더 THE 개념 블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L

I. 지수함수와 로그함수

유형연습 **01** 지수 본문 pp.16~28

01-1 ㄱ, ㄷ
01-2 $-\sqrt[6]{2}$
01-3 4
02-1 (1) 1 (2) 9
02-2 15
02-3 9
03-1 (1) 24 (2) $a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$
03-2 53
03-3 8
04-1 (1) $7^{\frac{1}{12}}<3^{\frac{1}{6}}<5^{\frac{1}{8}}$ (2) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}<\sqrt[6]{7\sqrt{5}}<\sqrt[4]{4\sqrt[3]{5}}$
04-2 $2(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})$
05-1 (1) 4 (2) $\sqrt{6}$ (3) $8\sqrt{3}$ (4) $30\sqrt{3}$
05-2 5
05-3 -26
06-1 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{3}{13}$
06-2 5
06-3 48
07-1 (1) 4 (2) 0
07-2 12
07-3 72
08-1 125
08-2 2.07

01-1

ㄱ. -16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-16$에서

$x^4+16=0$, $(x^2-4i)(x^2+4i)=0$

이를 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $a=-1$, $n=2$일 때, $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt{(-1)^2}=1\neq a$ (거짓)

ㄷ. $a<0$이고 자연수 n이 홀수일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$이다.

이때, 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$는 $x<0$에서 교점을 가지므로 $\sqrt[n]{a}<0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

01-2

$a^5=2^{10}$에서 $a=2^2=4$

4의 네제곱근 중 실수인 것을 p라 하면

$p^4=4$에서 $p=-\sqrt[4]{4}$ 또는 $p=\sqrt[4]{4}$

$\therefore\ b=-\sqrt[4]{4}=-\sqrt{2}$ ($\because\ b<0$)

이때, $-\sqrt{2}$의 세제곱근 중 실수인 것을 q라 하면

$q^3=-\sqrt{2}$

$\therefore\ q=\sqrt[3]{-\sqrt{2}}=-\sqrt[6]{2}$

답 $-\sqrt[6]{2}$

01-3

n이 홀수일 때,

$\frac{7}{2}-n$의 값에 관계없이 항상 $\frac{7}{2}-n$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로

$f(3)=f(5)=1$

$n=2$일 때,

$\frac{7}{2}-n=\frac{3}{2}>0$이므로 $f(2)=2$

$n=4$ 또는 $n=6$일 때,

$\frac{7}{2}-n<0$이므로 $f(4)=f(6)=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)&=2+1+0+1+0\\&=4\end{aligned}$$

답 4

02-1

(1) $$\begin{aligned}\sqrt[4]{(-2)^4}+\sqrt[3]{-27}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}&=\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[6]{2^6}\\&=2+(-3)+2\\&=1\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{128}}\times\sqrt[6]{32}+\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}&=\sqrt[6]{2^7}\times\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[3]{125}\\&=\sqrt[6]{2^{12}}+\sqrt[3]{5^3}\\&=2^2+5\\&=9\end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) 9

02-2

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt[6]{a^3b^2}\times\sqrt[12]{a^7b^6}&=\sqrt[3]{a^2b}\times\frac{1}{\sqrt[6]{a^3b^2}}\times\sqrt[12]{a^7b^6}\\&=\sqrt[12]{(a^2b)^4}\times\frac{1}{\sqrt[12]{(a^3b^2)^2}}\times\sqrt[12]{a^7b^6}\end{aligned}$$

$$=\sqrt[12]{(a^2b)^4\times\frac{1}{(a^3b^2)^2}\times a^7b^6}$$
$$=\sqrt[12]{a^8b^4\times\frac{1}{a^6b^4}\times a^7b^6}$$
$$=\sqrt[12]{a^9b^6}$$

따라서 $\sqrt[12]{a^9b^6}=\sqrt[12]{a^mb^n}$에서 $m=9$, $n=6$이므로

$m+n=15$

답 15

02-3

$$a=\frac{\sqrt{\sqrt{15}}+\sqrt[4]{243}}{\sqrt[8]{25}+\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{15}+\sqrt[4]{3^4\times3}}{\sqrt[4]{5}+3}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}+3}=\frac{\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{5}+3)}{\sqrt[4]{5}+3}=\sqrt[4]{3}$$

$\therefore\ a^8=(\sqrt[4]{3})^8=3^2=9$

답 9

03-1

(1) $32^{\frac{1}{3}}\times108^{\frac{1}{3}}\div(16^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$
$$=(2^5)^{\frac{1}{3}}\times(2^2\times3^3)^{\frac{1}{3}}\div(2^4)^{-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{5}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{3\times\frac{1}{3}}\div2^{4\times\left(-\frac{1}{6}\right)}$$
$$=2^{\frac{5}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3\div2^{-\frac{2}{3}}$$
$$=2^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}\times3$$
$$=2^3\times3=24$$

(2) $(\sqrt{a})^{\sqrt{2}}\times\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\div(\sqrt[3]{a\sqrt{b^{\sqrt{2}}}})^2$
$$=a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}b^{\frac{2}{\sqrt{2}}}\times\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}\times b^{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}}}\right)^2$$
$$=a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times a^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}b^{\sqrt{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$$
$$=a^{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}}b^{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}}$$
$$=a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

답 (1) 24 (2) $a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$

03-2

$$\sqrt{a\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}=(a\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}=(a^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}$$
$$=(a^{\frac{23}{15}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{23}{30}}$$

또한, $(\sqrt[m]{a})^n=a^{\frac{n}{m}}$

이때, $\sqrt{a\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}=(\sqrt[m]{a})^n$에서 $a^{\frac{23}{30}}=a^{\frac{n}{m}}$이고 30과 23은 서로소인 자연수이므로 $m=30$, $n=23$일 때, $m+n$은 최솟값을 갖는다.

따라서 $m+n$의 최솟값은 $30+23=53$

답 53

03-3

$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{12}}$

$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}$, 즉 $5^{\frac{5}{12}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$N=5^{\frac{5}{12}n}$

이때, N은 자연수이므로 n은 12의 배수이어야 한다.

즉, $2\le n\le100$에서

$n=12,\ 24,\ 36,\ \cdots,\ 96$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 8이다.

답 8

다른풀이

$$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{12}}$$
$$=(5^5)^{\frac{1}{12}}=(5^{10})^{\frac{1}{24}}=(5^{15})^{\frac{1}{36}}=\cdots=(5^{40})^{\frac{1}{96}}$$

즉, $(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}$은 5^5의 12제곱근, 5^{10}의 24제곱근, 5^{15}의 36제곱근, $\cdots$, 5^{40}의 96제곱근이다.

따라서 구하는 자연수 n은 12, 24, 36, $\cdots$, 96의 8개이다.

04-1

(1) 6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$3^{\frac{1}{6}}=(3^4)^{\frac{1}{24}}=81^{\frac{1}{24}}$

$5^{\frac{1}{8}}=(5^3)^{\frac{1}{24}}=125^{\frac{1}{24}}$

$7^{\frac{1}{12}}=(7^2)^{\frac{1}{24}}=49^{\frac{1}{24}}$

이때, $49<81<125$이므로 $49^{\frac{1}{24}}<81^{\frac{1}{24}}<125^{\frac{1}{24}}$

$\therefore\ 7^{\frac{1}{12}}<3^{\frac{1}{6}}<5^{\frac{1}{8}}$

(2) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4\times3}}=\sqrt[12]{243}$

$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3\times5}}=\sqrt[12]{320}$

$\sqrt[6]{7\sqrt{5}}=\sqrt[6]{\sqrt{7^2\times5}}=\sqrt[12]{245}$

이때, $243<245<320$이므로

$\sqrt[12]{243}<\sqrt[12]{245}<\sqrt[12]{320}$

$\therefore\ \sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}<\sqrt[6]{7\sqrt{5}}<\sqrt[4]{4\sqrt[3]{5}}$

답 (1) $7^{\frac{1}{12}}<3^{\frac{1}{6}}<5^{\frac{1}{8}}$

(2) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}<\sqrt[6]{7\sqrt{5}}<\sqrt[4]{4\sqrt[3]{5}}$

04-2

2와 3의 최소공배수는 6이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8},\ \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}\quad\therefore\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ ……㉠

3과 5의 최소공배수는 15이므로

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[15]{3^5}=\sqrt[15]{243},\ \sqrt[5]{6}=\sqrt[15]{6^3}=\sqrt[15]{216}$

$\sqrt[15]{243}>\sqrt[15]{216}\quad\therefore\ \sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{6}$ ……㉡

5과 2의 최소공배수는 10이므로

$\sqrt[5]{6}=\sqrt[10]{6^2}=\sqrt[10]{36},\ \sqrt{2}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$

$\sqrt[10]{36}>\sqrt[10]{32}\quad\therefore\ \sqrt[5]{6}>\sqrt{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$|\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}|+|\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{6}|+|\sqrt[5]{6}-\sqrt{2}|$

$=-(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{6})+(\sqrt[5]{6}-\sqrt{2})$

$=2(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})$

답 $2(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})$

05-1

(1) $(x+x^{-1})^2=(x-x^{-1})^2+4=(2\sqrt{3})^2+4=16$

이때, $x>1$에서 $x+x^{-1}>0$이므로

$x+x^{-1}=4$

(2) $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=6$ ($\because\ x+x^{-1}=4$)

이때, $x>1$에서 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$

(3) $x^2-x^{-2}=(x+x^{-1})(x-x^{-1})=4\times2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

(4) $x^3-x^{-3}=(x-x^{-1})^3+3(x-x^{-1})$

$=(2\sqrt{3})^3+3\times2\sqrt{3}$

$=24\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$=30\sqrt{3}$

답 (1) 4 (2) $\sqrt{6}$ (3) $8\sqrt{3}$ (4) $30\sqrt{3}$

05-2

$x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})$에서 $x^2=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{3}}-2+5^{-\frac{2}{3}})$

이때, $1+x^2=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{3}}+2+5^{-\frac{2}{3}})=\frac{1}{4}(5^{\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}})^2$이므로

$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}})$

$\therefore\ x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})+\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}})$

$=5^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ (x+\sqrt{1+x^2})^3=(5^{\frac{1}{3}})^3=5$

답 5

05-3

$3^{\frac{1}{4}}=A$라 하면

$(1+3^{\frac{3}{2}})(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}})(1-3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}})$

$=(1+A^6)(1-A^2)(1+A+A^2)(1-A+A^2)$

$=(1+A^6)(1+A)(1-A+A^2)(1-A)(1+A+A^2)$

$=(1+A^6)(1+A^3)(1-A^3)$

$=(1+A^6)(1-A^6)$

$=1-A^{12}=1-(3^{\frac{1}{4}})^{12}$

$=1-3^3=-26$

답 -26

06-1

$3^{2x}=4$이므로

(1) 분모와 분자에 3^x을 곱하면

$$\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1}=\frac{4+1}{4-1}=\frac{5}{3}$$

(2) $\dfrac{3^x-27^{-x}}{3^{-3x}+27^x}=\dfrac{3^x-3^{-3x}}{3^{-3x}+3^{3x}}$

분모와 분자에 3^x을 곱하면

$$\frac{3^x-3^{-3x}}{3^{-3x}+3^{3x}}=\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{3^{-2x}+3^{4x}}$$

$$=\frac{3^{2x}-\frac{1}{3^{2x}}}{\frac{1}{3^{2x}}+(3^{2x})^2}=\frac{4-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+16}$$

$$=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{65}{4}}=\frac{3}{13}$$

답 (1) $\dfrac{5}{3}$ (2) $\dfrac{3}{13}$

06-2

$$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$$

분모와 분자에 2^x을 곱하면

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}=\frac{4^{2x}+4^{-x}}{4^x+1}$$

이때, $4^x=3-2\sqrt{2}$이고

$$4^{-x}=\frac{1}{4^x}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$$

이므로

$$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{(3-2\sqrt{2})^2+(3+2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{20-10\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{10(2-\sqrt{2})}{2(2-\sqrt{2})}=5$$

답 5

다른풀이

$$\frac{8^x+8^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{(2^x)^3+(2^{-x})^3}{2^x+2^{-x}}$$

$$=\frac{(2^x+2^{-x})(2^{2x}-1+2^{-2x})}{2^x+2^{-x}}$$

$$=2^{2x}-1+2^{-2x}$$

$$=4^x+4^{-x}-1$$

$$=3-2\sqrt{2}+\frac{1}{3-2\sqrt{2}}-1$$

$$=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}-1$$

$$=5$$

06-3

$f(x)$의 분모와 분자에 a^x을 곱하면

$$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$$

이때, $f(\alpha)=\dfrac{a^{2\alpha}+1}{a^{2\alpha}-1}=\dfrac{5}{3}$에서

$5(a^{2\alpha}-1)=3(a^{2\alpha}+1)$, $2a^{2\alpha}=8$

$\therefore\ a^{2\alpha}=4$

또한, $f(\beta)=\dfrac{a^{2\beta}+1}{a^{2\beta}-1}=\dfrac{7}{5}$에서

$5(a^{2\beta}+1)=7(a^{2\beta}-1)$, $2a^{2\beta}=12$

$\therefore\ a^{2\beta}=6$

$$\therefore\ f(\alpha+\beta)=\frac{a^{2(\alpha+\beta)}+1}{a^{2(\alpha+\beta)}-1}=\frac{a^{2\alpha}\times a^{2\beta}+1}{a^{2\alpha}\times a^{2\beta}-1}$$

$$=\frac{4\times6+1}{4\times6-1}=\frac{25}{23}$$

따라서 $p=23$, $q=25$이므로 $p+q=48$

답 48

07-1

(1) $15^x=27$에서 $15=27^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ……㉠

$135^y=81$에서 $135=81^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $9=3^{\frac{4}{y}-\frac{3}{x}}$

이때, $9=3^2$이므로 $\dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{x}=2$

$\therefore\ \dfrac{8}{y}-\dfrac{6}{x}=2\left(\dfrac{4}{y}-\dfrac{3}{x}\right)=4$

(2) $3^x=9^y=27^z=k$ $(k>0)$라 하면

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$9^y=k$에서 $9=k^{\frac{1}{y}}$ ……㉡

$27^z=k$에서 $27=k^{\frac{1}{z}}$ ……㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면

$3\times9\div27=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}$

$\therefore\ k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

이때, $k>0$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=0$

답 (1) 4 (2) 0

07-2

$a^x=7$에서 $a=7^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$b^{2y}=7$에서 $b=7^{\frac{1}{2y}}$ ……㉡

$c^{3z}=7$에서 $c=7^{\frac{1}{3z}}$ ……㉢

㉠×㉡×㉢을 하면 $abc=7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}$

이때, $abc=49=7^2$이므로

$7^2=7^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}}$

따라서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}=2$이므로

$\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)=12$

답 12

07-3

$729^a=64^b=k^c=t\ (t>0)$라 하면

$729^a=t$에서 $t^{\frac{1}{a}}=729=3^6$이므로 $t^{\frac{2}{a}}=3^{12}$ ……㉠

$64^b=t$에서 $t^{\frac{1}{b}}=64=2^6$이므로 $t^{\frac{3}{b}}=2^{18}$ ……㉡

$k^c=t$에서 $t^{\frac{1}{c}}=k$이므로 $t^{\frac{6}{c}}=k^6$ ……㉢

이때, ㉠×㉡을 하면 $t^{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}}=3^{12}\times2^{18}$ ……㉣

그런데 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\frac{6}{c}$이므로 $t^{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}}=t^{\frac{6}{c}}$

즉, ㉢, ㉣에서 $3^{12}\times2^{18}=k^6$

따라서 $(3^2\times2^3)^6=k^6$이므로

$k=3^2\times2^3=9\times8=72\ (\because\ k>0)$

답 72

08-1

양수기의 펌프의 1분당 회전수가 N으로 일정하다고 하면

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24,\ H=5$일 때, $S_1=N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12,\ H=10$일 때, $S_2=N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}$

$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}$

$=\left(\frac{24}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{5}{10}\right)^{-\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

즉, $k=\frac{5}{4}$이므로 $100k=125$

답 125

08-2

농산물 A의 연평균 가격 상승률을 P_A라 하면

$P_A=\sqrt[10]{\frac{6000}{3000}}-1=2^{\frac{1}{10}}-1$

농산물 B의 연평균 가격 상승률을 P_B라 하면

$P_B=\sqrt[10]{\frac{8000}{2000}}-1=4^{\frac{1}{10}}-1$

$\frac{P_B}{P_A}=\frac{4^{\frac{1}{10}}-1}{2^{\frac{1}{10}}-1}=\frac{(2^{\frac{1}{10}}-1)(2^{\frac{1}{10}}+1)}{2^{\frac{1}{10}}-1}$

$=2^{\frac{1}{10}}+1=1.07+1\ (\because\ 1.07^{10}=2$에서 $2^{\frac{1}{10}}=1.07)$

$=2.07$

따라서 10년 동안 농산물 B의 연평균 가격 상승률은 농산물 A의 연평균 가격 상승률의 2.07배이다.

답 2.07

개념마무리

본문 pp.29~32

01 ⑤	**02** ①	**03** 4	**04** $\frac{1}{2}$
05 5	**06** 10	**07** 25	**08** ⑤
09 1	**10** 60	**11** ②	**12** 8
13 ⑤	**14** $2\sqrt{5}+1$	**15** 256	**16** $\frac{9}{2}$
17 $\sqrt{3}$	**18** ②	**19** 164	**20** 120
21 2	**22** 17	**23** ⑤	**24** ㄱ, ㄷ

01

① 세제곱근 64는 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4=\sqrt{16}$ (참)

② $x^4=256$에서 $(x^2-16)(x^2+16)=0$

$(x-4)(x+4)(x^2+16)=0$

$\therefore\ x=\pm4$ 또는 $x=\pm4i$

따라서 256의 네제곱근은 4개이다. (참)

③ -125의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$ (참)

④ n이 홀수일 때, 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 항상 1개이다. (참)

⑤ n이 4 이상의 짝수일 때, $x^n=-5$를 만족시키는 실수 x는 없다. 즉, n이 4 이상의 짝수일 때, -5의 n제곱근 중 실수인 것은 없다. (거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$가 a의 네제곱근이므로

$a=(-2)^4=16$ ……㉠

$\sqrt{81}=9$의 네제곱근 중 음수인 것은

$b=-\sqrt[4]{9}=-\sqrt[4]{3^2}=-\sqrt{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $ab^2=16\times(-\sqrt{3})^2=48$

이때, c는 제곱근 ab^2이므로 $c=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\therefore \left(\dfrac{ab}{c}\right)^3=\left\{\dfrac{16\times(-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}}\right\}^3=(-4)^3=-64$

답 ①

03

$\sqrt{2}$의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$의 1개이므로

$f(\sqrt{2},\ 3)=1$

$\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}<0$에서 $-\sqrt[3]{5}$의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$f(\sqrt[3]{-5},\ 4)=0$

$-\sqrt[4]{6}$의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt[4]{6}}=-\sqrt[5]{\sqrt[4]{6}}$의 1개이므로

$f(-\sqrt[4]{6},\ 5)=1$

3^2의 6제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[6]{3^2}=\pm\sqrt[3]{3}$의 2개이므로

$f(3^2,\ 6)=2$

$\therefore f(\sqrt{2},\ 3)+f(\sqrt[3]{-5},\ 4)+f(-\sqrt[4]{6},\ 5)+f(3^2,\ 6)$

$=1+0+1+2=4$

답 4

04

$$\frac{\sqrt[6]{256}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt{\sqrt[3]{144}}+\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{2^8}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2^4\times3^2}+\sqrt[3]{2^4}\times\sqrt[3]{2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^5}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}\cancel{(2+\sqrt[3]{3})}}{\sqrt[3]{2^2}\cancel{(\sqrt[3]{3}+2)}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

즉, $\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$이므로

$A=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

05

$$\frac{\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt[6]{a}}}}{\sqrt[6]{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[8]{a}\times\cancel{\sqrt[48]{a}}}{\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a}\times\cancel{\sqrt[48]{a}}}=\frac{\sqrt[24]{a^{12}\times a^3}}{\sqrt[24]{a^4\times a}}$$

$$=\frac{\sqrt[24]{a^{15}}}{\sqrt[24]{a^5}}=\sqrt[24]{a^{10}}=\sqrt[12]{a^5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt[6]{a}}}}{\sqrt[6]{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}}\times\sqrt[4]{ab^3}\div\sqrt[12]{b^7}$$

$$=\sqrt[12]{a^5}\times\sqrt[12]{a^3b^9}\div\sqrt[12]{b^7}=\frac{\sqrt[12]{a^8b^9}}{\sqrt[12]{b^7}}$$

$$=\sqrt[12]{a^8b^2}=\sqrt[6]{a^4b}$$

따라서 $m=4$, $n=1$이므로 $m+n=5$

답 5

06

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

(i) $b<0$, 즉 $b=-2$ 또는 $b=-1$일 때,

$\sqrt[a]{b}$가 실수이려면 a는 홀수이어야 하므로 실수인 집합 C의 원소의 개수는

$\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[7]{-2}$,

$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[5]{-1}=\sqrt[7]{-1}=-1$의 4이다.

(ii) $b=0$일 때,

실수인 집합 C의 원소의 개수는

$\sqrt[2]{0}=\sqrt[3]{0}=\sqrt[5]{0}=\sqrt[7]{0}=0$의 1이다.

(iii) $b>0$, 즉 $b=1$ 또는 $b=2$일 때,

실수인 집합 C의 원소의 개수는

$\sqrt[2]{1}=\sqrt[3]{1}=\sqrt[5]{1}=\sqrt[7]{1}=1$, $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[7]{2}$의 5이다.

(i), (ii), (iii)에서 $n(C)=4+1+5=10$

답 10

07

(i) $n=2$일 때, $\sqrt{100}<\sqrt{120}<\sqrt{121}$에서

$10<\sqrt{120}<11 \qquad \therefore f(2)=10$

(ii) $n=3$일 때, $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{120}<\sqrt[3]{125}$에서

$4<\sqrt[3]{120}<5 \qquad \therefore f(3)=4$

(iii) $n=4$일 때, $\sqrt[4]{81}<\sqrt[4]{120}<\sqrt[4]{256}$에서

$3<\sqrt[4]{120}<4 \qquad \therefore f(4)=3$

(iv) $n=5$일 때, $\sqrt[5]{32}<\sqrt[5]{120}<\sqrt[5]{243}$에서

$2<\sqrt[5]{120}<3 \qquad \therefore f(5)=2$

(v) $n=6$일 때, $\sqrt[6]{64}<\sqrt[6]{120}<\sqrt[6]{729}$에서

$2<\sqrt[6]{120}<3 \qquad \therefore f(6)=2$

(vi) $n\geq 7$일 때, $\sqrt[n]{1}<\sqrt[n]{120}<\sqrt[n]{2^n}$에서

$1<\sqrt[n]{120}<2 \qquad \therefore f(n)=1$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$=10+4+3+2+2+4\times 1=25$

답 25

08

ㄱ. $\left\{\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{8}{9}}=\left[\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{8}{9}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{8}{9}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$ (거짓)

ㄴ. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}\times(-5)^2=(5^{-\frac{1}{2}})^{-2}\times(-5)^2$

$=5\times 5^2=5^3$

$\{(-5)^4\}^{\frac{3}{4}}=(5^4)^{\frac{3}{4}}$

$=5^3$

$\therefore \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}\times(-5)^2=\{(-5)^4\}^{\frac{3}{4}}$ (참)

ㄷ. $(a^{\sqrt{2}}\times b^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{2\sqrt{2}}=(a^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}\times(b^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{2\sqrt{2}}$

$=a^4\times b^{-2}=\frac{a^4}{b^2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

09

$2^{13}=A$, $2^{-15}=B$로 놓으면

$(2^{13}+2^{-15})^2-(2^{13}-2^{-15})^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=4AB=2^2\times 2^{13}\times 2^{-15}$

$=2^0=1$

답 1

다른풀이

$(2^{13}+2^{-15})^2-(2^{13}-2^{-15})^2$

$=\{(2^{13}+2^{-15})+(2^{13}-2^{-15})\}\{(2^{13}+2^{-15})-(2^{13}-2^{-15})\}$

$=(2\times 2^{13})\times(2\times 2^{-15})$

$=2^{14}\times 2^{-14}=2^{14-14}$

$=2^0=1$

10

다항식 $f(x)=x^3-4$가 $x-\sqrt{a}$로 나누어떨어지므로

$f(\sqrt{a})=0$, 즉 $(\sqrt{a})^3-4=0$

$a^{\frac{3}{2}}=4$이므로

$a=4^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x-\sqrt{a^3}$으로 나눈 나머지는

$f(\sqrt{a^3})=(\sqrt{a^3})^3-4$

$=a^{\frac{9}{2}}-4$

$=(2^{\frac{4}{3}})^{\frac{9}{2}}-4$

$=2^6-4$

$=60$

답 60

보충설명

나머지정리

1. 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R라 하면
   $R=f(\alpha)$
2. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지를 R라 하면
   $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

11

$A=\sqrt[3]{m\sqrt{n}}=m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{6}}=(m^4n^2)^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt{n\sqrt[3]{m}}=n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{6}}=(m^2n^6)^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt{\sqrt{mn}}=(mn)^{\frac{1}{4}}=(m^3n^3)^{\frac{1}{12}}$

이때, m, n은 연속하는 두 자연수이고, $1<m<n$이므로

$m=n-1$

(i) $\dfrac{A}{B}=\left(\dfrac{m^4n^2}{m^2n^6}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^2}{n^4}\right)^{\frac{1}{12}}$

이때, $1<m<n$에서

$1<m^2<n^2<n^4$이므로

$0<\dfrac{m^2}{n^4}<1 \qquad \therefore \dfrac{A}{B}<1$

$\therefore A<B$

(ii) $\dfrac{A}{C}=\left(\dfrac{m^4n^2}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{12}}$

이때, $1<m<n$이므로 $0<\dfrac{m}{n}<1 \qquad \therefore \dfrac{A}{C}<1$

$\therefore A<C$

(iii) $\dfrac{B}{C}=\left(\dfrac{m^2n^6}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{n^3}{m}\right)^{\frac{1}{12}}$

이때, $1<m<n$에서

$1<m<n<n^3$이므로

$\dfrac{n^3}{m}>1 \qquad \therefore \dfrac{B}{C}>1$

$\therefore C<B$

(i), (ii), (iii)에서 $A<C<B$

답 ②

보충설명

두 수 또는 두 식의 대소 관계

(1) 차를 이용하는 방법

① $A-B>0 \Longleftrightarrow A>B$ ② $A-B=0 \Longleftrightarrow A=B$

③ $A-B<0 \Longleftrightarrow A<B$

(2) 제곱의 차를 이용하는 방법 (단, $A>0$, $B>0$)

① $A^2-B^2>0 \Longleftrightarrow A>B$ ② $A^2-B^2=0 \Longleftrightarrow A=B$

③ $A^2-B^2<0 \Longleftrightarrow A<B$

(3) 비(比)를 이용하는 방법 (단, $A>0$, $B>0$)

① $\dfrac{A}{B}>1 \Longleftrightarrow A>B$ ② $\dfrac{A}{B}=1 \Longleftrightarrow A=B$

③ $\dfrac{A}{B}<1 \Longleftrightarrow A<B$

이 문제에서는 '(3) 비를 이용하는 방법'을 이용하였다.

12

$27^{\frac{1}{m}}=k\times 64^{\frac{1}{n}}$에서

$k=\dfrac{27^{\frac{1}{m}}}{64^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{(3^3)^{\frac{1}{m}}}{(2^6)^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{3^{\frac{3}{m}}}{2^{\frac{6}{n}}}=3^{\frac{3}{m}}\times 2^{-\frac{6}{n}}$

이때, 2와 3은 서로소이므로 위의 식을 만족시키는 자연수 k가 존재하기 위해서는 3의 지수 $\dfrac{3}{m}$과 2의 지수 $-\dfrac{6}{n}$이 모두 자연수가 되어야 한다.

따라서 m은 3의 양의 약수인 1, 3 중 하나이고, $-n$은 6의 양의 약수인 1, 2, 3, 6 중 하나이므로 n은 -1, -2, -3, -6 중 하나이다.

따라서 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2\times 4=8$

답 8

13

함수 $f(x)=2\sqrt{x}$에 대하여

$f(2)=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

$(f\circ f)(3)=2\sqrt{2\sqrt{3}}=2^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}$

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(18)&=2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{18}}}\\&=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}18^{\frac{1}{8}}\\&=2^{\frac{7}{4}}\times(2\times 3^2)^{\frac{1}{8}}\\&=2^{\frac{7}{4}}\times 2^{\frac{1}{8}}\times 3^{\frac{1}{4}}\\&=2^{\frac{15}{8}}\times 3^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{f(2)\times(f\circ f)(3)}{(f\circ f\circ f)(18)}&=\frac{2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{15}{8}}\times 3^{\frac{1}{4}}}\\&=2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{15}{8}}\\&=2^{\frac{9}{8}}=\sqrt[8]{2^9}\end{aligned}$$

답 ⑤

14

$9^x-3^{x+1}=-1$에서 $3^{2x}-3\times 3^x+1=0$

양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3+\dfrac{1}{3^x}=0 \qquad \therefore 3^x+3^{-x}=3$

(가)

이때, x는 양수이므로

$3^x>1 \quad \therefore \ 3^x-\dfrac{1}{3^x}>0$

$3^x-3^{-x}=\sqrt{(3^x+3^{-x})^2-4}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

또한, $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=3^2-2=7$이고

$$\begin{aligned}27^x-27^{-x}&=(3^x-3^{-x})^3+3(3^x-3^{-x})\\&=(\sqrt{5})^3+3\sqrt{5}\\&=5\sqrt{5}+3\sqrt{5}=8\sqrt{5}\end{aligned}$$

(나)

$\therefore \ \dfrac{27^x-27^{-x}+4}{9^x+9^{-x}-3}=\dfrac{8\sqrt{5}+4}{7-3}=2\sqrt{5}+1$

(다)

답 $2\sqrt{5}+1$

단계	채점 기준	배점
(가)	3^x+3^{-x}의 값을 구한 경우	30%
(나)	곱셈 공식의 변형을 이용하여 3^x-3^{-x}, 9^x+9^{-x}, 27^x-27^{-x}의 값을 구한 경우	50%
(다)	주어진 식의 값을 구한 경우	20%

15

$108^x=3$에서 $108=3^{\frac{1}{x}}$ ……㉠

$\dfrac{1}{12^y}=27$에서 $\dfrac{1}{12}=27^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ……㉡

㉠×㉡을 하면 $9=3^{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}$

이때, $9=3^2$이므로 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=2$ ……㉢

한편, ㉢을 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{2z}=1$에 대입하면

$2-\dfrac{1}{2z}=1$, $\dfrac{1}{2z}=1 \quad \therefore \ z=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a^z=16$에서 $a^{\frac{1}{2}}=16$이므로

$a=16^2=256$

답 256

16

$2^a=x$, $2^b=y$, $2^c=z$라 하면

$xyz=2^a2^b2^c=2^{a+b+c}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ ……㉠

$x+y+z=2^a+2^b+2^c=3$

또한, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2^{-a}+2^{-b}+2^{-c}=\dfrac{9}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\\&=2(xy+yz+zx)\ (\because ㉠)\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \ xy+yz+zx=\dfrac{9}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore \ 4^a+4^b+4^c&=x^2+y^2+z^2\\&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\&=3^2-2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{9}{2}$

17

조건 (나)에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$ ……㉠

조건 (가)에서 $3^x\times3^y=9^z$이므로 $3^{x+y}=3^{2z}$

$x+y=2z \quad \therefore \ z=\dfrac{x+y}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡을 $\dfrac{a+3b}{2c}$에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{a+3b}{2c}&=\frac{k^x+3k^y}{2k^{\frac{x+y}{2}}}\\&=\frac{1+3k^{y-x}}{2k^{\frac{y-x}{2}}}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}}+\frac{3}{2}\times k^{\frac{y-x}{2}}\end{aligned}$$

이때, $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}}>0$, $\dfrac{3}{2}\times k^{\frac{y-x}{2}}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}}+\dfrac{3}{2}\times k^{\frac{y-x}{2}}$

$\geq 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}}\right)\times\left(\dfrac{3}{2}\times k^{\frac{y-x}{2}}\right)}$

$=2\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\sqrt{3}$ $\left(\text{단, 등호는 } k^{y-x}=\dfrac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\dfrac{a+3b}{2c}$의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

답 $\sqrt{3}$

다른풀이

$a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$ $(k>0)$라 하면

$a=k^x,\ b=k^y,\ c=k^z$

$c=k^z$의 양변을 제곱하면 $c^2=k^{2z}$ ……㉠

$a=k^x,\ b=k^y$을 변끼리 곱하면

$ab=k^{x+y}$ ……㉡

조건 (가)에서 $3^x\times3^y=9^z$, 즉 $3^{x+y}=3^{2z}$이므로

$x+y=2z$

㉠, ㉡에서

$c^2=ab \qquad \therefore\ c=\sqrt{ab}\ (\because\ c>0)$

$$\therefore\ \frac{a+3b}{2c}=\frac{a+3b}{2\sqrt{ab}}=\frac{a}{2\sqrt{ab}}+\frac{3b}{2\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

이때, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}>0,\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\ge2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\times\frac{3}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$=\sqrt{3}$ (단, 등호는 $a=3b$일 때 성립)

따라서 $\frac{a+3b}{2c}$의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

18

$T=T_s+(T_0-T_s)K^{-t}$에서 $T_s=20,\ T_0=60$이므로

$T=20+40K^{-t}$ ……㉠

$t=a,\ T=40$을 ㉠에 대입하면

$40=20+40K^{-a}$ ……㉡

$t=a+20,\ T=25$를 ㉠에 대입하면

$25=20+40K^{-a-20}$ ……㉢

㉡에서 $K^{-a}=\frac{1}{2}$이고, 이것을 ㉢에 대입하면

$25=20+20K^{-20} \qquad \therefore\ K^{-20}=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ K=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{20}}=(2^{-2})^{-\frac{1}{20}}=2^{\frac{1}{10}}$$

즉, $K^{-a}=\frac{1}{2}$에서 $(2^{\frac{1}{10}})^{-a}=2^{-1}$이므로 $2^{-\frac{1}{10}a}=2^{-1}$

$-\frac{1}{10}a=-1 \qquad \therefore\ a=10$

답 ②

19

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{3}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}\right)=\frac{3^{\frac{1}{5}}-3^{-\frac{1}{5}}}{2}\text{에서}$$

$$1+x^2=1+\frac{(3^{\frac{1}{5}}-3^{-\frac{1}{5}})^2}{4}$$

$$=\frac{4+3^{\frac{2}{5}}-2+3^{-\frac{2}{5}}}{4}=\frac{3^{\frac{2}{5}}+2+3^{-\frac{2}{5}}}{4}$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}})^2}{4}$$

즉, $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\frac{(3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}})^2}{4}}=\frac{3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}}}{2}$이므로

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{3^{\frac{1}{5}}-3^{-\frac{1}{5}}}{2}+\frac{3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}}}{2}=3^{\frac{1}{5}}$$

$$x-\sqrt{1+x^2}=\frac{3^{\frac{1}{5}}-3^{-\frac{1}{5}}}{2}-\frac{3^{\frac{1}{5}}+3^{-\frac{1}{5}}}{2}=-3^{-\frac{1}{5}}$$

$\therefore\ 18\{(x+\sqrt{1+x^2})^{10}+(x-\sqrt{1+x^2})^{10}\}$

$=18\{(3^{\frac{1}{5}})^{10}+(-3^{-\frac{1}{5}})^{10}\}$

$=18(3^2+3^{-2})$

$=18\times\frac{82}{9}=164$

답 164

20

$$\sqrt[4]{a^5}\times\sqrt[4]{\sqrt{\frac{1024}{9}}}=a^{\frac{5}{4}}\times\left(\frac{2^{10}}{3^2}\right)^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{5}{4}}\times\frac{2^{\frac{5}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

$$=2a\times\sqrt[4]{\frac{2a}{3}}$$

이 식의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt[4]{\frac{2a}{3}}$의 값이 자연수이어야 하므로 $\frac{2a}{3}=k^4$ (k는 자연수) 꼴이다.

이때, $\frac{2}{3}a=k^4$에서 $a=\frac{3}{2}k^4$이고, $a=\frac{3}{2}k^4$ 역시 자연수이므로 자연수 k는 2의 배수이어야 한다.

따라서 주어진 식의 값이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 $k=2$이므로 a의 최솟값은

$m=\frac{3}{2}\times2^4=24$

또한, $a=24$일 때의 주어진 식의 값은

$$n=2a\times\sqrt[4]{\frac{2a}{3}}=2\times24\times\sqrt[4]{\frac{2\times24}{3}}=96$$

$\therefore\ m+n=24+96=120$

답 120

21

$a \neq b$일 때, 함수 $f(x)=(a-b)x+4a-3b$의 역함수 g에 대하여

$g(a)=p$라 하면 $f(p)=a$이므로

$(a-b)p+4a-3b=a$, $(a-b)p=3(b-a)$

$\therefore\ p=\dfrac{3(b-a)}{a-b}=-3$ ($\because\ a\neq b$)

$\therefore\ g(a)=-3$

$g(b)=q$라 하면 $f(q)=b$이므로

$(a-b)q+4a-3b=b$, $(a-b)q=4(b-a)$

$\therefore\ q=\dfrac{4(b-a)}{a-b}=-4$ ($\because\ a\neq b$)

$\therefore\ g(b)=-4$

$$\therefore\ 2^{g(a)}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-g(b)}\div\{2^{-g(a)}\}^{g(b)}$$
$$=2^{-3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\div(2^3)^{-4}$$
$$=2^{-3}\times2^{-8}\times2^{12}$$
$$=2^{-3-8+12}=2$$

답 2

22

x에 대한 이차방정식 $n(n+2)x^2-(2n+2)x+1=0$의 두 실근이 α_n, β_n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=\dfrac{2n+2}{n(n+2)}$, $\alpha_n\beta_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$

또한, $\left(\dfrac{3^{\alpha_n}\times3^{\beta_n}}{9^{\alpha_n\beta_n}}\right)^6=\left(\dfrac{3^{\alpha_n+\beta_n}}{3^{2\alpha_n\beta_n}}\right)^6=(3^{\alpha_n+\beta_n-2\alpha_n\beta_n})^6$이고,

$\alpha_n+\beta_n-2\alpha_n\beta_n=\dfrac{2n+2}{n(n+2)}-\dfrac{2}{n(n+2)}=\dfrac{2}{n+2}$이므로

$\left(\dfrac{3^{\alpha_n}\times3^{\beta_n}}{9^{\alpha_n\beta_n}}\right)^6=(3^{\frac{2}{n+2}})^6=3^{\frac{12}{n+2}}$

이때, $3^{\frac{12}{n+2}}$의 값이 자연수가 되려면 $\dfrac{12}{n+2}$는 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 가능한 자연수 n의 값은 1, 2, 4, 10이므로 구하는 합은

$1+2+4+10=17$

답 17

다른풀이

$\left(\dfrac{3^{\alpha_n}\times3^{\beta_n}}{9^{\alpha_n\beta_n}}\right)^6=\left(\dfrac{3^{\alpha_n+\beta_n}}{3^{2\alpha_n\beta_n}}\right)^6=(3^{\alpha_n+\beta_n-2\alpha_n\beta_n})^6$ ……㉠

$n(n+2)x^2-(2n+2)x+1=0$에서

$(nx-1)\{(n+2)x-1\}=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{n}$ 또는 $x=\dfrac{1}{n+2}$

따라서 $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n+2}$ 또는 $\alpha_n=\dfrac{1}{n+2}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n}$이므로

$\alpha_n+\beta_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+2}$

$2\alpha_n\beta_n=2\times\dfrac{1}{n(n+2)}=2\times\underbrace{\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)}_{\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$

$\therefore\ \alpha_n+\beta_n-2\alpha_n\beta_n=\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{2}{n+2}$ ……㉡

그러므로 ㉠, ㉡에 의하여

$\left(\dfrac{3^{\alpha_n}\times3^{\beta_n}}{9^{\alpha_n\beta_n}}\right)^6=(3^{\frac{2}{n+2}})^6=3^{\frac{12}{n+2}}$

23

ㄱ. A_4는 $2^a=\dfrac{4}{b}$, 즉 $4=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 원소로 갖는 집합이다.

이때, $4=2^1\times2$, $4=2^2\times1$이므로

$A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ (참)

ㄴ. $m=2^k$일 때, $A_m=A_{2^k}$

A_m은 $2^a=\dfrac{2^k}{b}$, 즉 $2^k=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 원소로 갖는 집합이므로

$A_m=\{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,\ (k,\ 2^0)\}$

$\therefore\ n(A_m)=k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a=\frac{m}{b}$, 즉 $m=2^a\times b$인 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m)=1$이 되기 위해서는 $b=\frac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가 오직 하나만 존재해야 하므로 $k=1$이어야 한다.

따라서 $m=2^1\times$(홀수) 꼴이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1\times$(홀수) 꼴인 자연수는

$2\times5,\ 2\times7,\ 2\times9,\ \cdots,\ 2\times49$

따라서 $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는

$25-2=23$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

24

ㄱ. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2n>0$, $2n-1>0$이고, $2n$은 짝수, $2n-1$은 홀수이므로

$f(2n-1,\ 2n)=1$ ← 짝수의 홀수제곱근 중 실수인 것의 개수

$f(2n,\ 2n-1)=2$ ← 홀수의 짝수제곱근 중 실수인 것의 개수

$\therefore\ f(2n-1,\ 2n)+f(2n,\ 2n-1)=3$ (참)

ㄴ. (i) n이 홀수일 때,

a의 부호에 관계없이 $f(n,\ a)=1$이므로

$1+f(n,\ a)=2$

n이 홀수이면 $n+1$은 짝수이므로

① $a=0$일 때, $f(n+1,\ a^2)=1$

$\therefore\ 1+f(n,\ a)>f(n+1,\ a^2)$

② $a\neq0$일 때, $a^2>0$이므로

$f(n+1,\ a^2)=2$

$\therefore\ 1+f(n,\ a)=f(n+1,\ a^2)$

(ii) n이 짝수일 때,

① $a<0$이면 $f(n,\ a)=0$이므로

$1+f(n,\ a)=1$

n이 짝수이면 $n+1$은 홀수이므로

$f(n+1,\ a^2)=1$

$\therefore\ 1+f(n,\ a)=f(n+1,\ a^2)$

② $a=0$이면 $f(n,\ a)=1$, $f(n+1,\ a^2)=1$

$\therefore\ 1+f(n,\ a)>f(n+1,\ a^2)$

③ $a>0$이면 $f(n,\ a)=2$이므로

$1+f(n,\ a)=3$

n이 짝수이면 $n+1$은 홀수이므로

$f(n+1,\ a^2)=1$

$\therefore\ 1+f(n,\ a)>f(n+1,\ a^2)$

(i), (ii)에서 $1+f(n,\ a)>f(n+1,\ a^2)$이 성립하여도 n이 홀수이면 $a=0$, n이 짝수이면 $a\geq0$이다. (거짓)

ㄷ. $f(m,\ a)=2$이므로 $a>0$, m은 짝수이다.

또한, $f(n,\ b)=1$이므로 n이 홀수이거나 $b=0$이다.

(i) n이 홀수일 때,

$m+n$은 홀수이므로 임의의 실수 a, b에 대하여

$f(m+n,\ ab)=1$

(ii) $b=0$일 때,

$ab=0$이므로 자연수 m, n에 대하여

$f(m+n,\ ab)=1$

(i), (ii)에서 $f(m+n,\ ab)=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

보충설명

ㄴ. n과 a의 값에 따라 $1+f(n,\ a)>f(n+1,\ a^2)$의 성립 여부를 정리하면 다음 표와 같다.

	n이 홀수	n이 짝수
$a<0$	×	×
$a=0$	○	○
$a>0$	×	○

유형 연습 02 로그

본문 pp.39~52

01-1 3	**01-2** 4	**01-3** 18
02-1 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{8}$		**02-2** 125
02-3 7	**03-1** (1) $\frac{1}{4}$ (2) 6	**03-2** 14
03-3 25	**04-1** 2	**04-2** 8
04-3 16	**05-1** 3	**05-2** $\frac{17}{3}$
05-3 0	**06-1** 2.51	
06-2 (1) $\frac{a-3b+3}{2a}$ (2) $\frac{2a-2b+2}{3b}$		**06-3** 368
07-1 (1) 24자리 (2) 소수점 아래 11째 자리		
07-2 5	**08-1** 11	**08-2** 909
08-3 13	**09-1** 149	**09-2** 29
10-1 (1) $x=10^4$ 또는 $x=10^{\frac{13}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{3}}$ (2) $x=10^{\frac{12}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{5}}$		

01-1

$\log_{x-1}(12+4x-x^2)$에 대하여

(밑)>0, (밑)$\neq1$에서 $x-1>0$, $x-1\neq1$

$\therefore$ $x>1$, $x\neq2$ ……㉠

(진수)>0에서 $12+4x-x^2>0$

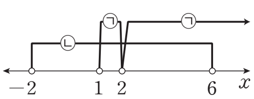
$x^2-4x-12<0$, $(x+2)(x-6)<0$

$\therefore$ $-2<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$1<x<2$ 또는 $2<x<6$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 3, 4, 5의 3개이다.



답 3

01-2

$\log_{|a-2|}(5-a)$, $\log_{|a-2|}(a+3)$에 대하여

(밑)>0, (밑)$\neq1$에서 $|a-2|>0$, $|a-2|\neq1$

$|a-2|>0$에서 $a\neq2$ ……㉠

$|a-2|=1$이면 $a-2=\pm1$에서

$a=3$ 또는 $a=1$

즉, $|a-2|\neq1$에서 $a\neq3$, $a\neq1$ ……㉡

(진수)>0에서 $5-a>0$, $a+3>0$

$\therefore$ $-3<a<5$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 a는 -2, -1, 0, 4의 4개이다.

답 4

01-3

$\log_{a-3}(x^2+2ax+8a)$에 대하여

(밑)>0, (밑)$\neq1$에서 $a-3>0$, $a-3\neq1$

$\therefore$ $a>3$, $a\neq4$ ……㉠

(진수)>0에서 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2ax+8a>0$

이차방정식 $x^2+2ax+8a=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore$ $0<a<8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $3<a<4$ 또는 $4<a<8$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 5, 6, 7이므로 그 합은

$5+6+7=18$

답 18

보충설명

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 다음이 성립한다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c>0 \iff a>0,\ D<0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq0 \iff a>0,\ D\leq0$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c<0 \iff a<0,\ D<0$

(4) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\leq0 \iff a<0,\ D\leq0$

위의 문제에서는 (1)을 사용하였다.

02-1

(1) $2\log_{10}\sqrt[3]{5}-\log_{10}\frac{50}{3}+\log_{10}\sqrt[3]{4}-\log_{10}6$

$=\log_{10}5^{\frac{2}{3}}-\log_{10}\frac{50}{3}+\log_{10}2^{\frac{2}{3}}-\log_{10}6$

$=\log_{10}5^{\frac{2}{3}}+\log_{10}2^{\frac{2}{3}}-\left(\log_{10}\frac{50}{3}+\log_{10}6\right)$

$=\log_{10}(5\times2)^{\frac{2}{3}}-\log_{10}\left(\frac{50}{3}\times6\right)$

$=\log_{10} 10^{\frac{2}{3}}-\log_{10} 100$

$=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$

(2) $(\log_3 7)^3+\left(\log_3 \frac{\sqrt{3}}{7}\right)^3+\frac{3}{2}\log_3 7\times\log_3 \frac{\sqrt{3}}{7}$에서

$\log_3 7=x$, $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{7}=y$라 하면

$x+y=\log_3 7+\log_3 \frac{\sqrt{3}}{7}=\log_3 \sqrt{3}=\frac{1}{2}$ ……㉠

$\therefore$ (주어진 식)$=x^3+y^3+\frac{3}{2}xy$

$=x^3+y^3+3xy\times\frac{1}{2}$

$=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ($\because$ ㉠)

$=(x+y)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{8}$

02-2

$P=\log_5\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_5\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log_5\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\log_5\left(1-\frac{1}{125}\right)$

$=\log_5 \frac{1}{2}+\log_5 \frac{2}{3}+\log_5 \frac{3}{4}+\cdots+\log_5 \frac{124}{125}$

$=\log_5\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{124}{125}\right)$

$=\log_5 \frac{1}{125}=\log_5 5^{-3}=-3$

$\therefore$ $P=-3$

$\therefore$ $5^{-P}=5^3=125$

답 125

02-3

$ab=64$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 ab=\log_2 64$

$\therefore$ $\log_2 a+\log_2 b=6$ ……㉠

$\log_2 \frac{b^2}{a}=9$에서 $2\log_2 b-\log_2 a=9$ ……㉡

이때, $\log_2 a=X$, $\log_2 b=Y$라 하면

㉠에서 $X+Y=6$

㉡에서 $2Y-X=9$

두 식을 연립하여 풀면

$X=1$, $Y=5$

$\therefore$ $\log_2 a^2b=2\log_2 a+\log_2 b$

$=2X+Y$

$=2\times1+5=7$

답 7

다른풀이

$\log_2 \frac{b^2}{a}=9$에서 $\frac{b^2}{a}=2^9$

$\therefore$ $b^2=a\times2^9$ ……㉠

$ab=64$이고, $b>0$이므로

$a=\frac{64}{b}=\frac{2^6}{b}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b^2=\frac{2^6}{b}\times2^9$, $b^3=2^{15}=(2^5)^3$

$\therefore$ $b=2^5$, $a=\frac{2^6}{b}=\frac{2^6}{2^5}=2$

$\therefore$ $\log_2 a^2b=\log_2 (2^2\times2^5)=\log_2 2^7=7$

03-1

(1) $\left(\log_2 7+\log_{\frac{1}{4}} 7\right)\left(\log_{\sqrt{7}} \sqrt{2}+\log_{49} \frac{1}{2}\right)$

$=(\log_2 7+\log_{2^{-2}} 7)(\log_{7^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{1}{2}}+\log_{7^2} 2^{-1})$

$=\left(\log_2 7-\frac{1}{2}\log_2 7\right)\left(\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 2\right)$

$=\frac{1}{2}\log_2 7\times\frac{1}{2}\log_7 2=\frac{1}{4}$

(2) $(\sqrt{3})^{\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{2}+\log_9 4+\frac{1}{\log_{4\sqrt{3}} 3}}$에서

$\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{2}+\log_9 4+\frac{1}{\log_{4\sqrt{3}} 3}$

$=\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{2}\log_3 2+\log_3 4\sqrt{3}$

$=\log_3\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\times2\times4\sqrt{3}\right)$

$=\log_3 36$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\sqrt{3})^{\log_3 36}=3^{\frac{1}{2}\log_3 36}$

$=3^{\log_3 6}=6$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 6

03-2

$a=\log_2 3$, $b=\log_3 7$, $c=\log_7 9$이므로

$ab=\log_2 3\times\log_3 7=\log_2 7$

$abc=\log_2 3\times\log_3 7\times\log_7 9=\log_2 9$

$$\therefore \frac{1+ab}{1+a+abc}=\frac{\log_2 2+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 9}$$
$$=\frac{\log_2(2\times7)}{\log_2(2\times3\times9)}=\frac{\log_2 14}{\log_2 54}$$
$$=\log_{54}14=\log_{54}N$$

$\therefore N=14$

답 14

03-3

$\log_a b=\log_b a$에서 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_a b}$

즉, $(\log_a b)^2=1$에서

$\log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$

$\therefore b=a$ 또는 $b=\dfrac{1}{a}$

이때, $a\neq b$이므로 $b=\dfrac{1}{a}$

$$\therefore (a+2)(b+8)=(a+2)\left(\frac{1}{a}+8\right)$$
$$=1+8a+\frac{2}{a}+16$$
$$=17+8a+\frac{2}{a}$$

$a>0$에서 $8a>0$, $\dfrac{2}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+2)(b+8)\geq 17+2\sqrt{8a\times\frac{2}{a}}$$
$$=17+8=25$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 8a=\frac{2}{a}\text{, 즉 } a=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$일 때 $(a+2)(b+8)$의 최솟값은 25이다.

답 25

04-1

이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=5^2-4\times5=5$$

따라서 $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ($\because \alpha>\beta$)이므로

$$\frac{1}{\log_\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\log_\beta(\alpha-\beta)}=\log_{\alpha-\beta}\alpha+\log_{\alpha-\beta}\beta$$
$$=\log_{\alpha-\beta}\alpha\beta$$
$$=\log_{\sqrt{5}}5=2$$

답 2

04-2

두 점 $\mathrm{A}(-1, \log_2 a)$, $\mathrm{B}(1, \log_4 b)$를 지나는 직선 AB는 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+5$에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉, $\dfrac{\log_4 b-\log_2 a}{1-(-1)}=2$에서

$\log_4 b-\log_2 a=4$, $\log_4 b-\log_4 a^2=4$

$\log_4\dfrac{b}{a^2}=4$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a^2}=4^4=2^8$

$$\therefore \log_2 b-2\log_2 a=\log_2\frac{b}{a^2}$$
$$=\log_2 2^8=8$$

답 8

보충설명

두 직선의 위치 관계

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여

(1) 평행하다. ⇨ $m=m'$, $n\neq n'$

(2) 일치한다. ⇨ $m=m'$, $n=n'$

(3) 한 점에서 만난다. ⇨ $m\neq m'$

(4) 수직이다. ⇨ $mm'=-1$

04-3

직육면체 ABCD$-$EFGH의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$4(\log_2 a+\log_a b+2)=24$

$\therefore\ \log_2 a+\log_a b=4$ ······㉠

또한, 직육면체 ABCD$-$EFGH의 겉넓이가 22이므로

$2(\log_2 a\times\log_a b+2\log_2 a+2\log_a b)=22$

$\log_2 a\times\log_a b+2(\log_2 a+\log_a b)=11$

$\log_2 a\times\log_a b+2\times 4=11$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \log_2 a\times\log_a b=3$

즉, $\log_2 a\times\log_a b=\log_2 b=3$이므로

$b=2^3=8$

이것을 ㉠에 대입하면

$\log_2 a+\log_a 8=4$

$\log_2 a+3\log_a 2=4,\ \log_2 a+\dfrac{3}{\log_2 a}=4$

양변에 $\log_2 a$를 곱하여 정리하면

$(\log_2 a)^2-4\log_2 a+3=0$

$(\log_2 a-1)(\log_2 a-3)=0$

$\therefore\ \log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=3$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=8$

이때, $\overline{AB}>\overline{AE}$, 즉 $\log_2 a>\log_a b$이므로

$a=8$

$\therefore\ a+b=16$

답 16

다른풀이

직육면체 ABCD$-$EFGH의 모든 모서리의 길이의 합이 24이므로

$\log_2 a+\log_a b=4$ ······㉠

직육면체 ABCD$-$EFGH의 겉넓이가 22이므로

$\log_2 a\times\log_a b=3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\log_2 a$, $\log_a b$는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 실근이다.

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

이때, $\overline{AB}>\overline{AE}$, 즉 $\log_2 a>\log_a b$이므로

$\log_2 a=3,\ \log_a b=1$

$\therefore\ a=8,\ b=8$

$\therefore\ a+b=16$

05-1

$9^a=16,\ 72^b=32$에서 로그의 정의에 의하여

$a=\log_9 16,\ b=\log_{72} 32$

$$\frac{5}{b}-\frac{4}{a}=\frac{5}{\log_{72}32}-\frac{4}{\log_9 16}=\frac{5}{\log_{72}2^5}-\frac{4}{\log_9 2^4}$$

$$=\frac{1}{\log_{72}2}-\frac{1}{\log_9 2}=\log_2 72-\log_2 9$$

$$=\log_2 8=3$$

답 3

다른풀이

$9^a=16,\ 72^b=32$에서

$9=16^{\frac{1}{a}}=2^{\frac{4}{a}}$ ······㉠

$72=32^{\frac{1}{b}}=2^{\frac{5}{b}}$ ······㉡

㉡$\div$㉠을 하면

$8=2^{\frac{5}{b}-\frac{4}{a}}$

따라서 $8=2^3$이므로 $\dfrac{5}{b}-\dfrac{4}{a}=3$

05-2

세 양수 $a,\ b,\ c$는 1이 아닌 양수이므로

$\sqrt{a}=b^3=c^2$에서

$a^{\frac{1}{2}}=b^3=c^2$ $\therefore\ b=a^{\frac{1}{6}},\ c=a^{\frac{1}{4}}$

$\therefore\ \log_a b+\log_b c+\log_c a$

$$=\log_a a^{\frac{1}{6}}+\log_{a^{\frac{1}{6}}} a^{\frac{1}{4}}+\log_{a^{\frac{1}{4}}} a$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}+\frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4=\frac{17}{3}$$

답 $\dfrac{17}{3}$

05-3

세 양수 $a,\ b,\ c$는 1이 아닌 양수이고 $x,\ y,\ z$는 0이 아닌 실수이므로 1이 아닌 양수 k에 대하여

$a^x=b^y=c^z=k$ $(k>0,\ k\neq1)$

라 하면 로그의 정의에 의하여

$x=\log_a k,\ y=\log_b k,\ z=\log_c k$

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=\frac{1}{\log_a k}+\frac{3}{\log_b k}+\frac{5}{\log_c k}$$
$$=\log_k a+3\log_k b+5\log_k c$$
$$=\log_k a+\log_k b^3+\log_k c^5$$
$$=\log_k ab^3c^5$$
$$=\log_k 1\ (\because\ ab^3c^5=1)$$
$$=0$$

답 0

다른풀이

$a^x=b^y=c^z=k$ $(k>0)$라 하면

$a^x=k$에서 $a=k^{\frac{1}{x}}$ ······㉠

$b^y=k$에서 $b=k^{\frac{1}{y}}$ ······㉡

$c^z=k$에서 $c=k^{\frac{1}{z}}$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢을 $ab^3c^5=1$에 대입하면

$k^{\frac{1}{x}}\times(k^{\frac{1}{y}})^3\times(k^{\frac{1}{z}})^5=1,\ k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{3}{y}}\times k^{\frac{5}{z}}=1$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}}=1$

이때, $a,\ b,\ c$는 1이 아닌 양수이고 $x,\ y,\ z$는 0이 아닌 실수이므로 $k\neq1$

$$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=0$$

06-1

$\log 512=\log(5.12\times10^2)$

$=\log 5.12+\log 10^2$

$=0.7093+2=2.7093$

$\log 0.632=\log(6.32\times10^{-1})$

$=0.8007-1=-0.1993$

$\therefore\ \log(512\times0.632)=\log 512+\log 0.632$

$=2.7093-0.1993$

$=2.51$

답 2.51

06-2

(1) $$\log_9 24=\frac{\log 24}{\log 9}=\frac{\log(2^3\times3)}{\log 3^2}=\frac{3\log 2+\log 3}{2\log 3}$$
$$=\frac{3(1-\log 5)+\log 3}{2\log 3}$$
$$=\frac{3-3\log 5+\log 3}{2\log 3}$$
$$=\frac{a-3b+3}{2a}$$

(2) $$\log_5\sqrt[3]{36}=\frac{1}{3}\log_5 36=\frac{\log 36}{3\log 5}=\frac{\log(2^2\times3^2)}{3\log 5}$$
$$=\frac{2\log 2+2\log 3}{3\log 5}$$
$$=\frac{2(1-\log 5)+2\log 3}{3\log 5}$$
$$=\frac{2-2\log 5+2\log 3}{3\log 5}$$
$$=\frac{2a-2b+2}{3b}$$

답 (1) $\dfrac{a-3b+3}{2a}$ (2) $\dfrac{2a-2b+2}{3b}$

06-3

$\log x^2=2\log x=3.0882$에서

$\log x=\dfrac{1}{2}\times3.0882=1.5441=1+0.5441$

$x>0$이므로 $\log x$를 정의할 수 있다.

상용로그표에서 $\log 3.5=0.5441$이므로

$\log x=\log 10+\log 3.5=\log 35$

$\therefore\ x=35$

또한, $\log\sqrt{y}=\dfrac{1}{2}\log y=-0.2388$에서

$\log y=2\times(-0.2388)=-0.4776=-1+0.5224$

$y>0$이므로 $\log y$를 정의할 수 있다.

상용로그표에서 $\log 3.33=0.5224$이므로

$\log y=\log 10^{-1}+\log 3.33=\log(10^{-1}\times3.33)$

$=\log 0.333$

$\therefore\ y=0.333$

$\therefore\ x+1000y=35+333=368$

답 368

07-1

(1) 6^{30}에 상용로그를 취하면

$$\log 6^{30}=30\log 6=30\log(2\times 3)=30(\log 2+\log 3)$$
$$=30(0.3010+0.4771)=30\times 0.7781$$
$$=23.343=23+0.343$$

따라서 $\log 6^{30}$의 정수 부분이 23이므로 6^{30}은 24자리의 자연수이다.

(2) $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$에 상용로그를 취하면

$$\log\left(\frac{1}{12}\right)^{10}=\log 12^{-10}=-10\log(2^2\times 3)$$
$$=-10(2\log 2+\log 3)$$
$$=-10(2\times 0.3010+0.4771)$$
$$=-10\times 1.0791=-10.791$$
$$=(-10-1)+(1-0.791)$$
$$=-11+0.209$$

따라서 $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$의 정수 부분이 -11이므로 $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$은 소수점 아래 11째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 24자리 (2) 소수점 아래 11째 자리

07-2

$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^{30}=30(\log 2-\log 3)=30(0.3010-0.4771)$$
$$=30\times(-0.1761)=-5.2830$$
$$=-6+0.7170$$

의 소수 부분은 0.7170이다.

이때, $\log 5=1-\log 2=1-0.3010=0.6990$이고

$\log 6=\log 2+\log 3=0.3010+0.4771=0.7781$이므로

$0.6990<0.7170<0.7781$에서 $\log 5<0.7170<\log 6$

위의 식의 각 변에 -6을 더하면

$-6+\log 5<-6+0.7170<-6+\log 6$

$$\log(5\times 10^{-6})<\log\left(\frac{2}{3}\right)^{30}<\log(6\times 10^{-6})$$

$$\therefore\ 5\times 10^{-6}<\left(\frac{2}{3}\right)^{30}<6\times 10^{-6}$$

따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$의 소수점 아래에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 숫자는 5이다.

답 5

08-1

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3$이므로

(i) $1\le n\le 3$일 때,

$2^1\le 2^n\le 2^3$이므로

$\log 2\le \log 2^n\le \log 8$

이때, $\log 2^n$의 정수 부분 $f(n)=0$

(ii) $4\le n\le 6$일 때,

$2^4\le 2^n\le 2^6$이므로 $\log 16\le\log 2^n\le\log 64$

$\therefore\ f(n)=1$

(iii) $7\le n\le 9$일 때,

$2^7\le 2^n\le 2^9$이므로 $\log 128\le\log 2^n\le\log 512$

$\therefore\ f(n)=2$

(iv) $10\le n\le 13$일 때,

$2^{10}\le 2^n\le 2^{13}$이므로 $\log 1024\le\log 2^n\le\log 8192$

$\therefore\ f(n)=3$

(i)~(iv)에서 $n=11$일 때,

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=0\times 3+1\times 3+2\times 3+3\times 2$

$=15$

를 만족시키므로 $n=11$

답 11

08-2

$[\log A]=2$이므로 $\log A$의 정수 부분은 2이다.

즉, $2\le\log A<3$이므로 $10^2\le A<10^3$

따라서 자연수 A의 개수 a는

$a=10^3-10^2=900$

$\left[\log\frac{1}{B}\right]=-1$이므로 $\log\frac{1}{B}$의 정수 부분은 -1이다.

즉, $-1\le\log\frac{1}{B}<0$이므로

$-1\le-\log B<0$, $0<\log B\le 1$

$\therefore\ 1<B\le 10$

따라서 자연수 B의 개수 b는

$b=10-1=9$

$\therefore\ a+b=909$

답 909

보충설명

기호 $[x]$의 성질

(1) $[x]=n \iff n \le x < n+1$ (n은 정수)

(2) $[x] \le x < [x]+1$

(3) $[x+n]=[x]+n$ (n은 정수)

(4) $\left[\frac{n}{k}\right]=$($n$을 k로 나눈 몫) (n, k는 자연수)

08-3

조건 (가)에서 $4 \le \log x < 5$ ……㉠

조건 (나)에서

$\log x^2-\log\frac{1}{x}=[\log x^2]-\left[\log\frac{1}{x}\right]$

이므로 $\log x^2$과 $\log\frac{1}{x}$의 차가 정수이다.

$\log x^2-\log\frac{1}{x}=2\log x-(-\log x)=3\log x$

㉠에서 $12 \le 3\log x < 15$이므로

$3\log x=12,\ 13,\ 14$

$\therefore\ \log x=4,\ \frac{13}{3},\ \frac{14}{3}$

따라서 $x=10^4$ 또는 $x=10^{\frac{13}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{3}}$이므로 그 곱은

$k=10^4\times10^{\frac{13}{3}}\times10^{\frac{14}{3}}=10^{13}$

$\therefore\ \log k=13$

답 13

09-1

$y=10\log\frac{x}{k}$에서 $y=10(\log x-\log k)$ ……㉠

$x=\frac{1}{10^5}$일 때 $y=70$이므로

$70=10(\log\frac{1}{10^5}-\log k)$

$7=-5-\log k$

$\therefore\ \log k=-12$

이것을 ㉠에 대입하면 $y=10(\log x+12)$

따라서 음향출력이 $x=800(\mathrm{W})$일 때, 음향파워레벨 $y(\mathrm{dB})$는

$y=10(\log 800+12)$

$=10(3\log 2+\log 100+12)$

$=10(3\times0.3+2+12)$ ($\because\ \log 2=0.3$)

$=10\times14.9=149$

답 149

09-2

10년 전 방문객이 100만 명이었고 매년 $p\%$씩 꾸준히 증가하여 현재 1260만 명이 되었으므로

$100\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}=1260$

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}=12.6$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$10\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\log 12.6$

$10\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=1+\log 1.26$

$10\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=1.1$ ($\because\ \log 1.26=0.1$)

$\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=0.11$

이때, $\log 1.29=0.11$이므로

$1+\frac{p}{100}=1.29 \qquad \therefore\ p=29$

답 29

10-1

(1) $\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x^2}$의 소수 부분이 같으므로

$\log x-\log\frac{1}{x^2}=\log x-(-2\log x)$

$=3\log x=$(정수)

x가 5자리의 수이므로 $10000 \le x < 100000$

$4 \le \log x < 5 \qquad \therefore\ 12 \le 3\log x < 15$

$3\log x$는 정수이므로

$3\log x=12$ 또는 $3\log x=13$ 또는 $3\log x=14$

즉, $\log x=4$ 또는 $\log x=\frac{13}{3}$ 또는 $\log x=\frac{14}{3}$

$\therefore\ x=10^4$ 또는 $x=10^{\frac{13}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{3}}$

(2) $\log x^2$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로 $\log x^2+\log\sqrt{x}=2\log x+\frac{1}{2}\log x=\frac{5}{2}\log x$는 정수이다.

이때, $100<x<1000$이므로 $2<\log x<3$에서

$5<\frac{5}{2}\log x<\frac{15}{2}$

따라서 $\frac{5}{2}\log x=6$ 또는 $\frac{5}{2}\log x=7$이므로

$\log x=\frac{12}{5}$ 또는 $\log x=\frac{14}{5}$

즉, $x=10^{\frac{12}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{5}}$

답 (1) $x=10^4$ 또는 $x=10^{\frac{13}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{3}}$

(2) $x=10^{\frac{12}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{5}}$

다른풀이

(2) $100<x<1000$에서 $2<\log x<3$이므로

$\log x=2+\alpha\ (0<\alpha<1)$라 하면*

$\log x^2=2\log x=2(2+\alpha)=4+2\alpha$

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{1}{2}(2+\alpha)=1+\frac{\alpha}{2}$

이때, $0<2\alpha<2$, $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}$이므로

(i) $0<2\alpha<1$일 때, $\log x^2$의 소수 부분은 2α이고

$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{4}$이므로 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$이다.

이때, $2\alpha+\frac{\alpha}{2}=1$이므로

$\frac{5}{2}\alpha=1 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{2}{5}$

따라서 $\log x=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$이므로 $x=10^{\frac{12}{5}}$

(ii) $1\le 2\alpha<2$일 때, $\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha-1$이고

$\frac{1}{4}\le\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}$이므로 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$이다.

이때, $2\alpha-1+\frac{\alpha}{2}=1$이므로

$\frac{5}{2}\alpha=2 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{4}{5}$

따라서 $\log x=2+\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$이므로 $x=10^{\frac{14}{5}}$

(i), (ii)에서 $x=10^{\frac{12}{5}}$ 또는 $x=10^{\frac{14}{5}}$

풀이첨삭

*를 확인하자.

$\log x^2$의 소수 부분과 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x^2$, $\log\sqrt{x}$는 모두 정수가 아니다.

그런데 $\alpha=0$, 즉 $\log x$가 정수이면

$\log x^2=2\log x=$(정수)

가 되어 모순이다.

개 념 마 무 리

본문 pp.53~56

01 7	**02** 63	**03** 60	**04** 10
05 6	**06** ⑤	**07** ④	**08** ③
09 ④	**10** -8	**11** 30	**12** 25
13 8	**14** $\frac{31}{6}$	**15** 3	**16** 166
17 ②	**18** 3	**19** 32	**20** 12
21 17	**22** 3^{25}	**23** $\frac{3}{2}$	**24** 114

01

$\log_{(a+3)^2}(x^2-2ax+30+a)$가 정의되려면

(밑)>0, (밑)$\ne1$에서 $(a+3)^2>0$, $(a+3)^2\ne1$

$(a+3)^2>0$에서

$a+3\ne0 \qquad \therefore\ a\ne-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$(a+3)^2=1$일 때, $a+3=\pm1$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=-4$

즉, $(a+3)^2\ne1$에서

$a\ne-2$이고 $a\ne-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

(진수)>0에서 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2ax+30+a>0$이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2ax+30+a=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(30+a)<0$

$a^2-a-30<0$, $(a+5)(a-6)<0$

$\therefore\ -5<a<6 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 정수 a는 -1, 0, 1, $\cdots$, 5의 7개이다.

답 7

02

$$\log_4\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_4\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_4\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_4\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\log_4\frac{2}{1}+\log_4\frac{3}{2}+\log_4\frac{4}{3}+\cdots+\log_4\frac{a+1}{a}$$

$$=\log_4\left(\frac{\cancel{2}}{1}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{a+1}{\cancel{a}}\right)$$

$$=\log_4(a+1)$$

즉, $\log_4(a+1)=3$이므로 로그의 정의에 의하여

$a+1=4^3$, $a+1=64$

$\therefore\ a=63$

답 63

03

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_6 x}+\frac{1}{\log_{12} x}+\frac{1}{\log_{25} x}=\frac{2}{\log_k x}\text{에서}$$

$\log_x 2+\log_x 6+\log_x 12+\log_x 25=2\log_x k$

$\log_x(2\times6\times12\times25)=\log_x k^2$

즉, $\log_x(2^4\times3^2\times5^2)=\log_x k^2$이므로

$2^4\times3^2\times5^2=k^2$

$\therefore\ k=2^2\times3\times5=60\ (\because\ k>0)$

답 60

04

$85^x=64$, $17^y=8$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_{85}64$, $y=\log_{17}8$

$$\therefore\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}=\frac{6}{\log_{85}64}-\frac{3}{\log_{17}8}$$

$$=6\log_{64}85-3\log_8 17$$

$$=6\log_{2^6}85-3\log_{2^3}17$$

$$=\log_2 85-\log_2 17$$

$$=\log_2\frac{85}{17}=\log_2 5$$

한 자리의 자연수 a, b에 대하여 $\log_2 5=\log_a b$이므로

$a=2$, $b=5$ $\quad\therefore\ ab=10$

답 10

다른풀이

$85^x=64$에서 $85^x=2^6$이므로 $2^{\frac{6}{x}}=85$ ……㉠

$17^y=8$에서 $17^y=2^3$이므로 $2^{\frac{3}{y}}=17$ ……㉡

㉠÷㉡을 하면

$2^{\frac{6}{x}}\div2^{\frac{3}{y}}=85\div17$

$2^{\frac{6}{x}-\frac{3}{y}}=5$

$\therefore\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}=\log_2 5$

05

두 직선 $(\log_5 a)x+(\log_2 49)y+3=0$,

$(\log_5 2)x+(\log_2 7)y+b=0$이 일치하므로

$$\frac{\log_5 a}{\log_5 2}=\frac{\log_2 49}{\log_2 7}=\frac{3}{b}$$

(가)

이때, $\dfrac{\log_2 49}{\log_2 7}=\log_7 49=\log_7 7^2=2$이므로

$\dfrac{\log_5 a}{\log_5 2}=2$에서 $\log_2 a=2$ $\quad\therefore\ a=4$

또한, $2=\dfrac{3}{b}$에서 $b=\dfrac{3}{2}$

(나)

$\therefore\ ab=4\times\dfrac{3}{2}=6$

(다)

답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	직선이 일치할 조건을 구한 경우	30%
(나)	로그의 성질을 이용하여 a와 b의 값을 구한 경우	50%
(다)	ab의 값을 구한 경우	20%

06

$a^5=b^3$에서 $b=a^{\frac{5}{3}}$ $\quad\therefore\ A=\log_a b=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

$b^3=c^2$에서 $c=b^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore\ B=\log_b c=\log_b b^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

$a^5=c^2$에서 $a=c^{\frac{2}{5}}$ $\quad\therefore\ C=\log_c a=\log_c c^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$

$\therefore\ C<B<A$

답 ⑤

07

$\log_a c : \log_b c = 3 : 4$에서

$3\log_b c = 4\log_a c$

$\dfrac{3}{\log_c b} = \dfrac{4}{\log_c a}$이므로 $3\log_c a = 4\log_c b$

$\log_c a^3 = \log_c b^4 \qquad \therefore\ a^3 = b^4$

즉, $b = a^{\frac{3}{4}}$이므로

$$\log_a b + \log_b a = \log_a a^{\frac{3}{4}} + \log_{a^{\frac{3}{4}}} a = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$$

답 ④

08

$\log_2 3 = a,\ \log_3 5 = b$에서

$ab = \log_2 3 \times \log_3 5 = \log_2 5$

$$\therefore\ \log_{12}\sqrt{90} = \frac{1}{2}\log_{12} 90 = \frac{\log_2 90}{2\log_2 12}$$

$$= \frac{\log_2(2\times 3^2 \times 5)}{2\log_2(2^2\times 3)}$$

$$= \frac{1+\log_2 3^2 + \log_2 5}{2(2+\log_2 3)}$$

$$= \frac{1+2\log_2 3 + \log_2 5}{2(2+\log_2 3)}$$

$$= \frac{1+2a+ab}{2(2+a)} = \frac{1+2a+ab}{4+2a}$$

답 ③

09

세 양의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 조건 (가)에서

$\dfrac{1}{\log_{(a+b)} c} + \dfrac{1}{\log_{(a-b)} c} = 2$이므로

$\log_c(a+b) + \log_c(a-b) = 2$

$\log_c(a+b)(a-b) = 2,\ \log_c(a^2-b^2) = 2$

로그의 정의에 의하여

$a^2 - b^2 = c^2 \qquad \therefore\ a^2 = b^2 + c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이다.

조건 (나)에서 $4b\log_{432} 2 + 3b\log_{432} 3 = c$이므로

$\log_{432} 2^{4b} + \log_{432} 3^{3b} = c$

$\log_{432}(2^{4b}\times 3^{3b}) = c$

$2^{4b}\times 3^{3b} = 432^c$

이때, $432^c = (2^4\times 3^3)^c = 2^{4c}\times 3^{3c}$이므로

$2^{4b}\times 3^{3b} = 2^{4c}\times 3^{3c}$

$\therefore\ b = c$

따라서 $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

그러므로 $\triangle$ABC는 빗변의 길이가 a인 직각이등변삼각형이다.

답 ④

보충설명

로그의 정의에서 (밑)>0, (밑)$\neq 1$이므로 $\log_{(a-b)} c$에서

$a > b,\ a \neq b+1$

따라서 $a=b$인 경우는 존재할 수 없으므로 빗변의 길이가 c인 직각이등변삼각형이 될 수 없다. 즉, 로그의 정의를 이용하면 보기 ③은 제외된다.

10

$2^2 < 7 < 2^3$이므로 $2 < \log_2 7 < 3$

즉, $\log_2 7$의 정수 부분이 2이므로 $n=2,\ \alpha = \log_2 7 - 2$이다.

따라서 이차방정식 $2x^2 + px + q = 0$의 두 근이 $2,\ \log_2 7 - 2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{p}{2} = 2 + \log_2 7 - 2 = \log_2 7,$

$\dfrac{q}{2} = 2(\log_2 7 - 2) = 2\log_2 7 - 4$

$\therefore\ p = -2\log_2 7,\ q = 4\log_2 7 - 8$

$\therefore\ 2p + q = -8$

답 -8

11

$\dfrac{\log_c b}{\log_a b} = \dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = \dfrac{1}{2}$이므로

$\log_b c = 2\log_b a$

$\therefore\ c = a^2$

$\dfrac{\log_b c}{\log_a c} = \dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \dfrac{1}{3}$이므로

$\log_c b = 3\log_c a$

$\therefore\ b = a^3$

이때, a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

$\therefore$ $a+2b+3c=2+16+12=30$

답 30

12

$\dfrac{b}{a}=8$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 \dfrac{b}{a}=\log_2 8$

$\therefore$ $\log_2 b-\log_2 a=3$ $\cdots\cdots$㉠

$a^{\log_4 b}=\sqrt[8]{128}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 a^{\log_4 b}=\log_2 \sqrt[8]{128}$, $\log_4 b\times\log_2 a=\log_2 2^{\frac{7}{8}}$

$\dfrac{1}{2}\log_2 b\times\log_2 a=\dfrac{7}{8}$

$\therefore$ $\log_2 a\times\log_2 b=\dfrac{7}{4}$ $\cdots\cdots$㉡

$\therefore$ $2\{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2\}$

$=2\{(\log_2 a-\log_2 b)^2+2\times\log_2 a\times\log_2 b\}$

$=2\times\left\{(-3)^2+2\times\dfrac{7}{4}\right\}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=25$

답 25

13

$\log_3 a=x$, $\log_3 b=y$, $\log_3 c=z$라 하면

$x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$

조건 (가)에서

$\log_3 a-\log_3 b=\log_9 b-\log_9 c$

$=\log_{3^2} b-\log_{3^2} c$

$=\dfrac{1}{2}\log_3 b-\dfrac{1}{2}\log_3 c$

따라서 $x-y=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z$이므로

$2x-3y+z=0$ $\cdots\cdots$㉠

조건 (나)에서

$\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}=\dfrac{\log_9 b}{\log_9 c}$이므로

$\log_3 a\times\log_9 c=\log_3 b\times\log_9 b$

$\log_3 a\times\log_{3^2} c=\log_3 b\times\log_{3^2} b$

$\log_3 a\times\dfrac{1}{2}\log_3 c=\log_3 b\times\dfrac{1}{2}\log_3 b$

$\log_3 a\times\log_3 c=\log_3 b\times\log_3 b$

$\therefore$ $xz=y^2$ $\cdots\cdots$㉡

㉠에서 $z=3y-2x$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$x(3y-2x)=y^2$, $3xy-2x^2=y^2$

$2x^2-3xy+y^2=0$, $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore$ $y=2x$ ($\because$ $x\neq y$)

이것을 ㉠에 대입하면

$-4x+z=0$, $z=4x$

$\therefore$ $\dfrac{(\log_3 c)^2}{\log_3 a\times\log_3 b}=\dfrac{z^2}{x\times y}=\dfrac{(4x)^2}{x\times 2x}$

$=\dfrac{16x^2}{2x^2}=8$

답 8

14

$5\le\log x<6$에서 $\log x$의 정수 부분은 5이다.

$\log x=5+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 하면

$\log\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\log x=\dfrac{5}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$

$=2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$

$0\le\alpha<1$이므로 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}<1$

따라서 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}$이다.

이때, $\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 $\dfrac{3}{4}$이므로

$\alpha+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3}{2}\alpha=\dfrac{1}{4}$ $\therefore$ $\alpha=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ $\log x=5+\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{6}$

답 $\dfrac{31}{6}$

15

$\frac{a^2}{b}$은 8자리의 자연수이므로 $\log\frac{a^2}{b}$의 정수 부분은 7이다.

즉, $7\le\log\frac{a^2}{b}<8$에서

$7\le2\log a-\log b<8$ ……㉠

$\frac{a}{b^2}$는 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log\frac{a}{b^2}$의 정수 부분은 -2이다.

즉, $-2\le\log\frac{a}{b^2}<-1$에서

$-2\le\log a-2\log b<-1$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$5\le3\log a-3\log b<7$

$\frac{5}{3}\le\log a-\log b<\frac{7}{3}$

즉, $\frac{5}{3}\le\log\frac{a}{b}<\frac{7}{3}$이므로

$n=1$ 또는 $n=2$

따라서 구하는 합은

$1+2=3$

답 3

16

$T^2=d^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$2\log T=3\log d$

$d=30$을 위의 식에 대입하면

$2\log T=3\log30$

$\log30=1+\log3=1.48$이므로

$2\log T=3\times1.48=4.44$

$\therefore\ \log T=2.22$

이때, $\log1.66=0.22$이므로

$\log T=\log1.66+2=\log1.66+\log10^2$

$\quad=\log166$

$\therefore\ T=166$

답 166

17

처음 물의 높이가 64 cm일 때, 실험을 시작한 지 40분 후의 물의 높이가 16 cm이므로

$k=\frac{C}{40}(\log64-\log16)=\frac{C}{40}\log\frac{64}{16}$

$\quad=\frac{C}{40}\log4=\frac{C}{40}\times2\log2=\frac{C}{20}\log2$ ……㉠

실험을 시작한 지 x분 후의 물의 높이가 2 cm이므로

$k=\frac{C}{x}(\log64-\log2)$

$\quad=\frac{C}{x}\log\frac{64}{2}=\frac{C}{x}\log32=\frac{C}{x}\times5\log2$ ……㉡

이때, k는 일정하므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{C}{20}\log2=\frac{C}{x}\times5\log2,\ \frac{1}{20}=\frac{5}{x}$

$\therefore\ x=20\times5=100$

답 ②

18

양수 x에 대하여

$f(x)=[\log x]$는 $\log x$의 정수 부분을,

$g(x)=\log x-[\log x]$는 $\log x$의 소수 부분을

나타낸다.

조건 (가)에서 $100\le a<1000$이므로

$2\le\log a<3$

$\therefore\ \log a=2+g(a)\ (0\le g(a)<1)$

조건 (나)에서 $g(a)=f(b)+\frac{1}{3}$이고, $f(b)$는 정수,

$0\le g(a)<1$이므로

$f(b)=0,\ g(a)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \log a=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\ \log b=g(b)\ (0<g(b)<1)$

$\log b=g(b)=0$이면 $b=1$
그런데 $b>1$이므로 모순이다.

이때, $0<g(b)<1$이므로

$\log\frac{1}{b}=-\log b=-g(b)=-1+\{1-g(b)\}$

$\therefore\ g\left(\frac{1}{b}\right)=1-g(b)$

조건 (다)에서 $g(b)=g\left(\frac{1}{b}\right)+g(a)$이므로

$g(b)=\{1-g(b)\}+\frac{1}{3}$

$2g(b)=\frac{4}{3}$, $g(b)=\frac{2}{3}$

즉, $\log b=\frac{2}{3}$이므로

$\log ab=\log a+\log b=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=3$

답 3

보충설명

상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 응용

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때,

(1) $\log A$의 정수 부분이 n이다.

⇨ $\log A=n+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)

⇨ $n\le\log A<n+1$ ⇨ $[\log A]=n$

⇨ $A=a\times10^n$ $(1\le a<10)$ ⇨ $10^n\le A<10^{n+1}$

(2) $\log A$와 $\log B$의 소수 부분이 같다.

⇨ A와 B의 숫자 배열이 같다.

⇨ $\log A-[\log A]=\log B-[\log B]$

⇨ $\log A-\log B=k$ (k는 정수)이므로 $\frac{A}{B}=10^k$

19

$\log_2 x^{\log_2 a}+\log_2 x^{\log_2 b}$

$=\log_2 a\times\log_2 x+\log_2 b\times\log_2 x$

$=(\log_2 a+\log_2 b)\times\log_2 x$

$=\log_2 ab\times\log_2 x$

$\log_2 ab\times\log_2 x=8\log_2 x$에서 $x\ne1$, 즉 $\log_2 x\ne0$이므로

$\log_2 ab=8$

로그의 정의에 의하여

$ab=2^8$

이때, $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge2\sqrt{ab}=2\sqrt{2^8}=2\times2^4=32$

(단, 등호는 $a=b=2^4$일 때 성립)

따라서 $a+b$의 최솟값은 32이다.

답 32

20

$\log_a b=\frac{k}{2}$에서 $b=a^{\frac{k}{2}}$, 즉 $b^2=a^k$이므로

$A_k=\left\{\frac{b}{a}\,\middle|\,b^2=a^k,\ a\text{와 }b\text{는 2 이상 100 이하의 자연수}\right\}$

(ⅰ) $k=3$일 때,

$b^2=a^3$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2^2, 2^3)$, $(3^2, 3^3)$, $(4^2, 4^3)$이므로 $A_3=\{2, 3, 4\}$

$\therefore n(A_3)=3$

(ⅱ) $k=4$일 때,

$b^2=a^4$, 즉 $b=a^2$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍

(a, b)는

$(2, 2^2)$, $(3, 3^2)$, $(4, 4^2)$, $\cdots$, $(9, 9^2)$, $(10, 10^2)$

이므로 $A_4=\{2, 3, 4, \cdots, 9, 10\}$

$\therefore n(A_4)=9$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$n(A_3)+n(A_4)=3+9=12$

답 12

21

조건 (가)에서 $\log_5 x+3\log_5 y+2\log_5 z=67$이므로

$\log_5 xy^3z^2=67$

$\therefore xy^3z^2=5^{67}$ ……㉠

조건 (나)에서 $x^3=y^2=z^5$이므로

$y=x^{\frac{3}{2}}$, $z=x^{\frac{3}{5}}$

이것을 ㉠에 대입하면 $x\times x^{\frac{9}{2}}\times x^{\frac{6}{5}}=5^{67}$

$x^{1+\frac{9}{2}+\frac{6}{5}}=5^{67}$, $x^{\frac{67}{10}}=5^{67}$, $x^{\frac{1}{10}}=5$

$\therefore x=5^{10}$, $y=(5^{10})^{\frac{3}{2}}=5^{15}$, $z=(5^{10})^{\frac{3}{5}}=5^6$

$\therefore 2\log_5 x+\log_5 y-3\log_5 z$

$=2\log_5 5^{10}+\log_5 5^{15}-3\log_5 5^6$

$=2\times10+15-3\times6=17$

답 17

보충설명

조건 (나)의 $x^3=y^2=z^5$에서 세 수 x, y, z 중 하나가 1이면 나머지도 모두 1이어야 하므로 이는 조건 (가)에 모순이다.

$\therefore x\ne1$, $y\ne1$, $z\ne1$

22

$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=\log_3 x^4+\log_3 y^6$에서

$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=4\log_3 x+6\log_3 y$

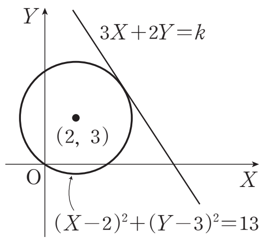
이때, $\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$라 하면

$X^2+Y^2=4X+6Y$

$\therefore\ (X-2)^2+(Y-3)^2=13$

$\log_3 x^3y^2=3\log_3 x+2\log_3 y=3X+2Y$

$3X+2Y=k$라 하면



오른쪽 그림과 같이 원 $(X-2)^2+(Y-3)^2=13$에 직선 $3X+2Y=k$가 접할 때, k는 최댓값을 갖는다.

점 $(2,\ 3)$과 직선 $3X+2Y=k$, 즉 $3X+2Y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|3\times2+2\times3-k|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$$

$|12-k|=13$이므로 $k=-1$ 또는 $k=25$

즉, $\log_3 x^3y^2$의 최댓값은 25이므로 x^3y^2의 최댓값은 3^{25}

답 3^{25}

다른풀이

$\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$라 하면

$X^2+Y^2=4X+6Y$에서

$(X-2)^2+(Y-3)^2=13$

$X-2$, $Y-3$이 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$ (단, 등호는 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$일 때 성립)

$\underbrace{\{(X-2)^2+(Y-3)^2\}}_{=13}(3^2+2^2)$

$\ge\{3(X-2)+2(Y-3)\}^2$

$=(3X+2Y-12)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{X-2}=\frac{2}{Y-3}\text{일 때 성립}\right)$

이때, $\log_3 x^3y^2=3X+2Y=k$라 하면

$13^2\ge(3X+2Y-12)^2$에서

$(k-12)^2\le169$

$k^2-24k-25<0$, $(k-25)(k+1)\le0$

$\therefore\ -1\le k\le25$

즉, $\log_3 x^3y^2$의 최댓값은 25이므로 x^3y^2의 최댓값은 3^{25}

23

$[\log x]$는 $\log x$의 정수 부분을 나타내므로

$(\log x+\log x^2+\log x^3)-([\log x]+[\log x^2]+[\log x^3])$

$=(\log x-[\log x])+(\log x^2-[\log x^2])$

$+(\log x^3-[\log x^3])$

의 값은 $\log x$, $\log x^2$, $\log x^3$ 각각의 소수 부분의 합이다.

실수 x는 일의 자리의 수가 0이 아닌 10보다 큰 수이므로

$\log x=n+\alpha$ ($n\ge1$인 정수, $0<\alpha<1$)라 하면

$\log\frac{1}{x}=-\log x=-(n+\alpha)=-n-\alpha$

$=(-n-1)+(1-\alpha)$

즉, $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이므로

$\log x-[\log x]=3\left(\log\frac{1}{x}-\left[\log\frac{1}{x}\right]\right)$에서

$\alpha=3(1-\alpha)$, $4\alpha=3$ $\quad\therefore\ \alpha=\frac{3}{4}$

즉, $\log x=n+\frac{3}{4}$이므로

$\log x^2=2\log x=2\left(n+\frac{3}{4}\right)=(2n+1)+\frac{1}{2}$

$\log x^3=3\log x=3\left(n+\frac{3}{4}\right)=(3n+2)+\frac{1}{4}$

따라서 $\log x$, $\log x^2$, $\log x^3$의 소수 부분은 각각

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$이므로 구하는 식의 값은

$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

24

자연수 x에 대하여 $f(x)=[\log x]$이므로

$f(x)=m$ (m은 음이 아닌 정수)이면 x는 $(m+1)$자리의 자연수이다.

이때, 두 자연수 a, b에 대하여 $f(ab)=f(a)+f(b)+1$이므로 ab의 자릿수는 a, b의 자릿수의 합보다 1만큼 크다.

이때, a, b는 1 이상 20 이하인 자연수이므로

(i) $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(ab)=1$일 때,

a, b 모두 한 자리의 자연수, ab는 두 자리의 자연수인 경우이므로

$a=1$일 때, b로 가능한 자연수는 없다.

$a=2$일 때, $b=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

$a=3$일 때, $b=4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 9$

$a=4$일 때, $b=3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 9$

$a=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$일 때, $b=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$

즉, 이 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5+6+7+5\times8=58$

(ii) $f(a)=0,\ f(b)=1,\ f(ab)=2$일 때,

a는 한 자리의 자연수, b는 두 자리의 자연수이면서 ab는 세 자리의 자연수인 경우이므로

$a=1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때, b로 가능한 자연수는 없다.

$a=5$일 때, $b=20$

$a=6$일 때, $b=17,\ 18,\ 19,\ 20$

$a=7$일 때, $b=15,\ 16,\ 17,\ \cdots,\ 20$

$a=8$일 때, $b=13,\ 14,\ 15,\ \cdots,\ 20$

$a=9$일 때, $b=12,\ 13,\ 14,\ \cdots,\ 20$

즉, 이 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+4+6+8+9=28$

(iii) $f(a)=1,\ f(b)=0,\ f(ab)=2$일 때,

a는 두 자리의 자연수, b는 한 자리의 자연수이면서 ab는 세 자리의 자연수인 경우이므로 (ii)에서 $a,\ b$가 서로 바뀐 것과 같다.

즉, 이 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 28이다.

(iv) $f(a)=1,\ f(b)=1,\ f(ab)=3$일 때,

$a,\ b$ 모두 두 자리의 자연수, ab는 네 자리의 자연수인 경우이다.

이때, 가장 큰 a와 가장 큰 b의 곱은 $ab=20\times20=400$이므로 이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$58+28+28=114$

답 114

다른풀이

20 이하의 두 자연수 $a,\ b$에 대하여

(i) $1\le a\le9,\ 1\le b\le9$일 때,

$f(a)=f(b)=0$이고 $1\le ab\le81$이므로

$0\le f(ab)\le1$

그런데 $f(ab)=f(a)+f(b)+1=0+0+1=1$

$f(ab)=1$이려면 $10\le ab\le81$이어야 하므로 조건을 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (2,\ 7),\ (2,\ 8),\ (2,\ 9)$ ⇨ 5개

$(3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ \cdots,\ (3,\ 9)$ ⇨ 6개

$(4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),\ \cdots,\ (4,\ 9)$ ⇨ 7개

$(5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ \cdots,\ (5,\ 9)$ ⇨ 8개

$(6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ \cdots,\ (6,\ 9)$ ⇨ 8개

$(7,\ 2),\ (7,\ 3),\ (7,\ 4),\ \cdots,\ (7,\ 9)$ ⇨ 8개

$(8,\ 2),\ (8,\ 3),\ (8,\ 4),\ \cdots,\ (8,\ 9)$ ⇨ 8개

$(9,\ 2),\ (9,\ 3),\ (9,\ 4),\ \cdots,\ (9,\ 9)$ ⇨ 8개

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$5+6+7+5\times8=58$

(ii) $1\le a\le9,\ 10\le b\le20$일 때,

$f(a)=0,\ f(b)=1$이고 $10\le ab\le180$이므로

$1\le f(ab)\le2$

그런데 $f(ab)=f(a)+f(b)+1=0+1+1=2$

$f(ab)=2$이려면 $100\le ab\le180$이어야 하므로 조건을 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 20)$ ⇨ 1개

$(6,\ 17),\ (6,\ 18),\ (6,\ 19),\ (6,\ 20)$ ⇨ 4개

$(7,\ 15),\ (7,\ 16),\ (7,\ 17),\ \cdots,\ (7,\ 20)$ ⇨ 6개

$(8,\ 13),\ (8,\ 14),\ (8,\ 15),\ \cdots,\ (8,\ 20)$ ⇨ 8개

$(9,\ 12),\ (9,\ 13),\ (9,\ 14),\ \cdots,\ (9,\ 20)$ ⇨ 9개

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+4+6+8+9=28$

(iii) $10\le a\le20,\ 1\le b\le9$일 때,

(ii)와 같은 방법으로 구하면 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 28이다.

(iv) $10\le a\le20,\ 10\le b\le20$일 때,

$f(a)=f(b)=1$이고 $100\le ab\le400$이므로 $f(ab)=2$

그런데 $f(ab)=f(a)+f(b)+1=1+1+1=3$

이를 만족시키는 자연수 $a,\ b$는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$58+28+28=114$

유형 연습 **03** 지수함수 본문 pp.64~76

01-1 (1) 5 (2) $\frac{17}{4}$	**01-2** 6	**02-1** ㄱ, ㄴ, ㄹ
03-1 $B<A<C$	**03-2** $A<C<B$	**03-3** $A<B<C$
04-1 12	**04-2** 16	**04-3** 5
05-1 7	**05-2** 6	
06-1 (1) 3 (2) 135 (3) $\frac{1}{2}$		**06-2** 12
07-1 0	**07-2** -6	**07-3** 3
08-1 -3	**08-2** 4	**08-3** $\frac{3}{2}$
09-1 30년 후	**09-2** 5년	

01-1

(1) 함수 $f(x)=a^{x+b}+1$의 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$f(-1)=5$에서 $a^{-1+b}+1=5$

$\therefore\ a^{-1+b}=4$ ……㉠

함수 $f(x)=a^{x+b}+1$의 그래프가 점 $(1,\ 17)$을 지나므로

$f(1)=17$에서 $a^{1+b}+1=17$

$\therefore\ a^{1+b}=16$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$a^{1+b-(-1+b)}=4,\ a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

이것을 ㉡에 대입하면 $2^{1+b}=16=2^4$

$1+b=4$ $\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

(2) $f(x)=a^x$에서 $f(-1)=\frac{1}{a},\ f(1)=a$

이때, $2f(-1)+f(1)=3$이므로

$\frac{2}{a}+a=3$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하여 정리하면

$a^2-3a+2=0,\ (a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a\neq1)$

따라서 $f(x)=2^x$이므로

$f(-2)+f(2)=2^{-2}+2^2=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

답 (1) 5 (2) $\frac{17}{4}$

01-2

$f(\alpha)=6$에서 $a^\alpha+2=6$ $\therefore\ a^\alpha=4$

$f(\beta)=18$에서 $a^\beta+2=18$ $\therefore\ a^\beta=16$

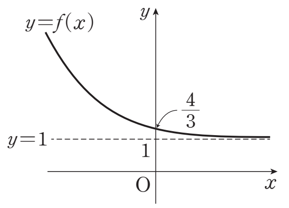
$$\begin{aligned}\therefore\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{3}\right)&=a^{\frac{\alpha+\beta}{3}}+2\\&=(a^{\alpha+\beta})^{\frac{1}{3}}+2\\&=(a^\alpha\times a^\beta)^{\frac{1}{3}}+2\\&=(4\times16)^{\frac{1}{3}}+2\\&=(4^3)^{\frac{1}{3}}+2=4+2=6\end{aligned}$$

답 6

02-1

$f(x)=3^{-x-1}+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+1$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면, 제2사분면만을 지나므로 제3사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. $0<(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 직선 $y=1$이므로 $0<a\le1$인 양수 a에 대하여 직선 $y=a$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 만나지 않는다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

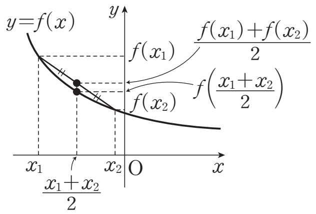
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (참)*

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

풀이첨삭

*를 그래프를 통해 확인하자.



$\therefore f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

03-1

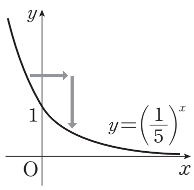
세 수 A, B, C의 밑을 $\frac{1}{5}$로 나타내면

$A=\frac{1}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$B=\sqrt[3]{0.04}=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

$C=\sqrt[6]{0.2^2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{6}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

이때, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$이고, 지수함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로



$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ B<A<C$

답 $B<A<C$

03-2

세 수 A, B, C의 밑을 a로 나타내면

$A=\sqrt[n+1]{a^n}=a^{\frac{n}{n+1}}=a^{1-\frac{1}{n+1}}$

$B=\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}=a^{1+\frac{1}{n}}$

$C=\sqrt[n+1]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+1}}=a^{1+\frac{1}{n+1}}$

이때, $a>1$이므로 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, 세 수 A, B, C에 대하여 지수가 큰 쪽이 더 큰 수이다.

(i) A, B의 대소 비교

$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0$

$(\because\ n\geq 2)$

즉, $1-\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$이므로

$a^{1-\frac{1}{n+1}}<a^{1+\frac{1}{n}}\qquad\therefore\ A<B$

(ii) B, C의 대소 비교

$1+\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0\ (\because\ n\geq 2)$

즉, $1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{n+1}$이므로

$a^{1+\frac{1}{n}}>a^{1+\frac{1}{n+1}}\qquad\therefore\ C<B$

(iii) A, C의 대소 비교

$1-\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{2}{n+1}<0\ (\because\ n\geq 2)$

즉, $1-\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n+1}$이므로

$a^{1-\frac{1}{n+1}}<a^{1+\frac{1}{n+1}}\qquad\therefore\ A<C$

(i), (ii), (iii)에서 $A<C<B$

답 $A<C<B$

다른풀이

$n=2$일 때에도 세 수 A, B, C의 대소 관계는 유지된다.

세 수 A, B, C에 $n=2$를 대입하면

$A=a^{\frac{2}{3}}$, $B=a^{\frac{3}{2}}$, $C=a^{\frac{4}{3}}$

이때, $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$이고 $a>1$이므로 함수 $y=a^x$은 x의 값하면 y의 값도 증가한다.

즉, $a^{\frac{2}{3}}<a^{\frac{4}{3}}<a^{\frac{3}{2}}$이므로 $A<C<B$

보충설명

풀이에서 세 수 A, B, C의 지수의 대소를 비교할 때 이용한 것은 다음 성질이다.

(1) $A-B>0 \iff A>B$ (2) $A-B=0 \iff A=B$

(3) $A-B<0 \iff A<B$

그런데 $n\geq 2$이므로 다음과 같이 각 지수의 대소를 비교할 수 있다.

$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$, $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1$

$\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}>1$

이때, $\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$이므로 $1-\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$

$\therefore\ \frac{n}{n+1}<\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$

03-3

$f(x)=2^x-1$이므로

$2^a-1=f(a),\ 2^b-1=f(b)$

또한, $f(0)=0$이므로 세 수 A, B, C를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A=\frac{2^a-1}{a}=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$$

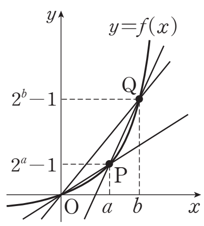
$$B=\frac{2^b-1}{b}=\frac{f(b)}{b}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$$

$$C=\frac{2^b-2^a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

즉, A는 직선 OP의 기울기, B는 직선 OQ의 기울기, C는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다.

따라서 오른쪽 그림에서

$A<B<C$



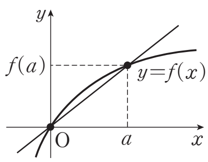
답 $A<B<C$

보충설명

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 원점을 지날 때,

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{f(a)}{a}$$

는 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.



04-1

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n$

$\therefore\ y=2^{m-x}+n$ ⋯⋯㉠

$y=4\left(\frac{1}{2^x}-\frac{5}{2}\right)=4\times2^{-x}-10$

$\quad=2^{-x+2}-10$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$m-x=-x+2,\ n=-10$

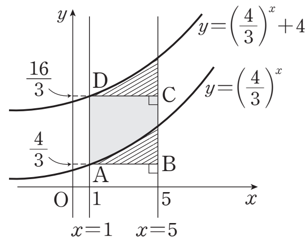
따라서 $m=2,\ n=-10$이므로

$m-n=2-(-10)=12$

답 12

04-2

함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x+4$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 같다.

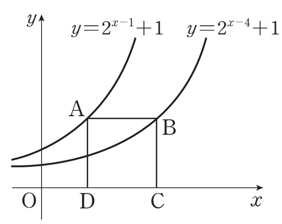


따라서 두 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x+4$의 그래프 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로 구하는 넓이는

$$(5-1)\times\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\right)=4\times4=16$$

답 16

04-3



두 곡선 $y=2^{x-1}+1$, $y=2^{x-4}+1$ 위의 점 A, B와 x축 위의 두 점 C, D는 위의 그림과 같다.

선분 CD가 x축에 포함되고 □ABCD가 정사각형이므로 선분 AB는 x축에 평행하다.

점 D의 x좌표를 t라 하면 두 점 A, D의 x좌표가 같으므로

$A(t,\ 2^{t-1}+1)$

또한, 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 $2^{t-1}+1=2^{x-4}+1$에서

$x-4=t-1$ $\quad\therefore\ x=t+3$

$\therefore\ B(t+3,\ 2^{t-1}+1)$ ⋯⋯㉠

이때, 두 점 B, C의 x좌표는 같으므로

$C(t+3,\ 0)$

□ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$(t+3)-t=2^{t-1}+1$

$2^{t-1}=2,\ t-1=1 \qquad \therefore\ t=2$

㉠에서 점 B의 x좌표는 $2+3=5$이다.

답 5

보충설명

곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점 A와 곡선 $y=2^{x-4}+1$ 위의 점 B에 대하여 선분 AB가 x축에 평행하면 두 점 A, B의 y좌표는 서로 같다.

이때, 곡선 $y=2^{x-4}+1$은 곡선 $y=2^{x-1}+1$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 3만큼 크다.

즉, □ABCD는 한 변의 길이가 3인 정사각형이다.

05-1

함수 $y=a^x+3\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=a^{-x}+3 \qquad \cdots\cdots$㉠

㉠의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+1=a^{-(x-4)}+3 \qquad \therefore\ y=a^{-x+4}+2$

이때, $a^0=1$이므로 함수 $y=a^{-x+4}+2$의 그래프는 항상 점 $(4,\ 3)$을 지난다.

따라서 $p=4,\ q=3$이므로 $p+q=7$

답 7

05-2

두 함수 $y=a^x,\ y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 두 함수 $y=a^{x+k},\ y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x+k}$의 그래프는 직선 $x=-k$에 대하여 대칭이므로

$-k=-4 \qquad \therefore\ k=4$

이때, $f(-2)=a^{-2+4}=a^2,\ g(-2)=\left(\frac{1}{a}\right)^{-2+4}=a^{-2}$이고

$\overline{PQ}=\frac{15}{4}$이므로 $a^2-a^{-2}=\frac{15}{4}$

$4a^4-15a^2-4=0,\ (4a^2+1)(a^2-4)=0$

이때, $4a^2+1>0$이므로 $a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$

$\therefore\ a+k=2+4=6$

답 6

06-1

(1) $g(x)=-x^2+2x+1$이라 하면 $y=a^{-x^2+2x+1}$에서

$y=a^{g(x)}$

$y=a^{g(x)}$에서 (밑)$=a>1$이므로 $g(x)$가 최대일 때, y도 최대이다.

한편, $g(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$이므로

$g(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $g(1)=2$를 갖는다.

따라서 함수 $y=a^{g(x)}$은 $x=1$일 때 최댓값 a^2을 가지므로

$a^2=9 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>1)$

(2) $f(x)=-x^2-4x-3$이라 하면

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2-4x-3}+1$에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}+1$

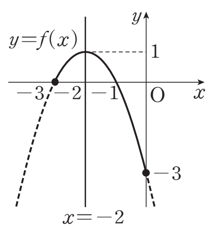
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}+1$에서 $0<$(밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로

$f(x)$가 최소일 때 y는 최대이고, $f(x)$가 최대일 때 y는 최소이다.

한편, $-3\le x\le 0$이고

$f(x)=-x^2-4x-3$

$\quad\ =-(x+2)^2+1$



이므로 $f(x)$는

$x=0$에서 최솟값 $f(0)=-3$,

$x=-2$에서 최댓값 $f(-2)=1$

을 갖는다.

즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}+1$은

$x=0$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+1=9$,

$x=-2$에서 최솟값 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$을 갖는다.

따라서 $M=9,\ m=\frac{3}{2}$이므로

$10Mm=10\times9\times\frac{3}{2}=135$

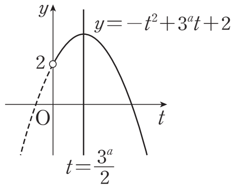
(3) $y=-9^x+3^{x+a}+2=-(3^x)^2+3^a\times3^x+2$

$3^x=t$로 놓으면 $t>0$

이때, 주어진 함수는

$y=-t^2+3^a t+2$

$=-\left(t-\dfrac{3^a}{2}\right)^2+\dfrac{3^{2a}}{4}+2$



그런데 $\dfrac{3^a}{2}>0$이므로

$t>0$일 때, 함수

$y=-\left(t-\dfrac{3^a}{2}\right)^2+\dfrac{3^{2a}}{4}+2$는 $t=\dfrac{3^a}{2}$에서 최댓값

$\dfrac{3^{2a}}{4}+2$를 갖는다.

따라서 $\dfrac{3^{2a}}{4}+2=\dfrac{11}{4}$에서 $3^{2a}=3$, $2a=1$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 3 (2) 135 (3) $\dfrac{1}{2}$

06-2

$y=9^x+9^{-x}+3^{1+x}+3^{1-x}+4$

$=3^{2x}+3^{-2x}+3\times3^x+3\times3^{-x}+4$

$=\{(3^x+3^{-x})^2-2\}+3(3^x+3^{-x})+4$

$=(3^x+3^{-x})^2+3(3^x+3^{-x})+2$

$3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

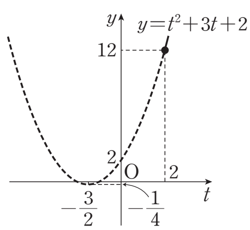
$t=3^x+3^{-x}\geq2\sqrt{3^x\times3^{-x}}=2$

(단, 등호는 $3^x=3^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

이때, 주어진 함수는 $t\geq2$일 때,

$y=t^2+3t+2$

$=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$



이므로 이 함수는 $t=2$에서 최소이고, 최솟값은

$2^2+3\times2+2=12$이다.

답 12

보충설명

산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 지수함수의 최대·최소

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로

$a^x+a^{-x}\geq2\sqrt{a^x\times a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

07-1

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$이므로

$\sqrt{5}-2=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

즉, $(\sqrt{5}+2)^x+\dfrac{1}{(\sqrt{5}+2)^x}=8$에서

$(\sqrt{5}+2)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t+\dfrac{1}{t}=8$

$\therefore\ t^2-8t+1=0$ ……㉠

주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 ㉠의 두 근은

$(\sqrt{5}+2)^\alpha$, $(\sqrt{5}+2)^\beta$이다.

이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sqrt{5}+2)^\alpha\times(\sqrt{5}+2)^\beta=1$

$(\sqrt{5}+2)^{\alpha+\beta}=1$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

답 0

07-2

곡선 $y=9^x-4\times3^x$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $9^x-4\times3^x=k$, 즉 $(3^x)^2-4\times3^x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-k=0$ ……㉠

방정식 $(3^x)^2-4\times3^x-k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(-k)$

$=4+k>0$ $\therefore\ k>-4$

(ii) (㉠의 두 근의 합)$=4>0$이므로 항상 성립한다.

(iii) (㉠의 두 근의 곱)$=-k>0$ $\therefore\ k<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-4<k<0$

따라서 구하는 정수 k는 -3, -2, -1이므로 그 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$

답 -6

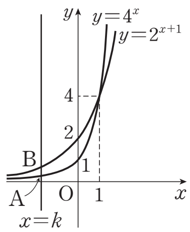
07-3

두 함수 $y=4^x$, $y=2^{x+1}$의 그래프의 교점의 x좌표는

$4^x=2^{x+1}$에서 $2^{2x}=2^{x+1}$

$2x=x+1$ $\quad\therefore\ x=1$

따라서 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$\mathrm{A}(k,\ 4^k)$, $\mathrm{B}(k,\ 2^{k+1})$

(i) $k<1$일 때,

$2^{k+1}>4^k$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=48$에서 $2^{k+1}-4^k=48$

$\therefore\ (2^k)^2-2\times2^k+48=0$

$2^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t+48=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-48=-47<0$

이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

즉, $k<1$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}=48$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ii) $k>1$일 때,

$4^k>2^{k+1}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=48$에서 $4^k-2^{k+1}=48$

$\therefore\ (2^k)^2-2\times2^k-48=0$

$2^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-48=0$

$(t+6)(t-8)=0$ $\quad\therefore\ t=8\ (\because\ t>0)$

즉, $2^k=8$이므로 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$

답 3

08-1

$\left(\dfrac{1}{25}\right)^x-30\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+125\leq0$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\right\}^2-30\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^x+125\leq0$

이때, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-30t+125\leq0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$(t-5)(t-25)\leq0$ $\quad\therefore\ 5\leq t\leq25$

그런데 $t>0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$5\leq t\leq25$

즉, $5\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leq25$이므로

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$

$0<(\text{밑})=\dfrac{1}{5}<1$이므로

$-2\leq x\leq-1$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=(-2)+(-1)=-3$

답 -3

08-2

부등식 $4^x+2^{x+1}+a-4>0$에서

$(2^x)^2+2\times2^x+a-4>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

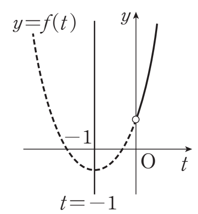
$t^2+2t+a-4>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 모든 양수 t에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 한다.

이때, $f(t)=t^2+2t+a-4$라 하면

$f(t)=(t+1)^2+a-5$

이므로 이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 모든 양수 t에 대하여 $f(t)>0$이려면 $f(0)\geq0$이 성립해야 한다.

따라서 $f(0)=a-4\geq0$에서 $a\geq4$

이므로 실수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

08-3

부등식 $2^x+2p-\dfrac{q}{2^{x-2}}<0$에서

$2^x+2p-\dfrac{4q}{2^x}<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $0<x<2$에서

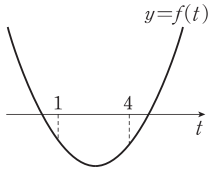
$1<t<4$

이때, 부등식 ㉠은 $t+2p-\frac{4q}{t}<0$

$\therefore\ t^2+2pt-4q<0\ (\because\ 1<t<4)$ ……㉡

$0<x<2$에서 부등식 ㉠이 항상 성립하려면 $1<t<4$에서 부등식 ㉡이 항상 성립해야 한다.

$f(t)=t^2+2pt-4q$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $1<t<4$에서 항상 $f(t)<0$이려면 $f(1)\le 0$, $f(4)\le 0$이어야 한다.

$f(1)=1+2p-4q\le 0$에서

$p-2q\le -\frac{1}{2}$ ……㉢

$f(4)=16+8p-4q\le 0$에서

$2p-q\le -4$ ……㉣

㉢, ㉣을 변끼리 더하면 $3p-3q\le -\frac{9}{2}$

즉, $q-p\ge \frac{3}{2}$이므로 $q-p$의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

09-1

반감기가 5년인 코발트 ^{60}Co $1024g$의 n년 후 질량은

$1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}}(g)$

반감기가 30년인 세슘 ^{137}Cs $32g$의 n년 후 질량은

$32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}(g)$

n년 후 두 방사성물질의 질량이 같아진다고 하면

$1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}}=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}$에서

$2^{10}\times 2^{-\frac{n}{5}}=2^5\times 2^{-\frac{n}{30}}$

$2^{10-\frac{n}{5}}=2^{5-\frac{n}{30}}$

즉, $10-\frac{n}{5}=5-\frac{n}{30}$이므로 $n=30$

따라서 두 방사성물질의 질량이 같아지는 것은 지금으로부터 30년 후이다.

답 30년 후

보충설명

반감기

반감기란 어떤 특정 방사성물질의 질량이 방사성붕괴에 의하여 원래의 질량의 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간이다. 이것은 주위의 물리적, 화학적 조건에 전혀 관계없이 물질의 핵종에 따라 고유한 값을 지닌다.

반감기가 T인 어떤 방사성물질의 처음 질량이 M_0일 때, n시간 후 남아 있는 방사성물질의 질량을 $M(n)$이라 하면 다음 식이 성립한다.

$$M(n)=M_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{T}}$$

09-2

신제품의 가격을 a원이라 할 때, 구매 후 n년이 지났을 때의 중고 가격은

$a\times(1-0.25)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n a$

중고 가격이 신제품 가격의 $\frac{243}{1024}$배 이하가 되려면

$\left(\frac{3}{4}\right)^n a\le\frac{243}{1024}a$에서 $\left(\frac{3}{4}\right)^n\le\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$0<(\text{밑})=\frac{3}{4}<1$이므로 $n\ge 5$

따라서 이 제품의 중고 가격이 처음으로 신제품 가격의 $\frac{243}{1024}$배 이하가 되는 것은 구매 후 5년이 지났을 때이다.

답 5년

개 념 마 무 리

본문 pp.77~80

01 ⑤	**02** -9	**03** 4	**04** ③
05 $B<A<C$		**06** ③	**07** 9
08 $\frac{3}{2}$	**09** ⑤	**10** 34	**11** 3
12 2	**13** 4	**14** 27	**15** ②
16 $k<-4$	**17** 10	**18** 2	**19** ④
20 4	**21** -4	**22** ㄱ, ㄷ	**23** 15

01

$f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에서

$f(p)=q$이므로 $a^p=q$

이때, $f(3p)=a^{3p}=(a^p)^3=q^3$이고,

$f\left(\frac{p}{4}\right)=a^{\frac{p}{4}}=(a^p)^{\frac{1}{4}}=q^{\frac{1}{4}}$이므로

$f(3p)f\left(\frac{p}{4}\right)=q^3\times q^{\frac{1}{4}}=q^{3+\frac{1}{4}}=q^{\frac{13}{4}}=\sqrt[4]{q^{13}}$

답 ⑤

다른풀이

$f(m)f(n)=q^m\times q^n=q^{m+n}=f(m+n)$

$\therefore\ f(3p)f\left(\frac{p}{4}\right)=f\left(3p+\frac{p}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}p\right)$

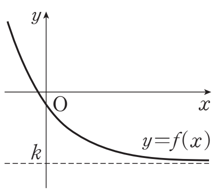
$=q^{\frac{13}{4}}=\sqrt[4]{q^{13}}$

02

$f(x)=9\times 3^{-x}+k=3^2\times 3^{-x}+k$

$=3^{-x+2}+k=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+k$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제 1 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $f(0)\leq 0$이어야 하므로

$9+k\leq 0$ $\quad\therefore\ k\leq -9$

따라서 실수 k의 최댓값은 -9이다.

답 -9

03

함수 $f(x)=2^{ax+b}$에 대하여 조건 ㈎에서

$f\left(\frac{4}{3}\right)=8$이므로 $2^{\frac{4}{3}a+b}=2^3$

$\therefore\ \frac{4}{3}a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈏에서 $f(x+y)=2f(x)f(y)$이므로

$2^{a(x+y)+b}=2\times 2^{ax+b}\times 2^{ay+b}$

$2^{ax+ay+b}=2^{1+ax+b+ay+b}$

$2^{ax+ay+b}=2^{ax+ay+2b+1}$

위의 식이 모든 실수 x, y에 대하여 성립하므로

$b=2b+1$

$\therefore\ b=-1,\ a=3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a-b=3-(-1)=4$

답 4

다른풀이

함수 $f(x)=2^{ax+b}$에 대하여 조건 ㈎에서

$f\left(\frac{4}{3}\right)=8$이므로 $2^{\frac{4}{3}a+b}=2^3$

$\therefore\ \frac{4}{3}a+b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 ㈏에서 $f(x+y)=2f(x)f(y)$이므로

위의 식의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$이고 $f(0)>0$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}$, 즉 $2^b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ b=-1$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 $a=3$

$\therefore\ a-b=3-(-1)=4$

04

집합 $A=\{(x,\ 3^x)\,|\,x$는 실수$\}$이므로 $(x,\ y)\in A$이면 $y=3^x$이다.

ㄱ. $(a,\ b)\in A$에서 $b=3^a$이므로

$3^{\frac{a}{2}}=(3^a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3^a}=\sqrt{b}$

$\therefore\ \left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in A$ (참)

ㄴ. (반례) $2a=1$, $b=3$일 때, $3=3^{2a}=3^1$이므로

$(2a,\ b)\in A$이지만 $(a,\ b^2)$, 즉 $\left(\frac{1}{2},\ 9\right)$에서 $3^{\frac{1}{2}}\neq 9$이므로 $(a,\ b^2)\notin A$이다. (거짓)

ㄷ. $(a,\ b)\in A$이면 $b=3^a$ ……㉠

$(a+c,\ bd)\in A$이면 $bd=3^{a+c}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $d=3^c$

$\therefore (c,\ d)\in A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05

$0<a<b<1$이고 $A=a^ab^b,\ B=a^bb^a,\ C=(ab)^a$이므로

(i) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$

이때, $0<\dfrac{a}{b}<1$이므로 함수 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그런데 $a-b<0$이므로

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$

$\therefore\ A>B$

(ii) $\dfrac{B}{C}=\dfrac{a^bb^a}{(ab)^a}=\dfrac{a^bb^a}{a^ab^a}=a^{b-a}$

이때, $0<a<1$이므로 함수 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그런데 $b-a>0$이므로

$a^{b-a}<1$

$\therefore\ B<C$

(iii) $\dfrac{A}{C}=\dfrac{a^ab^b}{(ab)^a}=\dfrac{a^ab^b}{a^ab^a}=b^{b-a}$

이때, $0<b<1$이므로 함수 $y=b^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

그런데 $b-a>0$이므로

$b^{b-a}<1$

$\therefore\ A<C$

(i), (ii), (iii)에서

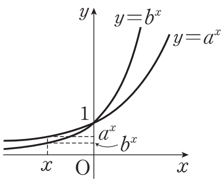
$B<A<C$

답 $B<A<C$

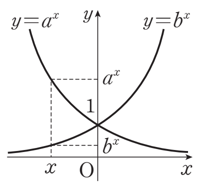
06

1이 아닌 두 양수 $a,\ b\ (a<b)$에 대하여 다음과 같이 세 가지 경우가 존재하고 각 경우에 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.

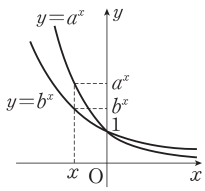
(i) $1<a<b$일 때,



(ii) $0<a<1<b$일 때,



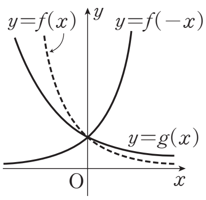
(iii) $0<a<b<1$일 때,



ㄱ. (i), (ii), (iii)에서 $x<0$일 때, $a^x>b^x$이므로

$f(x)>g(x)$ $\quad\therefore\ f(x)-g(x)>0$ (참)

ㄴ. $0<a<b<1$일 때, 두 함수 $y=f(-x),\ y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 즉, $x>0$일 때, $a>1$이 아니어도 부등식 $f(-x)>g(x)$가 성립한다. (거짓)



ㄷ. $ab=1$에서 $b=\dfrac{1}{a}$이므로 $g(x)=b^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

$\therefore\ f(a)-g(-b)=f(a)-g\left(-\dfrac{1}{a}\right)=a^a-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{a}}$

$=a^a-a^{\frac{1}{a}}$

그런데 두 양수 $a,\ b$에 대하여 $a\neq1,\ b\neq1$이고

$0<a<b$이므로 $0<a<\dfrac{1}{a}$ ($\because\ ab=1$)

$\therefore\ 0<a<1<\dfrac{1}{a}$

또한, $0<a<1$이면 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$a^a>a^{\frac{1}{a}}$

$\therefore\ f(a)-g(-b)=a^a-a^{\frac{1}{a}}>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

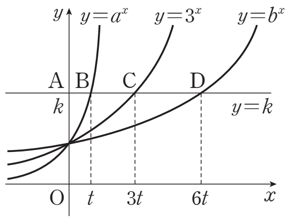
07

점 B의 x좌표를 t $(t>0)$라 하면

$B(t,\ k)$, $\overline{AB}=t$

$\overline{BC}=2\overline{AB}=2t$이므로 $C(3t,\ k)$

$\overline{CD}=\frac{3}{2}\overline{BC}=3t$이므로 $D(6t,\ k)$



이때, 세 점 B, C, D는 각각 세 함수 $y=a^x$, $y=3^x$, $y=b^x$의 그래프 위에 있으므로

$k=a^t=3^{3t}=b^{6t}$

즉, $a^t=3^{3t}=27^t$에서 $a=27$

또한, $b^{6t}=3^{3t}$에서 $(b^2)^{3t}=3^{3t}$이므로 $b^2=3$

$\therefore\ \frac{a}{b^2}=\frac{27}{3}=9$

답 9

다른풀이

함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점 B의 y좌표가 k이므로 점 B의 x좌표는 $a^x=k$에서 $x=\log_a k$

$\therefore$ $B(\log_a k,\ k)$

같은 방법으로 $C(\log_3 k,\ k)$, $D(\log_b k,\ k)$이므로

$\overline{AB}=\log_a k$, $\overline{AC}=\log_3 k$, $\overline{AD}=\log_b k$

이때, $\overline{BC}=2\overline{AB}$에서 $\overline{AC}=3\overline{AB}$이므로

$\log_3 k=3\log_a k$

즉, $\log_3 k=\log_{a^{\frac{1}{3}}} k$에서 $a^{\frac{1}{3}}=3$이므로

$a=27$

또한, $\overline{CD}=\frac{3}{2}\overline{BC}=3\overline{AB}$에서 $\overline{AD}=6\overline{AB}$이므로

$\log_b k=6\log_a k$

즉, $\log_b k=\log_{a^{\frac{1}{6}}} k$에서 $a^{\frac{1}{6}}=b$이므로

$b^2=a^{\frac{1}{3}}=3$

$\therefore\ \frac{a}{b^2}=\frac{27}{3}=9$

08

두 점 A, B가 $A(k,\ 3^k)$, $B(k+2,\ 3^{k+2})$이므로

$C(k,\ 0)$, $D(k+2,\ 0)$, $E(0,\ 3^k)$, $F(0,\ 3^{k+2})$

사각형 ACDB와 사각형 ABFE의 넓이를 각각 구하면

$$\square ACDB=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}$$
$$=\frac{1}{2}\times(3^k+3^{k+2})\times 2=3^k+3^{k+2}$$
$$=3^k+9\times 3^k=10\times 3^k$$
$$\square ABFE=\frac{1}{2}(\overline{AE}+\overline{BF})\times\overline{EF}$$
$$=\frac{1}{2}\times\{k+(k+2)\}\times(3^{k+2}-3^k)$$
$$=\frac{1}{2}(2k+2)(9\times 3^k-3^k)$$
$$=(k+1)\times 8\times 3^k=8(k+1)3^k$$

이때, 사각형 ACDB와 사각형 ABFE의 넓이의 비가 $1:2$이므로

$(10\times 3^k):8(k+1)3^k=1:2$

$8(k+1)3^k=20\times 3^k$, $8k+8=20$ $(\because\ 3^k>0)$

$8k=12\qquad\therefore\ k=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

09

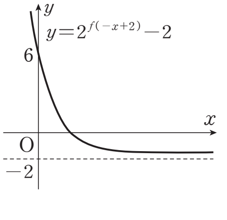
일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(x)=x+1$

즉, $f(-x+2)=(-x+2)+1=-x+3$이므로

$y=2^{f(-x+2)}-2$

$=2^{-x+3}-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-2$

따라서 이 함수의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 그 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 개형은 ⑤이다.

답 ⑤

10

$f(x)=3^{-x}$, $g(x)=k\times3^{-x}+k$에서 점 A는 곡선 $y=f(x)$와 y축의 교점이므로

$A(0,\ 1)$

점 $(\log_3 k,\ 10)$을 C, 직선 m과 곡선 $y=f(x)$의 교점을 D라 하자.

점 C는 곡선 $y=g(x)$ 위에 있으므로

$g(\log_3 k)=10$

$k\times3^{-\log_3 k}+k=10,\ k\times\dfrac{1}{k}+k=10$

$1+k=10 \qquad \therefore\ k=9$

$\therefore\ C(2,\ 10)$, $g(x)=9\times3^{-x}+9=3^{-(x-2)}+9$

즉, 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면 곡선 $y=g(x)$가 된다.

한편, 두 점 A, C는 각각 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위에 있고,

$(\overline{AC}$의 기울기$)=($직선 l의 기울기$)=\dfrac{10-1}{2-0}=\dfrac{9}{2}$

이므로 점 A를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면 점 C가 된다.*

마찬가지로 두 점 D, B는 각각 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위에 있고,

$(\overline{BD}$의 기울기$)=($직선 m의 기울기$)$

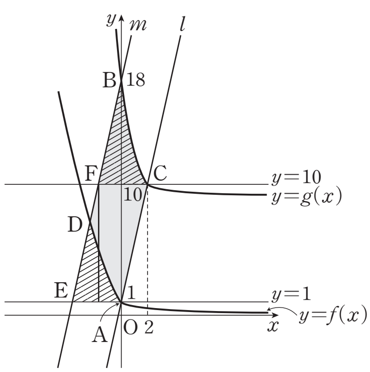
$=($직선 l의 기울기$)=\dfrac{9}{2}$

이므로 점 D를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동하면 점 B가 된다.

이때, 점 B는 곡선 $y=g(x)$와 y축의 교점이므로

$B(0,\ 18) \qquad \therefore\ D(-2,\ 9)$

다음 그림과 같이 직선 m과 직선 $y=1$의 교점을 E, 직선 m과 직선 $y=10$의 교점을 F라 하자.



두 점 E, F의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$(\overline{EF}$의 기울기$)=\dfrac{10-1}{x_2-x_1}=\dfrac{9}{x_2-x_1}$

이것이 직선 m의 기울기, 즉 $\dfrac{9}{2}$와 같으므로 $x_2-x_1=2$

즉, 점 E를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 9만큼 평행이동한 점이 F이므로 빗금친 두 부분의 넓이는 같다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 l, m으로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 EACF의 넓이와 같다.

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}}=($직선 m의 기울기$)=\dfrac{9}{2}$, $\overline{AB}=18-1=17$이므로

$\overline{EA}=\dfrac{34}{9}$

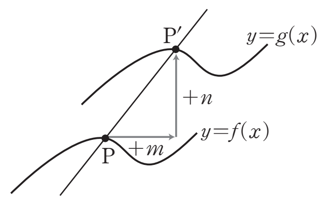
따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{34}{9}\times9=34$

답 34

풀이첨삭

*를 확인하자.



곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자.

(1) 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P′으로 옮겨지면

⇨ (직선 PP′의 기울기)$=\dfrac{n}{m}$

(2) 두 점 P, P′이 각각 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위에 있고,

(직선 PP′의 기울기)$=\dfrac{n}{m}$이면

⇨ 점 P를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 P′이다.

위의 문제에서 *는 (2)에 해당된다.

11

$3^x>0$이므로 $3^{x+3}>0$, $3^{2x}+7\times3^x+1>0$

즉, $y=\dfrac{3^{x+3}}{3^{2x}+7\times3^x+1}>0$이므로

$\dfrac{1}{y}$이 최소이면 y가 최대이다.

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{3^{2x}+7\times3^x+1}{3^{x+3}}=\dfrac{1}{27}\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+\dfrac{7}{27}$ ······㉠

이때, $3^x>0$, $\dfrac{1}{3^x}>0$이므로 ㉠에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{y}\geq\frac{1}{27}\times2\sqrt{3^x\times\frac{1}{3^x}}+\frac{7}{27}$$
$$=\frac{2}{27}+\frac{7}{27}=\frac{1}{3}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3^x=\dfrac{1}{3^x}\text{, 즉 } x=0\text{일 때 성립}\right)$

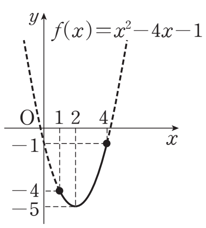
따라서 $\dfrac{1}{y}$의 최솟값이 $\dfrac{1}{3}$이므로 y의 최댓값은 3이다.

답 3

12

$f(x)=x^2-4x-1$
$=(x-2)^2-5$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $1\leq x\leq4$에서 $-5\leq f(x)\leq-1$이다.



한편, 함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $1\leq x\leq4$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최대·최소는 $-5\leq t\leq-1$에서 함수 $g(t)$의 최대·최소와 일치한다.

(i) $0<a<1$일 때,

함수 $g(t)=a^t$은 t의 값이 증가하면 $g(t)$의 값은 감소하므로 $-5\leq t\leq-1$에서 함수 $g(t)$는 $t=-5$일 때 최대이고 최댓값은

$a^{-5}=32$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ g(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최소이고 최솟값은

$g(-1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$

(ii) $a>1$일 때,

함수 $g(t)=a^t$은 t의 값이 증가하면 $g(t)$의 값도 증가하므로 $-5\leq t\leq-1$에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$일 때 최대이고 최댓값은

$a^{-1}=32$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{32}$

그런데 $a>1$이므로 조건에 맞지 않다.

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은 2이다.

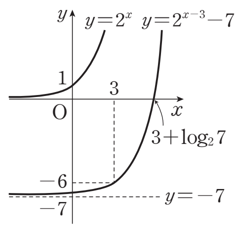
답 2

13

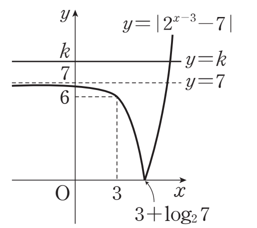
방정식 $|2^{x-3}-7|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|2^{x-3}-7|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=2^{x-3}-7$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이므로 [그림 1]과 같다.

따라서 함수 $y=|2^{x-3}-7|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 방정식 $|2^{x-3}-7|=k$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 10보다 작은 정수 k는 0, 7, 8, 9의 4개이다.

답 4

14

$4^x=X$, $4^y=Y$로 놓으면 $X>0$, $Y>0$이고

$2^x=\sqrt{X}$, $2^y=\sqrt{Y}$

$\begin{cases}4^x+4^y=24\\2^{x+y}=\sqrt{2^7}\end{cases}$ 에서 $\begin{cases}4^x+4^y=24\\2^x\times2^y=\sqrt{2^7}\end{cases}$

$\begin{cases}X+Y=24\\\sqrt{XY}=\sqrt{2^7}\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}X+Y=24\\XY=128\end{cases}$

(가)

즉, X, Y는 이차방정식 $t^2-24t+128=0$의 두 양의 실근이다.

$(t-8)(t-16)=0$에서 $t=8$ 또는 $t=16$

$\therefore\ X=8$, $Y=16$ 또는 $X=16$, $Y=8$

(나)

(ⅰ) $X=8,\ Y=16$일 때,

$4^x=8,\ 4^y=16$이므로

$2^{2x}=2^3,\ 2^{2y}=2^4$

$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=2$

(ⅱ) $X=16,\ Y=8$일 때,

$x=2,\ y=\frac{3}{2}$

(다)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x^3y^3=2^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=8\times\frac{27}{8}=27$

(라)

답 27

단계	채점 기준	배점
(가)	$4^x=X,\ 4^y=Y$로 치환하여 식을 나타낸 경우	30%
(나)	$X,\ Y$를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하고 $X,\ Y$의 값을 구한 경우	30%
(다)	경우를 나누어 $x,\ y$의 값을 구한 경우	30%
(라)	x^3y^3의 값을 구한 경우	10%

15

금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배, 즉 $3w_0$이므로

$W_0=w_0,\ W=3w_0,\ t=15$를 주어진 식에 대입하면

$3w_0=\frac{w_0}{2}10^{15a}(1+10^{15a})$

$6=10^{15a}(1+10^{15a})\ (\because\ w_0>0)$

$(10^{15a})^2+10^{15a}-6=0,\ (10^{15a}+3)(10^{15a}-2)=0$

$\therefore\ 10^{15a}=2\ (\because\ 10^{15a}>0)$ ……㉠

금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배, 즉 kw_0이므로

$W_0=w_0,\ W=kw_0,\ t=30$을 주어진 식에 대입하면

$kw_0=\frac{w_0}{2}10^{30a}(1+10^{30a})$

$\therefore\ k=\frac{(10^{15a})^2}{2}\{1+(10^{15a})^2\}\ (\because\ w_0>0)$

$=\frac{2^2}{2}(1+2^2)$ (∵ ㉠)

$=2\times5=10$

답 ②

16

(ⅰ) 집합 $A=\{x\,|\,3^{x^2}\le81\}$에서 $3^{x^2}\le81$

$3^{x^2}\le3^4$

(밑)$=3>1$이므로

$x^2\le4,\ x^2-4\le0$

$(x+2)(x-2)\le0\qquad\therefore\ -2\le x\le2$

$\therefore\ A=\{x\,|\,-2\le x\le2\}$

(ⅱ) 집합 $B=\{x\,|\,2^{1-x}>(\sqrt{2})^{\frac{k}{2}}\}$에서 $2^{1-x}>(\sqrt{2})^{\frac{k}{2}}$

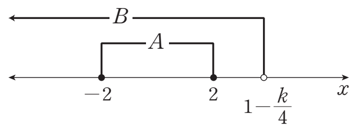
$2^{1-x}>2^{\frac{k}{4}}$

(밑)$=2>1$이므로

$1-x>\frac{k}{4}\qquad\therefore\ x<1-\frac{k}{4}$

$\therefore\ B=\left\{x\,\middle|\,x<1-\frac{k}{4}\right\}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $A\subset B$가 되도록 두 집합 $A,\ B$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

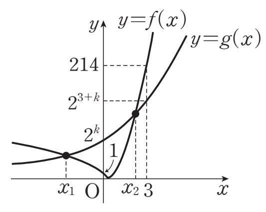


즉, $1-\frac{k}{4}>2$이어야 하므로 $k<-4$

답 $k<-4$

17

$f(x)=|6^x-2|,\ g(x)=2^{x+k}$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x_1<0$이므로 $f(0)<g(0)$

$\therefore\ 1<2^k$ ……㉠

$0<x_2<3$이므로 $f(3)>g(3)$에서

$214>2^{3+k},\ 2^k<\frac{214}{8}\qquad\therefore\ 2^k<\frac{107}{4}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $1<2^k<\frac{107}{4}$

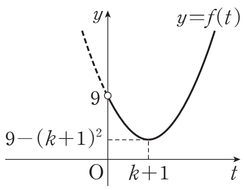
이때, $2^0=1$, $2^4<\dfrac{107}{4}<2^5$이고 (밑)$=2>1$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4이다.
따라서 모든 자연수 k의 값의 합은
$1+2+3+4=10$

답 10

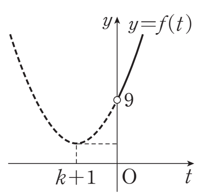
18

$4^x-k\times2^{x+1}+9\geq2^{x+1}$에서
$4^x-2(k+1)\times2^x+9\geq0$
$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은
$t^2-2(k+1)t+9\geq0$
이때, $f(t)=t^2-2(k+1)t+9$라 하면
$f(t)=\{t-(k+1)\}^2+9-(k+1)^2$
즉, 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축은 직선 $t=k+1$이므로 $t>0$인 실수 t에 대하여 $f(t)\geq0$이 성립하는 경우는 다음 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k+1>0$, 즉 $k>-1$일 때,
$f(t)$는 $t=k+1$일 때 최솟값 $9-(k+1)^2$을 가지므로
$9-(k+1)^2\geq0$
$k^2+2k-8\leq0$
$(k+4)(k-2)\leq0$
$\therefore\ -4\leq k\leq2$
그런데 $k>-1$이므로 $-1<k\leq2$



(ii) $k+1\leq0$, 즉 $k\leq-1$일 때,
$f(0)=9>0$이므로 $f(t)\geq0$이 항상 성립한다.
$\therefore\ k\leq-1$



(i), (ii)에서 $k\leq2$
따라서 정수 k의 최댓값은 2이다.

답 2

19

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서
$2^{2f(x)}-2\times2^{f(x)}-8<0$
이때, $2^{f(x)}=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$
$\therefore\ -2<t<4$
그런데 $t>0$이므로 $0<t<4$
따라서 $0<2^{f(x)}<4$이므로 $0<2^{f(x)}<2^2$
(밑)$=2>1$ 이므로
$f(x)<2$, $x^2-x-4<2$
$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$
$\therefore\ -2<x<3$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ④

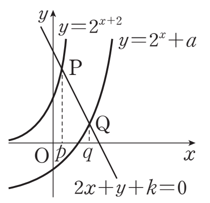
20

함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
$y=a^{-x}$
이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=a^{-(x-b)}$ $\qquad\therefore\ y=a^{-x+b}$
$\therefore\ g(x)=a^{-x+b}$
이때, 조건 (가)에서 함수 $y=a^x$의 그래프와 $y=a^{-x+b}$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로
$f(1)=g(1)$
$a^1=a^{-1+b}$, $1=-1+b$
$\therefore\ b=2$ $\qquad\therefore\ g(x)=a^{-x+2}$
또한, 조건 (나)에서 $f(3)=16g(3)$이므로
$a^3=16\times a^{-1}$, $a^4=16$
$\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)
따라서 $a+b=2+2=4$이다.

답 4

21

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x+2}$, $y=2^x+a$ $(a<0)$가 직선 $2x+y+k=0$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면



$p<q$이고

$\mathrm{P}(p,\ -2p-k)$, $\mathrm{Q}(q,\ -2q-k)$

또한, 두 점 P, Q는 각각 두 곡선 $y=2^{x+2}$, $y=2^x+a$ 위에 있으므로

$2^{p+2}=-2p-k$ ……㉠

$2^q+a=-2q-k$ ……㉡

한편, 두 점 P, Q 사이의 거리가 k의 값에 관계없이 $2\sqrt{5}$로 일정하므로

$\sqrt{(q-p)^2+\{(-2q-k)-(-2p-k)\}^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{(q-p)^2+(2p-2q)^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{5(q-p)^2}=2\sqrt{5}$

$|q-p|\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ q-p=2\ (\because\ p<q)$

즉, $q=p+2$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면

$2^{p+2}+a=-2(p+2)-k$

$\therefore\ 2^{p+2}+a=-2p-k-4$

㉠을 위의 식에 대입하면

$-2p-k+a=-2p-k-4$

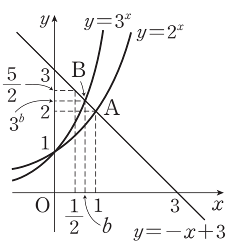
$\therefore\ a=-4$

답 -4

22

ㄱ. $x=\dfrac{1}{2}$일 때, $3^x<-x+3$이고,

$x=1$일 때, $3^x>-x+3$이므로 함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는 오른쪽 그림과 같이 $\dfrac{1}{2}<x<1$에 존재한다.



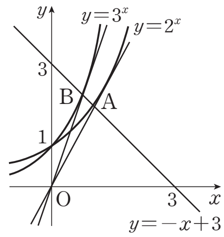
$\therefore\ \dfrac{1}{2}<b<1$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 각각 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프 위에 있으므로

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(b,\ 3^b)$

직선 OA의 기울기는 $\dfrac{2^a}{a}$, 직선 OB의 기울기는 $\dfrac{3^b}{b}$

이때, $0<b<a$이므로 오른쪽 그림에서



$\dfrac{2^a}{a}<\dfrac{3^b}{b}$

$\therefore\ \dfrac{3^b}{b}-\dfrac{2^a}{a}>0$

위 식의 양변에 ab를 곱하면

$a\times3^b-b\times2^a>0$ (거짓)

ㄷ. 직선 AB의 기울기는 직선 $y=-x+3$의 기울기와 같으므로

$\dfrac{3^b-2^a}{b-a}=-1$ $\quad\therefore\ a-b=3^b-2^a$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

다른풀이

점 A는 곡선 $y=2^x$과 직선 $y=-x+3$의 교점이므로

$\mathrm{A}(1,\ 2)$

이때, 점 A의 x좌표는 a이므로 $a=1$ ……㉠

점 B의 x좌표는 b이고 점 B는 곡선 $y=3^x$과 직선 $y=-x+3$의 교점이므로

$3^b=-b+3$ ……㉡

ㄴ. $a\times3^b-b\times2^a$

$=1\times(-b+3)-b\times2\ (\because$ ㉠, ㉡$)$

$=-b+3-2b$

$=-3b+3$

$=-3(b-1)>0\ (\because\ b<1)$ (거짓)

ㄷ. (좌변)$=a-b=1-b\ (\because$ ㉠$)$

(우변)$=3^b-2^a=(-b+3)-2\ (\because$ ㉠, ㉡$)$

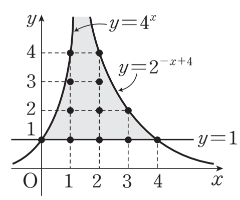
$=1-b$

$\therefore\ a-b=3^b-2^a$ (참)

23

(i) $a=2$일 때,

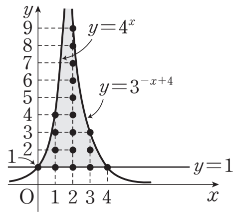
오른쪽 그림의 어두운 부분 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



$1+4+4+2+1=12$

(ii) $a=3$일 때,

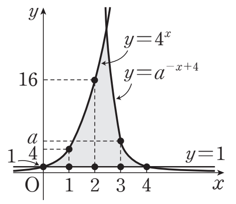
오른쪽 그림의 어두운 부분 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



$1+4+9+3+1=18$

(iii) $a\geq 4$일 때,

오른쪽 그림의 어두운 부분 또는 그 경계에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



$1+4+16+a+1=a+22$

이때, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되어야 하므로

$20\leq a+22\leq 40$에서 $-2\leq a\leq 18$

그런데 $a\geq 4$이므로 $4\leq a\leq 18$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$, 3인 경우에는 점의 개수가 20 미만이므로

$4\leq a\leq 18$

따라서 구하는 자연수 a의 개수는

$18-4+1=15$

답 15

다른풀이

두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$4^{\alpha}=a^{-\alpha+4}$, $(4a)^{\alpha}=a^4$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\alpha\log 4a=\log a^4$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\log a^4}{\log 4a}$

(i) $0\leq\alpha<1$일 때,

$0\leq\dfrac{\log a^4}{\log 4a}<1$에서

$0\leq\log a^4<\log 4a$ ($\because$ $a>1$에서 $\log 4a>0$)

$\therefore\ 1\leq a^4<4a$

$a^4\geq 1$에서 $a>1$ ($\because$ $a>1$)

$a^4<4a$에서 $a^3<4$이므로 $a<\sqrt[3]{4}$

즉, $1<a<\sqrt[3]{4}$이므로 이것을 만족시키는 자연수 a는 없다.

(ii) $1\leq\alpha<2$일 때,

$1\leq\dfrac{\log a^4}{\log 4a}<2$에서

$\log 4a\leq\log a^4<2\log 4a$ ($\because$ $a>1$에서 $\log 4a>0$)

$\log 4a\leq\log a^4<\log(4a)^2$

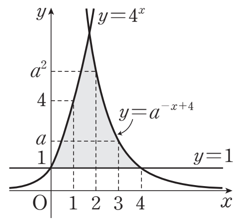
$\therefore\ 4a\leq a^4<16a^2$

$a^4\geq 4a$에서 $a^3\geq 4$이므로 $a\geq\sqrt[3]{4}$

$a^4<16a^2$에서 $a^2<16$이므로

$1\leq a<4$ ($\because$ a는 자연수)

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=3$ ……㉠



위의 그림에서 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4일 때, y좌표가 정수인 점의 총 개수는 $1+4+a^2+a+1=a^2+a+6$이므로

$20\leq a^2+a+6\leq 40$ ……㉡

그런데 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 a는 없다.

(iii) $2\leq\alpha<3$일 때,

$2\leq\dfrac{\log a^4}{\log 4a}<3$에서

$2\log 4a\leq\log a^4<3\log 4a$

($\because$ $a>1$에서 $\log 4a>0$)

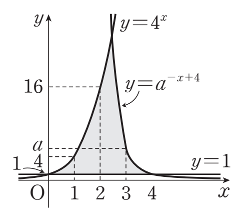
$\log(4a)^2\leq\log a^4<\log(4a)^3$

$\therefore\ 16a^2\leq a^4<64a^3$

$a^4\geq 16a^2$에서 $a^2\geq 16$이므로 $a\geq 4$ ($\because$ a는 자연수)

$a^4<64a^3$에서 $a<64$

$\therefore\ 4\leq a<64$ ……㉢



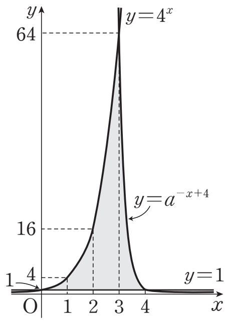
위의 그림에서 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4일 때, y좌표가 정수인 점의 총 개수는 $1+4+16+a+1=a+22$이므로

$20\leq a+22\leq 40$

$\therefore\ -2\leq a\leq 18$ ……㉣

㉢, ㉣을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는 $4 \le a \le 18$이므로 자연수 a의 개수는 $18-4+1=15$이다.

(iv) $3 \le a < 4$일 때,



위의 그림에서 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4일 때, y좌표가 정수인 점의 총 개수는 $1+4+16+64+1=86$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 a의 개수는 15이다.

보충설명

자연수 a의 경우를 나누어 직접 그래프를 그린 후 조건을 만족시키는 점의 개수를 구할 수도 있지만, 교점의 x좌표를 α라 하고 방정식 및 부등식을 이용하여 조건을 만족시키는 a를 구할 수도 있다.

유형연습 **04** 로그함수 본문 pp.89~104

01-1 (1) 10 (2) 6	01-2 160	01-3 0
02-1 ㄱ	03-1 $A<C<B$	03-2 $C<A<B$
03-3 $A<B<C$	04-1 $\frac{3}{2}$	04-2 $\frac{1}{2}$
04-3 18	05-1 12	05-2 -1
06-1 (1) 6 (2) -4	06-2 4	06-3 4
07-1 $\frac{9}{2}$	07-2 7	08-1 풀이참조
08-2 $\frac{1}{16}$	08-3 52	09-1 풀이참조
09-2 9999, 101	09-3 2	10-1 15
10-2 10		

01-1

(1) $f(x)=\log_a(x-4)+b$에 대하여

$f(6)=\log_a 2+b=4$ ……㉠

$f\left(\frac{9}{2}\right)=\log_a \frac{1}{2}+b=6$에서

$-\log_a 2+b=6$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2b=10$ $\quad\therefore b=5$

이것을 ㉠에 대입하면

$\log_a 2+5=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 4ab=4\times\frac{1}{2}\times 5=10$

(2) 함수 $f(x)$는 일대일대응이고 $(f\circ g)(x)=x$이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 역함수 관계이다.

$g(m)=3$에서 $f(3)=m$ $\quad\therefore \log_a 3=m$

$g(n)=2$에서 $f(2)=n$ $\quad\therefore \log_a 2=n$

즉, $m+n=\log_a 3+\log_a 2=\log_a 6$

$g(m+n)=g(\log_a 6)=k$라 하면 $f(k)=\log_a 6$이므로

$\log_a k=\log_a 6$ $\quad\therefore k=6$

$\therefore g(m+n)=6$

답 (1) 10 (2) 6

다른풀이

(2) $f(x)=\log_a x$이므로 $(f\circ g)(x)=x$에서 $f(g(x))=x$

$\log_a g(x)=x$ $\quad\therefore g(x)=a^x$

$g(m)=3$에서 $a^m=3$

$g(n)=2$에서 $a^n=2$

$\therefore g(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=3\times 2=6$

01-2

$$f(x)=\log_3\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}=\log_3\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{x+2}{x+1}$$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)$

$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_3\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\log_3\frac{5}{4}+\cdots+\frac{1}{2}\log_3\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{k+2}{2}=2$$

$\log_3\frac{k+2}{2}=4$, $\frac{k+2}{2}=3^4$

$k+2=162$ $\quad\therefore\ k=160$

답 160

01-3

$f(x)=\log_{\frac{1}{5}}x$라 하면 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}}x$의 그래프에서

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}=a$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}=b$,

$f(2)=\log_{\frac{1}{5}}2=c$

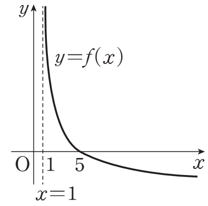
$$\therefore\ a+2b+4c=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}+2\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}+4\log_{\frac{1}{5}}2$$
$$=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\log_{\frac{1}{5}}2^4$$
$$=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times16\right)$$
$$=\log_{\frac{1}{5}}1=0$$

답 0

02-1

$$f(x)=\log_2\frac{4}{x-1}$$
$$=\log_2 4-\log_2(x-1)$$
$$=-\log_2(x-1)+2$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

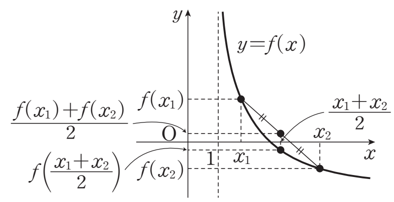


ㄱ. 0<(밑)<1이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
즉, $1<x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x-1}=-\log_2\frac{4}{x-1}$이므로
두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x-1}$, $y=\log_2\frac{4}{x-1}$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다. (거짓)

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하므로 서로 다른 1보다 큰 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ㄱ

03-1

세 수 A, B, C의 로그의 밑을 3으로 나타내면

$$A=\frac{2}{\log_5 3}=2\log_3 5=\log_3 25$$

$$B=\frac{\log_2 42}{\log_2 3}=\log_3 42$$

$$C=\log_{\sqrt{3}}6=\log_{(\sqrt{3})^2}6^2=\log_3 36$$

이때, $25<36<42$이고, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_3 25<\log_3 36<\log_3 42$

$\therefore\ A<C<B$

답 $A<C<B$

03-2

$a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a > \log_a b > \log_a 1$ ($\because$ $0<a<1$)

$\therefore$ $0<\log_a b<1$

$a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a > \log_b b > \log_b 1$ ($\because$ $0<b<1$)

$\therefore$ $\log_b a>1$

$a<1$의 양변에 밑이 c인 로그를 취하면

$\log_c a < \log_c 1$ ($\because$ $c>1$)

$\therefore$ $\log_c a<0$

따라서 $\log_c a<0<\log_a b<1<\log_b a$이므로

$\log_c a<\log_a b<\log_b a$

$\therefore$ $C<A<B$

답 $C<A<B$

03-3

$f(x)=\log(x-1)$이라 하면

$f(a)=\log(a-1)$, $f(b)=\log(b-1)$

$\mathrm{P}(a,\ \log(a-1))$, $\mathrm{Q}(b,\ \log(b-1))$이라 하면

$$A=\frac{1}{a}\log(a-1)=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-0}{a-0}$$

이므로 A는 원점과 점 P를 지나는 직선의 기울기와 같다.

$$B=\frac{1}{b}\log(b-1)=\frac{f(b)}{b}=\frac{f(b)-0}{b-0}$$

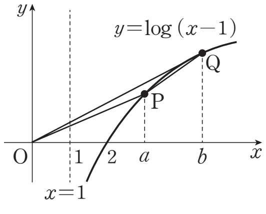
이므로 B는 원점과 점 Q를 지나는 직선의 기울기와 같다.

$$C=\frac{1}{b-a}\log\frac{b-1}{a-1}=\frac{\log(b-1)-\log(a-1)}{b-a}$$
$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이므로 C는 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기와 같다.

따라서 다음 그림에서 세 직선의 기울기를 비교하면

$A<B<C$



답 $A<B<C$

04-1

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=\log_2 4(x-a)+b$

$y=\log_2 4(x-a)+b$에서 $y-b=\log_2 4(x-a)$

로그의 정의에서 $2^{y-b}=4(x-a)$

$x-a=2^{y-b-2}$ $\qquad\therefore$ $x=2^{y-b-2}+a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-b-2}+a$

$\therefore$ $f^{-1}(x)=2^{x-b-2}+a$

$f^{-1}(x)=2^{x-10}+4$이므로

$a=4$, $b=8$

$\therefore$ $\log_a b=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\dfrac{3}{2}$

답 $\dfrac{3}{2}$

다른풀이

$f(x)=\log_2 4(x-a)+b$에서

$f(a+1)=b+2$, $f(a+2)=b+3$

함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=2^{x-10}+4$이므로

$f^{-1}(b+2)=a+1$에서 $2^{b-8}+4=a+1$ ……㉠

$f^{-1}(b+3)=a+2$에서 $2^{b-7}+4=a+2$ ……㉡

㉡−㉠을 하면

$2^{b-8}(2-1)=1$ $\qquad\therefore$ $b=8$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

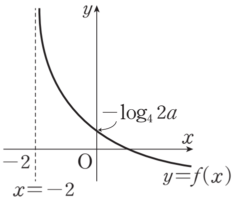
$a+1=5$ $\qquad\therefore$ $a=4$

$\therefore$ $\log_a b=\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\dfrac{3}{2}$

04-2

$f(x)=-\log_4 a(x+2)=-\log_4(x+2)-\log_4 a$

이 함수의 그래프는 $y=-\log_4 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-\log_4 a$만큼 평행이동한 것이고, 이 그래프가 제3사분면을 지나지 않아야 하므로 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)\geq 0$이어야 하므로

$-\log_4 2a\geq 0$, $\log_4 \frac{1}{2a}\geq \log_4 1$

(밑)$=4>1$이므로 $\frac{1}{2a}\geq 1$

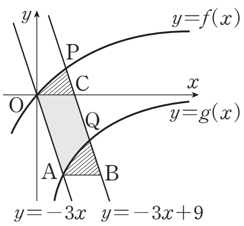
$\therefore\ a\leq \frac{1}{2}$

따라서 양수 a의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

04-3

다음 그림과 같이 직선 $y=-3x$와 곡선 $y=g(x)$의 교점을 A, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 직선 $y=-3x+9$의 교점을 B, 직선 $y=-3x+9$와 x축의 교점을 C라 하자. 또한, 직선 $y=-3x+9$와 곡선 $y=f(x)$의 교점을 P, 직선 $y=-3x+9$와 곡선 $y=g(x)$의 교점을 Q라 하자.



곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 곡선 $y=g(x)$가 된다.
한편, 두 점 O, A는 각각 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위에 있고, 직선 OA의 기울기는 $-3=-\frac{6}{2}$이므로 점 O를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 점 A가 된다.
마찬가지로 점 P를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 점 Q가 된다.
위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.

$-3x+9=-6$에서 $x=5$이므로 $\mathrm{B}(5,\ -6)$

$-3x+9=0$에서 $x=3$이므로 $\mathrm{C}(3,\ 0)$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=3$, 점 A의 y좌표는 -6이므로 평행사변형 OABC의 넓이는 $3\times 6=18$

따라서 구하는 부분의 넓이는 18이다.

답 18

05-1

함수 $y=\log_3 6x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_3 6(x-3)-1$, $y=\log_3 6(x-3)-\log_3 3$

$\therefore\ y=\log_3 (2x-6)$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\log_3 (-2x-6)$, $y=-\log_3 (-2x-6)$

$\therefore\ y=\log_{\frac{1}{3}} (-2x-6)$

이 식이 $y=\log_{\frac{1}{3}} (ax+b)$와 같으므로

$a=-2$, $b=-6$

$\therefore\ ab=12$

답 12

05-2

함수 $y=\log_3 \frac{x}{9}$, 즉 $y=\log_3 x-2$의 그래프를 직선 $y=a$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$2a-y=\log_3 x-2$, $-y=\log_3 x-2-2a$

$y=-\log_3 x+2+2a$ ······㉠

함수 $y=\frac{1}{3^x}$, 즉 $y=3^{-x}$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=3^{-y}$, $-y=\log_3 x$

$y=-\log_3 x$ ······㉡

㉠과 ㉡이 일치해야 하므로

$2+2a=0$ $\therefore\ a=-1$

답 -1

보충설명

직선에 대한 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

(1) 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 도형
⇨ $f(2a-x,\ y)=0$

(2) 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 도형
⇨ $f(x,\ 2b-y)=0$

(3) 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형
⇨ $f(-y,\ -x)=0$

06-1

(1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-3x^2+6x+a)$에서 $-3x^2+6x+a=t$로 놓으면

$t=-3(x-1)^2+a+3$에서 $0<t\le a+3$ ← t는 $\log_{\frac{1}{3}}t$의 진수이므로 $t>0$

이때, $0<(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}t$는

$t=a+3$일 때 최솟값을 갖는다.

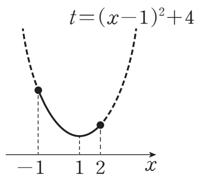
즉, $\log_{\frac{1}{3}}(3+a)=-2$에서 $3+a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

$\therefore\ a=6$

(2) $y=\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+5)$에서 $x^2-2x+5=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+4$

$-1\le x\le 2$에서 $4\le t\le 8$



이때, $0<(\text{밑})=\frac{1}{4}<1$ 이므로

$4\le t\le 8$에서

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}t$는 $t=4$일 때 최댓값 $M=\log_{\frac{1}{4}}4=-1$,

$t=8$일 때 최솟값 $m=\log_{\frac{1}{4}}8=\log_{2^{-2}}2^3=-\frac{3}{2}$을 갖는다.

$\therefore\ M+2m=-1+(-3)=-4$

답 (1) 6 (2) -4

06-2

$y=\log x^{\log x}-6\log 10x$

$=(\log x)^2-6(\log 10+\log x)$

$=(\log x)^2-6\log x-6$

$\log x=t$로 놓으면

$10\le x\le 10000$에서 $1\le t\le 4$

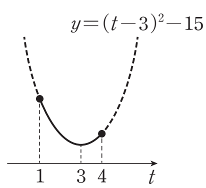
$y=t^2-6t-6=(t-3)^2-15$

$1\le t\le 4$에서 함수

$y=(t-3)^2-15$는

$t=1$일 때 최댓값 $M=-11$,

$t=3$일 때 최솟값 $m=-15$를 갖는다.



$\therefore\ M-m=-11-(-15)=4$

답 4

06-3

함수 $y=\log_3(7-2^x)+\log_3(2^x-1)$에서 진수의 조건에 의하여

$7-2^x>0,\ 2^x-1>0$

$\therefore\ 1<2^x<7$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $1<t<7$

$y=\log_3(7-2^x)+\log_3(2^x-1)$

$=\log_3(7-t)+\log_3(t-1)$

$=\log_3(7-t)(t-1)$

$=\log_3(-t^2+8t-7)$

$=\log_3\{-(t-4)^2+9\}$

$f(t)=-(t-4)^2+9$라 하면 $1<t<7$에서 함수 $f(t)$는 $t=4$일 때, 최댓값 9를 갖는다.

$\therefore\ 0<f(t)\le 9$

이때, $(\text{밑})=3>1$이므로 주어진 함수는 $f(t)$의 값이 최대일 때, 즉 $f(t)=9$일 때 최댓값을 갖는다. 이때의 $t=4$, 즉 $x=2$이고, 최댓값은 $\log_3 9=2$이다.

따라서 $a=2,\ b=2$이므로

$ab=4$

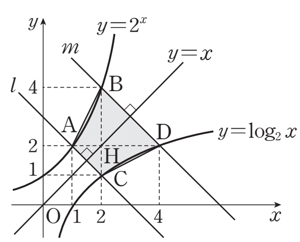
답 4

07-1

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여

직선 $x=1$과 곡선 $y=2^x$의 교점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$,

직선 $y=2$와 곡선 $y=\log_2 x$의 교점 D의 좌표는 $(4,\ 2)$



두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 B, D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 점 A, C도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore$ B$(2,\ 4)$, C$(2,\ 1)$

따라서 $\overline{\text{AD}}$와 $\overline{\text{BC}}$의 교점을 H라 하면 사각형 ABDC의 넓이는

$$\triangle ABD + \triangle ADC = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{BH} + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{HC}$$
$$= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times (\overline{BH} + \overline{HC})$$
$$= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{BC}$$
$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

07-2

$y=a^x+k$라 하면 $y-k=a^x$

$\therefore\ x=\log_a(y-k)$

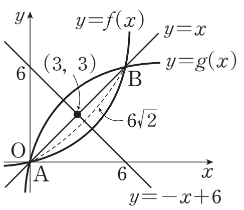
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_a(x-k)$

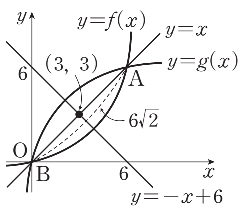
따라서 두 함수 $f(x)=a^x+k$, $g(x)=\log_a(x-k)$는 서로 역함수 관계에 있고 (밑)$=a>1$에서 함수 f는 증가하는 함수이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=x$이다.

또한, 선분 AB를 수직이등분하는 직선 $y=-x+6$과 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

$\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 직선 AB의 기울기가 1이므로

A$(0,\ 0)$, B$(6,\ 6)$ 또는 A$(6,\ 6)$, B$(0,\ 0)$이다.





함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 A, B를 지나므로

$f(0)=0$, $f(6)=6$

$f(0)=a^0+k=0$에서 $k=-1$

$f(6)=a^6+k=6$에서 $a^6-1=6$

$a^6=7$

답 7

보충설명

두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

A$(m,\ m)$, B$(n,\ n)$이라 하자.

이때, $\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{m+n}{2},\ \frac{m+n}{2}\right)$은 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$$\frac{m+n}{2}=-\frac{m+n}{2}+6$$

$\therefore\ m+n=6$

또한, $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2(m-n)^2}=6\sqrt{2}$에서

$(m-n)^2=36$, $m-n=\pm 6$

즉, $\begin{cases} m+n=6 \\ m-n=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} m+n=6 \\ m-n=-6 \end{cases}$이므로

$m=6$, $n=0$ 또는 $m=0$, $n=6$

따라서 A$(6,\ 6)$, B$(0,\ 0)$ 또는 A$(0,\ 0)$, B$(6,\ 6)$이다.

08-1

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{5}} x \times \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^2}{125} - \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{5}{x} = 0$에서

$(-\log_5 x)\left(-\log_5 \frac{x^2}{125}\right) + 2\log_5 \frac{5}{x} = 0$

$\log_5 x \times (2\log_5 x - 3) + 2(1-\log_5 x) = 0$

$2(\log_5 x)^2 - 5\log_5 x + 2 = 0$

이때, $\log_5 x = t$로 놓으면 $2t^2-5t+2=0$

$(t-2)(2t-1)=0$ $\quad\therefore\ t=2$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

즉, $\log_5 x=2$ 또는 $\log_5 x=\frac{1}{2}$이므로

$x=5^2=25$ 또는 $x=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=25$ 또는 $x=\sqrt{5}$

(2) 밑과 진수의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$, $x^2>0$이므로

$0<x<1$, $x>1$ ……㉠

$\log_4 x^2 - 3\log_x 4 - 5 = 0$에서 $2\log_4 x - \frac{3}{\log_4 x} - 5 = 0$

이때, $\log_4 x = t$로 놓으면 $2t - \frac{3}{t} - 5 = 0$

㉠에서 $t\neq 0$이므로 위의 식의 양변에 t를 곱하면

$2t^2-5t-3=0$, $(t-3)(2t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$

즉, $\log_4 x=3$ 또는 $\log_4 x=-\frac{1}{2}$이므로

$x=4^3=64$ 또는 $x=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $x=64$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

답 (1) $x=25$ 또는 $x=\sqrt{5}$ (2) $x=64$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

08-2

진수의 조건에서 $a>0$ ······㉠

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_2 a+3)^2-(2\log_2 a+6)=0$

$(\log_2 a)^2+4\log_2 a+3=0$

$\log_2 a=t$로 놓으면 $t^2+4t+3=0$

$(t+3)(t+1)=0$ $\quad\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

즉, $\log_2 a=-3$ 또는 $\log_2 a=-1$이므로

$a=\frac{1}{8}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{8}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$이므로 모든 상수 a의 값의 곱은

$\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

답 $\frac{1}{16}$

08-3

방정식 $(\log_3 x)^2+6=k\log_3 x$의 두 근 α, β의 비가 $1:3$이므로 두 근을 α, 3α라 하면 로그의 진수의 조건에서 $\alpha>0$

$(\log_3 x)^2+6=k\log_3 x$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-kt+6=0$

이 이차방정식의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 3\alpha$이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3 \alpha+\log_3 3\alpha=k$에서

$2\log_3 \alpha+1=k$ ······㉠

$(\log_3 \alpha)(\log_3 3\alpha)=6$에서

$(\log_3 \alpha)(1+\log_3 \alpha)=6$ ······㉡

㉡에서 $\log_3 \alpha=s$로 놓으면

$s(1+s)=6$, $s^2+s-6=0$

$(s+3)(s-2)=0$ $\quad\therefore s=-3$ 또는 $s=2$

(i) $s=-3$, 즉 $\log_3 \alpha=-3$일 때,
㉠에서 $2\times(-3)+1=k$, 즉 $k=-5$이므로
$k<0$을 만족시킨다.
이때, $\log_3 \alpha=-3$이므로 $\alpha=3^{-3}=\frac{1}{27}$

(ii) $s=2$, 즉 $\log_3 \alpha=2$일 때,
㉠에서 $2\times2+1=k$, 즉 $k=5$이므로
$k<0$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{1}{27}$, $k=-5$이므로

$\alpha k^2=\frac{1}{27}\times(-5)^2=\frac{25}{27}$

따라서 $p=27$, $q=25$이므로

$p+q=52$

답 52

09-1

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ······㉠

$\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2+\log_2 x^3-6<0$에서

$(\log_2 x-2)^2+3\log_2 x-6<0$

$(\log_2 x)^2-\log_2 x-2<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2<0$

$(t+1)(t-2)<0$ $\quad\therefore -1<t<2$

즉, $-1<\log_2 x<2$이고 (밑)$=2>1$이므로

$2^{-1}<x<2^2$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<x<4$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x<4$

(2) 진수의 조건에서 $x+5>0$, $x\neq5$

$\therefore -5<x<5$ 또는 $x>5$ ······㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+5)-\log_{\frac{1}{5}}|x-5|\le-1$에서

$\log_{\frac{1}{5}}\frac{x+5}{|x-5|}\le-1$

$0<$(밑)$=\frac{1}{5}<1$이므로 $\frac{x+5}{|x-5|}\ge\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$

이때, $|x-5|>0$이므로 $x+5\ge5|x-5|$

$|x-5|\le\frac{x+5}{5}$, $-\frac{x+5}{5}\le x-5\le\frac{x+5}{5}$

$-\frac{x+5}{5}\le x-5$에서 $6x\ge20$ $\quad\therefore x\ge\frac{10}{3}$

$x-5\le\frac{x+5}{5}$에서 $4x\le30$ $\quad\therefore x\le\frac{15}{2}$

$\therefore \frac{10}{3}\le x\le\frac{15}{2}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{10}{3}\le x<5$ 또는 $5<x\le\frac{15}{2}$

답 (1) $\frac{1}{2}<x<4$ (2) $\frac{10}{3}\le x<5$ 또는 $5<x\le\frac{15}{2}$

09-2

진수의 조건에서 $a>0$

부등식 $x^2+(2\log a-6)x+1>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2+(2\log a-6)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=(\log a-3)^2-1<0$, $(\log a)^2-6\log a+8<0$

$\log a=t$로 놓으면 $t^2-6t+8<0$

$(t-2)(t-4)<0 \qquad \therefore\ 2<t<4$

즉, $2<\log a<4$이고 (밑)$=10>1$이므로 $10^2<a<10^4$

따라서 정수 a의 최댓값은 $10^4-1=9999$, 최솟값은 $10^2+1=101$이다.

답 9999, 101

09-3

$(\log_2 a-1)x^2+2(\log_2 a-1)x-\log_2 a<0$에서

(i) $\log_2 a=1$, 즉 $a=2$일 때,
주어진 부등식은 $-1<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\log_2 a\neq1$, 즉 $a\neq2$일 때,
모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면
$\log_2 a-1<0 \qquad \therefore\ a<2 \qquad$ ……㉠
이차방정식
$(\log_2 a-1)x^2+2(\log_2 a-1)x-\log_2 a=0$
의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\log_2 a-1)^2+(\log_2 a-1)(\log_2 a)<0$
$\log_2 a=t$로 놓으면
$(t-1)^2+t(t-1)<0$, $(t-1)(2t-1)<0$
$\therefore\ \frac{1}{2}<t<1$
즉, $\frac{1}{2}<\log_2 a<1$이고 (밑)$=2>1$이므로
$\sqrt{2}<a<2 \qquad$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\sqrt{2}<a<2$

(i), (ii)에서 $\sqrt{2}<a\le2$

그런데 진수의 조건에서 $a>0$이므로 $\sqrt{2}<a\le2$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

10-1

$d=10$일 때 $R=-45$이므로

$-45=k-10\log 10^n$

$\therefore\ k-10n=-45 \qquad$ ……㉠

$d=100$일 때 $R=-75$이므로

$-75=k-10\log 100^n$

$\therefore\ k-20n=-75 \qquad$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$k=-15$, $n=3$

즉, 이 환경에서의 신호 전송 범위 d와 수신 신호 강도 R 사이의 관계식은

$R=-15-10\log d^3$

이 식에 $d=\frac{1}{10}$을 대입하여 풀면

$$R=-15-10\times3\times\log\frac{1}{10}$$
$$=-15+30=15$$

답 15

10-2

이 중고차의 현재 시세가 1600만 원이고, 매년 20%씩 감소하므로 n년 후의 시세는

$1600\times\left(1-\frac{20}{100}\right)^n=1600\times0.8^n$ (만 원)

n년 후의 시세가 200만 원 이하가 되므로

$1600\times0.8^n\le200$

$0.8^n\le\frac{1}{8}$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.8^n\le\log\frac{1}{8}$

$n\log\frac{8}{10}\le-\log 8$

$n(3\log2-1)\le-3\log2$

$n(0.9030-1)\le-0.9030$, $-0.0970n\le-0.9030$

$\therefore\ n\ge9.3\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 10이다.

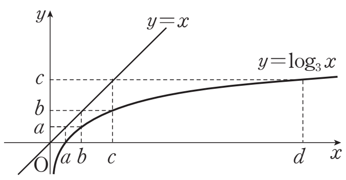
답 10

개 념 마 무 리

본문 pp.106~109

01 23	**02** ⑤	**03** ④	**04** ③
05 8	**06** 9	**07** ⑤	**08** 2
09 ③	**10** 24	**11** 1	**12** 246
13 $\frac{1}{8}$	**14** 10	**15** 8	
16 $\frac{1}{4} \le x < 2$	**17** 9	**18** 5년	**19** 3
20 5	**21** $\frac{1}{16} < a < 3$		**22** ③
23 4	**24** ㄱ, ㄷ		

01



위의 그림에서

$\log_3 a=0$이므로 $a=1$

$\log_3 b=a$, 즉 $\log_3 b=1$이므로 $b=3$

$\log_3 c=b$, 즉 $\log_3 c=3$이므로 $c=3^3=27$

$\log_3 d=c$, 즉 $\log_3 d=27$이므로 $d=3^{27}$

$\therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{bc}{d}=\log_{3^{-1}} \frac{3\times 27}{3^{27}}=\log_{3^{-1}} 3^{-23}=23$

답 23

02

$f(x)=\log_a x\ (a>1)$에 대하여

ㄱ. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a x+\log_a \frac{1}{x}$

$=\log_a x-\log_a x=0$ (참)

ㄴ. $\left\{f\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2=\left(\log_a \frac{x}{3}\right)^2=(\log_a x-\log_a 3)^2$

$\left\{f\left(\frac{3}{x}\right)\right\}^2=\left(\log_a \frac{3}{x}\right)^2=(\log_a 3-\log_a x)^2$

$\therefore \left\{f\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\frac{3}{x}\right)\right\}^2$ (참)

ㄷ. $f(x+1)-f(x)=\log_a(x+1)-\log_a x$

$=\log_a \frac{x+1}{x}=\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$f(x+2)-f(x+1)=\log_a(x+2)-\log_a(x+1)$

$=\log_a \frac{x+2}{x+1}=\log_a\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

이때, $x>0$이므로 $1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{x+1}$

또한, (밑)$=a>1$이므로

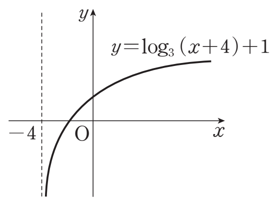
$\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)>\log_a\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$

$\therefore f(x+1)-f(x)>f(x+2)-f(x+1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

03



함수 $y=\log_3(x+4)+1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 점근선은 직선 $x=-4$이다. (거짓)

ㄴ. 함수의 그래프는 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 3 사분면을 지난다. (참)

ㄷ. 함수의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=\log_3(y+4)+1$에서 $x-1=\log_3(y+4)$이므로

$y+4=3^{x-1}$ $\quad\therefore y=3^{x-1}-4$

즉, 두 함수 $y=\log_3(x+4)+1$, $y=3^{x-1}-4$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

04

$a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a>\log_b b>\log_b 1$ ($\because 0<b<1$)

즉, $\log_b a>1$ ······㉠

$\therefore A>1$

㉠의 양변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b(\log_b a)<\log_b 1$, 즉 $\log_b(\log_b a)<0$이므로

$B<0$

한편, $C=(\log_b a)^2=A^2$이고 $A>1$에서 $A^2>A$이므로

$A<C$

따라서 세 수 A, B, C의 대소 관계는

$B<A<C$

답 ③

다른풀이

세 수 A, B, C의 대소 관계는 $0<a<b<1$을 만족시키는 모든 a, b에 대하여 항상 성립하므로

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$을 대입하여도 성립한다.

$A=\log_b a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{2^{-1}}2^{-2}=2$

$B=\log_b(\log_b a)=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$

$C=(\log_b a)^2=2^2=4$

$\therefore\ B<A<C$

05

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$, 즉 $y=\log_3(ax-b)-4$의 점근선은 $x=\frac{1}{7}$이므로

$\frac{1}{7}a-b=0 \qquad \therefore\ a=7b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 곡선 $y=\log_3(ax-b)-4$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면

$g(x)=\log_3\{a(x+4)-b\}-3$

이 곡선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$\log_3(4a-b)-3=0$, $\log_3(4a-b)=3$

$\therefore\ 4a-b=27 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

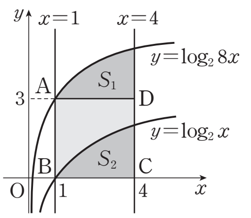
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=7$, $b=1 \qquad \therefore\ a+b=8$

답 8

06

함수 $y=\log_2 8x=\log_2 x+3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 두 부분 S_1, S_2의 넓이는 서로 같다.



따라서 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 8x$의 그래프와 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같으므로

$(4-1)\times3=9$

답 9

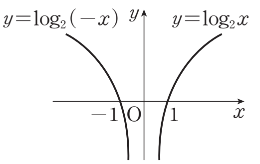
07

ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{2}}5x=-\log_2 5x=-\log_2 x-\log_2 5$

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}5x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 $-\log_2 5$만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_4 x^2=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ \log_2(-x) & (x<0)\end{cases}$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 함수 $y=\log_4 x^2$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여도 포개어지지 않는다.



ㄷ. $y=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4x+1}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}(4x+1)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2(4x+1)=\log_2 4\left(x+\frac{1}{4}\right)$

$=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\log_2 4=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+2$

즉, 함수 $y=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4x+1}$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=7\times2^x=2^{\log_2 7}\times2^x=2^{x+\log_2 7}$

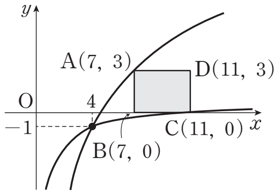
즉, 함수 $y=7\times2^x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\log_2 7$만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 포개어질 수 있는 함수의 그래프는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

08

함수 $y=\log_a(x-3)-1$ $(a>1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_a(x-3)-1$의 그래프가 점 A를 지날 때 a는 최솟값 m을 갖고, 점 C를 지날 때 a는 최댓값 M을 갖는다.



(i) 곡선 $y=\log_a(x-3)-1$이 점 $A(7, 3)$을 지날 때,

$\log_a 4-1=3$에서 $\log_a 4=4$

즉, $a^4=4$이므로 $m^4=4$

(ii) 곡선 $y=\log_a(x-3)-1$이 점 $C(11, 0)$을 지날 때,

$\log_a 8-1=0$에서 $\log_a 8=1$

즉, $a=8$이므로 $M=8$

(i), (ii)에서 $\dfrac{M}{m^4}=\dfrac{8}{4}=2$

답 2

09

직선 $y=-x+a$가 y축과 만나는 점을 D라 하자.

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, $C(a, 0)$이므로 점 $D(0, a)$, $\overline{BC}=\overline{AD}$이다.

$\therefore\ \triangle OAD=\triangle OBC$

조건 (가)에 의하여 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$이므로

$\triangle OBC=\dfrac{1}{5}\triangle OCD=\dfrac{1}{10}a^2=40$

$\therefore\ a=20\ (\because\ a>0)$

이때, 점 $A(p, q)$는 직선 $y=-x+a$, 즉 $y=-x+20$ 위에 있으므로 $q=-p+20$

$\therefore\ p+q=20$

답 ③

다른풀이

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 점 A의 좌표는 (p, q)이므로 점 B의 좌표는 (q, p)이고, 점 C의 좌표는 $(a, 0)$이다.

조건 (가)에 의하여 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$이므로 점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이다.

즉, $q=\dfrac{3a+p}{4}$, $p=\dfrac{q}{4}$에서 $a=5p$, $q=4p$ ······㉠

또한, 조건 (나)에 의하여 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\dfrac{1}{2}ap=40$, $\dfrac{5}{2}p^2=40$ ($\because$ ㉠)

$p^2=16$ $\quad\therefore\ p=-4$ 또는 $p=4$

이때, $p>0$이므로 $p=4$, $a=20$, $q=16$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ p+q=4+16=20$

10

점 $A(a, b)$는 함수 $y=\log_9(x+2)$의 그래프 위에 있으므로

$b=\log_9(a+2)$

$\therefore\ 9^b=a+2$ ······㉠

점 $B(b, a)$는 함수 $y=3^x+4$의 그래프 위에 있으므로

$a=3^b+4$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$9^b=3^b+6$, $(3^b)^2-3^b-6=0$

$3^b=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$ $\quad\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

즉, $3^b=3$이므로 $b=1$

이것을 ㉡에 대입하면 $a=3+4=7$

따라서 $A(7, 1)$, $B(1, 7)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(1-7)^2+(7-1)^2}=6\sqrt{2}$

한편, 선분 AB의 중점을 C라 하면

$C\left(\dfrac{7+1}{2}, \dfrac{1+7}{2}\right)$, 즉 $C(4, 4)$이므로

$\overline{OC}=4\sqrt{2}$

$\triangle OAB$는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{OC}\perp\overline{AB}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=24$

답 24

다른풀이

A$(7, 1)$, B$(1, 7)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}|49-1|=24$

보충설명

사선정리(신발끈 공식)

좌표평면 위에 세 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)|$$

위의 식은 다음과 같은 방법으로 유도할 수 있다.

두 점 B, C를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, 즉

$(y_3-y_2)x-(x_3-x_2)y-x_2y_3+x_3y_2=0$

이때, 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|(y_3-y_2)x_1-(x_3-x_2)y_1-x_2y_3+x_3y_2|}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}$$

$$=\frac{|x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3-(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)|}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times h$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}\times\frac{|x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3-(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)|}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}|x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3-(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)|$$

11

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{6}{x}$, $g(x)=3x^2-6x+15$에 대하여

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}\frac{6}{3x^2-6x+15}$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x^2-2x+5}$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+5)$$
$$=-1+\log_2(x^2-2x+5)$$

$\log_2(x^2-2x+5)$에서 (밑)$=2>1$이므로 진수가 0보다 큰 최솟값을 가질 때, 함수 $(f\circ g)(x)$도 최솟값을 갖는다.

이때, $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$이므로

진수 x^2-2x+5의 최솟값은 $x=1$일 때, 4이다.

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값은

$(f\circ g)(1)=-1+\log_2 4=1$

답 1

12

$y=9x^{-2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 y=\log_3 9+\log_3 x^{-2+\log_3 x}$$
$$=2+(-2+\log_3 x)\log_3 x$$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$\log_3 y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

$\frac{1}{3}\le x\le 3$에서 $-1\le t\le 1$

따라서 $\log_3 y$는 $t=-1$일 때 최댓값 5, $t=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

$\log_3 y=5$에서 $y=3^5$ $\therefore M=243$

$\log_3 y=1$에서 $y=3$ $\therefore m=3$

$\therefore M+m=246$

답 246

13

$f(x)=x^2+3x+5$라 하면

$f(x)$를 $x-\log_2 a$로 나눈 나머지는

$f(\log_2 a)=(\log_2 a)^2+3\log_2 a+5$ ······㉠

$f(x)$를 $x-\log_2 8a$로 나눈 나머지는

$f(\log_2 8a)=(\log_2 8a)^2+3(\log_2 8a)+5$

$=(3+\log_2 a)^2+3(3+\log_2 a)+5$ ······㉡

㉠과 ㉡이 서로 같으므로

$(\log_2 a)^2+3\log_2 a+5=(3+\log_2 a)^2+3(3+\log_2 a)+5$

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2+3t+5=(3+t)^2+3(3+t)+5$

$6t+18=0$ $\therefore t=-3$

즉, $\log_2 a=-3$이므로 $a=2^{-3}=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

14

$\log_2 x^2+\log_2 y^2=\log_2 (x+y+5)^2$에서

$\log_2 x^2y^2=\log_2 (x+y+5)^2$

$x^2y^2=(x+y+5)^2$

이때, $x>0$, $y>0$이므로

$xy=x+y+5$, $xy-x-y=5$

$(x-1)(y-1)=6$

x와 y는 양의 정수이므로

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x-1=3 \\ y-1=2 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x-1=6 \\ y-1=1 \end{cases}$

즉, 주어진 방정식을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 7)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(7, 2)$

따라서 $x+2y$의 최솟값은 $x=4$, $y=3$일 때이므로

$x+2y=4+2\times3=10$

답 10

15

x, y는 $1<x<100$, $1<y<100$인 자연수이므로 밑과 진수의 조건 $x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$을 모두 만족시킨다.

$\log_x y=t$로 놓으면 $\log_y x=\dfrac{1}{t}$

$3\log_x y-2\log_y x=5$에서 $3t-\dfrac{2}{t}-5=0$

$3t^2-5t-2=0$, $(3t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=2$

즉, $\log_x y=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $\log_x y=2$

(i) $\log_x y=-\dfrac{1}{3}$일 때,

$y=x^{-\frac{1}{3}}$에서 $x>1$일 때, $y<1$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\log_x y=2$일 때,

$y=x^2$에서 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 $(2, 4)$, $(3, 9)$, $\cdots$, $(9, 81)$의 8이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는 8이다.

답 8

16

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$[\log_2 x]^2+2[\log_2 x]-3<0$에서

$[\log_2 x]=t$ (t는 정수)로 놓으면

$t^2+2t-3<0$, $(t+3)(t-1)<0$

$\therefore\ -3<t<1$

이때, t는 정수이므로

$t=-2$, -1, 0

(가)

(i) $t=-2$, 즉 $[\log_2 x]=-2$일 때,

$-2\le\log_2 x<-1$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{4}\le x<\dfrac{1}{2}$

(ii) $t=-1$, 즉 $[\log_2 x]=-1$일 때,

$-1\le\log_2 x<0$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{2}\le x<1$

(iii) $t=0$, 즉 $[\log_2 x]=0$일 때,

$0\le\log_2 x<1$ $\quad\therefore\ 1\le x<2$

(i), (ii), (iii)에서 $\dfrac{1}{4}\le x<2$ ……㉡

(나)

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{4}\le x<2$

(다)

답 $\dfrac{1}{4}\le x<2$

단계	채점 기준	배점
(가)	$[\log_2 x]=t$로 치환한 부등식을 만족시키는 t의 값을 구한 경우	30%
(나)	t의 값에 따라 조건을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한 경우	50%
(다)	주어진 부등식의 해를 구한 경우	20%

17

$A=\{x\mid x^2-6x+8\le0\}$, $B=\{x\mid 4-(\log_2 x-k)^2\ge0\}$에 대하여 $x^2-6x+8\le0$에서 $(x-2)(x-4)\le0$

$\therefore\ 2\le x\le4$ ……㉠

$4-(\log_2 x-k)^2\ge0$에서 $(\log_2 x-k)^2\le4$

$-2\le\log_2 x-k\le2$, $k-2\le\log_2 x\le k+2$

$\therefore\ 2^{k-2}\le x\le2^{k+2}$ ……㉡

이때, 진수의 조건에서 $x>0$이고 모든 정수 k에 대하여 $2^{k-2}>0$이므로 ㉡은 집합 B의 부등식의 해이다.

㉠, ㉡에서 $A\cap B\neq\varnothing$이려면

$2^{k+2}\geq 2$이고 $2^{k-2}\leq 4$이어야 한다.

$2^{k+2}\geq 2$에서 $k\geq -1$ ……㉢

$2^{k-2}\leq 4$에서 $k\leq 4$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $-1\leq k\leq 4$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+0+1+2+3+4=9$

답 9

18

첫 해의 부품 A의 질량을 a, 부품 A의 가격을 b라 하면

n년 후 부품 A의 질량은 $0.9^n\times a$,

n년 후 부품 A의 가격은 $1.2^n\times b$

n년 후 부품 A의 단위질량당 가격이 첫 해의 4배 이상이 되려면

$\dfrac{1.2^n\times b}{0.9^n\times a}\geq 4\times\dfrac{b}{a}$, $\left(\dfrac{1.2}{0.9}\right)^n\geq 4$

$\therefore \left(\dfrac{4}{3}\right)^n\geq 4$

양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 4-\log 3)\geq \log 4$

$n\geq\dfrac{\log 4}{\log 4-\log 3}$, $n\geq\dfrac{2\log 2}{2\log 2-\log 3}$

$n\geq\dfrac{2\times 0.30}{2\times 0.30-0.48}$, $n\geq\dfrac{0.60}{0.12}=5$

따라서 5년 후부터 부품 A의 단위질량당 가격이 첫 해의 4배 이상이 된다.

답 5년

19

함수 $f(x)=\log_3(x-7)+3$의 정의역은 $\{x\,|\,x>7\}$이므로 역함수 $f^{-1}(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y>7\}$이다.

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+5$의 정의역은 $\{x\,|\,x<5\}$이므로 역함수 $g^{-1}(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y<5\}$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $g^{-1}(x)<n<f^{-1}(x)$를 만족시키는 정수 n의 개수는 5, 6, 7의 3이다.

답 3

다른풀이

역함수를 직접 구한다.

$y=\log_3(x-7)+3$에서

$y-3=\log_3(x-7)$, $3^{y-3}=x-7$

$x=3^{y-3}+7$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=3^{x-3}+7$ $\therefore f^{-1}(x)=3^{x-3}+7$

$y=\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+5$에서

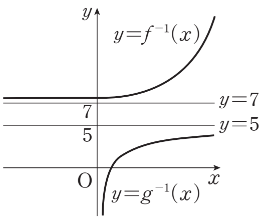
$y-5=\log_{\frac{1}{2}}(5-x)$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-5}=5-x$

$x=5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y-5}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}$ $\therefore g^{-1}(x)=5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}$

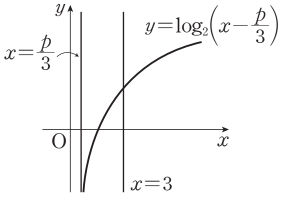
이때, 두 함수 $y=f^{-1}(x)$, $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $f^{-1}(x)>7$, $g^{-1}(x)<5$이다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g^{-1}(x)<n<f^{-1}(x)$를 만족시키는 정수 n의 개수는 5, 6, 7의 3이다.

20

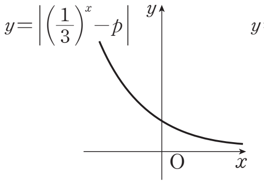
다음 그림과 같이 함수 $y=\log_2\left(x-\dfrac{p}{3}\right)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=\dfrac{p}{3}$이다. 이 점근선이 직선 $x=3$보다 왼쪽에 있을 때 함수 $y=\log_2\left(x-\dfrac{p}{3}\right)$의 그래프와 직선 $x=3$이 한 점에서 만난다.



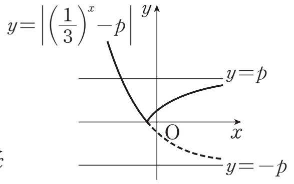
즉, $\dfrac{p}{3}<3$에서 $p<9$ ……㉠

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-p$의 그래프의 점근선은 $y=-p$이므로 p의 값에 따라 함수 $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x-p\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $p\le0$일 때,



(ii) $p>0$일 때,



이때, 함수 $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x-p\right|$의 그래프와 직선 $y=3$이 두 점에서 만나려면 (ii)에서

$p>3$ ……㉡

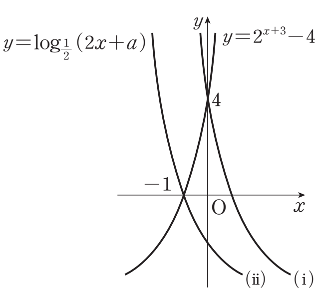
㉠, ㉡에서 $3<p<9$

따라서 조건을 만족시키는 정수 p의 개수는 4, 5, 6, 7, 8의 5이다.

답 5

21

함수 $y=2^{x+3}-4$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



두 함수 $y=2^{x+3}-4$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$의 그래프가 제2사분면에서 만나려면 위의 그림과 같이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$의 그래프가 두 곡선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때,

$4=\log_{\frac{1}{2}}a$에서 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

$0=\log_{\frac{1}{2}}(-2+a)$에서

$a-2=1 \qquad \therefore\ a=3$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{16}<a<3$

답 $\frac{1}{16}<a<3$

22

곡선 $y=\log_a x$와 원 C의 두 교점 P, Q의 좌표를

$\mathrm{P}(p,\ \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_a q)$ $(p>q)$

라 하면 선분 PQ가 원 C의 지름이므로 원의 중심과 선분 PQ의 중점이 일치한다.

원 C : $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 중심은 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$

선분 PQ의 중점은 $\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{\log_a p+\log_a q}{2}\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$에서 $p+q=\frac{5}{2}$ ……㉠

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a p+\log_a q=0$

$\log_a pq=0 \qquad \therefore\ pq=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 p, q는 t에 대한 이차방정식 $t^2-\frac{5}{2}t+1=0$의 두 근이다.

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$에서 $2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

이때, $p>q$이므로 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \log_a \frac{1}{2}\right)$

또한, 선분 PQ가 원 C의 지름이므로 선분 PQ의 길이는 원 C의 지름의 길이와 같다.

원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{13}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$이므로

$\overline{PQ}=2\times\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\overline{PQ}^2=\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\log_a 2-\log_a\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$\frac{9}{4}+(\log_a 4)^2=\frac{13}{4}$, $(\log_a 4)^2=1$

이때, $a>1$이므로 $\log_a 4=1$

$\therefore\ a=4$

답 ③

23

$a>1$이므로 $a<b<a^2$에서 $1<\log_a b<2$이다.

$\log_a b$가 양의 유리수이므로

$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 하면

$1<\frac{n}{m}<2$이므로 $m\neq1$, $m<n<2m$

$b=a^{\frac{n}{m}}$에서 a, b 모두 1보다 큰 정수이므로 a, b는 같은 자연수의 거듭제곱으로 표현된다.

$a=k^m$, $b=k^n$ (k는 2 이상의 자연수, $m\neq1$)

이라 할 수 있다.

$b-a=k^n-k^m=k^m(k^{n-m}-1)$

에서 $k^{n-m}>1$이므로 $k^{n-m}-1>0$

따라서 $b-a$의 값이 최소이려면 k^m, 즉 a의 값이 최소가 되어야 한다.

$a^2<400$에서 $1<a<20$이므로 $1<k^m<20$을 만족시키는 2 이상의 최소의 자연수 m과 k의 값은

$k=2$, $m=2$

$\therefore\ a=k^m=2^2=4$

또한, $1<\frac{n}{m}<2$에서 $m=2$이므로 $2<n<4$를 만족시키는 자연수 n의 값은 3이다.

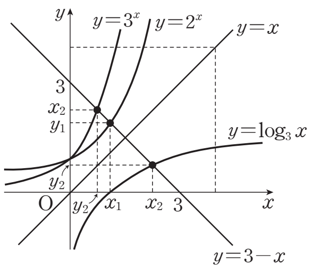
$\therefore\ b=k^n=2^3=8$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $8-4=4$이다.

답 4

24

두 함수 $y=\log_3 x$, $y=3^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 다음 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점 $(x_2,\ y_2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 함수 $y=3^x$의 그래프 위에 있다.



ㄱ. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 직선 $y=3-x$ 위에 있으므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$　　$\therefore\ y_2-x_1=y_1-x_2$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $x_1>y_2$, $x_2>y_1$이므로

$(x_1-y_2)(x_2-y_1)>0$ (거짓)

ㄷ. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$가 직선 $y=3-x$ 위의 점이므로

$y_1=3-x_1$, $y_2=3-x_2$에서

$$x_1y_1-x_2y_2=x_1(3-x_1)-x_2(3-x_2)$$
$$=3x_1-x_1^2-3x_2+x_2^2$$
$$=3(x_1-x_2)-(x_1^2-x_2^2)$$
$$=(x_1-x_2)\{3-(x_1+x_2)\}$$

이때, $x_1-x_2<0$, $x_1+x_2>3$이므로

$x_1y_1-x_2y_2>0$

$\therefore\ x_1y_1>x_2y_2$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

Ⅱ. 삼각함수

유형연습 05 삼각함수의 정의 본문 pp.118~126

01-1 제 1 사분면 또는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면

01-2 58　**02-1** (1) $\frac{8}{5}\pi$ (2) $\frac{3}{4}\pi$　**02-2** 3

03-1 30　**03-2** $4a$

04-1 (1) $\frac{5}{8}$ (2) $-\sin\theta-\cos\theta$

05-1 (1) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ (2) $\frac{7}{4}$　**05-2** $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

05-3 $2x^2-6x+2=0$

01-1

θ가 제 3 사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ \frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{2}$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제 1 사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2}{3}(3k+1)\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2}{3}(3k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{7}{6}\pi$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제 3 사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$\frac{2}{3}(3k+2)\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2}{3}(3k+2)\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2k\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{11}{6}\pi$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\theta}{3}$는 제 1 사분면 또는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

답 제 1 사분면 또는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면

01-2

50 이하의 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{3}\pi$가 제 2 사분면의 각이려면

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n}{3}\pi<2k\pi+\pi$ (k는 음이 아닌 정수)

$\therefore\ 6k+\frac{3}{2}<n<6k+3$

이때, n은 자연수이므로 $n=6k+2$

즉, $k=8$일 때 50 이하의 자연수 n의 값이 최대이므로

$M=6\times8+2=50$

또한, $\frac{n}{5}\pi$가 제 4 사분면의 각이려면

$2t\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{n}{5}\pi<2t\pi+2\pi$ (t는 음이 아닌 정수)

$\therefore\ 10t+\frac{15}{2}<n<10t+10$

이때, n은 자연수이므로 $n=10t+8$ 또는 $n=10t+9$

즉, $t=0$일 때 50 이하의 자연수 n의 값이 최소이므로

$m=8$

$\therefore\ M+m=58$

답 58

02-1

(1) 각 θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+9\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수), $10\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{10}\pi$

이때, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{10}\pi<\pi$

$\therefore\ 2<n<\frac{9}{2}$

n은 정수이므로 $n=3$ 또는 $n=4$

$n=3$일 때 $\theta=\frac{7}{10}\pi$,

$n=4$일 때 $\theta=\frac{9}{10}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{7}{10}\pi+\frac{9}{10}\pi=\frac{8}{5}\pi$

(2) 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수), $6\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{4n+1}{12}\pi$

이때, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{4n+1}{12}\pi<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ \frac{5}{4}<n<\frac{17}{4}$

n은 정수이므로

$n=2$일 때, $\theta=\frac{9}{12}\pi=\frac{3}{4}\pi$

$n=3$일 때, $\theta=\frac{13}{12}\pi$

$n=4$일 때, $\theta=\frac{17}{12}\pi$

따라서 θ의 값 중 가장 작은 값은 $\frac{3}{4}\pi$이다.

답 (1) $\frac{8}{5}\pi$ (2) $\frac{3}{4}\pi$

02-2

두 각 θ, 15θ가 모두 제 1 사분면의 각이고, $\sin 15\theta=\sin\theta$이므로 각 15θ를 나타내는 동경과 각 θ를 나타내는 동경이 일치해야 한다.

즉, $15\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수), $14\theta=2n\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{n}{7}\pi$

이때, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{n}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 0<n<\frac{7}{2}$

따라서 정수 n은 1, 2, 3이므로 각 θ의 개수는 $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$의 3이다.

답 3

03-1

둘레의 길이가 20인 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$2r+l=20$

$\therefore\ l=20-2r$ $(0<r<10)$

이때, 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}r(20-2r)=-r^2+10r$

$\quad=-(r-5)^2+25$

즉, $r=5$일 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값은 25이므로

$a=5$, $b=25$

$\therefore\ a+b=30$

답 30

03-2

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=a^2$에서

$l=\frac{2a^2}{r}$

부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+l=2r+\frac{2a^2}{r}$

이때, $r>0$, $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+\frac{2a^2}{r}\geq 2\sqrt{2r\times\frac{2a^2}{r}}=4a$ (단, 등호는 $r=a$일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $4a$이다.

답 $4a$

보충설명

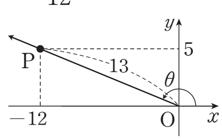
산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

04-1

(1) θ가 제 2 사분면의 각이고 $\tan\theta=-\frac{5}{12}$이므로 점 P의 좌표를 $(-12,\ 5)$로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta(4\tan\theta+1)}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}\left\{4\times\left(-\frac{5}{12}\right)+1\right\}}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{8}{13}}=\frac{5}{8}$$

(2) $\sin\theta\cos\theta>0$이면 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i) θ가 제1사분면의 각일 때,

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$에서 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) θ가 제3사분면의 각일 때,

$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$에서 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\therefore |\sin\theta|-|\tan\theta|+\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}$

$=-\sin\theta-\tan\theta-(\cos\theta-\tan\theta)$

$=-\sin\theta-\cos\theta$

답 (1) $\dfrac{5}{8}$ (2) $-\sin\theta-\cos\theta$

05-1

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{17}{9}$

이때, θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{9}{4}$

$\therefore \sqrt{\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}}=\sqrt{\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2-2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{9}{4}\right)^2-2}$

$=\sqrt{\dfrac{49}{16}}=\dfrac{7}{4}$

답 (1) $-\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ (2) $\dfrac{7}{4}$

다른풀이

(2) $\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{1-2\times\frac{16}{81}}{\frac{16}{81}}=\dfrac{49}{16}$

$\therefore \sqrt{\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{49}{16}}=\dfrac{7}{4}$

05-2

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$

이때, θ는 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

즉, $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{7}{4}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

답 $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

05-3

이차방정식 $3x^2-\sqrt{15}x+1=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

한편, $\tan\theta$, $\dfrac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left\{x^2-\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)x+1\right\}=0$이므로

$$\begin{aligned}\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3\end{aligned}$$

즉, 구하는 이차방정식은 $2x^2-6x+2=0$이다.

답 $2x^2-6x+2=0$

개념마무리

본문 pp.127~130

01 ⑤	**02** ④	**03** ④	**04** $\dfrac{30}{7}\pi$
05 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**06** $\dfrac{17}{12}\pi$	**07** 9	**08** $\dfrac{\pi}{3}$
09 8	**10** $\cos^2\theta$	**11** ②	**12** ②
13 ⑤	**14** $-\sqrt{2}$	**15** $2+\sqrt{3}$	**16** -1
17 $\dfrac{44}{9}$	**18** 27	**19** $\cos^2\theta$	**20** π
21 ①	**22** $\dfrac{41}{20}$		

01

① $\dfrac{11}{3}\pi=2\pi\times1+\dfrac{5}{3}\pi$

② $-\dfrac{13}{3}\pi=2\pi\times(-3)+\dfrac{5}{3}\pi$

③ $1020^\circ=360^\circ\times2+300^\circ$

④ $-60^\circ=360^\circ\times(-1)+300^\circ$

⑤ $-660^\circ=360^\circ\times(-2)+60^\circ$

따라서 동경의 위치가 다른 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

ㄱ. $3\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=\dfrac{540^\circ}{\pi}$ (참)

ㄴ. $-874^\circ=360^\circ\times(-3)+206^\circ$이므로 제 3 사분면의 각이다. (거짓)

ㄷ. $\dfrac{9}{4}\pi=2\pi\times1+\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{15}{4}\pi=2\pi\times(-2)+\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{9}{4}\pi$, $-\dfrac{15}{4}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03

θ가 제 4 사분면의 각이므로

$2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (n은 정수) ……㉠

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2\times2n\pi+3\pi<2\theta<2\times2n\pi+4\pi$

$\therefore$ $2\pi(2n+1)+\pi<2\theta<2\pi(2n+1)+2\pi$

즉, 2θ는 제 3 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다. ……㉡

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{2}$을 곱하면

$n\pi+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<n\pi+\pi$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<2k\pi+\pi$

즉, $\dfrac{\theta}{2}$는 제 2 사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$(2k+1)\pi+\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<(2k+1)\pi+\pi$

$\therefore$ $2k\pi+\dfrac{7}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<2k\pi+2\pi$

즉, $\dfrac{\theta}{2}$는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\dfrac{\theta}{2}$는 제 2 사분면 또는 제4 분면의 각이다. ……㉢

따라서 ㉡, ㉢에 의하여 2θ의 동경과 $\dfrac{\theta}{2}$의 동경이 모두 존재할 수 있는 사분면은 제 4 사분면이다.

답 ④

04

각 θ를 나타내는 동경과 각 8θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$8\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$7\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n\pi}{7} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, $\pi<\theta<2\pi$에서 $\pi<\frac{2n\pi}{7}<2\pi$이므로

$\frac{7}{2}<n<7$

$\therefore n=4$ 또는 $n=5$ 또는 $n=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{8}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{10}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{12}{7}\pi$

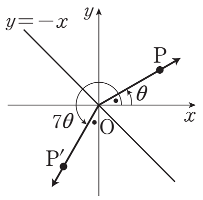
따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{8}{7}\pi+\frac{10}{7}\pi+\frac{12}{7}\pi=\frac{30}{7}\pi$

답 $\frac{30}{7}\pi$

05

두 각 θ와 7θ를 나타내는 동경이 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로



$7\theta+\theta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi \qquad \therefore \theta=\frac{4n+3}{16}\pi$

이때, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<\frac{4n+3}{16}\pi<\pi$

$\therefore \frac{5}{4}<n<\frac{13}{4}$

n은 정수이므로 $n=2$ 또는 $n=3$

(i) $n=2$일 때,

$$\theta=\frac{4\times2+3}{16}\pi=\frac{11}{16}\pi\text{이므로}$$

$$\sin\left(\theta-\frac{7}{16}\pi\right)=\sin\left(\frac{11}{16}\pi-\frac{7}{16}\pi\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $n=3$일 때,

$$\theta=\frac{4\times3+3}{16}\pi=\frac{15}{16}\pi\text{이므로}$$

$$\sin\left(\theta-\frac{7}{16}\pi\right)=\sin\left(\frac{15}{16}\pi-\frac{7}{16}\pi\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

(i), (ii)에서 $\sin\left(\theta-\frac{7}{16}\pi\right)$의 모든 값의 곱은

$\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

06

두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여

$x_1+x_2=0$, $y_1=y_2$이므로 x좌표는 절댓값이 같고 부호는 반대이고, y좌표는 같으므로 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, θ와 11θ를 나타내는 동경은 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+11\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$12\theta=2n\pi+\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{12}\pi \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\pi<\frac{2n+1}{12}\pi<\frac{3}{2}\pi$

$\therefore \frac{11}{2}<n<\frac{17}{2}$

n은 정수이므로 $n=6$ 또는 $n=7$ 또는 $n=8$

(i) $n=6$일 때, ㉠에서 $\theta=\frac{13}{12}\pi$

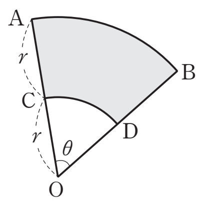
(ii) $n=7$일 때, ㉠에서 $\theta=\frac{15}{12}\pi=\frac{5}{4}\pi$

(iii) $n=8$일 때, ㉠에서 $\theta=\frac{17}{12}\pi$

(i), (ii), (iii)에서 θ의 최댓값은 $\frac{17}{12}\pi$이다.

답 $\frac{17}{12}\pi$

07



선분 OA의 길이를 $2r$, $\angle AOB=\theta$라 하면

호 AB의 길이는 $2r\theta$

이때, 부채꼴 OCD의 반지름의 길이는 r, 중심각의 크기는 θ이므로 호 CD의 길이는 $r\theta$이다.

또한, 색칠한 도형의 둘레의 길이는 12이므로 ($2r<12$에서 $0<r<6$이다.)

$2r\theta+r\theta+2r=12$, $3r\theta+2r=12$

$3r\theta=12-2r$ $\quad\therefore\ r\theta=4-\frac{2}{3}r$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때, 색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2r)^2\theta-\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}r\times r\theta$$
$$=\frac{3}{2}r\left(4-\frac{2}{3}r\right)\ (\because ㉠)$$
$$=-r^2+6r$$
$$=-(r-3)^2+9$$

따라서 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 $r=3$일 때 9이다.

답 9

다른풀이

$r>0$, $\theta>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3r\theta+2r=12$$
$$\geq 2\sqrt{6r^2\theta}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 3r\theta=2r,\ \text{즉 } \theta=\frac{2}{3},\ r=3\text{일 때 성립}\right)$$

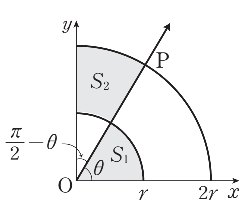
즉, $6\geq\sqrt{6r^2\theta}$에서 $r^2\theta\leq 6$

이때, 색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2r)^2\theta-\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{3}{2}r^2\theta\leq\frac{3}{2}\times 6=9$$

따라서 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 $\theta=\frac{2}{3}$, $r=3$일 때 9이다.

08



S_1은 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이이므로

$S_1=\frac{1}{2}r^2\theta$

동경 OP와 y축 사이의 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$S_2=\frac{1}{2}\times(2r)^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times r^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{3}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

이때, $S_1:S_2=2:3$이므로 $2S_2=3S_1$

$3r^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{3}{2}r^2\theta$

$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\theta}{2}$, $\frac{3}{2}\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

답 $\frac{\pi}{3}$

09

두 부채꼴 A, B의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면

부채꼴 A의 호의 길이는 $a\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi a$,

넓이는 $\frac{1}{2}\times a\times\frac{3}{4}\pi a=\frac{3}{8}\pi a^2$

부채꼴 B의 호의 길이는 $b\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}b$,

넓이는 $\frac{1}{2}\times b\times\frac{\pi}{4}b=\frac{\pi}{8}b^2$

이때, 두 부채꼴 A, B의 호의 길이의 합이 4π이므로

$\frac{3}{4}\pi a+\frac{\pi}{4}b=4\pi$에서 $3a+b=16$

$\therefore\ b=16-3a$ ← $b>0$이므로 $0<a<\frac{16}{3}$이다.

또한, 두 부채꼴 A, B의 넓이의 합은

$$\frac{3}{8}\pi a^2+\frac{\pi}{8}b^2=\frac{3}{8}\pi a^2+\frac{\pi}{8}(16-3a)^2$$
$$=\frac{\pi}{8}(3a^2+9a^2-96a+256)$$
$$=\frac{\pi}{8}(12a^2-96a+256)$$
$$=\frac{3}{2}\pi\left(a^2-8a+\frac{64}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\pi\left\{(a-4)^2+\frac{16}{3}\right\}$$

즉, $a=4$, $b=4$일 때 두 부채꼴 A, B의 넓이의 합은 최소이므로 구하는 두 부채꼴 A, B의 반지름의 길이의 합은

$a+b=8$

답 8

10

점 A의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

즉, $\overline{OB}=\cos\theta,\ \overline{AB}=\sin\theta$

직각삼각형 OBC에서

$\overline{OC}=\overline{OB}\times\cos\theta=\cos^2\theta$

직각삼각형 OCD에서

$\overline{OD}=\overline{OC}\times\cos\theta=\cos^3\theta$

$\therefore\ \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\dfrac{\cos^3\theta}{\cos\theta}=\cos^2\theta\ (\because\ \cos\theta\neq0)$

답 $\cos^2\theta$

다른풀이

점 A의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

즉, $\overline{OB}=\cos\theta,\ \overline{AB}=\sin\theta$

직각삼각형 OBC에서

$\overline{OC}=\overline{OB}\times\cos\theta=\cos^2\theta$

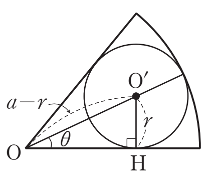
$\triangle OCD\backsim\triangle OAB$이므로

$\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$

이때, $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\dfrac{\cos^2\theta}{1}=\cos^2\theta$이므로

$\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\cos^2\theta$

11



오른쪽 그림과 같이 부채꼴의 중심을 O, 부채꼴에 내접하는 원의 중심을 O′, 점 O′에서 부채꼴의 반지름에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하자.

이때, $\triangle O'OH$는 직각삼각형이고, $\angle O'OH=\theta$이므로

$\sin\theta=\dfrac{r}{a-r},\ (a-r)\sin\theta=r$

$a\sin\theta-r\sin\theta=r,\ (1+\sin\theta)r=a\sin\theta$

$\therefore\ r=\dfrac{a\sin\theta}{1+\sin\theta}$

답 ②

12

ㄱ. $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{1}{1-\sin\theta}$ (거짓)

ㄴ. $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1-2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ (거짓)

ㄷ. $\dfrac{\sin^4\theta+\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}$ *

$=\dfrac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{(1+\sin\theta\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)}{1-\sin\theta\cos\theta}$

$=1+\sin\theta\cos\theta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

풀이첨삭

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

이므로 *에서 이것을 활용하면

$\sin^4\theta+\cos^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(1+\sin\theta\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

13

$\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\tan\theta}$에서 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$이므로

$\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로 $\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

따라서 각 θ는 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta<0$

$\therefore\ |\tan\theta-\sin\theta|+\sqrt{\cos^2\theta}-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=-(\tan\theta-\sin\theta)+|\cos\theta|-|\cos\theta-\sin\theta|$

$=\sin\theta-\tan\theta-\cos\theta+\cos\theta-\sin\theta$

$=-\tan\theta$

답 ⑤

보충설명

음수의 제곱근의 성질

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0$ (단, $b\neq0$)

14

이차방정식 $2x^2+2ax+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-a$ ……㉠

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(가)

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$

$1+2\times\dfrac{1}{2}=a^2$

$\therefore\ a^2=2$ ……㉡

(나)

이때, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-a>0$

즉, $a<0$이므로 ㉡에서

$a=-\sqrt{2}$

(다)

답 $-\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 합과 곱을 구한 경우	30%
(나)	삼각함수 사이의 관계를 이용하여 a^2의 값을 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 상수 a의 값을 구한 경우	30%

15

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{3}$에서

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

$(\sqrt{3}-1)\sin\theta=(\sqrt{3}+1)\cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

답 $2+\sqrt{3}$

다른풀이

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{3}$에서 $\cos\theta=0$이면

$1\neq\sqrt{3}$이므로 $\cos\theta\neq0$

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}$이므로

$\tan\theta+1=\sqrt{3}\tan\theta-\sqrt{3}$

$\tan\theta(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}+1$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

16

$\sin\theta+\cos\theta=-1$ ……㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1,\ 2\sin\theta\cos\theta=0$

$\therefore\ \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=0$

이것을 ㉠에 대입하면

$\begin{cases}\sin\theta=0\\ \cos\theta=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\sin\theta=-1\\ \cos\theta=0\end{cases}$

이때, $f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$이므로

$f(n)=(-1)^n$

$\therefore\ f(n)=\begin{cases}-1 & (n\text{이 홀수})\\ 1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$2099=2\times1049+1$이므로

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2099)$

$=-1+1+(-1)+\cdots+(-1)$

$=1049\times0+(-1)$

$=-1$

답 -1

17

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

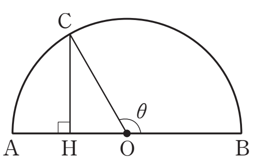
$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{44}{9}$$

답 $\frac{44}{9}$

18

다음 그림과 같이 반원의 중심을 O, $\angle\mathrm{BOC}=\theta$라 하자.



반원의 지름의 길이가 12이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=6$

호 BC의 길이가 4π이므로

$6\times\theta=4\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore\ \angle\mathrm{COH}=\pi-\theta=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

직각삼각형 CHO에서 $\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

답 27

19

$f\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)=x$에서 $A=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$라 하면

$A^2=\frac{1-x}{x},\ A^2x=1-x$

$x(A^2+1)=1 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{A^2+1}$

즉, $f(A)=\frac{1}{A^2+1}$이므로

$$f(\tan\theta)=\frac{1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}$$
$$=\frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\cos^2\theta$$

답 $\cos^2\theta$

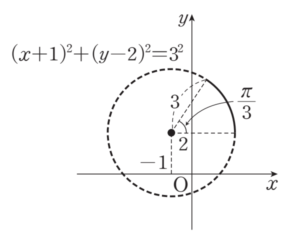
20

$\begin{cases} x=3\cos\theta-1 \\ y=3\sin\theta+2 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+1=3\cos\theta \\ y-2=3\sin\theta \end{cases}$

$(x+1)^2+(y-2)^2=9(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})$

$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 자취는 중심이 $(-1,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3, 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 호이다.



따라서 점 P의 자취의 길이는

$3\times\frac{\pi}{3}=\pi$

답 π

21

반지름의 길이가 5, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 4개의 호의 길이는

$4\times5\theta=20\theta$

반지름의 길이가 3인 부채꼴 4개의 중심각의 크기의 합이 $2\pi-4\theta$이므로 호의 총 길이는

$3\times(2\pi-4\theta)=6\pi-12\theta$

길이가 2인 선분이 8개 있으므로

$2\times8=16$

따라서 바깥쪽 둘레의 길이의 합은

$20\theta+(6\pi-12\theta)+16=6\pi+8\theta+16$

즉, $6\pi+8\theta+16=6\pi+20$에서

$8\theta=4 \qquad \therefore \theta=\frac{1}{2}$

답 ①

22

조건 (가)에서 $|\beta-\alpha|=\frac{\pi}{6}$이므로

$\beta=\alpha-\frac{\pi}{6}$ 또는 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{6}$

조건 (나)에서 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경은 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+\beta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (n은 정수) ……㉠

이때, $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$이므로 $0<\alpha+\beta<4\pi$

$0<2n\pi+\frac{3}{2}\pi<4\pi \qquad \therefore -\frac{3}{4}<n<\frac{5}{4}$

n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $\beta=\alpha-\frac{\pi}{6}$인 경우

이것을 ㉠에 대입하면

$2\alpha-\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

① $n=0$일 때,

$2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$, $2\alpha=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

② $n=1$일 때,

$2\alpha-\frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{3}{2}\pi$, $2\alpha=\frac{11}{3}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{11}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{3}\pi$

①, ②에서

$\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha=\frac{11}{6}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

(ii) $\beta=\alpha+\frac{\pi}{6}$인 경우

이것을 ㉠에 대입하면

$2\alpha+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$에서

③ $n=0$일 때,

$2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$, $2\alpha=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

④ $n=1$일 때,

$2\alpha+\frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{3}{2}\pi$, $2\alpha=\frac{10}{3}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{5}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$

③, ④에서

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\alpha=\frac{5}{3}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$

(i), (ii)에서

$\frac{\alpha}{\beta}$의 최댓값은 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$일 때 $M=\frac{5}{4}$,

$\frac{\alpha}{\beta}$의 최솟값은 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$일 때 $m=\frac{4}{5}$

$\therefore M+n=\frac{5}{4}+\frac{4}{5}=\frac{41}{20}$

답 $\frac{41}{20}$

유형 연습 **06** 삼각함수의 그래프 본문 pp.143~154

01-1 14π	**01-2** 8π	**01-3** $\frac{5}{3}\pi$
02-1 -4π	**02-2** $\frac{7}{2}$	**02-3** -2π
03-1 6	**03-2** ㄱ	**03-3** 17
04-1 1	**04-2** $\frac{16}{25}$	**04-3** 1
05-1 9	**05-2** 15	**05-3** $\frac{4}{3}\pi$
06-1 3π	**06-2** $\frac{13}{6}\pi$	**06-3** $-4\le a\le 5$
07-1 $\frac{\pi}{3}$	**07-2** -3	**07-3** $\frac{5}{3}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$
08-1 5	**08-2** 12	**08-3** 0

01-1

함수 $y=-2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-4=-2\cos 3\left\{\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}+1$$

$$y=-2\cos 3\left\{\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}+5$$

$$=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+5$$

이므로 $M=|-2|+5=7$, $m=-|-2|+5=3$,

$$a=\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore\ aMm=\frac{2}{3}\pi\times 7\times 3=14\pi$$

답 14π

01-2

$$f(x)=a\tan(bx+c)+d=a\tan b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$$

이때, $b<0$이고, 주기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$-\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{4}\qquad \therefore\ b=-4$$

또한, 함수 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-(-1)=a\tan b\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$y=a\tan b\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1$$

$$\therefore\ d=-1$$

주기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{c}{b}=-\frac{\pi}{8}+\frac{n}{4}\pi\ (n\text{은 정수})\text{에서}$$

$$-\frac{c}{4}=-\frac{\pi}{8}+\frac{n}{4}\pi,\ c=\frac{\pi}{2}-n\pi$$

이때, $0<c<\pi$이므로 $c=\frac{\pi}{2}$

즉, $f(x)=a\tan\left(-4x+\frac{\pi}{2}\right)-1$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right)=a\tan\left(-4\times\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)-1$$

$$=a\tan\frac{\pi}{4}-1$$

$$=a-1$$

$a-1=3$에서 $a=4$

$$\therefore\ abcd=4\times(-4)\times\frac{\pi}{2}\times(-1)=8\pi$$

답 8π

01-3

함수 $y=\tan(ax+b)-3$의 주기가 4π이고, $a>0$이므로

$$\frac{\pi}{a}=4\pi\qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$$

함수 $y=\tan\left(\frac{1}{4}x+b\right)-3$의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{1}{4}x+b=n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\text{은 정수})$$

$$\therefore\ x=4n\pi+2\pi-4b$$

즉, $2\pi-4b=4k\pi+\frac{\pi}{3}$ (k는 정수)에서

문제에서 주어진 점근선의 방정식

$$b=\frac{\pi}{2}-k\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{5}{12}\pi-k\pi$$

이때, $0<b<\pi$이므로 $b=\frac{5}{12}\pi$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{\frac{5}{12}\pi}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}\pi$$

답 $\frac{5}{3}\pi$

보충설명

함수 $y=\tan\left(\frac{x}{4}+b\right)-3$의 그래프는 함수 $y=\tan\frac{x}{4}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-4b$만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\tan\frac{x}{4}$의 그래프의 점근선을 x축의 방향으로 $-4b$만큼 평행이동하면 함수 $y=\tan\left(\frac{x}{4}+b\right)-3$의 그래프의 점근선과 일치한다.

이때, 점근선의 방정식이 $x=4n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수)가 되도록 하는 b의 값은 무수히 많다. 따라서 주어진 범위를 만족시키는 b를 찾아야 한다.

02-1

함수 $y=a\cos(bx+c)+d$에서 $a>0$이고 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$a+d=4,\ -a+d=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ d=2$

주어진 그래프에서 주기가 $2\pi-\pi=\pi$이고 $b<0$이므로

$\frac{2\pi}{-b}=\pi \qquad \therefore\ b=-2$

$\therefore\ y=2\cos(-2x+c)+2$

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=2\cos c+2,\ \cos c=0$

$\therefore\ c=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<c<\pi)$

$\therefore\ abcd=2\times(-2)\times\frac{\pi}{2}\times2=-4\pi$

답 -4π

02-2

함수 $f(x)=a\sin(bx+c)+d$에서 $a>0$이고 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 2이므로

$a+d=4,\ -a+d=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ d=3$

그래프에서 함수 $f(x)$의 주기가 4π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi \qquad \therefore\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+c\right)+3$

$f(0)=4$에서

$4=\sin c+3,\ \sin c=1$

$\therefore\ c=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<c<\pi)$

따라서 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+3$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$

답 $\frac{7}{2}$

02-3

함수 $y=a\tan(bx+c)$의 그래프에서 주기는

$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이므로 $\frac{\pi}{|b|}=\frac{2}{3}\pi,\ |b|=\frac{3}{2}$

$b>0$이므로 $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ y=a\tan\left(\frac{3}{2}x+c\right)=a\tan\left\{\frac{3}{2}\left(x+\frac{2}{3}c\right)\right\}$

따라서 주어진 그래프는 $y=a\tan\frac{3}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}c$만큼 평행이동한 것이므로

$-\pi<c<0$에서 $0<-\frac{2}{3}c<\frac{2}{3}\pi$

주어진 그래프는 $0<x<\frac{2}{3}\pi$에서 x축과 $x=\frac{\pi}{3}$에서 만나므로

$-\frac{2}{3}c=\frac{\pi}{3} \qquad \therefore\ c=-\frac{\pi}{2}$

또한, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{8}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{8}{3}=a\tan\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=a\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ a=\frac{8}{3}$

$$\therefore\ abc=\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-2\pi$$

답 -2π

03-1

$f(x)=a|\sin bx|+c$에서

함수 $f(x)$의 최댓값이 3이고, $a>0$이므로

$a+c=3$ ······㉠

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $(\because\ b>0)$ $\therefore\ b=3$

$\therefore\ f(x)=a|\sin 3x|+c$

$f\left(\frac{7}{18}\pi\right)=2$이므로

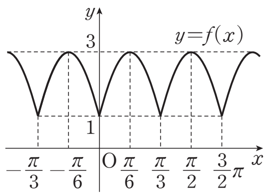
$a\left|\sin\frac{7}{6}\pi\right|+c=2$

$\therefore\ \frac{1}{2}a+c=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ c=1$

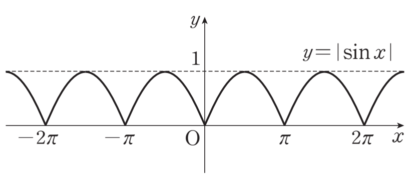
$\therefore\ a+b+c=2+3+1=6$



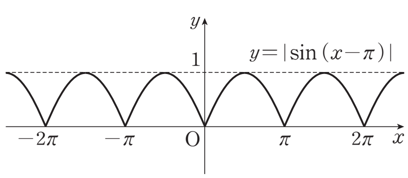
답 6

03-2

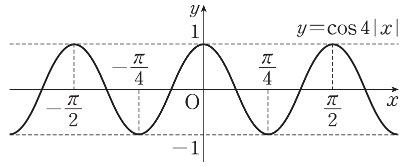
함수 $f(x)=|\sin x|$의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 π이다.



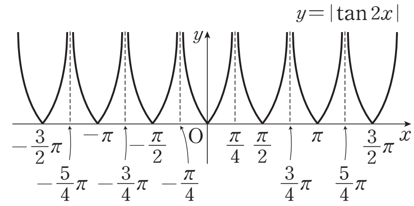
ㄱ. 함수 $y=|\sin(x-\pi)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이므로 주기는 π이다.



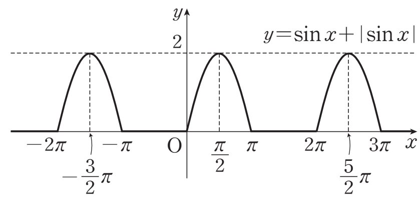
ㄴ. 함수 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이므로 함수 $y=\cos 4|x|$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.



ㄷ. 함수 $y=|\tan x|$의 주기는 π이므로 함수 $y=|\tan 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



ㄹ. 함수 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 2π이다.



따라서 함수 $f(x)=|\sin x|$와 주기가 같은 함수는 ㄱ이다.

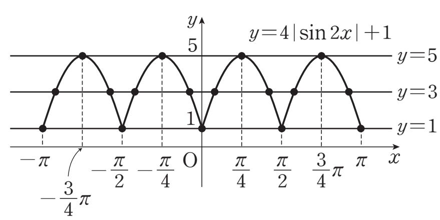
답 ㄱ

03-3

$-\pi\le x\le\pi$에서 함수 $y=4|\sin 2x|+1$의 최댓값은 $4+1=5$, 최솟값은 $0+1=1$

함수 $y=|\sin x|$의 주기가 π이므로 함수 $y=4|\sin 2x|+1$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 함수 $y=4|\sin 2x|+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $a_1=5$, $a_3=8$, $a_5=4$이므로

$a_1+a_3+a_5=5+8+4=17$

답 17

04-1

$$\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\tan^2(\pi-\theta)}+\frac{1}{\sin(2\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{-\sin\theta}{\sin\theta\times\tan^2\theta}+\frac{1}{\sin\theta\times\sin\theta}$$

$$=-\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\ \left(\because\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$=1$$

답 1

04-2

$$\frac{\sin(\pi-\theta)\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin(2\pi-\theta)\tan^2(\pi-\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta\times(-\cos\theta)}{\frac{1}{\tan\theta}}\times\frac{\sin\theta}{-\sin\theta\tan^2\theta}$$

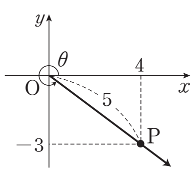
$$=\tan\theta\times(-\sin\theta\cos\theta)\times\left(-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\cos\theta\times\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\sin\theta\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cos^2\theta$$

이때, 원점 O와 점 P$(4,\ -3)$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이므로



$$\cos\theta=\frac{4}{5}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

답 $\dfrac{16}{25}$

04-3

$\tan(90^\circ-\theta^\circ)=\dfrac{1}{\tan\theta^\circ}$이므로

$\tan1^\circ\times\tan2^\circ\times\tan3^\circ\times\cdots\times\tan89^\circ$

$=\dfrac{1}{\cancel{\tan89^\circ}}\times\dfrac{1}{\cancel{\tan88^\circ}}\times\cdots\times\tan45^\circ$

$\times\cdots\times\cancel{\tan88^\circ}\times\cancel{\tan89^\circ}$

$=\tan45^\circ=1$

답 1

다른풀이

$\sin(90^\circ-\theta^\circ)=\cos\theta^\circ$이므로

$\tan1^\circ\times\tan2^\circ\times\tan3^\circ\times\cdots\times\tan89^\circ$

$$=\frac{\sin1^\circ}{\cos1^\circ}\times\frac{\sin2^\circ}{\cos2^\circ}\times\frac{\sin3^\circ}{\cos3^\circ}\times\cdots\times\frac{\sin89^\circ}{\cos89^\circ}$$

$$=\frac{\cancel{\cos89^\circ}}{\cancel{\cos1^\circ}}\times\frac{\cancel{\cos88^\circ}}{\cancel{\cos2^\circ}}\times\frac{\cancel{\cos87^\circ}}{\cancel{\cos3^\circ}}\times\cdots\times\frac{\cancel{\cos1^\circ}}{\cancel{\cos89^\circ}}$$

$$=1$$

05-1

$$y=-2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)-2\cos^2\theta+4\sin(\pi+\theta)+2$$

$$=-2\cos^2\theta-2\cos^2\theta-4\sin\theta+2$$

$$=-4\cos^2\theta-4\sin\theta+2$$

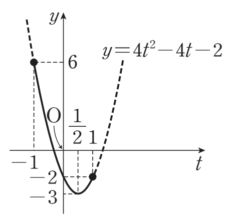
$$=-4(1-\sin^2\theta)-4\sin\theta+2$$

$$=4\sin^2\theta-4\sin\theta-2$$

이때, $\sin x=t\ (-1\le t\le1)$로 놓으면

$$y=4t^2-4t-2$$

$$=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-3$$



따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$t=-1$일 때 최댓값 $M=6$,

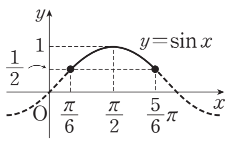
$t=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $m=-3$을 갖는다.

$\therefore\ M-m=6-(-3)=9$

답 9

05-2

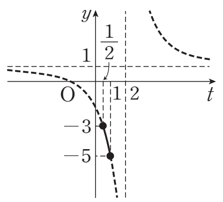
$y=\dfrac{\sin x+4}{\sin x-2}$에서 $\sin x=t$로 놓으면



$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5}{6}\pi$에서 $\dfrac{1}{2}\le t\le 1$

$y=\dfrac{t+4}{t-2}=\dfrac{6}{t-2}+1$ ……㉠

즉, ㉠의 그래프는 함수 $y=\dfrac{6}{t}$의 그래프를 t축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $M=-3$,

$t=1$일 때 최솟값 $m=-5$를 갖는다.

$\therefore\ Mm=(-3)\times(-5)=15$

답 15

05-3

$y=\dfrac{4\cos^2 x+1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{4\cos^2 x+1}{\cos x}=4\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\ge 2\sqrt{4\cos x\times\dfrac{1}{\cos x}}$$
$$=4$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4\cos x=\dfrac{1}{\cos x}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 주어진 함수의 최솟값 $b=4$이다.

$4\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$에서 $4\cos^2 x=1$

$\therefore\ \cos^2 x=\dfrac{1}{4}$

이때, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore\ a=x=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ ab=\dfrac{\pi}{3}\times 4=\dfrac{4}{3}\pi$

답 $\dfrac{4}{3}\pi$

06-1

$\sqrt{3}\tan x+2\sin x=0$에서

$\sqrt{3}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}+2\sin x=0\ (\cos x\ne 0)$

$\sqrt{3}\sin x+2\sin x\cos x=0$

$\sin x(\sqrt{3}+2\cos x)=0$

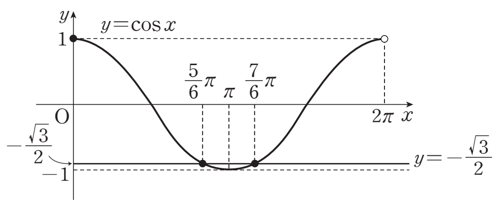
$\therefore\ \sin x=0$ 또는 $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때,

$x=0$ 또는 $x=\pi$ $(\because\ 0\le x<2\pi)$

(ii) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$은 다음 그림과 같다.



$\therefore\ x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$0+\pi+\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{7}{6}\pi=3\pi$

답 3π

06-2

$\cos(\pi\sin x)=0$에서

$\pi\sin x=t$로 놓으면

$0\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$에서 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-\pi\le t\le\pi$

$\cos t=0$을 만족시키는 t의 값은

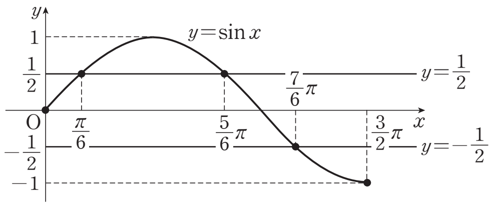
$t=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $t=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because\ -\pi\le t\le\pi)$

즉, $\pi\sin x=-\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\pi\sin x=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 두 직선

$y=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



$\sin x=-\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{7}{6}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$

답 $\frac{13}{6}\pi$

06-3

$4\sin^2 x-4\cos x-a=0$에서

$4(1-\cos^2 x)-4\cos x=a$

$-4\cos^2 x-4\cos x+4=a$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y=-4\cos^2 x-4\cos x+4$의 그래프와 직선 $y=a$가 교점을 가져야 한다.

$y=-4\cos^2 x-4\cos x+4$에서

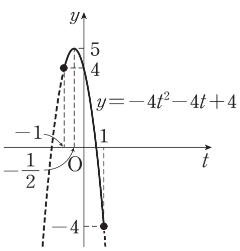
$\cos x=t$로 놓으면

$-1 \le t \le 1$이고

$y=-4t^2-4t+4$

$\quad =-4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+5$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 그래프와 직선 $y=a$가 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$-4 \le a \le 5$

답 $-4 \le a \le 5$

다른풀이

$4\sin^2 x-4\cos x-a=0$에서

$4(1-\cos^2 x)-4\cos x=a$

$4\cos^2 x+4\cos x+a-4=0$

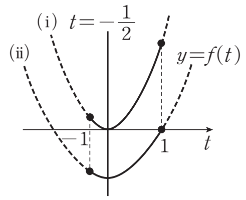
이때, $\cos x=t$ $(-1 \le t \le 1)$로 놓으면

$4t^2+4t+a-4=0$ ……㉠

$f(t)=4t^2+4t+a-4$라 하면

$f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+a-5$

이므로 t에 대한 방정식 ㉠이 $-1 \le t \le 1$에서 실근을 가지려면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 (i)과 (ii) 사이에 존재해야 한다.



(i) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=a-5 \le 0$ $\quad \therefore a \le 5$

(ii) $f(1)=4+4+a-4 \ge 0$

$\quad 4+a \ge 0$ $\quad \therefore a \ge -4$

(i), (ii)에서 $-4 \le a \le 5$

07-1

$2\cos^2 x+(\sqrt{3}-6)\sin x+3\sqrt{3}-2 \le 0$에서

$2(1-\sin^2 x)+(\sqrt{3}-6)\sin x+3\sqrt{3}-2 \le 0$

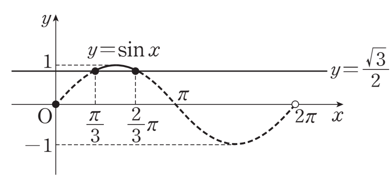
$2\sin^2 x+(6-\sqrt{3})\sin x-3\sqrt{3} \ge 0$

$(\sin x+3)(2\sin x-\sqrt{3}) \ge 0$

이때, $-1 \le \sin x \le 1$에서 $\sin x+3>0$이므로

$2\sin x-\sqrt{3} \ge 0$, $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$

즉, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

답 $\frac{\pi}{3}$

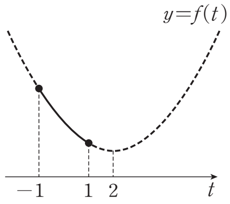
07-2

$\sin^2\theta-4\sin\theta-k\geq 0$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면

$-1\leq t\leq 1$이고 $t^2-4t-k\geq 0$

$f(t)=t^2-4t-k$라 하면

$f(t)=(t-2)^2-k-4$



오른쪽 그림과 같이 $-1\leq t\leq 1$에서 $f(t)$는 $t=1$일 때, 최솟값 $-k-3$을 갖는다.

즉, $-1\leq t\leq 1$에서 $f(t)\geq 0$이 항상 성립하려면 (최솟값)$=-k-3\geq 0$이어야 하므로 $k\leq -3$

따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다.

답 -3

07-3

$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$에서 $0<\cos x<1$ ······㉠

이때, $0<2\cos x<2$이고, 삼각형의 세 변의 길이가 1, 2, $2\cos x$이므로 가장 긴 변의 길이는 2이다. 삼각형이 될 조건에 의하여 (가장 긴 변의 길이)$<$(나머지 두 변의 길이의 합)이므로

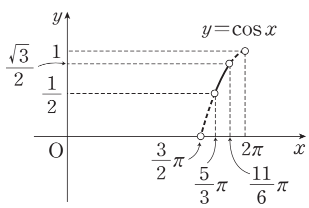
$2<1+2\cos x$에서 $\cos x>\frac{1}{2}$ ······㉡

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$1+(2\cos x)^2<2^2$에서 $4\cos^2 x<3$

$\cos^2 x<\frac{3}{4}$ $\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\frac{1}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 구하는 x의 값의 범위는

$\frac{5}{3}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

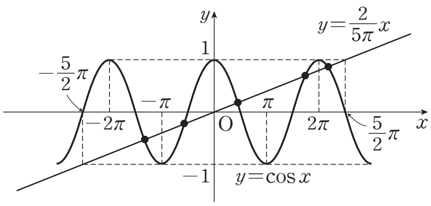
답 $\frac{5}{3}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$

08-1

방정식 $\cos x=\frac{2}{5\pi}x$의 실근의 개수는 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5\pi}x$의 교점의 개수와 같다.

직선 $y=\frac{2}{5\pi}x$는 두 점 $\left(-\frac{5}{2}\pi,\ -1\right)$, $\left(\frac{5}{2}\pi,\ 1\right)$을 지나므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

$x<-\frac{5}{2}\pi$ 또는 $x>\frac{5}{2}\pi$에서 두 그래프는 만나지 않는다.



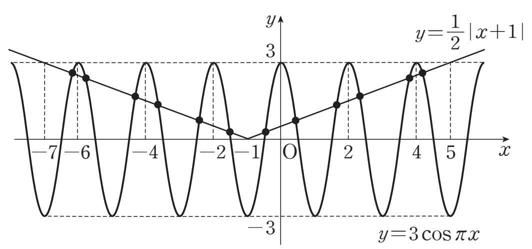
따라서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5\pi}x$의 교점은 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 5

08-2

방정식 $3\cos\pi x=\frac{1}{2}|x+1|$의 실근은 함수 $y=3\cos\pi x$의 그래프와 함수 $y=\frac{1}{2}|x+1|$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

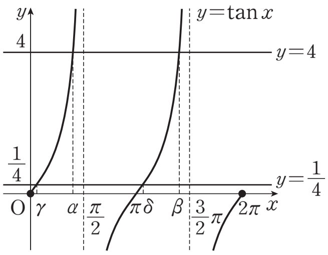
함수 $y=3\cos\pi x$의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3이고 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이고, 함수 $y=\frac{1}{2}|x+1|$의 그래프는 두 점 $(-7,\ 3)$, $(5,\ 3)$을 지나므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=3\cos\pi x$, $y=\frac{1}{2}|x+1|$의 그래프의 교점은 12개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 12이다.

답 12

08-3



$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\tan x=4$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=4$의 두 교점의 x좌표가 각각 α, β이다.

이때, $\alpha<\beta$라 하면 $\beta=\pi+\alpha$

$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\tan x=\frac{1}{4}$의 서로 다른 두 실근이 γ, δ이므로 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$의 두 교점의 x좌표가 각각 γ, δ이다.

이때, $\gamma<\delta$라 하면 $\delta=\pi+\gamma$

$\tan\alpha=4$, $\tan\gamma=\frac{1}{4}$이므로

$\tan\alpha=\frac{1}{\tan\gamma}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$에서

$\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}-\gamma$ (n은 정수)

$\alpha+\gamma=n\pi+\frac{\pi}{2}$

그런데 $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$ ……㉠

$\therefore\ \beta+\delta=(\pi+\alpha)+(\pi+\gamma)$

$=2\pi+(\alpha+\gamma)=\frac{5}{2}\pi$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=3\pi$이므로

$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\sin 3\pi=0$

답 0

개념마무리

본문 pp.155~158

01 ⑤	**02** -3	**03** $\pi-6$	**04** ③
05 $\frac{11}{6}\pi$	**06** 17	**07** ②	**08** ③
09 $\frac{17}{10}$	**10** $\frac{99}{2}$	**11** $-\frac{5}{6}$	**12** ②
13 $\frac{\pi}{6}$	**14** 4π	**15** ④	**16** 풀이참조
17 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$	**18** 3	**19** 12초	**20** $\frac{8}{15}$
21 10	**22** 24	**23** 109	**24** 3

01

주기가 p인 함수 $f(x)$는

$f(x+np)=f(x)$ (n은 정수)

ㄱ. 함수 $y=\sin x$의 주기가 2π이므로 함수

$f(x)=\sin 2x+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore\ f(x+n\pi)=f(x)$

따라서 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $y=\tan x$의 주기가 π이므로 함수

$f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

$\therefore\ f(x+2n)=f(x)$

$n=1$일 때, $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다.

ㄷ. 함수 $f(x)=|\cos x|$의 주기가 π이므로 함수

$f(x)=|\cos\pi x|$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$

$\therefore\ f(x+n)=f(x)$

$n=2$일 때, $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다.

ㄹ. 함수 $y=\sin x$의 주기가 2π이므로 함수

$f(x)=\sin 3\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ f\left(x+\frac{2}{3}n\right)=f(x)$

$n=3$일 때, $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다.

그러므로 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

02

함수 $y=3\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3\tan\left\{\frac{\pi}{2}-2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right\}-1+3$$
$$=3\tan\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)+2$$

이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=3\tan\left\{\frac{2}{3}\pi-2(-x)\right\}+2$$
$$=3\tan\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+2$$

따라서 주기 $a=\frac{\pi}{2}$이고 점근선의 방정식은

$2x+\frac{2}{3}\pi=m\pi+\frac{\pi}{2}$, $2x=m\pi-\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ x=\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{12}$ (m은 정수)

이때, $-\frac{\pi}{2}<c<0$이므로 $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{\pi}{12}$

$$\therefore\ \frac{ab}{c}=\frac{\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{12}}=-3$$

답 -3

03

주어진 함수의 그래프에서 $a<0$이고 최댓값이 2, 최솟값이 -4이므로

$-a+d=2$, $a+d=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $d=-1$

주기가 $2\left\{\frac{4}{3}\pi-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=4\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=4\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$

즉, 곡선 $y=-3\cos\left(\frac{1}{2}x+c\right)-1$이 점 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$-\frac{5}{2}=-3\cos c-1$, $\cos c=\frac{1}{2}$

$\therefore\ c=\frac{\pi}{3}\ \left(\because\ 0\le c\le\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ a+2b+3c+4d=-3+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\pi}{3}+4\times(-1)$$
$$=\pi-6$$

답 $\pi-6$

04

$$f(x)=2\tan\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)-1$$
$$=2\tan\left\{-3\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}-1$$

① 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

② 주기는 $\frac{\pi}{3}$이므로

$f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f(x+\pi)=\cdots$

즉, $f(x)=f(x+\pi)$가 성립한다. (참)

③ 함수 $y=2\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$

이것을 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

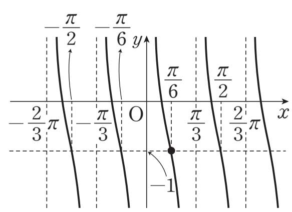
$-y=2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$

$$\therefore\ y=-2\tan 3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$$
$$=-2\tan\left(3x-\frac{3}{2}\pi\right)+1$$
$$=2\tan\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)+1$$

$\tan(-x)=-\tan x$

이 식은 함수 $f(x)$와 같지 않다. (거짓)

④ 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $\left(\frac{\pi}{6},\ -1\right)$에 대하여 대칭이다. (참)



⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 정수 n에 대하여

$-3x+\frac{3}{2}\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ x=\frac{1-n}{3}\pi$ (참)

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

05

조건 (나)에서 함수 f는 주기가 3이고, $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=3$에서 $b=\frac{2}{3}\pi$

조건 (다)에서 최댓값은 8, 최솟값은 -2이고, $a>0$이므로

$a+d=8,\ -a+d=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=5,\ d=3$

$\therefore\ f(x)=5\sin\left(\frac{2}{3}\pi x+c\right)+3$

조건 (가)에서 $f(2)=\frac{1}{2}$이므로

$5\sin\left(\frac{4}{3}\pi+c\right)+3=\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{4}{3}\pi+c\right)=-\frac{1}{2}$

$\frac{4}{3}\pi+c=\frac{11}{6}\pi\ \left(\because\ 0<c\leq\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ ab-cd=5\times\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\times3$

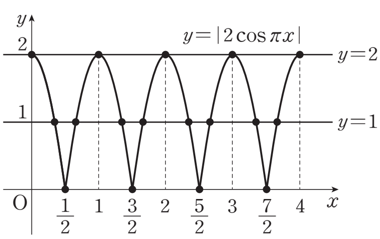
$=\frac{11}{6}\pi$

답 $\frac{11}{6}\pi$

06

함수 $y=|2\cos\pi x|$의 최댓값은 2, 최솟값은 0이고 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.

따라서 $0\leq x\leq4$에서 함수 $y=|2\cos\pi x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, y좌표가 정수이므로 y좌표가 될 수 있는 값은

0, 1, 2

함수 $y=|2\cos\pi x|$의 그래프와 직선 $y=0$의 교점의 개수는 4,

함수 $y=|2\cos\pi x|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 8,

함수 $y=|2\cos\pi x|$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 5

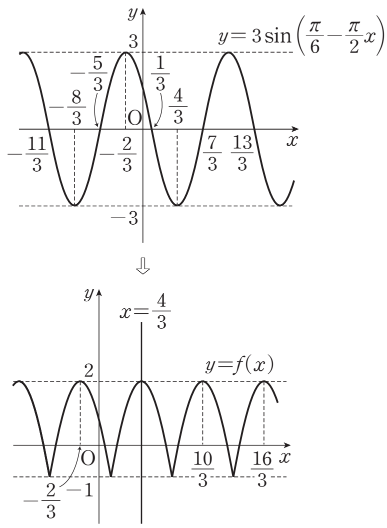
그러므로 y좌표가 정수인 점의 개수는

$4+8+5=17$

답 17

07

함수 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)$의 그래프를 이용하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $-1\leq\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)\leq1$이므로

$0\leq3\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)\right|\leq3$

$\therefore\ -1\leq3\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1\leq2$

따라서 치역은 $\{y\,|\,-1\leq y\leq2\}$이다. (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 함수 $y=f(x)$는 직선 $x=\frac{4}{3}$에 대하여 대칭이므로 $f\left(\frac{4}{3}+x\right)=f\left(\frac{4}{3}-x\right)$ (참)

ㄷ. 위의 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 주기는 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 p는 2의 배수이다. 따라서 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 100 이하의 자연수 p의 개수는 $\frac{100}{2}=50$이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

다른풀이

ㄴ. $f\left(\frac{4}{3}+x\right)=3\left|\sin\left\{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{4}{3}+x\right)\right\}\right|-1$

$=3\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$=3\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$\sin(-x)=-\sin x$

$=3\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$=3\left|-\cos\frac{\pi}{2}x\right|-1$

$=3\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|-1$

$f\left(\frac{4}{3}-x\right)=3\left|\sin\left\{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{4}{3}-x\right)\right\}\right|-1$

$=3\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$=3\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$\sin(-x)=-\sin x$

$=3\left|-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\right|-1$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$=3\left|-\cos\frac{\pi}{2}x\right|-1$

$=3\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|-1$

$\therefore f\left(\frac{4}{3}+x\right)=f\left(\frac{4}{3}-x\right)$ (참)

08

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=-f(x)$

$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 x 대신 $x+\frac{\pi}{3}$를 대입하면

$f(x)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$ ……㉠

ㄱ. $f(x)=2\sin(3x+\pi)=-2\sin 3x$

$f(-x)=-2\sin(-3x)=2\sin 3x$

$\therefore f(x)=-f(-x)$

또한, 함수 $y=f(x)$의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$f(x)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

ㄴ. $f(x)=\tan\left(\pi-\frac{x}{3}\right)=-\tan\frac{x}{3}$

$f(-x)=-\tan\left(-\frac{x}{3}\right)=\tan\frac{x}{3}$

$\therefore f(x)=-f(-x)$

또한, 함수 $y=f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$이므로

$f(x)=f(x+3n\pi)$ (n은 정수)

이때, ㉠을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=-2\cos\left(6x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)$

$=-2\sin 6x$

$f(-x)=-2\sin(-6x)=2\sin 6x$

$\therefore f(x)=-f(-x)$

또한, 함수 $y=f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이므로

$f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

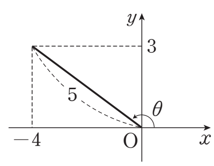
답 ③

09

직선 $3x+4y+1=0$의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로

$\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$이므로 삼각함수의 정의에 의하여



$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\frac{\sin(3\pi-\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\cos(\theta-\pi)}{1+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\cos\theta-\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{-\cos\theta(\sin^2\theta+1)}{\cos^2\theta}=-\frac{\sin^2\theta+1}{\cos\theta}$

$=-\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2+1}{-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{34}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{17}{10}$

답 $\frac{17}{10}$

10

A$=$P$_0$, B$=$P$_{100}$이라 하고,

$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OP}_n=\theta$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100)$라 하면

$100\theta=\frac{\pi}{2}$

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OA}=n\theta$이므로 $f(n)=\sin n\theta$

$\therefore\ \{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\cdots+\{f(99)\}^2$

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 99\theta$

(가)

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 50\theta$

$+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-49\theta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-48\theta\right)$

$+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-47\theta\right)+\cdots+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 50\theta$

$+\cos^2 49\theta+\cos^2 48\theta+\cos^2 47\theta+\cdots+\cos^2\theta$

(나)

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$

$+\cdots+(\sin^2 49\theta+\cos^2 49\theta)+\sin^2 50\theta$

$=1\times 49+\sin^2\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ 50\theta=\frac{\pi}{4}\right)$

$=49+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{99}{2}$

(다)

답 $\frac{99}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\cdots+\{f(99)\}^2$을 사인함수로 나타낸 경우	40%
(나)	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$를 이용하여 식을 간단히 한 경우	40%
(다)	식의 값을 구한 경우	20%

11

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x\ne 0$이므로

$$y=\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin x+2\cos x}-2=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}+3}{\frac{\sin x}{\cos x}+2}-2$$

$$=\frac{2\tan x+3}{\tan x+2}-2$$

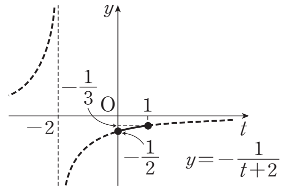
$\tan x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $0\le t\le 1$이고

$$y=\frac{2t+3}{t+2}-2=-\frac{1}{t+2}$$

$0\le t\le 1$에서 함수

$y=-\frac{1}{t+2}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로



$t=1$일 때 최댓값 $M=-\frac{1}{3}$,

$t=0$일 때 최솟값 $m=-\frac{1}{2}$을 갖는다.

$\therefore\ M+m=-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{6}$

답 $-\frac{5}{6}$

12

$f(x)=x^2-2x\cos\theta+2\sin^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2-\cos^2\theta+2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2+2-3\cos^2\theta$

즉, 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta,\ 2-3\cos^2\theta)$

꼭짓점과 원점 사이의 거리를 l이라 하면

$l=\sqrt{\cos^2\theta+(2-3\cos^2\theta)^2}$

$=\sqrt{9\cos^4\theta-11\cos^2\theta+4}$

이때, $\cos^2\theta=t$로 놓으면 $0\le t\le 1$이고

$l=\sqrt{9t^2-11t+4}=\sqrt{9\left(t-\frac{11}{18}\right)^2+\frac{23}{36}}$

따라서 $t=0$일 때 최댓값 $\sqrt{4}=2$,

$t=\frac{11}{18}$일 때 최솟값 $\sqrt{\frac{23}{36}}=\frac{\sqrt{23}}{6}$을 가지므로 꼭짓점과 원점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\frac{\sqrt{23}}{6}$

답 ②

13

이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+1-\sin\theta=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2\cos\theta,\ \alpha\beta=1-\sin\theta$

한편, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$\alpha^2+\beta^2=2$에서 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2$

$(2\cos\theta)^2-2(1-\sin\theta)=2,\ 4\cos^2\theta-2+2\sin\theta=2$

$4(1-\sin^2\theta)-2+2\sin\theta=2,\ 4\sin^2\theta-2\sin\theta=0$

$2\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore\ \sin\theta=0$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=0$에서 $\theta=0$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$

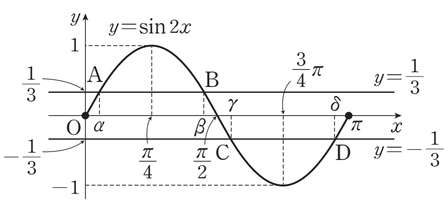
따라서 모든 θ의 값의 합은

$0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

답 $\frac{\pi}{6}$

14

함수 $y=\sin 2x\ (0\le x\le\pi)$의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\qquad\cdots\cdots㉠$

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi\qquad\therefore\ \gamma+\delta=\frac{3}{2}\pi\qquad\cdots\cdots㉡$

두 점 B, C는 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

←두 점 A, D도 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로 $\alpha+\delta=\pi$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\qquad\therefore\ \beta+\gamma=\pi\qquad\cdots\cdots㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서

$\alpha+3\beta+3\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+2(\beta+\gamma)+(\gamma+\delta)$

$=\frac{\pi}{2}+2\times\pi+\frac{3}{2}\pi=4\pi$

답 4π

15

이차방정식 $6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$4(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta<0$

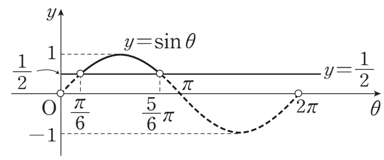
$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$

$-1\le\sin\theta\le1$에서 $\sin\theta+2>0$이므로

$2\sin\theta-1>0\qquad\therefore\ \sin\theta>\frac{1}{2}$

$0<\theta<2\pi$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $\sin\theta>\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi$

즉, $\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ④

16

$4^{\cos^2 x}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sin x}-2>0$에서

$2^{2\cos^2 x}\times2^{\sin x}-2>0,\ 2^{2\cos^2 x+\sin x}>2$

(밑)$=2>1$이므로 $2\cos^2 x+\sin x>1$

$2\cos^2 x+\sin x-1>0$

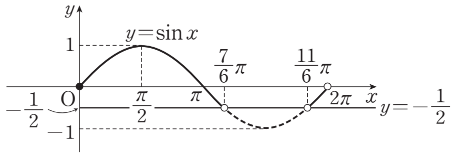
$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1>0,\ 2\sin^2 x-\sin x-1<0$

$(2\sin x+1)(\sin x-1)<0$

$-1\le\sin\theta\le1$에서 $\sin x-1\le0$이므로

$2\sin x+1>0\qquad\therefore\ \sin x>-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $\sin x>-\frac{1}{2}$의 해는

$0\le x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

그런데 $x=\frac{\pi}{2}$이면

$4^{\cos^2 x}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sin x}-2=0$이므로

$x\ne\frac{\pi}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

답 풀이참조

17

이차방정식 $2x^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x+\frac{3}{2}\cos\theta=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로 다음이 성립한다.

(ⅰ) 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\sin\theta)^2-3\cos\theta\ge0$

$2\sin^2\theta-3\cos\theta\ge0$, $2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\ge0$

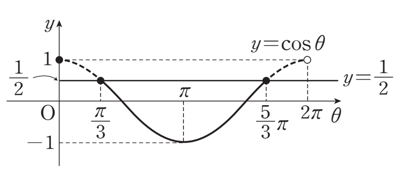
$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)\le0$

$-1\le\cos\theta\le1$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$2\cos\theta-1\le0$ $\quad\therefore \cos\theta\le\frac{1}{2}$

$0\le\theta<2\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$ $\quad\cdots\cdots$㉠

(ⅱ) $\alpha+\beta=-\sqrt{2}\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta>0$ $\quad\cdots\cdots$㉡

(ⅲ) $\alpha\beta=\frac{3}{4}\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta>0$ $\quad\cdots\cdots$㉢

㉡, ㉢에서 θ는 제1사분면의 각이다.

즉, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ $\quad\cdots\cdots$㉣

㉠, ㉣에서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

답 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

18

$1+x>0$, $1+\cos\frac{x}{2}>0$에서 $x>-1$, $\cos\frac{x}{2}>-1$

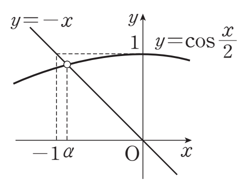
$\therefore x>-1$, $x\ne4n\pi+2\pi$ (n은 정수)

$-1<\cos\frac{x}{2}\le1$에서 $1+\cos\frac{x}{2}\le2$이므로 가장 긴 변의 길이는 2 또는 $1+x$이다.

(ⅰ) 가장 긴 변의 길이가 2일 때,

① $2>1+x$ $\quad\therefore x<1$

② $(1+x)+\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)>2$ $\quad\therefore \cos\frac{x}{2}>-x$



두 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$, $y=-x$의 그래프는 위의 그림과 같이 $-1<x<0$에서 교점이 존재한다. 이 교점의 x좌표를 α $(-1<\alpha<0)$라 하면 $\cos\frac{x}{2}>-x$이므로

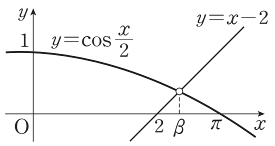
$x>\alpha$

①, ②에서 $\alpha<x<1$

(ⅱ) 가장 긴 변의 길이가 $1+x$일 때,

① $1+x>2$ $\quad\therefore\ x>1$

② $2+\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)>1+x$ $\quad\therefore\ \cos\frac{x}{2}>x-2$



두 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$, $y=x-2$의 그래프는 위의 그림과 같이 $2<x<\pi$에서 교점이 존재한다. 이 교점의 x좌표를 $\beta\ (2<\beta<\pi)$라 하면 $\cos\frac{x}{2}>x-2$이므로 $x<\beta$

①, ②에서 $1<x<\beta$

(ⅲ) $2=1+x$, 즉 $x=1$일 때,

$2-2<1+\cos\frac{1}{2}<2+2$이므로 $x=1$일 때 삼각형은 존재한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\alpha<x<\beta$

이때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<\pi$이므로 조건을 만족시키는 정수 x의 개수는 0, 1, 2의 3이다.

답 3

19

물레방아의 반지름의 길이는 $2\,\mathrm{m}$이고, 점 A가 점 P를 지날 때 지면으로부터의 높이가 $1\,\mathrm{m}$이므로 함수 $h(x)=a\sin b(x+9)+c$의 최댓값과 최솟값은 각각

(최댓값)$=2\times2+1=5$, (최솟값)$=1$

$|a|+c=5$, $-|a|+c=1$

$a+c=5$, $-a+c=1$ ($\because\ a>0$)

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $c=3$

또한, $h(0)=1$이어야 하므로

$a\sin 9b+c=1$

$2\sin 9b+3=1$, $\sin 9b=-1$

$9b=\frac{3}{2}\pi+2n\pi$ (n은 정수)

$\therefore\ b=\frac{3\pi+4n\pi}{18}$

그런데 $0<b<\frac{\pi}{3}$이므로

$0<\frac{3\pi+4n\pi}{18}<\frac{\pi}{3}$

$-\frac{3}{4}<n<\frac{3}{4}$ $\quad\therefore\ n=0$ ($\because\ n$은 정수)

$\therefore\ b=\frac{\pi}{6}$

따라서 함수 $h(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 점 A가 점 P를 지난 후, 처음으로 다시 점 P를 지나는 데 걸리는 시간은 12초이다.

답 12초

20

$\cos x=X$, $\sin x=Y$로 놓으면

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$이므로

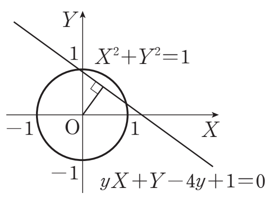
$X^2+Y^2=1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$y=\frac{\sin x+1}{-\cos x+4}$이라 하면

$y=\frac{Y+1}{-X+4}$, $Y+1=y(-X+4)$

$yX+Y-4y+1=0$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때, 오른쪽 그림과 같이 원 ㉠과 직선 ㉡이 만나려면 원의 중심 (0, 0)과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{|-4y+1|}{\sqrt{y^2+1}}\le1$

$(-4y+1)^2\le y^2+1$ ($\because\ \sqrt{y^2+1}>0$)

$15y^2-8y\le0$, $y(15y-8)\le0$

$\therefore\ 0\le y\le\frac{8}{15}$

따라서 y의 최댓값은 $\frac{8}{15}$이므로 구하는 최댓값은 $\frac{8}{15}$이다.

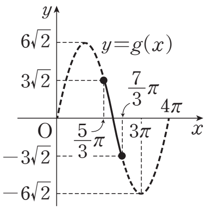
답 $\frac{8}{15}$

21

함수 $6\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$의 최댓값, 최솟값은 각각 $6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$이고

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로 $\frac{5}{3}\pi\le x\le\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=g(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ -3\sqrt{2}\le g(x)\le 3\sqrt{2}$

이때,

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=[g(x)]$

이므로

$-3\sqrt{2}\le g(x)<-4$일 때, $y=[g(x)]=-5$

$-4\le g(x)<-3$일 때, $y=[g(x)]=-4$

$-3\le g(x)<-2$일 때, $y=[g(x)]=-3$

⋮

$3\le g(x)<4$일 때, $y=[g(x)]=3$

$4\le g(x)\le 3\sqrt{2}$일 때, $y=[g(x)]=4$

따라서 $A=\{-5,\ -4,\ -3,\ \cdots,\ 3,\ 4\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 10이다.

답 10

22

곡선 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는

$4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)=2$에서

$\sin\frac{x-\pi}{4}=\frac{1}{2}$ ……㉠

이때, $0\le x\le 10\pi$이므로 $-\frac{\pi}{4}\le\frac{x-\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$

㉠에서

$\frac{x-\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{13}{6}\pi$

$\therefore\ x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

즉, 교점의 좌표는

$\left(\frac{5}{3}\pi,\ 2\right), \left(\frac{13}{3}\pi,\ 2\right), \left(\frac{29}{3}\pi,\ 2\right)$

곡선 위의 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 h라 하면 함수 $y=4\sin\frac{1}{4}(x-\pi)$의 치역이 $\{y\,|\,-4\le y\le 4\}$이고, 점 P는 직선 $y=2$ 위의 점이 아니므로

$0<h\le 6$

이때, $\overline{AB}$의 최댓값은 $\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi=8\pi$이므로

삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h\le\frac{1}{2}\times 8\pi\times 6=24\pi$

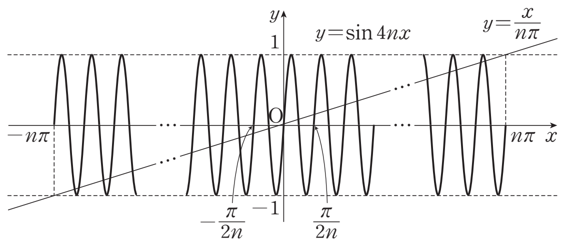
$\therefore\ k=24$

답 24

23

$-n\pi\le x\le n\pi$에서 방정식 $\sin 4nx=\frac{x}{n\pi}$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin 4nx$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{n\pi}$의 교점의 개수와 같다.

이때, 함수 $y=\sin 4nx$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{n\pi}$는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sin 4nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{4n}=\frac{\pi}{2n}$

또한, $-n\pi\le x\le n\pi$에서 $n\pi-(-n\pi)=2n\pi$이므로

$\frac{2n\pi}{\frac{\pi}{2n}}=4n^2$

즉, $-n\pi\le x\le n\pi$에서 함수 $y=\sin 4nx\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2n}\right)$의 그래프가 $4n^2$번 반복된다.

이때, $\cdots$, $-\frac{\pi}{n}\le x\le-\frac{\pi}{2n}$, $-\frac{\pi}{2n}\le x\le 0$,

$0\le x\le\frac{\pi}{2n}$, $\frac{\pi}{2n}\le x\le\frac{\pi}{n}$, $\cdots$에서 두 그래프의 교점은 각각 2개이고, 교점 $(0,\ 0)$은 $-n\pi\le x\le 0$과 $0\le x\le n\pi$의 범위에 모두 포함되므로 서로 다른 교점의 개수는

$4n^2\times 2-1=8n^2-1$

$\therefore\ a_n=8n^2-1$

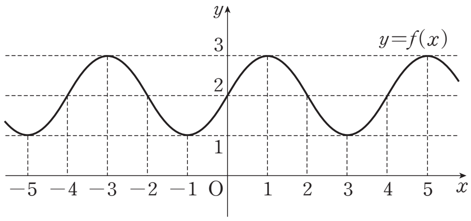
$\therefore\ a_1+a_2+a_3=7+31+71=109$

답 109

24

방정식 $\sin\frac{\pi}{2}x+2=a+\frac{1}{x+1}$의 해의 개수는 두 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x+2$, $y=a+\frac{1}{x+1}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

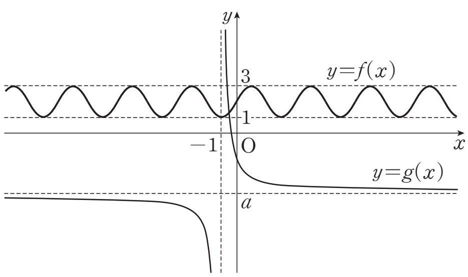
$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x+2$, $g(x)=a+\frac{1}{x+1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)=a+\frac{1}{x+1}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=a$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 다음과 같다.

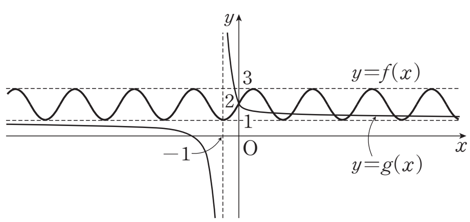
(i) $a<1$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 오직 하나이다.



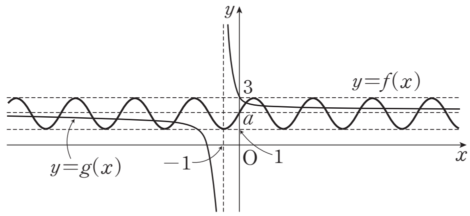
(ii) $a=1$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 무수히 많다.



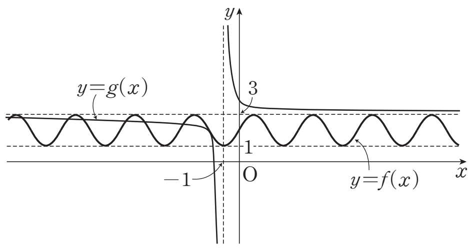
(iii) $1<a<3$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 무수히 많다.



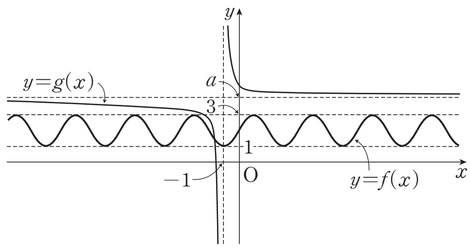
(iv) $a=3$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 무수히 많다.



(v) $a>3$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 오직 하나이다.



(i)~(v)에서 주어진 방정식의 해가 무수히 많도록 하는 정수 a의 개수는 1, 2, 3의 3이다.

답 3

유형연습 07 삼각함수의 활용 본문 pp.165~175

01-1 ㄴ	01-2 $\frac{5}{3}$	02-1 (1) $\frac{5}{4}$ (2) 1
02-2 $100\sqrt{6}$	03-1 $\frac{1}{2}$	03-2 4
03-3 $2\sqrt{3}$초	04-1 정삼각형	04-2 풀이참조
04-3 $B=90°$인 직각삼각형		05-1 $\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$
05-2 12	05-3 $4\sqrt{2}$	06-1 $16\sqrt{5}$
06-2 $\frac{4}{15}$	07-1 $60\sqrt{3}$	07-2 $14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$

01-1

ㄱ. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30°}=2R$이므로 $2R\sin 30°=2$

$\therefore\ R=2$

즉, 삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$2\times\pi\times 2=4\pi$ (거짓)

ㄴ. 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=4$이므로 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $0°<C<150°$이므로

$C=60°$ 또는 $C=120°$ (참)

ㄷ. (i) $C=60°$일 때,

$B=180°-(30°+60°)=90°$

$\frac{b}{\sin 90°}=4\qquad \therefore\ b=4$

(ii) $C=120°$일 때,

$B=180°-(30°+120°)=30°$

$\frac{b}{\sin 30°}=4$에서 $b=4\sin 30°=2$

(i), (ii)에서 $b=2$ 또는 $b=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

01-2

$\overline{\text{BM}}=\overline{\text{CM}}=k$, $\angle\text{BMA}=\theta$라 하자.

삼각형 ABM에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin\alpha}=\frac{10}{\sin\theta}\qquad \therefore\ \sin\alpha=\frac{k\sin\theta}{10}$

삼각형 AMC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin\beta}=\frac{6}{\sin(180°-\theta)}$, $\frac{k}{\sin\beta}=\frac{6}{\sin\theta}$

$\therefore\ \sin\beta=\frac{k\sin\theta}{6}$

$\therefore\ \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\frac{k\sin\theta}{6}}{\frac{k\sin\theta}{10}}=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

02-1

(1) $ab:bc:ca=3:6:4$이므로 양수 k에 대하여

$ab=3k^2$, $bc=6k^2$, $ca=4k^2$으로 놓을 수 있다.

위의 세 식을 변끼리 곱하면

$a^2b^2c^2=72k^6$

$\therefore\ abc=6\sqrt{2}k^3\ (\because\ abc>0)$

즉, $a=\frac{abc}{bc}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{6k^2}=\sqrt{2}k$,

$b=\frac{abc}{ca}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{4k^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}k$,

$c=\frac{abc}{ab}=\frac{6\sqrt{2}k^3}{3k^2}=2\sqrt{2}k$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}}{\frac{c}{2R}}=\frac{a+b}{c}$$

$$=\frac{\sqrt{2}k+\frac{3\sqrt{2}}{2}k}{2\sqrt{2}k}=\frac{5}{4}$$

(2) $A+B+C=180°$이므로

$A=B=\frac{1}{1+1+2}\times 180°=45°$,

$C=\frac{2}{1+1+2}\times 180°=90°$

삼각형 ABC의 세 변 a, b, c의 길이의 비는

$a:b:c=\sin 45°:\sin 45°:\sin 90°=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}:1$

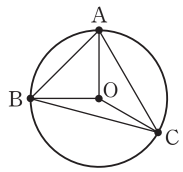
$=1:1:\sqrt{2}$

양수 k에 대하여 $a=k,\ b=k,\ c=\sqrt{2}k$로 놓으면

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{k^2+k^2}{(\sqrt{2}k)^2}=\frac{2k^2}{2k^2}=1$$

답 (1) $\frac{5}{4}$ (2) 1

02-2



오른쪽 그림과 같이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 원의 중심을 O라 하면 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$

$=C:A:B$ ← 한 원에서 부채꼴의 중심각의 크기는 원주각의 크기에 정비례한다.

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:5:4$이고, $A+B+C=180^\circ$이므로 삼각형 ABC에서

$$A=180^\circ\times\frac{5}{3+5+4}=75^\circ,$$

$$B=180^\circ\times\frac{4}{3+5+4}=60^\circ,$$

$$C=180^\circ\times\frac{3}{3+5+4}=45^\circ$$

세 변 중에서 길이가 가장 긴 변은 a이므로 나머지 두 변은 각각 $b,\ c$이다.

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$

그런데 $R=10$이므로

$b=2\times10\times\sin60^\circ=10\sqrt{3},\ c=2\times10\times\sin45^\circ=10\sqrt{2}$

$\therefore\ bc=10\sqrt{3}\times10\sqrt{2}=100\sqrt{6}$

답 $100\sqrt{6}$

03-1

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

$2\sin A=2\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\sin C$에서

$$2\times\frac{a}{2R}=2\sqrt{3}\times\frac{b}{2R}=\sqrt{3}\times\frac{c}{2R}$$

$\therefore\ 2a=2\sqrt{3}b=\sqrt{3}c$

이때, $2a=2\sqrt{3}b=\sqrt{3}c=k\ (k>0)$라 하면

$$a=\frac{k}{2},\ b=\frac{k}{2\sqrt{3}},\ c=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\left(\frac{k}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2\times\frac{k}{2\sqrt{3}}\times\frac{k}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\frac{k^2}{6}}{\frac{k^2}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

03-2

$0^\circ<\theta<180^\circ$에서 함수 $y=\cos\theta$는 θ의 값이 증가함에 따라 y의 값이 감소하므로 A가 최대일 때 $\cos A$의 값은 최소가 된다.

$\overline{AC}=x$로 놓으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{x^2+5^2-3^2}{2\times x\times5}=\frac{x^2+16}{10x}=\frac{x}{10}+\frac{8}{5x}$$

$\frac{x}{10}>0,\ \frac{8}{5x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\cos A=\frac{x}{10}+\frac{8}{5x}\geq2\sqrt{\frac{x}{10}\times\frac{8}{5x}}=\frac{4}{5}$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{10}=\frac{8}{5x}\text{일 때 성립}\right)$

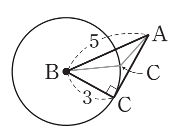
따라서 A가 최대, 즉 $\cos A$가 최소일 때 x의 값은

$\frac{x}{10}=\frac{8}{5x},\ x^2=16$에서 $x=4\ (\because\ x>0)$

따라서 $\overline{AC}=4$일 때, A는 최댓값을 갖는다.

답 4

보충설명



$\overline{BC}=3$이므로 점 C는 중심이 B이고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

(단, 점 C는 직선 AB 위에 있지 않다.)

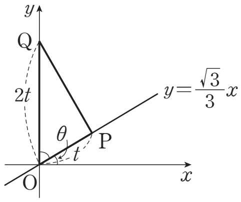
A가 최대이려면 직선 AC가 이 원과 접해야 하므로 $C=90^\circ$

즉, $\triangle ABC$는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=4$

03-3

점 P는 매초 1의 속력으로, 점 Q는 매초 2의 속력으로 움직이므로 t $(t>0)$초 후에는 $\overline{OP}=t$, $\overline{OQ}=2t$



직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\theta=30^\circ$이므로

$\angle POQ=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

이때, 삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\cos(\angle POQ)\\&=t^2+4t^2-2\times t\times 2t\times\cos 60^\circ\\&=5t^2-4t^2\times\frac{1}{2}\\&=3t^2\end{aligned}$$

즉, $\overline{PQ}=6$일 때 $3t^2=6^2$에서

$t^2=12$ $\quad\therefore t=2\sqrt{3}$ $(\because t>0)$

따라서 두 점 P, Q가 원점을 출발하여 $\overline{PQ}=6$이 될 때까지 걸리는 시간은 $2\sqrt{3}$(초)이다.

답 $2\sqrt{3}$초

04-1

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$a\sin B=b\sin C=c\sin A$에서

$a\times\frac{b}{2R}=b\times\frac{c}{2R}=c\times\frac{a}{2R}$

$\therefore ab=bc=ca$

(i) $ab=bc$에서 $a=c$ $(\because b>0)$

(ii) $ab=ca$에서 $b=c$ $(\because a>0)$

(i), (ii)에서 $a=b=c$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

답 정삼각형

04-2

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$에서 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\frac{a}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

$c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

$\therefore a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$ $(\because a>0,\ b>0)$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 풀이참조

04-3

이차함수 $y=(\sin C+\cos A)x^2-2x\cos B-\sin C$의 그래프와 직선 $y=-\cos A$가 오직 한 점에서 만나므로 이차방정식 $(\sin C+\cos A)x^2-2x\cos B-\sin C=-\cos A$

즉, $(\sin C+\cos A)x^2-2x\cos B-\sin C+\cos A=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\cos^2 B+(\sin C+\cos A)(\sin C-\cos A)\\&=\cos^2 B+(\sin^2 C-\cos^2 A)=0\end{aligned}$$

$\therefore \cos^2 B+\sin^2 C=\cos^2 A$

이때, $\cos^2 B=1-\sin^2 B$, $\cos^2 A=1-\sin^2 A$이므로

$1-\sin^2 B+\sin^2 C=1-\sin^2 A$

$\sin^2 B-\sin^2 C=\sin^2 A$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2-\left(\frac{c}{2R}\right)^2=\left(\frac{a}{2R}\right)^2$

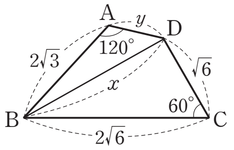
$b^2-c^2=a^2$ $\quad\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

05-1

$\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여



$x^2=(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{6})^2$
$\quad -2\times\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times\cos 60°$
$=30-24\times\frac{1}{2}=18$

$\therefore\ x=3\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin 60°$
$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

또한, $\overline{AD}=y$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2+y^2-2\times2\sqrt{3}\times y\times\cos 120°$

$18=12+y^2-4\sqrt{3}y\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y^2+2\sqrt{3}y-6=0$

$\therefore\ y=3-\sqrt{3}\ (\because\ y>0)$

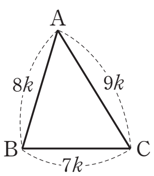
$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times(3-\sqrt{3})\times\sin 120°$
$=(3\sqrt{3}-3)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle BCD+\triangle ABD$
$=3\sqrt{3}+\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

05-2

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 삼각형의 세 변의 길이를 각각 $7k,\ 8k,\ 9k$ $(k>0)$라 하자.



코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(8k)^2+(9k)^2-(7k)^2}{2\times8k\times9k}$
$=\frac{96k^2}{144k^2}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$
$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ (\because\ 0°<A<180°)$

이때, 삼각형의 넓이가 $3\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times8k\times9k\times\frac{\sqrt{5}}{3}=3\sqrt{5}$

$k^2=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ k>0)$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 각각 $\frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$이므로

구하는 둘레의 길이는 $\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}=12$

답 12

다른풀이

삼각형 ABC에서 삼각형의 세 변의 길이를 각각 $7k,\ 8k,\ 9k\ (k>0)$라 하자.

$s=\frac{7k+8k+9k}{2}=12k$라 하면 헤론의 공식에 의하여 삼각형의 넓이는

$\sqrt{12k(12k-7k)(12k-8k)(12k-9k)}$
$=\sqrt{12k\times5k\times4k\times3k}$
$=12\sqrt{5}k^2=3\sqrt{5}$

$k^2=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ k>0)$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 각각 $\frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$이므로

구하는 둘레의 길이는 $\frac{7}{2}+4+\frac{9}{2}=12$

05-3

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times8\times\sin 60°=24\sqrt{3}$

삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{3}\times24\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

$\overline{AP}=a,\ \overline{AQ}=b$라 하면 삼각형 APQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin 60°=8\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=8\sqrt{3}\qquad\therefore\ ab=32$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$
$$=a^2+b^2-32$$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=a^2+b^2-32$$
$$\geq 2\sqrt{a^2b^2}-32 \text{ (단, 등호는 } a=b=4\sqrt{2}\text{일 때 성립)}$$
$$=2ab-32$$
$$=32$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ($\because$ $\overline{\mathrm{PQ}}>0$)

답 $4\sqrt{2}$

06-1

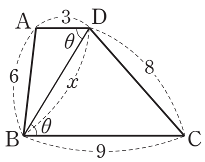
$\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{DBC}=\theta$ ($\because$ 엇각),

$\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하면

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서

코사인법칙에 의하여



$$\cos\theta=\frac{x^2+3^2-6^2}{2\times x\times 3}=\frac{x^2+9^2-8^2}{2\times x\times 9} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{x^2-27}{6x}=\frac{x^2+17}{18x}$$

$x^2=49$ $\quad\therefore$ $x=7$ ($\because$ $x>0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$$\cos\theta=\frac{7^2+3^2-6^2}{2\times 7\times 3}=\frac{11}{21}\text{이므로}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{21}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{21}$$

($\because$ $0^\circ<\theta<180^\circ$)

$$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 7\times\frac{8\sqrt{5}}{21}+\frac{1}{2}\times 7\times 9\times\frac{8\sqrt{5}}{21}$$
$$=4\sqrt{5}+12\sqrt{5}=16\sqrt{5}$$

답 $16\sqrt{5}$

다른풀이 1

$\overline{\mathrm{BD}}=7$을 구한 후 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABD의 세 변의 길이는 3, 6, 7이므로

$s=\dfrac{3+6+7}{2}=8$이라 하면

$$\triangle\mathrm{ABD}=\sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)}=4\sqrt{5}$$

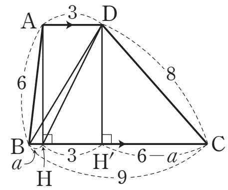
또한, 삼각형 BCD의 세 변의 길이는 7, 8, 9이므로

$s'=\dfrac{7+8+9}{2}=12$라 하면

$$\triangle\mathrm{BCD}=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=12\sqrt{5}$$

$$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$$
$$=4\sqrt{5}+12\sqrt{5}=16\sqrt{5}$$

다른풀이 2



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고 $\overline{\mathrm{BH}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{AD}}=3$,

$\overline{\mathrm{H'C}}=9-3-a=6-a$

이때, $\overline{\mathrm{AD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DH'}}$

△ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AH}}^2=6^2-a^2$$

△DH′C에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{DH'}}^2=8^2-(6-a)^2$$

즉, $\underbrace{6^2-a^2=8^2-(6-a)^2}_{\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DH'}}\text{이면 }\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{DH'}}^2\text{이므로}}$에서 $12a=8$

$$\therefore\ a=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DH'}}=\sqrt{6^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{320}{9}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore\ \square\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times(3+9)\times\frac{8\sqrt{5}}{3}$$
$$=16\sqrt{5}$$

06-2

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$

$$\therefore\ a^2+b^2-ab=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ABD에서 $A=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$$

$$\therefore\ a^2+b^2+ab=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$2ab=4 \qquad \therefore\ ab=2$

평행사변형 ABCD의 넓이에서

$ab\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\sin\theta$

$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times3\times\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

$\therefore\ \sin^2\theta=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$

답 $\frac{4}{15}$

07-1

삼각형 PAB에서 $\angle PAB=105^\circ$,

$\angle PBA=45^\circ$이므로

$\angle APB=30^\circ$이다.

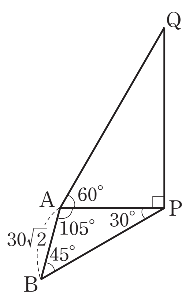
이때, $\overline{AB}=30\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB

에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AP}}{\sin 45^\circ}=\frac{30\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$\overline{AP}\sin 30^\circ=30\sqrt{2}\sin 45^\circ$

$\therefore\ \overline{AP}=60$



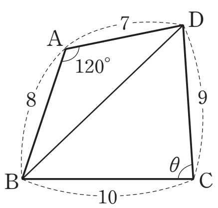
직각삼각형 APQ에서 $\angle PAQ=60^\circ$이므로

$\overline{PQ}=60\times\tan 60^\circ=60\sqrt{3}$

따라서 건물의 높이는 $60\sqrt{3}$ m이다.

답 $60\sqrt{3}$

07-2



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=8^2+7^2-2\times8\times7\times\cos 120^\circ=169$

$\therefore\ \overline{BD}=13\ (\because\ \overline{BD}>0)$

$\angle BCD=\theta$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{9^2+10^2-13^2}{2\times9\times10}=\frac{1}{15}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{15}\right)^2}$

$=\frac{4\sqrt{14}}{15}\ (\because\ 0^\circ<\theta<180^\circ)$

$\therefore\ \Box ABCD$

$=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times8\times7\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times9\times10\times\frac{4\sqrt{14}}{15}$

$=14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$

따라서 울타리 안쪽의 넓이는 $(14\sqrt{3}+12\sqrt{14})\,\mathrm{m}^2$이다.

답 $14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$

다른풀이

$\overline{BD}=13$을 구한 후, 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABD의 세 변의 길이는 각각 7, 8, 13이므로

$s=\frac{7+8+13}{2}=14$라 하면

$\triangle ABD=\sqrt{14(14-7)(14-8)(14-13)}=14\sqrt{3}$

또한, 삼각형 BCD의 세 변의 길이는 각각 9, 10, 13이므로

$s'=\frac{9+10+13}{2}=16$이라 하면

$\triangle BCD=\sqrt{16(16-9)(16-10)(16-13)}=12\sqrt{14}$

$\therefore\ \Box ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$

개념마무리

본문 pp.176~179

01 2	**02** $8\sqrt{3}$	**03** 8	**04** $2+\sqrt{3}$
05 3	**06** 3	**07** ⑤	**08** ⑤
09 $50\sqrt{3}$	**10** $\frac{21\sqrt{3}}{5}$	**11** ③	**12** ③
13 16	**14** 153	**15** 23	**16** 27
17 118	**18** ㄱ, ㄷ	**19** $\frac{20\sqrt{31}}{31}$	**20** 69
21 100	**22** 109		

01

$\triangle$ABD에서 $\angle\mathrm{ADB}=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\frac{5}{2}}{\sin\alpha}=\frac{4}{\sin\theta} \qquad \therefore \sin\alpha=\frac{5\sin\theta}{8}$$

한편, $\triangle$ADC에서 $\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\frac{5}{2}}{\sin\beta}=\frac{2}{\sin(180^\circ-\theta)},\ \frac{\frac{5}{2}}{\sin\beta}=\frac{2}{\underbrace{\sin\theta}_{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}}$$

$$\therefore \sin\beta=\frac{5\sin\theta}{4}$$

$$\therefore \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\frac{5\sin\theta}{4}}{\frac{5\sin\theta}{8}}=2$$

답 2

다른풀이

삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점이 D이므로 두 삼각형 ABD, ADC의 넓이는 서로 같다. 즉,

$$\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\beta$$

$$\therefore \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=2$$

02

삼각형 DEC에서 $\angle\mathrm{DEC}=90^\circ$, $\angle\mathrm{ECD}=60^\circ$이므로

$\angle\mathrm{CDE}=30^\circ$

이때, $\angle\mathrm{BAC}=30^\circ$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

이 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin30^\circ}=2R \qquad \therefore R=8$$

한편, 삼각형 ACD의 세 꼭짓점 A, C, D도 반지름의 길이가 R인 원 위에 있으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin60^\circ}=2R$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=2R\sin60^\circ=2\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$$

답 $8\sqrt{3}$

03

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=\frac{4}{\sin30^\circ}=8$$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=8\sin C$

이때, $0^\circ<C<150^\circ$이므로 $0<\sin C\le1$

즉, $0<8\sin C\le8$

따라서 $\sin C=1$, 즉 $C=90^\circ$일 때 선분 AB의 길이의 최댓값은 8이다.

답 8

04

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CA}}=\angle\mathrm{AOB}:\angle\mathrm{BOC}:\angle\mathrm{COA}$

$=C:A:B$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CA}}=1:2:3$이고, $A+B+C=180^\circ$이므로 삼각형 ABC에서

$$A=\frac{2}{1+2+3}\times180^\circ=60^\circ$$

$$B=\frac{3}{1+2+3}\times180^\circ=90^\circ$$

$$C=\frac{1}{1+2+3}\times180^\circ=30^\circ$$

한편, 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin60^\circ}=\frac{b}{\sin90^\circ}=\frac{c}{\sin30^\circ}=2R$$

$\therefore a=2R\sin60^\circ=\sqrt{3}R,\ b=2R\sin90^\circ=2R,$

$c=2R\sin30^\circ=R$

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{a+b}{c}=\frac{\sqrt{3}R+2R}{R}=2+\sqrt{3}$$

답 $2+\sqrt{3}$

다른풀이

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}:\overset{\frown}{\mathrm{BC}}:\overset{\frown}{\mathrm{CA}}=1:2:3$에서

$A=60^\circ$, $B=90^\circ$, $C=30^\circ$

이때, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$이므로

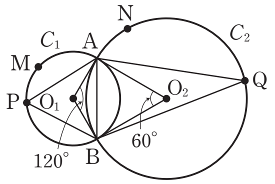
$a:b:c=\sin60^\circ:\sin90^\circ:\sin30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}:1:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:2:1$$

양수 k에 대하여 $a=\sqrt{3}k$, $b=2k$, $c=k$로 놓으면

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{a+b}{c}=\frac{\sqrt{3}k+2k}{k}=2+\sqrt{3}$$

05



두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하자.
원 C_1에서 호 AB에 대한 중심각은 $\angle AO_1B=120°$이므로 $\overparen{AMB}$ 위에 한 점 P를 잡으면

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AO_1B=60°$

원 C_1에 내접하는 삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°}=2R_1 \qquad \therefore R_1=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}$

또한, 원 C_2에서 호 AB에 대한 중심각은 $\angle AO_2B=60°$이므로 $\overparen{ANB}$ 위에 한 점 Q를 잡으면

$\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AO_2B=30°$

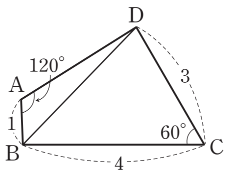
원 C_2에 내접하는 삼각형 AQB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 30°}=2R_2 \qquad \therefore R_2=\overline{AB}$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi R_2{}^2}{\pi R_1{}^2}=\frac{(\overline{AB})^2}{\left(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}\right)^2}=3$

답 3

06



오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD에서 선분 BD를 그으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos 60°$

$=13$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{BD}>0$)

삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=x$ $(x>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=1^2+x^2-2\times1\times x\times\cos 120°$

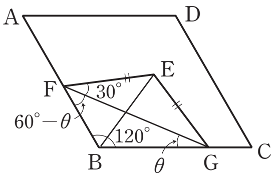
$13=1+x^2-2x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$, $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0 \qquad \therefore x=3$ ($\because x>0$)

따라서 $\overline{AD}$의 길이는 3이다.

답 3

07



ㄱ. $\angle BGF=\theta$이므로 $\angle BFG=60°-\theta$

$\angle BFE=\angle BFG+\angle GFE$

$=(60°-\theta)+30°=90°-\theta$ (참)

ㄴ. △EFG는 이등변삼각형이므로

$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30°=2\sqrt{3}$

삼각형 BGF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{FG}}{\sin 120°}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta}$

즉, $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\overline{BF}}{\sin\theta} \qquad \therefore \overline{BF}=4\sin\theta$ (참)

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\times\overline{BF}\times\overline{EF}\times\underbrace{\cos(90°-\theta)}_{\cos(90°-\theta)=\sin\theta}$

$=(4\sin\theta)^2+2^2-16\sin^2\theta$

$=4$

따라서 $\overline{BE}=2$로 항상 일정하다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

08

$A+B+C=180°$이므로

$\sin A=2\sin\left(\frac{A-B+C}{2}\right)\times\sin C$에서

$\sin A=2\sin\left(\frac{180°-2B}{2}\right)\times\sin C$

$=2\sin(90°-B)\times\sin C$

$=2\cos B\times\sin C \qquad$ ……㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R} \qquad$ ……㉡

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \qquad$ ……㉢

㉠에 ㉡, ㉢을 대입하면

$$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$$

$a^2=c^2+a^2-b^2$

$b^2-c^2=0$, $(b+c)(b-c)=0$

$\therefore\ b=c\ (\because\ b>0,\ c>0)$

따라서 $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 ⑤

09

P가 강을 모두 건넜을 때의 위치를 B, 그때의 Q의 위치를 C, P가 강을 모두 건너는 데 걸리는 시간을 t초라 하면

$\overline{AB}=10t$, $\overline{AC}=6t$

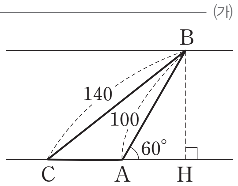
삼각형 BCA에서 $\angle$CAB$=120^\circ$, $\overline{BC}=140$이므로 코사인법칙에 의하여

$$140^2=(10t)^2+(6t)^2-2\times10t\times6t\times\cos120^\circ$$
$$=196t^2=(14t)^2$$

$14t=140\qquad\therefore\ t=10$

(가)

즉, $\overline{AB}=10t=100$이므로 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\overline{AB}\times\sin60^\circ$

$$=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$$

(나)

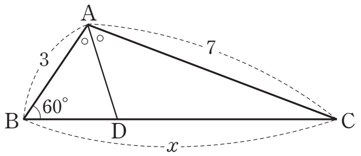
따라서 강폭은 $50\sqrt{3}$ m이다.

(다)

답 $50\sqrt{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	코사인법칙을 이용하여 P가 강을 모두 건너는 데 걸리는 시간을 구한 경우	50%
(나)	삼각형 ABC에서 수선의 발 H를 이용해 $\overline{BH}$를 구한 경우	40%
(다)	강폭을 구한 경우	10%

10



$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos60^\circ=\frac{3^2+x^2-7^2}{2\times3\times x}$$

$\frac{1}{2}=\frac{x^2-40}{6x}$, $x^2-3x-40=0$

$(x-8)(x+5)=0\qquad\therefore\ x=8\ (\because\ x>0)$

또한, $\angle$BAD$=\angle$CAD이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $\overline{BD}:\overline{CD}=3:7$이고 $\overline{BC}=8$이므로

$$\overline{CD}=\frac{7}{10}\times8=\frac{28}{5}$$

한편, 삼각형 ABC에서 $\angle$ACB$=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{7}{\sin60^\circ}=\frac{3}{\sin\theta}$$

$7\sin\theta=3\sin60^\circ=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times7\times\frac{28}{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{21\sqrt{3}}{5}$$

답 $\frac{21\sqrt{3}}{5}$

다른풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{BC}=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times8\times\sin60^\circ$$
$$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

또한, $\angle$BAD$=\angle$CAD에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

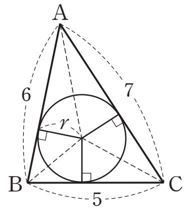
즉, $\overline{BD}:\overline{CD}=3:7$이므로 $\triangle$ABD$:\triangle$ACD$=3:7$

$$\therefore\ \triangle ACD=\frac{7}{10}\times\triangle ABC$$
$$=\frac{7}{10}\times6\sqrt{3}=\frac{21\sqrt{3}}{5}$$

11

조건을 만족시키는 원은 주어진 삼각형의 내접원이다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C라 하면 코사인법칙에 의하여



$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

이때, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle$ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{r}{2}(5+6+7)$

$6\sqrt{6}=9r\qquad\therefore\ r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

답 ③

12

ㄱ. $R=3$이면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2\times3\qquad\therefore\ a=6\sin A$ (참)

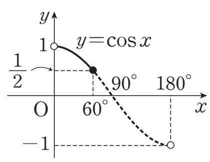
ㄴ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-a^2}{2\times3\times5}=\dfrac{34-a^2}{30}$

$2<a\le\sqrt{19}$이므로 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{34-a^2}{30}<1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\le\cos A<1$

이때, A는 삼각형의 한 내각이므로 $0°<A<180°$이고, $0°<x<180°$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0°<A<60°$

따라서 A의 최댓값은 $60°$이다. (참)

ㄷ. $a=7$일 때, $\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$

이때, $0°<A<180°$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른풀이

ㄷ. 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABC의 세 변의 길이는 각각 3, 5, 7이므로

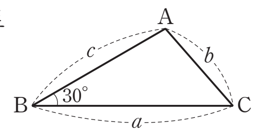
$s=\dfrac{3+5+7}{2}=\dfrac{15}{2}$

라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{15}{2}-3\right)\left(\dfrac{15}{2}-5\right)\left(\dfrac{15}{2}-7\right)}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

13

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로



$\dfrac{1}{2}ac\sin30°=16$

$\dfrac{1}{2}ac\times\dfrac{1}{2}=16\qquad\therefore\ ac=64$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos30°$

$=c^2+a^2-2\times64\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=c^2+a^2-64\sqrt{3}\qquad\cdots\cdots$㉠

이때, ㉠의 값이 최소이려면 a^2+c^2의 값이 최소이어야 한다.

$a^2>0,\ c^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+c^2\ge2\sqrt{a^2c^2}=2ac=2\times64$

$=128$ (단, 등호는 $a^2=c^2$, 즉 $a=c$일 때 성립)

따라서 ㉠에서

$b^2=c^2+a^2-64\sqrt{3}$

$\ge128-64\sqrt{3}$

즉, $a=c$일 때 b가 최소이므로 $b>0$이므로 b^2이 최소일 때 b도 최소이다.

$ac=64$에서 $a=c=8$

$\therefore\ a+c=8+8=16$

답 16

14

삼각형 ABC의 넓이가 $18\sqrt{2}$이므로 $\angle\mathrm{ACB}=\theta$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times6\times9\times\sin\theta=18\sqrt{2},\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ ($\because$ $90^\circ<\theta<180^\circ$)

$=-\dfrac{1}{3}$

이때, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=6^2+9^2-2\times6\times9\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=153$

따라서 구하는 정사각형의 넓이는 153이다.

답 153

15

삼각형 ABC에서

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{BQ}:\overline{QC}=\overline{CR}:\overline{RA}=3:1$이므로

$\overline{AP}=\dfrac{3}{4}\overline{AB},\ \overline{BQ}=\dfrac{3}{4}\overline{BC},\ \overline{CR}=\dfrac{3}{4}\overline{CA}$

$\overline{PB}=\dfrac{1}{4}\overline{AB},\ \overline{QC}=\dfrac{1}{4}\overline{BC},\ \overline{RA}=\dfrac{1}{4}\overline{CA}$

이때, 삼각형 APR의 넓이는

$\triangle APR=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AR}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\overline{AB}\times\dfrac{1}{4}\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{3}{16}\times\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{3}{16}\triangle ABC$

같은 방법으로

$\triangle BQP=\dfrac{3}{16}\triangle ABC,\ \triangle CRQ=\dfrac{3}{16}\triangle ABC$

또한, $\triangle ABC=\triangle PQR+3\times\dfrac{3}{16}\triangle ABC$이므로

$\triangle PQR=\dfrac{7}{16}\triangle ABC$

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 PQR의 넓이의 비는

$\triangle ABC:\triangle PQR=\triangle ABC:\dfrac{7}{16}\triangle ABC=16:7$

즉, $m=16,\ n=7$이므로 $m+n=23$

답 23

16

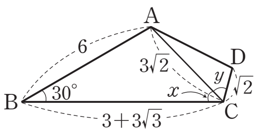
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+(3+3\sqrt{3})^2-2\times6\times(3+3\sqrt{3})\times\cos30^\circ$

$=36+36+18\sqrt{3}-2\times6\times(3+3\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=18$

$\therefore\ \overline{AC}=3\sqrt{2}$ ($\because$ $\overline{AC}>0$)



$\angle ACB=x,\ \angle ACD=y$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin30^\circ}=\dfrac{6}{\sin x},\ 3\sqrt{2}\sin x=6\sin30^\circ$

$3\sqrt{2}\sin x=6\times\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<x<105^\circ$이므로 $x=45^\circ$

또한, $x+y=105^\circ$에서 $y=60^\circ$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times6\times(3+3\sqrt{3})\times\sin30^\circ$

$=(9+9\sqrt{3})\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\sin60^\circ$

$=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\left(\dfrac{9}{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{9}{2}+6\sqrt{3}$

따라서 $p=\dfrac{9}{2},\ q=6$이므로 $pq=27$

답 27

17

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos60^\circ$

$=10-6\times\dfrac{1}{2}=7$

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{7}$ ($\because$ $\overline{AC}>0$)

삼각형 BCD에서

$\overline{CD}=\overline{AB}=1,\ \angle BCD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos120^\circ$

$=10-6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=13$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{13}$ ($\because$ $\overline{BD}>0$)

이때, 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$

$$1\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{13}\times\sin\theta$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{91}}{2}\sin\theta$$

즉, $\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$이므로 $\sin^2\theta=\frac{27}{91}$

따라서 $p=91$, $q=27$이므로 $p+q=118$

답 118

18

ㄱ. 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times3x\times\frac{4}{x}\times\sin60°=3\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 x의 값에 관계없이 항상 $3\sqrt{3}$으로 일정하다. (참)

ㄴ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(3x)^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2-2\times3x\times\frac{4}{x}\times\cos60°$$

$$=9x^2+\frac{16}{x^2}-12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $x^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{AC}^2=9x^2+\frac{16}{x^2}-12$$

$$\geq2\sqrt{9x^2\times\frac{16}{x^2}}-12$$

$$=24-12=12$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 9x^2=\frac{16}{x^2}\text{, 즉 } x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 선분 AC의 길이의 최솟값은 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$일 때 $\sqrt{12}$, 즉 $2\sqrt{3}$이다. (거짓)

ㄷ. $\overline{AB}+\overline{BC}=3x+\frac{4}{x}$

이때, $3x>0$, $\frac{4}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{AB}+\overline{BC}=3x+\frac{4}{x}$$

$$\geq2\sqrt{3x\times\frac{4}{x}}=4\sqrt{3}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 3x=\frac{4}{x}\text{, 즉 } x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

$\therefore$ $\overline{AB}+\overline{BC}\geq4\sqrt{3}$

(단, 등호는 $\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{3}$일 때 성립)

또한, ㄴ에서 선분 AC의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

즉, 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소이려면 $\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{CA}$가 모두 최솟값을 가질 때이므로 삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형일 때이다.

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

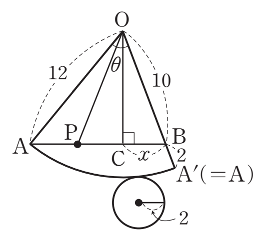
$3\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

19

밑면의 반지름의 길이가 2, 모선의 길이가 12인 원뿔의 전개도는 다음 그림과 같다.



점 C는 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발과 같으므로 구하는 거리는 선분 BC의 길이이다.

$\angle AOA'=\theta$라 하면 옆면인 부채꼴 OAA′의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로

$12\theta=2\pi\times2 \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

이때, $\overline{OB}=\overline{OA'}-\overline{A'B}=12-2=10$이므로 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}=\sqrt{12^2+10^2-2\times12\times10\times\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{244-240\times\frac{1}{2}}=\sqrt{124}=2\sqrt{31}$$

$\overline{BC}=x$라 하면 직각삼각형 OAC에서

$\overline{OH}^2=12^2-(2\sqrt{31}-x)^2=-x^2+4\sqrt{31}x+20 \quad \cdots\cdots ㉠$

직각삼각형 OCB에서

$\overline{OC}^2=10^2-x^2=100-x^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

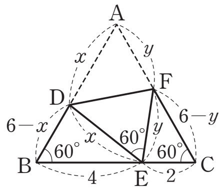
$-x^2+4\sqrt{31}x+20=100-x^2$, $4\sqrt{31}x=80$

$$\therefore\ x=\frac{80}{4\sqrt{31}}=\frac{20\sqrt{31}}{31}$$

답 $\frac{20\sqrt{31}}{31}$

20

오른쪽 그림과 같이 처음의 정삼각형을 ABC라 하고, 색칠한 부분의 삼각형을 DEF라 하자.
점 E가 선분 BC를 2 : 1로 내분하므로



$\overline{BE}=6\times\dfrac{2}{3}=4$, $\overline{EC}=6\times\dfrac{1}{3}=2$

이때, $\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{DE}=x$, $\overline{DB}=6-x$, $\angle DBE=60°$이므로 삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}x^2&=4^2+(6-x)^2-2\times4\times(6-x)\times\cos60°\\&=16+x^2-12x+36-24+4x\\&=x^2-8x+28\end{aligned}$$

$8x=28 \qquad \therefore\ x=\dfrac{7}{2}$

마찬가지로 $\overline{AF}=y$라 하면

$\overline{FE}=y$, $\overline{FC}=6-y$, $\angle FCE=60°$이므로

삼각형 FEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}y^2&=2^2+(6-y)^2-2\times2\times(6-y)\times\cos60°\\&=4+y^2-12y+36-12+2y\\&=y^2-10y+28\end{aligned}$$

$10y=28 \qquad \therefore\ y=\dfrac{14}{5}$

따라서 삼각형 DEF의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}xy\sin60°&=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{14}{5}\times\sin60°\\&=\frac{49}{20}\sqrt{3}\end{aligned}$$

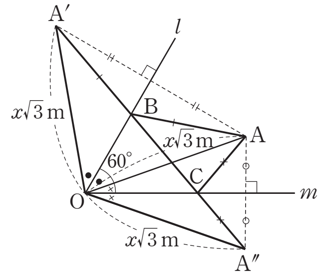
따라서 $p=20$, $q=49$이므로 $p+q=69$

답 69

21

두 해안 도로가 나타내는 직선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m의 교점을 O, 배의 위치를 A, 수영코스에서 직선 l, m과 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

이때, 다음 그림과 같이 점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 직선 m에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 배가 A에서 출발해서 점 B, C를 한 번씩 거쳐 A로 되돌아오는 최단 길이, 즉 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 최솟값은 $\overline{A'A''}$과 같다.



$\overline{OA}=\overline{OA'}=\overline{OA''}=x\sqrt{3}$이고

$\angle AOB=\angle A'OB$, $\angle AOC=\angle A''OC$에서

$\angle A'OA''=2\angle BOC=120°$

이때, 수영코스의 최단 길이가 300 m이므로 $\overline{A'A''}=300$

따라서 삼각형 A′OA″에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}300^2&=(x\sqrt{3})^2+(x\sqrt{3})^2-2\times x\sqrt{3}\times x\sqrt{3}\times\cos120°\\&=6x^2-6x^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=9x^2\end{aligned}$$

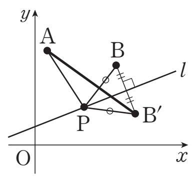
$x^2=10000 \qquad \therefore\ x=100\ (\because\ x>0)$

답 100

보충설명

대칭이동을 이용한 선분의 길이의 합의 최솟값

두 점 A, B가 직선 l에 대하여 같은 쪽에 있고, 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, 점 B를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

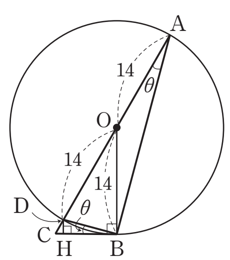


$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\\&\geq\overline{AB'}\end{aligned}$$

22

오른쪽 그림과 같이 선분 AC가 원 O와 만나는 점을 D라 하고 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle OAB=\theta$라 하면 원의 접선과 원주각의 관계에 의하여



$\angle DBC=\theta$이고, $\sin(\angle OAB)=\dfrac{1}{4}$에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$

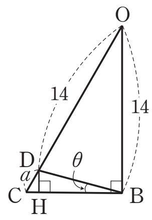
직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\overline{AD}\sin\theta=28\times\dfrac{1}{4}=7$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{28^2-7^2}=7\sqrt{15}$

직각삼각형 BHD에서 $\overline{DH}=\overline{BD}\sin\theta=7\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$

두 직각삼각형 CHD와 CBO는 닮음비가

$\frac{7}{4}:14$, 즉 $1:8$인 닮은 도형이므로



$\overline{CD}=a$라 하면 $a:(a+14)=1:8$에서

$8a=a+14,\ 7a=14\qquad \therefore a=2$

즉, $\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}=28+2=30$

$$\therefore (\triangle \text{ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times30\times7\sqrt{15}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{105}{4}\sqrt{15}$$

따라서 $p=4,\ q=105$이므로 $p+q=109$

답 109

다른풀이

$\angle DBC=\theta$, $\underbrace{\angle BDC=90^\circ+\theta}_{\text{삼각형의 외각의 성질}}$에서 $\overline{CD}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\underbrace{\sin(90^\circ+\theta)}_{=\cos\theta}},\quad \frac{1}{4}b=\underbrace{\frac{\sqrt{15}}{4}}_{\sin\theta=\frac{1}{4},\ 0^\circ<\theta<90^\circ\text{이므로 }\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}}a$$

$\therefore b=\sqrt{15}a\qquad\cdots\cdots ㉠$

이때, $\overline{CD}\times\overline{CA}=\overline{CB}^2$이므로 $a(a+28)=b^2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$a(a+28)=15a^2,\ a+28=15a$

$14a=28\qquad\therefore a=2$

$$\therefore (\triangle \text{ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times(28+2)\times7\sqrt{15}\times\frac{1}{4}$$

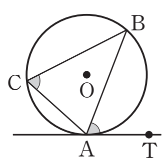
$$=\frac{105}{4}\sqrt{15}$$

보충설명

1. 원의 접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

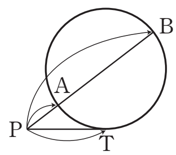
$\angle BAT:\angle ACB$



2. 원의 접선과 할선 사이의 비례 관계

원 위의 한 점 T를 지나는 접선과 현 AB의 연장선이 한 점 P에서 만날 때,

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$



Ⅲ. 수열

유형연습 08 등차수열과 등비수열 본문 pp.190~207

01-1 (1) 52 (2) 7	**01-2** 제117항	**01-3** 70
02-1 30	**02-2** $\frac{1}{6}$	**02-3** 160
03-1 304	**03-2** 595	**03-3** 99
04-1 57	**04-2** -30	**04-3** -54
05-1 5	**05-2** 0	**05-3** 8
06-1 제14항	**06-2** 11	**07-1** (1) 5 (2) 28
07-2 3	**07-3** $\frac{91}{9}$	**08-1** 499
09-1 147	**09-2** 105	**09-3** 52
10-1 6	**10-2** -4	**10-3** 687
11-1 23만 9천 원	**11-2** 30	**11-3** 833

01-1

(1) 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_2+a_4=34$에서

$(a+d)+(a+3d)=2a+4d=34$

$\therefore a+2d=17\qquad\cdots\cdots ㉠$

$a_1+a_2+a_3=a_5-1$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=(a+4d)-1$

$\therefore 2a-d=-1\qquad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ d=7$이므로

$a_n=3+(n-1)\times7=7n-4$

$\therefore a_8=7\times8-4=52$

(2) 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1=25$이므로

$a_5=a_1+4d=25+4d=9$

$\therefore d=-4$

$\therefore a_n=25+(n-1)\times(-4)=-4n+29$

$a_n<0$인 경우는 $-4n+29<0$에서

$4n>29\qquad\therefore n>\frac{29}{4}=7.25$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로

$|a_1|>|a_2|>|a_3|>\cdots>|a_7|,\ |a_8|<|a_9|<|a_{10}|<\cdots$

이때, $|a_7|=|(-4)\times7+29|=1$,

$|a_8|=|(-4)\times8+29|=3$

따라서 $|a_n|$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값은 7이다.

답 (1) 52 (2) 7

01-2

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 제4항과 제10항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_4=-a_{10}$, 즉 $a_4+a_{10}=0$에서

$a+3d+(a+9d)=0$, $2a+12d=0$

$\therefore a+6d=0$ ……㉠

또한, 제6항이 -3이므로

$a_6=a+5d=-3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-18$, $d=3$이므로

$a_n=-18+(n-1)\times3=3n-21$

330을 제n항이라 하면

$3n-21=330$, $3n=351$

$\therefore n=117$

따라서 330은 제117항이다.

답 제117항

다른풀이

$a_4=-a_{10}$에서 $a_4+a_{10}=0$

$2a_7=0$ $\therefore a_7=0$

$a_7=a_6+d$에서 $a_6=-3$이므로

$-3+d=0$ $\therefore d=3$

또한, $a_6=a_1+5d$이므로

$a_1+5\times3=-3$ $\therefore a_1=-18$

$a_n=-18+(n-1)\times3=3n-21$

$3n-21=330$, $3n=351$

$\therefore n=117$

따라서 330은 제117항이다.

01-3

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$-a_1-2a_2+3a_3=a_4$, 즉 $a_1+2a_2-3a_3+a_4=0$에서

$a+2(a+d)-3(a+2d)+a+3d=0$

$a-d=0$이므로 $a=d$

$a_9=a+8d=9d$ ($\because a=d$)

이때, a_9, 즉 $9d$가 7의 배수이려면

$d=7k$ (k는 자연수)

$a_5=a+4d=5d=35k$ ($\because a=d$, $d=7k$)

$a_5<70$에서 $35k<70$

$k<2$이므로 $k=1$

따라서 $d=7k=7$, $a=d=7$이므로

$a_{10}=7+(10-1)\times7=70$

답 70

02-1

세 양수 $3a-2$, $2a+4$, $2a^2-5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2a+4$는 $3a-2$와 $2a^2-5$의 등차중항이다.

즉, $2(2a+4)=(3a-2)+(2a^2-5)$에서

$4a+8=2a^2+3a-7$

$2a^2-a-15=0$, $(2a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=3$

(i) $a=-\frac{5}{2}$일 때, 세 수는 $-\frac{19}{2}$, -1, $\frac{15}{2}$

그런데 세 수는 모두 양수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때, 세 수는 7, 10, 13

세 수는 모두 양수이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 세 수는 7, 10, 13이므로 그 합은 30이다.

답 30

02-2

이차방정식 $27x^2-12x+1=0$에서

$(3x-1)(9x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{9}$

따라서 $a_2=\frac{1}{3}$, $a_6=\frac{1}{9}$ 또는 $a_2=\frac{1}{9}$, $a_6=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{a_2}=3$, $\frac{1}{a_6}=9$ 또는 $\frac{1}{a_2}=9$, $\frac{1}{a_6}=3$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로 $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_4}$, $\frac{1}{a_6}$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{1}{a_4}$은 $\frac{1}{a_2}$과 $\frac{1}{a_6}$의 등차중항이므로

$\frac{2}{a_4}=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_6}$, $\frac{2}{a_4}=12$

$\therefore\ a_4=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

다른풀이 1

이차방정식 $27x^2-12x+1=0$의 두 근이 a_2, a_6이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_2+a_6=\frac{12}{27}$, $a_2\times a_6=\frac{1}{27}$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로 $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_4}$, $\frac{1}{a_6}$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{1}{a_4}$은 $\frac{1}{a_2}$과 $\frac{1}{a_6}$의 등차중항이므로

$$\frac{2}{a_4}=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_6}=\frac{a_2+a_6}{a_2\times a_6}=\frac{\frac{12}{27}}{\frac{1}{27}}=12$$

$\therefore\ a_4=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

다른풀이 2

$27x^2-12x+1=0$의 두 근이 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{9}$이므로

$a_2=\frac{1}{3}$, $a_6=\frac{1}{9}$ 또는 $a_2=\frac{1}{9}$, $a_6=\frac{1}{3}$

(i) $a_2=\frac{1}{3}$, $a_6=\frac{1}{9}$일 때,

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로

$\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_1}+d=3$, $\frac{1}{a_6}=\frac{1}{a_1}+5d=9$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $d=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{a_1}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{a_4}=\frac{1}{a_1}+3d=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{12}{2}=6$

(ii) $a_2=\frac{1}{9}$, $a_6=\frac{1}{3}$일 때,

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로

$\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_1}+d=9$, $\frac{1}{a_6}=\frac{1}{a_1}+5d=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $d=-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{a_1}=\frac{21}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{a_4}=\frac{1}{a_1}+3d=\frac{21}{2}-\frac{9}{2}=\frac{12}{2}=6$

(i), (ii)에서 $a_4=\frac{1}{6}$

02-3

13개의 수 -4, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{11}, 84를 이 순서대로 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{13}이라 하자.

수열 $\{b_n\}$은 등차수열이므로 등차중항의 성질에 의하여

$b_1+b_{13}=b_2+b_{12}=\cdots=b_6+b_8=2b_7$

$b_1+b_{13}=-4+84=80$이므로

$b_2+b_{12}=a_1+a_{11}=80$, $b_4+b_{10}=a_3+a_9=80$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_1+a_3+a_9+a_{11}&=(a_1+a_{11})+(a_3+a_9)\\&=80+80=160\end{aligned}$$

답 160

다른풀이

13개의 수 -4, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{11}, 84를 이 순서대로 b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{13}이라 하자.

$n\leq13$에서 등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_1=-4$이고 $b_{13}=b_1+12d$

즉, $84=-4+12d$이므로 $d=\frac{88}{12}=\frac{22}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_1+a_3+a_9+a_{11}&=b_2+b_4+b_{10}+b_{12}\\&=(b_1+d)+(b_1+3d)+(b_1+9d)+(b_1+11d)\\&=4b_1+24d\\&=4\times(-4)+24\times\frac{22}{3}\\&=160\end{aligned}$$

03-1

$a_1=16$, $a_7=a_1+6d=-8$에서 $d=-4$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 16이고, 공차가 -4인 등차수열이므로 일반항은

$a_n=16+(n-1)\times(-4)=-4n+20$

$a_n<0$인 경우는 $-4n+20<0$에서

$4n>20 \quad \therefore\ n>5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 음수이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합은

$$\frac{5\{2\times 16+4\times(-4)\}}{2}=40$$

$a_6=-4\times 6+20=-4$이므로 제6항부터 제16항까지의 합은

$$\frac{11\{2\times(-4)+10\times(-4)\}}{2}=-264$$

$\therefore\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{16}|$

$=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{16})$

$=40-(-264)=304$

답 304

03-2

주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=-32$$

$\therefore\ 2a+7d=-8 \quad \cdots\cdots ㉠$

제9항부터 제15항까지의 합이 77이므로

$$S_{15}=\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=S_8+77$$

$=-32+77=45$

$\therefore\ a+7d=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-11,\ d=2$

따라서 제16항부터 제32항까지의 합은

$$S_{32}-S_{15}=\frac{32\{2\times(-11)+(32-1)\times 2\}}{2}-45$$

$=640-45=595$

답 595

다른풀이

$a=-11,\ d=2$이므로

$a_n=-11+(n-1)\times 2=2n-13$

$\therefore\ a_{16}=19,\ a_{32}=51$

따라서 제16항부터 제32항까지의 합은

$$\frac{17\times(19+51)}{2}=595$$

보충설명

$m<n$일 때, 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 제m항부터 제n항까지의 합은 첫째항이 a_m, 끝항이 a_n, 항의 개수가 $n-m+1$이므로

$$\frac{(n-m+1)(a_m+a_n)}{2}$$

03-3

조건 (가)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=29$

조건 (나)에서

$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=155$

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$이고

$$a_1+a_n=\frac{29+155}{4}=46$$

조건 (다)에서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=575$$

$23n=575$

$\therefore\ n=25$

즉, $n=25$이므로 마지막 4개의 항은 $a_{22},\ a_{23},\ a_{24},\ a_{25}$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4$

$=a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)$

$=4a+6d=29 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}$

$=(a+21d)+(a+22d)+(a+23d)+(a+24d)$

$=4a+90d=155 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=5,\ d=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ S_9=\frac{9\left(2\times 5+8\times\frac{3}{2}\right)}{2}=99$$

답 99

04-1

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하면 첫째항이 -16, 공차가 3이므로

$a_n=-16+(n-1)\times3=3n-19$

$a_n\ge0$인 경우는 $3n-19\ge0$에서

$3n\ge19 \qquad \therefore\ n\ge\frac{19}{3}=6.\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제6항까지 음수이고, 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

$\therefore\ k=6$

$\therefore\ S_6=\frac{6\{2\times(-16)+5\times3\}}{2}=-51$

즉, $m=-51$이므로

$k-m=6-(-51)=57$

답 57

다른풀이

$a_1=-16,\ d=3$이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times(-16)+(n-1)\times3\}}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{35}{2}n$$

$$=\frac{3}{2}\left(n^2-\frac{35}{3}n\right)=\frac{3}{2}\left(n-\frac{35}{6}\right)^2-\frac{35^2}{24}$$

$\frac{35}{6}$에 가장 가까운 자연수는 6이므로 S_n은 $n=6$일 때, 최솟값을 갖는다. 즉

$S_6=\frac{3}{2}\times6^2-\frac{35}{2}\times6=-51$

04-2

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 -10이므로

$$S_3=\frac{3\{2\times(-10)+(3-1)\times d\}}{2}$$

$$=\frac{3(-20+2d)}{2}=3d-30$$

$$S_8=\frac{8\{2\times(-10)+(8-1)\times d\}}{2}$$

$$=\frac{8(-20+7d)}{2}=28d-80$$

$S_3=S_8$이므로

$3d-30=28d-80$

$25d=50 \qquad \therefore\ d=2$

$\therefore\ a_n=-10+(n-1)\times2=2n-12$

$a_n\ge0$인 경우는 $2n-12\ge0$에서

$2n\ge12 \qquad \therefore\ n\ge6$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제5항까지 음수이고, $a_6=0$, 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항 또는 제6항까지의 합이 최소이다. 이때,

$$S_5=\frac{5\{2\times(-10)+(5-1)\times2\}}{2}=-30,$$

$$S_6=\frac{6\{2\times(-10)+(6-1)\times2\}}{2}=-30$$

이므로 S_n의 최솟값은 -30이다.

답 -30

다른풀이

$S_3=S_8$이므로

$S_8-S_3=0,\ a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_4+a_8=2a_6,\ a_5+a_7=2a_6$

이것을 ㉠에 대입하면 $5a_6=0 \qquad \therefore\ a_6=0$

이때, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 -10이므로

$a_6=-10+5d=0$에서 $d=2$

따라서 S_n의 최솟값은

$$S_5=S_6=\frac{6\{2\times(-10)+(6-1)\times2\}}{2}=-30$$

04-3

첫째항이 a, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)\times4=4n+a-4$

S_n이 $n=5$일 때에만 최솟값을 가지므로

$a_5<0,\ a_6>0$이어야 한다.

$a_5=20+a-4=16+a<0$

$a<-16 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_6=24+a-4=20+a>0$

$a>-20 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $-20<a<-16$

따라서 정수 a는 $-19,\ -18,\ -17$이므로 구하는 합은

$-19-18-17=-54$

답 -54

다른풀이

첫째항이 a, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+4(n-1)\}}{2}$$
$$=n\{a+2(n-1)\}=2n^2+(a-2)n$$
$$=2\left(n+\frac{a-2}{4}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{8}$$

이때, S_n이 $n=5$일 때에만 최솟값을 가지므로 $-\frac{a-2}{4}$에 가장 가까운 정수는 5뿐이다.

즉, $\frac{9}{2}<-\frac{a-2}{4}<\frac{11}{2}$에서 $-20<a<-16$

따라서 정수 a는 -19, -18, -17이므로 구하는 합은

$-19-18-17=-54$

보충설명

1. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

(1) $n=k$일 때에만 최솟값을 갖는 경우

$a_k<0$, $a_{k+1}>0$

(2) $n=k$일 때에만 최댓값을 갖는 경우

$a_k>0$, $a_{k+1}<0$

2. S_n이 $n=5$일 때에만 최솟값을 갖는다고 하였으므로 $\frac{9}{2}<-\frac{a-2}{4}<\frac{11}{2}$에서 등호는 고려하지 않는다.

만약, $\frac{9}{2}=-\frac{a-2}{4}$가 성립하면 포물선의 대칭성에서 $n=4$일 때의 값과 $n=5$일 때의 값이 서로 같으므로 $n=5$일 때에만 최솟값을 갖는다는 조건에 모순이다.

05-1

$S_n=-2n^2+10n-9$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1$ ……㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(-2n^2+10n-9)-\{-2(n-1)^2+10(n-1)-9\}$
$=-4n+12$ ……㉡

(ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=-1$, $a_n=-4n+12$ $(n\geq 2)$

$n\geq 2$일 때 $a_n\geq 0$에서 $-4n+12\geq 0$ $\quad\therefore n\leq 3$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 3이므로 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+3=5$

답 5

05-2

$S_n=4n^2-n+k$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4\times 1^2-1+k=k+3$ ……㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(4n^2-n+k)-\{4(n-1)^2-(n-1)+k\}$
$=8n-5$ ……㉡

이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같아야 하므로

$k+3=3$ $\quad\therefore k=0$

답 0

05-3

$S_n=pn^2+qn$에서

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=p+q$ ……㉠

(ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(pn^2+qn)-\{p(n-1)^2+q(n-1)\}$
$=pn^2+qn-(pn^2-2pn+p+qn-q)$
$=2pn-(p-q)$ ……㉡

(ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2pn-(p-q)$

$a_{10}-a_4=24$에서

$\{20p-(p-q)\}-\{8p-(p-q)\}=24$

$12p=24$ $\quad\therefore p=2$

즉, $a_n=4n-(2-q)$이므로

$a_2+a_4=28$에서

$\{8-(2-q)\}+\{16-(2-q)\}=28$

$20+2q=28$ $\quad\therefore q=4$

$\therefore pq=2\times 4=8$

답 8

06-1

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=16$에서 $ar^2=16$ ……㉠

$a_7=1$에서 $ar^6=1$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=\frac{1}{16}$

즉, $\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r^2+\frac{1}{4}\right)=0$에서

r는 양수이므로 $r=\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}a=16$에서 $a=64$이므로

$a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{-n+7}$

처음으로 $\frac{1}{100}$보다 작아지는 항은 $a_n<\frac{1}{100}$을 만족시키는 최초의 항이므로

$2^{-n+7}<\frac{1}{100}$에서 $2^{n-7}>100$

이때, $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-7\geq7$ $\quad\therefore n\geq14$

따라서 $a_n<\frac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 14이므로 처음으로 $\frac{1}{100}$보다 작아지는 항은 제14항이다.

답 제14항

06-2

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2000, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=2000\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2000\times2^{-n+1}$, $a_n>0$

이때, $T_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$이므로 $a_n<1$을 만족시키는 n에 대하여

$T_n>T_{n+1}>T_{n+2}>\cdots$

따라서 $a_n\geq1$을 만족시키는 가장 큰 자연수 n에서 T_n은 최댓값을 갖는다.

즉, $2000\times2^{-n+1}\geq1$에서

$2^{-n+1}\geq\frac{1}{2000}$, $2^{n-1}\leq2000$

이때, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n-1\leq10$ $\quad\therefore n\leq11$

그러므로 $n=11$일 때, T_n은 최댓값을 갖는다.

답 11

07-1

(1) 세 수 $x-4$, $x-1$, $3x+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $x-1$은 $x-4$와 $3x+1$의 등비중항이다.

즉, $(x-1)^2=(x-4)(3x+1)$이므로

$x^2-2x+1=3x^2-11x-4$, $2x^2-9x-5=0$

$(2x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

따라서 양수 x의 값은 5이다.

(2) 세 수 16, a, 1이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a는 16과 1의 등비중항이다. 즉,

$a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

또한, 세 수 $a-3$, 4, b, 즉 1, 4, b는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 4는 1과 b의 등차중항이다. 즉,

$8=1+b$ $\quad\therefore b=7$

$\therefore ab=28$

답 (1) 5 (2) 28

07-2

다항식 $f(x)=x^2+x+a$를 일차식 $x-1$, $x-3$, $x-6$으로 나눈 나머지는 각각 $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$이다. 이때,

$f(1)=a+2$,

$f(3)=a+12$,

$f(6)=a+42$

따라서 세 수 $a+2$, $a+12$, $a+42$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a+12$는 $a+2$와 $a+42$의 등비중항이다.

즉, $(a+12)^2=(a+2)(a+42)$이므로

$a^2+24a+144=a^2+44a+84$, $20a=60$

$\therefore a=3$

답 3

보충설명

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R라 하면

$R=f(\alpha)$

07-3

세 수 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

b는 a와 c의 등비중항이다. 즉,

$b^2=ac$ ……㉠

$abc=-1$이므로 $b^3=-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore b=-1$ ($\because b$는 실수)

주어진 등비수열의 공비를 r $(r\neq1)$라 하면 $a=\frac{b}{r}$, $c=br$

이므로

$a+b+c=\frac{7}{3}$에서

$\frac{b}{r}+b+br=\frac{7}{3}$

$\frac{1}{r}+1+r=-\frac{7}{3}$ ($\because b=-1$)

$r+\frac{10}{3}+\frac{1}{r}=0$, $3r^2+10r+3=0$

$(r+3)(3r+1)=0$

$\therefore r=-3$ 또는 $r=-\frac{1}{3}$

즉, 세 수 a, b, c는 각각 $\frac{1}{3}$, -1, 3 또는 3, -1, $\frac{1}{3}$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=3^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{91}{9}$

답 $\frac{91}{9}$

다른풀이

b는 a와 c의 등비중항이므로 $b^2=ac$

$abc=b^3=-1$에서 $b=-1$ ($\because b$는 실수)이므로

$ac=1$

한편, $a+b+c=a-1+c=\frac{7}{3}$이므로

$a+c=\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=\left(\frac{7}{3}\right)^2-2(-a-c+1)\\&=\frac{49}{9}-2\times\left(-\frac{10}{3}+1\right)\\&=\frac{49}{9}+\frac{14}{3}=\frac{91}{9}\end{aligned}$$

08-1

1회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$27\times\frac{2}{3}$

2회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$\left(27\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

3회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$\left\{27\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}=27\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

n회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$27\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

따라서 8회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$27\times\left(\frac{2}{3}\right)^8=3^3\times\frac{2^8}{3^8}=\frac{2^8}{3^5}=\frac{256}{243}$

즉, $p=243$, $q=256$이므로

$p+q=243+256=499$

답 499

09-1

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$S_n=21$, $S_{2n}=63$이므로

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=21$ ……㉠

$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}=\frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1}=63$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^n+1=3$이므로 $r^n=2$이다.

$$\begin{aligned}\therefore S_{3n}&=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}\\&=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}\\&=21\times(2^2+2+1)=147\end{aligned}$$

답 147

다른풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 세 수 S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$도 이 순서대로 공비가 r^n인 등비수열을 이룬다.

이때, $S_n=21$, $S_{2n}-S_n=63-21=42$이므로 $r^n=2$이다.

즉, $S_{3n}-S_{2n}=42\times2=84$이므로

$S_{3n}=S_{2n}+84=63+84=147$

09-2

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{20}=3S_{10}$에서 $r\neq1$이므로 ← $r=1$이면 $S_{10}=10a$, $S_{20}=20a$이므로 $S_{20}=2S_{10}$

$$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=3\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$$

$r^{20}-1=3(r^{10}-1)$

$(r^{10}-1)(r^{10}+1)=3(r^{10}-1)$

양변을 $r^{10}-1$로 나누면

$r^{10}+1=3$ $\quad\therefore r^{10}=2$

$$\therefore \frac{5S_{60}}{S_{20}}=\frac{\frac{5a(r^{60}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}}=\frac{5(r^{60}-1)}{r^{20}-1}$$

$$=\frac{5(2^6-1)}{2^2-1}=\frac{5\times63}{3}=105$$

답 105

09-3

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=4$에서

$$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$a_5+a_6+a_7+a_8=12$에서

$S_8-S_4=12$이므로

$S_8=S_4+12=16$

$$\therefore S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=16 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4+1)=16$에서

$r^4+1=4$, $r^4=3$ $\qquad\cdots\cdots ㉢$

구하는 값은 S_{12}이므로

$$S_{12}=\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1}$$
$$=\frac{a(r^4-1)}{r-1}\times(r^8+r^4+1)$$
$$=4\times(3^2+3+1)=52 \ (\because ㉠, ㉢)$$

답 52

다른풀이

$a_5+a_6+a_7+a_8=a_1r^4+a_2r^4+a_3r^4+a_4r^4$
$=r^4(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$=4r^4$

즉, $12=4r^4$에서 $r^4=3$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=a_1r^8+a_2r^8+a_3r^8+a_4r^8$
$=r^8(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$=4r^8=4\times3^2=36$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=4+12+36=52$

10-1

$S_n=3^{n+1}-3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^2-3=6$ $\qquad\cdots\cdots ㉠$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=3^{n+1}-3-(3^n-3)=3^{n+1}-3^n$
$=(3-1)\times3^n=2\times3^n$ $\qquad\cdots\cdots ㉡$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2\times3^n$

즉, $2\times3^n>500$에서 $3^n>250$

이때, $3^5=243$, $3^6=729$이므로 $n\geq6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 6

10-2

$S_n=2^{n+2}+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^3+k=8+k$ $\qquad\cdots\cdots ㉠$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2^{n+2}+k)-(2^{n+1}+k)$
$=2^{n+2}-2^{n+1}=2^{n+1}$ $\qquad\cdots\cdots ㉡$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같아야 한다.

즉, $8+k=4$에서 $k=-4$

답 -4

보충설명

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 $S_n=Ar^n+B$ (A, B는 상수)라 하자.

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=Ar+B$ ……㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(Ar^n+B)-(Ar^{n-1}+B)$

$=Ar^{n-1}(r-1)$ ……㉡

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같아야 한다.

즉, $Ar+B=A(r-1)$

$\therefore$ $B=-A$

따라서 $S_n=Ar^n-A$ 꼴이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

$S_n=2^{n+2}+k$에서 $S_n=4\times 2^n+k$이므로 $k=-4$임을 알 수 있다.

10-3

$S_n=2^{n-1}+4$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5$ ……㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n-1}+4)-(2^{n-2}+4)$

$=2^{n-2}$ ……㉡

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=5$, $a_n=2^{n-2}$ ($n=2$, 3, 4, $\cdots$)

$\therefore$ $a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$

$=2+2^3+2^5+2^7+2^9$

$=\dfrac{2(4^5-1)}{4-1}=\dfrac{2\times 1023}{3}$

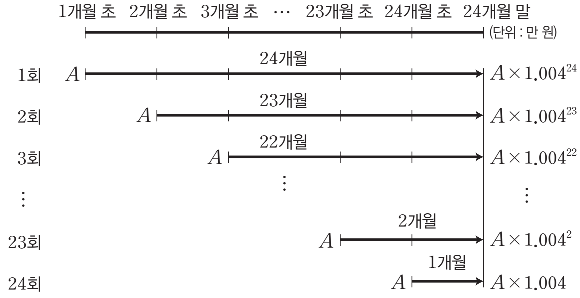
$=682$

$\therefore$ $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=5+682=687$

답 687

11-1

매년 초에 적립하는 금액을 A만 원이라 하고 2년 후, 즉 24개월 째 말의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 24개월 째 말의 원리합계를 S라 하면

$S=A\times 1.004+A\times 1.004^2+A\times 1.004^3$

$+\cdots+A\times 1.004^{24}$(만 원)

이것은 첫째항이 $A\times 1.004$, 공비가 1.004인 등비수열의 첫째항부터 제 24 항까지의 합과 같으므로

$S=\dfrac{A\times 1.004\times(1.004^{24}-1)}{1.004-1}=\dfrac{A\times 1.004\times 0.1}{0.004}$

$=A\times 25.1$(만 원)

이것이 등록금 600만 원과 같아야 하므로

$600=A\times 25.1$ $\therefore$ $A=23.9\times\times\times$

따라서 매월 적립해야 할 금액을 천 원 단위까지 구하면 23만 9천 원이다.

답 23만 9천 원

11-2

갑이 가입한 적금 A의 만기에 찾은 금액은 첫째항이 48×1.006, 공비가 1.006인 등비수열의 첫째항부터 제 24 항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{48\times 1.006\times(1.006^{24}-1)}{1.006-1}$

$=\dfrac{48\times 1.006\times 0.15}{0.006}$(만 원) ……㉠

을이 가입한 적금 B의 만기에 찾은 금액은 첫째항이 $a\times 1.006$, 공비가 1.006인 등비수열의 첫째항부터 제 36 항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{a\times 1.006\times(1.006^{36}-1)}{1.006-1}$

$=\dfrac{a\times 1.006\times 0.24}{0.006}$(만 원) ……㉡

이때, ㉠=㉡이므로

$48\times 0.15=a\times 0.24$ $\therefore$ $a=30$

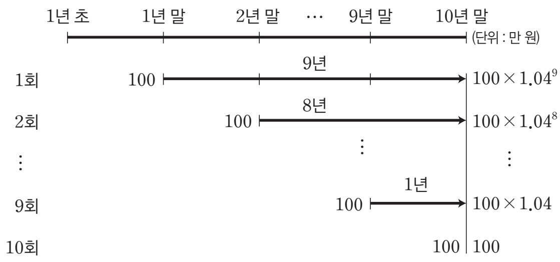
답 30

11-3

a만 원을 연이율 4%로 10년 동안 예금할 때의 원리합계는

$a(1+0.04)^{10}=1.5a$(만 원) ……㉠

매년 말에 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말까지 적립금의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$100+100\times1.04+100\times1.04^2+\cdots+100\times1.04^9$

$=\dfrac{100(1.04^{10}-1)}{1.04-1}=\dfrac{100(1.5-1)}{0.04}$

$=1250$(만 원) ……㉡

㉠$=$㉡이어야 하므로

$1.5a=1250 \quad \therefore a=\dfrac{1250}{1.5}=833.3\times\times$(만 원)

소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하므로

$a=833$

답 833

개념마무리

본문 pp.208~211

01 $\frac{1}{2}$	**02** 21	**03** 98	**04** 8
05 755	**06** 723	**07** 23	**08** ④
09 1024	**10** ①	**11** ④	**12** 84
13 24	**14** 18	**15** 11	**16** ②
17 99	**18** 33개월 후	**19** 3	**20** 97
21 200	**22** 10	**23** 647	**24** 67

01

이차방정식 $x^2-12x+3=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=3$

세 수 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{\beta}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\dfrac{2}{p}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta},\ \dfrac{2}{p}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

즉, $\dfrac{2}{p}=4$이므로 $p=\dfrac{1}{2}$

답 $\dfrac{1}{2}$

02

삼차방정식 $x^3-9x^2+11x+k=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=9$

$3a=9 \quad \therefore a=3$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 $x=3$을 방정식에 대입하면

$3^3-9\times3^2+11\times3+k=0$

$k-21=0 \quad \therefore k=21$

답 21

보충설명 1

등차수열을 이루는 수는 모든 수의 합이 a에 대한 식으로 표현되도록 놓으면 계산이 간단해진다.

(1) 등차수열을 이루는 세 수 ⇨ $a-d$, a, $a+d$

(2) 등차수열을 이루는 네 수 ⇨ $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

(3) 등차수열을 이루는 다섯 수

⇨ $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

보충설명 2

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

03

두 수 1과 64 사이에 n개의 수를 넣어 만든 수열의 전체 항의 개수는 $(n+2)$이므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$1+(n+1)d=64$에서 $d=\dfrac{63}{n+1}$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$이 자연수가 되려면 d는 자연수이어야 하므로 $n+1$은 63의 약수이다. n은 자연수이고, $63=3^2\times 7$이므로

$n+1=3$ 또는 $n+1=7$ 또는 $n+1=9$ 또는 $n+1=21$ 또는 $n+1=63$

$\therefore\ n=2$ 또는 $n=6$ 또는 $n=8$ 또는 $n=20$ 또는 $n=62$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+6+8+20+62=98$

답 98

보충설명

두 수 $a,\ b$ 사이에 n개의 수를 넣어 만든 수열

$a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 항의 개수는 $(n+2)$이다.

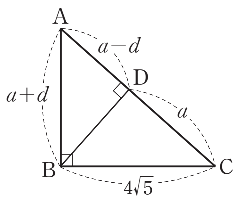
이때, a는 첫째항이고 b는 제$(n+2)$항이므로 공차를 d라 하면

$b=a+\{(n+2)-1\}\times d=a+(n+1)d$

04

세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\overline{AD}=a-d,\ \overline{CD}=a,\ \overline{AB}=a+d\ (a>0)$라 하자.

이때, 두 삼각형 ABD, ACB가 닮음이므로



$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서

$(a+d):(a-d)$

$=(2a-d):(a+d)$

$(a+d)^2=(a-d)(2a-d)$

$a^2-5ad=0,\ a(a-5d)=0$

$\therefore\ a=5d\ (\because\ a>0)$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=2a-d=9d,\ \overline{BC}=4\sqrt{5}$,

$\overline{AB}=a+d=6d$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$81d^2=36d^2+80,\ 45d^2=80$

$d^2=\dfrac{16}{9}\qquad \therefore\ d=\dfrac{4}{3}\ (\because\ d>0)$

$a=5d$이므로 $a=\dfrac{20}{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=a+d=8$

답 8

다른풀이

세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\overline{AD}=a-d,\ \overline{CD}=a,\ \overline{AB}=a+d\ (a>0)$라 하자.

직각삼각형 BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}^2=(4\sqrt{5})^2-a^2=80-a^2$

직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$80-a^2+(a-d)^2=(a+d)^2 \leftarrow \overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$

$\therefore\ a^2+4ad-80=0\qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$(4\sqrt{5})^2+(a+d)^2=(2a-d)^2$

$\therefore\ 3a^2-6ad-80=0\qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면

$2a^2-10ad=0,\ 2a(a-5d)=0$

$\therefore\ a=5d\ (\because\ a>0)\qquad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$45d^2=80,\ d^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore\ d=\dfrac{4}{3}\ (\because\ d>0),\ a=\dfrac{20}{3}\ (\because$ ㉢$)$

$\therefore\ \overline{AB}=a+d=8$

05

3으로 나눈 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$2,\ 5,\ \boxed{8},\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ \boxed{23},\ 26,\ 29,\ 32,\ 35,\ \boxed{38},\ \cdots$

5로 나눈 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$3,\ \boxed{8},\ 13,\ 18,\ \boxed{23},\ 28,\ 33,\ \boxed{38},\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은

$8,\ 23,\ 38,\ \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 8, 공차가 15인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10(2\times 8+9\times 15)}{2}$$
$$=755$$

답 755

보충설명

자연수 n으로 나눈 나머지가 $a\ (0<a<n)$인 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$a,\ a+n,\ a+2n,\ a+3n,\ \cdots$

이므로 첫째항이 a이고 공차가 n인 등차수열이 된다.

06

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 5는 첫째항이고, 236은 제$(n+2)$항이므로

$5+(n+1)d=236 \qquad \therefore (n+1)d=231 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때, $231=3\times7\times11$이고 공차 d는 50보다 작은 최대의 자연수이므로 $d=33$

이것을 ㉠에 대입하면 $(n+1)\times33=231$

$n+1=7 \qquad \therefore n=6$

즉, 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$은 공차가 $d=33$인 등차수열이므로

$a_1=5+d,\ a_6=236-d$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\dfrac{6(5+d+206-d)}{2}=723$

답 723

07

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 할 때,

$a_n=a+(n-1)d \qquad \cdots\cdots ㉠$

$2S_{20}=2\times\dfrac{20(2a+19d)}{2}=40a+380d$

$S_8=\dfrac{8(2a+7d)}{2}=8a+28d$

$40a+380d=8a+28d$에서 $32a=-352d$

$\therefore a=-11d \qquad \cdots\cdots ㉡$

(가)

㉡을 ㉠에 대입하면

$a_n=-11d+(n-1)d=(n-12)d$

(나)

이때, ㉡에서 $a>0$이려면 $d<0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제11항까지가 양수이고 제12항은 0, 제13항부터는 음수인 수열이다.

따라서 S_n이 최대가 되는 자연수 n은 $n=11$ 또는 $n=12$이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$11+12=23$

(다)

답 23

단계	채점 기준	배점
(가)	등차수열의 합의 공식을 이용하여 a와 d 사이의 관계식을 구한 경우	40%
(나)	등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 경우	20%
(다)	구하는 값을 구한 경우	40%

08

$S_n=-n^2+8n+3$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=10$

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-n^2+8n+3-\{-(n-1)^2+8(n-1)+3\}$

$=-2n+9$

(i), (ii)에서 $a_1=10,\ a_n=-2n+9\ (n\ge2)$이다.

ㄱ. 수열 $\{a_{2n}\}$은 $a_{2n}=-2(2n)+9=-4n+9\ (n\ge1)$이므로 공차가 -4인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_1=10,\ a_3=-2\times3+9=3$이므로

$a_1+a_3=13$ (거짓)

ㄷ. $a_n=-2n+9<0$에서 $n>\dfrac{9}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 제5항이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

09

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_5a_9=ar^4\times ar^8=(ar^6)^2=a_7^{\ 2}=16$에서

$a_7=4\ (\because a_n>0)$

이때, $a_3a_{11}=ar^2\times ar^{10}=(ar^6)^2=a_7^{\ 2}=16$이므로

$a_3a_5a_7a_9a_{11}=(a_3a_{11})\times(a_5a_9)\times a_7$

$=16\times16\times4$

$=1024$

답 1024

10

$f(x)=ax^2+2bx+x$에 대하여

ㄱ. a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$2b=a+c$

즉, $f(-1)=a-2b+c=2b-2b=0$ (참)

ㄴ. a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$2b=a+c$

이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2b)^2-4ac=(a+c)^2-4ac$

$=(a-c)^2>0$ ($\because$ $a\neq c$)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

ㄷ. a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루면

$b^2=ac$

이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=b^2-ac=b^2-b^2=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

11

이차방정식 $x^2-14x+16=0$의 두 근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=14$, $\alpha\beta=16$ ……㉠

세 수 α, p, β는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2p=\alpha+\beta$

$2p=14$ ($\because$ ㉠) $\therefore$ $p=7$

세 수 α, q, β는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$q^2=\alpha\beta$

$q^2=16$ ($\because$ ㉠) $\therefore$ $q=4$ ($\because$ $q>0$)

따라서 두 근이 p, q, 즉 7, 4이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(7+4)x+7\times4=0$

$\therefore$ $x^2-11x+28=0$

답 ④

12

$f(x)=\dfrac{k}{x}$에 대하여 $f(a)$, $f(b)$, $f(18)$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{f(b)\}^2=f(a)\times f(18)$

이때, $f(a)=\dfrac{k}{a}$, $f(b)=\dfrac{k}{b}$, $f(18)=\dfrac{k}{18}$이므로

$\left(\dfrac{k}{b}\right)^2=\dfrac{k}{a}\times\dfrac{k}{18}$

$\therefore$ $b^2=18a$ ……㉠

이때, $2<a<b<18$이고 $18a$는 제곱수가 되어야 하므로

$18=2\times3^2$에서 a로 가능한 값은 $a=2^3=8$이다.

㉠에서 $b^2=18\times8=144$

$\therefore$ $b=12$ ($\because$ $b>0$)

$f(a)=9$에서 $\dfrac{k}{8}=9$ $\therefore$ $k=72$

$\therefore$ $b+k=12+72=84$

답 84

13

$x^{\frac{2}{\alpha}}=y^{\frac{1}{\beta}}=z^{-\frac{1}{\gamma}}=k$라 하면 $x^2=k^\alpha$, $y=k^\beta$, $z^{-1}=k^\gamma$

이때, α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루면 k^α, k^β, k^γ은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(k^\beta)^2=k^\alpha\times k^\gamma$에서

$y^2=x^2\times\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{x^2}{z}$

$\dfrac{18z}{x^2}>0$, $8y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\dfrac{18z}{x^2}+8y^2=\dfrac{18}{y^2}+8y^2\geq2\sqrt{\dfrac{18}{y^2}\times8y^2}$$

$$=24$$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{18}{y^2}=8y^2\text{, 즉 }y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\text{일 때 성립}\right)$

답 24

보충설명

a, b, c가 이 순서대로 공차가 d인 등차수열을 이루는 경우 양수 k에 대하여 k^a, k^b, k^c은 이 순서대로 공비가 k^d인 등비수열을 이룬다.

예를 들어, a, b, c가 이 순서대로 공차 d인 등차수열을 이루면 $2b=a+c$이고 2^a, 2^b, 2^c에서 $(2^b)^2=2^a\times2^c$이 성립하므로 세 수 2^a, 2^b, 2^c은 이 순서대로 공비가 2^d인 등비수열을 이룬다.

14

A(0, k), D(k, 0)에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2}k$ ……㉠

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

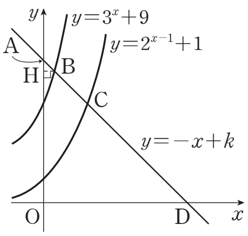
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}r$, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}r^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}r+\sqrt{2}r^2$

$=\sqrt{2}(1+r+r^2)$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\sqrt{2}k=\sqrt{2}(1+r+r^2)$이므로

$k=1+r+r^2$ ……㉢



$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이고 직선 AB의 기울기가 -1이므로 오른쪽 그림의 직각삼각형 AHB에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=1$

따라서 B(1, $k-1$)이고, 점 B는 곡선 $y=3^x+9$ 위에 있으므로

$k-1=3+9$

$\therefore\ k=13$

이것을 ㉢에 대입하면 $1+r+r^2=13$

$r^2+r-12=0$, $(r+4)(r-3)=0$

$\therefore\ r=3$ ($\because\ r>0$)

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}^2=2r^2=2\times3^2=18$

답 18

15

$a_n=2^n+(-1)^n$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$

$=(2-1)+(2^2+1)+(2^3-1)+\cdots+(2^7-1)$

$=(2+2^2+2^3+\cdots+2^7)-1$ ……㉠

이때, $2+2^2+2^3+\cdots+2^7$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 7 항까지의 합이므로

$2+2^2+2^3+\cdots+2^7=\dfrac{2(2^7-1)}{2-1}=2^8-2$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=(2^8-2)-1$ ($\because$ ㉠)

$=2^8-3$

$=2^a-b$

따라서 $a=8$, $b=3$이므로 $a+b=11$

답 11

16

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$이므로

조건 ㈏에서

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=4>0$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ r\neq1$

또한, $r=-1$이면 조건 ㈏에서

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{11}-a_{11}=0$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ r\neq-1$

이때, $S_n=\dfrac{2(r^n-1)}{r-1}$이므로 조건 ㈎에서

$\dfrac{2(r^{12}-1)}{r-1}-\dfrac{2(r^2-1)}{r-1}=4\times\dfrac{2(r^{10}-1)}{r-1}$

$r^2(r^{10}-1)=4(r^{10}-1)$

$r\neq\pm1$에서 $r^{10}-1\neq0$이므로

$r^2=4$

$\therefore\ r=-2$ 또는 $r=2$

또한, 조건 ㈏에서

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11}$

$=2r^{10}(1+r)<0$

$\therefore\ r<-1$

따라서 $r=-2$이므로

$a_4=2\times(-2)^3=-16$

답 ②

다른풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 할 때, 조건 ㈏에서

$S_{12}-S_{10}<0$

$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11}$

$=2r^{10}(1+r)<0$

$\therefore\ r<-1$ ……㉠

조건 ㈎에서 $S_{12}-S_2=4S_{10}$

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})-(a_1+a_2)$

$=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

이므로

$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{12}=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$r^2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}\neq 0$이므로

$r^2=4$

그런데 ㉠에서 $r<-1$이므로 $r=-2$

$\therefore\ a_4=2\times(-2)^3=-16$

17

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a\times ar=ar^9$

$a>0,\ r>0$이므로 $a=r^8$ ……㉠

$a_1+a_9=90$에서 $a+ar^8=90$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a+a^2=90,\ a^2+a-90=0$

$(a+10)(a-9)=0 \quad \therefore\ a=9\ (\because\ a>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $r^8=9,\ r^4=3\ (\because\ r>0)$

$r^{20}=(r^8)^2r^4=9^2\times 3=3^5=243$

수열 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9$는 첫째항이 a, 공비가 r^2인 등비수열이고, 수열 $a_1,\ -a_3,\ a_5,\ -a_7,\ a_9$는 첫째항이 a, 공비가 $-r^2$인 등비수열이므로

$\sqrt{(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)}=k$라 하면

$$\begin{aligned}k^2&=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)\\&=\frac{a\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}\times\frac{a\{(-r^2)^5-1\}}{-r^2-1}\\&=\frac{a(r^{10}-1)}{r^2-1}\times\frac{a(r^{10}+1)}{r^2+1}\\&=\frac{a^2(r^{20}-1)}{r^4-1}=\frac{9^2(243-1)}{3-1}\\&=9^2\times 11^2=99^2\end{aligned}$$

$\therefore\ k=99\ (\because\ k>0)$

답 99

18

매월 초에 50만 원씩 적립할 때 n개월째 초의 원리합계를 S라 하면

$S=50+50\times 1.01+50\times 1.01^2+\cdots+50\times 1.01^{n-1}$

(n은 자연수) (만 원)

이것은 첫째항이 50, 공비가 1.01인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$S=\frac{50\times(1.01^n-1)}{1.01-1}=5000\times(1.01^n-1)$ (만 원)

이것이 2000만 원보다 크거나 같아야 하므로

$5000\times(1.01^n-1)\geq 2000$

$1.01^n-1\geq 0.4,\ 1.01^n\geq 1.4$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.01\geq\log 1.4$

$\therefore\ n\geq\frac{\log 1.4}{\log 1.01}=\frac{0.1461}{0.0043}=33.\times\times\times$

따라서 적어도 33개월 후에 승용차를 살 수 있다.

답 33개월 후

보충설명

매월 초에 적립하는 경우 마지막 금액을 적립하는 동시에 원하는 금액이 완성됨을 확인할 수 있다. 즉, 마지막 금액은 이자가 붙지 않으므로 구하는 원리합계의 첫째항은 50만 원이다. 또한, n은 적립하는 횟수와 같으므로 자연수이다.

19

$\log a,\ \log b,\ \log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log b=\log a+\log c,\ \log b^2=\log ac$

$\therefore\ b^2=ac$

$abc=10^{18}$에서 $\log abc=18$이고

$\log abc=\log b^3=3\log b=18$이므로

$\log b=6$

이때, $a,\ c$는 1보다 큰 자연수이므로 $\log a>0,\ \log c>0$이고 $\log a,\ 6,\ \log c$는 이 순서대로 공차가 자연수인 등차수열을 이루므로 $\log a$와 $\log c$도 자연수이다. 따라서 순서쌍 $(\log a,\ \log b,\ \log c)$는

$(1,\ 6,\ 11),\ (2,\ 6,\ 10),\ (3,\ 6,\ 9),\ (4,\ 6,\ 8),\ (5,\ 6,\ 7)$

한편, $\log\frac{ab^2}{c^2}=\log\frac{a^2c}{c^2}=\log\frac{a^2}{c}=2\log a-\log c$이므로

$\log\frac{ab^2}{c^2}=-9,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3$

그러므로 $\log\frac{ab^2}{c^2}$의 최댓값은 3이다.

답 3

20

등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_k의 공차가 양수이고, 홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크므로 k는 홀수이다.

즉, 홀수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들의 개수는 $\frac{k+1}{2}$, 짝수 번째 항들의 개수는 $\frac{k-1}{2}$이다.

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_k=180$이므로

$$\frac{\frac{k+1}{2}(a_1+a_k)}{2}=180$$

$\therefore (k+1)(a_1+a_k)=720$ ……㉠

또한, $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{k-1}=135$이므로

$$\frac{\frac{k-1}{2}(a_2+a_{k-1})}{2}=135$$

$\therefore (k-1)(a_2+a_{k-1})=540$ ……㉡

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$라 하면

$a_2+a_{k-1}=(a_1+d)+a_{k-1}=a_1+a_k$

이므로 ㉡에서

$(k-1)(a_2+a_{k-1})=(k-1)(a_1+a_k)=540$ ……㉢

㉠$-$㉢을 하면

$2(a_1+a_k)=180$ $\quad\therefore a_1+a_k=90$

이것을 ㉠에 대입하면

$90(k+1)=720$, $k+1=8$ $\quad\therefore k=7$

$\therefore a_1+a_k+k=90+7=97$

답 97

21

$f(x)=[\log x]$, $g(x)=\log x-[\log x]$에 대하여 조건 ㈎에서 $f(a)+f(b)=[\log a]+[\log b]=2$이므로 $[\log a]$, $[\log b]$의 값이 될 수 있는 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $[\log a]=0$, $[\log b]=2$일 때,

조건 ㈏에서 $\log a=[\log a]$이므로

$\log a=0$ $\quad\therefore a=1$

또한, 조건 ㈐에서 세 수 $\log b$, 0, $\log 5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log b+\log 5=0$

$\log b=-\log 5$ $\quad\therefore b=\frac{1}{5}$

이때, $b=\frac{1}{5}$이면 b가 자연수라는 조건에 모순이다.

(ii) $[\log a]=1$, $[\log b]=1$일 때,

조건 ㈏에서 $\log a=[\log a]$이므로

$\log a=1$ $\quad\therefore a=10$

또한, 조건 ㈐에서 세 수 $\log b$, 1, $\log 5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log b+\log 5=2$

$\log 5b=2$

$5b=10^2=100$ $\quad\therefore b=20$

따라서 $a=10$, $b=20$이다.

(iii) $[\log a]=2$, $[\log b]=0$일 때,

조건 ㈏에서 $\log a=[\log a]$이므로

$\log a=2$ $\quad\therefore a=100$

또한, 조건 ㈐에서 세 수 $\log b$, 2, $\log 5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log b+\log 5=4$

$\log 5b=4$

$5b=10^4=10000$ $\quad\therefore b=2000$

이때, $b=2000$이면 $[\log b]=0$이라는 조건에 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=10$, $b=20$이므로

$ab=10\times 20=200$

답 200

보충설명

자연수 a, b에 대하여 $\log a\geq 0$, $\log b\geq 0$이므로 $[\log a]+[\log b]=2$의 값이 될 수 있는 경우는 $[\log a]=2$, $[\log b]=0$ 또는 $[\log a]=1$, $[\log b]=1$ 또는 $[\log a]=0$, $[\log b]=2$의 세 가지이다.

22

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq 1)$라 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=6$ ……㉠

(i) a_1이 등차수열의 두 번째 항일 때,

$ar+ar^2=2a$이므로 ㉠에서 $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$2r^2+2r+2=6$, $2r^2+2r-4=0$

$r^2+r-2=0$, $(r+2)(r-1)=0$

이때, $r\neq 1$이므로 $r=-2$

$\therefore a_1+a_3=2+2\times(-2)^2=10$

(ii) a_2가 등차수열의 두 번째 항일 때,

$a+ar^2=2ar$이므로 ㉠에서

$3ar=6 \qquad \therefore\ a=\dfrac{2}{r}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{r}+2+2r=6,\ 2r^2-4r+2=0$

$r^2-2r+1=0,\ (r-1)^2=0$

따라서 $r=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) a_3이 등차수열의 두 번째 항일 때,

$a+ar=2ar^2$이므로 ㉠에서 $3ar^2=6 \qquad \therefore\ a=\dfrac{2}{r^2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{r^2}+\dfrac{2}{r}+2=6,\ 4r^2-2r-2=0$

$2r^2-r-1=0,\ (2r+1)(r-1)=0$

이때, $r\neq1$이므로 $r=-\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{2}{r^2}$이므로 $a=8$

$\therefore\ a_1+a_3=8+8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=10$

(i), (ii), (iii)에서 $a_1+a_3=10$

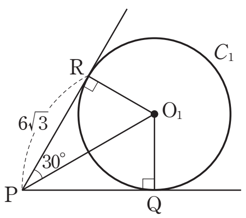
답 10

23

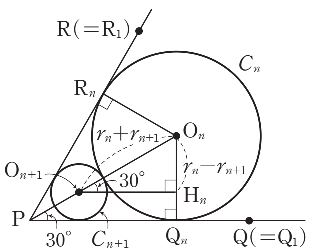
$\triangle RPO_1$은 $\angle RPO_1=30°$, $\angle PRO_1=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{RO_1}=\overline{PR}\tan 30°$

$=6\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=6$



즉, 원 C_1의 반지름의 길이는 6이다.



위의 그림과 같이 n번째에 그려진 원 C_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 원 C_n과 선분 PQ의 접점을 Q_n이라 하자.

또한, $(n+1)$번째에 그려진 원 C_{n+1}의 중심을 O_{n+1}, 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하자.

점 O_{n+1}에서 선분 O_nQ_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면 직각삼각형 $O_nO_{n+1}H_n$에서

$\overline{O_nO_{n+1}}=r_n+r_{n+1},\ \overline{O_nH_n}=r_n-r_{n+1}$

이때, $\angle O_nO_{n+1}H_n=30°$이므로

$\overline{O_nH_n}=\overline{O_nO_{n+1}}\sin 30°$, 즉

$r_n-r_{n+1}=\dfrac{1}{2}(r_n+r_{n+1}),\ \dfrac{1}{2}r_n=\dfrac{3}{2}r_{n+1}$

$\therefore\ r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$

즉, 수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

첫째항부터 제 6 항까지의 합은

$\dfrac{6\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^6\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=9\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^6\right\}=9-\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{728}{81}$

이므로 $p=81,\ q=728$

$\therefore\ q-p=728-81=647$

답 647

24

조건 (나)에서 $a_7,\ a_8,\ a_k$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 수열의 공비를 r라 하면

$a_8=a_7r,\ a_k=a_7r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 조건 (가)에서

$a_n=a_1+(n-1)d$ (a_1은 정수, d는 자연수)

이므로

$a_8-a_7=d,\ a_k-a_8=(k-8)d$

이 식에 ㉠을 대입하면

$a_7(r-1)=d,\ a_7(r-1)r=(k-8)d$이므로

$dr=(k-8)d$

$d\neq0$이므로 $r=k-8 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$a_k=a_7(k-8)^2$

이때, $a_k=144=12^2$이므로

$a_7(k-8)^2=12^2$ ……㉢

조건 (가)에서 a_7과 $k-8$이 정수이므로 a_7은 제곱수이어야 한다. 즉, a_7은 12의 약수 중 제곱수인

$1,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 6^2,\ 12^2$

중 하나이다.

(i) $a_7=1$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=12^2$이므로 $k=20$ ($\because$ $k>8$)

(ii) $a_7=2^2$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=6^2$이므로 $k=14$ ($\because$ $k>8$)

(iii) $a_7=3^2$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=4^2$이므로 $k=12$ ($\because$ $k>8$)

(iv) $a_7=4^2$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=3^2$이므로 $k=11$ ($\because$ $k>8$)

(v) $a_7=6^2$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=2^2$이므로 $k=10$ ($\because$ $k>8$)

(vi) $a_7=12^2$일 때,
㉢에서 $(k-8)^2=1$이므로 $k=9$ ($\because$ $k>8$)
그런데 $k=9$이면 ㉡에서 $r=1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이다.
$\therefore$ $k\neq 9$

(i)~(vi)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$20+14+12+11+10=67$

답 67

유형연습 09 수열의 합

본문 pp.217~232

01-1 (1) 9 (2) 540	**01-2** 65	**01-3** 370
02-1 (1) 1635 (2) 6		**02-2** 14
02-3 3025	**03-1** (1) 6 (2) 35	**03-2** 70
03-3 1302	**04-1** (1) $\frac{30}{11}$ (2) $\frac{200}{161}$	
04-2 45	**05-1** $\frac{5}{2}$	**05-2** 70
05-3 4	**06-1** $1+\log_7 5$	**06-2** 1020
06-3 -3	**07-1** (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{47}{3}$	

01-1

(1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)^2=50$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)=50$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2+2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+\sum_{k=1}^{10}b_k^2=50$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)^2=14$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_kb_k+b_k^2)=14$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_kb_k+\sum_{k=1}^{10}b_k^2=14$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$4\sum_{k=1}^{10}a_kb_k=36$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_kb_k=9$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

즉, $\sum_{k=1}^{2n}a_k=2n(n+3)$이므로

$\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{2\times15}a_k$

$=2\times15\times(15+3)$

$=540$

답 (1) 9 (2) 540

01-2

$\sum_{k=11}^{20}(a_k+2b_k+3)$

$=\sum_{k=11}^{20}a_k+2\sum_{k=11}^{20}b_k+\sum_{k=11}^{20}3$

$=\left(\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)+2\left(\sum_{k=1}^{20}b_k-\sum_{k=1}^{10}b_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{20}3-\sum_{k=1}^{10}3\right)$

$=(60-45)+2(30-20)+(3\times20-3\times10)$

$=15+20+30=65$

답 65

01-3

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+cn$이므로

$a_8=\sum_{k=1}^{4}a_{2k}-\sum_{k=1}^{3}a_{2k}$

$\quad=(4^2+4c)-(3^2+3c)=7+c$

$a_8=10$에서 $7+c=10$

$\therefore\ c=3$

즉, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=3n^2-6n$, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+3n$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{2n}a_k=(3n^2-6n)+(n^2+3n)=4n^2-3n$

위의 식의 양변에 $n=10$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{20}a_k=4\times10^2-3\times10=370$

답 370

다른풀이

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=cn^2-6n$에서

$a_1=c-6$,

$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$

$\quad=cn^2-6n-\{c(n-1)^2-6(n-1)\}$

$\quad=cn^2-6n-(cn^2-2cn+c-6n+6)$

$\quad=2cn-c-6$ (단, $n\geq2$)

또한, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+cn$에서

$a_2=1+c$,

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}$

$\quad=n^2+cn-\{(n-1)^2+c(n-1)\}$

$\quad=n^2+cn-(n^2-2n+1+cn-c)$

$\quad=2n+c-1$ (단, $n\geq2$)

이때, $a_8=10$이므로

$a_8=2\times4+c-1=10 \qquad \therefore\ c=3$

$\therefore\ a_{2n-1}=6n-9$, $a_{2n}=2n+2$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$\quad=\sum_{k=1}^{10}(6k-9+2k+2)$

$\quad=\sum_{k=1}^{10}(8k-7)$

$\quad=8\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}7$

$\quad=8\times\frac{10\times11}{2}-7\times10$

$\quad=440-70=370$

02-1

(1) $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=1^2+2=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$\quad=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$\quad=2n+1$

(i), (ii)에서 $a_n=2n+1$ $(n\geq1)$

$a_{4k-2}=2(4k-2)+1=8k-3$이므로

$\sum_{k=1}^{5}k^2a_{4k-2}=\sum_{k=1}^{5}k^2(8k-3)=\sum_{k=1}^{5}(8k^3-3k^2)$

$\quad=8\times\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-3\times\frac{5\times6\times11}{6}$

$\quad=1800-165$

$\quad=1635$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-2k)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)-\left\{\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k)-(n^2-2n)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+2k)-(k^2-2k)\}+n^2-2n$

$=\sum_{k=1}^{n}4k+n^2-2n$

$=4\times\frac{n(n+1)}{2}+n^2-2n$

$=3n^2$

즉, $3n^2=108$, $n^2=36$

n은 자연수이므로 $n=6$

답 (1) 1635 (2) 6

02-2

방정식 $x^2+4x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)+(\alpha+2)(\beta+2)+(\alpha+3)(\beta+3)+\cdots+(\alpha+7)(\beta+7)$

$=\sum_{k=1}^{7}(\alpha+k)(\beta+k)$

$=\sum_{k=1}^{7}\{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$

$=\sum_{k=1}^{7}(k^2-4k-2)$

$=\frac{7\times8\times15}{6}-4\times\frac{7\times8}{2}-2\times7$

$=140-112-14=14$

답 14

02-3

$\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)+(2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2)+(3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2)+\cdots+(10^2)$

이때, 1^2은 1번, 2^2은 2번, 3^2은 3번, ⋯, 10^2은 10번 더해지므로

$\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

$=1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+10\times10^2$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

$=\sum_{k=1}^{10}k^3=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2$

$=55^2=3025$

답 3025

03-1

(1) $\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{6}(i+2j)\right\}$에서

$\sum_{j=1}^{6}(i+2j)=\sum_{j=1}^{6}i+2\sum_{j=1}^{6}j=6i+2\times\frac{6\times7}{2}=6i+42$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{6}(i+2j)\right\}=\sum_{i=1}^{n}(6i+42)$

$=6\times\frac{n(n+1)}{2}+42n$

$=3n(n+1)+42n$

$=3n^2+45n$

즉, $3n^2+45n=378$이므로

$n^2+15n-126=0$, $(n+21)(n-6)=0$

n은 자연수이므로 $n=6$

(2) 방정식 $x^2-8x+7=0$의 두 근이 m, n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=8$, $mn=7$

$\sum_{p=1}^{m}\left\{\sum_{q=1}^{n}(p+q)\right\}$에서

$\sum_{q=1}^{n}(p+q)=\sum_{q=1}^{n}p+\sum_{q=1}^{n}q=np+\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \sum_{p=1}^{m}\left\{\sum_{q=1}^{n}(p+q)\right\}$

$=\sum_{p=1}^{m}\left\{np+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=n\times\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\times m$

$=\frac{mn}{2}(m+n+2)$

$=\frac{7}{2}(8+2)=35$

답 (1) 6 (2) 35

03-2

$\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)\right\}$에서 $\sum_{i=1}^{j}i=\frac{j(j+1)}{2}$이므로

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}(j^2+j)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{k(k+1)}{6}(2k+4)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$
$$=\frac{k^3+3k^2+2k}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5}(k^3+3k^2+2k)$$
$$=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2+3\times\frac{5\times6\times11}{6}+2\times\frac{5\times6}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\times(225+165+30)=70$$

답 70

다른풀이

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

을 이용하면

$$(\text{주어진 식})=\sum_{k=1}^{5}\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{5\times6\times7\times8}{4}=70$$

03-3

$\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n-1}\right)$에서

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k+n-1}=\sum_{k=1}^{n}(2^{n-1}\times2^k)$$
$$=2^{n-1}\times\sum_{k=1}^{n}2^k$$
$$=2^{n-1}\times\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$=2^{n-1}\times(2^{n+1}-2)$$
$$=4^n-2^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n-1}\right)=\sum_{n=1}^{5}(4^n-2^n)$$
$$=\sum_{n=1}^{5}4^n-\sum_{n=1}^{5}2^n$$
$$=\frac{4(4^5-1)}{4-1}-\frac{2(2^5-1)}{2-1}$$
$$=\frac{4}{3}\times1023-2\times31$$
$$=1364-62=1302$$

답 1302

04-1

(1) 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{3}{2+4+6+\cdots+2n}=\frac{3}{\sum_{k=1}^{n}2k}$$
$$=\frac{3}{n(n+1)}=3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=3\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=3\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{30}{11}$$

(2) 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{4}{(2n+1)^2-4}=\frac{4}{(2n-1)(2n+3)}$$
$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{17}}-\frac{1}{21}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{23}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{21}-\frac{1}{23}$$
$$=\frac{200}{161}$$

답 (1) $\frac{30}{11}$ (2) $\frac{200}{161}$

04-2

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{a}{k^2+4k+3}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}\frac{a}{(k+1)(k+3)}$$
$$=\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{a}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{14}{45}a$$

따라서 $\frac{14}{45}a$가 정수가 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은 45이다.

답 45

05-1

$b_n=\sqrt{a_{2n-1}}+\sqrt{a_{2n+1}}$이므로

$$\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{b_k}=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{a_{2k-1}}+\sqrt{a_{2k+1}}}=\sum_{k=1}^{30}\frac{\sqrt{a_{2k-1}}-\sqrt{a_{2k+1}}}{a_{2k-1}-a_{2k+1}}$$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$a_{2k-1}-a_{2k+1}=\{(2k-1)-(2k+1)\}\times 2$$
$$=-2\times 2=-4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}\frac{\sqrt{a_{2k-1}}-\sqrt{a_{2k+1}}}{a_{2k-1}-a_{2k+1}}$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{30}(\sqrt{a_{2k-1}}-\sqrt{a_{2k+1}})$$
$$=-\frac{1}{4}\{(\sqrt{a_1}-\cancel{\sqrt{a_3}})+(\cancel{\sqrt{a_3}}-\cancel{\sqrt{a_5}})+(\cancel{\sqrt{a_5}}-\cancel{\sqrt{a_7}})+\cdots+(\cancel{\sqrt{a_{59}}}-\sqrt{a_{61}})\}$$
$$=-\frac{1}{4}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{61}})$$

이때, $a_1=1$, $a_{61}=1+60\times 2=121$이므로

$$(\text{주어진 식})=-\frac{1}{4}(\sqrt{1}-\sqrt{121})=-\frac{1}{4}(1-11)=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

05-2

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{4}})+\cdots+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}})$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$

이때, $\sum_{k=1}^{n}a_k=5\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$\sqrt{n+2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

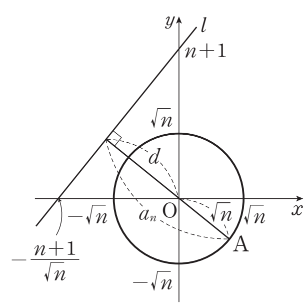
$\sqrt{n+2}=6\sqrt{2}=\sqrt{72}$

$n+2=72 \qquad \therefore\ n=70$

답 70

05-3

다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=n$의 중심 $(0,\ 0)$을 지나고 직선 $l: y=\sqrt{n}x+n+1$, 즉 $\sqrt{n}x-y+n+1=0$에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점 중에서 직선 l과 거리가 먼 점을 A라 하자.



원 $x^2+y^2=n$ 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최댓값 a_n은 점 A와 직선 l 사이의 거리이다.

즉, a_n은 원점과 직선 l 사이의 거리 d와 원의 반지름의 길이 $\sqrt{n}$을 더한 것과 같다. 이때, 자연수 n에 대하여

$$d=\frac{|\sqrt{n}\times 0-1\times 0+n+1|}{\sqrt{(\sqrt{n})^2+(-1)^2}}=\frac{|n+1|}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$$

이므로

$$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{24}\frac{1}{a_k}&=\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{25}-\cancel{\sqrt{24}})\\&=\sqrt{25}-\sqrt{1}\\&=5-1=4\end{aligned}$$

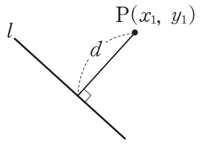
답 4

보충설명

점과 직선 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $l: ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



06-1

$\displaystyle\sum_{k=1}^{48}\log_7\frac{\sqrt{k^2+2k}}{k}$에서

$\displaystyle\frac{\sqrt{k^2+2k}}{k}=\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}}$ ($\because\ k>0$)이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{48}\log_7\frac{\sqrt{k^2+2k}}{k}\\&=\sum_{k=1}^{48}\log_7\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}}\\&=\log_7\frac{\sqrt{3}}{1}+\log_7\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}+\log_7\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\log_7\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}\\&\qquad+\cdots+\log_7\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{47}}+\log_7\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{48}}\\&=\log_7\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{1}\times\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{\sqrt{4}}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{49}}{\cancel{\sqrt{47}}}\times\frac{\sqrt{50}}{\cancel{\sqrt{48}}}\right)\\&=\log_7\left(\frac{\sqrt{49}\times\sqrt{50}}{1\times\sqrt{2}}\right)=\log_7(7\times\sqrt{25})\\&=1+\log_7 5\end{aligned}$$

답 $1+\log_7 5$

06-2

$\displaystyle f(x)=\log_4\left(1+\frac{1}{x+3}\right)=\log_4\left(\frac{x+4}{x+3}\right)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f(k)&=\sum_{k=1}^{n}\log_4\left(\frac{k+4}{k+3}\right)\\&=\log_4\frac{5}{4}+\log_4\frac{6}{5}+\log_4\frac{7}{6}+\cdots+\log_4\frac{n+4}{n+3}\\&=\log_4\left(\frac{\cancel{5}}{4}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{6}}\times\cdots\times\frac{n+4}{\cancel{n+3}}\right)\\&=\log_4\frac{n+4}{4}\\&=\log_4(n+4)-1\end{aligned}$$

즉, $\log_4(n+4)-1=4$이므로

$\log_4(n+4)=5,\ n+4=4^5=1024$

$\therefore\ n=1020$

답 1020

06-3

$\displaystyle\sum_{k=1}^{26}(-1)^k\log_3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$에서

$\displaystyle\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}$이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{26}(-1)^k\log_3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{26}(-1)^k\log_3\frac{1}{k(k+1)}\\&=-\log_3\frac{1}{1\times2}+\log_3\frac{1}{2\times3}-\log_3\frac{1}{3\times4}+\log_3\frac{1}{4\times5}\\&\qquad-\cdots-\log_3\frac{1}{25\times26}+\log_3\frac{1}{26\times27}\\&=\log_3(1\times2)+\log_3\frac{1}{2\times3}+\log_3(3\times4)+\log_3\frac{1}{4\times5}\\&\qquad+\cdots+\log_3(25\times26)+\log_3\frac{1}{26\times27}\\&=\log_3\left(1\times\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}\times\cancel{3}}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4}\times\cancel{5}}\right.\\&\qquad\left.\times\cdots\times\cancel{25}\times\cancel{26}\times\frac{1}{\cancel{26}\times27}\right)\\&=\log_3\frac{1}{27}=-3\end{aligned}$$

답 -3

07-1

(1) 주어진 수열을

$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$

와 같이 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면 제 n 군의 k번째 항은 $\frac{k}{n+1}$이다.

제 n 군의 항의 개수는 n이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{7} k=\frac{7\times 8}{2}=28$, $\sum_{k=1}^{8} k=\frac{8\times 9}{2}=36$이므로 제 33 항은

제 $\underset{n}{8}$ 군의 $\underset{k}{5}$번째 항이다.

따라서 제 33 항은 $\frac{5}{8+1}=\frac{5}{9}$

(2) 제 n 군의 k번째 항은 $\frac{k}{n+1}$이고, 항의 개수는 n이므로

제 n 군의 모든 항의 합은

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}$

제 33 항은 제 8 군의 5번째 항이므로 첫째항부터 제 7 군까지의 합과 제 8 군의 첫째항부터 제 5 항까지의 합을 더하면 된다. 따라서 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{7} \frac{k}{2}+\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{9}=\frac{1}{2}\times\frac{7\times 8}{2}+\frac{1}{9}\times\frac{5\times 6}{2}$

$=14+\frac{5}{3}=\frac{47}{3}$

답 (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{47}{3}$

개 념 마 무 리

본문 pp.234~237

01 192	**02** 16	**03** ④	**04** 230
05 522	**06** 9	**07** 65	**08** ⑤
09 53	**10** 91	**11** 4	**12** 84
13 $2+\log 3$	**14** 5	**15** ②	**16** $\frac{49}{2}$
17 -2	**18** ②	**19** $\frac{15}{32}$	**20** 30
21 375	**22** 159	**23** 725	

01

자연수 n에 대하여 2^n은

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $\cdots$이고

5로 나누었을 때의 나머지는 2, 4, 3, 1, 2, 4, $\cdots$이므로

2, 4, 3, 1이 반복된다.

따라서 $77=4\times 19+1$이므로

$\sum_{k=1}^{77} a_k=(2+4+3+1)\times 19+2=192$

답 192

02

$\sum_{k=1}^{n} f(k+1)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n)+f(n+1)$

$\sum_{k=2}^{n+1} f(k-2)=f(0)+f(1)+f(2)$

$+\cdots+f(n-2)+f(n-1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} f(k+1)-\sum_{k=2}^{n+1} f(k-2)$

$=f(n)+f(n+1)-f(0)-f(1)$

$=n^2+n+\{(n+1)^2+(n+1)\}-0-2$

$=2n^2+4n$

즉, $2n^2+4n=576$에서

$n^2+2n-288=0$

$(n+18)(n-16)=0$

이때, n은 자연수이므로 $n=16$

답 16

03

ㄱ. $1+2+2^2+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}=\sum_{k=0}^{n} 2^k$ (거짓)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{9} a_k$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9$

$=(a_1+a_4+a_7)+(a_2+a_5+a_8)+(a_3+a_6+a_9)$

$=\sum_{k=1}^{3} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{3} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{3} a_{3k}$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{8} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3$

$= \underline{\sum_{i=2}^{9}(i-1)^3}$ (참)

$\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 변수인 k는 i, j, l 등 다른 문자로 바꾸어도 무방하다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

04

${}_{n+2}C_3 = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$이므로

$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(i) $n=1$일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$ ……㉠

(ii) $n\ge2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)}{2}$ ……㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n\ge1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_{k+1}-a_k)$

$=(\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{21}-\cancel{a_{20}})$

$=a_{21}-a_1$

$=\frac{21\times22}{2}-1=230$

답 230

다른풀이

$\sum_{k=1}^{20}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{20}a_{k+1} - \sum_{k=1}^{20}a_k$

$= \left(\sum_{k=1}^{21}a_k - a_1\right) - \sum_{k=1}^{20}a_k$

$= S_{21} - S_1 - S_{20}$

$= {}_{23}C_3 - {}_3C_3 - {}_{22}C_3$

$= {}_{22}C_2 - {}_3C_3$ ($\because$ ${}_{22}C_2 + {}_{22}C_3 = {}_{23}C_3$)

$= \frac{22\times21}{2} - 1 = 230$

보충설명

조합의 수 ${}_nC_r$

(1) ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(2) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

05

두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하면

2, a_1, a_2, $\cdots$, a_6, 2^8은 등차수열이므로

$2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6+2^8 = \frac{8(2+2^8)}{2}$

$a_1+a_2+\cdots+a_6+258=1032$

$\therefore$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=774$

$y=\log_2 x$에서 $x=2^y$이고, 점 B_n의 y좌표는 등차수열을 이루므로 점 B_n의 x좌표, 즉 b_1, b_2, $\cdots$, b_6은 등비수열을 이룬다.

따라서 2, b_1, b_2, $\cdots$, b_6, 2^8은 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

$2^8 = 2r^7$에서 $r=2$

$\therefore$ $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_6 = \frac{4(2^6-1)}{2-1} = 252$

$l_n = a_n - b_n$이므로

$\sum_{n=1}^{6} l_n = (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_6-b_6)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_6)$

$=774-252=522$

답 522

보충설명

로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 세 점 B_1, B_2, B_3의 y좌표를 각각 c_1, c_2, c_3이라 하면 세 수 c_1, c_2, c_3은 등차수열을 이루므로

$2c_2 = c_1 + c_3$

이때, $c_1=\log_2 b_1$, $c_2=\log_2 b_2$, $c_3=\log_2 b_3$이므로

$2\log_2 b_2 = \log_2 b_1 + \log_2 b_3$

$\log_2 b_2^2 = \log_2(b_1\times b_3)$ $\therefore$ $b_2^2 = b_1 b_3$

따라서 b_1, b_2, b_3은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

2, b_1, b_2, $\cdots$, b_6, 2^8은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

06

$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times 1$

$=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$

$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\left(-\frac{2n+1}{3}+n+1\right)$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=165$

이때, $165=3\times5\times11$이므로

$n(n+1)(n+2)=2\times3^2\times5\times11$

$=9\times10\times11$

$\therefore\ n=9$

답 9

07

$\sum_{k=1}^{9}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{9}(x^2-2xk+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{9}x^2-2x\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}k^2$

$=9x^2-2x\times\frac{9\times10}{2}+\frac{9\times10\times19}{6}$

$=9x^2-90x+285$

$=9(x-5)^2+60$

따라서 $\sum_{k=1}^{9}(x-k)^2$은 $x=5$일 때 최솟값 60을 갖는다.

즉, $p=5$, $q=60$이므로 $p+q=65$

답 65

08

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-2)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-2n$

$=n^2+n-2n$

$=n^2-n$ (참)

ㄴ. $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\sum_{i=1}^{k}i^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$1+2+3+\cdots+k=\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2}$ 이므로

$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=\frac{2k+1}{3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{1+2+3+\cdots+k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{3}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

$=\frac{1}{3}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$

$=\frac{n(n+2)}{3}$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}2^{l+k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k\sum_{l=1}^{k}2^l\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{2^k\times\frac{2(2^k-1)}{2-1}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2^{2k+1}-2^{k+1})$

$=\sum_{k=1}^{n}2^{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}$

$=\frac{8(4^n-1)}{4-1}-\frac{4(2^n-1)}{2-1}$

$=\frac{8}{3}\times4^n-\frac{8}{3}-2^{n+2}+4$

$=\frac{2^{2n+3}}{3}-2^{n+2}+\frac{4}{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

09

(i) $n=1$일 때,

$a_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=1-2-3=-4$ ⋯⋯㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=n^2-2n-3-\{(n-1)^2-2(n-1)-3\}$

$=2n-3$ ⋯⋯㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 다르므로

$a_1=-4,\ a_n=2n-3\ (n\geq 2)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{8}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\frac{8}{a_1 a_2}+\sum_{k=2}^{10}\frac{8}{a_k a_{k+1}}$$

$$=\frac{8}{(-4)\times 1}+\sum_{k=2}^{10}\frac{8}{(2k-3)(2k-1)}$$

$$=-2+4\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)$$

$$=-2+4\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{17}}-\frac{1}{19}\right)\right\}$$

$$=-2+4\left(1-\frac{1}{19}\right)$$

$$=-2+\frac{72}{19}=\frac{34}{19}$$

따라서 $p=19,\ q=34$이므로

$p+q=53$

답 53

보충설명

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n=n^2-2n-3$에서

S_n은 n에 대한 이차식이고 상수항이 0이 아니므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

따라서 $\sum_{k=1}^{10}\frac{8}{a_k a_{k+1}}=\frac{8}{a_1 a_2}+\sum_{k=2}^{10}\frac{8}{a_k a_{k+1}}$과 같이 $\frac{8}{a_1 a_2}$을 따로 계산해야 한다.

10

점 $(n,\ 2n)$과 직선 $y=-\frac{3}{4}x+4$, 즉 $3x+4y-16=0$ 사이의 거리 a_n은

$$a_n=\frac{|3n+8n-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|11n-16|}{5}$$ (가)

$n=1$일 때, $a_1=\frac{|11-16|}{5}=1$이고

$n\geq 2$일 때, $a_n=\frac{11n-16}{5}$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k$$ (나)

$$=1+\sum_{k=2}^{10}\frac{11k-16}{5}$$

$$=1+\left\{\sum_{k=1}^{10}\frac{11k-16}{5}-\frac{11-16}{5}\right\}$$

$$=1+\frac{11}{5}\times\frac{10\times 11}{2}-\frac{16}{5}\times 10+1$$

$$=2+121-32=91$$ (다)

답 91

단계	채점 기준	배점
(가)	a_n을 n에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(나)	절댓값의 부호에 유의하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k$로 나타낸 경우	40%
(다)	구하는 값을 구한 경우	30%

오답피하기

거리를 구할 때에는 절댓값의 부호에 유의하여 계산해야 한다.
절댓값을 고려하지 않고 계산할 경우

$$\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10}(11k-16)=\frac{1}{5}\left(11\times\frac{10\times 11}{2}-16\times 10\right)$$

$$=\frac{445}{5}=89$$

가 되어 오답이 된다.

11

$a_1=S_1=2,\ a_{k+1}=S_{k+1}-S_k\ (k\geq 1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{14}\frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}=\sum_{k=1}^{14}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_k S_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{S_1}-\cancel{\frac{1}{S_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{S_2}}-\cancel{\frac{1}{S_3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{S_3}}-\cancel{\frac{1}{S_4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{S_{14}}}-\frac{1}{S_{15}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{15}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{15}}$$

이때, $\sum_{k=1}^{14}\frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{15}}=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{S_{15}}=\frac{1}{4}$

$\therefore S_{15}=4$

답 4

12

$a_n=\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}$ $(n\ge 1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

$$=(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\cancel{\sqrt{2n-1}})$$

$$=\sqrt{2n+1}-1$$

즉, $\sqrt{2n+1}-1=12$에서 $\sqrt{2n+1}=13$

$2n+1=169$, $2n=168$

$\therefore\ n=84$

답 84

13

$$a_n=10^n+\frac{10^{n+1}}{5n}=10^n\left(1+\frac{2}{n}\right)=10^n\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$\log a_n=\log 10^n+\log\frac{n+2}{n}=n+\log\frac{n+2}{n}$$

이때, 자연수 n에 대하여 $1<\dfrac{n+2}{n}<10$이므로

$$0<\log\frac{n+2}{n}<1$$

즉, $f(a_n)=\log\dfrac{n+2}{n}$이므로

$$\sum_{k=1}^{23}f(a_k)=\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\log\frac{6}{4}$$
$$+\cdots+\log\frac{24}{22}+\log\frac{25}{23}$$

$$=\log\left(\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{4}}{2}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{24}{\cancel{22}}\times\frac{25}{\cancel{23}}\right)$$

$$=\log\frac{24\times 25}{1\times 2}=\log 300=2+\log 3$$

답 $2+\log 3$

14

$\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)=\sqrt{n+1}$에서

$a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n+1}$, $a_n^{\,2}-2\sqrt{n+1}\,a_n+1=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$a_n=\sqrt{n+1}\pm\sqrt{(n+1)-1}$$
$$=\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n}$$

$\therefore\ a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ 또는 $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

이때, $a_n>1$이므로

$a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{35}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{35}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$$
$$+\cdots+(\sqrt{36}-\cancel{\sqrt{35}})$$

$$=6-1=5$$

답 5

보충설명

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 경우 자연수 n에 대하여

$n+1<n+2\sqrt{n}+1$이므로

$(\sqrt{n+1})^2<(\sqrt{n}+1)^2$

이때, $\sqrt{n+1}>0$, $\sqrt{n}+1>0$이므로

$\sqrt{n+1}<\sqrt{n}+1$

$\therefore\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<1$

따라서 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<1$이므로 $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$이다.

15

$f(x)=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots+35x^{17}$ ······㉠

㉠의 양변에 x를 곱하면

$xf(x)=x+3x^2+5x^3+\cdots+33x^{17}+35x^{18}$ ······㉡

㉠−㉡을 하면

$$(1-x)f(x)=1+\overbrace{2x+2x^2+2x^3+\cdots+2x^{17}}^{\text{첫째항이 }2x,\text{ 공비가 }x\text{인 등비수열의 제17항까지의 합}}-35x^{18}$$

$$(1-x)f(x)=1+\frac{2x(x^{17}-1)}{x-1}-35x^{18}\ (\text{단, } x\neq 1)$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$-f(2)=1+4(2^{17}-1)-35\times 2^{18}$$
$$=1+2^{19}-4-35\times 2^{18}$$
$$=-33\times 2^{18}-3$$

$\therefore\ f(2)=33\times 2^{18}+3$

답 ②

16

$a_n=(n+1)\cos\frac{n\pi}{3}$로 놓으면 음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=6k$일 때,

$a_{6k}=(6k+1)\cos 2k\pi=6k+1$

(ii) $n=6k+1$일 때,

$$a_{6k+1}=(6k+2)\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=(6k+2)\times\cos\frac{\pi}{3}=3k+1$$

(iii) $n=6k+2$일 때,

$$a_{6k+2}=(6k+3)\cos\left(2k\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=(6k+3)\times\cos\frac{2}{3}\pi=-3k-\frac{3}{2}$$

(iv) $n=6k+3$일 때,

$$a_{6k+3}=(6k+4)\cos(2k\pi+\pi)$$
$$=(6k+4)\times\cos\pi=-6k-4$$

(v) $n=6k+4$일 때,

$$a_{6k+4}=(6k+5)\cos\left(2k\pi+\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=(6k+5)\times\cos\frac{4}{3}\pi=-3k-\frac{5}{2}$$

(vi) $n=6k+5$일 때,

$$a_{6k+5}=(6k+6)\cos\left(2k\pi+\frac{5}{3}\pi\right)$$
$$=(6k+6)\times\cos\frac{5}{3}\pi=3k+3$$

(i)~(vi)에서

$$a_{6k}+a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}$$
$$=6k+1+3k+1+\left(-3k-\frac{3}{2}\right)+(-6k-4)+\left(-3k-\frac{5}{2}\right)+3k+3$$
$$=-3$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{50}a_k=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11})+\cdots+(a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}+a_{46}+a_{47})+a_{48}+a_{49}+a_{50}$$
$$=8\times(-3)+49+25+\left(-24-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{49}{2}$$

답 $\frac{49}{2}$

17

조건 (가)에서 $a_2=-3a_1$, $a_3=9a_1$, $a_4=-27a_1$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+(-3a_1)+9a_1+(-27a_1)$$
$$=-20a_1$$

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n+1$이므로

$$\sum_{k=5}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{4}a_{k+4}=\sum_{k=1}^{4}(a_k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{4}a_k+4=-20a_1+4$$

같은 방법으로

$$\sum_{k=9}^{12}a_k=\sum_{k=5}^{8}a_k+4=-20a_1+8$$
$$\sum_{k=13}^{16}a_k=\sum_{k=9}^{12}a_k+4=-20a_1+12$$
$$\sum_{k=17}^{20}a_k=\sum_{k=13}^{16}a_k+4=-20a_1+16$$
$$\sum_{k=21}^{24}a_k=\sum_{k=17}^{20}a_k+4=-20a_1+20$$

또한, $a_{25}=a_{21}+1=a_{17}+2=\cdots=a_1+6$이므로

$$\sum_{k=1}^{25}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{4}a_k+\sum_{k=5}^{8}a_k+\sum_{k=9}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{16}a_k+\sum_{k=17}^{20}a_k+\sum_{k=21}^{24}a_k+a_{25}$$
$$=-20a_1\times6+4+8+12+16+20+a_1+6$$
$$=-119a_1+4\times\frac{5\times6}{2}+6=-119a_1+66$$

따라서 $-119a_1+66=304$이므로

$-119a_1=238$ $\quad\therefore\ a_1=-2$

답 -2

18

$a_2-a_1=98-1$

$a_3-a_2=95-2\times2$

$a_4-a_3=91-3\times3$

$\vdots$

이므로 X를 제13행의 오른쪽 끝에 적힌 수라 하면

$a_{13}-a_{12}=X-12^2$

이때,

$$X=100-(2+3+\cdots+13)$$
$$=101-(1+2+3+\cdots+13)$$
$$=101-\frac{13\times14}{2}=10$$

$\therefore\ a_{13}-a_{12}=10-12^2=-134$

답 ②

다른풀이

제 n 행의 왼쪽 끝에 적힌 수를 l_n이라 하면

$$l_n=100-1-2-\cdots-(n-1)$$
$$=100-\frac{n(n-1)}{2}$$

따라서 제 n 행에 적힌 수의 합 a_n은 첫째항이 l_n이고 공차가 -1인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$$a_n=\frac{n\{200-n(n-1)+(n-1)\times(-1)\}}{2}$$
$$=\frac{n(201-n^2)}{2}$$

따라서 $a_{13}=208$, $a_{12}=342$이므로 구하는 값은

$a_{13}-a_{12}=208-342=-134$

19

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=S_n$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$에서 $S_n=n^2+n$이므로

(i) $n=1$일 때,

$\frac{a_1}{2}=S_1=1^2+1$ $\quad\therefore\ a_1=4$

(ii) $n\geq2$일 때,

$$\frac{a_n}{n+1}=S_n-S_{n-1}=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=2n$$

$\therefore\ a_n=2n(n+1)$

(i), (ii)에서 $a_n=2n(n+1)\ (n\geq1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{15}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{2n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{15}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{15}}-\frac{1}{16}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{32}$$

답 $\frac{15}{32}$

20

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{30} 중 1인 것의 개수를 m, -1인 것의 개수를 n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{30}a_k=6$, $\sum_{k=1}^{30}|a_k|=22$에서

$m-n=6$, $m+n=22$

$\therefore\ m=14$, $n=8$

따라서 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{30} 중 0인 항의 개수는

$30-14-8=8$

한편, $\sum_{k=1}^{50}a_k=0$이므로 a_{31}, a_{32}, a_{33}, $\cdots$, a_{50} 중 -1인 것은 적어도 6개가 있고, 나머지 14개의 항의 합은 0이 되어야 한다.

(i) 나머지 14개의 항이 모두 0일 때,

p의 최댓값은 $8+14=22$

(ii) 나머지 14개의 항에서 -1과 1이 각각 7개씩 있을 때,

p의 최솟값은 $8+0=8$

(i), (ii)에서 p의 최댓값과 최솟값의 합은

$22+8=30$

답 30

21

$$\sum_{k=1}^{25}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$
$$=3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$
$$+5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$
$$+7\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$
$$\vdots$$
$$+51\times\frac{1}{25}$$

따라서 주어진 식의 값은

$$3\times1+(3+5)\times\frac{1}{2}+(3+5+7)\times\frac{1}{3}+\cdots+(3+5+7+\cdots+51)\times\frac{1}{25}$$
$$=3+4+5+\cdots+27$$

즉, 첫째항이 3, 끝항이 27이고 항의 개수가 25인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{25(3+27)}{2}=375$$

답 375

다른풀이

등차수열의 합의 공식을 이용해서 답을 구할 수도 있다.

구하는 식의 값은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열의 첫째 항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$$\frac{25\times\{2\times3+(25-1)\times1\}}{2}=375$$

22

$256\times3^n=2^8\times3^n$이므로 자연수 256×3^n의 양의 약수의 개수는 $(8+1)\times(n+1)=9n+9$이다.

즉, $a_n=9n+9$이므로

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{9k+9}+\sqrt{9(k+1)+9}}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})\\&=\frac{1}{3}\{(\cancel{\sqrt{2}}-1)+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})\\&\qquad+\cdots+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}})\}\\&=\frac{1}{3}(\sqrt{n+2}-1)\end{aligned}$$

이때, $\frac{1}{3}(\sqrt{n+2}-1)=p$ (p는 자연수)이어야 하므로

$\sqrt{n+2}-1=3p$, $\sqrt{n+2}=3p+1$

$\therefore\ n=(3p+1)^2-2$

(i) $p=1$일 때,

$n=4^2-2=14$

(ii) $p=2$일 때,

$n=7^2-2=47$

(iii) $p=3$일 때,

$n=10^2-2=98$

(iv) $p=4$일 때,

$n=13^2-2=167$

⋮

(i)~(iv)에서

$n=14,\ 47,\ 98,\ 167,\ \cdots$

따라서 100 이하의 모든 음이 아닌 정수 n의 값의 합은

$14+47+98=159$

답 159

23

기울기가 1이고 y절편이 양수인 원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$의 접선의 방정식은

$y=x+\frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1^2}$ $\qquad\therefore\ y=x+n$

직선 $y=x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 A_n, B_n이므로

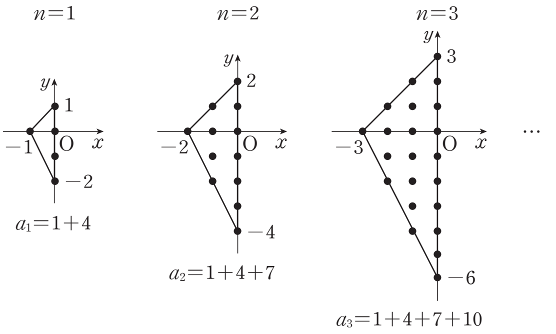
$A_n(-n,\ 0)$, $B_n(0,\ n)$

이때, 점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x-2n$

$\therefore\ C_n(0,\ -2n)$

삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n을 구하면



즉,

$a_1=1+4$

$a_2=1+4+7$

$a_3=1+4+7+10$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_n&=1+\{4+7+10+\cdots+(3n+1)\}\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)\\&=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n&=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)\\&=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{5}{2}\times\frac{10\times11}{2}+1\times10\\&=725\end{aligned}$$

답 725

유형 연습	10 수학적 귀납법	본문 pp.247~257

01-1 (1) 565 (2) 8	01-2 6	01-3 -84
02-1 (1) 23 (2) $126\sqrt{2}$		02-2 27
02-3 45	03-1 274	03-2 36
03-3 11	04-1 40	04-2 9
04-3 2	05-1 2	05-2 7
06-1 16	06-2 $\frac{1}{17}$	07-1 272
07-2 46	08-1 2	08-2 29
09-1 풀이참조	09-2 풀이참조	10-1 풀이참조

01-1

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n-2$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

즉, $a_{2n}=-2\times2n+5=-4n+5$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k}-2)^2=\sum_{k=1}^{5}(-4k+3)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(16k^2-24k+9)$$
$$=16\times\frac{5\times6\times11}{6}-24\times\frac{5\times6}{2}+9\times5$$
$$=880-360+45=565$$

(2) $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, $a_1=15,\ a_{12}=-7$이므로

$a_{12}=a_1+11d$에서 $-7=15+11d$

$11d=-22 \qquad \therefore\ d=-2$

즉, $a_n=15+(n-1)\times(-2)=-2n+17$이므로

$a_n=-2n+17<0$에서 $2n>17 \qquad \therefore\ n>\frac{17}{2}=8.5$

즉, $n\geq9$이면 $a_n<0$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값이 최대가 되도록 하는 n의 값은 8이다.

답 (1) 565 (2) 8

다른풀이

(2) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 15이고 공차가 -2인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{30+(n-1)\times(-2)\}}{2}=-n^2+16n$$
$$=-(n^2-16n+64)+64=-(n-8)^2+64$$

즉, $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 $n=8$일 때 최대가 된다.

01-2

$a_{n+2}=a_n+4$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$과 수열 $\{a_{2n}\}$은 각각 공차가 4인 등차수열이다.

$a_1=1,\ a_2=p$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$$
$$=\frac{5(2\times1+4\times4)}{2}+\frac{5(2p+4\times4)}{2}$$
$$=45+5p+40$$
$$=5p+85$$

즉, $5p+85=115$이므로 $5p=30$

$\therefore\ p=6$

답 6

01-3

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=p$이고 공차가 6인 등차수열이므로 첫째항부터 제k항까지의 합은

$$\frac{k\{2p+6(k-1)\}}{2}=35$$

$\therefore\ k(p+3k-3)=35$ ……㉠ ← 정수 조건이 주어진 부정방정식

이때, p는 정수이고, k는 자연수이므로 k는 35의 양의 약수이어야 한다.

(i) $k=1$일 때,
㉠에서 $p+3k-3=35$이므로 $p=35$

(ii) $k=5$일 때,
㉠에서 $p+3k-3=7$이므로 $p=-5$

(iii) $k=7$일 때,
㉠에서 $p+3k-3=5$이므로 $p=-13$

(iv) $k=35$일 때,
㉠에서 $p+3k-3=1$이므로 $p=-101$

(i)~(iv)에서 모든 정수 p의 값의 합은

$35+(-5)+(-13)+(-101)=-84$

답 -84

보충설명

정수 조건이 주어진 부정방정식은
(일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형하여
곱해서 정수가 되는 두 일차식의 값을 구한다.

02-1

(1) $a_1=2$, $\sqrt{2}a_{n+1}=a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2,

공비가 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이므로

$a_n=2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=2^{-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}$

$a_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$에서 $2^{-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=2^{-10}$

$-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}=-10$ $\quad\therefore k=23$

(2) $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, 공비를 r라 하면 $a_n=a_1r^{n-1}$이므로

$a_2=a_1r=4\sqrt{2}$ ……㉠

$a_5=a_1r^4=32\sqrt{2}$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$

$\therefore r=2$ ($\because$ r는 실수) a_n은 실수이므로

$a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=\frac{2\sqrt{2}(2^6-1)}{2-1}=126\sqrt{2}$

답 (1) 23 (2) $126\sqrt{2}$

02-2

$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n$에서

$\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=1$, $\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=2$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_6=2^{2+3+4+\cdots+7}$

이때, $2+3+4+\cdots+7=\frac{6(2+7)}{2}=27$이므로

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_6=2^{2+3+4+\cdots+7}=2^{27}=2^k$

따라서 상수 k의 값은 27이다.

답 27

02-3

이차방정식 $a_nx^2-2\sqrt{3}a_{n+1}x+3a_{n+2}=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{3}a_{n+1})^2-3a_na_{n+2}=0$

$3a_{n+1}{}^2-3a_na_{n+2}=0$ $\quad\therefore a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{a_4}{a_3}=\sqrt{3}$인 등비수열이다. ……㉠

이차방정식 $a_nx^2-2\sqrt{3}a_{n+1}x+3a_{n+2}=0$의 양변을 a_n으로 나누면

$x^2-2\sqrt{3}\times\frac{a_{n+1}}{a_n}x+3\times\frac{a_{n+2}}{a_n}=0$

$x^2-6x+9=0$ ($\because$ ㉠)

$(x-3)^2=0$ $\quad\therefore x=b_n=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{15}b_k=\sum_{k=1}^{15}3=45$

답 45

03-1

$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}+n$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}
 & \cancel{a_2}-a_1=2^2+1 \\
 & \cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2^3+2 \\
 & \cancel{a_4}-\cancel{a_3}=2^4+3 \\
 & \vdots \\
+) & a_7-\cancel{a_6}=2^7+6 \\
\hline
 & a_7-a_1=(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^7)+(1+2+3+\cdots+6)
\end{array}$$

$$\therefore\ a_7=a_1+\sum_{k=1}^{6}2^{k+1}+\sum_{k=1}^{6}k$$

$$=a_1+\frac{4\times(2^6-1)}{2-1}+\frac{6\times7}{2}$$

$$=1+252+21\ (\because\ a_1=1)$$

$$=274$$

답 274

03-2

$a_{n+1}-a_n=-2n+9$이므로

$a_{n+1}-a_n<0$인 경우는 $-2n+9<0$에서

$2n>9 \qquad \therefore\ n>\frac{9}{2}$

따라서 $a_5>a_4$이고 $a_6<a_5$이다. 즉, a_n은 $n=5$일 때 최댓값을 갖는다.

$a_{n+1}=a_n-2n+9$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1-2\times1+9\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}-2\times2+9\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}-2\times3+9\\
+)\ a_5&=\cancel{a_4}-2\times4+9\\
\hline
a_5&=20+(7+5+3+1)=36
\end{aligned}$$

답 36

다른풀이

$a_{n+1}-a_n=-2n+9$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

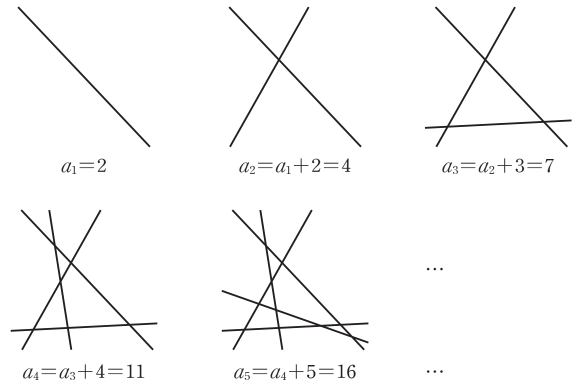
$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=-2\times1+9\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=-2\times2+9\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=-2\times3+9\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}&=-2(n-1)+9\\
\hline
a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}(-2k+9)\\
&=-2\times\frac{n(n-1)}{2}+9(n-1)\\
&=-n^2+10n-9\\
&=-(n-5)^2+16
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=-(n-5)^2+36$

따라서 a_n은 $n=5$일 때 최댓값 36을 갖는다.

03-3

a_n을 차례로 구해 보면 다음과 같다.



$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+1+1\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2+1\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+3+1\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+n-1+1\\
\hline
a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{n(n-1)}{2}+n-1\\
&=\frac{n^2+n}{2}+1
\end{aligned}$$

즉, $\frac{k^2+k}{2}+1=67$이므로

$\frac{k^2+k}{2}=66$

$k^2+k-132=0$, $(k-11)(k+12)=0$

$\therefore\ k=11\ (\because\ k$는 자연수$)$

답 11

04-1

$a_{n+1}=3^na_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 8을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=3a_1$$
$$\cancel{a_3}=3^2\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=3^3\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_9=3^8\cancel{a_8}$$
$$\begin{aligned} a_9&=(3\times3^2\times3^3\times\cdots\times3^8)\times a_1\\ &=3^{1+2+3+\cdots+8}\times81\ (\because\ a_1=81)\\ &=3^{\frac{8(8+1)}{2}}\times3^4\\ &=3^{36+4}=3^{40}\end{aligned}$$
$\therefore\ \log_3 a_9=\log_3 3^{40}=40$

답 40

04-2

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n+1}$에서 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{1}{2}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{2}{3}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{3}{4}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n-1}{n}\cancel{a_{n-1}}$$
$$\begin{aligned} a_n&=\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{n}\right)\times a_1\\ &=\frac{4}{n}\ (\because\ a_1=4)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_k}&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}k\\ &=\frac{1}{4}\times\frac{8\times9}{2}=9\end{aligned}$$

답 9

04-3

$a_{n+1}=(n+2)a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=3a_1$$
$$\cancel{a_3}=4\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=5\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=(n+1)\cancel{a_{n-1}}$$
$$\begin{aligned} a_n&=3\times4\times5\times\cdots\times(n+1)\times a_1\\ &=2\times3\times4\times\cdots\times(n+1)\ (\because\ a_1=2)\\ &=(n+1)!\end{aligned}$$

이때, $a_4=5!=120$이므로 4 이상의 자연수 k에 대하여 a_k는 모두 30으로 나누어떨어진다. 즉, S_{2020}을 30으로 나눈 나머지는 $a_1+a_2+a_3$을 30으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 $a_1+a_2+a_3=2!+3!+4!=2+6+24=32$를 30으로 나눈 나머지는 2이므로 구하는 나머지도 2이다.

답 2

05-1

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$에서 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}\alpha$이므로

$2=\frac{2}{3}\alpha\qquad\therefore\ \alpha=3$

$\therefore\ a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

즉, 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=5-3=2$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-3=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

따라서 $x=2$, $y=\frac{1}{3}$, $z=3$이므로

$xyz=2$

답 2

다른풀이

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$에서 $a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}+2$이므로

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

이때, $a_2=\frac{1}{3}a_1+2=\frac{5}{3}+2=\frac{11}{3}$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{11}{3}-5\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=-\frac{4}{3}\times 1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=-\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}&=-\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\\
\hline
a_n-a_1&=-\frac{4}{3}\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}\\
&=2\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-1\right\}
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3\ (\because\ a_1=5)$

따라서 $x=2,\ y=\frac{1}{3},\ z=3$이므로

$xyz=2$

05-2

$2a_{n+1}=a_n+2$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

$a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$이므로

$\frac{1}{2}\alpha=1 \qquad \therefore\ \alpha=2$

$\therefore\ a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

즉, 수열 $\{a_n-2\}$는 첫째항이 $a_1-2=3-2=1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

$a_m\le\frac{129}{64}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+2\le\frac{129}{64}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\le\frac{1}{64}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로 $m-1\ge 6$

$\therefore\ m\ge 7$

따라서 자연수 m의 최솟값은 7이다.

답 7

다른풀이

$2a_{n+1}=a_n+2$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+1$이므로

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때, $a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{5}{2}-3\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=-\frac{1}{2}\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=-\left(\frac{1}{2}\right)^3\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}&=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
\hline
a_n-a_1&=-\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\ (\because\ a_1=3)$

$a_m \le \frac{129}{64}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+2 \le \frac{129}{64}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \le \frac{1}{64}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$

$0<$(밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 $m-1 \ge 6$

$\therefore\ m \ge 7$

따라서 자연수 m의 최솟값은 7이다.

06-1

$2a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$에서

$2(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$

$\therefore\ a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=2a_1-a_1=a_1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_{n+1}-a_n=a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{a_2}-a_1 &= a_1\times 1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2} &= a_1\times\frac{1}{2}\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3} &= a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&\vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} &= a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\\
\hline
a_n-a_1 &= a_1\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}
\end{array}
$$

$$\therefore\ a_n=a_1+\frac{a_1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=a_1+2a_1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=3a_1-a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

이때, $a_6=47$이므로 $3a_1-a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=47$

$3a_1-\frac{1}{16}a_1=47$, $\frac{47}{16}a_1=47$

$\therefore\ a_1=16$

답 16

06-2

$2a_{n+1}a_n=a_n-a_{n+1}$의 양변을 $a_{n+1}a_n$으로 나누면

$2=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$

이때, $\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}-b_n=2$, $b_1=\frac{1}{a_1}=5$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n=5+(n-1)\times 2=2n+3$

따라서 $\frac{1}{a_n}=2n+3$이므로 $a_n=\frac{1}{2n+3}$

$\therefore\ a_7=\frac{1}{17}$

답 $\frac{1}{17}$

07-1

$4S_n=na_{n+1}$에서 $4S_{n+1}=(n+1)a_{n+2}$이므로

$4(S_{n+1}-S_n)=(n+1)a_{n+2}-na_{n+1}$

이때, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$4a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-na_{n+1}$

$(n+4)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}$

$\therefore\ a_{n+2}=\frac{n+4}{n+1}a_{n+1}$ ……㉠

한편, $4S_n=na_{n+1}$에서 n에 1을 대입하면 $4S_1=a_2$

$S_1=a_1$이므로 $a_2=4a_1=4\times 2=8$

따라서 ㉠의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-2$를 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{a_3} &= \frac{5}{2}a_2\\
\cancel{a_4} &= \frac{6}{3}\cancel{a_3}\\
\cancel{a_5} &= \frac{7}{4}\cancel{a_4}\\
&\vdots\\
\times)\ a_n &= \frac{n+2}{n-1}\cancel{a_{n-1}}\\
\hline
a_n &= \left(\frac{\cancel{5}}{2}\times\frac{\cancel{6}}{3}\times\frac{\cancel{7}}{4}\times\cdots\times\frac{n}{\cancel{n-3}}\times\frac{n+1}{\cancel{n-2}}\times\frac{n+2}{\cancel{n-1}}\right)a_2
\end{array}
$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times3\times4}\times 8=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

따라서 $a_7=\dfrac{7\times8\times9}{3}=168$, $a_{10}=\dfrac{10\times11\times12}{3}=440$

이므로

$a_{10}-a_7=440-168=272$

답 272

07-2

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n^2+n-2)(n^2+n)$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=(n-1)(n+2)n(n+1)$ ……㉠

㉠의 n에 $n-1$을 대입하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}$

$=(n-2)(n+1)(n-1)n$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$na_n=n(n-1)(n+1)\{(n+2)-(n-2)\}$

$\therefore\ a_n=4(n-1)(n+1)$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{4(k-1)(k+1)}$$

$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{9}{55}$$

따라서 $p=55$, $q=9$이므로 $p-q=46$

답 46

08-1

$(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n=n-2$에서

$(n+3)a_{n+1}=(n+1)a_n+n-2$

양변에 $n+2$를 곱하면

$(n+2)(n+3)a_{n+1}=(n+1)(n+2)a_n+n^2-4$

$(n+1)(n+2)a_n=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=b_n+n^2-4$ ……㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{b_2}&=b_1+1^2-4\\
\cancel{b_3}&=\cancel{b_2}+2^2-4\\
\cancel{b_4}&=\cancel{b_3}+3^2-4\\
&\ \vdots\\
+)\ b_{10}&=\cancel{b_9}+9^2-4\\
\hline
b_{10}&=b_1+\sum_{k=1}^{9}k^2-4\times9\\
&=b_1+285-36\\
&=b_1+249
\end{aligned}$$

이때, $a_1=\dfrac{5}{2}$이므로 $b_1=6a_1=15$

$\therefore\ b_{10}=15+249=264$

또한, $b_{10}=11\times12\times a_{10}$이므로 $a_{10}=\dfrac{264}{11\times12}=2$

답 2

08-2

${a_{n+1}}^n=10{a_n}^{n+1}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log {a_{n+1}}^n=\log 10+\log {a_n}^{n+1}$

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\log a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\dfrac{\log a_n}{n}=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\therefore\ b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ……㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{b_2}&=b_1+1-\cancel{\frac{1}{2}}\\
\cancel{b_3}&=\cancel{b_2}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\\
\cancel{b_4}&=\cancel{b_3}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\\
&\ \vdots\\
+)\ b_{15}&=\cancel{b_{14}}+\cancel{\frac{1}{14}}-\frac{1}{15}\\
\hline
b_{15}&=b_1+1-\frac{1}{15}=b_1+\frac{14}{15}
\end{aligned}$$

이때, $a_1=10$이므로 $b_1=\log a_1=1$

$\therefore\ b_{15}=1+\frac{14}{15}=\frac{29}{15}$

또한, $b_{15}=\frac{\log a_{15}}{15}$이므로

$\log a_{15}=15\times b_{15}=15\times\frac{29}{15}=29$

답 29

09-1

$(1^2+1)\times1!+(2^2+1)\times2!+\cdots+(n^2+1)\times n!$

$=n\times(n+1)!$ ⋯⋯㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=2$, (우변)$=2$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1^2+1)\times1!+(2^2+1)\times2!+\cdots+(k^2+1)\times k!$

$=k\times(k+1)!$

이다. $n=k+1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.

$(1^2+1)\times1!+(2^2+1)\times2!$

$+\cdots+(k^2+1)\times k!+\{(k+1)^2+1\}\times(k+1)!$

$=k\times(k+1)!+\{(k+1)^2+1\}\times(k+1)!$

$=(k^2+3k+2)\times(k+1)!$

$=(k+1)\times(k+2)!$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이참조

09-2

$1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)$

$+\cdots+(n-1)\times2+n\times1$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ⋯⋯㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1\times k+2\times(k-1)+3\times(k-2)$

$+\cdots+(k-1)\times2+k\times1$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

가 성립한다. 위의 등식의 좌변, 우변을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하자.

$f(k+1)=1\times(k+1)+2\times k+3\times(k-1)$

$+\cdots+(k-1)\times3+k\times2+(k+1)\times1$

$=(1\times k+1)+\{2\times(k-1)+2\}$

$+\{3\times(k-2)+3\}$

$+\cdots+\{(k-1)\times2+(k-1)\}$

$+(k\times1+k)+(k+1)$

$=f(k)+1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$=f(k)+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

이때, $f(k)=g(k)$이므로

$f(k+1)=f(k)+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=g(k)+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

$=g(k+1)$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이참조

10-1

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ ⋯⋯㉠

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때,

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$$

이므로

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에 의하여

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이참조

개념마무리

본문 pp.258~261

01 ④	**02** 6	**03** 40	**04** 51
05 51	**06** $1+\sqrt[3]{2}$	**07** 15	**08** 210
09 928	**10** $\frac{1}{2^{33}}$	**11** ⑤	**12** 6
13 122	**14** 17	**15** ①	**16** 55
17 40	**18** 풀이참조	**19** ㄱ, ㄴ, ㄷ	**20** 377
21 1026	**22** 34	**23** 101	

01

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$에서 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=10,\ a_3=10+2d=4$이므로

$2d=-6 \qquad \therefore\ d=-3$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=10+(n-1)\times(-3)$

$=-3n+13$

$\therefore\ a_{10}=-3\times 10+13=-17$ (거짓)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)$

$-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$=a_n$

$=-3n+13$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}(-3k+13)$

$=-3\times\frac{7\times 8}{2}+13\times 7$

$=-84+91=7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

02

$2\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+\log_2 a_{n+2}$에서

$\log_2 {a_{n+1}}^2=\log_2 a_na_{n+2}$

즉, ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$가 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{3}$$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{3\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m-1\right\}$$

$\sum_{k=1}^{m}a_k>36$에서 $9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m-1\right\}>36$

$\left(\frac{4}{3}\right)^m-1>4,\ \left(\frac{4}{3}\right)^m>5$

이때, $\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{1024}{243}<5$, $\left(\frac{4}{3}\right)^6=\frac{4096}{729}>5$이므로

부등식 $\sum_{k=1}^{m}a_k>36$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 6이다.

답 6

03

$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수})\\ a_n+1 & (a_n\text{이 홀수})\end{cases}$ 의 n에 1, 2, 3, …을 차례로

대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times6=3$

$a_3=a_2+1=3+1=4$

$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2}\times4=2$

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times2=1$

$a_6=a_5+1=1+1=2$

⋮

이므로 수열 $\{a_n\}$은 제 4 항부터 2, 1이 계속 반복된다.

$\therefore \sum_{k=1}^{21}a_k=a_1+a_2+a_3+\sum_{k=4}^{21}a_k$

$=a_1+a_2+a_3+9(a_4+a_5)$

$=6+3+4+9(2+1)=40$

답 40

04

$4^{a_{n+1}}=2^{a_n}\times2^{a_{n+2}}$에서

$2^{2a_{n+1}}=2^{a_n+a_{n+2}}$

즉, $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$가 성립하므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{n+9}-a_{n+5}=-12$에서 $4d=-12$

$\therefore d=-3$

이때, $S_9\geq S_n$이므로 $n\leq9$일 때 $a_n\geq0$이고, $n\geq10$일 때 $a_n\leq0$이다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a_1+(n-1)\times(-3)=a_1-3n+3$

이때, $a_9=a_1-24\geq0$에서 $a_1\geq24$이고

$a_{10}=a_1-27\leq0$에서 $a_1\leq27$이므로

$24\leq a_1\leq27$

따라서 a_1의 최댓값은 27, 최솟값은 24이므로 합은

$27+24=51$

답 51

05

$n\geq2$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})$

$\therefore \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1$ ($\because a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$)

$n=2$일 때, $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=1$이므로 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$은 $n\geq1$에서 공차가 1인 등차수열이다.

이때, $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=2$이므로 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열이다. 즉,

$\sqrt{S_n}=2+(n-1)\times1=n+1$

$\therefore S_n=(n+1)^2$

$\therefore a_7+a_8+a_9=S_9-S_6$

$=10^2-7^2=51$

답 51

06

$a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\geq2)\\ \sqrt[3]{2}a_n & (a_n<2)\end{cases}$ 에서

$a_2=\sqrt[3]{2}\times a_1=\sqrt[3]{2}$

$a_3=\sqrt[3]{2}\times a_2=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}$

$a_4=\sqrt[3]{2}\times a_3=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=2$

$a_5=\frac{1}{2}\times a_4=\frac{1}{2}\times2=1$

$a_6=\sqrt[3]{2}\times a_5=\sqrt[3]{2}\times1=\sqrt[3]{2}$

⋮

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}1 & (n=4k-3)\\ \sqrt[3]{2} & (n=4k-2)\\ \sqrt[3]{4} & (n=4k-1)\\ 2 & (n=4k)\end{cases}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

이때, $121=4\times31-3$, $122=4\times31-2$이므로

$a_{121}+a_{122}=1+\sqrt[3]{2}$

답 $1+\sqrt[3]{2}$

07

$a_{n+1}-a_n=2n-14$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl}\cancel{a_2}-a_1 &= 2\times1-14\\ \cancel{a_3}-\cancel{a_2} &= 2\times2-14\\ \cancel{a_4}-\cancel{a_3} &= 2\times3-14\\ &\vdots\\ +)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} &= 2(n-1)-14\\ \hline a_n-a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(2k-14)\end{array}$$

$$=2\times\frac{n(n-1)}{2}-14(n-1)$$

$$=n^2-15n+14$$

$\therefore\ a_n=a_1+n^2-15n+14=n^2-15n+50$

즉, $k^2-15k+50=6$에서

$k^2-15k+44=0$, $(k-4)(k-11)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=11$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은

$4+11=15$

답 15

08

a_n과 b_n을 차례로 구해 보면 다음과 같다.

[도형 1]에서 $a_1=6$, $b_1=6$

[도형 2]에서 $a_2=a_1+7=13$, $b_2=b_1+9=15$

[도형 3]에서 $a_3=a_2+9=22$, $b_3=b_2+12=27$

[도형 4]에서 $a_4=a_3+11=33$, $b_4=b_3+15=42$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 점화식을 각각 구하면

$a_1=6$, $a_{n+1}=a_n+2n+5$,

$b_1=6$, $b_{n+1}=b_n+3n+6$

(i) $a_{n+1}=a_n+2n+5$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+5)=6+2\times\frac{n(n-1)}{2}+5(n-1)$$

$$=n^2+4n+1$$

(ii) $b_{n+1}=b_n+3n+6$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+6)=6+3\times\frac{n(n-1)}{2}+6(n-1)$$

$$=\frac{3}{2}n^2+\frac{9}{2}n$$

(i), (ii)에서 $b_n-a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(b_k-a_k)=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}-10$$

$$=\frac{385}{2}+\frac{55}{2}-10=210$$

답 210

09

$S_{n+1}=\frac{4n}{n+1}S_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{array}{rl}\cancel{S_2} &= \left(4\times\frac{1}{2}\right)S_1\\ \cancel{S_3} &= \left(4\times\frac{2}{3}\right)\cancel{S_2}\\ \cancel{S_4} &= \left(4\times\frac{3}{4}\right)\cancel{S_3}\\ &\vdots\\ \times)\ S_n &= \left(4\times\frac{n-1}{n}\right)\cancel{S_{n-1}}\\ \hline S_n &= (\underbrace{4\times4\times4\times\cdots\times4}_{(n-1)\text{개}})\\ &\quad\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{n}\right)\times S_1\end{array}$$

$$=4^{n-1}\times\frac{1}{n}\times2\ (\because\ S_1=2)$$

$$=\frac{2^{2n-1}}{n}$$

이때, $a_5+a_6=S_6-S_4=\frac{2^{11}}{6}-\frac{2^7}{4}=\frac{1024}{3}-32$이므로

$3(a_5+a_6)=1024-96=928$

답 928

10

$a_{n+1}=a_n\cos\frac{n}{3}\pi$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=a_1\cos\frac{\pi}{3}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_3=a_2\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

$a_4=a_3\cos\pi=-\frac{1}{4}\times(-1)=\frac{1}{4}$

$a_5=a_4\cos\frac{4}{3}\pi=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$

$a_6=a_5\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{16}$

$a_7=a_6\cos 2\pi=-\frac{1}{16}\times 1=-\frac{1}{16}$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+6}=-\frac{1}{16}a_n\ (n\ge 1)$이 성립한다.

이때, $50=6\times 8+2$이므로

$\therefore\ a_{50}=-\frac{1}{16}a_{44}=\left(-\frac{1}{16}\right)^2 a_{38}=\left(-\frac{1}{16}\right)^3 a_{32}=\cdots$

$=\left(-\frac{1}{16}\right)^8 a_2$

$=\frac{1}{2^{32}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{33}}$

답 $\frac{1}{2^{33}}$

11

$pa_{n+1}=qa_n+r$ ……㉠

ㄱ. ㉠에서 $p\neq 0$이므로

$a_{n+1}=\frac{q}{p}a_n+\frac{r}{p}$

이때, $p=q$이면 $a_{n+1}=a_n+\frac{r}{p}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\frac{r}{p}$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. ㉠을 $p(a_{n+1}-\alpha)=q(a_n-\alpha)$로 놓으면

$pa_{n+1}=qa_n-q\alpha+p\alpha$

$-q\alpha+p\alpha=r$이고 $p\neq q$이므로 $\alpha=\frac{r}{p-q}$

또한, $p(a_{n+1}-\alpha)=q(a_n-\alpha)$에서

$a_{n+1}-\alpha=\frac{q}{p}(a_n-\alpha)$이므로 수열 $\{a_n-\alpha\}$, 즉 $\left\{a_n-\frac{r}{p-q}\right\}$는 공비가 $\frac{q}{p}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $pa_{n+1}=qa_n+p-q$

$p(a_{n+1}-1)=q(a_n-1)$

$\therefore\ a_{n+1}-1=\frac{q}{p}(a_n-1)$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 공비가 $\frac{q}{p}$인 등비수열이므로

$a_n-1=(a_1-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$

이때, $a_1=1$이므로

$a_n-1=0\qquad\therefore\ a_n=1$

$\therefore\ a_5=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12

이차방정식 $x^2-\sqrt{2a_n}\,x+\frac{a_{n+1}}{4}+1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=2a_n-4\left(\frac{a_{n+1}}{4}+1\right)=0$

$2a_n-a_{n+1}-4=0$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n-4$

$a_{n+1}=2a_n-4$에서 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha\qquad\therefore\ \alpha=4$

$\therefore\ a_{n+1}-4=2(a_n-4)$

즉, 수열 $\{a_n-4\}$는 첫째항이 $a_1-4=10-4=6$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-4=6\times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n=3\times 2^n+4$

$a_m=196$에서 $3\times 2^m+4=196$

$3\times 2^m=192,\ 2^m=64=2^6$

$\therefore\ m=6$

답 6

13

$a_1=5,\ a_2=3,\ a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$에서

$$a_3=\frac{a_2+1}{a_1}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$$

$$a_4=\frac{a_3+1}{a_2}=\frac{\frac{4}{5}+1}{3}=\frac{3}{5}$$

$$a_5=\frac{a_4+1}{a_3}=\frac{\frac{3}{5}+1}{\frac{4}{5}}=2$$

$$a_6=\frac{a_5+1}{a_4}=\frac{2+1}{\frac{3}{5}}=5$$

$$a_7=\frac{a_6+1}{a_5}=\frac{5+1}{2}=3$$

$$\vdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $5,\ 3,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 2$가 계속 반복된다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{52}a_k&=10\times\sum_{k=1}^{5}a_k+a_1+a_2\\&=10\times\left(5+3+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+2\right)+5+3\\&=114+8=122\end{aligned}$$

답 122

14

$3a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$$

이때, $\dfrac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면 $b_{n+1}-b_n=3$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\dfrac{1}{a_1}=2$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3n-1}$$

(가)

$$\therefore\ a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_ka_{k+1}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3k-1}}-\frac{1}{3k+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{k}{6k+4}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{k}{6k+4}>\dfrac{16}{100}$에서 $100k>96k+64$

$4k>64\qquad\therefore\ k>16$

(나)

따라서 자연수 k의 최솟값은 17이다.

(다)

답 17

단계	채점 기준	배점
(가)	치환을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 경우	50%
(나)	k의 값의 범위를 구한 경우	40%
(다)	자연수 k의 최솟값을 구한 경우	10%

15

$a_1=2$이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-6}=-\frac{1}{2}$$

$$a_3=1+a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$a_4=\frac{a_3}{2-3a_3}=\frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}}=1$$

$$a_5=1+a_4=1+1=2$$

$$\vdots$$

즉, $a_n=a_{n+4}$ (n은 자연수)이므로

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+a_4&=a_5+a_6+a_7+a_8\\&=a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}\\&\ \ \vdots\\&=a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}\\&=3\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{40}a_n=10\times3=30$$

답 ①

16

여자 또는 남자가 임의로 구성된 n명을 여자끼리는 서로 이웃하지 않도록 일렬로 세울 때, 처음 세우는 사람의 성별에 따라서 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 첫 번째로 남자를 세우는 경우

두 번째로 세우는 사람은 여자 또는 남자 모두 가능하다.

따라서 나머지 $(n-1)$명을 여자끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수와 같으므로

a_{n-1}

(ii) 첫 번째로 여자를 세우는 경우

두 번째로 세우는 사람은 반드시 남자여야 하므로 세 번째로 세우는 사람은 여자 또는 남자 모두 가능하다.

즉, 나머지 $(n-2)$명을 여자끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수와 같으므로

a_{n-2}

(i), (ii)에서 n명을 일렬로 세우는 방법의 수 a_n은

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geq 3)$ ……㉠

㉠의 n에 3, 4, 5, …, 8을 차례로 대입하면

$a_3=a_2+a_1=3+2=5$,

$a_4=a_3+a_2=5+3=8$,

$a_5=a_4+a_3=8+5=13$,

$a_6=a_5+a_4=13+8=21$,

$a_7=a_6+a_5=21+13=34$,

$a_8=a_7+a_6=34+21=55$

답 55

17

$a_n=2^n+\frac{1}{n}$ ……$(*)$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=2^1+1=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\frac{1}{k}$ ……㉠

㉠을 $ka_{k+1}-2ka_k+\frac{k+2}{k+1}=0$, 즉

$ka_{k+1}=2ka_k-\frac{k+2}{k+1}$에 대입하면

$$ka_{k+1}=2k\times\left(2^k+\frac{1}{k}\right)-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\boxed{k2^{k+1}+2}-\frac{k+2}{k+1}$$
$$=k2^{k+1}+\boxed{\frac{k}{k+1}}$$

$k\neq 0$이므로 양변을 k로 나누면

$a_{k+1}=2^{k+1}+\frac{1}{k+1}$이므로 $n=k+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=2^n+\frac{1}{n}$이다.

즉, $f(k)=k2^{k+1}+2,\ g(k)=\frac{k}{k+1}$이므로

$f(3)=3\times 2^4+2=48+2=50,\ g(4)=\frac{4}{5}$

$\therefore\ f(3)\times g(4)=50\times\frac{4}{5}=40$

답 40

18

$(n!)^2\times 4^n>(2n)!$ ……㉠

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=(2!)^2\times 4^2=64$

(우변)$=(2\times 2)!=24$

(좌변)>(우변)이므로 ㉠이 성립한다.

(가)

(ii) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$(k!)^2\times 4^k>(2k)!$ ……㉡

$n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립함을 보이자.

㉡의 양변에 $4(k+1)^2$을 곱하면

$$(k!)^2\times 4^k\times 4(k+1)^2=\{(k+1)!\}^2\times 4^{k+1}$$
$$>(2k)!\times 4(k+1)^2$$

(나)

$$=(2k)!\times(2k+2)^2$$
$$>(2k)!\times(2k+1)(2k+2)$$
$$=(2k+2)!$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

(다)

답 풀이참조

단계	채점 기준	배점
(가)	$n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보인 경우	20%
(나)	$n=k$ $(k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때에도 성립함을 보이기 위하여 양변에 $4(k+1)^2$을 곱한 경우	50%
(다)	식을 적절히 변형하여 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립함을 보인 경우	30%

19

$pa_{n+1}=qa_n+r$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……㉠

ㄱ. ㉠에서 $r=0$이므로

$pa_{n+1}=qa_n \qquad \therefore\ a_{n+1}=\dfrac{q}{p}a_n$ $(\because\ p\neq 0)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다. (참)

ㄴ. ㉠에서 $p=q$이면 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{r}{p}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{r}{p}$인 등차수열이다.

이때, $\sum_{k=1}^{n}a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\left\{2+(n-1)\times\dfrac{r}{p}\right\}}{2}\ (\because\ a_1=1)$$

$$=\frac{n(rn+2p-r)}{2p}\ (\text{참})$$

ㄷ. $p=q+r$이면 $r=p-q$이므로 ㉠에서

$pa_{n+1}=qa_n+p-q$

$p(a_{n+1}-1)=q(a_n-1)$

$\therefore\ a_{n+1}-1=\dfrac{q}{p}(a_n-1)$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1-1=0$, 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이므로

$a_n-1=0$

$\therefore\ a_n=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20

$\dfrac{a_{n+2}+3a_n}{4}=a_{n+1}-1$에서

$a_{n+2}+3a_n=4a_{n+1}-4$

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-4$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=3b_n-4$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=3(b_n-\alpha)$로 놓으면

$b_{n+1}=3b_n-2\alpha$

즉, $2\alpha=4$이므로 $\alpha=2$

$\therefore\ b_{n+1}-2=3(b_n-2)$

따라서 수열 $\{b_n-2\}$는 첫째항이

$b_1-2=a_2-a_1-2=4-1-2=1$, 공비가 3인 등비수열이므로

$b_n-2=3^{n-1}$

$b_n=3^{n-1}+2$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=3^{n-1}+2$ ……㉠

㉠의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=1+2\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=3+2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=3^2+2\\
&\ \vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}&=3^{n-2}+2\\
\hline
a_n-a_1&=1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}+2(n-1)\\
&=\frac{3^{n-1}-1}{2}+2(n-1)
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_n=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}+2n-1$ $(\because\ a_1=1)$

$\therefore\ a_7=\dfrac{3^6-1}{2}+2\times 7-1=364+14-1=377$

답 377

21

$n\geq 2$에서

$S_{n+1}-S_{n-1}=(S_{n+1}-S_n)+(S_n-S_{n-1})$

$=a_{n+1}+a_n$

이므로

$4a_na_{n+1}=(S_{n+1}-S_{n-1})^2-4^n$에서

$4a_na_{n+1}=(a_{n+1}+a_n)^2-4^n$

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4^n$

${a_{n+1}}^2+2a_na_{n+1}+{a_n}^2=4a_na_{n+1}+4^n$

${a_{n+1}}^2-2a_na_{n+1}+{a_n}^2=4^n$

$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=2^{2n}$

이때, $a_{n+1}>a_n$이므로

$a_{n+1}-a_n=2^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$a_{n+1}-a_n=2^n$의 n에 2, 3, 4, $\cdots$, 9를 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} \cancel{a_3}-a_2&=2^2 \\ \cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=2^3 \\ \cancel{a_5}-\cancel{a_4}&=2^4 \\ &\ \vdots \\ +)\ a_{10}-\cancel{a_9}&=2^9 \\ \hline a_{10}-a_2&=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^9 \\ &=\frac{2^2(2^8-1)}{2-1}=2^{10}-4 \end{aligned}$$

이때, $a_2=6$이므로

$a_{10}=2^{10}-4+a_2=2^{10}+2$

$\therefore\ a_{10}=1026$

답 1026

22

시행을 n회 반복하여 얻어진 정사각형 중에서 흰색 정사각형의 개수를 a_n, 검은색 정사각형의 개수를 b_n이라 하자.

이때, n번 시행 후 정사각형의 총 개수는 9^n이므로

$a_n+b_n=9^n$

$(n+1)$번 시행을 하면 흰색 정사각형 1개가 9개로 잘리고, 그중 8개가 흰색 정사각형이므로 그 개수는 $8\times a_n$이다.

또한, 검은색 정사각형 1개가 9개로 잘리고, 그중 1개가 흰색 정사각형이므로 그 개수는 $1\times b_n$이다.

즉, $(n+1)$번 시행한 후의 흰색 정사각형의 개수는

$a_{n+1}=8a_n+b_n$

이때, $a_n+b_n=9^n$에서 $b_n=9^n-a_n$이므로

$a_{n+1}=8a_n+(9^n-a_n)$

$\therefore\ a_{n+1}=7a_n+9^n$

따라서 $p=7$, $q=9$이므로

$p+3q=7+27=34$

답 34

23

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=a_n$이라 하면 $a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$이므로 n에 2, 3, 4, $\cdots$, n을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} \cancel{a_2}&=\frac{1}{3}a_1 \\ \cancel{a_3}&=\frac{2}{4}\cancel{a_2} \\ \cancel{a_4}&=\frac{3}{5}\cancel{a_3} \\ &\ \vdots \\ \times)\ a_n&=\frac{n-1}{n+1}\cancel{a_{n-1}} \\ \hline a_n&=a_1\times\left(\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-2}}{n}\times\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\right) \\ &=\frac{2}{n(n+1)}\ (\because\ a_1=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=1) \end{aligned}$$

이때, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하므로

$S_n=\frac{1}{2}\times a_n\times 1=\frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore\ S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}$

$$\begin{aligned} &=\sum_{k=1}^{50}S_k=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k(k+1)} \\ &=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) \\ &\qquad+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{50}}-\frac{1}{51}\right) \\ &=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}=\frac{q}{p} \end{aligned}$$

따라서 $p=51$, $q=50$이므로

$p+q=101$

답 101

memo

memo

memo

memo