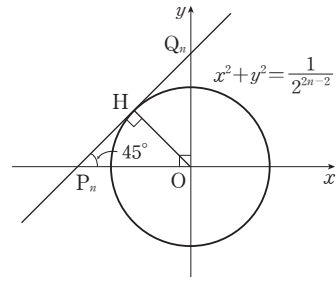
$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 \times \frac{2}{2^{2n-2}}} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{15}$

다른풀이

다음 그림과 같이 원점 O에서 선분 P_nQ_n 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선의 기울기가 -1이므로 $\triangle Q_nOP_n$, $\triangle OP_nH$, $\triangle OHQ_n$ 은 모두 직각이등변삼각형이다.



$\overline{OH}=r$ 라 하면 $\overline{P_nQ_n}=2r$ 이고, r 는 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^{2n-2}}$

의 반지름의 길이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\overline{P_nQ_n}=2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

21

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{k} - 2\right)^n$ 의 첫째항과 공비는 모두

$\frac{2x-1}{k} - 2$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{2x-1}{k} - 2 < 1, \quad 1 < \frac{2x-1}{k} < 3$$

$$\therefore \frac{k+1}{2} < x < \frac{3k+1}{2}$$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 4이므로

$$3 < \frac{3k+1}{2} - \frac{k+1}{2} \leq 5$$

$$\therefore 3 < k \leq 5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는 4 또는 5이므로 그 합은

$$4+5=9$$

답 9

풀이첨삭

*에서 부등식 $\frac{k+1}{2} < x < \frac{3k+1}{2}$ 을 만족시키는 정수 x 가

$n, n+1, n+2, n+3$ 의 4개라 하면

$$n-1 \leq \frac{k+1}{2} < n \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$n+3 < \frac{3k+1}{2} \leq n+4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때, ㉠에서 $-n < -\frac{k+1}{2} \leq -(n-1)$ 이므로 이 부등식과 ㉡의 각 변을 더하면

$$n+3-n < \frac{3k+1}{2} - \frac{k+1}{2} \leq n+4-(n-1)$$

$$\therefore 3 < \frac{3k+1}{2} - \frac{k+1}{2} \leq 5$$

22

그림 R_n 에서 새로 색칠된 도형의 넓이를 a_n 이라 하자.

마름모 $D_1BE_1F_1$ 의 한 변의 길이를 x 라 하면

$$\overline{BC}=4 \text{이므로 } \overline{E_1C}=4-x$$

$\triangle ABC$ 와 $\triangle F_1E_1C$ 가 서로 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{F_1E_1} = \overline{BC} : \overline{E_1C} \text{에서}$$

$$2 : x = 4 : (4-x), 4x = 2(4-x)$$

$$6x = 8 \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

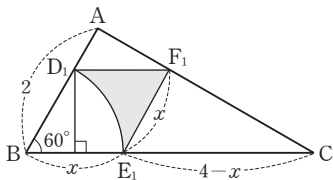


그림 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이는 마름모 $D_1BE_1F_1$ 의 넓이에서 부채꼴 BE_1D_1 의 넓이를 뺀 값이므로

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27} \end{aligned}$$

한편, 그림 R_2 에서 $\triangle ABC$ 와 $\triangle F_1E_1C$ 의 닮음비는

$$2 : \frac{4}{3}, \text{ 즉 } 3 : 2 \text{이므로 넓이의 비는 } 3^2 : 2^2, \text{ 즉 } 9 : 4 \text{이다.}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}$, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{27}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{15}$$

답 ③

II. 미분법

유형
연습

03

지수함수와 로그함수의
극한과 미분

본문 pp.80~90

01-1 (1) 9 (2) 2

01-2 $\frac{1}{32}, 2$

01-3 75

02-1 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 2 (3) 3

02-2 1

02-3 2

03-1 (1) e^2 (2) e^{-4}

03-2 5

03-3 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

04-1 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{2}(\ln 2)^2$

04-2 64

04-3 3

05-1 (1) $a=2, b=1$ (2) $a=3, b=-1$

05-2 $3e^3$

05-3 20

06-1 5

06-2 $\ln 2$

07-1 $2e^2 + 2\ln 2$

07-2 $\frac{2}{3}$

07-3 $\frac{1}{e}$

08-1 $-\frac{16}{\ln 2}$

08-2 $e+2$

08-3 50

01-1

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1}}{3^{x-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^x + \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{2}\right)^x}{\frac{1}{3} \times 3^x + \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^x}{\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{15}\right)^x} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 3^{-2x})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2^x - \left(\frac{1}{9}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2^x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{18}\right)^x \right\} \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x)^{\frac{1}{x}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{18}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) 2

01-2

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{2x+3} + a^2}{a^{2x} + 4a^3}$ 에서 양수 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 극한값을 구할 수 있다.

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{2x} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{2x+3} + a^2}{a^{2x} + 4a^3} = \frac{a^2}{4a^3} = \frac{1}{4a}$$

$$\text{이때, } \frac{1}{4a} = 8 \text{이므로 } a = \frac{1}{32}$$

(ii) $a > 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{2x} = \infty \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{2x+3} + a^2}{a^{2x} + 4a^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^3 \times a^{2x} + a^2}{a^{2x} + 4a^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^3 + a^2 \times \left(\frac{1}{a}\right)^{2x}}{1 + 4a^3 \times \left(\frac{1}{a}\right)^{2x}} \\ &= \frac{a^3}{1} = a^3 \end{aligned}$$

$$\text{이때, } a^3 = 8 \text{이므로 } a = 2$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 양수 a 의 값은 $\frac{1}{32}$, 2이다.

답 $\frac{1}{32}$, 2

01-3

두 자연수 a, b 에 대하여 $2a, 3b$ 의 대소 관계에 따라 다음과 같이 극한값을 구할 수 있다.

(i) $2a > 3b$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 12 \times (3b)^{x+1}}{(2a)^{x+1} + (3b)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 36b \times (3b)^x}{2a \times (2a)^x + (3b)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + 36b \times \left(\frac{3b}{2a}\right)^x}{2a + \left(\frac{3b}{2a}\right)^x} \\ &= \frac{12}{2a} = \frac{6}{a} \end{aligned}$$

이때, $\frac{6}{a}$ 이 자연수가 되도록 하는 10 이하의 자연수 a 의 값은 1, 2, 3, 6이다.

따라서 $2a > 3b$, 즉 $\frac{2}{3}a > b$ 를 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$ 의 5개이다.

(ii) $2a = 3b$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 12 \times (3b)^{x+1}}{(2a)^{x+1} + (3b)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 12 \times (2a)^{x+1}}{(2a)^{x+1} + (2a)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + 12 \times 2a}{2a + 1} \\ &= \frac{12(2a+1)}{2a+1} = 12 \end{aligned}$$

이때, 12는 자연수이므로 $2a = 3b$ 를 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 2), (6, 4), (9, 6)$ 의 3개이다.

(iii) $2a < 3b$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 12 \times (3b)^{x+1}}{(2a)^{x+1} + (3b)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times (2a)^x + 36b \times (3b)^x}{2a \times (2a)^x + (3b)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \times \left(\frac{2a}{3b}\right)^x + 36b}{2a \times \left(\frac{2a}{3b}\right)^x + 1} = 36b \end{aligned}$$

이때, 10 이하의 모든 자연수 b 에 대하여 $36b$ 는 자연수이다.

따라서 $2a < 3b$, 즉 $a < \frac{3}{2}b$ 를 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

- ① $b=1$ 일 때, $(1, 1)$ 의 1개
- ② $b=2$ 일 때, $(1, 2), (2, 2)$ 의 2개
- ③ $b=3$ 일 때, $(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)$ 의 4개
- ④ $b=4$ 일 때, $(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4)$ 의 5개
- ⑤ $b=5$ 일 때, $(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (7, 5)$ 의 7개
- ⑥ $b=6$ 일 때, $(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (7, 6), (8, 6)$ 의 8개
- ⑦ $b=7, 8, 9, 10$ 일 때, 10 이하의 모든 자연수 a 에 대하여 조건을 만족시키므로 $4 \times 10 = 40$ (개)

①~⑦에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 40 = 67$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $5 + 3 + 67 = 75$

답 75

02-1

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \infty \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_3 x} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{9}} x}{\log_{\frac{1}{27}} 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x}{-\frac{1}{3} \log_3 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \log_3 x}{\frac{1}{3} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{\log_3 2}{3 \log_3 x}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log_3(x-1) + \log_4 x}{\log_2 x + \log_9(x-1)} \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 x = 0 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow 1+} \log_3(x-1) = -\infty \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log_2 x}{\log_3(x-1)} = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log_3(x-1) + \log_4 x}{\log_2 x + \log_9(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log_3(x-1) + \frac{1}{2} \log_2 x}{\log_2 x + \frac{1}{2} \log_3(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1 + \frac{\log_2 x}{2 \log_3(x-1)}}{\frac{\log_2 x}{\log_3(x-1)} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 3+} \{\log_3(x^3 - 27) - \log_3(x - 3)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \log_3 \frac{x^3 - 27}{x - 3} \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow 3+} (x^2 + 3x + 9) \\ &= \log_3 27 = 3 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 2 (3) 3

02-2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a(x^2 + x + 1) - \log_a(bx^2 - x + 1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a \frac{x^2 + x + 1}{bx^2 - x + 1} = \log_a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{bx^2 - x + 1} \\ &= \log_a \frac{1}{b} = 4 \\ \text{이므로 } a^4 &= \frac{1}{b} \quad \therefore a^4 b = 1 \end{aligned}$$

답 1

02-3

$1 < b < 10$ 인 자연수 b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_b x = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_b x} &= 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \log_a x}{b + \log_b x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{\log_b x}{\log_b a}}{b + \log_b x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{\log_b a} + \frac{1}{\log_b x}}{\frac{b}{\log_b x} + 1} \\ &= \frac{1}{\log_b a} = \log_a b \end{aligned}$$

즉, $\log_a b = 2$ 이므로 $a^2 = b$

이때, $1 < a < b < 10$ 이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 4), (3, 9)$ 의 2개이다.

답 2

03-1

(1) $x - 4 = t$ 로 놓으면 $x = t + 4$ 이고, $x \rightarrow 4$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-2}{2} \right)^{\frac{4}{x-4}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t+2}{2} \right)^{\frac{4}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{4}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{2}{t}} \right\}^2 = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{-\frac{x}{2}} \right\}^{-4} = e^{-4} \end{aligned}$$

답 (1) e^2 (2) e^{-4}

03-2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax}{ax-1} \right)^{bx} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ax-1} \right)^{bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{ax-1} \right)^{ax-1} \right\}^{\frac{bx}{ax-1}} \\ &= e^{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{e^2}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ ㉠

또한,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-a} \right)^{b(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x-a} \right)^{x-a} \right\}^{\frac{b(x-2)}{x-a}} \\ &= e^b = e^2\end{aligned}$$

이므로 $b=2$

㉠에 $b=2$ 를 대입하면 $a=3$

$\therefore a+b=3+2=5$

답 5

03-3

$f(x) = \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x$ 이고, $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f\left(-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-2t}{-2t+1} \right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2t-1} \right)^{2t-1} \right\}^{-\frac{t}{2t-1}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

다른풀이

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f\left(-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + 1} \right\}^{-\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{-\frac{2}{x} + 1}{-\frac{2}{x}} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{-2+x}{-2} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{2}{x}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

04-1

(1) $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{3}{2x}\right)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t} - 1}{\ln\left(1 + \frac{3}{2}t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{e^{2t} - 1}{2t} \times 2t}{\frac{\ln\left(1 + \frac{3}{2}t\right)}{\frac{3}{2}t} \times \frac{3}{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{e^{2t} - 1}{2t}}{\frac{\ln\left(1 + \frac{3}{2}t\right)}{\frac{3}{2}t}} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 4^x - 2}{\log_2(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} \right) \times x}{\frac{\log_2(1+2x)}{2x} \times 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x}}{\frac{\log_2(1+2x)}{2x}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\ln 2 + \ln 4}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (\ln 2)^2\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{2} (\ln 2)^2$

다른풀이

(2) $2^x + 4^x - 2 = (2^x)^2 + 2^x - 2 = (2^x + 2)(2^x - 1)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 4^x - 2}{\log_2(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x + 2)(2^x - 1)}{\log_2(1+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x + 2) \times \frac{2^x - 1}{x} \times x}{\frac{\log_2(1+2x)}{2x} \times 2x}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (2^x + 2) \times \frac{\frac{2^x - 1}{x}}{\frac{\log_2(1+2x)}{2x}} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= (1+2) \times \frac{\ln 2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (\ln 2)^2$$

04-2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{2x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)f(4x)}{\ln(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x)}{4x} \times \frac{f(4x)}{8x} \times 32x^2}{\frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2} \times 2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x)}{4x} \times \frac{f(4x)}{8x}}{\frac{\ln(2x^2+1)}{2x^2}} \times 16$$

$$= \frac{2 \times 2}{1} \times 16 = 64$$

답 64

04-3

$$\ln(1+x) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(e^{2x}-1) \text{에서}$$

$$\ln(1+3x) \leq f(3x) \leq \frac{1}{2}(e^{6x}-1)$$

$x > 0$ 일 때,

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} \leq \frac{f(3x)}{x} \leq \frac{e^{6x}-1}{2x}$$

$$-\frac{1}{3} < x < 0 \text{일 때,}$$

$$\frac{e^{6x}-1}{2x} \leq \frac{f(3x)}{x} \leq \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 = 3,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{6x} \times 3 = 3$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$$

답 3

보충설명

함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$

(a , β 는 실수)일 때, a 에 가까운 모든 실수 x 에서

(1) $f(x) \leq g(x)$ 이면 $a \leq \beta$

(2) 함수 $h(x)$ 에 대하여 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $a = \beta$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = a$$

05-1

(1) $x \rightarrow \infty$ 일 때 극한값이 존재하고, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(b + \frac{2}{x^2}\right) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\therefore b = 1$$

$b = 1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하고, $\frac{2}{x^2} = t$ 로 놓으면

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \ln(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \times \frac{\ln(1+t)}{t} \times t \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{a}{2}} \times t \right\} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2$$

(2) $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (a^x + b) = 0 \text{이므로 } 1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$b = -1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^x - 1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a$$

따라서 $\ln a = \ln 3$ 이므로 $a = 3$

답 (1) $a = 2$, $b = 1$ (2) $a = 3$, $b = -1$

05-2

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, \infty)$ 에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 3^x}{\ln(x+1)} &= 3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 3^x}{\ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - (3^x - 1)}{\ln(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}} \\ &= \frac{\ln a - \ln 3}{1} = \ln \frac{a}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{a}{3} = 3$ 이므로 $\frac{a}{3} = e^3$

$\therefore a = 3e^3$

답 $3e^3$

05-3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{ax} + 2\ln(1+bx) - 2}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{ax} - 1) + 2\ln(1+bx)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{2a}{3} + \frac{\ln(1+bx)}{bx} \times \frac{2b}{3} \right\} \\ &= \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3} = \frac{2(a+b)}{3} = 6\end{aligned}$$

$\therefore a+b=9$

이때, a, b 는 자연수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$ 이다.

따라서 ab 의 최댓값은 20이다.

답 20

06-1

직선 OP의 기울기는 $\frac{\ln(2t+1)}{t}$ 이므로 직선 l 의 기울기를

m 이라 하면 두 직선 OP와 l 은 서로 수직이므로

$$\frac{\ln(2t+1)}{t} \times m = -1$$

$$\therefore m = -\frac{t}{\ln(2t+1)}$$

이때, 직선 l 은 점 P를 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{t}{\ln(2t+1)}(x-t) + \ln(2t+1)$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하여 x 절편을 구하면

$$\frac{t}{\ln(2t+1)}(x-t) = \ln(2t+1)$$

$$x-t = \frac{\{\ln(2t+1)\}^2}{t} \quad \therefore x = \frac{\{\ln(2t+1)\}^2}{t} + t$$

따라서 $f(t) = \frac{\{\ln(2t+1)\}^2}{t} + t$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left[\frac{\{\ln(2t+1)\}^2}{t^2} + 1 \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left[\left\{ \frac{\ln(2t+1)}{2t} \right\}^2 \times 4 + 1 \right] \\ &= 1^2 \times 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

답 5

다른풀이

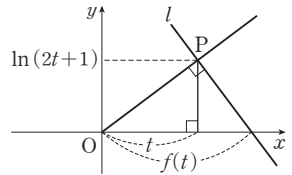
오른쪽 그림에서 직각삼각

형의 닮음을 이용하면

$$\overline{OP}^2 = t \times f(t)$$

$$t^2 + \{\ln(2t+1)\}^2 = t f(t)$$

$$\therefore \frac{f(t)}{t} = 1 + \left\{ \frac{\ln(2t+1)}{t} \right\}^2$$



06-2

점 Q는 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발이므로

$$Q(t, 0)$$

또한, 점 R는 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발이므로

$$R(t, 2)$$

$$\therefore \overline{AR} = t, \overline{PR} = 2^{t+1} - 2, \overline{RQ} = 2$$

즉,

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{PR} = \frac{1}{2} \times t \times (2^{t+1} - 2) = t(2^t - 1)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{RQ} = \frac{1}{2} \times t \times 2 = t$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{tg(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(2^t - 1)}{t \times t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2\end{aligned}$$

답 $\ln 2$

다른풀이

$\overline{AR}=t$, $\overline{PR}=2^{t+1}-2$, $\overline{RQ}=2$ 이고, 두 삼각형 $\triangle ARP$, $\triangle AQR$ 는 모두 밑면이 $\overline{AR}$ 이므로
 $f(t) : g(t) = \overline{PR} : \overline{RQ}$

$$\therefore \frac{f(t)}{tg(t)} = \frac{2^{t+1}-2}{2t} = \frac{2^t-1}{t}$$

07-1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) \end{aligned}$$

이때, $f(x) = (2x+2)e^x + 2^{x+1} = (2x+2)e^x + 2 \times 2^x$ 에서
 $f'(x) = 2e^x + (2x+2)e^x + 2 \times 2^x \times \ln 2$
 $= (2x+4)e^x + \ln 2 \times 2^{x+1}$

이므로

$$\frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{4} (8e^2 + \ln 2 \times 2^3) = 2e^2 + 2 \ln 2$$

답 $2e^2 + 2 \ln 2$

07-2

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $g(b) = \lim_{x \rightarrow b+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$ 이므로

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b+} f(x) = a \quad \therefore f(b) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow b+} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b}$$

이때, $f(x) = xe^{1-3x} = ex \times (e^{-3})^x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e \times (e^{-3})^x + ex \times (e^{-3})^x \times \ln e^{-3} \\ &= (1-3x)e^{1-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow b+} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b+} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \\ &= f'(b) \\ &= (1-3b)e^{1-3b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{a-f(b)}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(b)-f(b)}{x-b} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 $(1-3b)e^{1-3b} = 0$ 이므로

$$1-3b=0 \quad \therefore b=\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{1-3 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a+b = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

보충설명

미분가능성과 연속성

함수 $f(x)$ 에 대하여

$x=a$ 에서 미분가능 $\Longleftrightarrow x=a$ 에서 연속

07-3

$f(x) = ke^x + 1$, $g(x) = x^2 - 3x + 4$ 라 하면

$$f'(x) = ke^x, g'(x) = 2x - 3$$

점 P의 x좌표를 t라 하면 점 P는 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 의 교점이므로

$$f(t) = g(t)$$

$$\text{즉, } ke^t + 1 = t^2 - 3t + 4 \text{이므로}$$

$$ke^t = t^2 - 3t + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 점 P에서의 두 곡선의 접선의 기울기는 각각 $f'(t)$,

$g'(t)$ 이고, 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(t) \times g'(t) = -1$$

즉, $ke^t(2t-3) = -1$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(t^2 - 3t + 3)(2t - 3) = -1$$

$$2t^3 - 9t^2 + 15t - 9 = -1, \quad 2t^3 - 9t^2 + 15t - 8 = 0$$

$$(t-1)(2t^2 - 7t + 8) = 0 \quad \therefore t=1$$

$\textcircled{1}$ 에 $t=1$ 을 대입하면 판별식 $D < 0$

$$ek = 1 - 3 + 3 = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

08-1

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1+2h}{4}\right) - f\left(\frac{1-6h}{4}\right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}h\right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}h} \times \frac{1}{2} \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{-\frac{3}{2}h} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}f'\left(\frac{1}{4}\right) \\
 &= 2f'\left(\frac{1}{4}\right)
 \end{aligned}$$

이때, $f(x) = (\log_2 2x)^2 = (1 + \log_2 x)^2$ 에서

$$f'(x) = 2 \times (1 + \log_2 x) \times \frac{1}{x \ln 2} = \frac{2 \log_2 2x}{x \ln 2}$$

이므로

$$2f'\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{2 \log_2 \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \ln 2} = 2 \times \frac{-8}{\ln 2} = -\frac{16}{\ln 2}$$

답 $-\frac{16}{\ln 2}$

08-2

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{즉, } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{이므로}$$

$$\ln(b-2) = \lim_{x \rightarrow 1+} \ln(b-2)x = \lim_{x \rightarrow 1-} ae^{x-1}$$

$$\therefore \ln(b-2) = a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(b-2)x - \ln(b-2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{x-1}
 \end{aligned}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

또한,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ae^{x-1} - \ln(b-2)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(e^{x-1} - 1)}{x-1} \quad (\because \textcircled{7})
 \end{aligned}$$

이때, $x-1=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이므로

$$a \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = a \lim_{s \rightarrow 0-} \frac{e^s - 1}{s} = a$$

따라서 $a=1$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서 $\ln(b-2)=1$

$$b-2=e \quad \therefore b=e+2$$

$$\therefore ab = 1 \times (e+2) = e+2$$

답 $e+2$

보충설명

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leq k) \\ h(x) & (x > k) \end{cases}$ (k 는 상수)에서 두 함수

$g(x)$, $h(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능한 함수라 하자.

$$g'(k) = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x) - g(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x) - g(k)}{x - k},$$

$$h'(k) = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{h(x) - h(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{h(x) - h(k)}{x - k}$$

이므로 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하면 $g'(k) = h'(k)$ 이다.

이것을 이용하면 복잡한 극한값을 미분으로 더 쉽게 구할 수 있다.

문제에서 두 함수는 모두 $x=1$ 에서 미분가능하고,

$$(ae^{x-1})' = ae^{x-1}, \quad \{\ln(b-2)x\}' = \frac{b-2}{(b-2)x} = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$ae^{1-1} = \frac{1}{1} \quad \therefore a=1$$

08-3

점 $(e, -e)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$$f(e) = -e \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $x>0$ 일 때 $g(x) = f(x) \ln x^4 = 4f(x) \ln x$ 에서

$$g'(x) = 4f'(x) \ln x + 4f(x) \times \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore g'(e) &= 4f'(e) + 4f(e) \times \frac{1}{e} \\
 &= 4f'(e) - 4 \quad (\because \textcircled{7})
 \end{aligned}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 x 좌표가 e 인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(e) \times g'(e) = -1 \text{에서}$$

$$f'(e)\{4f'(e)-4\} = -1$$

$$4\{f'(e)\}^2 - 4f'(e) + 1 = 0$$

$$\{2f'(e)-1\}^2 = 0 \quad \therefore f'(e) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

답 50



개념 마무리

본문 pp.91~94

01 5	02 ②	03 ③	04 ④
05 14	06 3	07 4	08 ⑤
09 -3	10 4	11 $\frac{1}{\ln 3}$	12 -2
13 ③	14 $\frac{5}{2}$	15 5	16 ②
17 e^{-e-1}	18 ⑤	19 $2(\ln 6)^2$	20 $\frac{1}{2}$
21 $10e$	22 0	23 ⑤	

01

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} - 3a^{x+1} + 5^x}{a^{x+1} + a^x + 5^{x+1}} = 1 \text{에서}$$

(i) $1 < a < 5$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} - 3a^{x+1} + 5^x}{a^{x+1} + a^x + 5^{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 \times \left(\frac{a}{5}\right)^x - 3a \times \left(\frac{a}{5}\right)^x + 1}{a \times \left(\frac{a}{5}\right)^x + \left(\frac{a}{5}\right)^x + 5} \\ &= \frac{1}{5} \neq 1 \end{aligned}$$

(ii) $a=5$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} - 3a^{x+1} + 5^x}{a^{x+1} + a^x + 5^{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x+2} - 3 \times 5^{x+1} + 5^x}{5^{x+1} + 5^x + 5^{x+1}} \\ &= \frac{5^2 - 3 \times 5 + 1}{5 + 1 + 5} = \frac{11}{11} = 1 \end{aligned}$$

(iii) $a > 5$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+2} - 3a^{x+1} + 5^x}{a^{x+1} + a^x + 5^{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 - 3a + \left(\frac{5}{a}\right)^x}{a + 1 + 5 \times \left(\frac{5}{a}\right)^x} \\ &= \frac{a^2 - 3a}{a + 1} = 1 \end{aligned}$$

$$a^2 - 3a = a + 1, \quad a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 2 - \sqrt{5} \text{ 또는 } a = 2 + \sqrt{5}$$

그런데 $a > 5$ 이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=5$

답 5

02

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{\log(3^{3x} - 4^{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{\log(27^x - 16^x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 3^x \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right\}}{\log 27^x \left\{ 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^x \right\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log 3 + \log \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right\}}{x \log 27 + \log \left\{ 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^x \right\}} \\ &= \frac{\log 3}{\log 27} = \frac{\log 3}{3 \log 3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ②

다른풀이

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3^x \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right\}^{\frac{1}{x}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{3x} - 4^{2x})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (27^x - 16^x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[27^x \left\{ 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 27 \left\{ 1 - \left(\frac{16}{27}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{\log(3^{3x} - 4^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} \log(2^x + 3^x)}{\frac{1}{x} \log(3^{3x} - 4^{2x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}}{\log(3^{3x} - 4^{2x})^{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{\log \lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}}{\log \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{3x} - 4^{2x})^{\frac{1}{x}}} \\
&= \frac{\log 3}{\log 27} = \frac{\log 3}{3 \log 3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

03

$$\begin{aligned}
\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 1}{4^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x}{1} = \frac{0+0}{1} = 0 \text{ (참)} \\
\text{ㄴ. } x \rightarrow 0+ \text{ 일 때 } 2^x &\rightarrow 1+, (2^x - 1) \rightarrow 0+ \text{ 이므로}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^x}{2^x - 1} = \infty \text{ (거짓)}$$

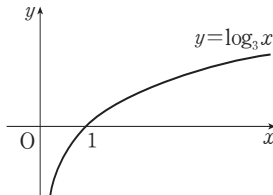
$$\begin{aligned}
\text{ㄷ. } x \rightarrow 0+ \text{ 일 때 } \log_2(x+2) &\rightarrow 1+, \\
\log_3(x+1) &\rightarrow 0+ \text{ 이므로}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log_2(x+2)}{\log_3(x+1)} = \infty \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04



함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0+} \log_3 x = -\infty$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log_3 x = \infty$$

$$\textcircled{2} -x = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_3 |x| = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_3 |-t| = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_3 t = \infty$$

$$\textcircled{3} 0 < x < 1 \text{ 일 때 } \log_3 x < 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |\log_3 x| = \lim_{x \rightarrow 0+} (-\log_3 x) = \infty$$

$$\textcircled{4} -x = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0- \text{ 일 때 } t \rightarrow 0+ \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \log_3(-x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \log_3 t = -\infty$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0+} \log_{\frac{1}{3}} x = \lim_{x \rightarrow 0+} (-\log_3 x) = \infty$$

따라서 극한이 나머지 넷과 다른 것은 ④이다.

답 ④

05

$$f_n(x) = (1+x)(1+3x)(1+5x) \cdots \{1+(2n-1)x\}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \{f_n(x)\}^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)(1+3x)(1+5x) \cdots \{1+(2n-1)x\}]^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^3 \left\{ (1+5x)^{\frac{1}{5x}} \right\}^5 \right. \\
&\quad \left. \times \cdots \times \left\{ 1+(2n-1)x \right\}^{\frac{1}{(2n-1)x}} \right\}^{2n-1}
\end{aligned}$$

$$= e \times e^3 \times e^5 \times \cdots \times e^{2n-1}$$

$$= e^{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$$

$$= e^{\sum_{k=1}^n (2k-1)} = e^{2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n} = e^{n^2}$$

$$= e^{n^2} = e^{196}$$

$$\therefore n^2 = 196 \text{ 이므로 } n = 14 \text{ (} \because n \text{은 자연수)}$$

답 14

06

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^{bx} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{a}} \right\}^{ab} \\
&= e^{ab} = 3 \quad \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2b}{x} \right)^{-\frac{ax}{2}} \text{에서 } x = -t \text{로 놓으면}$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2b}{x} \right)^{-\frac{ax}{2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-t-2b}{-t} \right)^{\frac{at}{2}} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2b}{t} \right)^{\frac{t}{2b}} \right\}^{ab} \\
&= e^{ab} = 3 \text{ (} \because \textcircled{1} \text{)}
\end{aligned}$$

답 3

07

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x \{ \ln(2x+k) - \ln 2x \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{2x+k}{2x} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{2x} \right)^x \\
 &= \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{k}{2x} \right)^{\frac{2x}{k}} \right\}^{\frac{k}{2}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln e^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 4 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4
 \end{aligned}$$

답 4

08

$\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 2$ 에서 $xf(x) = h_1(x)$ 로 놓으면

$$f(x) = \frac{h_1(x)}{x} \text{ 이고, } \lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)(4^x - 2^x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_1(x)(4^x - 2^x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ h_1(x) \times \frac{4^x - 1 - (2^x - 1)}{x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} h_1(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x - 1}{x} - \frac{2^x - 1}{x} \right) \\
 &= 2 \times (\ln 4 - \ln 2) = 2 \ln 2
 \end{aligned}$$

또한, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 g(x) = 5$ 에서 $x^2 g(x) = h_2(x)$ 로 놓으면

$$g(x) = \frac{h_2(x)}{x^2} \text{ 이고, } \lim_{x \rightarrow \infty} h_2(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_2(x)}{x^2} = 0$$

즉, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $g(x) \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \{ 1 + 2g(x) \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln \{ 1 + 2g(x) \}}{2g(x)} \times 2x^2 g(x) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \{ 1 + 2g(x) \}}{2g(x)} \times \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 g(x) \\
 &= 1 \times 2 \times 5 = 10 \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)(4^x - 2^x) + \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \{ 1 + 2g(x) \} &= 2 \ln 2 + 10
 \end{aligned}$$

답 ⑤

다른풀이

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 g(x) = 5$ 에서 $x^2 g(x) = h_2(x)$ 로 놓으면

$$g(x) = \frac{h_2(x)}{x^2} \text{ 이고, } \lim_{x \rightarrow \infty} h_2(x) = 5$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \{ 1 + 2g(x) \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left\{ 1 + \frac{2h_2(x)}{x^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\left\{ 1 + \frac{2h_2(x)}{x^2} \right\}^{\frac{x^2}{2h_2(x)}} \right]^{2h_2(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2h_2(x) \times \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ 1 + \frac{2h_2(x)}{x^2} \right\}^{\frac{x^2}{2h_2(x)}} \\
 &= 2 \times 5 \times \ln e = 10
 \end{aligned}$$

09

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x - ax - 2e}{x-1} = b$ 에서 극한값이 존재하고, $x \rightarrow 1$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (xe^x - ax - 2e) = 0$ 에서

$$e - a - 2e = 0 \quad \therefore a = -e \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x + ex - 2e}{x-1} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)e^{t+1} + e(t+1) - 2e}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^{t+1} + e^{t+1} + et - e}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(e^{t+1} + e) + e(e^t - 1)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{t+1} + e + e \times \frac{e^t - 1}{t} \right) = e + e + e = 3e
 \end{aligned}$$

따라서 $a = -e$, $b = 3e$ 이므로

$$\frac{ab}{e^2} = \frac{(-e) \times 3e}{e^2} = -3$$

답 -3

다른풀이

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x - ax - 2e}{x-1} = b \text{에서 극한값이 존재하고, } x \rightarrow 1$$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (xe^x - ax - 2e) = 0 \text{에서}$$

$$e - a - 2e = 0 \quad \therefore a = -e$$

이때, $f(x) = xe^x + ex - 2e$ 라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x + e = (x+1)e^x + e$$

또한, $f(1) = 0$ 이므로

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x + ex - 2e}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\ = f'(1) = 2e + e = 3e$$

10

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{f(3x) - 1}{9x^2 - 4} = a \text{에서 극한값이 존재하고, } x \rightarrow \frac{2}{3} \text{ 일}$$

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \{f(3x) - 1\} = 0 \text{에서 } f(2) - 1 = 0$$

$$\therefore f(2) = 1$$

또한, $3x - 2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{2}{3}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$a = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{f(3x) - 1}{9x^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+2) - 1}{t^2 + 4t} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $1 + \ln(x-1) \leq f(x) \leq e^{x-2}$ 에서 $x-2=s$ 로 놓으면

$$1 + \ln(s+1) \leq f(s+2) \leq e^s$$

$$\ln(s+1) \leq f(s+2) - 1 \leq e^s - 1$$

$$s > 0 \text{ 일 때, } \frac{\ln(s+1)}{s} \leq \frac{f(s+2) - 1}{s} \leq \frac{e^s - 1}{s}$$

$$-1 < s < 0 \text{ 일 때, } \frac{e^s - 1}{s} \leq \frac{f(s+2) - 1}{s} \leq \frac{\ln(s+1)}{s}$$

$$\text{이때, } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(s+1)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} = 1 \text{이므로 함수의 극한}$$

의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s+2) - 1}{s} = 1 \quad \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+2) - 1}{t} = 1$$

즉, ⑦에서

$$a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+2) - 1}{t^2 + 4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t+2) - 1}{t} \times \frac{1}{t+4} \right\} \\ = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{f(2)}{a} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

답 4

다른풀이

$$1 + \ln(x-1) \leq f(x) \leq e^{x-2} \text{에서}$$

$$1 + \ln(3x-1) \leq f(3x) \leq e^{3x-2}$$

$$\ln(3x-1) \leq f(3x) - 1 \leq e^{3x-2} - 1$$

(i) $x > \frac{2}{3}$ 일 때,

$$\frac{\ln(3x-1)}{9x^2-4} \leq \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} \leq \frac{e^{3x-2}-1}{9x^2-4} \\ \frac{\ln\{1+(3x-2)\}}{3x-2} \times \frac{1}{3x+2} \leq \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} \\ \leq \frac{e^{3x-2}-1}{3x-2} \times \frac{1}{3x+2}$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}+} \frac{\ln\{1+(3x-2)\}}{3x-2} \times \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}+} \frac{e^{3x-2}-1}{3x-2} \times \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{4}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}+} \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} = \frac{1}{4}$$

(ii) $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ 일 때,

$$\frac{\ln(3x-1)}{9x^2-4} \geq \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} \geq \frac{e^{3x-2}-1}{9x^2-4} \text{에서}$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}-} \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} = \frac{1}{4}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{f(3x)-1}{9x^2-4} = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

11

등차수열 1, x_1 , x_2 , ..., x_{n-1} , 3은 첫째항이 1이고, 항의 개수가 $(n-1)+2=n+1$ 이므로 그 합은

$$S_n = \frac{(n+1)(1+3)}{2} = 2(n+1)$$

등비수열 $1, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 3$ 은 첫째항이 1이고, 제 $(n+1)$ 항이 3이므로 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$1 \times r^{(n+1)-1} = 3 \quad \therefore r = 3^{\frac{1}{n}} \quad (\because r > 0)$$

따라서 등비수열의 합은

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1 \times (r^{n+1} - 1)}{r - 1} = \frac{(3^{\frac{1}{n}})^{n+1} - 1}{3^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{3^{\frac{n+1}{n}} - 1}{3^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= \frac{3^{\frac{n+1}{n}} - 1}{3^{\frac{1}{n}} - 1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{2(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{n}{2(n+1)} \times (3^{\frac{n+1}{n}} - 1) \right\} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{2} \times (3 - 1) = \frac{1}{\ln 3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{\ln 3}$

보충설명

1. 등차수열의 합

첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

2. 등비수열의 합

첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 1$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 T_n 은

$$T_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

12

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하자.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} & (x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 4) \text{ 이므로} \\ \frac{\ln(x-3)}{x-4} & (x > 4) \end{cases}$$

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{e^{x-1}-1} & (x < 1) \\ (x-1)(x^2+ax+b) & (1 \leq x \leq 4) \\ \frac{(x^2+ax+b)\ln(x-3)}{x-4} & (x > 4) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=4$ 에서 연속이어야 한다.

$x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$f(1)g(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)(x^2+ax+b) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{e^{x-1}-1} \end{aligned}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x^2+ax+b)}{e^{x-1}-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{t\{(t+1)^2+a(t+1)+b\}}{e^t-1} \\ &= 1 \times (1+a+b) \\ &= a+b+1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a+b+1=0 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

또한, $x=4$ 에서 연속이어야 하므로

$$f(4)g(4) = \lim_{x \rightarrow 4+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} 3(16+4a+b) &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x^2+ax+b)\ln(x-3)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} (x-1)(x^2+ax+b) \end{aligned}$$

이때, $x-4=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 4+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x^2+ax+b)\ln(x-3)}{x-4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\{(t+4)^2+a(t+4)+b\}\ln(t+1)}{t} \\ &= (16+4a+b) \times 1 \\ &= 16+4a+b \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3(16+4a+b) = 16+4a+b \text{에서}$$

$$2(16+4a+b) = 0$$

$$\therefore 4a+b = -16 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 4$$

따라서 $f(x) = x^2 - 5x + 4$ 이므로

$$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 4 = -2$$

답 -2

단계	채점 기준	배점
(가)	두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를 이용하여 함수 $f(x)g(x)$ 의 식을 구한 경우	30%
(나)	함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$, $x=4$ 에서 연속임을 이용하여 a , b 에 대한 식을 세운 경우	50%
(다)	$f(2)$ 의 값을 구한 경우	20%

다른풀이

$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$ 에서 $x-1=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{t}{e^t-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0$$

또한, $\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{\ln(x-3)}{x-4}$ 에서 $x-4=s$ 로 놓으면

$x \rightarrow 4+ \text{일 때 } s \rightarrow 0+ \text{이므로}$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{\ln(x-3)}{x-4} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(s+1)}{s} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (x-1) = 3$$

즉, 함수 $g(x)$ 가 $x=1$, $x=4$ 에서 불연속이므로 함수

$f(x)g(x)$ 가 $x=1$, $x=4$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $f(1)=f(4)=0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-4)$$

$$\therefore f(2) = 1 \times (-2) = -2$$

13

직선 $x=k$ 와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $e^{\frac{x}{2}+3t}$ 이 만나는 점이 각각 P,

Q이므로 $P(k, e^{\frac{k}{2}})$, $Q(k, e^{\frac{k}{2}+3t})$

$$\therefore \overline{PQ} = e^{\frac{k}{2}+3t} - e^{\frac{k}{2}} = e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)$$

점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $y=e^{\frac{k}{2}+3t}$ 이

므로 이 직선과 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$ 이 만나는 점 R의 x좌표는

$$e^{\frac{k}{2}+3t} = e^{\frac{x}{2}}, \frac{k}{2} + 3t = \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = k + 6t$$

즉, 점 R의 좌표는 $(k+6t, e^{\frac{k}{2}+3t})$ 이므로

$$\overline{QR} = k+6t - k = 6t$$

이때, $\overline{PQ} = \overline{QR}$ 이므로 $e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1) = 6t$

$$e^{\frac{k}{2}} = \frac{6t}{e^{3t}-1}, \frac{k}{2} = \ln \frac{6t}{e^{3t}-1}$$

$$\therefore k = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t}-1}$$

따라서 $f(t) = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t}-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} 2 \ln \frac{6t}{e^{3t}-1} \\ &= 2 \ln \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{3t}{e^{3t}-1} \times 2 \right) \\ &= 2 \ln 2 = \ln 4 \end{aligned}$$

답 ③

보충설명

$y = e^{\frac{x}{2}+3t} = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{3t}$ 이므로 곡선 $y = e^{\frac{x}{2}+3t}$ 은 곡선 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 을 x축의 방향으로 $-6t$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

이것을 이용하면 $\overline{QR} = 6t$ 임을 바로 알 수 있다.

14

조건 ㉞의 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{3x-3}-1}{f(x)-1} = 2$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하

고, $x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\} = 0 \text{에서}$$

$$f(1)=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{3x-3}-1}{f(x)-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{3x-3}-1}{f(x)-f(1)} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{3t}-1}{f(t+1)-f(1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3t}-1}{3t} \times \frac{t}{f(t+1)-f(1)} \times 3 \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{f'(1)} \times 3 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, 조건 ㉞에서 $f(x)g(x) = x \ln x$ 이므로

$$f(1)g(1) = 0 \quad \therefore g(1) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

또한, $f(x)g(x) = x \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \ln x + 1$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=1$$

$$\frac{3}{2} \times 0 + 1 \times g'(1) = 1$$

$$\therefore g'(1) = 1$$

$$\therefore f'(1) + g'(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

15

$$f(x) = (2x^2 - 17x + 23)e^x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x - 17)e^x + (2x^2 - 17x + 23)e^x \\ &= (2x^2 - 13x + 6)e^x \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 이므로

$$m(a) = (2a^2 - 13a + 6)e^a$$

$$m(a) < 0 \text{에서 } (2a^2 - 13a + 6)e^a < 0$$

$$2a^2 - 13a + 6 < 0 \quad (\because e^a > 0)$$

$$(2a-1)(a-6) < 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < a < 6$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개 이다.

답 5

16

함수 $f(x) = \begin{cases} b & (x \leq -2) \\ (x^2 + ax + a^2)e^x & (x > -2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

$$\text{즉, } f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) \text{이므로}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -2+} (x^2 + ax + a^2)e^x = \lim_{x \rightarrow -2-} b$$

$$\therefore b = (4 - 2a + a^2)e^{-2} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x^2 + ax + a^2)e^x - b}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x^2 + ax + a^2)e^x - (4 - 2a + a^2)e^{-2}}{x + 2} \quad (\because \textcircled{1})$$

이때, $x+2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x^2 + ax + a^2)e^x - (4 - 2a + a^2)e^{-2}}{x + 2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\{(t-2)^2 + a(t-2) + a^2\}e^{t-2} - (4 - 2a + a^2)e^{-2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(t^2 - 4t + at + 4 - 2a + a^2)e^{t-2} - (4 - 2a + a^2)e^{-2}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(t^2 - 4t + at)e^{t-2} + (4 - 2a + a^2)e^{-2}(e^t - 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ (t - 4 + a)e^{t-2} + (4 - 2a + a^2)e^{-2} \times \frac{e^t - 1}{t} \right\}$$

$$= (-4 + a)e^{-2} + (4 - 2a + a^2)e^{-2} \times 1$$

$$= (a^2 - a)e^{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{b - b}{x + 2} = 0$$

$$\text{즉, } \textcircled{2} \text{에서 } (a^2 - a)e^{-2} = 0$$

$$a(a-1) = 0 \quad (\because e^{-2} \neq 0)$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a \neq 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = 3e^{-2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{3e^{-2}} = \frac{e^2}{3}$$

답 ②

다른풀이

$y = (x^2 + ax + a^2)e^x$ 은 미분가능하므로

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2) \\ \{x^2 + (a+2)x + a^2 + a\}e^x & (x > -2) \end{cases}$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f'(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \{x^2 + (a+2)x + a^2 + a\}e^x \\ &= (a^2 - a)e^{-2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } (a^2 - a)e^{-2} = 0 \text{이므로}$$

$$a(a-1) = 0 \quad (\because e^{-2} \neq 0) \quad \therefore a = 1 \quad (\because a \neq 0)$$

17

로그함수 $f(x)=\log_a x$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 만나는 점의 x 좌표가 b 이므로

$$\log_a b = b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\therefore a^b = b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편, $f(x)=\log_a x$ 에서 $y=\log_a x$

$$\therefore a^y = x$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=a^x$

$$\therefore f^{-1}(x)=a^x$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} a^x & (x < b) \\ \log_a x & (x \geq b) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

그런데 두 함수 $f(x)=\log_a x$, $f^{-1}(x)=a^x$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (b, b) 를 지나므로 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프도 점 (b, b) 를 지난다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

또한, 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow b+} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이때, $x-b=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow b+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이고, $x \rightarrow b-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b+} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b+} \frac{\log_a x - \log_a b}{x-b} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\log_a (t+b) - \log_a b}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\log_a \left(1 + \frac{t}{b}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\log_a \left(1 + \frac{t}{b}\right)}{\frac{t}{b}} \times \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{b \ln a} \\ \lim_{x \rightarrow b-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{a^x - \log_a b}{x-b} \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{a^x - b}{x-b} \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{a^x - a^b}{x-b} \quad (\because \textcircled{㉡}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{a^{t+b} - a^b}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{a^b (a^t - 1)}{t} \\ &= a^b \ln a = b \ln a \quad (\because \textcircled{㉡}) \end{aligned}$$

즉, $\textcircled{㉢}$ 에서 $\frac{1}{b \ln a} = b \ln a$ 이므로

$$(b \ln a)^2 = 1, (\ln a^b)^2 = 1, (\ln b)^2 = 1$$

$$\therefore \ln b = -1 \text{ 또는 } \ln b = 1 \quad \therefore b = e^{-1} \text{ 또는 } b = e$$

이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$a^{e^{-1}} = e^{-1} \text{ 또는 } a^e = e \quad \therefore a = e^{-e} \text{ 또는 } a = e^{\frac{1}{e}}$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로

$$a = e^{-e}, b = e^{-1}$$

$$\therefore ab = e^{-e} \times e^{-1} = e^{-e-1}$$

답 e^{-e-1}

18

$$f(x) = \begin{cases} ax & (x < 1) \\ -3x+4 & (x \geq 1) \end{cases}, g(x) = 2^x + 2^{-x} \text{에 대하여 함}$$

수 $(g \circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$g(f(1)) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

$$g(f(1)) = g(1) = \frac{5}{2}$$

또한, $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 2 + 2^{-1} = \frac{5}{2}$$

(i) $a > 0$ 일 때,

$$x \rightarrow 1-\text{일 때 } t \rightarrow a-\text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 2^a + 2^{-a}$$

(ii) $a = 0$ 일 때,

$$x \rightarrow 1-\text{일 때 } t = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 2^0 + 2^0 = 2 \neq \frac{5}{2}$$

$$\therefore a \neq 0$$

(iii) $a < 0$ 일 때,

$$x \rightarrow 1-\text{일 때 } t \rightarrow a+\text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow a+} g(t) = 2^a + 2^{-a}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$a \neq 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) = 2^a + 2^{-a}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{2} = 2^a + 2^{-a} \text{ 이어야 하므로}$$

$$2 \times 2^{2a} + 2 = 5 \times 2^a, \quad 2 \times 2^{2a} - 5 \times 2^a + 2 = 0$$

$$(2 \times 2^a - 1)(2^a - 2) = 0$$

$$2^a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 2^a = 2$$

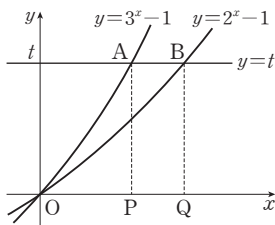
$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$(-1) \times 1 = -1$$

답 ⑤

19



곡선 $y=3^x-1$ 이 직선 $y=t$ 와 만나는 점이 A이므로

$$3^x - 1 = t, \quad 3^x = 1 + t$$

$$\therefore x = \log_3(1+t)$$

$$\text{즉, } A(\log_3(1+t), t)$$

또한, 곡선 $y=2^x-1$ 이 직선 $y=t$ 와 만나는 점이 B이므로

$$2^x - 1 = t, \quad 2^x = 1 + t$$

$$\therefore x = \log_2(1+t)$$

$$\text{즉, } B(\log_2(1+t), t)$$

이때, 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발이 각각 P, Q
이므로

$$P(\log_3(1+t), 0), \quad Q(\log_2(1+t), 0)$$

따라서 두 삼각형 OAP, OBQ의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \log_3(1+t) \times t$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \log_2(1+t) \times t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} t(6^t - 1) & \left\{ \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{T(t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2t(6^t - 1)}{t \log_3(1+t)} + \frac{2t(6^t - 1)}{t \log_2(1+t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{6^t - 1}{t} \times \frac{t}{\log_3(1+t)} \times 2 \right\} \\ & \quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{6^t - 1}{t} \times \frac{t}{\log_2(1+t)} \times 2 \right\} \\ &= \ln 6 \times \ln 3 \times 2 + \ln 6 \times \ln 2 \times 2 \\ &= 2 \ln 6 \times (\ln 3 + \ln 2) = 2(\ln 6)^2 \end{aligned}$$

답 $2(\ln 6)^2$

20

$f(x) = e^x$ 에서 $y = e^x$

$$\therefore x = \ln y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \ln x$

$$\therefore g(x) = \ln x$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)f(x-1) - g(x)}{(x-1)g(1+2g(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x \times e^{x-1} - \ln x}{(x-1) \ln(1+2 \ln x)} \end{aligned}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x \times e^{x-1} - \ln x}{(x-1) \ln(1+2 \ln x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t \ln(1+t) - \ln(1+t)}{t \ln\{1+2 \ln(1+t)\}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{\ln(1+t)}{\ln\{1+2 \ln(1+t)\}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{2 \ln(1+t)}{\ln\{1+2 \ln(1+t)\}} \times \frac{1}{2} \right] \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

풀이첨삭

*의 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+t)}{\ln\{1+2 \ln(1+t)\}}$ 에서 $\ln(1+t)=s$ 로 놓으면
 $t \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+t)}{\ln\{1+2 \ln(1+t)\}} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{\ln(1+2s)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

21

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 4}{x^2 + x - 2} = 2$ 에서 극한값이 존재하고, $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{x^2 f(x) - 4\} = 0$ 이므로 $f(1) = 4$

또한,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 4}{x^2 + x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(1)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(1) + x^2 f(1) - f(1)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2}{x+2} \times \frac{f(x) - f(1)}{x-1} + \frac{(x+1)f(1)}{x+2} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \times f'(1) + \frac{2}{3} \times f(1) \\ &= \frac{1}{3} \times f'(1) + \frac{2}{3} \times 4 \\ &= \frac{1}{3} f'(1) + \frac{8}{3} = 2 \\ \frac{1}{3} f'(1) &= -\frac{2}{3} \quad \therefore f'(1) = -2 \end{aligned}$$

한편, $g(x) = x^2 e^x f(x)$ 에서

$$g'(x) = 2x e^x f(x) + x^2 e^x f(x) + x^2 e^x f'(x)$$

$$\therefore g'(1) = 2ef(1) + ef(1) + ef'(1)$$

$$= 2e \times 4 + e \times 4 + e \times (-2)$$

$$= 10e$$

답 10e

22

$$f(x_1) - f(x_2) - 2x_1 + 2x_2 = 0 \text{에서}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2)$$

$$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2$$

이때, 조건 (나)에서 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 인 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 위의 식을 만족시키므로 $0 < x < 1$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 기울기가 2인 직선이다.㉠

한편, $f(e^2) = e^2$ 이므로 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} f(e^2) &= ae^2 \ln e^2 + be^2 \\ &= (2a + b)e^2 = e^2 \end{aligned}$$

$$\therefore 2a + b = 1 \quad \dots\dots\text{㉡}$$

또한, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \quad (\because \text{㉠})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax \ln x + bx - b}{x - 1} = 2$$

이때, $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax \ln x + bx - b}{x - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{a(1+t) \ln(1+t) + bt}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ a(1+t) \times \frac{\ln(1+t)}{t} + b \right\} \end{aligned}$$

$$= a \times 1 + b = a + b$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots\text{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 3$$

따라서 $x \geq 1$ 에서 $f(x) = -x \ln x + 3x$ 이므로

$$f'(x) = -\ln x - x \times \frac{1}{x} + 3 = 2 - \ln x$$

$$\therefore f'(e^2) = 2 - \ln e^2 = 0$$

답 0

23

ㄱ. 두 함수 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln \frac{1}{x}$ 의 그래프가 만나는

점이 P이므로

$$\ln x = \ln \frac{1}{x} \text{에서 } \ln x = -\ln x$$

$$2 \ln x = 0, \ln x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore f(1) = \ln 1 = 0$$

즉, 점 P의 좌표는 (1, 0)이다. (참)

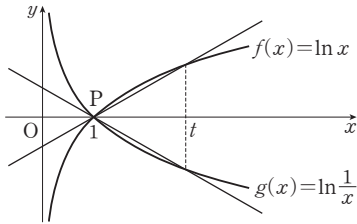
ㄴ. $f(x) = \ln x$ 에서 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 1$$

$g(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$ 에서 $g'(x) = -\frac{1}{x}$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(1) = -1$
 $f'(1)g'(1) = -1$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. (참)

ㄷ.



위의 그림에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고 ㄴ에서 $f'(1)=1$ 이므로 $t>1$ 인 t 에 대하여

$$0 < \frac{f(t)-f(1)}{t-1} < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

같은 방법으로 위의 그림에서 함수 $g(x)$ 는 감소하고 ㄴ에서 $g'(1) = -1$ 이므로 $t>1$ 인 t 에 대하여

$$-1 < \frac{g(t)-g(1)}{t-1} < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$-1 < \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \times \frac{g(t)-g(1)}{t-1} < 0$$

$$\therefore -1 < \frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2} < 0 \quad (\because f(1)=g(1)=0) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른풀이

$$\text{ㄷ. } f(t) = \ln t, \quad g(t) = \ln \frac{1}{t} = -\ln t \text{이므로}$$

$$f(t)g(t) = -(\ln t)^2$$

$$\therefore \frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2} = -\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이때, $\frac{\ln t}{t-1}$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(1, 0)$,

$(t, \ln t)$ 를 지나는 직선의 기울기이므로

$$0 < \frac{\ln t}{t-1} < 1$$

$$\therefore -1 < -\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2 < 0$$

즉, ㉢에서

$$-1 < \frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2} < 0 \text{ (참)}$$

유형
연습

04 삼각함수의 극한과 미분

본문 pp.106~119

$$\text{01-1 (1) } \frac{7}{8} \quad (2) -4 \quad (3) 8\sqrt{3}$$

$$\text{01-2 } \frac{3}{14}$$

$$\text{01-3 } \frac{9}{16}$$

$$\text{02-1 (1) } \frac{43}{64} \quad (2) \frac{3}{16}$$

$$\text{02-2 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{02-3 } \frac{4}{5}$$

$$\text{03-1 (1) } \frac{17}{9} \quad (2) 4$$

$$\text{03-2 } 5$$

$$\text{03-3 } \frac{9}{2}$$

$$\text{04-1 } -2, -\frac{1}{2}$$

$$\text{04-2 } 12\sqrt{2}$$

$$\text{04-3 } 1$$

$$\text{05-1 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{05-2 } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{06-1 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : } -4$$

$$(2) \text{ 최댓값 : } 2\sqrt{5}, \text{ 최솟값 : } -2\sqrt{5}$$

$$\text{06-2 } 4$$

$$\text{06-3 } 120$$

$$\text{07-1 (1) } -\frac{1}{2} \quad (2) \frac{9}{4}$$

$$\text{07-2 } 1$$

$$\text{07-3 } 1$$

$$\text{08-1 } 144$$

$$\text{08-2 } -9$$

$$\text{08-3 } 32$$

$$\text{09-1 } \frac{1}{4}$$

$$\text{09-2 } \frac{64}{3}$$

$$\text{10-1 } -2$$

$$\text{10-2 } -3$$

$$\text{10-3 } \frac{13}{4}$$

01-1

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

이때, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$, 즉

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

따라서

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(1) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= 1^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\sec \theta}{\csc \theta} + \frac{\csc \theta}{\sec \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}} + \frac{\frac{1}{\sin \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (1 - \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta) \\
 &= (1 - \tan^2 \theta) \times \csc^2 \theta = \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{-(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{-(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\
 &= \frac{-1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 8\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{7}{8}$ (2) -4 (3) $8\sqrt{3}$

01-2

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} &= \frac{3}{7} \csc \theta \sec \theta \text{에서} \\
 \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} &= \frac{3}{7} \times \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \\
 \frac{2}{\cos^2 \theta} &= \frac{3}{7} \times \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}, \quad \frac{2}{\cos \theta} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{\sin \theta} \\
 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \quad \therefore \tan \theta = \frac{3}{14}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{14}$

01-3

이차방정식 $3x^2 + 4x - 8 = 0$ 의 두 실근이 $\csc \theta$, $\sec \theta$ 이
 므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc \theta + \sec \theta = -\frac{4}{3}, \quad \csc \theta \sec \theta = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1},$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\
 &= -\frac{8}{3}(\sin \theta + \cos \theta) \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

이때, 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 두 실근이 $\sin \theta$, $\cos \theta$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -p, \quad \sin \theta \cos \theta = q$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} = -p \text{에서 } p = -\frac{1}{2} \text{이고 } \textcircled{2} \text{에서 } q = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{q^2}{p^2} = \frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{9}{16}$$

답 $\frac{9}{16}$

다른풀이

이차방정식 $3x^2 + 4x - 8 = 0$ 의 두 실근이 $\csc \theta$, $\sec \theta$ 이
 므로 이 이차방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$3 + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$\text{이때, } \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } -8t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$\frac{1}{\csc \theta} = \sin \theta, \quad \frac{1}{\sec \theta} = \cos \theta \text{이므로 이차방정식}$$

$$-8t^2 + 4t + 3 = 0, \text{ 즉 } t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{8} = 0 \text{의 두 실근이 } \sin \theta,$$

$\cos \theta$ 이다.

$$\text{따라서 } p = -\frac{1}{2}, \quad q = -\frac{3}{8} \text{이므로}$$

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{9}{16}$$

02-1

$$(1) \quad \sin \alpha - 2 \cos \beta = -\frac{1}{4} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \beta + 4 \cos^2 \beta = \frac{1}{16} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $\cos \alpha + 2 \sin \beta = \frac{3}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha \sin \beta + 4 \sin^2 \beta = \frac{9}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 4(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ + 4(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \frac{37}{16} \end{aligned}$$

$$5 - 4 \sin(\alpha - \beta) = \frac{37}{16} \quad \therefore \sin(\alpha - \beta) = \frac{43}{64}$$

(2) $2 \sin \alpha + \sin \beta = -2$ 의 양변을 제곱하면

$$4 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $2 \cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 4(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

$$5 - 4 \cos(\alpha + \beta) = \frac{17}{4} \quad \therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{16}$$

$$\text{답 (1)} \frac{43}{64} \quad (2) \frac{3}{16}$$

02-2

$\sin \alpha + \cos \beta + \sin \gamma = 0$ 에서 $\sin \alpha + \cos \beta = -\sin \gamma$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \sin^2 \gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $\cos \alpha + \sin \beta + \cos \gamma = 0$ 에서

$$\cos \alpha + \sin \beta = -\cos \gamma$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \cos^2 \gamma \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ + \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \end{aligned}$$

$$2 + 2 \sin(\alpha + \beta) = 1 \quad \therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

이때, $\frac{5}{8}\pi < \alpha < \pi$, $\frac{7}{8}\pi < \beta < \pi$ 에서

$$\frac{3}{2}\pi < \alpha + \beta < 2\pi \text{이므로 } \cos(\alpha + \beta) > 0$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

02-3

$2 \cos x = |\sin x|$ 의 양변을 제곱하면

$$4 \cos^2 x = \sin^2 x, \quad 4 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$5 \cos^2 x = 1, \quad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\because \cos x \geq 0)$$

$$\text{즉, } \cos \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

$$\beta = 2\pi - \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha + 5\beta}{2} = \sin \frac{\alpha + 5(2\pi - \alpha)}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \sin \frac{10\pi - 4\alpha}{2}$$

$$= \sin(5\pi - 2\alpha)$$

$$= \sin(\pi - 2\alpha)$$

$$= \sin 2\alpha$$

$$= \sin(\alpha + \alpha)$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

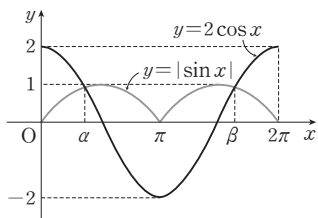
$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{답 } \frac{4}{5}$$

다른풀이

단원구간 $[0, 2\pi]$ 에서 두 함수 $y = 2 \cos x$, $y = |\sin x|$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $\alpha + \beta = 2\pi$ 이므로

$$\sin \frac{\alpha + 5\beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta + 4\beta}{2}$$

$$= \sin(\pi + 2\beta)$$

$$= -\sin 2\beta$$

$$= -2 \sin \beta \cos \beta \quad \dots \textcircled{L}$$

한편, $2 \cos \beta = -\sin \beta$ 이므로 $\tan \beta = -2$

$$\therefore \sin \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\because \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi \right)$$

①에서

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + 5\beta}{2} &= -2 \sin \beta \cos \beta \\ &= -2 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

03-1

(1) 이차방정식 $2x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{5}{2}, \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2(\alpha - \beta) &= \left(\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right)^2 \\ &= \frac{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha \tan \beta + \tan^2 \beta}{(1 + \tan \alpha \tan \beta)^2} \\ &= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 4 \tan \alpha \tan \beta}{(1 + \tan \alpha \tan \beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{5}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{17}{9} \end{aligned}$$

(2) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ 에서 $\beta = \alpha - \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3} + \tan \alpha)(\sqrt{3} - \tan \beta) \\ &= (\sqrt{3} + \tan \alpha) \left\{ \sqrt{3} - \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\ &= (\sqrt{3} + \tan \alpha) \left(\sqrt{3} - \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{6}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3} + \tan \alpha) \left(\sqrt{3} - \frac{\tan \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \alpha} \right) \\ &= (\sqrt{3} + \tan \alpha) \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} \tan \alpha - 1}{\sqrt{3} + \tan \alpha} \right) \\ &= 3 + \sqrt{3} \tan \alpha - \sqrt{3} \tan \alpha + 1 = 4 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{17}{9}$ (2) 4

03-2

$2 - \tan \alpha = -2 \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta$ 에서

$$2 + 2 \tan \alpha \tan \beta = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$2(1 + \tan \alpha \tan \beta) = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$2 = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec^2(\alpha - \beta) &= 1 + \tan^2(\alpha - \beta) \\ &= 1 + 2^2 = 5 \end{aligned}$$

답 5

03-3

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = a, g(2) = b \quad \left(\text{단, } 0 < a < \frac{\pi}{2}, 0 < b < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{라 하면 } f(a) = \frac{1}{4}, f(b) = 2$$

$$\therefore \tan a = \frac{1}{4}, \tan b = 2$$

또한, $g\left(\frac{1}{4}\right) + g(2) = \theta$ 에서 $a + b = \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \tan(a + b) \\ &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4} \times 2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

04-1

두 직선 $x + y + 2 = 0$, $ax - y + 1 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -1, \tan \beta = a$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \theta$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \frac{1}{3}$$

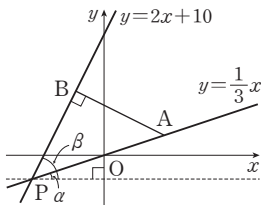
$$\text{즉, } \left| \frac{-1-a}{1-a} \right| = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } \frac{-1-a}{1-a} = \pm \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1-a}{1-a} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } -3-3a=1-a \quad \therefore a=-2$$

$$\frac{-1-a}{1-a} = -\frac{1}{3} \text{ 에서 } -3-3a=-1+a \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\text{답 } -2, -\frac{1}{2}$$

04-2



위의 그림과 같이 두 직선 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 2x + 10$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = 2$$

이때, $\angle APB = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan(\angle APB) &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \angle APB = \frac{\pi}{4}$$

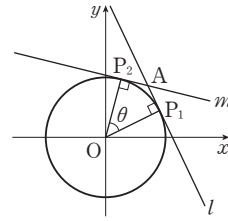
따라서 $\triangle PAB$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{PA} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{답 } 12\sqrt{2}$$

04-3

다음 그림과 같이 두 직선 l , m 의 교점을 A라 하자.



$\square OP_1AP_2$ 에서 $\angle P_1OP_2 + \angle P_1AP_2 = 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 180^\circ - \angle P_1AP_2$$

즉, θ 는 두 직선 l , m 이 이루는 예각의 크기와 같다.

이때, 두 직선 l , m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -2, \tan \beta = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

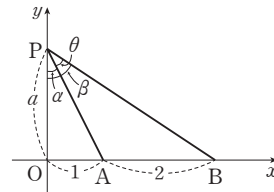
$$\begin{aligned} &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{-2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + (-2) \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 1$$

05-1

다음 그림과 같이 $\angle APO = \alpha$, $\angle BPO = \beta$ 라 하면

$$\theta = \beta - \alpha$$



이때, $P(0, a)$ ($a > 0$)라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{a}, \tan \beta = \frac{3}{a}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{3}{a} - \frac{1}{a}}{1 + \frac{3}{a} \times \frac{1}{a}} \\ &= \frac{2a}{a^2 + 3} = \frac{2}{a + \frac{3}{a}} \quad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

㉠에서 $\tan \theta$ 의 값이 최대가 되려면 분모인 $a + \frac{3}{a}$ 의 값이

최소가 되어야 한다.

$a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{3}{a}} = 2\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $a = \frac{3}{a}$, 즉 $a = \sqrt{3}$ 일 때 성립한다.)

따라서 ㉠에서

$$\tan \theta \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 $\tan \theta$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

05-2

오른쪽 그림에서

$\overline{CD} = a$ ($a > 0$)라 하면 직각

삼각형 CED에서

$$\begin{aligned} \overline{DE} &= \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CD}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - a^2} \\ &= \sqrt{5 - a^2} \end{aligned}$$

이때, $\overline{AD} = 4\overline{DE}$ 이므로 $\overline{AD} = 4\sqrt{5 - a^2}$

직각삼각형 CAD에서 $\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ 이므로

$$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + (4\sqrt{5 - a^2})^2$$

$$20 = a^2 + 80 - 16a^2$$

$$15a^2 = 60, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{DE} = 1, \overline{AD} = 4$$

즉, 직각삼각형 CED에서 $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

또한, 직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

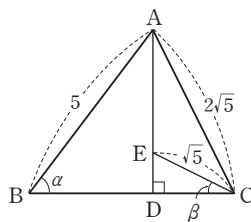
$$\therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



06-1

$$(1) y = 3\sin x + 4\cos x + 1$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) + 1$$

$$= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) + 1$$

$$= 5\sin(x + \alpha) + 1 \quad \left(\text{단, } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}\right)$$

이때, $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 에서

$$-4 \leq 5\sin(x + \alpha) + 1 \leq 6 \text{ 이므로}$$

주어진 함수의 최댓값은 6, 최솟값은 -4이다.

$$(2) y = 2\sqrt{2}\sin x + 6\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin x + 6\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin x + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}\cos x - 3\sqrt{2}\sin x$$

$$= 3\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\cos x - \frac{\sqrt{10}}{10}\sin x\right)$$

$$= 2\sqrt{5}(\cos \beta \cos x - \sin \beta \sin x)$$

$$= 2\sqrt{5}\cos(x + \beta)$$

$$\left(\text{단, } \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

이때, $-1 \leq \cos(x + \beta) \leq 1$ 에서

$$-2\sqrt{5} \leq 2\sqrt{5}\cos(x + \beta) \leq 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

주어진 함수의 최댓값은 $2\sqrt{5}$, 최솟값은 $-2\sqrt{5}$ 이다.

답 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : -4

(2) 최댓값 : $2\sqrt{5}$, 최솟값 : $-2\sqrt{5}$

06-2

$$f(x) = 2\cos^2 x + a\sin 2x - 1$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x + a\sin 2x - 1$$

$$= \cos^2 x + 1 - \sin^2 x + a\sin 2x - 1$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + a\sin 2x$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x + a\sin 2x$$

$$= \cos(x + x) + a\sin 2x$$

$$= \cos 2x + a\sin 2x$$

$$= \sqrt{a^2 + 1}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\cos 2x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}\sin 2x\right)$$

$$= \sqrt{a^2 + 1}(\sin \alpha \cos 2x + \cos \alpha \sin 2x)$$

본문 p.105
한걸음더 참고

$$= \sqrt{a^2+1} \sin(2x+\alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \right)$$

이때, $-1 \leq \sin(2x+\alpha) \leq 1$ 에서

$$-\sqrt{a^2+1} \leq \sqrt{a^2+1} \sin(2x+\alpha) \leq \sqrt{a^2+1}$$

이므로 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{a^2+1}$ 이다.

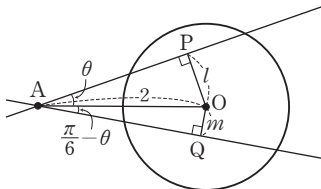
따라서 $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{17}$ 에서 $a^2+1=17$, $a^2=16$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

답 4

06-3

다음 그림과 같이 원의 중심 O에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.



$\angle OAP = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)라 하면 $\angle OAQ = \frac{\pi}{6} - \theta$

직각삼각형 OAP에서 $l = 2 \sin \theta$

직각삼각형 OAQ에서

$$m = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$$

$$= 2\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{6} \sin \theta\right)$$

$$= \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$$

이므로

$$2l^2 + m^2 = 8 \sin^2 \theta + (\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)^2$$

$$= 8 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \sin^2 \theta$$

$$= 1 + 10 \sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin 2\theta$$

$$= 1 + 10 \times \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \sqrt{3} \sin 2\theta \quad \text{— 본문 p.105 한걸음더 참고}$$

$$= 6 - 5 \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta$$

$$= 6 - 2\sqrt{7} \left(\frac{5\sqrt{7}}{14} \cos 2\theta + \frac{\sqrt{21}}{14} \sin 2\theta \right)$$

$$= 6 - 2\sqrt{7} (\sin \alpha \cos 2\theta + \cos \alpha \sin 2\theta)$$

$$= 6 - 2\sqrt{7} \sin(2\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{14} \right)$$

$$\text{이때, } \tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{3} > \sqrt{3} \text{이므로 } \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{즉, } 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{에서 } \frac{\pi}{3} < 2\theta + \alpha < \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} < \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$$

따라서 $2l^2 + m^2$ 의 최솟값은 $6 - 2\sqrt{7}$ 이므로

$$p=6, \quad q=-2$$

$$\therefore 30(p+q) = 30\{6 + (-2)\} = 120$$

답 120

07-1

(1) $\sqrt{x}-1=t$ 로 놓으면 $x=(t+1)^2$ 이고,

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-t)}{(t+1)^2-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{t+2} \right) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \tan 2x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{9}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \quad \text{— 본문 p.114 한걸음더 참고} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} -\frac{1}{2} \quad (2) \frac{9}{4}$$

07-2

$f(x) = \sin 5x$, $g(x) = x^2 + x$ 이므로

$$f(g(x)) = f(x^2 + x) = \sin(5x^2 + 5x)$$

$$g(f(x)) = g(\sin 5x) = \sin^2 5x + \sin 5x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2 + 5x)}{\sin^2 5x + \sin 5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2 + 5x)}{\sin 5x (\sin 5x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(5x^2 + 5x)}{5x^2 + 5x} \times \frac{5x}{\sin 5x} \times \frac{5x(x+1)}{5x} \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\sin 5x + 1} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

답 1

07-3

$f(n)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x + \tan 4x + \tan 6x + \cdots + \tan 2nx} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan 2x}{x} + \frac{\tan 4x}{x} + \frac{\tan 6x}{x} + \cdots + \frac{\tan 2nx}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan 2x}{2x} \times 2 + \frac{\tan 4x}{4x} \times 4 + \frac{\tan 6x}{6x} \times 6 + \cdots + \frac{\tan 2nx}{2nx} \times 2n} \\
 &= \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n} \\
 &= \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n k} = \frac{1}{n(n+1)} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1
 \end{aligned}$$

답 1

08-1

$x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때 극한값이 존재하고, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (4 + a \tan^2 x) = 0$ 이므로

$$4 + a = 0 \quad \therefore a = -4$$

$a = -4$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 - 4 \tan^2 x}{\sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4(1 - \tan^2 x)}{\sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)}{\sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-4(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-4(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{-4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} \\
 &= \frac{-4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -8\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -8\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-4)^2 + (-8\sqrt{2})^2 = 144$$

답 144

08-2

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0) = a$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 9x}{e^{3x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 9x}{9x} \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{9}{3} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times 3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+bx)}{|x|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+bx)}{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{\ln(1+bx)}{bx} \times (-b) \right\} \\
 &= 1 \times (-b) = -b
 \end{aligned}$$

즉, $a = 3 = -b$ 이므로

$$a = 3, b = -3 \quad \therefore ab = 3 \times (-3) = -9$$

답 -9

08-3

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x}$$

이때, $c \neq 0$ 이면 발산하므로 $c = 0$ ($\because$ 조건 ㉞)

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = b
 \end{aligned}$$

조건 ㉞에 의하여 $b=0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2$$

조건 ㉝에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{x^3 + 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + ax^2)}{x^3 + 3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x^3 + ax^2)}{x^3 + ax^2} \times \frac{x^3 + ax^2}{x^3 + 3x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x^3 + ax^2)}{x^3 + ax^2} \times \frac{x+a}{x+3} \right\} \\ &= \frac{a}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a=6$$

따라서 $f(x) = x^3 + 6x^2$ 이므로

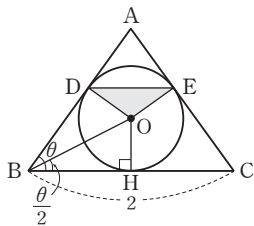
$$f(2) = 2^3 + 6 \times 2^2 = 32$$

답 32

09-1

오른쪽 그림과 같이 내접원의 중심 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{BH}} = \frac{r}{1} = r$$



한편, $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\angle BAC = \pi - 2\theta$$

이때, $\square ADOE$ 에서 $\angle ADO = \angle AEO = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle DOE = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\theta) = 2\theta$$

$$\therefore S(\theta) = \triangle OED = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{4} \times \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1^2 \times 1 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

다른풀이

꼭짓점 A에서 변 BC에 내린

수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \overline{CH} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{AH} = \tan \theta,$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{1}{\cos \theta}$$

이때, 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{2}{\cos \theta} \right) \times r = \frac{1}{2} \times 2 \times \tan \theta$$

$$\therefore r = \frac{\tan \theta}{1 + \frac{1}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

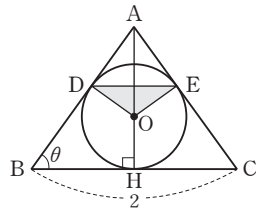
$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right)^2 \times \sin 2\theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta \sin 2\theta}{2(\cos \theta + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta \sin 2\theta}{2\theta^3 (\cos \theta + 1)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{1}{(\cos \theta + 1)^2} \right\}$$

$$= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$



09-2

$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 4$$

이때, 오른쪽 그림과 같이 점 C

에서 선분 AB에 내린 수선의

발을 H라 하면

$$\overline{AH} = 4 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{AB} = 2 \times 4 \cos \theta = 8 \cos \theta$$

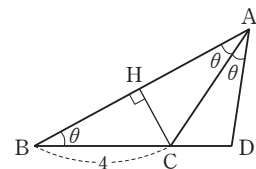
한편, 삼각형의 외각의 성질에 의하여 $\angle ACD = 2\theta$ 이므로

$$\angle ADC = \pi - 3\theta$$

$\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta}, \quad \frac{4}{\sin 3\theta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{4 \sin \theta}{\sin 3\theta}$$



따라서

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{BC} + \overline{CD} \\ &= 4 + \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \\ &= 4\left(1 + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \frac{1}{2} \times 8\cos\theta \times 4\left(1 + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right) \times \sin\theta \\ &= 16\sin\theta\cos\theta\left(1 + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 16 \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \cos\theta \times \left(1 + \frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \times \frac{1}{3}\right) \right\} \\ &= 16 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{64}{3}\end{aligned}$$

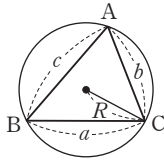
답 $\frac{64}{3}$

보충설명

사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



10-1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h) - f(0) + f(0) - f(0+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} \times (-1) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= -f'(0) - f'(0) = -2f'(0) \\ \text{이때, } f(x) &= e^x \cos x \text{에서} \\ f'(x) &= e^x \cos x + e^x \times (-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x) \\ \therefore -2f'(0) &= -2 \times e^0(\cos 0 - \sin 0) \\ &= -2 \times (1 - 0) = -2\end{aligned}$$

답 -2

10-2

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 에서

$$f(0) = 1 - a,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cos x - a) \\ &= e^0 \times \cos 0 - a = 1 - a,\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + bx + 5) = 5$$

$$\text{이므로 } 1 - a = 5 \quad \therefore a = -4$$

또한, $f'(0)$ 이 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h \cos h + 4 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h \cos h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h \cos h - e^h + e^h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cos h - 1}{h^2} \times h e^h + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 \times 1 + 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h^2 + bh + 5 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h^2 + bh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (3h + b) = b$$

$$\text{이므로 } b = 1$$

$$\therefore a + b = -4 + 1 = -3$$

답 -3

10-3

$f(x) = a \sin x + b \cos x$ 에서

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} + b \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{이므로 } a + \sqrt{3}b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a \cos \frac{\pi}{3} - b \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a - \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad b = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

답 $\frac{13}{4}$

개 념 마 무 리

본문 pp.121~124

01 2	02 ④	03 $-2-2\sqrt{3}$	04 ②
05 $\frac{6\sqrt{15}}{5}$	06 2	07 ①	08 ③
09 $\frac{10\sqrt{2}}{41}$	10 $\frac{1}{4}$	11 4	12 $\frac{\pi}{4}$
13 ④	14 ④	15 3π	16 $\frac{1}{4}$
17 $\frac{1}{3}$	18 $\frac{37}{55}$	19 ②	20 1
21 2	22 60		

01

$a \tan \theta + \cot \theta = 10$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2 \tan^2 \theta + 2a + \cot^2 \theta = 100$$

$$a^2 (\sec^2 \theta - 1) + 2a + (\csc^2 \theta - 1) = 100$$

$$a^2 \sec^2 \theta - a^2 + 2a + \csc^2 \theta - 1 = 100$$

이때, $a^2 \sec^2 \theta + \csc^2 \theta = 164$ 이므로

$$164 - a^2 + 2a - 1 = 100, \quad a^2 - 2a - 63 = 0$$

$$(a+7)(a-9) = 0 \quad \therefore a = -7 \text{ 또는 } a = 9$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-7 + 9 = 2$$

답 2

02

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2\cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \csc \theta \sec \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{\sin \theta \tan \theta}{\tan \theta + 1} - \frac{\cos \theta}{1 + \tan \theta} + \frac{\sin \theta}{\tan \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1} - \frac{\cos \theta}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \cos \theta}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \cos \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} + \cos \theta \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\cos \theta + \sin \theta} + \cos \theta \\ &= \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad (\csc \theta \sec \theta - \cot \theta)(\sin \theta - \csc \theta) \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \times \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \times \frac{-\cos^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad (1 - \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta \times \sin^2 \theta \times \sec^2 \theta \times \csc^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta \times \sin^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

03

이차방정식 $3x^2 - \sqrt{3}x + a - 1 = 0$ 이 두 실근을 가지므로 이
이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times (a - 1) \geq 0$$

$$-12a + 15 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $3x^2 - \sqrt{3}x + a - 1 = 0$ 의 두 실근이 $\csc \theta, \sec \theta$
이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc \theta + \sec \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \csc \theta \sec \theta = \frac{a-1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2},$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{a-1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{a-1}$ 이고 $\textcircled{3}$ 에서

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{a-1} = \frac{\sqrt{3}}{a-1}$$

위 등식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{(a-1)^2}$$

$$1 + 2 \times \frac{3}{a-1} = \frac{3}{(a-1)^2}$$

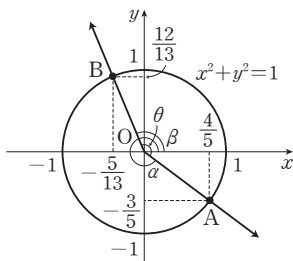
$$(a-1)^2 + 6(a-1) = 3, \quad a^2 + 4a - 8 = 0$$

$$\therefore a = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $a \leq \frac{5}{4}$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값은
 $-2 - 2\sqrt{3}$ 이다.

답 $-2 - 2\sqrt{3}$

04



두 점 A, B의 좌표가 각각 $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$ 이
므로 두 동경 OA, OB가 나타내는 각의 크기를 각각 α, β
라 하면

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = -\frac{5}{13}$$

이때, $\theta' = \alpha - \beta$ 라 하면

$$\begin{aligned} \sin \theta' &= \sin(\alpha - \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} \\ &= \frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{12}{13} \\ &= -\frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{56}{65} \end{aligned}$$

$\theta = 2\pi - \theta'$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(2\pi - \theta') = -\sin \theta' = \frac{33}{65}$$

$$\cos \theta = \cos(2\pi - \theta') = \cos \theta' = -\frac{56}{65}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{33}{65} - \frac{56}{65} = -\frac{23}{65}$$

답 ②

05

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{5}{24}, \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{11}{24}$$

$$\therefore \tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{-\frac{11}{24}}{\frac{5}{24}} = -\frac{11}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(가)

한편,

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(\alpha - \beta) &= \sec^2(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{\cos^2(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16 \end{aligned}$$

이므로 $\tan^2(\alpha - \beta) = 15$

이때, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ 에서 $0 < \alpha - \beta < \pi$

또한, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{4} < 0$ 이므로 $\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \pi$

즉, $\tan(\alpha - \beta) < 0$ 이므로

$$\tan(\alpha - \beta) = -\sqrt{15}$$

따라서 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \alpha - \tan \beta &= \tan(\alpha - \beta)(1 + \tan \alpha \tan \beta) \\ &= -\sqrt{15} \times \left(1 - \frac{11}{5}\right) \quad (\because \ominus) \\ &= \frac{6\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{6\sqrt{15}}{5}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{4}$ 임을 이용하여 $\tan \alpha \tan \beta$ 의 값을 구한 경우	40%
(나)	$1 + \tan^2(\alpha - \beta) = \sec^2(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{4}$ 임을 이용하여 $\tan(\alpha - \beta)$ 의 값을 구한 경우	40%
(다)	(가), (나)에서 구한 값과 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan \alpha - \tan \beta$ 의 값을 구한 경우	20%

06

$$\begin{aligned} \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = -\tan \alpha \text{ 이므로}$$

$$\tan \alpha + \sqrt{3} = -\tan \alpha + \sqrt{3} \tan^2 \alpha$$

$$\sqrt{3} \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3} \tan \alpha + 1)(\tan \alpha - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } \tan \alpha = \sqrt{3}$$

이때, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$$\sin x \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \sin x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때,

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \end{aligned}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\sin x \leq \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \leq 2 \sin x$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} \cos x \leq \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$(2 - \sqrt{3}) \sin x \leq \cos x \leq (4 - \sqrt{3}) \sin x$$

$$2 - \sqrt{3} \leq \cot x \leq 4 - \sqrt{3} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin x > 0\right)$$

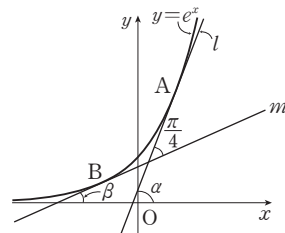
따라서 $\cot x$ 의 최댓값은 $4 - \sqrt{3}$, 최솟값은 $2 - \sqrt{3}$ 이므로
그 차는

$$4 - \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2$$

답 2

07

$y' = e^x$ 이므로 곡선 $y = e^x$ 위의 두 점 $A(t, e^t)$, $B(-t, e^{-t})$ 에서의 접선 l , m 의 기울기는 각각 e^t , e^{-t} 이다.



위의 그림과 같이 두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = e^t, \tan \beta = e^{-t}$$

또한, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{이때, } \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{1 + e^t e^{-t}} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{e^t - e^{-t}}{2} = 1 \quad \therefore e^t - e^{-t} = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

위 식의 양변에 e^t 을 곱하면

$$e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$$

$$e^t > 0 \text{이므로 } e^t = 1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore t = \ln(1 + \sqrt{2}) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

따라서 직선 AB의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{e^{-t} - e^t}{-t - t} &= \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \\ &= \frac{2}{2\ln(1 + \sqrt{2})} \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8}) \\ &= \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

답 ①

08

조건 ㉑에서

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B) = 0$$

이므로

$$A - B = 0 \quad (\because -\pi < A - B < \pi)$$

$$\therefore A = B$$

즉, $\triangle ABC$ 는 $A = B$ 인 이등변삼각형이다.

조건 ㉒에서 $\tan(A + B) = -2\sqrt{2}$, 즉 $\tan 2A = -2\sqrt{2}$ 이므로

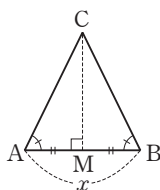
$$\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = -2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \tan^2 A - \tan A - \sqrt{2} = 0$$

$$(\sqrt{2} \tan A + 1)(\tan A - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore \tan A = \sqrt{2} \quad (\because 0 < A < \frac{\pi}{2})$$

이때, 변 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 1이므로



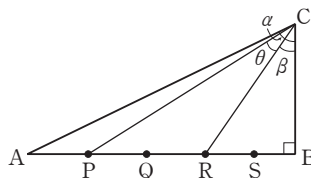
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CM} &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AM} \tan A \\ &= \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{2}}{2} x = \frac{\sqrt{2}}{4} x^2 = 1 \\ \therefore x^2 &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ③

09

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 5\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 - 10^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$



위의 그림과 같이 $\angle PCB = \alpha$, $\angle RCB = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}} = \frac{10 \times \frac{4}{5}}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{RB}}{\overline{BC}} = \frac{10 \times \frac{2}{5}}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

이때, $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{5}}{1 + \frac{4\sqrt{2}}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{10\sqrt{2}}{25 + 16} = \frac{10\sqrt{2}}{41} \end{aligned}$$

답 $\frac{10\sqrt{2}}{41}$

10

$$\begin{aligned} f(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan x + \sin 2x \tan 4x + \cdots + \sin nx \tan n^2 x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 4x}{x^2} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \tan 9x}{x^2} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx \tan n^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{\tan x}{x} \right) \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{\tan 4x}{4x} \times 8 \right) \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{\tan 9x}{9x} \times 27 \right) \\ &\quad + \dots + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin nx}{nx} \times \frac{\tan n^2 x}{n^2 x} \times n^3 \right) \\ &= 1 + 8 + 27 + \dots + n^3 \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^4} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

11

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 3x) - f(x \sin x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 3x) - f(0) + f(0) - f(x \sin x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 3x) - f(0)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x \sin x) - f(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1 - \cos 3x) - f(0)}{1 - \cos 3x} \times \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \times 9 \right\} \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x \sin x) - f(0)}{x \sin x} \times \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= f'(0) \times \frac{1}{2} \times 9 - f'(0) \times 1 \\ &= \frac{9}{2} f'(0) - f'(0) = \frac{7}{2} f'(0) \\ &\cong, \frac{7}{2} f'(0) = 14 \circ \text{므로} \\ &f'(0) = 14 \times \frac{2}{7} = 4 \end{aligned}$$

답 4

12

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 연속이라면

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{2}-}f(x)\text{이어야 한다.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{b\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{bx} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{b \times \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{b\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{a \cos 2x - 1}{(2x - \pi)^2} \dots\dots \textcircled{7}$$

이때, ㉠에서 극한값이 존재하고, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (a \cos 2x - 1) = 0 \text{에서}$$

$$a \cos \pi - 1 = 0, \quad -a - 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

또한, $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때, $t \longrightarrow 0$ —

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos 2x - 1}{(2x - \pi)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\cos(2t + \pi) - 1}{(2t + \pi - \pi)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos 2t - 1}{(2t)^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\frac{1}{2}$$

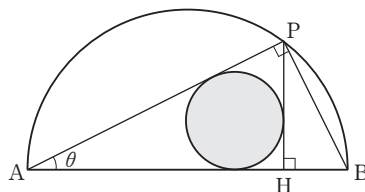
$$\frac{z_1}{b\pi} = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 } b = -\frac{4}{\pi}$$

$$\therefore a = -1, b = -\frac{4}{\pi}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-1}{-\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

13



직각삼각형 ABP에서 $\overline{AB}=2$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{PA}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta, \quad \overline{PB}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$$

직각삼각형 AHP에서

$$\overline{PH}=\overline{PA}\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$$

이때, $\angle BPH=\angle PAB=\theta$ 이므로

$$\overline{BH}=\overline{PB}\sin\theta=2\sin^2\theta$$

즉, 삼각형 BHP의 둘레의 길이 $l(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \overline{PH} + \overline{BH} + \overline{PB} \\ &= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta + 2\sin\theta \\ &= 2\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta + 1) \end{aligned}$$

한편, 직각삼각형 AHP에서

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{PA}\cos\theta \\ &= 2\cos^2\theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \triangle AHP &= \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{PH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\cos^2\theta \times 2\cos\theta\sin\theta \\ &= 2\cos^3\theta\sin\theta \end{aligned}$$

또한, 삼각형 AHP의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle AHP &= \frac{1}{2} \times (\overline{PA} + \overline{PH} + \overline{AH}) \times r \\ &= \frac{r}{2} (2\cos\theta + 2\cos\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta) \\ &= r\cos\theta(1 + \sin\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

즉, $r\cos\theta(1 + \sin\theta + \cos\theta) = 2\cos^3\theta\sin\theta$ 에서

$$r = \frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

이므로 삼각형 AHP의 내접원의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \left(\frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \right)^2 \pi$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\pi\theta l(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{2\cos^2\theta\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \right)^2}{\theta \times 2\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2\cos^4\theta}{(\cos\theta + \sin\theta + 1)^3} \times \frac{\sin\theta}{\theta} \right\}$$

$$= \frac{2}{2^3} \times 1$$

$$= \frac{1}{4}$$

답 ④

14

$f(x) = \sin(x + \alpha) + 2\cos(x + \alpha)$ 에서

$$f'(x) = \cos(x + \alpha) - 2\sin(x + \alpha)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ 이므로 } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$2 + 2\tan\alpha = 1 - \tan\alpha \quad \therefore \tan\alpha = -\frac{1}{3}$$

답 ④

15

$f(x) = \sin x(2\cos x + 1) - x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x(2\cos x + 1) + \sin x(-2\sin x) - 1 \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 2\sin^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } 2\cos^2 x + \cos x - 2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 2(1 - \cos^2 x) - 1 = 0$$

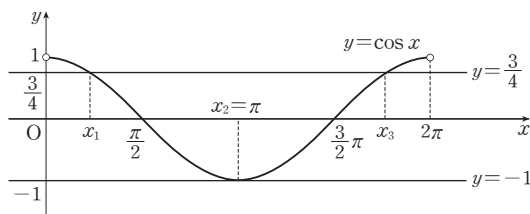
$$4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$$

$$(\cos x + 1)(4\cos x - 3) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{3}{4}$$

이때, $0 < x < 2\pi$ 에서 조건을 만족시키는 실수 x 의 값은 함수 $y = \cos x$ ($0 < x < 2\pi$)의 그래프와 두 직선 $y = -1$,

$y = \frac{3}{4}$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 다음 그림과 같다.



즉, 세 교점의 x 좌표를 크기가 작은 순서대로 x_1, x_2, x_3 이라 할 때

$$x_1 + x_3 = 2\pi, \quad x_2 = \pi$$

이므로 조건을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi + \pi = 3\pi$$

답 3π

16

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$x = \frac{\pi}{4}$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} f(x) \text{에서}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} (a \sin 2x + b \cos 2x) \\ &= a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} 2 \sin x \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

또한, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{2}+2h\right) - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2} \cos 2h - b \sin 2h - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{2} \times \frac{\cos 2h - 1}{(2h)^2} \times 4h - b \times \frac{\sin 2h}{2h} \times 2 \right\} \\ &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 - b \times 1 \times 2 = -2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h\right) - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{2} \cos h + \sqrt{2} \sin h - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \left(\sqrt{2} \times \frac{\cos h - 1}{h^2} \times h + \sqrt{2} \times \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 + \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -2b = \sqrt{2} \text{이므로 } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

17

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해가 주어진 구간에 존재해야 한다.

$$\text{즉, } \sin a \sin 2x + a = \cos a \cos 2x - 2a \text{에서}$$

$$\cos a \cos 2x - \sin a \sin 2x = 3a$$

$$\therefore \cos(a+2x) = 3a$$

이때, $-1 \leq \cos(a+2x) \leq 1$ ($0 \leq x \leq \pi$)이므로 위 등식을 만족시키는 x 의 값이 존재하려면 $-1 \leq 3a \leq 1$ 이어야 한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$ 이다.

답 $\frac{1}{3}$

보충설명

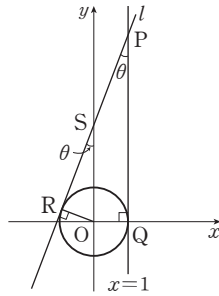
함수 $y = \cos(a+2x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } -1 \leq \cos(a+2x) \leq 1$$

이때, a 는 함수 $y = \cos 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 그래프를 x 축의 방향으로 얼마나 평행이동했는지를 의미하므로 a 의 값의 변화에 따른 최댓값, 최솟값의 변화는 없다.

18

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선 중에서 y 축과 만나는 접선을 l 이라 하고, 직선 l 과 원의 접점을 R, 직선 $x=1$ 과 원의 한 접점을 Q라 하자. 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 S라 하면 점 S의 좌표가 $(0, \frac{13}{5})$ 이므로



로 직각삼각형 ROS에서

$$\overline{RS} = \sqrt{\overline{OS}^2 - \overline{OR}^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

이때, $\angle RSO = \angle RPQ = \theta$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{RS}} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

한편, $\tan \theta = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{5}{12} \text{에서}$$

$$24 \tan \frac{\theta}{2} = 5 - 5 \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$5 \tan^2 \frac{\theta}{2} + 24 \tan \frac{\theta}{2} - 5 = 0$$

$$\left(\tan \frac{\theta}{2} + 5\right)\left(5 \tan \frac{\theta}{2} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = -5 \text{ 또는 } \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{5}$$

이때, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{5}$

$$\therefore \tan \frac{3}{2}\theta = \tan\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\tan \theta + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\frac{37}{60}}{\frac{11}{12}} = \frac{37}{55}$$

답 $\frac{37}{55}$

다른풀이

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선 중에서 y 축과 만나는 접선을 l 이라 하자.

직선 l 의 y 절편이 $\frac{13}{5}$ 이므로 기울

기를 a ($a > 0$)라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y = ax + \frac{13}{5} \quad \therefore 5ax - 5y + 13 = 0$$

이때, 원점 O와 직선 l 사이의 거리는 원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름의 길이와 같으므로 1이다.

$$\therefore \frac{13}{\sqrt{(5a)^2 + (-5)^2}} = 1 \text{에서}$$

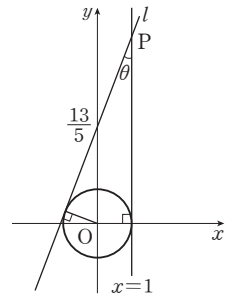
$$5\sqrt{a^2 + 1} = 13, \quad \sqrt{a^2 + 1} = \frac{13}{5}$$

$$a^2 + 1 = \frac{169}{25}, \quad a^2 = \frac{144}{25}$$

$$\therefore a = \frac{12}{5} \quad (\because a > 0)$$

따라서 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{12}{5}$ 이므로

$$\cot \theta = \frac{12}{5} \quad \therefore \tan \theta = \frac{5}{12}$$



19

$\angle CAD = \angle CAE = \theta$, $\overline{AB} = a$ 라 하면 $\triangle ABC$ 는 직각 이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{2}a$$

또한, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{AE} = \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta}$$

$$= \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\sqrt{2}a}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\overline{AD} = \frac{a}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta}$$

$$= \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + \sin \theta)} = \frac{\sqrt{2}a}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\overline{AE}-\overline{AD}}{\overline{AC}} &= \frac{\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta+\sin\theta}}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta+\sin\theta-(\cos\theta-\sin\theta)}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta}{1-2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{2\sin\theta}{1-2\sin^2\theta}=2 \text{ 이므로 } 2\sin\theta=2-4\sin^2\theta$$

$$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$$

$$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2} \quad \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$$

답 ②

20

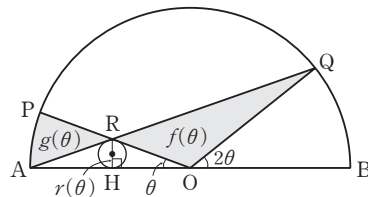
$$\begin{aligned}f(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n-1)x}{\tan(2n+1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2n+3)x}{x} - \frac{\sin(2n-1)x}{x}}{\frac{\tan(2n+1)x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2n+3)x}{(2n+3)x} \times (2n+3) - \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)x} \times (2n-1)}{\frac{\tan(2n+1)x}{(2n+1)x} \times (2n+1)} \\ &= \frac{2n+3-(2n-1)}{2n+1} \\ &= \frac{4}{2n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(2n)}{4n-3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n-3} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = 1\end{aligned}$$

답 1

21



$$\angle QOB=2\theta \text{ 이므로 } \angle QAB=\frac{1}{2} \times 2\theta=\theta$$

즉, $\triangle AOR$ 는 $\overline{AR}=\overline{OR}$ 인 이등변삼각형이다.

위의 그림과 같이 점 R에서 선분 AB에 내린 수선의 발을

H라 하면 $\overline{AO}=1$ 이므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \overline{RH}=\frac{1}{2} \tan \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle AOR &= \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{RH} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \tan \theta = \frac{\tan \theta}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또한, $\overline{AR}=\overline{OR}=\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta}=\frac{1}{2 \cos \theta}$ 이고, 삼각형

AOR의 내접원의 반지름의 길이가 $r(\theta)$ 이므로

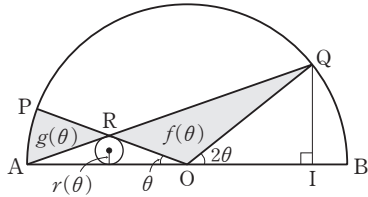
$$\begin{aligned}\triangle AOR &= \frac{1}{2} \times (\overline{AO} + \overline{AR} + \overline{OR}) \times r(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 + 2 \times \frac{1}{2 \cos \theta} \right) \times r(\theta) \\ &= \frac{r(\theta)}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \theta} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$\textcircled{1}=\textcircled{2}$ 이므로

$$\frac{\tan \theta}{4} = \frac{r(\theta)}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{\tan \theta}{2\left(1 + \frac{1}{\cos \theta}\right)} = \frac{\sin \theta}{2(\cos \theta + 1)}$$

한편, 다음 그림과 같이 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$$\overline{QI} = \sin 2\theta \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \triangle AOQ - \triangle AOR \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{QI} - \frac{\tan \theta}{4} \quad (\because \text{㉑}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \sin 2\theta - \frac{\tan \theta}{4} \\ &= \frac{2 \sin 2\theta - \tan \theta}{4} \end{aligned}$$

또한, 부채꼴 POA의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta = \frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} g(\theta) &= (\text{부채꼴 POA의 넓이}) - \triangle AOR \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\tan \theta}{4} \quad (\because \text{㉑}) \\ &= \frac{2\theta - \tan \theta}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{r(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{2 \sin 2\theta - \tan \theta}{4} - \frac{2\theta - \tan \theta}{4}}{\frac{\sin \theta}{2(\cos \theta + 1)}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(\sin 2\theta - \theta)(\cos \theta + 1)}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ (\cos \theta + 1) \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2 - 1 \right) \times \frac{\theta}{\sin \theta} \right\} \\ &= (1+1) \times (1 \times 2 - 1) \times 1 = 2 \end{aligned}$$

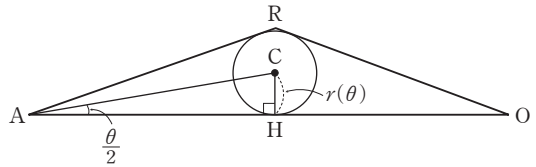
답 2

다른풀이

$$\angle QOB = 2\theta \text{이므로 } \angle QAB = \frac{1}{2} \times 2\theta = \theta$$

즉, $\triangle AOR$ 는 $\overline{AR} = \overline{OR}$ 인 이등변삼각형이므로 다음 그림과 같이 삼각형 AOR의 내접원의 중심을 C라 하고, 내접원의 중심 C에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle CAH = \frac{\theta}{2} \quad \therefore r(\theta) = \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}$$



또한,

$$\begin{aligned} f(\theta) - g(\theta) &= \{f(\theta) + \triangle AOR\} - \{g(\theta) + \triangle AOR\} \\ &= \triangle AOQ - (\text{부채꼴 AOP의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \theta \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta) - g(\theta)}{r(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \theta}{\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

22

$f(x) = x \sin x$ 에서

$f'(x) = \sin x + x \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{3}\pi\right) &= \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k}{3}\pi + \frac{k}{3}\pi \cos \frac{k}{3}\pi \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{3}\pi + \sum_{k=1}^n \frac{k}{3}\pi \cos \frac{k}{3}\pi \\ &= 10\pi \end{aligned}$$

즉, $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{3}\pi = 0$ 이므로 $n = 6m$ 또는 $n = 6m - 1$ 이다.
(단, m 은 자연수)

(i) $n = 6m$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{3}\pi\right) &= \sum_{k=1}^{6m} \frac{k}{3}\pi \cos \frac{k}{3}\pi \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{6k-5}{3}\pi \times \frac{1}{2} - \frac{6k-4}{3}\pi \times \frac{1}{2} - \frac{6k-3}{3}\pi \right. \\ &\quad \left. - \frac{6k-2}{3}\pi \times \frac{1}{2} + \frac{6k-1}{3}\pi \times \frac{1}{2} + \frac{6k}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{6k-5}{3} - \frac{6k-4}{3} - 2 \times (2k-1) - \frac{6k-2}{3} + \frac{6k-1}{3} + 2 \times 2k \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^m 2 = \frac{\pi}{2} \times 2m$$

$$= m\pi = 10\pi$$

$$\therefore m=10$$

(ii) $n=6m-1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{3}\pi\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{6m-1} \frac{k}{3}\pi \cos \frac{k}{3}\pi$$

$$= \sum_{k=1}^{6m} \frac{k}{3}\pi \cos \frac{k}{3}\pi - \frac{6m}{3}\pi \cos \frac{6m}{3}\pi$$

$$= m\pi - 2m\pi \times 1$$

$$= -m\pi = 10\pi$$

$$\therefore m=-10$$

그런데 m 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=10$ 이므로

$$n=6m=6 \times 10=60$$

답 60

보충설명

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \text{에서}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(\pi) = \sin \pi + \pi \times \cos \pi = 0 + \pi \times (-1)$$

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \times \cos \frac{4}{3}\pi$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \sin \frac{5}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi \times \cos \frac{5}{3}\pi$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{3}\pi \times \frac{1}{2}$$

$$f'(2\pi) = \sin 2\pi + 2\pi \times \cos 2\pi = 0 + 2\pi \times 1$$

⋮

위와 같이 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \dots$ 를 대입하면 $f'(x)$

의 값의 규칙을 찾을 수 있다. 이때, 삼각함수의 주기를 고려하면 더 쉽게 접근할 수 있다.

유형
연습

05 여러 가지 미분법

본문 pp.134-152

01-1 (1) $-2, 0$ (2) $\frac{4e}{(e-1)^2}$

01-2 $\frac{1}{3}$

01-3 $-\frac{3}{8}$

02-1 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$

02-2 $-2\sqrt{2}$

03-1 (1) $\frac{84}{11}$ (2) $-2\sqrt{3}$

03-2 $\log_2 5$

04-1 (1) $-\frac{1}{2}\ln 5$ (2) 4

04-2 $\ln 3$

05-1 140

05-2 $\frac{1}{2}$

05-3 2

06-1 $-\frac{1}{2}$

06-2 7

06-3 1

07-1 (1) 2 (2) -104

07-2 $\frac{19\sqrt{2}}{6}$

08-1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 25

08-2 1

09-1 2

09-2 12

10-1 3

01-1

(1) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(2x-1)' \times (x+1) - (2x-1) \times (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2 \times (x+1) - (2x-1) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3}{(x+1)^2}$$

$f'(a) = 3$ 에서 $\frac{3}{(a+1)^2} = 3$

$$(a+1)^2 = 1, a^2 + 2a + 1 = 1$$

$$a^2 + 2a = 0, a(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0$$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1) + f(1) - f(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= -f'(1) - f'(1)$$

$$= -2f'(1)$$

이때, $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x+1)' \times (e^x-1) - (e^x+1) \times (e^x-1)'}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2} \end{aligned}$$

이므로

$$-2f'(1) = -2 \times \frac{-2e}{(e-1)^2} = \frac{4e}{(e-1)^2}$$

답 (1) -2 , 0 (2) $\frac{4e}{(e-1)^2}$

01-2

$f(x) = \frac{ax^2+1}{x+1}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(ax^2+1)' \times (x+1) - (ax^2+1) \times (x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2ax(x+1) - (ax^2+1) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^2+2ax-1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

즉, $f'(1) = \frac{3a-1}{2^2} = 0$ 이므로 $a = \frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

01-3

$g(x) = \frac{1}{2+f(x)}$ 에서

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\{2+f(x)\}^2}$$

$$\therefore g'(1) = -\frac{f'(1)}{\{2+f(1)\}^2} = -\frac{6}{(2+2)^2} = -\frac{3}{8}$$

답 $-\frac{3}{8}$

02-1

(1) $f(x) = \cot x + \tan x$ 에서

$$f'(x) = -\csc^2 x + \sec^2 x \text{이므로}$$

$$-\csc^2 x + \sec^2 x = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 0, \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

즉, $\sin x - \cos x = 0$ 또는 $\sin x + \cos x = 0$ 이므로

$$\tan x = 1 \text{ 또는 } \tan x = -1$$

이때, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan x > 0$

따라서 $\tan x = 1$ 이므로 $x = \frac{\pi}{4}$

(2) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cot x}$ 에서

$$f'(x)$$

$$= \frac{(\sin x + 1)' \times \cot x - (\sin x + 1) \times (\cot x)'}{\cot^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \times \cot x - (\sin x + 1) \times (-\csc^2 x)}{\cot^2 x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \times (-2)}{1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + 2$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$$

답 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2$

02-2

$f(x) = \frac{1 - \tan x}{\cos x}$ 에서

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(1-\tan x)' \times \cos x - (1-\tan x) \times (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{-\sec^2 x \times \cos x - (1-\tan x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{-\sec x + \sin x - \sin x \tan x}{\cos^2 x} \\
 \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 $-2\sqrt{2}$

03-1

(1) $h(x) = f(g(x))$ 이므로 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + 11} = (4x^2 + 2x + 11)^{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4x^2 + 2x + 11)^{-\frac{1}{2}} \times (8x + 2)$$

$$= \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x + 11}}$$

$$= \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 11}}$$

이때, $g(x) = x^2 + 1$ 에서 $g'(x) = 2x$ 이므로

$$g(2) = 2^2 + 1 = 5, \quad g'(2) = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore h'(2) = f'(g(2))g'(2)$$

$$= f'(5) \times 4$$

$$= \frac{4 \times 5 + 1}{\sqrt{4 \times 5^2 + 2 \times 5 + 11}} \times 4$$

$$= \frac{84}{11}$$

(2) $f(\cos x) = \sin 2x + \tan x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(\cos x) \times (-\sin x) = 2\cos 2x + \sec^2 x$$

$$\therefore f'(\cos x) = -\frac{2\cos 2x + \sec^2 x}{\sin x}$$

($\because 0 < \sin x < 1$)

이 식의 양변에 $x = \frac{\pi}{3}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{2\cos \frac{2}{3}\pi + \sec^2 \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \\
 &= -\frac{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= -\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{84}{11}$ (2) $-2\sqrt{3}$

03-2

조건 (가)에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(2+4h) - g(2)}{4h} \times 4 \right\} \\
 &= 4g'(2) = 8
 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(2) = 2$$

이때, $\{(f \circ g)(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

조건 (나)에서

$$f'(g(2)) \times g'(2) = 10$$

$$\therefore f'(g(2)) = 5$$

$$\text{그런데 } f'(x) = \frac{2^x}{\ln 2} \times \ln 2 = 2^x \text{이므로}$$

$$f'(g(2)) = 2^{g(2)} = 5 \quad \therefore g(2) = \log_2 5$$

답 $\log_2 5$

04-1

(1) 곡선 $y = \ln(\cos x)$ 위의 점 (k, a) ($0 < k < \frac{\pi}{2}$)에 대

하여

$$a = \ln(\cos k) \quad \therefore \cos k = e^a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ 이고, 점 (k, a) 에서의

곡선의 접선의 기울기가 -2 이므로

$$-\tan k = -2 \quad \therefore \tan k = 2$$

$$0 < k < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\cos k = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } e^a = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

$$a = \ln \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{2} \ln 5$$

(2) $f(3x+1) = \ln(3x^2-11)+1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

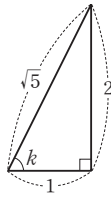
$$f'(3x+1) \times 3 = \frac{1}{3x^2-11} \times 6x$$

$$\therefore f'(3x+1) = \frac{2x}{3x^2-11}$$

이 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(7) = \frac{2 \times 2}{3 \times 2^2 - 11} = 4$$

$$\text{답 (1)} -\frac{1}{2} \ln 5 \quad (2) 4$$



04-2

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{즉, } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{에서}$$

$$f(0) = \ln 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(4x+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \times 3^{2x} + b) = a + b$$

$$\text{이므로 } a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(4h+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(4h+1)}{4h} \times 4 = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a \times 3^{2h} + b}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a \times 3^{2h} - a}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(9^h - 1)}{h} \\ &= a \ln 9 = 2a \ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2a \ln 3 = 4 \quad \therefore a = \frac{2}{\ln 3}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } b = -\frac{2}{\ln 3} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{\ln 3}{2} - \left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \ln 3$$

답 $\ln 3$

다른풀이

$$f'(x) = \begin{cases} a \times 3^{2x} \times \ln 3 \times 2 & (x < 0) \\ \frac{1}{4x+1} \times 4 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2a \ln 3 \times 3^{2x} & (x < 0) \\ \frac{4}{4x+1} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{4x+1} = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a \ln 3 \times 3^{2x}) = 2a \ln 3$$

$$\text{이므로 } 4 = 2a \ln 3 \quad \therefore a = \frac{2}{\ln 3}$$

05-1

$$x = e^t - e^{-t} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$$

$$y = e^t - 3e^{-t} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = e^t + 3e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + 3e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

$$\frac{e^t + 3e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{6}{5} \text{에서}$$

$$6e^t + 6e^{-t} = 5e^t + 15e^{-t}$$

$$e^t = 9e^{-t}, \quad e^{2t} = 9$$

$$\therefore e^t = 3 \quad (\because e^t > 0)$$

$$\text{따라서 } a = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}, \quad b = 3 - 3 \times \frac{1}{3} = 2 \text{이므로}$$

$$30(a+b) = 30\left(\frac{8}{3} + 2\right) = 30 \times \frac{14}{3} = 140$$

답 140

05-2

$x=1$ 일 때, $\tan \theta = 1$ 이므로

$$\theta = \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편,

$$x = \tan \theta \text{에서 } \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$$y = k \cos^2 \theta \text{에서}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2k \cos \theta \times (-\sin \theta) = -2k \sin \theta \cos \theta$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2k \sin \theta \cos \theta}{\sec^2 \theta} = -2k \sin \theta \cos^3 \theta$$

따라서 $x=1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$-2k \sin \frac{\pi}{4} \cos^3 \frac{\pi}{4} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= -2k \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3$$

$$= -\frac{k}{2}$$

$$\text{즉, } -\frac{k}{2} = -\frac{1}{4} \text{이므로 } k = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

05-3

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{f\left(\frac{3}{2}-h\right) - f\left(\frac{3}{2}+h\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f\left(\frac{3}{2}-h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}+h\right)}{4h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f\left(\frac{3}{2}-h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{4h} - \frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{4h}} \\ &= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{3}{2}-h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{-h} \times \left(-\frac{1}{4}\right) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{h} \times \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{4}f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}f'\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{2}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

한편,

$$x = 2 + \sin t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = \cos t$$

$$y = \cos^2 t - \cos 2t \text{에서}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos t \times (-\sin t) + 2 \sin 2t$$

$$= -2 \cos t \sin t + 2 \sin 2t$$

$$= -2 \cos t \sin t + 4 \sin t \cos t$$

$$= 2 \sin t \cos t$$

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2 \sin t$$

또한, $x = 2 + \sin t$ 에 $x = \frac{3}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{3}{2} = 2 + \sin t, \quad \sin t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

따라서 구하는 극한값은

$$-\frac{2}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

답 2

보충설명

$$y = \cos^2 t - \cos 2t \text{에서}$$

$$y = 1 - \sin^2 t - (1 - 2 \sin^2 t) = \sin^2 t$$

이때, $x = 2 + \sin t$, 즉 $\sin t = x - 2$ 이므로

$$y = (x - 2)^2$$

즉, $f(x) = (x - 2)^2$ 이고 $f'(x) = 2(x - 2)$ 이므로

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

06-1

$e^x - e^{ay} = y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x - a e^{ay} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$(1 + a e^{ay}) \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+ae^{ax}} \quad (\text{단, } 1+ae^{ax} \neq 0)$$

이때, 곡선 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$\frac{e^0}{1+a \times e^0} = \frac{1}{1+a} = 2, \quad 2+2a=1$$

$$2a = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

06-2

$x^2 - y^2 - y = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2y+1) \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y+1} \quad \left(\text{단, } y \neq -\frac{1}{2} \right)$$

이때, 점 $A(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{2}{15}a$ 이므로

$$\frac{2a}{2b+1} = \frac{2}{15}a, \quad 15a = a(2b+1)$$

$$a(2b-14) = 0, \quad a(b-7) = 0$$

$$\therefore b = 7 \quad (\because a \neq 0)$$

답 7

풀이첨삭

$x^2 - y^2 - y = 1$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$-y^2 - y = 1 \quad \therefore y^2 + y + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

이므로 $x=0$ 일 때 조건을 만족시키는 실수 y 의 값은 없다.

즉, 주어진 곡선 위에는 x 좌표가 0인 점이 존재하지 않으므로

* $a \neq 0$ 이다.

06-3

$x^2 - 2y^2 - 4x + 2y = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 4y \frac{dy}{dx} - 4 + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(4y-2) \frac{dy}{dx} = 2x-4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x-4}{4y-2} = \frac{x-2}{2y-1} \quad \left(\text{단, } y \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{즉, } \frac{x-2}{2y-1} = 2 \text{에서 } x-2=4y-2$$

$$\therefore x=4y$$

이 식을 $x^2 - 2y^2 - 4x + 2y = 1$ 에 대입하면

$$(4y)^2 - 2y^2 - 4 \times 4y + 2y = 1$$

$$16y^2 - 2y^2 - 16y + 2y - 1 = 0$$

$$\therefore 14y^2 - 14y - 1 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 두 점 A, B의 y 좌표이므로 두 점의 y 좌표의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-14}{14} = 1$$

답 1

07-1

(1) $y = x^{\ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = (\ln x)^2$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= y \times \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \times \frac{2 \ln x}{x} \\ &= 2x^{\ln x - 1} \ln x \end{aligned}$$

따라서 $x=e$ 에서의 미분계수는

$$2e^{\ln e - 1} \ln e = 2$$

(2) $f(x) = \frac{(x+2)^2(x+1)}{(x-1)^3}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned} \ln |f(x)| &= \ln \left| \frac{(x+2)^2(x+1)}{(x-1)^3} \right| \\ &= 2 \ln |x+2| + \ln |x+1| - 3 \ln |x-1| \end{aligned}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{-8x-10}{(x+2)(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \times \frac{-8x-10}{(x+2)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-2(4x+5)(x+2)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2) = \frac{-2 \times 13 \times 4}{1^4} = -104$$

답 (1) 2 (2) -104

07-2

$$f(1) = \frac{1 \times \sqrt{1+1}}{(1-2)^2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} \text{의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면}$$

$$\ln|f(x)| = \frac{2}{3} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 2\ln|x-2|$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{2}{3x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x-2} \end{aligned}$$

이 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(1)}{f(1)} &= \frac{2}{3 \times 1} + \frac{1}{1+1} - \frac{2}{1-2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f(1) = \sqrt{2} \text{이므로 } f'(1) = \frac{19\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{답 } \frac{19\sqrt{2}}{6}$$

08-1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 극한값이 존재}$$

하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-1\} = 0$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)-1\} = g(0)-1 \text{이므로 } g(0)=1$$

$$\therefore f(1)=0$$

또한, 함수 $g(x)$ 가 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$$

$$\therefore g'(0)=2$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{g'(f(1))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$(2) g(1)=a \text{라 하면 } f(a)=1 \text{에서}$$

$$\tan 2a=1, 2a = \frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < 2a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{8} \quad \therefore g(1) = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{이때, } f'(x) = 2\sec^2 2x \text{에서 } f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$$

이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 100g'(1) = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} \quad (2) 25$$

08-2

$$g(2)=a \text{라 하면 } f(a+1)=2 \text{에서}$$

$$\sqrt{(a+1)^3} + (a+1) + 2 = 2$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$a^3 + 3a^2 + 4a + 4 = 4, \quad a^3 + 3a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 + 3a + 4) = 0 \quad \therefore a = 0 \quad (\because a^2 + 3a + 4 > 0)$$

$$\therefore g(2) = 0$$

또한,

$$f(x+1) = \sqrt{(x+1)^3} + x + 1 + 2 = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 4}$$

이므로

$$f'(x+1) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{2\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(2) &= \frac{1}{f'(g(2)+1)} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{2 \times 2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 1$$

풀이첨삭

*에서 함수 $f(x+1)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(g(x)+1) = x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x)+1)g'(x) = 1 \text{이므로}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)+1)} \quad \therefore g'(2) = \frac{1}{f'(g(2)+1)}$$

다른풀이

함수 $f(x+1)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(x+1)) = x$$

위의 식의 양변을 미분하면

$$g'(f(x+1))f'(x+1)=1$$

이때, $f(1)=2$ 이므로 위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1)=1 \quad \therefore g'(2)f'(1)=1$$

$$\text{따라서 } f'(x)=\frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x+2}} \text{에서 } f'(1)=1 \text{이므로}$$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=1$$

09-1

$$f(x)=e^{ax+b}\sin x \text{에서}$$

$$f'(x)=(e^{ax+b})' \times \sin x + e^{ax+b} \times (\sin x)'$$

$$=ae^{ax+b}\sin x + e^{ax+b}\cos x$$

$$=(a\sin x + \cos x)e^{ax+b}$$

$$\text{이므로 } f'(0)=(0+1) \times e^b=e^b$$

$$\text{즉, } e^b=e \text{이므로 } b=1$$

$$f''(x)=(a\sin x + \cos x)' \times e^{ax+1}$$

$$+ (a\sin x + \cos x) \times (e^{ax+1})'$$

$$=(a\cos x - \sin x)e^{ax+1} + a(a\sin x + \cos x)e^{ax+1}$$

$$=\{(a^2-1)\sin x + 2a\cos x\}e^{ax+1}$$

$$\text{이므로 } f''(0)=(0+2a) \times e=2ae$$

$$\text{즉, } 2ae=4e \text{이므로 } a=2$$

$$\therefore ab=2 \times 1=2$$

답 2

09-2

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(1)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{x-2} \quad (\because \text{조건 (㉠)})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} \times \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right\}$$

$$= f''(f(2)) \times f'(2) = 4$$

이므로 조건 (㉠)에서

$$f''(1) \times 3 = 4 \quad \therefore f''(1) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 9f''(1) = 9 \times \frac{4}{3} = 12$$

답 12

10-1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(f(x)) - g'(2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(f(x)) - g'(f(1))}{x-1} \quad (\because f(1)=2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g'(f(x)) - g'(f(1))}{f(x) - f(1)} \times \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right\}$$

$$= g''(f(1)) \times f'(1)$$

$$= g''(2) \quad (\because f'(1)=1)$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고, 조건 (나)의 $f(1)=2$

에서 $g(2)=1$ 이므로

$$g''(2) = -\frac{f''(g(2))}{\{f'(g(2))\}^3} = -\frac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3} = -\frac{-3}{1^3} = 3$$

따라서 구하는 값은 3이다.

답 3



개 념 마 무 리

본문 pp.153~156

01 $\frac{2}{e^2}$

02 0

03 -8

04 ③

05 ①

06 26

07 $\frac{1}{4}$

08 ③

09 $\frac{20}{\pi}$

10 0

11 3

12 ④

13 0

14 ②

15 ③

16 2

17 $2\sqrt{3}-4$

18 0

19 $8\pi^2$

20 $\frac{48}{11}$

21 5

22 49

23 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

24 $\frac{9}{5}$

01

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2}=5 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 극한값이 존재하고}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\}=0$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\}=f(2)-3 \text{이므로 } f(2)=3$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5 \text{이므로}$$

$$f'(2)=5$$

한편, $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 에서

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \times e^x - f(x) \times (e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{\{f'(x) - f(x)\} \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \\ \therefore g'(2) &= \frac{f'(2) - f(2)}{e^2} = \frac{5-3}{e^2} = \frac{2}{e^2} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{e^2}$

02

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{(x+k)^k} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+3)^3} + \cdots + \frac{10}{(x+10)^{10}} \end{aligned}$$

이므로

$$f(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^9} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

또한,

$$\left\{ \frac{k}{(x+k)^k} \right\}' = -\frac{k \times k(x+k)^{k-1}}{(x+k)^{2k}} = -\frac{k^2}{(x+k)^{k+1}}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2^2}{(x+2)^3} - \frac{3^2}{(x+3)^4} \\ &\quad \cdots - \frac{10^2}{(x+10)^{11}} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = -1 - \frac{2^2}{3^3} - \frac{3^2}{4^4} - \cdots - \frac{10^2}{11^{11}}$$

$$= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{10^9} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(0) = -f'(0)$ 이므로

$$f(0) + f'(0) = 0$$

답 0

03

$(4\csc^2 x + 2\cot x - 3)f(x) = 8\cot^3 x - 1$ 에서 *

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8\cot^3 x - 1}{4\csc^2 x + 2\cot x - 3} \\ &= \frac{8\cot^3 x - 1}{4(\cot^2 x + 1) + 2\cot x - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2\cot x - 1)(4\cot^2 x + 2\cot x + 1)}{4\cot^2 x + 2\cot x + 1} \\ &= 2\cot x - 1 \end{aligned}$$

이므로 $f'(x) = -2\csc^2 x$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} = -2 \times 4 = -8$$

답 -8

풀이첨삭

함수 $f(x)$ 의 정의역이 $\{x \mid 0 < x < \pi\}$ 이므로

$\cot x = t$ (t 는 모든 실수)로 놓으면

$$\begin{aligned} 4\csc^2 x + 2\cot x - 3 &= 4(\cot^2 x + 1) + 2\cot x - 3 \\ &= 4\cot^2 x + 2\cot x + 1 \\ &= 4t^2 + 2t + 1 \\ &= 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{aligned}$$

즉, *의 양변을 $4\csc^2 x + 2\cot x - 3$ 으로 나눌 수 있다.

04

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 조건 ㉠에서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$

이때, 조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h)) - f(g(-h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h)) - f(g(0)) + f(g(0)) - f(g(-h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h)) - f(g(0))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(-h)) - f(g(0))}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(h)) - f(g(0))}{g(h) - g(0)} \times \frac{g(h) - g(0)}{h} \right\} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(-h)) - f(g(0))}{g(-h) - g(0)} \times \frac{g(-h) - g(0)}{-h} \right\} \\ &= f'(g(0))g'(0) + f'(g(0))g'(0) \\ &= 2f'(g(0))g'(0) \\ &= 2f'(0) \times 4 = 8 \quad (\because \text{조건 ㉠}) \\ \therefore f'(0) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ③

05

다항식 $(x^3-1)^4$ 을 $(x^2-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$ 이므로

$$R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 상수})$$

라 하고, 이때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$(x^3-1)^4 = (x^2-1)^2 Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\text{㉠에 } x=1 \text{을 대입하면 } a+b+c+d=0 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$(-2)^4 = -a+b-c+d$$

$$\therefore a-b+c-d = -16 \quad \cdots \text{㉢}$$

$$\text{㉡} + \text{㉢을 하면 } 2a+2c = -16$$

$$\therefore a+c = -8 \quad \cdots \text{㉣}$$

한편, ㉠의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} 4(x^3-1)^3 \times 3x^2 &= 2(x^2-1) \times 2x \times Q'(x) \\ &\quad + (x^2-1)^2 Q''(x) + 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned} \quad \cdots \text{㉤}$$

$$\text{㉤에 } x=1 \text{을 대입하면 } 3a+2b+c=0 \quad \cdots \text{㉥}$$

$$\text{㉤에 } x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$4 \times (-2)^3 \times 3 = 3a - 2b + c$$

$$\therefore 3a - 2b + c = -96 \quad \cdots \text{㉦}$$

$$\text{㉥} - \text{㉦을 하면 } 4b = 96 \quad \therefore b = 24$$

$$\text{㉥} + \text{㉦을 하면 } 6a + 2c = -96$$

$$\therefore 3a + c = -48 \quad \cdots \text{㉧}$$

$$\text{㉣, ㉧을 연립하여 풀면}$$

$$a = -20, c = 12$$

$$\text{따라서 } R'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = -60x^2 + 48x + 12 \text{이므로}$$

$$R'(2) = -60 \times 4 + 48 \times 2 + 12 = -132$$

답 ①

다른풀이

다항식 $(x^3-1)^4$ 을 $(x^2-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 $R(x)$ 이므로

$$(x^3-1)^4 = (x^2-1)^2 Q(x) + R(x) \quad \cdots \text{㉨}$$

이때, ㉨에서 좌변이 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 우변도 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어져야 한다.

$$\therefore R(x) = (x-1)^2(px+q) \quad (\text{단, } p, q \text{는 상수})$$

즉, ㉨에서

$$\begin{aligned} (x-1)^4(x^2+x+1)^4 &= (x+1)^2(x-1)^2 Q(x) + (x-1)^2(px+q) \\ (x-1)^2(x^2+x+1)^4 &= (x+1)^2 Q(x) + px+q \end{aligned} \quad \cdots \text{㉩}$$

㉨에 $x=-1$ 을 대입하면

$$4 = -p+q \quad \therefore q = p+4 \quad \cdots \text{㉪}$$

㉨의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 2(x-1)(x^2+x+1)^4 + 4(x-1)^2(2x+1)(x^2+x+1)^3 \\ = 2(x+1)Q'(x) + (x+1)^2 Q''(x) + p \end{aligned}$$

이 식에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-20 = p$$

$$\text{이것을 ㉪에 대입하면 } q = -16$$

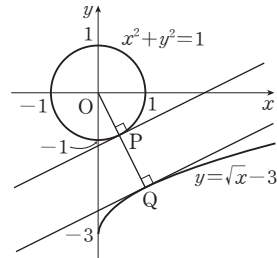
따라서

$$R(x) = (x-1)^2(-20x-16) = -4(x-1)^2(5x+4)$$

$$\text{이므로 } R'(x) = -8(x-1)(5x+4) - 20(x-1)^2$$

06

다음 그림과 같이 원점을 O라 할 때, 선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 선분 OQ와 원 $x^2+y^2=1$ 의 교점이 P이어야 하고, 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\sqrt{x}-3$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기가 같아야 한다.



$$y = \sqrt{x} - 3 \text{에서 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

곡선 $y = \sqrt{x} - 3$ 위의 점 Q의 좌표를 $(t, \sqrt{t} - 3)$ 이라 하면 곡선 위의 점 Q에서의 접선과 직선 OQ는 수직이므로

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{\sqrt{t}-3}{t} = -1$$

$$2(\sqrt{t})^3 + \sqrt{t} - 3 = 0$$

$$(\sqrt{t}-1)(2t+2\sqrt{t}+3) = 0 \quad \therefore t = 1$$

$$\therefore Q(1, -2)$$

$$\text{즉, } \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} - 1 = \sqrt{5} - 1 \text{이므로}$$

$$a = 5, b = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + 1^2 = 26$$

답 26

다른풀이

점 Q의 좌표를 $(t^2, t-3)$ 이라 하면

$$\overline{OQ} = \sqrt{(t^2)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$$

$f(t) = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$ 라 하면

$$f'(t) = \frac{4t^3 + 2t - 6}{2\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}} = \frac{2t^3 + t - 3}{\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}}$$

$f'(t) = 0$ 에서 $2t^3 + t - 3 = 0$

$$(t-1)(2t^2 + 2t + 3) = 0$$

$$\therefore t = 1$$

함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(t)$ 의 최솟값은 $f(1) = \sqrt{5}$

따라서 $\overline{OQ}$ 의 길이의 최솟값이 $\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5} - 1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + 1^2 = 26$$

07

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $g(b) = \lim_{x \rightarrow b+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$ 에서

$$g(b) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow b+} g(x) = \lim_{x \rightarrow b+} \{f(x) - a\} = f(b) - a,$$

$$\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b-} 0 = 0$$

$$\text{이므로 } f(b) - a = 0$$

$$\therefore f(b) = a \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

또한, 함수 $g(x)$ 가 $x=b$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{f(b+h) - a\} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad (\because \textcircled{가}) \\ &= f'(b), \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = 0$$

$$\text{이므로 } f'(b) = 0$$

$f(x) = xe^{-2x+1}$ 에서

$$f'(x) = e^{-2x+1} - 2xe^{-2x+1} = (1-2x)e^{-2x+1}$$

이므로

$$f'(b) = (1-2b)e^{-2b+1} = 0 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{이므로 } \textcircled{가} \text{에서}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(다)
답 $\frac{1}{4}$

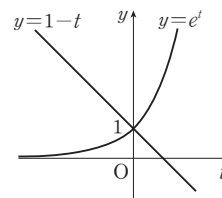
단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $g(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속임을 이용하여 $f(b)$ 를 a 에 대하여 나타낸 경우	30%
(나)	함수 $g(x)$ 가 $x=b$ 에서 미분가능함을 이용하여 $f'(b)$ 의 값을 구한 경우	40%
(다)	상수 a, b 의 값을 각각 구한 후 ab 의 값을 구한 경우	30%

08

$x=1$ 일 때, $1=t+e^t$ 이므로

$$e^t = 1-t$$

이때, 곡선 $y=e^t$ 과 직선 $y=1-t$ 는 다음 그림과 같으므로 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.



즉, $x=1$ 일 때의 t 의 값은 0이다.

한편,

$$x=t+e^t \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 1+e^t,$$

$$y=t^2+n \ln(t+1) \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 2t + \frac{n}{t+1}$$

이므로

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + \frac{n}{t+1}}{1+e^t} \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$f'(1)$ 의 값은 $\textcircled{가}$ 에 $t=0$ 을 대입하여 구한 값과 같으므로

$$f'(1) = \frac{2 \times 0 + \frac{n}{0+1}}{1+e^0} = \frac{n}{2}$$

$$f'(1) > 4 \text{에서 } \frac{n}{2} > 4 \quad \therefore n > 8$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 9이다.

답 ③

09

$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$ 에 $T=4\pi$ 를 대입하면

$$4\pi=2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}, \sqrt{\frac{L}{10}}=2$$

$$\frac{L}{10}=4 \quad \therefore L=40$$

즉, $T=4\pi$ 일 때 $L=40$ 이다.

또한, $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$ 의 양변을 T 에 대하여 미분하면

$$1=2\pi \times \frac{\frac{1}{10}}{2\sqrt{\frac{L}{10}}} \times \frac{dL}{dT}$$

$$\therefore \frac{dL}{dT}=\frac{10}{\pi}\sqrt{\frac{L}{10}}$$

따라서 $L=40$ 일 때,

$$\frac{dL}{dT}=\frac{10}{\pi}\sqrt{\frac{40}{10}}=\frac{20}{\pi}$$

답 $\frac{20}{\pi}$

다른풀이

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}\text{에서 } \sqrt{\frac{L}{10}}=\frac{T}{2\pi}$$

$$\frac{L}{10}=\frac{T^2}{4\pi^2} \quad \therefore L=\frac{5}{2\pi^2}T^2$$

위의 식을 T 에 대하여 미분하면

$$\frac{dL}{dT}=\frac{5}{\pi^2}T$$

따라서 $T=4\pi$ 일 때의 $\frac{dL}{dT}$ 의 값은

$$\frac{5}{\pi^2} \times 4\pi = \frac{20}{\pi}$$

10

$2x^2-xy+y^2=4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x-y-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=4x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4x-y}{x-2y} \quad (\text{단, } x \neq 2y)$$

이때, 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{4x-y}{x-2y}=1, \quad 4x-y=x-2y$$

$$\therefore y=-3x$$

즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=-3x$ 위에 있으므로 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-3x$$

따라서 구하는 y 절편은 0이다.

답 0

11

직선 OP의 기울기가 $\sqrt{3}$ 일 때의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

$$\frac{y_1}{x_1}=\sqrt{3}\text{이므로 } y_1=\sqrt{3}x_1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

점 P는 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위에 있으므로

$$x_1^2+(y_1-1)^2=1$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2+(\sqrt{3}x_1-1)^2=1, \quad x_1^2+3x_1^2-2\sqrt{3}x_1+1=1$$

$$4x_1^2-2\sqrt{3}x_1=0, \quad 2x_1(2x_1-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x_1=0 \text{ 또는 } x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

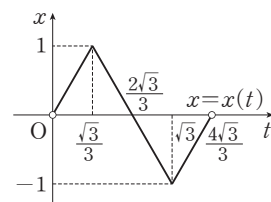
이때, 점 P는 원점이 아니므로

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1=\frac{3}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

한편, 출발한 지 t 초 후의 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P의 x 좌표가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 매초 $\sqrt{3}$ 의 일정한 속력으로 변하므로

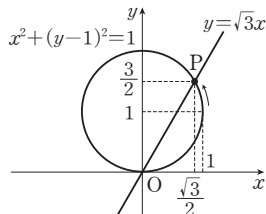
$$\left|\frac{dx}{dt}\right|=\sqrt{3} \quad \therefore \frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{3}$$

이때, 점 P가 원점 O를 출발하여 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 을 따라 시계 반대 방향으로 한 바퀴 움직일 때, 출발한 지 t 초 후의 점 P의 x 좌표를 $x(t)$ 라 하면 함수 $x(t)$ 는 연속이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore x(t) = \begin{cases} \sqrt{3}t & (0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3}) \\ -\sqrt{3}t + 2 & (\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t < \sqrt{3}) \\ \sqrt{3}t - 4 & (\sqrt{3} \leq t < \frac{4\sqrt{3}}{3}) \end{cases} \dots\dots \textcircled{C}$$

이때, 오른쪽 그림과 같이 직선 OP의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이 되는 순간에서의 점 P의 좌표가 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ 이고, $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일



때 점 P의 x좌표는 1이므로

직선 OP의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이 되는 시각을 t_1 이라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < t_1 < \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\sqrt{3} \quad (\because \textcircled{C})$$

또한, 점 P는 원 위에 있으므로 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2(y-1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y-1} = \frac{x}{1-y} \quad (\text{단, } y \neq 1)$$

따라서 직선 OP의 기울기가 $\sqrt{3}$ 일 때, 즉 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$

일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하면

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\text{이때, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = 3$$

답 3

12

$x^{2y} - y^{2x} = 0$, 즉 $x^{2y} = y^{2x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$2y \ln x = 2x \ln y$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2 \ln x \frac{dy}{dx} + 2y \times \frac{1}{x} = 2 \ln y + 2x \times \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

$$\left(\ln x - \frac{x}{y} \right) \frac{dy}{dx} = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}} \quad \left(\text{단, } \ln x \neq \frac{x}{y} \right)$$

따라서 점 (4, 2)에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\ln 2 - \frac{2}{4}}{\ln 4 - \frac{4}{2}} = \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2 \ln 2 - 2} = \frac{2 \ln 2 - 1}{4(\ln 2 - 1)}$$

답 ④

13

$x > 0$ 이므로 $f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^3+1}$ 의 양변에 자연로그

를 취하면

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^3+1} \\ &= \ln(x+1) + \ln(x^2+1) - \ln(x^3+1) \end{aligned}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{x^3+1}$$

이때, $f(x)g(x) = f'(x)$ 에서 $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{x^3+1} \\ \therefore g(1) &= \frac{1}{1+1} + \frac{2 \times 1}{1+1} - \frac{3 \times 1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

답 0

다른풀이

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^3+1} \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

또한,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{x^2-x+1+x}{x^2-x+1} \\ &= 1 + \frac{x}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

에서

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{-1 + 1}{(1 - 1 + 1)^2} = 0$$

따라서 $f(x)g(x) = f'(x)$ 에서 $f(1)g(1) = f'(1)$ 이므로

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{0}{2} = 0$$

14

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\sqrt{2}+h) - g(\sqrt{2}-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\sqrt{2}+h) - g(\sqrt{2}) + g(\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(\sqrt{2}+h) - g(\sqrt{2})}{h} + \frac{g(\sqrt{2}) - g(\sqrt{2}-2h)}{-2h} \times 2 \right\}$$

$$= g'(\sqrt{2}) + 2g'(\sqrt{2})$$

$$= 3g'(\sqrt{2}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$g(\sqrt{2}) = a$ 라 하면 $f(a) = \sqrt{2}$ 에서

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos a\right) = \sqrt{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos a\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 < \frac{\pi}{2} \cos a < \frac{\pi}{2}$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{2} \cos a = \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \cos a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3}$$

한편,

$$f'(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) \times \frac{\pi}{2} \times (-\sin x)$$

$$= -\pi \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\pi \sin \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \pi$$

$$\therefore g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(g(\sqrt{2}))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{6}\pi} = -\frac{2\sqrt{6}}{3\pi}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3g'(\sqrt{2}) = 3 \times \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3\pi}\right) = -\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$$

$$\text{이므로 } k = -2\sqrt{6} \quad \therefore k^2 = 24$$

답 ②

15

함수 $f(x)$ 의 역함수 $g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 에 대하여

$$g\left(\frac{x+1}{2}\right) = h(x) \text{라 하면}$$

$$h(1) = g(1) = 3$$

$$\text{또한, } g'\left(\frac{x+1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = h'(x) \text{이므로}$$

$$g'\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2h'(x)$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로

$$g'(1) = 2h'(1) = \frac{2}{f'(h(1))} = \frac{2}{f'(3)} = \frac{2}{2} = 1$$

답 ③

다른풀이

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ 이므로

$$f\left(g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'\left(g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) g'\left(\frac{x+1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 1$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2} f'(g(1)) g'(1) = 1$$

$$\therefore g'(1) = \frac{2}{f'(g(1))} = \frac{2}{f'(3)} = \frac{2}{2} = 1$$

16

$y = e^{-x} \sin x$ 에서

$$y' = (e^{-x})' \sin x + e^{-x} (\sin x)'$$

$$= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$= e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= (e^{-x})'(\cos x - \sin x) + e^{-x}(\cos x - \sin x)' \\
 &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) \\
 &= e^{-x}(-2\cos x) \\
 &= -2e^{-x}\cos x
 \end{aligned}$$

이므로 $y'' + ay' + 2y = 0$ 에서

$$-2e^{-x}\cos x + ae^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0$$

$$e^{-x}(-2\cos x + a\cos x - a\sin x + 2\sin x) = 0$$

$$e^{-x}\{(a-2)\cos x - (a-2)\sin x\} = 0$$

$$\therefore (a-2)e^{-x}(\cos x - \sin x) = 0$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a = 2$$

답 2

17

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}-h\right)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}-h\right)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'\left(\frac{\pi}{6}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} \times \frac{1}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{f'\left(\frac{\pi}{6}-h\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{-h} \times \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

이때, $f(x) = \ln(\cos x + 1)$ 에서

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \text{ 이므로}$$

$$f''(x) = \frac{-\cos x \times (\cos x + 1) - (-\sin x)^2}{(\cos x + 1)^2}$$

$$= \frac{-\cos^2 x - \cos x - \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)^2}$$

$$= -\frac{1}{\cos x + 1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{6} + 1} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} \\
 &= 2\sqrt{3} - 4
 \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3} - 4$

18

$f(x) = (x^2 + kx + 2)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = (x^2 + kx + 2)' \times e^{-x} + (x^2 + kx + 2) \times (e^{-x})'$$

$$= (2x + k)e^{-x} - (x^2 + kx + 2)e^{-x}$$

$$= \{-x^2 + (2-k)x + k-2\}e^{-x}$$

이므로

$$f''(x) = \{-x^2 + (2-k)x + k-2\}' \times e^{-x}$$

$$+ \{-x^2 + (2-k)x + k-2\} \times (e^{-x})'$$

$$= (-2x + 2 - k)e^{-x}$$

$$- \{-x^2 + (2-k)x + k-2\}e^{-x}$$

$$= \{x^2 + (k-4)x + 4-2k\}e^{-x}$$

$$f''(x) \geq 0 \text{에서 } \{x^2 + (k-4)x + 4-2k\}e^{-x} \geq 0$$

이때, $e^{-x} > 0$ 이므로

$$x^2 + (k-4)x + 4-2k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + 4-2k = 0$ 이 중근이나 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (k-4)^2 - 4(4-2k) \leq 0$$

$$k^2 - 8k + 16 - 16 + 8k \leq 0, \quad k^2 \leq 0 \quad \therefore k = 0$$

답 0

다른풀이

$f(x) = (x^2 + kx + 2)e^{-x}$ 이므로

$$e^x f(x) = x^2 + kx + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = 2x + k$$

$$\therefore e^x \{f'(x) + f(x)\} = 2x + k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x \{f'(x) + f(x)\} + e^x \{f''(x) + f'(x)\} = 2$$

$$\therefore e^x \{f''(x) + 2f'(x) + f(x)\} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{3} + \textcircled{4}$ 을 하면

$$e^x f''(x) = x^2 + (k-4)x + 4-2k$$

이때, $e^x > 0$ 이므로 $f''(x) \geq 0$ 이 항상 성립하려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + (k-4)x + 4-2k \geq 0$ 이어야 한다.

19

조건 ㉞에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

$$g(x) = \frac{xf(x)}{\cos x + 2} \text{에서}$$

$$g(\pi) = \frac{\pi f(\pi)}{\cos \pi + 2} = \frac{\pi \times 2\pi}{-1 + 2} = 2\pi^2$$

이고

$$g(-x) = \frac{-xf(-x)}{\cos(-x) + 2} = \frac{xf(x)}{\cos x + 2} = g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㊱}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-g'(-x) = g'(x) \quad \therefore g'(-x) = -g'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{㊲}$$

또한,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\{xf(x)\}' \times (\cos x + 2) - xf(x) \times (\cos x + 2)'}{(\cos x + 2)^2} \\ &= \frac{\{f(x) + xf'(x)\} \times (\cos x + 2) - xf(x) \times (-\sin x)}{(\cos x + 2)^2} \\ &= \frac{\{f(x) + xf'(x)\}(\cos x + 2) + xf(x)\sin x}{(\cos x + 2)^2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} g'(\pi) &= \frac{\{f(\pi) + \pi f'(\pi)\}(\cos \pi + 2) + \pi f(\pi)\sin \pi}{(\cos \pi + 2)^2} \\ &= \frac{(2\pi + \pi)(-1 + 2)}{(-1 + 2)^2} = 3\pi \end{aligned}$$

이때, $h(x) = f(x)g(x)$ 에서

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore h'(-\pi) &= f'(-\pi)g(-\pi) + f(-\pi)g'(-\pi) \\ &= f'(\pi)g(\pi) + f(\pi)g'(\pi) \quad (\because \textcircled{㉟}, \textcircled{㊱}, \textcircled{㊲}) \\ &= 1 \times 2\pi^2 + 2\pi \times 3\pi \\ &= 8\pi^2 \end{aligned}$$

답 $8\pi^2$

20

$$x = \csc \theta \text{에서 } \frac{dx}{d\theta} = -\csc \theta \cot \theta,$$

$$y = \theta + \sin \theta \text{에서 } \frac{dy}{d\theta} = 1 + \cos \theta$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{-\csc \theta \cot \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}} \\ &= -\frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{\cos \theta} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓} \end{aligned}$$

한편, x 좌표가 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\csc \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 에서

$$\sin \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < \theta < \pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루

는 각의 크기를 α_1 이라 하면 $\textcircled{㉓}$ 에서

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= -\frac{\sin^2 \frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right)}{\cos \frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$\theta = \frac{2}{3}\pi$ 에 대응하는 점에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이

루는 각의 크기를 α_2 라 하면 $\textcircled{㉓}$ 에서

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= -\frac{\sin^2 \frac{2}{3}\pi \left(1 + \cos \frac{2}{3}\pi\right)}{\cos \frac{2}{3}\pi} \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \alpha &= |\tan(\alpha_1 - \alpha_2)| \\ &= \left| \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{9}{4} - \frac{3}{4}}{1 + \left(-\frac{9}{4}\right) \times \frac{3}{4}} \right| \\ &= \left| \frac{-3}{1 - \frac{27}{16}} \right| = \frac{48}{11} \end{aligned}$$

답 $\frac{48}{11}$

21

곡선 $\sin x \cos y = \frac{1}{3}$ 은 점 (a, b) 를 지나므로

$$\sin a \cos b = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\sin x \cos y = \frac{1}{3}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = 0$$

$$\therefore \cos(a+b) = 0$$

$0 \leq a < \pi$, $0 \leq b < \pi$ 에서 $0 \leq a+b < 2\pi$ 이므로

$$a+b = \frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad a+b = \frac{3}{2}\pi$$

(i) $a+b = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $b = \frac{\pi}{2} - a$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\sin a \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin^2 a = \frac{1}{3}$$

$0 \leq a < \pi$ 에서 $0 \leq \sin a \leq 1$ 이므로

$$\sin a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(ii) $a+b = \frac{3}{2}\pi$ 일 때, $b = \frac{3}{2}\pi - a$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\sin a \cos\left(\frac{3}{2}\pi - a\right) = -\sin^2 a = \frac{1}{3}$$

그런데 $\sin^2 a \geq 0$ 이므로 등식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b = \frac{\pi}{2}$, $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\cos a \sin b = \cos a \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos^2 a$$

$$= 1 - \sin^2 a = \frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$ 이므로

$$p+q=3+2=5$$

답 5

22

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(x)) = x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

이때, $f(x) = x^2 + x + 1$ 에서 $f'(x) = 2x + 1$ 이므로 위의 식

에 $x=n$ 을 대입하면

$$g'(f(n))f'(n) = 1$$

$$g'(n^2 + n + 1) \times (2n + 1) = 1$$

$$\therefore g'(n^2 + n + 1) = \frac{1}{2n + 1}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2n + 1} > \frac{1}{100} \text{에서}$$

$$2n + 1 < 100, \quad 2n < 99 \quad \therefore n < 49.5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 49이다.

답 49

23

$f(x) = \cos^n x$ 에서

$$f'(x) = n \cos^{n-1} x \times (-\sin x)$$

$$= -n \sin x \cos^{n-1} x$$

이므로

$$f''(x)$$

$$= -n \times \cos x \times \cos^{n-1} x$$

$$-n \sin x \times (n-1) \cos^{n-2} x \times (-\sin x)$$

$$= -n \cos^n x + n(n-1) \sin^2 x \cos^{n-2} x$$

$$= -n \cos^n x + n(n-1)(1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x$$

$$= -n \cos^n x + n(n-1) \cos^{n-2} x - n(n-1) \cos^n x$$

$$= n(n-1) \cos^{n-2} x - n^2 \cos^n x$$

$$= n \cos^{n-2} x (n-1 - n \cos^2 x)$$

$f''(x) = 0$ 에서

$$\cos^{n-2} x = 0 \quad \text{또는} \quad \cos^2 x = \frac{n-1}{n}$$

이때, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos x \neq 0$

$$\text{즉, } \cos^2 x = \frac{n-1}{n} \text{이므로}$$

$$\cos^2 a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

24

조건 (가)의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
g'(f(x))f'(x) &= 2x + e^{x^2-1} + xe^{x^2-1} \times 2x \\
&= 2x + (2x^2+1)e^{x^2-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(1))f'(1) = 2 + (2+1)e^0 = 5$$

이때, 조건 (나)에서 $f'(1)=5$ 이므로

$$5g'(f(1))=5 \quad \therefore g'(f(1))=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
g''(f(x))\{f'(x)\}^2 + g'(f(x))f''(x) \\
&= 2 + 4x \times e^{x^2-1} + (2x^2+1)e^{x^2-1} \times 2x \\
&= 2 + (4x^3+6x)e^{x^2-1}
\end{aligned}$$

이 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
g''(f(1))\{f'(1)\}^2 + g'(f(1))f''(1) \\
&= 2 + (4+6)e^0 = 12
\end{aligned}$$

이때, 조건 (나)에서 $f'(1)=5$, $f''(1)=3$ 이므로

$$g''(f(1)) \times 5^2 + 1 \times 3 = 12$$

$$25g''(f(1))=9 \quad \therefore g''(f(1))=\frac{9}{25}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(f(x))-1}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{x-1} \quad (\because \textcircled{2}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g'(f(x))-g'(f(1))}{f(x)-f(1)} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right\} \\
&= g''(f(1)) \times f'(1) \\
&= \frac{9}{25} \times 5 \\
&= \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{5}$

유형
연습

06 도함수의 활용(1)

본문 pp.163~186

01-1 -4

01-2 $\frac{5}{64}\pi^2$

02-1 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

02-2 $\frac{\pi}{3}$

02-3 4

03-1 1

03-2 $\frac{1}{4}$

04-1 1

04-2 $a < -5$ 또는 $a > -1$

04-3 6

05-1 $2e$

05-2 $\frac{1}{e^2}$

05-3 2

06-1 -2

06-2 $\frac{1}{6}$

07-1 7

07-2 $-\frac{1}{6}$

08-1 $\frac{4}{3}$

08-2 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

09-1 (1) 풀이참조 (2) $-\frac{1}{4}$

09-2 6

10-1 $\frac{1}{4}$

10-2 $-\frac{1}{4}$

11-1 4

11-2 $-\frac{9}{8}$

12-1 풀이참조

13-1 125

13-2 $2e$

14-1 $y=x-2+\ln 2$

14-2 e

01-1

$f(x)=xe^{x-k}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{x-k}+xe^{x-k}=e^{x-k}(x+1)$$

점 (k, k) 에서의 접선의 기울기는

$$f'(k)=k+1$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-k=(k+1)(x-k)$$

이때, 이 접선의 y 절편이 -4 이므로

$$-4-k=(k+1)(-k), \quad -4-k=-k^2-k$$

$$k^2=4 \quad \therefore k=\pm 2$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$(-2) \times 2 = -4$$

답 -4

01-2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점 P 의 x 좌표를 구하면

$$0=\ln(\tan x), \quad \tan x=1$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < x < \frac{\pi}{2}) \quad \therefore P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

이때, $f(x) = \ln(\tan x)$ 에서

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

이므로 점 P에서의 접선 l의 기울기는

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

즉, 직선 l의 방정식은

$$y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y = 2x - \frac{\pi}{2}$$

한편, 두 직선 l, m은 서로 수직이므로 직선 m의 기울기는

$$-\frac{1}{2} \text{이다.}$$

즉, 직선 m의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}$$

따라서 삼각형 PQR는 오른쪽 그림

과 같으므로 구하는 넓이는

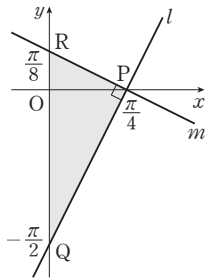
$\triangle PQR$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{OP}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{\pi}{8} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \pi \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{5}{64} \pi^2$$



답 $\frac{5}{64} \pi^2$

02-1

$f(x) = x + 1 + \ln|x+1|$ 이라 하면

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 라 하면 직선 $y = 2x + 3$ 에 평행한

직선 l의 기울기는 2이므로

$$f'(a) = 1 + \frac{1}{a+1} = 2$$

$$\frac{1}{a+1} = 1, \quad a+1 = 1$$

$$\therefore a = 0$$

즉, 접점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

이때, 직선 l과 직선 $y = 2x + 3$ 사이의 거리는 점 $(0, 1)$ 과

직선 $y = 2x + 3$, 즉 $2x - y + 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

02-2

$f(x) = \tan x - \cot x$ 라 하면

$$f'(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{\sin^2 x - \sin^4 x}$$

$$= \frac{1}{-\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

이므로 함수 $f'(x)$ 는 $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ 를

갖는다.

이때, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ 에서 $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중에서 기울기가 최소인 직선

의 접점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} = 1 - 1 = 0 \text{이므로 접점의 좌표는}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

또한, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore y = 4x - \pi$$

이 직선이 점 $\left(\frac{\pi}{3}, k\right)$ 를 지나므로

$$k = 4 \times \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

02-3

$$f(x) = x\sqrt{x} - x = x^{\frac{3}{2}} - x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$$

곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 접선의 접점의 좌표

를 $(a, f(a))$ 라 하면 $f'(a) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{3}{2}\sqrt{a} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{a} = \frac{3}{2}, \sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$$

$f(1) = 0$ 이므로 접점의 좌표는 $(1, 0)$

즉, 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}(x-1)$$

이므로 $A(0, -\frac{1}{2})$

또한, 직선 $y = \frac{1}{2}(x-1)$ 과 직선 $x=4$ 의 교점이 B 이므로

$$B(4, \frac{3}{2})$$

점 C 는 점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발이므로

$$C(0, \frac{3}{2})$$

따라서 삼각형 ABC 는 오른쪽

그림과 같으므로 구하는 넓이는

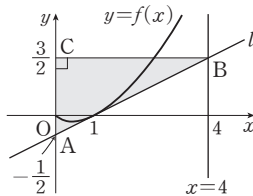
$\triangle ABC$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \times 4$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4$$

$$= 4$$



답 4

03-1

$f(x) = (x+1)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + (x+1)e^x$$

$$= (x+2)e^x$$

접점의 좌표를 $(a, (a+1)e^a)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a) = (a+2)e^a$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (a+1)e^a = (a+2)e^a(x-a)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-(a+1)e^a = (a+2)(1-a)e^a$$

이때, $e^a > 0$ 이므로 $a+1 = a^2+a-2$, $a^2=3$

$$\therefore a = \pm\sqrt{3}$$

즉, 두 접선의 기울기 m_1, m_2 는

$$f'(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+2)e^{\sqrt{3}},$$

$$f'(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3}+2)e^{-\sqrt{3}}$$

이므로

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= (\sqrt{3}+2)e^{\sqrt{3}} \times (-\sqrt{3}+2)e^{-\sqrt{3}} \\ &= \{2^2 - (\sqrt{3})^2\}e^0 = 1 \end{aligned}$$

답 1

03-2

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

이때, 점 A 의 좌표를 $(a, \frac{\ln a}{a})$ ($a > 0$)라 하면 점 A 에서

의 접선의 기울기는

$$f'(a) = \frac{1 - \ln a}{a^2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln a}{a} = \frac{1 - \ln a}{a^2}(x-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\frac{\ln a}{a} = -\frac{1 - \ln a}{a}, \ln a = 1 - \ln a \quad (\because a > 0)$$

$$\ln a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

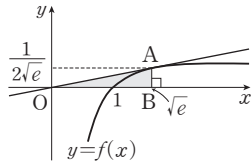
$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \text{ 이므로}$$

$$A\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$$

점 B는 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발이므로
 $B(\sqrt{e}, 0)$

따라서 삼각형 OAB는 오른쪽
 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{e} \times \frac{1}{2\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$



답 $\frac{1}{4}$

04-1

$f(x) = (x+1)e^{-2x}$ 이라 하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} \\ &= -(2x+1)e^{-2x}\end{aligned}$$

접점의 좌표를 $(t, (t+1)e^{-2t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의
 기울기는

$$f'(t) = -(2t+1)e^{-2t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (t+1)e^{-2t} = -(2t+1)e^{-2t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-(t+1)e^{-2t} = -(2t+1)(a-t)e^{-2t}$$

이때, $e^{-2t} > 0$ 이므로

$$t+1 = (2t+1)(a-t)$$

$$\therefore 2t^2 + 2(1-a)t + 1 - a = 0 \quad \dots\dots ①$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수
 있으려면 접점은 한 개만 존재해야 하므로 이차방정식 ①이
 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (1-a)^2 - 2(1-a) = 0$$

$$-(1-a)(1+a) = 0$$

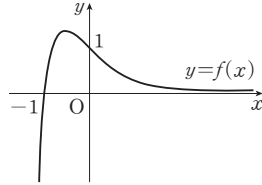
$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

답 1

보충설명

오른쪽 그림과 같이 하나의 접선이 두 접점
 에서 만나는 경우도 존재할 수 있다.

하지만 문제에서 주어진 함수 $y=f(x)$ 의
 그래프는 다음 그림과 같으므로 위와 같은
 경우는 존재하지 않는다.



04-2

$f(x) = (x+1)e^x$ 이라 하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x + (x+1)e^x \\ &= (x+2)e^x\end{aligned}$$

접점의 좌표를 $(t, (t+1)e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의
 기울기는

$$f'(t) = (t+2)e^t$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (t+1)e^t = (t+2)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-(t+1)e^t = (t+2)(a-t)e^t$$

이때, $e^t > 0$ 이므로

$$t+1 = (t+2)(t-a)$$

$$\therefore t^2 - (a-1)t - 2a - 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 서로 다른 두 개의 접선을
 그을 수 있으려면 두 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정
 식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(a-1)\}^2 - 4(-2a-1) > 0$$

$$a^2 + 6a + 5 > 0, (a+1)(a+5) > 0$$

$$\therefore a < -5 \text{ 또는 } a > -1$$

답 $a < -5$ 또는 $a > -1$

04-3

$f(x) = x^2 e^{-x}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= -x(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

점점의 좌표를 $(t, t^2 e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -t(t-2)e^{-t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - t^2 e^{-t} = -t(t-2)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(n, 0)$ 을 지나므로

$$-t^2 e^{-t} = -t(t-2)(n-t)e^{-t}$$

이때, $e^{-t} > 0$ 이므로

$$t^2 = t(t-2)(n-t)$$

$$t\{t^2 - (n+1)t + 2n\} = 0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t^2 - (n+1)t + 2n = 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

점 $(n, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 세 개의 접점이 존재해야 하므로 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{2}$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때, n 은 자연수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $\textcircled{2}$ 은 $t=0$ 을 근으로 갖지 않는다.

또한, 이차방정식 $\textcircled{2}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(n+1)\}^2 - 8n > 0$$

$$n^2 - 6n + 1 > 0$$

$$\therefore n < 3 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } n > 3 + 2\sqrt{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

05-1

$f(x) = a \ln x$, $g(x) = x^2$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{a}{x}, \quad g'(x) = 2x$$

두 곡선의 점점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a \ln t = t^2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{a}{t} = 2t \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a = 2t^2$ 이므로 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2t^2 \ln t = t^2, \quad 2 \ln t = 1, \quad \ln t = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{이므로}$$

$$a = 2(\sqrt{e})^2 = 2e$$

답 $2e$

05-2

$f(x) = e^x$ 이라 하면 $f'(x) = e^x$

점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e = e(x - 1) \quad \therefore y = ex$$

$$g(x) = 2\sqrt{x-k} \text{라 하면 } g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-k}}$$

점점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t-k})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t-k}}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2\sqrt{t-k} = \frac{1}{\sqrt{t-k}}(x-t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{t-k}}x - \frac{t}{\sqrt{t-k}} + 2\sqrt{t-k}$$

이 직선의 방정식이 $y = ex$ 와 일치해야 하므로

$$\frac{1}{\sqrt{t-k}} = e \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$-\frac{t}{\sqrt{t-k}} + 2\sqrt{t-k} = 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $\sqrt{t-k} = \frac{1}{e}$ 이므로 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-et + \frac{2}{e} = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{e^2}$$

이것을 $\sqrt{t-k} = \frac{1}{e}$ 에 대입하면

$$\sqrt{\frac{2}{e^2} - k} = \frac{1}{e}, \quad \frac{2}{e^2} - k = \frac{1}{e^2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{e^2}$$

답 $\frac{1}{e^2}$

다른풀이

직선 $y=ex$ 가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$ 에 접하므로 방정식 $ex=2\sqrt{x-k}$ 가 중근을 갖는다.

즉, $e^2x^2=4(x-k)$ 에서

$$e^2x^2-4x+4k=0 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

이므로 이차방정식 $\textcircled{\ominus}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-4ke^2=0$$

$$1-ke^2=0 \quad \therefore k=\frac{1}{e^2}$$

05-3

$f(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}$, $g(x)=2a\ln(x-1)+bx$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{x-2}, \quad g'(x)=\frac{2a}{x-1}+b$$

점 P에서의 두 곡선의 접선의 방정식이 $x-2y-c=0$, 즉

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}c \text{이므로 접선의 기울기는 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

이때, 점 P의 x좌표를 t 라 하면

$$f'(t)=g'(t)=\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}e^{t-2}=\frac{1}{2}$$

즉, $e^{t-2}=1$ 이므로 $t=2$

$$f(2)=\frac{1}{2} \text{이므로 } P\left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$$g(2)=2b=\frac{1}{2} \text{에서 } b=\frac{1}{4}$$

$$g'(2)=2a+b=\frac{1}{2} \text{에서 } 2a=\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{1}{8}$$

한편, 점 $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 이 직선 $x-2y-c=0$ 위에 있으므로

$$2-2\times\frac{1}{2}-c=0 \quad \therefore c=1$$

따라서 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=1$ 이므로

$$\frac{bc}{a}=\frac{\frac{1}{4}\times 1}{\frac{1}{8}}=2$$

06-1

접선 l 과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 이 서로 수직이므로 접선 l 의

기울기를 m 이라 하면

$$m\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \therefore m=2 \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

한편, $\frac{dx}{dt}=2e^{2t-4}$, $\frac{dy}{dt}=2at-1$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2at-1}{2e^{2t-4}}$$

$\textcircled{\ominus}$ 에서 $t=2$ 일 때의 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2a\times 2-1}{2e^{2\times 2-4}}=\frac{4a-1}{2}=2$$

$$4a-1=4, \quad 4a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

또한, $t=2$ 일 때,

$$x=e^{2\times 2-4}=1,$$

$$y=a\times 2^2-2+3=\frac{5}{4}\times 4+1=6$$

이므로 직선 l 의 방정식은

$$y-6=2(x-1) \quad \therefore y=2x+4$$

따라서 직선 l 의 x절편을 구하면

$$2x+4=0 \quad \therefore x=-2$$

답 -2

06-2

접선 l 과 직선 $y=-\frac{3}{4}x+1$ 이 서로 수직이므로 접선 l 의

기울기를 m 이라 하면

$$m\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1 \quad \therefore m=\frac{4}{3} \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

한편, $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-\frac{a}{t^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-\frac{a}{t^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{t}}}=\frac{6t^4-2a}{2t^2+t\sqrt{t}}$$

$\textcircled{\ominus}$ 에서 $t=1$ 일 때의 접선의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{6-2a}{2+1}=\frac{6-2a}{3}=\frac{4}{3}$$

$$6-2a=4, \quad 2a=2 \quad \therefore a=1$$

답 2

또한, $t=1$ 일 때,

$$x=1+\sqrt{1}=2, \quad y=1+\frac{a}{1}=1+1=2$$

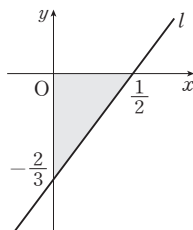
이므로 직선 l 의 방정식은

$$y-2=\frac{4}{3}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

따라서 직선 l 은 오른쪽 그림과 같으므로 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$



답 $\frac{1}{6}$

07-1

점 $(2, 3)$ 이 곡선 $y^2=\ln(a-x^2)+xy+3$ 위에 있으므로

$$3^2=\ln(a-2^2)+2 \times 3+3$$

$$9=\ln(a-4)+9, \quad \ln(a-4)=0$$

$$a-4=1 \quad \therefore a=5$$

$y^2=\ln(5-x^2)+xy+3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5-x^2} + y + x \frac{dy}{dx}$$

$$(2y-x) \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{5-x^2} + y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(5-x^2)(2y-x)} + \frac{y}{2y-x} \quad (\text{단, } 2y \neq x)$$

점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $x=2, y=3$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$

의 값이므로

$$-\frac{2 \times 2}{(5-2^2)(2 \times 3-2)} + \frac{3}{2 \times 3-2} = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

따라서 접선 l 의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{4}(x-2)$$

이 직선이 원 $(x-6)^2+(y-b)^2=5$ 의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(6, b)$ 를 지나야 하므로

$$b-3=-\frac{1}{4} \times 4 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b=5+2=7$$

답 7

07-2

$x^2-4y^2e^x+2y+n^2+n=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x-8ye^x \frac{dy}{dx} - 4y^2e^x + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8ye^x-2) \frac{dy}{dx} = 2x-4y^2e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x-4y^2e^x}{8ye^x-2} \quad (\text{단, } 8ye^x-2 \neq 0)$$

점 $(0, -\frac{n}{2})$ 에서의 접선의 기울기는 $x=0, y=-\frac{n}{2}$ 일 때

의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이므로

$$\frac{-4 \times \left(-\frac{n}{2}\right)^2}{8 \times \left(-\frac{n}{2}\right) - 2} = \frac{n^2}{4n+2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - \left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4n+2}x \quad \therefore y = \frac{n^2}{4n+2}x - \frac{n}{2}$$

이 직선의 x 절편이 $f(n)$ 이므로

$$0 = \frac{n^2}{4n+2}f(n) - \frac{n}{2}, \quad \frac{n^2}{4n+2}f(n) = \frac{n}{2}$$

$$\therefore f(n) = \frac{n}{2} \times \frac{4n+2}{n^2} = \frac{2n+1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2(n+1)+1} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2k+1} - \frac{k+1}{2k+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{3}{7} - \frac{4}{9} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1} - \frac{n+1}{2n+3} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n+1}{2n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

답 $-\frac{1}{6}$

보충설명

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{f(k)} - \frac{1}{f(k+1)} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left\{ \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} \right\} + \left\{ \frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(3)} \right\} + \left\{ \frac{1}{f(3)} - \frac{1}{f(4)} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n+1)} \right\} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{n+1}{2n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

08-1

$g(2)=0$ 에서 $f(0)=2$ 이므로

$$a=2$$

즉, $f(x)=2e^{3x}+x+\sin x$ 에서

$$f'(x)=6e^{3x}+1+\cos x$$

이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(2)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{6e^0+1+1}=\frac{1}{8}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{8}(x-2) \quad \therefore y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$$

이 직선이 점 $(5b, b)$ 를 지나므로

$$b=\frac{1}{8} \times 5b - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8}b = -\frac{1}{4} \quad \therefore b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

다른풀이

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선이 점 $(5b, b)$ 를 지나므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선은 점 $(b, 5b)$ 를 지난다.

$f(0)=2$ 이므로 $a=2$

즉, $f(x)=2e^{3x}+x+\sin x$ 에서 $f'(x)=6e^{3x}+1+\cos x$

이므로

$$f'(0)=6e^0+1+1=8$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-2=8x \quad \therefore y=8x+2$$

이 직선이 점 $(b, 5b)$ 를 지나므로

$$5b=8b+2$$

$$3b=-2 \quad \therefore b=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

08-2

$g(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$

$f(\sin t)=\tan t=1$ 에서 $\tan t=1$

$$\therefore t=\frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < t < \frac{\pi}{2})$$

즉, $a=\sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$

또한, $f(\sin t)=\tan t$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f'(\sin t) \cos t = \sec^2 t \quad \therefore f'(\sin t) = \sec^3 t$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울

기는

$$\begin{aligned}
 g'(1) &= \frac{1}{f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{f'\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sec^3 \frac{\pi}{4}} = \cos^3 \frac{\pi}{4} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$$

이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 1$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

다른풀이

$f(\sin t) = \tan t$ 에서 $\sin t = x$ 로 놓으면

$$\cos t = \sqrt{1-x^2} \quad (\because 0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{즉, } \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{단, } 0 < x < 1)$$

$g(1) = a$ 라 하면 $f(a) = 1$ 이므로

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = 1, \quad a = \sqrt{1-a^2}, \quad a^2 = 1-a^2$$

$$2a^2 = 1, \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because 0 < a < 1)$$

또한,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{이므로 } f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

09-1

(1) $f(x) = (x^2 + 2x - 7)e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x-7)e^{-x} \\ &= -(x^2-9)e^{-x} = -(x+3)(x-3)e^{-x} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		\		/	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -3]$, $[3, \infty)$ 에서 감소하고, 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 증가한다.

(2) $f(x) = (x^2 - a)e^{2x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{2x} + 2(x^2 - a)e^{2x} \\ &= 2(x^2 + x - a)e^{2x} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$2(x^2 + x - a)e^{2x} \geq 0$$

이때, $e^{2x} > 0$ 이므로 $x^2 + x - a \geq 0$

이차방정식 $x^2 + x - a = 0$ 이 중근이나 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1^2 + 4a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{4}$$

따라서 a 의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

답 (1) 풀이참조 (2) $-\frac{1}{4}$

09-2

함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $[b, \infty)$ 에서 증가하므로

$$x \leq -\frac{1}{2}, \quad x \geq b \text{에서 } f'(x) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-\frac{1}{2}, b]$ 에서 감소하므로

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq b \text{에서 } f'(x) \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f'(b) = 0$$

$$f(x) = xe^{2x} - (4x + a)e^x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} - \{4e^x + (4x + a)e^x\} \\ &= (2x+1)e^{2x} - (4x+a+4)e^x \end{aligned}$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -(a+2)e^{-\frac{1}{2}} = 0 \text{이므로}$$

$$a = -2$$

$$\therefore f'(x) = (2x+1)e^{2x} - (4x+2)e^x$$

또한, $f'(b) = (2b+1)e^{2b} - (4b+2)e^b = 0$ 에서 $e^b > 0$ 이므로

$$(2b+1)e^b - (4b+2) = 0, \quad (2b+1)e^b = 2(2b+1)$$

$$e^b = 2 \quad (\because b \neq -\frac{1}{2}) \quad \therefore b = \ln 2$$

따라서 $a = -2$, $b = \ln 2$ 이므로

$$e^b - 2a = e^{\ln 2} - 2 \times (-2) = 2 + 4 = 6$$

답 6

10-1

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-ax+5} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-ax+5-(x-1)(2x-a)}{(x^2-ax+5)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x+5-a}{(x^2-ax+5)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-1) = \frac{-1-2+5-a}{(1+a+5)^2} = \frac{2-a}{(a+6)^2} = 0$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(3) = \frac{3-1}{3^2-2 \times 3+5} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

다른풀이

$$f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-2x+5)^2} \text{이므로 } f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{또한, } f''(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-11)}{(x^2-2x+5)^3} \text{에서}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{16} < 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 } x=3 \text{일 때 극대이다.}$$

10-2

$$y = \ln x \text{에서 } y' = \frac{1}{x}$$

점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정

식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

이 직선이 x 축과 만나는 점이 $R(r(t), 0)$ 이므로

$$0 - \ln t = \frac{1}{t}\{r(t) - t\}, r(t) - t = -t \ln t$$

$$\therefore r(t) = t - t \ln t$$

또한, 점 $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$ 이므로 접

선의 방정식은

$$y - \ln 2t = \frac{1}{2t}(x - 2t)$$

이 직선이 x 축과 만나는 점이 $S(s(t), 0)$ 이므로

$$0 - \ln 2t = \frac{1}{2t}\{s(t) - 2t\}, s(t) - 2t = -2t \ln 2t$$

$$\therefore s(t) = 2t - 2t \ln 2t$$

$$f(t) = r(t) - s(t)$$

$$= t - t \ln t - (2t - 2t \ln 2t)$$

$$= t - t \ln t - 2t + 2t(\ln 2 + \ln t)$$

$$= (2 \ln 2 - 1)t + t \ln t$$

이므로

$$f'(t) = 2 \ln 2 - 1 + \ln t + t \times \frac{1}{t} = 2 \ln 2 + \ln t$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } 2 \ln 2 + \ln t = 0$$

$$\ln t = -2 \ln 2 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = (2 \ln 2 - 1) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

11-1

$$f(x) = (x^2 - 4x + k)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + k)e^x$$

$$= (x^2 - 2x + k - 4)e^x$$

$f'(x)=0$ 에서 $e^x > 0$ 이므로

$$x^2 - 2x + k - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $\textcircled{7}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (k-4) > 0 \quad \therefore k < 5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4

11-2

$f(x) = ax - \cos x + \sin x \cos x$ 에서

$$f'(x) = a + \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= -2\sin^2 x + \sin x + a + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -2\sin^2 x + \sin x + a + 1 = 0$$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

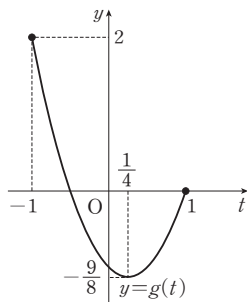
$$2t^2 - t - 1 = a$$

이때, $g(t) = 2t^2 - t - 1$ 이라 하면

$$g(t) = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

즉, $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(-1) = 2$, 최

솟값은 $g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$



$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = g(t)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 갖지 않으면 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으므로

$$a < -\frac{9}{8} \text{ 또는 } a > 2$$

또한, $a = -\frac{9}{8}$ 또는 $a = 2$ 일 때는 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a \leq -\frac{9}{8} \text{ 또는 } a \geq 2$$

따라서 조건을 만족시키는 음수 a 의 최댓값은 $-\frac{9}{8}$ 이다.

답 $-\frac{9}{8}$

풀이첨삭

*에서 $a = -\frac{9}{8}$ 또는 $a = 2$ 일 때, $f'(x)$ 의 부호를 확인해 보자.

(i) $a = -\frac{9}{8}$ 일 때,

$$f'(x) = -2\sin^2 x + \sin x - \frac{1}{8} = -2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$f'(x) = -2\sin^2 x + \sin x + 3 = (-2\sin x + 3)(\sin x + 1)$$

이때, $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $f'(x) \geq 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = -\frac{9}{8}$ 또는 $a = 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

다른풀이

$$f'(x) = -2\sin^2 x + \sin x + a + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -2\sin^2 x + \sin x + a + 1 = 0$$

$\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

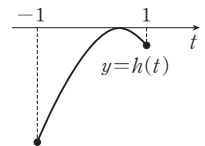
$$-2t^2 + t + a + 1 = 0$$

이때, $h(t) = -2t^2 + t + a + 1$ 이라 하자.

(i) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 극값을 갖지 않으려면 방정식 $h(t) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1^2 - 4 \times (-2) \times (a+1) \leq 0$$

$$8a + 9 \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{9}{8}$$

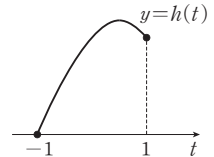


(ii) 함수 $f(x)$ 가 주어진 범위에서 극값을 갖지 않으려면

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $h(t)$ 의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

$$\text{즉, } h(-1) \geq 0 \text{ 이어야 하므로 } a - 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

(i), (ii)에서 $a \leq -\frac{9}{8}$ 또는 $a \geq 2$



따라서 조건을 만족시키는 음수 a 의 최댓값은 $-\frac{9}{8}$ 이다.

12-1

(1) $f(x) = x - 2\cos x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + 2\sin x, f''(x) = 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 + 2\sin x = 0, \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$\text{또한, } f''(x) = 0 \text{에서 } 2\cos x = 0, \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	(2π)
$f'(x)$		+	+	+	0	-	-	-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$		↗	변곡점	↖	극대	↘	변곡점	↙	극소	↗	

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 에서 위로 볼록

하고, 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ 에서 아래로 볼록하다.

$$\text{이때, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi - 2\cos\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \text{이므로 변곡점의 좌}$$

$$\text{표는 } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) \text{이다.}$$

(2) $f(x) = x \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

$f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

$x > 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하고, 변곡점은 존재하지 않는다.

답 풀이참조

보충설명

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 그릴 수 있다.

(1) $f'(x) > 0, f''(x) > 0 \Rightarrow$ 아래로 볼록하면서 증가(↗)

(2) $f'(x) > 0, f''(x) < 0 \Rightarrow$ 위로 볼록하면서 증가(↖)

(3) $f'(x) < 0, f''(x) > 0 \Rightarrow$ 아래로 볼록하면서 감소(↘)

(4) $f'(x) < 0, f''(x) < 0 \Rightarrow$ 위로 볼록하면서 감소(↖)

13-1

$$f(x) = e^{2x} \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x \\ = e^{2x}(2\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = 2e^{2x}(2\sin x + \cos x) + e^{2x}(2\cos x - \sin x) \\ = e^{2x}(3\sin x + 4\cos x)$$

이때, 곡선 $y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 변곡점을 가지므로 $f''(a) = 0$

$$\text{즉, } e^{2a}(3\sin a + 4\cos a) = 0 \text{에서 } e^{2a} > 0 \text{이므로}$$

$$3\sin a + 4\cos a = 0, \sin a = -\frac{4}{3}\cos a$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 a = \frac{16}{9} \cos^2 a, 1 - \cos^2 a = \frac{16}{9} \cos^2 a$$

$$\frac{25}{9} \cos^2 a = 1 \quad \therefore \cos^2 a = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sec^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$= \frac{25}{9}$$

$$\therefore 45 \sec^2 a = 45 \times \frac{25}{9} = 125$$

답 125

13-2

$$f(x) = \left(\ln \frac{1}{ax}\right)^2 = (-\ln ax)^2 = (\ln ax)^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 2 \ln ax \times \frac{a}{ax} = \frac{2 \ln ax}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln ax}{x^2} = \frac{2(1 - \ln ax)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 1 - \ln ax = 0 \quad \therefore x = \frac{e}{a}$$

이때, $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y=f(x)$ 는 $x = \frac{e}{a}$ 에서 변곡점을 갖고,

$$f\left(\frac{e}{a}\right) = \left\{ \ln\left(a \times \frac{e}{a}\right) \right\}^2 = 1$$

이므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$ 이다.

변곡점 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$ 이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$1 = 2 \times \frac{e}{a} \quad \therefore a = 2e$$

답 2e

14-1

$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2-2x+2) - (2x-2)^2}{(x^2-2x+2)^2} = -\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=2$ ($\because x>0$)

이때, $x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌고,

$f(2) = \ln(4-4+2) = \ln 2$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 $(2, \ln 2)$ 이다.

점 $(2, \ln 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = \frac{4-2}{4-4+2} = 1$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = x - 2 \quad \therefore y = x - 2 + \ln 2$$

답 $y = x - 2 + \ln 2$

14-2

$f(x) = \frac{ax}{e^{2x}}$ 에서

$$f'(x) = \frac{ae^{2x} - 2axe^{2x}}{e^{4x}}$$

$$= \frac{a(1-2x)}{e^{2x}}$$

$$f''(x) = \frac{-2ae^{2x} - 2a(1-2x)e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$= \frac{4a(x-1)}{e^{2x}}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=1$

이때, $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y=f(x)$ 는 $x=1$ 에서 변곡점을 갖고, 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = \frac{a(1-2)}{e^2} = -\frac{a}{e^2}$$

또한, 원점에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = \frac{a(1-0)}{e^0} = a$$

원점에서의 접선과 변곡점에서의 접선이 서로 수직이므로

$$-\frac{a}{e^2} \times a = -1, \quad a^2 = e^2 \quad \therefore a = e \quad (\because a > 0)$$

답 e



개념 마무리

본문 pp.188~191

01 $-\frac{5}{2}$

02 9

03 ①

04 $\frac{3}{2}\pi + 1$

05 ①

06 -4

07 16

08 $\frac{3}{e} < a < 2e$

09 $\frac{1}{2}$

10 ②

11 ③

12 22

13 ③

14 0

15 -1

16 ②

17 2

18 $-e^2$

19 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

21 $\frac{5}{4}$

22 $\neg, \perp$

23 ③

24 90

01

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때, 극한값이 존재하고

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) \text{이므로}$$

$$f'(2) = 4$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-2}{x+1} = -1 \text{에서}$$

$$g(-1) = 2, \quad g'(-1) = -1$$

이때, 합성함수 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서
 $y' = f'(g(x))g'(x)$ 이므로 점 $(-1, f(g(-1)))$, 즉
 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(g(-1))g'(-1) = f'(2)g'(-1)$
 $= 4 \times (-1) = -4$

따라서 접선의 방정식은
 $y - 3 = -4\{x - (-1)\} \quad \therefore y = -4x - 1$
 이 직선이 점 $(a, 9)$ 를 지나므로
 $9 = -4a - 1, 4a = -10$
 $\therefore a = -\frac{5}{2}$

답 $-\frac{5}{2}$

02

$f(x) = \frac{2x}{x+1}$ 에서
 $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$
 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선
 l 의 기울기는

$$f'(0) = \frac{2}{1^2} = 2$$

또한, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선
 m 의 기울기는

$$f'(1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

즉, 두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를
 각각 α, β 라 하면 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| \\ &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} \right| \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore 12 \tan \theta = 12 \times \frac{3}{4} = 9$$

답 9

03

$f(x) = \sin x - \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

곡선 $y = f(x)$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를
 $(a, f(a))$ 라 하면

$$f'(a) = \cos a + \sin a = 1$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 a + 2 \cos a \sin a + \sin^2 a = 1$$

$$1 + 2 \cos a \sin a = 1, \cos a \sin a = 0$$

$$\therefore \cos a = 0 \text{ 또는 } \sin a = 0$$

이때, $0 < a < \pi$ 이므로 $a = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$ 에서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 이므로 접선
 의 방정식은

$$y - 1 = x - \frac{\pi}{2}, \text{ 즉 } x - y - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$$

따라서 원점과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{\left| -\frac{\pi}{2} + 1 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ①

보충설명

삼각함수의 합성을 이용하여 접점의 x 좌표를 구할 수도 있다.

$$f'(a) = \cos a + \sin a = 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) = 1$$

$$\sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad \therefore \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } \frac{\pi}{4} < a + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi \text{이므로 } a + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2}$$

04

$f(x) = \cos^2 x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 \cos x \times (-\sin x) = -2 \cos x \sin x$$

접점의 좌표를 $(a, f(a))$ 라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(a) = -2 \cos a \sin a = -1$$

$$\therefore \cos a \sin a = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 a \sin^2 a = \frac{1}{4}, \cos^2 a (1 - \cos^2 a) = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 a - \cos^4 a = \frac{1}{4}, 4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1 = 0$$

$$(2\cos^2 a - 1)^2 = 0, \cos^2 a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } \textcircled{7} \text{에서 } \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 일 때 } \sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{일 때 } \sin a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } a = \frac{5}{4}\pi \quad (\because 0 \leq a < 2\pi)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 접점의 좌표는}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$$

이 두 점을 각각 접점으로 하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right), y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, y = -x + \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ 또는 } k = \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2} \text{ 이므로 모든 실수 } k$$

의 값의 합은

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi + 1$$

$$\text{답 } \frac{3}{2}\pi + 1$$

보충설명

배각의 공식을 이용하여 접점의 x 좌표를 구할 수도 있다.

$$f(x) = \cos^2 x \text{에서}$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$f'(a) = -\sin 2a = -1 \text{에서 } \sin 2a = 1$$

$$\text{이때, } 0 \leq a < 2\pi \text{에서 } 0 \leq 2a < 4\pi \text{이므로}$$

$$2a = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2a = \frac{5}{2}\pi \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } a = \frac{5}{4}\pi$$

05

$$f(x) = \ln ax + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

점 $(-2, 0)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선 l 의 접점의 좌표를 $(t, \ln at + 1)$ 이라 하면 접선 l 의 기울기는 $f'(t) = \frac{1}{t}$

이므로

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \quad \therefore t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, \ln 2a + 1)$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y - (\ln 2a + 1) = \frac{1}{2}(x - 2)$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$-\ln 2a - 1 = \frac{1}{2} \times (-4), \ln 2a = 1$$

$$2a = e \quad \therefore a = \frac{e}{2}$$

답 ①

06

$$h(x) = 2(x-1)e^{-x} \text{이라 하면}$$

$$h'(x) = 2e^{-x} - 2(x-1)e^{-x} = (-2x+4)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, 2(t-1)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$h'(t) = (-2t+4)e^{-t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2(t-1)e^{-t} = (-2t+4)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-2(t-1)e^{-t} = (-2t+4)e^{-t}(a-t)$$

이때, $e^{-t} > 0$ 이므로

$$t-1 = -(t-2)(t-a)$$

$$\therefore t^2 - (a+1)t + 2a - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y=h(x)$ 에 그은 접선의 개수와 같으므로 이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D < 0 \text{일 때, } f(a) = 0$$

$$D = 0 \text{일 때, } f(a) = 1$$

$$D > 0 \text{일 때, } f(a) = 2$$

이다.

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 4(2a-1) = a^2 - 6a + 5 \\ &= (a-1)(a-5) \end{aligned}$$

이므로

$D < 0$ 에서 $1 < a < 5$

$D = 0$ 에서 $a = 1$ 또는 $a = 5$

$D > 0$ 에서 $a < 1$ 또는 $a > 5$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2 & (x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (1 < x < 5) \\ 1 & (x = 5) \\ 2 & (x > 5) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=5$ 에서 불연속이므로 함수

$f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$g(1)=0, g(5)=0$$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$g(x) = (x-1)(x-5)$$

$$\therefore g(3) = (3-1)(3-5) = 2 \times (-2) = -4$$

답 -4

단계	채점 기준	배점
(가)	점 $(a, 0)$ 에서 곡선에 그은 접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하고, 이 접선의 방정식을 t 를 이용하여 나타낸 경우	20%
(나)	(가)에서 구한 접선이 점 $(a, 0)$ 을 지남을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한 경우	50%
(다)	함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용하여 $g(3)$ 의 값을 구한 경우	30%

07

$$f(x) = \frac{1}{k} \csc x \text{에서 } f'(x) = -\frac{1}{k} \csc x \cot x$$

$$g(x) = \frac{1}{2} - \sin x \text{에서 } g'(x) = -\cos x$$

점 P의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } \frac{1}{k} \csc t = \frac{1}{2} - \sin t$$

$$\frac{1}{k \sin t} = \frac{1-2 \sin t}{2}, \quad k \sin t = \frac{2}{1-2 \sin t}$$

$$\therefore k = \frac{2}{(1-2 \sin t) \sin t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } f'(t) = g'(t) \text{에서 } -\frac{1}{k} \csc t \cot t = -\cos t$$

$$\frac{\cos t}{k \sin t \sin t} = \cos t$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sin^2 t} \quad (\because \cos t \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{2}{(1-2 \sin t) \sin t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

$\sin t \neq 0$ 이므로

$$\frac{2}{1-2 \sin t} = \frac{1}{\sin t}$$

$$2 \sin t = 1 - 2 \sin t \quad \therefore \sin t = \frac{1}{4}$$

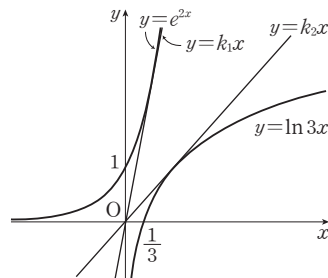
이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$k = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16$$

답 16

08

다음 그림과 같이 원점을 지나고 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=\ln 3x$ 에 각각 접하는 두 직선 $y=k_1x$, $y=k_2x$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$)에 대하여 직선 $y=ax$ 가 두 곡선과 만나지 않으려면 직선 $y=ax$ 는 두 직선 $y=k_1x$, $y=k_2x$ 사이에 있어야 한다.



(i) $f(x) = e^{2x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

이때, 직선 $y=k_1x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를

(t_1, e^{2t_1}) 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t_1) = 2e^{2t_1}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{2t_1} = 2e^{2t_1}(x - t_1)$$

$$\therefore y = 2e^{2t_1}x - 2t_1e^{2t_1} + e^{2t_1}$$

이 직선이 직선 $y=k_1x$ 와 일치해야 하므로

$$2e^{2t_1} = k_1, \quad -2t_1e^{2t_1} + e^{2t_1} = 0$$

$$(1-2t_1)e^{2t_1} = 0 \text{에서 } e^{2t_1} > 0 \text{이므로}$$

$$t_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k_1 = 2 \times e^{2 \times \frac{1}{2}} = 2e$$

(ii) $g(x) = \ln 3x$ 라 하면

$$g'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

이때, 직선 $y = k_2x$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 접점의 좌표를 $(t_2, \ln 3t_2)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$g'(t_2) = \frac{1}{t_2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 3t_2 = \frac{1}{t_2}(x - t_2) \quad \therefore y = \frac{1}{t_2}x - 1 + \ln 3t_2$$

이 직선이 직선 $y = k_2x$ 와 일치해야 하므로

$$\frac{1}{t_2} = k_2, \quad -1 + \ln 3t_2 = 0$$

$$3t_2 = e \text{ 이므로 } t_2 = \frac{e}{3}$$

$$\therefore k_2 = \frac{3}{e}$$

(i), (ii)에서 직선 $y = ax$ 가 두 곡선과 모두 만나지 않도록 하는 양수 a 의 값의 범위는

$$\frac{3}{e} < a < 2e$$

$$\text{답 } \frac{3}{e} < a < 2e$$

09

$$\frac{dx}{dt} = -4nt, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{n}{2} + \frac{1}{t-1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{n}{2} + \frac{1}{t-1}}{-4nt} = \frac{(t-1)n+2}{-8nt(t-1)}$$

$t=2$ 일 때, 접선의 기울기는

$$\frac{1 \times n + 2}{-8n \times 2 \times 1} = -\frac{n+2}{16n}$$

또한, $t=2$ 일 때 $x=1-8n$, $y=n$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - n = -\frac{n+2}{16n} \{x - (1-8n)\}$$

$$\therefore y = -\frac{n+2}{16n}x - \frac{(n+2)(8n-1)}{16n} + n$$

이 접선의 y 절편이 $f(n)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= -\frac{(n+2)(8n-1)}{16n} + n \\ &= \frac{8n^2 - 15n + 2}{16n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 15n + 2}{16n^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

10

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -\cos t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\cos t}{-2\sin t} = \frac{\cos t}{2\sin t}$$

$$t=a \text{ 일 때, 접선의 기울기는 } \frac{\cos a}{2\sin a}$$

또한, $t=a$ 일 때 $x=1+2\cos a$, $y=-3-\sin a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-3 - \sin a) = \frac{\cos a}{2\sin a} \{x - (1 + 2\cos a)\}$$

$$\therefore y = \frac{\cos a}{2\sin a}x - \frac{\cos a(1+2\cos a)}{2\sin a} - 3 - \sin a$$

이 직선의 y 절편이 $f(a)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= -\frac{\cos a(1+2\cos a)}{2\sin a} - 3 - \sin a \\ &= -\frac{\cos a + 2 - 2\sin^2 a}{2\sin a} - 3 - \sin a \\ &= -\frac{\cos a + 2}{2\sin a} + \sin a - 3 - \sin a \\ &= -\frac{\cos a + 2}{2\sin a} - 3 \\ \therefore f'(a) &= -\frac{-\sin a \times 2\sin a - (\cos a + 2) \times 2\cos a}{4\sin^2 a} \\ &= \frac{2\sin^2 a + 2\cos^2 a + 4\cos a}{4\sin^2 a} \\ &= \frac{1 + 2\cos a}{2\sin^2 a} \end{aligned}$$

이때, $f'(p)=0$ 이므로

$$\frac{1+2\cos p}{2\sin^2 p} = 0$$

$$1+2\cos p=0, \quad \cos p=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore p = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 < p < \pi)$$

$$\begin{aligned}\therefore f(p) &= f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\cos\frac{2}{3}\pi+2}{2\sin\frac{2}{3}\pi} - 3 \\ &= -\frac{-\frac{1}{2}+2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} - 3 \\ &= -\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} - 3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\end{aligned}$$

답 ②

11

$2x - 2y^2 + y - \ln y = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2 - 4y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(4y - 1 + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{4y - 1 + \frac{1}{y}}$$

곡선 위의 점에서의 접선의 기울기가 최대가 되려면 $\frac{dy}{dx}$ 가 최

대가 되어야 하므로 $4y + \frac{1}{y}$ 이 최솟값을 가질 때, 기울기가

최대가 된다.

이때, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{4y \times \frac{1}{y}} = 4$$

이므로 $\frac{dy}{dx}$ 의 최댓값은

$$M = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

또한, 등호는 $4y = \frac{1}{y}$ 일 때 성립하므로

$$4y^2 = 1, y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \quad (\because y > 0)$$

이것을 $2x - 2y^2 + y - \ln y = 0$ 에 대입하면

$$2x - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = 0$$

$$2x = -\ln 2 \quad \therefore x = -\frac{1}{2} \ln 2$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2} \ln 2, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{bM}{e^{2a}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{e^{-\ln 2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

답 ③

12

조건 (나)의 $f(x)g'(f(x)) = \frac{1}{x+1}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)g'(f(1)) = \frac{1}{2}, 2g'(2) = \frac{1}{2} \quad (\because \text{조건 (가)})$$

$$\therefore g'(2) = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

역함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}f'(1) &= \frac{1}{g'(f(1))} \\ &= \frac{1}{g'(2)} \\ &= 4 \quad (\because \textcircled{1})\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

이 직선이 점 $(6, k)$ 를 지나므로

$$k - 2 = 4(6 - 1) \quad \therefore k = 22$$

답 22

다른풀이

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(x)) = x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

$$\therefore g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{단, } f'(x) \neq 0)$$

조건 (나)에 의하여

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x+1} \quad \therefore f'(x) = f(x)(x+1)$$

위의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1) = f(1) \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

13

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 증가하므로 $x > 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{k}{x} \text{에서 } f'(x) = x - 3 + \frac{k}{x^2} \text{이므로}$$

$$x - 3 + \frac{k}{x^2} \geq 0$$

$x^2 > 0$ 이므로 양변에 x^2 을 곱하면

$$x^3 - 3x^2 + k \geq 0, \text{ 즉 } k \geq -x^3 + 3x^2$$

$g(x) = -x^3 + 3x^2$ 이라 하면

$$g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	2	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗	극대	↘

열린구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$g(2) = -2^3 + 3 \times 2^2 = 4$$

따라서 $k \geq 4$ 이므로 조건을 만족시키는 k 의 최솟값은 4이다.

답 ③

14

$$f(x) = x + \frac{ax}{x-1} \text{에서}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{a(x-1) - ax}{(x-1)^2}$$

$$= 1 - \frac{a}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2 - a}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1+\sqrt{a})(x-1-\sqrt{a})}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \pm \sqrt{a}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$1-\sqrt{a}$	...	(1)	...	$1+\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=1+\sqrt{a}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{a}) &= 1+\sqrt{a} + \frac{a(1+\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}-1} \\ &= 1+\sqrt{a} + \sqrt{a}(1+\sqrt{a}) \\ &= a+1+2\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a+1+2\sqrt{a}=4 \text{이므로 } 2\sqrt{a}=3-a \quad \dots\dots ①$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$4a = a^2 - 6a + 9, \quad a^2 - 10a + 9 = 0$$

$$(a-1)(a-9) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=9$$

이때, ①에서 $3-a > 0$ 이므로 $a=1$

$$\therefore f(x) = x + \frac{x}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1-\sqrt{a}$, 즉 $x=0$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(0) = 0 + \frac{0}{0-1} = 0$$

답 0

15

이차함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(x) = k(x-a)^2 \text{ (단, } k > 0 \text{)}$$

이라 할 수 있다.

$$\text{즉, } e^x f(x) = k e^x (x-a)^2 \text{이므로}$$

$$\{e^x f(x)\}' = k e^x (x-a)^2 + 2k e^x (x-a)$$

$$= k e^x (x-a)(x-a+2)$$

$$\{e^x f(x)\}' = 0 \text{에서 } x = a-2 \text{ 또는 } x = a$$

함수 $e^x f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-2$	...	a	...
$\{e^x f(x)\}'$	+	0	-	0	+
$e^x f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $e^x f(x)$ 는 $x=a-2$ 에서 극대이므로

$$a = e^{a-2} f(a-2) = e^{a-2} \times k(a-2-a)^2 = 4k e^{a-2}$$

$$\text{또한, } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{k(x-a)^2}{e^x} \text{이므로}$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{e^x} \right\}' = \frac{2k e^x (x-a) - k e^x (x-a)^2}{e^{2x}}$$

$$= \frac{k(x-a)(2-x+a)}{e^x}$$

$$= \frac{-k(x-a)(x-a-2)}{e^x}$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{e^x} \right\}' = 0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=a+2$$

함수 $\frac{f(x)}{e^x}$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$\left\{ \frac{f(x)}{e^x} \right\}'$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{f(x)}{e^x}$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $\frac{f(x)}{e^x}$ 는 $x=a+2$ 에서 극대이므로

$$\beta = \frac{f(a+2)}{e^{a+2}} = \frac{k(a+2-a)^2}{e^{a+2}} = \frac{4k}{e^{a+2}}$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4k}{e^{a+2}}}{\frac{1}{4ke^{a-2}}} = \frac{1}{e^{2a}}$$

따라서 $\frac{1}{e^{2a}} = e^2$ 이므로 $2a = -2$

$$\therefore a = -1$$

답 -1

16

$a = -2$ 일 때, 구간 $[0, 4)$ 에서 $f(x) = -x - 2$ 이므로 $x=0$ 에서 극솟값을 갖지 않는다.*

$$\therefore a \neq -2$$

$$f(x) = -\frac{(x-a)^2}{x+2} \text{에서}$$

$$f'(x) = -\frac{2(x-a)(x+2) - (x-a)^2}{(x+2)^2}$$

$$= -\frac{(x-a)(2x+4-x+a)}{(x+2)^2}$$

$$= -\frac{(x-a)(x+4+a)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=-a-4$$

(i) $a < -a-4$, 즉 $a < -2$ 일 때,

$x = -a-4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -a-2$ 에서 극댓값을 갖는다.

구간 $[0, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 가지므로 열린구간 $(0, 4)$ 에서 극댓값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x = -a-4$ 에서 극대이므로

$$0 < -a-4 < 4 \quad \therefore -8 < a < -4$$

(ii) $a > -a-4$, 즉 $a > -2$ 일 때,

$x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

구간 $[0, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 열린구간 $(0, 4)$ 에서 극댓값을 가져야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이므로

$$0 < a < 4$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-8 < a < -4 \text{ 또는 } 0 < a < 4$$

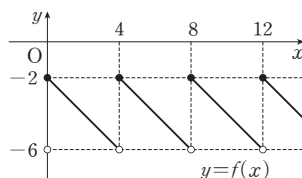
따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-7, -6, -5, 1, 2, 3$ 이므로 그 합은

$$-7 + (-6) + (-5) + 1 + 2 + 3 = -12$$

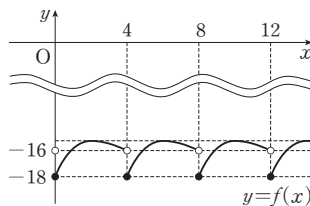
답 ②

풀이첨삭

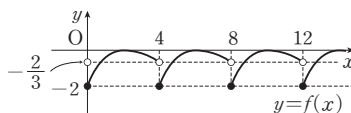
* $a = -2$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $x=0$ 에서 극솟값을 갖지 않는다.



(i) $a = -6$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.



(ii) $a = 2$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.



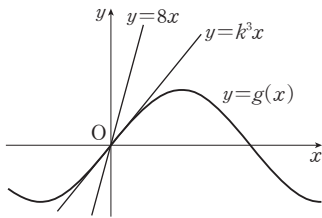
17

$$f(x) = 3 \sin kx + 4x^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3k \cos kx + 12x^2$$

$$f''(x) = -3k^2 \sin kx + 24x$$

$f''(x)=0$ 에서 $3k^2 \sin kx = 24x \quad \therefore k^2 \sin kx = 8x$
 $g(x) = k^2 \sin kx$ 라 하면 곡선 $y=g(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=8x$ 가 원점에서 만난다.
 이때, 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 오직 하나 존재하므로 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 변곡점을 갖고, 그 이외의 변곡점은 존재하지 않는다.
 즉, 직선 $y=8x$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 $x=0$ 에서만 만나야 하므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 8 이하이어야 한다.



$$g'(x) = k^3 \cos kx \text{에서 } g'(0) = k^3 \text{이므로}$$

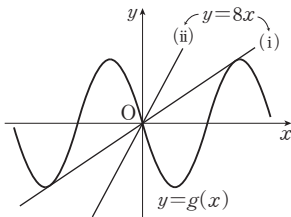
$$k^3 \leq 8 \quad \therefore k \leq 2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.

답 2

보충설명

$k < 0$ 일 때는 다음 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=8x$ 가 (i) 접하거나 (ii) $x=0$ 에서만 만나야 한다.



즉, $k < 0$ 일 때도 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 갖도록 하는 k 의 값이 존재하지만 구하는 것이 k 의 최댓값이므로 $k < 0$ 일 때는 고려하지 않아도 된다.

18

$$f(x) = (x-a)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x$$

조건 (가)에서 $f'(2) = 0$ 이므로

$$(3-a)e^2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = (x-3)e^x$$

조건 (나)에서 $x < k$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하고, $x > k$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하므로 점 $(k, f(k))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.*

$$f'(x) = (x-2)e^x \text{에서}$$

$$f''(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=1$ 이고, $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=1$ 에서 변곡점을 갖는다. 따라서 $k=1$ 이므로

$$f(2k) = f(2) = -e^2$$

답 $-e^2$

풀이첨삭

*에서 곡선 $y=f(x)$ 가 $x=k$ 에서 오직 하나의 변곡점을 가질 때, 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(k) = f'(k)(x-k) \quad \therefore y = f'(k)(x-k) + f(k)$
 즉, $g(x) = f'(k)(x-k) + f(k)$ 이다.

조건 (나)에서

(i) $x < k$ 일 때,

$$f(x) < g(x) \text{이므로 } f(x) < f'(k)(x-k) + f(k)$$

$$f(x) - f(k) < f'(k)(x-k)$$

$$\therefore \frac{f(x) - f(k)}{x-k} > f'(k) \quad (\because x < k)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 오른쪽

그림과 같이 위로 볼록하므로

$$f''(x) < 0$$

(ii) $x > k$ 일 때,

$$f(x) > g(x) \text{이므로}$$

$$f(x) > f'(k)(x-k) + f(k)$$

$$f(x) - f(k) > f'(k)(x-k)$$

$$\therefore \frac{f(x) - f(k)}{x-k} > f'(k) \quad (\because x > k)$$

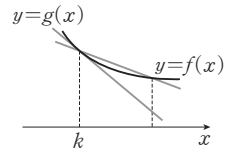
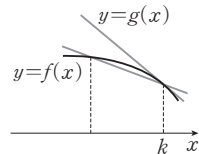
따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 오른쪽

그림과 같이 아래로 볼록하므로

$$f''(x) > 0$$

(i), (ii)에서 $x=k$ 의 좌우에서 $f''(x)$

의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=k$ 에서 변곡점을 갖는다.



19

$$f(x) = ax\sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} \text{라 하면 두 곡선 } y=f(x),$$

$y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값과 같다.

$$\text{즉, } ax\sqrt{x}=\sqrt{x}\text{에서 } \sqrt{x}(ax-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{a}$$

이때, 점 P는 원점이 아니므로

$$P\left(\frac{1}{a}, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$$

$$\text{한편, } f'(x)=\frac{3}{2}a\sqrt{x}, g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{이므로 두 접선 } l, m$$

의 기울기는 각각

$$f'\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{a}, g'\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2 라 하면

$$\tan \theta_1=\frac{3}{2}\sqrt{a}, \tan \theta_2=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

이므로 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를

$$\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{라 할 때}$$

$$\tan \theta = |\tan(\theta_1 - \theta_2)| = \left| \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{3}{2}\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a}}{2}}{1 + \frac{3}{2}\sqrt{a} \times \frac{\sqrt{a}}{2}} \right| = \frac{\sqrt{a}}{1 + \frac{3}{4}a}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{4}\sqrt{a}}$$

이때, θ 의 크기가 최대하려면 $\tan \theta$ 의 값이 최대이어야 하므로

$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{4}\sqrt{a}$ 의 값이 최소이어야 한다.

$\sqrt{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{4}\sqrt{a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{3}{4}\sqrt{a}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{4}\sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때, 등호는 $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{3}{4}\sqrt{a}$ 일 때 성립하므로

$$3a=4 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$$

따라서 $P\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로

$$f'\left(\frac{3}{4}\right)=\sqrt{3}, g'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에서 직선 l 의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

①에서 직선 m 의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 직선 l 의 y 절편은 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, 직선 m 의 y 절편은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이

므로

$$Q\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), R\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\therefore \overline{QR} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

20

$f(x) = \cos^2 x$ 라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x \times (-\sin x) = -2\sin x \cos x \\ &= -\sin 2x \end{aligned}$$

점 P에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 두 접선의 접점의 좌표를 각

각 $(t_1, \cos^2 t_1), (t_2, \cos^2 t_2) \left(-\frac{\pi}{2} \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

접선의 기울기는 각각

$$f'(t_1) = -\sin 2t_1, f'(t_2) = -\sin 2t_2$$

이때, 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t_1) \times f'(t_2) = -1$ 에서

$$\sin 2t_1 \times \sin 2t_2 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, 모든 실수 t 에 대하여 $-1 \leq \sin 2t \leq 1$ 이므로 ①에서

$$\sin 2t_1 = -1, \sin 2t_2 = 1 \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore t_1 = -\frac{\pi}{4}, t_2 = \frac{\pi}{4}$$

점 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y - \frac{1}{2} = x + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore y = x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

㉔, ㉔을 연립하여 풀면

$$x=0, y=\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

따라서 $P\left(0, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a=0, b=\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b=0+\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

답 $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

21

함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \alpha]$ 에서 감소하므로

$$0 < x \leq \alpha \text{에서 } f'(x) \leq 0$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x-1}} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{2x-1} \sin x - 2e^{2x-1} \cos x}{(e^{2x-1})^2} \\ &= -\frac{\sin x + 2 \cos x}{e^{2x-1}} \end{aligned}$$

$$-\frac{\sin x + 2 \cos x}{e^{2x-1}} \leq 0 \text{에서 } e^{2x-1} > 0 \text{이므로}$$

$$-(\sin x + 2 \cos x) \leq 0$$

$$\therefore \sin x + 2 \cos x \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$\sin x > 0, \cos x \geq 0$ 이므로 부등식 ①을 만족시킨다.

(ii) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 일 때,

$\cos x < 0$ 이므로 ①의 양변을 $\cos x$ 로 나누면

$$\tan x + 2 \leq 0 \quad \therefore \tan x \leq -2$$

즉, $\tan k = -2$ 인 k 에 대하여 $\frac{\pi}{2} < x \leq k$ 일 때, 부등식

①을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $(0, k]$ 이므로

$$\alpha = k$$

$$\text{즉, } \tan \alpha = \tan k = -2 \text{이므로}$$

$$\cot \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \csc^2 \alpha = \cot^2 \alpha + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

22

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)e^x - x & (x < 1) \\ -1 & (x = 1) \text{이므로} \\ (x-1)e^x - x & (x > 1) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -xe^x - 1 & (x < 1) \\ xe^x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -(1+x)e^x & (x < 1) \\ (1+x)e^x & (x > 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)e^x - x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (e^x - 1) = e - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)e^x - x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-e^x - 1) = -e - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{이므로 함}$$

수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (참)

ㄴ. $x > 1$ 일 때,

$f'(x) = (1+x)e^x > 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 $x > 1$ 에서 증가하고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (xe^x - 1) = e - 1 > 0$$

따라서 $x > 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄷ. $x < 1$ 일 때,

$$f''(x) = -(1+x)e^x$$

이때, $e^x > 0$ 이므로 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -1$

$$x < -1 \text{일 때, } f''(x) > 0$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } f''(x) < 0$$

이므로 $-1 < x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 위로 볼록하다.

따라서 β 의 최댓값은 1, α 의 최솟값은 -1 이므로

$\beta - \alpha$ 의 최댓값은

$$1 - (-1) = 2 \text{ (거짓)}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

23

$$g(x) = \sin(x^2 + ax + b) \text{이므로}$$

$$g'(x) = (2x + a) \cos(x^2 + ax + b)$$

조건 ㉠에서 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = -g'(x)$ 이므로

$$(-2x + a) \cos(x^2 - ax + b)$$

$$= -(2x + a) \cos(x^2 + ax + b)$$

이 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하여 정리하면 $a \cos b = 0$

$$0 < b < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos b \neq 0 \quad \therefore a = 0$$

즉, $g(x) = \sin(x^2 + b)$ 이므로

$$g'(x) = 2x \cos(x^2 + b)$$

$$g''(x) = 2 \cos(x^2 + b) - 4x^2 \sin(x^2 + b)$$

조건 ㉡에서 점 $(k, g(k))$ 는 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이므로

$$g''(k) = 0 \text{에서}$$

$$2 \cos(k^2 + b) - 4k^2 \sin(k^2 + b) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $k=0$ 이면 $2 \cos b = 0$

그런데 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 이 성립하지 않는다.

또한, $\cos(k^2 + b) = 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $4k^2 \sin(k^2 + b) = 0$ 이므로 $\sin(k^2 + b) = 0$ ($\because k \neq 0$)

이때, $\sin^2(k^2 + b) + \cos^2(k^2 + b) = 1$ 이 성립하지 않는다.

$$\therefore k \neq 0, \cos(k^2 + b) \neq 0$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $4k^2 \sin(k^2 + b) = 2 \cos(k^2 + b)$

$$\therefore \tan(k^2 + b) = \frac{1}{2k^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

조건 ㉢에서 $2kg(k) = \sqrt{3}g'(k)$ 이므로

$$2k \sin(k^2 + b) = 2\sqrt{3}k \cos(k^2 + b)$$

$$\therefore \tan(k^2 + b) = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$\frac{1}{2k^2} = \sqrt{3} \quad \therefore k^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

이것을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + b\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{이때, } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{6} + b = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore a + b = 0 + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

답 ③

24

$$f(x) = e^{-x} \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$= -e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = e^{-x} (\sin x + \cos x) - e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^{-x} \sin x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 2e^{-x} \sin x = 0$$

이때, $e^{-x} > 0$ 이므로

$$\sin x = 0$$

$$\therefore x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots (\because x > -\pi)$$

이때의 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

$x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 는 변곡점을 갖는다.

$$\therefore a_n = (n-1)\pi$$

즉,

$$f(a_n) = e^{-a_n} \cos a_n$$

$$= e^{-(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi$$

$$= e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a_n, f(a_n))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(a_n) = -e^{-a_n} (\sin a_n + \cos a_n)$$

$$= -e^{-(n-1)\pi} \{\sin(n-1)\pi + \cos(n-1)\pi\}$$

$$= -e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1} = -e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1} \{x - (n-1)\pi\}$$

이 직선의 x 절편이 b_n 이므로

$$-e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1} = -e^{(1-n)\pi} (-1)^{n+1} \{b_n - (n-1)\pi\}$$

$$\therefore b_n = (n-1)\pi + 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{a_n + b_n - 1}{\pi} = \sum_{n=1}^{10} \frac{(n-1)\pi + (n-1)\pi + 1 - 1}{\pi}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{2(n-1)\pi}{\pi}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{10} (n-1)$$

$$= 2 \times \left(\frac{10 \times 11}{2} - 10 \right)$$

$$= 90$$

답 90

01-1 풀이참조 01-2 $\neg, \perp$ 02-1 (1) 최댓값: $\frac{1}{2}$,

최솟값: -1 (2) 최댓값: $4-\sqrt{5}$, 최솟값: $-\frac{5}{4}$

02-2 4 03-1 (1) 최댓값: $\frac{1}{e}$, 최솟값: $-e$

(2) 최댓값: e , 최솟값: $-\frac{1}{e}$ 03-2 3

04-1 (1) 최댓값: 4π , 최솟값: 0 (2) 최댓값: $2e^{\frac{\pi}{3}}$,

최솟값: $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 04-2 2 05-1 $1+\frac{1}{e}$

05-2 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 06-1 2 06-2 1

06-3 6 07-1 (1) $k \leq 2$ (2) $-e^2$

07-2 $2e^3$ 08-1 속력: $\frac{3}{2}$, 가속도의 크기: 0

08-2 $2\sqrt{3}-2$ 09-1 $a=1$, 가속도의 크기: 1

09-2 $t=\frac{3}{2}$, 가속도의 크기: $2e^{\frac{3}{2}}$

10-1 속도: $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 가속도: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

10-2 속도: $(2, 0)$, 가속도: $(0, 4)$

01-1

(1) (i) $f(x)=x^2 \ln|x|$ 라 하면 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이다.

(ii) $x \neq 0$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$(iii) f'(x)=2x \ln|x| + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$=2x \ln|x| + x$$

$$=x(2 \ln|x| + 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln|x|=-\frac{1}{2} \quad (\because x \neq 0)$$

$$\therefore x=-\frac{1}{\sqrt{e}} \text{ 또는 } x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(iv) f''(x)=2 \ln|x| + 1 + x \times \frac{2}{x}$$

$$=2 \ln|x| + 3$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } \ln|x|=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{1}{e\sqrt{e}} \text{ 또는 } x=\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

즉, $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소 및 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	-	-	0	+
$f''(x)$		-	0	+	+	+
$f(x)$		$\searrow$	변곡점	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{1}{\sqrt{e}}$, $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 에서 극솟값

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e} \text{을 갖고,}$$

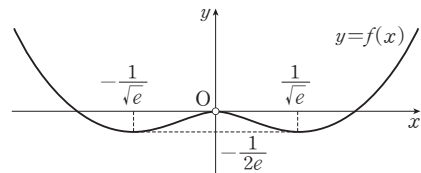
$$f\left(-\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)=f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)=-\frac{3}{2e^3} \text{이므로 변곡점의 좌}$$

$$\text{표는 } \left(-\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right), \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right) \text{이다.}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln|x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \ln|x| = \infty$$

(i)~(v)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



(2) (i) $f(x)=x\sqrt{x+1}$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -1\}$ 이다.

$$(ii) f'(x)=\sqrt{x+1}+x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3}$$

$$(iii) f''(x)=\frac{3 \times 2\sqrt{x+1} - (3x+2) \times \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)}$$

$$=\frac{6(x+1) - (3x+2)}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$x>-1 \text{에서 } f''(x)>0$$

즉, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소 및 오목과 볼록을 표로

나타내면 다음과 같다.

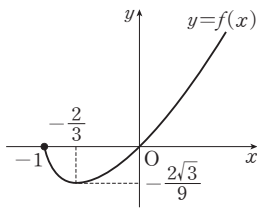
x	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{2}{3}$ 에서 극솟값

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \text{을 갖는다.}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{x+1} = \infty$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



답 풀이참조

풀이첨삭

*에서 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln |x|$ 의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

[방법 1] 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

[방법 2] $x^2 = \frac{1}{t}$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln |x| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{\frac{1}{t}}}{t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

01-2

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 이계도함수를 가지므로 $f'(x)$ 는 미분가능한 함수이다.

이때, $f''(b)=0$, $f''(0)=0$, $f''(c)=0$, $f''(e)=0$ 이고, 이 각각의 점의 x 좌표의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 4개이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $a, 0, d, f$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	0	...	d	...	f	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서만 극대이므로 닫힌구간

$[a, e]$ 에서 $f(x)$ 가 극대가 되는 x 의 개수는 1이다. (참)

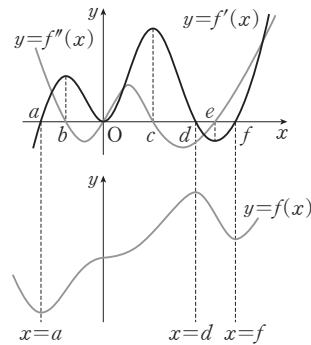
ㄷ. ㄴ에 의하여 닫힌구간 $[a, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(d)$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

보충설명

주어진 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 다음 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=f''(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.



02-1

(1) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+2x+3) - (2x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2x+3)^2} \\ &= -\frac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2x+3)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-3, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{5}{6}$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$	$\frac{5}{11}$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(1) = \frac{1}{2}, \text{ 최솟값은 } f(-2) = -1 \text{이다.}$$

(2) $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ 이라 하면

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 1, 2\sqrt{x+1} = 1$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$4(x+1) = 1, 4x = -3 \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{3}{4}$	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-1	\	$-\frac{5}{4}$ 극소	/	$4-\sqrt{5}$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(4) = 4 - \sqrt{5}, \text{ 최솟값은 } f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{4} \text{이다.}$$

답 (1) 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : -1

(2) 최댓값 : $4 - \sqrt{5}$, 최솟값 : $-\frac{5}{4}$

02-2

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1} + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - 2x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$k - \frac{6}{7}$	\	$k - 2$ 극소	/	$k + \frac{2}{3}$ 극대	\	$k + \frac{6}{13}$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(-1) = k - 2 \text{이므로}$$

$$k - 2 = 2 \quad \therefore k = 4$$

답 4

03-1

(1) $f(x) = xe^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

닫힌구간 $[-1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	e
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-e$	/	$\frac{1}{e}$ 극대	\	e^{-e+1}

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(1) = \frac{1}{e} \text{이고, 최솟값은 } f(-1) = -e \text{이다.}$$

(2) $f(x) = x \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

또한, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ 이므로 구간 $(0, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\	$-\frac{1}{e}$ 극소	/	e

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(e) = e, \text{ 최솟값은 } f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \text{이다.}$$

답 (1) 최댓값 : $\frac{1}{e}$, 최솟값 : $-e$

(2) 최댓값 : e , 최솟값 : $-\frac{1}{e}$

풀이첨삭

*에서 $x=e^{-t}$ 으로 놓으면 $t=-\ln x$ 에서
 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \times (-t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t}$$

이때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$

03-2

$$f(x) = (\ln x)^3 - a(\ln x)^2 + \ln x^4 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x} - 2a \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{4}{x} \\ &= \frac{3(\ln x)^2 - 2a \ln x + 4}{x} \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 $x=e^2$ 에서 극값을 가지므로

$$\begin{aligned} f'(e^2) &= \frac{3 \times 2^2 - 2a \times 2 + 4}{e^2} \\ &= \frac{16 - 4a}{e^2} = 0 \end{aligned}$$

$$16 - 4a = 0 \quad \therefore a = 4$$

즉,

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 + 4 \ln x \\ &= \ln x (\ln x - 2)^2 \\ f'(x) &= \frac{3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 4}{x} \\ &= \frac{(3 \ln x - 2)(\ln x - 2)}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } \ln x = 2$$

$$\therefore x = e^{\frac{2}{3}} \text{ 또는 } x = e^2$$

닫힌구간 $[1, e^3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$e^{\frac{2}{3}}$	...	e^2	...	e^3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{32}{27}$ 극대	↘	0 극소	↗	3

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(e^3) = 3$,
 최솟값은 $f(1) = f(e^2) = 0$ 이므로 구하는 값은 $3 + 0 = 3$

답 3

다른풀이

$\ln x = t$ ($0 \leq t \leq 3$)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln x)^3 - a(\ln x)^2 + \ln x^4 \\ &= t^3 - at^2 + 4t \end{aligned}$$

이때, $g(t) = t^3 - at^2 + 4t$ 라 하면

$$g'(t) = 3t^2 - 2at + 4$$

함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 극값을 가지므로

$$g'(2) = 12 - 4a + 4 = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore g(t) = t^3 - 4t^2 + 4t$$

즉, $g'(t) = 3t^2 - 8t + 4 = (3t - 2)(t - 2)$ 이므로

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{2}{3} \text{ 또는 } t = 2$$

$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...	3
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{27}$ 극대	↘	0 극소	↗	3

$0 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(3) = 3$, 최솟값은
 $g(0) = g(2) = 0$ 이므로 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓
 값과 최솟값 역시 각각 3, 0이다.

따라서 구하는 값은

$$3 + 0 = 3$$

04-1

(1) $f(x) = 2x - \sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 - 2\cos 2x$$

이때, $0 < x < 2\pi$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 함수
 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2\pi) = 4\pi$, 최솟값은
 $f(0) = 0$ 이다.

(2) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cos x - e^x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x + \sin x = 0, \tan x = -1$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$2e^{-\frac{\pi}{3}}$	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 극소	$\nearrow$	$2e^{\frac{\pi}{3}}$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}}, \text{ 최솟값은 } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} \text{이다.}$$

답 (1) 최댓값 : 4π , 최솟값 : 0

(2) 최댓값 : $2e^{\frac{\pi}{3}}$, 최솟값 : $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

04-2

$f(x) = x + \sin 2x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + 2\cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \left(\because 0 \leq x \leq \pi \right)$$

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\dots$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	k	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + k$ 극대	$\searrow$	$\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + k$ 극소	$\nearrow$	$\pi + k$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(\pi) = \pi + k, \text{ 최솟값은 } f(0) = k \text{이다.}$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $\pi + 4$ 이므로

$$\pi + k + k = \pi + 4, 2k = 4 \quad \therefore k = 2$$

답 2

05-1

점 P의 x좌표를 a ($a > 0$)라 하면

$$\overline{PQ} = \frac{1}{a} - \ln a, \overline{PR} = a$$

이므로 직사각형 PQSR의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \ln a \right) \times a$$

$$= 1 - a \ln a$$

$$\therefore S'(a) = -\ln a - a \times \frac{1}{a}$$

$$= -\ln a - 1$$

$$S'(a) = 0 \text{에서 } \ln a = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{e}$$

함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\dots$	$\frac{1}{e}$	$\dots$
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		$\nearrow$	$1 + \frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$

함수 $S(a)$ 는 $a = \frac{1}{e}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $S(a)$ 의

최댓값은

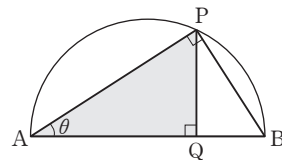
$$S\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \frac{1}{e}$$

따라서 직사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 $1 + \frac{1}{e}$ 이다.

답 $1 + \frac{1}{e}$

05-2

다음 그림과 같이 선분 PB를 그으면 $\triangle ABP$ 는 직각삼각형이다.



$\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면 직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

즉, 직각삼각형 AQP에서

$$\overline{AQ} = \overline{AP} \cos \theta = 2 \cos^2 \theta$$

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

이때, 삼각형 AQP의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{PQ} = 2\cos^3\theta \sin\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(\theta) &= -6\cos^2\theta \sin^2\theta + 2\cos^4\theta \\ &= -6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + 2\cos^4\theta \\ &= 8\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta(2\cos\theta + \sqrt{3})(2\cos\theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$S'(\theta)=0 \text{에서 } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$(\frac{\pi}{2})$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		/	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 극대	\	

함수 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $S(\theta)$ 의 최댓값은

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

따라서 삼각형 AQP의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 이다.

답 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

06-1

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x + 2 \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + (x^2 - 3)e^x \\ &= (x^2 + 2x - 3)e^x \\ &= (x+3)(x-1)e^x \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

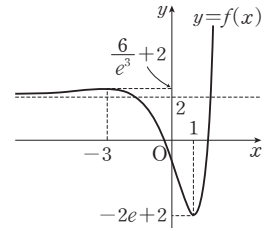
x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	$\frac{6}{e^3} + 2$ 극대	\	$-2e + 2$ 극소	/

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{(x^2 - 3)e^x + 2\} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{(x^2 - 3)e^x + 2\} = \infty \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같이 x 축과
두 점에서 만난다. 따라서 주
어진 방정식의 서로 다른 실
근의 개수는 2이다.



답 2

06-2

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \text{이므로 } \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{이때, } -\csc x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cot x \text{에서}$$

$$-\frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \quad (\because \sin x > 0)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x - 1 = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x - 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

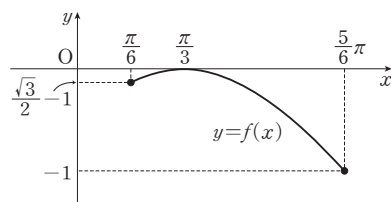
$$f'(x)=0 \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\text{즉, } \tan x = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \right)$$

단현구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{6}\pi$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$	/	0 극대	\	-1



함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같이 x 축과 한 점에
서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 1

다른풀이

$$-\csc x + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cot x \text{에서}$$

$$\csc x - \frac{1}{2} \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g(x) = \csc x - \frac{1}{2} \cot x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = -\csc x \cot x + \frac{1}{2} \csc^2 x$$

$$= \frac{1}{2} \csc x (\csc x - 2 \cot x)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } \csc x - 2 \cot x = 0 \quad (\because \csc x > 0)$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{2 \cos x}{\sin x} = 0, \quad 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \right)$$

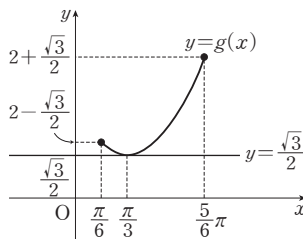
단한구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로
나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{6}\pi$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소	$\nearrow$	$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프
는 오른쪽 그림과 같이

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 한 점에

서 만나므로 주어진 방정
식의 서로 다른 실근의
개수는 1이다.



06-3

$$\sin x - x \cos x - k = 0 \text{에서 } \sin x - x \cos x = k$$

$$f(x) = \sin x - x \cos x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x \\ = x \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } \sin x=0$$

$$\therefore x=\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

단한구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나
타내면 다음과 같다.

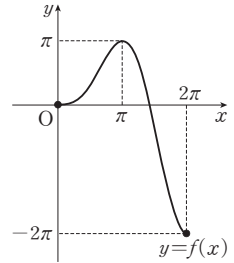
x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	π 극대	$\searrow$	-2π

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른
쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$
와의 교점이 2개가 되도록 하는
 k 의 값의 범위는

$$0 \leq k < \pi$$

따라서 조건을 만족시키는 정수
 k 는 0, 1, 2, 3이므로 구하는
합은

$$0+1+2+3=6$$



답 6

07-1

$$(1) f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x>0 \text{이므로 } \sqrt{x}-1=0$$

$$\therefore x=1$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다
음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$2-k$ 극소	$\nearrow$

즉, $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1)=2-k$ 이므로
 $2-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 2$

$$(2) h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = e^x - e^2 x - k \text{에서}$$

$$h'(x) = e^x - e^2$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } e^x=e^2 \quad \therefore x=2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\	$-e^2-k$ 극소	/

즉, 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(2) = -e^2 - k$ 이므로
 $f(x) \geq g(x)$, 즉 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $-e^2 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq -e^2$
따라서 실수 k 의 최댓값은 $-e^2$ 이다.

답 (1) $k \leq 2$ (2) $-e^2$

07-2

$$\frac{ax+2}{2} \leq e^x + 1 \leq \frac{bx+2}{2} \text{에서}$$

$$ax+2 \leq 2e^x+2 \leq bx+2$$

$$ax \leq 2e^x \leq bx$$

$$\therefore a \leq \frac{2e^x}{x} \leq b \quad (\because 1 \leq x \leq 2)$$

$$f(x) = \frac{2e^x}{x} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - 2e^x}{x^2} = \frac{2(x-1)e^x}{x^2}$$

$1 < x < 2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = 2e$ 이고, 최댓값은
 $f(2) = e^2$ 이다.

따라서 a 의 최댓값 M 은 $2e$, b 의 최솟값 m 은 e^2 이므로
 $Mm = 2e \times e^2 = 2e^3$

답 $2e^3$

08-1

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x = 2t - \ln(t^2 + 4)$ 이므로 속
도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = 2 - \frac{2t}{t^2 + 4},$$

$$a = -\frac{2(t^2 + 4) - 2t \times 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{2t^2 - 8}{(t^2 + 4)^2}$$

따라서 $t = 2$ 에서의 점 P의 속력은

$$|v| = \left| 2 - \frac{2 \times 2}{2^2 + 4} \right| = \frac{3}{2}$$

또한, $t = 2$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$|a| = \left| \frac{2 \times 2^2 - 8}{(2^2 + 4)^2} \right| = 0$$

답 속력 : $\frac{3}{2}$, 가속도의 크기 : 0

08-2

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치가 각각

$$f(t) = \cos 2t - \sin 2t, \quad g(t) = t - \sin 2t \text{이므로}$$

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = -2\sin 2t - 2\cos 2t,$$

$$g'(t) = 1 - 2\cos 2t$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$-2\sin 2t - 2\cos 2t = 1 - 2\cos 2t$$

$$\sin 2t = -\frac{1}{2}$$

$$2t = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \dots (\because t > 0)$$

$$\therefore t = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \dots$$

즉, 두 점 P, Q의 속도가 처음으로 같아지는 시각은 $t = \frac{7}{12}\pi$

이다.

이때, 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$f''(t) = -4\cos 2t + 4\sin 2t$$

이므로 $t = \frac{7}{12}\pi$ 에서의 점 P의 가속도는

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{7}{12}\pi\right) &= -4\cos \frac{7}{6}\pi + 4\sin \frac{7}{6}\pi \\ &= -4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3} - 2$

09-1

점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = a \cos t, \quad y = t - \sin t$$

이므로

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$$

즉, 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(-a \sin t, 1 - \cos t)$$

이므로 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서의 속도는

$$\left(-a \sin \frac{\pi}{3}, 1 - \cos \frac{\pi}{3}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}\right)$$

이때, $t = \frac{\pi}{3}$ 에서의 속력이 1이므로

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4} = 1, \quad a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

또한, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점

P의 가속도는 $(-\cos t, \sin t)$ *

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(-\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right), \quad \text{즉} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

즉, 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

답 $a=1$, 가속도의 크기 : 1

풀이첨삭

*에서 시각 t 에서의 점 P의 가속도가 $(-\cos t, \sin t)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

따라서 점 P의 가속도는 시각에 관계없이 항상 1이다.

09-2

점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t$$

이므로

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t$$

$$= e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$= e^t (\sin t + \cos t)$$

즉, 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t))$$

이므로 속력은

$$\sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2}$$

$$= e^t \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2} e^t$$

점 P의 속력이 $e\sqrt{2}e$ 이므로

$$\sqrt{2} e^t = e\sqrt{2}e \text{에서}$$

$$e^t = e\sqrt{e} \quad \therefore t = \frac{3}{2}$$

한편,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t)$$

$$= -2e^t \sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\sin t + \cos t) + e^t (\cos t - \sin t)$$

$$= 2e^t \cos t$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$$

즉, 가속도의 크기는

$$\sqrt{4e^{2t} \sin^2 t + 4e^{2t} \cos^2 t} = 2e^t$$

따라서 $t = \frac{3}{2}$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는 $2e^{\frac{3}{2}}$ 이다.

답 $t = \frac{3}{2}$, 가속도의 크기 : $2e^{\frac{3}{2}}$

10-1

동경 OP의 길이가 2이고, 점 P는 원 위를 시계 방향으로 매 초 2의 일정한 속력으로 움직이므로 시각 t 에서의 점 P의 위치 (x, y) 는

$$x = 2 \cos(-t) = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin(-t) = -2 \sin t$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \cos t$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(-2 \sin t, -2 \cos t)$$

$$\text{즉, } t = \frac{\pi}{4} \text{에서의 속도는 } \left(-2 \sin \frac{\pi}{4}, -2 \cos \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

또한, $\frac{d^2x}{dt^2} = -2 \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \sin t$ 이므로 시각 t 에서의

점 P의 가속도는

$$(-2 \cos t, 2 \sin t)$$

$$\text{즉, } t = \frac{\pi}{4} \text{에서의 가속도는 } \left(-2 \cos \frac{\pi}{4}, 2 \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

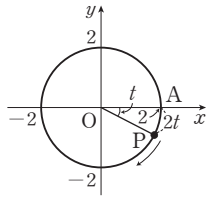
$$\therefore (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

답 속도 : $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 가속도 : $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

풀이첨삭

*에서 오른쪽 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 을 A라 하면 점 P는 매초 2의 속력으로 움직이므로 t 초 후의 호 AP의 길이는 $2t$ 이다.

이때, 동경 OP의 길이가 2이고, 점 P는 원 위를 시계 방향으로 회전하므로 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 $-t$ 이다.



10-2

동경 OP의 길이가 1이고, 점 P는 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직이므로 시각 t 에서의 점 P의 위치 (x_P, y_P) 는

$$x_P = \cos 2t, \quad y_P = \sin 2t$$

또한, 동경 OQ의 길이가 1이고, 점 Q는 점 P가 출발하고 $\frac{\pi}{4}$ 초 후에 원 위를 시계 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직이므로 시각 t ($t \geq \frac{\pi}{4}$)에서의 점 Q의 위치 (x_Q, y_Q) 는

$$x_Q = \cos \left\{ -\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right\} = \cos \left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_Q = \sin \left\{ -\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right\} = -\sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

이때, 점 Q가 점 A를 출발한 후에 두 점 P, Q가 처음으로 만난 시각을 t 라 하면

$$\cos 2t = \cos \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1},$$

$$\sin 2t = -\sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } t = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \left(\because t \geq \frac{\pi}{4} \right)$$

즉, 두 점 P, Q가 처음 만난 시각은

$$t = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{12} = \frac{3}{4}\pi$$

한편, $\frac{dx_P}{dt} = -2\sin 2t$, $\frac{dy_P}{dt} = 2\cos 2t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(-2\sin 2t, 2\cos 2t)$

$$\text{즉, } t = \frac{3}{4}\pi \text{에서의 속도는 } \left(-2\sin \frac{3}{2}\pi, 2\cos \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore (2, 0)$$

$$\text{또한, } \frac{d^2x_P}{dt^2} = -4\cos 2t, \quad \frac{d^2y_P}{dt^2} = -4\sin 2t \text{이므로 시각 } t$$

$$\text{에서의 점 P의 가속도는 } (-4\cos 2t, -4\sin 2t)$$

$$\text{즉, } t = \frac{3}{4}\pi \text{에서의 가속도는 } \left(-4\cos \frac{3}{2}\pi, -4\sin \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore (0, 4)$$

$$\text{답 속도 : } (2, 0), \text{ 가속도 : } (0, 4)$$

풀이첨삭

*에서

(i) $\cos a = \cos b$ 라 하면

$$b = 2n\pi \pm a \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$2t = 2n\pi \pm \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore t = 2n\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad t = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{12}$$

(ii) $\sin a = -\sin b$ 라 하면

$$b = m\pi + (-1)^{m+1} \times a \quad (m \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$2t = m\pi + (-1)^{m+1} \times \left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$m = 2n \quad (n \text{은 정수}) \text{일 때, } t = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{12}$$

$$m = 2n - 1 \quad (n \text{은 정수}) \text{일 때, } t = (2n - 1)\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } t = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} \quad (n \text{은 정수}) \text{이다.}$$

다른풀이

점 P가 점 A를 출발하고 $\frac{\pi}{4}$ 초 후에 점 Q가 점 A를 출발하므로 점 Q가 출발하고 t 초가 지났을 때는 점 P가 출발하고 $\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ 초가 지났을 때이다.

점 Q가 출발하고 t 초 후 동경 OQ가 나타내는 각의 크기는 $(2\pi - t)$ 이므로 점 Q의 위치 (x_Q, y_Q) 는

$$x_Q = \cos(2\pi - t), \quad y_Q = \sin(2\pi - t)$$

$$\text{즉, } x_Q = \cos t, \quad y_Q = -\sin t$$

점 Q가 출발하고 t 초 후, 즉 점 P가 출발하고 $\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ 초 후

동경 OP가 나타내는 각의 크기는 $2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ 이므로 점 P의 위치 (x_P, y_P) 는

$$x_P = \cos \left\{ 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right\}, \quad y_P = \sin \left\{ 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\text{즉, } x_P = -\sin 2t, \quad y_P = \cos 2t$$

점 Q가 출발하고 두 점 P, Q가 처음으로 만났으므로

$$\cos t = -\sin 2t, \quad -\sin t = \cos 2t$$

$$\cos t = -\sin 2t \text{에서 } \cos t = -2\sin t \cos t$$

$$\therefore \cos t = 0 \quad \text{또는} \quad \sin t = -\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, $-\sin t = \cos 2t$ 에서 $-\sin t = 1 - 2\sin^2 t$
 $2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0, (2\sin t + 1)(\sin t - 1) = 0$
 $\therefore \sin t = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin t = 1$ ㉞

㉞, ㉞을 만족시키는 t 의 값은

$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

따라서 두 점 P, Q가 처음 만난 시각은 $t = \frac{\pi}{2}$ 이다.

한편, $\frac{dx_P}{dt} = -2\cos 2t, \frac{dy_P}{dt} = -2\sin 2t$ 이므로 시각 t 에
 서의 점 P의 속도는 $(-2\cos 2t, -2\sin 2t)$

즉, $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 속도는 $(2, 0)$

또한, $\frac{d^2x_P}{dt^2} = 4\sin 2t, \frac{d^2y_P}{dt^2} = -4\cos 2t$ 이므로 시각 t 에
 서의 점 P의 가속도는 $(4\sin 2t, -4\cos 2t)$

즉, $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 가속도는 $(0, 4)$



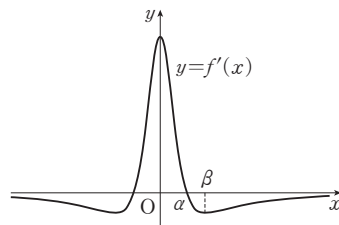
개 념 마 무 리

본문 pp.212~215

01 ③	02 4	03 4	04 e
05 ⑤	06 ②	07 1	08 ②
09 308	10 34	11 $e\sqrt{e}$	12 ⑤
13 10	14 3	15 $2e$	16 ⑤
17 2	18 11	19 e	20 5
21 $-\frac{1}{2e}$	22 2	23 90	

01

- ㄱ. $f'(a)=0$ 이고, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)
- ㄴ. 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소만 알 수 있다. 즉, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 알 수 없다. (거짓)
- ㄷ. $f''(\beta)=0$ ($\beta>0$)이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 변곡점을 갖고, 곡선 $y=f'(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극값을 갖는다. 즉, 다음 그림에서 $\alpha<\beta$ 임을 알 수 있다.



이때, 함수 $f'(x)$ 가 $0<x<\beta$ 에서 감소하므로

$0<x<\beta$ 일 때, $f''(x)<0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $0<x<\beta$ 에서 위로 볼록하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

02

$f(x) = \frac{x+2}{x^2+5}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+5) - 2x(x+2)}{(x^2+5)^2} \\ &= -\frac{x^2+4x-5}{(x^2+5)^2} \\ &= -\frac{(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because 0 \leq x \leq a$)

(i) $0 < a \leq 1$ 일 때,

닫힌구간 $[0, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{a+2}{a^2+5}$

주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{2}{5}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a > 1$ 일 때,

닫힌구간 $[0, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	a
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$ 극대	↘	$\frac{a+2}{a^2+5}$

이때, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{이고, 최솟값은 } \frac{2}{7} \text{이므로}$$

$$f(a) = \frac{a+2}{a^2+5} = \frac{2}{7}$$

$$\text{즉, } 7a+14=2a^2+10 \text{이므로}$$

$$2a^2-7a-4=0, (2a+1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a>1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a 의 값은 4이다.

답 4

03

$$f(x) = ax - 3\sqrt{1-x^2} \text{에서}$$

$$f'(x) = a - \frac{3 \times (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= a + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{1-x^2} + 3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$a\sqrt{1-x^2} = -3x \text{ (단, } x \leq 0)$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$a^2(1-x^2) = 9x^2, (9+a^2)x^2 = a^2, x^2 = \frac{a^2}{9+a^2}$$

$$\therefore x = -\frac{a}{\sqrt{9+a^2}} (\because a>0, x \leq 0)$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 함수이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$-\frac{a\sqrt{9+a^2}}{\sqrt{9+a^2}}$ 극소	$\nearrow$	a

이때, 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -5 이므로

$$f\left(-\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}\right) = -\sqrt{9+a^2} = -5$$

$$\text{즉, } \sqrt{9+a^2} = 5 \text{이므로 } 9+a^2 = 25$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

답 4

04

$$f(x) = \frac{x^n}{x-1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}(x-1) - x^n}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\{(n-1)x - n\}x^{n-1}}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{n}{n-1} (\because x > 1)$$

$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	...	$\frac{n}{n-1}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ 극소	$\nearrow$

이때, $x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{n}{n-1}$ 에서 극소이면서

최소이므로 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$$

$$\text{즉, } g(n) = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$$

답 e

05

$$\neg. f(x) = \log_a(x^2+x+1) - \log_a(x^2-x+1)$$

$$= \log_a \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$= \log_a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \right)$$

$$= \log_a 1 = 0 \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned}\text{ㄴ. } f(-x) &= \log_a(x^2 - x + 1) - \log_a(x^2 + x + 1) \\ &= -\{\log_a(x^2 + x + 1) - \log_a(x^2 - x + 1)\} \\ &= -f(x) \quad (\text{참})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } f(x) &= \log_a(x^2 + x + 1) - \log_a(x^2 - x + 1) \text{에서} \\ f'(x) &= \frac{2x+1}{x^2+x+1} \times \frac{1}{\ln a} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \times \frac{1}{\ln a} \\ &= \frac{1}{\ln a} \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \right) \\ &= \frac{1}{\ln a} \times \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{1}{\ln a} \times \frac{2x^3 - x^2 + x + 1 - (2x^3 + x^2 + x - 1)}{x^4 + x^2 + 1} \\ &= -\frac{2}{\ln a} \times \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \\ &= -\frac{2}{\ln a} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x^4 + x^2 + 1}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\log_a 3$ 극소	/	$\log_a 3$ 극대	\

또한, ㄴ, ㄷ에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 최댓값은 $f(1) = \log_a 3$, 최솟값은

$f(-1) = -\log_a 3$ 이다.

최댓값과 최솟값의 차가 1 이상이어야 하므로

$$\log_a 3 - (-\log_a 3) \geq 1 \text{에서}$$

$$2\log_a 3 \geq 1, \log_a 3 \geq \frac{1}{2} \quad \therefore a \leq 9$$

이때, $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 a 는

2, 3, 4, ..., 9의 8개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06

$$f(x) = (x^4 + ax^3 + bx^2)e^{-x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (4x^3 + 3ax^2 + 2bx)e^{-x} - (x^4 + ax^3 + bx^2)e^{-x} \\ &= -\{x^4 + (a-4)x^3 + (b-3a)x^2 - 2bx\}e^{-x} \\ &= -x\{x^3 + (a-4)x^2 + (b-3a)x - 2b\}e^{-x}\end{aligned}$$

이때, $f'(1) = f'(2) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}f'(1) &= -(1+a-4+b-3a-2b)e^{-1} \\ &= -(-2a-b-3)e^{-1} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore 2a+b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}f'(2) &= -2(8+4a-16+2b-6a-2b)e^{-2} \\ &= -2(-2a-8)e^{-2} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore a = -4, b = 5 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore f(x) = (x^4 - 4x^3 + 5x^2)e^{-x}$$

$$= x^2(x^2 - 4x + 5)e^{-x},$$

$$f'(x) = -x(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)e^{-x}$$

$$= -x(x-1)(x-2)(x-5)e^{-x}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad (\because 1 \leq x \leq 4)$$

단 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{2}{e}$	\	$\frac{4}{e^2}$ 극소	/	$\frac{80}{e^4}$

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$M = f(4) = \frac{80}{e^4}, \text{ 최솟값은 } m = f(2) = \frac{4}{e^2} \text{이므로}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{80}{e^4}}{\frac{4}{e^2}} = \frac{20}{e^2}$$

답 ②

07

$$f(x) = \frac{\ln(\tan x) + 1}{\tan x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x} \times \tan x - \{\ln(\tan x) + 1\} \sec^2 x}{\tan^2 x} \\ &= \frac{-\sec^2 x \ln(\tan x)}{\tan^2 x}\end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sec^2 x \ln(\tan x) = 0$$

$$\sec^2 x > 1 \text{이므로 } \ln(\tan x) = 0, \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	1 극대	\	

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대이므로
서 최대이므로 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

답 1

다른풀이

$\tan x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(\tan x) + 1}{\tan x} \\ &= \frac{\ln t + 1}{t} \end{aligned}$$

이때, $g(t) = \frac{\ln t + 1}{t}$ 라 하면

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\frac{1}{t} \times t - (\ln t + 1)}{t^2} \\ &= -\frac{\ln t}{t} \end{aligned}$$

$g'(t) = 0$ 에서 $t = 1$

즉, $t > 0$ 일 때, 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	1	...
$g'(t)$		+	0	−
$g(t)$		↗	극대	↘

$t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 는 $t = 1$ 에서 극대이면서 최대이므로
 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(1) = 1$ 이다.

따라서 주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값도 1이다.

08

$f(x) = \frac{a - \cos x}{\sin x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin^2 x - (a - \cos x) \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - a \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1 - a \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = \frac{1}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $0 < a \leq 1$ 이면 $0 < x < \pi$ 에서 $-1 < \cos x < 1$

$$-a < a \cos x < a$$

$$\therefore 1 - a < 1 - a \cos x < 1 + a$$

즉, $1 - a \cos x > 0$ 이므로 $f'(x) > 0$

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 최솟값은 존재하지 않는다.

따라서 $a > 1$ 이어야 한다.

$0 < \frac{1}{a} < 1$ 에서 방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 x 의 값이 열린구간

$(0, \pi)$ 에서 한 개 존재하므로 이 값을 k 라 하면

$$\cos k = \frac{1}{a} \text{이고, } f'(k) = 0 \text{ (단, } 0 < k < \pi)$$

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	k	...	(π)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\	$\frac{a - \cos k}{\sin k}$ 극소	/	

주어진 구간에서 함수 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{a - \cos k}{\sin k} \\ &= \frac{a - \frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}} \\ &\quad \left(\because \cos k = \frac{1}{a} \text{이므로 } \sin k = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}\right) \\ &= \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 - 1}} \\ \text{즉, } \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 - 1}} &= \sqrt{3} \text{이므로} \\ a^2 - 1 &= 3 \\ a^2 &= 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

답 ②

$h(x) = (f \circ g)(x)$ 라 하면 $g(x) = g(x+2\pi)$ 이므로

$$h(x) = f(g(x)) = f(g(x+2\pi)) = h(x+2\pi)$$

즉, $0 \leq x < 2\pi$ 에서의 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형을 그릴 수 있으면 실수 전체의 집합에서의 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형을 알 수 있다.㉠

$$\begin{aligned} h'(x) &= \{f(g(x))\}' \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } f'(g(x)) = 0 \text{ 또는 } g'(x) = 0$$

(i) $f'(g(x)) = 0$ 일 때,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \text{이므로}$$

$$f'(g(x)) = 3\{g(x)\}^2 - 12$$

$$= 3\{g(x)+2\}\{g(x)-2\}$$

$$f'(g(x)) = 0 \text{에서 } g(x) = \pm 2$$

$$g(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)$$

$$= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{이므로 } 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 2$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$$

$$\text{즉, } x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

(ii) $g'(x) = 0$ 일 때,

$$g'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x \text{이므로}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = \sqrt{3} \sin x$$

$$\therefore \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \cos x \neq 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = f(2) = -8,$$

$$h\left(\frac{7}{6}\pi\right) = f\left(g\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = f(-2) = 24$$

이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	(2π)
$f'(g(x))$		-	0	-	0	-	
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	0	-	
$h(x)$	$8-9\sqrt{3}$	$\searrow$	-8 극소	$\nearrow$	24 극대	$\searrow$	

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극대이면서 최대이므로 ㉠에 의하여 함수 $h(x)$ 는 $x > 0$ 일 때,

$$x = \frac{7}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{31}{6}\pi, \dots$$

에서 최댓값을 갖는다.

$$\text{즉, } x_n = 2(n-1)\pi + \frac{7}{6}\pi \quad (\because x > 0) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} x_n &= \sum_{n=1}^{10} \left\{ 2(n-1)\pi + \frac{7}{6}\pi \right\} \\ &= 2\pi \sum_{n=1}^{10} (n-1) + \frac{7}{6}\pi \times 10 \\ &= 2\pi \times \left(\frac{10 \times 11}{2} - 10 \right) + \frac{35}{3}\pi \\ &= \frac{305}{3}\pi \end{aligned}$$

따라서 $p=3$, $q=305$ 이므로

$$p+q = 3+305 = 308$$

답 308

다른풀이

$$f(x) = x^3 - 12x + 8 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 3x^2 - 12 = 0, \quad 3(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

이때, $g(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 이므로

$$-2 \leq g(x) \leq 2$$

합성함수 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서 $g(x) = t$ 로 놓으면 $-2 \leq t \leq 2$ 이므로 함수 $f(g(x))$, 즉 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	...	2
$f'(t)$	0	-	0
$f(t)$	24	$\searrow$	-8

함수 $f(x)$ 는 $t = -2$ 에서 최댓값을 가지므로 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $g(x) = -2$ 를 만족시키는 x 에서 최댓값을 갖는다.

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t^2} = \frac{1-2\ln t}{t^3}(x-t)$$

이 접선이 y 축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$$y - \frac{\ln t}{t^2} = -\frac{1-2\ln t}{t^2}$$

$$\therefore y = \frac{-1+2\ln t+\ln t}{t^2} = \frac{3\ln t-1}{t^2}$$

$$\therefore B\left(0, \frac{3\ln t-1}{t^2}\right)$$

이때, $\overline{PA}=t$ 이고,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{3\ln t-1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2} \quad (\because t > \sqrt{e}) \\ &= \frac{2\ln t-1}{t^2}\end{aligned}$$

이므로 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PA} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2\ln t-1}{t^2} \times t \\ &= \frac{2\ln t-1}{2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S'(t) &= \frac{\frac{2}{t} \times 2t - (2\ln t-1) \times 2}{4t^2} \\ &= \frac{-4\ln t+6}{4t^2} = \frac{-2\ln t+3}{2t^2}\end{aligned}$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } \ln t = \frac{3}{2}$$

$$\therefore t = e^{\frac{3}{2}}$$

함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$(\sqrt{e})$	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		$\nearrow$	$e^{-\frac{3}{2}}$ 극대	$\searrow$

즉, 함수 $S(t)$ 는 $t=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 t 의 값은 $e\sqrt{e}$ 이다.

답 $e\sqrt{e}$

단계	채점 기준	배점
(가)	점 P에서의 접선의 방정식을 구한 경우	20%
(나)	삼각형 APB의 넓이를 t 에 대한 함수로 나타낸 경우	30%
(다)	(나)에서 구한 함수의 증가와 감소를 나타내어 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t 의 값을 구한 경우	50%

12

$f(x)=x^2e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \\ &= -x(x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

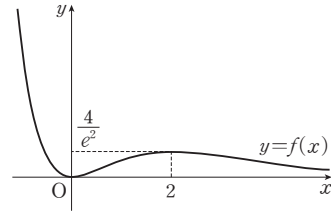
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x}>0$)

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ 극대	$\searrow$

이때, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^{-x} = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x} = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$ 를 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

이때, $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

또한, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

즉, x 축은 함수 $g(x)$ 의 그래프의 점근선이다. (참)

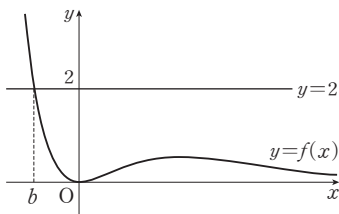
ㄷ. $g(x)=f(f(x))$ 에서 합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } f'(f(x))=0 \text{ 또는 } f'(x)=0$$

(i) $f'(f(x))=0$ 에서

$$f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=2$$



위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=2$ 는 각각 한 점에서 만나므로 각 교점의 x 좌표를 각각 a , b 라 하면

$$a=0, b<0$$

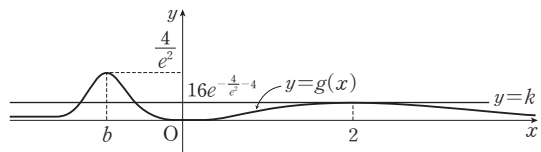
(ii) $f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	b	...	0	...	2	...
$f'(f(x))$	-	0	+	0	+	+	+
$f'(x)$	-	-	-	0	+	0	-
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	↗	$\frac{4}{e^2}$ 극대	↘	0 극소	↗	$16e^{-\frac{4}{e^2}-4}$ 극대	↘

ㄴ에서 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $k=16e^{-\frac{4}{e^2}-4}$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13

함수 $f(x)$ 가 $x>1$ 에서 극댓값과 극솟값을 가지려면 $x=t$ ($t>1$)의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌고, $f'(t)=0$ 을 만족시키는 t 가 2개 이상 존재해야 한다.㉠

$$f(x)=\frac{1-k}{x-1}-\frac{3}{x^2} \text{에서}$$

$$f'(x)=-\frac{1-k}{(x-1)^2}+\frac{6}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$-\frac{1-k}{(x-1)^2}+\frac{6}{x^3}=0$$

이때, $x>1$ 이므로 양변에 $(x-1)^2$ 을 곱하면

$$-(1-k)+\frac{6(x-1)^2}{x^3}=0$$

$$1-\frac{6(x-1)^2}{x^3}=k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(x)=1-\frac{6(x-1)^2}{x^3} \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=-\frac{12(x-1) \times x^3 - 6(x-1)^2 \times 3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{6(x-1)(x-3)}{x^4}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=3 \text{ (} \because x>1 \text{)}$$

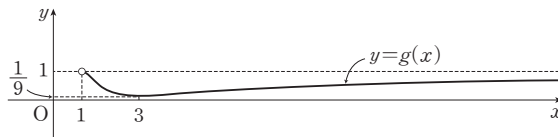
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	...	3	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘	$\frac{1}{9}$ 극소	↗

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left\{ 1 - \frac{6(x-1)^2}{x^3} \right\} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{6(x-1)^2}{x^3} \right\} = 1 \text{이므로 함수}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



㉠에서 방정식 $g(x)=k$ 의 실근은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표와 같고, ㉠에서 t 가 2개 존재할 때의 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} < k < 1$$

$$\text{즉, } \alpha = \frac{1}{9}, \beta = 1 \text{이므로}$$

$$90\alpha\beta = 90 \times \frac{1}{9} \times 1 = 10$$

답 10

오답피하기

$k = \frac{1}{9}$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나므로 함수 $f(x)$ 가 극댓값 또는 극솟값을 갖는다고 착각할 수 있다. 이 점의 x 좌표는 $f'(x) = 0$ 을 만족시키지만 이 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 ㉠에서의 t 의 값은 될 수 없음에 유의하도록 하자.

다른풀이

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(1-k)}{(x-1)^2} + \frac{6}{x^3} \\ &= \frac{6(x-1)^2 - (1-k)x^3}{x^3(x-1)^2} \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 $x > 1$ 에서 2개의 극값을 갖기 위해서는 $1-k \neq 0$ 이고, 방정식 $6(x-1)^2 - (1-k)x^3 = 0$, 즉 $\frac{(x-1)^2}{x^3} = \frac{1-k}{6}$ 를 만족시키는 x 의 값이 $x > 1$ 에서 2개 이상 존재해야 한다.

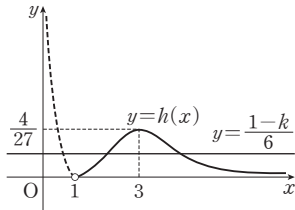
$$h(x) = \frac{(x-1)^2}{x^3} \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(x-1) \times x^3 - (x-1)^2 \times 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-(x-1)(x-3)}{x^4} \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x = 3 \quad (\because x > 1)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	...	3	...
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$ 극대	$\searrow$



$x > 1$ 에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같이 직선 $y = \frac{1-k}{6}$ 와 두 점에서 만나려면

$$0 < \frac{1-k}{6} < \frac{4}{27}$$

$$0 < 1-k < \frac{8}{9} \quad \therefore \frac{1}{9} < k < 1$$

14

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x+3)e^{-x} - (2x^2+3x)e^{-x} \\ &= -(2x^2-x-3)e^{-x} \\ &= -(x+1)(2x-3)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2} \quad (\because e^{-x} > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-e$ 극소	$\nearrow$	$\frac{9}{e\sqrt{e}}$ 극대	$\searrow$

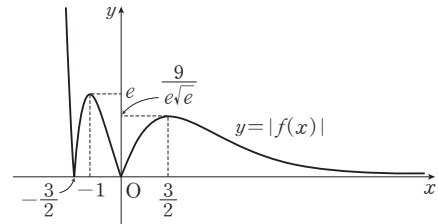
$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x)e^{-x} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 3x)e^{-x} = 0 \text{이고,}$$

$$f(x) = 0 \text{에서 } x(2x+3)e^{-x} = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 0$$

즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ 에서 x 축과 만나므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $|f(x)| = k$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(k)$ 는 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같으므로

$$g(k) = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 2 & (k = 0) \\ 5 & \left(0 < k < \frac{9}{e\sqrt{e}}\right) \\ 4 & \left(k = \frac{9}{e\sqrt{e}}\right) \\ 3 & \left(\frac{9}{e\sqrt{e}} < k < e\right) \\ 2 & (k = e) \\ 1 & (k > e) \end{cases}$$

이때, $\lim_{k \rightarrow a^+} g(k) \neq \lim_{k \rightarrow a^-} g(k)$ 인 실수 a 는 $0, \frac{9}{e\sqrt{e}}, e$ 의 3개이다.

답 3

15

$$\frac{1}{x} + 4 \geq a \ln \frac{4x+1}{2x} \text{에서}$$

$$2 \times \frac{1+4x}{2x} \geq a \ln \frac{4x+1}{2x}$$

$$\frac{4x+1}{2x} = t \text{로 놓으면 } x > 0 \text{이므로 } t > 2 \text{이고, } 2t \geq a \ln t$$

이때, $\ln t > 0$ 이므로 부등식의 양변을 $\ln t$ 로 나누면

$$\frac{2t}{\ln t} \geq a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(t) = \frac{2t}{\ln t} \text{라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{2 \ln t - 2t \times \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{2(\ln t - 1)}{(\ln t)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } \ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(2)	...	e	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\	$\frac{2e}{\ln e}$ 극소	/

함수 $f(t)$ 는 $t=e$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(t)$ 의 최솟값은

$$f(e) = 2e$$

부등식 ①을 만족시키려면 (함수 $f(t)$ 의 최솟값) $\geq a$ 이어야 하므로

$$a \leq 2e$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2e$ 이다.

답 2e

16

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - a,$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = \frac{2t-1}{t^2-t+1}$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1} < 0$$

$$(2t-a)(2t-1) < 0 \quad (\because t^2-t+1 > 0)$$

$$\text{이 부등식의 해가 } \frac{1}{2} < t < 2 \text{이므로 } \frac{a}{2} = 2$$

$$\therefore a = 4$$

답 ⑤

17

점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 4t + 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t$$

이므로

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 3 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

즉, 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(4 - 3 \sin t, 2 \cos t)$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{(4 - 3 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} \\ &= \sqrt{9 \sin^2 t - 24 \sin t + 16 + 4 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{5 \sin^2 t - 24 \sin t + 20} \\ &= \sqrt{5 \left(\sin t - \frac{12}{5} \right)^2 - \frac{44}{5}} \end{aligned}$$

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \text{이므로 점 P의 속력은 } \sin t = 1 \text{일 때 최소이다.} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편, } \frac{d^2x}{dt^2} = -3 \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \sin t \text{이므로 시각 } t \text{에서}$$

의 점 P의 가속도는

$$(-3 \cos t, -2 \sin t)$$

①에서 $\sin t = 1$ 이면 $\cos t = 0$ 이므로 점 P의 속력이 최소인 시각 t 에서의 가속도는

$$(0, -2)$$

$$\text{따라서 점 P의 속력이 최소인 시각 } t \text{에서의 가속도의 크기는} \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

답 2

18

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2+36} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x-5)^2 + 36 - 2(x-5)^2}{\{(x-5)^2 + 36\}^2} \\
 &= \frac{-(x-5)^2 + 36}{\{(x-5)^2 + 36\}^2} \\
 &= -\frac{x^2 - 10x - 11}{\{(x-5)^2 + 36\}^2} \\
 &= -\frac{(x+1)(x-11)}{\{(x-5)^2 + 36\}^2}
 \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=11$

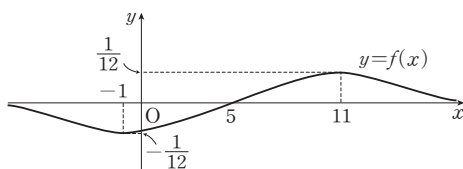
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	11	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{1}{12}$ 극소	/	$\frac{1}{12}$ 극대	\

또한, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{(x-5)^2 + 36} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{(x-5)^2 + 36} = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 에 대하여 $M+m=0$ 이어야 하므로

(i) $0 < a < 1$ 이면

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=f(a)$ 이고 $-\frac{1}{12} < M < 0$,

최솟값은 $m=f(-a)$ 이고 $-\frac{1}{12} < m < 0$ 이므로

$$M+m \neq 0$$

(ii) $1 \leq a < 5$ 이면

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=f(a)$ 이고 $-\frac{1}{12} < M < 0$,

최솟값은 $m=f(-1)=-\frac{1}{12}$ 이므로

$$M+m \neq 0$$

(iii) $5 \leq a < 11$ 이면

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=f(a)$ 이고 $0 < M < \frac{1}{12}$,

최솟값은 $m=f(-1)=-\frac{1}{12}$ 이므로

$$M+m \neq 0$$

(iv) $a \geq 11$ 이면

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=f(11)=\frac{1}{12}$, 최솟값은

$m=f(-1)=-\frac{1}{12}$ 이므로

$$M+m=0$$

(i)~(iv)에서 $a \geq 11$ 이므로 a 의 최솟값은 11이다.

답 11

다른풀이

단한구간 $[-a, a]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{x-5}{(x-5)^2 + 36} \text{에 대하여}$$

$x-5=t$ 로 놓으면

$$f(t+5) = \frac{t}{t^2 + 36} \quad (\text{단, } -a-5 \leq t \leq a-5)$$

이때, $f(t+5)=g(t)$ 라 하면 단한구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 단한구간 $[-a-5, a-5]$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값과 같다.

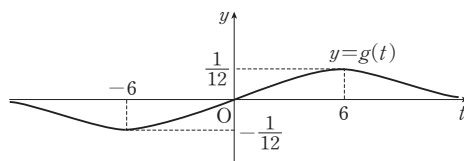
$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{t^2 + 36 - t \times 2t}{(t^2 + 36)^2} \\
 &= -\frac{t^2 - 36}{(t^2 + 36)^2} \\
 &= -\frac{(t+6)(t-6)}{(t^2 + 36)^2}
 \end{aligned}$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t=-6 \text{ 또는 } t=6$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-6	...	6	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	\	$-\frac{1}{12}$ 극소	/	$\frac{1}{12}$ 극대	\

또한, $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ 이므로 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $g(-t)=-g(t)$ 에서 함수 $g(t)$ 는 원점에 대하여 대칭이고, 단한구간 $[-a-5, a-5]$ 는 $t=-5$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(t)$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 에 대하여

여 $M+m=0$ 을 만족시키려면 닫힌구간 $[-a-5, a-5]$ 는 $t=-6$ 과 $t=6$ 을 모두 포함해야 한다. 즉,
 $-a-5 \leq -6$ ㉠
 $a-5 \geq 6$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a \geq 11$

19

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - a \ln x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - \frac{a}{x} \\ &= \frac{x^4 - a}{x} \\ &= \frac{(x^2 + \sqrt{a})(x + \sqrt[4]{a})(x - \sqrt[4]{a})}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\sqrt[4]{a} \text{ (} \because x>0 \text{)}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\sqrt[4]{a}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$\frac{a}{4}(1-\ln a)$ 극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt[4]{a}$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(x)$ 의 최솟값은

$$m=f(\sqrt[4]{a})=\frac{a}{4}(1-\ln a)$$

이 값이 0 이하가 되어야 하므로

$$\frac{a}{4}(1-\ln a) \leq 0$$

$$a>0 \text{에서 } \frac{a}{4}>0 \text{이므로}$$

$$1-\ln a \leq 0, \ln a \geq 1$$

$$\therefore a \geq e$$

따라서 a 의 최솟값은 e 이다.

다른풀이

$$g(a) = \frac{a}{4}(1-\ln a) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{4}(1-\ln a) + \frac{a}{4} \times \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= -\frac{\ln a}{4} \end{aligned}$$

$$g'(a)=0 \text{에서 } \ln a=0 \quad \therefore a=1$$

함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	1	...
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		/	$\frac{1}{4}$ 극대	\

$$\text{또한, } g(a)=0, \text{ 즉 } \frac{a}{4}(1-\ln a)=0 \text{에서}$$

$$a=e \text{ (} \because a>0 \text{)}$$

즉, 함수 $y=g(a)$ 의 그래프

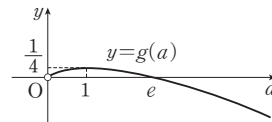
는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $g(a) \leq 0$ 을 만족시

키는 a 의 값의 범위는

$$a \geq e$$

이므로 a 의 최솟값은 e 이다.



20

$$x=\cos \theta, y=\sin \theta-\cos \theta \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta + \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{-\sin \theta} \\ &= -\cot \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, 곡선 위의 점 } (\cos \theta, \sin \theta - \cos \theta) \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{에서}$$

의 접선의 방정식은

$$y - \sin \theta + \cos \theta = (-\cot \theta - 1)(x - \cos \theta)$$

$$y - \sin \theta + \cos \theta = -(\cot \theta + 1)x + \cot \theta \cos \theta + \cos \theta$$

$$\therefore (\cot \theta + 1)x + y - \sin \theta - \cot \theta \cos \theta = 0$$

답 e

이 직선과 원점 사이의 거리를 d 라 하면

$$\begin{aligned} d &= \frac{|-\sin \theta - \cot \theta \cos \theta|}{\sqrt{(\cot \theta + 1)^2 + 1}} \\ &= \frac{\left| -\sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right|}{\sqrt{\cot^2 \theta + 2 \cot \theta + 2}} \\ &= \frac{\csc \theta}{\sqrt{\cot^2 \theta + 2 \cot \theta + 2}} \left(\because \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \\ \therefore d^2 &= \frac{\csc^2 \theta}{\cot^2 \theta + 2 \cot \theta + 2} \\ &= \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cot^2 \theta + 2 \cot \theta + 2} \end{aligned}$$

이때, $\cot \theta = t$ ($0 < t < 1$)로 놓고, $d^2 = f(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t^2 + 1}{t^2 + 2t + 2} \text{에서} \\ f'(t) &= \frac{2t(t^2 + 2t + 2) - (t^2 + 1)(2t + 2)}{(t^2 + 2t + 2)^2} \\ &= \frac{2t^2 + 2t - 2}{(t^2 + 2t + 2)^2} = \frac{2(t^2 + t - 1)}{(t^2 + 2t + 2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t^2 + t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because 0 < t < 1)$$

$0 < t < 1$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	(1)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		\	극소	/	

함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 에서 극소이면서 최소이므로 원점

과 점 P에서의 접선 사이의 거리는

$$\cot \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{일 때 최소이다.}$$

$$\text{따라서 } \cot a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

$$(2 \cot a + 1)^2 = \left(2 \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right)^2 = 5$$

21

$$f(x) = e^{tx} \text{에서 } f'(x) = te^{tx}$$

$$f'(x-1) + cf(x+1) = 0 \text{에서}$$

$$te^{t(x-1)} + ce^{t(x+1)} = 0$$

$$\text{이때, } e^{tx} > 0 \text{이므로 } \frac{t}{e^t} + ce^t = 0$$

$$\therefore c = -\frac{t}{e^{2t}}$$

$$\text{즉, } g(t) = -\frac{t}{e^{2t}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{e^{2t} - 2te^{2t}}{e^{4t}} \\ &= \frac{2t-1}{e^{2t}} \end{aligned}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = \frac{1}{2}$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$\frac{1}{2}$	...
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	\	$-\frac{1}{2e}$ 극소	/

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{2e}$$

22

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$g(x) = (ax + b)e^{-x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} \\ &= (-ax + a - b)e^{-x} \end{aligned}$$

조건 ㉠에서

$$g'(0) = (a - b)e^0 = a - b = 0$$

즉, $a = b$ 이므로

$$g(x) = a(x+1)e^{-x}, \quad g'(x) = -axe^{-x}$$

이때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(t, a(t+1)e^{-t})$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(t) = -ate^{-t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - a(t+1)e^{-t} = -ate^{-t}(x-t)$$

조건 ④에서 이 직선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

$$k - a(t+1)e^{-t} = at^2e^{-t}$$

$$a(t^2+t+1)e^{-t} = k$$

이때, $h(t) = a(t^2+t+1)e^{-t}$ 이라 하면

$$h'(t) = a(2t+1)e^{-t} - a(t^2+t+1)e^{-t}$$

$$= -a(t^2-t)e^{-t}$$

$$= -at(t-1)e^{-t}$$

$$h'(t) = 0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $a < 0$ 일 때,

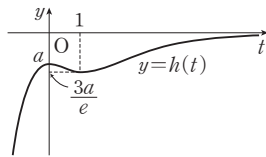
함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	↗	a 극대	↘	$\frac{3a}{e}$ 극소	↗

$$\text{또한, } \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} a(t^2+t+1)e^{-t} = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t^2+t+1)e^{-t} = 0 \text{이므로 함수}$$

$y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는



$$k < \frac{3a}{e} \text{ 또는 } a < k < 0$$

이고, 이는 조건 ④를 만족시키지 않는다.

(ii) $a > 0$ 일 때,

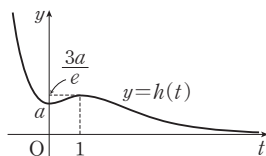
함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$h'(t)$	-	0	+	0	-
$h(t)$	↘	a 극소	↗	$\frac{3a}{e}$ 극대	↘

$$\text{또한, } \lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} a(t^2+t+1)e^{-t} = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t^2+t+1)e^{-t} = 0 \text{이므로 함수}$$

$y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는



$$0 < k < a \text{ 또는 } k > \frac{3a}{e}$$

조건 ④에서 $a = 2$

(i), (ii)에서 $a = 2$ 이므로

$$g(x) = 2(x+1)e^{-x} \quad \therefore g(0) = 2$$

답 2

23

점 P가 점 A에서 출발하여 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 반원 위를 매초 1의 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이므로 시각 t 에서 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 t 이다.

즉, 시각 t 에서의 점 P의 위치 (x, y) 는

$$x = \cos t, y = \sin t \quad (\text{단, } 0 < t < \pi) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이고, 직선 OP의 방정식은 $y = (\tan t)x$ 이다.

두 직선 OP, $y = 2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$2 = (\tan t)x \quad \therefore x = \frac{2}{\tan t} = 2 \cot t$$

$$\therefore Q(2 \cot t, 2) \quad (\text{단, } 0 < t < \pi)$$

이때, 시각 t 에서의 점 Q의 위치를 (x_Q, y_Q) 라 하면

$$x_Q = 2 \cot t, y_Q = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = -2 \csc^2 t, \frac{dy_Q}{dt} = 0$$

즉, 시각 t 에서의 점 Q의 속도는

$$(-2 \csc^2 t, 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

한편, ①에서 점 P의 x 좌표가 $\frac{1}{3}$ 일 때의 t 의 값을 α 라 하면

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\csc^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{8}$$

②에서 점 Q의 속도는 $\left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ 이므로

$$a = -\frac{9}{4}, b = 0$$

$$\therefore 40(b-a) = 40\left\{0 - \left(-\frac{9}{4}\right)\right\} = 90$$

답 90

III. 적분법

유형
연습

08 부정적분

본문 pp.221~240

01-1 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$

02-1 (1) $e^3 - 2\ln 3 + 2$ (2) 5

03-1 (1) $-2 + \frac{\pi}{12}$ (2) $\frac{3}{2} + \sqrt{3}$

04-1 (1) $\frac{1}{2} \ln 11$ (2) $\frac{1}{e}$

05-1 $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$ 05-2 $-\frac{1}{15}$

06-1 (1) $8 - \ln 2$ (2) -2

07-1 $-\frac{15}{8}$ 07-2 $\frac{4}{15}$

08-1 (1) $-\frac{1}{10}$ (2) $\pi^2 - 8$

09-1 e 09-2 $-\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$

10-1 $-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}$ 10-2 $-\frac{3}{2}\pi$

01-2 $-\ln 2 - \frac{3}{2}$

02-2 $-2e^2 + 4e$

03-2 $\frac{\pi}{4}$

04-2 6

05-3 $\frac{16}{3} - \sqrt{3}$

06-2 $\ln \frac{4}{3}$

07-3 $-\frac{\pi}{3}$

08-2 $\frac{38}{e} - 2e$

09-3 $\frac{1}{4e^2}$

01-1

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= \int \frac{(x-\sqrt{x})^2}{x} dx \\ &= \int \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x}{x} dx \\ &= \int (x - 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \int (x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C \end{aligned}$$

이때, $f(1) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = \frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + \frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{1}{2} \times 16 - \frac{4}{3} \times 8 + 4 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(x) &= \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int \left(x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= \int (x - 2x^{-1} + x^{-3}) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| - \frac{1}{2}x^{-2} + C \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 1$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} + C = 1 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| - \frac{1}{2}x^{-2} + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\sqrt{e}) &= \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} + 1 \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$

01-2

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x) \end{aligned}$$

이므로 $2f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \left(\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-1} \right) dx \\ &= -x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln|x| + C \end{aligned}$$

이때, $f(1) = -2$ 이므로

$$f(1) = -1 - 0 + C = -2 \quad \therefore C = -1$$

즉, $f(x) = -x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln|x| - 1$ 이므로

$$f(4) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 4 - 1 = -\ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$\text{답 } -\ln 2 - \frac{3}{2}$$

02-1

$$(1) f'(x) = \frac{xe^x - 2}{x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{xe^x - 2}{x} dx \\ &= \int (e^x - 2x^{-1}) dx \\ &= e^x - 2 \ln |x| + C \end{aligned}$$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, e+2)$ 를 지나므로

$$f(1) = e - 0 + C = e + 2 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = e^x - 2 \ln |x| + 2$ 이므로

$$f(3) = e^3 - 2 \ln 3 + 2$$

$$(2) f'(x) = 2e^x + a^x \ln a - 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2e^x + a^x \ln a - 1) dx \\ &= 2e^x + \frac{a^x}{\ln a} \times \ln a - x + C \\ &= 2e^x + a^x - x + C \end{aligned}$$

이때, $f(0) = 3$ 이므로

$$f(0) = 2 + 1 - 0 + C = 3 \quad \therefore C = 0$$

또한, $f(1) = 2e + 4$ 이므로

$$f(1) = 2e + a - 1 = 2e + 4 \quad (\because C=0)$$

$$\therefore a = 5$$

$$\text{답 } (1) e^3 - 2 \ln 3 + 2 \quad (2) 5$$

02-2

조건 ㉞의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1) - f(1) = 0$$

$$\therefore F(1) = f(1) = 0 \quad (\because \text{조건 ㉞})$$

또한, $F(x) - xf(x) = (2x-2)e^x$ 에서

$$F(x) = xf(x) + (2x-2)e^x \quad \dots\dots\text{㉟}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2e^x + (2x-2)e^x$$

$$xf'(x) = -2xe^x \quad \therefore f'(x) = -2e^x$$

$$\therefore f(x) = \int (-2e^x) dx = -2e^x + C$$

이때, 조건 ㉞에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$f(1) = -2e + C = 0 \quad \therefore C = 2e$$

즉, $f(x) = -2e^x + 2e$ 이므로 ㉟에서

$$\begin{aligned} F(x) &= x(-2e^x + 2e) + (2x-2)e^x \\ &= -2e^x + 2ex \end{aligned}$$

$$\therefore F(2) = -2e^2 + 4e$$

$$\text{답 } -2e^2 + 4e$$

03-1

$$(1) f'(x) = 2 \cot^2 x + 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2 \cot^2 x + 1) dx \\ &= \int \{2(\csc^2 x - 1) + 1\} dx \\ &= \int (2 \csc^2 x - 1) dx \\ &= -2 \cot x - x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -2 \cot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + C \\ &= -2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + C = \frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}$$

따라서 $f(x) = -2 \cot x - x + \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -2 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \\ &= -2 + \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = \int \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

이때, $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(0)=0+1+C=\frac{1}{2} \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=\tan x+\sec x-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$

답 (1) $-2+\frac{\pi}{12}$ (2) $\frac{3}{2}+\sqrt{3}$

03-2

조건 ㉞에서

$$f'(x)=\begin{cases} k \sin x & (x < 0) \\ \cos^2 x & (x > 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} k \sin x & (x < 0) \\ \frac{1+\cos 2x}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

$$\int k \sin x dx = k \int \sin x dx$$

$$= -k \cos x + C_1,$$

$$\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C_2$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_2$$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} -k \cos x + C_1 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_2 & (x > 0) \end{cases}$$

이때, 조건 ㉞에서 $f(\pi)=1$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} + C_2 = 1 \quad \therefore C_2 = 1 - \frac{\pi}{2}$$

또한, $f(-\pi)=1$ 이므로 $k+C_1=1$

$$\therefore C_1 = 1 - k \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_2 \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-k \cos x + C_1)$$

$$\text{이므로 } C_2 = -k + C_1$$

$$\therefore C_1 = k + 1 - \frac{\pi}{2} \quad \left(\because C_2 = 1 - \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$\textcircled{㉞}, \textcircled{㉞} \text{에서 } 1 - k = k + 1 - \frac{\pi}{2}, \quad 2k = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore k = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

04-1

(1) $(2x^3+4x)'=6x^2+4=2(3x^2+2)$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{3x^2+2}{2x^3+4x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x^3+4x)'}{2x^3+4x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2x^3+4x| + C$$

이때, $f(2)=\ln 2$ 이므로

$$f(2) = \frac{1}{2} \ln 24 + C = \ln 2$$

$$\therefore C = -\frac{1}{2} \ln 6$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \ln |2x^3+4x| - \frac{1}{2} \ln 6$ 이므로

$$f(3) = \frac{1}{2} \ln 66 - \frac{1}{2} \ln 6 = \frac{1}{2} \ln 11$$

$$(2) f(x) = \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C \quad (\because x > -1)$$

이때, $f(e-1) = \frac{2}{e}$ 이므로

$$f(e-1) = 1 + \frac{1}{e} + C = \frac{2}{e} \quad \therefore C = \frac{1}{e} - 1$$

$$\therefore f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{e} - 1$$

한편, $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

$x > -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(0)=0+1+\frac{1}{e}-1=\frac{1}{e}$$

답 (1) $\frac{1}{2}\ln 11$ (2) $\frac{1}{e}$

04-2

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이므로

$$f'(x)=4xf(x) \text{에서 } \frac{f'(x)}{f(x)}=4x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 4x dx$$

$$\therefore \ln f(x) = 2x^2 + C \quad (\because f(x) > 0)$$

이때, $f(1)=1$ 이므로

$$\ln f(1) = 2 + C$$

$$0 = 2 + C \quad \therefore C = -2$$

따라서 $\ln f(x) = 2x^2 - 2$ 이므로

$$\ln f(2) = 8 - 2 = 6$$

답 6

05-1

$$f(x) = \int \frac{x^2-3}{\sqrt{9x-x^3}} dx \text{에서 } 9x-x^3=t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{dt}{dx} = 9-3x^2 = -3(x^2-3)$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x^2-3}{\sqrt{9x-x^3}} dx = \int \left\{ -\frac{(9x-x^3)'}{3\sqrt{9x-x^3}} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{2}{3} \sqrt{t} + C$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt{9x-x^3} + C$$

이때, $f(1) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$f(1) = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + C = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{9x-x^3}$ 이므로

$$f(2) = -\frac{2}{3} \times \sqrt{10} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

답 $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$

다른풀이

$$f(x) = \int \frac{x^2-3}{\sqrt{9x-x^3}} dx \text{에서 } \sqrt{9x-x^3}=t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-3x^2+9}{2\sqrt{9x-x^3}} = \frac{-3(x^2-3)}{2\sqrt{9x-x^3}}$$

$$\therefore f(x) = \int (\sqrt{9x-x^3})' \times \left(-\frac{2}{3}\right) dx$$

$$= -\frac{2}{3} \int dt = -\frac{2}{3} t + C$$

$$= -\frac{2}{3} \sqrt{9x-x^3} + C$$

05-2

$$f(x) = \int (-x\sqrt{2x+1}) dx \text{에서 } 2x+1=t \text{로 놓으면}$$

$$x = \frac{t-1}{2} \text{이고 } \frac{dt}{dx} = 2$$

$$\therefore f(x) = \int (-x\sqrt{2x+1}) dx$$

$$= -\int \frac{(t-1)\sqrt{t}}{4} dt$$

$$= -\frac{1}{4} \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{10} (2x+1)^2 \sqrt{2x+1}$$

$$+ \frac{1}{6} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C$$

이때, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$ 이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{5} + \frac{4}{3} + C = -2 \quad \therefore C = -\frac{2}{15}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{10} (2x+1)^2 \sqrt{2x+1}$$

$$+ \frac{1}{6} (2x+1) \sqrt{2x+1} - \frac{2}{15}$$

한편, $f'(x) = -x\sqrt{2x+1}$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$x > -\frac{1}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-\frac{1}{2})$	...	0	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(0) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{15} = -\frac{1}{15}$$

답 $-\frac{1}{15}$

05-3

$f'(x) = |x-2|\sqrt{-x^2+4x}$ 에서 $-x^2+4x=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = -2x+4 = -2(x-2)$$

(i) $0 \leq x \leq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2-x)\sqrt{-x^2+4x} dx \\ &= \int \frac{1}{2}(-x^2+4x)' \sqrt{-x^2+4x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C_1 \\ &= \frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} + C_1 \end{aligned}$$

이때, $f(1) = \sqrt{3}$ 이므로

$$f(1) = \sqrt{3} + C_1 = \sqrt{3} \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x}$$

(ii) $2 < x \leq 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x-2)\sqrt{-x^2+4x} dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-x^2+4x)' \sqrt{-x^2+4x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C_2$$

$$= -\frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} + C_2$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 $0 \leq x \leq 4$ 에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

즉, $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \left\{ -\frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} + C_2 \right\} = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{8}{3} + C_2 = \frac{8}{3} \quad \therefore C_2 = \frac{16}{3}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} + \frac{16}{3}$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} & (0 \leq x \leq 2) \\ -\frac{1}{3} (-x^2+4x) \sqrt{-x^2+4x} + \frac{16}{3} & (2 < x \leq 4) \end{cases}$$

이므로

$$f(3) = -\frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} - \sqrt{3}$$

답 $\frac{16}{3} - \sqrt{3}$

06-1

(1) 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

이때, $1+e^x=t$ 로 놓으면 $e^x=t-1$ 이고 $\frac{dt}{dx} = e^x$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x(1+e^x)'}{1+e^x} dx \\ &= \int \frac{t-1}{t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= t - \ln|t| + C \\ &= 1 + e^x - \ln(1+e^x) + C \end{aligned}$$

이때, $f(\ln 4) = 3$ 이므로

$$f(\ln 4) = 1 + 4 - \ln 5 + C = 3$$

$$\therefore C = \ln 5 - 2$$

따라서 $f(x) = e^x - \ln(1+e^x) + \ln 5 - 1$ 이므로

$$f(\ln 9) = 9 - \ln 10 + \ln 5 - 1 = 8 - \ln 2$$

(2) $f'(x) = \frac{4 \ln x}{x}$ 에서 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int \frac{4 \ln x}{x} dx = \int 4(\ln x)' \ln x dx \\ &= 4 \int t dt = 2t^2 + C = 2(\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

이때, $f(e) = 0$ 이므로

$$f(e) = 2 + C = 0 \quad \therefore C = -2$$

$$\therefore f(x) = 2(\ln x)^2 - 2$$

한편, $f'(x) = \frac{4 \ln x}{x}$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(1) = 2 \times 0 - 2 = -2$$

답 (1) $8 - \ln 2$ (2) -2

06-2

$f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$ 이므로 $1+e^x = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx \\ &= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \int \left\{1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\right\} dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{t} dt \\ &= x - \ln |t| + C \\ &= x - \ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

즉, $f(\ln 2) = \ln 2 - \ln 3 + C$, $f(0) = -\ln 2 + C$ 이므로

$$f(\ln 2) - f(0) = (\ln 2 - \ln 3 + C) - (-\ln 2 + C)$$

$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \ln \frac{4}{3}$$

답 $\ln \frac{4}{3}$

07-1

$f(x) = \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1+\cos x} dx \\ &= \int -(\cos x)'(1-\cos x) dx \\ &= -\int (1-t) dt \\ &= -t + \frac{1}{2}t^2 + C \\ &= -\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x + C\end{aligned}$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = C \quad \therefore C = -\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{3}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{15}{8}$$

답 $-\frac{15}{8}$

07-2

$f(x) = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int (1-\cos^2 x) \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int -(\cos^2 x - \cos^4 x)(\cos x)' dx \\ &= -\int (t^2 - t^4) dt \\ &= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$

한편, $f'(x) = \sin^3 x \cos^2 x$ 이므로

$f'(x) = 0$ 에서 $x = n\pi$ 또는 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (단, n 은 정수)

이때, $f(x)=f(x+2\pi)$ 이므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$	0	+	0	+	0	-	0	-	0
$f(x)$	극소	/		/	극대	\		\	극소

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2n\pi$ (n 은 정수)에서 극소이므로 극솟값은

$$f(0)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+C=-\frac{2}{15}+C$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=(2n-1)\pi$ (n 은 정수)에서 극대이므로 극댓값은

$$f(\pi)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+C=\frac{2}{15}+C$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는

$$\left(\frac{2}{15}+C\right)-\left(-\frac{2}{15}+C\right)=\frac{4}{15}$$

답 $\frac{4}{15}$

07-3

$h(x)=\int \sin x g'(2\cos x) dx$ 에서 $2\cos x=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=-2\sin x$$

$$\therefore h(x)=\int -\frac{1}{2}(2\cos x)' g'(2\cos x) dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int g'(t) dt$$

$$=-\frac{1}{2}g(t)+C$$

$$=-\frac{1}{2}g(2\cos x)+C$$

$$\therefore h\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}g\left(2\cos\frac{5}{6}\pi\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}g(-\sqrt{3})+C \quad \dots\dots\textcircled{1},$$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}g\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}g(\sqrt{3})+C \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이때, 함수 $f(x)=\cot x$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(-\sqrt{3})=a \text{라 하면 } f(a)=-\sqrt{3}$$

$$\text{즉, } \cot a=-\sqrt{3} \text{이므로 } \tan a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore a=\frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < a < \pi)$$

또한, $g(\sqrt{3})=b$ 라 하면 $f(b)=\sqrt{3}$

$$\text{즉, } \cot b=\sqrt{3} \text{이므로 } \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore b=\frac{\pi}{6} \quad (\because 0 < b < \pi)$$

따라서 ①, ②에서

$$h\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\pi+C=-\frac{5}{12}\pi+C,$$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}+C=-\frac{\pi}{12}+C$$

이므로

$$\begin{aligned} h\left(\frac{5}{6}\pi\right)-h\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(-\frac{5}{12}\pi+C\right)-\left(-\frac{\pi}{12}+C\right) \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

답 $-\frac{\pi}{3}$

08-1

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 주어진 구간 $[0, 2]$ 에서 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 -3 을 갖고, $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다.

이때, $u_1(x)=x^2$, $v_1'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u_1'(x)=2x, \quad v_1(x)=-e^{-x} \text{이므로}$$

$$f(x)=\int (x^2+e^{-x})e^{-x} dx$$

$$=\int x^2 e^{-x} dx + \int e^{-2x} dx$$

$$=-x^2 e^{-x} - \int (-2x e^{-x}) dx - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$=-x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2 \int x e^{-x} dx \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

또한, $u_2(x)=x$, $v_2'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u_2'(x)=1, \quad v_2(x)=-e^{-x} \text{이므로}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx$$

$$=-x e^{-x} - e^{-x} + C_1 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$f(x) = -x^2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

(단, $C = 2C_1$)

이때, $f(0) = -3$ 이므로

$$f(0) = -2 - \frac{1}{2} + C = -3 \quad \therefore C = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(2) = -10e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-4} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2e^4} - \frac{10}{e^2} - \frac{1}{2}$$

즉, $a = -\frac{1}{2}$, $b = -10$, $c = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{bc} = \frac{-\frac{1}{2}}{-10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{10}$$

(2) $\sqrt{x} = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로

$$f(x) = \int 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

$$= \int \frac{4x}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$$

$$= \int 4x(\sqrt{x})' \cos \sqrt{x} dx$$

$$= \int 4t^2 \cos t dt$$

이때, $u_1(t) = 4t^2$, $v_1'(t) = \cos t$ 로 놓으면

$u_1'(t) = 8t$, $v_1(t) = \sin t$ 이므로

$$f(x) = \int 4t^2 \cos t dt$$

$$= 4t^2 \sin t - \int 8t \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또한, $u_2(t) = 8t$, $v_2'(t) = \sin t$ 로 놓으면

$u_2'(t) = 8$, $v_2(t) = -\cos t$ 이므로

$$\int 8t \sin t dt = -8t \cos t - \int (-8 \cos t) dt$$

$$= -8t \cos t + 8 \sin t + C_1$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$f(x) = 4t^2 \sin t + 8t \cos t - 8 \sin t + C$$

$$= 4x \sin \sqrt{x} + 8\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 8 \sin \sqrt{x} + C$$

(단, $C = -C_1$)

이때, $f(\pi^2) = -8\pi$ 이므로

$$f(\pi^2) = -8\pi + C = -8\pi \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = 4x \sin \sqrt{x} + 8\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 8 \sin \sqrt{x}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \pi^2 - 8$$

답 (1) $-\frac{1}{10}$ (2) $\pi^2 - 8$

08-2

$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$xf(x) = \int (3x^3 + 2x^2)e^x dx$$

이때, $u_1(x) = 3x^3 + 2x^2$, $v_1'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$u_1'(x) = 9x^2 + 4x$, $v_1(x) = e^x$ 이므로

$$xf(x) = (3x^3 + 2x^2)e^x - \int (9x^2 + 4x)e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$u_2(x) = 9x^2 + 4x$, $v_2'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$u_2'(x) = 18x + 4$, $v_2(x) = e^x$ 이므로

$$\int (9x^2 + 4x)e^x dx = (9x^2 + 4x)e^x - \int (18x + 4)e^x dx$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

또한, $u_3(x) = 18x + 4$, $v_3'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$u_3'(x) = 18$, $v_3(x) = e^x$ 이므로

$$\int (18x + 4)e^x dx = (18x + 4)e^x - \int 18e^x dx$$

$$= (18x + 4)e^x - 18e^x + C_1$$

$$= (18x - 14)e^x + C_1$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\int (9x^2 + 4x)e^x dx = (9x^2 + 4x)e^x - (18x - 14)e^x + C_2$$

$$= (9x^2 - 14x + 14)e^x + C_2$$

(단, $C_2 = -C_1$)

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$xf(x) = (3x^3 + 2x^2)e^x - (9x^2 - 14x + 14)e^x + C$$

$$= (3x^3 - 7x^2 + 14x - 14)e^x + C \quad (\text{단, } C = -C_2)$$

이 식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = -4e + C$$

이때, $f(1) = -2e$ 이므로 $C = 2e$

따라서 $xf(x) = (3x^3 - 7x^2 + 14x - 14)e^x + 2e$ 이므로 이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-f(-1) = -\frac{38}{e} + 2e \quad \therefore f(-1) = \frac{38}{e} - 2e$$

답 $\frac{38}{e} - 2e$

09-1

$u_1(x) = (\ln x)^2$, $v_1'(x) = 1$ 로 놓으면

$u_1'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$, $v_1(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\ln x)^2 dx \\ &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $u_2(x) = \ln x$, $v_2'(x) = 1$ 로 놓으면

$u_2'(x) = \frac{1}{x}$, $v_2(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \quad (\text{단, } C = -2C_1)$$

이때, $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{5}{e}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} + C = \frac{5}{e} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ 이므로

$$f(e) = e - 2e + 2e = e$$

답 e

09-2

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{x^3} dx \text{에서 } f'(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

열린구간 $(1, e)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 닫힌구간 $[1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 0을 갖고, $x=e$ 에서 최댓값을 갖는다.

또한, $u(x) = \ln x$, $v'(x) = \frac{1}{x^3}$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = -\frac{1}{2x^2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\ln x}{x^3} dx \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^3}\right) dx \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이므로

$$f(1) = -\frac{1}{4} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{4}$$

따라서 $f(x) = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$\begin{aligned} f(e) &= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{답 } -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$$

09-3

$$f(x) = \int x \ln x dx \text{에서 } f'(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \quad (\because x > 0)$$

이때, $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바

뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

또한, $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x \ln x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f(1) = -\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$f(1) = -\frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{한편, } f''(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 \text{이므로}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{e}$$

$x = \frac{1}{e}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right), \quad \text{즉 } \left(\frac{1}{e}, -\frac{3}{4e^2}\right)$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\times(-1)=-\frac{1}{e}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{3}{4e^2}\right)=-\frac{1}{e}\left(x-\frac{1}{e}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{4e^2}$$

따라서 접선의 y 절편은 $\frac{1}{4e^2}$ 이다.

답 $\frac{1}{4e^2}$

10-1

$$f(x)=\int e^x \cos 2x dx \text{에서}$$

$$u_1(x)=\cos 2x, \quad v_1'(x)=e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u_1'(x)=-2\sin 2x, \quad v_1(x)=e^x \text{이므로}$$

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x - \int (-2e^x \sin 2x) dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또한, } u_2(x)=\sin 2x, \quad v_2'(x)=e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u_2'(x)=2\cos 2x, \quad v_2(x)=e^x \text{이므로}$$

$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - \int 2e^x \cos 2x dx$$

$$= e^x \sin 2x - 2 \int e^x \cos 2x dx$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx$$

$$\text{즉, } 5 \int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x + C_1 \text{이므로}$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5} e^x \cos 2x + \frac{2}{5} e^x \sin 2x + C$$

$$= \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$\left(\text{단, } C = \frac{1}{5} C_1 \right)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C$$

$$\text{이때, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} e^{\frac{\pi}{2}} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5} e^{\frac{\pi}{2}} + C = -\frac{1}{5} e^{\frac{\pi}{2}} \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

한편, $f'(x) = e^x \cos 2x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

단한구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}e^{\frac{\pi}{4}}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{2}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{5}e^\pi$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{2}{5} e^{\frac{3}{4}\pi}$$

답 $-\frac{2}{5} e^{\frac{3}{4}\pi}$

10-2

$$f(x) = \int e^{-x} \sin x dx \text{에서}$$

$$u_1(x) = \sin x, \quad v_1'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u_1'(x) = \cos x, \quad v_1(x) = -e^{-x} \text{이므로}$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또한, } u_2(x) = \cos x, \quad v_2'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u_2'(x) = -\sin x, \quad v_2(x) = -e^{-x} \text{이므로}$$

$$\int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\text{즉, } 2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\sin x + \cos x) + C_1 \text{이므로}$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$$

$$\left(\text{단, } C = \frac{1}{2} C_1 \right)$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + C$$

이때, $f(0) = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(0) = -\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ 이므로

방정식 $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}e^{-x}$ 에서

$$-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{6}}{4}e^{-x}$$

$$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$\sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = -\frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = -\frac{7}{12}\pi$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실근의 합은

$$-\frac{11}{12}\pi - \frac{7}{12}\pi = -\frac{3}{2}\pi$$

답 $-\frac{3}{2}\pi$

01

$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} xf(x) &= \int \{f(x) + xf'(x)\} dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int (-x^{-2}) dx \\ &= x^{-1} + C \end{aligned}$$

이때, $f(2) = \frac{3}{4}$ 이므로

$$2f(2) = \frac{1}{2} + C, \quad \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + C$$

$$\therefore C = 1$$

즉, $xf(x) = x^{-1} + 1 = \frac{1}{x} + 1$ 이므로

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad (\because x > 0)$$

그런데 $f'(x) = -2x^{-3} - x^{-2} = -\frac{2+x}{x^3}$ 이므로 닫힌구간

$[1, 3]$ 에서 $f'(x) < 0$ 이다.

즉, 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값을 갖고, $x=3$ 에서 최솟값을 가지므로

$$M = f(1) = 2, \quad m = f(3) = \frac{4}{9}$$

$$\therefore 90Mm = 90 \times 2 \times \frac{4}{9} = 80$$

답 80

02

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (4^x - 5 \times 2^x + 4) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} - 5 \times \frac{2^x}{\ln 2} + 4x + C \end{aligned}$$

이때, $f(1) = -\frac{8}{\ln 2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{4}{\ln 4} - 5 \times \frac{2}{\ln 2} + 4 + C \\ &= \frac{2}{\ln 2} - \frac{10}{\ln 2} + 4 + C \\ &= -\frac{8}{\ln 2} + 4 + C = -\frac{8}{\ln 2} \end{aligned}$$



개념 마무리

본문 pp.241~244

01 80	02 31	03 5	04 ④
05 $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$	06 ④	07 ④	08 -11
09 $\frac{19}{3}$	10 -1	11 3	12 4
13 ①	14 $\frac{3}{2}\ln 3 - 10$	15 ③	16 $\frac{227}{64}$
17 풀이참조	18 -4	19 $\frac{1}{2}$	20 -3
21 $\frac{8}{5}$	22 0	23 $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$	

$$\therefore C = -4$$

$$\therefore f(x) = \frac{4^x}{\ln 4} - 5 \times \frac{2^x}{\ln 2} + 4x - 4$$

한편, $f(x) = \int (4^x - 5 \times 2^x + 4) dx$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4^x - 5 \times 2^x + 4 \\ &= 2^{2x} - 5 \times 2^x + 4 \\ &= (2^x - 1)(2^x - 4) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $2^x = 1$ 또는 $2^x = 4$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값

$$f(0) = \frac{1}{\ln 4} - \frac{5}{\ln 2} - 4 = -\frac{9}{2 \ln 2} - 4$$

를 갖고, $x=2$ 에서 극솟값

$$f(2) = \frac{16}{\ln 4} - \frac{20}{\ln 2} + 8 - 4 = -\frac{12}{\ln 2} + 4$$

를 가지므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은

$$-\frac{9}{2 \ln 2} - 4 - \frac{12}{\ln 2} + 4 = -\frac{33}{2 \ln 2}$$

따라서 $a=2$, $b=33$ 이므로

$$b-a = 33-2=31$$

답 31

03

조건 ㉠에서 $\frac{d}{dx} \int f'(x) dx = ae^{2x} + 5^x$ 이므로

$$f'(x) = ae^{2x} + 5^x \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore f(x) = \int (ae^{2x} + 5^x) dx$$

$$= \frac{a}{2} e^{2x} + \frac{5^x}{\ln 5} + C \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

한편, 조건 ㉡에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, 극한값이 존재하고
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{에서 } f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 4$$

㉢에서

$$f'(1) = ae^2 + 5 = 4, \quad ae^2 = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{e^2}$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$f(x) = -\frac{1}{2e^2} e^{2x} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

이때, $f(1) = 0$ 이므로

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{\ln 5} + C = 0$$

$$\therefore C = \frac{1}{2} - \frac{5}{\ln 5}$$

$$\text{즉, } f(x) = -\frac{1}{2e^2} e^{2x} + \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{\ln 5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{e^4}{2e^2} + \frac{5^2}{\ln 5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{\ln 5} \\ &= -\frac{1}{2} e^2 + 20 \log_5 e + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $p = -\frac{1}{2}$, $q = 20$, $r = \frac{1}{2}$ 이므로

$$|pqr| = \left| \left(-\frac{1}{2} \right) \times 20 \times \frac{1}{2} \right| = 5$$

답 5

04

$$\textcircled{1} \int (\sin x + \cos x)^2 dx + \int (\sin x - \cos x)^2 dx$$

$$= \int (2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x) dx$$

$$= \int 2 dx = 2x + C$$

$$\textcircled{2} \int (1 - \tan^4 x) \cos^2 x dx + \int \tan^2 x dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)(1 - \tan^2 x) \cos^2 x dx + \int \tan^2 x dx$$

$$= \int (1 - \tan^2 x) dx + \int \tan^2 x dx$$

$$= \int dx = x + C$$

$$\begin{aligned}
③ \quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\
&= \int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} dx \\
&= \int (1-\cos x) dx \\
&= x - \sin x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
④ \quad \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x \right) + C \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
⑤ \quad \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx \\
&= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\
&= \tan x - \sec x + C
\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

05

$0 < x < \pi$ 에서 $-1 < \cos x < 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\cos x)^{n-1} \\
&= 1 + \cos x + \cos^2 x + \cdots \\
&= \frac{1}{1-\cos x} \\
\therefore f(x) &= \int \frac{1}{1-\cos x} dx \\
&= \int \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx \\
&= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx \\
&= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx \\
&= -\cot x - \csc x + C
\end{aligned}$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\cot \frac{\pi}{4} - \csc \frac{\pi}{4} + C \\
&= -1 - \sqrt{2} + C = -1
\end{aligned}$$

$$\therefore C = \sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = -\cot x - \csc x + \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= -\cot \frac{2}{3}\pi - \csc \frac{2}{3}\pi + \sqrt{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{답 } \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

06

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(x)) = x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \therefore g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

조건 ㉠에서 $g'(f(x)) \neq 0$ 이므로

$$f(x)g'(f(x)) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = x^2+1$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (x^2+1) dx$$

$$\ln |f(x)| = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

$$\therefore |f(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

조건 ㉡에서 $f(0) = 1 > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

이때, $f(0)=1$ 이므로
 $f(0)=e^C=1 \quad \therefore C=0$
 따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$ 이므로
 $f(3)=e^{12}$

답 ④

07

$$f(x)=\int \frac{x^2}{x^6-x^3-6} dx = \int \frac{x^2}{(x^3+2)(x^3-3)} dx$$

이때, $x^3-3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{3t(t+5)} dt \\ &= \frac{1}{15} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5} \right) dt \\ &= \frac{1}{15} (\ln |t| - \ln |t+5|) + C \\ &= \frac{1}{15} \ln (x^3-3) - \frac{1}{15} \ln (x^3+2) + C \end{aligned}$$

따라서

$$f(3) = \frac{1}{15} \ln 24 - \frac{1}{15} \ln 29 + C,$$

$$f(2) = \frac{1}{15} \ln 5 - \frac{1}{15} \ln 10 + C$$

이므로

$$\begin{aligned} f(3)-f(2) &= \frac{1}{15} (\ln 24 - \ln 29 - \ln 5 + \ln 10) \\ &= \frac{1}{15} \ln \frac{48}{29} \end{aligned}$$

답 ④

08

조건 ㉠에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{ax}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= \frac{ax(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} \\ &= \frac{ax(\sqrt{x+1}-1)}{x+1-1} \\ &= a\sqrt{x+1}-a \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (a\sqrt{x+1}-a) dx \\ &= a \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx - \int a dx \\ &= \frac{2a}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - ax + C \end{aligned}$$

한편, 열린구간 $(0, 3)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖고, $x=3$ 에서 최댓값을 가지므로 조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} f(3)-f(0) &= 5 \\ \left(\frac{2a}{3} \times 8 - 3a + C \right) - \left(\frac{2a}{3} + C \right) &= 5 \\ \frac{5}{3}a &= 5 \quad \therefore a=3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 3x + C$$

이때, $f(8)=17$ 이므로

$$f(8) = 54 - 24 + C = 17 \quad \therefore C = -13$$

$$\therefore f(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 3x - 13$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 이므로 $x > -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은
 $f(0) = 2 - 13 = -11$

답 -11

풀이첨삭

*에서 $f(x) = \int (a\sqrt{x+1}-a) dx$ 에서 $x+1=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx}=1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int (a\sqrt{x+1}-a) dx = \int at^{\frac{1}{2}} dt - \int a dx \\ &= \frac{2a}{3} t^{\frac{3}{2}} - ax + C = \frac{2a}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - ax + C \end{aligned}$$

09

$f(x) = \int e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3} dx$ 에서 $e^{2x}+3=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = 2e^{2x}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(x) &= \int e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3} dx \\
&= \int \frac{1}{2} (e^{2x}+3)' \sqrt{e^{2x}+3} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\
&= \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3} (e^{2x}+3) \sqrt{e^{2x}+3} + C
\end{aligned}$$

한편, $f'(x) = e^{2x} \sqrt{e^{2x}+3}$ 이므로 열린구간 $(0, \ln \sqrt{6})$ 에서 $f'(x) > 0$ 이다. 즉, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, \ln \sqrt{6}]$ 에서 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖고, $x=\ln \sqrt{6}$ 에서 최댓값을 가지므로 구하는 차는

$$f(\ln \sqrt{6}) - f(0) = 9 + C - \left(\frac{8}{3} + C \right) = \frac{19}{3}$$

답 $\frac{19}{3}$

10

조건 (가)에서 $f(x) > 0$ 이므로 조건 (나)의 식의 양변을 $f(x)$ 로 나누면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x - 2 \cos x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (\sin x - 2 \cos x) dx$$

$$\ln f(x) = -\cos x - 2 \sin x + C$$

이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$\ln f(0) = -1 + C$$

이때, $f(0) = 1$ 이므로

$$-1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore \ln f(x) = -\cos x - 2 \sin x + 1$$

이 식에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\ln f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 1 = -1$$

답 -1

11

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \sec^2 x dx + \int dx \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \tan x + x + C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이때, $\tan x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec^2 x dx &= \int \tan^2 x (\tan x)' dx \\
&= \int t^2 dt \\
&= \frac{1}{3} t^3 + C_2 \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x + C_2
\end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \quad (\text{단, } C = C_1 + C_2)$$

이므로

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = 1$$

$$\therefore \left| \frac{bc}{a} \right| = \left| \frac{(-1) \times 1}{\frac{1}{3}} \right| = 3$$

답 3

12

$$f'(x^2+1) = \pi f(2) \cos \frac{\pi}{2} x^2 + \frac{1}{2} f(3) \text{에서}$$

$x^2+1=t$ ($t \geq 1$)로 놓으면

$$f'(t) = \pi f(2) \cos \frac{\pi}{2} (t-1) + \frac{1}{2} f(3)$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(t) &= \int \left\{ \pi f(2) \cos \frac{\pi}{2} (t-1) + \frac{1}{2} f(3) \right\} dt \\
&= 2f(2) \sin \frac{\pi}{2} (t-1) + \frac{1}{2} f(3)t + C
\end{aligned}$$

이 식에 $t=2$ 를 대입하면 $f(2) = 2f(2) + \frac{1}{2}f(3) + C$

$$\therefore f(2) = -f(3) - C \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $t=3$ 을 대입하면

$$f(3)=0+\frac{3}{2}f(3)+C \quad \therefore C=-\frac{1}{2}f(3)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(2)=-f(3)+\frac{1}{2}f(3)=-\frac{1}{2}f(3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \left\{ \frac{f(3)}{f(2)} \right\}^2 &= \left\{ \frac{f(3)}{-\frac{1}{2}f(3)} \right\}^2 \\ &= (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

답 4

13

조건 ㉠에서 $xf(x)=F(x)+x^2\sin x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=F'(x)+2x\sin x+x^2\cos x$$

이때, $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$xf'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$$

즉, $f'(x)=2\sin x+x\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2\sin x + x\cos x) dx \\ &= -2\cos x + \int x\cos x dx + C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편, $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int x\cos x dx &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C_2 \end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\cos x + x\sin x + \cos x + C \\ &= x\sin x - \cos x + C \quad (\text{단, } C=C_1+C_2) \end{aligned}$$

이때, 조건 ㉡의 식에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$\pi f(\pi)=F(\pi)+\pi^2\sin \pi$$

$$\pi f(\pi)=\pi \quad (\because \text{조건 ㉢})$$

$$\therefore f(\pi)=1$$

$$\text{즉, } f(\pi)=1+C=1 \text{이므로 } C=0$$

$$\therefore f(x)=x\sin x - \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)-F(0)}{h} &= F'(0)=f(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 ①

14

$$f'(x)=\begin{cases} x\ln(x+2) & (-2 < x < 1) \\ 2x+1 & (x > 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$u(x)=\ln(x+2), v'(x)=x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=\frac{1}{x+2}, v(x)=\frac{1}{2}x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int x\ln(x+2) dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+2) - \int \frac{x^2}{2(x+2)} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x-2 + \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x - 2\ln(x+2) + C_1 \\ &= \frac{1}{2}(x^2-4)\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{또한, } \int (2x+1) dx = x^2 + x + C_2 \text{이므로}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x^2-4)\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x + C_1 & (-2 < x < 1) \\ x^2 + x + C_2 & (x > 1) \end{cases}$$

이때, $f(3)=2$ 이므로

$$f(3)=9+3+C_2=2 \quad \therefore C_2=-10$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-2, \infty)$ 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } f(1)=\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+x-10)=-8$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \left\{ \frac{1}{2}(x^2-4)\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x + C_1 \right\} \\ &= -\frac{3}{2}\ln 3 + \frac{3}{4} + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -8 = -\frac{3}{2}\ln 3 + \frac{3}{4} + C_1$$

$$\therefore C_1 = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{35}{4}$$

$$\therefore f(-1) = -\frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{35}{4} = \frac{3}{2}\ln 3 - 10$$

답 $\frac{3}{2}\ln 3 - 10$

15

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x} \ln(\ln x) dx \text{에서 } \ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \text{이}$$

므로

$$\begin{aligned}
& \int \frac{(\ln x)^n}{x} \ln(\ln x) dx \\
&= \int (\ln x)^n (\ln x)' \ln(\ln x) dx \\
&= \int t^n \ln t dt \quad \dots\dots \textcircled{7} \\
&u(t) = \ln t, \quad v'(t) = t^n \text{으로 놓으면} \\
&u'(t) = \frac{1}{t}, \quad v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \text{이므로} \\
&\int t^n \ln t dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t - \int \frac{1}{n+1} t^n dt \\
&= \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t - \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} + C
\end{aligned}$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}
& \int \frac{(\ln x)^n}{x} \ln(\ln x) dx \\
&= \frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t - \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} + C \\
&= \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} \ln(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2} (\ln x)^{n+1} + C
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore a_n b_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^3},$$

$$a_n + b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{(n+1)^3}}{\frac{n+2}{(n+1)^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= 2 \times \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

답 ③

16

$$f(x) = \int e^{2x} \sin^2 x dx \text{에서}$$

$$f'(x) = e^{2x} \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2e^{2x} \sin^2 x + e^{2x} \times 2 \sin x \cos x \\
&= 2e^{2x} (\sin x + \cos x) \sin x
\end{aligned}$$

이므로 $f''(x) = 0$ 에서

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x + \cos x = 0 \quad (\because e^{2x} > 0)$$

$$\sin x = 0 \text{에서 } x = \pi \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \text{에서 } \tan x = -1$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0, \quad f''(\pi) = 0 \text{이고 } x = \frac{3}{4}\pi, \quad x = \pi \text{의 좌우에서}$$

$f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y = f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi, x = \pi$ 에서 변곡점을 갖는다.

$$\therefore \alpha = \frac{3}{4}\pi, \quad \beta = \pi$$

한편,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int e^{2x} \sin^2 x dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^{2x} (1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

에서 $u_1(x) = \cos 2x, \quad v_1'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$$u_1'(x) = -2 \sin 2x, \quad v_1(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \text{이므로}$$

$$\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \int e^{2x} \sin 2x dx \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또한, $u_2(x) = \sin 2x, \quad v_2'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$$u_2'(x) = 2 \cos 2x, \quad v_2(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \text{이므로}$$

$$\int e^{2x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x - \int e^{2x} \cos 2x dx$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$\begin{aligned}
& \int e^{2x} \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x - \int e^{2x} \cos 2x dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x) + C_1$$

이므로

$$\int e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x) + C_2$$

$$\left(\text{단, } C_2 = \frac{1}{2} C_1 \right)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{8} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x) + C$$

$$= \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C \left(\text{단, } C = -\frac{1}{2} C_2 \right)$$

이때, $f(0) = \frac{1}{8}$ 이므로

$$f(0) = \frac{1}{8} + C = \frac{1}{8} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x)$ 이므로

$$f(\alpha) = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{8} e^{\frac{3}{2}\pi} (2 - 0 + 1) = \frac{3}{8} e^{\frac{3}{2}\pi},$$

$$f(\beta) = f(\pi) = \frac{1}{8} e^{2\pi} (2 - 1 - 0) = \frac{1}{8} e^{2\pi}$$

$$\therefore f(\alpha)f(\beta) = \frac{3}{8} e^{\frac{3}{2}\pi} \times \frac{1}{8} e^{2\pi} = \frac{3}{64} e^{\frac{7}{2}\pi}$$

$$\text{즉, } a = \frac{3}{64}, b = \frac{7}{2} \text{ 이므로}$$

$$a + b = \frac{3}{64} + \frac{7}{2} = \frac{227}{64}$$

답 $\frac{227}{64}$

17

$$I_{n+2} = \int \sin^{n+2} x dx = \int \sin x \sin^{n+1} x dx$$

$$\text{--- (7)}$$

에서 $u(x) = \sin^{n+1} x$, $v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$u'(x) = (n+1) \cos x \sin^n x$, $v(x) = -\cos x$ 이므로

$$I_{n+2} = \int \sin x \sin^{n+1} x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n+1} x + \int (n+1) \cos^2 x \sin^n x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n+1} x + (n+1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^n x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n+1} x + (n+1) \int \sin^n x dx$$

$$= -\cos x \sin^{n+1} x + (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$\text{--- (8)}$$

$$\text{즉, } (n+2) I_{n+2} = -\cos x \sin^{n+1} x + (n+1) I_n$$

이므로

$$I_{n+2} = -\frac{1}{n+2} \cos x \sin^{n+1} x + \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\text{--- (9)}$$

답 풀이참조

단계	채점 기준	배점
(가)	I_{n+1} 을 $\int$ 을 이용하여 나타낸 경우	20%
(나)	부분적분법을 이용하여 I_{n+2} 를 I_n 과 I_{n+2} 에 대한 식으로 나타낸 경우	50%
(다)	(나)에서 구한 식을 정리하여 주어진 등식이 성립함을 증명한 경우	30%

18

$x \neq 0$ 이므로 조건 (나)의 식의 양변을 $-x^2$ 으로 나누면

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -e^x$$

$$\text{이때, } \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \int \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx = \int (-e^x) dx = -e^x + C$$

조건 (가)에서 $f(1) = -e$ 이므로

$$f(1) = -e + C = -e \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } \frac{f(x)}{x} = -e^x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = -xe^x$$

$$\therefore f(2) \times f(-2) = -2e^2 \times \frac{2}{e^2} = -4$$

답 -4

다른풀이

조건 (나)의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'(x) - xf''(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

$$-xf''(x) = (x^2 + 2x)e^x$$

$$\therefore f''(x) = -(x+2)e^x \quad (\because x \neq 0)$$

$$f'(x) = - \int (x+2)e^x dx \text{에서 } u(x)=x+2, v'(x)=e^x$$

으로 놓으면 $u'(x)=1, v(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \left\{ (x+2)e^x - \int e^x dx \right\} \\ &= - (x+2)e^x + \int e^x dx \\ &= - (x+2)e^x + e^x + C \\ &= - (x+1)e^x + C \quad \dots\dots\textcircled{7} \end{aligned}$$

이때, $f(1) = -e$ 이므로 조건 ㄴ의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) - f'(1) = e, -e - f'(1) = e$$

$$\therefore f'(1) = -2e$$

즉, ㉑에서 $f'(1) = -2e + C$ 이므로

$$-2e + C = -2e \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f'(x) = - (x+1)e^x$$

이것을 조건 ㄴ의 식에 대입하여 정리하면

$$f(x) = -x(x+1)e^x + x^2e^x = -xe^x$$

19

$g'(x) = x^2 f'(x^3+1)$ 에서 $x^3+1=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \int x^2 f'(x^3+1) dx \\ &= \int \frac{1}{3} (x^3+1)' f'(x^3+1) dx \\ &= \frac{1}{3} \int f'(t) dt \\ &= \frac{1}{3} f(t) + C \\ &= \frac{1}{3} f(x^3+1) + C \\ &= \frac{2(x^3+1)}{3(x^3-2)^2} + C \end{aligned}$$

이때, $g(1) = \frac{5}{3}$ 이므로

$$g(1) = \frac{4}{3} + C = \frac{5}{3} \quad \therefore C = \frac{1}{3}$$

따라서 $g(x) = \frac{2(x^3+1)}{3(x^3-2)^2} + \frac{1}{3}$ 이므로

$$g(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

20

조건 ㄴ에서

$$(x+2)f'(x) - 2f(x) + 2 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + (x+2)f''(x) - 2f'(x) = 0$$

$$(x+2)f''(x) = f'(x)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x+2} \quad (\because f'(x) \neq 0)$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$\therefore \ln |f'(x)| = \ln |x+2| + C_1$$

$$= \ln |x+2| e^{C_1}$$

$$\therefore |f'(x)| = |x+2| e^{C_1}$$

$$= (x+2)e^{C_1} \quad (\because x > -2)$$

한편, ㉑에 $x=0$ 을 대입하면

$$2f'(0) - 2f(0) + 2 = 0$$

$$\therefore f'(0) = -1 \quad (\because \text{조건 ㄴ})$$

이때, $|f'(0)| = 2e^{C_1}$ 에서

$$1 = 2e^{C_1} \quad \therefore e^{C_1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $|f'(x)| = \frac{1}{2}(x+2)$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2) \text{ 또는 } f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)$$

그런데 $f'(0) = -1$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+2)$$

$$\therefore f(x) = \int \left\{ -\frac{1}{2}(x+2) \right\} dx = -\frac{1}{4}x^2 - x + C_2$$

이때, $f(0)=0$ 이므로 $C_2=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2-x$ 이므로

$$f(2)=-1-2=-3$$

답 -3

다른풀이

조건 ④의 식의 양변을 $(x+2)^3$ 으로 나누면

$$\frac{(x+2)f'(x)-2f(x)}{(x+2)^3}=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

$$\frac{(x+2)^2f'(x)-2(x+2)f(x)}{(x+2)^4}=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{(x+2)^2}\right\}'=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int\left\{\frac{f(x)}{(x+2)^2}\right\}'dx=\int\left\{-\frac{2}{(x+2)^3}\right\}dx$$

$$\frac{f(x)}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}+C$$

이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$\frac{f(0)}{4}=\frac{1}{4}+C$$

조건 ⑦에서 $f(0)=0$ 이므로

$$0=\frac{1}{4}+C \quad \therefore C=-\frac{1}{4}$$

따라서 $f(x)=1-\frac{1}{4}(x+2)^2$ 이므로

$$f(2)=-3$$

21

$$f(x)=\int\frac{1}{4\cos^2x-\sin^2x}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2x}{4-\tan^2x}dx \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

이때, $\tan x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2x$ 이므로

①에서

$$f(x)=\int\frac{(\tan x)'}{4-\tan^2x}dx$$

$$=\int\frac{1}{4-t^2}dt$$

$$=\int\left\{-\frac{1}{(t+2)(t-2)}\right\}dt$$

$$=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|t+2|-\ln|t-2|)+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|+C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}\ln 3\text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\ln 3+C=-\frac{1}{4}\ln 3 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|-\frac{1}{2}\ln 3\text{이므로}$$

$$f(x)=0\text{에서 } \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|=\frac{1}{2}\ln 3$$

$$\ln\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|=2\ln 3=\ln 9$$

$$\therefore\left|\frac{\tan x+2}{\tan x-2}\right|=9$$

$$(i) \frac{\tan x+2}{\tan x-2}=9\text{일 때,}$$

$$\tan x+2=9\tan x-18 \quad \therefore \tan x=\frac{5}{2}$$

$$(ii) \frac{\tan x+2}{\tan x-2}=-9\text{일 때,}$$

$$\tan x+2=-9\tan x+18 \quad \therefore \tan x=\frac{8}{5}$$

(i), (ii)에서 $f(a)=0$ 인 실수 a 에 대하여

$$\tan a=\frac{5}{2} \text{ 또는 } \tan a=\frac{8}{5}$$

$$\text{그런데 } -\frac{\pi}{3}<a<\frac{\pi}{3}\text{이므로 } -\sqrt{3}<\tan a<\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan a=\frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

보충설명

$$\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{25}}{2}\text{이고, } -\sqrt{3}<\tan a<\sqrt{3}\text{이므로}$$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{2}<\tan a<\frac{2\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{12}}{2}<\tan a<\frac{\sqrt{12}}{2}$$

$$\text{이때, } \frac{\sqrt{12}}{2}<\frac{\sqrt{25}}{2}\text{이므로 } \tan a\neq\frac{5}{2}$$

22

조건 ㉞에서

$$f(x) + g(x) = \int (-x^2 + 2)e^{-x} dx$$

이때, $u_1(x) = -x^2 + 2$, $v_1'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u_1'(x) = -2x, \quad v_1(x) = -e^{-x} \text{이므로}$$

$$\int (-x^2 + 2)e^{-x} dx$$

$$= -(-x^2 + 2)e^{-x} - \int 2xe^{-x} dx \quad \dots\dots\textcircled{㉟}$$

또한, $u_2(x) = 2x$, $v_2'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u_2'(x) = 2, \quad v_2(x) = -e^{-x} \text{이므로}$$

$$\int 2xe^{-x} dx = -2xe^{-x} - \int (-2e^{-x}) dx$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C_1$$

$$= -(2x + 2)e^{-x} + C_1$$

이것을 ㉟에 대입하면

$$\int (-x^2 + 2)e^{-x} dx$$

$$= -(-x^2 + 2)e^{-x} + (2x + 2)e^{-x} + C \quad (\text{단, } C = -C_1)$$

$$= (x^2 + 2x)e^{-x} + C$$

$$\therefore f(x) + g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} + C$$

이때, $f(0) = -1$, $g(0) = 1$ 이므로

$$f(0) + g(0) = C = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} \quad \dots\dots\textcircled{㊱}$$

한편, 조건 ㉞에서

$$f(x)g(x) = \int (-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x} dx$$

이때, $u_3(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2$, $v_3'(x) = e^{-2x}$ 으로 놓으면

$$u_3'(x) = -6x^2 + 6x, \quad v_3(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \text{이므로}$$

$$\int (-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x}$$

$$- \int \left\{ -\frac{1}{2}(-6x^2 + 6x)e^{-2x} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x} + \int (-3x^2 + 3x)e^{-2x} dx$$

$\dots\dots\textcircled{㊲}$

또한, $u_4(x) = -3x^2 + 3x$, $v_4'(x) = e^{-2x}$ 으로 놓으면

$$u_4'(x) = -6x + 3, \quad v_4(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \text{이므로}$$

$$\int (-3x^2 + 3x)e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(-3x^2 + 3x)e^{-2x} - \int \left\{ -\frac{1}{2}(-6x + 3)e^{-2x} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 3x)e^{-2x} + \frac{1}{2} \int (-6x + 3)e^{-2x} dx \quad \dots\dots\textcircled{㊳}$$

$u_5(x) = -6x + 3$, $v_5'(x) = e^{-2x}$ 으로 놓으면

$$u_5'(x) = -6, \quad v_5(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \text{이므로}$$

$$\int (-6x + 3)e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(-6x + 3)e^{-2x} - \int 3e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}(6x - 3)e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + C_2$$

$$= 3xe^{-2x} + C_2$$

이것을 ㊳에 대입하면

$$\int (-3x^2 + 3x)e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 3x)e^{-2x} + \frac{3}{2}xe^{-2x} + C' \quad (\text{단, } C' = \frac{1}{2}C_2)$$

$$= \frac{3}{2}x^2e^{-2x} + C'$$

이것을 ㊱에 대입하면

$$\int (-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}(-2x^3 + 3x^2 + 2)e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2e^{-2x} + C'$$

$$= (x^3 - 1)e^{-2x} + C'$$

$$\therefore f(x)g(x) = (x^3 - 1)e^{-2x} + C'$$

이때, $f(0)g(0) = -1$ 이므로

$$f(0)g(0) = -1 + C' = -1 \quad \therefore C' = 0$$

$$\therefore f(x)g(x) = (x^3 - 1)e^{-2x}$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)e^{-2x} \quad \dots\dots\textcircled{㊴}$$

㊱, ㊴에서

$$f(x) = (x - 1)e^{-x}, \quad g(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

이므로

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

$$= -(x^2 - x)e^{-x}$$

따라서 $f(1) = 0$, $g'(1) = 0$ 이므로

$$f(1) + g'(1) = 0$$

답 0

$$f(x) = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \text{에서}$$

$$u(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), v'(x) = 1 \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \end{aligned}$$

$$v(x) = x$$

이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } 1+x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= \sqrt{t} + C_1 \\ &= \sqrt{1+x^2} + C_1 \end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C \quad (\text{단, } C = -C_1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{한편, } f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x + \sqrt{1+x^2} = 1, \sqrt{1+x^2} = 1 - x$$

$$1+x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 0 \quad \therefore x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이므로 함수 $|f(x) - f(a)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $a=0$

즉, $f(0) = -1$ 이므로 ②에서

$$f(0) = -1 + C = -1 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 이므로

$$f(1) = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

$$\text{답 } \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

$$\text{01-1 (1) } \ln 2 \quad (2) \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2} \quad (3) 3$$

$$\text{01-2 } e^2 + \frac{4}{5}e^{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{2}e$$

$$\text{01-3 } \frac{3}{2} + 3\ln \frac{3}{4}$$

$$\text{02-1 (1) } e + \frac{1}{e} - 2 \quad (2) e + \frac{1}{e^2} - 1$$

$$\text{02-2 } e^2 - 2e + 1$$

$$\text{03-1 (1) } 2 \quad (2) \frac{\ln 3}{2} \quad (3) \log_2 \frac{3}{2}$$

$$\text{03-2 } \frac{3}{2} \ln \frac{2}{e+1} + 2$$

$$\text{03-3 } 12$$

$$\text{04-1 (1) } \frac{\pi}{3} \quad (2) \frac{\pi}{9}$$

$$\text{04-2 } 6$$

$$\text{05-1 (1) } 2 \quad (2) -\frac{\pi}{2} \quad \text{05-2 } -2e^3 + 2e - \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}$$

$$\text{05-3 } 31$$

$$\text{06-1 } 63$$

$$\text{06-2 } 12$$

$$\text{07-1 } 10$$

$$\text{07-2 } 12$$

$$\text{07-3 } \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$\text{08-1 } 2$$

$$\text{08-2 } -2\sqrt{3}$$

$$\text{09-1 } e$$

$$\text{09-2 } \frac{1}{3} \ln 28$$

$$\text{09-3 } 4$$

$$\text{10-1 (1) } 3e \quad (2) 54 \ln 3$$

$$\text{10-2 } 3$$

$$\text{10-3 } 1$$

01-1

$$\begin{aligned} (1) \int_3^6 \frac{2}{x^2-2x} dx &= \int_3^6 \frac{2}{x(x-2)} dx \\ &= \int_3^6 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\ln|x-2| - \ln|x| \right]_3^6 \\ &= (\ln 4 - \ln 6) - (0 - \ln 3) \\ &= \ln 4 - \ln 6 + \ln 3 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 \frac{3^{2x}-x^2}{3^x+x} dx &= \int_0^1 \frac{(3^x+x)(3^x-x)}{3^x+x} dx \\ &= \int_0^1 (3^x-x) dx \\ &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{\ln 3} - 0 \right) \\ &= \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^1 (2^x \ln 2 + \pi \sin \pi x) dx$$

$$= \left[\ln 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} - \pi \times \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1$$

$$= \left[2^x - \cos \pi x \right]_0^1$$

$$= \{2 - (-1)\} - (1 - 1) = 3$$

$$\text{답 (1) } \ln 2 \quad (2) \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{2} \quad (3) 3$$

01-2

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{이므로}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt[4]{x} + a) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^{x+1} \text{에서}$$

$$a = e$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & (x \leq 0) \\ \sqrt[4]{x} + e & (x > 0) \end{cases}$$

$$\text{이때, } \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{\ln \frac{1}{2}}^a f(x) dx &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^e f(x) dx \\ &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^e f(x) dx \\ &= \int_{\ln \frac{1}{2}}^0 e^{x+1} dx + \int_0^e (\sqrt[4]{x} + e) dx \\ &= \left[e^{x+1} \right]_{\ln \frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + ex \right]_0^e \\ &= \left(e - \frac{1}{2} e \right) + \left\{ \left(\frac{4}{5} e^{\frac{5}{4}} + e^2 \right) - 0 \right\} \\ &= e^2 + \frac{4}{5} e^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} e \end{aligned}$$

$$\text{답 } e^2 + \frac{4}{5} e^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} e$$

01-3

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-x)(x^n+x)}{x^n+1} = x(2-x)$$

(ii) $x=1$ 일 때,

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-1)(1^n+1)}{1^n+1} = 1$$

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-x)(x^n+x)}{x^n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-x^{n+1} + 2x^n - x^2 + 2x}{x^n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-x+2 - \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{2}{x^{n-1}}}{1 + \frac{1}{x^n}} \\ &= \frac{-x+2}{1} \\ &= -x+2 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} x(2-x) & (0 < x < 1) \\ 1 & (x=1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 \frac{f(x)}{x+1} dx &= \int_0^1 \frac{x(2-x)}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{-x+2}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{-(x+1)^2 + 4(x+1) - 3}{x+1} dx + \int_1^2 \frac{-(x+1) + 3}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(-x + 3 - \frac{3}{x+1} \right) dx + \int_1^2 \left(-1 + \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 + 3x - 3 \ln |x+1| \right]_0^1 + \left[-x + 3 \ln |x+1| \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 3 - 3 \ln 2 - 0 \right) + \{ (-2 + 3 \ln 3) - (-1 + 3 \ln 2) \} \\ &= \frac{3}{2} + 3 \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{3}{2} + 3 \ln \frac{3}{4}$$

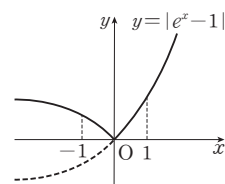
02-1

(1) $|e^x - 1|$

$$= \begin{cases} -e^x + 1 & (x < 0) \\ e^x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

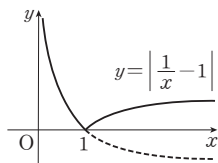
$$\therefore \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$



$$\begin{aligned}
&= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1 \\
&= \{(-1+0) - (-e^{-1}-1)\} + \{(e-1) - (1-0)\} \\
&= e + \frac{1}{e} - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2} \\
&= \left| \frac{1}{x}-1 \right| \\
&= \begin{cases} \frac{1}{x}-1 & (0 < x < 1) \\ -\frac{1}{x}+1 & (x \geq 1) \end{cases}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\therefore \int_{\frac{1}{e^2}}^e \sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2} dx \\
&= \int_{\frac{1}{e^2}}^e \left| \frac{1}{x}-1 \right| dx \\
&= \int_{\frac{1}{e^2}}^1 \left(\frac{1}{x}-1 \right) dx + \int_1^e \left(-\frac{1}{x}+1 \right) dx \\
&= \left[\ln x - x \right]_{\frac{1}{e^2}}^1 + \left[-\ln x + x \right]_1^e \\
&= \left\{ (0-1) - \left(-2 - \frac{1}{e^2} \right) \right\} + \{ (-1+e) - (0+1) \} \\
&= e + \frac{1}{e^2} - 1
\end{aligned}$$

답 (1) $e + \frac{1}{e} - 2$ (2) $e + \frac{1}{e^2} - 1$

02-2

$$f(x) = \int_0^2 |e^x - e^t| dt \text{에서 } 0 \leq x \leq 1 \text{이므로}$$

$$|e^x - e^t| = \begin{cases} e^x - e^t & (0 \leq t < x) \\ -e^x + e^t & (x \leq t \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(x) &= \int_0^2 |e^x - e^t| dt \\
&= \int_0^x (e^x - e^t) dt + \int_x^2 (-e^x + e^t) dt \\
&= \left[e^x t - e^t \right]_0^x + \left[-e^x t + e^t \right]_x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ (xe^x - e^x) - (0-1) \} \\
&\quad + \{ (-2e^x + e^2) - (-xe^x + e^x) \} \\
&= (2x-4)e^x + 1 + e^2
\end{aligned}$$

이때, $f'(x) = 2e^x + (2x-4)e^x = (2x-2)e^x$ 이므로

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$

따라서 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(1) = (2-4)e + 1 + e^2 = e^2 - 2e + 1$$

답 $e^2 - 2e + 1$

03-1

$$(1) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{에서}$$

$1-x^2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -2x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=1$,

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $t=\frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -2 \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= 2 \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^1 \\
&= 2 \times (2-1) = 2
\end{aligned}$$

$$(2) \int_3^9 \frac{1}{x(\log_3 x)^2} dx \text{에서}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x \ln 3}$ 이고, $x=3$ 일 때

$t=1$, $x=9$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_3^9 \frac{1}{x(\log_3 x)^2} dx &= \ln 3 \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt \\
&= \ln 3 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 \\
&= \ln 3 \times \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\ln 3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int_0^1 \frac{4^x}{4^x + 2^x} dx &= \int_0^1 \frac{2^x}{2^x + 1} dx \text{에서 } 2^x = t \text{로 놓으면} \\
\frac{dt}{dx} &= 2^x \ln 2 \text{이고, } x=0 \text{일 때 } t=1, \quad x=1 \text{일 때 } t=2 \\
&\text{이므로}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4^x}{4^x+2^x} dx &= \int_0^1 \frac{2^x}{2^x+1} dx = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left[\ln |t+1| \right]_1^2 \\ &= \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} = \log_2 \frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{\ln 3}{2}$ (3) $\log_2 \frac{3}{2}$

03-2

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt + e^{-x} \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-t}} dt \\ &= e^x \int_0^1 \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt + e^{-x} \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \\ &= e^x \left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \right) + e^{-x} \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \\ &= e^x \left(\left[t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \right) + e^{-x} \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \\ &= e^x \left(1 - \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \right) + e^{-x} \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt \quad \dots\dots\textcircled{1}\end{aligned}$$

이때, $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$ 에서 $1+e^t=a$ 로 놓으면 $\frac{da}{dt}=e^t$ 이고,

$t=0$ 일 때 $a=2$, $t=1$ 일 때 $a=1+e$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt &= \int_2^{1+e} \frac{1}{a} da = \left[\ln |a| \right]_2^{1+e} \\ &= \ln(1+e) - \ln 2 = \ln \frac{1+e}{2}\end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \left(1 - \ln \frac{1+e}{2} \right) + e^{-x} \ln \frac{1+e}{2} \\ &= e^x \ln \frac{2e}{1+e} + e^{-x} \ln \frac{1+e}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(\ln 2) &= \ln \frac{2e}{1+e} \times 2 + \ln \frac{1+e}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \ln \frac{2}{e+1} + 2\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2} \ln \frac{2}{e+1} + 2$

03-3

$g(x)$ 가 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2} dx = 40 \int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx \text{에서}$$

$f(x)=t$ 라 하면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이고, $g(2)=1$, $g(5)=5$ 에서

$f(1)=2$, $f(5)=5$ 이므로 $x=1$ 일 때 $t=2$, $x=5$ 일 때 $t=5$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2} dx &= 40 \int_1^5 \frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx \\ &= 40 \int_2^5 \frac{1}{t^2} dt = 40 \left[-\frac{1}{t} \right]_2^5 \\ &= 40 \times \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) = 12\end{aligned}$$

답 12

04-1

$$(1) \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx \text{에서}$$

$x-2=2\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ 이고, $x=1$ 일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $x=3$ 일 때

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{2|\cos\theta|} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$(2) \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} \frac{1}{9+(x-3)^2} dx \text{에서}$$

$x-3=3\tan\theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$ 이고, $x=3-\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$,

$x=3+\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
& \int_{3-\sqrt{3}}^{3+\sqrt{3}} \frac{1}{9+(x-3)^2} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9+9\tan^2\theta} 3\sec^2\theta d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sec^2\theta}{9(1+\tan^2\theta)} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{9}
\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{9}$

04-2

$\int_0^a \sqrt{4a^2-x^2} dx$ 에서 $x=2a\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2a\cos\theta$ 이고, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{4a^2-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4a^2-4a^2\sin^2\theta} \times 2a\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4a^2\cos^2\theta d\theta \quad (\because a>0) \\
&= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 4a^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 4a^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - 0 \right\} \\
&= \frac{\pi}{3}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2
\end{aligned}$$

이때, $\int_0^a \sqrt{4a^2-x^2} dx = 12\pi + 18\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{3}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 12\pi + 18\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{12\pi + 18\sqrt{3}}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 36 \quad \therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

답 6

05-1

(1) $\int_1^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 에서 $\sqrt{x}=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이고,
 $x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e^2$ 일 때 $t=e$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^2} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^e \ln t \times 2 dt = 2 \int_1^e \ln t dt \\
&= 2 \left[t \ln t \right]_1^e - 2 \int_1^e dt \\
&= 2e - 2 \left[t \right]_1^e = 2e - 2(e-1) = 2
\end{aligned}$$

(2) $\int_0^\pi 4x \sin 2x \cos 2x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi 2x \sin 4x dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x \cos 4x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{\pi}{2}$

05-2

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (x < -1) \\ -2x & (-1 \leq x < 1) \\ -2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-2}^3 f(x) e^x dx &= \int_{-2}^{-1} 2e^x dx + \int_{-1}^1 (-2xe^x) dx + \int_1^3 (-2e^x) dx \\
&= \left[2e^x \right]_{-2}^{-1} - \left(\left[2xe^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x dx \right) - \left[2e^x \right]_1^3 \\
&= (2e^{-1} - 2e^{-2}) - (2e + 2e^{-1}) + \left[2e^x \right]_{-1}^1 - (2e^3 - 2e) \\
&= \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2} - 2e - \frac{2}{e} + (2e - 2e^{-1}) - 2e^3 + 2e \\
&= -2e^3 + 2e - \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}
\end{aligned}$$

답 $-2e^3 + 2e - \frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}$

05-3

$[x\{f(x)\}^2]' = \{f(x)\}^2 + 2xf(x)f'(x)$ 이므로

$$2 \int_1^3 xf(x)f'(x) dx$$

$$= \left[x\{f(x)\}^2 \right]_1^3 - \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx$$

$$= 3\{f(3)\}^2 - \{f(1)\}^2 - \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx$$

이때, $f(1)=2$, $f(3)=5$ 이고, $\int_1^3 \{f(x)\}^2 dx = 9$ 이므로

$$2 \int_1^3 xf(x)f'(x) dx = 3 \times 5^2 - 2^2 - 9 = 62$$

$$\therefore \int_1^3 xf(x)f'(x) dx = 31$$

답 31

06-1

조건 (ㄴ)에서 $f(x+1)=f(x-2)$ 이므로

$$f(x)=f(x+3)$$

$$\therefore \int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$$

$$= 2 \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x) dx$$

$$= 2 \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \pi \sin^2 \frac{\pi}{6} x dx \quad (\because \text{조건 (ㄷ)})$$

$$= \pi \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} x\right) dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} x \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$= \pi \left\{ \frac{9}{2} - \frac{3}{\pi} \times (-1) - \frac{3}{2} + \frac{3}{\pi} \times 1 \right\}$$

$$= 6 + 3\pi$$

따라서 $a=6$, $b=3\pi$ 이므로

$$10a+b=10 \times 6 + 3 = 63$$

답 63

06-2

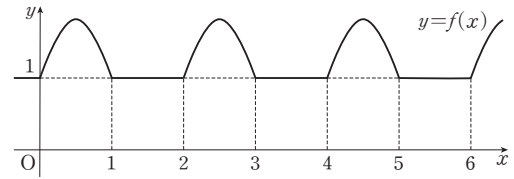
조건 (ㄱ)에서 $f(2)=f(0)$

또한, 조건 (ㄴ)에서 $f(0)=1$, $f(1)=1$ 이므로

$$f(0)=f(1)=f(2)=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 조건 (ㄴ)에서 $1 < x < 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서 $1 < x < 2$ 일 때, $f(x)=1$ 이다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \int_0^6 f(x) dx = 3 \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 3 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 3 \int_0^1 (\sin \pi x + 1) dx + 3 \int_1^2 dx$$

$$= 3 \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x + x \right]_0^1 + 3 \left[x \right]_1^2$$

$$= 3 \left(\frac{1}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi} - 0 \right) + 3$$

$$= 6 + \frac{6}{\pi}$$

따라서 $p=6$, $q=6\pi$ 이므로

$$p+q=6+6=12$$

답 12

07-1

조건 (ㄱ)의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \therefore f'(-x) = -f'(x)$$

즉, 함수 $y=x^2 f'(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

함수 $y=f'(x) \tan x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

조건 (ㄴ)에서

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - \tan x) f'(x) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 f'(x) dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \tan x dx$$

$$= 0 - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \tan x dx$$

$$= - \left[f(x) \tan x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sec^2 x dx$$

$$= -f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sec^2 x dx$$

이때, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=7$ ($\because$ ㉞)이므로

$$-2 \times 7 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sec^2 x dx = -4$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sec^2 x dx = -4 + 14 = 10$$

답 10

07-2

$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x) dx$ 에서 $a-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$ 이고,

$x=a-1$ 일 때 $t=1$, $x=a+1$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\int_{a-1}^{a+1} f(a-x) dx = -\int_1^{-1} f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = 24$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = 12$$

답 12

07-3

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$= 2 \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 2 \left[-2x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 0 - 4 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, 함수 $y=f(x)-f(-x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - f(-x)\} dx = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) + f(-x)\} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - f(-x)\} dx \\ = \frac{\pi^2}{2} - 4 \end{aligned}$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi^2}{2} - 4 \quad \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

답 $\frac{\pi^2}{4} - 2$

다른풀이

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx \text{에서 } -x=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -1 \text{이고,}$$

$x=-\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(-x) + f(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$= \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \left[-2x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

08-1

$$\int_0^{\pi} t f'(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $f(x) = a \sin x + k$ 이므로

$$f'(x) = a \cos x$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$k = \int_0^{\pi} t f'(t) dt = \int_0^{\pi} (t \times a \cos t) dt$$

$$= a \left(\left[t \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt \right) = a \left(0 - \left[-\cos t \right]_0^{\pi} \right)$$

$$= a \times (-1 - 1) = -2a$$

$$\therefore f(x) = a \sin x - 2a$$

이때, $f(0) = -4$ 이므로
 $-2a = -4 \quad \therefore a = 2$

답 2

08-2

조건 (가)의 $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t) dt = \{g(x) + a\} \tan x - 1$ 에 $x=0$ 을
 대입하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = \{g(0) + a\} \times 0 - 1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = 1$$

또한, 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} g(x) &= \tan^2 x \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt + 1 \\ &= \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \end{aligned}$$

조건 (가)의 식에 $x = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$0 = \left\{ g\left(\frac{\pi}{4}\right) + a \right\} \times 1 - 1, \quad \sec^2 \frac{\pi}{4} + a = 1$$

$$2 + a = 1 \quad \therefore a = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{a}{3}\pi}^{\frac{a}{3}\pi} g(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx \\ &= \left[\tan x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \\ &= -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $-2\sqrt{3}$

09-1

$\int_a^x tf(t) dt = (x+a-2)e^x$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 = (2a-2)e^a, \quad (a-1)e^a = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because e^a > 0)$$

즉, $\int_1^x tf(t) dt = (x-1)e^x$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미
 분하면

$$xf(x) = e^x + (x-1)e^x, \quad xf(x) = xe^x$$

따라서 $f(x) = e^x$ 이므로

$$f(a) = f(1) = e$$

답 e

09-2

$f(x) = \int_1^x \frac{t}{\ln t + 1} dt$ 이므로

$$f(1) = 0$$

또한, $f(x) = \int_1^x \frac{t}{\ln t + 1} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$$

$\int_1^a \frac{x\{f(x)\}^2}{(\ln x + 1)[\{f(x)\}^3 + 1]} dx$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = f'(x) \text{이고, } x=1 \text{일 때 } t=f(1)=0, \quad x=a \text{일 때}$$

$$t=f(a)=3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{x\{f(x)\}^2}{(\ln x + 1)[\{f(x)\}^3 + 1]} dx &= \int_0^3 \frac{t^2}{t^3 + 1} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln |t^3 + 1| \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \ln 28 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3} \ln 28$

09-3

$\int_0^2 xf(tx) dx = 4t^2$ 에서 $tx=y$ 로 놓으면 $\frac{dy}{dx} = t$ 이고,

$x=0$ 일 때 $y=0$, $x=2$ 일 때 $y=2t$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 xf(tx) dx &= \int_0^{2t} \frac{y}{t^2} f(y) dy \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^{2t} yf(y) dy \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{t^2} \int_0^{2t} yf(y) dy = 4t^2 \text{이므로}$$

$$\int_0^{2t} yf(y) dy = 4t^4$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$2 \times 2t f(2t) = 16t^3, \quad f(2t) = 4t^2 \quad \therefore f(2) = 4$$

답 4

10-1

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$F'(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e-h}^{e+2h} f(t) dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(t) \right]_{e-h}^{e+2h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e) + F(e) - F(e-h)}{h} \\
&= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e) - F(e-h)}{-h} \\
&= 2F'(e) + F'(e) \\
&= 3F'(e) = 3f(e) \\
&= 3 \times e \ln e \\
&= 3e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_9^{3x} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left[F(t) \right]_9^{3x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(3x) - F(9)}{x-3} \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(3x) - F(9)}{3x-9} \\
&= 3F'(9) = 3f(9) \\
&= 3 \times 9 \ln 9 \\
&= 54 \ln 3
\end{aligned}$$

답 (1) $3e$ (2) $54 \ln 3$

10-2

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$F'(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2+1}{x} \int_1^{x+1} f(t) dt \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2+1}{x} \left[F(t) \right]_1^{x+1} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (x^2+1) \times \frac{F(x+1) - F(1)}{x} \right\} \\
&= 1 \times F'(1) \\
&= f(1) = 3
\end{aligned}$$

즉, $a \cos \pi = 3$ 이므로

$$-a = 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3 \cos(\pi x^2)$ 이므로

$$f(-3) = -3 \cos 9\pi = 3$$

답 3

10-3

$f(t) = (3t-2) \ln(3t-2)$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$F'(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x (3t-2) \ln(3t-2) dt \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \left[F(t) \right]_a^x \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x^2) - F(a^2)}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{F(x^2) - F(a^2)}{x^2 - a^2} \times (x+a) \right\} \\
&= 2a F'(a^2) = 2af(a^2)
\end{aligned}$$

즉, $2af(a^2) = 0$ 이므로

$$2a(3a^2-2) \ln(3a^2-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \left(\because a > \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

답 1

개념 마무리

본문 pp.265-268

01 2

02 ②

03 $\frac{3e-1}{e^2-e}$

04 $1 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}(\ln 2)^2$

05 ⑤

06 $\frac{8}{\pi}$

07 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

08 ④

09 -3

10 ②

11 $2\sqrt{2}$

12 $\frac{5}{22}\pi$

13 8

14 ②

15 $3e - 2e^2$

16 3

17 55

18 ②

19 $\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$

20 $\frac{1}{4}$

21 $\frac{\pi}{12}$

22 $\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$

23 ③

24 $\neg, \perp$

01

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \frac{x-1}{x\sqrt{x}+x} dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)} dx \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} \right) dx \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[2\sqrt{x} - \ln |x|\right]_1^n}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt{n} - \ln n) - (2 - 0)}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \ln n - 2}{\sqrt{n}} = 2
\end{aligned}$$

답 2

보충설명

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 의 값은 다음과 같은 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

[방법 1] 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

[방법 2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 에서 $\sqrt{n}=t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t^2}{t} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

02

$$2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

①에서 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f(x) = x + x^2$$

위의 식의 양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$\frac{3}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \quad \therefore f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} \ln |x| - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
&= \left(\frac{1}{3} \ln 2 - 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \\
&= \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

답 ②

다른풀이

$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 에서 $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ 이고,

$x=\frac{1}{2}$ 일 때 $t=2$, $x=2$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_2^{\frac{1}{2}} \{-f(t)\} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 f(t) dt$$

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 2f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

에서

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 2f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
3 \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
&= \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(-\ln 2 - 2 \right) \\
&= 2 \ln 2 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2}$$

03

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_n^{n+1} \{e^{-x} + (-e)^{-n} \pi \sin(\pi x)\} dx \\
&= \int_n^{n+1} e^{-x} dx + (-e)^{-n} \pi \int_n^{n+1} \sin(\pi x) dx \\
&= \left[-e^{-x} \right]_n^{n+1} + (-e)^{-n} \pi \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_n^{n+1} \\
&= -e^{-n-1} + e^{-n} - (-e)^{-n} \{\cos(n+1)\pi - \cos n\pi\} \\
&= -\frac{1}{e^{n+1}} + \frac{1}{e^n} + \frac{2}{e^n} = \frac{3e-1}{e^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e-1}{e^{n+1}} = \frac{3e-1}{1-\frac{1}{e}} \\
&= \frac{3e-1}{\frac{e^2}{e}} = \frac{3e-1}{e^2-e}
\end{aligned}$$

답 $\frac{3e-1}{e^2-e}$

보충설명

(i) n 이 홀수일 때,

$$\begin{aligned} (-e)^{-n} \{\cos(n+1)\pi - \cos n\pi\} &= -e^{-n} \{1 - (-1)\} \\ &= -2e^{-n} \end{aligned}$$

(ii) n 이 짝수일 때,

$$\begin{aligned} (-e)^{-n} \{\cos(n+1)\pi - \cos n\pi\} &= e^{-n} \{(-1) - 1\} \\ &= -2e^{-n} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $(-e)^{-n} \{\cos(n+1)\pi - \cos n\pi\} = -2e^{-n}$

04

(i) $x < 0$ 에서 $f'(x) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \left(\sin^2 x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수}) \end{aligned}$$

(ii) $x > 0$ 에서 $f'(x) = e^{2x} - \frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \left(e^{2x} - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 (i), (ii)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} x + C_2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \right)$$

$$\therefore \frac{1}{2} + C_2 = C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\ln 2 > 0$ 이므로

$$f(\ln 2) = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{3}{2} \ln 2 + C_2$$

$$= 2 - \frac{3}{2} \ln 2 + C_2 = 2 - \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\therefore C_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} & (x < 0) \\ \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\ln 2} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\ln 2} f(x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &\quad + \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{2} x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \left[\frac{1}{4} e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 \right]_0^{\ln 2} \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + \left\{ 1 - \frac{3}{4} (\ln 2)^2 - \frac{1}{4} \right\} \\ &= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} (\ln 2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{답 } 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} (\ln 2)^2$$

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 도함수 $f'(x)$ 를 구간별로 적분한 경우	40%
(나)	함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속임을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한 경우	30%
(다)	함수 $f(x)$ 를 이용하여 정적분의 값을 구한 경우	30%

05

$$\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

로 놓고 이 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$ 을 곱하면

$$\begin{aligned} x+1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C) \end{aligned}$$

즉, $A+B=0$, $A-B+C=1$, $A-C=1$ 이므로

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{2}{3}, \quad C = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_a^0 \frac{x+1}{x^3-1} dx &= \frac{2}{3} \int_a^0 \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int_a^0 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left[\ln |x-1| \right]_a^0 - \frac{1}{3} \left[\ln |x^2+x+1| \right]_a^0 \\
&= -\frac{2}{3} \ln |a-1| + \frac{1}{3} \ln |a^2+a+1| \\
&= -\frac{2}{3} \left(\ln |a-1| - \frac{1}{2} \ln |a^2+a+1| \right) \\
&= -\frac{2}{3} \ln \left| \frac{a-1}{\sqrt{a^2+a+1}} \right|
\end{aligned}$$

이때, $\int_a^0 \frac{x+1}{x^3-1} dx = -\frac{2}{3} \ln 2$ 이므로

$$\frac{a-1}{\sqrt{a^2+a+1}} = -2 \quad (\because a < 0)$$

$$2\sqrt{a^2+a+1} = 1-a$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4(a^2+a+1) = 1-2a+a^2$$

$$3a^2+6a+3=0, \quad 3(a+1)^2=0$$

$$\therefore a = -1$$

답 ⑤

06

$\int_0^3 |g(f(x)) \times f'(x)| dx$ 에서 $f(x)=t$ 라 하면

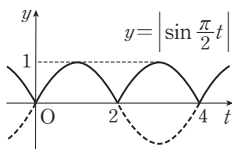
$\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=f(0)=0$, $x=3$ 일 때

$t=f(3)=4$ 이므로

$$\int_0^3 |g(f(x)) \times f'(x)| dx = \int_0^4 |g(t)| dt \quad \dots\dots ㉠$$

이때,

$$|g(t)| = \begin{cases} g(t) & (0 \leq t \leq 2) \\ -g(t) & (2 \leq t \leq 4) \end{cases}$$



이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}
\int_0^4 |g(t)| dt &= \int_0^2 g(t) dt + \int_2^4 \{-g(t)\} dt \\
&= \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2} x dx + \int_2^4 \left(-\sin \frac{\pi}{2} x\right) dx \\
&= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x\right]_0^2 + \left[\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x\right]_2^4 \\
&= \left\{\frac{2}{\pi} - \left(-\frac{2}{\pi}\right)\right\} + \left\{\frac{2}{\pi} - \left(-\frac{2}{\pi}\right)\right\} \\
&= \frac{8}{\pi}
\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{\pi}$

보충설명

$\int_0^3 |g(f(x)) \times f'(x)| dx$ 에서 $f'(x) = \frac{2}{(x+1)\ln 2}$ 이고,

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^3 |g(f(x)) \times f'(x)| dx &= \int_0^3 |g(f(x))| \times f'(x) dx \\
&= \int_0^4 |g(t)| dt
\end{aligned}$$

07

$\int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ 에서 $x=2\sin \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으

면 $\frac{dx}{d\theta} = 2\cos \theta$ 이고, $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 \theta \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \times 2\cos \theta d\theta \\
&= 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 2\theta}{4} d\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta = 2 \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 2 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

08

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)g'(x) dx \\
&= \left[f(x)g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x) dx \\
&= f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx \\
&= f(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx \quad \dots\dots ㉠
\end{aligned}$$

이때, $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$ 에서 $1+x^3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3x^2$

이고, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 f(x)g'(x) dx = \frac{1}{6} \text{ 이므로 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$f(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore f(1) = \frac{1}{3}$$

답 ④

09

$$\int_0^1 (ax + \pi \sin \pi x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (a^2 x^2 + 2a\pi x \sin \pi x + \pi^2 \sin^2 \pi x) dx$$

$$= a^2 \int_0^1 x^2 dx + 2a\pi \int_0^1 x \sin \pi x dx + \pi^2 \int_0^1 \sin^2 \pi x dx$$

$$= a^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$+ 2a\pi \left\{ \left[-\frac{1}{\pi} x \cos \pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) dx \right\}$$

$$+ \pi^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{3} a^2 + 2a\pi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi x \right]_0^1 \right)$$

$$+ \pi^2 \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} a^2 + 2a + \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{3} (a+3)^2 - 3 + \frac{\pi^2}{2}$$

이므로 $a = -3$ 일 때 최솟값 $\frac{\pi^2}{2} - 3$ 을 갖는다.

$$\therefore a = -3$$

답 -3

10

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x) dx$$

$$= \left[\{f(x)\}^2 g(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2f(x)f'(x)g(x) dx$$

$$= \{f(1)\}^2 g(1) - \{f(-1)\}^2 g(-1)$$

$$- \int_{-1}^1 2\{f(x)g(x)\}f'(x) dx \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

조건 ⑦의 식의 양변에 $x=1$, $x=-1$ 을 각각 대입하면

$$f(1)g(1)=0, f(-1)g(-1)=0$$

①에서

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x) dx = - \int_{-1}^1 2\{f(x)g(x)\}f'(x) dx$$

$$= -2 \int_{-1}^1 (x^4 - 1)f'(x) dx$$

이때, 조건 ④에서 $\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 g'(x) dx = 120$ 이므로

$$-2 \int_{-1}^1 (x^4 - 1)f'(x) dx = 120$$

$$\therefore \int_{-1}^1 (x^4 - 1)f'(x) dx = -60$$

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 1)f'(x) dx$$

$$= \left[(x^4 - 1)f(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 4x^3 f(x) dx$$

$$= 0 - 4 \int_{-1}^1 x^3 f(x) dx$$

이므로

$$-4 \int_{-1}^1 x^3 f(x) dx = -60$$

$$\therefore \int_{-1}^1 x^3 f(x) dx = 15$$

답 ②

11

$$|x-t| \sin t = \begin{cases} (x-t) \sin t & (t \leq x) \\ (t-x) \sin t & (t \geq x) \end{cases} \text{이므로}$$

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x-t| \sin t dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^x (x-t) \sin t dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} (t-x) \sin t dt$$

$$= \left[-(x-t) \cos t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \cos t dt$$

$$+ \left[-(t-x) \cos t \right]_x^{\frac{\pi}{2}} + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= 0 - \left[\sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^x + 0 + \left[\sin t \right]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\sin x - 1 + 1 - \sin x$$

$$= -2 \sin x$$

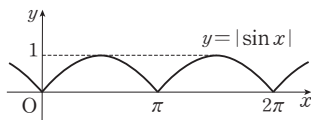
$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|\sin x|}{\sqrt{1-\cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|\sin x| \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|\sin x| \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|\sin x| \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|\sin x| \sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{1+\cos x} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$

12

$$\begin{aligned}
f(k) &= \int_0^{k\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx
\end{aligned}$$

이때, 함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$\begin{aligned}
f(k) &= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx \\
&= k \int_0^{\pi} \sin x dx = k \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\
&= k \{1 - (-1)\} = 2k \\
\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{\pi}{f(k)f(k+1)} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\pi}{2k \times 2(k+1)} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\
&= \frac{\pi}{4} \times \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{5}{22} \pi
\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{22} \pi$

13

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로
 $f(1-x)=f(-1+x)$ ㉠

조건 ㉠에서 $f(1-x)=f(1+x)$ 이므로

$$f(-1+x)=f(1+x)$$

$$\therefore f(x)=f(x+2)$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=f'(x+2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또한, ㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=f(-1) \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_{-1}^1 = f(1) - f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

조건 ㉠에서

$$\begin{aligned}
\int_3^6 f'(x) dx &= \int_3^5 f'(x) dx + \int_5^6 f'(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 f'(x) dx + \int_{-1}^0 f'(x) dx \quad (\because \textcircled{2}) \\
&= \int_{-1}^0 f'(x) dx = 8 \quad (\because \textcircled{3})
\end{aligned}$$

$$\therefore f(4) - f(-1)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^4 f'(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 f'(x) dx + \int_1^3 f'(x) dx + \int_3^4 f'(x) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 f'(x) dx + \int_{-1}^0 f'(x) dx \quad (\because \textcircled{2}) \\
&= 8 \quad (\because \textcircled{3})
\end{aligned}$$

답 8

다른풀이

조건 ㉠에서 $\int_3^6 f'(x) dx = 8$ 이므로

$$\int_3^6 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_3^6 = f(6) - f(3) = 8$$

조건 ㉠에 $x=5$ 를 대입하면 $f(-4)=f(6)$

이때, $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

$$f(-x)=f(x) \quad \therefore f(4)=f(-4)=f(6) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

또한, 조건 ㉠에 $x=2$ 를 대입하면 $f(-1)=f(3)$ ㉡

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{에서 } f(4) - f(-1) = f(6) - f(3) = 8$$

14

조건 ㉠의 식의 양변에 x 대신 $a-x$ 를 대입하면

$$f(x)=f(2a-x)$$

조건 ㉠에 의하여

$$\int_0^a f(2a-x) dx = \int_0^a f(x) dx = 8$$

한편, $\int_0^a f(2x) dx$ 에서 $2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=2a$ 이므로

$$\int_0^a f(2x) dx = \int_0^{2a} f(t) \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2a} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^a f(t) dt = 8$$

$$\therefore \int_0^a \{f(2x) + f(2a-x)\} dx$$

$$= \int_0^a f(2x) dx + \int_0^a f(2a-x) dx$$

$$= 8 + 8 = 16$$

답 ②

15

$\int_1^2 t f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면
 $f(x) = \frac{e^x}{x} + k$ 이므로

$$k = \int_1^2 t \left(\frac{e^t}{t} + k \right) dt$$

$$= \int_1^2 (e^t + kt) dt$$

$$= \left[e^t + \frac{1}{2} kt^2 \right]_1^2$$

$$= e^2 + 2k - \left(e + \frac{1}{2} k \right)$$

$$= e^2 - e + \frac{3}{2} k$$

즉, $k = e^2 - e + \frac{3}{2} k$ 이므로

$\frac{1}{2} k = e - e^2 \quad \therefore k = 2e - 2e^2$

따라서 $f(x) = \frac{e^x}{x} + 2e - 2e^2$ 이므로

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=1$ ($\because x > 0$)

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(1) = e + 2e - 2e^2 = 3e - 2e^2$

답 $3e - 2e^2$

16

$f(x) = \int_0^x (t+x) e^{t-x} dt$ 에서 $t-x=y$ 로 놓으면 $\frac{dy}{dt}=1$

이고, $t=0$ 일 때 $y=-x$, $t=x$ 일 때 $y=0$ 이므로

$$\int_0^x (t+x) e^{t-x} dt = \int_{-x}^0 (2x+y) e^y dy$$

$$= - \int_0^{-x} (2x+y) e^y dy$$

$$= -2x \int_0^{-x} e^y dy - \int_0^{-x} y e^y dy$$

$\therefore f(x) = -2x \int_0^{-x} e^y dy - \int_0^{-x} y e^y dy$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = -2 \int_0^{-x} e^y dy - 2x \times e^{-x} \times (-1)$$

$$- (-xe^{-x}) \times (-1)$$

$$= -2 \int_0^{-x} e^y dy + 2xe^{-x} - xe^{-x}$$

$$= -2 \int_0^{-x} e^y dy + xe^{-x} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f''(x) = -2 \times e^{-x} \times (-1) + e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= 2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= (3-x)e^{-x}$$

$f''(x) = 0$ 에서 $x=3$

이때, $x=3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y=f(x)$ 는 $x=3$ 에서 변곡점을 갖는다.

즉, 변곡점에서의 접선의 기울기는 $\textcircled{7}$ 에서

$$f'(3) = -2 \int_0^{-3} e^y dy + 3e^{-3}$$

$$= -2 \left[e^y \right]_0^{-3} + 3e^{-3}$$

$$= -2(e^{-3} - 1) + 3e^{-3}$$

$$= e^{-3} + 2 = 2 + \frac{1}{e^3}$$

따라서 $a=2$, $b=1$ 이므로

$a+b=2+1=3$

답 3

다른풀이

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (t+x) e^{t-x} dt \\
 &= e^{-x} \int_0^x (t+x) e^t dt \\
 &= e^{-x} \int_0^x t e^t dt + x e^{-x} \int_0^x e^t dt \\
 &= e^{-x} \left(\left[t e^t \right]_0^x - \int_0^x e^t dt \right) + x e^{-x} \left[e^t \right]_0^x \\
 &= e^{-x} \left(x e^x - \left[e^t \right]_0^x \right) + x e^{-x} (e^x - 1) \\
 &= e^{-x} \{ x e^x - (e^x - 1) \} + x - x e^{-x} \\
 &= x - (1 - e^{-x}) + x - x e^{-x} \\
 &= 2x - 1 + e^{-x} (1 - x) \\
 \therefore f'(x) &= 2 - e^{-x} (1 - x) - e^{-x} \\
 &= e^{-x} (x - 2) + 2, \\
 f''(x) &= -e^{-x} (x - 2) + e^{-x} \\
 &= (3 - x) e^{-x}
 \end{aligned}$$

17

$$g(x) = \int_0^x t f(x-t) dt \text{에서 } x-t=y \text{로 놓으면 } \frac{dy}{dt} = -1$$

이고, $t=0$ 일 때 $y=x$, $t=x$ 일 때 $y=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t f(x-t) dt &= - \int_x^0 (x-y) f(y) dy \\
 &= \int_0^x (x-y) f(y) dy \\
 &= x \int_0^x f(y) dy - \int_0^x y f(y) dy
 \end{aligned}$$

$$\therefore g(x) = x \int_0^x f(y) dy - \int_0^x y f(y) dy$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \int_0^x f(y) dy + x f(x) - x f(x) \\
 &= \int_0^x f(y) dy \\
 &= \int_0^x \cos \pi y dy \quad (\because f(x) = \cos \pi x) \\
 &= \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi y \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{\pi} \sin \pi x
 \end{aligned}$$

이때, $g'(x)=0$ 에서 $\sin \pi x=0$

$\therefore x=k$ (k 는 정수)

또한, $x=k$ (k 는 정수)의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $x=k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖는다.

$\therefore a=1, 2, 3, \dots (\because a>0)$

따라서 $a_n=n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

답 55

18

$g(t)=t^3 f(t^2)$ 이라 하면

$$g(1)=1 \times f(1)=3 \quad \dots\dots \ominus$$

또한, 함수 $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$$G'(t)=g(t)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} t^3 f(t^2) dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} g(t) dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[G(t) \right]_1^{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(\sqrt{x}) - G(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{G(\sqrt{x}) - G(1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right\} \\
 &= G'(1) \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} g(1) = \frac{3}{2} \quad (\because \ominus)
 \end{aligned}$$

답 ②

19

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(|x| \geq \frac{\pi}{4} \right) \\ |\sin 2x| & \left(|x| < \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(x \leq -\frac{\pi}{4} \right) \\ -\sin 2x & \left(-\frac{\pi}{4} < x < 0 \right) \\ \sin 2x & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4} \right) \\ 1 & \left(x \geq \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

이때, x 대신 $\frac{\pi}{2}-x$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\begin{cases} 1 & \left(x\geq\frac{3}{4}\pi\right) \\ -\sin(\pi-2x) & \left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi\right) \\ \sin(\pi-2x) & \left(\frac{\pi}{4}<x\leq\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(x\leq\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\sin 2x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi-2x)dx \\ &= \left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\cos(\pi-2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$

20

$t^2 f(t+1) - t(t+1)f(t) = t+1$ 의 양변을 $t^2(t+1)$ 로 나누면

$$\frac{f(t+1)}{t+1} - \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t^2}$$

$g(t) = \frac{f(t)}{t}$ 라 하면

$$g(t+1) - g(t) = \frac{1}{t^2}$$

함수 $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$G'(t) = g(t)$ 이고,

$$\begin{aligned} G(t+1) - G(t) &= \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{t} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^2 g(x) dx = 1$ 이므로

$$\left[G(x)\right]_1^2 = 1$$

$$G(2) - G(1) = 1, \quad -1 + C = 1$$

즉, $C = 2$ 이므로

$$G(t+1) - G(t) = -\frac{1}{t} + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} \frac{f(x)}{x} dx &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{3}} g(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} g(x) dx + \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{7}{3}} g(x) dx \\ &= \left[G(x)\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} + \left[G(x)\right]_{\frac{4}{3}}^{\frac{7}{3}} \\ &= \left\{G\left(\frac{4}{3}\right) - G\left(\frac{1}{3}\right)\right\} + \left\{G\left(\frac{7}{3}\right) - G\left(\frac{4}{3}\right)\right\} \\ &= -3 + 2 - \frac{3}{4} + 2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

21

$$\int_{-\frac{1}{2}\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_{-\frac{1}{2}\ln 3}^0 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \text{에서}$$

$e^x = \tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $e^x = \sec^2 \theta \times \frac{d\theta}{dx}$ 이고,

$x = -\frac{1}{2}\ln 3$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $x = 0$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}\ln 3}^0 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{12}$

보충설명

풀이의 치환 방법은 두 번 연속하여 치환하는 것을 한번에 나타낸 것과 같다.

(i) $e^x = t$ ($t > 0$)로 치환

$$e^x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = e^x \text{이고, } x = -\frac{1}{2} \ln 3 \text{일 때 } t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$x = 0$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2} \ln 3}^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \\ &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $t = \tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 치환

$$t = \tan \theta \text{로 놓으면 } \frac{dt}{d\theta} = \sec^2 \theta \text{이고, } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{일 때 } \theta = \frac{\pi}{6},$$

$t = 1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

22

(i) $2m\pi \leq x \leq (2m+1)\pi$ (m 은 정수)일 때,

함수 $f(x) = e^{-x} \sin x$ 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} |f(x)| dx &= \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} f(x) dx \\ &= \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} + \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= 0 + \left[-e^{-x} \cos x \right]_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} - \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \end{aligned}$$

이므로

$$2 \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-(2m+1)\pi} + e^{-2m\pi}$$

$$\therefore \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{e^{-(2m+1)\pi} + e^{-2m\pi}}{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} |f(x)| dx = \frac{e^{-(2m+1)\pi} + e^{-2m\pi}}{2}$$

(ii) $(2m-1)\pi \leq x \leq 2m\pi$ (m 은 정수)일 때,

함수 $f(x) = e^{-x} \sin x$ 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} |f(x)| dx &= \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \{-f(x)\} dx \\ &= - \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \sin x dx &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} + \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= 0 + \left[-e^{-x} \cos x \right]_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} - \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \sin x dx \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2 \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \sin x dx &= -e^{-2m\pi} - e^{-(2m-1)\pi} \\ \therefore \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} e^{-x} \sin x dx &= -\frac{e^{-2m\pi} + e^{-(2m-1)\pi}}{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ 에서

$$\int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} |f(x)| dx = \frac{e^{-2m\pi} + e^{-(2m-1)\pi}}{2}$$

(i), (ii)에서

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)| dx = \frac{e^{-k\pi} + e^{-(k-1)\pi}}{2} \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

따라서 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k\pi} + e^{-(k-1)\pi}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k\pi} + e^{-(k-1)\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (e^{-\pi} + e^0) + (e^{-2\pi} + e^{-\pi}) + (e^{-3\pi} + e^{-2\pi}) \\ &\quad + \dots + \{e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\} \} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ 1 + 2e^{-\pi} + 2e^{-2\pi} + 2e^{-3\pi} \\ &\quad + \dots + 2e^{-(n-1)\pi} + e^{-n\pi} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n\pi} \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \{e^{-\pi} + e^{-2\pi} + e^{-3\pi} + \dots + e^{-(n-1)\pi}\} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}$

23

(i) $x > 1$ 또는 $x < -1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n}} \times \cos 2\pi x}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1
\end{aligned}$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n} + \cos 2\pi}{1^{2n} + 1} = 1$$

(iii) $x = -1$ 일 때,

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} + \cos(-2\pi)}{(-1)^{2n} + 1} = 1$$

(iv) $-1 < x < 1$ 일 때,

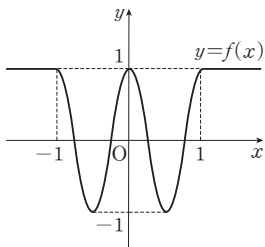
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1} \\
&= \cos 2\pi x
\end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ \cos 2\pi x & (|x| < 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $g(x) = \int_{-x}^2 f(t) dt + \int_2^x t f(t) dt$ 에서 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$f(-x) = f(x)$$

즉, $-xf(-x) = -xf(x)$ 이므로 함수 $y = xf(x)$ 의 그래

프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}
\therefore g(-2) &= \int_2^{-2} f(t) dt + \int_2^{-2} t f(t) dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$g(2) = \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^2 t f(t) dt$$

$$= \int_{-2}^2 f(t) dt + 0$$

$$= 2 \int_0^2 f(t) dt$$

$$= 2 \left\{ \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right\}$$

$$= 2 \int_0^1 \cos 2\pi t dt + 2 \int_1^2 dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \right]_0^1 + 2 \left[t \right]_1^2$$

$$= 0 + 2 = 2$$

$$\therefore g(-2) + g(2) = 0 + 2 = 2$$

답 ③

24

$$\therefore \int_{-1}^x (x-t) f(t) dt = \ln(x+2) - a(x+1)$$

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x t f(t) dt = \ln(x+2) - a(x+1)$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \frac{1}{x+2} - a$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = \frac{1}{x+2} - a$$

이 식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = \frac{1}{x+2} - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\therefore f(0) = -\frac{1}{4} \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉠에서 $\int_{-1}^x f(t) dt = F(x)$ 로 놓으면

$$F(x) = \frac{1}{x+2} - 1 \text{ 이므로}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad F''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

$x > -2$ 일 때, $F''(x) > 0$ 이므로 곡선 $y = F(x)$ 는 아래로 볼록하다.

$$\therefore \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{F(x_3) - F(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (\text{단, } -2 < x_1 < x_2 < x_3)$$

이때,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{-1}^{x_2} f(x) dx - \int_{-1}^{x_1} f(x) dx \quad (\because x_1 < x_2)$$

$$= F(x_2) - F(x_1),$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \int_{-1}^{x_3} f(x) dx - \int_{-1}^{x_2} f(x) dx \quad (\because x_2 < x_3)$$

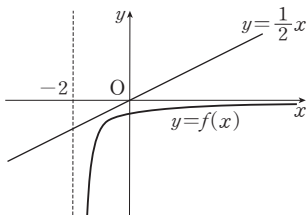
$$= F(x_3) - F(x_2)$$

이므로

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{x_2 - x_1} < \frac{\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx}{x_3 - x_2}$$

$$\therefore (x_3 - x_2) \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx < (x_2 - x_1) \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) ㉡에서 $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 는 다음 그림과 같다.



즉, $k = \frac{1}{2}$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = kx$ 와 만나지 않으므로 방정식 $f(x) = kx$ 가 실근을 갖지 않도록 하는 k 가 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

유형
연습

10 정적분의 활용

본문 pp.276~300

01-1 $e-1$

02-1 $\frac{1}{3}a^2h$

03-1 (1) $2e-2$ (2) 1 (3) $\sqrt{3}-1$

03-2 $\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$ 04-1 (1) e^2+1 (2) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

04-2 4 05-1 $2\ln 2 - \frac{\pi^2}{8}$ 05-2 $\frac{1}{\pi}$

06-1 (1) 2π (2) $-8\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{5}{2}\ln 5$

06-2 3 06-3 $\frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}$

07-1 (1) $-\frac{1}{3} + 2\ln 2$ (2) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$ 07-2 $3\ln 10$

08-1 $e^2 - 1$ 08-2 $\frac{5}{3}$ 08-3 $\ln \pi$

09-1 $\frac{1}{2}e - 1$ 09-2 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$ 09-3 $\frac{2\sqrt{e}}{3} - 1$

10-1 $\frac{2\sqrt[3]{e}}{3}$ 10-2 $\frac{17}{4}$ 10-3 $\frac{1}{2}$

11-1 $\frac{2}{3}$ 11-2 $\frac{4}{\ln 3} + 3$ 11-3 3

12-1 $1 - \frac{2}{e}$ 12-2 $\sqrt{\frac{2}{e}}$

13-1 $\frac{\pi}{8} \left(e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2} \right)$ 13-2 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

14-1 $\ln 2 + \frac{1}{4}$ 14-2 20

15-1 $12 + \frac{1}{2}\ln 7$ 15-2 271 15-3 $\frac{1}{2}\ln 3$

01-1

구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하면 양 끝 점을 포함한 각 분점의 x 좌표는 차례대로 다음과 같다.

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$$

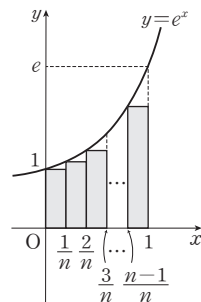
오른쪽 그림에서 각각의 직사각형의 높이는 각 소구간의 왼쪽 끝에서의 함수값이므로

$$e^0, e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2}{n}}, \dots, e^{\frac{n-1}{n}}$$

또한, 각 소구간의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로

오른쪽 그림의 어두운 도형의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{n} \times e^0 + \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times e^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \times e^{\frac{n-1}{n}}$$



$$= \frac{1}{n} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

이때, $\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t}{1-e^t} \times (1-e) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{\frac{e^t-1}{t}} \times (e-1) \right\}$$

$$= e-1$$

답 $e-1$

다른풀이

오른쪽 그림에서 각각의 직사각형의 높이는 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함수값이므로

$$e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2}{n}}, e^{\frac{3}{n}}, \dots, e$$

또한, 각 소구간의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로

오른쪽 그림에서 색칠된 도형의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times e^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \times e^{\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \times e^{\frac{n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}})$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{e^n(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

이때, $\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

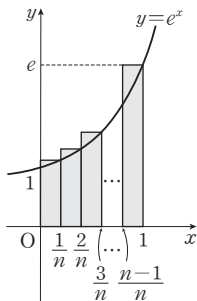
구하는 도형의 넓이 S 는

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{e^n(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}} \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t}{1-e^t} \times e^t \times (1-e) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{\frac{e^t-1}{t}} \times e^t \times (e-1) \right\}$$

$$= e-1$$



02-1

오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n 등분하여 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 사각뿔을 자르면 각 단면인 정사각형의 한 변의 길이는 위에서부터 차례대로 다음과 같다.

$$\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}$$

이때, 각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\frac{h}{n}$ 인 $(n-1)$ 개의 사각기둥의 부피의 합을 V_n 이라 하면

$$V_n = \left(\frac{a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \left(\frac{2a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \left(\frac{3a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \cdots + \left\{ \frac{(n-1)a}{n} \right\}^2 \frac{h}{n}$$

$$= \frac{a^2 h}{n^3} \{ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 \}$$

$$= \frac{a^2 h}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{a^2 h}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} a^2 h \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right)$$

따라서 구하는 사각뿔의 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} a^2 h \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} a^2 h$$

답 $\frac{1}{3} a^2 h$

다른풀이

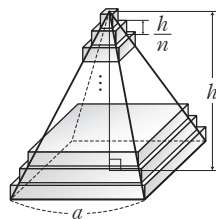
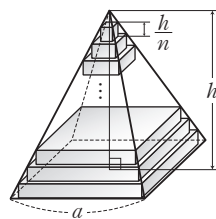
오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 높이를 n 등분하여 n 개의 사각기둥을 만들고 이 사각기둥의 부피의 합을 V_n 이라 하면

$$V_n = \left(\frac{a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \left(\frac{2a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \left(\frac{3a}{n} \right)^2 \frac{h}{n} + \cdots + \left(\frac{na}{n} \right)^2 \frac{h}{n}$$

$$= \frac{a^2 h}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{a^2 h}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{a^2 h}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} a^2 h \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$



따라서 구하는 사각꼴의 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} a^2 h \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} a^2 h$$

03-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n}{k}} e^{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} e^{\sqrt{\frac{k}{n}}} \times \frac{1}{n} \text{에서}$$

$$x_k = \frac{k}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{1}{n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} e^{\sqrt{\frac{k}{n}}} \times \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \left[2e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$$= 2e - 2$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} \times \frac{\pi}{n} \text{에서}$$

$$x_k = \frac{k\pi}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{\pi}{n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} \times \frac{\pi}{n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n}{n+2k}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} \times \frac{2}{n} \text{에서}$$

$$x_k = 1 + \frac{2k}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{2}{n} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} \times \frac{2}{n} &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^3 \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } 2e - 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad \sqrt{3} - 1$$

03-2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k^2 + 2nk}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{2k}{n} \right\} \frac{1}{n}$$

$$\text{에서 } x_k = \frac{k}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{1}{n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{2k}{n} \right\} \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 f(1+x)(x^2+2x) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2+2x)e^{2x+2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} (x^2+2x)e^{2x+2} \right]_0^1 - \int_0^1 (x+1)e^{2x+2} dx$$

$$= \frac{3}{2}e^4 - \left[\frac{1}{2} (x+1)e^{2x+2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x+2} dx$$

$$= \frac{3}{2}e^4 - e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \left[\frac{1}{4}e^{2x+2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$$

다른풀이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k^2 + 2nk}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{2k}{n} + 1 - 1 \right\} \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left\{ \left(\frac{k}{n} + 1\right)^2 - 1 \right\} \frac{1}{n}$$

$$\text{에서 } x_k = 1 + \frac{k}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{1}{n} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \left\{ \left(\frac{k}{n} + 1\right)^2 - 1 \right\} \frac{1}{n}$$

$$= \int_1^2 (x^2-1)f(x) dx$$

$$= \int_1^2 (x^2-1)e^{2x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} (x^2-1)e^{2x} \right]_1^2 - \int_1^2 x e^{2x} dx$$

$$= \frac{3}{2}e^4 - \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \frac{3}{2}e^4 - e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2$$

04-1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} (n\sqrt[n]{e^2} + 2n\sqrt[n]{e^4} + 3n\sqrt[n]{e^6} + \cdots + n\sqrt[n]{e^{2n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n}$$

에서 $x_k = \frac{2k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{2}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n} &= \int_0^2 x e^x dx \\ &= \left[x e^x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2e^2 - \left[e^x \right]_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{4n^2-1} + \sqrt{4n^2-4} + \sqrt{4n^2-9} + \cdots + \sqrt{4n^2-n^2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \times \frac{1}{n}$$

에서 $x_k = \frac{k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \times \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$$

이때, $x = 2 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \text{이고, } x=0 \text{일 때 } \theta=0, \quad x=1 \text{일 때}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 \theta} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \times \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 (1) $e^2 + 1$ (2) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

04-2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left\{ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) \right\}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \times \frac{\pi}{2n}$$

에서 $x_k = -\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ 이므로

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \times \frac{\pi}{2n}$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$= 2 \left[\tan x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2(1+1) = 4$$

답 4

다른풀이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left\{ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) \right\}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \times \frac{\pi}{2n}$$

에서 $x_k = \frac{(k-1)\pi}{2n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ 이므로

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{2n}\right) \times \frac{\pi}{2n}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) dx$$

$$= 2 \left[\tan\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2(1+1) = 4$$

05-1

$f(x) = \sin x$ 라 하면

$$f'(x) = \cos x$$

점 $A_k\left(\frac{k\pi}{4n}, \sin \frac{k\pi}{4n}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \cos \frac{k\pi}{4n}$ 이므로 점 A_k 에서의 접선의 방정식은

$$y - \sin \frac{k\pi}{4n} = \cos \frac{k\pi}{4n} \left(x - \frac{k\pi}{4n}\right)$$

이 직선의 x 절편은

$$0 - \sin \frac{k\pi}{4n} = \cos \frac{k\pi}{4n} \left(x - \frac{k\pi}{4n}\right)$$

$$\therefore x = \frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n}$$

따라서 $P_k\left(\frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n}, 0\right)$ 이므로

$$\overline{OP_k} = \left| \frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right|$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \overline{OP_k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right|$$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| \frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right| \times \frac{\pi}{4n}$$

이때, $x_k = \frac{k\pi}{4n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{\pi}{4n}$ 이므로

$$4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| \frac{k\pi}{4n} - \tan \frac{k\pi}{4n} \right| \times \frac{\pi}{4n}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |x - \tan x| dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - x) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} - x \right) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{(\cos x)'}{\cos x} - x \right) dx$$

$$= 4 \left[-\ln |\cos x| - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 4 \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} \right) = 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{답 } 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{8}$$

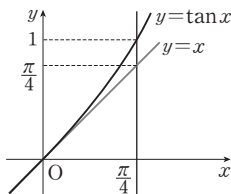
풀이참석

*의 $y = \tan x$ 에서 $y' = \sec^2 x$

따라서 곡선 $y = \tan x$ 의 원점에서의 접선의 기울기가 1이므로 두 함수 $y = x$, $y = \tan x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\tan x \geq x$ 이므로

$$|x - \tan x| = \tan x - x$$



05-2

$$\overline{OP_k} = 1, \angle P_k O Q_k = \frac{\pi}{2} \times \frac{k}{2n} = \frac{k\pi}{4n}$$

(단, $k = 1, 2, 3, \dots, 2n-1$)

이므로 직각삼각형 $P_k O Q_k$ 에서

$$\overline{OQ_k} = \cos \frac{k\pi}{4n}, \overline{P_k Q_k} = \sin \frac{k\pi}{4n}$$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{4n} \sin \frac{k\pi}{4n} = \frac{1}{4} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2n-1}}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{4} \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n}$$

이때, $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ 이므로

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} (1+1) = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{답 } \frac{1}{\pi}$$

06-1

(1) $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ 에서

$$0 \leq 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

따라서 곡선

$y = 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 는 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 $y \geq 0$ 이

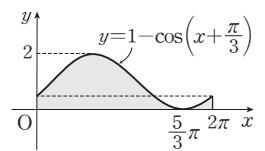
므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right\} dx$$

$$= \left[x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi$$



$$(2) |e^{2x}-4|-1 = \begin{cases} -e^{2x}+3 & (x < \ln 2) \\ e^{2x}-5 & (x \geq \ln 2) \end{cases}$$

곡선 $y = |e^{2x}-4|-1$ 과 x 축의

교점의 x 좌표는

$$|e^{2x}-4|-1=0 \text{에서}$$

$$|e^{2x}-4|=1$$

$$e^{2x}=3 \text{ 또는 } e^{2x}=5$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \ln 3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \ln 5$$

따라서 곡선 $y = |e^{2x}-4|-1$ 은 닫힌구간

$\left[\frac{1}{2} \ln 3, \frac{1}{2} \ln 5\right]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{\frac{1}{2} \ln 3}^{\frac{1}{2} \ln 5} ||e^{2x}-4|-1| dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2} \ln 3}^{\frac{1}{2} \ln 5} (-|e^{2x}-4|+1) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2} \ln 3}^{\ln 2} (e^{2x}-3) dx + \int_{\ln 2}^{\frac{1}{2} \ln 5} (-e^{2x}+5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 3x \right]_{\frac{1}{2} \ln 3}^{\ln 2} + \left[-\frac{1}{2} e^{2x} + 5x \right]_{\ln 2}^{\frac{1}{2} \ln 5}$$

$$= \frac{1}{2} + 3 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \ln 5 - 5 \ln 2$$

$$= -8 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{5}{2} \ln 5$$

$$\text{답 (1) } 2\pi \quad (2) \quad -8 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3 + \frac{5}{2} \ln 5$$

다른풀이

(1) 곡선 $y = 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼

평행이동하면

$$y = 1 - \cos x$$

즉, 구하는 넓이는 닫힌구간

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7}{3}\pi\right] \text{에서 곡선}$$

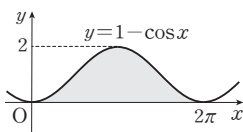
$y = 1 - \cos x$ 와 x 축 사이

의 넓이와 같다.

이때, $y = 1 - \cos x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이고, 구간
의 길이가 2π 이므로 구하는 넓이는 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에
서 곡선 $y = 1 - \cos x$ 와 x 축 사이의 넓이와 같다.

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left| 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right| dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) dx$$

$$= \left[x - \sin x \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$



06-2

주어진 조건에 의하여

$$\int_0^a f(x) dx = 10, \int_a^b f(x) dx = -4$$

$$\int_0^{\frac{b}{2}} f(2x) dx \text{에서 } 2x=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2 \text{이고, } x=0 \text{일}$$

$$\text{때 } t=0, x=\frac{b}{2} \text{일 때 } t=b \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{b}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^b f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (10 - 4) = 3$$

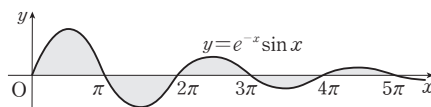
답 3

06-3

곡선 $y = e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$)와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$e^{-x} \sin x = 0 \text{에서 } \sin x = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$\therefore x = n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 음이 아닌 정수})$$



닫힌구간 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간

$[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를

S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} (-e^{-x} \sin x) dx \right\}$$

이때,

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$= \left[-e^{-x} \sin x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cos x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$$

이므로

$$2 \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx &= \frac{e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{-2k\pi}(e^{-\pi} + 1)}{2}\end{aligned}$$

마찬가지로

$$\begin{aligned}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} (-e^{-x} \sin x) dx \\ &= -\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= -\left[-e^{-x} \cos x\right]_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} e^{-x} \sin x dx\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}2 \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} (-e^{-x} \sin x) dx &= e^{-(2k+2)\pi} + e^{-(2k+1)\pi} \\ \therefore \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} (-e^{-x} \sin x) dx &= \frac{e^{-(2k+2)\pi} + e^{-(2k+1)\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{-2k\pi}(e^{-2\pi} + e^{-\pi})}{2} \\ \therefore S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{e^{-2k\pi}(e^{-\pi} + 1)}{2} + \frac{e^{-2k\pi}(e^{-2\pi} + e^{-\pi})}{2} \right\} \\ &= \frac{e^{-2\pi} + 2e^{-\pi} + 1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n e^{-2k\pi} \\ &= \frac{e^{-2\pi} + 2e^{-\pi} + 1}{2} \times \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} \\ &= \frac{(1 + e^{-\pi})^2}{2(1 - e^{-\pi})(1 + e^{-\pi})} \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}\end{aligned}$$

답 $\frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$

07-1

(1) $y = \frac{-x+1}{x+1}$ 에서

$$(x+1)y = -x+1$$

$$(y+1)x = 1-y$$

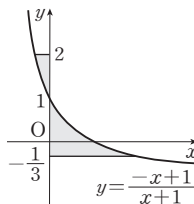
$$\therefore x = \frac{1-y}{y+1} = -1 + \frac{2}{y+1}$$

따라서 곡선 $x = -1 + \frac{2}{y+1}$ 는

단한구간 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ 에서 $x \geq 0$

이고, 단한구간 $[1, 2]$ 에서

$x \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는



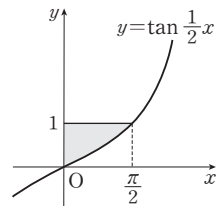
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}}^2 \left| -1 + \frac{2}{y+1} \right| dy \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 \left(-1 + \frac{2}{y+1} \right) dy + \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{y+1} \right) dy \\ &= \left[-y + 2 \ln |y+1| \right]_{-\frac{1}{3}}^1 + \left[y - 2 \ln |y+1| \right]_1^2 \\ &= -\frac{4}{3} + 2 \ln 3 + 1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2 \\ &= -\frac{1}{3} + 2 \ln 2\end{aligned}$$

(2) 곡선 $y = \tan \frac{1}{2}x$ 와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\tan \frac{1}{2}x = 1 \text{에서 } \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}S &= \frac{\pi}{2} \times 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} dx\end{aligned}$$



이때, $\cos \frac{1}{2}x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x$ 이고,

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}S &= \frac{\pi}{2} + 2 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{2} + 2 \left[\ln |t| \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \ln 2\end{aligned}$$

답 (1) $-\frac{1}{3} + 2 \ln 2$ (2) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$

07-2

곡선 $y = x \ln(x^2+1)$ 과 직선 $y = \ln 2$ 의 교점의 x 좌표는

$x \ln(x^2+1) = \ln 2$ 에서 $x=1$

오른쪽 그림과 같이

$x \ln(x^2+1) = a$ 를 만족시키는

x 의 값을 k ($k > 1$)라 하면

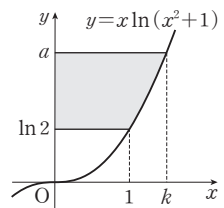
$$k \ln(k^2+1) = a \quad \cdots \text{㉠}$$

곡선 $y = x \ln(x^2+1)$ 과 y 축 및

두 직선 $y = \ln 2$, $y = a$ 로 둘러싸

인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = ak - 1 \times \ln 2 - \int_1^k x \ln(x^2+1) dx \quad \cdots \text{㉡}$$



이때, $x^2+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=2$,
 $x=k$ 일 때 $t=k^2+1$ 이므로

$$\int_1^k x \ln(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_2^{k^2+1} \ln t dt$$

㉔에서

$$\begin{aligned} S &= ak - \ln 2 - \frac{1}{2} \int_2^{k^2+1} \ln t dt \\ &= k^2 \ln(k^2+1) - \ln 2 - \frac{1}{2} \left[t \ln t - t \right]_2^{k^2+1} \quad (\because \text{㉔}) \\ &= k^2 \ln(k^2+1) - \ln 2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ (k^2+1) \ln(k^2+1) - (k^2+1) - 2 \ln 2 + 2 \} \\ &= \frac{1}{2} (k^2-1) \ln(k^2+1) + \frac{1}{2} (k^2-1) \end{aligned}$$

이때, $S=4 \ln 10 + 4$ 이므로

$$\frac{1}{2} (k^2-1) \ln(k^2+1) = 4 \ln 10, \quad \frac{1}{2} (k^2-1) = 4$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} (k^2-1) = 4, \quad k^2+1=10 \text{이므로}$$

$$k^2=9 \quad \therefore k=3 \quad (\because k>1)$$

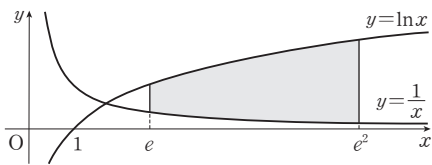
㉕에서

$$a = k \ln(k^2+1) = 3 \ln 10$$

답 3ln10

08-1

$$f(x) = \ln x \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{x}$$



위의 그림과 같이 닫힌구간 $[e, e^2]$ 에서 $\ln x > \frac{1}{x}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \left| \ln x - \frac{1}{x} \right| dx &= \int_e^{e^2} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[x \ln x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx - \left[\ln |x| \right]_e^{e^2} \\ &= 2e^2 - e - \left[x \right]_e^{e^2} - 1 = e^2 - 1 \end{aligned}$$

답 $e^2 - 1$

08-2

곡선 $y=\sqrt{4-2x}$ 와 직선 $y=-2x+2$ 의 교점의 x 좌표는

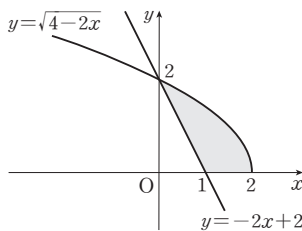
$$\sqrt{4-2x} = -2x+2 \text{에서 } 4-2x=4x^2-8x+4$$

$$4x^2-6x=0, \quad 4x\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

그런데 $x=\frac{3}{2}$ 이면 $-2x+2<0$ 이므로 모순이다.

즉, 교점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.



위의 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $\sqrt{4-2x} \geq -2x+2$

이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |\sqrt{4-2x} - (-2x+2)| dx + \int_1^2 \sqrt{4-2x} dx \\ &= \int_0^1 \{ \sqrt{4-2x} - (-2x+2) \} dx + \int_1^2 \sqrt{4-2x} dx \\ &= \int_0^1 (2x-2) dx + \int_0^1 \sqrt{4-2x} dx + \int_1^2 \sqrt{4-2x} dx \\ &= \left[x^2 - 2x \right]_0^1 + \int_0^2 \sqrt{4-2x} dx \\ &= -1 + \int_0^2 \sqrt{4-2x} dx \quad \dots\dots \text{㉔} \end{aligned}$$

이때, $4-2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -2$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=4$,

$x=2$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-2x} dx &= -\frac{1}{2} \int_4^0 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

㉕에서

$$S = -1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

다른풀이

곡선 $y=\sqrt{4-2x}$ 와 직선 $y=-2x+2$ 를 각각 x 에 대하여 나타내면

$$x=\frac{1}{2}(4-y^2), \quad x=\frac{1}{2}(2-y)$$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $\frac{1}{2}(4-y^2) \geq \frac{1}{2}(2-y)$ 이므로 구하는

넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}(4-y^2) - \frac{1}{2}(2-y) \right\} dy \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + 1 \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{4}y^2 + y \right]_0^2 \\ &= -\frac{4}{3} + 1 + 2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

08-3

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 에서 $(\sin x) \ln x > \frac{\cos x}{x}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ (\sin x) \ln x - \frac{\cos x}{x} \right\} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x) \ln x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} \, dx \\ &= \left\{ \left[(-\cos x) \ln x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\cos x}{x} \right) dx \right\} \\ & \quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} \, dx \\ &= \left[(-\cos x) \ln x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \ln \pi \end{aligned}$$

답 $\ln \pi$

09-1

$$y=\ln x \text{에서 } y'=\frac{1}{x}$$

곡선 $y=\ln x$ 위의 점점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에

서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x + \ln t - 1$$

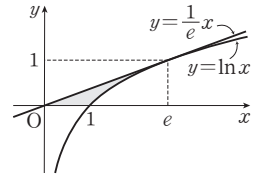
이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = \ln t - 1 \quad \therefore t = e$$

$$\therefore y = \frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^e \frac{1}{e}x \, dx - \int_1^e \ln x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2e}x^2 \right]_0^e - \left\{ \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right\} \\ &= \frac{1}{2}e - e + \left[x \right]_1^e = \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$



답 $\frac{1}{2}e - 1$

다른풀이

곡선 $y=\ln x$ 위의 점점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에 서의 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{t}x + \ln t - 1$$

이 직선이 원점을 지나므로 $t=e$

$$\text{즉, 접선의 방정식은 } y = \frac{1}{e}x$$

$y=\ln x$, $y=\frac{1}{e}x$ 를 각각 x 에 대하여 나타내면

$x=e^y$, $x=ey$ 이므로 구하는 넓이는 곡선 $x=e^y$ 과 x 축 및 직선 $x=ey$ 로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다.

따라서 $0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y \geq ey$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^y - ey) \, dy = \left[e^y - \frac{1}{2}ey^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}e - 1$$

09-2

$$y=e^{2x-1} \text{에서 } y'=2e^{2x-1}$$

곡선 $y=e^{2x-1}$ 위의 점점의 좌표를 (t, e^{2t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2e^{2t-1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{2t-1} = 2e^{2t-1}(x - t)$$

$$\therefore y = 2e^{2t-1}x - 2te^{2t-1} + e^{2t-1}$$

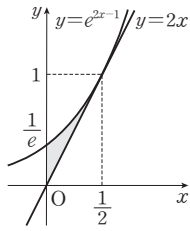
이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -2te^{2t-1} + e^{2t-1} \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = 2x$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x-1} - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x-1} - x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$



답 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$

09-3

$f(x) = \frac{1}{2e}x^2$ 에서 $f'(x) = \frac{1}{e}x$

$g(x) = \ln x$ 에서 $g'(x) = \frac{1}{x}$

점 P의 x좌표를 t라 하면

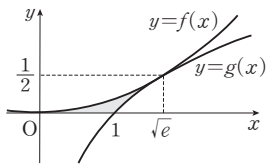
$f(t) = g(t)$ 에서 $\frac{1}{2e}t^2 = \ln t$

$f'(t) = g'(t)$ 에서 $\frac{1}{e}t = \frac{1}{t} \quad \therefore t = \sqrt{e} (\because t > 0)$

$\therefore P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e}x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \ln x dx \\ &= \left[\frac{1}{6e}x^3 \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[x \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} \\ & \quad + \int_1^{\sqrt{e}} dx \\ &= \frac{\sqrt{e}}{6} - \frac{\sqrt{e}}{2} + \left[x \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{2\sqrt{e}}{3} - 1 \end{aligned}$$



답 $\frac{2\sqrt{e}}{3} - 1$

10-1

곡선 $y=e^{-x}$ 과 직선 $y=\sqrt[3]{e}$ 의 교점의 x좌표는

$e^{-x} = e^{\frac{1}{3}}$ 에서 $x = -\frac{1}{3}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=e^{-x}$ 과 x축, y축 및 직선

$x=-\frac{1}{3}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를

C라 하면 $A=B$ 이므로

$A+C=B+C$

이때, $A+C = \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{e} = \frac{\sqrt[3]{e}}{3}$,

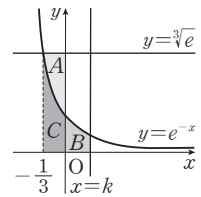
$$\begin{aligned} B+C &= \int_{-\frac{1}{3}}^k e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_{-\frac{1}{3}}^k \\ &= -e^{-k} + \sqrt[3]{e} \end{aligned}$$

이므로

$\frac{\sqrt[3]{e}}{3} = -e^{-k} + \sqrt[3]{e}$

$\therefore e^{-k} = \frac{2\sqrt[3]{e}}{3}$

답 $\frac{2\sqrt[3]{e}}{3}$



10-2

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 두 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이 S는

$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^2 = \ln 2$

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이는 $2S=2\ln 2$ 이므로

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_a^1 = -\ln a = 2\ln 2$

$\frac{1}{a} = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$

(ii) $a > 1$ 일 때,

$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^a = \ln a = 2\ln 2$

$\therefore a = 4$

(i), (ii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

답 $\frac{17}{4}$

10-3

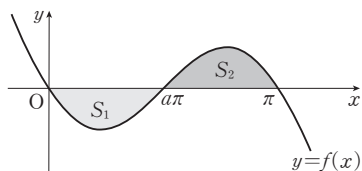
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{a\pi k}{n}\right) \right| \frac{a\pi}{n}$ 에서 $x_k = \frac{a\pi k}{n}$ 로 놓으면

$\Delta x = \frac{a\pi}{n}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{a\pi k}{n}\right) \right| \frac{a\pi}{n} = \int_0^{a\pi} |f(x)| dx$$

$$\therefore \int_0^{a\pi} |f(x)| dx = \int_{a\pi}^{\pi} f(x) dx$$

이때, 곡선 $f(x) = (x - a\pi) \sin x$ ($0 < a < 1$)는 닫힌구간 $[0, a\pi]$ 에서 $f(x) \leq 0$, 닫힌구간 $[a\pi, \pi]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 다음 그림과 같이 두 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하면 $S_1 = S_2$



$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} (x - a\pi) \sin x dx \\ &= \left[-(x - a\pi) \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= (\pi - a\pi) - a\pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi(1 - 2a) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

11-1

오른쪽 그림과 같이 구간

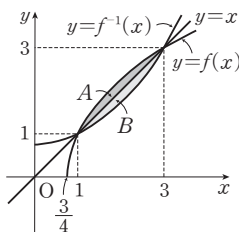
$\left[\frac{3}{4}, \infty\right)$ 에서 함수 $y = f(x)$

의 그래프와 그 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$A = B$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{4x-3} = x$



이 식의 양변을 제곱하면

$$4x - 3 = x^2, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 \{f(x) - x\} dx \\ &= \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{4x-3} dx - \int_1^3 x dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{4x-3} dx - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= \int_1^3 \sqrt{4x-3} dx - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $4x-3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 4$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=1$,

$x=3$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{4x-3} dx &= \frac{1}{4} \int_1^9 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

①에서 $A = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$A + B = 2A = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

11-2

$f(x) = 3^x$ 이라 하고, 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$g(x) = \log_3 x$ 이므로 두 곡선 $y = 3^x, y = \log_3 x$ 는 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때, 오른쪽 그림과 같이

정사각형 OPQR의 두 꼭

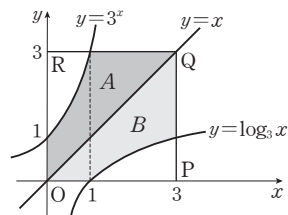
짓점 O, Q는 직선 $y = x$

위에 있으므로 $A = B$

이때, 변 RQ는 직선 $y = 3$

위에 있으므로 정사각형

OPQR 내부에 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \{f(x) - x\} dx + \int_1^3 (3-x) dx \\
 &= \int_0^1 (3^x - x) dx + \left[3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\
 &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + 9 - \frac{9}{2} - \left(3 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 3} + 2 \\
 &= \frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$A + B = 2A = \frac{4}{\ln 3} + 3$$

답 $\frac{4}{\ln 3} + 3$

다른풀이

곡선 $y = \log_3 x$ 와 x 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \log_3 x dx &= \frac{1}{\ln 3} \int_1^3 \ln x dx \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \left(\left[x \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 dx \right) \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \left(3 \ln 3 - \left[x \right]_1^3 \right) \\
 &= 3 - \frac{2}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$3 \times 3 - 2 \left(3 - \frac{2}{\ln 3} \right) = 3 + \frac{4}{\ln 3}$$

11-3

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \text{에서}$$

$$f(0) = 1, f(1) = 2e$$

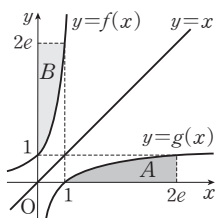
이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 1)$, $(1, 2e)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 함수

$y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$A = B$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \int_1^{2e} g(x) dx &= \int_{f(0)}^{f(1)} g(x) dx \text{ --- A의 넓이} \\
 &= 1 \times 2e - \int_0^1 f(x) dx \text{ --- B의 넓이} \\
 &= 2e - \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx \\
 &= 2e - \left\{ \left[(x^2 + 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx \right\} \\
 &= 2e - (2e - 1) + 2 \int_0^1 xe^x dx \\
 &= 1 + 2 \left\{ \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right\} \\
 &= 1 + 2 \left\{ e - \left[e^x \right]_0^1 \right\} \\
 &= 1 + 2 \{ e - (e - 1) \} = 3
 \end{aligned}$$

답 3

다른풀이

$$\int_1^{2e} g(x) dx \text{에서 } g(x) = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = g'(x) = \frac{1}{f'(t)}$$

이고, $x = 1$ 일 때 $t = 0$, $x = 2e$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_1^{2e} g(x) dx &= \int_0^1 tf'(t) dt \\
 &= \left[tf(t) \right]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \\
 &= f(1) - \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt \\
 &= 2e - (2e - 3) = 3
 \end{aligned}$$

12-1

$$S(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8}xe^{-\frac{1}{2}x} \\
 &= \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}(2-x)
 \end{aligned}$$

$$S'(x) = 0 \text{에서 } 2 - x = 0 \left(\because e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \right) \therefore x = 2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $S(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $S(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} x e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^2 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

답 $1 - \frac{2}{e}$

12-2

t 초 후 채워진 물의 높이가 t cm이므로 물의 높이가 t cm일 때 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$, t 초 후 물통에 채워진 물의 부피를 $V(t)$ 라 하면

$$V(t) = \int_0^t S(t) dt = \{\ln(t+1)\}^2$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{2\ln(t+1)}{t+1} \\ S'(t) &= \frac{\frac{2}{t+1} \times (t+1) - 2\ln(t+1)}{(t+1)^2} \\ &= \frac{2\{1 - \ln(t+1)\}}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } 1 - \ln(t+1)=0$$

$$t+1=e \quad \therefore t=e-1$$

$0 \leq t \leq 5$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$e-1$	...	5
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $S(t)$ 는 $t=e-1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S(e-1) = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e}$$

이때, 수면은 정사각형 모양이므로 수면의 한 변의 길이는

$$\sqrt{\frac{2}{e}}$$

답 $\sqrt{\frac{2}{e}}$

13-1

x 좌표가 x ($0 \leq x \leq \ln 2$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 지름의 길이가 $|e^2 - e^x|$ 인 반원이므로 그 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{e^2 - e^x}{2} \right)^2 \pi \\ &= \frac{\pi}{8} (e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4) \end{aligned}$$

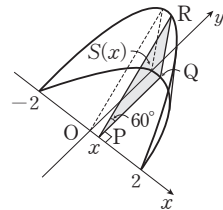
따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 2} S(x) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4 x \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(2 - 4e^2 + e^4 \ln 2 - \frac{1}{2} + 2e^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left(e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{8} \left(e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2} \right)$

13-2

다음 그림과 같이 원기둥의 밑면의 중심을 원점 O , 지름을 x 축으로 정하고, x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($-2 \leq x \leq 2$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라 하자.



$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{4 - x^2},$$

$$\overline{RQ} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3(4 - x^2)}$$

이므로 $\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \times \sqrt{4 - x^2} \times \sqrt{3(4 - x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - x^2) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 S(x) dx = \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (4-x^2) dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (4-x^2) dx \\ &= \sqrt{3} \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \sqrt{3} \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

14-1

점 P의 시간 t 에서의 위치가 $x = \ln(t+1) - \frac{1}{4}t$,

$y = 2\sqrt{t+1}$ 이므로

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\right)^2} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\right) dt \\ &= \left[\ln|t+1| + \frac{1}{4}t \right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\ln 2 + \frac{1}{4}$

14-2

점 P의 시간 t 에서의 위치가 $x = 4\sqrt{2}t + 2$, $y = \frac{4}{3}\sqrt{t}(t-6)$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4\sqrt{2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{3\sqrt{t}}(t-6) + \frac{4}{3}\sqrt{t} \\ &= 2\left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

즉, 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4\left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2} \\ &= \sqrt{4\left(\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2} \\ &= 2\left(\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

$\sqrt{t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2\sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{t} \times \frac{4}{\sqrt{t}}} = 4\sqrt{2}$$

등호는 $2\sqrt{t} = \frac{4}{\sqrt{t}}$ 일 때 성립하므로

$$t=2 \quad \therefore a=2$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_1^2 2\left(\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{t}}\right) dt \\ &= 2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 \\ &= 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{2}{3} - 4\right) \\ &= \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{28}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{32}{3}$, $q = \frac{28}{3}$ 이므로

$$p+q = \frac{32}{3} + \frac{28}{3} = 20$$

답 20

15-1

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \ln\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

따라서 닫힌구간 $[1, 7]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_1^7 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_1^7 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^7 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^7 \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln |x| \right]_1^7 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{49}{2} + \ln 7 - \frac{1}{2} \right) = 12 + \frac{1}{2} \ln 7
\end{aligned}$$

답 $12 + \frac{1}{2} \ln 7$

15-2

$x = e^{2t} + e^{-2t}$, $y = 4t$ 이므로

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} - 2e^{-2t}, \quad \frac{dy}{dt} = 4$$

즉, $0 \leq t \leq \ln 4$ 에서 매개변수로 나타낸 곡선의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\ln 4} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\
&= \int_0^{\ln 4} \sqrt{(2e^{2t} - 2e^{-2t})^2 + 4^2} dt \\
&= \int_0^{\ln 4} \sqrt{4(e^{2t} - e^{-2t})^2 + 16} dt \\
&= \int_0^{\ln 4} \sqrt{4(e^{2t} + e^{-2t})^2} dt \\
&= \int_0^{\ln 4} 2(e^{2t} + e^{-2t}) dt \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\ln 4} \\
&= 2 \left(8 - \frac{1}{32} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{255}{16}
\end{aligned}$$

따라서 $p = 16$, $q = 255$ 이므로

$$p + q = 16 + 255 = 271$$

답 271

15-3

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \frac{x-t}{\cos^2 t} dt \\
&= x \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} dt
\end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{x}{\cos^2 x} \\
&= \int_0^x \sec^2 t dt = \left[\tan t \right]_0^x \\
&= \tan x
\end{aligned}$$

단원구간 $\left[0, \frac{\pi}{6} \right]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 길이를 l 이라 하면

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{에서 } \sec x > 0 \right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이때, $\sin x = a$ 로 놓으면 $\frac{da}{dx} = \cos x$ 이고, $x = 0$ 일 때

$a = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $a = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - a^2} da \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} \right) da \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln |a+1| - \ln |a-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln 3
\end{aligned}$$

①에서 $l = \frac{1}{2} \ln 3$

답 $\frac{1}{2} \ln 3$



개 념 마 무 리

본문 pp.301~304

01 $\frac{3}{2} \ln 3 - 1$	02 ②	03 100	04 $\frac{1}{2}$
05 ④	06 6	07 e	08 $\frac{35}{3}$
09 ①	10 $e - 2$	11 ③	12 2
13 ⑤	14 $\frac{\sqrt{3}}{4}(\pi - 3)$	15 $2\sqrt{3}$	16 ①
17 $2 + \sqrt{7}$	18 $\frac{1}{2}$	19 $\frac{9}{4}$	20 24
21 $\frac{\pi}{4}$	22 ④		

01

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \ln \left(1 + \frac{k}{2^{n-1}} \right) \text{에서}$$

$2^n = m$ 으로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \ln \left(1 + \frac{k}{2^{n-1}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln \left(1 + \frac{2k}{m} \right)$$

이때, $x_k = 1 + \frac{2k}{m}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{2}{m}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln \left(1 + \frac{2k}{m} \right) &= \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \ln \left(1 + \frac{2k}{m} \right) \times \frac{2}{m} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \ln x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[x \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(3 \ln 3 - \left[x \right]_1^3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ 3 \ln 3 - (3-1) \} \\ &= \frac{3}{2} \ln 3 - 1 \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2} \ln 3 - 1$

02

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 4n^2)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)}{(2 + 4 + 6 + \dots + 2n)(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2}{n^3} \times \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}}{\frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n^2} \times \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3 \frac{1}{n} \right\}}{\left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right) \frac{1}{n} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^4 \frac{1}{n} \right\}} \quad \leftarrow x_k = \frac{k}{n} \text{로 놓으면} \\ &\quad \Delta x = \frac{1}{n} \\ &= \frac{\int_0^1 (2x)^2 dx \times \int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 2x dx \times \int_0^1 x^4 dx} \\ &= \frac{4 \int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 x^3 dx}{2 \int_0^1 x dx \times \int_0^1 x^4 dx} \\ &= \frac{4 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1}{2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1} \end{aligned}$$

$$= \frac{4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}$$

답 ②

03

$$\overline{BP}_k = \frac{k}{n}, \overline{CQ}_k = \frac{k}{n} \text{이므로 } \overline{CP}_k = 1 - \frac{k}{n}$$

사각형 AP_kQ_kD 의 넓이 S_k 는 사각형 $ABCD$ 의 넓이에서 두 삼각형 ABP_k , CQ_kP_k 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} S_k &= \overline{BC}^2 - \frac{1}{2} \times \overline{BP}_k \times \overline{AB} - \frac{1}{2} \times \overline{CP}_k \times \overline{CQ}_k \\ &= 1^2 - \frac{1}{2} \times \frac{k}{n} \times 1 - \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{k}{n} \right) \times \frac{k}{n} \\ &= 1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right\} \quad \leftarrow x_k = \frac{k}{n} \text{로 놓으면 } \Delta x = \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 \right) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 150\alpha = 150 \times \frac{2}{3} = 100$$

답 100

04

$A(a, b)$ 라 하면 $P_k \left(\frac{k\pi}{2n}, \cos \frac{k\pi}{2n} \right)$ 이므로

$$\overline{AP}_k^2 = \left(\frac{k\pi}{2n} - a \right)^2 + \left(\cos \frac{k\pi}{2n} - b \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \overline{AP}_k^2 \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k\pi}{2n} - a \right)^2 + \left(\cos \frac{k\pi}{2n} - b \right)^2 \right\} \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

이때, $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$ 이므로

$$\begin{aligned}
& 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k\pi}{2n} - a \right)^2 + \left(\cos \frac{k\pi}{2n} - b \right)^2 \right\} \frac{\pi}{2n} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ (x-a)^2 + (\cos x - b)^2 \} dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 2ax + a^2 + \cos^2 x - 2b \cos x + b^2) dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - 2ax + a^2 + \frac{1+\cos 2x}{2} - 2b \cos x + b^2 \right) dx \\
&= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - 2b \sin x + b^2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^2}{2}a + \pi a^2 - 4b + \pi b^2 + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi \left(a^2 - \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi^2}{16} \right) + \pi \left(b^2 - \frac{4}{\pi}b + \frac{4}{\pi^2} \right) + \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \\
&= \pi \left(a - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \pi \left(b - \frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2}{\pi}$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \overline{AP_k}^2$ 의 값이 최소
이므로

$$\alpha\beta = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

05

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$\frac{2x-2}{x^2-2x+2}=0 \text{에서 } x=1$$

곡선 $y = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \leq 0$ 이고,

닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 영역 A 의 넓이는

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \{-f(x)\} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2} dx \\
&= -\left[\ln |x^2-2x+2| \right]_0^1 = \ln 2
\end{aligned}$$

영역 B 의 넓이는

$$\begin{aligned}
\int_1^3 |f(x)| dx &= \int_1^3 f(x) dx \\
&= \int_1^3 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx \\
&= \left[\ln |x^2-2x+2| \right]_1^3 = \ln 5
\end{aligned}$$

따라서 두 영역 A, B 의 넓이의 합은

$$\ln 2 + \ln 5 = \ln 10$$

답 ④

06

$x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$ 에서

$$\cos^4 t = \frac{x}{a}, \quad \sin^4 t = \frac{y}{a}$$

이때, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos t \geq 0$, $\sin t \geq 0$ 이므로

$$\cos^2 t = \sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \sin^2 t = \sqrt{\frac{y}{a}}$$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 이므로

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{a}} = 1$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$$

$$\therefore y = x - 2\sqrt{ax} + a$$

이 곡선은 두 점 $(a, 0)$ 과 $(0, a)$ 를 양 끝 점으로 하고,

$0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ 이므로

$$\begin{aligned}
& \int_0^a (x - 2\sqrt{ax} + a) dx \\
&= \int_0^a (x - 2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}} + a) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} + ax \right]_0^a \\
&= \frac{1}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^2 + a^2 \\
&= \frac{1}{6}a^2
\end{aligned}$$

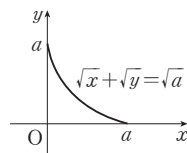
따라서 $\frac{1}{6}a^2 = 6$ 이므로

$$a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

보충설명

곡선 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 는 다음 그림과 같다.



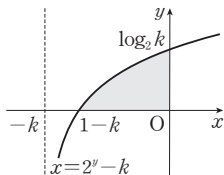
07

$y = \log_2(x+k)$ 에서

$$2^y = x+k$$

$$\therefore x = 2^y - k$$

따라서 곡선 $x = 2^y - k$ 는 닫힌구간 $[0, \log_2 k]$ 에서 $x \leq 0$ 이므로 오른쪽 그림에서 어두운 도형의 넓이는



$$\begin{aligned} & \int_0^{\log_2 k} |2^y - k| dy \\ &= \int_0^{\log_2 k} (-2^y + k) dy \\ &= \left[ky - \frac{2^y}{\ln 2} \right]_0^{\log_2 k} \\ &= k \log_2 k - \frac{k}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } k \log_2 k - \frac{k}{\ln 2} = 0 \text{이므로}$$

$$k \left(\frac{\ln k}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right) = 0$$

$$\frac{k}{\ln 2} (\ln k - 1) = 0, \ln k = 1 \quad (\because k > 1)$$

$$\therefore k = e$$

답 e

다른풀이

곡선 $y = \log_2(x+k)$ 는 닫힌구간 $[1-k, 0]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{1-k}^0 \log_2(x+k) dx \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int_{1-k}^0 \ln(x+k) dx \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left[(x+k) \ln(x+k) \right]_{1-k}^0 - \frac{1}{\ln 2} \int_{1-k}^0 dx \\ &= \frac{1}{\ln 2} \times k \ln k - \frac{1}{\ln 2} \left[x \right]_{1-k}^0 \\ &= \frac{1}{\ln 2} (k \ln k + 1 - k) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\ln 2} (k \ln k + 1 - k) = \frac{1}{\ln 2} \text{이므로}$$

$$k \ln k + 1 - k = 1$$

$$k(\ln k - 1) = 0, \ln k = 1 \quad (\because k > 1)$$

$$\therefore k = e$$

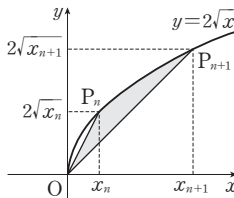
08

곡선 $y = 2\sqrt{x}$ 와 두 선분 OP_n ,

OP_{n+1} 로 둘러싸인 영역의 넓이 S_n 은

이

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} x_n \times 2\sqrt{x_n} \\ &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} 2\sqrt{x} dx - \frac{1}{2} x_{n+1} \times 2\sqrt{x_{n+1}} \\ &= x_n \sqrt{x_n} + \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{x_n}^{x_{n+1}} - x_{n+1} \sqrt{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} x_{n+1} \sqrt{x_{n+1}} - \frac{1}{3} x_n \sqrt{x_n} \end{aligned}$$



이때, 등비수열 $\{S_n\}$ 의 공비가 $\frac{4}{5}$ 이고,

$$S_1 = \frac{1}{3} x_2 \sqrt{x_2} - \frac{1}{3} x_1 \sqrt{x_1} = \frac{7}{3} \quad (\because x_1 = 1, x_2 = 4) \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{7}{3}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{35}{3}$$

답 $\frac{35}{3}$

09

닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $|\sin \pi x| = \sin \pi x \geq 4x^2$ 이고, 두 곡

선 $y = |\sin \pi x|$, $y = 4x^2$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin \pi x - 4x^2) dx &= 2 \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ①

10

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(t, f(t))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $(t, 0)$

점 $A(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t)$$

이 직선이 x 축과 만나는 점 C 의 좌표는
 $(f(t)f'(t)+t, 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} |f(t)f'(t)+t-t| \times |f(t)| \\ &= \frac{1}{2} |\{f(t)\}^2 f'(t)| \\ &= \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 f'(t) \quad (\because f'(x) > 0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)\end{aligned}$$

즉, $\{f(t)\}^2 f'(t) = e^{3t} - 2e^{2t} + e^t$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \{f(t)\}^2 f'(t) dt &= \int (e^{3t} - 2e^{2t} + e^t) dt \\ \frac{1}{3} \{f(t)\}^3 &= \frac{1}{3} e^{3t} - e^{2t} + e^t + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때, $f(0) = 0$ 이므로

$$0 = \frac{1}{3} - 1 + 1 + C \quad \therefore C = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \{f(t)\}^3 = \frac{1}{3} e^{3t} - e^{2t} + e^t - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^3 &= e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1 \\ &= (e^t - 1)^3\end{aligned}$$

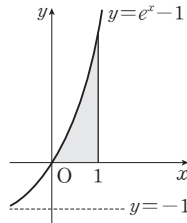
$$\therefore f(t) = e^t - 1 \quad \therefore f(x) = e^x - 1$$

따라서 곡선 $y = e^x - 1$ 은 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓

이는

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^x - 1) dx &= [e^x - x]_0^1 \\ &= e - 2\end{aligned}$$



답 $e - 2$

11

오른쪽 그림과 같이 두 곡선

$y = \sin 2x$, $y = k \cos x$ 의 교

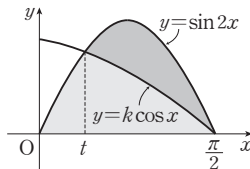
점의 x 좌표를 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)

라 하면 $\sin 2t = k \cos t$ 에서

$$2 \sin t \cos t = k \cos t$$

$$\therefore \sin t = \frac{k}{2} \quad (\because \cos t > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, 곡선 $y = k \cos x$ 가 주어진 영역의 넓이를 이등분하므로



$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx &= 2 \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k \cos x) dx \\ \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= 2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - k \sin x \right]_t^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$1 = 1 - 2k + \cos 2t + 2k \sin t$$

$$\cos 2t + 2k \sin t - 2k = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 t + 2k \sin t - 2k = 0$$

$$1 - 2 \times \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 2k \times \frac{k}{2} - 2k = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\therefore k = 2 - \sqrt{2} \text{ 또는 } k = 2 + \sqrt{2}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $0 < \sin t = \frac{k}{2} < 1$ 이므로

$$0 < k < 2 \quad \therefore k = 2 - \sqrt{2}$$

답 ③

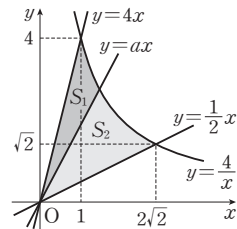
12

곡선 $y = \frac{4}{x}$ 와 직선 $y = 4x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{4}{x} = 4x \text{에서 } x^2 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

또한, 곡선 $y = \frac{4}{x}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{2}x \text{에서 } x^2 = 8 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$



곡선 $y = \frac{4}{x}$ 와 두 직선 $y = 4x$, $y = \frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 영역의

넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \int_1^{2\sqrt{2}} \frac{4}{x} dx - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 2 + \left[4 \ln |x| \right]_1^{2\sqrt{2}} - 2$$

$$= 4 \ln 2^{\frac{3}{2}} = 6 \ln 2$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 6 \ln 2$$

이때, $S_1 : S_2 = 1 : 2$ 이므로

$$S_1 = 2 \ln 2, S_2 = 4 \ln 2$$

(4)

한편, 직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=\frac{4}{x}$ 의 교점의 x 좌표를

k ($1 < k < 2\sqrt{2}$)라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \int_1^k \frac{4}{x} dx - \frac{1}{2} \times k \times \frac{4}{k}$$

$$= 2 + \left[4 \ln |x| \right]_1^k - 2$$

$$= 4 \ln k$$

즉, $4 \ln k = 2 \ln 2$ 이므로

$$\ln k = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \therefore k = \sqrt{2}$$

따라서 직선 $y=ax$ 는 점 $\left(k, \frac{4}{k}\right)$, 즉 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$2\sqrt{2} = \sqrt{2}a \quad \therefore a = 2$$

(다)

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	곡선 $y=\frac{4}{x}$ 와 두 직선 $y=4x$, $y=\frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표를 각각 구한 경우	20%
(나)	S_1 , S_2 의 값을 각각 구한 경우	40%
(다)	S_1 또는 S_2 의 값을 이용하여 a 의 값을 구한 경우	40%

보충설명

오른쪽 그림과 같이 곡선

$$y = \frac{p}{x} \quad (p > 0) \text{ 위의 점}$$

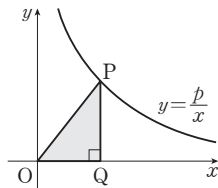
$P\left(t, \frac{p}{t}\right)$ ($t > 0$)에서 x 축에 내린

수선의 발을 Q 라 하자.

이때, $\triangle OPQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times \frac{p}{t} = \frac{p}{2}$$

로 일정하다. 이것을 이용하면 주어진 문제를 더 간단히 해결할 수 있다.



13

ㄱ. $1 \leq x \leq e$ 에서 $0 \leq \ln x \leq 1$ 이므로

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n (1 - \ln x) \geq 0$$

$$\therefore (\ln x)^n \geq (\ln x)^{n+1} \text{ (참)}$$

ㄴ. 곡선 $y=(\ln x)^n$ 과 x 축, y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 S_n 이므로

$$S_n = e \times 1 - \int_1^e (\ln x)^n dx$$

$$= e - \int_1^e (\ln x)^n dx \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, $1 < x < e$ 에서 $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ 이므로

$$\int_1^e (\ln x)^n dx > \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

$$- \int_1^e (\ln x)^n dx < - \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

$$e - \int_1^e (\ln x)^n dx < e - \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

$\textcircled{㉠}$ 에서 $S_n < S_{n+1}$ (참)

ㄷ. $f(x) = (\ln x)^n$ 에서 $f(1) = 0$, $f(e) = 1$ 이므로

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_{f(1)}^{f(e)} g(x) dx$$

$$= 1 \times e - \int_1^e f(x) dx$$

$$= e - \int_1^e (\ln x)^n dx$$

$$= S_n \text{ (} \because \textcircled{㉠} \text{ (참))}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

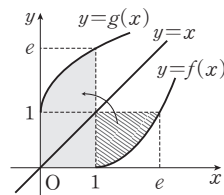
답 ⑤

보충설명

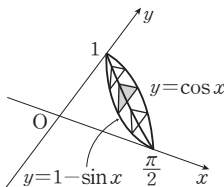
ㄷ. 주어진 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 곡선

$y=g(x)$ ($y \geq 1$)와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형

과 같으므로 $S_n = \int_0^1 g(x) dx$



14



x 좌표가 x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가

$$\cos x - (1 - \sin x) = \cos x + \sin x - 1$$

인 정삼각형이므로 그 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos x + \sin x - 1)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x - 1)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\sin x \cos x - 2\cos x - 2\sin x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin 2x - 2\cos x - 2\sin x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 2\sin x + 2\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\pi + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\pi - 3) \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{4} (\pi - 3)$$

15

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x=2t$, $y=e^t+e^{-t}$ 이므로

$$\frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{4 + (e^t - e^{-t})^2} \\ &= \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} \\ &= e^t + e^{-t} \end{aligned}$$

점 P의 속력이 4일 때의 시각을 a ($a>0$)라 하면

$$e^a + e^{-a} = 4, \quad e^{2a} + 1 = 4e^a$$

$$e^{2a} - 4e^a + 1 = 0$$

$$\therefore e^a = 2 + \sqrt{3} \quad (\because e^a > 1)$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^a (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \left[e^t - e^{-t} \right]_0^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^a - \frac{1}{e^a} = 2 + \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \\ &= 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3}$

16

ㄱ. 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ 이므로

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t)$$

즉, $t=\pi$ 에서의 점 P의 속도는 $(e^{-\pi}, -e^{-\pi})$ 이다.

(참)

ㄴ. 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\{-e^{-t}(\cos t + \sin t)\}^2 + \{-e^{-t}(\sin t - \cos t)\}^2} \\ &= \sqrt{2e^{-2t}} \\ &= \sqrt{2}e^{-t} \quad (\because e^{-t} > 0) \end{aligned}$$

이때, $t>0$ 에서

$$\sqrt{2}e^{-t} < \sqrt{2} < \sqrt{3} \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. $t=0$ 에서 $t=a$ ($a>0$)까지 점 P가 움직인 거리 $S(a)$ 는

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{2}e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \left[-e^{-t} \right]_0^a \\ &= \sqrt{2}(-e^{-a} + 1) \\ \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} S(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \{\sqrt{2}(-e^{-a} + 1)\} \\ &= \sqrt{2} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

17

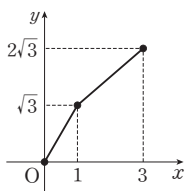
$\int_0^3 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이와 같다.

이때, $f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{3}$,

$f(3)=2\sqrt{3}$ 을 만족시키는 곡선의 길이의 최솟값은 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ 사이의 거리와 두 점 $(1, \sqrt{3})$, $(3, 2\sqrt{3})$ 사이의 거리의 합과 같다.

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}+\sqrt{(3-1)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{7}$$



답 $2+\sqrt{7}$

18

$y=\cos x$ 에서 $y'=-\sin x$

점 $P(t, \cos t)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\sin t$ 이므로 점 P 를 지나고 점 P 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-\cos t=\frac{1}{\sin t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{\sin t}x-\frac{t}{\sin t}+\cos t$$

이때, $0 \leq x \leq t$ 에서 $\cos x \geq \frac{1}{\sin t}x-\frac{t}{\sin t}+\cos t$ 이므로

곡선 $y=\cos x$ 와 y 축 및 직선 PQ 로 둘러싸인 영역의 넓이 $S(t)$ 는

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \left\{ \cos x - \left(\frac{1}{\sin t}x - \frac{t}{\sin t} + \cos t \right) \right\} dx \\ &= \int_0^t \left(\cos x - \frac{1}{\sin t}x + \frac{t}{\sin t} - \cos t \right) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2\sin t}x^2 + \left(\frac{t}{\sin t} - \cos t \right)x \right]_0^t \\ &= \sin t + \frac{t^2}{2\sin t} - t \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{t}{2\sin t} - \cos t \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

보충설명

x 의 단위가 라디안일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

19

점 (a, b) 가 원 $x^2+y^2=2$ 위에 있으므로

$$a^2+b^2=2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

한편, $y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 곡선 $y=x^2$ 위의 한 점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2t$

즉, 접선의 방정식은

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2$$

이 직선이 점 (a, b) 를 지나므로 $b=2at-t^2$

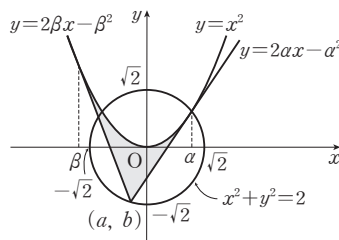
$$\therefore t^2-2at+b=0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면

$$\alpha+\beta=2a, \quad \alpha\beta=b \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

이때, 두 점 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ 에서의 접선의 방정식은 각각

$$y=2\alpha x-\alpha^2, \quad y=2\beta x-\beta^2$$



위의 그림에서

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^{\alpha} \{x^2 - (2\beta x - \beta^2)\} dx + \int_{\alpha}^a \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\} dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} (x^2 - 2\beta x + \beta^2) dx + \int_{\alpha}^a (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \beta x^2 + \beta^2 x \right]_{\beta}^{\alpha} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \alpha x^2 + \alpha^2 x \right]_{\alpha}^a \\ &= \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - \beta(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^2(\alpha - \beta) \\ &\quad + \frac{1}{3}(\alpha^3 - \alpha^3) - \alpha(\alpha^2 - \alpha^2) + \alpha^2(\alpha - \alpha) \\ &= \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\alpha - \alpha\alpha^2 \\ &= (\alpha - \beta)\alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)\alpha + \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) \\ &= (\alpha - \beta)\alpha^2 - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\alpha \\ &\quad + \frac{1}{3}(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ &= (\alpha - \beta)\alpha^2 - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\alpha \\ &\quad + \frac{1}{3}(\alpha - \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} \quad \dots\dots\textcircled{9} \end{aligned}$$

이때, $\textcircled{9}$ 에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4a^2 - 4b$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{4a^2 - 4b} \quad (\because \alpha > \beta)$$

이것과 ㉔을 ㉓에 대입하면

$$\begin{aligned} S &= a^2 \sqrt{4a^2 - 4b} - 2a^2 \sqrt{4a^2 - 4b} + \frac{1}{3}(4a^2 - b)\sqrt{4a^2 - 4b} \\ &= \frac{1}{3}(a^2 - b)\sqrt{4a^2 - 4b} = \frac{2}{3}(a^2 - b)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(-b^2 - b + 2)^{\frac{3}{2}} \quad (\because \text{㉓}) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{9}{4} - \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

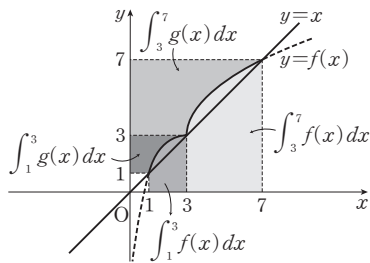
따라서 S는 $b = -\frac{1}{2}$ 일 때 최대이고 이때의 최댓값은 $\frac{9}{4}$ 이다.

답 $\frac{9}{4}$

20

함수 $f(x)$ 는 역함수 $g(x)$ 가 존재하므로 일대일대응이고, 조건 (가)에서 $f(1) < f(3) < f(7)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[1, 7]$ 에서 증가한다.

또한, 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 는 열린구간 $(1, 3)$, $(3, 7)$ 에서 위로 볼록하므로 곡선 $y=f(x)$ 를 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $\int_1^3 f(x) dx = 3 \times 3 - 1 \times 1 - \int_1^3 g(x) dx$ 이고, 조건 (다)

에서 $\int_1^3 g(x) dx = 3$ 이므로

$$\int_1^3 f(x) dx = 8 - 3 = 5$$

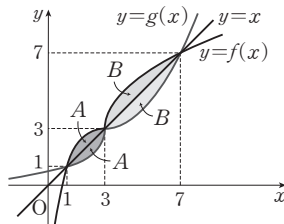
$$\begin{aligned} \therefore \int_3^7 f(x) dx &= \int_1^7 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx \\ &= 27 - 5 = 22 \quad \cdots \cdots \text{㉑} \end{aligned}$$

한편, 닫힌구간 $[3, 7]$ 에서 $f(x) - x \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 12 \int_3^7 |f(x) - x| dx &= 12 \int_3^7 \{f(x) - x\} dx \\ &= 12 \left\{ \int_3^7 f(x) dx - \int_3^7 x dx \right\} \\ &= 12 \left(22 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_3^7 \right) \quad (\because \text{㉑}) \\ &= 12 \left(22 - \frac{49}{2} + \frac{9}{2} \right) = 24 \end{aligned}$$

답 24

다른풀이



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 위의 그림과 같다.

이때, 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 A, 닫힌구간 $[3, 7]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 B라 하면

$$\int_1^7 f(x) dx = 27 \text{이므로}$$

$$A + B + \frac{1}{2}(7-1)(7+1) = 27, \quad A + B + 24 = 27$$

$$\therefore A + B = 3 \quad \cdots \cdots \text{㉒}$$

$$\int_1^3 g(x) dx = 3 \text{이므로}$$

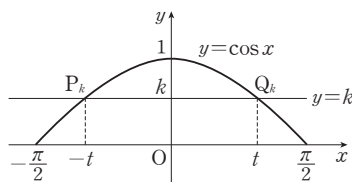
$$\frac{1}{2}(3-1)(3+1) - A = 3, \quad 4 - A = 3$$

$$\therefore A = 1$$

이것을 ㉒에 대입하면 $B = 2$

$$\therefore 12 \int_3^7 |f(x) - x| dx = 12B = 24$$

21



위의 그림과 같이 곡선 $y=\cos x$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 $t\left(0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$$k=\cos t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $y=\cos x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수를 $f(x)$ 라 하면

$$f(k)=t$$

y 축에 수직이고 선분 P_kQ_k 를 포함하는 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(k)$ 라 하자. $S(k)$ 는 곡선 $y=\cos x$ 와 선분 P_kQ_k 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{-t}^t \cos x dx - 2t \cos t = 2 \int_0^t \cos x dx - 2t \cos t \\ &= 2 \left[\sin x \right]_0^t - 2t \cos t = 2(\sin t - t \cos t) \\ &= 2\{\sin f(k) - f(k) \cos f(k)\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

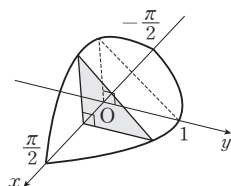
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(k) dk \\ &= 2 \int_0^1 \{\sin f(k) - f(k) \cos f(k)\} dk \end{aligned}$$

한편, $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{dk}{dt} = -\sin t$ 이고, $k=0$ 일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $k=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 \{\sin f(k) - f(k) \cos f(k)\} dt \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin t - t \cos t) \sin t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - t \sin t \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t - t \sin 2t) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

다른풀이



위의 그림과 같이 x 좌표가 $x\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 인 점을 지나고 y 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\cos x$ 인 직각이등변삼각형이므로 그 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} (\cos x)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

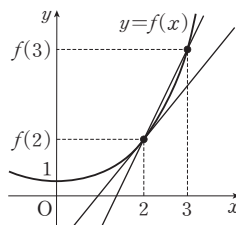
$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

22

ㄱ. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

이때, 실수 전체의 집합에 대하여 $f''(x) > 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록한 곡선이다.



따라서 두 점 $(2, f(2)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기는 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} > f'(2)$$

$$\therefore f(3) > f(2) + f'(2) \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f(2) = \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2}\right) = 2$$

$$g'\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2}\right) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^2 - e^{-2}}{2}}$$

$$= \frac{2}{e^2 - e^{-2}} \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. t 초 후의 점 P의 x 좌표를 k 라 하면 t 초 동안 점 P가 움직인 거리는 닫힌구간 $[0, k]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이와 같으므로

$$\begin{aligned}\int_0^k \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx &= \int_0^k \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^k \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^k \frac{e^x+e^{-x}}{2} dx \\ &= \left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^k = \frac{e^k-e^{-k}}{2}\end{aligned}$$

이때, 점 P는 매초 1의 속력으로 움직이므로 t 초 동안 움직인 거리는 t 이다.

$$\text{즉, } \frac{e^k-e^{-k}}{2}=t \text{이므로}$$

$$e^k-e^{-k}=2t, \quad e^{2k}-2te^k-1=0$$

$$\text{따라서 } e^k=t+\sqrt{t^2+1} \quad (\because e^k>0) \text{이므로}$$

$$k=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \quad (\text{참})$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른풀이

$$\neg. f(x)+f'(x)=e^x \text{이므로}$$

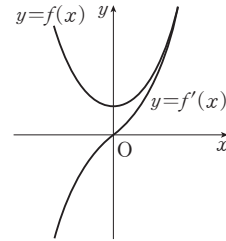
$$f(2)+f'(2)=e^2$$

$$f(3)=\frac{e^3+e^{-3}}{2}>\frac{e^3}{2}=\frac{e}{2}\times e^2>e^2$$

$$\therefore f(3)>f(2)+f'(2) \quad (\text{참})$$

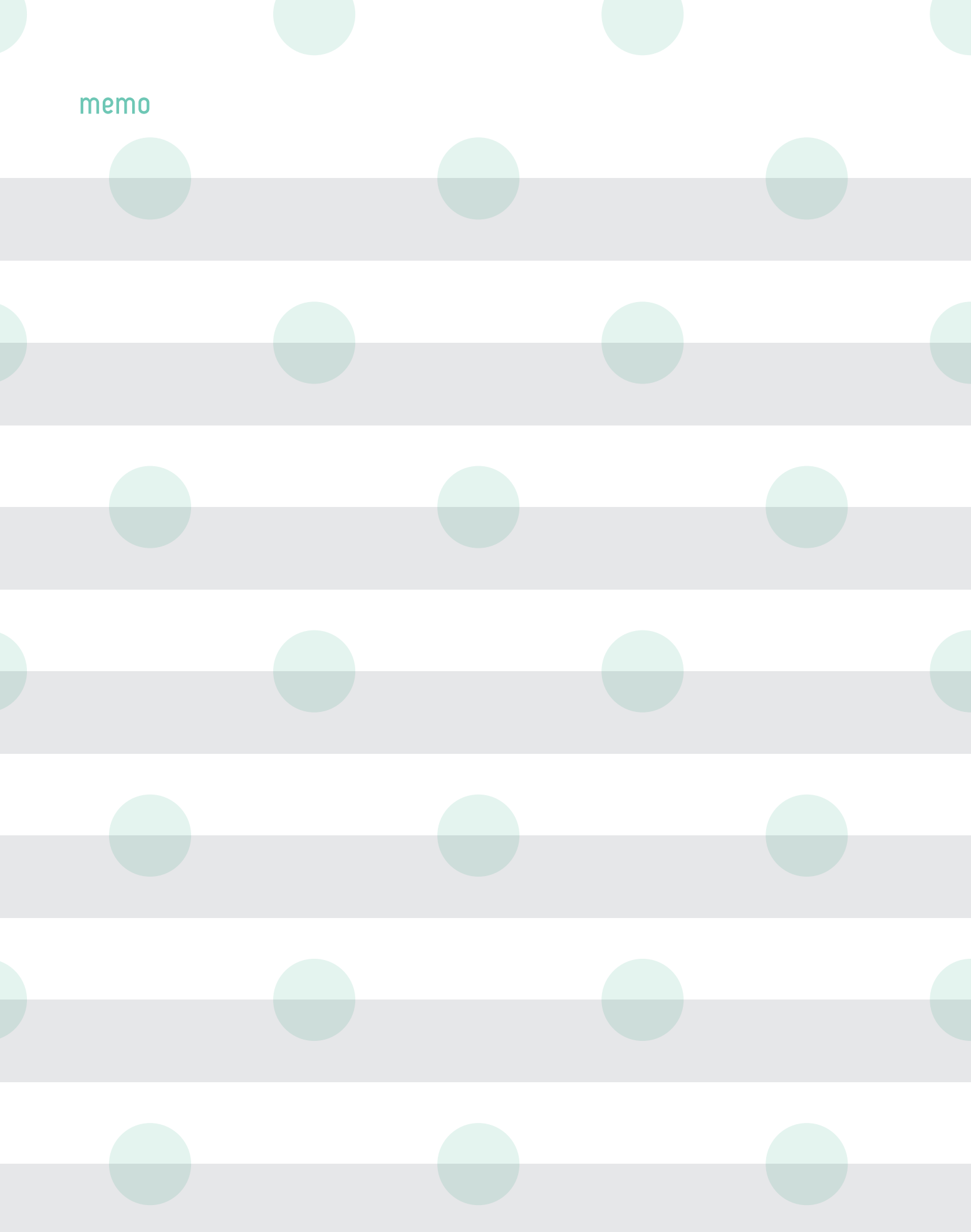
보충설명

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$ 는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로 우함수, 함수 $f'(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이므로 기함수임을 알 수 있다.

memo



memo

memo

