더 THE 개념 블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L

I. 경우의 수

유형 연습 01 여러 가지 순열

본문 pp.16~31

01-1 (1) 144 (2) 144		01-2 3456
02-1 16	02-2 6	02-3 864
03-1 6720	03-2 168	04-1 144
04-2 180	04-3 1260	05-1 (1) 30 (2) 211
05-2 33	06-1 (1) 160 (2) 240 (3) 244	
06-2 2752	07-1 (1) 12 (2) 18	07-2 400
08-1 (1) 360 (2) 2520 (3) 5040		08-2 170
09-1 (1) 270 (2) 135		09-2 450
10-1 (1) 267 (2) 135 (3) 69		10-2 210
11-1 360	11-2 42	

01-1

(1) 남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때, 각 경우에 대하여 남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

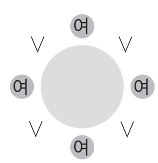
$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

(2) 여학생을 먼저 원탁에 앉히고 여학생 사이사이에 남학생을 앉히면 남학생끼리 이웃하지 않도록 앉게 된다.

여학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는



$(4-1)!=3!=6$

여학생 사이사이의 4개의 자리 중에서 3개의 자리에 남학생 3명이 앉는 경우의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

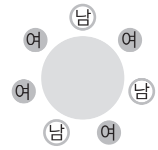
$6\times24=144$

답 (1) 144 (2) 144

다른풀이

(2) 남학생끼리 이웃하지 않도록 앉으려면 남학생 3명을 먼저 원탁에 앉힌 후 남학생 사이에 여학생을 2명, 1명, 1명으로 나누어 앉히면 된다.

남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는



$(3-1)!=2!=2$

여학생을 2명, 1명, 1명으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=6\times2\times1\times\frac{1}{2}=6$

남학생 사이사이에 여학생 2명, 1명, 1명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이때, 이웃하여 앉은 여학생 2명의 위치를 바꾸는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times6\times2=144$

01-2

A, B가 각각 C, D 중 한 사람과 짝을 이루는 경우의 수는

$2!=2$ ← (AC, BD) 또는 (AD, BC)

A와 B를 포함한 남자 6명이 원형으로 서는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

A와 B가 이웃하여 남자 6명이 원형으로 서는 경우의 수는

$(5-1)!\times2!=4!\times2!=48$

즉, A와 B가 이웃하지 않고 남자 6명이 원형으로 서는 경우의 수는

$120-48=72$

한편, A와 B의 자리가 결정되면 C와 D의 자리가 결정되므로 나머지 여자 4명을 안쪽에 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times72\times24=3456$

답 3456

다른풀이

A, B가 각각 C, D 중 한 사람과 짝을 이루는 경우의 수는

$2!=2$

C, D를 제외한 여자 4명을 안쪽에 원형으로 세우는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

여자 사이사이의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 C, D를 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

한편, C와 D의 자리가 결정되면 A와 B의 자리가 결정되므로 남자 4명을 바깥쪽에 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times12\times24=3456$

02-1

같은 학년을 한 사람으로 생각하여 3명을 세 변에 앉히는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(3-1)!=2!=2$

이때, 각 학년별로 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

$2\times2!\times2!\times2!=16$

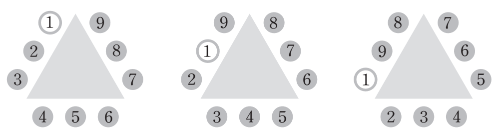
답 16

02-2

9명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

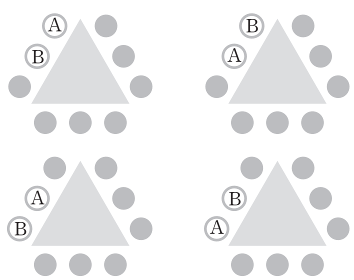
이때, 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



즉, 정삼각형 모양의 탁자에 A, B를 포함한 9명이 둘러앉는 경우의 수는

$a=8!\times3$

한편, A, B가 정삼각형의 한 변에 이웃하여 앉는 경우는 다음 그림과 같이 4가지 경우가 있다.



이 각각에 대하여 나머지 7명의 학생이 나머지 자리에 앉는 경우의 수는

$7!$

따라서 A, B가 정삼각형의 한 변에 이웃하여 9명이 앉는 경우의 수는

$b=7!\times4$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{8!\times3}{7!\times4}=\dfrac{8\times3}{4}=6$

답 6

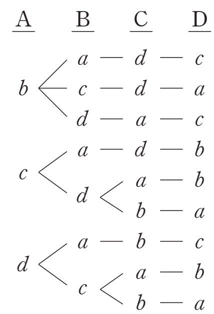
02-3

4개 학급의 반장을 각각 A, B, C, D라 하고, 각 학급의 부반장을 각각 a, b, c, d라 하자.

정사각형 모양의 탁자의 각 면에 네 명의 반장 A, B, C, D가 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때, 나머지 네 자리에 각 학급의 부반장이 앉는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같이 9가지이다.



이때, 각 변에서 반장과 부반장이 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는

$6\times9\times2!\times2!\times2!\times2!=864$

답 864

03-1

서로 다른 8가지 색 중에서 6가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

서로 다른 6가지 색 중에서 3가지 색을 택하여 작은 원의 내부의 세 영역에 칠하는 경우의 수는

${}_6C_3\times(3-1)!=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times2=40$

나머지 3가지 색을 나머지 세 영역에 칠하는 경우의 수는

$3!=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$28\times40\times6=6720$

답 6720

다른풀이

8가지 색 중에서 6가지 색을 택하여 6개의 영역에 하나씩 칠하는 경우의 수는

${}_8P_6=8\times7\times6\times5\times4\times3$

이때, 주어진 도형은 회전하여 서로 같은 경우가 3가지씩 생기므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{3}=6720$

03-2

서로 다른 9가지 색 중에서 3가지 색을 택하여 작은 원의 내부의 세 영역에 칠하는 경우의 수는

${}_9C_3\times(3-1)!=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times2=8\times7\times3$

나머지 6가지 색 중에서 3가지 색을 택하여 정삼각형의 내부에 칠하는 경우의 수는

${}_6P_3=6\times5\times4$

나머지 3가지 색을 큰 원의 영역에 칠하는 경우의 수는

$3!=6$

$\therefore\ n=8\times7\times3\times6\times5\times4\times6$

$\therefore\ \dfrac{n}{6!}=\dfrac{8\times7\times3\times6\times5\times4\times6}{6!}=168$

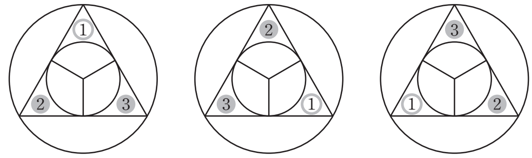
답 168

다른풀이

9개의 영역에 서로 다른 9가지 색을 칠하는 경우의 수는

$9!$

이때, 도형을 회전하여 같은 경우가 3가지씩 생기므로 구하는 경우의 수는



$n=\dfrac{9!}{3}$

$\therefore\ \dfrac{n}{6!}=\dfrac{9!}{3\times6!}=168$

04-1

정오각뿔의 밑면에 색을 칠하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

나머지 5가지 색으로 밑면을 제외한 5개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

답 144

04-2

직육면체의 두 밑면은 서로 합동이므로 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

4개의 옆면은 크기가 서로 다른 2개씩으로 이루어져 있으므로 나머지 4가지 색으로 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!\times2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times12=180$

답 180

04-3

서로 다른 7가지 색 중에서 정육면체의 옆면에 칠할 4가지 색을 택하는 경우의 수는

${}_7C_4={}_7C_3=35$

이 4가지 색을 정육면체의 옆면에 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 3가지 색을 원기둥의 밑면과 옆면, 정육면체의 나머지 한 면에 칠하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times6\times6=1260$

답 1260

05-1

(1) 서로 다른 5개의 연필을 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$

이때, 1명이 연필 5개를 다 받는 경우는 제외시켜야 하므로 구하는 경우의 수는

$32-2=30$

(2) 세 문자 C, A, R 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$

이 중 문자 C가 포함되지 않는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 C가 반드시 포함되는 경우의 수는

$243-32=211$

답 (1) 30 (2) 211

다른풀이

(1) 2명에게 나누어 주는 연필의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

각각의 경우에 대하여 서로 다른 연필 5개를 나눠주는 경우의 수는

$_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4=5+10+10+5=30$

05-2

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_4=3^4=81$

문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 a를 택하지 않을 때와 a를 1번 택할 때 일렬로 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) a를 택하지 않을 때,

문자 b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) a를 1번 택할 때,

4개의 문자를 일렬로 나열할 때, 문자 a가 위치할 수 있는 경우의 수는

$_4C_1=4$

문자 b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 문자 a를 1번 택하여 나열하는 경우의 수는

$4\times8=32$

(i), (ii)에서 문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$81-(16+32)=33$

답 33

다른풀이

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 2번, 3번, 4번 나오는 경우의 수를 각각 구하여 풀 수도 있다.

(i) a가 2번 나올 때,

4개의 문자를 일렬로 나열할 때, 문자 a가 2번 들어가는 경우의 수는

$_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

나머지 두 자리에 문자 b, c를 중복을 허용하여 나열하는 경우의 수는

$_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 문자 a가 2번 나오는 경우의 수는

$6\times4=24$

(ii) a가 3번 나올 때,

4개의 문자를 일렬로 나열할 때, 문자 a가 3번 들어가는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

나머지 한 자리에 문자 b, c 중 하나를 나열하는 경우의 수는 2

따라서 문자 a가 3번 나오는 경우의 수는

$4\times2=8$

(iii) a가 4번 나올 때,

4개의 문자를 일렬로 나열할 때, 문자 a가 4번 들어가는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$24+8+1=33$

06-1

(1) 4의 배수가 되려면 끝의 두 자리가 4의 배수이어야 하므로 가능한 경우는

00, 04, 12, 20, 24, 32, 40, 44

의 8가지이다.

이때, 천의 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개, 백의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개가 올 수 있으므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$8\times4\times5=160$

(2) 백의 자리의 수와 십의 자리의 수의 합이 짝수이기 위한 순서쌍 (백의 자리의 수, 십의 자리의 수)는 (짝수, 짝수), (짝수, 0), (0, 짝수), (홀수, 홀수)의 4가지이다.

백의 자리와 십의 자리에 모두 짝수가 오는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

백의 자리에 짝수, 십의 자리에 0이 오는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

백의 자리에 0, 십의 자리에 짝수가 오는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

백의 자리와 십의 자리에 모두 홀수가 오는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

한편, 천의 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개가 올 수 있으므로 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$(4+2+2+4)\times4\times5=240$

(3) 천의 자리에는 1, 2, 3, 4의 4개, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 네 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

이때, 숫자 0이 포함되지 않는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 숫자 0이 한 개 이상 포함되는 네 자리 자연수의 개수는

$500-256=244$

답 (1) 160 (2) 240 (3) 244

보충설명

배수판별법

(1) 2의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 2의 배수인 수
(2) 3의 배수: 각 자리의 수의 합이 3의 배수인 수
(3) 4의 배수: 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수인 수
(4) 5의 배수: 일의 자리의 수가 0 또는 5인 수
(5) 9의 배수: 각 자리의 수의 합이 9의 배수인 수

06-2

한 자리 자연수의 개수는 7

두 자리 자연수를 만들 때, 십의 자리에는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개, 일의 자리에 0, 1, 2, ⋯, 7의 8개가 올 수 있으므로 두 자리 자연수의 개수는

$7\times8=56$

세 자리 자연수를 만들 때, 백의 자리에는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개가 올 수 있고 십의 자리, 일의 자리에는 8개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 세 자리 자연수의 개수는

$7\times{}_8\Pi_2=7\times8^2=448$

같은 방법으로 천의 자리의 수가 1, 2, 3, 4인 네 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_8\Pi_3=4\times8^3=2048$

천의 자리의 수가 5이고 백의 자리의 수가 0, 1, 2인 네 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_8\Pi_2=3\times8^2=192$

따라서 5300보다 작은 자연수의 개수는

$7+56+448+2048+192=2751$

이므로 5300은 2752번째 수이다.

답 2752

다른풀이

한 자리 자연수를 백의 자리, 십의 자리의 수가 0인 세 자리 자연수로, 두 자리 자연수를 백의 자리의 수가 0인 세 자리 자연수로 생각하면 각 자리에 0, 1, 2, …, 7의 8개가 올 수 있는 세 자리 이하의 자연수의 개수는

${}_8\Pi_3-\underbrace{1}_{000\text{인 경우}}=8^3-1=511$

네 자리 자연수 중에서 천의 자리의 수가 1, 2, 3, 4인 자연수의 개수는

$4\times{}_8\Pi_3=4\times8^3=2048$

천의 자리의 수가 5이고 백의 자리의 수가 0, 1, 2인 네 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_8\Pi_2=3\times8^2=192$

따라서 5300보다 작은 자연수의 개수는

$511+2048+192=2751$

이므로 5300은 2752번째 수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$4\times3=12$

(2) $f(1)f(2)$의 값이 짝수가 되는 경우는

(짝수)×(짝수), (짝수)×(홀수), (홀수)×(짝수) ……㉠

한편, $f(2)f(3)$의 값이 홀수가 되는 경우는

(홀수)×(홀수) ……㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키려면 $f(2)$의 값이 홀수이어야 한다.

즉, $f(1)$의 값은 짝수, $f(2)$, $f(3)$의 값은 홀수이다.

$f(1)$의 값이 짝수인 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 4의 2개에서 1개를 뽑아 집합 X의 원소 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2C_1=2$

$f(2)$, $f(3)$의 값이 홀수인 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 3, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 구하는 함수의 개수는

$2\times9=18$

답 (1) 12 (2) 18

07-1

(1) (ⅰ) x가 홀수일 때,

$x+f(x)$의 값이 홀수가 되려면 $f(x)$의 값이 짝수이어야 한다.

이때, 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 4의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 3에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

(ⅱ) x가 짝수일 때,

$x+f(x)$의 값이 홀수가 되려면 $f(x)$의 값이 홀수이어야 한다.

이때, 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 3, 5의 3개에서 1개를 뽑아 집합 X의 원소 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1=3$

07-2

조건 (가)에서 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$이고, $f(4)=2$ 또는 $f(4)=4$ 또는 $f(4)=6$이다.

이때, $f(3)=1$이면 조건 (나)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$의 값이 존재하지 않는다.

같은 방법으로 $f(4)=6$이면 조건 (다)를 만족시키는 $f(5)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않는다.

즉, 다음과 같이 경우를 나누어 함수 f의 개수를 구할 수 있다.

(ⅰ) $f(3)=3$, $f(4)=2$일 때,

$f(1)$, $f(2)$의 값은 1, 2 중 하나이어야 하고,

$f(5)$, $f(6)$의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_2\times{}_4\Pi_2=2^2\times4^2=64$

(ⅱ) $f(3)=3$, $f(4)=4$일 때,

$f(1)$, $f(2)$의 값은 1, 2 중 하나이어야 하고,

$f(5)$, $f(6)$의 값은 5, 6 중 하나이어야 하므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 2^2 \times 2^2 = 16$

(iii) $f(3)=5$, $f(4)=2$일 때,

$f(1)$, $f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하고, $f(5)$, $f(6)$의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_4\Pi_2 \times {}_4\Pi_2 = 4^2 \times 4^2 = 256$

(iv) $f(3)=5$, $f(4)=4$일 때,

$f(1)$, $f(2)$의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하고, $f(5)$, $f(6)$의 값은 5, 6 중 하나이어야 하므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_4\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 4^2 \times 2^2 = 64$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$64+16+256+64=400$

답 400

08-1

(1) $l\square\square\square\square\square\square l$과 같이 양 끝에 l을 고정하고 가운데 나머지 문자 a, b, e, e, h, t를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!}=360$

(2) 두 개의 e를 하나의 문자 E로 생각하고 a, b, E, h, l, l, t를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!}=2520$

(3) b와 h의 순서가 정해져 있으므로 b, h 모두 x로 생각하여 a, e, e, l, l, t, x, x를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 x는 b, 두 번째 x는 h로 바꾸어서 생각하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{2!2!2!}=5040$

답 (1) 360 (2) 2520 (3) 5040

다른풀이

(1) $l\square\square\square\square\square\square l$에서 두 개의 e가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

나머지 문자 a, b, h, t를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times24=360$

(2) 두 개의 e를 하나의 문자 E로 생각하면 7개의 문자를 나열하는 경우의 수와 같다.

7개의 자리 중 두 개의 l이 들어갈 자리를 구하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

나머지 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times120=2520$

(3) b, h 모두 x로 생각하여 a, e, e, l, l, t, x, x를 일렬로 나열할 때, 8개의 자리 중에서 문자 a가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_8C_1=8$

나머지 7개의 자리 중에서 문자 e가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

나머지 5개의 자리에 문자 l이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

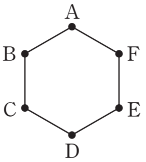
나머지 3개의 자리에 문자 t가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 2개의 자리에 문자 x를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$8\times21\times10\times3=5040$

08-2



꼭짓점 A의 위치에 있는 점 P가 시계 방향으로 1만큼 이동하는 것을 a, 시계 반대 방향으로 1만큼 이동하는 것을 b라 하자. 점 P가 9회 이동해서 꼭짓점 D까지 이동할 때 가능한 경우는 다음과 같다.

(i) 시계 방향으로 9만큼 이동할 때,

나올 수 있는 경우의 수는 1

(ii) 시계 방향으로 6만큼, 시계 반대 방향으로 3만큼 이동할 때, 9개의 문자 a, a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{9!}{6!3!}=84$

(iii) 시계 방향으로 3만큼, 시계 반대 방향으로 6만큼 이동할 때, 9개의 문자 a, a, a, b, b, b, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{9!}{3!6!}=84$

(iv) 시계 반대 방향으로 9만큼 이동할 때,

나올 수 있는 경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+84+84+1=170$

답 170

09-1

(1) (i) 1, 1, ■, ■, ■ 꼴로 택할 때,

■에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

1, 1, ■, ■, ■를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!3!}=10$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times10=30$

(ii) 1, 1, ■, ■, ▲ 꼴로 택할 때,

■, ▲에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

1, 1, ■, ■, ▲를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$6\times30=180$

(iii) 1, 1, ■, ▲, ● 꼴로 택할 때,

숫자 2, 3, 4가 모두 한 번씩 사용되므로 숫자를 택하는 경우의 수는 1

1, 1, ■, ▲, ●를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$1\times60=60$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+180+60=270$

(2) 각 자리의 숫자의 합이 11인 경우는 다음과 같이 6가지로 나눌 수 있다.

(i) 1, 1, 1, 4, 4를 택할 때,

1, 1, 1, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$

(ii) 1, 1, 2, 3, 4를 택할 때,

1, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) 1, 1, 3, 3, 3을 택할 때,

1, 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!3!}=10$

(iv) 1, 2, 2, 2, 4를 택할 때,

1, 2, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(v) 1, 2, 2, 3, 3을 택할 때,

1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

(vi) 2, 2, 2, 2, 3을 택할 때,

2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}=5$

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$10+60+10+20+30+5=125$

답 (1) 270 (2) 135

다른풀이

(1) 5개의 자리 중 두 개의 숫자 1이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

나머지 3개의 자리에는 숫자 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 나열하면 되므로 이때의 경우의 수는

$_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$10\times 27=270$

09-2

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우는 다음 두 가지 경우뿐이다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 택할 때,

사용할 홀수 1개를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 두 번씩 사용해야 하므로 사용할 짝수를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{2}={_{3}C_{1}}=3$

이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times 3\times 30=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 택할 때,

홀수는 1, 3, 5를 모두 사용하므로 경우의 수는 1

짝수는 1개만 택하여 두 번 사용해야 하므로 사용할 짝수 1개를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 자연수의 개수는

$1\times 3\times 60=180$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$270+180=450$

답 450

다른풀이

조합만을 이용하여 계산할 수도 있다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 택할 때,

사용할 홀수 1개를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 두 번씩 사용해야 하므로 사용할 짝수를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{2}={_{3}C_{1}}=3$

5개의 자리 중 홀수가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

$_{5}C_{1}=5$

나머지 4개의 자리 중 짝수를 2개씩 2번 놓을 자리를 정하는 경우의 수는

$_{4}C_{2}\times {_{2}C_{2}}=6$

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times 3\times 5\times 6=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 택할 때,

홀수 1, 3, 5를 모두 사용하는 경우의 수는 1

짝수는 1개만 택하여 두 번 사용해야 하므로 사용할 짝수 1개를 택하는 경우의 수는

$_{3}C_{1}=3$

5개의 자리 중 3개의 홀수가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

$_{5}P_{3}=5\times 4\times 3=60$

나머지 자리에 짝수를 나열하는 경우의 수는 1

즉, 이 경우의 자연수의 개수는

$1\times 3\times 60\times 1=180$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$270+180=450$

보충설명

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 조건 (가)에 의하여 다섯 자리의 자연수 중에서 홀수는 3개 이하로 나올 수 있다.

다섯 자리의 자연수의 각 자리에서의 홀수의 개수를 통해 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우를 확인해 보자.

(i) 홀수가 없을 때,

짝수 3개를 각각 선택하지 않거나 두 번만 선택하여 다섯 자리의 자연수를 만들 수 있는 방법은 존재하지 않는다.

(∵ 조건 (나))

(ii) 홀수가 1개일 때,

다섯 자리의 자연수 중 홀수는 한 번 사용하였으므로 짝수 3개로 네 자리의 자연수를 만들 수 있는지 확인해 보면 된다.

이때, 짝수 3개 중에 두 개는 두 번씩 선택하고 한 개는 선택하지 않으면 네 자리의 자연수를 만들 수 있다.

(iii) 홀수가 2개일 때,

다섯 자리의 자연수 중 홀수는 두 번 사용하였으므로 짝수 3개로 세 자리의 자연수를 만들 수 있는지 확인해 보면 된다.

이때, 짝수 3개를 각각 선택하지 않거나 두 번만 선택하여 세 자리의 자연수를 만들 수 있는 방법은 존재하지 않는다.

(∵ 조건 (나))

(iv) 홀수가 3개일 때,

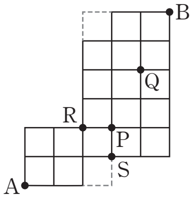
다섯 자리의 자연수 중 홀수는 세 번 사용하였으므로 짝수 3개로 두 자리의 자연수를 만들 수 있는지 확인해 보면 된다.

이때, 짝수 3개 중 한 개는 두 번씩 선택하고 두 개는 선택하지 않으면 두 자리의 자연수를 만들 수 있다.

(i)~(iv)에서 홀수가 1개일 때와 홀수가 3개일 때 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

10-1

오른쪽 그림과 같이 두 지점 R, S를 잡자.



(1) A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 R, S 중 한 지점을 지나야 한다.

(i) A → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{7!}{3!4!}-1\right)=204$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

(ii) A → S → B로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{4!}{3!}-1\right)\times\frac{7!}{2!5!}=63$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$204+63=267$

(2) A지점에서 P지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!2!}-1=9$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

P지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!4!}=15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times15=135$

(3) (1)에서 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 267

(2)에서 A지점에서 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 135

한편, A지점에서 Q지점으로 가려면 R, S 중 한 지점을 지나야 한다.

(i) A → R → Q로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{2!2!}=36$$

(ii) A → S → Q로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{4!}{3!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=12$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

즉, A → Q → B로 가는 경우의 수는

$(36+12)\times3=144$

이때, A → P → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{5!}{3!2!}-1\right)\times\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=81$$

따라서 구하는 경우의 수는

$267-(135+144-81)=69$

답 (1) 267 (2) 135 (3) 69

다른풀이 1

다음과 같이 조합만을 이용하여 풀 수도 있다.

(1) (i) A → R → B로 갈 때,

A지점에서 R지점으로 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 두 칸, 위쪽으로 두 칸을 가야 한다.

4개의 자리 중 오른쪽으로 두 칸을 나열하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

나머지 2개의 자리에 위쪽으로 두 칸을 나열하는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

같은 방법으로 R지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

${}_7C_3-1=34$

즉, A → R → B로 가는 경우의 수는

$(6\times1)\times34=204$

(ii) A → S → B로 갈 때,

A지점에서 S지점으로 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 세 칸, 위쪽으로 한 칸을 가야 한다.

4개의 자리 중 오른쪽으로 세 칸을 나열하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때, → → → ↑ 의 경로는 불가능하므로 A지점에서

S지점으로 가는 경우의 수는

${}_4C_3-1=3$

같은 방법으로 S지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

즉, A→S→B로 가는 경우의 수는

$3\times21=63$

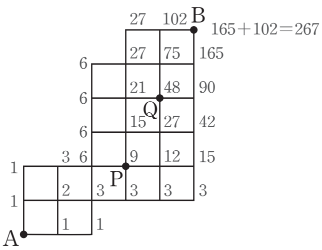
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$204+63=267$

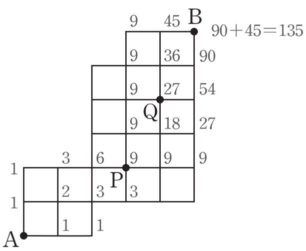
다른풀이 2

다음과 같이 일일이 세어서 계산할 수도 있다.

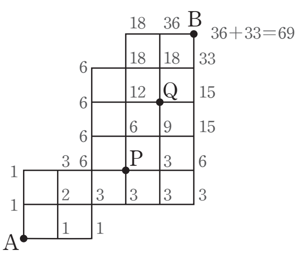
(1)



(2)

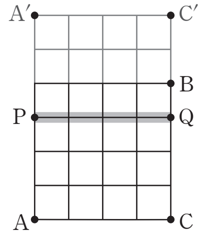


(3)



10-2

다음 그림과 같이 C지점의 위치를 도로 PQ를 기준으로 대칭이동한 후, A지점에서 C′지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.



따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{10!}{4!6!}=210$

답 210

다른풀이 1

A지점에서 C′지점으로 가려면 오른쪽으로 네 칸, 위쪽으로 여섯 칸을 가야 한다.

10개의 자리 중 오른쪽으로 네 칸을 나열하는 경우의 수는

${}_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

나머지 6개의 자리에 위쪽으로 여섯 칸을 나열하는 경우의 수는

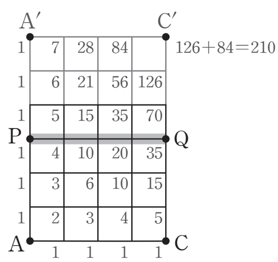
${}_6C_6=1$

따라서 구하는 경우의 수는

$210\times1=210$

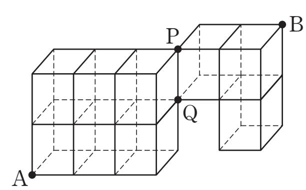
다른풀이 2

다음과 같이 일일이 세어서 계산할 수도 있다.



11-1

A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡을 때, P, Q 중 한 지점을 지나야 한다.



이때, 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 높이 방향으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

(i) P지점을 지날 때,

$A \rightarrow P$로 가는 경우의 수는 6개의 문자 a, a, a, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

$P \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

즉, 이 경우의 수는

$60\times3=180$

(ii) Q지점을 지날 때,

$A \rightarrow Q$로 가는 경우의 수는 5개의 문자 a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$

$Q \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

즉, 이 경우의 수는

$20\times12=240$

(iii) P, Q 지점을 모두 지날 때,

$A \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}\times1\times\dfrac{3!}{2!}=60$

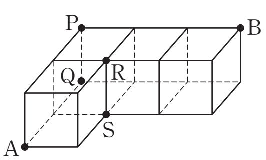
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$180+240-60=360$

답 360

11-2

A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡을 때, P, Q, R, S 중 한 지점을 지나야 한다.



이때, 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 높이 방향으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

(i) P지점을 지날 때,

$A \rightarrow P$로 가는 경우의 수는 3개의 문자 b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

$P \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 $\underbrace{1}_{a,\ a,\ a\text{의 1가지}}$

즉, 이 경우의 수는

$3\times1=3$

(ii) Q지점을 지날 때,

$A \rightarrow Q$로 가는 경우의 수는 $\underbrace{1}_{b,\ b\text{의 1가지}}$

$Q \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(iii) P, Q 지점을 모두 지날 때,

$A \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow B$로 가는 경우의 수는

$1\times1\times1=1$

(iv) R지점을 지날 때,

$A \rightarrow R$로 가는 경우의 수는 3개의 문자 a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

$R \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

즉, 이 경우의 수는

$6\times3=18$

(v) $A \rightarrow S \rightarrow B$로 갈 때,

$A \rightarrow S$로 가는 경우의 수는 2개의 문자 a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

$S \rightarrow B$로 가는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

즉, 이 경우의 수는

$2\times12=24$

(vi) R, S 지점을 모두 지날 때,

$A \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow B$로 가는 경우의 수는

$$2!\times 1\times\frac{3!}{2!}=6$$

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$(3+4-1)+(18+24-6)=42$

답 42

개념마무리

본문 pp.32~35

01 ⑤	**02** 288	**03** 76	**04** 72
05 ③	**06** 36	**07** 540	**08** ③
09 801	**10** 1488	**11** ⑤	**12** 136
13 ④	**14** 13	**15** 120	**16** ④
17 84	**18** 648	**19** 160	**20** 3840
21 93	**22** 243	**23** 50	

01

대학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2$

각각의 대학생 사이에 고등학생이 앉을 수 있는 자리는 총 3개이다.

이때, 각각의 대학생 사이에 앉은 고등학생의 수는 모두 다르므로 고등학생 6명은 1명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누어진다.

서로 다른 3개의 조를 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

고등학생 6명을 6개의 자리에 앉히는 경우의 수는

$6!=720$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 6\times 720=8640$

답 ⑤

다른풀이

대학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

각각의 대학생 사이에 고등학생이 앉을 수 있는 자리는 총 3개이다.

이때, 각각의 대학생 사이에 앉은 고등학생 수는 모두 다르므로 고등학생 6명은 1명, 2명, 3명의 3개의 조로 나누어지고 이때의 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times 10\times 1=60$

3개의 조가 대학생 사이에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

한편, 2명, 3명으로 이루어진 조의 고등학생들이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각

$2!=2,\ 3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times 60\times 6\times 2\times 6=8640$

02

아이 5명을 한 사람으로 생각하여 어른 4명과 함께 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때, 각 경우에 대하여 아이 5명끼리 자리를 바꿀 수 있는데 A, B, C 중 어느 2명도 이웃하지 않아야 하므로 나머지 2명을 일렬로 나열한 후, 그 사이사이에 A, B, C를 한 명씩 앉히면 된다.

이때, 이 경우의 수는

$2!\times 3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times 12=288$

답 288

03

10개의 숫자 중 5개를 택할 때, 홀수의 개수가 2보다 크면 5개의 영역 중 이웃한 영역에 홀수가 적힌 공이 있을 수 밖에 없으므로 택한 5개 중 홀수의 개수는 2 이하이다.

(i) 홀수가 적힌 공을 택하지 않을 때,

짝수 5개 중 5개를 택하는 경우의 수는 1

짝수가 적힌 공 5개를 그릇에 놓는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)!=4!$

즉, 이 경우의 수는

$1\times 4!=4!$

(ii) 홀수가 적힌 공을 1개 택할 때,

홀수 5개 중 1개를 택하고, 짝수 5개 중 4개를 택하는

경우의 수는

$_5C_1 \times {_5C_4} = 5 \times 5 = 25$

5개의 공을 그릇에 놓는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(5-1)! = 4! = 24$

즉, 이 경우의 수는

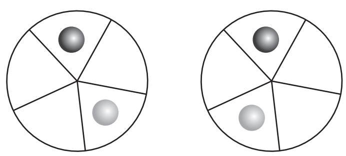
$25 \times 4!$

(iii) 홀수가 적힌 공을 2개 택할 때,

홀수 5개 중 2개를 택하고, 짝수 5개 중 3개 택하는 경우의 수는

$_5C_2 \times {_5C_3} = 10 \times 10 = 100$

이때, 홀수가 적힌 2개의 공이 이웃하지 않게 넣는 경우는 다음 그림과 같이 2가지가 있다.



각 경우에 대하여 나머지 3개의 자리에 짝수가 적힌 공을 놓는 경우의 수는 $3!$

즉, 이 경우의 수는

$100 \times 2 \times 3!$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} 4! + 25 \times 4! + 100 \times 2 \times 3! &= 26 \times 4! + 50 \times 4! \\ &= 76 \times 4! \end{aligned}$$

$\therefore\ n = 76$

답 76

다른풀이

(iii)에서 공을 놓는 경우의 수를 원탁에 둘러앉는 경우의 수로 생각하면 다음과 같이 구할 수도 있다.

홀수 5개 중 2개를 택하고, 짝수 5개 중 3개 택하는 경우의 수는

$_5C_2 \times {_5C_3} = 10 \times 10 = 100$

짝수가 적힌 공 3개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(3-1)! = 2!$

짝수가 적힌 공 사이사이의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 홀수가 적힌 공 2개를 배열하는 경우의 수는

$_3P_2 = 3 \times 2 = 6$

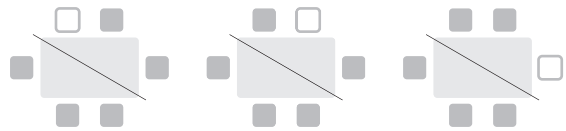
$\therefore\ 100 \times 2! \times 6 = 100 \times 2 \times 3!$

04

A의 자리가 결정되면 B의 자리는 마주 보는 자리로 결정되므로 구하는 경우의 수는 5명을 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore\ (5-1)! = 4! = 24$

이때, 다음 그림과 같이 직사각형 모양의 탁자에는 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$24 \times 3 = 72$

답 72

05

8개의 색 중에서 2개의 색을 선택한 후 합동인 정삼각형을 먼저 칠하는 경우의 수는

$_8C_2 = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

나머지 6개의 색 중에서 3개의 색을 선택하여 위쪽에 있는 등변사다리꼴 3개를 칠하는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$_6C_3 \times (3-1)! = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 2 = 40$ ← 원순열

나머지 3개의 색으로 아래쪽에 있는 등변사다리꼴 3개를 칠하는 경우의 수는

$3! = 6$ ← 원순열 아님

따라서 구하는 경우의 수는

$28 \times 40 \times 6 = 6720$

답 ③

06

(i) 1, 2, 3을 쓴 면이 모두 이웃할 때,

정육면체에서 먼저 1과 2를 이웃하게 배치하면 3이 들어갈 수 있는 경우의 수는 2

이때, 3을 배치한 후 나머지 4, 5, 6을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

$\therefore\ a=2\times3!=12$

(ii) 1, 2를 쓴 면이 이웃할 때,

정육면체는 한 면과 이웃한 면이 4개씩 존재하고 1과 이웃한 한 면에는 2를 써야 하므로 1을 쓴 면과 이웃한 나머지 세 면에 들어갈 숫자를 고르는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

1을 쓴 면과 이웃한 네 개의 면을 원순열로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

$\therefore\ b=4\times6=24$

(i), (ii)에서 $a+b=12+24=36$

답 36

07

4개의 사분원의 영역에 하나씩 놓인 카드에 적힌 수가 각각 1, 2, 3, 4일 때, 4장의 카드에 적힌 수의 합이 최소이고 그 값은

$1+2+3+4=10$

즉, 4개의 사분원의 영역에 놓인 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c, d라 하면

$10\le a+b+c+d\le12$

(i) $a+b+c+d=10$일 때,

사분원의 영역에 1, 2, 3, 4가 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 4장의 카드를 나머지 네 영역에 놓는 경우의 수는

$4!=24$

이때, 직각삼각형의 내부에 놓인 두 장의 카드에 적힌 수의 합은 항상 13 이하이다.

즉, 이 경우의 수는

$6\times24=144$

(ii) $a+b+c+d=11$일 때,

사분원의 영역에 1, 2, 3, 5가 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 4장의 카드를 나머지 네 영역에 놓는 경우의 수는

$4!=24$

이때, 직각삼각형의 내부에 놓인 두 장의 카드에 적힌 수의 합은 항상 13 이하이다.

즉, 이 경우의 수는

$6\times24=144$

(iii) $a+b+c+d=12$일 때,

① 사분원의 영역에 1, 2, 3, 6이 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때, 6, 8이 적힌 카드가 한 직각삼각형의 내부에 놓이게 되면 합이 13을 초과하므로 8이 적힌 카드는 6이 적힌 카드와 다른 직각삼각형에 배치해야 한다.

8을 배치하는 경우의 수는 3

나머지 4, 5, 7을 배치하는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이 경우의 수는

$6\times3\times6=108$

② 사분원의 영역에 1, 2, 4, 5가 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

나머지 4장의 카드를 나머지 네 영역에 놓는 경우의 수는

$4!=24$

이때, 직각삼각형의 내부에 놓인 두 장의 카드에 적힌 수의 합은 항상 13 이하이다.

즉, 이 경우의 수는

$6\times24=144$

①, ②에서 구하는 경우의 수는

$108+44=252$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$144+144+252=540$

답 540

08

각 상자에 담긴 흰 탁구공의 개수가 서로 달라야 하므로 3개의 상자에 담긴 흰 탁구공의 개수를 나타내면

$(0,\ 1,\ 5)$, $(0,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 2,\ 3)$

즉, 흰 탁구공을 담는 경우의 수는 3이다.

이때, 각 상자에 담긴 흰 탁구공의 개수가 모두 다르므로 3개의 상자를 서로 다른 상자로 생각할 수 있다.
서로 다른 종류의 탁구채 5개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3^5=3^6$

답 ③

09

홀수는 중복하여 사용할 수 없으므로 사용하는 홀수의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 홀수를 사용하지 않을 때,
각 자리에는 각각 2, 4, 6이 모두 올 수 있으므로 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같다. 즉,

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(ii) 홀수를 1개 사용할 때,
1, 3, 5의 3개의 홀수에서 사용할 1개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

홀수가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 4
나머지 세 개의 자리에는 각각 2, 4, 6이 모두 올 수 있으므로 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다. 즉,

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times4\times27=324$

(iii) 홀수를 2개 사용할 때,
1, 3, 5의 3개의 홀수에서 사용할 2개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

홀수가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_4P_2=4\times3=12$

나머지 두 개의 자리에는 각각 2, 4, 6이 모두 올 수 있으므로 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다. 즉,

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 이 경우의 자연수의 개수는

$3\times12\times9=324$

(iv) 홀수를 3개 사용할 때,
1, 3, 5의 3개의 홀수를 모두 사용하므로 사용할 홀수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

홀수가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

2, 4, 6의 3개의 짝수에서 나머지 한 자리에 사용할 1개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

즉, 이 경우의 수는

$1\times24\times3=72$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$81+324+324+72=801$

답 801

10

조건 (나)에서 양 끝 자리에 들어가는 숫자의 합이 8이므로 나올 수 있는 경우는 (1, 7), (2, 6), (3, 5), (5, 3), (6, 2), (7, 1)의 6가지이다.
이때, 5자리 비밀번호 중 가운데 세 자리에 사용되는 숫자의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 숫자를 사용하지 않을 때,
구하는 경우의 수는 2개의 서로 다른 기호에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) 숫자를 1개 사용할 때,
사용할 숫자를 고르는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 세 자리 중에서 숫자가 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 2개의 자리에 기호를 나열하는 경우의 수는 2개의 서로 다른 기호에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, 이 경우의 수는

$5\times3\times4=60$

(iii) 숫자를 2개 사용할 때,

사용할 숫자를 고르는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

세 자리 중에서 숫자가 들어갈 두 개의 자리를 정하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

나머지 1개의 자리에 기호를 넣는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

즉, 이 경우의 수는

$10\times6\times2=120$

(iv) 숫자를 3개 사용할 때,

구하는 경우의 수는 5개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

(i)~(iv)에서 비밀번호의 가운데 세 자리를 만드는 경우의 수는

$8+60+120+60=248$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times248=1488$

답 1488

11

1을 네 번 이상 사용하게 되면 1끼리 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용해야 한다.

(i) 1을 사용하지 않을 때,

만의 자리에는 2 하나만 올 수 있고, 나머지 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) 1을 한 번 사용할 때,

① 만의 자리의 수가 1일 때,

나머지 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

② 만의 자리의 수가 2일 때,

1이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 4이고 나머지 세 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 경우의 수는

$4\times{}_2\Pi_3=4\times2^3=32$

①, ②에서 구하는 자연수의 개수는

$16+32=48$

(iii) 1을 두 번 사용할 때,

1□1□□
1□□1□
1□□□1

③ 만의 자리의 수가 1일 때,

1이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 3이고 나머지 세 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$3\times{}_2\Pi_3=3\times2^3=24$

2 1□1□
2□1□1
2 1□□1

④ 만의 자리의 수가 2일 때,

1이 들어갈 자리를 구하는 경우의 수는 3이고 나머지 두 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$3\times{}_2\Pi_2=3\times2^2=12$

③, ④에서 구하는 자연수의 개수는

$24+12=36$

(iv) 1을 세 번 사용할 때, ←1□1□1

나머지 자리에는 0, 2가 모두 올 수 있으므로 구하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$16+48+36+4=104$

답 ⑤

12

집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개 중에서 조건 (나)를 만족시키는 a, b를 구하는 경우의 수는

${}_5P_2=5\times4=20$

집합 X의 두 원소 a, b를 제외한 나머지 3개의 원소를 집합 Y의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, 조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는

$20\times8=160$

조건 (가)를 만족시키지 않는 경우

이때, $f(1)=f(2)$인 함수의 개수를 제외시키면 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.

1, 2를 제외한 집합 X의 원소 중 $f(a)=3$, $f(b)=4$를 만족시키는 a, b를 정하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

집합 X의 두 원소 a, b를 제외한 나머지 원소를 $f(1)=f(2)$가 되도록 집합 Y의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, 조건 (나)를 만족시키면서 조건 (가)를 만족시키지 않는 함수의 개수는

$6\times4=24$

따라서 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수의 개수는

$160-24=136$

답 136

다른풀이

$a=b$인 경우 조건 (나)에 의하여 모순이므로 $a\neq b$이다.

이때, a, b의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) a, b가 집합 X의 원소 1 또는 2일 때,

가능한 경우는 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이므로 그 경우의 수는 2

이때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, 이 경우의 함수의 개수는

$2\times8=16$

(ii) a, b 중 하나만 집합 X의 원소 1 또는 2일 때,

a, b 중 하나만 집합 X의 원소 1, 2 중 하나인 경우의 수는 4

a, b 중 나머지 하나는 집합 X의 원소 3 또는 4 또는 5 중의 하나가 되므로 경우의 수는 3

이때, 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, 이 경우의 함수의 개수는

$4\times3\times8=96$

(iii) a, b가 집합 X의 원소 1 또는 2가 아닐 때,

a, b는 집합 X의 원소 3, 4, 5 중 하나이므로 그 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$ ← a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 3), (5, 4)$

이때, 집합 Y의 원소 1, 2는 집합 X의 원소 1, 2에 대응되어야 하는데 조건 (가)에서 $f(1)\neq f(2)$이므로 $f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(2)=1$, $f(1)=2$의 2가지 경우가 나올 수 있다.

또한, 집합 Y의 원소 1, 2를 집합 X의 나머지 하나의 원소에 대응시키는 경우의 수는 2

즉, 이 경우의 함수의 개수는

$6\times2\times2=24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$16+96+24=136$

13

세 자리 자연수에서 백의 자리에는 0을 제외한 4개가 올 수 있고, 십의 자리, 일의 자리에는 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_2=4\times5^2=100$

이때, 100개의 자연수 중에서 각 자릿수의 개수를 구해 보자.

백의 자리의 수는 1, 2, 3, 4이므로 각각 $\underbrace{25}_{\frac{100}{4}=25}$개씩 존재한다.

즉, 백의 자리의 수의 합은

$(1+2+3+4)\times25\times100=25000$

십의 자리의 수는 0, 1, 2, 3, 4이므로 각각 $\underbrace{20}_{\frac{100}{5}=20}$개씩 존재한다.

즉, 십의 자리의 수의 합은

$(0+1+2+3+4)\times20\times10=2000$

같은 방법으로 일의 자리의 수의 합은

$(0+1+2+3+4)\times20\times1=200$

따라서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 총합은

$a=25000+2000+200=27200$

두 자리 자연수에서 십의 자리에는 0을 제외한 4개가 올 수 있고, 일의 자리에는 5개가 올 수 있으므로 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수는

$4\times5=20$

이때, 20개의 자연수 중에서 각 자릿수의 개수를 구해 보자.

십의 자리의 수는 1, 2, 3, 4이므로 각각 $\underbrace{5}_{\frac{20}{4}=5}$개씩 존재한다.

즉, 십의 자리의 수의 합은

$(1+2+3+4)\times5\times10=500$

일의 자리의 수는 0, 1, 2, 3, 4이므로 각각 4개씩 존재한다.

$\frac{20}{5}=4$

즉, 일의 자리의 수의 합은

$(0+1+2+3+4)\times4\times1=40$

따라서 중복을 허용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 총합은

$b=500+40=540$

$\therefore\ a+b=27200+540=27740$

답 ④

14

4분 음표와 8분 음표의 구성에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 4분 음표 3개로 구성할 때,
♩♩♩를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
1

(ii) 4분 음표 2개와 8분 음표 2개로 구성할 때,
♩♩♪♪를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
$\frac{4!}{2!2!}=6$

(iii) 4분 음표 1개와 8분 음표 4개로 구성할 때,
♩♪♪♪♪를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
$\frac{5!}{4!}=5$

(iv) 8분 음표 6개로 구성할 때,
♪♪♪♪♪♪를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+5+1=13$

답 13

15

수학을 공부하는 3시간을 포함하여 5일 동안 전체 공부 시간의 합계가 12시간이 되도록 공부 계획서를 작성하는 방법은 다음과 같다.

(1, 1, 3, 3, 4), (1, 2, 2, 3, 4),
(1, 2, 3, 3, 3), (2, 2, 2, 3, 3) (가)

(i) (1, 1, 3, 3, 4)일 때,
작성할 수 있는 공부 계획서의 개수는 1, 1, 3, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!2!}=30$

(ii) (1, 2, 2, 3, 4)일 때,
작성할 수 있는 공부 계획서의 개수는 1, 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) (1, 2, 3, 3, 3)일 때,
작성할 수 있는 공부 계획서의 개수는 1, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!}=20$

(iv) (2, 2, 2, 3, 3)일 때,
작성할 수 있는 공부 계획서의 개수는 2, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{5!}{3!2!}=10$ (나)

(i)~(iv)에서 구하는 공부 계획서의 개수는

$30+60+20+10=120$ (다)

답 120

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 조건을 만족시키도록 공부 계획서를 작성하는 방법을 구한 경우	40%
(나)	같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 각각의 경우의 수를 구한 경우	40%
(다)	작성할 수 있는 공부 계획서의 개수를 구한 경우	20%

보충설명

다음과 같이 조건을 만족시키는 경우를 구할 수도 있다.

수학은 반드시 하루 이상 공부해야 하므로 하루를 수학 공부로 고정시켜 놓고 A가 4일 동안 공부 계획서를 작성하는 경우를 먼저 구한 후, 수학을 공부하는 1일을 포함시키면 된다.

A가 4일 동안 국어를 p일, 영어를 q일, 수학을 r일, 과학을 s일 공부한다고 하면

$p+q+r+s=4$ ……㉠

이때, 공부하는 시간의 총합은 $12-3=9$시간이므로

$p+2q+3r+4s=9$ ……㉡

㉡−㉠을 하면

$q+2r+3s=5$

위의 식을 만족시키는 p, q, r, s의 값을 각각 구한 후, r 대신

$r+1$을 대입하여 풀 수 있다.
예를 들어, $p=1$, $q=1$, $r=2$, $s=0$일 때 r 대신 $r+1$을 대입하면 p, q, r, s의 값은 각각 $p=1$, $q=1$, $r=3$, $s=0$이다.
이 경우 작성할 수 있는 공부 계획서의 개수는
(국어, 영어, 수학, 수학, 수학)을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{5!}{3!}=20$
나머지 경우도 같은 방법으로 계산할 수 있다.

16

집합 X의 원소의 개수는 1, 2, 2, 2, 3, 4 중에서 4개를 택하여 만든 네 자리 자연수의 개수와 같으므로 2를 택하는 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 2를 한 개 택할 때,
1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
$4!=24$

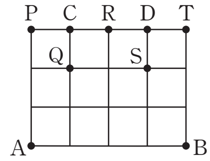
(ii) 2를 두 개 택할 때,
2, 2, ■, ▲ 꼴로 택할 때, 1, 3, 4 중에서 ■, ▲에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
이때, 2, 2, ■, ▲를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{2!}=12$
따라서 구하는 경우의 자연수의 개수는
$3\times12=36$

(iii) 2를 세 개 택할 때,
2, 2, 2, ■ 꼴로 택할 때, 1, 3, 4 중에서 ■에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
이때, 2, 2, 2, ■를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}=4$
따라서 구하는 경우의 자연수의 개수는
$3\times4=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 원소의 개수는
$24+36+12=72$

답 ④

17



오른쪽 그림과 같이 다섯 지점 P, Q, R, S, T를 잡자.

(i) C지점을 지날 때,
① A → P → C → B로 가는 경우의 수는
$1\times1\times\dfrac{6!}{3!3!}=20$
② A → Q → C → R → B로 가는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}\times1\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=30$
①, ②에서 구하는 경우의 수는
$20+30=50$

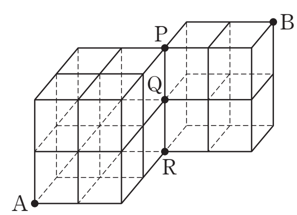
(ii) D지점을 지날 때,
③ A → R → D → B로 가는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!3!}\times1\times\dfrac{4!}{3!}=40$
④ A → S → D → T → B로 가는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!2!}\times1\times1\times1=10$
③, ④에서 구하는 경우의 수는
$40+10=50$

(iii) C, D 지점을 모두 지날 때,
A → C → D → B로 가는 경우의 수는
$\dfrac{4!}{3!}\times1\times\dfrac{4!}{3!}=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$50+50-16=84$

답 84

18



A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡을 때, P, Q, R 중 한 지점을 지나야 한다.
이때, 가로 방향으로 한 칸 가는 것을 a, 세로 방향으로 한 칸 가는 것을 b, 높이 방향으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

구하는 경우의 수는 $A \to P \to B$, $A \to Q \to B$, $A \to R \to B$로 가는 경우의 수를 모두 더한 후 $A \to Q \to P \to B$, $A \to R \to Q \to B$로 가는 경우의 수를 모두 빼서 구할 수 있다.

(i) P지점을 지날 때,

$A \to P$로 가는 경우의 수는 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

$P \to B$로 가는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{3!}{2!}=3$

즉, 이 경우의 수는

$90 \times 3=270$

(ii) Q지점을 지날 때,

$A \to Q$로 가는 경우의 수는 5개의 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

$Q \to B$로 가는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!}=12$

즉, 이 경우의 수는

$30 \times 12=360$

(iii) R지점을 지날 때,

$A \to R$로 가는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

$R \to B$로 가는 경우의 수는 5개의 문자 a, a, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$

즉, 이 경우의 수는

$6 \times 30=180$

(iv) P, Q 지점을 모두 지날 때,

$A \to Q \to P \to B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!} \times 1 \times \dfrac{3!}{2!}=90$

(v) R, Q 지점을 모두 지날 때,

$A \to R \to Q \to B$로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!} \times 1 \times \dfrac{4!}{2!}=72$

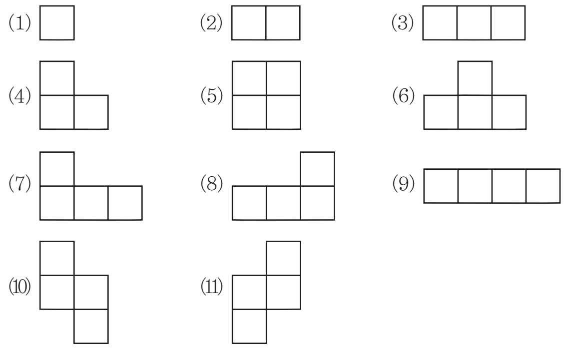
(i)~(v)에서 구하는 최단 거리로 가는 경우의 수는

$270+360+180-(90+72)=648$

답 648

19

위에서 내려다 볼 때 보이는 모양은 다음과 같다.



위에서 내려다 볼 때 보이는 정사각형의 개수에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 정사각형의 개수가 1일 때,

나올 수 있는 모양은 (1)이고 이것은 서로 다른 4개의 정육면체에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1=4$

(ii) 정사각형의 개수가 2일 때,

나올 수 있는 모양은 (2)이고 이것은 서로 다른 4개의 정육면체에서 2개를 택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

이때, 회전하면 같은 것이 2개씩 나오므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_2 \times 2! \times \dfrac{1}{2}=6$

(iii) 정사각형의 개수가 3일 때,

나올 수 있는 모양은 (3), (4)이다.

(3)은 서로 다른 4개의 정육면체에서 3개를 택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

이때, 회전하면 같은 것이 2개씩 나오므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_3 \times 3! \times \frac{1}{2} = 12$

(4)는 서로 다른 4개의 정육면체에서 3개를 택한 후 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_3 \times 3! = 24$

즉, 이 경우의 수는

$12 + 24 = 36$

(iv) 정사각형의 개수가 4일 때,

나올 수 있는 모양은 (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11)이다.

(5)는 서로 다른 4개의 정육면체를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)! = 3! = 6$

(6), (7), (8)은 서로 다른 4개의 정육면체를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3 \times 4! = 72$

(9), (10), (11)은 서로 다른 4개의 정육면체를 나열하는 경우의 수와 같다.

이때, 회전하면 같은 것이 2개씩 나오므로 구하는 경우의 수는

$3 \times \left(4! \times \frac{1}{2}\right) = 36$

즉, 이 경우의 수는

$6 + 72 + 36 = 114$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$4 + 6 + 36 + 114 = 160$

답 160

20

스티커 A는 회전하면 모두 일치하고, 스티커 B, C, E는 회전하면 모두 모양이 다르다.

또한, 스티커 D는 회전하면 모양이 다른 경우가 2가지이다.

이때, 중앙에 어떤 스티커를 붙이냐에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 중앙에 스티커 A를 붙일 때,

나머지 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)! = 3! = 6$

각각의 스티커가 회전하여 다른 경우의 수는

$4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$

즉, 이 경우의 서로 다른 문양의 개수는

$6 \times 128 = 768$

(ii) 중앙에 스티커 B 또는 C 또는 E를 붙일 때,

중앙에 스티커 B 또는 C 또는 E를 붙이면 네 방향이 서로 다른 모양이므로 나머지 4개를 붙이는 경우의 수는

$4! = 24$

각각의 모양에서 회전하여 다른 경우의 수는

$1 \times 4 \times 4 \times 2 = 32$

즉, 이 경우의 서로 다른 문양의 개수는

$3 \times 24 \times 32 = 2304$

(iii) 중앙에 스티커 D를 붙일 때,

중앙에 스티커 D를 붙이면 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 생기므로 나머지 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는

$\frac{4!}{2} = 12$

각각의 스티커가 회전하여 다른 경우의 수는

$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$

즉, 이 경우의 서로 다른 문양의 개수는

$12 \times 64 = 768$

(i), (ii), (iii)에서 서로 다른 문양의 개수는

$768 + 2304 + 768 = 3840$

답 3840

다른풀이

중앙에 스티커 A, B, C, D, E 중에서 하나를 붙이는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

나머지 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는

$(4-1)! = 3! = 6$

한편, 스티커 A, B, C, D, E가 회전하여 다른 경우의 수는 각각 1, 4, 4, 2, 4이므로

구하는 경우의 수는 $5 \times 6 \times 1 \times 4^3 \times 2 = 3840$

21

조건 (나)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2 이하이므로 다음과 같이 치역의 원소의 개수가 1일 때와 2일 때로 경우를 나눌 수 있다.

(i) 치역의 원소가 1개일 때,

$(f \circ f)(5) = 5$이므로 함수 f는 $f(x) = 5$로 1개이다.

(ii) 치역의 원소가 2개일 때,

$f(5)=5$인 경우와 $f(5)\neq5$인 경우로 나누면 다음과 같다.

① $f(5)=5$일 때,

치역에서 5를 제외한 다른 원소를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

정의역 X에서 5를 제외한 나머지 4개의 원소는 치역의 원소 2개 중 하나에 대응되어야 하고 이것은 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때, 정의역 X의 원소가 모두 5에 대응하게 되면 치역의 원소의 개수가 1이 되어 조건에 모순이다.

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times(16-1)=60$

② $f(5)=k$ ($k\neq5$인 자연수)일 때,

k는 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

조건 ㈎에 의하여 $f(5)=k$이면

$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(k)=5$이고 조건 ㈏에 의하여 함수 f의 치역은 $\{k,\ 5\}$이다.

이때, 정의역 X에서 k, 5를 제외한 나머지 3개의 원소를 치역의 원소 k, 5에 대응시키는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times8=32$

①, ②에서 구하는 함수 f의 개수는

$60+32=92$

(i), (ii)에서 구하는 함수 $f:X\longrightarrow X$의 개수는

$1+92=93$

답 93

22

a_1부터 a_p, a_q부터 a_9까지는 커지고 a_p부터 a_q까지는 작아지므로 a_1과 a_q 중에 최솟값인 1이 있어야 하고 a_p와 a_9 중에 최댓값인 9가 있어야 한다.

이때, $a_1=2$이므로 $a_q=1$이고 $a_p=8$이므로 $a_9=9$이다.

a_1부터 $a_p=8$까지를 A묶음, $a_p=8$부터 $a_q=1$까지를 B묶음, $a_q=1$부터 $a_9=9$까지를 C묶음이라 하면 A, B, C의 묶음 안에 있는 순서가 정해져 있으므로 A, B, C의 묶음에 수를 배정하면 된다.

즉, 남은 3, 4, 5, 6, 7이 적혀 있는 공 5개가 각각 A, B, C의 묶음을 택하는 경우의 수와 같다.

이것은 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

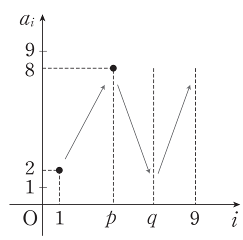
답 243

보충설명

i를 x축으로, a_i를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하면 $a_1=2$는 점 $(1,\ 2)$로, $a_p=8$은 점 $(p,\ 8)$로 나타낼 수 있다.

두 조건 ㈎, ㈐에 의하여 $1\le i<p$, $q\le i<9$에서 a_i는 증가하고, 조건 ㈏에 의하여 $p\le i<q$에서 a_i는 감소한다.

이것을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, a_q는 최솟값을 갖고, a_9는 최댓값을 가져야 하므로 $a_q=1$, $a_9=9$이어야 한다.

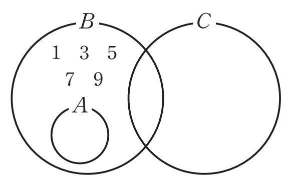
23

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 두 조건 ㈏, ㈐에서

$$\begin{aligned}(A^C\cup B^C)\cap C^C&=(A\cap B)^C\cap C^C\\&=A^C\cap C^C\\&=(A\cup C)^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\end{aligned}$$

$\therefore\ A\cup C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

또한, 두 조건 ㈎, ㈏에서 $S=B\cup C$이고, $A\cap C=\varnothing$이므로 세 집합 A, B, C를 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



이때, A, C는 공집합이 아니므로

$n(A)\neq 0$, $n(C)\neq 0$

(i) $n(A)=1$, $n(C)=3$일 때,

집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

한편, $B\neq S$이므로 집합 $B\cap C$의 원소의 개수로는 0, 1, 2가 나올 수 있고, 집합 $B\cap C$는 집합 C의 진부분집합이므로

${}_2\Pi_3-\underbrace{1}_{B=S\text{인 경우}}=2^3-1=7$

즉, 이 경우의 수는

$4\times 7=28$

(ii) $n(A)=2$, $n(C)=2$일 때,

집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$

한편, $B\neq S$이므로 집합 $B\cap C$의 원소의 개수로는 0, 1이 나올 수 있고, 집합 $B\cap C$는 집합 C의 진부분집합이므로

${}_2\Pi_2-\underbrace{1}_{B=S\text{인 경우}}=2^2-1=3$

즉, 이 경우의 수는

$6\times 3=18$

(iii) $n(A)=3$, $n(C)=1$일 때,

집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

한편, $B\neq S$이므로 집합 $B\cap C$의 원소는 없다.

즉, 이 경우의 수는 4

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$28+18+4=50$

답 50

보충설명

(i)에서 구한 집합 $B\cap C$의 원소를 모두 나열하면 다음과 같다.

$A=\{2\}$일 때 $C=\{4,\ 6,\ 8\}$이므로

$B\cap C=\varnothing,\ \{4\},\ \{6\},\ \{8\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 8\},\ \{6,\ 8\},\ \{4,\ 6,\ 8\}$

이때, $B\cap C=\{4,\ 6,\ 8\}$인 경우 $B=S$가 되어 조건에 모순이므로 성립하지 않는다.

따라서 $n(A)=1$일 때 구하는 경우의 수는

$4\times 7=28$

유형연습 02 중복조합과 이항정리

본문 pp.46~62

01-1 1120	**01-2** 78	**01-3** 51
02-1 (1) 24 (2) 500		**02-2** 8
02-3 1	**03-1** (1) 55 (2) 35	**03-2** 16
03-3 216	**04-1** 9	**04-2** 216
04-3 109	**05-1** 18	**05-2** 48
05-3 148	**06-1** 1008	**06-2** 360
06-3 130	**07-1** 21	**07-2** 120
07-3 220	**08-1** (1) -267 (2) 135 (3) 16	
08-2 2	**08-3** 160	**09-1** -2
09-2 3	**09-3** 160	
10-1 (1) 11 (2) 49 (3) 8		**10-2** 1024
10-3 10		

01-1

같은 종류의 우유 3병을 4명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

같은 종류의 주스 5병을 4명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times 56=1120$

답 1120

01-2

A가 이미 5표를 얻은 것으로 가정하고, 나머지 11표는 4명의 후보자 중 A를 제외한 나머지 3명이 얻은 것으로 생각하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 11개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{11}={}_{3+11-1}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_2=\dfrac{13\times 12}{2\times 1}=78$

답 78

01-3

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하고 순서쌍 (x, y, z)로 나타내면

$(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$

(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$일 때,

배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_2$, ${}_2H_2$이고, 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외시켜야 한다.

즉, 이 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_2H_2\times{}_2H_2-2&={}_{2+2-1}C_2\times{}_{2+2-1}C_2-2\\&={}_3C_2\times{}_3C_2-2={}_3C_1\times{}_3C_1-2\\&=3\times3-2=7\end{aligned}$$

이때, $(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(x, y, z)=(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$일 때,

사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_1$, ${}_2H_1$, ${}_2H_2$이고, 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외시켜야 한다.

즉, 이 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_2H_1\times{}_2H_1\times{}_2H_2-2&={}_{2+1-1}C_1\times{}_{2+1-1}C_1\times{}_{2+2-1}C_2-2\\&={}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_2-2\\&={}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1-2\\&=2\times2\times3-2=10\end{aligned}$$

이때, $(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(x, y, z)=(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

답 51

보충설명

사과, 배, 귤을 선택하는 개수를 각각 x, y, z라 하고 2명의 학생을 각각 A, B라 하자. 이때, 과일을 받지 못하는 학생은 없고 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.

(i) $(x, y, z)=(0, 2, 2)$일 때,

학생 A가 받는 배와 귤의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$

이므로 경우의 수는 7이다.

이때, $(x, y, z)=(2, 0, 2)$, $(x, y, z)=(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x, y, z)=(1, 1, 2)$일 때,

학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$

이므로 경우의 수는 10이다.

이때, $(x, y, z)=(1, 2, 1)$, $(x, y, z)=(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

02-1

(1) $(x-y-z)^2$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

$(a+2b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$6\times4=24$

(2) $(x+y)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

$(p+q+r)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

$(a+b+c+d)^2$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$5\times10\times10=500$

답 (1) 24 (2) 500

02-2

$(x+y+z+w)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같고 이 값이 165이므로

${}_4\mathrm{H}_n=165$

이때, ${}_4\mathrm{H}_n={}_{4+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$이므로

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\times2\times1}=165$$

$(n+3)(n+2)(n+1)=990=11\times10\times9$

$\therefore\ n=8$ ($\because$ n은 자연수)

답 8

02-3

$(a+b+c+d)^9$의 전개식에서 문자 d가 포함되지 않는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 (d를 제외한 3개의 문자 a, b, c)

$${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$$

$\therefore\ p=55$ ……㉠

한편, $(a+b+c+d)^9$의 전개식에서 문자 d의 차수가 4 이상인 항은 $a^xb^yc^zd^w$($x+y+z+w=9$, x, y, z는 음이 아닌 정수, w는 4 이상의 자연수) 꼴이다.

$w=w'+4$ (w'은 음이 아닌 정수)라 하면

$x+y+z+w=9$에서 $x+y+z+(w'+4)=9$

$\therefore\ x+y+z+w'=5$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w'의 순서쌍 (x, y, z, w')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

$\therefore\ q=56$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $q-p=56-55=1$

답 1

다른풀이

$(a+b+c+d)^9$의 전개식에서 문자 d의 차수가 4 이상인 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c+d)^9$의 전개식의 서로 다른 항의 개수에서 문자 d의 차수가 3 이하인 서로 다른 항의 개수를 빼서 구할 수 있다.

(i) $(a+b+c+d)^9$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_9={}_{4+9-1}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

(ii) $(a+b+c+d)^9$의 전개식에서 문자 d의 차수가 0, 1, 2, 3인 서로 다른 항의 개수는 각각 $(a+b+c)^9$, $(a+b+c)^8$, $(a+b+c)^7$, $(a+b+c)^6$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_9+{}_3\mathrm{H}_8+{}_3\mathrm{H}_7+{}_3\mathrm{H}_6$$
$$={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9+{}_{3+8-1}\mathrm{C}_8+{}_{3+7-1}\mathrm{C}_7+{}_{3+6-1}\mathrm{C}_6$$
$$={}_{11}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_8+{}_9\mathrm{C}_7+{}_8\mathrm{C}_6$$
$$={}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_2$$
$$=\frac{11\times10}{2\times1}+\frac{10\times9}{2\times1}+\frac{9\times8}{2\times1}+\frac{8\times7}{2\times1}$$
$$=55+45+36+28=164$$

(i), (ii)에서 $q=220-164=56$

03-1

(1) $x=2x'+2$, $y=2y'+2$, $z=2z'+2$

(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

라 하면 $x+y+z=24$에서 $2(x'+y'+z')+6=24$

$2(x'+y'+z')=18$ $\quad\therefore\ x'+y'+z'=9$

방정식 $x'+y'+z'=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$$

(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$

(단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x+y+z+w\le7$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)\le7$

$\therefore\ x'+y'+z'+w'\le3$ ……㉠

㉠을 만족시키는 경우는 $x'+y'+z'+w'=0$ 또는 $x'+y'+z'+w'=1$ 또는 $x'+y'+z'+w'=2$ 또는 $x'+y'+z'+w'=3$

(i) $x'+y'+z'+w'=0$일 때,

음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는 $(0, 0, 0, 0)$의 1이다.

(ii) $x'+y'+z'+w'=1$일 때,

음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_1={}_{4+1-1}C_1={}_4C_1=4$

(iii) $x'+y'+z'+w'=2$일 때,

음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(iv) $x'+y'+z'+w'=3$일 때,

음이 아닌 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$1+4+10+20=35$

답 (1) 55 (2) 35

다른풀이 1

(1) $x=2x'$, $y=2y'$, $z=2z'$ (x', y', z'은 자연수)이라 하면 $x+y+z=24$에서

$2x'+2y'+2z'=24 \qquad \therefore\ x'+y'+z'=12$

방정식 $x'+y'+z'=12$를 만족시키는 자연수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$$

(2) ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이므로 ㉠에서

$${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+{}_4H_3={}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3$$
$$=(\underbrace{{}_4C_0+{}_4C_1}_{={}_5C_1})+{}_5C_2+{}_6C_3 \quad (\because\ {}_3C_0={}_4C_0)$$
$$=(\underbrace{{}_5C_1+{}_5C_2}_{={}_6C_2})+{}_6C_3={}_6C_2+{}_6C_3$$
$$={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

다른풀이 2

(2) 부등식 $x+y+z+w\le7$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 방정식 $x+y+z+w+\delta=7$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w와 음이 아닌 정수 δ의 순서쌍 (x, y, z, w, δ)의 개수와 같다.

이때, $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$

(단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

이라 하면

$x+y+z+w+\delta=7$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)+\delta=7$

$\therefore\ x'+y'+z'+w'+\delta=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z', w', δ의 순서쌍 (x', y', z', w', δ)의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

보충설명

(1) 보통 자연수 범위에서 짝수는 $2n$, 홀수는 $2n-1$ (n은 자연수)로 나타내지만 중복조합을 이용할 때에는 변수의 범위가 음이 아닌 정수이어야 하므로 짝수를 $2n+2$, 홀수는 $2n+1$ (n은 음이 아닌 정수)로 나타내는 것이 편리하다.

03-2

x, y가 음이 아닌 정수가 되는 $\underbrace{z\text{의 값은 } 0,\ 3,\ 6,\ 9}_{3x+3y\text{의 값은 3의 배수이므로}}$이므로 z의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $z=0$일 때,

$3x+3y+2z=18$에서

$3(x+y)=18 \qquad \therefore\ x+y=6$

방정식 $x+y=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_6={}_{2+6-1}C_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) $z=3$일 때,

$3x+3y+2z=18$에서

$3(x+y)=12 \qquad \therefore\ x+y=4$

방정식 $x+y=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(iii) $z=6$일 때,

$3x+3y+2z=18$에서

$3(x+y)=6 \qquad \therefore\ x+y=2$

방정식 $x+y=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

(iv) $z=9$일 때,

$3x+3y+2z=18$에서

$3(x+y)=0 \qquad \therefore\ x+y=0$

방정식 $x+y=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $(0,\ 0)$의 1이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$7+5+3+1=16$

답 16

풀이첨삭

$z=3N$ (N은 음이 아닌 정수)일 때, $3x+3y+2z=18$에서 $x+y+2N=6$ 꼴이 되어 정수 N의 값에 따라 방정식의 해의 개수를 구할 수 있다.

z가 3의 배수가 아닌 수, 예를 들어 $z=1$이면 $3x+3y+2z=18$에서 $3(x+y)=16$이므로 방정식 $x+y=\frac{16}{3}$을 만족시키는 정수 x, y의 값은 존재하지 않는다.

03-3

조건 (나)에서 $a\times b\times c=6^7=2^7\times 3^7$이므로

$a=2^{A_1}\times 3^{A_2}$, $b=2^{B_1}\times 3^{B_2}$, $c=2^{C_1}\times 3^{C_2}$이라 하면

$A_1+B_1+C_1=7$, $A_2+B_2+C_2=7$

이때, 조건 (가)에서 a, b는 짝수이므로 A_1, B_1은 자연수이고 A_2, B_2는 음이 아닌 정수이다.

또한, c는 홀수이므로 $C_1=0$이고 C_2는 음이 아닌 정수이다. 즉, A_1, B_1은 자연수이고 $C_1=0$이므로

$A_1=A_1'+1$, $B_1=B_1'+1$ (A_1', B_1'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $A_1+B_1+C_1=7$에서

$(A_1'+1)+(B_1'+1)=7$ ($\because\ C_1=0$)

$\therefore\ A_1'+B_1'=5$

방정식 $A_1'+B_1'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A_1', B_1'의 순서쌍 $(A_1',\ B_1')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

방정식 $A_2+B_2+C_2=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A_2, B_2, C_2의 순서쌍 $(A_2,\ B_2,\ C_2)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times 8}{2\times 1}=36$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$6\times 36=216$

답 216

04-1

$x\ge 1$, $y\ge 1$이므로

$x=x'+1$, $y=y'+1$ (x', y'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$x+y+2z=8$에서 $(x'+1)+(y'+1)+2z=8$

$\therefore\ x'+y'+2z=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때, z의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $z=1$일 때, ㉠에서 $x'+y'=4$

방정식 $x'+y'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y'의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) $z=2$일 때, ㉠에서 $x'+y'=2$

방정식 $x'+y'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y'의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

(iii) $z=3$일 때, ㉠에서 $x'+y'=0$

방정식 $x'+y'=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y'의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 $(0,\ 0)$의 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$5+3+1=9$

답 9

04-2

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=13$ (단, $a\le9$, $b\le9$, $c\le9$, $d\le9$인 자연수)

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

(단, a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=13$

$\therefore\ a'+b'+c'+d'=9$

(단, $a'\le8$, $b'\le8$, $c'\le8$, $d'\le8$인 음이 아닌 정수)

방정식 $a'+b'+c'+d'=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

이때, a', b', c', d'은 모두 8 이하의 음이 아닌 정수이므로 $(9, 0, 0, 0)$, $(0, 9, 0, 0)$, $(0, 0, 9, 0)$, $(0, 0, 0, 9)$의 4가지 경우는 제외시켜야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$220-4=216$

답 216

04-3

조건 (가)에서 $a+b+c=2d+7$ ······㉠

조건 (나)에서 $d\le2$인 음이 아닌 정수이므로 d의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $d=0$일 때,

㉠에서 $a+b+c=7$이고, 조건 (나)의 $c\ge d+1$에서 $c\ge1$이므로 $c=c'+1$ (c'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$a+b+(c'+1)=7$ $\quad\therefore\ a+b+c'=6$

방정식 $a+b+c'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍 (a, b, c')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

(ii) $d=1$일 때,

㉠에서 $a+b+c=9$이고, 조건 (나)의 $c\ge d+1$에서 $c\ge2$이므로 $c=c'+2$ (c'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+(c'+2)=9$ $\quad\therefore\ a+b+c'=7$

방정식 $a+b+c'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍 (a, b, c')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

(iii) $d=2$일 때,

㉠에서 $a+b+c=11$이고, 조건 (나)의 $c\ge d+1$에서 $c\ge3$이므로 $c=c'+3$ (c'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$a+b+(c'+3)=11$ $\quad\therefore\ a+b+c'=8$

방정식 $a+b+c'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c'의 순서쌍 (a, b, c')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$28+36+45=109$

답 109

05-1

각 주머니에 넣는 사탕의 개수를 x, y, z라 하면

$x+y+z=7$ (단, x, y, z는 음이 아닌 정수)

방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

이때, 각 주머니에 넣는 사탕의 개수의 최댓값은 4이므로

$x\le4$, $y\le4$, $z\le4$

즉, x, y, z 중에서 어느 하나라도 5 이상인 경우는 제외시켜야 한다.

x가 5 이상인 경우의 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는 $(5, 2, 0)$, $(5, 0, 2)$, $(5, 1, 1)$, $(6, 1, 0)$, $(6, 0, 1)$, $(7, 0, 0)$의 6개이고 y 또는 z가 5 이상인 경우도 마찬가지이므로 경우의 수는

$3\times6=18$

따라서 구하는 방법의 수는

$36-18=18$

답 18

다른풀이

같은 종류의 사탕 7개를 4 이하의 개수로 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

(4개, 3개, 0개)인 경우의 수는 $3!=6$

(4개, 2개, 1개)인 경우의 수는 $3!=6$

(3개, 3개, 1개)인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(3개, 2개, 2개)인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 방법의 수는

$6+6+3+3=18$

05-2

필통에 넣는 볼펜의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 필통 하나에 볼펜 2자루를 모두 넣을 때,

세 개의 필통에서 볼펜을 넣을 필통을 고르는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이때, 빈 필통이 없어야 하므로 볼펜을 넣지 않은 2개의 필통에 샤프를 각각 1자루씩 넣어야 한다.

남은 샤프 2자루를 세 개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

즉, 이 경우의 수는

$3\times6=18$

(ii) 필통 두 개에 볼펜을 1자루씩 넣을 때,

세 개의 필통에서 볼펜을 넣을 두 개의 필통을 고르는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때, 빈 필통이 없어야 하므로 볼펜을 넣지 않은 남은 필통에 샤프를 1자루 넣어야 한다.

남은 샤프 3자루를 세 개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

즉, 이 경우의 수는

$3\times10=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$18+30=48$

답 48

05-3

세 명의 학생 A, B, C가 받는 연필의 개수를 각각 a_1, b_1, c_1, 지우개의 개수를 각각 a_2, b_2, c_2라 하면

$a_1+b_1+c_1=7$, $a_2+b_2+c_2=4$

(단, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2는 음이 아닌 정수)

이때, 두 조건 ㈎, ㈏에서 학생 A는 연필을 2개 이상, 학생 B는 지우개를 1개 이상 받으므로

$a_1=a_1'+2$, $b_2=b_2'+1$ (a_1', b_2'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$a_1'+b_1+c_1=5$, $a_2+b_2'+c_2=3$ ……㉠

방정식 $a_1'+b_1+c_1=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1, c_1의 순서쌍 $(a_1',\ b_1,\ c_1)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

방정식 $a_2+b_2'+c_2=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2', c_2의 순서쌍 $(a_2,\ b_2',\ c_2)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

즉, ㉠을 만족시키는 해의 개수는

$21\times10=210$

이때, 조건 ㈐에서 학생 C가 받는 연필과 지우개의 개수의 합은 2 이상이어야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하거나 연필 또는 지우개를 1개 받는 경우는 제외시켜야 한다.

(i) 학생 C가 아무것도 받지 못할 때,

㉠에서

$a_1'+b_1=5$, $a_2+b_2'=3$ ($\because c_1=c_2=0$) ……㉡

방정식 $a_1'+b_1=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1의 순서쌍 $(a_1',\ b_1)$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

방정식 $a_2+b_2'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2'의 순서쌍 $(a_2,\ b_2')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

즉, ㉡을 만족시키는 해의 개수는

$6\times4=24$

(ii) 학생 C가 연필 1개만 받을 때,

㉠에서

$a_1'+b_1=4,\ a_2+b_2'=3\ (\because\ c_1=1,\ c_2=0)$ ……㉢

방정식 $a_1'+b_1=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1의 순서쌍 $(a_1',\ b_1)$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

방정식 $a_2+b_2'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2'의 순서쌍 $(a_2,\ b_2')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

즉, ㉢을 만족시키는 해의 개수는

$5\times4=20$

(iii) 학생 C가 지우개 1개만 받을 때,

㉠에서

$a_1'+b_1=5,\ a_2+b_2'=2\ (\because\ c_1=0,\ c_2=1)$ ……㉣

방정식 $a_1'+b_1=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1의 순서쌍 $(a_1',\ b_1)$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

방정식 $a_2+b_2'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2'의 순서쌍 $(a_2,\ b_2')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

즉, ㉣을 만족시키는 해의 개수는

$6\times3=18$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$210-(24+20+18)=210-62=148$

답 148

06-1

$f(2)f(3)=4$를 만족시키는 함숫값 $f(2)$, $f(3)$의 순서쌍 $(f(2),\ f(3))$의 개수는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 3이다.
또한, $f(4)\le f(5)\le f(6)$을 만족시키는 함숫값 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 공역 X의 서로 다른 6개의 원소에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이때, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 6

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times56\times6=1008$

답 1008

06-2

조건 ㈎에서 a가 홀수이면 $af(a)$는 짝수이므로 $f(a)$는 짝수이다.
또한, 조건 ㈏에서 b가 짝수이면 $b+f(b)$는 짝수이므로 $f(b)$는 짝수이다.
즉, 치역의 원소는 모두 짝수이다. ……㉠
이때, 조건 ㈐에서 $f(1)+f(2)=8$인 함숫값 $f(1)$, $f(2)$의 순서쌍 $(f(1),\ f(2))$의 개수는 $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$의 3이다.
조건 ㈑에서 $3\le x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 $f(3)$, $f(4)$, $\cdots$, $f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 4개의 원소 2, 4, 6, 8에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ∵ 조건 ㉠

$${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3\times120=360$

답 360

06-3

조건 ㈎에서 $f(1)+f(4)=8$인 함숫값 $f(1)$, $f(4)$의 순서쌍 $(f(1),\ f(4))$는 $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$이다.
이때, 조건 ㈏에서 $x_1<x_2\le4$이면 $f(x_1)\ge f(x_2)$이므로 가능한 $f(1)$, $f(4)$의 순서쌍 $(f(1),\ f(4))$는 $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$의 3가지이다.

(i) $f(1)=4,\ f(4)=4$일 때,

조건 ㈏에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$

이때, $f(1)=f(4)=4$이므로 $4\ge f(2)\ge f(3)\ge4$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1이다.

또한, $f(5)\le 4$, $f(6)\le 4$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 4개의 원소 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times 16=16$

(ii) $f(1)=5$, $f(4)=3$일 때,

조건 (나)에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$

이때, $f(1)=5$, $f(4)=3$이므로 $5\ge f(2)\ge f(3)\ge 3$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 3개의 원소 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

또한, $f(5)\le 3$, $f(6)\le 3$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 3개의 원소 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$6\times 9=54$

(iii) $f(1)=6$, $f(4)=2$일 때,

조건 (나)에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$

이때, $f(1)=6$, $f(4)=2$이므로 $6\ge f(2)\ge f(3)\ge 2$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 5개의 원소 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$

또한, $f(5)\le 2$, $f(6)\le 2$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 2개의 원소 1, 2에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$15\times 4=60$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$16+54+60=130$

답 130

보충설명

(ii)에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 중 3개의 원소 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후, 작은 수부터 차례대로 $f(3)$, $f(2)$에 대응시키면 되므로 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
$f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $f(5)$, $f(6)$을 각각 공역 X의 원소 중 3개의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
(i), (iii)도 같은 방법으로 이해할 수 있다.

07-1

$3\le a<b\le c<d\le e\le 7$에서 c의 최솟값은 4이고 최댓값은 6이므로 c의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $c=4$일 때,

$3\le a<b\le 4<d\le e\le 7$에서 a, b를 정하는 경우의 수는 $a=3$, $b=4$의 1이다.

이때, d, e를 정하는 경우의 수는 3개의 숫자 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$1\times 6=6$

(ii) $c=5$일 때,

$3\le a<b\le 5<d\le e\le 7$에서 a, b를 정하는 경우의 수는 3개의 숫자 3, 4, 5 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때, d, e를 정하는 경우의 수는 2개의 숫자 6, 7 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$3\times 3=9$

(iii) $c=6$일 때,

$3\le a<b\le 6<d\le e\le 7$에서 a, b를 정하는 경우의 수는 4개의 숫자 3, 4, 5, 6 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

이때, d, e를 정하는 경우의 수는 $d=e=7$의 1이다.
즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는
$6\times1=6$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$6+9+6=21$

답 21

07-2

조건 ㈎에서 $a\times b\times c\times d\times e$는 홀수이므로 a, b, c, d, e는 모두 홀수이다.
이때, 조건 ㈏의 $a<b<8$에서 1부터 8까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개가 있다.
두 홀수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로
$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$
이 각각에 대하여 조건 ㈏의 $8\le c\le d\le e<16$에서 8부터 16까지의 자연수 중 홀수는 9, 11, 13, 15의 4개가 있다.
세 홀수 c, d, e의 순서쌍 $(c,\ d,\ e)$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는
$6\times20=120$

답 120

07-3

조건 ㈎에서 $n=1$, 2일 때, $x_{n+1}-x_n\ge n+1$이므로
$x_2-x_1\ge2$, $x_3-x_2\ge3$ $\quad\therefore$ $x_1\le x_2-2$, $x_2\le x_3-3$
조건 ㈏에서 $x_3\le14$이므로
$0\le x_1\le x_2-2\le x_3-5\le9$
이때, $x_2'=x_2-2$, $x_3'=x_3-5$ (x_2', x_3'은 음이 아닌 정수)라 하면
$0\le x_1\le x_2'\le x_3'\le9$
$0\le x_1\le x_2'\le x_3'\le9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3'의 순서쌍 $(x_1,\ x_2',\ x_3')$의 개수는 서로 다른 10개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_{10}H_3={}_{10+3-1}C_3={}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

답 220

다른풀이 1

조건 ㈎에서 $n=1$, 2일 때, $x_{n+1}-x_n\ge n+1$이므로
$x_2-x_1\ge2$, $x_3-x_2\ge3$ $\quad\therefore$ $x_2\ge x_1+2$, $x_3\ge x_2+3$
조건 ㈏에서 $x_3\le14$이므로
$5\le x_1+5\le x_2+3\le x_3\le14$
이때, $x_1'=x_1+5$, $x_2'=x_2+3$ (x_1', x_2'은 음이 아닌 정수)이라 하면
$5\le x_1'\le x_2'\le x_3\le14$
$5\le x_1'\le x_2'\le x_3\le14$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3의 순서쌍 $(x_1',\ x_2',\ x_3)$의 개수는 서로 다른 10개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_{10}H_3={}_{10+3-1}C_3={}_{12}C_3=220$$

다른풀이 2

조건 ㈎에서 $n=1$, 2일 때, $x_{n+1}-x_n\ge n+1$이므로
$x_2-x_1\ge2$, $x_3-x_2\ge3$ $\quad\therefore$ $x_2\ge x_1+2$, $x_3\ge x_2+3$
조건 ㈏에서 $x_3\le14$이므로 0, 1, 2, $\cdots$, 14의 15개의 자리 중 3개의 자리에 x_1, x_2, x_3을 배열하고 양 끝 및 그 사이에 들어가는 수의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.
(a개), x_1, (b개), x_2, (c개), x_3, (d개)
라 하면
$a+b+c+d=12$
(단, b, c는 $b\ge1$, $c\ge2$인 정수, a, d는 음이 아닌 정수)
이때, $b=b'+1$, $c=c'+2$ (b', c'은 음이 아닌 정수)라 하면
$a+(b'+1)+(c'+2)+d=12$
$\therefore$ $a+b'+c'+d=9$
따라서 방정식 $a+b'+c'+d=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d의 순서쌍 $(a,\ b',\ c',\ d)$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 순서쌍의 개수는
$${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$$

08-1

(1) $(1-x)+(2-x)^2+(3-x)^3+(4-x)^4+(5-x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는 $(3-x)^3$, $(4-x)^4$, $(5-x)^5$의 각각의 전개식의 x^3의 계수를 더하면 된다.

$(3-x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_{r_1}3^{3-r_1}(-x)^{r_1}={}_3C_{r_1}3^{3-r_1}(-1)^{r_1}x^{r_1}$이므로 x^3의 계수는

${}_3C_3\times(-1)^3$

$(4-x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_{r_2}4^{4-r_2}(-x)^{r_2}={}_4C_{r_2}4^{4-r_2}(-1)^{r_2}x^{r_2}$이므로 x^3의 계수는

${}_4C_3\times4\times(-1)^3$

$(5-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_{r_3}5^{5-r_3}(-x)^{r_3}={}_5C_{r_3}5^{5-r_3}(-1)^{r_3}x^{r_3}$이므로 x^3의 계수는

${}_5C_3\times5^2\times(-1)^3$

따라서 구하는 x^3의 계수는

${}_3C_3\times(-1)^3+{}_4C_3\times4\times(-1)^3+{}_5C_3\times5^2\times(-1)^3$

$=-1-16-250=-267$

(2) $\left(3x+\dfrac{1}{x^3}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(3x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^r={}_6C_r3^{6-r}x^{6-4r}$ ……㉠

$\dfrac{1}{x^{10}}$의 계수는 $6-4r=-10$일 때이므로

$4r=16$ $\therefore r=4$

이것을 다시 ㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{x^{10}}$의 계수는

${}_6C_4\times3^2={}_6C_2\times3^2=15\times9=135$

(3) 다항식 $(2x-1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(2x)^{n-r}(-1)^r={}_nC_r2^{n-r}(-1)^rx^{n-r}$

주어진 식의 전개식에서 x^2의 계수는

$(2x-1)^2$, $(2x-1)^3$, $(2x-1)^4$의 각각의 전개식의 x^2의 계수를 더하면 되므로 구하는 x^2의 계수는

${}_2C_0\times2^2+{}_3C_1\times2^2\times(-1)+{}_4C_2\times2^2\times(-1)^2$

$=4-12+24=16$

답 (1) -267 (2) 135 (3) 16

08-2

$(5+2x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r5^{4-r}(2x)^r={}_4C_r5^{4-r}2^rx^r$

이때, x^3의 계수는

${}_4C_3\times5\times2^3={}_4C_1\times5\times2^3=4\times5\times8=160$

$(1-kx)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s1^{5-s}(-kx)^s={}_5C_s(-k)^sx^s$

이때, x^2의 계수는

${}_5C_2\times(-k)^2=10k^2$ ($\because k>0$)

그런데 $(5+2x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 $(1-kx)^5$의 전개식에서 x^2의 계수의 4배이므로

$160=4\times10k^2$, $k^2=4$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$)

답 2

08-3

$\left(x^2-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{2}y^2\right)^5$을 $\left\{\left(x^2-\dfrac{4}{x^3}\right)-\dfrac{1}{2}y^2\right\}^5$으로 생각하여 이항정리를 이용하면 이 전개식의 일반항은

${}_5C_r\left(x^2-\dfrac{4}{x^3}\right)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{2}y^2\right)^r$

$r=0$을 위의 식에 대입하면

$\left(x^2-\dfrac{4}{x^3}\right)^5$이고 이 전개식의 일반항은

${}_5C_s(x^2)^{5-s}\left(-\dfrac{4}{x^3}\right)^s={}_5C_s(-4)^sx^{10-5s}$ ……㉠

이때, 상수항은 $10-5s=0$일 때이므로

$s=2$

$s=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 상수항은

${}_5C_2\times(-4)^2=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times16=10\times16=160$

답 160

다른풀이

다항정리를 이용하면 $\left(x^2-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{2}y^2\right)^5$의 전개식의 일반항은

$\dfrac{5!}{p!q!r!}(x^2)^p\left(-\dfrac{4}{x^3}\right)^q\left(-\dfrac{1}{2}y^2\right)^r$

$=\dfrac{5!}{p!q!r!}(-4)^q\left(-\dfrac{1}{2}\right)^rx^{2p-3q}y^{2r}$ (단, $p+q+r=5$)

……㉠

이때, 상수항은 $2p-3q=0$, $2r=0$일 때이므로

$p=\dfrac{3}{2}q$, $r=0$

이것을 $p+q+r=5$에 대입하면 $\dfrac{5}{2}q=5$에서

$q=2$

$\therefore p=3$, $q=2$, $r=0$

이것을 다시 ㉠에 대입하면 구하는 상수항은

$$\frac{5!}{3!2!0!}\times(-4)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^0=10\times16\times1=160$$

09-1

$\left(2x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r2^{4-r}a^rx^{4-r}x^{-2r}$$
$$={}_4\mathrm{C}_r2^{4-r}a^rx^{4-3r}\qquad\cdots\cdots㉠$$

이때, $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)\left(2x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3항이 나오는 경우는 다음과 같이 2가지가 있다.

(i) (x^2항)×(㉠의 x항)

㉠의 x항은 $4-3r=1$일 때이므로 $r=1$

$r=1$을 다시 ㉠에 대입하면 x^3의 계수는

${}_4\mathrm{C}_1\times2^3\times a=4\times8\times a=32a$

(ii) $\left(\dfrac{3}{x}\text{항}\right)$×(㉠의 x^4항)

㉠의 x^4항은 $4-3r=4$일 때이므로 $r=0$

$r=0$을 다시 ㉠에 대입하면 x^3의 계수는

$3\times{}_4\mathrm{C}_0\times2^4\times a^0=3\times1\times16\times1=48$

(i), (ii)에서 x^3의 계수는 $32a+48$이므로

$32a+48=-16$에서

$32a=-64\qquad\therefore a=-2$

답 -2

09-2

$(1+x)^m$의 전개식의 일반항은

${}_m\mathrm{C}_rx^r$

$(2+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_s2^{5-s}(x^2)^s={}_5\mathrm{C}_s2^{5-s}x^{2s}$

따라서 $(1+x)^m(2+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_m\mathrm{C}_rx^r\times{}_5\mathrm{C}_s2^{5-s}x^{2s}={}_m\mathrm{C}_r\times{}_5\mathrm{C}_s\times2^{5-s}x^{r+2s}\qquad\cdots\cdots㉠$$

㉠의 x^2항은 $r+2s=2$ (r, s는 음이 아닌 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는 $(2, 0)$, $(0, 1)$이다.

(i) $r=2$, $s=0$일 때, ㉠에서 x^2의 계수는

$${}_m\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_0\times2^5=\frac{m(m-1)}{2}\times1\times32=16m(m-1)$$

(ii) $r=0$, $s=1$일 때, ㉠에서 x^2의 계수는

${}_m\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_1\times2^4=1\times5\times16=80$

(i), (ii)에서 x^2의 계수는 $16m(m-1)+80$

즉, $16m(m-1)+80=176$에서

$16m(m-1)=96$, $m^2-m-6=0$

$(m+2)(m-3)=0\qquad\therefore m=3$ ($\because$ m은 자연수)

답 3

09-3

$(1+x+x^2)^2$의 전개식의 일반항은

$$\frac{2!}{p!q!r!}x^q(x^2)^r=\frac{2!}{p!q!r!}x^{q+2r}$$
$$(\text{단, } p+q+r=2,\ p\ge0,\ q\ge0,\ r\ge0)\qquad\cdots\cdots㉠$$

$\left(x^5-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_s(x^5)^{5-s}\left(-\frac{2}{x}\right)^s={}_5\mathrm{C}_s(-2)^sx^{25-6s}\qquad\cdots\cdots㉡$$

$(1+x+x^2)^2\left(x^5-\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2항이 나오는 경우는 (㉠의 x항)×(㉡의 x항)일 때 뿐이다.

$p+q+r=2$, $q+2r=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는 $(1, 1, 0)$이므로 ㉠에서 x의 계수는

$$\frac{2!}{1!1!0!}=2$$

㉡의 x항은 $25-6s=1$일 때이므로

$24=6s\qquad\therefore s=4$

$s=4$를 다시 ㉡에 대입하면 x의 계수는

${}_5\mathrm{C}_4\times(-2)^4=5\times16=80$

따라서 구하는 x^2의 계수는

$2\times80=160$

답 160

보충설명

㉡에서 x^2항, 상수항, $\dfrac{1}{x}$항, $\dfrac{1}{x^2}$항이 존재하지 않으므로 주어진 식의 전개식에서 x^2항은 ㉠의 x항과 ㉡의 x항이 곱해질 때만 나타난다.

10-1

(1) $\underbrace{{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n-1}_{{}_{n}C_0+{}_{n}C_1+{}_{n}C_2+\cdots+{}_{n}C_n=2^n,\ {}_{n}C_0=1}$이므로

$2000<2^n-1<3000$, $2001<2^n<3001$

이때, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로 $n=11$

(2) ${}_{99}C_1+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{99}=2^{99-1}=2^{98}$이므로

$\log_4({}_{99}C_1+{}_{99}C_3+\cdots+{}_{99}C_{99})=\log_4 2^{98}=\log_4 4^{49}=49$

(3) ${}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{n}C_2$

$={}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{n}C_2-{}_{2}C_2$ ← ${}_{2}C_2$를 더하고 뺀다.

$=(\underbrace{{}_{3}C_3+{}_{3}C_2}_{={}_{4}C_3})+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{n}C_2-1$ ($\because$ ${}_{2}C_2={}_{3}C_3$)

$=({}_{4}C_3+{}_{4}C_2)+{}_{5}C_2+\cdots+{}_{n}C_2-1$

$\vdots$

$={}_{n+1}C_3-1$

즉, ${}_{n+1}C_3-1<100$에서 ${}_{n+1}C_3<101$

$n=7$일 때, ${}_{8}C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

$n=8$일 때, ${}_{9}C_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

$n=9$일 때, ${}_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

따라서 자연수 n의 최댓값은 8이다.

답 (1) 11 (2) 49 (3) 8

보충설명

(3) 파스칼의 삼각형에서 확인하면 다음 그림과 같다.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & {}_{1}C_0 & & {}_{1}C_1 & & & & & & \\
 & & & & {}_{2}C_0 & & {}_{2}C_1 & & {}_{2}C_2 & & & & & \\
 & & & {}_{3}C_0 & & {}_{3}C_1 & & {}_{3}C_2 & & {}_{3}C_3 & & & & \\
 & & {}_{4}C_0 & & {}_{4}C_1 & & {}_{4}C_2 & & {}_{4}C_3 & & {}_{4}C_4 & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
 & {}_{n}C_0 & & {}_{n}C_1 & & {}_{n}C_2 & & {}_{n}C_3 & & \cdots & & {}_{n}C_n & & \\
{}_{n+1}C_0 & & {}_{n+1}C_1 & & {}_{n+1}C_2 & & {}_{n+1}C_3 & & & \cdots & & & {}_{n+1}C_{n+1} &
\end{array}
$$

$\therefore$ ${}_{2}C_2+{}_{3}C_2+{}_{4}C_2+\cdots+{}_{n}C_2-{}_{2}C_2={}_{n+1}C_3-{}_{2}C_2$

$={}_{n+1}C_3-1$

10-2

이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$의 전개식을 구하면

$(1+x)^n={}_{n}C_0+{}_{n}C_1x+{}_{n}C_2x^2+\cdots+{}_{n}C_nx^n$

위 등식의 양변에 $x=-\dfrac{3}{4}$을 대입하면

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n={}_{n}C_0+\left(-\frac{3}{4}\right){}_{n}C_1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2{}_{n}C_2+\cdots+\left(-\frac{3}{4}\right)^n{}_{n}C_n$$

$$={}_{n}C_0-\frac{3}{4}{}_{n}C_1+\left(\frac{3}{4}\right)^2{}_{n}C_2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n{}_{n}C_n$$

$$=f(n)$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(5)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^5}=4^5=2^{10}=1024$$

답 1024

10-3

집합 $A=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$에서 집합 A의 원소의 개수는 n이므로 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 k $(1\le k\le n)$인 부분집합의 개수는 ${}_{n}C_k$이다.

이때, 집합 A의 부분집합 중 원소의 개수가 짝수인 것의 개수는 다음과 같다.

(i) n이 짝수일 때,

${}_{n}C_2+{}_{n}C_4+{}_{n}C_6+\cdots+{}_{n}C_n$

$=({}_{n}C_0+{}_{n}C_2+{}_{n}C_4+{}_{n}C_6+\cdots+{}_{n}C_n)-{}_{n}C_0$

$=2^{n-1}-1$

즉, $2^{n-1}-1>400$에서 $2^{n-1}>401$

이때, $2^7=128$, $2^9=512$이므로

$n-1\ge9$ $\quad\therefore\ n\ge10$

$\therefore\ n=10, 12, 14, \cdots$

(ii) n이 홀수일 때,

${}_{n}C_2+{}_{n}C_4+{}_{n}C_6+\cdots+{}_{n}C_{n-1}$

$=({}_{n}C_0+{}_{n}C_2+{}_{n}C_4+{}_{n}C_6+\cdots+{}_{n}C_{n-1})-{}_{n}C_0$

$=2^{n-1}-1$

즉, $2^{n-1}-1>400$에서 $2^{n-1}>401$

이때, $2^8=256$, $2^{10}=1024$이므로

$n-1\ge10$ $\quad\therefore\ n\ge11$

$\therefore\ n=11, 13, 15, \cdots$

(i), (ii)에서 자연수 n의 최솟값은 10이다.

답 10

개념마무리

본문 pp.64~67

01 15	**02** 141	**03** 462	**04** 156
05 ②	**06** 16	**07** 13	**08** 27
09 ④	**10** 46	**11** 704	**12** 150
13 28	**14** 252	**15** 11	**16** 28
17 ②	**18** 5	**19** ①	**20** 금요일
21 31	**22** 188	**23** 410	

01

택한 세 자연수의 곱이 10 이상이 되는 경우의 수는 네 개의 자연수에서 중복을 허용하여 세 개를 택하는 경우의 수에서 세 자연수의 곱이 10 미만이 되는 경우의 수를 뺀 것과 같다.
네 개의 자연수 1, 2, 6, 12 중에서 중복을 허용하여 세 개를 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

택한 세 자연수의 곱이 10 미만이 되는 경우의 수는
$1\times1\times1=1$, $1\times1\times2=2$, $1\times1\times6=6$, $1\times2\times2=4$, $2\times2\times2=8$의 5이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$20-5=15$

답 15

02

주머니 3개에 넣는 빵의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 빵을 주머니 3개에 각각 3개, 0개, 0개로 나누어 넣을 때, 서로 다른 3개의 주머니 중 빵 3개를 넣을 1개의 주머니를 택하는 경우의 수는
$_3C_1=3$
빵이 들어 있지 않은 2개의 주머니에 각각 음료수를 1개씩 넣은 후, 나머지 음료수 3개를 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다.
이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

즉, 이 경우의 수는
$3\times10=30$

(ii) 빵을 주머니 3개에 각각 2개, 1개, 0개로 나누어 넣을 때, 서로 다른 3개의 주머니 중 빵 2개, 1개, 0개를 넣을 주머니를 택하는 경우의 수는
$3!=6$
빵이 들어 있지 않은 1개의 주머니에 음료수를 1개 넣은 후, 나머지 음료수 4개를 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다.
이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

즉, 이 경우의 수는
$6\times15=90$

(iii) 빵을 주머니 3개에 각각 1개, 1개, 1개로 나누어 넣을 때, 모든 주머니에 빵이 있으므로 음료수 5개를 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다.
이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$30+90+21=141$

답 141

보충설명

같은 종류의 빵 3개를 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.
(3개, 0개, 0개)인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(2개, 1개, 0개)인 경우의 수는 $3!=6$
(1개, 1개, 1개)인 경우의 수는 1

03

조건 (가)에서 $a\times b\times c$는 짝수이므로 구하는 자연수 a, b, c의 순서쌍의 개수는 전체 순서쌍의 개수에서 세 자연수 a, b, c가 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.
조건 (나)에서 $2\le a\le b+2\le c\le 15$이므로
$b+2=b'$ (b'은 3 이상의 자연수)이라 하면
$2\le a\le b'\le c\le 15$

이때, $2 \le a \le b' \le c \le 15$를 만족시키는 자연수 a, b', c의 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 14개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{14}\mathrm{H}_3 = {}_{14+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{16}\mathrm{C}_3 = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$$

이때, $b'=2$이면 $b=0$이 되어 주어진 조건에 모순이므로 이때의 경우의 수는 제외시켜야 한다.

$b'=2$이면 $2 \le a \le 2 \le c \le 15$이므로 $a=2$이고 $2 \le c \le 15$를 만족시키는 경우의 수는 14

즉, 조건 (나)를 만족시키는 자연수 a, b', c의 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는

$560-14=546$ (가)

한편, b가 홀수이면 b'도 홀수이다.

$2 \le a \le b' \le c \le 15$에서 세 자연수 a, b', c가 모두 홀수인 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15의 서로 다른 7개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{7}\mathrm{H}_3 = {}_{7+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{9}\mathrm{C}_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$ (나)

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$546-84=462$ (다)

답 462

단계	채점 기준	배점
(가)	조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한 경우	40%
(나)	조건 (나)를 만족시키면서 a, b, c가 모두 홀수인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구한 경우	30%
(다)	두 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한 경우	30%

04

$2 \le |a| \le |b| \le |c|+2 \le 5$에서 $|c|+2$의 최솟값은 2이고 최댓값은 5이므로 $|c|+2$의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $|c|+2=2$일 때,

$|c|+2=2$에서 c의 개수는 $c=0$의 1이다.

이때, $2 \le |a| \le |b| \le 2$이므로 $|a|=|b|=2$이고 두 정수 a, b는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는 $2^2=4$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$1 \times 4 = 4$

(ii) $|c|+2=3$일 때,

$|c|=1$이고 $2 \le |a| \le |b| \le 3$이므로 $|a|$, $|b|$의 순서쌍 $(|a|,\ |b|)$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

${}_{2}\mathrm{H}_2 = {}_{2+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_{3}\mathrm{C}_2 = {}_{3}\mathrm{C}_1 = 3$

이때, 세 정수 a, b, c는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는 $2^3=8$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$3 \times 8 = 24$

(iii) $|c|+2=4$일 때,

$|c|=2$이고 $2 \le |a| \le |b| \le 4$이므로 $|a|$, $|b|$의 순서쌍 $(|a|,\ |b|)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_{3}\mathrm{H}_2 = {}_{3+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_{4}\mathrm{C}_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

이때, 세 정수 a, b, c는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는 $2^3=8$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$6 \times 8 = 48$

(iv) $|c|+2=5$일 때,

$|c|=3$이고 $2 \le |a| \le |b| \le 5$이므로 $|a|$, $|b|$의 순서쌍 $(|a|,\ |b|)$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_{4}\mathrm{H}_2 = {}_{4+2-1}\mathrm{C}_2 = {}_{5}\mathrm{C}_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

이때, 세 정수 a, b, c는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는 $2^3=8$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$10 \times 8 = 80$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$4+24+48+80=156$

답 156

다른풀이

$|c|+2=C$ (C는 2 이상의 자연수)라 하면

$2 \le |a| \le |b| \le C \le 5$이고 이것을 만족시키는 정수 $|a|$, $|b|$, C의 순서쌍 $(|a|,\ |b|,\ C)$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_{6}\mathrm{C}_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

이때, 세 정수 a, b, c는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두

개의 값을 가질 수 있으므로 각각의 경우는 2

즉, 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$20\times2^3=160$ ……㉠

한편, $C=2$이면 $c=0$이 되어 주어진 조건에 모순이므로 ㉠의 경우에서 제외시켜야 한다.

$C=2$이면 $2\le|a|\le|b|\le2$에서 $|a|=|b|=2$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2\times2=4$

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$160-4=156$

05

$(a+b+c)(x+y)=15$를 만족시키는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $a+b+c=1,\ x+y=15$일 때,

방정식 $a+b+c=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$의 3이다.

$x=x'+1$, $y=y'+1$ (x', y'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$x+y=15$에서 $(x'+1)+(y'+1)=15$

$\therefore\ x'+y'=13$

방정식 $x'+y'=13$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y'$의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 13개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_{13}={}_{2+13-1}C_{13}={}_{14}C_{13}={}_{14}C_1=14$

즉, 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x',\ y')$의 개수는

$3\times14=42$

(ii) $a+b+c=3,\ x+y=5$일 때,

방정식 $a+b+c=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

$x=x'+1$, $y=y'+1$ (x', y'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$x+y=5$에서 $(x'+1)+(y'+1)=5$

$\therefore\ x'+y'=3$

방정식 $x'+y'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y'$의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

즉, 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x',\ y')$의 개수는

$10\times4=40$

(iii) $a+b+c=5,\ x+y=3$일 때,

방정식 $a+b+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

$x=x'+1$, $y=y'+1$ (x', y'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$x+y=3$에서 $(x'+1)+(y'+1)=3$

$\therefore\ x'+y'=1$

방정식 $x'+y'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x',\ y'$의 순서쌍 $(x',\ y')$의 개수는 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$의 2이다.

즉, 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x',\ y')$의 개수는

$21\times2=42$

(iv) $a+b+c=15,\ x+y=1$일 때,

$x+y=1$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ x,\ y)$의 개수는

$42+40+42=124$

답 ②

06

$(x+y+a)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

같은 방법으로 $(x+y+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

${}_3H_3={}_5C_2=10$

이때, 두 다항식 $(x+y+a)^3$과 $(x+y+b)^3$의 전개식에서 $(x+y)^3$의 전개식은 동류항이므로 겹치는 경우의 수는 한 번 제외시켜야 한다.

$(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 항의 개수는

$10+10-4=16$

답 16

07

$(a+b-c+d)^6$의 전개식에서 a, b의 차수가 1 이상인 항은 $a^p b^q (-c)^r d^s$ ($p+q+r+s=6$, p, q는 자연수, r, s는 음이 아닌 정수) 꼴로 나타낼 수 있다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$ (p', q'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$p+q+r+s=6$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r+s=6$

$\therefore\ p'+q'+r+s=4$ ……㉠

한편, $(a+b-c+d)^6$의 전개식에서 계수가 음수인 항은 c의 차수가 4 이하의 홀수인 1, 3일 때이다.

(i) c의 차수가 1일 때,

$r=1$을 ㉠에 대입하면 $p'+q'+s=3$이고 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', s의 순서쌍 (p', q', s)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(ii) c의 차수가 3일 때,

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $p'+q'+s=1$이고 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', s의 순서쌍 (p', q', s)의 개수는 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$의 3이다.

(i), (ii)에서 구하는 항의 개수는

$10+3=13$

답 13

08

x, y, z가 주사위의 눈의 수이므로

$1\le x\le 6$, $1\le y\le 6$, $1\le z\le 6$

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$

(단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x+y+z=10$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$ $\qquad\therefore\ x'+y'+z'=7$

방정식 $x'+y'+z'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

이때, $0\le x'\le 5$, $0\le y'\le 5$, $0\le z'\le 5$이므로 x', y', z'의 값 중 어느 하나라도 6 이상인 경우는 제외시켜야 한다.

x', y', z'의 값 중 어느 하나라도 6 이상인 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 $(7, 0, 0)$, $(6, 1, 0)$, $(6, 0, 1)$, $(0, 7, 0)$, $(0, 6, 1)$, $(1, 6, 0)$, $(0, 0, 7)$, $(0, 1, 6)$, $(1, 0, 6)$의 9이다.

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$36-9=27$

답 27

09

구하는 항의 개수는 $(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 a, b를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수를 구한 후, 이 중에서 d, e를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수를 빼면 된다.

$(a+b+c+d+e)^{10}$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 $a^p b^q c^r d^s e^t$ 꼴이고, a, b를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수는 방정식 $p+q+r+s+t=10$을 만족시키는 $p\ge1$, $q\ge1$, $r\ge0$, $s\ge0$, $t\ge0$인 정수 p, q, r, s, t의 순서쌍 (p, q, r, s, t)의 개수와 같다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$ (p', q'은 음이 아닌 정수)이라 하면

$p+q+r+s+t=10$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r+s+t=10$

$\therefore\ p'+q'+r+s+t=8$

방정식 $p'+q'+r+s+t=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r, s, t의 순서쌍 (p', q', r, s, t)의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_8={}_{5+8-1}C_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4$$

$$=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495 \qquad \cdots\cdots㉠$$

같은 방법으로 $(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 a, b, d, e를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수는 방정식 $p+q+r+s+t=10$을 만족시키는 $p\ge1$, $q\ge1$, $r\ge0$, $s\ge1$, $t\ge1$인 정수 p, q, r, s, t의 순서쌍 (p, q, r, s, t)의 개수와 같다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$, $s=s'+1$, $t=t'+1$ (p', q', s', t'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $p+q+r+s+t=10$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r+(s'+1)+(t'+1)=10$

$\therefore\ p'+q'+r+s'+t'=6$

방정식 $p'+q'+r+s'+t'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r, s', t'의 순서쌍 (p', q', r, s', t')의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_6={}_{5+6-1}C_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 항의 개수는

$495-210=285$

답 ④

다른풀이

$(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 a, b를 모두 포함하고 d, e 중 적어도 하나는 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 d를 포함하지 않고 a, b를 모두 포함하는 항의 개수와 e를 포함하지 않고 a, b를 모두 포함하는 항의 개수를 더한 후, d, e를 모두 포함하지 않고 a, b를 모두 포함하는 항의 개수를 빼서 구할 수도 있다.

(i) d를 포함하지 않을 때,

$(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 d를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c+e)^{10}$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같다.

이때, $(a+b+c+e)^{10}$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 $a^pb^qc^re^t$ 꼴이고, a, b를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수는 방정식 $p+q+r+t=10$을 만족시키는 $p\ge1$, $q\ge1$, $r\ge0$, $t\ge0$인 정수 p, q, r, t의 순서쌍 (p, q, r, t)의 개수와 같다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$ (p', q'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $p+q+r+t=10$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r+t=10$

$\therefore\ p'+q'+r+t=8$

방정식 $p'+q'+r+t=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r, t의 순서쌍 (p', q', r, t)의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

(ii) e를 포함하지 않을 때,

$(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 e를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c+d)^{10}$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같다.

이때, $(a+b+c+d)^{10}$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 $a^pb^qc^rd^s$ 꼴이고, a, b를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수는 방정식 $p+q+r+s=10$을 만족시키는 $p\ge1$, $q\ge1$, $r\ge0$, $s\ge0$인 정수 p, q, r, s의 순서쌍 (p, q, r, s)의 개수와 같다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$ (p', q'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $p+q+r+s=10$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r+s=10$

$\therefore\ p'+q'+r+s=8$

방정식 $p'+q'+r+s=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r, s의 순서쌍 (p', q', r, s)의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{4+8-1}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

(iii) d, e를 모두 포함하지 않을 때,

$(a+b+c+d+e)^{10}$의 전개식에서 d, e를 모두 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c)^{10}$의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같다.

이때, $(a+b+c)^{10}$을 전개하여 동류항끼리 정리하면 각 항은 $a^pb^qc^r$ 꼴이고, a, b를 모두 포함하는 서로 다른 항의 개수는 방정식 $p+q+r=10$을 만족시키는 $p\ge1$, $q\ge1$, $r\ge0$인 정수 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)의 개수와 같다.

$p=p'+1$, $q=q'+1$ (p', q'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $p+q+r=10$에서

$(p'+1)+(q'+1)+r=10$

$\therefore\ p'+q'+r=8$

방정식 $p'+q'+r=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', r의 순서쌍 (p', q', r)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 항의 개수는

$165+165-45=285$

10

선택한 청포도 맛 사탕, 자두 맛 사탕, 우유 맛 사탕, 박하 맛 사탕의 개수를 각각 p, q, r, s라 하면

$p+q+r+s=8$

(단, $0\le p\le 2$, $q\ge 1$, $r\ge 1$, $s\ge 1$인 정수) ……㉠

이때, p의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $p=0$일 때,

㉠에서 $q+r+s=8$

$q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$ (q', r', s'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $q+r+s=8$에서

$(q'+1)+(r'+1)+(s'+1)=8$

$\therefore\ q'+r'+s'=5$

방정식 $q'+r'+s'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 q', r', s'의 순서쌍 (q', r', s')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

(ii) $p=1$일 때,

㉠에서 $q+r+s=7$

$q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$ (q', r', s'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $q+r+s=7$에서

$(q'+1)+(r'+1)+(s'+1)=7$

$\therefore\ q'+r'+s'=4$

방정식 $q'+r'+s'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 q', r', s'의 순서쌍 (q', r', s')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$

(iii) $p=2$일 때,

㉠에서 $q+r+s=6$

$q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$ (q', r', s'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $q+r+s=6$에서

$(q'+1)+(r'+1)+(s'+1)=6$

$\therefore\ q'+r'+s'=3$

방정식 $q'+r'+s'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 q', r', s'의 순서쌍 (q', r', s')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15+10=46$

답 46

11

$a=2^{x_1}\times 3^{y_1}$, $b=2^{x_2}\times 3^{y_2}$, $c=2^{x_3}\times 3^{y_3}$, $d=2^{x_4}\times 3^{y_4}$이라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=5$, $y_1+y_2+y_3+y_4=5$

(단, $i=1$, 2, 3, 4에 대하여 x_i, y_i는 음이 아닌 정수)

이때, $a+b+c+d$가 짝수이려면 a, b, c, d가 모두 짝수이거나 a, b, c, d 중에서 2개만 짝수이어야 한다.

(i) a, b, c, d가 모두 짝수일 때,

자연수 a, b, c, d가 모두 2의 배수이므로

$x_1\ge 1$, $x_2\ge 1$, $x_3\ge 1$, $x_4\ge 1$

$x_1=x_1'+1$, $x_2=x_2'+1$, $x_3=x_3'+1$, $x_4=x_4'+1$

(단, x_1', x_2', x_3', x_4'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$에서

$(x_1'+1)+(x_2'+1)+(x_3'+1)+(x_4'+1)=5$

$\therefore\ x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=1$

방정식 $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3', x_4'의 순서쌍 (x_1', x_2', x_3', x_4')의 개수는 $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$의 4이다.

한편, 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$4\times 56=224$

(ii) a, b, c, d 중에서 2개만 짝수일 때,

x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이어야 한다.

서로 다른 4개에서 자연수일 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

택한 두 자연수가 x_1, x_2이면 $x_3=0$, $x_4=0$

이때, $x_1=x_1'+1$, $x_2=x_2'+1$ (x_1', x_2'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$에서

$(x_1'+1)+(x_2'+1)=5 \qquad \therefore\ x_1'+x_2'=3$

방정식 $x_1'+x_2'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2'의 순서쌍 $(x_1',\ x_2')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

한편, $x_3=0$, $x_4=0$이고, a, b, c, d 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 $y_3\ge1$, $y_4\ge1$이어야 한다.

$y_3=y_3'+1$, $y_4=y_4'+1$ (y_3', y_4'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $y_1+y_2+y_3+y_4=5$에서

$y_1+y_2+(y_3'+1)+(y_4'+1)=5$

$\therefore\ y_1+y_2+y_3'+y_4'=3$

방정식 $y_1+y_2+y_3'+y_4'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3', y_4'의 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3',\ y_4')$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$6\times4\times20=480$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$224+480=704$

답 704

12

주어진 두 집합 X, Y를 원소나열법으로 나타내면

$X=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

조건 (가)에서 함수 f의 치역에 속하는 집합 Y의 원소 3개를 택하는 경우의 수는 집합 Y의 서로 다른 5개의 원소에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10 \qquad \cdots\cdots㉠$$

치역에 속하는 3개의 원소에 각각 대응하는 집합 X의 원소의 개수를 a, b, c라 하자.

집합 X의 원소의 개수는 7이므로 $a+b+c=7$

이때, 치역의 각 원소에 적어도 정의역의 원소 하나는 대응되어야 하므로 $a\ge1$, $b\ge1$, $c\ge1$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $a+b+c=7$에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=7 \qquad \therefore\ a'+b'+c'=4$

방정식 $a'+b'+c'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15 \qquad \cdots\cdots㉡$$

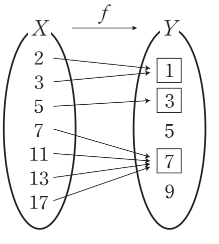
따라서 ㉠, ㉡에서 구하는 함수 f의 개수는

$10\times15=150$

답 150

보충설명

다음 그림은 조건을 만족시키는 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중 하나이다.



13

조건 (가)에서 $1\le f(5)\le f(3)\le f(1)\le6$,

조건 (나)에서 $1\le f(2)<f(4)<f(6)\le6$,

조건 (다)에서 $f(1)<f(2)$이므로

$1\le f(5)\le f(3)\le f(1)<f(2)<f(4)<f(6)\le6 \qquad \cdots\cdots㉠$

이때, $f(1)>4$이면 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(1)\le3$

(i) $f(1)=1$일 때,

㉠에서 $1\le f(5)\le f(3)\le1<f(2)<f(4)<f(6)\le6$

$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times10=10$

(ii) $f(1)=2$일 때,

㉠에서 $1\le f(5)\le f(3)\le 2<f(2)<f(4)<f(6)\le 6$

$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_4C_3={}_4C_1=4$

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$3\times4=12$

(iii) $f(1)=3$일 때,

㉠에서 $1\le f(5)\le f(3)\le 3<f(2)<f(4)<f(6)\le 6$

$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

즉, 이 경우의 함수 f의 개수는

$6\times1=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$10+12+6=28$

답 28

14

$(1+x^2)^n$ $(n\ge4)$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}(x^2)^r={}_nC_rx^{2r}$

x^8항은 $2r=8$, 즉 $r=4$일 때이므로 x^8의 계수 a_n은

$a_n={}_nC_4$

$\therefore$ $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$={}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4$

$=\underbrace{({}_5C_5+{}_5C_4)}_{={}_6C_5}+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4$ $(\because\ {}_4C_4={}_5C_5=1)$

$=\underbrace{({}_6C_5+{}_6C_4)}_{={}_7C_5}+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4$

$\vdots$

$={}_{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$

답 252

15

$22^5=(2+20)^5$

$={}_5C_0\times2^5+{}_5C_1\times2^4\times20+{}_5C_2\times2^3\times20^2+\cdots+{}_5C_5\times20^5$

위의 전개식에서 ${}_5C_0\times2^5$, ${}_5C_1\times2^4\times20$을 제외한 항은 모두 1000의 배수이므로 ${}_5C_0\times2^5+{}_5C_1\times2^4\times20$만 계산하면 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수를 각각 구할 수 있다.

이때, ${}_5C_0\times2^5+{}_5C_1\times2^4\times20=32+1600=1632$이므로

$a=6$, $b=3$, $c=2$

$\therefore$ $a+b+c=6+3+2=11$

답 11

16

$(1+x)^8={}_8C_0+{}_8C_1x+{}_8C_2x^2+\cdots+{}_8C_8x^8$,

$(1+x)^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1x+{}_{12}C_2x^2+\cdots+{}_{12}C_{12}x^{12}$

이므로

$(1+x)^8(1+x)^{12}$

$=({}_8C_0+{}_8C_1x+{}_8C_2x^2+\cdots+{}_8C_8x^8)\times({}_{12}C_0+{}_{12}C_1x+{}_{12}C_2x^2+\cdots+{}_{12}C_{12}x^{12})$

이때, x^8의 계수는

${}_8C_0\times{}_{12}C_8+{}_8C_1\times{}_{12}C_7+{}_8C_2\times{}_{12}C_6+\cdots+{}_8C_8\times{}_{12}C_0$

$={}_8C_0\times{}_{12}C_4+{}_8C_1\times{}_{12}C_5+{}_8C_2\times{}_{12}C_6+\cdots+{}_8C_8\times{}_{12}C_{12}$

한편, $(1+x)^8(1+x)^{12}=(1+x)^{20}$이므로 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^8의 계수는 ${}_{20}C_8$이다.

$\therefore$ ${}_8C_0\times{}_{12}C_4+{}_8C_1\times{}_{12}C_5+{}_8C_2\times{}_{12}C_6+\cdots+{}_8C_8\times{}_{12}C_{12}$

$={}_{20}C_8$

따라서 $n=20$, $r=8$이므로

$n+r=20+8=28$

답 28

17

$144=2^4\times3^2$에서 집합 S의 원소의 개수는

$(4+1)\times(2+1)=5\times3=15$

조건 (가)에서 $\{2,\ 4,\ 9\}\cap A=\{2,\ 4\}$이므로 집합 A는 2, 4를 원소로 갖고 9는 원소로 갖지 않는다.

한편, 조건 (나)에서 집합 A의 원소의 개수는 5 이상이므로 2, 4, 9를 제외한 12개의 원소에서 3개 이상의 원소를 가져야 한다.

따라서 구하는 부분집합 A의 개수는

$${}_{12}C_3+{}_{12}C_4+{}_{12}C_5+\cdots+{}_{12}C_{12}$$
$$=({}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+{}_{12}C_3+\cdots+{}_{12}C_{12})-({}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2)$$
$$=2^{12}-\left(1+12+\frac{12\times11}{2\times1}\right)$$
$$=4096-(1+12+66)$$
$$=4017$$

답 ②

18

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^n의 계수는 $(1+x)$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $\cdots$, $(1+x)^{10}$의 각각의 전개식의 x^n의 계수를 더하면 된다.

다항식 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$이므로 이항계수의 성질에 의하여

$$f(1)={}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_{10}C_1={}_{11}C_2$$
$$f(2)={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2={}_{11}C_3$$
$$f(3)={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_3={}_{11}C_4$$
$$\vdots$$
$$f(10)={}_{10}C_{10}={}_{11}C_{11}$$
$$\therefore\ f(n)={}_{11}C_{n+1}$$

이때, $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)=f(5)$, $f(5)>f(6)>\cdots>f(10)$이므로 $f(n)>f(n+1)$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 5

다른풀이

$$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$$
$$=\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{(1+x)^{11}-1-x}{x}$$

이므로 위의 전개식에서 x^n의 계수는 $(1+x)^{11}-1-x$의 전개식에서 x^{n+1}의 계수와 같다.

즉, $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^{n+1}의 계수와 같으므로

$$f(n)={}_{11}C_{n+1}=\frac{11!}{(n+1)!(10-n)!}$$

$f(n)>f(n+1)$에서

$$\frac{11!}{(n+1)!(10-n)!}>\frac{11!}{(n+2)!(9-n)!}$$
$$\frac{1}{10-n}>\frac{1}{n+2},\quad 10-n<n+2$$
$$2n>8\qquad \therefore\ n>4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

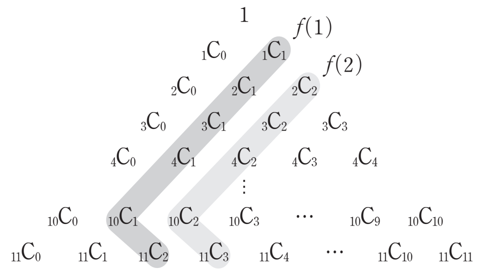
보충설명 1

이항계수의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$f(1)={}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_{10}C_1$$
$$=(\underbrace{{}_2C_2+{}_2C_1}_{={}_3C_2})+{}_3C_1+\cdots+{}_{10}C_1\ (\because\ {}_1C_1={}_2C_2=1)$$
$$=(\underbrace{{}_3C_2+{}_3C_1}_{={}_4C_2})+\cdots+{}_{10}C_1$$
$$\vdots$$
$$={}_{11}C_2$$

$f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(10)$의 경우에도 마찬가지이다.

이것을 파스칼의 삼각형에서 확인하면 다음 그림과 같다.



보충설명 2

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

19

$(1+x)^{2n}$의 전개식의 일반항은 ${}_{2n}C_rx^r$이므로 x^n의 계수는 $\boxed{{}_{2n}C_n}$이다.

$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는

$$\sum_{k=0}^{n}({}_{n}\mathrm{C}_{k}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k})=\sum_{k=0}^{n}({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}$$

이므로 $\sum_{k=0}^{n}({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}={}_{2n}\mathrm{C}_{n}$이 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}\}+\sum_{k=1}^{n}\{k\times({}_{n}\mathrm{C}_{n-k})^{2}\}\\
&=\{({}_{n}\mathrm{C}_{1})^{2}+2\times({}_{n}\mathrm{C}_{2})^{2}+\cdots+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{n})^{2}\}\\
&\qquad+\{({}_{n}\mathrm{C}_{n-1})^{2}+2\times({}_{n}\mathrm{C}_{n-2})^{2}+\cdots+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{0})^{2}\}\\
&=\{({}_{n}\mathrm{C}_{1})^{2}+2\times({}_{n}\mathrm{C}_{2})^{2}+\cdots+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{n})^{2}\}\\
&\qquad+\{n\times({}_{n}\mathrm{C}_{0})^{2}+(n-1)\times({}_{n}\mathrm{C}_{1})^{2}+\cdots+({}_{n}\mathrm{C}_{n-1})^{2}\}\\
&=n\times({}_{n}\mathrm{C}_{0})^{2}+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{1})^{2}+\cdots+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{n})^{2}\\
&=\boxed{\ n\ }\times\{({}_{n}\mathrm{C}_{0})^{2}+({}_{n}\mathrm{C}_{1})^{2}+\cdots+({}_{n}\mathrm{C}_{n})^{2}\}\\
&=\boxed{\ n\ }\times\sum_{k=0}^{n}({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}\\
&=\boxed{\ n\ }\times\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_{n}}
\end{aligned}$$

이다.

한편, $\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}\}\ge 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$에서

$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n}\ge 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$

$$n\times\frac{(2n)!}{n!n!}\ge 10\times\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$n\times\frac{1}{n}\ge 10\times\frac{1}{n+1}$$

$n+1\ge 10 \qquad \therefore\ n\ge 9$

그러므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{\ 9\ }$이다.

즉, $f(n)={}_{2n}\mathrm{C}_{n},\ g(n)=n,\ p=9$이므로

$$\begin{aligned}
f(3)+g(3)+p&={}_{6}\mathrm{C}_{3}+3+9\\
&=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}+3+9\\
&=20+3+9=32
\end{aligned}$$

답 ①

20

$$\begin{aligned}
33^{7}&=(2+31)^{7}\\
&={}_{7}\mathrm{C}_{0}\times2^{7}+{}_{7}\mathrm{C}_{1}\times2^{6}\times31+{}_{7}\mathrm{C}_{2}\times2^{5}\times31^{2}\\
&\qquad+\cdots+{}_{7}\mathrm{C}_{7}\times31^{7}
\end{aligned}$$

위의 전개식에서 ${}_{7}\mathrm{C}_{0}\times2^{7}$, ${}_{7}\mathrm{C}_{7}\times31^{7}$을 제외한 항은 모두 7의 배수이다.

즉, ${}_{7}\mathrm{C}_{0}\times2^{7}+{}_{7}\mathrm{C}_{7}\times31^{7}$만 계산하면 33^{7}일째 되는 날이 무슨 요일인지 알 수 있다.

${}_{7}\mathrm{C}_{0}\times2^{7}+{}_{7}\mathrm{C}_{7}\times31^{7}=128+31^{7}=7\times18+2+31^{7}$

이때, 오늘부터 31^{7}일째 되는 날이 수요일이므로 33^{7}일째 되는 날은 수요일로부터 2일 뒤인 금요일이다.

답 금요일

21

$4(x+a)^{n}$의 전개식의 일반항은 $4{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{r}x^{n-r}$

x^{n-1}항은 $n-r=n-1$, 즉 $r=1$일 때이므로 x^{n-1}의 계수는

$4{}_{n}\mathrm{C}_{1}a^{1}=4an \qquad \cdots\cdots$㉠

$(x-1)(x+a)^{n}$에서 $(x+a)^{n}$의 전개식의 일반항은

${}_{n}\mathrm{C}_{s}a^{s}x^{n-s} \qquad \cdots\cdots$㉡

$(x-1)(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}항이 나오는 경우는 다음과 같이 2가지가 있다.

(i) (x항)$\times$(㉡의 x^{n-2}항)

㉡의 x^{n-2}항은 $n-s=n-2$, 즉 $s=2$일 때이므로 x^{n-1}의 계수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{2}a^{2}=\frac{n(n-1)}{2}a^{2}$$

(ii) $(-1)\times$(㉡의 x^{n-1}항)

㉡의 x^{n-1}항은 $n-s=n-1$, 즉 $s=1$일 때이므로 x^{n-1}의 계수는

$(-1)\times{}_{n}\mathrm{C}_{1}a^{1}=-an$

(i), (ii)에 의하여 $(x-1)(x+a)^{n}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{2}-an \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢에서 $4an=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{2}-an$

$5an=\dfrac{n(n-1)}{2}a^{2},\ 5=\dfrac{n-1}{2}a\ (\because\ a\neq0,\ n\neq0)$

$\therefore\ a(n-1)=10$

위의 식을 만족시키는 두 자연수 $a,\ n$의 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$n-1$	n	an
1	10	11	11
2	5	6	12
5	2	3	15
10	1	2	20

따라서 an의 최댓값은 20, 최솟값은 11이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$20+11=31$

답 31

22

조건 (가)에서 $x_1\ge1$, $x_2\ge1$이므로

$x_1=x_1'+1$, $x_2=x_2'+1$ (단, x_1', x_2'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 조건 (나)의 $x_1+y_1+x_2+y_2=18$에서

$(x_1'+1)+y_1+(x_2'+1)+y_2=18$

$\therefore\ x_1'+y_1+x_2'+y_2=16$

조건 (가)에서 y_1, y_2는 $y_1\le4$, $y_2\le4$인 자연수이므로 y_1+y_2의 값에 대한 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$을 표로 나타내면 다음과 같다.

y_1 \ y_2	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$y_1+y_2=k$라 하면 $x_1'+y_1+x_2'+y_2=16$에서

$x_1'+x_2'=16-k$ (단, $2\le k\le8$)

이때, 방정식 $x_1'+x_2'=16-k$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2'의 순서쌍 $(x_1',\ x_2')$의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 $(16-k)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2\mathrm{H}_{16-k}={}_{2+(16-k)-1}\mathrm{C}_{16-k}={}_{17-k}\mathrm{C}_{16-k}={}_{17-k}\mathrm{C}_1$

$=17-k$ ……㉠

$2\le k\le8$인 자연수이므로 k의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $k=2$일 때,

㉠에서 $17-2=15$이고, 방정식 $y_1+y_2=2$를 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(1,\ 1)$의 1이므로 이 경우의 수는 $15\times1=15$

(ii) $k=3$일 때,

㉠에서 $17-3=14$이고, 방정식 $y_1+y_2=3$을 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$의 2이므로 이 경우의 수는

$14\times2=28$

(iii) $k=4$일 때,

㉠에서 $17-4=13$이고, 방정식 $y_1+y_2=4$를 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$의 3이므로 이 경우의 수는

$13\times3=39$

(iv) $k=5$일 때,

㉠에서 $17-5=12$이고, 방정식 $y_1+y_2=5$를 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$의 4이므로 이 경우의 수는 $12\times4=48$

(v) $k=6$일 때,

㉠에서 $17-6=11$이고, 방정식 $y_1+y_2=6$을 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 2)$의 3이므로 이 경우의 수는

$11\times3=33$

(vi) $k=7$일 때,

㉠에서 $17-7=10$이고, 방정식 $y_1+y_2=7$을 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$의 2이므로 이 경우의 수는

$10\times2=20$

(vii) $k=8$일 때,

㉠에서 $17-8=9$이고, 방정식 $y_1+y_2=8$을 만족시키는 y_1, y_2의 순서쌍 $(y_1,\ y_2)$의 개수는 위의 표에서 $(4,\ 4)$의 1이므로 이 경우의 수는 $9\times1=9$

(i)~(vii)에서 구하는 경우의 수는

$15+28+39+48+33+20+9=192$

이때, 두 점 A, B는 서로 다른 점이므로 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$인 경우는 제외시켜야 한다.

두 점이 서로 같은 경우의 수는 x_1, y_1, x_2, y_2의 순서쌍 $(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)$에서 $(5,\ 4,\ 5,\ 4)$, $(6,\ 3,\ 6,\ 3)$, $(7,\ 2,\ 7,\ 2)$, $(8,\ 1,\ 8,\ 1)$의 4이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$192-4=188$

답 188

23

조건에 맞는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하려면 $a+b+c+d=16$을 만족시키는 경우에서 두 점 (a, b), (c, d)가 서로 같은 경우와 점 (a, b) 또는 점 (c, d)가 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우를 제외시키면 된다.

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

(단, a', b', c', d'은 음이 아닌 정수) ……㉠

이라 하면 $a+b+c+d=16$에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=16$

$\therefore\ a'+b'+c'+d'=12$

방정식 $a'+b'+c'+d'=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{4+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$$

(i) 두 점 (a, b), (c, d)가 서로 같을 때,

$a=c$, $b=d$이므로 $a+b+c+d=16$에서

$2a+2b=16$, $a+b=8$

$(a'+1)+(b'+1)=8$ ($\because$ ㉠) $\quad\therefore\ a'+b'=6$

방정식 $a'+b'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b'의 순서쌍 (a', b')의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_6={}_{2+6-1}\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$

이때, 위의 경우의 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)는

$(1, 7, 1, 7)$, $(2, 6, 2, 6)$, $(3, 5, 3, 5)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(5, 3, 5, 3)$, $(6, 2, 6, 2)$, $(7, 1, 7, 1)$

(ii) 점 (a, b)가 직선 $y=3x$ 위에 있을 때,

$b=3a$이므로 $a+b+c+d=16$에서

$4a+c+d=16$

$4(a'+1)+(c'+1)+(d'+1)=16$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ 4a'+c'+d'=10$

① $a'=0$일 때,

방정식 $c'+d'=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 순서쌍 (c', d')의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_1=11$

② $a'=1$일 때,

방정식 $c'+d'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 순서쌍 (c', d')의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_6={}_{2+6-1}\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$

③ $a'=2$일 때,

방정식 $c'+d'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d'의 순서쌍 (c', d')의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

①, ②, ③에서 점 (a, b)가 직선 $y=3x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수는 $11+7+3=21$

이 중에서 (i)과 중복되는 순서쌍 $(2, 6, 2, 6)$을 제외시켜야 하므로 이때의 순서쌍의 개수는 20

(iii) 점 (c, d)가 직선 $y=3x$ 위에 있을 때,

(ii)와 같은 방법으로 구하면 순서쌍의 개수는 20

(iv) 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=3x$ 위에 있을 때,

$b=3a$, $d=3c$이므로 $a+b+c+d=16$에서

$4a+4c=16 \quad\therefore\ a+c=4$

방정식 $a+c=4$를 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $(1, 3, 3, 9)$, $(2, 6, 2, 6)$, $(3, 9, 1, 3)$의 3

이 중에서 (i)과 중복되는 순서쌍 $(2, 6, 2, 6)$을 제외시켜야 하므로 이때의 순서쌍의 개수는 2이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$455-7-(20+20-2)=410$

답 410

Ⅱ. 확률

유형연습 03 확률의 뜻과 활용 본문 pp.77~88

01-1 36	**01-2** 52	**01-3** 45
02-1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{7}{20}$		**02-2** $\frac{1}{7}$
02-3 $\frac{48}{125}$	**03-1** (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{13}{18}$	
03-2 $\frac{8}{21}$	**04-1** $\frac{1}{6}$	**04-2** $\frac{13}{36}$
04-3 $\frac{1}{3}$	**05-1** $\frac{8}{15}$	**05-2** 0.29
06-1 $\frac{1}{2}$	**06-2** $\frac{9}{25}$	**06-3** $\frac{2}{3}$
07-1 $\frac{11}{36}$	**07-2** $\frac{19}{84}$	**07-3** $\frac{3}{14}$
08-1 $\frac{49}{55}$	**08-2** $\frac{83}{105}$	**08-3** 89
09-1 (1) $\frac{11}{12}$ (2) $\frac{4}{7}$		**09-2** $\frac{2}{3}$
09-3 $\frac{5}{12}$		

01-1

표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에서

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

$A^C=\{4,\ 5,\ 7\}$

$B_n=\{x \mid x$는 n의 약수$\}$에서

$B_1=\{1\}$, $B_2=\{1,\ 2\}$, $B_3=\{1,\ 3\}$, $B_4=\{1,\ 2,\ 4\}$,

$B_5=\{1,\ 5\}$, $B_6=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B_7=\{1,\ 7\}$

따라서 $A^C \cap B_n=\varnothing$인 n의 값은 1, 2, 3, 6이므로 모든 자연수 n의 값의 곱은

$1\times2\times3\times6=36$

답 36

01-2

$2<a+b<5$에서 $a+b=3$ 또는 $a+b=4$

즉, 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$

$\therefore\ A=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)\}$

이때, 사건 A의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 등식 $ab=n+1$, 즉 $n=ab-1$을 만족시키는 n의 값은 다음과 같다.

(i) $(a,\ b)$가 $(1,\ 2)$ 또는 $(2,\ 1)$일 때

$ab=2$이므로 $n=2-1=1$

(ii) $(a,\ b)$가 $(1,\ 3)$ 또는 $(3,\ 1)$일 때

$ab=3$이므로 $n=3-1=2$

(i), (ii)에서 $n=1$ 또는 $n=2$

두 사건 A, B_n이 서로 배반사건이 되려면 $A\cap B_n=\varnothing$이어야 하므로 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 값은

$3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+\cdots+10=52$

답 52

다른풀이

$2<a+b<5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$이므로

$A=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)\}$

이때, 두 수 a, b가 등식 $ab=n+1$을 만족시키는 사건이 B_n이므로

$B_1=\underbrace{\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}}_{ab=2\text{를 만족시키는 순서쌍 }(a,\ b)}$, $B_2=\{(1,\ 3),\ (3,\ 1)\}$,

$B_3=\{(1,\ 4),\ (4,\ 1)\}$, $B_4=\{(1,\ 5),\ (5,\ 1)\}$,

$B_5=\{(2,\ 3),\ (3,\ 2)\}$, $B_6=\varnothing$, $B_7=\{(2,\ 4),\ (4,\ 2)\}$,

$B_8=\varnothing$, $B_9=\{(2,\ 5),\ (5,\ 2)\}$, $B_{10}=\varnothing$

따라서 $A\cap B_n=\varnothing$인 n의 값은 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10$이므로 구하는 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+\cdots+10=52$

01-3

두 사건 A, C가 서로 배반사건이므로 $A\cap C=\varnothing$

$\therefore\ C\subset A^C$

또한, 두 사건 B, C^C가 서로 배반사건이므로

$B\cap C^C=\varnothing$ $\quad\therefore\ B\subset C$

$\therefore\ B\subset C\subset A^C$

$B=\{3,\ 5,\ 7\}$, $A^C=\{3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$, $n(C)=4$이므로 사건 C의 모든 원소의 합의 최대일 때는 $C=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이고 사건 C의 모든 원소의 합이 최소일 때는 $C=\{3,\ 5,\ 6,\ 7\}$이다.

따라서 $M=3+5+7+9=24$, $m=3+5+6+7=21$이므로

$M+m=24+21=45$

답 45

02-1

6개의 숫자 중에서 5개를 택하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

${}_6P_5=6\times5\times4\times3\times2=720$

(1) 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 일의 자리에 들어갈 홀수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{3\times120}{720}=\dfrac{1}{2}$

(2) 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 짝수를 맨 앞자리와 맨 뒷자리에 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

나머지 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 가운데 세 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6\times24}{720}=\dfrac{1}{5}$

(3) 택하는 홀수의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 홀수를 2개 택할 때,

3개의 홀수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

나머지 3개의 자리에 들어갈 짝수를 택하는 경우의 수는 1

2개의 홀수를 하나의 숫자로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

2개의 홀수가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 2개의 홀수끼리 이웃하는 경우의 수는

$3\times1\times24\times2=144$

(ii) 홀수를 3개 택할 때,

3개의 홀수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 1

나머지 2개의 자리에 들어갈 짝수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

3개의 홀수를 하나의 숫자로 생각하여 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

3개의 홀수가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 3개의 홀수끼리 이웃하는 경우의 수는

$1\times3\times6\times6=108$

(i), (ii)에서 홀수끼리 이웃하는 자연수의 개수는

$144+108=252$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{252}{720}=\dfrac{7}{20}$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{1}{5}$ (3) $\dfrac{7}{20}$

02-2

8명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

남학생 2명 중 1명의 자리가 결정되면 남은 1명의 남학생의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 남학생 1명, 여학생 3명, 선생님 3명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6!}{7!}=\dfrac{1}{7}$

답 $\dfrac{1}{7}$

02-3

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\underset{\text{맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지}}{\underline{4}}\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

이때, 네 자리 자연수 중에서

일의 자리의 숫자만 0인 자연수의 개수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

십의 자리의 숫자만 0인 자연수의 개수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

백의 자리의 숫자만 0인 자연수의 개수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

이므로 0을 오직 하나만 포함하는 네 자리 자연수의 개수는

$64+64+64=192$

따라서 구하는 확률은

$\frac{192}{500}=\frac{48}{125}$

답 $\frac{48}{125}$

다른풀이

5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_3=4\times5^3=500$

0을 제외한 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

세 수 사이사이 또는 맨 끝자리에 0을 넣는 경우의 수는 3이므로 0을 오직 하나만 포함하는 네 자리 자연수의 개수는

$64\times3=192$

따라서 구하는 확률은

$\frac{192}{500}=\frac{48}{125}$

03-1

9개의 공에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

(1) 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되려면 각각의 공에 적힌 수는 모두 홀수이어야 한다.

즉, 3이 적힌 공 3개에서 2개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(2) 공에 적힌 두 수가 서로 다른 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(ⅰ) 2가 적힌 공과 3이 적힌 공을 각각 하나씩 꺼낼 때,

$_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$

(ⅱ) 2가 적힌 공과 4가 적힌 공을 각각 하나씩 꺼낼 때,

$_2C_1\times{}_4C_1=2\times4=8$

(ⅲ) 3이 적힌 공과 4가 적힌 공을 각각 하나씩 꺼낼 때,

$_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 공에 적힌 두 수가 서로 다른 경우의 수는

$6+8+12=26$

따라서 구하는 확률은

$\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{13}{18}$

다른풀이

(2) **개념 07**에서 배울 여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

공에 적힌 두 수가 서로 다른 사건을 A라 하면 A^C는 공에 적힌 두 수가 서로 같은 사건이다.

공에 적힌 두 수가 서로 같으려면 2가 적힌 공 2개에서 2개를 뽑거나 3이 적힌 공 3개에서 2개를 뽑거나 4가 적힌 공 4개에서 2개를 뽑아야 하므로 그 경우의 수는

$_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2=1+{}_3C_1+\frac{4\times3}{2\times1}=1+3+6=10$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

03-2

10장의 카드 중에서 임의로 4장의 카드를 뒤집는 경우의 수는

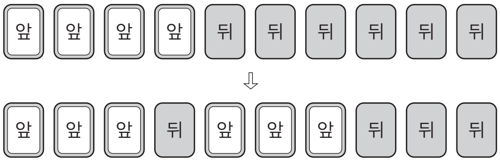
$_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

앞면이 보이는 카드를 x장, 뒷면이 보이는 카드를 $(4-x)$장 뒤집었을 때, 뒷면이 보이는 카드가 4장이라 하면

$x+\{6-(4-x)\}=4,\ 2x=2$

$\therefore\ x=1$

즉, 앞면이 보이는 카드 1장과 뒷면이 보이는 카드 3장을 뒤집어야 한다.



앞면이 보이는 4장의 카드에서 1장을 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

뒷면이 보이는 6장의 카드에서 3장을 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

즉, 뒷면이 보이는 카드가 4장이 되는 경우의 수는

$4\times20=80$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{80}{210}=\dfrac{8}{21}$

답 $\dfrac{8}{21}$

04-1

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $3x^2+ax+b=0$이 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12b\geq0 \qquad \therefore\ a^2\geq12b$

부등식 $a^2\geq12b$를 만족시키는 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3)$

의 6개이다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

답 $\dfrac{1}{6}$

04-2

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

직선 $y=x+a$와 원 $x^2+y^2=b$가 만나려면 연립방정식

$\begin{cases} y=x+a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$의 실수인 해가 존재해야 한다.

$y=x+a$를 $x^2+y^2=b$에 대입하면 $x^2+(x+a)^2=b$에서

$2x^2+2ax+a^2-b=0$

x에 대한 이차방정식 $2x^2+2ax+a^2-b=0$이 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b\geq0 \qquad \therefore\ a^2\leq2b$

부등식 $a^2\leq2b$를 만족시키는 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

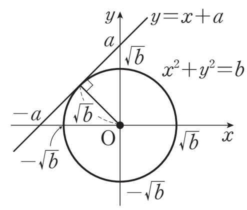
$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 2),$
$(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)$

의 13개이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{13}{36}$

답 $\dfrac{13}{36}$

다른풀이



직선 $y=x+a$와 원 $x^2+y^2=b$가 만나려면 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=b$의 중심과 직선 $y=x+a$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{b}$보다 작거나 같아야 한다.

원의 중심인 원점과 직선 $y=x+a$, 즉 $x-y+a=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\leq\sqrt{b},\ |a|\leq\sqrt{2b} \qquad \therefore\ a^2\leq2b$

부등식 $a^2\leq2b$를 만족시키는 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 2),$
$(2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)$

의 13개이다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{13}{36}$

04-3

집합 A의 원소는 4개이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

집합 A의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

${}_{16}C_2=\dfrac{16\times15}{2\times1}=120$

택한 두 집합의 합집합이 집합 A가 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 공통인 원소가 없을 때,

두 집합의 원소의 개수는 각각 0, 4 또는 1, 3 또는 2, 2이므로 그 경우의 수는

$${}_4C_0\times{}_4C_4+{}_4C_1\times{}_3C_3+{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}$$

$$=1\times1+4\times1+\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=1+4+3=8$$

(ii) 공통인 원소가 1개 있을 때,

공통인 원소를 1개 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는 각각 0, 3 또는 1, 2이므로 그 경우의 수는

${}_3C_0\times{}_3C_3+{}_3C_1\times{}_2C_2=1+3=4$

즉, 공통인 원소가 1개인 경우의 수는

$4\times4=16$

(iii) 공통인 원소가 2개 있을 때,

공통인 원소를 2개 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는 각각 0, 2 또는 1, 1이므로 그 경우의 수는

$${}_2C_0\times{}_2C_2+{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}$$

$$=1\times1+2\times1\times\frac{1}{2}=1+1=2$$

즉, 공통인 원소가 2개인 경우의 수는

$6\times2=12$

(iv) 공통인 원소가 3개 있을 때,

공통인 원소를 3개 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는 각각 0, 1이므로 그 경우의 수는 1

즉, 공통인 원소가 3개인 경우의 수는

$4\times1=4$

(i)~(iv)에서 합집합이 집합 A인 경우의 수는

$8+16+12+4=40$

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

05-1

10개의 제비에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

바구니 속에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 꺼낸 2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률은

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2}=\frac{n(n-1)}{10\times9}$$

즉, $\frac{n(n-1)}{10\times9}=\frac{1}{3}$이므로 $n(n-1)=30$, $n^2-n-30=0$

$(n+5)(n-6)=0\qquad\therefore n=6\ (\because n>0)$

당첨 제비가 오직 하나만 나오려면 6개의 당첨 제비에서 하나를 뽑고, 나머지 4개의 제비에서 하나를 뽑아야 하므로 그 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_4C_1=6\times4=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$

답 $\frac{8}{15}$

05-2

조사에 응한 전체 학생은 972명이고, 아르바이트 시간이 4시간 이하인 학생은 $32+253=285$(명)이므로 구하는 확률은

$\frac{285}{972}=0.293\times\times\times$

이때, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 0.29이다.

답 0.29

06-1

이차방정식 $12x^2-7ax+a^2=0$에서

$(4x-a)(3x-a)=0\qquad\therefore x=\frac{a}{4}$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

표본공간을 S, $\frac{a}{4}$가 정수인 사건을 A, $\frac{a}{3}$가 정수인 사건을 B라 하면

$S=\{1, 2, 3, \cdots, 40\}$, $A=\{a|a$는 4의 배수$\}$,

$B=\{a|a$는 3의 배수$\}$, $A\cap B=\{a|a$는 12의 배수$\}$

이므로 각각의 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{13}{40}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{40}$

이때, 이차방정식 $12x^2-7ax+a^2=0$이 정수인 해를 가질 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{10}{40}+\frac{13}{40}-\frac{3}{40}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

06-2

X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 서로 다른 5개의 원소에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

$f(1)=0$인 사건을 A, $f(3)=0$인 사건을 B라 하면

$f(1)f(3)=0$인 사건은 $A\cup B$, $f(1)=f(3)=0$인 사건은 $A\cap B$이다.

(i) $f(1)=0$일 때,

$f(1)=0$을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 Y의 서로 다른 5개의 원소에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(ii) $f(3)=0$일 때,

$f(3)=0$을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 Y의 서로 다른 5개의 원소에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(iii) $f(1)=f(3)=0$일 때,

$f(1)=f(3)=0$을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 Y의 서로 다른 5개의 원소에서 1개를 택하여 집합 X의 원소 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{C}_1=5$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{125}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{25}{125}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{125}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{25}{125}+\frac{25}{125}-\frac{5}{125}=\frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

06-3

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

$f(a)<f(b)$인 사건을 A, $f(a)<f(c)$인 사건을 B라 하자.

$f(a)<f(b)$일 때, $f(a)$, $f(b)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

집합 Y의 나머지 원소 4개에서 2개를 택하여 정의역의 나머지 원소 c, d에 대응시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

즉, 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$15\times12=180$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$

같은 방법으로 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$15\times12=180$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$

또한, $f(a)<f(b)$이고 $f(a)<f(c)$일 때, 즉

$f(a)<f(b)<f(c)$ 또는 $f(a)<f(c)<f(b)$일 때

$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\times\underbrace{2!}_{f(b),\ f(c)\text{의 값을 바꾸는 경우의 수}}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times2=40$

이때, 집합 Y의 나머지 원소 3개에서 1개를 택하여 정의역의 나머지 원소 d에 대응시키는 경우의 수는 3

즉, 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우의 수는

$40\times3=120$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

07-1

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$(a-3)(b-5)>0$에서

$a-3>0,\ b-5>0$ 또는 $a-3<0,\ b-5<0$

$a-3>0,\ b-5>0$인 사건을 A, $a-3<0,\ b-5<0$인 사건을 B라 하고 두 번 던져 나온 두 눈의 수 a, b를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

$A=\{(4,\ 6),\ (5,\ 6),\ (6,\ 6)\}$,

$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),$
$(2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{36},\ \mathrm{P}(B)=\frac{8}{36}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{36}+\frac{8}{36}=\frac{11}{36}$$

답 $\frac{11}{36}$

보충설명

주사위의 눈의 수는 1부터 6까지의 자연수로 이루어져 있으므로 표를 그려 나타내면 조건을 만족시키는 경우의 수를 찾기 쉽다.
즉, 다음과 같이 표를 그려 $(a-3)(b-5)>0$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구할 수 있다.

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	○	○				
2	○	○				
3	○	○				
4	○	○				
5						
6				○	○	○

따라서 $(a-3)(b-5)>0$인 경우의 수는 $8+3=11$

07-2

9개의 공 중에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

이 중 흰 공이 2개 나오는 사건을 A, 흰 공이 3개 나오는 사건을 B라 하자.

(i) 흰 공이 2개 나올 때,
흰 공 3개에서 2개를 꺼내고, 검은 공 6개에서 1개를 꺼내야 하므로 이 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1=3\times6=18$

(ii) 흰 공이 3개 나올 때,
흰 공 3개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 1

(i), (ii)에서 각각의 확률을 구하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{84},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{84}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{18}{84}+\frac{1}{84}=\frac{19}{84}$$

답 $\frac{19}{84}$

07-3

방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

$a=2c$인 사건을 A, $c=2b$인 사건을 B라 하면

$A=\{(0,\ 6,\ 0),\ (2,\ 3,\ 1),\ (4,\ 0,\ 2)\}$,

$B=\{(6,\ 0,\ 0),\ (3,\ 1,\ 2),\ (0,\ 2,\ 4)\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{28},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{28}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{28}+\frac{3}{28}=\frac{3}{14}$$

답 $\frac{3}{14}$

보충설명

$a=2c$인 사건을 A, $c=2b$인 사건을 B라 할 때, 두 사건 A, B가 서로 배반사건인지 확인해 보자.
두 조건을 동시에 만족시키려면 방정식 $a=2c=4b$이어야 하므로 $a+b+c=6$에 $a=4b$, $c=2b$를 대입하면
$4b+b+2b=6,\ 7b=6$
이때, 주어진 등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b의 값은 존재하지 않으므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

08-1

카드에 적힌 두 수의 합을 X라 하면 $3\le X\le 21$

11장의 카드에서 임의로 2장을 동시에 꺼낼 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$${}_{11}C_2=\frac{11\times 10}{2\times 1}=55$$

카드에 적힌 두 수의 합이 7 이상인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 사건이다.

이때, 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $X=3$일 때,

1, 2가 나오는 경우이므로 경우의 수는 1

(ii) $X=4$일 때,

1, 3이 나오는 경우이므로 경우의 수는 1

(iii) $X=5$일 때,

1, 4 또는 2, 3이 나오는 경우이므로 경우의 수는 2

(iv) $X=6$일 때,

1, 5 또는 2, 4가 나오는 경우이므로 경우의 수는 2

(i)~(iv)에서 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 경우의 수는

$1+1+2+2=6$

$$\therefore\ P(A^C)=\frac{6}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{6}{55}=\frac{49}{55}$$

답 $\frac{49}{55}$

08-2

15개의 점 중에서 임의로 서로 다른 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{15}C_2=\frac{15\times 14}{2\times 1}=105$$

서로 다른 두 점 사이의 거리는 항상 1 이상이므로 서로 다른 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

이때, 두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는

$3\times 4+5\times 2=22$ ← 가로로 4쌍씩, 세로로 2쌍씩

$$\therefore\ P(A^C)=\frac{22}{105}$$

따라서 구하는 확률은

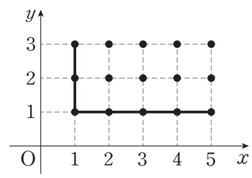
$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{22}{105}=\frac{83}{105}$$

답 $\frac{83}{105}$

보충설명

두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는 길이가 1인 선분을 택하는 경우의 수로 이해할 수 있다.

오른쪽 그림과 같은 좌표평면에서 길이가 1인 선분의 개수를 구해 보자.



가로 방향의 선분에서 길이가 1인 선분은 4개이고 각 경우에 대하여 $y=1,\ 2,\ 3$의 3가지 경우가 있으므로 가로 방향의 선분의 개수는

$4\times 3=12$

세로 방향의 선분에서 길이가 1인 선분은 2개이고

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 5가지 경우가 있으므로 세로 방향의 선분의 개수는

$5\times 2=10$

따라서 두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는

$3\times 4+5\times 2=22$

08-3

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times 10}{2\times 1}=55$$

이때, $a<2$ 또는 $b<2$인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 $a\ge 2$이고 $b\ge 2$인 사건이다.

$a=a'+2,\ b=b'+2$ ($a',\ b'$은 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c=9$에서

$(a'+2)+(b'+2)+c=9$

$\therefore\ a'+b'+c=5$

방정식 $a'+b'+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c$의 순서쌍 $(a',\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

따라서 $P(A^C)=\frac{21}{55}$이므로

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

즉, $p=55$, $q=34$이므로

$p+q=55+34=89$

답 89

다른풀이

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$

$a<2$인 사건을 A, $b<2$인 사건을 B라 하면

$a<2$이고 $b<2$인 사건은 $A\cap B$,

$a<2$ 또는 $b<2$인 사건은 $A\cup B$이다.

(i) $a<2$일 때,

① $a=0$일 때,

$a=0$이면 $a+b+c=9$에서 $b+c=9$

방정식 $b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c의 순서쌍 (b, c)의 개수는 $(0, 9)$, $(1, 8)$, $\cdots$, $(9, 0)$의 10이다.

② $a=1$일 때,

$a=1$이면 $a+b+c=9$에서 $b+c=8$

방정식 $b+c=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c의 순서쌍 (b, c)의 개수는 $(0, 8)$, $(1, 7)$, $\cdots$, $(8, 0)$의 9이다.

①, ②에서 $a<2$인 경우의 수는

$10+9=19$

(ii) $b<2$일 때,

(i)과 같은 방법으로 $b<2$인 경우의 수는 19

(iii) $a<2$이고 $b<2$일 때,

$a<2$, $b<2$에서 $a+b<4$이고 $a+b$의 값이 정해지면 c의 값은 자동으로 정해지므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

③ $a+b=0$일 때,

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 0)$이므로 경우의 수는 1

④ $a+b=1$일 때,

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 0)$, $(0, 1)$이므로 경우의 수는 2

⑤ $a+b=2$일 때,

조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$이므로 경우의 수는 1

③, ④, ⑤에서 $a<2$이고 $b<2$인 경우의 수는

$1+2+1=4$

(i), (ii), (iii)에서 각각의 확률을 구하면

$P(A)=\frac{19}{55}$, $P(B)=\frac{19}{55}$, $P(A\cap B)=\frac{4}{55}$

따라서 $a<2$ 또는 $b<2$일 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{19}{55}+\frac{19}{55}-\frac{4}{55}=\frac{34}{55}$$

즉, $p=55$, $q=34$이므로

$p+q=55+34=89$

09-1

(1) $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=\frac{2}{3}$이므로

$$P(A\cap B)=1-P((A\cap B)^C)$$
$$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

이때, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{11}{12}$

(2) 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$에서 $P(A\cap B)=0$

$A\cup B=S$이므로 $P(A\cup B)=1$

즉, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$P(A)+P(B)=1$ ······㉠

$P(A\cup B)=5P(A)-2P(B)$에서

$5P(A)-2P(B)=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$P(A)=\frac{3}{7}$, $P(B)=\frac{4}{7}$

답 (1) $\frac{11}{12}$ (2) $\frac{4}{7}$

09-2

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$,

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&\qquad+\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)-\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{5}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

다른풀이

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$ ……㉠

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{9}$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{9}$ ……㉢

이때, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{9}$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

09-3

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}((A^C\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cup B)$에서

$\frac{1}{6}=1-\mathrm{P}(A^C\cup B)$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cup B)=\frac{5}{6}$

이때, 두 사건 A^C, B가 서로 배반사건이므로

$A^C\cap B=\varnothing$에서 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=0$

즉, $\mathrm{P}(A^C\cup B)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A^C)+\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

이때, $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$에서

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

다른풀이

두 사건 A^C, B가 서로 배반사건이므로

$A^C\cap B=\varnothing \iff B-A=\varnothing \iff B\subset A$

즉, $A\cap B=B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{6}=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

개 념 마 무 리

본문 pp.89~92

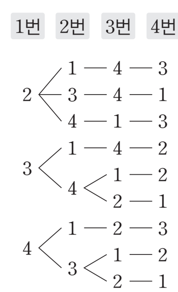
01 $\frac{3}{8}$	**02** $\frac{1}{3}$	**03** $\frac{5}{32}$	**04** $\frac{3}{7}$
05 $\frac{2}{5}$	**06** ①	**07** $\frac{1}{3}$	**08** 60
09 $\frac{11}{20}$	**10** $\frac{9}{44}$	**11** 255	**12** ②
13 ④	**14** $\frac{49}{60}$	**15** $\frac{109}{120}$	**16** ③
17 $\frac{2}{5}$	**18** $\frac{97}{114}$	**19** $\frac{42}{143}$	**20** $\frac{8}{27}$
21 $\frac{1}{2}$	**22** 7	**23** $\frac{7}{10}$	**24** 424

01

4명의 학생에게 1, 2, 3, 4의 숫자가 적힌 카드를 나누어 주는 경우의 수는

$4!=24$

이때, 자신의 번호와 다른 번호가 적힌 카드를 받는 경우의 수는 오른쪽 수형도와 같이 9이다.



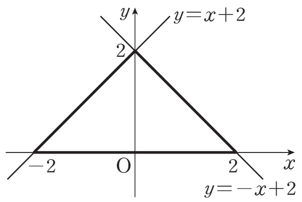
따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

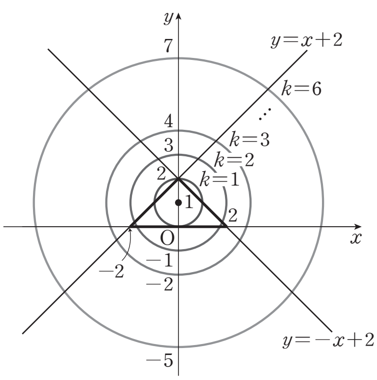
답 $\frac{3}{8}$

02

x축과 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+2$로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같은 이등변삼각형이다.



한편, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6이고, 위의 이등변삼각형과 원 $x^2+(y-1)^2=k^2$의 위치 관계는 k의 값에 따라 다음 그림과 같다.



즉, $k=1$, $k=2$일 때 두 도형은 서로 만나고, $k\geq3$이면 두 도형은 만나지 않는다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

03

X에서 Y로의 함수 f의 개수는 집합 Y의 서로 다른 8개의 원소에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_8\Pi_4=8^4$ (가)

조건 (가)에서 $f(1)$의 값은 홀수이므로 $f(1)$의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $f(1)=1$일 때,

$f(2)$의 값은 1보다 큰 짝수이므로 경우의 수는 2, 4, 6, 8의 4

(ii) $f(1)=3$일 때,

$f(2)$의 값은 3보다 큰 짝수이므로 경우의 수는 4, 6, 8의 3

(iii) $f(1)=5$일 때,

$f(2)$의 값은 5보다 큰 짝수이므로 경우의 수는 6, 8의 2

(iv) $f(1)=7$일 때,

$f(2)$의 값은 7보다 큰 짝수이므로 경우의 수는 8의 1

(i)~(iv)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4+3+2+1=10$ (나)

한편, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 서로 다른 8개의 원소에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_8\Pi_2=8^2$ (다)

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 10×8^2이므로 구하는 확률은

$\frac{10\times8^2}{8^4}=\frac{5}{32}$ (라)

답 $\frac{5}{32}$

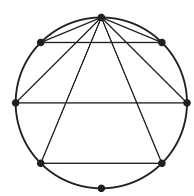
단계	채점 기준	배점
(가)	X에서 Y로의 함수의 개수를 구한 경우	20%
(나)	$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수를 구한 경우	30%
(다)	$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수를 구한 경우	30%
(라)	조건을 만족시킬 확률을 구한 경우	20%

04

만들 수 있는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 임의로 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

이때, 오른쪽 그림과 같이 한 꼭짓점에 대하여 3개의 이등변삼각형을 만들 수 있고, 점은 모두 8개가 있으므로 나올 수 있는 이등변삼각형의 개수는



$3\times8=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

05

의자는 6개이고 앉는 사람은 5명이므로 남학생 3명이 앉은 의자 3개, 여학생 2명이 앉은 의자 2개, 비어 있는 의자 1개를 원형으로 배열한다고 생각하자.

6개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

여학생 2명이 이웃하여 앉으려면 여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 5개의 의자를 원형으로 배열하면 된다.

5개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

여학생 2명이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$24\times2=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

다른풀이

5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

학생 사이사이에 빈 의자 1개를 배열하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

즉, 6개의 의자가 놓인 원탁에 5명의 학생이 둘러앉는 경우의 수는

$24\times5=120$

여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

학생 사이사이에 빈 의자 1개를 배열하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

여학생 2명이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 여학생끼리 이웃하여 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$6\times4\times2=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

06

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 일렬로 나열하는 경우를 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼낸 경우

꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 숫자는 1, 2, 3, 4이므로 4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ii) 1이 적혀 있는 공을 두 개 꺼낸 경우

2, 3, 4가 적혀 있는 공에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

1이 적혀 있는 공 2개와 위에서 택한 2개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

즉, 이 경우의 수는

$3\times12=36$

(i), (ii)에서 4개의 공을 동시에 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

$24+36=60$

한편, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a\le b\le c\le d$인 경우를 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(iii) 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼낸 경우

2, 3, 4가 적혀 있는 공을 모두 꺼내는 경우의 수는 1

(iv) 1이 적혀 있는 공을 두 개 꺼낸 경우

2, 3, 4가 적혀 있는 공에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_2={}_3C_1=3$

(iii), (iv)에서

$a\le b\le c\le d$인 경우의 수는

$1+3=4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$

답 ①

다른풀이 1

1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) 1이 적혀 있는 공을 1개 꺼낸 경우

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_4} = \dfrac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_1} = \dfrac{2 \times 1}{5} = \dfrac{2}{5}$

이것을 일렬로 나열할 때, $a \le b \le c \le d$를 만족시킬 확률은

$\dfrac{1}{4!} = \dfrac{1}{24}$

즉, 이 경우의 확률은

$\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{60}$

(ⅱ) 1이 적혀 있는 공을 2개 꺼낸 경우

1이 적혀 있는 공을 2개 꺼내고, 2, 3, 4가 적혀 있는 공에서 2개를 꺼낼 확률은

$\dfrac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_5C_4} = \dfrac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_1} = \dfrac{1 \times 3}{5} = \dfrac{3}{5}$

이것을 일렬로 나열할 때, $a \le b \le c \le d$를 만족시킬 확률은

$\dfrac{1}{\frac{4!}{2!}} = \dfrac{1}{12}$

즉, 이 경우의 확률은

$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{60}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{60} + \dfrac{3}{60} = \dfrac{1}{15}$

다른풀이 2

공에 적혀 있는 수 1, 1, 2, 3, 4를 1_a, 1_b, 2, 3, 4로 생각하면 4개의 공을 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_5C_4 \times 4! = {}_5C_1 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

이때, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$인 경우의 수를 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 나누어 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수로 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼낸 경우

$(1_a, 2, 3, 4)$, $(1_b, 2, 3, 4)$의 2가지

(ⅱ) 1이 적혀 있는 공을 두 개 꺼낸 경우

$(1_a, 1_b, X, Y)$, $(1_b, 1_a, X, Y)$의 2가지이고, 각 경우에 대하여 X, Y에 들어갈 수를 택하는 경우의 수는 2, 3, 4가 적혀 있는 공에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$2 \times {}_3C_2 = 2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $2+6=8$이므로 구하는 확률은

$\dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

보충설명

5개의 공에서 4개의 공을 택하기만 하면 공에 적혀 있는 수에 따라 크기 순서대로 나열할 수 있다. 즉, 택한 4개의 공을 일렬로 나열하였을 때 공에 적혀 있는 수의 크기 순서대로 나열하는 경우의 수는 5개의 공에서 4개의 공을 택하는 경우의 수와 같다.
이때, 주머니에 들어 있는 공은 1이 적혀 있는 공만 2개이므로 택한 4개의 공 중에서 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 경우를 나눌 수 있다.

07

9개의 구슬을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$

노란 색 구슬을 Y라 할 때, 노란 색 구슬 사이에 놓이는 다른 색 구슬의 개수가 짝수일 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

(ⅰ) 노란 색 구슬 사이에 2개의 구슬이 놓일 때,

노란 색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음과 같으므로 경우의 수는 6

Y			Y					
	Y			Y				
		Y			Y			
			Y			Y		
				Y			Y	
					Y			Y

(ⅱ) 노란 색 구슬 사이에 4개의 구슬이 놓일 때,

노란 색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음과 같으므로 경우의 수는 4

Y					Y			
	Y					Y		
		Y					Y	
			Y					Y

(iii) 노란 색 구슬 사이에 6개의 구슬이 놓일 때,
노란 색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음과 같으므로 경우의 수는 2

Y							Y	

	Y							Y

(i), (ii), (iii)에서 노란 색 구슬 사이에 놓이는 다른 색 구슬의 개수가 짝수인 경우의 수는

$6+4+2=12$

이때, 각의 경우에 대하여 나머지 자리에 흰 색 구슬 4개, 파란 색 구슬 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!3!}=35$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $12\times35=420$이므로 구하는 확률은

$\frac{420}{1260}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

08

총을 60번 쏘았을 때의 성공률이 0.8이므로 이 선수는 과녁을 $60\times0.8=48$(번) 맞혔다.
총을 더 쏘는 횟수를 최소한으로 하면서 성공률을 높이려면 앞으로 쏘는 모든 총알을 과녁에 맞혀야 한다.
앞으로 총을 x번 더 쏘아 모두 과녁에 맞힌다고 하면

$\frac{48+x}{60+x}\geq0.9$에서

$48+x\geq54+0.9x$, $0.1x\geq6$

$\therefore\ x\geq60$

따라서 성공률이 0.9 이상이 되게 하려면 총을 최소 60번 더 쏘아야 한다.

답 60

09

최근 5번의 경기에서 이 농구 선수가 시도한 2점 슛의 개수를 x, 3점 슛의 개수를 y라 하자.
2점 슛의 총합이 78점이므로 성공한 2점 슛의 개수는

$\frac{78}{2}=39$

이때, 2점 슛의 성공률이 65 %이므로

$\frac{39}{x}=\frac{65}{100}$에서 $x=60$

3점 슛의 총합이 48점이므로 성공한 3점 슛의 개수는

$\frac{48}{3}=16$

이때, 3점 슛의 성공률이 40 %이므로

$\frac{16}{y}=\frac{40}{100}$에서 $y=40$

즉, 전체 시도한 슛의 개수는

$60+40=100$

이고 성공한 슛의 개수는

$39+16=55$

이므로 이 농구 선수가 슛을 한 번 던져서 득점할 확률은

$\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$

답 $\frac{11}{20}$

10

12개의 구슬에서 임의로 3개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

이때, 2와 3이 적힌 구슬의 개수의 합은 2 이상 3 이하이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 2와 3이 적힌 구슬을 각각 1개씩 꺼낼 때,
2와 3이 적힌 구슬을 각각 1개씩 꺼내는 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$
1이 적힌 구슬을 1개 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
즉, 이 경우의 확률은
$\frac{9\times3}{220}=\frac{27}{220}$

(ii) 2가 적힌 구슬을 1개, 3이 적힌 구슬을 2개 꺼낼 때,
2가 적힌 구슬을 1개 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
3이 적힌 구슬을 2개 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
즉, 이 경우의 확률은
$\frac{3\times3}{220}=\frac{9}{220}$

(iii) 2가 적힌 구슬을 2개, 3이 적힌 구슬을 1개 꺼낼 때,
2가 적힌 구슬을 2개 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
3이 적힌 구슬을 1개 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times3}{220}=\frac{9}{220}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{220}+\frac{9}{220}+\frac{9}{220}=\frac{9}{44}$$

답 $\frac{9}{44}$

11

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le1$ ……㉠

이때, $0<\mathrm{P}(A^C)\le\mathrm{P}(B)$에서

$0<1-\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$

$0<1-\mathrm{P}(A)$에서 $\mathrm{P}(A)<1$

$\therefore\ A\ne S$ ……㉡

$1-\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$에서 $1\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이때, ㉠에서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이므로

$A\cup B=S$

따라서 $B=A^C$이므로 사건 A가 정해지면 사건 B가 하나로 정해진다.

이때, S의 원소의 개수가 8이므로 사건 A를 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_7=2^8-1=255$ ($\because$ ㉡)

답 255

12

8개의 좌석에 6명이 앉는 경우의 수는

${}_8\mathrm{P}_6=\underbrace{8\times7\times6\times5\times4\times3}_{=20160}$

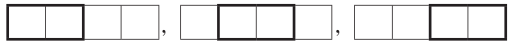
부부끼리 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 1열에 2쌍의 부부가 앉을 때,

1열에 앉을 2쌍의 부부를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

2열에 남은 1쌍의 부부가 앉을 자리를 정하는 경우의 수는 다음 그림과 같으므로 3



이때, 세 쌍의 부부가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

즉, 이 경우의 수는

$6\times3\times8=144$

(ii) 2열에 2쌍의 부부가 앉을 때,

(i)의 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는 144

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$144+144=288$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{288}{8\times7\times6\times5\times4\times3}=\frac{1}{70}$$

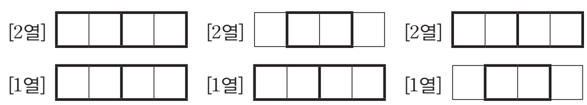
답 ②

다른풀이

8개의 좌석에 6명이 앉는 경우의 수는

${}_8\mathrm{P}_6=8\times7\times6\times5\times4\times3$

이때, 부부끼리 같은 열에 이웃하여 앉을 수 있는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

(i) [그림 1]과 같이 앉을 때,

세 쌍의 부부가 4쌍의 이웃한 좌석 중에서 한 쌍을 택한 후 부부끼리 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3\times2^3=24\times8=192$

(ii) [그림 2]와 같이 앉을 때,

세 쌍의 부부가 3쌍의 이웃한 좌석 중에서 한 쌍을 택한 후 부부끼리 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_3\times2^3=6\times8=48$

(iii) [그림 3]과 같이 앉을 때,

(ii)와 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 48

(i), (ii), (iii)에서 부부끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는

$192+48+48=288$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{288}{8\times7\times6\times5\times4\times3}=\frac{1}{70}$$

13

10개의 공에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$

2개의 공의 색깔이 같은 사건을 A, 2개의 공에 적힌 숫자가 같은 사건을 B라 하면 2개의 공의 색깔이 같거나 공에 적힌 숫자가 같은 사건은 $A\cup B$, 2개의 공의 색깔과 공에 적힌 숫자가 모두 같은 사건은 $A\cap B$이다.

(ⅰ) 2개의 공의 색깔이 같을 때,

빨간색 공 $\underbrace{5}_{4+1=5}$개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

노란색 공 $\underbrace{5}_{4+1=5}$개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

$$\therefore\ P(A)=\frac{10+10}{45}=\frac{20}{45}$$

(ⅱ) 2개의 공에 적힌 숫자가 같을 때,

숫자 1이 적힌 공 $\underbrace{8}_{4+4=8}$개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$$

숫자 2가 적힌 공 $\underbrace{2}_{1+1=2}$개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_2C_2=1$$

$$\therefore\ P(B)=\frac{28+1}{45}=\frac{29}{45}$$

(ⅲ) 2개의 공의 색깔과 공에 적힌 숫자가 모두 같을 때,

숫자 1이 적힌 빨간색 공 4개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

숫자 1이 적힌 노란색 공 4개에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

$$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{6+6}{45}=\frac{12}{45}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{20}{45}+\frac{29}{45}-\frac{12}{45}=\frac{37}{45}\end{aligned}$$

답 ④

14

세 자리 자연수의 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9의 9개, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 0, 1, 2, …, 9의 10개이므로 세 자리 자연수의 개수는

$$9\times 10\times 10=900$$

이때, $a>b$인 사건을 A, $b>c$인 사건을 B라 하면 $a>b$ 또는 $b>c$인 사건은 $A\cup B$, $a>b>c$인 사건은 $A\cap B$이다.

(ⅰ) $a>b$일 때,

$a>b$를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$

이때, c는 10개의 숫자 0, 1, 2, …, 9에서 하나를 택하면 되므로 경우의 수는 10이다.

$$\therefore\ P(A)=\frac{45\times 10}{900}=\frac{450}{900}$$

(ⅱ) $b>c$일 때,

$b>c$를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_2=45$$

이때, a는 9개의 숫자 1, 2, 3, …, 9에서 하나를 택하면 되므로 경우의 수는 9이다.

$$\therefore\ P(B)=\frac{45\times 9}{900}=\frac{405}{900}$$

(ⅲ) $a>b>c$일 때,

$a>b>c$를 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_3=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$$

$$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{120}{900}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{450}{900}+\frac{405}{900}-\frac{120}{900}=\frac{49}{60}\end{aligned}$$

답 $\frac{49}{60}$

다른풀이

세 자리 자연수의 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9의 9개, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각

각 0, 1, 2, ⋯, 9의 10개이므로 세 자리 자연수의 개수는

$9\times10\times10=900$

이때, $a>b$ 또는 $b>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 $a\le b\le c$인 사건이다.

$a\le b\le c$를 만족시키는 한 자리의 자연수 a, b, c의 순서쌍의 개수는 $1\le a\le b\le c\le 9$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.

이것은 9개의 숫자 1, 2, 3, ⋯, 9에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_9\mathrm{H}_3={}_{9+3-1}\mathrm{C}_3={}_{11}\mathrm{C}_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{165}{900}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{165}{900}=\frac{49}{60}$$

15

집합 S의 원소의 개수는 7이므로 집합 S의 부분집합의 개수는

$2^7=128$

이때, 원소가 2개 이상인 부분집합은 전체 부분집합에서 공집합과 원소의 개수가 1인 부분집합을 제외시킨 것과 같으므로 집합 S의 부분집합 중 원소가 2개 이상인 집합의 개수는

$128-(1+7)=120$

원소가 2개 이상인 부분집합의 모든 원소의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 원소가 2개 이상인 부분집합의 모든 원소의 곱이 홀수인 사건이다.

이때, 부분집합의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 집합 S의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7만으로 원소가 2개 이상인 부분집합을 만들어야 한다.

즉, 원소가 2개 이상이면서 모든 원소의 곱이 홀수인 집합의 개수는

$$2^4-(\underbrace{1}_{\text{공집합}}+\underbrace{4}_{\text{원소의 개수가 1인 집합}})=16-5=11$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{11}{120}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{11}{120}=\frac{109}{120}$$

답 $\dfrac{109}{120}$

16

ㄱ. $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)$이므로
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1$ (참)

ㄴ. (반례) $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면
$A\cup B=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$이지만 $B\neq A^C$ (거짓)

ㄷ. (반례) $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$이면
$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$이지만 $A\cap B=\{1\}$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄹ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
이때, $(A\cup B)\subset S$이므로
$0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$
$\therefore\ 0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

17

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또한, $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$이므로 $\frac{2}{5}\le\mathrm{P}(A^C)\le\frac{1}{2}$에서

$$\frac{2}{5}\le1-\mathrm{P}(A)\le\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{5}\le-\mathrm{P}(A)\le-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{3}{5}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

한편, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$이고
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{3}{5}+\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{3}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{17}{20}$에서

$$-\frac{17}{20}\le-\mathrm{P}(A\cup B)\le-\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{20}\le1-\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \frac{3}{20}\le\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\le\frac{1}{4}$$

따라서 $M=\frac{1}{4}$, $m=\frac{3}{20}$이므로

$$M+m=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

18

서로 다른 20개에서 임의로 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{20}C_3=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$$

$7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, $\cdots$이므로 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

즉, $a_1=a_5=a_9=a_{13}=a_{17}=7$,

$a_2=a_6=a_{10}=a_{14}=a_{18}=9$,

$a_3=a_7=a_{11}=a_{15}=a_{19}=3$,

$a_4=a_8=a_{12}=a_{16}=a_{20}=1$

이때, 임의로 택한 3개의 수의 합이 10보다 큰 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 3개의 수의 합이 10 이하인 사건이고, 3개의 수의 합이 10 이하인 경우는 $1+1+1$, $1+1+3$, $1+1+7$, $1+3+3$, $3+3+3$일 때이다.

(i) $1+1+1$ 또는 $3+3+3$일 때,

각 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

즉, 이 경우의 수는

$10\times2=20$

(ii) $1+1+3$ 또는 $1+1+7$ 또는 $1+3+3$일 때,

각 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개, 1개를 택하는 조합의 수의 곱과 같으므로

${}_5C_2\times{}_5C_1=10\times5=50$

즉, 이 경우의 수는

$50\times3=150$

(i), (ii)에서 3개의 수의 합이 10 이하인 경우의 수는

$20+150=170$

$$\therefore\ P(A^C)=\frac{170}{1140}=\frac{17}{114}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{17}{114}=\frac{97}{114}$$

답 $\frac{97}{114}$

19

13개의 좌석에 4명의 관객이 일렬로 앉는 경우의 수는

${}_{13}P_4=13\times12\times11\times10$

4명의 관객을 A, B, C, D라 하고, 관객 사이사이와 양 끝의 빈 자리의 개수를 a, b, c, d, e라 하면 4명의 관객이 서로 이웃하지 않게 앉는 경우는 다음과 같이 배열할 때이다.

a	A	b	B	c	C	d	D	e

이때, 모든 좌석의 개수는 13이고 A, B, C, D가 앉는 좌석의 개수는 4이므로

$a+b+c+d+e=9$

($b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge1$인 정수이고, a, e는 음이 아닌 정수)

$b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

(b', c', d'은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $a+b+c+d+e=9$에서

$a+b'+c'+d'+e=6$

방정식 $a+b'+c'+d'+e=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d', e의 순서쌍 (a, b', c', d', e)의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_6={}_{5+6-1}C_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

이때, 4명의 관객이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{210\times24}{13\times12\times11\times10}=\frac{42}{143}$$

답 $\frac{42}{143}$

20

4명의 학생을 각각의 열에 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

각 열에서 학생들이 물품보관함을 고르는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

즉, 모든 경우의 수는

24×81

4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 차례대로 물품보관함에 1열부터 배열했다고 하자.

학생 A가 1열에서 1번 물품보관함을 배정받았다고 할 때, 2열에서 학생 B가 선택할 수 있는 물품보관함은 6, 10의 2가지이다.

각 경우에 대하여 3열, 4열에서 학생 C, D가 선택할 수 있는 경우의 수는 2가지씩 존재하므로 이 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

이때, 학생 A가 선택할 수 있는 물품보관함의 수는 3이므로 구하는 경우의 수는

$8\times3=24$

4명의 학생을 각각의 열에 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24\times24}{24\times81}=\frac{8}{27}$

답 $\frac{8}{27}$

21

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6^3=216$

$\frac{M}{m}>\frac{5}{2}$, 즉 $M>\frac{5m}{2}$이고, $M\le6$이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $m=1$일 때,

$\frac{5}{2}<M\le6$이므로

① $M=3$일 때,

나온 눈의 수가 $(1,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 3)$일 때이다.

② $M=4$일 때,

나온 눈의 수가 $(1,\ 4,\ 1)$, $(1,\ 4,\ 2)$, $(1,\ 4,\ 3)$, $(1,\ 4,\ 4)$일 때이다.

③ $M=5$일 때,

나온 눈의 수가 $(1,\ 5,\ 1)$, $(1,\ 5,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 3)$, $(1,\ 5,\ 4)$, $(1,\ 5,\ 5)$일 때이다.

④ $M=6$일 때,

나온 눈의 수가 $(1,\ 6,\ 1)$, $(1,\ 6,\ 2)$, $(1,\ 6,\ 3)$, $(1,\ 6,\ 4)$, $(1,\ 6,\ 5)$, $(1,\ 6,\ 6)$일 때이다.

①~④에서 각 순서쌍을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\underbrace{10\times3!}_{\text{세 눈의 수가 모두 다른 경우}}+\underbrace{8\times\frac{3!}{2!}}_{\text{세 눈 중 두 눈의 수가 같은 경우}}=60+24=84$

(ii) $m=2$일 때,

$5<M\le6$에서 $M=6$이므로 나온 눈의 수가 $(2,\ 6,\ 2)$, $(2,\ 6,\ 3)$, $(2,\ 6,\ 4)$, $(2,\ 6,\ 5)$, $(2,\ 6,\ 6)$일 때이다.

각 순서쌍을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3\times3!+2\times\frac{3!}{2!}=18+6=24$

(i), (ii)에서 $m=1$인 사건을 A, $m=2$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{84}{216}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{24}{216}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{84}{216}+\frac{24}{216}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

22

방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

$a=2b$인 사건을 A, $c=2d$인 사건을 B라 하면 $a\neq2b$이고 $c\neq2d$인 사건은 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

(i) $a=2b$일 때,

$a+b+c+d=6$에서 $3b+c+d=6$이므로

① $b=0$일 때,

방정식 $c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는 $(0,\ 6)$, $(1,\ 5)$, $\cdots$, $(6,\ 0)$의 7이다. ← 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2\mathrm{H}_6=7$과 같다.

② $b=1$일 때,

방정식 $c+d=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는 $(0,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$의 4이다. ← 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2\mathrm{H}_3=4$와 같다.

③ $b=2$일 때,

방정식 $c+d=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 $(c,\ d)$의 개수는 $(0,\ 0)$의 1이다.

①, ②, ③에서 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$7+4+1=12$

(ii) $c=2d$일 때,

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는 12

(iii) $a=2b$이고 $c=2d$일 때,

$a+b+c+d=6$에서

$3b+3d=6 \qquad \therefore\ b+d=2$

방정식 $b+d=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d의 순서쌍 $(b,\ d)$의 개수는 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$의 3이다. ← 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2\mathrm{H}_2=3$과 같다.

(i), (ii), (iii)에서 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{84},\ \mathrm{P}(B)=\frac{12}{84},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{84}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{12}{84}+\frac{12}{84}-\frac{3}{84}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a\neq 2b$이고 $c\neq 2d$를 만족시킬 확률은

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

즉, $p=4$, $q=3$이므로

$p+q=4+3=7$

답 7

23

자동차 B의 운전자는 자리를 바꾸지 않으므로 자동차 B에서 운전자를 제외한 나머지 6명이 자리에 앉는 경우의 수는

$6!=720$

처음부터 자동차 B에 탔던 2명이 모두 처음 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 처음부터 자동차 B에 탔던 2명 중 적어도 1명이 처음 좌석에 앉는 사건이다.

처음부터 자동차 B에 탔던 운전자가 아닌 두 사람을 a, b라 하면 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) a가 처음 좌석에 앉을 때,

나머지 5명이 5개의 좌석에 앉으면 되므로 경우의 수는

$5!=120$

(ii) b가 처음 좌석에 앉을 때,

(i)과 같은 방법으로 구하면 경우의 수는

$5!=120$

(iii) a, b 모두 처음 좌석에 앉을 때,

나머지 4명이 4개의 좌석에 앉으면 되므로 경우의 수는

$4!=24$

(i), (ii), (iii)에서 처음부터 자동차 B에 탔던 2명 중 적어도 1명이 처음 좌석에 앉는 경우의 수는

$120+120-24=216$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

다른풀이

자동차 B의 운전자는 자리를 바꾸지 않으므로 자동차 B에서 운전자를 제외한 나머지 6명이 자리에 앉는 경우의 수는

$6!=720$

처음부터 자동차 B에 탔던 운전자가 아닌 두 사람을 a, b라 하자.

(i) a가 b의 자리에 앉을 때,

b와 자동차 A에 타고 있던 4명이 나머지 5개의 자리에 앉는 경우의 수는

$5!=120$

(ii) a가 a, b가 앉았던 자리를 제외한 다른 자리에 앉을 때,

a가 앉을 수 있는 자리의 수는 4, ← a, b가 앉았던 자리 제외

b가 앉을 수 있는 자리의 수는 4, ← b가 앉았던 자리와 a가 앉은 자리 제외

자동차 A에 타고 있던 4명이 나머지 4개의 자리에 앉는 경우의 수는 $4!$이므로 이 경우의 수는

$4\times 4\times 4!=384$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{120+384}{720}=\frac{7}{10}$$

24

6명의 학생이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_6=3^6$

어떤 사람도 이기지 못하는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 적어도 한 사람이 이기는 사건이다.

6명의 학생이 가위바위보를 해서 $n(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$명이 이기는 경우는 다음과 같다.

6명 중 n명을 택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_n$

n명이 가위, 바위, 보 중 하나를 택하면 지는 학생들이 택하는 것은 각각 보, 가위, 바위로 정해진다.

이때, 가위바위보를 이기는 학생이 가위, 바위, 보 중 하나를 택하는 경우의 수는 3이므로 6명의 학생이 가위바위보를 했을 때 n명의 학생이 이기는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_n\times3$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{({}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_5)\times3}{3^6}$$

$$=\frac{2^6-2}{3^5}=\frac{62}{243}$$

따라서 어떤 사람도 이기지 못할 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$

$$=1-\frac{62}{243}=\frac{181}{243}$$

즉, $p=243,\ q=181$이므로

$p+q=243+181=424$

답 424

다른풀이

여사건을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

6명의 학생이 가위바위보를 할 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_6=3^6=729$

어떤 사람도 이기지 못하는 사건을 A라 하면 여사건 A^C는 적어도 한 사람이 이기는 사건이다.

6명의 학생이 가위바위보를 할 때, 승자가 나오려면 6명이 가위, 바위, 보 중에서 2개만을 택해야 한다.

가위, 바위, 보 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

가위, 바위로 승부가 정해졌다고 할 때, 6명이 가위, 바위 중에서 하나를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때, 6명이 모두 가위 또는 바위만을 내는 경우는 제외시켜야하므로 이 경우의 수는

$64-2=62$

즉, 6명이 가위바위보를 했을 때 승부가 나는 경우의 수는

$62\times3=186$

따라서 적어도 한 사람이 이길 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{186}{729}=\frac{181}{243}$$

즉, $p=243,\ q=181$이므로

$p+q=243+181=424$

유형 연습 **04** 조건부확률 본문 pp.98~111

01-1 $\frac{7}{9}$	01-2 $\frac{2}{3}$	01-3 ㄱ, ㄷ, ㄹ
02-1 $\frac{8}{15}$	02-2 72	03-1 $\frac{2}{49}$
03-2 6	04-1 $\frac{1}{3}$	04-2 $\frac{13}{55}$
04-3 $\frac{1}{37}$	05-1 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{10}$	05-2 $\frac{31}{45}$
05-3 $\frac{39}{64}$	06-1 $\frac{1}{4}$	06-2 39
07-1 $\frac{432}{625}$	07-2 $\frac{127}{512}$	08-1 $\frac{4}{27}$
08-2 $\frac{89}{140}$	08-3 115	

01-1

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$이므로

$$\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$$

한편, $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$에서

$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{3}{5}}=\frac{7}{9}$$

답 $\frac{7}{9}$

01-2

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cup B)+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\mathrm{P}(A\cup B)-\frac{1}{2}$$

$\mathrm{P}(B)$의 값이 최대이려면 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$이어야 하므로

$M=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)$의 값이 최소이려면 $B\subset A$이어야 하므로

$B\subset A$이면 $A\cup B=A$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

$m=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ M+m=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

01-3

ㄱ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1\ (\text{참})$$

ㄴ. (반례) $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A=\{1\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{1,\ 5\}$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$이지만

$A\cap C=\{1\}$, $B\cap C=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=0$

즉, $\mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{0}{\frac{2}{6}}=0$이므로

$\mathrm{P}(B|C)<\mathrm{P}(A|C)$ (거짓)

ㄷ. $A\cup B=D$에서 $A\subset D$이므로

$(A\cap C)\subset(C\cap D)$

즉, $\mathrm{P}(A\cap C)\le\mathrm{P}(C\cap D)$이므로

$\mathrm{P}(A|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$, $\mathrm{P}(D|C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}$에서

$\mathrm{P}(A|C)\le\mathrm{P}(D|C)$ (참)

ㄹ. $A\cap B=E$에서 $E\subset A$이므로

$(E\cap C)\subset(A\cap C)$

즉, $\mathrm{P}(E\cap C)\le\mathrm{P}(A\cap C)$이므로

$\mathrm{P}(E|C)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$, $\mathrm{P}(A|C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}$에서

$\mathrm{P}(E|C)\le\mathrm{P}(A|C)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

02-1

두 직업 A와 B를 모두 체험한 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

직업 A를 체험한 학생 160명 중 1학년 학생이 45 %이므로

직업 A를 체험한 1학년 학생의 수는 $160\times0.45=72$,

직업 A를 체험한 2학년 학생의 수는 $160-72=88$

직업 B를 체험한 학생 150명 중 1학년 학생이 60 %이므로

직업 B를 체험한 1학년 학생의 수는 $150\times0.6=90$,

직업 B를 체험한 2학년 학생의 수는 $150-90=60$

즉, 직업 A와 B를 모두 체험한 1학년 학생의 수는 $\underbrace{42}_{(72+90)-120=42}$,

직업 A와 B를 모두 체험한 2학년 학생의 수는 $\underbrace{48}_{(88+60)-100=48}$이므로

직업 A와 B를 모두 체험한 학생의 수는

$42+48=90$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{48}{220}}{\frac{90}{220}}=\frac{8}{15}$$

답 $\dfrac{8}{15}$

02-2

(단위 : 명)

구분	19세 이하	20대	30대	40세 이상	합계
남성	40	a	$60-a$	100	200
여성	35	$45-b$	b	20	100
합계	75	$45+a-b$	$60-a+b$	120	300

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로 위의 표에서

$$\frac{60-a+b}{300}=\frac{12}{100}$$

$\therefore a-b=24$ ⋯⋯㉠

도서관 이용자 300명 중에서 임의로 선택한 1명이 남성인 사건을 A, 20대인 사건을 B, 30대인 사건을 C라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(C|A^C)$이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap C)}{\mathrm{P}(A^C)}$$

$$\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}},\ \frac{a}{200}=\frac{b}{100}$$

$\therefore a=2b$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=48$, $b=24$

$\therefore a+b=48+24=72$

답 72

03-1

흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 같은 색인 사건을 A, 주어진 시행 후 8개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 꺼낸 3개의 공이 모두 흰색인 사건을 B라 하자.

이때, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{3+6}{21}=\dfrac{3}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$

(i) 처음 상자에서 꺼낸 2개의 공이 같은 색일 때,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\underbrace{\mathrm{P}(B|A)}_{\text{흰 공 4개와 검은 공 4개에서 흰 공 3개를 꺼낼 확률}}=\frac{3}{7}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7}\times\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$$

(ii) 처음 상자에서 꺼낸 2개의 공이 다른 색일 때,

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\underbrace{\mathrm{P}(B|A^C)}_{\text{흰 공 3개와 검은 공 5개에서 흰 공 3개를 꺼낼 확률}}=\frac{4}{7}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{4}{7}\times\frac{1}{56}=\frac{1}{98}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{98}+\frac{1}{98}=\frac{2}{49}$$

답 $\frac{2}{49}$

03-2

A가 ♥가 그려진 카드를 꺼내는 사건을 A, B가 ♥가 그려진 카드를 꺼내는 사건을 B라 하자.

(ⅰ) A, B가 모두 ♥가 그려진 카드를 꺼낼 때,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$

♥가 그려진 카드 4장과 ♣가 그려진 카드 n장 중에서 ♥가 그려진 카드를 뽑을 확률

$$=\frac{5}{n+5}\times\frac{4}{n+4}$$

$$=\frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

(ⅱ) A, B가 모두 ♣가 그려진 카드를 꺼낼 때,

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)$$

♥가 그려진 카드 5장과 ♣가 그려진 카드 $(n-1)$장 중에서 ♣가 그려진 카드를 뽑을 확률

$$=\frac{n}{n+5}\times\frac{n-1}{n+4}$$

$$=\frac{n^2-n}{(n+5)(n+4)}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 A, B가 꺼낸 카드의 모양이 같을 확률은

$$\frac{20}{(n+5)(n+4)}+\frac{n^2-n}{(n+5)(n+4)}=\frac{n^2-n+20}{(n+5)(n+4)}$$

즉, $\frac{n^2-n+20}{(n+5)(n+4)}=\frac{5}{11}$이므로

$11n^2-11n+220=5n^2+45n+100$

$3n^2-28n+60=0,\ (3n-10)(n-6)=0$

$\therefore\ n=6$ ($\because$ n은 자연수)

답 6

04-1

상자 A를 택하는 사건을 A, 상자 B를 택하는 사건을 B, 상자에서 검은 공 2개를 꺼내는 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C|A)$$

상자 A에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률

$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C|B)$$

상자 B에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률

$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

이때, 두 사건 $A\cap C$, $B\cap C$는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$$

상자에서 검은 공 2개를 꺼냈을 때, 상자에 남은 공이 모두 흰 공이려면 상자 B에서 공을 꺼냈어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{20}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

04-2

갑을 지지하던 유권자 중 $x\,\%$가 갑에게 투표했을 때, 갑의 득표율은

$$\frac{40}{100}\times\frac{x}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{4x+420}{1000}$$

이때, 갑의 득표율이 $55\,\%$이므로

$$\frac{4x+420}{1000}=\frac{55}{100},\quad 4x+420=550$$

$$\therefore\ x=\frac{130}{4}$$

즉, 갑과 을의 지지율과 득표율을 표로 나타내면 다음과 같다.

	갑에게 투표	을에게 투표	합계
갑 지지	0.13	0.27	0.4
을 지지	0.42	0.18	0.6
합계	0.55	0.45	1

따라서 선거 운동 시작 전 갑을 지지하던 유권자 중 한 명을 선택하는 사건을 A, 갑에게 투표한 유권자 중 한 명을 선택하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.13}{0.55}=\frac{13}{55}$$

답 $\frac{13}{55}$

보충설명

주어진 조건을 이용하여 표를 작성하고 나머지 칸을 다음과 같은 순서로 계산하면 편리하게 답을 구할 수 있다.

	갑에게 투표	을에게 투표	합계
갑 지지	0.13 ⑤	0.27 ④	0.4
을 지지	0.42 ②	0.18 ③	0.6
합계	0.55	0.45 ①	1

04-3

공을 서로 교환한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 검은 공과 흰 공의 개수가 같으려면 주머니 A는 공을 서로 교환한 후 검은 공의 개수가 1개 줄어들어야 한다.

주머니 A에서 꺼내는 공에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 주머니 A에서 검은 공 3개를 꺼낼 때,

주머니 A에서 검은 공 3개, 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내어 교환해야 하므로

$$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{4}{35}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{175}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공 2개와 흰 공 1개를 꺼낼 때,

주머니 A에서 검은 공 2개와 흰 공 1개를 꺼내고 주머니 B에서 검은 공 1개와 흰 공 1개를 꺼내어 교환해야 하므로

$$\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{18}{35}\times\frac{6}{10}=\frac{54}{175}$$

(iii) 주머니 A에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 꺼낼 때,

주머니 A에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 꺼내고 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내어 교환해야 하므로

$$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{12}{35}\times\frac{3}{10}=\frac{18}{175}$$

(i), (ii), (iii)에서 공을 서로 교환한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 검은 공과 흰 공의 개수가 각각 같을 확률은

$$\frac{2}{175}+\frac{54}{175}+\frac{18}{175}=\frac{74}{175}$$

이때, 검은 공만 서로 교환되는 경우는 (i)이므로 구하는 확률은

$$\frac{\frac{2}{175}}{\frac{74}{175}}=\frac{1}{37}$$

답 $\frac{1}{37}$

05-1

(1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}+\{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

즉, $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{3}{8}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$

$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

이때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}$

$=\frac{3}{8}-\frac{3}{40}=\frac{3}{10}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{10}$

다른풀이

(1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C와 B도 모두 서로 독립이다. 즉,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$

이므로

$\frac{1}{6}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{5}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{3}{8}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{8}\mathrm{P}(B)$

$\frac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

05-2

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$ ······㉠

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 모두 서로 독립이다.

즉, $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)+\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)+\frac{1}{5}$

$\frac{1}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{1}{5}$ ($\because$ ㉠)

$\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)+\frac{1}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{8}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}\\&=\frac{1}{3}+\frac{8}{15}-\frac{8}{45}=\frac{31}{45}\end{aligned}$$

답 $\frac{31}{45}$

05-3

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^C도 서로 독립이다.

즉, $\mathrm{P}(A|B^C)+\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}$ ······㉠

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B^C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\frac{3}{4}-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$가 최대이면 $\mathrm{P}(A\cup B^C)$는 최소이다.

한편, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B^C)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)\ge 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}$

$\frac{3}{4}\ge 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\le\frac{9}{64}$

(단, 등호는 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{8}$일 때 성립)

따라서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$의 최댓값이 $\frac{9}{64}$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B^C)$의 최솟값은

$\frac{3}{4}-\frac{9}{64}=\frac{39}{64}$

답 $\frac{39}{64}$

06-1

A, B가 10점에 화살을 쏘는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$

이때, 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{5}P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{9}{10}=\frac{3}{5}+P(B)-\frac{3}{5}P(B)$

$\frac{3}{10}=\frac{2}{5}P(B)\qquad \therefore\ P(B)=\frac{3}{4}$

따라서 B가 10점에 화살을 쏘지 못할 확률은

$P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

06-2

두 주머니 A, B에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, $P(A^C)=\frac{4}{5}$, $P(B^C)=\frac{3}{5}$

두 수의 합이 짝수일 확률은 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) (짝수)+(짝수)일 때,

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$

(ii) (홀수)+(홀수)일 때,

두 주머니 A, B에서 홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 각각 A^C, B^C이고 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A^C와 B^C도 서로 독립이다.

$$\therefore\ P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$$

(i), (ii)에서 두 수의 합이 짝수일 확률은

$\frac{2}{25}+\frac{12}{25}=\frac{14}{25}$

따라서 $p=25$, $q=14$이므로

$p+q=25+14=39$

답 39

07-1

주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때 두 공의 색이 서로 같은 사건을 A라 하자.

두 공의 색이 서로 같으려면 동시에 꺼낸 두 공이 모두 흰 공이거나 모두 검은 공이어야 하므로 두 공의 색이 서로 같을 확률은

$P(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$

두 공이 서로 다른 색인 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

이때, 원점에 있던 점 P가 4번의 시행 후에

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$의 내부에 있는 경우는 다음의 2가지 뿐이다.

(i) 점 P가 점 $(1, 3)$에 있을 때,

원점에 있던 P가 x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동해야 하므로 4번의 시행 중 두 공의 색이 서로 같은 사건은 1번 일어나야 한다.

이때의 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

(ii) 점 P가 점 $(2, 2)$에 있을 때,

원점에 있던 P가 x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동해야 하므로 4번의 시행 중 두 공의 색이 서로 같은 사건은 2번 일어나야 한다.

이때의 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{216}{625}+\frac{216}{625}=\frac{432}{625}$

답 $\frac{432}{625}$

07-2

두 개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 2개 나올 확률은 $\frac{1}{4}$, 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 앞면이 나오지 않을 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

꼭짓점 A에서 출발한 말이 다시 꼭짓점 A로 돌아오려면 5의 배수만큼 이동해야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) 말이 5만큼 이동할 때,

2만큼 이동하는 횟수를 a, 1만큼 이동하는 횟수를 b, 이동하지 않는 횟수를 c라 하자.

앞면이 1개 나오는 사건 / 앞면이 2개 나오는 사건 / 앞면이 나오지 않는 사건

두 개의 동전을 5회 던져 5만큼 이동하려면 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(0,\ 5,\ 0)$, $(1,\ 3,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 2)$의 3가지 경우가 나올 수 있다.

① $(a,\ b,\ c)=(0,\ 5,\ 0)$일 때,

두 개의 동전을 5회 던져 앞면이 1개 나오는 시행이 5번 연속으로 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

② $(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 1)$일 때,

두 개의 동전을 5회 던져 앞면이 2개 나오는 시행이 1번, 앞면이 1개 나오는 시행이 3번, 앞면이 나오지 않는 시행이 1번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_1C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1$$
$$=\frac{5}{4}\times\frac{4}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$$

③ $(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 2)$일 때,

두 개의 동전을 5회 던져 앞면이 2개 나오는 시행이 2번, 앞면이 1개 나오는 시행이 1번, 앞면이 나오지 않는 시행이 2번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_2C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$=\frac{10}{16}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{16}=\frac{15}{256}$$

(ⅱ) 말이 10만큼 이동할 때,

두 개의 동전을 5회 던져 앞면이 2개 나오는 시행이 5번 연속으로 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$$

(ⅲ) 말이 이동하지 않을 때,

두 개의 동전을 5회 던져 앞면이 나오지 않는 시행이 5번 연속으로 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{15}{256}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{127}{512}$$

답 $\frac{127}{512}$

08-1

1번의 시행에서 A가 쿠폰을 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, B가 쿠폰을 받을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

A, B 순서대로 번갈아가며 게임을 할 때, B가 주사위를 세 번 던져서 이기려면 다섯 번째 순서까지 B는 한 개의 쿠폰을 받아야 한다. ← 여섯 번째 순서에 B가 두 번째 쿠폰을 받아야 한다.

이때, A가 받은 쿠폰의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(ⅰ) A가 받은 쿠폰의 개수가 0일 때,

A는 한 개의 동전을 세 번 던져 세 번 모두 동전의 뒷면이 나와야 하고 B는 한 개의 주사위를 두 번 던져 한 번은 4 이하의 눈이, 한 번은 5 이상의 눈이 나와야 한다.

또한, 마지막에 B가 던진 주사위는 4 이하의 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{27}$$

(ⅱ) A가 받은 쿠폰의 개수가 1일 때,

A는 한 개의 동전을 세 번 던져 동전의 뒷면이 두 번, 앞면이 한 번 나와야 하고 B는 한 개의 주사위를 두 번 던져 한 번은 4 이하의 눈이, 한 번은 5 이상의 눈이 나와야 한다.

또한, 마지막에 B가 던진 주사위는 4 이하의 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=\frac{4}{27}$$

답 $\frac{4}{27}$

08-2

5번의 경기만에 우승팀이 결정되는 사건을 A, K팀이 첫 번째 경기에서 이기는 사건을 B라 하자.

한 팀이 5번째 경기에서 이겨 우승하려면 4번째 경기까지 세 번을 이기고 한 번을 진 뒤 마지막 5번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) K팀이 5번째 경기에서 이겨 우승했을 때,

K팀이 N팀을 이길 확률은 $\frac{3}{5}$이므로 K팀이 5번째 경기에서 이겨 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}=\frac{2^3\times3^3}{5^4}\times\frac{3}{5}=\frac{2^3\times3^4}{5^5}$$

(ii) N팀이 5번째 경기에서 이겨 우승했을 때,

N팀이 K팀을 이길 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 N팀이 5번째 경기에서 이겨 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{2^5\times3}{5^4}\times\frac{2}{5}=\frac{2^6\times3}{5^5}$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 5번의 경기만에 우승팀이 결정될 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2^3\times3^4}{5^5}+\frac{2^6\times3}{5^5}=\frac{840}{5^5}$$

이때, K팀이 첫 번째 경기에서 이기고 5번 만에 우승팀이 결정되는 사건은

KKKNK, KKNKK, KNKKK, KNNNN

의 4가지이므로 사건 $A\cap B$의 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=3\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1+\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$$
$$=\frac{3^5\times2+3\times2^4}{5^5}=\frac{534}{5^5}$$

따라서 5번의 경기만에 우승팀이 결정되었을 때, K팀이 첫 번째 경기에서 이겼을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{534}{5^5}}{\frac{840}{5^5}}=\frac{89}{140}$$

답 $\frac{89}{140}$

08-3

6의 약수의 개수는 1, 2, 3, 6의 4이므로 주사위를 한 번 던질 때, 갑이 1점을 얻을 확률은 $\frac{2}{3}$, 을이 2점을 얻을 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

게임을 중단하지 않고 계속 진행했을 때, 갑이 먼저 10점을 얻어 상금을 받으려면 갑이 6번을 더 이겨야 하므로 갑이 상금을 받을 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 갑이 6번째 게임에서 상금을 탈 때,

6번의 게임에서 모두 갑이 이길 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$$

(ii) 갑이 7번째 경기에서 상금을 탈 때,

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{\text{갑}}$에서 6번째 게임까지 갑이 5번, 을이 1번 이기고 7번째 게임에서 갑이 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{128}{729}$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 갑이 상금을 탈 확률은

$$\frac{64}{729}+\frac{128}{729}=\frac{64}{243}$$

즉, 을이 상금을 탈 확률은

$$1-\frac{64}{243}=\frac{179}{243}$$

따라서 $m:n=64:179$이므로

$n-m=179-64=115$

답 115

개념 마무리

본문 pp.113~116

01 13	**02** $\frac{11}{70}$	**03** $\frac{1}{4}$	**04** $\frac{1}{2}$
05 ④	**06** $\frac{7}{12}$	**07** ②	**08** $\frac{1}{5}$
09 $\frac{9}{11}$	**10** $\frac{9}{13}$	**11** $\frac{7}{13}$	**12** $\frac{8}{25}$
13 180	**14** $\frac{1}{4}$	**15** ④	**16** 0.81
17 ⑤	**18** 6	**19** 80	**20** $\frac{4}{31}$
21 50	**22** $\frac{8}{15}$	**23** $\frac{1}{14}$	

01

C가 혼자 이길 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) C가 가위를 내어 혼자 이겼을 때,
A, B는 모두 보를 내야 하므로
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{144}$

(ⅱ) C가 바위를 내어 혼자 이겼을 때,
A, B는 모두 가위를 내야 하므로
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

(ⅲ) C가 보를 내어 혼자 이겼을 때,
A, B는 모두 바위를 내야 하므로
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 C가 혼자 이길 확률은

$\frac{1}{144}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}=\frac{1}{8}$

따라서 C가 혼자 이겼을 때, C가 '보'를 내었을 확률은

$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{8}}=\frac{4}{9}$

즉, $p=9$, $q=4$이므로

$p+q=9+4=13$

답 13

02

조건 (나)에서 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 각 사건은 서로 배반사건이다.

즉, $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$

이때, $\mathrm{P}(C)=p$라 하면 조건 (다)에서

$\mathrm{P}(B)=2p$, $\mathrm{P}(A)=4p$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)\\&=4p+2p+p=7p\end{aligned}$$

조건 (가)에서 $A\cup B\cup C=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=1$

즉, $7p=1$이므로 $p=\frac{1}{7}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{4}{7},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{7},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{7}$

$\mathrm{P}(D|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap D)}{\mathrm{P}(A)}$에서

$\mathrm{P}(A\cap D)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D|A)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{35}$

$\mathrm{P}(D|B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap D)}{\mathrm{P}(B)}$에서

$\mathrm{P}(B\cap D)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(D|B)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{35}$

$\mathrm{P}(D|C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}$에서

$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C)=\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{70}$

따라서 $D=(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D)&=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)\\&=\frac{2}{35}+\frac{2}{35}+\frac{3}{70}=\frac{11}{70}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{70}$

03

남학생 수와 여학생 수의 비가 $3:2$이므로 이 고등학교의 전체 학생의 60 %는 남학생, 40 %는 여학생이다.

전체 학생의 80 %가 스마트폰을 2시간 이상, 20 %가 스마트폰을 2시간 미만 사용하고 있고, 스마트폰을 2시간 이상 사용하는 여학생의 비율은 $\frac{1}{4}=0.25$이므로 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	합계
2시간 이상 사용	0.55	0.25	0.8
2시간 미만 사용	0.05	0.15	0.2
합계	0.6	0.4	1

임의로 택한 한 명이 스마트폰 사용 시간이 2시간 미만인 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.2$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{0.05}{0.2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

보충설명

주어진 조건을 이용하여 표를 작성하고 나머지 칸을 다음과 같은 순서로 계산하면 편리하게 답을 구할 수 있다.

	남학생	여학생	합계
2시간 이상 사용	0.55 ③	0.25 ①	0.8
2시간 미만 사용	0.05 ④	0.15 ②	0.2
합계	0.6	0.4	1

04

집합 S의 공집합이 아닌 모든 부분집합의 개수는

$2^4-1=15$

집합 S의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 서로 다른 두 개의 부분집합 A, B를 택하는 경우의 수는

${}_{15}\mathrm{P}_2=15\times14=210$

A, B는 S의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$1\le n(A)\le4$, $1\le n(B)\le4$

또한, 한 번 택한 집합은 다시 택하지 않으므로 $A\ne B$

이때, $n(A\cap B)$의 가능한 값은 0, 1, 2, 3이다.

① $n(A\cap B)=0$일 때,

$n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$에서

$n(A)\times n(B)=0$

그런데 $n(A)\ge1$, $n(B)\ge1$이므로 이를 만족시키는 A, B는 존재하지 않는다.

② $n(A\cap B)=1$일 때,

$n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$에서

$n(A)\times n(B)=2$

$\therefore$ $n(A)=1$, $n(B)=2$ 또는 $n(A)=2$, $n(B)=1$

③ $n(A\cap B)=2$일 때,

$n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$에서

$n(A)\times n(B)=4$

그런데 $n(A\cap B)=2$에서 $n(A)\ge2$, $n(B)\ge2$이고 $A\ne B$이므로 이를 만족시키는 A, B는 존재하지 않는다.

④ $n(A\cap B)=3$일 때,

$n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$에서

$n(A)\times n(B)=6$

그런데 $n(A\cap B)=3$에서 $n(A)\ge3$, $n(B)\ge3$이므로 이를 만족시키는 A, B는 존재하지 않는다.

①~④에서 $n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$를 만족시키는 경우는 다음과 같이 2가지이다.

(i) $n(A)=1$, $n(B)=2$, $n(A\cap B)=1$일 때,

집합 A는 집합 S에서 하나의 원소를 택하면 되므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

집합 B는 집합 S에서 집합 A에서 택한 원소 한 개와 나머지 세 원소 중 한 개의 원소를 택하면 되므로 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

즉, 이 경우의 수는 $4\times3=12$이므로 구하는 확률은

$\dfrac{12}{210}=\dfrac{2}{35}$

(ii) $n(A)=2$, $n(B)=1$, $n(A\cap B)=1$일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 구하는 확률은 $\dfrac{2}{35}$

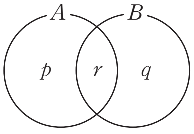
(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{2}{35}}{\frac{2}{35}+\frac{2}{35}}=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

다른풀이

벤다이어그램을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cap B)$의 값을 구할 수도 있다.



오른쪽 그림과 같이

$n(A-B)=p$, $n(B-A)=q$,

$n(A\cap B)=r$라 하면

$n(A)=p+r$, $n(B)=q+r$이고

A와 B는 공집합이 아니므로

$p+r>0$, $q+r>0$

즉, $n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$에서

$(p+r)(q+r)=2r$

$\therefore$ $r^2+(p+q-2)r+pq=0$

(i) $r=0$일 때,

$pq=0$에서 $p=0$ 또는 $q=0$

그런데 A와 B는 공집합이 아니므로 조건에 모순이다.

(ii) $r=1$일 때,

$pq+p+q-1=0$에서 $(p+1)(q+1)=2$

이때, p, q는 정수이므로

$p=0,\ q=1$ 또는 $p=1,\ q=0$

(iii) $r\geq 2$일 때,

$r^2+(p+q-2)r+pq=0$에서

$r(r+p+q-2)+pq=0$

이때, $r(r+p+q-2)>0,\ pq\geq 0$이므로 조건을 만족시키는 $p,\ q$의 순서쌍 $(p,\ q)$는 존재하지 않는다.

$p=0,\ q=0,\ r=2$이면 $A=B$이므로 조건에 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 나올 수 있는 경우는

$n(A)=1,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=1$ 또는

$n(A)=2,\ n(B)=1,\ n(A\cap B)=1$의 2가지이다.

보충설명

$n(A)=1,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=1$일 때, 가능한 집합 $A,\ B$의 경우의 수는 다음과 같다.

집합 $A=\{a\}$일 때, 집합 B는 $\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ d\}$의 3가지 경우가 가능하다.

같은 방법으로 집합 A가 $\{b\},\ \{c\},\ \{d\}$일 때에도 구하면 모든 경우의 수는

$3\times 4=12$

05

카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 숫자 1이 쓰여 있는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\times 0=0$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\times \frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$

$$=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

이때, 양면에 숫자 1이 모두 쓰여 있는 카드는 A이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

06

갑이 1회, 2회, 3회에 주사위를 던지는 것을 중단하는 사건을 각각 $A,\ B,\ C$라 하고 짝수의 눈이 나오는 사건을 D라 하면 각 사건의 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 1회에서 게임이 끝나고 그 눈의 수가 짝수일 때,

1회에서 4 이상의 짝수인 눈이 나올 때이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{3}$$

(ii) 2회에서 게임이 끝나고 그 눈의 수가 짝수일 때,

1회에서 3 이하의 눈이 나오고, 2회에서 3 이상의 짝수인 눈이 나올 때이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(iii) 3회에서 게임이 끝나고 그 눈의 수가 짝수일 때,

1회에서 3 이하의 눈이 나오고, 2회에서 2 이하의 눈이 나오고, 3회에서 짝수인 눈이 나올 때이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

07

친구 A, B, C의 집에 휴대 전화를 두고 오는 사건을 각각 $A,\ B,\ C$라 하고 세 친구의 집 중 어딘가에 휴대 전화를 두고 온 사건을 D라 하자.

(i) A의 집에 휴대 전화를 두고 왔을 때,

A의 집에 휴대 전화를 놓고 올 확률은 $\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{5}$$

(ii) B의 집에 휴대 전화를 두고 왔을 때,

A의 집에서는 휴대 전화를 두고 오지 않고, B의 집에서 휴대 전화를 두고 와야 하므로

$$\mathrm{P}(B\cap D)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

(iii) C의 집에 휴대 전화를 두고 왔을 때,

A, B의 집에서는 휴대 전화를 두고 오지 않고, C의 집에서 휴대 전화를 두고 와야 하므로

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(A\cap D)+\mathrm{P}(B\cap D)+\mathrm{P}(C\cap D)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}=\frac{61}{125}$$

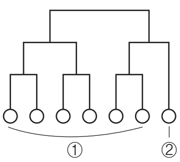
따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|D)=\frac{\mathrm{P}(B\cap D)}{\mathrm{P}(D)}$$
$$=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$

답 ②

08

A가 우승하는 사건을 A, 대진표에서 A의 위치가 ①인 사건을 B, ②인 사건을 C라 하자.



(i) A의 위치가 ①일 때,

위치를 정할 확률은 $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{7}$

A가 우승하려면 3번의 경기를 모두 이겨야 하므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{6}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

(ii) A의 위치가 ②일 때,

위치를 정할 확률은 $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{7}$

A가 우승하려면 2번의 경기를 모두 이겨야 하므로

$$\mathrm{P}(A|C)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A|C)=\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)$$
$$=\frac{6}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

이때, A가 2번의 경기만 치루려면 ②의 위치에서 경기해야 하므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{7}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

09

갑이 꺼낸 검은 공의 개수가 을이 꺼낸 검은 공의 개수보다 많은 사건을 A, 을이 검은 공을 1개 꺼내는 사건을 B, 을이 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 C라 하자.

(i) 을이 검은 공을 1개 꺼낼 때,

갑이 꺼낸 검은 공의 개수가 을이 꺼낸 검은 공의 개수보다 많으려면 갑은 검은 공을 2개 꺼내고, 을은 흰 공 4개와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{35}$$

(ii) 을이 모두 흰 공을 꺼낼 때,

갑이 꺼낸 검은 공의 개수가 을이 꺼낸 검은 공의 개수보다 많으려면 갑은 검은 공을 1개 또는 2개를 꺼내야 한다.

① 갑이 검은 공을 1개 꺼낼 때,

갑은 검은 공을 1개, 흰 공을 1개 꺼내고, 을은 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 2개를 꺼내야 하므로

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{35}$$

② 갑이 검은 공을 2개 꺼낼 때,

갑은 검은 공을 2개 꺼내고, 을은 흰 공 4개와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 2개를 꺼내야 하므로

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{35}$$

①, ②에서 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{9}{35}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)$$
$$=\frac{2}{35}+\frac{9}{35}=\frac{11}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{9}{35}}{\frac{11}{35}}=\frac{9}{11}$$

답 $\frac{9}{11}$

10

목격자가 A팀 선수라고 진술하는 사건을 X, 실제로 범인이 A팀 선수인 사건을 A라 하자.

(ⅰ) 목격자의 진술이 옳을 때,

$$\mathrm{P}(X\cap A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X|A)$$
$$=0.2\times0.9=0.18$$

(ⅱ) 목격자의 진술이 옳지 않을 때,

$$\mathrm{P}(X\cap A^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(X|A^C)$$
$$=(0.5+0.3)\times0.1$$
$$=0.8\times0.1=0.08$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X\cap A)+\mathrm{P}(X\cap A^C)$$
$$=0.18+0.08=0.26$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|X)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(X)}$$
$$=\frac{0.18}{0.26}=\frac{9}{13}$$

답 $\frac{9}{13}$

11

K자동차가 A공장에서 생산한 것인 사건을 A, B공장에서 생산한 것인 사건을 B, 자동차가 불량인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.7$, $\mathrm{P}(B)=0.3$,

$\mathrm{P}(E|A)=0.0001$, $\mathrm{P}(E|B)=0.0002$

이때, $(A\cap E)\cup(B\cap E)=E$이고 두 사건 $A\cap E$, $B\cap E$는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=0.7\times0.0001+0.3\times0.0002$$
$$=0.00013$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$$
$$=\frac{0.00007}{0.00013}=\frac{7}{13}$$

답 $\frac{7}{13}$

12

1학기 수행평가에서 A, B, C를 받는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 2학기 수행평가에서 A, B, C를 받는 사건을 각각 A', B', C'이라 하면 각 사건에 대한 확률은

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A')=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B')=\frac{2}{5}$,

$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(C')=\frac{2}{5}$

이때, 보민이의 수행평가 점수가 85점이 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(ⅰ) 1학기에 A, 2학기에 C를 받을 때,
두 사건 A, C'은 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C')=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C')=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$

(ⅱ) 1학기에 B, 2학기에 B를 받을 때,
두 사건 B, B'은 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B\cap B')=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B')=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

(ⅲ) 1학기에 C, 2학기에 A를 받을 때,
두 사건 C, A'은 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(C\cap A')=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A')=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{2}{25}=\frac{8}{25}$$

답 $\frac{8}{25}$

13

조건 (가)에서 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이므로 $n(S)=6$에서

$n(A)=4$, $n(B)=3$, $n(A\cap B)=2$

$\therefore$ $n(A-B)=2$, $n(A\cap B)=2$, $n(B-A)=1$

A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는 서로 다른 6개의 원소 중 5개를 $A-B$, $A\cap B$, $B-A$에 각각 배분하는 경우의 수와 같다.

6개의 원소 중 $A-B$에 들어갈 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

나머지 4개의 원소 중 $A\cap B$에 들어갈 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

나머지 2개의 원소 중 $B-A$에 들어갈 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{C}_1=2$$

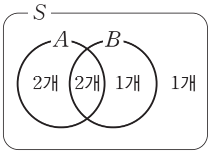
따라서 두 사건 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$15\times6\times2=180$

답 180

보충설명

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



14

두 조건 (나), (다)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$ ……㉠

(가)

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)-\frac{1}{4}$ ($\because$ ㉠)

……㉡

한편, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(C)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)\ge2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)}$

(단, 등호는 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(C)$일 때 성립)

$=2\sqrt{\frac{1}{4}}$ ($\because$ ㉠)

$=2\times\frac{1}{2}=1$

(나)

㉡에서

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)\ge1+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{4}+\mathrm{P}(B\cap C^C)$

이때, 조건 (가)에서 $S=A\cup B\cup C$이므로

$1\ge\frac{3}{4}+\mathrm{P}(B\cap C^C)$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(B\cap C^C)\le\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C^C)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다.

(다)

답 $\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 사건 A, C가 서로 독립임을 이용하여 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$의 값을 구한 경우	20%
(나)	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$의 최솟값을 구한 경우	40%
(다)	$\mathrm{P}(B\cap C^C)$의 최댓값을 구한 경우	40%

15

오늘 행운권의 당첨 결과에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 오늘 행운권이 당첨되었을 때,

행운권이 당첨된 날의 다음 날에 행운권이 당첨될 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 행운권이 당첨된 날의 다음 날에 행운권이 당첨되지 않을 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이다.

즉, 오늘 행운권이 당첨되고, 내일 행운권이 당첨되지 않을 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

(ii) 오늘 행운권이 당첨되지 않았을 때,

행운권이 당첨된 날의 다음 날에 행운권에 당첨되지 않을 확률은 $\frac{3}{4}$이고 행운권이 당첨되지 않은 날의 다음 날에 행운권이 당첨되지 않을 확률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이다.

즉, 오늘 행운권이 당첨되지 않고, 내일도 행운권이 당첨되지 않을 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\frac{3}{16}+\frac{3}{10}=\frac{39}{80}$

답 ④

16

세 번의 자유투를 던질 때, 2점 이상을 얻는 경우는 다음과 같다.

(i) 2점을 얻을 때,

① (성공-성공-실패)할 확률은

$0.75\times0.8\times(1-0.8)=0.12$

② (성공-실패-성공)할 확률은

$0.75\times(1-0.8)\times(1-0.4)=0.09$

③ (실패-성공-성공)할 확률은

$(1-0.75)\times(1-0.4)\times0.8=0.12$

①, ②, ③에서 2점을 얻을 확률은

$0.12+0.09+0.12=0.33$

(ii) 3점을 얻을 때,

세 번의 자유투를 모두 성공할 확률은

$0.75\times0.8\times0.8=0.48$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$0.33+0.48=0.81$

답 0.81

17

시합을 중단하지 않고 이어갔을 때, B가 게임을 이기는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) B가 7번째 시합에서 이길 때,

A	A	B	B	B	B	B

에서 경우의 수는 1이므로 이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii) B가 8번째 시합에서 이길 때,

A	A						B

에서 3번째 시합부터 7번째 시합까지 A가 1번, B가 4번 이기고 마지막 시합은 B가 이겨야 한다.

즉, 이 경우의 확률은

${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$

(iii) B가 9번째 시합에서 이길 때,

A	A							B

에서 3번째 시합부터 8번째 시합까지 A가 2번, B가 4번 이기고 마지막 시합은 B가 이겨야 한다.

즉, 이 경우의 확률은

${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{15}{128}$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 B가 이길 확률은

$\frac{1}{32}+\frac{5}{64}+\frac{15}{128}=\frac{29}{128}$

즉, A가 이길 확률은

$1-\frac{29}{128}=\frac{99}{128}$

이므로 A가 받을 수 있는 상금은

$\frac{99}{128}\times\frac{2}{3}+\frac{29}{128}\times\frac{1}{3}=\frac{227}{384}$

B가 받을 수 있는 상금은

$\frac{99}{128}\times\frac{1}{3}+\frac{29}{128}\times\frac{2}{3}=\frac{157}{384}$

따라서 두 사람이 갖는 상금의 비는 227 : 157이므로

$m=227,\ n=157$

$\therefore\ m-n=227-157=70$

답 ⑤

18

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{k}{6}$이고 k의 값에 따른 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은 다음 표와 같다.

k	$\mathrm{P}(A)$	$\mathrm{P}(B)$	$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$	$\mathrm{P}(A\cap B)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이려면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

$k=2$ 또는 $k=4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$2+4=6$

답 6

다른풀이

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{k}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{k}{12}$

(i) k가 짝수일 때,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\frac{k}{2}}{6}=\frac{k}{12}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(ii) k가 홀수일 때,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\frac{k+1}{2}}{6}=\frac{k+1}{12}$이므로 두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$\frac{k+1}{12}=\frac{k}{12}$, $k+1=k$

이를 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=2$ 또는 $k=4$이므로 모든 상수 k의 값의 합은

$2+4=6$

19

$(n-1)$번째 시행까지의 숫자의 합이 짝수인 경우에는 n번째 시행에서 짝수가 나와야 하고, $(n-1)$번째 시행까지의 숫자의 합이 홀수인 경우에는 n번째 시행에서 홀수가 나와야 한다.

$(n-1)$번째 시행까지의 숫자의 합이 짝수일 확률은 p_{n-1}, 홀수일 확률은 $1-p_{n-1}$이고, 매회 시행에서 짝수가 나올 확률은 $\frac{2}{5}$, 홀수가 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이므로

$$p_n=p_{n-1}\times\frac{2}{5}+(1-p_{n-1})\times\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ p_n=-\frac{1}{5}p_{n-1}+\frac{3}{5}$$

따라서 $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{3}{5}$이므로

$100(b-a)=100\times\frac{4}{5}=80$

답 80

다른풀이

5개의 공 중에서 짝수가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$,

홀수가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

이때, 시행을 n번 반복하여 기록한 숫자의 합이 짝수이려면 홀수가 적힌 공이 나오지 않거나 짝수번 나와야 한다.

(i) n이 짝수일 때,

$$\begin{aligned}p_n&={}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}\\&\quad+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^{n-4}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{3}{5}\right)^n\\&=\frac{1}{5^n}({}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_2 3^2 2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_4 3^4 2^{n-4}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n 3^n)\\&=\frac{1}{5^n}\times\underbrace{\frac{5^n+(-1)^n}{2}}_{*}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2\times5^n}\end{aligned}$$

위 식에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$p_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{2\times5^{n-1}}$$

$p_n=ap_{n-1}+b$에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2\times5^n}&=a\left\{\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{2\times5^{n-1}}\right\}+b\\&=\frac{1}{2}a+b+\frac{a\times(-1)^{n-1}}{2\times5^{n-1}}\\&=\frac{1}{2}a+b+\frac{5a\times(-1)^{n-1}}{2\times5^n}\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}$, $5a=-1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{5},\ b=\frac{3}{5}$

(ii) n이 홀수일 때,

n이 짝수일 때와 마찬가지로

$a=-\frac{1}{5},\ b=\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서 $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{3}{5}$이므로

$100(b-a)=100\times\frac{4}{5}=80$

풀이첨삭

* 이항정리를 이용하면 다음과 같이 풀 수 있다.

$$5^n=(2+3)^n$$
$$={}_nC_0 3^0 2^n+{}_nC_1 3^1 2^{n-1}+{}_nC_2 3^2 2^{n-2}+\cdots+{}_nC_n 3^n \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$(-1)^n=(2-3)^n$$
$$={}_nC_0(-3)^0 2^n+{}_nC_1(-3)^1 2^{n-1}+{}_nC_2(-3)^2 2^{n-2}+\cdots+{}_nC_n(-3)^n \quad \cdots\cdots ㉡$$

(㉠+㉡)÷2를 하면

$$\frac{5^n+(-1)^n}{2}={}_nC_0 2^n+{}_nC_2 3^2 2^{n-2}+{}_nC_4 3^4 2^{n-4}+\cdots+{}_nC_n 3^n$$

20

직선 P_2P_6이 원점을 지나는 사건을 A, 점 P가 시계 방향으로 3번 이상 회전하는 사건을 B라 하자.

직선 P_2P_6이 원점을 지나려면 점 P_2의 위치에 상관없이 점 P_6은 점 P_2에서 시계 반대 방향으로 180° 회전한 위치에 있거나 시계 방향으로 180° 회전한 위치에 있으면 된다.

← 두 점 P_2, P_6이 원점에 대하여 대칭이다.

(i) 점 P_6이 점 P_2에서 시계 반대 방향으로 180° 회전한 위치에 있을 때,

주사위를 4번 던지는 시행에서 점 P가 시계 반대 방향으로 180° 회전하려면 시계 반대 방향으로 60°씩 3번 회전하고 1번은 움직이지 않아야 한다.

즉, 주사위를 4번 던졌을 때 3 이하의 눈이 3번 나오고 4의 눈이 한 번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{12}$$

(ii) 점 P_6이 점 P_2에서 시계 방향으로 180° 회전한 위치에 있을 때,

주사위를 4번 던지는 시행에서 점 P가 시계 방향으로 180° 회전하려면 시계 방향으로 45°씩 4번 회전해야 한다.

즉, 주사위를 4번 던졌을 때 모두 5 이상의 눈이 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 직선 P_2P_6이 원점을 지날 확률은

$$P(A)=\frac{1}{12}+\frac{1}{81}=\frac{31}{324}$$

직선 P_2P_6이 원점을 지나고 점 P가 시계 방향으로 3번 이상 회전하는 경우는 (ii)이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{81}}{\frac{31}{324}}=\frac{4}{31}$$

답 $\frac{4}{31}$

21

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 A, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times3\times3=54$이고, 갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하자.

(i) $a>b$일 때,

① $b=1$일 때, $a=2, 3, 4, 5, 6$이고 $c=1, 2, 3$이므로 경우의 수는

$5\times3=15$

② $b=2$일 때, $a=3, 4, 5, 6$이고 $c=1, 2, 3$이므로 경우의 수는

$4\times3=12$

③ $b=3$일 때, $a=4, 5, 6$이고 $c=1, 2, 3$이므로 경우의 수는

$3\times3=9$

①, ②, ③에서 $a>b$인 경우의 수는 $15+12+9=36$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$$

(ii) $a>b$, $a>b+c$일 때,

④ $a=1$ 또는 $a=2$인 경우는 없다.

⑤ $a=3$일 때, $b=1$, $c=1$의 1가지

⑥ $a=4$일 때, 순서쌍 (b, c)는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1)$

이므로 경우의 수는 3이다.

⑦ $a=5$일 때, 순서쌍 (b, c)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$

이므로 경우의 수는 6이다.

⑧ $a=6$일 때, 순서쌍 (b, c)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3),$
$(3, 1), (3, 2)$

이므로 경우의 수는 8이다.

④~⑧에서 $a>b$, $a>b+c$인 경우의 수는

$1+3+6+8=18$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서

$$k=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 100k=100\times\frac{1}{2}=50$$

답 50

22

$S_6=2$인 사건을 A, $S_2=0$인 사건을 B라 하자.

동전을 6번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 a라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $6-a$이므로 $S_6=2$이려면

$a-(6-a)=2 \qquad \therefore\ a=4$

즉, 동전을 6번 던지는 시행에서 앞면이 4번, 뒷면이 2번 나와야 하므로

$$\mathrm{P}(A)={}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

한편, $S_2=0$이려면 동전을 2번 던지는 시행에서 앞면이 한 번, 뒷면이 한 번 나와야 하므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$S_6=S_2+X_3+X_4+X_5+X_6$에서 $S_2=0$이므로 $S_6=2$이려면

$X_3+X_4+X_5+X_6=2$

이 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 b라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $4-b$이므로

$b-(4-b)=2 \qquad \therefore\ b=3$

즉, 동전을 4번 던지는 시행에서 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나와야 하므로

$$\mathrm{P}(A|B)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{15}{64}}=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

23

두 조건 (가), (나)에서 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=3$, $a_{10}=6$

또는 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=6$, $a_{10}=3$

또는 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=9$, $a_{10}=2$

(i) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=3$, $a_{10}=6$일 때,

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=3$을 만족시키려면 9개의 수 중에서 1개의 수만 3이고 나머지는 모두 1이어야 하므로

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=3$일 확률은

$${}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^8=\frac{9}{6^9}$$

$a_{10}=6$일 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 이때의 확률은

$$\frac{9}{6^9}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{6^{10}}$$

(ii) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=6$, $a_{10}=3$일 때,

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=6$일 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

① 9개의 수 중에서 1개의 수만 6이고 나머지는 모두 1일 때,

$${}_9C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^8=\frac{9}{6^9}$$

② 9개의 수 중에서 2와 3이 하나씩 있고 나머지는 모두 1일 때,

$$\frac{9!}{7!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^9=\frac{72}{6^9}$$

①, ②에서 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=6$일 확률은

$$\frac{9+72}{6^9}=\frac{81}{6^9}$$

$a_{10}=3$일 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 이때의 확률은

$$\frac{81}{6^9}\times\frac{1}{6}=\frac{81}{6^{10}}$$

(iii) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=9$, $a_{10}=2$일 때,

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=9$를 만족시키려면 9개의 수 중에서 2개의 수가 3이고 나머지는 모두 1이어야 하므로 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_9=9$일 확률은

$${}_9C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^7=\frac{36}{6^9}$$

$a_{10}=2$일 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 이때의 확률은

$$\frac{36}{6^9}\times\frac{1}{6}=\frac{36}{6^{10}}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킬 확률은

$$\frac{9}{6^{10}}+\frac{81}{6^{10}}+\frac{36}{6^{10}}=\frac{126}{6^{10}}$$

이때, $a_{10}=6$인 사건은 (i)이므로 구하는 확률은

$$\frac{\frac{9}{6^{10}}}{\frac{126}{6^{10}}}=\frac{1}{14}$$

답 $\frac{1}{14}$

Ⅲ. 통계

유형연습 05 확률변수와 확률분포

본문 pp.128~133

01-1 $\frac{1}{2}$　01-2 $\frac{3}{16}$　01-3 $\frac{7}{12}$

02-1 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{5}{12}$　02-2 $\frac{1}{3}$

02-3 $\frac{1}{4}$　03-1 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$

03-2 $\frac{25}{3}$　03-3 $\frac{1}{8}$　04-1 $\frac{3}{2}$

04-2 56　04-3 $\frac{17}{36}$　05-1 23

05-2 2　05-3 80　06-1 $\frac{1}{2}$

06-2 6　06-3 $\frac{5}{6}$

01-1

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 다음과 같다.

(i) 숫자 2가 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$X=4+6+8=18$

(ii) 숫자 4가 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$X=2+6+8=16$

(iii) 숫자 6이 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$X=2+4+8=14$

(iv) 숫자 8이 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$X=2+4+6=12$

(i)~(iv)에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 12, 14, 16, 18이다.

이때, 각각의 확률은 모두 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	12	14	16	18	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\begin{aligned}P(X^2-15X\geq 0)&=P(X\leq 0\ \text{또는}\ X\geq 15)\\&=P(X=16)+P(X=18)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

01-2

짝수의 눈이 나올 확률과 홀수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다.

이때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{7}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{7}{16}-\frac{5}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

답 $\frac{3}{16}$

01-3

4개의 공을 상자에 넣을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$4!=24$

이때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 4이다.

$\mathrm{P}(X^2-3X+2=0)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$이므로

$\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=1$일 때,

상자와 번호가 같은 공을 한 개 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

나머지 3개의 상자에는 서로 다른 숫자가 적힌 공이 들어가야 하므로 나올 수 있는 경우의 수는 다음 수형도와 같이 2가지이다.

상자 번호 1 2 3

공 번호
2 — 3 — 1
3 — 1 — 2

따라서 $X=1$인 경우의 수는 $4\times2=8$이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{8}{24}$$

(ii) $X=2$일 때,

상자와 번호가 같은 공을 두 개 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

나머지 두 개의 상자에는 서로 다른 숫자가 적힌 공이 들어가므로 나올 수 있는 경우의 수는 1이다.

따라서 $X=2$인 경우의 수는 $6\times1=6$이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{24}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X^2-3X+2=0)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{8}{24}+\frac{6}{24}=\frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

보충설명

$X=0$일 때와 $X=4$일 때의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=0$일 때,

각 상자의 번호와 상자에 들어간 공의 숫자가 모두 달라야 하므로 나올 수 있는 경우의 수는 다음 수형도와 같이 9가지이다.

상자 번호 1 2 3 4

공 번호
2 — 1 — 4 — 3
2 — 3 — 4 — 1
2 — 4 — 1 — 3
3 — 1 — 4 — 2
3 — 4 — 1 — 2
3 — 4 — 2 — 1
4 — 1 — 2 — 3
4 — 3 — 1 — 2
4 — 3 — 2 — 1

따라서 $X=0$인 경우의 수는 9이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{9}{24}$$

(ii) $X=4$일 때,

모든 상자와 상자에 담긴 공의 숫자가 같은 경우의 수는 1이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{24}$$

즉, 확률분포 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{1}{24}$	1

02-1

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$-\frac{1}{6}+3k$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+3k$	$\frac{1}{3}-2k$	1

확률의 총합은 1이므로

$\left(-\frac{1}{6}+3k\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}+3k\right)+\left(\frac{1}{3}-2k\right)=1$에서

$4k+\frac{2}{3}=1,\ 4k=\frac{1}{3}$

$\therefore\ k=\frac{1}{12}$

(2) $X^2+4X\le 0$에서 $X(X+4)\le 0$

$\therefore\ -4\le X\le 0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(X^2+4X\le 0)\\&=\mathrm{P}(-4\le X\le 0)\\&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)\\&=\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{5}{12}$

02-2

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&=\frac{a}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}\\&=\frac{a(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}\\&=\frac{a}{2}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})\end{aligned}$$

이때, 확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})+\cdots+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})\}$

$=1$에서

$\frac{a}{2}(-1+7)=1,\ 3a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{6}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$

(단, $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 24$)

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(5\le X\le 12)\\&=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+\cdots+\mathrm{P}(X=12)\\&=\frac{1}{6}\{(\cancel{\sqrt{11}}-\sqrt{9})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{\sqrt{11}})+(\cancel{\sqrt{15}}-\cancel{\sqrt{13}})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{23}})\}\\&=\frac{1}{6}(-3+5)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

02-3

$p_{n+2}-p_n=d$에서 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6$을 차례대로 대입하면 다음과 같다.

$p_3=p_1+d$

$p_4=p_2+d$

$p_5=p_3+d=p_1+2d$

$p_6=p_4+d=p_2+2d$

$p_7=p_5+d=p_1+3d$

$p_8=p_6+d=p_2+3d$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_8=1$에서

$$\begin{aligned}&(p_1+p_3+p_5+p_7)+(p_2+p_4+p_6+p_8)\\&=\{p_1+(p_1+d)+(p_1+2d)+(p_1+3d)\}\\&\qquad+\{p_2+(p_2+d)+(p_2+2d)+(p_2+3d)\}\\&=4p_1+4p_2+12d=1\end{aligned}$$

$\therefore\ p_1+p_2+3d=\frac{1}{4}$

$\therefore\ p_1+p_8=p_1+p_2+3d=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

03-1

(1) 확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{3}+b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(X)=-1\times a+0\times\frac{1}{3}+1\times b=-a+b$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times b=a+b=\frac{2}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$V(X)=\frac{5}{12}$이므로

$\frac{5}{12}=\frac{2}{3}-(-a+b)^2$

$\therefore (a-b)^2=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$

(2) (1)에서 $(a-b)^2=\frac{1}{4}$이므로

$a-b=\frac{1}{2}$ ($\because a>b$)

한편, $E(X)=-a+b=-(a-b)$이므로

$E(X)=-\frac{1}{2}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$

03-2

확률의 총합은 1이므로 $a+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+b=1$에서

$a+b=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}-b$ ······㉠

$E(X)=1\times a+3\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{3}+7\times b$

$=a+7b+\frac{13}{6}$

$=\left(\frac{1}{2}-b\right)+7b+\frac{13}{6}$ ($\because$ ㉠)

$=6b+\frac{8}{3}$ ······㉡

이때, $a\geq0$, $b\geq0$이고 $a+b=\frac{1}{2}$이므로

$0\leq b\leq\frac{1}{2}$

$E(X)$는 $b=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 M을 가지므로 ㉡에서

$M=6\times\frac{1}{2}+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

$E(X)$는 $b=0$일 때 최솟값 m을 가지므로 ㉡에서

$m=6\times0+\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$

$\therefore M+m=\frac{17}{3}+\frac{8}{3}=\frac{25}{3}$

답 $\frac{25}{3}$

03-3

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+a+2b=1$, $2a+2b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b=\frac{3}{8}$

$\therefore a=\frac{3}{8}-b$ ······㉠

$E(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{4}+1\times a+2\times2b$

$=4b$

$E(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times a+2^2\times2b$

$=2a+8b$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2a+8b-(4b)^2$

$=-16b^2+8b+2\times\left(\frac{3}{8}-b\right)$ ($\because$ ㉠)

$=-16b^2+6b+\frac{3}{4}$

이때, $V(X)=\frac{5}{4}$이므로

$-16b^2+6b+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$16b^2-6b+\frac{1}{2}=0$

$32b^2-12b+1=0$

$(4b-1)(8b-1)=0$

$\therefore b=\frac{1}{4}$ 또는 $b=\frac{1}{8}$

(i) $b=\frac{1}{4}$일 때,

㉠에서 $a=\frac{1}{8}$

이는 $a>b$를 만족시키지 않는다.

(ii) $b=\frac{1}{8}$일 때,

㉠에서 $a=\frac{1}{4}$이므로 $a-b=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서

$a-b=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

04-1

짝수의 눈이 나올 확률과 홀수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$ 이다.

짝수의 눈이 3번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$3+3+3=9$

짝수인 눈이 2번, 홀수의 눈이 1번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$3+3-2=4$

짝수인 눈이 1번, 홀수의 눈이 2번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$3-2-2=-1$

홀수의 눈이 3번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$-2-2-2=-6$

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -6, -1, 4, 9이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=-6)={}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=-1)={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=4)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=9)={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-6	-1	4	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore\ E(X)=(-6)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

04-2

첫 번째 시행에서 흰 공이 나올 때 $X=1$

첫 번째 시행에서 검은 공이 나오고, 두 번째 시행에서 흰 공이 나올 때 $X=2$

첫 번째와 두 번째 시행에서 모두 검은 공이 나오고, 세 번째 시행에서 흰 공이 나올 때 $X=3$

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}=\frac{1}{15}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{15}=\frac{7}{5}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{1}{15}=\frac{7}{3}$$

$$\therefore\ 15\{E(X)+E(X^2)\}=56$$

답 56

04-3

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{9}{60}$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{33}{60}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{17}{60}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{60}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{60}$	$\frac{33}{60}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{60}$	1

$$E(X)=0\times\frac{9}{60}+1\times\frac{33}{60}+2\times\frac{17}{60}+3\times\frac{1}{60}=\frac{7}{6}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{9}{60}+1^2\times\frac{33}{60}+2^2\times\frac{17}{60}+3^2\times\frac{1}{60}=\frac{11}{6}$$

$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{6}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

답 $\frac{17}{36}$

05-1

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=5)=1$에서

$$\frac{-a+2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2a+2}{6}+\frac{5a+2}{6}=1$$

$$\frac{6a+8}{6}=1$$

$6a+8=6,\ 6a=-2$

$\therefore\ a=-\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	2	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

$$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{7}{18}+0\times\frac{6}{18}+2\times\frac{4}{18}+5\times\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{7}{18}+0^2\times\frac{6}{18}+2^2\times\frac{4}{18}+5^2\times\frac{1}{18}$$

$$=\frac{8}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{23}{9}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{23}{9}=23$$

답 23

05-2

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=9$에서

$\mathrm{E}(X)=10$이므로

$10a+b=9$ ……㉠

또한, $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=4$에서

$\mathrm{V}(X)=25$이므로

$25a^2=4,\ a^2=\frac{4}{25}$

$\therefore\ a=\frac{2}{5}\ (\because\ a>0)$

이 값을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=5$

$\therefore\ ab=\frac{2}{5}\times5=2$

답 2

05-3

X의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $X=1$일 때,

앞면이 3번, 뒷면이 2번 또는 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 때이므로

$$\mathrm{P}(X=1)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{32}$$

(ii) $X=3$일 때,

앞면이 4번, 뒷면이 1번 또는 앞면이 1번, 뒷면이 4번 나올 때이므로

$$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{10}{32}$$

(iii) $X=5$일 때,

모두 앞면이 나오거나 모두 뒷면이 나올 때이므로

$$\mathrm{P}(X=5)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{2}{32}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a=\frac{20}{32},\ b=\frac{10}{32},\ c=\frac{2}{32}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{20}{32}+3\times\frac{10}{32}+5\times\frac{2}{32}=\frac{15}{8}$$

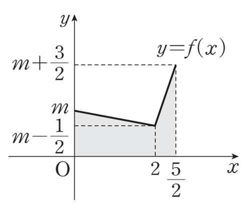
$$\therefore\ \mathrm{E}\left(\frac{4a}{c}X+\frac{b}{c}\right)=\frac{4a}{c}\mathrm{E}(X)+\frac{b}{c}$$

$$=40\mathrm{E}(X)+5=80$$

답 80

06-1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=\frac{5}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$\frac{1}{2}\times2\times\left\{m+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\{\left(m+\frac{3}{2}\right)+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

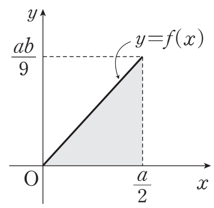
$$=2m-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(2m+1)=\frac{5}{2}m-\frac{1}{4}=1$$

$\therefore\ m=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

06-2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=\frac{a}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{ab}{9}=1,\quad \frac{a^2b}{36}=1$$

$\therefore\ a^2b=36$

$a^2b=36$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 36)$, $(2,\ 9)$, $(3,\ 4)$, $(6,\ 1)$

따라서 ab의 최솟값은 6이다.

답 6

06-3

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(0\le x<1)=\mathrm{P}(1\le x\le 2)=\frac{1}{2}$$

즉, $0\le x<1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\times 1\times(b+a+b)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a+2b=1\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}\left(1\le X\le\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(a+b+\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{2}a+2b\right)$$
$$=\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{6}$$

$\therefore\ 9a+12b=4\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{6}$

즉, $0\le x<1$일 때 $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{5}{6}$이다.

답 $\frac{5}{6}$

개념마무리

본문 pp.134~137

01 $\frac{3}{7}$	**02** $\frac{1}{4}$	**03** ④	**04** $\frac{2}{3}$
05 87	**06** 2	**07** 3	**08** ①
09 55	**10** 28	**11** ④	**12** 146
13 ③	**14** ③	**15** 1025	**16** $\frac{5}{8}$
17 $\frac{3}{4}$	**18** ②	**19** 13	**20** $\frac{12}{5}$
21 40	**22** 5		

01

꺼낸 4개의 공에 적힌 수 중에서 가장 작은 수를 k라 하면 나머지 3개의 공에는 k보다 큰 수가 적혀 있어야 한다.

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{20}{35},\quad \mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{10}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{4}{35},\quad \mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{1}{35}$$

즉, X의 확률변수를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{20}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$$
$$=\frac{10}{35}+\frac{4}{35}+\frac{1}{35}=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

다른풀이

여사건의 확률을 이용하면 답을 쉽게 구할 수 있다.

$$\mathrm{P}(X\le 2)=1-\mathrm{P}(X=1)=1-\frac{20}{35}=\frac{3}{7}$$

02

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\frac{1}{6}$	p_4	p_5	$\frac{1}{12}$	1

X의 값 중 3의 배수는 3, 6이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=6)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

X의 값 중 4 이상인 수는 4, 5, 6이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)\\&=p_4+p_5+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

이때, 조건 (나)에서 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$A\cap B$는 X의 값이 4 이상의 3의 배수인 사건이므로

$X=6$일 때이다.

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\times\left(p_4+p_5+\frac{1}{12}\right),\ p_4+p_5+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ p_4+p_5=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B-A)\\&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\\&=p_4+p_5=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

다른풀이

$A\cap B$는 X의 값이 4 이상의 3의 배수인 사건이므로

$X=6$일 때이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{12}$$

이때, 조건 (나)에서 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}\\&=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+\mathrm{P}(A^C\cap B)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$$

03

직사각형의 가로 두 변을 택하는 경우의 수는 가로의 점 4개 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_2=6$

직사각형의 세로 두 변을 택하는 경우의 수는 세로의 점 3개 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_2=3$

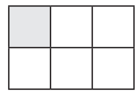
따라서 나올 수 있는 모든 직사각형의 개수는

$6\times3=18$

이때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 6이다.

(i) $X=1$일 때,

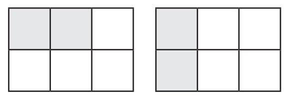
다음 그림과 같이 넓이가 1인 직사각형의 개수는 6



$$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{6}{18}$$

(ii) $X=2$일 때,

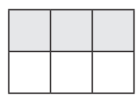
다음 그림과 같이 넓이가 2인 직사각형의 개수는 7



$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{18}$$

(iii) $X=3$일 때,

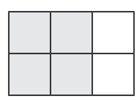
다음 그림과 같이 넓이가 3인 직사각형의 개수는 2



$$\therefore\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{18}$$

(iv) $X=4$일 때,

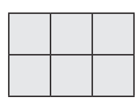
다음 그림과 같이 넓이가 4인 직사각형의 개수는 2



$$\therefore\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{18}$$

(v) $X=6$일 때,

다음 그림과 같이 넓이가 6인 직사각형의 개수는 1



$$\therefore\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{18}$$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(X^2-X-6\le0)\\&=\mathrm{P}((X+2)(X-3)\le0)\\&=\mathrm{P}(-2\le X\le3)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{6}{18}+\frac{7}{18}+\frac{2}{18}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 ④

04

확률의 총합은 1이므로 주어진 함수에 $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15$를 대입하여 합하면

$$k\log_4\frac{2}{1}+k\log_4\frac{3}{2}+k\log_4\frac{4}{3}+\cdots+k\log_4\frac{16}{15}$$
$$=k\log_4\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{16}{15}\right)$$
$$=k\log_4 16$$
$$=2k=1$$
$$\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

따라서 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{2}\log_4\frac{x+1}{x}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 15)$$

이때, $\mathrm{P}(X\ge4\mid X\ge2)$에서 $X\ge4$인 사건을 A, $X\ge2$인 사건을 B라 하면 $A\cap B=A$이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(X\ge4\mid X\ge2)\\&=\frac{\mathrm{P}(X\ge4)}{\mathrm{P}(X\ge2)}\\&=\frac{1-\frac{1}{2}\left(\log_4\frac{2}{1}+\log_4\frac{3}{2}+\log_4\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{1}{2}\log_4\frac{2}{1}}\\&=\frac{1-\frac{1}{2}\log_4 4}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

05

조건 (가)에서 $p_6=\frac{1}{2}p_5,\ p_7=\frac{1}{2}p_6,\ p_8=\frac{1}{2}p_7,\ p_9=\frac{1}{2}p_8$

조건 (나)에서 $p_1=p_8,\ p_2=p_7,\ p_3=p_6,\ p_4=p_5$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$2p_9$	$4p_9$	$8p_9$	$16p_9$	$16p_9$	$8p_9$	$4p_9$	$2p_9$	p_9	1

확률의 총합은 1이므로

$2p_9(2+4+8+16)+p_9=1,\ 61p_9=1$

$$\therefore\ p_9=\frac{1}{61}$$

$X^3-9X^2+23X-15=0$에서

$(X-1)(X^2-8X+15)=0$

$(X-1)(X-3)(X-5)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -9 & 23 & -15\\ & & 1 & -8 & 15\\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0\end{array}$$

$\therefore\ X=1$ 또는 $X=3$ 또는 $X=5$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(X^3-9X^2+23X-15=0)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)\\&=\frac{2}{61}+\frac{8}{61}+\frac{16}{61}\\&=\frac{26}{61}\end{aligned}$$

즉, $p=61,\ q=26$이므로 $p+q=87$

답 87

06

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b+\frac{1}{8}=1$$

$$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots㉠$$

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=\frac{1}{2}$에서

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{8}$$

이 값을 ㉠에 대입하여 풀면

$$b=\frac{3}{8}$$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}=3$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{3}{8}+5^2\times\frac{1}{8}$$
$$=11$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=11-3^2=2$$

답 2

07

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} a & (x=3m) \\ \frac{1}{3}b & (x=3m-1) \\ \frac{1}{6}b & (x=3m-2) \end{cases}\ (\text{단, } m\text{은 자연수})$$

에서

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=6)=a$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=5)=\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{3}b$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{6}b$$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	a	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	a	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	1

확률의 총합은 1이므로

$$2a+3\times\frac{1}{6}b+3\times\frac{1}{3}b=1,\ 2a+\frac{3}{2}b=1$$

$$\therefore\ 4a+3b=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\mathrm{E}(X)=(3+6)\times a+(1+4+7)\times\frac{1}{6}b+(2+5+8)\times\frac{1}{3}b$$
$$=9a+7b$$

$$\therefore\ 9a+7b=\frac{55}{12} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 36ab=3$$

답 3

08

전체 공의 개수는

$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(n-k+1)}{\boxed{n(n+1)}}$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

확률변수 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{P}(X=k)$$
$$=\frac{2}{\boxed{n(n+1)}}\times\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\left((n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\left\{(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$
$$=n+1-\frac{2n+1}{3}$$
$$=\boxed{\frac{n+2}{3}}$$

$\mathrm{E}(X)\geq5$에서

$$\frac{n+2}{3}\geq5,\ n+2\geq15$$

$$\therefore\ n\geq13$$

$\mathrm{E}(X)\geq5$에서 n의 최솟값은 $\boxed{13}$이다.

따라서 $f(n)=n(n+1)$, $g(n)=\frac{n+2}{3}$, $a=13$이므로

$$f(7)=56,\ g(7)=3$$

$$\therefore\ f(7)+g(7)+a=56+3+13=72$$

답 ①

보충설명

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

09

$\mathrm{P}(X\le k)=ak^3$이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X\le k)-\mathrm{P}(X\le k-1)$

$=ak^3-a(k-1)^3=a\{k^3-(k-1)^3\}$

$=a(3k^2-3k+1)$

즉, $\mathrm{P}(X=1)=a$, $\mathrm{P}(X=2)=7a$, $\mathrm{P}(X=3)=19a$,

$\mathrm{P}(X=4)=37a$에서 확률의 총합은 1이므로

$a+7a+19a+37a=1$, $64a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{64}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{64}+2\times\frac{7}{64}+3\times\frac{19}{64}+4\times\frac{37}{64}=\frac{55}{16}$

따라서 $m=\frac{55}{16}$이므로 $16m=55$

답 55

10

X가 1, 2, 3, 4, 5의 값을 갖는 확률을 각각 a, b, c, d, e라 하면

$\mathrm{E}(X)=a+2b+3c+4d+5e=4$ ……㉠

한편, $\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}$이므로 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{2}a+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}b+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}c+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}d+\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}e+\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(Y)$

$=1\times\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{10}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{10}\right)$

$+4\times\left(\frac{1}{2}d+\frac{1}{10}\right)+5\times\left(\frac{1}{2}e+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}(a+2b+3c+4d+5e)+\frac{1+2+3+4+5}{10}$

$=\frac{1}{2}\times4+\frac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로 $8a=28$

답 28

11

조건 (가)에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이다.

2, 4, 6, 8의 4개에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

(i) $X=3$일 때,

2, 4를 택할 때이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

(ii) $X=4$일 때,

2, 6을 택할 때이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

(iii) $X=5$일 때,

2, 8 또는 4, 6을 택할 때이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}$

(iv) $X=6$일 때,

4, 8을 택할 때이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

(v) $X=7$일 때,

6, 8을 택할 때이므로

$\mathrm{P}(X=7)=\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

조건 (나)에서 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이고 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	6	8	10	12	14	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

조건 (다)에서 확률변수 Z가 가질 수 있는 값은 5, 9, 13, 17, 21이고 Z의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Z	5	9	13	17	21	합계
$\mathrm{P}(Z=z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

ㄱ. $\mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (거짓)

ㄴ. 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이고 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이다.
또한, 각 값에 대응되는 확률이 동일하므로
$Y=2X$
$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)$ (참)

ㄷ. 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이고 확률변수 Z가 가질 수 있는 값은 5, 9, 13, 17, 21이다.
또한, 각 값에 대응되는 확률이 동일하므로
$Z=2Y-7$
$\therefore\ \mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}(2Y-7)=4\mathrm{V}(Y)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

다른풀이

ㄴ. 다음과 같이 직접 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$의 값을 구할 수도 있다.

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}$$
$$=5$$
$$\mathrm{E}(Y)=6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{2}{6}+12\times\frac{1}{6}+14\times\frac{1}{6}$$
$$=10$$
$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=2\mathrm{E}(X)$ (참)

12

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=1$일 때,
주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 0이 적힌 공을 꺼내야 하므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(ii) $X=2$일 때,
주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii) $X=3$일 때,
주머니 A에서 3이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 0 또는 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(iv) $X=4$일 때,
주머니 A에서 1 또는 3이 적힌 공을 꺼내고 주머니 B에서 4가 적힌 공을 꺼내야 하므로
$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

(v) $X=5$일 때,
주머니 A에서 5가 적힌 공을 꺼내면 항상 성립하므로
$\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	1

(가)

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{3}{9}$$
$$=\frac{32}{9}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{2}{9}+5^2\times\frac{3}{9}$$
$$=\frac{130}{9}$$
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서
$$\mathrm{V}(X)=\frac{130}{9}-\left(\frac{32}{9}\right)^2=\frac{146}{81}$$

(나)

$$\therefore\ \mathrm{V}(9X+3)=81\mathrm{V}(X)=81\times\frac{146}{81}=146$$

(다)

답 146

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸 경우	50%
(나)	$\mathrm{V}(X)$의 값을 구한 경우	30%
(다)	$\mathrm{V}(9X+3)$의 값을 구한 경우	20%

13

$\mathrm{E}(X)=0,\ \mathrm{V}(X)=1$이므로

확률변수 $Y=aX+b$의 평균과 분산은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b\\&=a\times0+b=b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)\\&=a^2\times1=a^2\end{aligned}$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$에서

$a^2=\mathrm{E}(Y^2)-b^2$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y^2)=a^2+b^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}((Y-2)^2)&=\mathrm{E}(Y^2-4Y+4)\\&=\mathrm{E}(Y^2)-4\mathrm{E}(Y)+4\\&=a^2+b^2-4b+4\end{aligned}$$

$\mathrm{E}((Y-2)^2)\le5$에서 $a^2+(b-2)^2\le5$

이때, $a,\ b$는 자연수이므로

(i) $a=1$일 때,

$1^2+(b-2)^2\le5,\ (b-2)^2\le4$

$\therefore\ b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(ii) $a=2$일 때,

$2^2+(b-2)^2\le5,\ (b-2)^2\le1$

$\therefore\ b=1,\ 2,\ 3$

(i), (ii)에서 $\mathrm{E}((Y-2)^2)\le5$를 만족시키는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+3=7$

답 ③

다른풀이

치환을 이용해서 다음과 같이 풀 수도 있다.

$Z=Y-2$로 놓으면

$Z=Y-2=aX+b-2$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z)&=\mathrm{E}(aX+b-2)\\&=a\mathrm{E}(X)+b-2=b-2\ (\because\ \mathrm{E}(X)=0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Z)&=\mathrm{V}(aX+b-2)\\&=a^2\mathrm{V}(X)=a^2\ (\because\ \mathrm{V}(X)=1)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{E}((Y-2)^2)=\mathrm{E}(Z^2)\le5$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=\mathrm{V}(Z)+\{\mathrm{E}(Z)\}^2\\&=a^2+(b-2)^2\le5\end{aligned}$$

(i) $a=1$일 때,

$1^2+(b-2)^2\le5,\ (b-2)^2\le4$

$\therefore\ b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(ii) $a=2$일 때,

$2^2+(b-2)^2\le5,\ (b-2)^2\le1$

$\therefore\ b=1,\ 2,\ 3$

(i), (ii)에서 $\mathrm{E}(Z^2)\le5$를 만족시키는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4+3=7$

14

만들 수 있는 삼각형의 개수는 서로 다른 8개의 점에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이때, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}$이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=2$일 때,

삼각형 ABD와 합동인 직각이등변삼각형, 즉 넓이가 2인 삼각형의 개수는 $4\times6=24$

따라서 $X=2$일 확률은

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

(ii) $X=2\sqrt{2}$일 때,

삼각형 ABG와 합동인 직각삼각형, 즉 넓이가 $2\sqrt{2}$인 삼각형의 개수는 $2\times12=24$

따라서 $X=2\sqrt{2}$일 확률은

$$\mathrm{P}(X=2\sqrt{2})=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

(iii) $X=2\sqrt{3}$일 때,

삼각형 ACF와 합동인 정삼각형, 즉 넓이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형의 개수는 $56-(24+24)=8$

따라서 $X=2\sqrt{3}$일 확률은

$$\mathrm{P}(X=2\sqrt{3})=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{3}{7}+2\sqrt{2}\times\frac{3}{7}+2\sqrt{3}\times\frac{1}{7}$$
$$=\frac{6}{7}+\frac{6\sqrt{2}}{7}+\frac{2\sqrt{3}}{7}$$
$$\therefore\ \mathrm{E}\left(\frac{7}{2}X-\sqrt{3}\right)=\frac{7}{2}\mathrm{E}(X)-\sqrt{3}$$
$$=\frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}+\frac{6\sqrt{2}}{7}+\frac{2\sqrt{3}}{7}\right)-\sqrt{3}$$
$$=3+3\sqrt{2}$$

답 ③

15

$0\le X\le 4$에서 확률의 총합은 1이므로 $x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=16a=1\qquad \therefore\ a=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(x\le X\le 4)=\frac{1}{16}(x+4)(4-x)\ (0\le x\le 4)$

$$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X\le 2a)=\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{1}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(0\le X<\frac{1}{8}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le X\le 4)-\mathrm{P}\left(\frac{1}{8}\le X\le 4\right)$$
$$=1-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}+4\right)\left(4-\frac{1}{8}\right)$$
$$=1-\frac{1023}{1024}$$
$$=\frac{1}{1024}$$

따라서 $p=1024$, $q=1$이므로 $p+q=1025$

답 1025

16

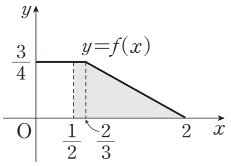
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(a+2)\times\frac{9a}{8}=1,\ \frac{9a^2+18a}{16}=1$

$9a^2+18a-16=0,\ (3a+8)(3a-2)=0$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}\ (\because\ a>0)$

이때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$의 값은 오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

보충설명

주어진 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)=1-\mathrm{P}\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)$

이때, $\mathrm{P}\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

17

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.
조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\mathrm{P}(2\le X\le 4)=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈏에서 $\mathrm{P}(2\le X\le x)=a-\frac{(4-x)^2}{8}$에 $x=4$를 대입하면

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)=a$에서

$a=\frac{1}{2}$ (∵ ㉠)

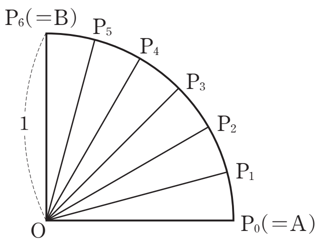
$\therefore\ \mathrm{P}(2\le X\le x)=\frac{1}{2}-\frac{(4-x)^2}{8}$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le X\le 3)&=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 3)\\&=2\mathrm{P}(2\le X\le 3)\\&=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

18



$n=3$이므로 위의 그림과 같이 호 AB를 6등분한다.

이때, 부채꼴 $\mathrm{P}_m\mathrm{OP}_{m+1}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$의 중심각의 크기는

$\angle \mathrm{P}_m\mathrm{OP}_{m+1}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{12}$

부채꼴 $\mathrm{P}_m\mathrm{OP}_{m+1}$의 반지름의 길이는 1이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{24}$

다섯 개의 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점 P에 대하여 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값을 구하면 다음과 같다.

$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1$ 또는 $\mathrm{P}=\mathrm{P}_5$일 때, $X=5\times\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$

$\mathrm{P}=\mathrm{P}_2$ 또는 $\mathrm{P}=\mathrm{P}_4$일 때, $X=4\times\frac{\pi}{24}-2\times\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$

$\mathrm{P}=\mathrm{P}_3$일 때, $X=3\times\frac{\pi}{24}-3\times\frac{\pi}{24}=0$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(X)&=0\times\frac{1}{5}+\frac{\pi}{12}\times\frac{2}{5}+\frac{\pi}{6}\times\frac{2}{5}\\&=\frac{3}{30}\pi=\frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

답 ②

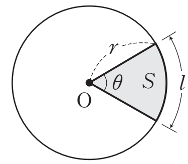
보충설명

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$



19

주머니 안에 들어 있는 검은 공의 개수를 x라 하면 흰 공의 개수는 $(8-x)$이다.

검은 공이 한 개가 나올 확률은 동전 2개 중 앞면이 한 개 나오고 검은 공을 1개 꺼내는 경우 또는 동전 2개 모두 앞면이 나오고 흰 공을 1개, 검은 공을 1개 꺼내는 경우이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&={}_2\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{x}{8}+{}_2\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_x\mathrm{C}_1\times{}_{8-x}\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{16}x+\frac{x(8-x)}{112}\\&=\frac{x(15-x)}{112}\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{9}{28}$에서

$\frac{9}{28}=\frac{x(15-x)}{112}$

$x^2-15x+36=0$, $(x-3)(x-12)=0$

$\therefore\ x=3$ $(\because\ x<8)$

따라서 주머니 안에는 검은 공 3개와 흰 공 5개가 들어 있고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=2$인 경우는 동전 2개 중 앞면이 두 개 나오고 검은 공을 2개 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$\mathrm{P}(X=2)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{28}=\frac{3}{112}$

$$\mathrm{P}(X=0)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$$
$$=1-\left(\frac{9}{28}+\frac{3}{112}\right)$$
$$=\frac{73}{112}$$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{73}{112}+1\times\frac{9}{28}+2\times\frac{3}{112}=\frac{3}{8}$

$\therefore\ \mathrm{E}(24X+4)=24\mathrm{E}(X)+4=24\times\frac{3}{8}+4=13$

답 13

보충설명

$X=0$인 경우는 다음과 같다.

(i) 동전 2개 중 앞면이 한 개도 나오지 않을 때,
구하는 확률은
$_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii) 동전 2개 중 앞면이 한 개 나오고 검은 공을 꺼내지 않을 때,
구하는 확률은
$_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$

(iii) 동전 2개 중 앞면이 두 개 나오고 검은 공을 꺼내지 않을 때,
$_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{_5C_2}{_8C_2}=\frac{5}{56}$

(i), (ii), (iii)에서 $X=0$일 확률은
$\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{56}=\frac{73}{112}$

20

5장의 카드에서 임의로 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는
$_5C_3={}_5C_2=10$
뽑은 3장의 카드에 숫자 1, 2, 3을 적는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$10\times6=60$
확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=0$일 때,
1, 2, 3이 적힌 카드를 꺼내고 1이 적힌 카드에 1, 2가 적힌 카드에 2, 3이 적힌 카드에 3을 적어야 하므로 그 경우의 수는 1
따라서 $X=0$일 확률은
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{60}$

(ii) $X=1$일 때,
1, 2, 3이 적힌 카드에서 2개를 꺼내어 카드와 같은 숫자를 적고, 4, 5가 적힌 카드에서 1개의 카드를 꺼내어 남은 숫자를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_2\times{}_2C_1=3\times2=6$
따라서 $X=1$일 확률은
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{6}{60}$

(iii) $X=2$일 때,
① 1, 2, 3이 적힌 카드에서 3개를 꺼낼 때,
3개의 카드 중에서 1개의 카드에는 같은 숫자를 적고, 남은 2개의 카드에는 다른 숫자를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_1\times1=3$
② 1, 2, 3이 적힌 카드에서 2개를 꺼낼 때,
4, 5가 적힌 카드 중에서 나머지 1개를 뽑아야 한다.
1, 2, 3이 적힌 카드에서 뽑은 2개의 카드 중에서 1개에는 같은 숫자를 적어야 하고 남은 카드에는 적힌 숫자와 다른 숫자를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_2\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times1=12$
③ 1, 2, 3이 적힌 카드에서 1개를 꺼낼 때,
4, 5가 적힌 카드 2개에 숫자를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_1\times{}_2C_2\times2!=6$
①, ②, ③에서 $X=2$일 확률은
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3+12+6}{60}=\frac{21}{60}$

(iv) $X=3$일 때,
④ 1, 2, 3이 적힌 카드에서 3개를 꺼낼 때,
모두 서로 다른 숫자가 적혀야 하므로 그 경우의 수는
2
⑤ 1, 2, 3이 적힌 카드에서 2개를 꺼낼 때,
4, 5가 적힌 카드 중에서 나머지 1개를 뽑고 그 카드에 1, 2, 3 중에서 하나를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_2\times{}_2C_1\times3=18$

⑥ 1, 2, 3이 적힌 카드에서 1개를 꺼낼 때,
1, 2, 3이 적힌 카드 중에서 뽑은 1개의 카드에 자신과 다른 숫자를 적고 4, 5가 적힌 카드 2개에 숫자를 적어야 하므로 그 경우의 수는
$_3C_1 \times {_2C_1} \times 2! = 12$

④, ⑤, ⑥에서 $X=3$일 확률은

$$P(X=3)=\frac{2+18+12}{60}=\frac{32}{60}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{21}{60}$	$\frac{32}{60}$	1

$$\therefore\ E(X)=0\times\frac{1}{60}+1\times\frac{6}{60}+2\times\frac{21}{60}+3\times\frac{32}{60}$$
$$=\frac{12}{5}$$

답 $\frac{12}{5}$

보충설명

$P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$의 값을 모두 구한 후, (iv)에서 $P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$를 이용하면 $P(X=3)$의 값을 쉽게 구할 수 있다.

즉, $P(X=3)=1-\left(\frac{1}{60}+\frac{6}{60}+\frac{21}{60}\right)=\frac{32}{60}$이다.

21

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 2a\times b=1$에서

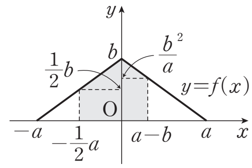
$ab=1$ ……㉠

한편, 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{b}{a}x+b & (-a\le x<0)\\ -\frac{b}{a}x+b & (0\le x\le a)\end{cases}$$

이때, $f\left(-\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{2}b$, $f(a-b)=\frac{b^2}{a}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le a-b\right)$의 값은 오른쪽 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같다.



어두운 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\left(b+\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{2}\times(a-b)\times\left(b+\frac{b^2}{a}\right)$$
$$=\frac{3}{8}ab+\frac{1}{2}ab-\frac{b^3}{2a}$$
$$=\frac{7}{8}ab-\frac{b^3}{2a}$$
$$=\frac{7}{8}-\frac{1}{2a^4}\ (\because ㉠)$$

즉, $\frac{7}{8}-\frac{1}{2a^4}=\frac{19}{32}$에서

$\frac{1}{2a^4}=\frac{9}{32}$, $\frac{1}{a^4}=\frac{9}{16}$

$a^4=\frac{16}{9}$ $\quad\therefore\ a^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 30a^2=40$

답 40

보충설명

$$P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le 0\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\left(\frac{1}{2}b+b\right)$$
$$=\frac{3}{8}<\frac{19}{32}$$

즉, $P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le 0\right)<P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le a-b\right)$이므로

$a-b>0$임을 확인할 수 있다.

$$\therefore\ P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le a-b\right)=P\left(-\frac{1}{2}a\le X\le 0\right)+P(0\le X\le a-b)$$

22

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	…	n	합계
$P(X=x)$	0	a	$2a$	…	$(n-1)a$	1

확률의 총합은 1이므로

$a\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}=1,\ \dfrac{n(n-1)}{2}a=1$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{n(n-1)}$ ……㉠

$$\begin{aligned}E(X)&=1\times0+2\times a+3\times2a+\cdots+n\times(n-1)a\\&=a\{2\times1+3\times2+4\times3+\cdots+n\times(n-1)\}\\&=a\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\\&=a\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)\\&=a\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\&=a\times\frac{(n-1)n(n+1)}{3}\\&=\frac{2(n+1)}{3}\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=1^2\times0+2^2\times a+3^2\times2a+\cdots+n^2\times(n-1)a\\&=a\{2^2\times1+3^2\times2+4^2\times3+\cdots+n^2\times(n-1)\}\\&=a\sum_{k=1}^{n}k^2(k-1)\\&=a\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\&=a\left[\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\\&=a\times\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}\\&=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned}V(X)&=\frac{(n+1)(3n+2)}{6}-\left\{\frac{2(n+1)}{3}\right\}^2\\&=\frac{(n+1)(n-2)}{18}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{(n+1)(n-2)}{18}\ge1$에서

$n^2-n-2\ge18$

$n^2-n-20\ge0$

$(n+4)(n-5)\ge0$

$\therefore\ n\ge5$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 5

유형연습 06 이항분포와 정규분포

본문 pp.145~159

01-1 15	01-2 7	01-3 10
02-1 18	02-2 20	02-3 4
03-1 5	03-2 145	03-3 $75\sqrt{3}$
04-1 6100	04-2 1점	04-3 28
05-1 0.383	05-2 ㄱ, ㄷ	06-1 175
06-2 0.5328	07-1 55	07-2 80점
08-1 0.9772	08-2 365	

01-1

두 개의 동전을 동시에 던져 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

즉, X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_n C_x\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$\therefore\ P(X=3)={}_n C_3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$,

$P(X=4)={}_n C_4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}$

이때, $P(X=3)=P(X=4)$를 만족시키므로

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

$=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}$

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{n-3}{4}\times\dfrac{1}{4},\ n-3=12$

$\therefore\ n=15$

답 15

01-2

확률변수 X는 이항분포 $B\left(25,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{25}C_x\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\left(\dfrac{4}{5}\right)^{25-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$

$\therefore\ P(X=n)={}_{25}C_n\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\left(\dfrac{4}{5}\right)^{25-n}$,

$P(X=n+1)={}_{25}C_{n+1}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{24-n}$

이때, $\dfrac{\mathrm{P}(X=n)}{\mathrm{P}(X=n+1)}<2$를 만족시켜야 하므로

$\mathrm{P}(X=n)<2\mathrm{P}(X=n+1)$ ($\because$ $\mathrm{P}(X=n+1)>0$)

$$\frac{25!}{n!(25-n)!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{25-n}<2\times\frac{25!}{(n+1)!(24-n)!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{24-n}$$

$$\frac{1}{25-n}\times\frac{4}{5}<2\times\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{5}$$

$2n+2<25-n$

$3n<23$

$\therefore$ $n<\dfrac{23}{3}$

따라서 자연수 n의 최댓값은 7이다.

답 7

01-3

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{4-x}$ ($x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

확률변수 Y가 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 1-p)$를 따르므로 Y의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(Y=y)={}_4\mathrm{C}_y(1-p)^y p^{4-y}$ ($y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$)

이때, $\mathrm{P}(X<2)=\mathrm{P}(Y=2)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<2)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\&={}_4\mathrm{C}_0(1-p)^4+{}_4\mathrm{C}_1p(1-p)^3\\&=(1-p)^4+4p(1-p)^3,\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(Y=2)={}_4\mathrm{C}_2(1-p)^2p^2=6(1-p)^2p^2$

이므로

$(1-p)^4+4p(1-p)^3=6(1-p)^2p^2$

$(1-p)^2+4p(1-p)=6p^2$ ($\because$ $0<1-p<1$)

$p^2-2p+1+4p-4p^2=6p^2$

$\therefore$ $9p^2=2p+1$ ……㉠

$$\begin{aligned}\therefore\ (9p-1)^2&=81p^2-18p+1\\&=9(2p+1)-18p+1\ (\because\ ㉠)\\&=18p+9-18p+1\\&=10\end{aligned}$$

답 10

02-1

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=np(1-p)$

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=3np=18$에서

$np=6$ ……㉠

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(3X^2)&=3\mathrm{E}(X^2)\\&=3[\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2]\ \leftarrow \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=3\{np(1-p)+(np)^2\}\\&=3\{6(1-p)+36\}\ (\because\ ㉠)\\&=3(42-6p)\end{aligned}$$

즉, $3(42-6p)=120$이므로

$42-6p=40,\ 6p=2$ $\therefore$ $p=\dfrac{1}{3}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{3}n=6$ $\therefore$ $n=18$

답 18

02-2

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{2},\ \mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{k=0}^{n}(k-2)^2\mathrm{P}(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}(k^2-4k+4)\mathrm{P}(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{P}(X=k)-4\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{P}(X=k)+4\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k)\\&=\mathrm{E}(X^2)-4\mathrm{E}(X)+4\ \leftarrow \text{확률의 총합은 1}\\&=\underbrace{\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2}_{\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2}-4\mathrm{E}(X)+4\\&=\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{2}\right)^2-4\times\frac{n}{2}+4\\&=\frac{n^2}{4}-\frac{7n}{4}+4\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{7n}{4}+4=69$이므로

$\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{7n}{4}-65=0,\ n^2-7n-260=0$

$(n+13)(n-20)=0$

$\therefore$ $n=20$ ($\because$ $n>0$)

답 20

02-3

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{40}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{40}=\dfrac{5}{2}$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{40}\times\dfrac{39}{40}=\dfrac{39}{16}$

이때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\dfrac{39}{16}=\mathrm{E}(X^2)-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{39}{16}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{139}{16}$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\sum_{k=0}^{100}(x-ak)^2\mathrm{P}(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{100}(x^2-2akx+a^2k^2)\mathrm{P}(X=k)\\&=x^2\sum_{k=0}^{100}\mathrm{P}(X=k)-2ax\sum_{k=0}^{100}k\mathrm{P}(X=k)\\&\qquad+a^2\sum_{k=0}^{100}k^2\mathrm{P}(X=k)\\&=x^2\times1-2ax\times\mathrm{E}(X)+a^2\times\mathrm{E}(X^2)\\&=x^2-5ax+\frac{139}{16}a^2\\&=\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2+\frac{39}{16}a^2\end{aligned}$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 39이므로

$\dfrac{39}{16}a^2=39,\ a^2=16$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

답 4

03-1

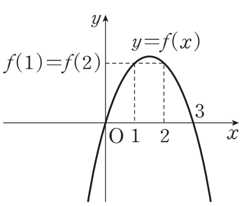
주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6

이때, 오른쪽 그림에서

$f(1)>0,\ f(2)>0$이므로

사건 A가 일어날 확률은

$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$



즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=15\times\dfrac{1}{3}=5$

답 5

03-2

두 주사위 A, B를 동시에 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ ($\alpha,\ \beta$는 자연수)라 하자.

$x^2-ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$에서

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ ……㉠

(i) $b=1$일 때,

$\alpha=1,\ \beta=1$일 때이므로 ㉠에서

$a=2$

(ii) $b=2$일 때,

$\alpha=1,\ \beta=2$ 또는 $\alpha=2,\ \beta=1$일 때이므로 ㉠에서

$a=3$

(iii) $b=3$일 때,

$\alpha=1,\ \beta=3$ 또는 $\alpha=3,\ \beta=1$일 때이므로 ㉠에서

$a=4$

(iv) $b=4$일 때,

$\alpha=1,\ \beta=4$ 또는 $\alpha=4,\ \beta=1$ 또는 $\alpha=2,\ \beta=2$일 때이므로 ㉠에서

$a=4$ 또는 $a=5$

(v) $b=5$일 때,

$\alpha=1,\ \beta=5$ 또는 $\alpha=5,\ \beta=1$일 때이므로 ㉠에서

$a=6$

(vi) $b=6$일 때,

$\alpha=2,\ \beta=3$ 또는 $\alpha=3,\ \beta=2$ 또는 $\alpha=1,\ \beta=6$ 또는 $\alpha=6,\ \beta=1$일 때이므로 ㉠에서

$a=5$ 또는 $a=7$

이때, a는 6 이하의 자연수이므로 $a=5$

(i)~(vi)에서 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)$

의 7가지이므로

$\mathrm{P}(N)=\dfrac{7}{36}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240,\ \dfrac{7}{36}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=240\times\dfrac{7}{36}=\dfrac{140}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+5)=3\mathrm{E}(X)+5=3\times\dfrac{140}{3}+5=145$

답 145

03-3

5개의 동전을 동시에 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는

${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

이때, $mn<5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(0, 5)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$의 4개이다.

(i) $(m, n)=(0, 5)$ 또는 $(m, n)=(5, 0)$일 때,

5개의 동전 모두 앞면 또는 뒷면만 나올 확률은

$${}_{5}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_{5}C_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$$

(ii) $(m, n)=(1, 4)$ 또는 $(m, n)=(4, 1)$일 때,

5개의 동전 중 앞면이 1개, 뒷면이 4개 또는 앞면이 4개, 뒷면이 1개 나올 확률은

$${}_{5}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_{5}C_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 사건 A가 일어날 확률은

$$\frac{1}{16}+\frac{5}{16}=\frac{3}{8}$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$$E(X)=20\times\frac{3}{8}=\frac{15}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{20\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}}=\frac{5}{4}\sqrt{3}$$

$$\therefore\ E(2X)=2E(X)=2\times\frac{15}{2}=15,$$

$$\sigma(4X-1)=4\sigma(X)=4\times\frac{5}{4}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

$$\therefore\ E(2X)\times\sigma(4X-1)=15\times5\sqrt{3}=75\sqrt{3}$$

답 $75\sqrt{3}$

04-1

10회의 시행 중에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 Y는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ E(Y)=10\times\frac{1}{2}=5$$

이때, 동전의 뒷면이 나오는 횟수는 $10-Y$이므로

$$X=500Y+100(10-Y)=400Y+1000$$

$$\therefore\ E(X)=E(400Y+1000)=400E(Y)+1000=400\times5+1000=3000$$

$$\therefore\ E(2X+100)=2E(X)+100=2\times3000+100=6100$$

답 6100

04-2

답을 임의로 고른 응시자가 맞힌 문항 수를 확률변수 X라 하면 오지선다형 객관식 한 문항을 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(40, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ E(X)=40\times\frac{1}{5}=8$$

이때, 틀린 문항 수는 $40-X$이므로 틀린 문항당 감점해야 하는 점수를 k라 하고, 답을 임의로 고른 응시자의 점수를 확률변수 Y라 하면

$$Y=5X-k(40-X)=(k+5)X-40k$$

따라서 답을 임의로 고른 응시자의 평균 점수는

$$E(Y)=E((k+5)X-40k)=(k+5)E(X)-40k=8(k+5)-40k=-32k+40$$

즉, $-32k+40=8$에서 $k=1$

따라서 틀린 문항당 감점해야 하는 점수는 1점이다.

답 1점

04-3

100원짜리 동전의 개수를 Y라 하면 500원짜리 동전의 개수는 $20-Y$이다.

이때, 1개의 동전을 던져 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이므로 상금의 기댓값은

$$100\times\frac{1}{2}Y+500\times\frac{1}{2}(20-Y)=50Y+250(20-Y)=-200Y+5000$$

이때, 이 게임에서 상금의 기댓값이 3600원이므로

$-200Y+5000=3600$, $200Y=1400$

$\therefore Y=7$

즉, 100원짜리 동전은 7개이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(7, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore V(X)=7\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$

$\therefore V(4X)=4^2V(X)=16\times\frac{7}{4}=28$

답 28

05-1

확률변수 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\geq 32)=P(Z\geq -1)$에서

$$P(X\geq 32)=P\left(Z\geq\frac{32-m}{\sigma}\right)=P(Z\geq -1)$$

이므로 $\frac{32-m}{\sigma}=-1$, $32-m=-\sigma$

$\therefore m=32+\sigma$ ······㉠

$P(X\leq 18)=P(Z\geq 2)$에서

$$P(X\leq 18)=P\left(Z\leq\frac{18-m}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq\frac{m-18}{\sigma}\right)=P(Z\geq 2)$$

이므로 $\frac{m-18}{\sigma}=2$, $m-18=2\sigma$

$\therefore m=2\sigma+18$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=46$, $\sigma=14$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $N(46, 14^2)$을 따른다.

$$\therefore P(39\leq X\leq 53)=P\left(\frac{39-46}{14}\leq Z\leq\frac{53-46}{14}\right)=P(-0.5\leq Z\leq 0.5)=2P(0\leq Z\leq 0.5)=2\times 0.1915=0.383$$

답 0.383

05-2

확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(m, (2\sigma)^2)$, $N(m+2, \sigma^2)$을 따르므로 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

ㄱ. $P(X\leq -2)=P\left(Z\leq -\frac{m+2}{2\sigma}\right)$

$$P\left(Y\geq\frac{3}{2}m+3\right)=P\left(Z\geq\frac{\frac{3}{2}m+3-m-2}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq\frac{\frac{1}{2}m+1}{\sigma}\right)=P\left(Z\geq\frac{m+2}{2\sigma}\right)$$

이때, $-\frac{m+2}{2\sigma}$와 $\frac{m+2}{2\sigma}$는 크기가 같고 부호가 반대이므로

$P\left(Z\leq -\frac{m+2}{2\sigma}\right)=P\left(Z\geq\frac{m+2}{2\sigma}\right)$

$\therefore P(X\leq -2)=P\left(Y\geq\frac{3}{2}m+3\right)$ (참)

ㄴ. $P(m\leq X\leq m+2)=P\left(\frac{m-m}{2\sigma}\leq Z\leq\frac{m+2-m}{2\sigma}\right)=P\left(0\leq Z\leq\frac{1}{\sigma}\right)$

$$\frac{1}{2}P(m+2\leq Y\leq m+4)=\frac{1}{2}P\left(\frac{m+2-m-2}{\sigma}\leq Z\leq\frac{m+4-m-2}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}P\left(0\leq Z\leq\frac{2}{\sigma}\right)$$

이때, $P\left(0\leq Z\leq\frac{1}{\sigma}\right)\neq\frac{1}{2}P\left(0\leq Z\leq\frac{2}{\sigma}\right)$이므로

$P(m\leq X\leq m+2)\neq\frac{1}{2}P(m+2\leq Y\leq m+4)$ (거짓)

ㄷ. $P(X\geq a)=P\left(Z\geq\frac{a-m}{2\sigma}\right)$

$P(Y\leq b)=P\left(Z\leq\frac{b-m-2}{\sigma}\right)$

이때, $P(X\geq a)+P(Y\leq b)=1$이 되려면

$\frac{a-m}{2\sigma}=\frac{b-m-2}{\sigma}$이어야 하므로

$a-m=2b-2m-4$

$\therefore 2b-a=m+4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

06-1

파인애플의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1250,\ 50^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-1250}{50}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
파인애플의 무게가 1325 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq1325)&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{1325-1250}{50}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 2500개의 파인애플 중에서 무게가 1325 g 이상인 것은 $2500\times0.07=175$(개)이다.

답 175

06-2

타이어 A의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z_1=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때, $\mathrm{P}(X\leq m-3)=0.1587$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\leq m-3)&=\mathrm{P}\left(Z_1\leq-\frac{3}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_1\geq\frac{3}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z_1\leq\frac{3}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{P}\left(0\leq Z_1\leq\frac{3}{\sigma}\right)=0.5-0.1587=0.3413$
주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.3413$이므로
$\frac{3}{\sigma}=1 \qquad \therefore\ \sigma=3$
또한, 타이어 B의 무게를 Y g이라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+6,\ (2\sigma)^2)$, 즉 $\mathrm{N}(m+6,\ 6^2)$을 따르므로 확률변수 $Z_2=\frac{Y-(m+6)}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m\leq Y\leq m+9)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{m-(m+6)}{6}\leq Z_2\leq\frac{m+9-(m+6)}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\leq Z_2\leq0.5)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq1)+\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq0.5)\\&=0.3413+0.1915=0.5328\end{aligned}$$

답 0.5328

07-1

학생들의 시험 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 15^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{15}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때, 재시험 대상이 될 확률이 0.16이므로

$\mathrm{P}(X\leq40)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{40-m}{15}\right)=0.16$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq-\frac{40-m}{15}\right)=0.16$$

$$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{40-m}{15}\right)=0.16$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{40-m}{15}\right)=0.16$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq-\frac{40-m}{15}\right)=0.34$$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)=0.34$이므로

$$-\frac{40-m}{15}=1$$

$$\therefore\ m=55$$

답 55

07-2

지원한 학생 200명의 입학 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-70}{5}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 추가 합격자의 최저 점수가 75점이므로

$$\begin{aligned}P(X\ge 75)&=P\left(Z\ge \frac{75-70}{5}\right)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

즉, 200명의 지원자 중 시험 점수가 75점 이상인 지원자는 $200\times 0.16=32$(명)이다.

이때, 추가 합격자가 28명이므로 최초 합격자는 $32-28=4$(명)이다.

최초 합격자의 최저 점수를 k점이라 하면

$$\begin{aligned}P(X\ge k)&=P\left(Z\ge \frac{k-70}{5}\right)\\&=\frac{4}{200}=0.02\end{aligned}$$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{k-70}{5}\right)=0.02$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le \frac{k-70}{5}\right)=0.02$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le \frac{k-70}{5}\right)=0.48$$

이때, 주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$$\frac{k-70}{5}=2,\ k-70=10$$

$$\therefore\ k=80$$

따라서 최초 합격자의 최저 점수는 80점이다.

답 80점

08-1

구내식당에서 점심 식사를 하는 직원의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1600,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$$E(X)=1600\times\frac{9}{10}=1440$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1600\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}=12$$

이때, 1600은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(1440,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-1440}{12}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 식당에 온 직원들이 모두 식사를 하려면 구내식당에 온 직원의 수가 1464명 이하이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le 1464)&=P\left(Z\le \frac{1464-1440}{12}\right)\\&=P(Z\le 2)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 0.9772

08-2

상자에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 검은 공의 개수가 2일 확률은

$$\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(980,\ \frac{5}{14}\right)$를 따르므로

$$E(X)=980\times\frac{5}{14}=350$$

$$\sigma(X)=\sqrt{980\times\frac{5}{14}\times\frac{9}{14}}=\sqrt{225}=15$$

이때, 980은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(350,\ 15^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-350}{15}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$P(X\le n)=P\left(Z\le \frac{n-350}{15}\right)\ge 0.8413$$

$$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{n-350}{15}\right)\ge 0.8413$$

$$0.5+P\left(0\le Z\le \frac{n-350}{15}\right)\ge 0.8413$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le \frac{n-350}{15}\right)\ge 0.3413$$

이때, 주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{n-350}{15}\ge 1$$

$$\therefore\ n\ge 365$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 365이다.

답 365

개념마무리

본문 pp.161~164

01 5	**02** 35	**03** -60	**04** ④
05 39	**06** 4	**07** 8	**08** 0.8413
09 ㄴ, ㄷ	**10** ⑤	**11** ②	**12** ①
13 91점	**14** 0.9772	**15** 0.07	**16** 0.0013
17 23	**18** $\frac{1}{12}$	**19** 116	**20** ③
21 ㄱ, ㄴ, ㄷ	**22** 0.01	**23** 50	

01

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(200,\ p)$를 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=200p(1-p)\\&=-200(p^2-p)\\&=-200\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+50\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 가지므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{V}(Y)=240\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=45$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}\left(\frac{1}{3}Y+5\right)&=\frac{1}{9}\mathrm{V}(Y)\\&=\frac{1}{9}\times45=5\end{aligned}$$

답 5

02

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=80\times\frac{1}{4}=20,\ \mathrm{V}(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$

(가)

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\mathrm{E}(X^2)-2x\mathrm{E}(X)+x^2\\&=15+20^2-2x\times20+x^2 \leftarrow \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=x^2-40x+415=(x-20)^2+15\end{aligned}$$

(나)

즉, 함수 $f(x)$는 $x=20$일 때 최솟값 15를 갖는다.
따라서 $p=20,\ q=15$이므로
$p+q=20+15=35$

(다)

답 35

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 X의 평균과 분산을 구한 경우	30%
(나)	확률변수 X의 평균과 분산을 이용하여 이차함수 $f(x)$의 식을 구한 경우	40%
(다)	$p+q$의 값을 구한 경우	30%

03

각 시행은 독립시행이고 한 번의 시행에서 꺼낸 2개의 공의 색이 같을 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{2}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=50\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=12$

이때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로
$12=\mathrm{E}(X^2)-20^2$에서 $\mathrm{E}(X^2)=12+400=412$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\sum_{k=0}^{50}(-x^2-6kx+k^2)\mathrm{P}(X=k)\\&=-x^2\sum_{k=0}^{50}\mathrm{P}(X=k)-6x\sum_{k=0}^{50}k\mathrm{P}(X=k)\\&\qquad+\sum_{k=0}^{50}k^2\mathrm{P}(X=k)\\&=-x^2\times1-6x\times\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)\\&=-x^2-120x+412\\&=-(x+60)^2+4012\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$의 값이 최대가 되도록 하는 x의 값은 -60이다.

답 -60

04

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로
$\mathrm{E}(X)=8,\ \mathrm{V}(X)=7$에서
$np=8,\ np(1-p)=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $n=64,\ p=\frac{1}{8}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=r)={}_{64}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{8}\right)^r\left(\frac{7}{8}\right)^{64-r}\ (\text{단, } r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 64)$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{n} 8^r \mathrm{P}(X=r)=\sum_{r=0}^{64}\left\{8^r \times {}_{64}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{8}\right)^r\left(\frac{7}{8}\right)^{64-r}\right\}$$
$$=\sum_{r=0}^{64} {}_{64}\mathrm{C}_r\left(\frac{7}{8}\right)^{64-r}$$
$$=\left(1+\frac{7}{8}\right)^{64}$$
$$=\left(\frac{15}{8}\right)^{64}$$

답 ④

05

주머니에 들어 있는 모든 공의 개수는

$$10+20+30+\cdots+10n=10(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=10\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=5n(n+1)$$

이때, 4 이하의 수가 적힌 공의 개수는

$10+20+30+40=100$

각 시행은 독립시행이고 한 번의 시행에서 4 이하의 수가 적힌 공이 나올 확률은

$$\frac{100}{5n(n+1)}=\frac{20}{n(n+1)}$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{20}{n(n+1)}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{20}{n(n+1)}=\frac{20}{n+1}$$

$$\therefore \mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1$$
$$=\frac{40}{n+1}+1$$

즉, $\frac{40}{n+1}+1=2$에서 $40=n+1$

$\therefore n=39$

답 39

06

200회의 독립시행에서 상금을 받는 횟수를 X라 하고 던진 주사위의 두 눈의 수의 합이 a 이하일 확률을 p라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(200,\ p)$를 따르므로

$m=\mathrm{E}(X)=200p,\ \sigma^2=\mathrm{V}(X)=200p(1-p)$

즉, $8m>9\sigma^2$에서

$1600p>1800p(1-p)$

$8p>9p(1-p)$

$9p^2-p>0,\ p(9p-1)>0$

$\therefore p>\frac{1}{9}$ ($\because 0<p<1$)

이때, 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합이 a일 확률은 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	합
$\mathrm{P}(X=a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

따라서 $\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{12}$,

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{6}$이므로 $p>\frac{1}{9}$을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

07

추가로 넣는 흰 공의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(Y)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

이때, 주머니에 들어 있는 9개의 공 중에서 흰 공의 개수는

$X=3+Y$

$$\therefore \mathrm{E}(2X+1)=\mathrm{E}(6+2Y+1)$$
$$=\mathrm{E}(2Y+7)$$
$$=2\mathrm{E}(Y)+7$$
$$=2\times\frac{1}{2}+7=8$$

답 8

다른풀이

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이고 각각의 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $\mathrm{P}(X=3)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

(ii) $\mathrm{P}(X=4)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{6}{16}$

(iii) $\mathrm{P}(X=5)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{16}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=3\times\frac{9}{16}+4\times\frac{6}{16}+5\times\frac{1}{16}=\frac{7}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2\times\frac{7}{2}+1=8$

08

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(X\geq42)=\mathrm{P}(X\leq48)$이므로

$m=\frac{42+48}{2}=45$

조건 (나)에서

$$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+6)=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\leq Z\leq\frac{m+6-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{6}{\sigma}\right)=0.1915$$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)=0.1915$이므로

$\frac{6}{\sigma}=0.5\qquad\therefore\ \sigma=12$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\leq57)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{57-45}{12}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\leq1)$$
$$=\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

답 0.8413

09

ㄱ. 정규분포곡선에서 $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{E}(Y)=20$이므로

$\mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5=2\times10+5=25$,

$\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}Y+5\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(Y)+5=\frac{1}{2}\times20+5=15$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X+5)\neq\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}Y+5\right)$ (거짓)

ㄴ. 표준편차의 값이 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 퍼진 모양이 된다.

함수 $f(x)$의 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프보다 가운데 부분의 높이는 낮고 양쪽으로 더 퍼진 모양이므로

$\sigma(X)>\sigma(Y)$

이때, 표준편차는 양의 값을 갖고 분산은 표준편차의 제곱이므로

$\mathrm{V}(X)>\mathrm{V}(Y)$ (참)

ㄷ. $\sigma(X)=\sigma_1$이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ \sigma_1^{\ 2})$을 따르므로 확률변수 $Z_X=\frac{X-10}{\sigma_1}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq X\leq10)=\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma_1}\leq Z_X\leq0\right)$

$\sigma(Y)=\sigma_2$라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma_2^{\ 2})$을 따르므로 확률변수 $Z_Y=\frac{Y-20}{\sigma_2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(10\leq Y\leq20)=\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma_2}\leq Z_Y\leq0\right)$

이때, ㄴ에서 $\sigma(X)>\sigma(Y)$, 즉 $\sigma_1>\sigma_2$이므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma_1}\leq Z_X\leq0\right)<\mathrm{P}\left(-\frac{10}{\sigma_2}\leq Z_Y\leq0\right)$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq X\leq10)<\mathrm{P}(10\leq Y\leq20)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

10

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-m}{3}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ f(x)=\mathrm{P}(X\geq m+3x)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{m+3x-m}{3}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq x)$$

ㄱ. $f(0)=\mathrm{P}(Z\geq0)=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(a)=\mathrm{P}(Z\geq a),\ f(b)=\mathrm{P}(Z\geq b)$이므로 $a<b$이면

$\mathrm{P}(Z\geq a)>\mathrm{P}(Z\geq b)$

$\therefore\ f(a)>f(b)$ (거짓)

ㄷ. $f(x)<\frac{1}{2}$이 성립하려면 $x>0$이어야 한다.

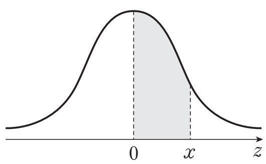
$-f(x)<\frac{1}{2}-2f\left(\frac{x}{2}\right)$의 양변에 $\frac{1}{2}$을 더하면

$\frac{1}{2}-f(x)<1-2f\left(\frac{x}{2}\right)$

이때, $\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.5$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-f(x)&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(Z\geq x)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq x)\end{aligned}$$

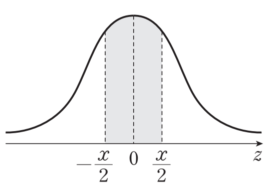
즉, $\frac{1}{2}-f(x)$의 값은 다음 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다.



또한, $f\left(\frac{x}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{x}{2}\right)$이므로

$$\begin{aligned}1-2f\left(\frac{x}{2}\right)&=2\left\{\frac{1}{2}-f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}\\&=2\left\{\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{x}{2}\right)\right\}\\&=2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

즉, $1-2f\left(\frac{x}{2}\right)$의 값은 다음 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다.



두 부분의 넓이를 비교하면 $\frac{1}{2}-f(x)<1-2f\left(\frac{x}{2}\right)$이므로

$-f(x)<\frac{1}{2}-2f\left(\frac{x}{2}\right)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

풀이첨삭

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq x)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\leq Z\leq x\right)$

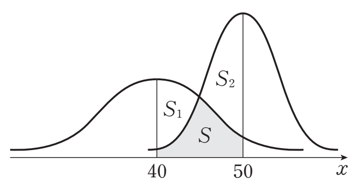
$2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)$

이때, $\mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\leq Z\leq x\right)<\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)$이므로

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq x)<2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{x}{2}\right)$

11

다음 그림에서 어두운 부분의 넓이를 S라 하자.



$\mathrm{P}(40\leq X\leq 50)=S_1+S$이므로

$S_1=\mathrm{P}(40\leq X\leq 50)-S$

또한, $\mathrm{P}(40\leq Y\leq 50)=S_2+S$이므로

$S_2=\mathrm{P}(40\leq Y\leq 50)-S$

$$\begin{aligned}S_2-S_1&=\mathrm{P}(40\leq Y\leq 50)-S-\mathrm{P}(40\leq X\leq 50)+S\\&=\mathrm{P}(40\leq Y\leq 50)-\mathrm{P}(40\leq X\leq 50)\end{aligned}$$

이때, 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z_X=\frac{X-40}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-50}{5}$은 각각 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ S_2-S_1&=\mathrm{P}(40\leq Y\leq 50)-\mathrm{P}(40\leq X\leq 50)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5}\leq Z_Y\leq\frac{50-50}{5}\right)\\&\qquad-\mathrm{P}\left(\frac{40-40}{10}\leq Z_X\leq\frac{50-40}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z_Y\leq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1)\\&=0.4772-0.3413=0.1359\end{aligned}$$

답 ②

12

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-16}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(16-\sigma \le X \le 16+\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{16-\sigma-16}{\sigma} \le Z \le \frac{16+\sigma-16}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)$

$\mathrm{P}(16 \le X \le 16+\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{16-16}{\sigma} \le Z \le \frac{16+\sigma-16}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

이때, $\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$이므로

$\mathrm{P}(16-\sigma \le X \le 16+\sigma)=2\mathrm{P}(16 \le X \le 16+\sigma)$ (참)

ㄴ. $1-f(x)=1-\mathrm{P}(X \le 2x)$

$=1-\mathrm{P}\left(Z \le \frac{2x-16}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2x-16}{\sigma}\right)$

$g(2x-16)=\mathrm{P}(X \ge 2x-16)$

$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2x-16-16}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{2x-32}{\sigma}\right)$

이때, $\frac{2x-16}{\sigma} \ne \frac{2x-32}{\sigma}$이므로

$1-f(x) \ne g(2x-16)$ (거짓)

ㄷ. $f(x)=\mathrm{P}(X \le 2x)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{2x-16}{\sigma}\right)$

$g(x)=\mathrm{P}(X \ge x)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{x-16}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Z \ge m)+\mathrm{P}(Z \le n)=1$이려면 $m=n$이어야 하므로

$f(x)+g(x) \ne 1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

13

게임대회 참가자의 예선 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(85, 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-85}{5}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

상위 36명 안에 들기 위한 최소 점수를 k라 하면

$\mathrm{P}(X \ge k)=\frac{36}{300}=0.12$

$\mathrm{P}(X \ge k)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{k-85}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-85}{5}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-85}{5}\right)=0.12$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{k-85}{5}\right)=0.38$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)=0.38$이므로

$\frac{k-85}{5}=1.2,\ k-85=6$

$\therefore\ k=91$

따라서 본선 진출 자격을 얻기 위한 최소 점수는 91점이다.

답 91점

14

판매용 사과로 분류된 사과의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{8}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400 \times \frac{8}{10}=320,\ \sigma(X)=\sqrt{400 \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{10}}=8$

이때, 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320, 8^2)$을 따르고 확률변수 $Z=\frac{X-320}{8}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 판매용 사과가 336개 이하일 확률은

$\mathrm{P}(X \le 336)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{336-320}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

답 0.9772

15

72회의 주사위를 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 한 개의 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(Y)=72\times\frac{1}{3}=24,\ \sigma(Y)=\sqrt{72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=4$

이때, 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(24,\ 4^2)$을 따르고 확률변수 $Z=\frac{Y-24}{4}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 갑이 얻은 총점을 확률변수 X라 하면

$$X=10Y-2(72-Y)$$
$$=12Y-144$$

따라서 이 게임에서 갑이 216점 이상의 점수를 얻을 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge216)&=P(12Y-144\ge216)\\&=P(Y\ge30)\\&=P\left(Z\ge\frac{30-24}{4}\right)\\&=P(Z\ge1.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

답 0.07

16

주사위를 180회 던지는 시행에서 6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 한 개의 주사위를 던져 6의 눈이 나오는 확률이 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(Y)=180\times\frac{1}{6}=30,\ \sigma(Y)=\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=5$

이때, 180은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따르고 확률변수 $Z=\frac{Y-30}{5}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 180회 시행 후 A와 B가 갖게 되는 돈을 각각 확률변수 X_A, X_B라 하면

$$X_A=120000+600Y-200(180-Y)$$
$$=800Y+84000$$
$$X_B=120000-600Y+200(180-Y)$$
$$=-800Y+156000$$

A가 B보다 더 많은 금액을 갖고 있으려면

$800Y+84000>-800Y+156000$에서

$1600Y>72000\qquad\therefore\ Y>45$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(Y>45)&=P\left(Z>\frac{45-30}{5}\right)\\&=P(Z>3)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987=0.0013\end{aligned}$$

답 0.0013

17

정사면체 모양의 상자 2개를 던져 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=1200\times\frac{1}{4}=300,$

$\sigma(X)=\sqrt{1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\sqrt{225}=15$

이때, 1200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(300,\ 15^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-300}{15}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le270)&=P\left(Z\le\frac{270-300}{15}\right)\\&=P(Z\le-2)=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.477=0.023\end{aligned}$$

즉, $p=0.023$이므로 $1000p=1000\times0.023=23$

답 23

18

확률변수 X의 모든 값에 대한 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=10)$$
$$=3^{10}\left\{{}_{10}C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0(2p)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1(2p)^9+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2(2p)^8+\cdots+{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}(2p)^0\right\}$$
$$=3^{10}\left(\frac{1}{6}+2p\right)^{10}=1$$

즉, $\left(\frac{3}{6}+6p\right)^{10}=1$이므로

$\frac{3}{6}+6p=1,\ 6p=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ p=\frac{1}{12}$

답 $\frac{1}{12}$

19

주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 다른 색 공이 나올 확률은

$\frac{{}_4C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 60회 반복할 때, 다른 색 공이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(60,\ \frac{8}{15}\right)$를 따르므로

$E(Y)=60\times\frac{8}{15}=32$

한편, 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 60회 반복할 때, 다른 색 공이 나오는 횟수가 Y이면 같은 색 공이 나오는 횟수는 $60-Y$이다.

이때, 점 P의 x좌표는 $3(60-Y)=180-3Y$, y좌표는 Y이므로 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은

$X=180-3Y+Y=180-2Y$

$$\begin{aligned}\therefore\ E(X)&=E(180-2Y)=180-2E(Y)\\&=180-2\times32\\&=116\end{aligned}$$

답 116

20

한 번의 시행에서 세 카드에 쓰여 있는 숫자의 합이 9 이하인 경우는 다음과 같다.

(i) 5가 적혀 있는 카드를 택하지 않을 때,
10장의 카드 중 3장의 카드를 뽑을 때, 5를 제외한 5장의 카드 중 3장의 카드를 택할 확률은

$\frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{5\times4\times3}{10\times9\times8}=\frac{1}{12}$

(ii) 5가 적혀 있는 카드를 1개 택할 때,
나머지 2장의 카드가 모두 2가 적혀 있는 카드이어야만 세 수의 합이 9 이하가 된다.
10장의 카드 중 3장의 카드를 뽑을 때, 2가 적혀 있는 카드 2개에서 2개를 택하고 5가 적혀 있는 카드 5개에서 1개를 택할 확률은

$\frac{{}_2C_2\times{}_5C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$

(i), (ii)에서 한 번의 시행에서 세 카드에 쓰여 있는 숫자의 합이 9 이하일 확률은 $\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(448,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$E(X)=448\times\frac{1}{8}=56$

$\sigma(X)=\sqrt{448\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}}=7$

이때, 448은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(56,\ 7^2)$을 따르고 확률변수 $Z=\frac{X-56}{7}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(49\le X\le70)&=P\left(\frac{49-56}{7}\le Z\le\frac{70-56}{7}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ③

21

ㄱ. 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로

$E(X)=np=120$ ……㉠

$\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{30}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$n=160,\ p=\frac{3}{4}$ (참)

ㄴ. $P(X=79)={}_{160}C_{79}\left(\frac{3}{4}\right)^{79}\left(\frac{1}{4}\right)^{81}$

$P(X=81)={}_{160}C_{81}\left(\frac{3}{4}\right)^{81}\left(\frac{1}{4}\right)^{79}$

$\therefore\ \frac{P(X=81)}{P(X=79)}=\frac{\overset{={}_{160}C_{79}}{{}_{160}C_{81}}\left(\frac{3}{4}\right)^{81}\left(\frac{1}{4}\right)^{79}}{{}_{160}C_{79}\left(\frac{3}{4}\right)^{79}\left(\frac{1}{4}\right)^{81}}=9$ (참)

ㄷ. $P(X=k)={}_{160}C_k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{160-k}$

$P(X=160-k)={}_{160}C_{160-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{160-k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$\therefore \frac{P(X=k)}{P(X=160-k)}=\frac{{}_{160}C_k\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{160-k}}{\underbrace{{}_{160}C_{160-k}}_{={}_{160}C_k}\left(\frac{3}{4}\right)^{160-k}\left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{2k-160}\left(\frac{1}{4}\right)^{160-2k}$$

$$=3^{2k-160}$$

$$\therefore \sum_{k=70}^{79}\frac{P(X=k)}{P(X=160-k)}$$

$$=\sum_{k=70}^{79}3^{2k-160}=\sum_{k=70}^{79}\left(\frac{1}{3}\right)^{160-2k}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}+\left(\frac{1}{3}\right)^{18}+\left(\frac{1}{3}\right)^{16}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

이 값은 첫째항이 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$이고 공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=70}^{79}\frac{P(X=k)}{P(X=160-k)}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{10}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}\text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22

이 공장에서 생산되는 인형의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(500,\ 25^2)$을 따르므로 확률변수 $Z_1=\frac{X-500}{25}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 인형의 무게가 450 g 이하이거나 550 g 이상일 확률은

$P(X\le 450)+P(X\ge 550)$

$=P\left(Z_1\le\frac{450-500}{25}\right)+P\left(Z_1\ge\frac{550-500}{25}\right)$

$=P(Z_1\le -2)+P(Z_1\ge 2)=2P(Z_1\ge 2)$

$=2\{0.5-P(0\le Z_1\le 2)\}=2(0.5-0.48)$

$=2\times 0.02=0.04$

따라서 폐기 처분하는 인형의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B(2400,\ 0.04)$를 따르므로

$E(Y)=2400\times 0.04=96$

$\sigma(Y)=\sqrt{2400\times 0.04\times 0.96}=\sqrt{\left(\frac{96}{10}\right)^2}=\frac{48}{5}$

이때, 2400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N\left(96,\ \left(\frac{48}{5}\right)^2\right)$을 따르고 확률변수

$Z_2=\frac{Y-96}{\frac{48}{5}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

그러므로 구하는 확률은

$P(Y\ge 120)=P\left(Z_2\ge\frac{120-96}{\frac{48}{5}}\right)$

$=P(Z_2\ge 2.5)$

$=P(Z_2\ge 0)-P(0\le Z_2\le 2.5)$

$=0.5-0.49=0.01$

답 0.01

23

이 쇼핑몰에서 판매되는 S회사의 태블릿 PC의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36,\ \frac{a}{100}\right)$를 따르므로

$E(X)=36\times\frac{a}{100}=\frac{9}{25}a$

$\sigma(X)=\sqrt{36\times\frac{a}{100}\times\left(1-\frac{a}{100}\right)}=\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}$

이때, 36은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{9}{25}a,\ \left(\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}\right)^2\right)$을 따르고 확률변수

$Z=\frac{X-\frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge 24)=0.0228$에서

$P\left(Z\ge\frac{24-\frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}\right)=0.0228$

이때, 주어진 표준정규분포표에서

$P(Z \geq 2)=0.5-0.4772=0.0228$이므로

$$\frac{24-\frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}=2$$

$$24-\frac{9}{25}a=\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{25}$$

$$200-3a=\sqrt{a(100-a)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$9a^2-1200a+40000=-a^2+100a$$

$$10a^2-1300a+40000=0,\ a^2-130a+4000=0$$

$$(a-50)(a-80)=0$$

$$\therefore\ a=50 \left(\because ㉠\text{에서 } a \leq \frac{200}{3}\right)$$

답 50

유형연습 07 통계적 추정		본문 pp.176~185
01-1 $\frac{31}{36}$	01-2 5	02-1 $\frac{1}{4}$
02-2 $\frac{17}{50}$	02-3 8	03-1 3
03-2 118.59	04-1 18	04-2 8
05-1 0.2119	05-2 0.1587	06-1 121.29
06-2 6400	06-3 31	07-1 74
07-2 64	07-3 6	

01-1

확률변수 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ 이므로

$$P(\overline{X} \leq 0)=P(\overline{X}=-1)+P\left(\overline{X}=-\frac{1}{2}\right)+P(\overline{X}=0)$$

크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 임의추출할 때 나오는 경우는 다음과 같다.

(i) $\overline{X}=-1$일 때,

$(-1,\ -1)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(ii) $\overline{X}=-\frac{1}{2}$일 때,

$(-1,\ 0),\ (0,\ -1)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

(iii) $\overline{X}=0$일 때,

$(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ -1)$일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{18}=\frac{31}{36}$$

답 $\frac{31}{36}$

01-2

주머니에 숫자 1이 적힌 공 1개, 숫자 5가 적힌 공 n개가 들어 있으므로 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하면

$P(X=1)=\frac{1}{n+1}$, $P(X=5)=\frac{n}{n+1}$

첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_1, 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=3$, 즉 $X_1+X_2=6$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)로 나타내면 $(1, 5)$, $(5, 1)$이므로

$$P(\overline{X}=3)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{2n}{(n+1)^2}=\frac{5}{18}$$

$36n=5(n+1)^2$, $5n^2-26n+5=0$

$(5n-1)(n-5)=0$

$\therefore$ $n=\frac{1}{5}$ 또는 $n=5$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 5이다.

답 5

02-1

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{8}+a+b=1$

$\therefore$ $a+b=\frac{7}{8}$ ……㉠

모집단에서 평균을 구하면

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+2\times a+4\times b=2a+4b$

이때, $E(\overline{X})=E(X)=2$이므로 $2a+4b=2$

$\therefore$ $a+2b=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{8}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

모집단에서 분산을 구하면

$V(X)=0^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{3}{4}+4^2\times\frac{1}{8}-2^2=1$

이때, 표본의 크기 $n=4$이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{n}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

02-2

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{2}+a+b=1$

$\therefore$ $a+b=\frac{1}{2}$ ……㉠

모집단에서 평균을 구하면

$$E(X)=10\times\frac{1}{2}+20\times a+30\times b$$
$$=20a+30b+5$$

이때, $E(\overline{X})=E(X)=18$이므로 $20a+30b+5=18$

$\therefore$ $20a+30b=13$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{3}{10}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	20	30	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

크기가 2인 표본을 (X_1, X_2)라 할 때, $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이므로 $\overline{X}=20$, 즉 $X_1+X_2=40$인 경우는

$(10, 30)$, $(20, 20)$, $(30, 10)$

$$\therefore P(\overline{X}=20)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{17}{50}$$

답 $\frac{17}{50}$

02-3

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

모집단에서 평균과 분산을 각각 구하면

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{5}+9\times\frac{1}{5}$$
$$=5$$

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{1}{5}+9^2\times\frac{1}{5}-5^2$$
$$=8$$

이때, 표본의 크기 $n=25$이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{8}{25}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(5\overline{X})=5^2\mathrm{V}(\overline{X})=25\times\frac{8}{25}=8$$

답 8

03-1

빵 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 12^2)$을 따르고, 표본의 크기 $n=9$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(150,\ 4^2)$을 따른다.

즉, 확률변수 Z에 대하여 $Z=\frac{\overline{X}-150}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 142)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{142-150}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le -2)$$

또한, $\mathrm{P}(Z\le -2)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 142)=\mathrm{P}(Z\ge k-1)$에서

$\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge k-1)$

따라서 $k-1=2$이므로

$k=3$

답 3

03-2

라면 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기 $n=64$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(120,\ \frac{6^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(120,\ \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-120}{\frac{3}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}<c)\le 0.03$에서

$$\mathrm{P}\left(Z<\frac{c-120}{\frac{3}{4}}\right)\le 0.03$$
$$=0.5-0.47$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}(-1.88\le Z\le 0)$$
$$=\mathrm{P}(Z<-1.88)$$

즉, $\frac{c-120}{\frac{3}{4}}\le -1.88$이므로

$$c\le -1.88\times\frac{3}{4}+120$$
$$=118.59$$

따라서 상수 c의 최댓값은 118.59이다.

답 118.59

04-1

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-20}{\frac{2}{3}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 2^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-12}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le 18)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{a-20}{\frac{2}{3}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{18-12}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{a-20}{\frac{2}{3}}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\le 3)$$

이때, $\mathrm{P}(Z\le 3)=\mathrm{P}(Z\ge -3)$이므로 $\frac{a-20}{\frac{2}{3}}=-3$

$\therefore\ a=18$

답 18

04-2

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-40}{\frac{2}{3}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60, \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-60}{\frac{\sigma}{6}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 41)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{41-40}{\frac{2}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 62)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{62-60}{\frac{\sigma}{6}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{12}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{12}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{12}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}\le 41)+\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 62)=1$이므로

$$\{0.5+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)\}+\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{12}{\sigma}\right)\right\}=1$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.5)=\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{12}{\sigma}\right)$$

따라서 $1.5=\dfrac{12}{\sigma}$이므로 $\sigma=8$

답 8

05-1

이 공장에서 생산한 생수 1병의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 10^2)$을 따른다.

이 공장에서 생산하는 생수 한 세트에 담긴 생수 25병의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(500, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(500,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-500}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

생수 한 세트의 무게가 12460 g 이하이면 판매하지 않으므로 임의로 선택한 생수 한 세트가 판매되지 않으려면

$25\overline{X}\le 12460$, 즉 $\overline{X}\le 498.4$이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 498.4)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{498.4-500}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -0.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.8)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)\\&=0.5-0.2881=0.2119\end{aligned}$$

답 0.2119

05-2

이 회사에서 생산하는 노트북 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(900,\ 20^2)$을 따른다. 이 회사에서 생산하는 노트북 중에서 임의추출한 4대의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(900, \frac{20^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(900,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-900}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이 회사에서 생산하는 노트북 중에서 임의추출한 4대의 무게의 합이 x g 이하일 확률이 0.8413이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\overline{X}\le x)&=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{x}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{x}{4}-900}{10}\right)\\&=0.8413\end{aligned}$$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\begin{aligned}0.8413&=0.5+0.3413\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{\frac{x}{4}-900}{10}=1$이므로

$\dfrac{1}{4}x=910$

따라서 노트북 1대의 무게가 $\left(\frac{1}{4}x+10\right)$g, 즉 920 g 이상일 확률을 구하면

$$P(X \geq 920)=P\left(Z \geq \frac{920-900}{20}\right)$$
$$=P(Z \geq 1)$$
$$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

답 0.1587

06-1

$n>50$에서 표본의 크기 n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있다.

표본평균 $\bar{x}=20$, 표본표준편차 $s=5$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면

$$20-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 20+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

이때, 주어진 신뢰구간이 $18.71 \leq m \leq a$이므로

$20-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=18.71$에서

$$2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=1.29$$

$$\sqrt{n}=10 \qquad \therefore\ n=100$$

또한, $20+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=a$에서

$$a=21.29$$

$$\therefore\ n+a=100+21.29=121.29$$

답 121.29

06-2

표본평균 $\bar{X}$는 정규분포 $N\left(120, \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\frac{\bar{X}-120}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore\ P\left(|\bar{X}-120| \leq \frac{1}{4}\right)$$
$$=P\left(-\frac{1}{4} \leq \bar{X}-120 \leq \frac{1}{4}\right)$$
$$=P\left(120-\frac{1}{4} \leq \bar{X} \leq 120+\frac{1}{4}\right)$$
$$=P\left(\frac{120-\frac{1}{4}-120}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{120+\frac{1}{4}-120}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{40} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{40}\right)$$

이때, $P(0 \leq Z \leq 2)=0.475$에서

$P(-2 \leq Z \leq 2)=2 \times 0.475=0.95$이므로

$P\left(|\bar{X}-120| \leq \frac{1}{4}\right) \geq 0.95$가 성립하려면

$-\frac{\sqrt{n}}{40} \leq -2$, $\frac{\sqrt{n}}{40} \geq 2$이어야 한다.

즉, $\sqrt{n} \geq 80$에서 $n \geq 6400$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6400이다.

답 6400

06-3

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠이 $34.36 \leq m \leq 75.64$와 같으므로

$$\bar{x}-2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=34.36,\ \bar{x}+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=75.64$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\bar{x}=55$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8$

즉, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서

$$55-1.96 \times 8 \leq m \leq 55+1.96 \times 8$$
$$55-15.68 \leq m \leq 55+15.68$$
$$\therefore\ 39.32 \leq m \leq 70.68$$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간에 속하는 자연수의 개수는 40, 41, 42, ⋯, 70의 31이다.

답 31

07-1

$a-l \le m \le a+2l$에서

$(a+2l)-(a-l)=3l$

즉, $3l$은 신뢰도 99%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이이다.

이때, 모표준편차 $\sigma=10$, 표본의 크기는 n이므로

$3l=2\times 2.58\times \frac{10}{\sqrt{n}} \qquad \therefore\ l=\frac{17.2}{\sqrt{n}}$

그런데 $l<2$이므로 $\frac{17.2}{\sqrt{n}}<2$, $\sqrt{n}>8.6$

$\therefore\ n>73.96$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 74이다.

답 74

07-2

크기가 16인 표본에서 모평균 m에 대한 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이는

$b-a=2k\times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}=5$ (단, k는 양수)

$\therefore\ k\sigma=10 \qquad \cdots\cdots㉠$

크기가 n인 표본에서 모평균에 대한 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이는

$d-c=2k\times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$=\frac{2}{\sqrt{n}}\times 10\ (\because ㉠)=\frac{5}{2}$

$\sqrt{n}=8 \qquad \therefore\ n=64$

답 64

다른풀이

신뢰도가 α%로 일정하고 신뢰구간의 길이 $d-c=\frac{5}{2}$는 $b-a$의 $\frac{1}{2}$배이므로 표본의 크기는 $2^2=4$배이다.

$\therefore\ n=16\times 4=64$

07-3

표본평균 $\overline{X_A}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고 표본평균 $\overline{X_B}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2, \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

모평균 m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2\times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=\frac{4\sigma}{\sqrt{n_1}}$

모평균 m_2에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.6\times \frac{2\sigma}{\sqrt{n_2}}=\frac{10.4\sigma}{\sqrt{n_2}}$

즉, $\frac{4\sigma}{\sqrt{n_1}}>\frac{10.4\sigma}{\sqrt{n_2}}$이어야 하므로

$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}>2.6$, $\frac{n_2}{n_1}>6.76$

$\therefore\ n_2>6.76n_1$

따라서 $n_2 \ge kn_1$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값은 6이다.

답 6

개념마무리

본문 pp.186~189

01 ④	**02** $\frac{1}{9}$	**03** 5	**04** 37
05 8	**06** 58	**07** $\frac{9}{2}$	**08** ㄱ, ㄴ, ㄷ
09 ⑤	**10** 0.84	**11** 137	**12** ㄱ, ㄴ
13 124	**14** ②	**15** 144	**16** 64
17 674	**18** ㄱ, ㄷ	**19** 125	**20** 23
21 ③	**22** 28		

01

크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 임의추출한 표본을 X_1, X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

X_1, X_2에 따른 확률변수 $\overline{X}$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	2	5	8	10
2	2	$\frac{7}{2}$	5	6
5	$\frac{7}{2}$	5	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$
8	5	$\frac{13}{2}$	8	9
10	6	$\frac{15}{2}$	9	10

따라서 서로 다른 $\overline{X}$의 개수는

$2,\ \frac{7}{2},\ 5,\ 6,\ \frac{13}{2},\ \frac{15}{2},\ 8,\ 9,\ 10$의 9이다.

답 ④

02

확률의 총합은 1이므로 $a+2b=1$

$\therefore\ a=1-2b$ ⋯⋯㉠

크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 임의추출할 때 $\overline{X}=4$, 즉 $X_1+X_2=8$인 경우는 다음과 같다.

(i) $(2,\ 6)$ 또는 $(6,\ 2)$일 때,

이 경우의 확률은 $ab+ba=2ab$

(ii) $(4,\ 4)$일 때,

이 경우의 확률은 $b\times b=b^2$

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}=4)=\frac{1}{3}$이므로 (i), (ii)에 의하여

$2ab+b^2=\frac{1}{3}$

위 등식에 ㉠을 대입하면 $2b(1-2b)+b^2=\frac{1}{3}$

$-3b^2+2b=\frac{1}{3},\ 9b^2-6b+1=0$

$(3b-1)^2=0 \qquad \therefore\ b=\frac{1}{3}$

이 값을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ ab=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

03

주머니 속에 들어 있는 총 카드의 장수는

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

이때, 확률변수 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 $1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \cdots,\ n$이고 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 임의추출할 때 $\overline{X}\le2$인 경우는 다음과 같다.

(i) $\overline{X}=1$, 즉 $X_1+X_2=2$일 때,

$(1,\ 1)$일 때이므로 $\overline{X}=1$일 확률은

$$\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\times\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}$$

(ii) $\overline{X}=\frac{3}{2}$, 즉 $X_1+X_2=3$일 때,

$(1,\ 2)$ 또는 $(2,\ 1)$일 때이므로 $\overline{X}=\frac{3}{2}$일 확률은

$$2\times\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\times\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{16}{n^2(n+1)^2}$$

(iii) $\overline{X}=2$, 즉 $X_1+X_2=4$일 때,

① $(1,\ 3)$ 또는 $(3,\ 1)$일 때, 이 경우의 확률은

$$2\times\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\times\frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{24}{n^2(n+1)^2}$$

② $(2,\ 2)$일 때, 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}\times\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{16}{n^2(n+1)^2}$$

①, ②에서 $\overline{X}=2$일 확률은

$$\frac{24}{n^2(n+1)^2}+\frac{16}{n^2(n+1)^2}=\frac{40}{n^2(n+1)^2}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le2)&=\mathrm{P}(\overline{X}=1)+\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)\\&=\frac{4}{n^2(n+1)^2}+\frac{16}{n^2(n+1)^2}+\frac{40}{n^2(n+1)^2}\\&=\frac{60}{n^2(n+1)^2}\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}\le2)=\frac{1}{15}$이므로 $\frac{60}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{15}$

$n^2(n+1)^2=900,\ n(n+1)=30\ (\because\ n>0)$

$\therefore\ n=5$

답 5

04

모집단의 확률변수를 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=18\times\frac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

이때, 표본의 크기 $n=4$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=6$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=1$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=1+6^2=37$

답 37

05

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{6}+a+b=1$에서

$a+b=\frac{5}{6}$ ……㉠

모집단에서 평균을 구하면

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times a+6\times b=3a+6b+\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{14}{3}$이므로

$3a+6b+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}$, $3a+6b=\frac{9}{2}$

$\therefore$ $a+2b=\frac{3}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{2}{3}$

(가)

모집단에서 분산을 구하면

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{2}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2$

$=\frac{35}{9}$

이때, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{35}{9n}$

(나)

$\mathrm{V}(\overline{X})\le\frac{1}{2}$에서 $\frac{35}{9n}\le\frac{1}{2}$, $n\ge\frac{70}{9}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

(다)

답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	확률의 총합이 1이고, $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{14}{3}$임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 경우	40%
(나)	표본평균의 분산과 모분산의 관계를 이용하여 $\mathrm{V}(\overline{X})$를 n을 이용하여 나타낸 경우	40%
(다)	자연수 n의 최솟값을 구한 경우	20%

06

주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때, 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자.

공을 세 번 꺼내어 공에 적힌 수의 평균이 1이려면 세 번 모두 1이 적힌 공을 꺼내야 하므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\{\mathrm{P}(X=1)\}^3$

같은 방법으로 $\mathrm{P}(\overline{X}=8)=\{\mathrm{P}(X=8)\}^3$

이때, $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{27}$, $\mathrm{P}(\overline{X}=8)=\frac{1}{64}$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=8)=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(X=4)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=8)\}$

$=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{5}{12}+8\times\frac{1}{4}=4$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{5}{12}+8^2\times\frac{1}{4}-4^2=7$

이때, 표본의 크기 $n=3$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{7}{3}$

$\therefore$ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{7}{3}+4^2=\frac{55}{3}$

따라서 $p=3$, $q=55$이므로 $p+q=58$

답 58

07

주머니에서 한 개의 공을 2번 꺼내어 얻은 숫자를 X_1, X_2, 두 수의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$

각 X_1, X_2에 따른 확률변수 $\overline{X}$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	1	2	3	4
1		$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
2	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$	3
3	2	$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$
4	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	

각 X_1, X_2에 따른 표본분산

$S^2=\dfrac{1}{2-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\}$

의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	1	2	3	4
1		$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	2
3	2	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
4	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	

따라서 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$가 $(1,\ 4)$ 또는 $(4,\ 1)$일 때, 분산 S^2은 최댓값 $\dfrac{9}{2}$를 갖는다.

답 $\dfrac{9}{2}$

08

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 36^2)$을 따르므로 이 모집단에서 임의추출한 크기가 36인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=300,\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{36}{\sqrt{36}}=6$

ㄱ. $\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(\overline{X})=300+300=600$ (참)

ㄴ. $\sigma(X)+\sigma(\overline{X})=36+6=42$ (참)

ㄷ. $Z_X=\dfrac{X-300}{36}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 336)=\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{336-300}{36}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\le 1)$ ……㉠

한편, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 6^2)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-300}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\le 294)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\dfrac{294-300}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le -1)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\mathrm{P}(X\le 336)+\mathrm{P}(\overline{X}\le 294)$

$=\mathrm{P}(Z_X\le 1)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1)$

$=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

09

모평균 $m=75$, 모표준편차 $\sigma=5$, 표본의 크기 $n=25$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=75,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{25}{25}=1$

즉, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 1^2)$을 따르므로 $Z=\overline{X}-75$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(|Z|\le c)=1-0.06=0.94$이므로

$\mathrm{P}(0\le Z\le c)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(|Z|\le c)=0.47$

이때, $\mathrm{P}(Z>a)=0.05$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le a)=0.5-0.05=0.45$

따라서 $\mathrm{P}(0\le Z\le a)<\mathrm{P}(0\le Z\le c)$이므로

$a<c$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X}\le c+75)=\mathrm{P}(Z\le c)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le c)$

$=0.5+0.47$ ($\because$ ㄱ)

$=0.97$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(\overline{X}>b)=\mathrm{P}(Z>b-75)=0.01$이므로

$\mathrm{P}(0\le Z\le b-75)=0.5-0.01=0.49$

$\mathrm{P}(0\le Z\le c)<\mathrm{P}(0\le Z\le b-75)$이므로

$c<b-75$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 15^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(|\overline{X}-m-3|\le 6)\\ &=\mathrm{P}(-6\le \overline{X}-m-3\le 6)\\ &=\mathrm{P}(-3+m\le \overline{X}\le 9+m)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{-3+m-m}{3}\le Z\le \frac{9+m-m}{3}\right)\\ &=\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)\\ &=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\ &=0.3413+0.4987=0.84\end{aligned}$$

답 0.84

11

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, $|\overline{X}-m|\le\dfrac{2}{3}$일 확률이 99 % 이상이어야 하므로

$\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\dfrac{2}{3}\right)\ge 0.99$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{2}{3}\right)&=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3}\le\overline{X}-m\le\frac{2}{3}\right)\\ &=\mathrm{P}\left(-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)\\ &=\mathrm{P}\left(-\frac{2\sqrt{n}}{9}\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{9}\right)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.6)=0.495$에서

$\mathrm{P}(|Z|\le 2.6)=2\times 0.495=0.99$이므로

$\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\dfrac{2}{3}\right)\ge 0.99$가 성립하려면

$-\dfrac{2\sqrt{n}}{9}\le -2.6,\ \dfrac{2\sqrt{n}}{9}\ge 2.6$이어야 한다.

즉, $\sqrt{n}\ge 11.7$에서 $n\ge 136.89$

따라서 자연수 n의 최솟값은 137이다.

답 137

12

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 $n_1,\ n_2$인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 각각 $\overline{X},\ \overline{Y}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고, 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{E}(\overline{Y})=m$이므로
$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})$ (참)

ㄴ. $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_1}},\ \sigma(\overline{Y})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로
$n_1>n_2$이면 $\sigma(\overline{X})<\sigma(\overline{Y})$
즉, 곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$보다 가운데 부분의 높이는 낮고 양쪽으로 더 퍼진 모양이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크다. (참)

ㄷ. $Z_{\overline{X}}=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}},\ Z_{\overline{Y}}=\dfrac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}},\ Z_{\overline{Y}}$는 각각 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le a+3m)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\le Z_{\overline{X}}\le\frac{(a+3m)-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)\\ &=\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n_1}(a+2m)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(-2a\le\overline{Y}\le m)\\ &=\mathrm{P}\left(\frac{-2a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)\\ &=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n_2}(2a+m)}{\sigma}\le Z_{\overline{Y}}\le 0\right)\\ &=\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{Y}}\le\frac{\sqrt{n_2}(2a+m)}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le a+3m)=\mathrm{P}(-2a\le\overline{Y}\le m)$이므로

$\dfrac{\sqrt{n_1}(a+2m)}{\sigma}=\dfrac{\sqrt{n_2}(2a+m)}{\sigma}$

이때, $a>m>0$이므로 $a+2m<2a+m$에서

$\sqrt{n_1}>\sqrt{n_2}$

$\therefore\ n_1>n_2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

13

25명을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{25}}$$

$\therefore$ $\overline{x_1}-1.96\le m\le\overline{x_1}+1.96$

이때, 주어진 신뢰구간이 $80-a\le m\le 80+a$이므로

$\overline{x_1}=80$, $a=1.96$

또한, n명을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a\le m\le\frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$와 같으므로

$$\overline{x_2}=\frac{15}{16}\overline{x_1}=\frac{15}{16}\times 80=75$$

$1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}a$에서 $1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}\times 1.96$

$\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{5}{7}$ $\quad\therefore$ $n=49$

$\therefore$ $n+\overline{x_2}=49+75=124$

답 124

14

ㄱ. 모평균 m에 대한 신뢰도 α%의 신뢰구간이란 크기가 n_1인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 각각 구하면 그 중에서 약 α% 정도는 모평균 m을 포함할 것으로 기대된다는 뜻이다.

즉, 모평균 m이 신뢰구간 안에 반드시 존재한다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. $c<a<b<d$이면 신뢰구간 $c\le m\le d$ 안에 신뢰구간 $a\le m\le b$가 포함되므로 신뢰도 β%의 신뢰구간의 길이가 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이보다 길다.

$\therefore$ $\alpha<\beta$ (참)

ㄷ. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하자.

표본의 크기가 n_1일 때, 신뢰도 α%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\quad\cdots\cdots㉠$$

또한, $\alpha=\beta$이므로 표본의 크기가 n_2일 때, 신뢰도 β%로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$$d-c=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉡÷㉠을 하면

$$\frac{d-c}{b-a}=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}=\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}=4$$

$$\frac{n_1}{n_2}=16$$

$\therefore$ $n_1=16n_2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

15

모표준편차를 σ라 하고 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}\left(|Z|\le k\right)=\frac{\alpha}{100}$라 하자.

이때, 표본의 크기는 81이고 신뢰도 α%로 모평균을 추정할 때 신뢰구간의 길이가 l이므로

$$l=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{81}}$$

같은 신뢰도로 신뢰구간의 길이가 $\frac{3}{4}l$이 되도록 하는 표본의 크기를 n이라 하면

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{3}{4}\times 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{81}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{12}$$

$\therefore$ $n=144$

따라서 구하는 표본의 크기는 144이다.

답 144

16

표본의 크기 n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 사용할 수 있다.

표본평균 $\overline{x}=60$, 표본표준편차 $s=6$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$60-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\le m\le 60+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

이때, 주어진 신뢰구간이 $58.53 \le m \le 61.47$이므로

$60-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=58.53$, $60+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=61.47$

즉, $1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}=1.47$이므로 $\sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

답 64

17

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 신뢰도 α%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이는

$d-c=2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$b-a=2(d-c)$에서

$2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ k=0.98$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(|Z|\le0.98)=2\times0.337=0.674$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.674\qquad\therefore\ \alpha=67.4$

$\therefore\ 10\alpha=674$

답 674

18

ㄱ. 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$m=0$, $n=4$일 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 2^2)$을 따른다.

확률변수 Z에 대하여 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$, 즉 $Z=\frac{\overline{X}}{2}$이므로

$$f(4)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{1}{2}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1}{4}\right)\ (\text{참})$$

ㄴ. $\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

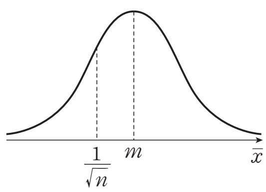
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1-m\sqrt{n}}{4}\right)$$

$\therefore\ f(n)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1-m\sqrt{n}}{4}\right)$

이때, $m\le0$이면 $n_1>n_2$일 때 $f(n_1)<f(n_2)$이다.

(거짓)

ㄷ. $f(n)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ge\frac{1}{2}$이 성립하려면 다음 그림과 같이 $\frac{1}{\sqrt{n}}\le m$이어야 한다.



이때, 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{n}}>0$이므로

$m\ge\frac{1}{\sqrt{n}}>0\qquad\therefore\ m>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

19

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

또한, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$ 역시 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X-m|>a_n)=\mathrm{P}(|\overline{X}-m|>n)$에서

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|>\frac{a_n}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>\frac{n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(|Z_X|>\frac{a_n}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(|Z_{\overline{X}}|>\frac{n\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

따라서 $a_n=n\sqrt{n}$이므로

$a_{25}=25\sqrt{25}=25\times5=125$

답 125

20

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}f(m)&=\mathrm{P}\left(\overline{X}\le\frac{6}{\sqrt{n}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{6}{\sqrt{n}}-m}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le6-m\sqrt{n})\end{aligned}$$

$f(3)\le0.9332$에서

$$\begin{aligned}f(3)&=\mathrm{P}(Z\le6-3\sqrt{n})\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le6-3\sqrt{n})\le0.9332\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le6-3\sqrt{n})\le0.4332$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$6-3\sqrt{n}\le1.5$에서 $\sqrt{n}\ge\frac{3}{2}$

$\therefore\ n\ge\frac{9}{4}$ ……㉠

또한, $f(1)\ge0.8413$에서

$$\begin{aligned}f(1)&=\mathrm{P}(Z\le6-\sqrt{n})\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le6-\sqrt{n})\ge0.8413\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le6-\sqrt{n})\ge0.3413$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$6-\sqrt{n}\ge1$에서 $\sqrt{n}\le5$

$\therefore\ n\le25$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{9}{4}\le n\le25$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는

3, 4, 5, ⋯, 25의 23이다.

답 23

21

이 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 X km라 하고, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하자.

이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 16대를 임의추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 m에 대한 신뢰구간이

$\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$이므로

$c=1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}=1.96\times\dfrac{\sigma}{4}=0.49\sigma$ ……㉠

이때, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의로 선택한 1대의 택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m+c)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{c}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)\ (\because\ ㉠)\\&=\mathrm{P}(Z\le0.49)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le0.49)\\&=0.5+0.1879\\&=0.6879\end{aligned}$$

답 ③

오답피하기

임의로 선택한 1대의 택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률을 구하라고 했으므로 표본평균 $\overline{X}$가 아니라 확률변수 X에 대한 확률을 계산해야 한다. 통계 문제에서는 용어와 단어 하나하나가 중요하기 때문에 위에서 표본평균에 관한 계산을 했다고 다음 계산도 그러할 것이라는 착각을 해서는 안된다.

22

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 3^2)$을 따르므로 이 제과점에서 판매하는 과자 한 상자에 담긴 9개의 과자 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 1^2)$을 따른다.

이때, 확률변수 $Z_{\overline{X}}=\overline{X}-30$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이 제과점에서 판매하는 과자 한 상자에는 임의추출한 9개의 과자가 들어 있고, 한 상자의 무게가 254.16 g 이하이거나 284.04 g 이상이면 반품되므로 제과점에서 판매하는 상자 하나가 반품될 확률은

$\mathrm{P}\left(\overline{X} \leq \frac{254.16}{9} \text{ 또는 } \overline{X} \geq \frac{284.04}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(\overline{X} \leq 28.24 \text{ 또는 } \overline{X} \geq 31.56)$

$=\mathrm{P}(\overline{X} \leq 28.24)+\mathrm{P}(\overline{X} \geq 31.56)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \leq 28.24-30)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \geq 31.56-30)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \leq -1.76)+\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \geq 1.56)$

$=\{\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z_{\overline{X}} \leq 1.76)\}$

$\quad +\{\mathrm{P}(Z_{\overline{X}} \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z_{\overline{X}} \leq 1.56)\}$

$=(0.5-0.46)+(0.5-0.44)$

$=0.1$

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따르고 시행 횟수가 충분히 크므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따른다.

이때, $Z_Y=\frac{Y-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y \leq n)=\mathrm{P}\left(Z_Y \leq \frac{n-40}{6}\right)$

이때,

$0.02=0.5-0.48$

$\quad =\mathrm{P}(Z_Y \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z_Y \leq 2)$

$\quad =\mathrm{P}(Z_Y \geq 2)$

$\quad =\mathrm{P}(Z_Y \leq -2)$

이므로

$\mathrm{P}(Y \leq n) \leq 0.02$에서

$\mathrm{P}\left(Z_Y \leq \frac{n-40}{6}\right) \leq \mathrm{P}(Z_Y \leq -2)$

$\frac{n-40}{6} \leq -2,\ n-40 \leq -12$

$\therefore\ n \leq 28$

따라서 자연수 n의 최댓값은 28이다.

답 28

memo

memo