b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

1등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

Speed Check

Ⅰ 지수함수와 로그함수

01. 지수

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.9~10	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.11~14	Step 3 종합 사고력 문제 p.15	이것이 수능 p.16
01 ③ 02 -1 03 ① 04 ③ 05 ⑤ 06 ⑤ 07 124 08 ④ 09 ③ 10 3 11 ③ 12 125 13 ① 14 14 15 ②	01 ⑤ 02 ② 03 143 04 11 05 ③ 06 ④ 07 69 08 ③ 09 ③ 10 5 11 $\frac{21}{2}$ 12 ④ 13 ② 14 972 15 47 16 ② 17 3 18 ① 19 11 20 ③ 21 9 22 225 23 $\frac{1}{15}$ 24 -2 25 4 26 ② 27 ⑤ 28 ③ 29 ⑤	01 26 02 ① 03 5 04 648 05 7 06 13 07 ② 08 20	1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ③

02. 로그

Step 1 우수 기출 대표 문제 p.18	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.19~21	Step 3 종합 사고력 문제 p.22	이것이 수능 p.23
01 ① 02 27 03 ① 04 ③ 05 ① 06 -11 07 ⑤ 08 80	01 ④ 02 ② 03 34 04 5 05 ⑤ 06 42 07 ④ 08 7 09 ③ 10 74 11 ① 12 2 13 ④ 14 ③ 15 32 16 ① 17 ⑤ 18 12 19 $\frac{1}{2}$ 20 ⑤ 21 ④ 22 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 23 467	01 2 02 7 03 27 04 76 05 12 06 500 07 78	1 ① 2 13 3 45 4 127

03. 지수함수

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.26~27	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.28~31	Step 3 종합 사고력 문제 p.32	이것이 수능 p.33
01 ③ 02 $2\sqrt{10}$ 03 ① 04 ③ 05 ⑤ 06 ④ 07 13 08 ② 09 ④ 10 ④ 11 -1 12 ① 13 $a<1$ 14 $a>\frac{1}{2}$ 15 ④	01 ③ 02 $\frac{3}{2}$ 03 ④ 04 16 05 2 06 ⑤ 07 8 08 ③ 09 ② 10 310 11 ③ 12 ③ 13 -6 14 3 15 $\frac{27}{64}$ 16 ④ 17 100 18 35 19 ④ 20 7 21 ② 22 6 23 19 24 ⑤ 25 -3 26 ③ 27 36일 28 ④	01 17 02 $k<6$ 03 ② 04 120 05 1 06 8 07 39	1 16 2 18 3 ⑤

04. 로그함수

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.35~36	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.37~40	Step 3 종합 사고력 문제 p.41	이것이 수능 p.42
01 ⑤ 02 -1 03 ④ 04 ⑤ 05 -2 06 -5 07 ⑤ 08 1 09 ③ 10 ③ 11 23 12 ④ 13 16 14 ④ 15 ⑤ 16 ③	01 ④ 02 2 03 ⑤ 04 ② 05 $\frac{1}{2}$ 06 $\frac{3}{256}$ 07 ② 08 $\frac{3}{2}$ 09 ② 10 15 11 12 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ① 15 16 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 1 20 ④ 21 ③ 22 $\frac{1}{8}$ 23 4 24 ② 25 63 26 $k<3$ 27 $0<k<\frac{1}{8}$ 28 ⑤ 29 ④ 30 6년	01 4 02 ① 03 $\frac{1}{1024}$ 04 6 05 21 06 $2\sqrt{2}$ 07 ⑤	1 75 2 ③ 3 ① 4 192

Ⅱ 삼각함수

05. 삼각함수의 정의

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.45~46	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.47~50	Step 3 종합 사고력 문제 p.51	이것이 수능 p.52
01 ③ 02 6 03 $\frac{12}{7}\pi$ 04 ③ 05 ④ 06 $3\sqrt{5}\pi$ 07 ① 08 $\frac{1}{2}$ 09 ④ 10 ① 11 $8\sqrt{5}$ 12 ④ 13 ① 14 ① 15 2 16 ③	01 $\frac{3}{5}\pi$ 02 ⑤ 03 4 04 9 05 25 06 30 07 8 08 ② 09 ② 10 ④ 11 3 12 ④ 13 ⑤ 14 ③ 15 ③ 16 ① 17 ② 18 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 19 ② 20 $\frac{7}{8}$ 21 $\frac{5}{2}\pi$ 22 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 23 ⑤ 24 24 25 37 26 ① 27 ③ 28 23 29 48 30 36	01 -1 02 4 03 π 04 $2\sqrt{26}$ 05 218 06 $\frac{100}{3}\pi$ 07 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	1 ④ 2 ④ 3 ⑤ 4 80

06. 삼각함수의 그래프

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.54~55	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.56~59	Step 3 종합 사고력 문제 p.60	이것이 수능 p.61
01 ⑤ 02 ③ 03 5 04 -1 05 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ 06 1 07 ④ 08 $\frac{7}{6}\pi$ 09 ③ 10 ③ 11 ④ 12 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 13 ③ 14 ⑤ 15 ②	01 ① 02 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 03 $4\sqrt{3}$ 04 ④ 05 ③ 06 ⑤ 07 ② 08 ④ 09 ② 10 5 11 ④ 12 4 13 -9 14 ③ 15 7π 16 ② 17 ③ 18 11 19 ③ 20 ③ 21 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$ 22 ② 23 $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 24 $\frac{35}{12}\pi$ 25 ③ 26 16 27 9 28 $\frac{\pi}{6}$	01 $a=30$, $b=\pi$, $c=40$ 02 $2\pi^2$ 03 78 04 $-\frac{3}{4}$ 05 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 06 ① 07 18	1 ③ 2 480 3 ④

07. 사인법칙과 코사인법칙

Step 1 우수 기출 대표 문제 p.63	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.64~67	Step 3 종합 사고력 문제 p.68	이것이 수능 p.69
01 30 02 ⑤ 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ④ 06 ③ 07 $4\sqrt{6}$ 08 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$	01 ④ 02 $\frac{33}{8}$ 03 ④ 04 $4\sqrt{3}$ 05 23 06 ⑤ 07 ⑤ 08 7 09 30 m 10 $\frac{9\sqrt{5}}{40}$ cm^2 11 ⑤ 12 ① 13 291 14 ④ 15 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 16 ④ 17 $\frac{25}{4}$ 18 ③ 19 ③ 20 $2\sqrt{3}$ 21 ③ 22 ⑤ 23 103 24 14 25 12 26 ⑤ 27 $4\sqrt{7}$	01 31 km 02 4 03 3 04 25 05 12 06 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 07 7	1 27 2 ② 3 ④ 4 ③

Ⅲ 수열

08. 등차수열과 등비수열

Step 1 우수 기출 대표 문제 pp.73~74	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.75~79	Step 3 종합 사고력 문제 p.80	이것이 수능 p.81
01 ③ 02 ③ 03 ⑤ 04 12 05 ③ 06 ④ 07 1545 08 ④ 09 ⑤ 10 ② 11 ② 12 ③ 13 10 14 50만 원 15 ③ 16 273	01 ① 02 34 03 $4\sqrt{3}$ 04 197 05 24 06 ⑤ 07 54 08 ① 09 36 10 ② 11 612 12 ② 13 442 14 43 15 ② 16 ③ 17 ① 18 ① 19 ③ 20 ⑤ 21 15 22 25 23 ④ 24 ⑤ 25 $150\sqrt{2}$ 26 ② 27 101 28 45 29 ① 30 8 31 ① 32 1023 33 ④ 34 $762\sqrt{2}$ 35 39 36 187	01 11 02 ① 03 1 04 $2\sqrt{46}$ 05 $-\frac{57}{8}$ 06 435	1 ⑤ 2 117 3 9 4 26

09. 수열의 합

Step 1 우수 기출 대표 문제 p.83	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.84~87	Step 3 종합 사고력 문제 p.88	이것이 수능 p.89
01 ② 02 ⑤ 03 24 04 ① 05 2 06 1 07 2056 08 ④	01 ④ 02 ② 03 60 04 188 05 400 06 ③ 07 ⑤ 08 10 09 3025 10 ② 11 ① 12 ② 13 $\frac{1}{2020}$ 14 240 15 ⑤ 16 127 17 ② 18 99 19 120 20 440 21 ② 22 120 23 ② 24 220 25 ③ 26 ④ 27 ① 28 46 29 ① 30 ⑤ 31 231	01 $\frac{1}{101}$ 02 5166 03 ④ 04 $\frac{81}{55}$ 05 100 06 7 07 2144 08 184	1 ③ 2 ① 3 ③ 4 395

10. 수학적 귀납법

Step 1 우수 기출 대표 문제 p.91	Step 2 최고의 변별력 문제 pp.92~94	Step 3 종합 사고력 문제 p.95	이것이 수능 p.96
01 ③ 02 ③ 03 297 04 ④ 05 ④ 06 ③ 07 풀이 참조	01 8 02 105 03 ⑤ 04 $-\frac{1}{2}$ 05 31 06 ④ 07 624 08 ④ 09 ② 10 ② 11 ② 12 158 13 0 14 ⑤ 15 54 16 ③ 17 풀이 참조 18 풀이 참조 19 ④ 20 풀이 참조	01 36 02 ② 03 ⑤ 04 10 05 129 06 $\frac{17}{9}$ 07 10	1 510 2 ④ 3 ①

I 지수함수와 로그함수

01 지수

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 9~10

01 ③	02 -1	03 ①	04 ③	05 ⑤
06 ⑤	07 124	08 ④	09 ③	10 3
11 ③	12 125	13 ①	14 14	15 ②

01 ㄱ. $(-2)^4=16$

16의 네제곱근은 $x^4=16$

$x^2=4$ 또는 $x^2=-4$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$ (거짓)

ㄴ. $a<0$일 때, $-a>0$이므로 $(\sqrt[3]{-a})^3=-a$ (거짓)

ㄷ. n이 홀수일 때, -3의 n제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{-3}=-\sqrt[n]{3}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

02 $x^n=99-n$에서 x는 $99-n$의 n제곱근이다.

(i) $n\le99$이면 $99-n\ge0$이므로

n이 홀수일 때, $f(n)=1$

n이 짝수일 때, $f(n)=2$

(ii) $n>99$이면 $99-n<0$이므로

n이 홀수일 때, $f(n)=1$

n이 짝수일 때, $f(n)=0$

$\therefore f(2)-f(3)+f(4)-\cdots+f(200)$

$=\{f(2)-f(3)\}+\{f(4)-f(5)\}+\cdots$

$+\{f(98)-f(99)\}+\{f(100)-f(101)\}+\cdots$

$+\{f(198)-f(199)\}+f(200)$

$=(2-1)\times49+(0-1)\times50+0$

$=49-50=-1$ 답 -1

• 다른 풀이 •

(i) n이 짝수일 때,

$n<99$이면 방정식 $x^n=99-n$의 실근이 양수와 음수 2개가 존재하므로 $f(n)=2$

$n>99$이면 방정식 $x^n=99-n$의 실근이 존재하지 않으므로 $f(n)=0$

(ii) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n=99-n$의 실근은 항상 1개가 존재하므로 $f(n)=1$

$\therefore f(2)-f(3)+f(4)-\cdots+f(200)$

$=\{f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(98)\}$

$+\{f(100)+f(102)+f(104)+\cdots+f(200)\}$

$-\{f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(199)\}$

$=2\times49+0\times51-1\times99$

$=98-99=-1$

03 $A=\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times4]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

$B=\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\times3]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

$C=\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[2\times3]{12}=\sqrt[6]{12}=\sqrt[6\times2]{12^2}=\sqrt[12]{144}$

$\therefore A<B<C$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$A=\sqrt[3]{3}=3^{\frac13}=(3^4)^{\frac1{12}}=81^{\frac1{12}}$

$B=\sqrt[4]{5}=5^{\frac14}=(5^3)^{\frac1{12}}=125^{\frac1{12}}$

$C=\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[6]{12}=12^{\frac16}=(12^2)^{\frac1{12}}=144^{\frac1{12}}$

$\therefore A<B<C$

04 ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{a}}=\sqrt[4]{a}$ (참)

ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}\neq\sqrt[12]{a}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4\times a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=a^{\frac12}\div a^{\frac14}=a^{\frac12-\frac14}=a^{\frac14}=\sqrt[4]{a}$ (참)

ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=(a^{\frac13})^4=a^{\frac43}\neq a^{\frac1{12}}=\sqrt[12]{a}$ (거짓)

ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=(a^2\times a^{\frac12})^{\frac13}=(a^{\frac52})^{\frac13}=a^{\frac52\times\frac13}=a^{\frac56}=\sqrt[6]{a^5}$ (참)

05 이차방정식 $x^2-3\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{32}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3\sqrt[3]{2},\ \alpha\beta=\sqrt[3]{32}$ ……㉠

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(3\sqrt[3]{2})^3-3\sqrt[3]{32}\times3\sqrt[3]{2}$ ($\because$ ㉠)

$=27\times2-3^2\times\sqrt[3]{64}$

$=54-9\times4=54-36=18$ 답 ⑤

06 $\dfrac{2^{-2}+1+2^2+2^4+\cdots+2^{100}}{2^2+1+2^{-2}+2^{-4}+\cdots+2^{-100}}$

$=\dfrac{2^{98}(2^{-100}+2^{-98}+2^{-96}+\cdots+2^2)}{2^2+1+2^{-2}+2^{-4}+\cdots+2^{-100}}$

$=2^{98}=2^{\frac12\times196}=(\sqrt{2})^{196}$

$\therefore n=196$ 답 ⑤

07 $(\sqrt{3^n})^{\frac12}=\left(3^{\frac n2}\right)^{\frac12}=3^{\frac n4},\ \sqrt[n]{3^{100}}=3^{\frac{100}{n}}$

$3^{\frac n4},\ 3^{\frac{100}{n}}$이 모두 자연수가 되도록 하는 n ($n\ge2$인 자연수)은 4의 배수이면서 100의 양의 약수이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$4+20+100=124$ 답 124

08

지수가 정수가 아닌 유리수 또는 실수인 경우 지수법칙은 반드시 밑이 양수일 때만 성립한다.

즉, m, n이 정수가 아닌 유리수이면 $a>0$일 때만 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립하므로

$\{(-2)^2\}^{\frac{5}{2}}=(-2)^{2\times\frac{5}{2}}=(-2)^5$은 잘못된 계산이다.

따라서 $\{(-2)^2\}^{\frac{5}{2}}\neq(-2)^5$이므로 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳은 ④이다. 답 ④

09

$x=3+2\sqrt{2}$, $y=3-2\sqrt{2}$에서

$x+y=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$,

$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$

$\therefore x+y=6,\ xy=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 방정식 $\sqrt[x]{a}\sqrt[y]{a}-3\sqrt{a^x a^y}+2=0$에서

$a^{\frac{1}{x}}a^{\frac{1}{y}}-3(a^{x+y})^{\frac{1}{2}}+2=0$

$a^{\frac{x+y}{xy}}-3a^{\frac{x+y}{2}}+2=0$

$a^{\frac{6}{1}}-3a^{\frac{6}{2}}+2=0$ ($\because$ ㉠)

$a^6-3a^3+2=0$

$(a^3-1)(a^3-2)=0$

$\therefore a^3=2$ ($\because a\neq1$)

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 양수 a의 값은

$a=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ 답 ③

10

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$ $(a>0)$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^3=a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}\times(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$

$=27$

$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-3\times1\times3=27$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=27+9=36$

또한, $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$ $(a>0)$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}-2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}=9$

$a+a^{-1}-2\times1=9$

$\therefore a+a^{-1}=9+2=11$

$\therefore \dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+9}{a+a^{-1}+4}=\dfrac{36+9}{11+4}=\dfrac{45}{15}=3$ 답 3

11

$x=\dfrac{3^n-3^{-n}}{2}$에서

$1+x^2=1+\dfrac{(3^n-3^{-n})^2}{4}=\dfrac{4+(3^n-3^{-n})^2}{4}$

$=\dfrac{(3^n+3^{-n})^2}{4}=\left(\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}\right)^2$

$\therefore \sqrt[2n]{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt[2n]{x+\sqrt{\left(\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}\right)^2}}$

$=\sqrt[2n]{x+\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}}\left(\because \dfrac{3^n+3^{-n}}{2}>0\right)$

$=\sqrt[2n]{\dfrac{3^n-3^{-n}}{2}+\dfrac{3^n+3^{-n}}{2}}$

$=\sqrt[2n]{3^n}=3^{\frac{n}{2n}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 답 ③

12

$5^{2a+b}\times5^{a-b}=32\times2$에서

$5^{(2a+b)+(a-b)}=64$

$5^{3a}=4^3 \qquad \therefore 5^a=4$

한 문자가 소거될 수 있도록 식을 세운다.

이때 $5^{a-b}=2$에서 $\dfrac{5^a}{5^b}=2$

$\dfrac{4}{5^b}=2 \qquad \therefore 5^b=2$

따라서 $4^{\frac{1}{a}}=5$, $2^{\frac{1}{b}}=5$이므로

$4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=4^{\frac{1}{b}}\times4^{\frac{1}{a}}$

$=(2^{\frac{1}{b}})^2\times4^{\frac{1}{a}}$

$=5^2\times5=125$ 답 125

• 다른 풀이 1 •

$5^{a-b}=2$에서 $(5^{a-b})^5=2^5$

$5^{5a-5b}=32$

이때 $5^{2a+b}=32$이므로 $5^{5a-5b}=5^{2a+b}$

밑이 5로 같으므로

$5a-5b=2a+b$

$3a=6b \qquad \therefore a=2b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $5^{a-b}=2$에 대입하면

$5^{2b-b}=2$, $5^b=2 \qquad \therefore 2^{\frac{1}{b}}=5$

㉠에서 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{a}$이므로

$2^{\frac{2}{a}}=5 \qquad \therefore 4^{\frac{1}{a}}=5$

$\therefore 4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}=4^{\frac{1}{b}}\times4^{\frac{1}{a}}=(2^{\frac{1}{b}})^2\times4^{\frac{1}{a}}$

$=5^2\times5=125$

• 다른 풀이 2 •

주어진 등식의 양변에 각각 밑이 5인 로그를 취하면

$2a+b=\log_5 32=5\log_5 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$a-b=\log_5 2 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2\log_5 2=\log_5 4$, $b=\log_5 2$

이므로

$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{1}{\log_5 2}+\dfrac{1}{\log_5 4}$

$=\log_2 5+\log_4 5$

$=\log_4 25+\log_4 5$

$=\log_4 125$

$\therefore 4^{\frac{a+b}{ab}}=4^{\log_4 125}=125$

13

$3^a=24^b=2$이므로 $3=2^{\frac{1}{a}}$, $24=2^{\frac{1}{b}}$

이때 $2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=2^{\frac{1}{a}}\div2^{\frac{1}{b}}=3\div24=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$이므로

$2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=2^{-3}$

$\therefore \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=-3$ 답 ①

14 정육면체의 한 변의 길이를 x라 하자.

정육면체의 부피는 x^3이므로

$x^3=2^7 \qquad \therefore x=2^{\frac{7}{3}} \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때 색칠한 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로

넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}x)^2=\sqrt{3}\times 2^{\frac{q}{p}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2=\sqrt{3}\times 2^{\frac{q}{p}}$

$x^2=2^{\frac{q}{p}+1}$, $2^{\frac{14}{3}}=2^{\frac{q}{p}+1}$ ($\because$ ㉠)

$\dfrac{14}{3}=\dfrac{q}{p}+1 \qquad \therefore \dfrac{q}{p}=\dfrac{11}{3}$

즉, $p=3$, $q=11$이므로

$p+q=14$ 답 14

15 $T_n=50\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{1620}}$이므로

$T_{1000}=50\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}}$, $T_{1405}=50\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1405}{1620}}$

$\therefore \dfrac{T_{1000}}{T_{1405}}=\dfrac{50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}}}{50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1405}{1620}}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}-\frac{1405}{1620}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{405}{1620}}$

$=2^{\frac{405}{1620}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$(배) 답 ②

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 11~14

01 ⑤	02 ②	03 143	04 11	05 ③
06 ④	07 69	08 ③	09 ③	10 5
11 $\frac{21}{2}$	12 ④	13 ②	14 972	15 47
16 ②	17 3	18 ①	19 11	20 ③
21 9	22 225	23 $\frac{1}{15}$	24 -2	25 4
26 ②	27 ⑤	28 ③	29 ⑤	

01 ㄱ. n이 홀수이므로 실수 a의 값에 관계없이

$f(n, a)=f(n, -a)=1$ (참)

ㄴ. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2n>0$, $2n-1>0$이고, $2n$은 짝수, $2n-1$은 홀수이므로

$f(2n-1, 2n)=1$, $f(2n, 2n-1)=2$

$\therefore f(2n-1, 2n)+f(2n, 2n-1)=3$ (참)

ㄷ. 자연수 m에 대하여 $2m>0$, $2m+1>0$이고, $2m$은 짝수, $2m+1$은 홀수이므로

$f(2m, 2m)=2$, $f(2m+1, 2m+1)=1$

$\therefore f(2, 2)+f(3, 3)+f(4, 4)+\cdots$

$+f(100, 100)$

$=\{f(2, 2)+f(4, 4)+\cdots+f(100, 100)\}$

$+\{f(3, 3)+f(5, 5)+\cdots+f(99, 99)\}$

$=2\times 50+1\times 49$

$=149$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 등식 $t^4=x^2-4$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수는

(i) $x^2-4>0$일 때,

즉, $(x-2)(x+2)>0$에서 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때,

$t=\sqrt[4]{x^2-4}$ 또는 $t=-\sqrt[4]{x^2-4}$의 2개이다.

$\therefore f(x)=2$

(ii) $x^2-4=0$일 때,

즉, $(x-2)(x+2)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$일 때,

$t=0$으로 1개이다.

$\therefore f(x)=1$

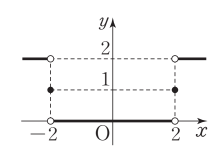
(iii) $x^2-4<0$일 때,

즉, $(x-2)(x+2)<0$에서 $-2<x<2$일 때,

주어진 등식을 만족시키는 실수 t의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore f(x)=0$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ②

03 2 이상의 자연수 n에 대하여

$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)$

(i) $2\le n<4$일 때, $(n-4)(n-10)>0$이므로

$n^2-14n+40>0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5>0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(2)=2$, $f(3)=1$

(ii) $n=4$일 때, $(n-4)(n-10)=0$이므로

$n^2-14n+40=0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5=0$

0의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(4)=1$

(iii) $5\le n<10$일 때, $(n-4)(n-10)<0$이므로

$n^2-14n+40<0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5<0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$f(5)=f(7)=f(9)=1$, $f(6)=f(8)=0$

(iv) $n=10$일 때, $(n-4)(n-10)=0$이므로

$n^2-14n+40=0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5=0$

0의 10제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(10)=1$

(v) $n>10$일 때, $(n-4)(n-10)>0$이므로

$n^2-14n+40>0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5>0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$f(2k+9)=1$, $f(2k+10)=2$ (단, k는 자연수)

$\therefore f(11)=f(13)=f(15)=\cdots=f(99)=1$,

$f(12)=f(14)=f(16)=\cdots=f(100)=2$

(i)~(v)에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(100)$

$=2+1+1+1\times3+0\times2+1+1\times45+2\times45$

$=143$

답 143

04

조건 ㈎에서 $\sqrt[n+1]{a}>0$이므로 $a>0$이다.

조건 ㈏에서

(i) n이 짝수일 때,

$\sqrt[n]{(-2)^n}=2$, $\sqrt[n+3]{(n-a)^{n+3}}=n-a$이므로

$2\times(n-a)=6 \qquad \therefore n-a=3$

가능한 순서쌍 (n, a)는 다음과 같다.

$(4, 1)$, $(6, 3)$, $(8, 5)$, $(10, 7)$

(ii) n이 홀수일 때,

$\sqrt[n]{(-2)^n}=-2$, $\sqrt[n+3]{(n-a)^{n+3}}=|n-a|$이므로

$(-2)\times|n-a|=-6 \qquad \therefore |n-a|=3$

가능한 순서쌍 (n, a)는 다음과 같다.

$(3, 6)$, $(5, 2)$, $(5, 8)$, $(7, 4)$, $(7, 10)$,

$(9, 6)$, $(9, 12)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$4+7=11$

답 11

05

$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt[4]{6})x+\sqrt{2}\times\sqrt[4]{6}<0$에서

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{6})<0$

이때 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[4]{6}$이므로

$\sqrt{2}<x<\sqrt[4]{6}$

$\therefore A=\{x\,|\,\sqrt{2}<x<\sqrt[4]{6}\}$

또한, $x^2-(\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{11})x+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{11}<0$에서

$(x-\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[6]{11})<0$

이때 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}<\sqrt[6]{11}$이므로

$\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[6]{11}$

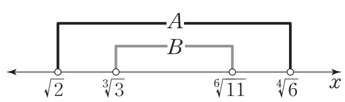
$\therefore B=\{x\,|\,\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[6]{11}\}$

$\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$,

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[6]{11}=\sqrt[12]{11^2}=\sqrt[12]{121}$이므로

$\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{11}$을 크기가 작은 순서대로 나타내면

$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{11}<\sqrt[4]{6}$



따라서 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로

$A\cap B=B$

답 ③

06

ㄱ. (반례) $(g_4\circ f_4)(-2)=g_4(f_4(-2))$

$=g_4((-2)^4)$

$=\sqrt[4]{(-2)^4}=2$ (거짓)

$(g_4\circ f_4)(a)=g_4(f_4(a))=\sqrt[4]{a^4}$ 이므로 반례는 $a<0$일 때 찾을 수 있다.

ㄴ. $(g_m\circ g_n)(a)=g_m(g_n(a))=g_m(\sqrt[n]{a})$

$=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$=\sqrt[mn]{a}=g_{mn}(a)$ (참)

ㄷ. (i) n이 짝수일 때, $n+1$은 홀수이므로

$(g_n\circ f_n)(a)=g_n(f_n(a))=g_n(a^n)$

$=\sqrt[n]{a^n}=-a$

$(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=g_{n+1}(f_{n+1}(a))=g_{n+1}(a^{n+1})$

$=\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=a$

(ii) n이 홀수일 때, $n+1$은 짝수이므로

$(g_n\circ f_n)(a)=g_n(f_n(a))=g_n(a^n)$

$=\sqrt[n]{a^n}=a$

$(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=g_{n+1}(f_{n+1}(a))=g_{n+1}(a^{n+1})$

$=\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=-a$

(i), (ii)에서 자연수 n에 대하여

$(g_n\circ f_n)(a)+(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

07

모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=[\sqrt[3]{n}]$이므로

$[\sqrt[3]{n}]=k$ (k는 자연수)라 하면

$k\le\sqrt[3]{n}<k+1$

$\therefore \sqrt[3]{k^3}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{(k+1)^3} \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $k=1$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{1}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은

$1, 2, 3, \cdots, 7$이다.

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{7}]$

$=1\times7=7$

(ii) $k=2$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[3]{27}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=2$를 만족시키는 자연수 n의 값은

$8, 9, 10, \cdots, 26$이다.

$\therefore [\sqrt[3]{8}]+[\sqrt[3]{9}]+[\sqrt[3]{10}]+\cdots+[\sqrt[3]{26}]$

$=2\times(26-8+1)=38$

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{26}]$

$=7+38=45$

(iii) $k=3$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[3]{27}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=3$을 만족시키는 자연수 n의 값은

$27, 28, 29, \cdots, 63$이다.

$\therefore [\sqrt[3]{27}]+[\sqrt[3]{28}]+[\sqrt[3]{29}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$

$=3\times(63-27+1)=111$

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$

$=45+111=156$

(iv) $k=4$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[3]{125}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=4$를 만족시키는 자연수 n의 값은 64, 65, 66, $\cdots$, 124이다.

이때 $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{a}]=180$이고

$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]=156$이므로

$$[\sqrt[3]{64}]+[\sqrt[3]{65}]+[\sqrt[3]{66}]+\cdots+[\sqrt[3]{a}]=180-156=24$$

$24=4\times6$이므로 $a=64+6-1=69$

(i)~(iv)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(a)=180$을 만족시키는 자연수 a의 값은 69이다. 답 69

08

ㄱ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로

$(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^6=x^2y^3=1$ (참)

ㄴ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로

$(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^9=x^3(\sqrt{y})^4(\sqrt{y})^5=x^3y^2(\sqrt{y})^5=1$

이때 $0<y<1$에서 $\sqrt{y}<1$이므로 $(\sqrt{y})^5<1$

$\therefore x^3y^2>1$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $x^2y^3=1$이므로

$(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4})^{12}=x^6y^{16}=(x^2y^3)^3y^7=y^7<1$ ($\because 0<y<1$)

$\therefore \sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}<1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

• 다른 풀이 1 •

$\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$에서 $\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\therefore y=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=(x^{-\frac{1}{3}})^2=x^{-\frac{2}{3}}$

ㄱ. $x^2y^3=x^2\times(x^{-\frac{2}{3}})^3=x^2\times x^{-2}=1$ (참)

ㄴ. $x^3y^2=x^3\times(x^{-\frac{2}{3}})^2=x^3\times x^{-\frac{4}{3}}=x^{3-\frac{4}{3}}$

$=x^{\frac{5}{3}}>1$ ($\because x>1$) (참)

ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}=x^{\frac{1}{2}}\times y^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times(x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{8}{9}}$

$=x^{\frac{1}{2}-\frac{8}{9}}=x^{-\frac{7}{18}}<1$ ($\because x>1$) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

• 다른 풀이 2 •

ㄴ. $0<y<1<x$에서 $\dfrac{x}{y}>1$

$x^3y^2=x^2y^3\times\dfrac{x}{y}$이므로

$x^3y^2>x^2y^3$

$\therefore x^3y^2>1$ ($\because$ ㄱ) (참)

09

$\sqrt[3]{\dfrac{5^b}{7^{a+1}}}=\dfrac{5^{\frac{b}{3}}}{7^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수가 되려면 $a+1$과 b가 3의 배수이어야 하고, $\sqrt[5]{\dfrac{5^{b+1}}{7^a}}=\dfrac{5^{\frac{b+1}{5}}}{7^{\frac{a}{5}}}$이 유리수가 되려면 a와 $b+1$이 5의 배수이어야 한다.

즉, a는 5의 배수, $a+1$은 3의 배수이므로 a의 최솟값은 5이고, b는 3의 배수, $b+1$은 5의 배수이므로 b의 최솟값은 9이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 $5+9=14$이다. 답 ③

10

$x=3^m5^n$을 주어진 등식에 대입하면

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{5}}\times\sqrt[3]{\frac{x}{9}}&=\left(\frac{3^m5^n}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3^m5^n}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\\&=(3^m5^{n-1})^{\frac{1}{2}}\times(3^{m-2}5^n)^{\frac{1}{3}}\\&=3^{\frac{m}{2}+\frac{m-2}{3}}\times5^{\frac{n-1}{2}+\frac{n}{3}}\\&=3^{\frac{5m-4}{6}}\times5^{\frac{5n-3}{6}}=3\times5^2\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{5m-4}{6}=1$, $\dfrac{5n-3}{6}=2$에서

$m=2$, $n=3$이므로

$m+n=5$ 답 5

• 다른 풀이 •

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x}{5}}\times\sqrt[3]{\frac{x}{9}}&=\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\\&=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}\times\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}}\\&=\frac{x^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{2}}}=3\times5^2\end{aligned}$$

즉, $x^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{5}{3}}\times5^{\frac{5}{2}}$이므로

$x=\left(3^{\frac{5}{3}}\times5^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}=3^2\times5^3$

따라서 $m=2$, $n=3$이므로

$\therefore m+n=5$

11

임의의 자연수 k에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^{-k}+1}+\frac{1}{a^k+1}&=\frac{1}{\frac{1}{a^k}+1}+\frac{1}{a^k+1}\\&=\frac{a^k}{a^k+1}+\frac{1}{a^k+1}=\frac{a^k+1}{a^k+1}=1\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{1}{a^{-10}+1}+\frac{1}{a^{10}+1}\right)+\left(\frac{1}{a^{-9}+1}+\frac{1}{a^9+1}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{a^{-1}+1}+\frac{1}{a^1+1}\right)+\frac{1}{a^0+1}\\&=1\times10+\frac{1}{a^0+1}=10+\frac{1}{1+1}=\frac{21}{2}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{21}{2}$

12

$\left(-a\times\dfrac{1}{b}\right)^{-1}\times\left(\dfrac{1}{a}\times b^{-1}\right)^{-2}$

$=(-a\times b^{-1})^{-1}\times(a^{-1}\times b^{-1})^{-2}$

$=-a^{-1}\times b\times a^2\times b^2$

$=-ab^3=216$

이때 $216=2^3\times3^3$이므로 0이 아닌 두 정수 a와 b가 될 수 있는 값을 나타내면 다음 표와 같다.

a	1	-1	2^3	-2^3	3^3	-3^3	6^3	-6^3
b^3	-6^3	6^3	-3^3	3^3	-2^3	2^3	-1	1
b	-6	6	-3	3	-2	2	-1	1

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ -6),\ (-1,\ 6),\ (8,\ -3),\ \cdots,\ (-216,\ 1)$의 8개이다.

답 ④

13 $\sqrt[8]{56\sqrt[4]{14^{n+3}}}$이 어떤 유리수 k의 네제곱근이라 하면

$$k=\left(\sqrt[8]{56\sqrt[4]{14^{n+3}}}\right)^4$$
$$=\left\{\left(56\sqrt[4]{14^{n+3}}\right)^{\frac{1}{8}}\right\}^4$$
$$=\left\{(2^3\times 7)\times(2^{n+3}\times 7^{n+3})^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\times 7^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{n+3}{8}}\times 7^{\frac{n+3}{8}}$$
$$=2^{\frac{n+15}{8}}\times 7^{\frac{n+7}{8}}$$

이때 k가 유리수이므로 $\frac{n+15}{8}$와 $\frac{n+7}{8}$의 값이 정수가 되어야 한다.

$|n|\le 20$에서 $-20\le n\le 20$

$\therefore\ -\frac{5}{8}\le\frac{n+15}{8}\le\frac{35}{8}$

즉, $\frac{n+15}{8}$의 값이 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3, 4이고, $\frac{n+15}{8}=\frac{n+7}{8}+1$에서 $\frac{n+15}{8}$의 값이 정수이면 $\frac{n+7}{8}$의 값도 정수이므로 조건을 만족시키는 정수 n은 -15, -7, 1, 9, 17의 5개이다.

답 ②

14 두 점 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $(0,\ 5)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x}{\frac{5}{2}}+\dfrac{y}{5}=1$에서 $2x+y=5$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 직선 l 위의 점이므로

$2a+b=5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$9^a>0$, $3^b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9^a+3^b=3^{2a}+3^b$$
$$\ge 2\sqrt{3^{2a}\times 3^b}\ (\text{단, 등호는 } 2a=b\text{일 때 성립})$$
$$=2\sqrt{3^{2a+b}}=2\sqrt{3^5}\ (\because ㉠)$$
$$=18\sqrt{3}$$

따라서 9^a+3^b의 최솟값은 $m=18\sqrt{3}$이므로

$m^2=972$

답 972

15 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$b=-a+6 \qquad \therefore\ a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2^a=4+2^p$, $2^b=4+2^{-p}$에서

$2^p=2^a-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡, $2^{-p}=2^b-4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡×㉢을 하면

$1=(2^a-4)(2^b-4)$

$2^{a+b}-4(2^a+2^b)+15=0$

$64-4(2^a+2^b)+15=0\ (\because ㉠)$

$\therefore\ 2^a+2^b=\frac{79}{4}$

㉡+㉢을 하면

$2^p+2^{-p}=2^a+2^b-8=\frac{79}{4}-8=\frac{47}{4}$

$\therefore\ 2^{2+p}+2^{2-p}=4\times(2^p+2^{-p})=4\times\frac{47}{4}=47$

답 47

• 다른 풀이 •

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$b=-a+6 \qquad \therefore\ a+b=6$

한편, $2^a=4+2^p$, $2^b=4+2^{-p}$을 변끼리 곱하면

$2^a2^b=(4+2^p)(4+2^{-p})$

$2^{a+b}=16+4\times 2^p+4\times 2^{-p}+1$

$2^6=17+2^{2+p}+2^{2-p}\ (\because a+b=6)$

$\therefore\ 2^{2+p}+2^{2-p}=64-17=47$

16 ㄱ. $f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))$

$$=f(\sqrt{2})=\sqrt{2\sqrt{2}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\ (\text{참})$$

ㄴ. $f^3(2)=(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))$

$$=f(f(\sqrt{4}))=f(f(2))$$
$$=f(\sqrt{4})=f(2)$$
$$=\sqrt{4}=2\ (\text{참})$$

ㄷ. ㄱ에서 $f^2(1)=\sqrt{2\sqrt{2}}$

$$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))$$
$$=f(\sqrt{2\sqrt{2}})=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{7}{8}}=2^{\frac{2^3-1}{2^3}}$$
$$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))$$
$$=f(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}})=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=2^{\frac{15}{16}}=2^{\frac{2^4-1}{2^4}}$$
$$\vdots$$
$$f^n(1)=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$
$$=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

같은 방법으로

$$f(4)=2\sqrt{2}=2^{1+\frac{1}{2}}$$
$$f^2(4)=(f\circ f)(4)=f(f(4))$$
$$=f(2\sqrt{2})=\sqrt{4\sqrt{2}}$$
$$=2\sqrt[4]{2}=2^{1+\frac{1}{4}}$$
$$f^3(4)=(f\circ f^2)(4)=f(f^2(4))$$
$$=f(2\sqrt[4]{2})=\sqrt{4\sqrt[4]{2}}$$
$$=2\sqrt[8]{2}=2^{1+\frac{1}{8}}$$
$$\vdots$$
$$f^n(4)=2^{1+\frac{1}{2^n}}$$

$\therefore\ f^n(1)f^n(4)=2^{1-\frac{1}{2^n}}\times 2^{1+\frac{1}{2^n}}$

$=2^2=\{f(2)\}^2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

17 해결단계

❶ 단계	$a=b^k$ (b, k는 자연수)으로 놓은 후, $\sqrt[m]{a}$와 $\sqrt[n]{a}$가 모두 자연수이기 위한 k의 조건을 찾는다.
❷ 단계	300 이하의 세 자리의 자연수 중에서 거듭제곱이 될 수 있는 수를 모두 구한다.
❸ 단계	**❷ 단계**에서 구한 수 중에서 **❶ 단계**에서 찾은 조건을 만족시키는 수를 찾은 후, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$a=b^k$ (b, k는 자연수)으로 놓으면

$\sqrt[m]{a}=b^{\frac{k}{m}}$, $\sqrt[n]{a}=b^{\frac{k}{n}}$

이때 2 이상의 서로 다른 자연수 m, n에 대하여 $b^{\frac{k}{m}}$, $b^{\frac{k}{n}}$이 모두 자연수이어야 하므로 k는 2 이상의 서로 다른 약수 m, n을 가져야 한다.

한편, $100\le a\le 300$에서 $100\le b^k\le 300$이므로

b^k의 값으로 가능한 것은 2^7, 2^8, 3^5, 4^4, 5^3, 6^3, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 17^2이다.

이때 k가 2 이상의 서로 다른 두 약수를 가져야 하므로 2, 3, 5, 7은 될 수 없다.

$4^4=2^8$이므로 자연수 a는 256뿐이다.

따라서 k의 값으로 가능한 것은 4, 8이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(2, 4)$, $(2, 8)$, $(4, 8)$의 3개이다. **답** 3

18

$x^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}$ $(e>1)$의 양변을 제곱하면

$x=(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}})^2=e+e^{-1}-2$

$\therefore\ x+2=e+e^{-1}$ ……㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=e^2+e^{-2}+2$

$x^2+4x=e^2+e^{-2}-2$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{e^2+e^{-2}-2}=\sqrt{(e-e^{-1})^2}$

$=e-e^{-1}$ $(\because\ e>e^{-1})$ ……㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}=\frac{e+e^{-1}+(e-e^{-1})}{e+e^{-1}-(e-e^{-1})}$$

$$=\frac{2e}{2e^{-1}}=e^2$$

답 ①

• 다른 풀이 •

$x^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}$에서

$x=e-2+e^{-1}$ ……㉢

한편,

$$\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}\times\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=\frac{(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2}{4}$$

이때 ㉢에서 $x+2=e+e^{-1}$이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$x^2+4x+4=e^2+2+e^{-2}$

$x^2+4x=e^2-2+e^{-2}=(e-e^{-1})^2$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4x}=e-e^{-1}$ $(\because\ e>e^{-1})$

$$\therefore\ \frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{x+2-\sqrt{x^2+4x}}=\frac{(x+2+\sqrt{x^2+4x})^2}{4}$$

$$=\frac{(e+e^{-1}+e-e^{-1})^2}{4}$$

$$=\frac{4e^2}{4}=e^2$$

19

$\sqrt[3]{a}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=b$의 양변을 세제곱하면

$$a-\frac{1}{a}-3\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)=b^3$$

$$a-\frac{1}{a}-3b=b^3\ \left(\because\ \sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=b\right)$$

$$\therefore\ b^3+3b=a-\frac{1}{a}$$

이때 $b^3+3b=3$이므로 $a-\dfrac{1}{a}=3$

$$\therefore\ a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$$

$$=3^2+2=11$$

답 11

20

$40^a=2$, $40^b=5$에서

$40=2^3\times 5=(40^a)^3\times 40^b=40^{3a+b}$

밑이 40으로 같으므로 $3a+b=1$에서

$1-b=3a$

$$\therefore\ 8^{\frac{2(1-a-b)}{1-b}}=8^{\frac{2(3a-a)}{3a}}=8^{\frac{4}{3}}$$

$$=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$$

답 ③

21

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}+\frac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}$$

$$=\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}\times\frac{2^x}{2^x}+\frac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}\times\frac{2^x}{2^x}$$

$$=\frac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}+\frac{2^{2x}-2^{-4x}}{1+2^{-2x}}$$

$$=\frac{(2^{2x})^2+\frac{1}{2^{2x}}}{2^{2x}+1}+\frac{2^{2x}-\frac{1}{(2^{2x})^2}}{1+\frac{1}{2^{2x}}}$$

$$=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3+1}+\frac{3-\frac{1}{3^2}}{1+\frac{1}{3}}\ (\because\ 2^{2x}=3)$$

$$=\frac{\frac{28}{3}}{4}+\frac{\frac{26}{9}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{13}{6}=\frac{9}{2}$$

따라서 $A=\frac{9}{2}$이므로

$2A=2\times\frac{9}{2}=9$ 답 9

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식의 분모, 분자에 각각 일정한 수를 곱해서 주어진 식의 항을 2^{2x}의 거듭제곱 꼴로 변형한 경우	60%
(나)	변형한 식을 정리한 후, $2^{2x}=3$을 이용하여 A의 값을 구한 경우	30%
(다)	$2A$의 값을 구한 경우	10%

• 다른 풀이 •

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}+\frac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}$$
$$=\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}\times\frac{2^{3x}}{2^{3x}}+\frac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}\times\frac{2^{5x}}{2^{5x}}$$
$$=\frac{2^{6x}+1}{2^{4x}+2^{2x}}+\frac{2^{6x}-1}{2^{4x}+2^{2x}}$$
$$=\frac{2\times2^{6x}}{2^{4x}+2^{2x}}=\frac{2\times2^{4x}}{2^{2x}+1}$$
$$=\frac{2\times3^2}{3+1}=\frac{9}{2}=A$$
$$\therefore 2A=2\times\frac{9}{2}=9$$

22 $3^a=4^b=5^c$이므로

$3^a=4^b$에서 $(3^a)^c=(4^b)^c$ $\therefore 3^{ac}=4^{bc}$

$4^b=5^c$에서 $(4^b)^a=(5^c)^a$ $\therefore 4^{ab}=5^{ac}$

이때 $ac=2$이므로

$3^2=4^{bc}$, $4^{ab}=5^2$

$\therefore 4^{ab+bc}=4^{ab}\times4^{bc}$

$=5^2\times3^2=225$ 답 225

• 다른 풀이 •

$4^{ab+bc}=(4^b)^a\times(4^b)^c$

$=(5^c)^a\times(3^a)^c$ ($\because 3^a=4^b=5^c$)

$=15^{ac}=15^2$ ($\because ac=2$)

$=225$

23 $3^a=5^b$의 양변에 3^b을 곱하면

$3^a\times3^b=5^b\times3^b$

$\therefore 3^{a+b}=15^b$

이때 $2ab-a-b=0$에서 $a+b=2ab$이므로

$3^{2ab}=15^b$

$3^{2a}=15$ $\therefore 3^a=15^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \left(\frac{1}{27}\right)^a\times5^b=3^{-3a}\times3^a=3^{-2a}$

$=(3^a)^{-2}=(15^{\frac{1}{2}})^{-2}=\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{15}$

• 다른 풀이 •

$2ab-a-b=0$에서 $2ab=a+b$

$\frac{a+b}{ab}=2$ $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ ⋯⋯㉠

이때 $3^a=5^b=k$ $(k>0)$로 놓으면

$k^{\frac{1}{a}}=3$, $k^{\frac{1}{b}}=5$

위의 두 식을 변끼리 곱하면

$k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=15$, $k^2=15$ ($\because$ ㉠) $\therefore k=15^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \left(\frac{1}{27}\right)^a\times5^b=(3^{-3})^a\times5^b$

$=(3^a)^{-3}\times5^b$

$=k^{-3}\times k=k^{-2}$

$=(15^{\frac{1}{2}})^{-2}=\frac{1}{15}$

24 이차방정식 $x^2+(2-a-b)x+a-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+b-2$, $\alpha\beta=a-b$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a+b-2}{a-b}$ ⋯⋯㉠

한편, $3^a=6$, $3^b=24$이므로

$3^{a+b-2}=3^a\times3^b\times\frac{1}{9}=6\times24\times\frac{1}{9}=16$,

$3^{a-b}=3^a\times\frac{1}{3^b}=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$

이때 $16=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$이므로 $3^{a+b-2}=3^{-2(a-b)}$

$3^{\frac{a+b-2}{a-b}}=3^{-2}$ $\therefore \frac{a+b-2}{a-b}=-2$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{a+b-2}{a-b}$ ($\because$ ㉠)

$=-2$ 답 -2

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2+(2-a-b)x+a-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+b-2$, $\alpha\beta=a-b$ ⋯⋯㉡

한편, $3^a=6$에서 $3^{a-1}=2$,

$3^b=24$에서 $3^{b-1}=8=2^3$이므로

$3^{b-1}=(3^{a-1})^3$에서 $3^{b-1}=3^{3a-3}$

즉, $b-1=3a-3$이므로 $b=3a-2$

위의 식을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+\beta=4a-4$, $\alpha\beta=-2a+2$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{4a-4}{-2a+2}$

$=\frac{4(a-1)}{-2(a-1)}=-2$

25 $\frac{2^x}{1+2^{x-y}}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}=\frac{2^x}{1+2^{x-y}}\times\frac{2^y}{2^y}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}\times\frac{2^x}{2^x}$

$=\frac{2^{x+y}}{2^y+2^x}+\frac{2^{x+y}}{2^x+2^y}$

$=\frac{2\times2^{x+y}}{2^x+2^y}=\frac{2^{1+x+y}}{2^x+2^y}$

$=\frac{1}{2}$

즉, $2\times2^{1+x+y}=2^x+2^y$이므로

$2^x+2^y=2^{2+x+y}$ ⋯⋯㉠

$\therefore 2^{-x}+2^{-y}=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}$

$=\frac{2^x+2^y}{2^x\times2^y}=\frac{2^{2+x+y}}{2^{x+y}}$ ($\because$ ㉠)

$=2^2=4$

답 4

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이 문제는 식을 얼마나 잘 변형하는가를 평가하는 문제이지만 보기보다 난이도가 높으니 많이 풀어 보고 익숙해져야 한다. 대칭식일 때는 대칭을 이루는 문자를 동일한 형태로 치환하여 접근해 보는 것도 좋은 아이디어이다.

$2^x=A$, $2^y=B$로 치환하여 식을 변형하면

$\frac{A}{1+\frac{A}{B}}+\frac{B}{1+\frac{B}{A}}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{A}{1+\frac{A}{B}}\times\frac{B}{B}+\frac{B}{1+\frac{B}{A}}\times\frac{A}{A}=\frac{1}{2}$

$\frac{2AB}{A+B}=\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=4$이고, 문제에서 구하고자 하는 값이 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$이므로 답이 4임을 알 수 있다.

26 조건 (나)에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$

$\therefore \frac{3a+5c}{2b}=\frac{3k^x+5k^z}{2k^y}$

조건 (가)에서 $y=\frac{x+z}{2}$이므로

$\frac{3k^x+5k^z}{2k^y}=\frac{3k^x+5k^z}{2k^{\frac{x+z}{2}}}$

$=\frac{3+5k^{z-x}}{2k^{\frac{z-x}{2}}}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}+\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}$

이때 $k^{\frac{z-x}{2}}>0$, $\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}+\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}\ge2\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}\times\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}}$

$\left(\text{단, 등호는 } k^{z-x}=\frac{3}{5}\text{일 때 성립}\right)$

$=2\sqrt{\frac{15}{4}}=\sqrt{15}$

$\therefore \frac{3a+5c}{2b}\ge\sqrt{15}$

따라서 $\frac{3a+5c}{2b}$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다.

답 ②

• 다른 풀이 •

조건 (나)에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$

$b=k^y$의 양변을 제곱하면 $b^2=k^{2y}$ ⋯⋯㉠

$a=k^x$, $c=k^z$을 변끼리 곱하면

$ac=k^{x+z}$ ⋯⋯㉡

조건 (가)에서 $2y=x+z$이므로 ㉠, ㉡에서

$b^2=ac$ $\quad\therefore b=\sqrt{ac}$ ($\because b>0$)

$\therefore \frac{3a+5c}{2b}=\frac{3a+5c}{2\sqrt{ac}}=\frac{3a}{2\sqrt{ac}}+\frac{5c}{2\sqrt{ac}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}$

이때 $\sqrt{\frac{a}{c}}>0$, $\sqrt{\frac{c}{a}}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\ge2\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\times\frac{5}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}}$

(단, 등호는 $3a=5c$일 때 성립)

$=2\sqrt{\frac{15}{4}}=\sqrt{15}$

따라서 $\frac{3a+5c}{2b}$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다.

27 $2^x=3^y=6^z=k\ (k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$, $6=k^{\frac{1}{z}}$

ㄱ. $k^{\frac{1}{x}}<k^{\frac{1}{y}}<k^{\frac{1}{z}}$에서

$k>1$이므로 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$

$\therefore z<y<x$ ($\because x>0, y>0, z>0$) (참)

ㄴ. $2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$을 변끼리 곱하면

$6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{z}}$ ($\because 6=k^{\frac{1}{z}}$)

이때 $k\ne1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$이고, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$이므로

$\frac{1}{z}=1$이다.

$\therefore z=1$ (참)

ㄷ. $x=p$, $z=p^2\ (p\ne1)$이면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$에서

$\frac{1}{y}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$

$\therefore y=\frac{p^2}{1-p}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

28 $B_1=\frac{kI_0r_1^{\,2}}{2(x_1^{\,2}+r_1^{\,2})^{\frac{3}{2}}}$,

$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{kI_0\times9r_1^{\,2}}{2(9x_1^{\,2}+9r_1^{\,2})^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{9kI_0r_1^{\,2}}{2\times9^{\frac{3}{2}}(x_1^{\,2}+r_1^{\,2})^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{kI_0r_1^{\,2}}{6(x_1^{\,2}+r_1^{\,2})^{\frac{3}{2}}}$

즉, $B_2=\frac{1}{3}B_1$이므로 $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{3}$이다.

답 ③

29 단원자 이상기체의 단열 팽창 전 온도가 480(K)이고 부피가 5(m^3)이므로

$T_i=480$, $V_i=5$

이 이상기체가 단열 팽창하여 기체의 온도가 270(K)이 되었으므로 $T_f=270$

$\gamma=\frac{5}{3}$이므로 팽창 후 부피를 V_f라 하고 주어진 등식 $T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$에 대입하면

$480\times5^{\frac{5}{3}-1}=270\times V_f^{\frac{5}{3}-1}$

$480\times5^{\frac{2}{3}}=270\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$16\times5^{\frac{2}{3}}=9\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$V_f^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{9}\times5^{\frac{2}{3}}$

$\therefore V_f=\left(\frac{4}{3}\right)^{2\times\frac{3}{2}}\times5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}$

$=\frac{64}{27}\times5=\frac{320}{27}$

답 ⑤

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 15

01 26	02 ①	03 5	04 648	05 7
06 13	07 ②	08 20		

01 해결단계

❶ 단계	세 수 $\sqrt{\frac{n}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$, $\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되기 위한 자연수 p, q, r의 조건을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 자연수 p, q, r의 조건을 이용하여 p, q, r의 값을 각각 구한 후, $2p-q+r$의 값을 구한다.

$n=2^p\times3^q\times5^r$에서

$\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수가 되려면 q와 r는 2의 배수이고,

$p=2k_1+1$ (단, k_1은 음이 아닌 정수) ……㉠

$\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 p와 r는 3의 배수이고,

$q=3k_2+1$ (단, k_2는 음이 아닌 정수) ……㉡

$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되려면 p와 q는 5의 배수이고,

$r=5k_3+1$ (단, k_3은 음이 아닌 정수) ……㉢

즉, p는 3과 5의 공배수 중에서 ㉠을 만족시키는 최솟값이므로 $p=15$, q는 2와 5의 공배수 중에서 ㉡을 만족시키는 최솟값이므로 $q=10$, r는 2와 3의 공배수 중에서 ㉢을 만족시키는 최솟값이므로 $r=6$이다.

$\therefore 2p-q+r=2\times15-10+6$

$=26$

답 26

02 해결단계

❶ 단계	a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x임을 이용하여 조건 (가), (나), (다)를 등식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 이용하여 mn의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)과 그 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이므로

$b=(\sqrt[3]{a})^m=a^{\frac{m}{3}}$

조건 (나)에서 $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이므로

$c=(\sqrt{b})^n=b^{\frac{n}{2}}$

조건 (다)에서 c는 a^{12}의 네제곱근이므로

$a^{12}=c^4$

즉, $c^4=\left(b^{\frac{n}{2}}\right)^4=b^{2n}=\left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{2n}=a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$이므로

$\frac{2mn}{3}=12\qquad\therefore mn=18$

따라서 $mn=18$을 만족시키는 1이 아닌 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 9)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$의 4개이다.

답 ①

03 해결단계

❶ 단계	$1+x^2$에 $x=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}$을 대입하여 간단히 한다.
❷ 단계	$x+\sqrt{1+x^2}$에 $x=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}$과 ❶단계에서 구한 식을 대입하여 간단히 한다.
❸ 단계	$\sqrt[n]{x+\sqrt{1+x^2}}$에 ❷단계에서 구한 식을 대입한 후 이 식이 정수가 되기 위한 자연수 n의 개수를 구한다.

$2x=9^{10}-\frac{1}{9^{10}}=9^{10}-9^{-10}$에서 $x=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}$이므로

$1+x^2=1+\frac{(9^{10}-9^{-10})^2}{2^2}=\frac{4+(9^{10}-9^{-10})^2}{4}$

$=\frac{9^{20}+9^{-20}+2}{4}=\frac{(9^{10}+9^{-10})^2}{4}$

$\therefore \sqrt{1+x^2}=\sqrt{\frac{(9^{10}+9^{-10})^2}{4}}=\frac{9^{10}+9^{-10}}{2}$

$\therefore x+\sqrt{1+x^2}=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}+\frac{9^{10}+9^{-10}}{2}=9^{10}$

이때 $\sqrt[n]{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt[n]{9^{10}}=9^{\frac{10}{n}}=3^{\frac{20}{n}}$이므로 이 값이 정수가 되려면 자연수 n은 20의 양의 약수이어야 한다.

따라서 구하는 $n\geq2$인 자연수 n은 2, 4, 5, 10, 20의 5개이다.

답 5

04 해결단계

❶ 단계	$AD=BC$임을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	네 직사각형의 넓이인 A, B, C, D의 합이 정사각형의 넓이와 같음을 이용하여 b의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 값을 이용하여 A의 값을 구한다.

정사각형을 넓이가 A, B, C, D인 네 개의 직사각형으로 나누었을 때, $A:B=C:D$이므로

$AD=BC$

$2^a3^b \times 2^{a+1}3^{b+1} = 2^{a-1}3^{b+1} \times 2^{2a-1}3^b$

$2^{2a+1}3^{2b+1} = 2^{3a-2}3^{2b+1}$

$2^{2a+1} = 2^{3a-2}$ ($\because 3^{2b+1} > 0$)

밑이 2로 같으므로

$2a+1 = 3a-2 \quad \therefore a=3 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 네 개의 직사각형의 넓이에 대입하여 정리하면

$A = 2^3 3^b = 8 \times 3^b$, $B = 2^2 3^{b+1} = 12 \times 3^b$,

$C = 2^5 3^b = 32 \times 3^b$, $D = 2^4 3^{b+1} = 48 \times 3^b$

이때 주어진 정사각형의 넓이는 $90^2 = 3^4 \times 100$이므로

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 8\times3^b + 12\times3^b + 32\times3^b + 48\times3^b \\ &= (8+12+32+48)\times3^b \\ &= 100\times3^b = 100\times3^4 \end{aligned}$$

$\therefore b=4 \quad \therefore A = 8\times3^4 = 648$ **답** 648

• 다른 풀이 •

넓이가 A, C인 두 직사각형의 가로의 길이를 m, 넓이가 B, D인 두 직사각형의 가로의 길이를 n이라 하면

넓이가 A인 직사각형의 세로의 길이는 $\dfrac{2^a3^b}{m}$이고, 넓이가 A인 직사각형의 세로의 길이는 넓이가 B인 직사각형의 세로의 길이와 같으므로

$\dfrac{2^a3^b}{m} \times n = 2^{a-1}3^{b+1}$

$\therefore \dfrac{n}{m} = \dfrac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

또한, 넓이가 C인 직사각형의 세로의 길이는 $\dfrac{2^{2a-1}3^b}{m}$이고, 넓이가 C인 직사각형의 세로의 길이는 넓이가 D인 직사각형의 세로의 길이와 같으므로

$\dfrac{2^{2a-1}3^b}{m} \times n = 2^{a+1}3^{b+1}$

$\therefore \dfrac{n}{m} = \dfrac{3}{2^{a-2}} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서

$\dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2^{a-2}}$이므로 $a=3$

한편,

$A+B+C+D$

$= 2^a3^b + 2^{a-1}3^{b+1} + 2^{2a-1}3^b + 2^{a+1}3^{b+1}$

$= 2^{a-1}3^b(2+3+2^a+2^2\times3)$

$= 2^2\times3^b\times5^2$ ($\because a=3$)

이때 주어진 정사각형의 넓이는 $90^2 = 2^2\times3^4\times5^2$이므로

$b=4$

$\therefore A = 2^a3^b = 2^3\times3^4 = 648$

05 해결단계

❶ 단계	거듭제곱근의 대소 관계를 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 범위를 이용하여 x^{-1}, x^{-2}의 범위를 각각 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 범위를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$x = 4^{\frac{4}{5}}$에서 $x^5 = 4^4 = 256$

이때 $3^5 = 243 < 256 < 4^5 = 1024$이므로

$3^5 < x^5 < 4^5 \quad \therefore 3 < x < 4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\therefore \dfrac{1}{4} < x^{-1} < \dfrac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$

$\frac{1}{16} < x^{-2} < \frac{1}{9}$이므로 $0 < x^{-2} < 1$

또한, $x = 4^{\frac{4}{5}}$에서 $x^{-2} = 4^{-\frac{8}{5}}$

$4^{-\frac{8}{5}} = a$ $(a>0)$로 놓으면 $a^5 = 4^{-8} = \dfrac{1}{4^8}$

$\dfrac{1}{4^8} < 1$이므로 $a^5 < 1 \quad \therefore 0 < a < 1$

$\therefore 0 < x^{-2} < 1$ ($\because a = 4^{-\frac{8}{5}} = x^{-2}$) $\cdots\cdots ㉢$

㉠에서 $4 < x+1 < 5$이므로 $[x+1] = 4$

㉢에서 $2 < x^{-2}+2 < 3$이므로 $[x^{-2}+2] = 2$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{13}{4} < x + x^{-1} < \dfrac{13}{3}$ *

즉, $\dfrac{13}{12} < \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}x^{-1} < \dfrac{13}{9}$이므로 $\left[\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}x^{-1}\right] = 1$

$\therefore [x+1] + [x^{-2}+2] + \left[\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}x^{-1}\right]$

$= 4+2+1 = 7$ **답** 7

BLACKLABEL 특강 **풀이 첨삭** *

$\dfrac{1}{x}$은 x가 최대일 때 최솟값을 갖고, x가 최소일 때 최댓값을 가지므로 $3<x<4$에서 $x+\dfrac{1}{x}$의 값의 범위를 $\alpha < x + \dfrac{1}{x} < \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 ㉠, ㉡에서 $\alpha > 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$, $\beta < 4 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{3}$이므로

$\dfrac{13}{4} < x + \dfrac{1}{x} < \dfrac{13}{3}$

06 해결단계

❶ 단계	n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 집합 X를 각각 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 나눈 경우에 따라 집합 X의 원소 중에서 양수인 모든 원소의 곱을 구한 후, 이 값이 5보다 작기 위한 n의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	집합 A의 모든 원소의 합이 최소이려면 n의 값도 최소이어야 함을 파악한 후, 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구한다.

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이므로

(i) n이 홀수일 때,

$a=n$일 때, b의 n제곱근 중에서 실수는

$\sqrt[n]{-25}$, $\sqrt[n]{-5}$, $\sqrt[n]{5}$, $\sqrt[n]{25}$

$a=n+1$일 때, $n+1$은 짝수이고 음수의 짝수 제곱근은 실수의 범위에서 존재하지 않으므로 b의 $(n+1)$제곱근 중에서 실수는

$\pm\sqrt[n+1]{5}$, $\pm\sqrt[n+1]{25}$

$\therefore X = \{\sqrt[n]{-25}, \sqrt[n]{-5}, \sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{25}, \sqrt[n+1]{5}, -\sqrt[n+1]{5}, \sqrt[n+1]{25}, -\sqrt[n+1]{25}\}$

집합 X의 양수인 모든 원소의 곱은

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{5}\times\sqrt[n]{25}\times\sqrt[n+1]{5}\times\sqrt[n+1]{25} &= 5^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}} \\ &= 5^{\frac{3}{n}+\frac{3}{n+1}} = 5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}} \end{aligned}$$

(ii) n이 짝수일 때,

$a=n$일 때, b의 n제곱근 중에서 실수는

$\pm\sqrt[n]{5}$, $\pm\sqrt[n]{25}$

$a=n+1$일 때, $n+1$은 홀수이므로 b의 $(n+1)$제곱근 중에서 실수는

$\sqrt[n+1]{-25}$, $\sqrt[n+1]{-5}$, $\sqrt[n+1]{5}$, $\sqrt[n+1]{25}$

$\therefore X=\{\sqrt[n+1]{-25}, \sqrt[n+1]{-5}, \sqrt[n+1]{5}, \sqrt[n+1]{25}, \sqrt[n]{5}, -\sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{25}, -\sqrt[n]{25}\}$

집합 X의 양수인 모든 원소의 곱은

$$\sqrt[n+1]{5}\times\sqrt[n+1]{25}\times\sqrt[n]{5}\times\sqrt[n]{25}=5^{\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}$$
$$=5^{\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n}}=5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}$$

(i), (ii)에서 집합 X의 양수인 모든 원소의 곱이 $5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}$이고, 이 수가 5보다 작아야 하므로

$5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}<5$에서 $\dfrac{6n+3}{n(n+1)}<1$

$n(n+1)>0$이므로 위의 부등식의 양변에 $n(n+1)$을 곱하면

$6n+3<n(n+1)$, $n^2-5n-3>0$

$\therefore n<\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$ 또는 $n>\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$

이때 $\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}<0$, $\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}=5.\times\times\times$이고, n이 최소일 때, 집합 A의 모든 원소의 합도 최소이므로 $n=6$이어야 한다.

따라서 $A=\{6, 7\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은

$6+7=13$

답 13

07 해결단계

❶ 단계	A, B, C를 간단히 정리하여 지수를 통일한다.
❷ 단계	A, B, C의 대소 관계를 판단한다.
❸ 단계	$\lvert A-B\rvert+\lvert B-C\rvert+\lvert C-A\rvert$의 절댓값을 풀어 정리한다.

$A=\sqrt{m\sqrt[3]{n}}=m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{6}}=(m^6n^2)^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt[3]{n\sqrt{m}}=n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{6}}=(m^2n^4)^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt{\sqrt{mn}}=(mn)^{\frac{1}{4}}=(m^3n^3)^{\frac{1}{12}}$

이때 m, n은 연속하는 자연수이고, $1<m<n$이므로 $m=n-1$

(i) $\dfrac{A}{B}=\left(\dfrac{m^6n^2}{m^2n^4}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^2}{n}\right)^{\frac{1}{6}}$

$=\left\{\dfrac{(n-1)^2}{n}\right\}^{\frac{1}{6}}$

이때 $1<m<n$에서 $1<n-1<n$이므로 $n>2$

$\therefore \dfrac{(n-1)^2}{n}=\dfrac{n^2-2n+1}{n}$

$=n-2+\dfrac{1}{n}>1$

$\therefore A>B$

(ii) $\dfrac{A}{C}=\left(\dfrac{m^6n^2}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^3}{n}\right)^{\frac{1}{12}}$

그런데 (i)에서 $\dfrac{m^2}{n}=\dfrac{(n-1)^2}{n}>1$이고, $m>1$이므로

$\dfrac{m^3}{n}>1$

$\therefore A>C$

(iii) $\dfrac{B}{C}=\left(\dfrac{m^2n^4}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{12}}$

이때 $1<m<n$에서 $0<\dfrac{1}{m}<1<\dfrac{n}{m}$

$\therefore B>C$

(i), (ii), (iii)에서 $C<B<A$

$\therefore \lvert A-B\rvert+\lvert B-C\rvert+\lvert C-A\rvert$

$=(A-B)+(B-C)-(C-A)$

$=2(A-C)$

답 ②

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이 문제는 거듭제곱근의 대소 비교 문제인데 절댓값 기호를 포함하고 있어 해결 방법이 잘 드러나지 않는다. 거듭제곱근의 대소 비교에서 가장 중요한 것은 한 가지 기준으로 통일하는 것이다. 이때 밑을 통일하거나 지수를 통일하는 방법이 있다. 밑이나 지수를 통일한 후 두 수의 크기를 차가 양수인지 음수인지에 따라 혹은 비율이 1보다 큰지 작은지에 따라 비교할 수 있다. 이 문제는 지수를 활용하였기 때문에 비율을 이용하여 대소를 비교한 후 절댓값을 풀어 정리하면 된다. 두 가지의 개념이 한 번에 등장하여 조금 어려울 수도 있지만, 이러한 문제에 익숙해지면 고난도 문제에 접근하기가 쉬워진다.

08 해결단계

❶ 단계	조건 (나)에서 주어진 등식을 k $(k>0)$로 놓고 식을 변형한다.
❷ 단계	조건 (가), (다)와 ❶단계에서 변형한 식을 이용하여 k의 값을 구한다.
❸ 단계	$\dfrac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}$의 값을 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $a^{4x}=\dfrac{1}{(2b)^{5y}}=k$ $(k>0)$로 놓으면

$a^{4x}=k$에서 $a^2=k^{\frac{1}{2x}}$

$\dfrac{1}{(2b)^{5y}}=k$에서 $2b=k^{-\frac{1}{5y}}$ $\qquad\therefore (2b)^3=k^{-\frac{3}{5y}}$

$\therefore k^{\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}}=k^{\frac{1}{2x}}k^{-\frac{3}{5y}}$

$=a^2\times(2b)^3$

$=8a^2b^3$

$=8\times125$ ($\because$ (가))

$=10^3$

조건 (다)에서 $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{5y}=3$이므로

$k^3=10^3$ $\qquad\therefore k=10$ ($\because$ k는 실수)

즉, $a^{4x}=k$에서 $a^{4x}=10$이므로

$\dfrac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}\times\dfrac{a^{2x}}{a^{2x}}=\dfrac{a^{4x}+1}{a^{4x}-1}$

$=\dfrac{10+1}{10-1}=\dfrac{11}{9}$

따라서 $p=9$, $q=11$이므로

$p+q=9+11=20$

답 20

이것이 수능 p. 16

1 ①　　2 ③　　3 ③　　4 ③

1

해결단계

❶ 단계	거듭제곱근의 정의를 이용하여 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하는 경우를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 경우에서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.
❸ 단계	모든 n의 값의 합을 구한다.

$-n^2+9n-18$의 n제곱근을 x라 하면

$x^n=-n^2+9n-18$

이때 음의 실수 x가 존재하려면

$-n^2+9n-18>0$이고 n이 짝수이거나

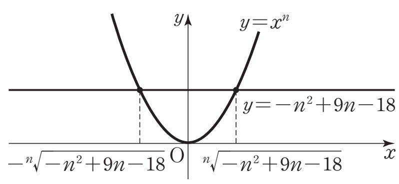
$-n^2+9n-18<0$이고 n이 홀수이어야 한다.

(i) $-n^2+9n-18>0$이고 n이 짝수일 때,

$n^2-9n+18<0$에서

$(n-3)(n-6)<0$　　$\therefore 3<n<6$

따라서 짝수인 n의 값은 4이다.



(ii) $-n^2+9n-18<0$이고 n이 홀수일 때,

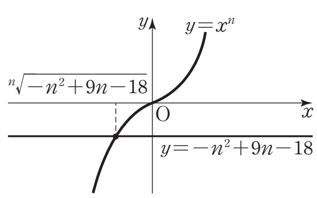
$n^2-9n+18>0$에서

$(n-3)(n-6)>0$　　$\therefore n<3$ 또는 $n>6$

그런데 $2\le n\le 11$이므로

$2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$

따라서 홀수인 n의 값은 7, 9, 11이다.



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$4+7+9+11=31$

답 ①

2

해결단계

❶ 단계	$n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 구한다.
❷ 단계	$n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 구한다.
❸ 단계	부등식 $f(n)>g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값과 그 합을 구한다.

$n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 자연수 n의 값과 상관없이 1이므로 모든 자연수 n에 대하여

$f(n)=1$

또한, $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는

(i) $n(n-4)>0$일 때,

즉, $n<0$ 또는 $n>4$이므로

자연수 n의 값이 5, 6, 7, …일 때, $g(n)=2$

(ii) $n(n-4)=0$일 때,

즉, $n=0$ 또는 $n=4$이므로

자연수 n의 값이 4일 때, $g(n)=1$

(iii) $n(n-4)<0$일 때,

즉, $0<n<4$이므로

자연수 n의 값이 1, 2, 3일 때, $g(n)=0$

(i), (ii), (iii)에서 $g(n)=\begin{cases}0 & (n=1,\ 2,\ 3)\\ 1 & (n=4)\\ 2 & (n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots)\end{cases}$

이때 $f(n)>g(n)$이고, $f(n)=1$이므로 $g(n)=0$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2, 3이므로 모든 n의 값의 합은

$1+2+3=6$

답 ③

3

해결단계

❶ 단계	지수법칙을 이용하여 $\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$이 자연수가 되기 위한 m, n의 조건을 각각 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m,n)과 그 개수를 구한다.

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}=2^{\frac{6}{m}}\times 3^{\frac{4}{n}}$의 값이 자연수이려면

m은 6의 약수이어야 하므로

$m=2,\ 3,\ 6$ ($\because$ m은 2 이상의 자연수)

또한, n은 4의 약수이어야 하므로

$n=2,\ 4$ ($\because$ n은 2 이상의 자연수)

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(2,\ 2)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 4)$의 6개이다.

답 ③

4

해결단계

❶ 단계	$(\sqrt[n]{4})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값 $f(4)$를 구한다.
❷ 단계	$(\sqrt[n]{27})^3$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값 $f(27)$을 구한다.
❸ 단계	$f(4)+f(27)$의 값을 구한다.

$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$에서

$a=4$일 때, $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$의 값이 자연수가 되려면

n은 6의 약수이어야 하므로

$n=2,\ 3,\ 6$ ($\because$ n은 2 이상의 자연수)

이때 조건을 만족시키는 n의 최댓값은 6이므로

$f(4)=6$

$a=27$일 때, $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$의 값이 자연수가 되려면

n은 9의 약수이어야 하므로

$n=3,\ 9$ ($\because$ n은 2 이상의 자연수)

이때 조건을 만족시키는 n의 최댓값은 9이므로

$f(27)=9$

$\therefore f(4)+f(27)=6+9=15$

답 ③

02 로그

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 18

01 ①	02 27	03 ①	04 ③	05 ①
06 -11	07 ⑤	08 80		

01 로그의 정의에 의하여 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. 밑의 조건 : $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

진수의 조건 : $a^2+1>0$

즉, 실수 a의 값에 관계없이 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례) $a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례) $a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의되는 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

02 $900=2^2\times3^2\times5^2$이므로 900의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(2+1)(2+1)=27$ $\quad\therefore n=27$

이때 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{27}$은 900의 양의 약수를 크기가 작은 순서대로 나열한 것이므로

$a_1a_{27}=a_2a_{26}=a_3a_{25}=\cdots=a_{13}a_{15}=900,\ a_{14}=30$

$\therefore a_1a_2a_3\cdots a_{27}=900^{13}\times30$

$=30^{26}\times30=30^{27}$

$\therefore \log_{30}a_1+\log_{30}a_2+\log_{30}a_3+\cdots+\log_{30}a_{27}$

$=\log_{30}a_1a_2a_3\cdots a_{27}$

$=\log_{30}30^{27}=27$ 답 27

BLACKLABEL 특강 참고

자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때

(1) N의 약수: (a^m의 약수)$\times$(b^n의 약수)

(2) N의 약수의 개수: $(m+1)(n+1)$

(3) N의 약수의 총합: $(1+a+a^2+\cdots+a^m)\times(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

(4) N의 약수의 곱: $N^{\frac{(N\text{의 약수의 개수})}{2}}$

03 (i) $x^3=y^4$에서 $y=x^{\frac{3}{4}}$이므로

$A=\log_x y=\log_x x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

(ii) $y^4=z^5$에서 $z=y^{\frac{4}{5}}$이므로

$B=\log_y z=\log_y y^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

(iii) $x^3=z^5$에서 $x=z^{\frac{5}{3}}$이므로

$C=\log_z x=\log_z z^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $A<B<C$ 답 ①

04 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 각각 두 점을 잇는 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

즉, $\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$에서

$\frac{1}{4}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$이므로

$\log_2 a=\frac{4}{3}\log_2 b$

$\therefore \log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{\log_2 b}{\frac{4}{3}\log_2 b}=\frac{3}{4}$ 답 ③

• 다른 풀이 •

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\log_2 b-\log_4 a}{3-2}=\log_2 b-\log_4 a$

이고, 이 직선이 원점을 지나므로 직선의 방정식을 구하면

$y=(\log_2 b-\log_4 a)x$

이 직선이 점 $(2, \log_4 a)$를 지나므로

$\log_4 a=(\log_2 b-\log_4 a)\times2$

$\frac{1}{2}\log_2 a=\left(\log_2 b-\frac{1}{2}\log_2 a\right)\times2$

$\log_2 a=4\log_2 b-2\log_2 a,\ \log_2 b=\frac{3}{4}\log_2 a$

$\log_2 b=\log_2 a^{\frac{3}{4}}$ $\quad\therefore b=a^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \log_a b=\log_a a^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\log_a a=\frac{3}{4}$

05 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=2,\ \log_2 a\times\log_2 b=-3$

$\therefore \log_{a^2}2+\log_b\sqrt{2}$

$=\frac{1}{2}\log_a 2+\frac{1}{2}\log_b 2$

$=\frac{1}{2}(\log_a 2+\log_b 2)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2 a+\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

즉, $\log_2 a=-1$, $\log_2 b=3$ 또는 $\log_2 a=3$, $\log_2 b=-1$이므로

$\log_{a^2}2+\log_b\sqrt{2}=\frac{1}{2}(\log_a 2+\log_b 2)$

$=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

06 $\log_{15} A=30$에서 $A=15^{30}$,
$\log_{45} B=15$에서 $B=45^{15}$이므로
$\frac{B}{A}=\frac{45^{15}}{15^{30}}=\left(\frac{45}{225}\right)^{15}=\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$
$\therefore \log \frac{B}{A}=\log \left(\frac{1}{5}\right)^{15}=\log 5^{-15}$
$=-15 \log 5=-15 \log \frac{10}{2}$
$=-15(\log 10-\log 2)$
$=-15(1-0.3010)$
$=-15\times 0.699$
$=-10.485$
따라서 $-11<\log \frac{B}{A}<-10$이므로 조건을 만족시키는 정수 n의 값은 -11이다. 답 -11

07 조건 (가)에서 $[\log 2020]=3$이므로
$[\log x]=3$ ……㉠
$[\log x]$는 $\log x$의 정수 부분이므로
조건 (나)의 $\log x-[\log x]=\log \frac{1}{x}-\left[\log \frac{1}{x}\right]$에서
$\log x$와 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분이 같다.
즉, $\log x-\log \frac{1}{x}=n$ (n은 정수)이라 하면
$\log x-\log \frac{1}{x}=\log x-\log x^{-1}$
$=\log x+\log x$
$=2 \log x=n$
$\therefore \log x=\frac{n}{2}$ ……㉡
이때 ㉠에서 $[\log x]=3$이므로
$3\le \frac{n}{2}<4$ $\therefore 6\le n<8$
즉, 정수 n은 6 또는 7이므로
㉡에서 $\log x=3$ 또는 $\log x=\frac{7}{2}$
$\therefore x=10^3$ 또는 $x=10^{\frac{7}{2}}$
따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은
$10^3\times 10^{\frac{7}{2}}=10^{3+\frac{7}{2}}=10^{\frac{13}{2}}$ 답 ⑤

• 다른 풀이 1 •
조건 (나)에서
$\log x-[\log x]=\log \frac{1}{x}-\left[\log \frac{1}{x}\right]$이므로
$\log x-[\log x]=\log x^{-1}-[\log x^{-1}]$
$\log x-[\log x]=-\log x-[-\log x]$ ……㉢
조건 (가)에서 $[\log 2020]=3$이므로
$[\log x]=3$
즉, $3\le \log x<4$이므로
$-4<-\log x\le -3$
$\therefore [-\log x]=-4$ 또는 $[-\log x]=-3$
(i) $[\log x]=3$, $[-\log x]=-4$인 경우
㉢에서 $\log x-3=-\log x-(-4)$
$2 \log x=7$, $\log x=\frac{7}{2}$
$\therefore x=10^{\frac{7}{2}}$
(ii) $[\log x]=3$, $[-\log x]=-3$인 경우
㉢에서 $\log x-3=-\log x-(-3)$
$2 \log x=6$, $\log x=3$
$\therefore x=10^3$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 x의 값은 10^3, $10^{\frac{7}{2}}$이므로 그 곱은
$10^3\times 10^{\frac{7}{2}}=10^{3+\frac{7}{2}}=10^{\frac{13}{2}}$

• 다른 풀이 2 •
조건 (나)에서 $\log x-[\log x]=\log \frac{1}{x}-\left[\log \frac{1}{x}\right]$이므로
$\log x$와 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분은 같다.
조건 (가)에서 $[\log 2020]=3$이므로
$[\log x]=3$
$\log x=3+\alpha$ $(0\le \alpha<1)$라 하면
$\log \frac{1}{x}=\log x^{-1}=-\log x$
$=-(3+\alpha)=-3-\alpha$ ……㉣
(i) $\alpha=0$일 때,
㉣에서 $\log \frac{1}{x}=-3$이므로 $\log \frac{1}{x}$의 소수 부분은 0이고, $\log x$의 소수 부분도 $\alpha=0$이므로 서로 같다.
즉, $\log x=3$이므로 $x=10^3$
(ii) $0<\alpha<1$일 때,
㉣에서
$\log \frac{1}{x}=-3-\alpha$
$=-4+(1-\alpha)$
이때 $0<1-\alpha<1$이므로
$\log \frac{1}{x}$의 소수 부분은 $1-\alpha$이다.
$\alpha=1-\alpha$, $2\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{1}{2}$
즉, $\log x=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$이므로 $x=10^{\frac{7}{2}}$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 x의 값은 10^3, $10^{\frac{7}{2}}$이므로 그 곱은
$10^3\times 10^{\frac{7}{2}}=10^{\frac{13}{2}}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭
다른 풀이 1의 (ii)는 부등식 $-4<-\log x\le -3$에서
$-\log x=-3$인 경우이므로
$\log x=3$ $\therefore x=10^3$
이렇게 바로 x의 값을 구해도 된다.

08 40분 후 정맥에서의 약물 농도가 4 ng/mL이므로

$\log(10-4)=1-40k \qquad \therefore \log 6=1-40k \quad \cdots\cdots ㉠$

a분 후 정맥에서의 약물 농도가 6.4 ng/mL이므로

$\log(10-6.4)=1-ka$

$\log 3.6=1-ka$

$ka=1-\log 3.6$

$=1-(\log 36-1)$

$=2-2\log 6$

$=2-2(1-40k)\ (\because ㉠)$

$=2-2+80k$

$=80k$

$\therefore a=80$

답 80

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 19~21

01 ④	02 ②	03 34	04 5	05 ⑤
06 42	07 ④	08 7	09 ③	10 74
11 ①	12 2	13 ④	14 ③	15 32
16 ①	17 ⑤	18 12	19 $\frac{1}{2}$	20 ⑤
21 ④	22 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$	23 467		

01 밑의 조건에 의하여 $3a-1>0$, $3a-1\neq1$

$\therefore \frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$ 또는 $a>\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$

진수의 조건에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$ax^2+2ax+1-a>0$

그런데 ㉠에서 a는 양수이므로 이차방정식

$ax^2+2ax+1-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a(1-a)<0$에서

$a(2a-1)<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$

답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하기 위한 필요충분조건은

$a>0,\ b^2-4ac<0$ 또는 $a=0,\ b=0,\ c>0$

02 $\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$로 놓으면

$a-b=25^k=5^{2k} \quad \cdots\cdots ㉠$

$a=9^k=3^{2k} \quad \cdots\cdots ㉡$

$b=15^k=3^k\times5^k \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠×㉡=㉢²이 성립하므로

$(a-b)a=b^2$

$\therefore b^2+ab-a^2=0$

$a>0$이므로 위의 식의 양변을 a^2으로 나누면

$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 진수의 조건에 의하여 $a-b>0$, $a>0$, $b>0$이므로

$0<\frac{b}{a}<1$이다.

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

답 ②

• 다른 풀이 •

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$로 놓으면

$25^k=a-b$, $9^k=a$, $15^k=b$

$\therefore 25^k=9^k-15^k$

이때 $3^k=A$, $5^k=B\ (A>0,\ B>0)$로 놓으면

$B^2=A^2-AB \qquad \therefore B^2+AB-A^2=0$

$A>0$이므로 위의 식의 양변을 A^2으로 나누면

$\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{B}{A}-1=0$

$\therefore \frac{B}{A}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \left(\because \frac{B}{A}>0\right)$

즉, $\left(\frac{5}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{15^k}{9^k}=\frac{5^k}{3^k}=\left(\frac{5}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

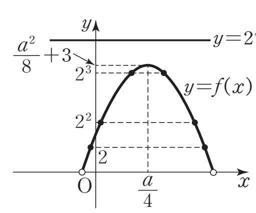
03 $f(x)=-2x^2+ax+3$이라 하면

$f(x)=-2x^2+ax+3$

$=-2\left(x^2-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}-\frac{a^2}{16}\right)+3$

$=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+3$

이때 $\log_2 f(x)$에서 로그의 정의에 의하여 $f(x)>0$이고, $\log_2 f(x)=n$ (n은 자연수), 즉 $f(x)=2^n$이므로 $\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 세 직선 $y=2$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 $k\geq4$인 자연수 k에 대하여 직선 $y=2^k$과는 만나지 않아야 한다.



즉, $2^3<\frac{a^2}{8}+3<2^4$에서 $5<\frac{a^2}{8}<13$

$\therefore 40<a^2<104$

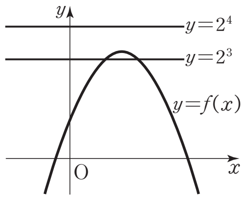
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값은 7, 8, 9, 10이므로 그 합은

$7+8+9+10=34$

답 34

• 다른 풀이 •

$f(x)=-2x^2+ax+3$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=2^3$과 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=2^4$과 만나지 않아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=2^3$, 즉 $2x^2-ax+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=a^2-4\times2\times5>0$
$\therefore a^2>40$

(ii) 이차방정식 $f(x)=2^4$, 즉 $2x^2-ax+13=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=a^2-4\times2\times13<0$
$\therefore a^2<104$

(i), (ii)에서 $40<a^2<104$
따라서 모든 자연수 a의 값은 7, 8, 9, 10이므로 그 합은
$7+8+9+10=34$

04 해결단계

❶ 단계	$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 하고, 자연수 c에 대하여 $a=c^m$, $b=c^n$으로 놓는다.
❷ 단계	자연수 c의 값에 따른 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 순서쌍을 이용하여 조건을 만족시키는 유리수의 개수를 구한다.

$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 하면
$b=a^{\frac{n}{m}}$에서 $a^n=b^m$이다.
즉, 자연수 c에 대하여 $a=c^m$, $b=c^n$으로 놓을 수 있다.
$\therefore 100<c^m<c^n<1000$

(i) $c=2$일 때,
$100<2^m<2^n<1000$에서
$2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$이므로
조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은
$(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 9)$
$\therefore \log_a b=\frac{8}{7}$ 또는 $\frac{9}{7}$ 또는 $\frac{9}{8}$

(ii) $c=3$일 때,
$100<3^m<3^n<1000$에서
$3^5=243$, $3^6=729$이므로
조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(5, 6)$
$\therefore \log_a b=\frac{6}{5}$

(iii) $c=4$일 때,
$100<4^m<4^n<1000$에서
$4^3=64$, $4^4=256$, $4^5=1024$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

(iv) $c=5$일 때,
$100<5^m<5^n<1000$에서
$5^3=125$, $5^4=625$이므로
조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(3, 4)$
$\therefore \log_a b=\frac{4}{3}$

(i)~(iv)에서 구하는 유리수는 $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{3}$의 5개이다.
$c\ge6$일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

답 5

05

$(a, b)\in A$이면 (a, b)는 $(a, \log_2 a)$이므로
$b=\log_2 a$ ……㉠

ㄱ. $(a, b)\in A$이므로 ㉠에서
$b+1=\log_2 a+1=\log_2 a+\log_2 2=\log_2 2a$
따라서 $(2a, b+1)\in A$이다. (참)

ㄴ. $(a, b)\in A$이므로 ㉠에서
$kb=k\log_2 a=\log_2 a^k$
따라서 $(a^k, kb)\in A$이다. (참)

ㄷ. $(c, d)\in A$이므로 (c, d)는 $(c, \log_2 c)$이다.
$\therefore d=\log_2 c$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여
$\frac{b}{2}-d=\frac{\log_2 a}{2}-\log_2 c$
$=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 c$
$=\log_2 \frac{a^{\frac{1}{2}}}{c}$
$=\log_2$
따라서 $\left(\frac{\sqrt{a}}{c}, \frac{b}{2}-d\right)\in A$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

06

조건 ㈎에서 $\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=66$이므로
$\log_3 abc=66$
$\therefore abc=3^{66}$ ……㉠
조건 ㈏에서 a, b, c 중 한 수가 1이면 나머지 두 수도 1이므로 a, b, c는 모두 1이 아니다.
이때 $a^2=b^4=c^6=k$ $(k\ne1)$로 놓으면
$a=k^{\frac{1}{2}}$, $b=k^{\frac{1}{4}}$, $c=k^{\frac{1}{6}}$이므로
$abc=k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=k^{\frac{11}{12}}$
$k^{\frac{11}{12}}=3^{66}$ ($\because$ ㉠)
$\therefore k=(3^{66})^{\frac{12}{11}}=3^{72}$

$\therefore \log_3 a+\log_3 b-\log_3 c$

$=\log_3 \dfrac{ab}{c}=\log_3 k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}$

$=\log_3 k^{\frac{7}{12}}=\log_3 (3^{72})^{\frac{7}{12}}$

$=\log_3 3^{42}=42$ **답** 42

07 세 양의 실수 a, b, c에 대하여

$\log_{(a+b)} c+\log_{(a-b)} c=2\log_{(a+b)} c\times\log_{(a-b)} c$

가 성립하므로

$$\frac{1}{\log_c (a+b)}+\frac{1}{\log_c (a-b)}=\frac{2}{\log_c (a+b)\times\log_c (a-b)}$$

양변에 $\log_c (a+b)\times\log_c (a-b)$를 곱하면

$\log_c (a-b)+\log_c (a+b)=2$

$\log_c (a-b)(a+b)=2$

$\log_c (a^2-b^2)=2$

$a^2-b^2=c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90^\circ$인 직각삼각형이다. **답** ④

> **BLACKLABEL 특강** 오답 피하기
>
> 로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이므로 $\log_{(a-b)} c$에서 $a=b$인 경우는 존재할 수 없다.
> 즉, 로그의 정의를 이용하면 보기 ①은 제외할 수 있다.

08 이차방정식 $x^2-9x+\log_4 4a=0$의 두 근이 $\log_4 a$, $\log_4 4b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_4 a+\log_4 4b=9$

$\log_4 a+1+\log_4 b=9$

$\therefore \log_4 a+\log_4 b=8 \qquad \cdots\cdots㉠$

또한,

$\log_4 a\times\log_4 4b=\log_4 4a$

$\log_4 a\times(1+\log_4 b)=1+\log_4 a$

$\log_4 a+\log_4 a\times\log_4 b=1+\log_4 a$

$\therefore \log_4 a\times\log_4 b=1 \qquad \cdots\cdots㉡$

$\therefore \log_{4a} b+\dfrac{1}{\log_a 4b}$

$=\dfrac{\log_4 b}{\log_4 4a}+\dfrac{\log_4 a}{\log_4 4b}$

$=\dfrac{\log_4 b}{1+\log_4 a}+\dfrac{\log_4 a}{1+\log_4 b}$

$=\dfrac{\log_4 b\times(1+\log_4 b)+\log_4 a\times(1+\log_4 a)}{(1+\log_4 a)(1+\log_4 b)}$

$=\dfrac{(\log_4 b)^2+(\log_4 a)^2+(\log_4 a+\log_4 b)}{\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 a+\log_4 b)+1}$

$=\dfrac{(\log_4 a+\log_4 b)^2-2(\log_4 a\times\log_4 b)+(\log_4 a+\log_4 b)}{\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 a+\log_4 b)+1}$

$=\dfrac{8^2-2\times1+8}{1+8+1}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=7$ **답** 7

09 ㄱ. $b=\dfrac{1}{2}$이면 $2^a=5^{\frac{1}{2}}$에서

$a=\log_2 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 5$

$=\log_{2^2} 5=\log_4 5$ (참)

ㄴ. $2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\log_2 5$

그런데 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서

$2<\log_2 5<3$이므로 $2<\dfrac{a}{b}<3$ (참)

ㄷ. (반례) $2^a=5^b=10$일 때,

$2=10^{\frac{1}{a}}$, $5=10^{\frac{1}{b}}$에서

$\dfrac{1}{a}=\log_{10} 2$, $\dfrac{1}{b}=\log_{10} 5$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_{10} 2+\log_{10} 5$

$=\log_{10} 10=1$ (유리수) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

> **BLACKLABEL 특강** 풀이 첨삭
>
> ㄷ. $2^a=5^b=k\ (k>1)$로 놓으면
> $2=k^{\frac{1}{a}}$, $5=k^{\frac{1}{b}}$에서 $\dfrac{1}{a}=\log_k 2$, $\dfrac{1}{b}=\log_k 5$
> $\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 5=\log_k 10$
> 따라서 $k=10^{\frac{n}{m}}$ (m, n은 자연수) 꼴이면
> $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_{10^{\frac{n}{m}}} 10=\dfrac{1}{\frac{n}{m}}=\dfrac{m}{n}$
> 즉, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$의 값은 유리수이다.

10 $\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)+\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{a+1}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{a+b-1}\right)$

$=\log_{10}\dfrac{a+1}{a}+\log_{10}\dfrac{a+2}{a+1}+\cdots+\log_{10}\dfrac{a+b}{a+b-1}$

$=\log_{10}\left(\dfrac{\cancel{a+1}}{a}\times\dfrac{\cancel{a+2}}{\cancel{a+1}}\times\cdots\times\dfrac{a+b}{\cancel{a+b-1}}\right)$

$=\log_{10}\dfrac{a+b}{a}=\log_{10}\dfrac{b}{6}$

즉, $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{b}{6}$에서 $ab=6a+6b$

$ab-6a-6b=0$

$a(b-6)-6(b-6)=36$

$\therefore (a-6)(b-6)=36$

위의 식을 만족시키는 두 자연수 a, b $(a>b)$의 값은 다음과 같다.

$a-6$	36	18	12	9
$b-6$	1	2	3	4
a	42	24	18	15
b	7	8	9	10

따라서 $a+b$의 최댓값은 $42+7=49$이고, 최솟값은 $15+10=25$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $49+25=74$

답 74

11 $f(mn)=f(m)+f(n)$ ······㉠

(i) m이 짝수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

즉, m과 n이 모두 짝수일 때는 항상 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$(개)

(ii) m이 짝수, n이 홀수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_3 n$

$\log_2 n=\log_3 n$ $\therefore n=1$

즉, m은 짝수이고 $n=1$일 때 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times1=10$(개)

(iii) m이 홀수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m$ $\therefore m=1$

즉, $m=1$이고 n은 짝수일 때 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1\times10=10$(개)

(iv) m이 홀수, n이 홀수일 때,

mn은 홀수이므로 ㉠에서

$\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

즉, m과 n이 모두 홀수일 때는 항상 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$(개)

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+10+10+100=220$(개)

답 ①

12 $\log_5 2=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\frac{b_4}{2^4}+\cdots$의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 2=b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

$\log_5 4=b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

이때 $0<\log_5 4<1$이므로 $b_1=0$

$\therefore \log_5 4=\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 4=b_2+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$

$\log_5 16=b_2+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 16<2$이므로 $b_2=1$

즉, $\log_5 16=1+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$이므로

$\log_5 16-1=\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\frac{b_5}{2^3}+\cdots$

$\log_5 \frac{16}{5}=\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\frac{b_5}{2^3}+\cdots$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 \frac{16}{5}=b_3+\frac{b_4}{2}+\frac{b_5}{2^2}+\cdots$

$\log_5 \frac{256}{25}=b_3+\frac{b_4}{2}+\frac{b_5}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 \frac{256}{25}<2$이므로 $b_3=1$

$\therefore b_1+b_2+b_3=0+1+1=2$

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식의 양변에 2를 곱하여 b_1의 값을 구한 경우	30%
(나)	식을 정리한 후, 양변에 2를 곱하여 b_2의 값을 구한 경우	30%
(다)	식을 정리한 후, 양변에 2를 곱하여 b_3의 값을 구한 경우	30%
(라)	$b_1+b_2+b_3$의 값을 구한 경우	10%

13 $a^5=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a^5=\log 10$, $5\log a=1$

$\therefore \log a=\frac{1}{5}=0.2$

$b^8=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log b^8=\log 10$, $8\log b=1$

$\therefore \log b=\frac{1}{8}=0.125$

$N=a^7b^9$이므로 이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log N&=\log a^7b^9\\&=\log a^7+\log b^9\\&=7\log a+9\log b\\&=7\times0.2+9\times0.125\\&=1.4+1.125=2.525\end{aligned}$$

이때 주어진 표에서 $\log 3.35=0.525$이므로

$$\begin{aligned}\log N&=2+0.525\\&=2+\log 3.35\\&=\log(3.35\times10^2)\\&=\log 335\end{aligned}$$

$\therefore N=335$

답 ④

• 다른 풀이 •

$a^5=10$에서 $a=10^{\frac{1}{5}}$, $b^8=10$에서 $b=10^{\frac{1}{8}}$이므로

$$\begin{aligned}N&=a^7b^9=(10^{\frac{1}{5}})^7\times(10^{\frac{1}{8}})^9\\&=10^{\frac{7}{5}}\times10^{\frac{9}{8}}=10^{\frac{7}{5}+\frac{9}{8}}\\&=10^{\frac{101}{40}}\end{aligned}$$

$\therefore \log N=\frac{101}{40}=2.525$

주어진 상용로그표에서 $0.525=\log 3.35$이므로

$$\begin{aligned}\log N&=2+\log 3.35\\&=\log(3.35\times10^2)\\&=\log 335\end{aligned}$$

$\therefore N=335$

14 $1<a<2$이므로 $\sqrt{10}<(\sqrt{10})^a<10$

$\therefore \sqrt{10}<\sqrt{10^a}<10$

이때 $3<\sqrt{10}<4$이므로 위의 부등식을 만족시키면서 4로 나누었을 때 몫이 정수이고 나머지가 1인 수는 5, 9이다.

즉, $\sqrt{10^a}=5$ 또는 $\sqrt{10^a}=9$이므로

$10^a=25$ 또는 $10^a=81$

$\therefore a=\log 25$ 또는 $a=\log 81$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합은

$$\begin{aligned}\log 25+\log 81&=\log 5^2+\log 3^4\\&=2\log 5+4\log 3\\&=2(1-\log 2)+4\log 3\\&=2(1-0.3)+4\times 0.48\\&=3.32\end{aligned}$$

답 ③

15 조건 (나)의 각 변에 상용로그를 취하면

$\log m\le\log\dfrac{3^{60}}{10^n}<\log(m+1)$

이때

$$\begin{aligned}\log\frac{3^{60}}{10^n}&=\log 3^{60}-\log 10^n\\&=60\log 3-n\\&=60\times 0.4771-n\\&=28.626-n\end{aligned}$$

이므로

$\log m\le 28.626-n<\log(m+1)$ ……㉠

조건 (가)의 각 변에 상용로그를 취하면 $0\le\log m<1$

또한, 자연수 m에 대하여 $1\le m<10$이므로

$1\le m\le 9$ $\therefore 2\le m+1\le 10$

위의 식의 각 변에 상용로그를 취하면

$\log 2\le\log(m+1)\le\log 10$

$0.301\le\log(m+1)\le 1$

이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 값은 28이다.

$\therefore \log m\le 0.626<\log(m+1)$ ($\because$ ㉠)

이때

$$\begin{aligned}\log 4&=\log 2^2\\&=2\log 2\\&=2\times 0.301\\&=0.602,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 5&=\log\frac{10}{2}\\&=\log 10-\log 2\\&=1-\log 2\\&=1-0.301\\&=0.699\end{aligned}$$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 4이다.

$\therefore m+n=4+28=32$

답 32

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

조건 (나)의 부등식의 의미를 살펴보자.
조건 (가)에 의하여 m은 한 자리 자연수이므로
$\dfrac{3^{60}}{10^n}=m+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$로 나타낼 수 있다.
이때 어떤 수를 10의 거듭제곱으로 나눈다는 것은 소수점의 위치를 이동시키는 것과 같고, 3^{60}을 10^n으로 나누어 정수 부분이 한 자리 수가 되도록 만들었으므로 n은 3^{60}의 자릿수에서 1을 뺀 값과 같다. 또한, 한 자리 자연수 m은 3^{60}의 최고 자리의 수와 같다.
따라서 $\log 3^{60}=60\times\log 3=60\times 0.4771=28.626$에서 정수 부분인 28을 이용하여 n의 값을 구하고, 소수 부분인 0.626을 이용하여 m의 값을 구할 수 있다.

16 $\log m-\log n=[\log m]-[\log n]$에서

$\log m-[\log m]=\log n-[\log n]$

이때 $\log m-[\log m]$, $\log n-[\log n]$은 각각 $\log m$, $\log n$의 소수 부분을 의미하므로 $\log m$과 $\log n$의 소수 부분이 같아야 한다.

또한, $20<m<n<300$이므로 m, n은 자릿수는 다르지만 숫자의 배열이 같은 두 자연수이다.

따라서 두 자연수 m, n에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(21, 210)$, $(22, 220)$, $(23, 230)$, $\cdots$, $(29, 290)$

의 9개이다.

답 ①

• 다른 풀이 •

$\log m-\log n=[\log m]-[\log n]$에서

$[\log m]$, $[\log n]$은 각각 $\log m$, $\log n$의 정수 부분이므로

$\log n-\log m=N$ (단, N은 음이 아닌 정수)

이때 $20<m<n<300$에서 m, n은 두 자리 수 또는 세 자리 수이므로 $\log m$과 $\log n$의 정수 부분은 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $[\log m]=[\log n]=1$

(ii) $[\log m]=1$, $[\log n]=2$

(iii) $[\log m]=[\log n]=2$

그런데 (i), (iii)이면 $m=n$이므로 모순이다.

즉, $[\log m]=1$, $[\log n]=2$이므로

$\log n-\log m=[\log n]-[\log m]=1$

$\log n=1+\log m$, $\log n=\log 10m$

$\therefore n=10m$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(21, 210)$, $(22, 220)$, $(23, 230)$, $\cdots$, $(29, 290)$

의 9개이다.

17 ㄱ. $\log 1000=\log 10^3=3$이므로

$f(1000)=3$

$\log 20=\log 10+\log 2=1+\log 2$이므로

$f(20)=1$ ($\because 0<\log 2<1$)

$\log 50=\log 10+\log 5=1+\log 5$이므로

$f(50)=1$ ($\because 0<\log 5<1$)

$\therefore f(1000)=f(20)+f(50)+1$ (참)

ㄴ. $\log x=f(x)+g(x)$이므로

ㄱ에서 $g(1000)=0$, $g(20)=\log 2$,

$g(50)=\log 5=\log \dfrac{10}{2}=1-\log 2$이므로

$g(1000)=g(20)+g(50)-1$ (참)

ㄷ. $\log x=f(x)+g(x)$,

$\log x^2=2\log x=f(x^2)+g(x^2)$,

$\log x^4=4\log x=f(x^4)+g(x^4)$이므로

$f(x^4)+g(x^4)=2\{f(x)+g(x)\}+f(x^2)+g(x^2)$

$=2f(x)+2g(x)+f(x^2)+g(x^2)$

이때 $g(x^2)=1-2g(x)$, 즉 $g(x^2)+2g(x)=1$ 이므로

$f(x^4)+g(x^4)=2f(x)+f(x^2)+1$

또한, $2f(x)+f(x^2)+1$은 정수이고,

$0\le g(x^4)<1$이므로 $g(x^4)=0$

$\therefore f(x^4)=f(x^2)+2f(x)+1$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

18 $64=2^6<99<2^7=128$이므로

$6<\log_2 99<7$ $\quad\therefore a=\log_2 99-6$

$25=5^2<99<5^3=125$이므로

$2<\log_5 99<3$ $\quad\therefore b=\log_5 99-2$

$\therefore 2^{p+a}5^{q+b}=2^{p-6+\log_2 99}5^{q-2+\log_5 99}$

$=2^{p-6}\times 2^{\log_2 99}\times 5^{q-2}\times 5^{\log_5 99}$

$=99^2\times 2^{p-6}\times 5^{q-2}$

이때 $40=2^3\times 5$이고, $2^{p+a}5^{q+b}$이 40의 배수가 되어야 하므로

$p-6\ge 3$, $q-2\ge 1$ $\quad\therefore p\ge 9$, $q\ge 3$

따라서 $p+q\ge 12$이므로 구하는 $p+q$의 최솟값은 12이다.

답 12

19 $\log_a N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)에 대하여

$n-\alpha$가 최소이려면 n은 최소이고, α는 최대이어야 한다.

이때 a는 2보다 큰 자연수이고, N은 자연수이므로

n의 최솟값은 0이다.

즉, $\log_a N=\alpha$이고, α가 최대가 되려면

$0\le\alpha<1$에서 $N<a$이어야 하므로 $N=a-1$이어야 한다.

즉, $n=0$, $\alpha=\log_a (a-1)$일 때, $n-\alpha$의 값이 최소가 되므로

$h(a)=-\log_a (a-1)$

$\therefore h(3)\times h(4)\times h(5)\times\cdots\times h(2020)\times h(2021)$

$=(-\log_3 2)\times(-\log_4 3)\times(-\log_5 4)\times\cdots$

$\times(-\log_{2020} 2019)\times(-\log_{2021} 2020)$

$=\left(-\dfrac{\log 2}{\cancel{\log 3}}\right)\times\left(-\dfrac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}}\right)\times\left(-\dfrac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}}\right)\times\cdots$

$\times\left(-\dfrac{\cancel{\log 2019}}{\cancel{\log 2020}}\right)\times\left(-\dfrac{\cancel{\log 2020}}{\log 2021}\right)$

$=-\dfrac{\log 2}{\log 2021}$

$=-\log_{2021} 2=k$

$\log_{2021} 2^{-1}=k$

$\therefore 2021^k=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

20 조건 ㈎의 식 $ab=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log ab=\log 100$

$\log a+\log b=2$

$\therefore \log b=2-\log a$ ······㉠

조건 ㈏에서 $\log a$, $\log b$의 소수 부분이 같으므로

$\log a-\log b=$(정수)

㉠을 위의 식에 대입하면

$\log a-(2-\log a)=$(정수)

$2\log a-2=$(정수)

이때 $\log a=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

$2(n+\alpha)-2=$(정수), $2\alpha+2n-2=$(정수)

즉, 2α도 정수이어야 하므로

$2\alpha=0$ 또는 $2\alpha=1$ ($\because 0\le 2\alpha<2$)

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

한편, 조건 ㈐에서 $-1<\log b<\log a<5$이므로 ㉠을 부등식에 대입하면

$-1<2-\log a<\log a<5$

$$\begin{cases} -1<2-\log a\text{에서 } \log a<3 \\ 2-\log a<\log a\text{에서 } \log a>1 \\ \log a<5 \end{cases}$$

$\therefore 1<\log a<3$

(i) $\alpha=0$, 즉 $\log a=n$일 때,

$1<n<3$에서 $n=2$이므로

$\log a=2$

(ii) $\alpha=\dfrac{1}{2}$, 즉 $\log a=n+\dfrac{1}{2}$일 때,

$1<n+\dfrac{1}{2}<3$에서 $\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{5}{2}$

즉, $n=1$ 또는 $n=2$이므로

$\log a=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ 또는 $\log a=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $\log a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $\log a=2$ 또는 $\log a=\dfrac{5}{2}$

이때

$\log\dfrac{a}{b}=\log a-\log b$

$=\log a-(2-\log a)$ ($\because$ ㉠)

$=2\log a-2$

이므로

$\underbrace{\log \frac{a}{b}=1}_{\log a=\frac{3}{2}}$ 또는 $\underbrace{\log \frac{a}{b}=2}_{\log a=2}$ 또는 $\underbrace{\log \frac{a}{b}=3}_{\log a=\frac{5}{2}}$

따라서 모든 $\log \frac{a}{b}$의 값의 합은

$1+2+3=6$ 답 ⑤

• 다른 풀이 1 •

$\log a=n+\alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)라 하면

조건 ㈎의 $ab=100$에서 $b=\frac{100}{a}$이므로

$\log b=\log \frac{100}{a}=\log 100-\log a$

$=2-(n+\alpha)$ ……㉡

이때 α의 값에 따라 $\log b$의 소수 부분을 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $\alpha=0$일 때,

㉡에서 $\log b=2-n$

즉, $\log b$의 소수 부분은 0이다.

$\log a=n$, $\log b=2-n$을 조건 ㈐에 대입하면

$-1<2-n<n<5$

$\begin{cases} -1<2-n\text{에서 } n<3 \\ 2-n<n\text{에서 } n>1 \\ n<5 \end{cases}$

$\therefore 1<n<3$

즉, $n=2$이므로 $\log a=2$, $\log b=0$

$\therefore \log \frac{a}{b}=\log a-\log b=2$

(ii) $\alpha \ne 0$일 때,

㉡에서 $\log b=2-n-\alpha=1-n+(1-\alpha)$이므로

$\log b$의 소수 부분은 $1-\alpha$이다.

조건 ㈏에서 $\log a$, $\log b$의 소수 부분이 같으므로

$\alpha=1-\alpha$, $2\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

즉, $\log a=n+\frac{1}{2}$, $\log b=\frac{3}{2}-n$이므로 이것을 조건 ㈐에 대입하면

$-1<\frac{3}{2}-n<n+\frac{1}{2}<5$

$\begin{cases} -1<\frac{3}{2}-n\text{에서 } n<\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}-n<n+\frac{1}{2}\text{에서 } n>\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2}<5\text{에서 } n<\frac{9}{2} \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

따라서 $n=1$ 또는 $n=2$이므로

$\log a=\frac{3}{2}$, $\log b=\frac{1}{2}$ 또는 $\log a=\frac{5}{2}$, $\log b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \log \frac{a}{b}=1$ 또는 $\log \frac{a}{b}=3$

(i), (ii)에서 $\log \frac{a}{b}$의 값이 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

• 다른 풀이 2 •

조건 ㈎의 $ab=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log ab=\log 100$ $\therefore \log a+\log b=2$ ……㉢

조건 ㈏에서 $\log a$와 $\log b$의 소수 부분이 같으므로

$\log \frac{a}{b}=\log a-\log b=m$ (m은 정수) ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$\log a=\frac{2+m}{2}$, $\log b=\frac{2-m}{2}$

조건 ㈐에서 $-1<\log b<\log a<5$이므로

$-1<\frac{2-m}{2}<\frac{2+m}{2}<5$

$\begin{cases} -1<\frac{2-m}{2}\text{에서 } m<4 \\ \frac{2-m}{2}<\frac{2+m}{2}\text{에서 } m>0 \\ \frac{2+m}{2}<5\text{에서 } m<8 \end{cases}$

$\therefore 0<m<4$

따라서 정수 m, 즉 $\log \frac{a}{b}$의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

21 이 해상에서 태풍의 중심 기압이 $P=900$일 때, 최대 풍속이 V_A이므로

$V_A=4.86(1010-900)^{0.5}=4.86\times 110^{0.5}$

또한, 같은 해상에서 태풍의 중심 기압이 $P=960$일 때, 최대 풍속이 V_B이므로

$V_B=4.86(1010-960)^{0.5}=4.86\times 50^{0.5}$

$\therefore \frac{V_A}{V_B}=\frac{4.86\times 110^{0.5}}{4.86\times 50^{0.5}}$

$=\left(\frac{110}{50}\right)^{0.5}$

$=\sqrt{2.2}$

$\frac{V_A}{V_B}=\sqrt{2.2}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log \frac{V_A}{V_B}=\log \sqrt{2.2}=\log (2\times 1.1)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}(\log 1.1+\log 2)$

$=\frac{1}{2}(0.0414+0.301)$

$=0.1712$

$=\log 1.483$

$\log \frac{V_A}{V_B}=\log 1.483$에서 양변의 로그의 밑이 10으로 같으므로

$\frac{V_A}{V_B}=1.483$ 답 ④

22 두 지역 A, B에 대하여 헤이즈계수가 각각 H_A, H_B, 여과지 이동거리가 각각 L_A, L_B, 빛전달률이 각각 S_A, S_B이므로

$H_A=\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}$, $H_B=\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}$

이때 $\sqrt{3}H_A=2H_B$, $L_A=2L_B$이므로

$$\frac{H_A}{H_B}=\frac{\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}=\frac{\frac{k}{2L_B}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\log_{S_B}S_A=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore S_A=(S_B)^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore p=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

23 $n=500$이므로 컴퓨터 운영체제가 인식하는 용량은

$500\times\left(\frac{1000}{1024}\right)^3$

$500\times\left(\frac{1000}{1024}\right)^3=k$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$$\log k=\log\left\{500\times\left(\frac{1000}{1024}\right)^3\right\}$$
$$=\log\left\{\frac{1000}{2}\times\left(\frac{10^3}{2^{10}}\right)^3\right\}$$
$$=\log\frac{10^{12}}{2^{31}}$$
$$=\log 10^{12}-\log 2^{31}$$
$$=12-31\log 2$$
$$=12-31\times 0.301$$
$$=2.669$$

이때 $\log 4.67=0.669$이므로

$$\log k=2+0.669$$
$$=2+\log 4.67$$
$$=\log 467$$

$\therefore k=467$ 답 467

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 22

01 2	**02** 7	**03** 27	**04** 76	**05** 12
06 500	**07** 78			

01 해결단계

❶ 단계	로그의 성질을 이용하여 집합 A의 원소 (x, y)에 대하여 $4xy=1$이 성립함을 보인다.
❷ 단계	집합 B의 원소 (x, y)가 동시에 집합 A의 원소가 되도록 하는 조건을 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위를 구하고, 그 최솟값을 구한다.

집합 A에서 로그의 성질에 의하여

$$\left(\frac{1}{2}\log 2\right)(\log_{\sqrt{2}}y)+\log x+\log 4$$
$$=\log\sqrt{2}\times\frac{\log y}{\log\sqrt{2}}+\log x+\log 4$$
$$=\log y+\log x+\log 4$$
$$=\log 4xy=0$$

즉, $4xy=1$이므로 $y=\frac{1}{4x}$ ……㉠

또한, 집합 B에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$이므로

이 식의 양변을 제곱하면

$x+y+2\sqrt{xy}=a$ ……㉡

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 두 집합 A, B를 만족시키는 순서쌍 (x, y)가 존재한다.

㉡에 ㉠을 대입하면

$$x+\frac{1}{4x}+1=a$$

$$\therefore x+\frac{1}{4x}=a-1$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{4x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{4x}}=1$$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $a-1\geq 1$이므로 $a\geq 2$

양수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

• 다른 풀이 •

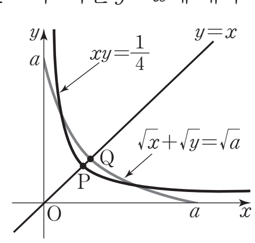
집합 A에서 로그의 성질에 의하여

$$\left(\frac{1}{2}\log 2\right)(\log_{\sqrt{2}}y)+\log x+\log 4$$
$$=\log\sqrt{2}\times\frac{\log y}{\log\sqrt{2}}+\log x+\log 4$$
$$=\log y+\log x+\log 4$$
$$=\log 4xy=0$$

$\therefore 4xy=1$ ……㉢

집합 B에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ ……㉣

㉢과 ㉣을 각각 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같고, 두 그래프는 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 직선 $y=x$와 ㉢, ㉣의 그래프와의 교점을 각각

$\mathrm{P}(t_1, t_1)$, $\mathrm{Q}(t_2, t_2)$ (t_1, t_2는 0보다 큰 실수)

라 하면

$4t_1^{\,2}=1$, $t_1^{\,2}=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore t_1=\frac{1}{2}$ ($\because t_1>0$)

또한, $\sqrt{t_2}+\sqrt{t_2}=\sqrt{a}$, $2\sqrt{t_2}=\sqrt{a}$

$4t_2=a$ $\quad\therefore t_2=\frac{a}{4}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$

두 집합 A, B에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$이려면 ㉢, ㉣의 그래프가 서로 만나야 하므로 점 Q의 x좌표(또는 y좌표)는 점 P의 x좌표(또는 y좌표)보다 크거나 같아야 한다.

즉, $\frac{a}{4}\geq\frac{1}{2}$이므로 $a\geq2$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a의 최솟값은 2이다.

02 해결단계

❶ 단계	$2\leq x\leq8$인 자연수 x에 대하여 $\log_x n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구한 후, $A(x)$를 구한다.
❷ 단계	집합 P의 부분집합 X에 대하여 X에서 X로의 함수 f가 일대일대응이 되기 위한 조건을 파악한 후, 집합 X의 개수를 구한다.

$\log_x n$이 자연수가 되려면 n은 x의 거듭제곱이어야 하므로 $A(x)$의 값은 1부터 300까지의 자연수 중에서 x의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.

$2^8=256<300<2^9=512$이므로 $\log_2 n$의 값이 자연수이기 위한 n은 2, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^8의 8개이다.

$\therefore A(2)=8$

같은 방법으로 3부터 8까지의 자연수 x에 대하여 $A(x)$의 값을 구하면

$3^5=243<300<3^6=729$이므로 $A(3)=5$

$4^4=256<300<4^5=1024$이므로 $A(4)=4$

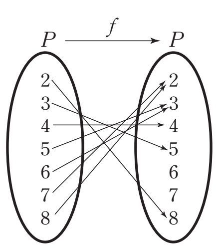
$5^3=125<300<5^4=625$이므로 $A(5)=3$

$6^3=216<300<6^4=1296$이므로 $A(6)=3$

$7^2=49<300<7^3=343$이므로 $A(7)=2$

$8^2=64<300<8^3=512$이므로 $A(8)=2$

전체집합 $P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에서 P로의 대응 f는 다음 그림과 같다.



즉, 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 X로의 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X는

$\{4\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 5\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$의 7개이다. **답** 7

BLACKLABEL 특강 필수 개념

일대일함수와 일대일대응

(1) 일대일함수
함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 「$x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$」가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라 한다.

(2) 일대일대응
함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고 공역과 치역이 같을 때, 함수 f를 일대일대응이라 한다.
즉, 유한개의 원소를 가진 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 일대일대응이려면 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 같고, 집합 X의 한 원소는 집합 Y의 하나의 원소로 겹치지 않게 대응되어야 한다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$A(x)$의 값을 이용하여 조건을 만족시키는 집합 P의 부분집합 X를 구해보자.
$A(2)=8$, $A(8)=2$이므로 두 원소 2, 8은 집합 X에 함께 포함되어야 한다.
$A(3)=5$, $A(5)=3$이므로 두 원소 3, 5도 집합 X에 함께 포함되어야 한다.
$A(4)=4$이므로 원소 4는 집합 X에 홀로 포함될 수 있다.
그러나 $A(6)=3$, $A(7)=2$에서 원소 6, 7은 치역의 원소가 아니므로 두 원소 6, 7을 포함시키는 집합 X는 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 세 묶음 (2, 8), (3, 5), (4)를 원소로 가지는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$(개)이다.

03 해결단계

❶ 단계	두 점 $\mathrm{P}(m, n)$, $\mathrm{Q}(\alpha, \beta)$가 각각 곡선과 직선 위에 존재함을 이용하여 관계식을 구한다.
❷ 단계	$\log AB$의 값을 이용하여 AB의 최댓값과 최솟값을 구한 후, 실수 k의 값을 구한다.

점 $\mathrm{P}(m, n)$은 곡선 $y=\frac{16}{x}$ 위에 있으므로

$n=\frac{16}{m}$ $\quad\therefore mn=16$

그런데 m, n은 음이 아닌 정수이고,

$16=1\times16=2\times8=4\times4$이므로 순서쌍 (m, n)은

$(1, 16)$, $(2, 8)$, $(4, 4)$, $(8, 2)$, $(16, 1)$

또한, 점 $\mathrm{Q}(\alpha, \beta)$는 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\beta=-\alpha+1$ $\quad\therefore \alpha+\beta=1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$$\begin{aligned}\therefore \log AB&=\log A+\log B\\&=m+\alpha+n+\beta\\&=m+n+\alpha+\beta\\&=m+n+1\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

이때 $m+n$의 최댓값은 $1+16=17$, 최솟값은 $4+4=8$이므로 $\log AB$의 최댓값은 $17+1=18$, 최솟값은 $8+1=9$이다.

따라서 AB의 최댓값은 10^{18}, 최솟값은 10^{9}이므로 그 곱은
$10^{18}\times10^{9}=10^{27}=10^{k}$
$\therefore k=27$ 답 27

04 해결단계

❶ 단계	1.26^{10n}의 상용로그 값을 구하여 소수 부분을 찾는다.
❷ 단계	$f(n)\ge2$이려면 소수 부분이 $\log 2$보다 크거나 같아야 함을 파악한 후, n의 값의 범위를 구하여 최솟값을 찾는다.

$1.26^{10n}=N$이라 하고 양변에 상용로그를 취하면
$\log N=\log 1.26^{10n}$
$=10n\log 1.26$
$=10n\times0.1004$
$=n\times1.004$
$=n+0.004\times n$
이때 $0.004\times n<1$, 즉 $n<250$이면 $\log N$의 소수 부분이 $0.004\times n$이므로 $f(n)\ge2$이려면
$\log 2\le0.004\times n$
이때 $\log 2=0.301$이므로
$0.301\le0.004\times n$
$\therefore n\ge\dfrac{0.301}{0.004}=75.25$
따라서 $f(n)\ge2$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 76이다. 답 76

05 해결단계

❶ 단계	$n=1, 2, 3, \cdots$을 주어진 등식에 대입한다.
❷ 단계	등식을 만족시키는 n의 값을 구한다.

(i) $n=1$일 때,
$\log_2 1=0$이므로
$[\log_2 1]=0<2\times1+1=3$
(ii) $2\le n<2^2$일 때,
$[\log_2 n]=1$이므로 $[\log_2 2]=[\log_2 3]=1$
$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]=1<2\times2+1=5,$
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]=2<2\times3+1=7$
(iii) $2^2\le n<2^3$일 때,
$[\log_2 n]=2$이므로
$[\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2$
$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+[\log_2 4]=4$
$<2\times4+1=9,$
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 7]=10$
$<2\times7+1=15$
(iv) $2^3\le n<2^4$일 때,
$[\log_2 n]=3$이므로
$[\log_2 8]=[\log_2 9]=[\log_2 10]=\cdots=[\log_2 15]=3$
$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 8]=13$
$<2\times8+1=17,$
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 15]=34$
$>2\times15+1=31$
(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는
$8<n<15$이므로
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]$
$=[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 7]$
$+[\log_2 8]+\cdots+[\log_2 n]$
즉, $10+3(n-7)=2n+1$이므로
$3n-11=2n+1 \qquad \therefore n=12$ 답 12

BLACKLABEL 특강 참고

$n=1, 2, 3, \cdots$을 대입할 때마다 등식의 좌변과 우변의 식의 값은 모두 증가하고, $[\log_2 1]<3$이다. 이때
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 (n-1)]$
$<2(n-1)+1$
에서 양변에 $[\log_2 n]$을 더하면
$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]$
$<2n-1+[\log_2 n]$
즉, $2n+1<2n-1+[\log_2 n]$이므로 $2<[\log_2 n]$
$[\log_2 n]$은 정수이므로
$3\le[\log_2 n] \qquad \therefore n\ge8$
따라서 n의 값을 구할 때 8부터 대입하여 계산하는 것이 편하다.

06 해결단계

❶ 단계	$[\log x]$와 $f(x)$가 각각 $\log x$의 정수 부분, 소수 부분임을 파악한 후, 주어진 등식을 $[\log a]$, $f(a)$를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\log 2a$의 소수 부분이 $f(a)$의 값에 따라 결정됨을 이해하고, $f(a)$의 값의 범위에 따라 경우를 나눈다.
❸ 단계	❷단계에서 나눈 경우에 따라 $f(2a)$를 구한 후, ❶단계에서 구한 식에 대입하여 $[\log a]$, $f(a)$의 값을 각각 구한다.
❹ 단계	$\log a=[\log a]+f(a)$임을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 a의 값을 구하여 모두 곱한 후, k의 값을 구한다.

$f(x)=\log x-[\log x]$에서 $[\log x]$는 $\log x$의 정수 부분이므로 $f(x)$는 $\log x$의 소수 부분이다.
$\log a=2f(a)+f(2a)$에서
$\log a-f(a)=f(a)+f(2a)$
$\therefore [\log a]=f(a)+f(2a)$ ······㉠
즉, $\log a$와 $\log 2a$의 소수 부분의 합이 $\log a$의 정수 부분과 같아야 한다.
$\log 2a=\log 2+\log a$
$=\log 2+f(a)+[\log a]$ ······㉡
에서 $\log 2a$의 소수 부분은 $f(a)$의 값에 따라 결정되므로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $0\le f(a)<\log 5$일 때, ← $\log 2+f(a)<1$일 때
$\log 2\le f(a)+\log 2<1$이므로 ㉡에서
$f(2a)=f(a)+\log 2$
위의 식을 ㉠에 대입하면
$[\log a]=f(a)+f(2a)$
$=f(a)+f(a)+\log 2$
$=2f(a)+\log 2$ ······㉢

이때 $0\le f(a)<\log 5$에서

$0\le 2f(a)<2\log 5$

$\log 2\le 2f(a)+\log 2<2\log 5+\log 2$

$\therefore \log 2\le[\log a]<\log 50$ (∵ ㉢)

$[\log a]$는 정수이므로 $[\log a]=1$

따라서 $2f(a)+\log 2=1$이므로

$f(a)=\frac{1}{2}(1-\log 2)=\frac{1}{2}\log 5=\log\sqrt{5}$

$\log a=[\log a]+f(a)$에서

$\log a=1+\log\sqrt{5}=\log 10\sqrt{5}$

양변의 로그의 밑이 10으로 같으므로

$a=10\sqrt{5}$

(ii) $\log 5\le f(a)<1$일 때, ← $\log 2+f(a)\ge 1$일 때.

$1\le f(a)+\log 2<1+\log 2$이므로 ㉡에서

$f(2a)=f(a)+\log 2-1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}[\log a]&=f(a)+f(2a)\\&=f(a)+f(a)+\log 2-1\\&=2f(a)+\log 2-1 \quad \cdots\cdots ㉣\end{aligned}$$

이때 $\log 5\le f(a)<1$에서

$2\log 5\le 2f(a)<2$

$2\log 5+\log 2-1\le 2f(a)+\log 2-1<1+\log 2$

$\therefore \log 5\le[\log a]<\log 20$ (∵ ㉣)

$[\log a]$는 정수이므로 $[\log a]=1$

따라서 $2f(a)+\log 2-1=1$이므로

$$\begin{aligned}f(a)&=\frac{1}{2}(2-\log 2)=\frac{1}{2}\log 50\\&=\log\sqrt{50}=\log 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\log a=[\log a]+f(a)$에서

$\log a=1+\log 5\sqrt{2}=\log 50\sqrt{2}$

양변의 로그의 밑이 10으로 같으므로

$a=50\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $a=10\sqrt{5}$ 또는 $a=50\sqrt{2}$이므로 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 a의 값의 곱은

$10\sqrt{5}\times 50\sqrt{2}=500\sqrt{10}$

$\therefore k=500$ **답** 500

07 해결단계

❶ 단계	$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$라 하고 a, b가 곡선 $y=nx-x^2$과 직선 $y=2^k$의 교점의 x좌표임을 파악한다.
❷ 단계	이차함수 $y=nx-x^2$의 그래프를 그린 후, a, b가 $0<b-a\le\frac{n}{2}$을 만족시키기 위한 n의 값의 범위를 k를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 부등식에 $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 부등식을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값을 각각 구한 후, 그 합을 구한다.

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$이 같은 자연수이므로

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (k는 자연수)라 하면

$na-a^2=nb-b^2=2^k$ (단, k는 자연수) ……㉠

이때 $f(x)=nx-x^2$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^k$ (k는 자연수)은 x좌표가 각각 a, b인 두 점에서 만난다.

㉠에서 $f(a)-f(b)=0$이므로

$(na-a^2)-(nb-b^2)=0$

$b^2-a^2-nb+na=0$

$(b-a)(b+a-n)=0$

이때 $b-a>0$이므로 $b+a=n$

$\therefore b=n-a,\ a=n-b$

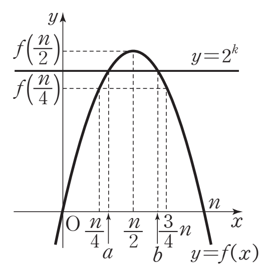
주어진 조건에서 $0<b-a\le\frac{n}{2}$이므로

$0<(n-a)-a\le\frac{n}{2},\ 0<b-(n-b)\le\frac{n}{2}$

$-n<-2a\le-\frac{n}{2},\ n<2b\le\frac{3}{2}n$

$\therefore \frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}<b\le\frac{3}{4}n$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^k$은 다음 그림과 같다.



즉, $f\left(\frac{n}{4}\right)\le 2^k<f\left(\frac{n}{2}\right)$이어야 하므로

$\frac{3}{16}n^2\le 2^k<\frac{n^2}{4}$

$\frac{3}{16}n^2\le 2^k$에서 $3n^2\le 2^{k+4}$이므로 $n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$

$2^k<\frac{n^2}{4}$에서 $n^2>2^{k+2}$

$\therefore 2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$

(i) $k=1$일 때,

$8<n^2\le\frac{32}{3}=10.6\times\times\times$ $\therefore n=3$

(ii) $k=2$일 때,

$16<n^2\le\frac{64}{3}=21.3\times\times\times$

이것을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$일 때,

$32<n^2\le\frac{128}{3}=42.6\times\times\times$ $\therefore n=6$

(iv) $k=4$일 때,

$64<n^2\le\frac{256}{3}=85.3\times\times\times$ $\therefore n=9$

(v) $k=5$일 때,

$128<n^2\le\frac{512}{3}=170.6\times\times\times$ $\therefore n=12,\ 13$

(vi) $k=6$일 때,

$256<n^2\le\frac{1024}{3}=341.3\times\times\times$　　$\therefore n=17,\ 18$

(vii) $k=7$일 때,

$512<n^2\le\frac{2048}{3}=682.6\times\times\times$이므로 이것을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(vii)에서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이므로 그 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

답 78

이것이 수능 p. 23

1 ①	2 13	3 45	4 127

1 해결단계

❶ 단계	로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 n의 값을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 모든 n의 값의 합을 구한다.

$$\log_n 4\times\log_2 9=\frac{\log 2^2}{\log n}\times\frac{\log 3^2}{\log 2}=\frac{2\log 2}{\log n}\times\frac{2\log 3}{\log 2}=\frac{4\log 3}{\log n}=4\log_n 3$$

이 값이 자연수가 되려면 $4\log_n 3=k$ (k는 자연수)이어야 하므로

$\log_n 3=\frac{k}{4}$, $n^{\frac{k}{4}}=3$　　$\therefore n=3^{\frac{4}{k}}$

이때 k, n은 자연수이므로

$k=1$일 때, $n=81$

$k=2$일 때, $n=9$

$k=4$일 때, $n=3$

따라서 모든 n의 값의 합은

$81+9+3=93$

답 ①

2 해결단계

❶ 단계	로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 정리한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 40 이하의 자연수 n의 개수를 구한다.

$$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\log_4 2n^2-\log_4\sqrt{n}=\log_4\frac{2n^2}{\sqrt{n}}=\log_4 2n^{\frac{3}{2}}$$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$\log_4 2n^{\frac{3}{2}}=k$ ($k\le40$인 자연수)이어야 하므로

$2n^{\frac{3}{2}}=4^k$, $4^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}=4^k$

$n^{\frac{3}{2}}=4^{k-\frac{1}{2}}$　　$\therefore n=4^{\frac{2k-1}{3}}=2^{\frac{4k-2}{3}}$

이때 $\frac{4k-2}{3}$가 자연수가 되어야 하므로

$k=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 38$

각 자연수 k의 값에 따라 자연수 n의 값이 하나씩 존재하므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 13이다.

답 13

3 해결단계

❶ 단계	두 집합 A, B의 자연수인 원소를 작은 값부터 차례대로 나열해본다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 집합 C를 원소나열법으로 나타내고, k의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 범위를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구한다.

집합 A의 자연수인 원소는 다음과 같다.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	$\cdots$
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

집합 B의 자연수인 원소는 다음과 같다.

b	3	9	27	81	$\cdots$
$\log_{\sqrt{3}} b$	2	4	6	8	$\cdots$

이때 $n(C)=3$이므로 $C=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.

즉, $8\notin C$이므로 자연수 k의 범위는

$36\le k<81$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$81-36=45$

답 45

4 해결단계

❶ 단계	집합 A_m의 정의를 이용하여 b가 될 수 있는 값을 a를 이용하여 나타낸 후, a가 2의 거듭제곱일 때 b의 값이 존재함을 파악한다.
❷ 단계	$a=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 집합 A_m을 구한 후, m이 2의 거듭제곱일 때, m의 값이 2배가 되면 $n(A_m)$의 값이 1씩 증가함을 파악한다.
❸ 단계	$n(A_m)=205$가 되도록 하는 m의 최댓값을 구한다.

집합 A_m에서 $\log_2 a+\log_4 b=\log_4 a^2b$가 100 이하의 자연수이므로

$\log_4 a^2b=\alpha$ ($1\le\alpha\le100$인 자연수)라 하면

$a^2b=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$

즉, $1\le a\le m$인 자연수 a에 대하여

$b=\frac{4^1}{a^2},\ \frac{4^2}{a^2},\ \frac{4^3}{a^2},\ \cdots,\ \frac{4^{100}}{a^2}$　　……㉠

이때 정수 k에 대하여 $b=2^k$ 꼴이므로 a가 2의 거듭제곱일 때 b가 존재한다.

(i) $a=1$일 때,

㉠에서 $b=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$

$m=1$이면 $a=1$뿐이므로 $A_1=\{4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}\}$

$\therefore n(A_1)=100$

(ii) $a=2$일 때,

㉠에서 $b=4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{99}$이므로

$ab=2\times4^0,\ 2\times4^1,\ 2\times4^2,\ \cdots,\ 2\times4^{99}$

$m=2$이면 $a=1,\ a=2$이므로

$A_2=\{4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100},$
$2\times4^0,\ 2\times4^1,\ 2\times4^2,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_2)=200$

(iii) $a=3$일 때,

a가 2의 거듭제곱이 아니므로 조건을 만족시키는 b는 존재하지 않는다.

즉, $m=3$일 때 $a=1,\ a=2,\ a=3$이고, $a=3$일 때 조건을 만족시키는 ab는 존재하지 않으므로 집합 A_3은 집합 A_2와 같다.

$\therefore n(A_3)=n(A_2)=200$

(iv) $a=4$일 때,

㉠에서 $b=4^{-1},\ 4^0,\ 4^1,\ \cdots,\ 4^{98}$이므로

$ab=4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{99}$

$m=4$이면 $a=1,\ a=2,\ a=3,\ a=4$이므로

$A_4=\{4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100},$
$2\times4^0,\ 2\times4^1,\ 2\times4^2,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_4)=201$

(v) $a=5,\ a=6,\ a=7$일 때,

a가 2의 거듭제곱이 아니므로 조건을 만족시키는 b는 존재하지 않는다.

즉, $a=5,\ a=6,\ a=7$일 때 조건을 만족시키는 ab는 존재하지 않으므로 세 집합 $A_5,\ A_6,\ A_7$은 집합 A_4와 같다.

$\therefore n(A_5)=n(A_6)=n(A_7)=n(A_4)=201$

(vi) $a=8$일 때,

㉠에서 $b=4^{-2},\ 4^{-1},\ 4^0,\ \cdots,\ 4^{97}$이므로

$ab=2\times4^{-1},\ 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{98}$

$m=8$이면 $a=1,\ a=2,\ a=3,\ \cdots,\ a=8$이므로

$A_8=\{4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100},$
$2\times4^{-1},\ 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ 2\times4^3,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_8)=202$

(i)~(vi)에서 a가 2의 거듭제곱인 경우에만 집합 A_m의 원소의 개수가 증가한다. 즉,

$n(A_2)=200,\ n(A_4)=201,\ n(A_8)=202,\ \cdots$

이므로 m이 2의 거듭제곱 꼴이면 집합 A_m에서 m이 2배 증가할 때마다 집합 A_m의 원소는 1개씩 증가한다.

또한, m이 2배로 증가하기 전까지의 집합 A_m의 원소의 개수는 모두 같다. 따라서

$n(A_{64})=n(A_{65})=n(A_{66})=\cdots=n(A_{127})=205,$

$n(A_{128})=206$

이므로 $n(A_m)=205$가 되도록 하는 자연수 m의 최댓값은 127이다.

답 127

03 지수함수

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 26~27

01 ③	02 $2\sqrt{10}$	03 ①	04 ③	05 ⑤
06 ④	07 13	08 ②	09 ④	10 ④
11 -1	12 ①	13 $a<1$	14 $a>\frac{1}{2}$	15 ④

01 ㄱ. 함수 $f(x)=5^x$은 실수 전체의 집합에서 일대일대응이므로 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. (참)

ㄴ. (밑)$=5>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다. 즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)=5^x$의 그래프는 아래로 볼록하므로 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (참)

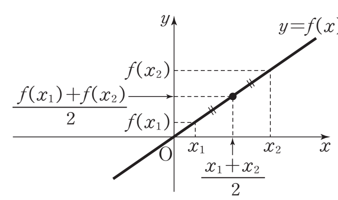
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양에 따른 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$와 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$의 관계는 다음과 같다.

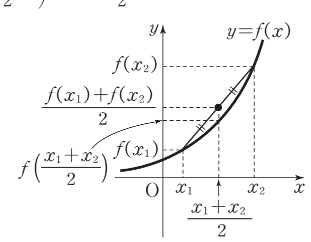
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양은 직선

$\Longleftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



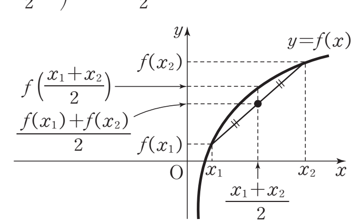
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양은 아래로 볼록

$\Longleftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양은 위로 볼록

$\Longleftrightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



02 $f(x)=a^x$이므로

$f(b)=4$에서 $a^b=4$

$f(c)=10$에서 $a^c=10$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^b\times a^c)^{\frac{1}{2}}=40^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

03 $A=\sqrt[n+4]{a^{n+3}}=a^{\frac{n+3}{n+4}}$, $B=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}}$,

$C=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$이므로

$\frac{n+3}{n+4}-\frac{n+2}{n+3}=\frac{(n+3)^2-(n+2)(n+4)}{(n+3)(n+4)}$

$=\frac{1}{(n+3)(n+4)}>0$

$\therefore \frac{n+3}{n+4}>\frac{n+2}{n+3}$ ……㉠

$\frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$

$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}>0$

$\therefore \frac{n+2}{n+3}>\frac{n+1}{n+2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{n+3}{n+4}>\frac{n+2}{n+3}>\frac{n+1}{n+2}$

이때 $0<(\text{밑})=a<1$이므로 $a^{\frac{n+3}{n+4}}<a^{\frac{n+2}{n+3}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}$

$\therefore A<B<C$ 답 ①

• 다른 풀이 1 •

$A=\sqrt[n+4]{a^{n+3}}=a^{\frac{n+3}{n+4}}$, $B=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}}$,

$C=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$

이때 $\frac{n+3}{n+4}=1-\frac{1}{n+4}$, $\frac{n+2}{n+3}=1-\frac{1}{n+3}$,

$\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$이고

$\frac{1}{n+4}<\frac{1}{n+3}<\frac{1}{n+2}$이므로

$-\frac{1}{n+4}>-\frac{1}{n+3}>-\frac{1}{n+2}$

$\therefore 1-\frac{1}{n+4}>1-\frac{1}{n+3}>1-\frac{1}{n+2}$

즉, $\frac{n+3}{n+4}>\frac{n+2}{n+3}>\frac{n+1}{n+2}$이고 $0<(\text{밑})=a<1$이므로

$a^{\frac{n+3}{n+4}}<a^{\frac{n+2}{n+3}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}$

$\therefore A<B<C$

• 다른 풀이 2 •

$n=1$일 때, $A=\sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}}$, $B=\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$, $C=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

이때 $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$이고, $0<(\text{밑})=a<1$이므로

$a^{\frac{4}{5}}<a^{\frac{3}{4}}<a^{\frac{2}{3}}$ $\therefore A<B<C$

04 ㉠과 ㉡은 밑이 1보다 작은 지수함수의 그래프이고,
㉢과 ㉣은 밑이 1보다 큰 지수함수의 그래프이다.

이때 $a>c>1$이므로 ㉢은 $y=a^x$의 그래프, ㉣은 $y=c^x$의 그래프이다.

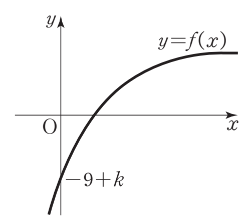
또한, $ab=1$, $cd=1$에서 $a=\frac{1}{b}$, $c=\frac{1}{d}$이므로

$\frac{1}{b}>\frac{1}{d}>1$ $\therefore 0<b<d<1$

즉, ㉡은 $y=b^x$의 그래프, ㉠은 $y=d^x$의 그래프이다.
따라서 $y=a^x$의 그래프는 ㉢, $y=b^x$의 그래프는 ㉡, $y=c^x$의 그래프는 ㉣, $y=d^x$의 그래프는 ㉠이므로 올바르게 짝지은 것은 ③이다. 답 ③

05 함수 $y=243^x=3^{5x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 함수 $-y=3^{-5x}$, 즉 $y=-3^{-5x}$의 그래프와 일치한다.

또한, 위의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{5}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수 $y-k=-3^{-5\left(x-\frac{2}{5}\right)}$, 즉 $y=-3^{2-5x}+k$의 그래프가 된다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 다음 그림과 같이 y절편이 0 이하이어야 한다.



즉, $f(0)=-9+k\le 0$이므로 $k\le 9$
따라서 조건을 만족시키는 k의 최댓값은 9이다. 답 ⑤

06 점 P의 x좌표를 p $(p>0)$라 하면 $3^{-p}=k\times 3^p$에서

$3^{2p}=\frac{1}{k}$, $2p=\log_3\frac{1}{k}$ $\therefore p=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{k}$

점 Q의 x좌표를 q $(a>0)$라 하면 $-4\times 3^q+8=k\times 3^q$에서

$(k+4)3^q=8$, $3^q=\frac{8}{k+4}$

$\therefore q=\log_3\frac{8}{k+4}$

이때 두 점 P, Q의 x좌표의 비가 $1:2$이므로

$p:q=1:2$

즉, $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{k}:\log_3\frac{8}{k+4}=1:2$

$\log_3\frac{8}{k+4}=\log_3\frac{1}{k}$

$\frac{8}{k+4}=\frac{1}{k}$, $k+4=8k$

$7k=4$ $\therefore 35k=20$ 답 ④

• 다른 풀이 •

두 점 P, Q의 x좌표의 비가 $1:2$이므로 점 P의 x좌표를 a $(a>0)$라 하면 점 Q의 x좌표는 $2a$이다.

점 P는 두 함수 $y=k\times3^x$, $y=3^{-x}$의 그래프의 교점이므로

$k\times3^a=3^{-a}$ $\quad\therefore 3^{2a}=\dfrac{1}{k}$ $\quad\cdots\cdots㉠$

또한, 점 Q는 두 함수 $y=k\times3^x$, $y=-4\times3^x+8$의 그래프의 교점이므로

$k\times3^{2a}=-4\times3^{2a}+8$

위의 식의 양변에 ㉠을 대입하면

$k\times\dfrac{1}{k}=-4\times\dfrac{1}{k}+8$, $1=-\dfrac{4}{k}+8$

$\dfrac{4}{k}=7$, $7k=4$

$\therefore 35k=20$

07

$y=2^{x^2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-3}$

$=2^{x^2}\times2^{-2x+3}$

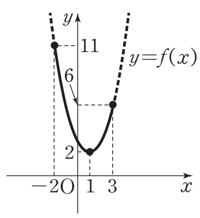
$=2^{x^2-2x+3}$

함수 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 $f(x)=x^2-2x+3$이라 하면

$f(x)=(x-1)^2+2$

$-2\le x\le3$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 11, $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.



이때 함수 $y=2^{f(x)}$에서 (밑)$=2>1$

이므로 $f(x)$가 최댓값을 가질 때 y도 최댓값을 갖고, $f(x)$가 최솟값을 가질 때 y도 최솟값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2^{11}, 최솟값은 2^2이므로 그 곱은

$2^{11}\times2^2=2^{13}=2^k$

$\therefore k=13$ **답** 13

08

직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점이 각각 P, Q이므로

$\mathrm{P}(a,\ 2^{-a+3}+4)$, $\mathrm{Q}(a,\ -2^{a-5}-3)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$

이때 $2^{-a+3}>0$, $2^{a-5}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$

$\ge7+2\sqrt{2^{-a+3}\times2^{a-5}}$ (단, 등호는 $a=4$일 때 성립)

$=7+2\sqrt{2^{-2}}$

$=8$

즉, 선분 PQ의 길이의 최솟값은 8이다.

따라서 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이므로 정사각형의 넓이의 최솟값은

$(4\sqrt{2})^2=32$ **답** ②

09

방정식 $(2x-1)^{x-3}=11^{x-3}$에서 지수가 같으므로 이 방정식이 성립하려면

(i) 밑이 같은 경우

$2x-1=11$에서 $2x=12$ $\quad\therefore x=6$

(ii) (지수)$=0$인 경우

주어진 방정식은 $(2x-1)^0=11^0=1$로 성립하므로

$x-3=0$에서 $x=3$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $6+3=9$ **답** ④

10

$3^{2x}-3^{x+1}=-1$에서

$(3^x)^2-3\times3^x=-1$

이때 $3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-3t=-1$

$\therefore t^2-3t+1=0$

$t>0$이므로 양변을 t로 나누면

$t-3+\dfrac{1}{t}=0$ $\quad\therefore t+t^{-1}=3$

위의 식의 양변을 제곱하면

$t^2+2+t^{-2}=9$

$\therefore t^2+t^{-2}=7$ $\quad\cdots\cdots㉠$

또한, ㉠의 양변을 제곱하면

$t^4+2+t^{-4}=49$

$\therefore t^4+t^{-4}=47$ $\quad\cdots\cdots㉡$

$\therefore \dfrac{3^{4x}+3^{-4x}+1}{3^{2x}+3^{-2x}+1}=\dfrac{t^4+t^{-4}+1}{t^2+t^{-2}+1}$

$=\dfrac{47+1}{7+1}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=\dfrac{48}{8}=6$ **답** ④

11

$4^x=2^{x+1}+k$에서 $(2^x)^2-2\times2^x-k=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-k=0$ $\quad\cdots\cdots㉠$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 판별식 $D>0$ (ii) (두 근의 합)>0 (iii) (두 근의 곱)>0

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1+k>0$ $\quad\therefore k>-1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$이므로 항상 성립한다.

(iii) (두 근의 곱)>0이므로

$-k>0$ $\quad\therefore k<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-1<k<0$

따라서 $p=-1$, $q=0$이므로 $p+q=-1$ **답** -1

12

부등식 $(2^x-32)\left(\dfrac{1}{3^x}-27\right)>0$이 성립하려면

$\begin{cases}2^x-32>0\\ \dfrac{1}{3^x}-27>0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}2^x-32<0\\ \dfrac{1}{3^x}-27<0\end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2^x-32>0 & \cdots\cdots㉠ \\ \dfrac{1}{3^x}-27>0 & \cdots\cdots㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2^x>32$이므로 $2^x>2^5$　　$\therefore x>5$

㉡에서 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>27$이므로 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$　　$\therefore x<-3$

㉠, ㉡을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같다.

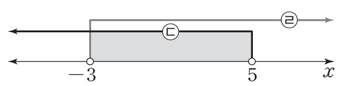
즉, ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 없다.

(ii) $\begin{cases} 2^x-32<0 & \cdots\cdots㉢ \\ \dfrac{1}{3^x}-27<0 & \cdots\cdots㉣ \end{cases}$

㉢에서 $2^x<32$이므로 $2^x<2^5$　　$\therefore x<5$

㉣에서 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<27$이므로 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$　　$\therefore x>-3$

㉢, ㉣을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같다.



즉, ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는
$-3<x<5$

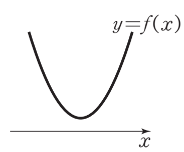
(i), (ii)에서 지수부등식 $(2^x-32)\left(\dfrac{1}{3^x}-27\right)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-3<x<5$이므로 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$의 7개이다.　　답 ①

13

x에 대한 이차부등식 $x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$f(x)=x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)$

라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2^a+1)^2+3(2^a-5)<0$에서

$(2^a)^2+5\times2^a-14<0$

이때 $2^a=t\ (t>0)$로 놓으면 $t^2+5t-14<0$

$(t+7)(t-2)<0$　　$\therefore -7<t<2$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<2$에서 $0<2^a<2^1$

(밑)$=2>1$이므로 $a<1$　　답 $a<1$

14

집합 A의 방정식 $2^{x-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$에서 $2^{x-2}=2^{-\frac{3}{2}}$

이때 밑이 2로 같으므로 $x-2=-\dfrac{3}{2}$에서

$x=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

한편, 집합 B의 부등식 $2^{x^2}<2^{ax}$에서 (밑)$=2>1$이므로

$x^2<ax$　　$\cdots\cdots㉠$

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $\dfrac{1}{2}\in B$이어야 한다.

즉, $x=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 부등식이 성립해야 하므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{1}{2}a$에서 $\dfrac{1}{2}a>\dfrac{1}{4}$　　$\therefore a>\dfrac{1}{2}$　　답 $a>\dfrac{1}{2}$

15

$n=C_dC_g10^{\frac{4}{5}(x-9)}$에

$C_g=2,\ C_d=\dfrac{1}{4},\ x=a,\ n=\dfrac{1}{200}$을 대입하면

$\dfrac{1}{200}=\dfrac{1}{4}\times2\times10^{\frac{4}{5}(a-9)}$

$10^{\frac{4}{5}(a-9)}=\dfrac{1}{100},\ 10^{\frac{4}{5}(a-9)}=10^{-2}$

즉, $\dfrac{4}{5}(a-9)=-2$이므로 $a-9=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=\dfrac{13}{2}$　　답 ④

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제**　　pp. 28~31

01 ③	02 $\frac{3}{2}$	03 ④	04 16	05 2
06 ⑤	07 8	08 ③	09 ②	10 310
11 ③	12 ③	13 -6	14 3	15 $\frac{27}{64}$
16 ④	17 100	18 35	19 ④	20 7
21 ②	22 6	23 19	24 ⑤	25 -3
26 ③	27 36일	28 ④		

01

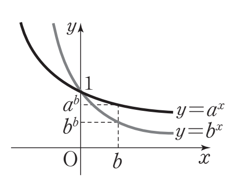
부등식 $\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^1<\left(\dfrac{1}{3}\right)^a<\left(\dfrac{1}{3}\right)^b<1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^0$에서

(밑)$=\dfrac{1}{3}<1$이므로 $0<b<a<1$

ㄱ. $0<$(밑)$=a<1$이므로 $y=a^x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, y의 값이 증가하면 x의 값은 감소한다.
따라서 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$a^{x_1}<a^{x_2}$이면 $x_1>x_2$이다. (참)

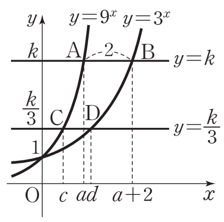
ㄴ. $a^x<b^x$에 $x=1$을 대입하면 $a<b$ (거짓)

ㄷ. $0<b<a<1$일 때 두 함수
$y=a^x,\ y=b^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $b^b<a^b$
또한, $0<$(밑)$=b<1$이고
$a>b$이므로
$b^a<b^b$　　$\therefore b^a<b^b<a^b$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.　　답 ③

02 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=2$이므로 점 A의 x좌표를 a라 하면 점 B의 x좌표는 $a+2$이고, 두 점 A, B의 y좌표는 같으므로



$9^a=3^{a+2}$

$3^{2a}=3^{a+2}$

밑이 3으로 같으므로

$2a=a+2$에서 $a=2$

$\therefore k=9^2=81$

또한, 직선 $y=\dfrac{k}{3}=\dfrac{81}{3}$, 즉 $y=27$과 두 곡선이 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 c, d라 하면

$9^c=27$, $3^d=27$이므로 $3^{2c}=3^3$, $3^d=3^3$

밑이 3으로 같으므로

$2c=3$에서 $c=\dfrac{3}{2}$, $d=3$

$\therefore \overline{CD}=d-c=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ **답** $\dfrac{3}{2}$

• 다른 풀이 •

두 점 A, B는 두 곡선 $y=9^x$, $y=3^x$과 직선 $y=k$가 만나는 두 점이므로

$9^x=k$에서 $x=\log_9 k$, $3^x=k$에서 $x=\log_3 k$

$\therefore A(\log_9 k,\ k)$, $B(\log_3 k,\ k)$

이때 두 점 A, B 사이의 거리가 2이므로

$\log_3 k-\log_9 k=2$, $\log_3 k-\log_{3^2} k=2$

$\log_3 k-\dfrac{1}{2}\log_3 k=2$, $\dfrac{1}{2}\log_3 k=2$

$\therefore \log_3 k=4$ ······㉠

두 점 C, D는 두 곡선 $y=9^x$, $y=3^x$과 직선 $y=\dfrac{k}{3}$가 만나는 두 점이므로

$9^x=\dfrac{k}{3}$에서 $x=\log_9\dfrac{k}{3}$, $3^x=\dfrac{k}{3}$에서 $x=\log_3\dfrac{k}{3}$

$\therefore C\left(\log_9\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)$, $D\left(\log_3\dfrac{k}{3},\ \dfrac{k}{3}\right)$

따라서 두 점 C, D 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\log_3\frac{k}{3}-\log_9\frac{k}{3}&=\log_3\frac{k}{3}-\log_{3^2}\frac{k}{3}\\&=\log_3\frac{k}{3}-\frac{1}{2}\log_3\frac{k}{3}\\&=\frac{1}{2}\log_3\frac{k}{3}=\frac{1}{2}(\log_3 k-1)\\&=\frac{1}{2}(4-1)\ (\because ㉠)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

03 $f(x)=a^x\ (a>1)$에 대하여

ㄱ. $2f(x)=15f(x+1)-f(x-1)$에서

$2a^x=15a^{x+1}-a^{x-1}$

$a^x>0$이므로 위의 식의 양변을 a^x으로 나누면

$2=15a-\dfrac{1}{a}$

$15a^2-2a-1=0\ (\because a>1)$

$(5a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{5}$ 또는 $a=\dfrac{1}{3}$

그런데 $a>1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=a^x>0$, $f(-x)=a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

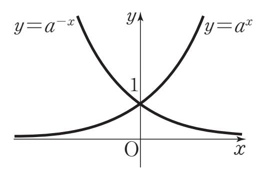
$=2$ (참)

ㄷ. $f(|x|)-\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

$=a^{|x|}-\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$

$=a^{|x|}-\dfrac{1}{2}a^x-\dfrac{1}{2}a^{-x}$ ······㉠

또한, $a>1$일 때 두 함수 $y=a^x$, $y=a^{-x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $x\ge 0$일 때,

$a^{|x|}=a^x$이고, 위의 그림에서 $x\ge 0$일 때 함수 $y=a^x$의 그래프가 함수 $y=a^{-x}$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $a^x\ge a^{-x}$

즉, ㉠에서

$a^x-\dfrac{1}{2}a^x-\dfrac{1}{2}a^{-x}=\dfrac{1}{2}a^x-\dfrac{1}{2}a^{-x}\ge 0$

$\therefore f(|x|)\ge\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

(ii) $x<0$일 때,

$a^{|x|}=a^{-x}$이고, 위의 그림에서 $x<0$일 때 함수 $y=a^{-x}$의 그래프가 함수 $y=a^x$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $a^{-x}>a^x$

즉, ㉠에서

$a^{-x}-\dfrac{1}{2}a^x-\dfrac{1}{2}a^{-x}=\dfrac{1}{2}a^{-x}-\dfrac{1}{2}a^x>0$

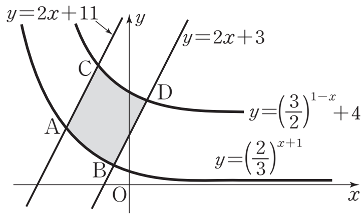
$\therefore f(|x|)>\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

(i), (ii)에서 $f(|x|)\ge\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

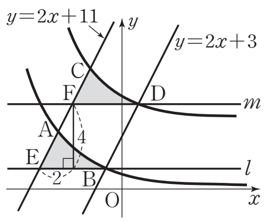
04 $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-x}+4=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}+4$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

두 곡선 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$, $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-x}+4$와 두 직선 $y=2x+3$, $y=2x+11$의 네 교점을 A, B, C, D라 하고, 이 두 곡선과 두 직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 두 점 A, B를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 각각 점 C, 점 D가 된다.

또한, 다음 그림과 같이 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선을 l, 점 D를 지나고 x축과 평행한 직선을 m이라 하고 두 직선 l, $y=2x+11$의 교점을 E, 두 직선 m과 $y=2x+11$의 교점을 F라 하자.



이때 점 E를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 F가 되므로 위의 그림에서 어두운 두 부분의 넓이는 같다.

즉, 두 곡선 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$, $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+4$와 두 직선 $y=2x+3$, $y=2x+11$로 둘러싸인 도형의 넓이는 평행사변형 FEBD의 넓이와 같다.

이때 $y=2x+11=2(x+4)+3$이므로

직선 $y=2x+11$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 직선 $y=2x+3$이 된다.

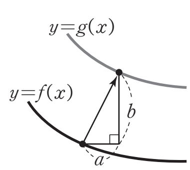
$\therefore \overline{\mathrm{EB}}=4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$4\times4=16$ **답** 16

BLACKLABEL 특강 참고

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 될 때, 기울기가 $\frac{b}{a}$인 직선과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점도 같은 평행이동 관계에 있다.



05

함수 $f(x)=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a^{x-m}$

이 그래프가 점 $(n, 8)$을 지나면

$8=a^{n-m}$ ······㉠

또한, $y=a^{x-m}$의 y절편은 a^{-m}이므로 $b_n=a^{-m}$

위의 식을 ㉠에 대입하면 $8=a^n b_n$

$\therefore b_n=8\times\left(\frac{1}{a}\right)^n$

$\therefore \log b_1+\log b_2+\log b_3+\log b_4+\log b_5$

$=\log(b_1\times b_2\times b_3\times b_4\times b_5)$

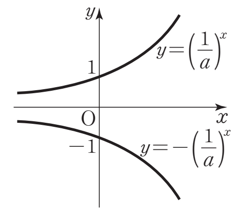
$=\log\left\{8^5\times\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2+3+4+5}\right\}$

$=\log\left\{2^{15}\times\left(\frac{1}{a}\right)^{15}\right\}=\log\left(\frac{2}{a}\right)^{15}=0$

즉, $\left(\frac{2}{a}\right)^{15}=1$이므로 $\frac{2}{a}=1$ $\quad\therefore a=2$ **답** 2

06

주어진 함수 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 함수 $-y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$, 즉 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프이므로 주어진 함수 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하므로

$\frac{1}{a}>1$ $\quad\therefore 0<a<1$ ($\because a>0$)

함수 $y=\left(-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}\right)^{x-1}-5$에서

$-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}=b$라 하면

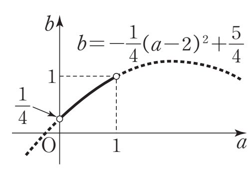
$y=b^{x-1}-5$ ······㉠

이때

$b=-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(a^2-4a+4)+\frac{5}{4}$

$=-\frac{1}{4}(a-2)^2+\frac{5}{4}$

$0<a<1$에서 함수 $b=-\frac{1}{4}(a-2)^2+\frac{5}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $\frac{1}{4}<b<1$이므로 함수 ㉠의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $y=b^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

또한, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=b^{-1}-5=\frac{1}{b}-5$

이때 $\frac{1}{4}<b<1$에서 $1<\frac{1}{b}<4$이므로

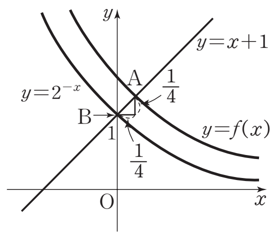
$-4<\frac{1}{b}-5<-1$

따라서 함수 ㉠의 그래프의 y절편은 -4보다 크고 -1보다 작은 값이므로 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

07

곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^{-x}$이고, 점 B$(0, 1)$은 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 곡선 $y=2^{-x}$은 직선 $y=x+1$과 점 B에서 만난다.

곡선 $y=2^{-x}$을 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선이 $y=f(x)$이므로 두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 점 B를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동하면 점 A가 되므로 $\mathrm{B}(0,\ 1)$, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$

$\therefore k=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{1}{8}}$

$\therefore \frac{1}{k^2}=8$ **답** 8

08

ㄱ. $a>0$일 때, $f(a)=3^a>1$

$b<0$일 때, $g(b)=\left(\frac{1}{2}\right)^b=2^{-b}>1$

이때 $a>0$, $b<0$인 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ g(b))$를 지나는 직선의 y절편은 항상 $f(a)$와 $g(b)$ 사이에 존재하므로 1보다 크다. (참)

ㄴ. 직선 l이 y축과 평행하므로 $a=b$이고, $a>0$이므로

$$\begin{aligned} f(a)+g(b)&=f(a)+g(a)\\ &=3^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a\\ &>2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a\\ &>2\sqrt{2^a\times\left(\frac{1}{2}\right)^a}\\ &=2 \end{aligned}$$

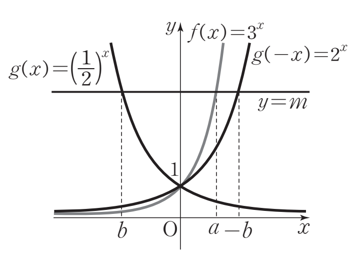
$2^a>0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다. 이때 $a>0$이므로 등호는 성립하지 않는다.

$\therefore \frac{f(a)+g(b)}{2}>1$ (참)

ㄷ. 직선 l이 x축과 평행하므로 직선 l의 방정식을 $y=m$ $(m\neq1)$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여

$\because a\neq b$

(i) $m>1$일 때,

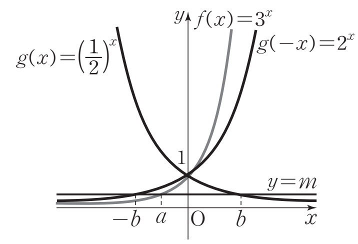


위의 그림에서 $b<0<a$이고,

$3^a=\left(\frac{1}{2}\right)^b=m$이므로 $3^a=2^{-b}$에서 $a<-b$

$\therefore a+b<0$

(ii) $m<1$일 때,



위의 그림에서 $a<0<b$이고,

$3^a=\left(\frac{1}{2}\right)^b=m$이므로

$3^{-a}=2^b$에서 $-a<b$

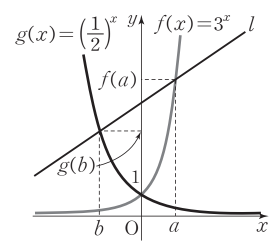
$\therefore a+b>0$

(i), (ii)에서 항상 $a+b<0$인 것은 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

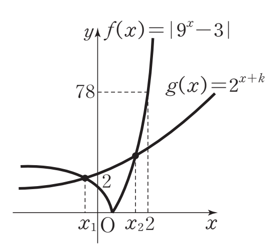
ㄱ. $g(b)<f(a)$라 하면 직선 l은 다음 그림과 같다.



이때 직선 l의 y절편은 $g(b)$보다 크고 $f(a)$보다 작은 값이다.
$f(a)<g(b)$일 때도 같은 방법으로 직선 l을 그려보면 y절편이 $f(a)$보다 크고 $g(b)$보다 작은 값이다.

09

$f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만난다.



$x_1<0$이므로 $f(0)<g(0)$

$\therefore 2<2^k$ ……㉠

또한, $0<x_2<2$이므로 $f(2)>g(2)$에서

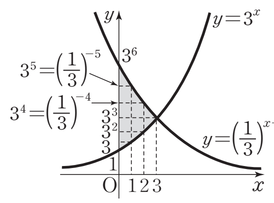
$78>2^{2+k}$, $2^k<\frac{78}{4}$

$\therefore 2^k<\frac{39}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2<2^k<\frac{39}{2}$

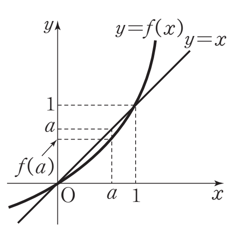
이때 $2^4=16<\frac{39}{2}<2^5=32$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k는 2, 3, 4이다.
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은
$2+3+4=9$ **답** ②

10 두 곡선 $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$과 y축으로 둘러싸인 영역 A를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림의 어두운 부분(경계선 제외)과 같다.

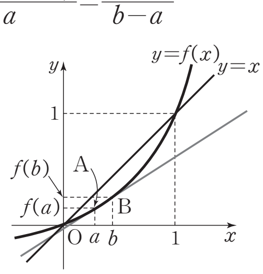


이때 두 곡선의 교점의 x좌표는 방정식 $3^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$, 즉 $3^x=3^{-x+6}$의 근과 같다.
밑이 3으로 같으므로
$x=-x+6$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$
따라서 두 곡선의 교점의 좌표는 $(3,\ 3^3)$이므로 자연수 a의 값으로 가능한 것은 1 또는 2이다.
(i) $a=1$일 때,
$3<b<3^5$이므로 b의 개수는
$3^5-3-1=243-3-1=239$
(ii) $a=2$일 때,
$3^2<b<3^4$이므로 b의 개수는
$3^4-3^2-1=81-9-1=71$
(i), (ii)에서 영역 A의 내부에 속하는 점 $(a,\ b)$의 개수는
$239+71=310$ **답** 310

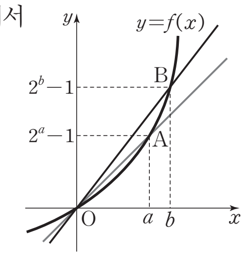
11 ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,\ 1)$에서 만나므로 오른쪽 그림에서 $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다. (참)



ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(0<a<b)$에 대하여 직선 AB의 기울기는
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$
$0<a<b<1$일 때 오른쪽 그림에서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로
$\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$

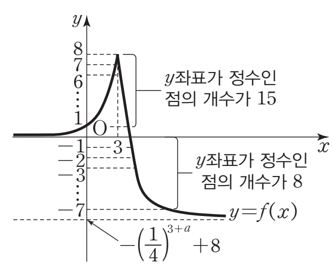


$\therefore b-a>2^b-2^a$ (거짓)
ㄷ. $0<a<b$일 때 오른쪽 그림에서 원점 O에 대하여
(직선 OA의 기울기)
<(직선 OB의 기울기)
이므로
$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$
$\therefore b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

12 $g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하면
곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고, 곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

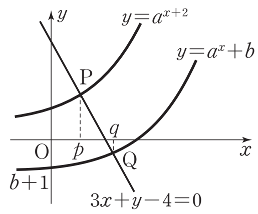


$g(3)=2^3=8$이므로 $x<3$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 7이다.
이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $x\geq 3$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 16이다.
또한, $h(3)=8$이므로 $x\geq 3$, $y>0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 8이다.
따라서 $y\leq 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이므로 $-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$의 값은 -8보다 크거나 같고 -7보다 작아야 한다.
즉, $-8\leq -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$에서
$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\leq 16$, $4^1<15<4^{-3-a}\leq 4^2$
(밑)$=4>1$이므로
$1<-3-a\leq 2$ $\quad\therefore -5\leq a<-4$
그러므로 구하는 정수 a의 값은 -5이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 필수 개념

지수함수 $y=a^{x-m}+n$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프
지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.
(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y>n\}$이다.
(2) 직선 $y=n$을 점근선으로 갖는다.
(3) a의 값에 관계없이 항상 점 $(m,\ 1+n)$을 지난다.

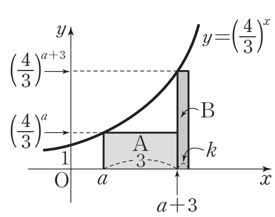
13 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=a^{x+2}$, $y=a^x+b$가 직선 $3x+y-4=0$과 만나는 점을 각각 P, Q, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면



P$(p,\ -3p+4)$,
Q$(q,\ -3q+4)$
즉, $a>1$이고 $p<q$이다. 두 곡선 $y=a^{x+2}$, $y=a^x+b$가 직선 $3x+y-4=0$과 한 점에서 만나므로
또한, 두 점 P, Q는 각각 두 곡선 $y=a^{x+2}$, $y=a^x+b$ 위의 점이므로
$a^{p+2}=-3p+4$ ……㉠
$a^q+b=-3q+4$ ……㉡
한편, 두 점 P, Q 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$으로 일정하므로
$\sqrt{(q-p)^2+\{(-3q+4)-(-3p+4)\}^2}=2\sqrt{10}$
$\sqrt{(q-p)^2+9(q-p)^2}=2\sqrt{10}$
$|q-p|\sqrt{10}=2\sqrt{10}$, $|q-p|=2$
$\therefore q-p=2\ (\because p<q)$
즉, $q=p+2$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면
$a^{p+2}+b=-3(p+2)+4$
$\therefore a^{p+2}+b=-3p-2$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$-3p+4+b=-3p-2$, $4+b=-2$
$\therefore b=-6$ 답 -6

14 점 A의 x좌표는 a이고, 점 A는 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로
A$(a,\ 2^a)$ $\therefore b=2^a$
점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같고, 점 B는 곡선 $y=4^x$ 위에 있으므로 점 B의 x좌표는
$4^x=2^a$에서 $2^{2x}=2^a$ $\therefore x=\dfrac{a}{2}$
$\therefore$ B$\left(\dfrac{a}{2},\ 2^a\right)$
점 C의 x좌표는 a이고, 점 C는 곡선 $y=4^x$ 위에 있으므로
C$(a,\ 4^a)$
이때 삼각형 ABC의 넓이가 42이므로
$\dfrac{1}{2}\times\left(a-\dfrac{a}{2}\right)\times(4^a-2^a)=42$, $\dfrac{a}{4}(4^a-2^a)=42$
$\therefore a(4^a-2^a)=168$
$=2^3\times3\times7$
$=3\times(4^3-2^3)$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 3이다. 답 3
자연수라는 조건 없이도 삼각형 ABC의 넓이가 42가 되도록 하는 실수 a의 값은 3뿐이다.

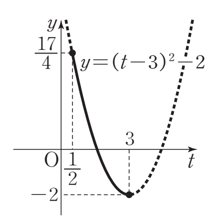
15 오른쪽 그림과 같이 x축 위에 있는 직사각형 A의 두 꼭짓점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(a+3,\ 0)$이라 하면 직사각형 A의 가로, 세로의 길이는 각각 3, $\left(\dfrac{4}{3}\right)^a$이고, 직사각형 B의 세로의 길이는 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{a+3}$이다.



이때 직사각형 B의 가로의 길이를 k라 하고, 두 직사각형 A, B의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하면
$S_A=3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^a$, $S_B=k\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{a+3}$
이므로 $3S_B=S_A$에서
$3\times k\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{a+3}=3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^a$
$k\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=1$
$\therefore k=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$
따라서 직사각형 B의 가로의 길이는 $\dfrac{27}{64}$이다. 답 $\dfrac{27}{64}$

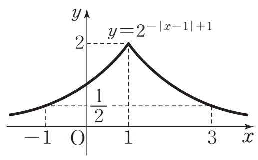
단계	채점 기준	배점
(가)	x축 위에 있는 직사각형 A의 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 a, $a+3$으로 놓고 직사각형 A의 넓이를 구한 경우	40%
(나)	직사각형 B의 가로의 길이를 k로 놓고 직사각형 B의 넓이를 구한 경우	30%
(다)	직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 3배임을 이용하여 직사각형 B의 가로의 길이를 구한 경우	30%

16 $y=9^x-2\times3^{x+1}+7$
$=(3^x)^2-6\times3^x+7$
에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 함수는
$y=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$
이때 $\log_3\dfrac{1}{2}\le x\le1$이므로
$\dfrac{1}{2}\le3^x\le3$ $\therefore \dfrac{1}{2}\le t\le3$
따라서 $\dfrac{1}{2}\le t\le3$에서 함수 $y=(t-3)^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=(t-3)^2-2$는 $t=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{17}{4}$을 갖고, $t=3$일 때 최솟값 -2를 갖는다.



즉, $M=\dfrac{17}{4}$, $m=-2$이므로
$M+m=\dfrac{17}{4}-2=\dfrac{9}{4}$ 답 ④

17 $y=2^{-|x-1|+1}$
$=\begin{cases}2^x & (x<1)\\ 2^{-x+2} & (x\ge1)\end{cases}$
이므로 함수 $y=2^{-|x-1|+1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $a<1$일 때,

$-1\le x\le a$에서

최댓값은 $x=a$일 때, $M=2^a$

최솟값은 $x=-1$일 때, $m=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$M+m=\frac{33}{16}$에서 $2^a+\frac{1}{2}=\frac{33}{16}$

$2^a=\frac{25}{16}$ $\quad\therefore a=\log_2 \frac{25}{16}$

(ii) $1\le a\le 3$일 때,

$-1\le x\le a$에서

최댓값은 $x=1$일 때, $M=2$

최솟값은 $x=-1$일 때, $m=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$M+m=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>3$일 때,

$-1\le x\le a$에서

최댓값은 $x=1$일 때, $M=2$

최솟값은 $x=a$일 때, $m=2^{-a+2}$

$M+m=\frac{33}{16}$에서 $2+2^{-a+2}=\frac{33}{16}$

$2^{-a+2}=\frac{1}{16}$, $2^{-a+2}=2^{-4}$

밑이 2로 같으므로

$-a+2=-4$ $\quad\therefore a=6$

(i), (ii), (iii)에서 $a=\log_2 \frac{25}{16}$ 또는 $a=6$이므로

$k=\log_2 \frac{25}{16}+6$

$=\log_2 \frac{25}{16}+\log_2 2^6=\log_2\left(\frac{25}{16}\times 2^6\right)$

$=\log_2 (25\times 4)=\log_2 100$

$\therefore 2^k=2^{\log_2 100}=100^{\log_2 2}=100$ **답** 100

18 색칠된 도형의 넓이 S는 두 삼각형 ABC, ABD의 넓이의 차와 같으므로

$S=(\triangle\text{ABC}$의 넓이$)-(\triangle\text{ABD}$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times$(두 삼각형의 높이의 차)

$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CD}}=\frac{1}{2}\times(b-a)\times\overline{\text{CD}}$ ……㉠

이때 S가 최댓값을 가지려면 선분 CD의 길이가 최대이어야 한다.

$\text{C}(t,\ 2-2^{t-1})$, $\text{D}\left(t,\ \frac{2^t+2^{-t}}{2}\right)$이므로

$\overline{\text{CD}}=2-2^{t-1}-\frac{2^t+2^{-t}}{2}$

$=2-2^{t-1}-2^{t-1}-2^{-t-1}$

$=2-2^t-2^{-t-1}$

$=2-(2^t+2^{-t-1})$

$2^t>0$, $2^{-t-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^t+2^{-t-1}\ge 2\sqrt{2^t\times 2^{-t-1}}$ $\left(\text{단, 등호는 } t=-\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\text{CD}}=2-(2^t+2^{-t-1})\le 2-\sqrt{2}$

즉, 선분 CD의 길이의 최댓값이 $2-\sqrt{2}$이므로 ㉠에서 구하는 넓이 S의 최댓값은

$\frac{1}{2}(b-a)(2-\sqrt{2})=k(b-a)$

따라서 $k=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$70(k-1)^2=70\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=70\times\frac{1}{2}=35$ **답** 35

19 해결단계

❶ 단계	$0<a<1$일 때, $-1\le x\le 2$에서의 두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값을 각각 구한 후, 이 값이 같도록 하는 a의 값을 구한다.
❷ 단계	$a>1$일 때, $-1\le x\le 2$에서의 두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값을 각각 구한 후, 이 값이 같도록 하는 a의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 a의 값을 이용하여 α, β의 값을 각각 구한 후, $\log_5 \frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구한다.

$f(x)=-2x^2+4x+3$, $g(x)=a^x$이므로

$f(g(x))=-2a^{2x}+4a^x+3$

$g(f(x))=a^{-2x^2+4x+3}$

(i) $0<a<1$일 때,

$f(g(x))=-2(a^x)^2+4a^x+3$에서 $a^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

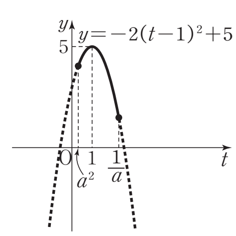
$-1\le x\le 2$에서 $a^2\le t\le\frac{1}{a}$이고 $y=f(g(x))$에서

$y=-2t^2+4t+3$

$=-2(t^2-2t+1)+5$

$=-2(t-1)^2+5$

이때 $0<a^2<1$, $\frac{1}{a}>1$이므로 함수 $y=-2(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(g(x))$의 최댓값은 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 5이다.



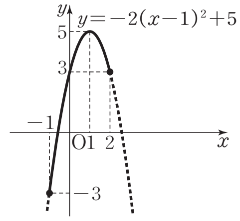
한편,

$g(f(x))=a^{-2x^2+4x+3}$

$=a^{-2(x-1)^2+5}$

에서 $0<a<1$이므로 지수인 $-2(x-1)^2+5$가 최솟값을 가질 때, 함수 $y=g(f(x))$가 최댓값을 갖는다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=-2(x-1)^2+5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은 $x=-1$일 때 -3이고, 함수 $y=g(f(x))$의 최댓값은 a^{-3}이다.



두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값이 같아야 하므로

$a^{-3}=5 \qquad \therefore a=5^{-\frac{1}{3}}$

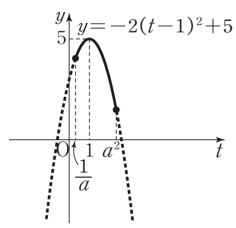
(ii) $a>1$일 때,

$f(g(x))=-2(a^x)^2+4a^x+3$에서 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$-1\le x\le 2$에서 $\frac{1}{a}\le t\le a^2$이고 $y=f(g(x))$에서

$$\begin{aligned} y&=-2t^2+4t+3\\ &=-2(t^2-2t+1)+5\\ &=-2(t-1)^2+5 \end{aligned}$$

이때 $0<\frac{1}{a}<1$, $a^2>1$이므로 함수 $y=-2(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(g(x))$의 최댓값은 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 5이다.

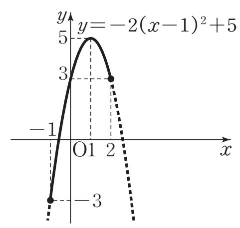


한편,

$$\begin{aligned} g(f(x))&=a^{-2x^2+4x+3}\\ &=a^{-2(x-1)^2+5} \end{aligned}$$

에서 $a>1$이므로 지수인 $-2(x-1)^2+5$가 최댓값을 가질 때, 함수 $y=g(f(x))$가 최댓값을 갖는다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=-2(x-1)^2+5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $x=1$일 때 5이고, 함수 $y=g(f(x))$의 최댓값은 a^5이다.



두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값이 같아야 하므로

$a^5=5 \qquad \therefore a=5^{\frac{1}{5}}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 $5^{-\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{5}}$이므로

$\alpha=5^{-\frac{1}{3}}$, $\beta=5^{\frac{1}{5}}$ ($\because \alpha<\beta$)

$$\begin{aligned} \therefore \log_5\frac{\beta}{\alpha}&=\log_5\frac{5^{\frac{1}{5}}}{5^{-\frac{1}{3}}}\\ &=\log_5 5^{\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{3}\right)}\\ &=\log_5 5^{\frac{8}{15}}=\frac{8}{15} \end{aligned}$$

답 ④

20 $3^x-3^{-x}=t$로 놓으면

$9^x+9^{-x}=t^2+2$이므로

$9^x+9^{-x}+2a(3^x-3^{-x})+5=0$에서

$t^2+2+2at+5=0$

$\therefore t^2+2at+7=0$

주어진 지수방정식이 실근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 $t^2+2at+7=0$도 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-7\ge 0$에서 $a^2\ge 7$

$\therefore a\ge\sqrt{7}$ ($\because a>0$)

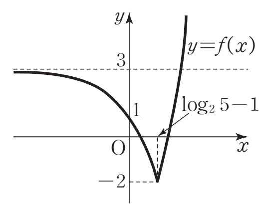
따라서 조건을 만족시키는 양수 a의 최솟값 m이 $\sqrt{7}$이므로

$m^2=7$

답 7

21 방정식 $|2^{x+1}-5|=k+2$의 실근은 $|2^{x+1}-5|-2=k$의 실근과 같으므로 구하는 실근의 개수는 함수 $y=|2^{x+1}-5|-2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=|2^{x+1}-5|-2$라 하고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 k의 값의 범위는

$-2<k<3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+0+1+2=2$

답 ②

22 $\begin{cases} 81^{2x}+81^{2y}=36 \\ 81^{x+y}=9\sqrt{3} \end{cases}$에서

$81^{2x}=X\ (X>0)$, $81^{2y}=Y\ (Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases} X+Y=36 \\ \sqrt{XY}=9\sqrt{3} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X+Y=36 \\ XY=243 \end{cases}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 X, Y는 이차방정식 $t^2-36t+243=0$의 두 근이므로

$(t-9)(t-27)=0$

$t=9$ 또는 $t=27$

$\therefore X=9$, $Y=27$ 또는 $X=27$, $Y=9$

(i) $X=9$, $Y=27$일 때,

$81^{2x}=9$, $81^{2y}=27$이므로

$(3^4)^{2x}=3^2$, $(3^4)^{2y}=3^3$

$3^{8x}=3^2$, $3^{8y}=3^3$

밑이 3으로 같으므로 $8x=2$, $8y=3$

$\therefore x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{8}$

(ii) $X=27$, $Y=9$일 때,

$81^{2x}=27$, $81^{2y}=9$이므로

$(3^4)^{2x}=3^3$, $(3^4)^{2y}=3^2$

$3^{8x}=3^3$, $3^{8y}=3^2$

밑이 3으로 같으므로 $8x=3$, $8y=2$

$\therefore x=\frac{3}{8}$, $y=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $A=xy=\frac{3}{32}$이므로

$64A=64\times\frac{3}{32}=6$ 답 6

23 $25^x-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$에서

$(5^x)^2-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

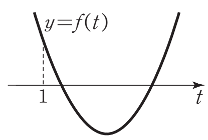
$t^2-2(a+4)t-3a^2+24a=0$ ……㉠

x가 양수일 때, $t>1$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되려면 t에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근은 모두 1보다 커야 한다.

즉,

$f(t)=t^2-2(a+4)t-3a^2+24a$

라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+4)^2-(-3a^2+24a)>0$에서

$a^2+8a+16+3a^2-24a>0$

$4a^2-16a+16>0$

$4(a-2)^2>0$ $\therefore a\neq2$인 실수

(ii) $f(1)>0$에서 $1-2(a+4)-3a^2+24a>0$

$3a^2-22a+7<0$, $(3a-1)(a-7)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<7$

(iii) 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축은 직선 $t=a+4$이므로 $a+4>1$이어야 한다.

$\therefore a>-3$

(i), (ii), (iii)에서

$\frac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$1+3+4+5+6=19$ 답 19

• 다른 풀이 •

$25^x-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$에서

$(5^x)^2-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a+4)t-3a(a-8)=0$

$(t-3a)(t+a-8)=0$

$\therefore t=3a$ 또는 $t=-a+8$

이때 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 양수이므로

$3a>1$에서 $a>\frac{1}{3}$ ……㉡

$-a+8>1$에서 $a<7$ ……㉢

또한, 두 근이 서로 달라야 하므로

$3a\neq-a+8$, $4a\neq8$ $\therefore a\neq2$ ……㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$\frac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+3+4+5+6=19$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

(1) 두 근이 모두 p보다 클 때,
$D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작을 때,
$D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있을 때,
$f(p)<0$

(4) 두 근이 p, $q\ (p<q)$ 사이에 있을 때,
$D\geq0$, $f(p)>0$, $f(q)>0$, $p<-\frac{b}{2a}<q$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}+2-k>0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^x\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+2-k>0$

$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2-k>0$

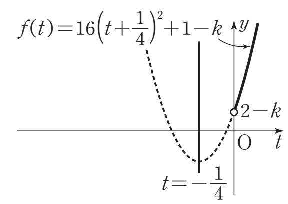
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$16t^2+8t+2-k>0$ ……㉠

$f(t)=16t^2+8t+2-k$

$\quad=16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+1-k$

라 하면 $t>0$일 때, 이차부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(0)=2-k\geq0$

$\therefore k\leq2$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 2이다. 답 ⑤

25 $A=\{x\,|\,x^{2(x-2)^2}\leq x^{5-x}\}$에서

(i) $x=1$일 때,

(좌변)$=1^{2(1-2)^2}=1^2=1$,

(우변)$=1^{5-1}=1^4=1$이므로 $1\in A$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x^{2(x-2)^2} \le x^{5-x}$에서 $2(x-2)^2 \ge 5-x$

$2x^2-8x+8 \ge 5-x$

$2x^2-7x+3 \ge 0$, $(2x-1)(x-3) \ge 0$

$\therefore x \le \frac{1}{2}$ 또는 $x \ge 3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x\le\frac{1}{2}$

(iii) $x>1$일 때,

$x^{2(x-2)^2} \le x^{5-x}$에서 $2(x-2)^2 \le 5-x$

$2x^2-7x+3 \le 0$, $(2x-1)(x-3) \le 0$

$\therefore \frac{1}{2} \le x \le 3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\le 3$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\le\frac{1}{2}$ 또는 $1\le x\le 3$이므로

$A=\left\{x \,\middle|\, 0<x\le\frac{1}{2} \text{ 또는 } 1\le x\le 3\right\}$

한편, $A\cap B=A$, 즉 $A\subset B$이어야 하므로 부등식

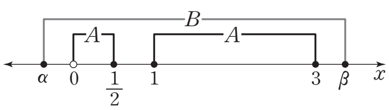
$x^2+ax+b\le 0$의 해의 집합은 집합 A를 포함해야 한다.

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면

$x^2+ax+b\le 0$에서 $(x-\alpha)(x-\beta)\le 0$

$\therefore \alpha\le x\le\beta$

즉, $B=\{x\,|\,\alpha\le x\le\beta\}$이고, $A\subset B$이어야 하므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore \alpha\le 0,\ \beta\ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

에서 $a=-\alpha-\beta$, $b=\alpha\beta$이므로

$a+b=\alpha\beta-\alpha-\beta=(\alpha-1)(\beta-1)-1$

㉠에서 $\alpha-1\le -1$, $\beta-1\ge 2$이므로

$(\alpha-1)(\beta-1)\le -2$

$(\alpha-1)(\beta-1)-1\le -3$

$\therefore a+b\le -3$

따라서 $a+b$의 최댓값은 -3이다. **답** -3

26

ㄱ. 조건 (나)에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에 $y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

$0=f(x)+f(-x)$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore f(-x)=-f(x)$ (거짓)

ㄷ. $f(3\times 2^x)+f(15\times 2^x-4^x-32)>0$에서

$f(3\times 2^x)>-f(15\times 2^x-4^x-32)$

ㄴ에서 $-f(x)=f(-x)$이므로

$f(3\times 2^x)>f(-15\times 2^x+4^x+32)$

$3\times 2^x>-15\times 2^x+4^x+32$ ($\because$ 조건 (가))

$(2^x)^2-18\times 2^x+32<0$

이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-18t+32<0$, $(t-2)(t-16)<0$

$\therefore 2<t<16$

$t=2^x$이므로 $2<2^x<16$

$2<2^x<2^4$

$\therefore 1<x<4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3이므로 그 합은 5이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

• 다른 풀이 •

ㄷ. $f(3\times 2^x)+f(15\times 2^x-4^x-32)>0$

$f(3\times 2^x+15\times 2^x-4^x-32)>0$ ($\because$ 조건 (나))

$f(18\times 2^x-4^x-32)>0$

ㄱ에서 $f(0)=0$이므로

$f(18\times 2^x-4^x-32)>f(0)$

$18\times 2^x-4^x-32>0$ ($\because$ 조건 (가))

$\therefore 4^x-18\times 2^x+32<0$

27

$P(9)=m\times\left(\frac{1}{3}\right)^{9k}=\frac{1}{2}m$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{9k}=\frac{1}{2}$ ($\because m>0$)

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또한, n일 후에 잔류 농약의 양이 처음에 살포한 농약의 양의 $\frac{1}{16}$ 이하가 된다고 하면

$P(n)=m\times\left(\frac{1}{3}\right)^{nk}\le\frac{1}{16}m$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{nk}\le\frac{1}{16}$ ($\because m>0$) $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}}\right\}^{n}\le\frac{1}{16}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{9}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

이때 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로

$\frac{n}{9}\ge 4$ $\quad\therefore n\ge 36$

따라서 최소한 36일이 지나야 한다. **답** 36일

28 $P=\dfrac{70-65}{10}\times 1.04^{10}$에서

$P=\dfrac{1}{2}\times 1.04^{10}$ ······㉠

$4P=\dfrac{75-65}{10}\times 1.04^{x}$에서

$4P=1.04^{x}$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4\times\dfrac{1}{2}\times 1.04^{10}=1.04^{x}$

$1.04^{x-10}=2$

이때 $1.04^{18}=2$이므로

$1.04^{x-10}=1.04^{18}$

밑이 1.04로 같으므로

$x-10=18$ $\therefore x=28$

답 ④

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 32

01 17	02 $k<6$	03 ②	04 120	05 1
06 8	07 39			

01 해결단계

❶ 단계	$3^x=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위한 조건을 확인한다.
❸ 단계	a의 값으로 가능한 각 자연수에 대하여 가능한 b의 값을 각각 구한 후, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

$3^{2x}\geq 2(a-2)3^x-b-5$, 즉 $(3^x)^2-2(a-2)3^x+b+5\geq 0$

에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a-2)t+b+5\geq 0$

$f(t)=t^2-2(a-2)t+b+5$라 하면 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는 이차부등식 $f(t)\geq 0$이 $t>0$인 모든 t에 대하여 항상 성립해야 한다.

$f(t)=t^2-2(a-2)t+b+5$

$=\{t-(a-2)\}^2-(a-2)^2+b+5$ ······㉠

(i) $a=1$, 2일 때,

㉠에서 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 꼭짓점의 t좌표가 0 또는 음수이므로 $t>0$에서 $f(t)\geq 0$이려면

$f(0)\geq 0$이어야 한다.

즉, $b+5\geq 0$에서 $b\geq -5$

따라서

$a=1$일 때, $b=2$, 3, 4, 5

$a=2$일 때, $b=1$, 3, 4, 5

이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 8이다.

(ii) $a=3$, 4, 5일 때,

㉠에서 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 꼭짓점의 t좌표가 양수이므로 $t>0$에서 $f(t)\geq 0$이려면

(꼭짓점의 y좌표)≥ 0이어야 한다.

즉, $-(a-2)^2+b+5\geq 0$에서

$b\geq (a-2)^2-5$

따라서

$a=3$일 때, $b\geq -4$이므로 $b=1$, 2, 4, 5

$a=4$일 때, $b\geq -1$이므로 $b=1$, 2, 3, 5

$a=5$일 때, $b\geq 4$이므로 $b=4$

이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 9이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$8+9=17$

답 17

02 해결단계

❶ 단계	$2^x+2^{-x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 만든다.
❷ 단계	t의 값의 범위와 관련하여 t에 대한 이차방정식이 실근을 갖지 않거나 두 근이 모두 2보다 작도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$4^x+4^{-x}-k(2^x+2^{-x})+11=0$에서

$(2^x+2^{-x})^2-2-k(2^x+2^{-x})+11=0$

$(2^x+2^{-x})^2-k(2^x+2^{-x})+9=0$

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$=2$

$\therefore t\geq 2$

따라서 주어진 방정식은

$t^2-kt+9=0$ (단, $t\geq 2$) ······㉠

주어진 방정식의 근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않거나 두 근이 모두 2보다 작아야 한다.

(i) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

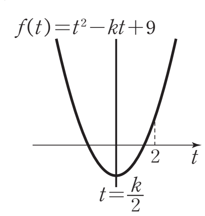
㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36<0$에서 $(k+6)(k-6)<0$

$\therefore -6<k<6$

(ii) ㉠의 두 근이 모두 2보다 작은 경우

$f(t)=t^2-kt+9$라 할 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



① ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36\geq 0$에서

$(k+6)(k-6)\geq 0$

$\therefore k\leq -6$ 또는 $k\geq 6$

② $f(2)=13-2k>0$에서

$k<\dfrac{13}{2}$

③ 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축은 직선 $t=\dfrac{k}{2}$이므로 $\dfrac{k}{2}<2$ $\therefore k<4$

①, ②, ③에서 $k\leq -6$

(i), (ii)에서 $k<6$

답 $k<6$

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

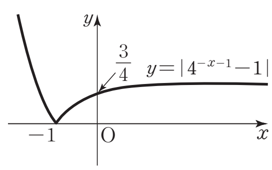
이 문제는 지수함수, 산술평균과 기하평균의 관계, 이차방정식의 근의 분리 등 여러 가지 개념이 혼용되어 있는 문제이다. 특히 산술평균과 기하평균의 관계, 이차방정식의 근의 분리는 예전에 배운 개념으로, 잊어버리지 않게 종종 문제를 풀면서 기억을 해두는 것이 중요하다. 이 문제의 경우 3^x을 t로 치환하여 식을 정리하면 사차방정식이 나와 문제를 접근하기가 더 까다로워지므로 3^x+3^{-x}을 t로 치환하여 이차방정식을 만들고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $t\ge2$임을 알고 이용해야 한다. 그런 다음 이차방정식의 근의 분리를 사용하여 문제를 해결하면 되는데, 이는 여러 단원에서 종종 나오는 개념으로 이번 문제를 통해 다시 한번 공부를 하는 것이 좋다.

03 해결단계

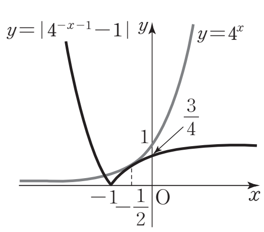
❶ 단계	주어진 곡선의 방정식에 $x=-1$, $y=0$을 대입하여 등식이 성립하는지 확인하고 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	$a=4$일 때 두 곡선을 좌표평면 위에 나타내어 교점의 개수를 구한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	$a>4$일 때의 두 곡선을 좌표평면 위에 나타내어 교점의 개수를 확인한 후, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $y=|a^{-x-1}-1|$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면
$|a^{1-1}-1|=0$ (참)

ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 방정식은
$y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$
이때 $y=|4^{-x-1}-1|$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

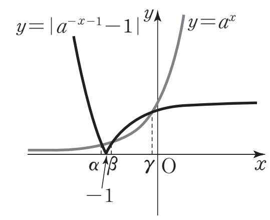


$x<-1$에서 두 곡선 $y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$은 한 점에서 만난다.
또한, $x\ge-1$일 때, $4^x=-4^{-x-1}+1$에서
$4^{2x+1}-4^{x+1}+1=0$, $4\times(4^x)^2-4\times4^x+1=0$
$4^x=X$ $(X>0)$로 놓으면
$4X^2-4X+1=0$
$(2X-1)^2=0$ $\quad\therefore X=\frac{1}{2}$
$4^x=\frac{1}{2}$이므로 $2^{2x}=2^{-1}$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$
즉, 다음 그림과 같이 $x\ge-1$에서 두 곡선은 $x=-\frac{1}{2}$인 점에서 접한다.



따라서 $a=4$일 때, 즉 두 곡선 $y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$의 교점의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $a>4$이면 $x<-1$에서 두 곡선 $y=a^x$, $y=|a^{-x-1}-1|$은 한 점에서 만나므로 이 두 곡선의 교점의 x좌표를 α라 하면
$\alpha<-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$x\ge-1$일 때, $a^x=-a^{-x-1}+1$에서
$a^{2x+1}-a^{x+1}+1=0$, $a\times(a^x)^2-a\times a^x+1=0$
$a^x=Y$ $(Y>0)$로 놓으면
$aY^2-aY+1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4a=a(a-4)$
이때 $a>4$이면 $D>0$이므로 두 곡선은 서로 다른 두 점에서 만난다.
즉, 두 곡선 $y=a^x$, $y=|a^{-x-1}-1|$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$x\ge-1$에서의 두 교점의 x좌표를 각각 β, γ $(\beta<\gamma)$라 하면 ㉡의 두 근은 a^β, a^γ이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a^\beta\times a^\gamma=\frac{1}{a}$, $a^{\beta+\gamma}=a^{-1}$
$\therefore \beta+\gamma=-1$ ($\because$ $a>4$)
$\therefore \alpha+\beta+\gamma<-2$ ($\because$ ㉠)
따라서 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 작다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

04 해결단계

❶ 단계	$0<a<1$일 때, 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	$a>1$일 때, 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 a의 값의 범위를 이용하여 각각 p, q를 구한 후, $20pq$의 값을 구한다.

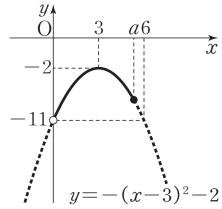
$f(x)=a^{-x^2+6x-11}$
$=a^{-(x^2-6x+9)-2}$
$=a^{-(x-3)^2-2}$
에서 $g(x)=-(x-3)^2-2$라 하자.

(i) $0<a<1$일 때,
함수 $f(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $f(x)$의 값이 감소하므로 $0<x\le a$에서 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면 함수 $y=g(x)$가 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않아야 한다.
그런데 $0<x\le a$에서 함수 $y=g(x)$는 $x=a$에서 항상 최댓값을 갖고 최솟값은 갖지 않으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>1$일 때,
함수 $f(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $0<x\le a$에서 함수 $y=f(x)$가 최

댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면 함수 $y=g(x)$ 도 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않아야 한다.

이때 함수 $g(x)=-(x-3)^2-2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $0<x\le a$에서 함수 $y=g(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면



$0<a<6$ $\quad\therefore 1<a<6$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위가 $1<a<6$이므로 $p=1,\ q=6$

$\therefore 20pq=20\times1\times6=120$ **답** 120

• 다른 풀이 •

$f(x)=a^{-x^2+6x-11}$에서

$g(x)=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$

라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, $x\le3$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고,

$x>3$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(i) $0<a<1$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(a)$이므로

$f(a)\le f(x)<f(0)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최솟값}}_{f(a)}$을 갖고, 최댓값을 갖지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$f(x)=1$이므로 최댓값과 최솟값 모두 1이다.

(iii) $1<a<3$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(a)$이므로

$f(0)<f(x)\le f(a)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최댓값}}_{f(a)}$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.

(iv) $3\le a<6$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(3)$이므로

$f(0)<f(x)\le f(3)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최댓값}}_{f(3)}$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.

(v) $a\ge6$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(a)\le g(x)\le g(3)$이므로

$f(a)\le f(x)\le f(3)$

즉, $f(x)$는 $\overbrace{\text{최댓값}}^{f(3)}$과 $\underbrace{\text{최솟값}}_{f(a)}$을 모두 갖는다.

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위가 $1<a<6$이므로 $p=1,\ q=6$

$\therefore 20pq=20\times1\times6=120$

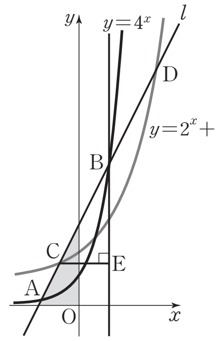
05 해결단계

❶ 단계	빗변을 $\overline{BC}$로 하고, 나머지 두 변이 x축, y축과 평행한 직각삼각형을 만든 후, $\overline{BC}=\sqrt{5}$임을 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구한다.
❷ 단계	두 점 B, C의 좌표를 이용하여 ❶단계에서 만든 직각삼각형의 나머지 두 변의 길이에 대한 식을 세운다.
❸ 단계	❷단계에서 세운 식을 연립하여 두 점 B, C의 좌표와 직선 l의 방정식을 구한 후, 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x+1$과 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 점 C에서 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 E라 하면 직선 l의 기울기가 2이므로

$\overline{CE}=k\ (k>0)$라 하면 $\overline{BE}=2k$이다.



직각삼각형 BCE에서 $\overline{BC}=\sqrt{5}$이므로 $(\sqrt{5})^2=k^2+(2k)^2$

$5k^2=5,\ k^2=1$ $\quad\therefore k=1\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{CE}=1,\ \overline{BE}=2$

또한, $B(b,\ 4^b)$, $C(c,\ 2^c+1)$에서

$\overline{CE}=b-c,\ \overline{BE}=4^b-(2^c+1)$이므로

$b-c=1,\ 4^b-2^c-1=2$

$b-c=1$에서 $c=b-1$

위의 식을 $4^b-2^c-1=2$, 즉 $4^b-2^c-3=0$에 대입하면

$4^b-2^{b-1}-3=0,\ (2^b)^2-\frac{1}{2}\times2^b-3=0$

$2^b=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-\frac{1}{2}t-3=0,\ 2t^2-t-6=0$

$(t-2)(2t+3)=0$ $\quad\therefore t=2\ (\because t>0)$

$2^b=2$이므로 $b=1$

$\therefore c=b-1=0$

$\therefore B(1,\ 4),\ C(0,\ 2)$

한편, 직선 l의 방정식을 $y=2x+n$이라 하면 직선 l은 점 $B(1,\ 4)$와 점 $C(0,\ 2)$를 지나므로 $n=2$

$\therefore l: y=2x+2$

따라서 직선 l의 x절편은 -1, y절편은 2이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times2=1$ **답** 1

06 해결단계

❶ 단계	두 점 P, S가 곡선 $y=a^x$ 위에 있음을 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	두 점 Q, R가 곡선 $y=b^x$ 위에 있음을 이용하여 식을 세운다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 세운 식과 $df=eg=16$을 이용하여 ab와 c의 값을 구한 후, abc의 값을 구한다.

두 점 $P(c,\ e)$, $S(f,\ g)$가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^c=e,\ a^f=g$

두 점 $Q(c,\ g)$, $R(d,\ e)$가 곡선 $y=b^x$ 위에 있으므로

$b^c=g,\ b^d=e$

$\therefore e=a^c=b^d,\ g=a^f=b^c$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $a^c=b^d$에서 $a^{cf}=b^{df}$, $a^f=b^c$에서 $a^{cf}=b^{c^2}$이므로

$b^{df}=b^{c^2}$ $\quad\therefore df=c^2\ (\because b>1)$

이때 $df=16$이므로

$c^2=16$ $\quad\therefore c=4\ (\because c>0)$

$c=4$를 ㉠에 대입하면

$e=a^4,\ g=b^4$이므로 $eg=a^4b^4$

이때 $eg=16$이므로

$16=a^4b^4$, $(ab)^4=2^4$

$\therefore ab=2$ ($\because 1<a<b$)

$\therefore abc=2\times4=8$ **답** 8

07 해결단계

❶ 단계	조건 ㈏를 이용하여 $t\geq1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같아야 함을 파악한다.
❷ 단계	$a\geq b$일 때, 두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프를 이용하여 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.
❸ 단계	$a<b$일 때, 두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프를 이용하여 $\overline{PQ}$의 최솟값이 항상 10보다 작거나 같음을 파악한 후, $2\leq a<b\leq10$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.
❹ 단계	**❷, ❸단계**에서 구한 순서쌍 (a, b)의 개수를 합하여 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

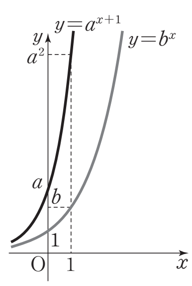
두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 직선 $x=t$ $(t\geq1)$와 만나는 점이 각각 P, Q이므로

$P(t, a^{t+1})$, $Q(t, b^t)$ $\therefore \overline{PQ}=|a^{t+1}-b^t|$

조건 ㈏에서 $t\geq1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}\leq10$이어야 하므로 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같아야 한다. *

(i) $a\geq b$일 때,

두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 오른쪽 그림과 같으므로 $x\geq1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $t=1$일 때이다.



($\overline{PQ}$의 최솟값)

$=|a^2-b|$

$=a^2-b$ ($\because a^2>b$)

이므로 $a^2-b\leq10$

$\therefore a^2-10\leq b\leq a$

$a=2$일 때, $-6\leq b\leq2$이고 조건 ㈎에서 $2\leq b\leq10$이므로 $b=2$

$a=3$일 때, $-1\leq b\leq3$이고 조건 ㈎에서 $2\leq b\leq10$이므로 $b=2, 3$

$a\geq4$이면 $a^2-b\geq a^2-a\geq12$이므로 부등식을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

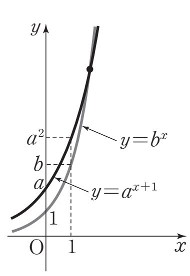
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$(2, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$의 3이다.

(ii) $a<b$일 때,

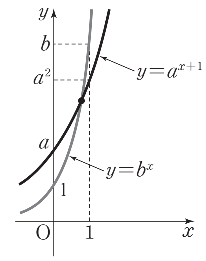
두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$은 $x>0$에서 반드시 한 점에서 만나므로 교점의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

① 교점의 x좌표가 $x\geq1$일 때, 즉 $a^2\geq b$일 때,



두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 위의 그림과 같으므로 $x\geq1$에서 ($\overline{PQ}$의 최솟값)$=0$이 되어 $\overline{PQ}\leq10$을 만족시키는 t가 반드시 존재한다.

② 교점의 x좌표가 $x<1$일 때, 즉 $a^2<b$일 때,



두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 위의 그림과 같으므로 $x\geq1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $t=1$일 때이다.

($\overline{PQ}$의 최솟값)$=|a^2-b|$

$=b-a^2$ ($\because b>a^2$)

이때 조건 ㈎에서 $2\leq a\leq10$, $2\leq b\leq10$이므로 $b-a^2\leq6$

즉, $\overline{PQ}\leq10$을 만족시키는 t가 반드시 존재한다.

①, ②에서 $2\leq a<b\leq10$을 만족시키는 모든 자연수 a, b에 대하여 $\overline{PQ}\leq10$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는

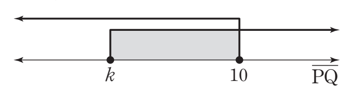
${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3+36=39$ **답** 39

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$t\geq1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값을 k $(k\geq0)$라 하자. 이때 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}\leq10$이어야 하므로 다음 그림과 같이 $k\leq\overline{PQ}$, $\overline{PQ}\geq10$을 동시에 만족시키는 $\overline{PQ}$의 값이 존재해야 한다.



즉, $k\leq10$이어야 한다.

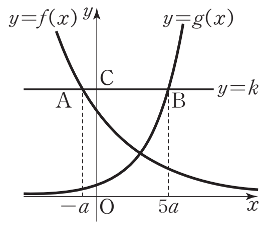
이것이 수능 p. 33

1 16 2 18 3 ⑤

1 해결단계

❶ 단계	점 A의 x좌표를 $-a$ $(a>0)$라 하고 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:5$임을 이용하여 점 B의 x좌표를 나타낸다.
❷ 단계	두 점 A, B가 직선 $y=k$ 위에 있음을 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 a의 값을 이용하여 k의 값을 구한 후, k^3의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 점 A의 x좌표를 $-a$ $(a>0)$라 하면
$\overline{AC}:\overline{CB}=1:5$이므로 점 B의 x좌표는 $5a$이다.



이때 $f(-a)=g(5a)$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-a-1}=4^{5a-1}$에서 $2^{a+1}=2^{10a-2}$

밑이 2로 같으므로

$a+1=10a-2$, $9a=3$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

점 B의 좌표 $\left(\frac{5}{3}, k\right)$를 $y=g(x)$, 즉 $y=4^{x-1}$에 대입하면

$k=4^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k^3=\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3=4^2=16$ 답 16

2 해결단계

❶ 단계	사다리꼴 ABCD의 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표를 각각 구한다.
❷ 단계	두 변 AB, CD의 길이를 n을 사용하여 나타낸다.
❸ 단계	사다리꼴 ABCD의 넓이가 18 이하임을 이용하여 조건을 만족시키는 n의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$A(1, n)$, $B(1, 2)$, $C(2, n^2)$, $D(2, 4)$이므로
$\overline{AB}=n-2$, $\overline{CD}=n^2-4$
사다리꼴 ABDC의 넓이는 18 이하이므로

$\frac{1}{2}\times(n-2+n^2-4)\times1\le18$

$\frac{1}{2}(n^2+n-6)\le18$

$n^2+n-6\le36$, $n^2+n-42\le0$
$(n+7)(n-6)\le0$ $\quad\therefore -7\le n\le6$
따라서 3 이상의 자연수 n의 값은 3, 4, 5, 6이므로
조건을 만족시키는 자연수 n의 값의 합은
$3+4+5+6=18$ 답 18

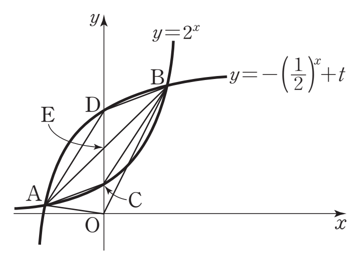
3 해결단계

❶ 단계	두 점 C, D의 좌표를 구한 후, $\overline{CD}$의 길이를 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하고 근과 계수의 관계를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄴ과 $\overline{AD}=\overline{CB}$임을 이용하여 □ACBD가 평행사변형임을 알고, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면

α, β는 방정식 $2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$, 즉

$(2^x)^2-t\times2^x+1=0$의 두 근이다.
$2^x=X$ $(X>0)$로 놓으면 $X^2-tX+1=0$의 두 근은
2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$2^\alpha+2^\beta=t$에서 $2^\alpha=t-2^\beta$ $\quad\cdots\cdots$㉠
$2^\alpha\times2^\beta=1$에서 $2^{\alpha+\beta}=1$이므로 $\alpha+\beta=0$
$\therefore \alpha=-\beta$ $\quad\cdots\cdots$㉡
이때 네 점 $A(\alpha, 2^\alpha)$, $B(\beta, 2^\beta)$, $C(0, 1)$, $D(0, t-1)$이므로
ㄱ. $\overline{CD}=t-2$ (참)
ㄴ. $\overline{AC}=\sqrt{(-\alpha)^2+(1-2^\alpha)^2}$
$=\sqrt{\beta^2+(2^\beta-t+1)^2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=\overline{DB}$ (참)
ㄷ. $\overline{AD}=\sqrt{\alpha^2+(2^\alpha-t+1)^2}$
$=\sqrt{(-\beta)^2+(-2^\beta+1)^2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=\overline{CB}$
ㄴ에서 $\overline{AC}=\overline{DB}$이고, $\overline{AD}=\overline{CB}$이므로
□ACBD는 평행사변형이다.



위의 그림과 같이 □ACBD의 두 대각선의 교점을 E라 하면 $\overline{CE}=\overline{DE}$이므로

점 E의 좌표는 $\left(0, \frac{t}{2}\right)$이다. ← 두 곡선은 점 $E\left(0, \frac{t}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

$\triangle ABD=\triangle AED+\triangle BDE$

$=\frac{1}{2}\times(-\alpha)\times\left(t-1-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\beta\times\left(t-1-\frac{t}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{t-2}{2}\times(-\alpha+\beta)$

$=\frac{(t-2)(-\alpha+\beta)}{4}$

$=\frac{(t-2)\beta}{2}$ ($\because$ ㉡)

$\triangle AOB=\triangle OEA+\triangle OBE$

$=\frac{1}{2}\times(-\alpha)\times\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\times\beta\times\frac{t}{2}$

$=\frac{t(-\alpha+\beta)}{4}$

$=\frac{t\beta}{2}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore \frac{\triangle ABD}{\triangle AOB}=\frac{\frac{\beta(t-2)}{2}}{\frac{t\beta}{2}}=\frac{t-2}{t}$

즉, 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의

$\frac{t-2}{t}$배이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

04 로그함수

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 35~36

01 ⑤	02 -1	03 ④	04 ⑤	05 -2
06 -5	07 ⑤	08 1	09 ③	10 ③
11 23	12 ④	13 16	14 ④	15 ⑤
16 ③				

01 $f(x)=\log_5 x$이므로

ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5 \frac{a}{5}\right)^2$

$=(\log_5 a-1)^2$

$\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2=\left(\log_5 \frac{5}{a}\right)^2$

$=(1-\log_5 a)^2$

$\therefore \left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$ (참)

ㄴ. $f(a+1)-f(a)=\log_5 (a+1)-\log_5 a$

$=\log_5 \frac{a+1}{a}$

$=\log_5 \left(1+\frac{1}{a}\right)$

$f(a+2)-f(a+1)=\log_5 (a+2)-\log_5 (a+1)$

$=\log_5 \frac{a+2}{a+1}$

$=\log_5 \left(1+\frac{1}{a+1}\right)$

이때 $a>0$이므로 $1+\frac{1}{a}>1+\frac{1}{a+1}$이고,

(밑)$=5>1$이므로

$\log_5 \left(1+\frac{1}{a}\right)>\log_5 \left(1+\frac{1}{a+1}\right)$

$\therefore f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$ (참)

ㄷ. (밑)$=5>1$이므로 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 또한, y의 값이 증가하면 x의 값도 증가한다.

즉, $f(a)<f(b)$이면 $a<b$ ……㉠

$y=\log_5 x$에서 $x=5^y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=5^x$ $\quad\therefore f^{-1}(x)=5^x$

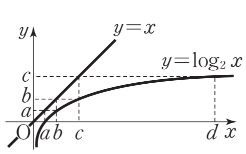
이때 (밑)$=5>1$이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

즉, $a<b$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 오른쪽 그림에서



$\log_2 a=0$이므로 $a=1$

$\log_2 b=a$, 즉 $\log_2 b=1$이므로 $b=2$

$\log_2 c=b$, 즉 $\log_2 c=2$이므로 $c=2^2=4$

$\log_2 d=c$, 즉 $\log_2 d=4$이므로 $d=2^4=16$

$\therefore \log_2 \frac{bc}{d}=\log_2 \frac{2\times 4}{16}$

$=\log_2 \frac{1}{2}=-1$ 답 -1

03 $1<a<b<a^a$의 각 변에 밑이 $a\ (a>1)$인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a a<\log_a b<\log_a a^a$이므로

$0<1<\log_a b<a$ ……㉠

$\therefore A=\log_a b>1$

$A>1$이므로 $B=(\log_a b)^2=A^2>A$

㉠의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a (\log_a b)<\log_a a$이므로

$0<\log_a (\log_a b)<1$

$\therefore 0<C<1$

따라서 세 수 A, B, C의 대소 관계는 $C<A<B$이다.

답 ④

> **BLACKLABEL 특강** 참고
>
> 위와 같은 로그의 대소 관계 문제는 a, b에 적당한 숫자를 대입해서 푸는 것도 하나의 방법이다. 항상 성립하는 대소 관계를 찾는 문제이므로 임의로 설정한 값에 대해서도 성립해야 한다.
> 예를 들어, $a=3$, $b=3^2=9$라 하면 $1<a<b<a^a$이 성립하고,
> $A=\log_a b=\log_3 9=2$,
> $B=(\log_a b)^2=(\log_3 9)^2=2^2=4$,
> $C=\log_a (\log_a b)=\log_3 (\log_3 9)=\log_3 2<1$
> 이므로 $C<A<B$이다.

04 $y=\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{x^3}=\log_{2^{-3}} x^{-3}=\log_2 x$

① 함수 $y=\log_2 (x-7)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\log_2 2x+3=\log_2 2+\log_2 x+3$

$=\log_2 x+4$

즉, 함수 $y=\log_2 2x+3$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3x-1}=\log_{2^{\frac{1}{2}}} (3x-1)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_2 (3x-1)=\log_2 3\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$=\log_2 \left(x-\frac{1}{3}\right)+\log_2 3$

즉, 함수 $y=\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3x-1}$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1}=\log_{2^{-1}} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-1}$

$=\log_2 \frac{x-1}{2}=\log_2 (x-1)-\log_2 2$

$=\log_2 (x-1)-1$

즉, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$

의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\log_8 x=\log_{2^3} x=\frac{1}{3}\log_2 x$

함수 $y=\log_8 x$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동하여도 포개어지지 않는다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{x^3}$의 그래프를 평행이동하여 포개어지지 않는 것은 함수 ⑤의 그래프이다. 답 ⑤

05 함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+2=\log_3(x-1)$

이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y+2=\log_3(-x-1)$

$\therefore y=\log_3(-x-1)-2=\log_3(-x-1)+\log_3 3^{-2}$

$=\log_3\frac{1}{9}(-x-1)=\log_3\left(-\frac{1}{9}x-\frac{1}{9}\right)$

이것이 함수 $y=\log_3(ax+b)$와 일치해야 하므로

$a=-\frac{1}{9}$, $b=-\frac{1}{9}$

$\therefore 9(a+b)=-2$ 답 -2

06 정사각형 ABCD의 넓이가 9이므로 $\overline{AD}=3$

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 D의 x좌표도 k이다.

두 점 A, D가 각각 함수 $y=\log_4\frac{1}{x}$, $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$A\left(k, \log_4\frac{1}{k}\right)$, $D(k, \log_2 k)$

$\overline{AD}=3$이므로 $\log_2 k-\log_4\frac{1}{k}=3$

$\log_2 k-\log_{2^2} k^{-1}=3$, $\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=3$

$\frac{3}{2}\log_2 k=3$, $\log_2 k=2$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore A(4, -1)$

이때 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

(직선 AC의 기울기)$=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=1$

즉, 직선 AC는 점 A$(4, -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-4$ $\quad\therefore y=x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다. 답 -5

07 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한, 점 P$(5, 5)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 삼각형 APD도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $\triangle$APD는 직각이등변삼각형이다.

삼각형 APD의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\triangle APD=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{DP}$

$=\frac{1}{2}\overline{AP}^2=\frac{9}{2}$

$\overline{AP}^2=9$ $\quad\therefore \overline{AP}=\overline{PD}=3$ ($\because \overline{AP}>0$)

$\therefore A(2, 5)$, $D(5, 2)$

이때 점 A가 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^2=5$ $\quad\therefore a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

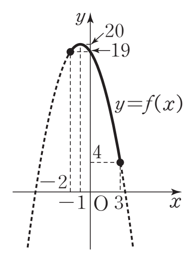
점 C는 점 D와 x좌표가 같으므로 C$(5, \sqrt{5}^5)$

$\overline{CP}=(\sqrt{5})^5-5=25\sqrt{5}-5$

$\triangle$CPB도 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{2}\,\overline{CP}=25\sqrt{10}-5\sqrt{2}$ 답 ⑤

08 $y=\log_5(-x^2-2x+19)$에서



$f(x)=-x^2-2x+19$

$=-(x+1)^2+20$

이라 하면 $-2\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 20, $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.

이때 $y=\log_5 f(x)$에서 (밑)$=5>1$이므로 $f(x)$가 최댓값을 가질 때 y도 최댓값을 갖고, $f(x)$가 최솟값을 가질 때 y도 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=\log_5 20$, $m=\log_5 4$이므로

$M-m=\log_5 20-\log_5 4$

$=\log_5 5=1$ 답 1

09 $(5x)^{\log 5}=10x$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log(5x)^{\log 5}=\log 10x$

$\log 5\times\log 5x=\log 10+\log x$

$\log 5\times(\log 5+\log x)=1+\log x$

$(\log 5)^2+\log 5\times\log x=1+\log x$

$(1-\log 5)\log x=(\log 5)^2-1$

$(1-\log 5)\log x=(\log 5-1)(\log 5+1)$

$\therefore \log x=-(\log 5+1)$

$=-\log 50=\log\frac{1}{50}$

$\therefore x=\frac{1}{50}$ 답 ③

10 $(\log 2x)(\log ax)=1$에서

$(\log 2+\log x)(\log a+\log x)=1$

$(\log x)^2+\log 2\times\log x+\log a\times\log x+\log 2\times\log a=1$

$(\log x)^2+\log 2a\times\log x+\log 2\times\log a-1=0$

$\log x=t$로 놓으면

$t^2+t\log 2a+\log 2\times\log a-1=0$

이때 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 위의 방정식의 두 근은 $\log\alpha$, $\log\beta$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=-\log 2a$에서

$\log\alpha\beta=-\log 2a$

그런데 $\alpha\beta=3$이므로

$\log 3=\log\frac{1}{2a}$

밑이 10으로 같으므로

$3=\frac{1}{2a}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore 30a=30\times\frac{1}{6}=5$

답 ③

11 $\log_3 x\times\log_2 y=6$에서 $\frac{\log x}{\log 3}\times\frac{\log y}{\log 2}=6$

$\frac{\log x}{\log 2}\times\frac{\log y}{\log 3}=6\quad\therefore\log_2 x\times\log_3 y=6$

$\log_2 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases}X+Y=5\\XY=6\end{cases}$

$X+Y=5$에서 $Y=5-X$이므로 이 식을 $XY=6$에 대입하면

$X(5-X)=6$, $X^2-5X+6=0$

$(X-2)(X-3)=0\quad\therefore X=2$ 또는 $X=3$

위의 값을 각각 $Y=5-X$에 대입하여 풀면

$\begin{cases}X=2\\Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\Y=2\end{cases}$

이때 $X=\log_2 x$, $Y=\log_3 y$에서 $x=2^X$, $y=3^Y$이므로

$\begin{cases}x=4\\y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=9\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\alpha=4\\\beta=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=8\\\beta=9\end{cases}$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=27$일 때, $\beta-\alpha$가 최댓값을 가지므로

$27-4=23$

답 23

12 $W=15$, $S=186$, $N=a$, $C=75$이므로

주어진 식에 대입하면

$75=15\times\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)$

$\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)=5$

$1+\frac{186}{a}=32$

$\frac{186}{a}=31$

$\therefore a=\frac{186}{31}=6$

답 ④

13 부등식 $\log_4\{\log_3(x^2+1)\}\le1$에서

진수의 조건에 의하여 $\log_3(x^2+1)>0$

(밑)$=3>1$이므로 $x^2+1>1$, $x^2>0$

$\therefore x\ne0$ ⋯⋯㉠

또한, $\log_4\{\log_3(x^2+1)\}\le1$에서 (밑)$=4>1$이므로

$\log_3(x^2+1)\le4$

(밑)$=3>1$이므로 $x^2+1\le3^4$

$x^2\le80\quad\therefore -4\sqrt{5}\le x\le4\sqrt{5}$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$-4\sqrt{5}\le x<0$ 또는 $0<x\le4\sqrt{5}$

이때 $8<4\sqrt{5}<9$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는

-8, -7, -6, $\cdots$, -1, 1, 2, 3, $\cdots$, 8의 16개이다.

답 16

14 집합 A의 부등식 $2^{2x}-2^{x+1}-8<0$을 풀면

$(2^x)^2-2\times2^x-8<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8<0$, $(t-4)(t+2)<0$

$\therefore 0<t<4\ (\because t>0)$

$t=2^x$이므로 $0<2^x<4$

$\therefore x<2$

$\therefore A=\{x\,|\,x<2\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이고, $A\cup B=\{x\,|\,x\le16\}$이므로 집합 B를 만족시키는 x의 값의 범위는 $2\le x\le16$이다.

즉, $1\le\log_2 x\le4$에서 $\log_2 x=k$로 놓으면 $1\le k\le4$

집합 B의 부등식 $(\log_2 x)^2-a\log_2 x+b\le0$, 즉

$k^2-ak+b\le0$의 해가 $1\le k\le4$이므로

$(k-1)(k-4)\le0$, $k^2-5k+4\le0$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로 $ab=20$

답 ④

15 부등식 $(1-\log_3 a)x^2+2(1-\log_3 a)x+\log_3 a>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

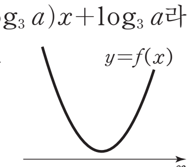
(i) $1-\log_3 a=0$, 즉 $\log_3 a=1$에서 $a=3$일 때,

$1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore a=3$

(ii) $1-\log_3 a\ne0$, 즉 $\log_3 a\ne1$에서 $a\ne3$일 때,

$f(x)=(1-\log_3 a)x^2+2(1-\log_3 a)x+\log_3 a$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$1-\log_3 a>0$이므로 $\log_3 a<1$

$\log_3 a<\log_3 3$

$\therefore 0<a<3$ ($\because$ (밑)$=3>1$) ……㉠

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-\log_3 a)^2-(1-\log_3 a)\log_3 a<0$

$1-2\log_3 a+(\log_3 a)^2-\log_3 a+(\log_3 a)^2<0$

$2(\log_3 a)^2-3\log_3 a+1<0$

$(\log_3 a-1)(2\log_3 a-1)<0$

즉, $\frac{1}{2}<\log_3 a<1$에서 $\log_3\sqrt{3}<\log_3 a<\log_3 3$

$\therefore \sqrt{3}<a<3$ ($\because$ (밑)$=3>1$) ……㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{3}<a<3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sqrt{3}<a\le 3$ **답** ⑤

16

현재, 즉 $t=0$일 때의 개체 수가 5000이므로

$\log 5000=k$

개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 n년 후이므로

$\log 1000>\log 5000+n\log\frac{4}{5}$

$\log 1000>\log(5\times 1000)+n\log\frac{8}{10}$

$3>\log 5+3+n(3\log 2-1)$

$(1-3\log 2)n>\log\frac{10}{2}$

$(1-3\times 0.3010)n>1-0.3010$

$0.097n>0.699$ $\therefore n>7.2\times\times\times$

n은 자연수이므로 $n=8$ **답** ③

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 37~40

01 ④	02 2	03 ⑤	04 ②	05 $\frac{1}{2}$
06 $\frac{3}{256}$	07 ②	08 $\frac{3}{2}$	09 ②	10 15
11 12	12 ⑤	13 ⑤	14 ①	15 16
16 ②	17 ③	18 ④	19 1	20 ④
21 ③	22 $\frac{1}{8}$	23 4	24 ②	25 63
26 $k<3$	27 $0<k<\frac{1}{8}$	28 ⑤	29 ④	30 6년

01

$f(x)=\log_a x$이므로

ㄱ. $f\left(\frac{x}{a}\right)=\log_a\frac{x}{a}$

$=\log_a x-\log_a a$

$=f(x)-1$ (참)

ㄴ. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a x+\log_a\frac{1}{x}$

$=\log_a x-\log_a x=0$ (거짓)

ㄷ. $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\log_a\frac{x+y}{2}$

$\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{\log_a x+\log_a y}{2}$

$=\frac{1}{2}\log_a xy=\log_a\sqrt{xy}$

그런데 $x>0$, $y>0$일 때, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

이고, $0<a<1$이므로

$\log_a\frac{x+y}{2}\le\log_a\sqrt{xy}$

$\therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ④

02

$y=\log(10-x^2)$에서 진수의 조건에 의하여

$10-x^2>0$에서 $x^2<10$ $\therefore -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$

$\therefore A=\{x\mid -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$ ……㉠

$y=\log(\log x)$에서 진수의 조건에 의하여

$x>0$, $\log x>0$

$\log x>0$에서 $\log x>\log 1$

$\therefore x>1$ ($\because$ (밑)$=10>1$)

$\therefore B=\{x\mid x>1\}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $A\cap B=\{x\mid 1<x<\sqrt{10}\}$

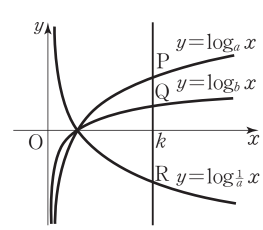
따라서 집합 $A\cap B$의 원소 중에서 정수인 것은 2, 3의 2개이다. **답** 2

단계	채점 기준	배점
㈎	로그의 진수의 조건을 이용하여 집합 A를 구한 경우	40%
㈏	로그의 진수의 조건을 이용하여 집합 B를 구한 경우	40%
㈐	집합 $A\cap B$를 구하고, $A\cap B$의 원소 중에서 정수의 개수를 구한 경우	20%

03

$0<\frac{1}{a}<1<a<b$이므로

세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b k$, $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $\overline{PQ}:\overline{PR}=2:5$이므로 $5\overline{PQ}=2\overline{PR}$에서

$5(\log_a k-\log_b k)=2\left(\log_a k-\log_{\frac{1}{a}} k\right)$

$5\log_a k-5\log_b k=4\log_a k$

$\log_a k=5\log_b k$

$\frac{\log k}{\log a}=\frac{5\log k}{\log b}$ ($\because \log k>0$), $\frac{\log b}{\log a}=5$

$\therefore \log_a b=5$ **답** ⑤

04 ㄱ. (반례) $a=\frac{1}{2}$일 때,

$0<b<c$의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} b>\log_{\frac{1}{2}} c$

따라서 $\log_a b<\log_a c$를 만족시키지 않는다. (거짓)

ㄴ. $c=1$이면 $0<a<b<1$ ······㉠

㉠의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$ $\quad\therefore 0<\log_a b<1$

또한, ㉠의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a>\log_b b>\log_b 1$ $\quad\therefore \log_b a>1$

$\therefore \log_a b<\log_b a$ (참)

ㄷ. (반례) $a=\frac{1}{2}$, $b=10$, $c=100$일 때,

$$(c-a)(\log b-a)=\left(100-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{199}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{199}{4}$$

$$(b-a)(\log c-a)=\left(10-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{57}{4}$$

$\therefore (c-a)(\log b-a)>(b-a)(\log c-a)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답** ②

05 곡선 $y=\log_2 x$를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은

$y=\log_2(-x)$

함수 $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프의 식은

$y=\log_2(-x+1)$ $\quad\therefore f(x)=\log_2(-x+1)$

한편, 두 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$에 대하여 삼각형 OAB가 $\overline{OB}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이려면 점 B는 선분 OA의 수직이등분선 위의 점이어야 한다.

선분 OA의 수직이등분선은 직선 $x=\frac{1}{2}$이므로 점 B는 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 함수 $f(x)=\log_2(-x+1)$의 그래프 위의 점이다.

$\therefore B\left(\frac{1}{2}, \log_2\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right)$, 즉 $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(1-0)\times|-1|=\frac{1}{2}$ **답** $\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

$f(x)=\log_2(-x+1)$이고 점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로 $B(a, \log_2(-a+1))$이라 하자.

원점 O와 점 $A(1, 0)$에 대하여 $\overline{OB}=\overline{AB}$이므로

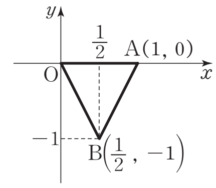
$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$에서

$a^2+\{\log_2(-a+1)\}^2=(a-1)^2+\{\log_2(-a+1)\}^2$

$a^2=a^2-2a+1$, $2a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore B\left(\frac{1}{2}, \log_2\frac{1}{2}\right)$, 즉 $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

따라서 $\triangle OAB$는 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

두 함수 $y=\log_2(-x+1)$, $y=\log_2 x$의 그래프가 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $A(1, 0)$을 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이동하면 점 $O(0, 0)$이 되므로 $\overline{OB}=\overline{AB}$를 만족시키는 점 B는 두 곡선 $y=\log_2(-x+1)$, $y=\log_2 x$의 교점이다.

06 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\log_3(-x)$ $\quad\therefore f(x)=\log_3(-x)$

$P(a, ma)$, $Q(b, mb)$라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 함수 $y=\log_3 x$, $f(x)=\log_3(-x)$의 그래프 위의 점이므로

$ma=\log_3 a$, $mb=\log_3(-b)$ ······㉠

또한, 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점이 원점이므로

$\left(\frac{b+3a}{4}, \frac{mb+3ma}{4}\right)=(0, 0)$

$\therefore b=-3a$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$-3ma=\log_3(3a)$, $-3ma=1+\log_3 a$

$ma=\log_3 a$를 위의 식에 대입하면

$-3\log_3 a=1+\log_3 a$, $-4\log_3 a=1$

$\log_3 a=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=3^{-\frac{1}{4}}$

위의 값을 $ma=\log_3 a$에 대입하면

$3^{-\frac{1}{4}}m=\log_3 3^{-\frac{1}{4}}$, $3^{-\frac{1}{4}}m=-\frac{1}{4}$

$\therefore m=-\frac{1}{4}\times3^{\frac{1}{4}}$

$\therefore m^4=\left(-\frac{1}{4}\times3^{\frac{1}{4}}\right)^4=\frac{3}{256}$ **답** $\frac{3}{256}$

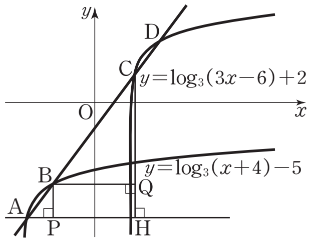
07 $y=\log_3(3x-6)+2=\log_3(x-2)+3$

이므로 함수 $y=\log_3(3x-6)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3(x+4)-5$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

이때 네 점 A, B, C, D는 모두 기울기가 $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$인 직선 위에 있으므로 점 A를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동하면 점 C가 되고, 점 B를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동이동하면 점 D가 된다.

$\therefore x_3=x_1+6$, $y_3=y_1+8$

한편, 점 C에서 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 B에서 두 선분 AH, CH에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 다음 그림과 같다.



△APB와 △AHC에서

∠APB=∠AHC=90, ∠A는 공통이므로

△APB∽△AHC (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:3:1$에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:4$이고,

$\overline{AH}=6$, $\overline{CH}=8$이므로

$\overline{AP}:\overline{AH}=1:4$에서 $\overline{AP}=\frac{1}{4}\overline{AH}=\frac{1}{4}\times 6=\frac{3}{2}$

$\overline{BP}:\overline{CH}=1:4$에서 $\overline{BP}=\frac{1}{4}\overline{CH}=\frac{1}{4}\times 8=2$

$\therefore x_2=x_1+\frac{3}{2},\ y_2=y_1+2$

두 점 A, B는 함수 $y=\log_3(x+4)-5$의 그래프 위에 있으므로

$y_1=\log_3(x_1+4)-5,\ y_2=\log_3(x_2+4)-5$에서

$$y_2-y_1=\log_3\left(x_1+\frac{3}{2}+4\right)-5-\{\log_3(x_1+4)-5\}$$

$$=\log_3\frac{x_1+\frac{11}{2}}{x_1+4}=2$$

즉, $\frac{x_1+\frac{11}{2}}{x_1+4}=3^2$이므로

$x_1+\frac{11}{2}=9x_1+36,\ 8x_1=-\frac{61}{2}$

$\therefore x_1=-\frac{61}{16}$

$$\therefore x_1+x_3=-\frac{61}{16}+\left(-\frac{61}{16}+6\right)$$

$$=-\frac{13}{8}$$

답 ②

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이 문제는 좌표평면에서 평행이동과 직선의 기울기 사이의 관계를 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다. 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 이동시킨 점을 P라 하면 직선 AP의 기울기는 $\frac{n}{m}$이 되고 점 P는 곡선 $y=g(x)$ 위에 있다. 또한, 점 A를 지나고 기울기가 $\frac{n}{m}$인 직선이 곡선 $y=g(x)$와 한 점에서 만날 때, 그 교점은 점 P와 같다. 도형은 어떤 시각으로 바라보느냐에 따라 다양한 풀이와 해석이 나올 수 있으므로 문제를 풀 때 여러 시각으로 보는 법을 연습해 두어야 한다.

08 $A(a,\ \log_2(a-2)),\ B(b,\ \log_2(b-2))\ (a<b)$라 하면

$\overline{AA'}=\overline{BB'}$이므로

$-\log_2(a-2)=\log_2(b-2)$

$\log_2\frac{1}{a-2}=\log_2(b-2),\ \frac{1}{a-2}=b-2$

$\therefore (a-2)(b-2)=1$ ……㉠

△ACA'과 △BCB'에서

∠CAA'=∠CBB' (∵ 엇각), $\overline{AA'}=\overline{BB'}$,

∠AA'C=∠BB'C=90°이므로

△ACA'≡△BCB' (ASA 합동)

$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}$

즉, 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{13}{4}\quad \therefore a+b=\frac{13}{2}$

$\therefore (a-2)+(b-2)=\frac{5}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a-2,\ b-2$는 이차방정식 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$, 즉

$2x^2-5x+2=0$의 서로 다른 두 근이다.

$2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

이때 $a<b$이므로 $a-2=\frac{1}{2},\ b-2=2$

$\therefore a=\frac{5}{2},\ b=4$

따라서 $\overline{A'B'}$의 길이는

$b-a=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

• 다른 풀이 •

△ACA'≡△BCB'에서 $\overline{A'C}=\overline{B'C}$

따라서 $\overline{A'C}=\alpha\ (\alpha>0)$라 하면

$A'\left(\frac{13}{4}-\alpha,\ 0\right),\ B'\left(\frac{13}{4}+\alpha,\ 0\right)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_2(x-2)$ 위의 점이므로

$A\left(\frac{13}{4}-\alpha,\ \log_2\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)\right),\ B\left(\frac{13}{4}+\alpha,\ \log_2\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)\right)$

$\overline{AA'}=\overline{BB'}$이므로

$-\log_2\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)=\log_2\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)$

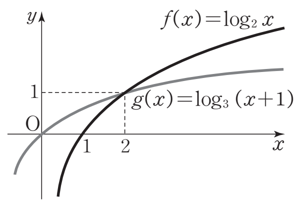
$\log_2\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)=0$

$\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)=1$

$\frac{25}{16}-\alpha^2=1,\ \alpha^2=\frac{9}{16}\quad \therefore \alpha=\frac{3}{4}\ (\because \alpha>0)$

$\therefore \overline{A'B'}=2\alpha=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

09 $f(x)=\log_2 x,\ g(x)=\log_3(x+1)$이라 하고 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 양수 a에 대하여 $a+2>2$이고, 위의 그래프에서
$x>2$일 때 $f(x)>g(x)$이므로
$f(a+2)>g(a+2)$
$\therefore \log_2(a+2)>\log_3(a+3)$ (참)

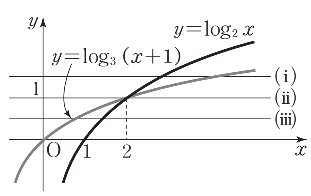
ㄴ. $\log_2(a+1)>\log_3(a+2)$에서
$f(a+1)>g(a+1)$
이때 위의 그래프에서 $f(x)>g(x)$가 성립하려면 $x>2$이어야 하므로
$a+1>2 \qquad \therefore a>1$ (참)

ㄷ. (반례) $a=1$, $b=1$이면
$\log_2(a+1)=\log_2 2=1$, $\log_3(b+2)=\log_3 3=1$
즉, $\log_2(a+1)=\log_3(b+2)$이지만 $a>b$는 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

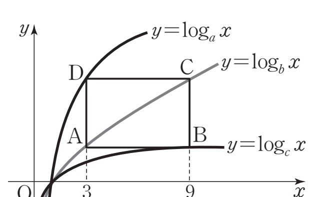
• 다른 풀이 •

ㄷ. $\log_2(a+1)=\log_3(b+2)$에서
$f(a+1)=g(b+1)$
$f(a+1)=g(b+1)=k$라 하면 직선 $y=k$와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x+1)$의 교점의 x좌표가 각각 $a+1$, $b+1$이다.



이때 위의 그래프에서 직선 $y=k$가
(i)이면 $a+1<b+1$에서 $a<b$
(ii)이면 $a+1=b+1$에서 $a=b$
(iii)이면 $a+1>b+1$에서 $a>b$
즉, $\log_2(a+1)=\log_3(b+2)$이면 항상 $a>b$는 아니다. (거짓)

10

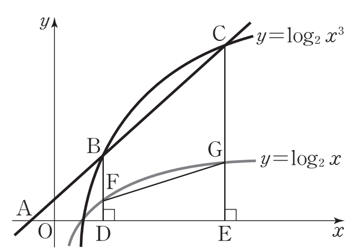


직사각형 ABCD의 가로의 길이가 6이고, 넓이가 24이므로 세로의 길이는 4이다.
두 점 A$(3,\ g(3))$, C$(9,\ g(9))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로
$g(9)-g(3)=4$, $\log_b 9-\log_b 3=4$
$\log_b 3=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$\therefore b^4=3$
또한, $\overline{AD}=4$이므로
$f(3)-g(3)=4$, $\log_a 3-\log_b 3=4$
$\log_a 3-4=4$ ($\because$ ㉠)
$\log_a 3=8 \qquad \therefore a^8=3$
$\overline{BC}=4$이므로
$g(9)-h(9)=4$, $\log_b 9-\log_c 9=4$
$\log_b 3-\log_c 3=2$ ($\because$ ㉠)
$4-\log_c 3=2$, $\log_c 3=2 \qquad \therefore c^2=3$
$b^4=3$, $a^8=3$에서 $b=3^{\frac{1}{4}}$, $a=3^{\frac{1}{8}}$이고, $c^4=9$이므로
이 식을 $c^4=a^m b^n$에 대입하면
$9=3^{\frac{1}{8}m}3^{\frac{1}{4}n}$, $3^2=3^{\frac{1}{8}m+\frac{1}{4}n}$
$\frac{1}{8}m+\frac{1}{4}n=2 \qquad \therefore m+2n=16$
따라서 $m+2n=16$을 만족시키는 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)$은
$(14,\ 1)$, $(12,\ 2)$, $(10,\ 3)$, $\cdots$, $(2,\ 7)$
이므로 $m+n$의 최댓값은 $m=14$, $n=1$일 때
$14+1=15$ **답** 15

BLACKLABEL 특강 **참고**

$m+2n=16$에서 $m=16-2n$, $n=\frac{16-m}{2}$
m, n이 자연수이므로 $m\geq 1$, $n\geq 1$에서
$m\leq 14$, $n\leq \frac{15}{2} \qquad \therefore 1\leq m\leq 14$, $1\leq n\leq 7$
또한, $m+2n=16$에서 $m+n=16-n$이므로 $m+n$의 최댓값은 $16-n$의 최댓값과 같고, n이 최소일 때 $16-n$이 최대가 된다.
따라서 $n=1$일 때, $m+n$의 최댓값은 $16-1=15$이다.

11



$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:3$
두 삼각형 ADB, AEC는 서로 닮음이므로 닮음비는 $1:3$이다.
즉, 두 삼각형의 넓이의 비는 $1:9$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\triangle AEC=9\times\frac{9}{2}=\frac{81}{2}$

$\therefore \square BDEC=\triangle AEC-\triangle ADB$
$=\frac{81}{2}-\frac{9}{2}$
$=\frac{72}{2}=36$

한편, $y=\log_2 x^3=3\log_2 x$이므로

$\overline{\mathrm{GE}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{FD}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{BD}}$

사각형 FDEG의 윗변과 아랫변의 길이는 각각 사각형 BDEC의 윗변과 아랫변의 길이의 $\frac{1}{3}$이고, 높이는 서로 같다.

따라서 사각형 FDEG의 넓이는 사각형 BDEC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

$\square\mathrm{FDEG}=\frac{1}{3}\square\mathrm{BDEC}=\frac{1}{3}\times 36=12$ 답 12

• 다른 풀이 •

$\overline{\mathrm{AD}}=a$라 하면 두 삼각형 ADB, AEC가 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$에서 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}=1:2$

$a:\overline{\mathrm{DE}}=1:2$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{DE}}=2a$

삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{9}{2}$, $\frac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{9}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=\frac{9}{a}$

또한, 두 삼각형 ADB, AEC의 닮음비가 $1:3$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CE}}=1:3$에서 $\frac{9}{a}:\overline{\mathrm{CE}}=1:3$

$\therefore \overline{\mathrm{CE}}=\frac{27}{a}$

한편, $y=\log_2 x^3=3\log_2 x$이므로 점 D의 x좌표를 k라 하면 $\mathrm{F}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, 3\log_2 k)$

즉, $\overline{\mathrm{BF}}=2\overline{\mathrm{DF}}$이고, $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{9}{a}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{DF}}=2\overline{\mathrm{DF}}+\overline{\mathrm{DF}}$

$=3\overline{\mathrm{DF}}=\frac{9}{a}$

$\therefore \overline{\mathrm{DF}}=\frac{3}{a}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\frac{6}{a}$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{CG}}=2\overline{\mathrm{EG}}$이고, $\overline{\mathrm{CE}}=\frac{27}{a}$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CG}}+\overline{\mathrm{EG}}=2\overline{\mathrm{EG}}+\overline{\mathrm{EG}}$

$=3\overline{\mathrm{EG}}=\frac{27}{a}$

$\therefore \overline{\mathrm{EG}}=\frac{9}{a}$, $\overline{\mathrm{CG}}=\frac{18}{a}$

따라서 사각형 FDEG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{DF}}+\overline{\mathrm{EG}})\times\overline{\mathrm{DE}}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{a}+\frac{9}{a}\right)\times 2a=12$

12

ㄱ. $f(9)=f(7+2)$

$=f(7)+1=f(5+2)+1$

$=f(5)+2=f(3+2)+2$

$=f(3)+3$ ($\because$ 조건 ㈏)

$=\log_3 3+3$ ($\because$ 조건 ㈎)

$=4$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(9)=4$이므로

$f(f(9))=f(4)$

$=f(2+2)=f(2)+1$ ($\because$ 조건 ㈏)

$=\log_3 2+1$ ($\because$ 조건 ㈎)

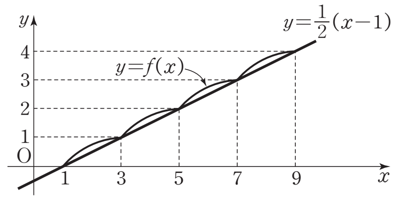
$=\log_3 6$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(f(9))=\log_3 6$에서 $g(g(\log_3 6))=9$ (참)

ㄷ. $2f(x)-x+1=0$에서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)$이므로

주어진 방정식의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

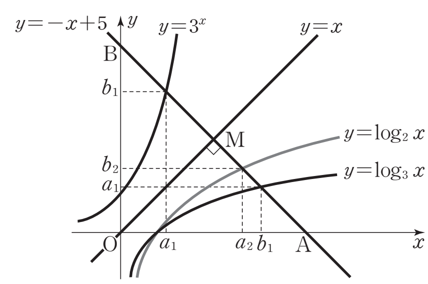


위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}(x-1)$이 서로 다른 5개의 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

13

함수 $y=3^x$의 역함수가 $y=\log_3 x$이므로 세 곡선 $y=3^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점의 좌표가 (a_1, b_1)이므로 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점의 좌표는 (b_1, a_1)이다.

$\therefore a_1<b_2$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 원점과 점 (a_1, b_1)을 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 (a_2, b_2)를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$\frac{b_1-0}{a_1-0}>\frac{b_2-0}{a_2-0}$에서 $\frac{b_1}{a_1}>\frac{b_2}{a_2}$

$a_1>0$, $a_2>0$이므로 위의 부등식의 양변에 a_1a_2를 곱하면

$a_2b_1>a_1b_2$ (참)

ㄷ. 원점을 O, 직선 $y=-x+5$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{OM}$은 점 O와 직선 $y=-x+5$ 위의 임의의 점 사이의 거리 중에서 가장 짧은 거리이다.

즉, 직선 $y=-x+5$ 위의 점은 점 M으로부터 멀어질수록 원점과의 거리가 더 길어지고, 위의 그래프에서 점 (a_1, b_1)은 점 (a_2, b_2)보다 점 M으로부터 더 멀리 있으므로

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}>\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a_1^2+b_1^2>a_2^2+b_2^2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

14

함수 $f(x)=\log_a(x-1)-b$에서

$y=\log_a(x-1)-b$로 놓으면

$y+b=\log_a(x-1)$, $a^{y+b}=x-1$

$x=a^{y+b}+1$

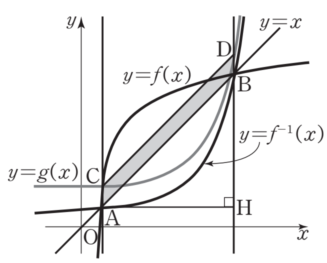
x와 y를 서로 바꾸면

$y=a^{x+b}+1$

$\therefore f^{-1}(x)=a^{x+b}+1$

$g(x)=a^{x+b}+2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 세 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}=1$

한편, 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$BAH는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$에서 $\overline{AH}=4$

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

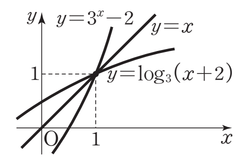
$\overline{AC}\times\overline{AH}=1\times4=4$ **답** ①

15

두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$은 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

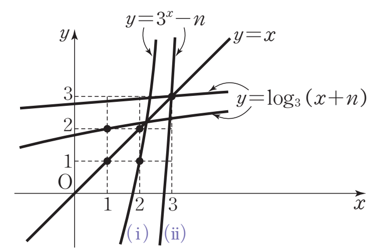
즉, 두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$으로 둘러싸인 영역이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 (a, b)가 주어진 영역에 포함되면 점 (b, a)도 포함된다.

$n=2$일 때, 두 곡선 $y=3^x-2$, $y=\log_3(x+2)$로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림과 같으므로 영역의 내부 또는 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(1, 1)$뿐이다.



n의 값이 커지면 함수 $y=3^x-n$의 그래프는 오른쪽으로 이동하고, 함수 $y=\log_3(x+n)$의 그래프는 위쪽으로 이동한다.

영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가 4일 때의 점은 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$이다.



즉, 주어진 두 곡선이 서로 역함수 관계이므로 곡선 $y=3^x-n$만 생각하면 조건을 만족시키는 n의 값은 이 곡선이 $\underbrace{\text{점 (2, 1)을 지날 때부터}}_{\text{(i)}}$ $\underbrace{\text{점 (3, 3)을 지나기 전까}}_{\text{(ii)}}$지이다.

$f(x)=3^x-n$이라 할 때, $f(2)\le1$, $f(3)>3$이므로

$3^2-n\le1$, $3^3-n>3$

$\therefore 8\le n<24$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 8, 9, 10, $\cdots$, 23의 16개이다. **답** 16

16

ㄱ. $ab=1$에서 $b=\dfrac{1}{a}$

점 P는 곡선 $y=\log_b x$, 즉 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 위의 점이고 y좌표는 1이므로

$1=\log_{\frac{1}{a}} x$에서 $x=\dfrac{1}{a}$ $\qquad\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a}, 1\right)$

점 Q는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이고 y좌표는 -1이므로

$-1=\log_a x$에서 $x=\dfrac{1}{a}$ $\qquad\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a}, -1\right)$

$\therefore \overline{AP}=\overline{BQ}=\dfrac{1}{a}$ (참)

ㄴ. $\mathrm{D}(1, 1)$이고, 점 R는 x좌표가 1인 곡선 $y=b^x$ 위의 점이므로 $\mathrm{R}(1, b)$

$\therefore \overline{DR}=1-b$

$\mathrm{C}(1, -1)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a}, -1\right)$이므로 $\overline{CQ}=1-\dfrac{1}{a}$

이때 $ab<1$에서 $b<\dfrac{1}{a}$

$-b>-\dfrac{1}{a}$ $\qquad\therefore 1-b>1-\dfrac{1}{a}$

$\therefore \overline{DR}>\overline{CQ}$ (참)

ㄷ. $R(1, b)$이므로 $\overline{OR}=\sqrt{1+b^2}$

$Q\left(\frac{1}{a}, -1\right)$이므로 $\overline{OQ}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}$

이때 $ab>1$에서 $b>\frac{1}{a}$이므로

$b^2>\left(\frac{1}{a}\right)^2$ ($\because a>0, b>0$)

$1+b^2>\left(\frac{1}{a}\right)^2+1 \quad \therefore \sqrt{1+b^2}>\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}$

$\therefore \overline{OR}>\overline{OQ}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

17 $f(x)=4x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log_2 f(x)&=\log_2 4+\log_2 x^{-4+\log_2 x}\\&=2+(-4+\log_2 x)\times\log_2 x\\&=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2\end{aligned}$$

$\log_2 x=t$로 놓으면 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 $\log_2\frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 2$

$\therefore -1\le t\le 1$

$\log_2 f(2^t)=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$에서

$f(2^t)=2^{(t-2)^2-2}$ (단, $-1\le t\le 1$) ……㉠

(밑)$=2>1$이므로 ㉠은 $(t-2)^2-2$가 최대일 때 최댓값을 갖고, $(t-2)^2-2$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $g(t)=(t-2)^2-2$라 하면 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 7, $t=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$M=2^7=128$, $m=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\therefore Mm=128\times\frac{1}{2}=64$ 답 ③

18 $$\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}=\frac{\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}}{\frac{1}{\log_2 xy}}=\frac{\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}}{\frac{1}{\log_2 x+\log_2 y}}$$

$\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a+b}}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1}{a+b}}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

그런데 $x>1$, $y>1$에서 $a>0$, $b>0$이므로 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+2 \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$
$$=4$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

$$\begin{aligned}&\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}\\&=(\log_x 2+\log_y 2)\times\log_2 xy\\&=(\log_x 2+\log_y 2)(\log_2 x+\log_2 y) \quad \cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이때 1보다 큰 두 실수 x, y에 대하여 $\log_x 2>0$, $\log_y 2>0$, $\log_2 x>0$, $\log_2 y>0$이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}&(\log_x 2+\log_y 2)(\log_2 x+\log_2 y)\\&=\{(\sqrt{\log_x 2})^2+(\sqrt{\log_y 2})^2\}\{(\sqrt{\log_2 x})^2+(\sqrt{\log_2 y})^2\}\\&\ge(\sqrt{\log_x 2}\times\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{\log_y 2}\times\sqrt{\log_2 y})^2\\&\left(\text{단, 등호는 }\frac{\sqrt{\log_2 x}}{\sqrt{\log_x 2}}=\frac{\sqrt{\log_2 y}}{\sqrt{\log_y 2}}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)\\&=(1+1)^2=4 \quad \cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡에서 $\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}\ge 4$이므로 구하는 최솟값은 4이다.

19 $$\begin{aligned}f(x)&=\left(\log_a\frac{x}{10}\right)\left(\log_a\frac{x}{4}\right)\\&=(\log_a x-\log_a 10)(\log_a x-\log_a 4)\\&=(\log_a x)^2-(\log_a 10+\log_a 4)\log_a x\\&\quad+\log_a 10\times\log_a 4\end{aligned}$$

이때 $\log_a x=t$, $\log_a 10=\alpha$, $\log_a 4=\beta$로 놓으면

$$\begin{aligned}f(a^t)&=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta\\&=\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\end{aligned}$$

이므로 $t=\frac{\alpha+\beta}{2}$일 때 최솟값 $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$을 갖는다.

즉, $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=-\frac{1}{16}$에서

$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{1}{4}$

$\alpha=\log_a 10$, $\beta=\log_a 4$이므로

$\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=-\frac{1}{4}$

$\log_a\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

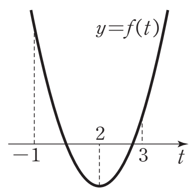
$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 또는 $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$\therefore a=\frac{25}{4}$ 또는 $a=\frac{4}{25}$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$\frac{25}{4}\times\frac{4}{25}=1$ 답 1

20 $(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+k=0$에서
$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+k=0$
$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-4t+k=0$
이때 주어진 방정식의 두 근이 $\frac{1}{3}$과 27 사이에 있고
$\log_3 \frac{1}{3}=-1$, $\log_3 27=3$이므로 t에 대한 이차방정식
$t^2-4t+k=0$의 두 근이 -1과 3 사이에 있어야 한다.
$f(t)=t^2-4t+k$라 하면 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4-k\ge0$
$\therefore k\le4$
(ii) $f(-1)>0$에서 $5+k>0$이므로 $k>-5$
$f(3)>0$에서 $-3+k>0$이므로 $k>3$
$\therefore k>3$
(i), (ii)에서 $3<k\le4$

답 ④

BLACKLABEL 특강 **오답 피하기**

로그방정식을 치환하여 풀 때 반드시 치환하는 것이 무엇인지 명확히 표시를 하고, 치환한 변수의 범위 또한 표시해 놓아야 한다. 위의 문제는 $\log_3 x$를 t로 치환하면 한결 쉽게 풀 수 있는데 이때의 x의 값은 $\frac{1}{3}$과 27 사이에 있으므로 t의 값은 -1과 3 사이에 있음에 주의하자. 치환을 이용하면 이 문제는 t에 대한 이차방정식 문제가 되므로 보다 쉽게 k의 값의 범위를 구할 수 있다.

21 $\begin{cases} \dfrac{2}{\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_y 2}=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 밑의 조건에 의하여 $x>0$, $x\ne1$, $y>0$, $y\ne1$이고
밑의 변환 공식에 의하여 $2\log_4 x+\log_2 y=3$
$\therefore \log_2 x+\log_2 y=3$ ……㉢
㉡에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $y>0$이고
$\log_2 3+\log_2 x+2\log_2 y=\log_2(2^4\times3)$에서
$\log_2 3+\log_2 x+2\log_2 y=4+\log_2 3$
$\therefore \log_2 x+2\log_2 y=4$ ……㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$\log_2 x=2$, $\log_2 y=1$ $\therefore x=4$, $y=2$
따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로
$\alpha^2+\beta^2=16+4=20$

답 ③

• 다른 풀이 •

㉠에서 밑의 조건에 의하여 $x>0$, $x\ne1$, $y>0$, $y\ne1$이고
밑의 변환 공식에 의하여 $2\log_4 x+\log_2 y=3$
$\log_2 x+\log_2 y=3$, $\log_2 xy=3$
$\therefore xy=8$
㉡에서 $\log_2 3x+2\log_2 y=\log_2 48$
$\log_2 3x+\log_2 y^2=\log_2 48$
$\log_2 3xy^2=\log_2 48$
$3xy^2=48$ $\therefore xy^2=16$
위의 식에 $xy=8$을 대입하면
$8y=16$ $\therefore y=2$, $x=4$
따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로
$\alpha^2+\beta^2=16+4=20$

22 방정식의 두 근을 α, β라 하고 $\beta=\alpha^2$이라 하자.
$(\log_2 x)^2-6a\log_2 x+a+1=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면
$t^2-6at+a+1=0$
위의 t에 대한 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면
$t_1=\log_2\alpha$, $t_2=\log_2\beta=\log_2\alpha^2=2\log_2\alpha=2t_1$
즉, 두 근은 t_1, $2t_1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$t_1+2t_1=6a$에서 $3t_1=6a$ $\therefore t_1=2a$
$t_1\times2t_1=a+1$에서 $2t_1^2=a+1$
위의 식에 $t_1=2a$를 대입하면
$2(2a)^2=a+1$, $8a^2-a-1=0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{1}{8}$이다.

답 $\frac{1}{8}$

23 방정식 $3\log_2[x]=2(x-1)$의 서로 다른 실근은 두 함수 $y=3\log_2[x]$, $y=2(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
$y=3\log_2[x]$에서 진수의 조건에 의하여 $[x]>0$
$[x]$는 정수이므로 $[x]\ge1$에서 $x\ge1$
(i) $1\le x<2$일 때,
$[x]=1$이므로
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=0$
(ii) $2\le x<3$일 때,
$[x]=2$이므로
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3$
(iii) $3\le x<4$일 때,
$[x]=3$이므로
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 3=\log_2 27$
이때 $\log_2 16<\log_2 27<\log_2 32$이므로
$4<\log_2 27<5$
(iv) $4\le x<5$일 때,
$[x]=4$이므로
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=6$

(v) $5 \le x < 6$일 때,

$[x]=5$이므로

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 5=\log_2 125$

이때 $\log_2 64 < \log_2 125 < \log_2 128$이므로

$6 < \log_2 125 < 7$

(vi) $6 \le x < 7$일 때,

$[x]=6$이므로

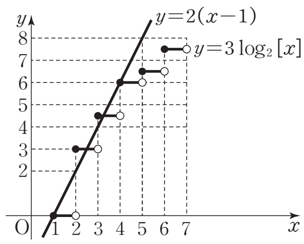
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 6=\log_2 216$

이때 $\log_2 128 < \log_2 216 < \log_2 256$이므로

$7 < \log_2 216 < 8$

⋮

(i)~(vi)에서 두 함수 $y=3\log_2[x]$, $y=2(x-1)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 4

• 다른 풀이 •

$3\log_2[x]$에서 진수의 조건에 의하여 $[x]>0$

이때 $[x]$는 정수이므로 $[x] \ge 1$ $\quad \therefore x \ge 1$

(i) $1 \le x < 2$일 때,

$[x]=1$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 1=2(x-1)$, $2(x-1)=0$

$\therefore x=1$

(ii) $2 \le x < 3$일 때,

$[x]=2$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 2=2(x-1)$, $2(x-1)=3$

$2x=5 \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

(iii) $3 \le x < 4$일 때,

$[x]=3$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 3=2(x-1)$, $2x=3\log_2 3+2$

$2x=\log_2 108$

$\therefore x=\frac{1}{2}\log_2 108$

이때 $\log_2 64 < \log_2 108 < \log_2 128$에서

$6 < \log_2 108 < 7 \qquad \therefore 3 < \frac{1}{2}\log_2 108 < \frac{7}{2}$

즉, $x=\frac{1}{2}\log_2 108$은 주어진 방정식의 해이다.

(iv) $4 \le x < 5$일 때,

$[x]=4$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 4=2(x-1)$, $6=2(x-1)$

$2x=8 \qquad \therefore x=4$

(v) $n \ge 5$에 대하여 $n \le x < n+1$일 때,

$[x]=n$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 n=2(x-1)$, $2x=3\log_2 n+2$

$2x=\log_2 4n^3 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\log_2 4n^3$

5 이상의 자연수 n에 대하여 $4n^3 < 4^n$

즉, $\frac{1}{2}\log_2 4n^3 < n$이므로 주어진 방정식의 근은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 주어진 방정식의 근은

1, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\log_2 108$, 4의 4개이다.

24 해결단계

❶ 단계	로그의 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	주어진 로그방정식을 정리하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.
❸ 단계	a의 값에 따라 **❶단계**에서 구한 x의 값의 범위를 정리하고, 이 범위에서 **❷단계**에서 구한 이차방정식이 오직 하나의 실근을 갖기 위한 a의 값의 범위를 구한다.

로그방정식 $\log_9(2x^2-8)=\log_3(x-a)$에서

진수의 조건에 의하여

$2x^2-8>0$에서 $x^2-4>0$, $(x+2)(x-2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$x-a>0$에서 $x>a$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

또한, 주어진 방정식에서

$\log_9(2x^2-8)=2\log_{3^2}(x-a)$

$\log_9(2x^2-8)=\log_9(x-a)^2$

$2x^2-8=(x-a)^2$

$x^2+2ax-8-a^2=0$

이때

$f(x)=x^2+2ax-8-a^2$

$\quad =(x+a)^2-2a^2-8$

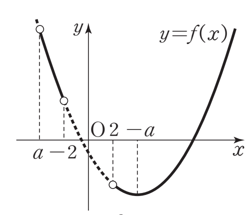
이라 하면 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위에서 이차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

(i) $a<-2$일 때,

㉠, ㉡에서 $a<x<-2$ 또는 $x>2$ $\quad \cdots\cdots$ ㉢

$a<-2$에서 $-a>2$이고, $f(-a)=-2a^2-8<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x>2$에서 반드시 실근을 갖는다.

즉, ㉢에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2) \ge 0$, $f(2) \le 0$

이때 $f(2)=4+4a-8-a^2=-(a-2)^2$이므로 모든 실수 a에 대하여 $f(2) \le 0$을 만족시킨다.

또한, $f(-2)=4-4a-8-a^2 \ge 0$에서

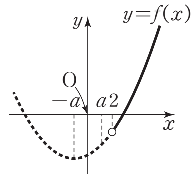
$a^2+4a+4\leq 0$, $(a+2)^2\leq 0$ $\therefore a=-2$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-2\leq a\leq 2$일 때,

㉠, ㉡에서 $x>2$

$x>2$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(2)<0$



$f(2)=4+4a-8-a^2<0$에서

$a^2-4a+4>0$, $(a-2)^2>0$

$\therefore a\neq 2$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

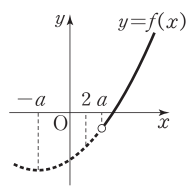
$-2\leq a<2$

(iii) $a>2$일 때,

㉠, ㉡에서 $x>a$

$x>a$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$f(a)<0$



$f(a)=a^2+2a^2-8-a^2<0$에서

$2a^2-8<0$, $a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-2\leq a<2$

답 ②

25 $\log_4 x^2+\log_{\sqrt{x}} 8\leq 7$에서 $x\geq 2$이므로

밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 4}+\frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{x}}\leq 7$$

$$\frac{2\log_2 x}{2}+\frac{3}{\frac{1}{2}\log_2 x}\leq 7$$

$$\log_2 x+\frac{6}{\log_2 x}\leq 7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $x\geq 2$이므로 $\log_2 x\geq 1$

㉠의 양변에 $\log_2 x$를 곱하면

$(\log_2 x)^2+6\leq 7\log_2 x$

$(\log_2 x)^2-7\log_2 x+6\leq 0$

$(\log_2 x-1)(\log_2 x-6)\leq 0$

$\therefore 1\leq \log_2 x\leq 6$

(밑)$=2>1$이므로

$2\leq x\leq 2^6$

따라서 구하는 2 이상의 자연수 x의 개수는

$2^6-2+1=64-2+1$

$=63$

답 63

26 $k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+4$에서

$\log_2 t=x$로 놓으면

$t>1$에서 $\log_2 t>0$이므로 $x>0$이고,

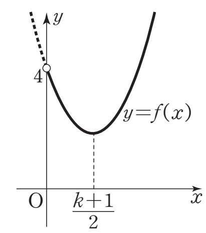
$kx<x^2-x+4$

$\therefore x^2-(k+1)x+4>0$

이때 $f(x)=x^2-(k+1)x+4$라 하고, $x>0$에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 경우를 다음과 같이 나누어 보자.

(i) $\frac{k+1}{2}>0$, 즉 $k>-1$인 경우

$x>0$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D<0$이어야 하므로

$D=(k+1)^2-16<0$

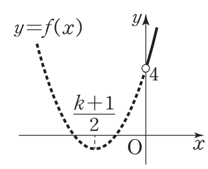
$k^2+2k-15<0$, $(k+5)(k-3)<0$

$\therefore -5<k<3$

따라서 $-1<k<3$이다.

(ii) $\frac{k+1}{2}\leq 0$, 즉 $k\leq -1$인 경우

$x>0$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$f(0)=4>0$이므로 부등식 $f(x)>0$은 항상 성립한다.

따라서 $k\leq -1$이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$k<3$

답 $k<3$

• 다른 풀이 •

$t>1$에서 $\log_2 t>0$이므로 부등식

$k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+4$의 양변을 $\log_2 t$로 나누면

$$k<\log_2 t-1+\frac{4}{\log_2 t}=\log_2 t+\frac{4}{\log_2 t}-1$$

$\log_2 t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_2 t+\frac{4}{\log_2 t}\geq 2\sqrt{\log_2 t\times\frac{4}{\log_2 t}}=4$$

(단, 등호는 $t=4$일 때 성립)

이므로

$$\log_2 t+\frac{4}{\log_2 t}-1\geq 4-1=3$$

따라서 $t>1$인 임의의 실수 t에 대하여 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는 $k<3$이다.

27 (i) 이차방정식 $x^2+x+k=0$이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

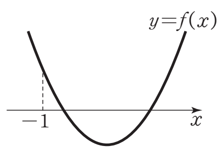
$D=1-4k\geq 0$

$\therefore k\leq\frac{1}{4}$

(ii) $\log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)<-3$에서 진수의 조건에 의하여 $\alpha+1>0$, $\beta+1>0$

$\therefore \alpha>-1$, $\beta>-1$

이때 $f(x)=x^2+x+k$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 실근 α, β가 모두 -1보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)>0$이므로

$f(-1)=1-1+k>0$

$\therefore k>0$

(iii) $\log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)<-3$에서

$\log_2(\alpha+1)(\beta+1)<\log_2 2^{-3}$

(밑)$=2>1$이므로 $(\alpha+1)(\beta+1)<\frac{1}{8}$

$\alpha\beta+\alpha+\beta+1<\frac{1}{8}$ ……㉠

이때 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=k$

이것을 ㉠에 대입하면

$k-1+1<\frac{1}{8}$

$\therefore k<\frac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<\frac{1}{8}$ 답 $0<k<\frac{1}{8}$

28 $|\log_2 x-\log_2 5|+\log_2 y\leq 2$에서

$\left|\log_2\frac{x}{5}\right|+\log_2 y\leq 2$ ……㉠

(i) $\log_2\frac{x}{5}<0$일 때,

(밑)$=2>1$이므로 $0<\frac{x}{5}<1$

$\therefore 0<x<5$ ……㉡

또한, ㉠에서 $-\log_2\frac{x}{5}+\log_2 y\leq 2$

$\log_2\frac{5y}{x}\leq\log_2 4$에서 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{5y}{x}\leq 4$ $\therefore 5y\leq 4x$ ($\because x>0$) ……㉢

㉡, ㉢을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$의 6개이다.

(ii) $\log_2\frac{x}{5}\geq 0$일 때,

(밑)$=2>1$이므로 $\frac{x}{5}\geq 1$ $\therefore x\geq 5$ ……㉣

또한, ㉠에서 $\log_2\frac{x}{5}+\log_2 y\leq 2$이므로

$\log_2\frac{xy}{5}\leq\log_2 4$이고 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{xy}{5}\leq 4$ $\therefore xy\leq 20$ ……㉤

㉣, ㉤을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(7, 1)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$, $(9, 2)$, $(10, 1)$, $(10, 2)$, $(11, 1)$, $(12, 1)$, $(13, 1)$, $\cdots$, $(20, 1)$

의 25개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$6+25=31$ 답 ⑤

29 절대 등급이 4.8인 별의 광도는 L이고, 절대 등급이 1.3인 별의 광도는 kL이므로

$4.8-1.3=-2.5\log\left(\frac{L}{kL}\right)$

$3.5=-2.5\log\frac{1}{k}$

$3.5=2.5\log k$, $\log k=\frac{7}{5}$ $\therefore k=10^{\frac{7}{5}}$ 답 ④

30 2022년의 대학예산을 A, 시설투자비를 B라 하면

$B=\frac{4}{100}A$

대학예산과 시설투자비의 증가율은 각각 매년 12 %, 20 %이므로 2022년부터 n년 후의 대학예산은

$\left(1+\frac{12}{100}\right)^n A=1.12^n A$

2022년부터 n년 후의 시설투자비는

$\left(1+\frac{20}{100}\right)^n B=1.2^n B$

대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6 % 이상이 되려면

$\frac{1.2^n B}{1.12^n A}\geq\frac{6}{100}$

$\frac{1.2^n\times\frac{4}{100}A}{1.12^n\times A}\geq\frac{6}{100}$, $\frac{1.2^n}{1.12^n}\geq\frac{3}{2}$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면 (밑)$=10>1$이므로

$n\log\frac{1.2}{1.12}\geq\log\frac{3}{2}$에서

$n\geq\frac{\log 3-\log 2}{\log 1.2-\log 1.12}$

$=\frac{0.4771-0.301}{0.0792-0.0492}$

$=\frac{0.1761}{0.03}=5.87$

따라서 6년 후부터 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6 % 이상이 된다. 답 6년

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 41

01 4	02 ①	03 $\frac{1}{1024}$	04 6	05 21
06 $2\sqrt{2}$	07 ⑤			

01 해결단계

❶ 단계	로그의 성질을 이용하여 조건 (가), (나)에 주어진 식을 간단히 정리한다.
❷ 단계	**❶ 단계**에서 구한 두 식을 연립하여 x^2+3y^2의 값을 구한다.

조건 (가)에서

$\log_2(x^2-2xy+y^2)-\log_2(x^2-3xy+y^2)=2$

$\log_2\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=2$

$\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=4$

$x^2-2xy+y^2=4(x^2-3xy+y^2)$

$3x^2-10xy+3y^2=0,\ (3x-y)(x-3y)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}y$ 또는 $x=3y$

그런데 $x>y>0$이므로

$x=3y$ ……㉠

한편, 조건 (나)에서 $|\log_a x|=|\log_a y|$이므로

$\log_a x=\pm\log_a y$

그런데 $\log_a x=\log_a y$이면 $x=y$이고, x, y는 서로 다른 두 실수이므로 모순이다.

즉, $\log_a x=-\log_a y$에서

$\log_a x=\log_a\dfrac{1}{y}$

밑이 a로 같으므로 $x=\dfrac{1}{y}$ $\quad\therefore xy=1$

위의 식에 ㉠을 대입하면 $3y^2=1$ ← $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\because y>0$)이므로 $x=\sqrt{3}$

$\therefore x^2+3y^2=(3y)^2+3y^2$

$=12y^2=4\times3y^2$ ($\because$ ㉠)

$=4$

답 4

02 해결단계

❶ 단계	세 실수 a, b, c가 어떤 방정식의 실근이 되는지 파악한다.
❷ 단계	로그를 이용하여 **❶ 단계**에서 세운 방정식을 로그방정식으로 나타낸다.
❸ 단계	필요한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그린 후, 세 실수 a, b, c를 좌표평면 위에 나타내어 대소 관계를 구한다.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^a=2a$이므로 a는 방정식 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2x$의 근이다.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2b}=b$의 양변에 밑이 $\dfrac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2b}=\log_{\frac{1}{3}}b$ $\quad\therefore \log_{\frac{1}{3}}b=2b$

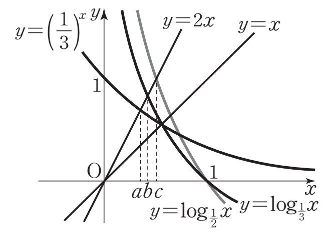
따라서 b는 방정식 $\log_{\frac{1}{3}}x=2x$의 근이다.

또한, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2c}=c$의 양변에 밑이 $\dfrac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2c}=\log_{\frac{1}{2}}c$ $\quad\therefore \log_{\frac{1}{2}}c=2c$

따라서 c는 방정식 $\log_{\frac{1}{2}}x=2x$의 근이다.

즉, 세 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표가 각각 a, b, c이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore a<b<c$

답 ①

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

이 문제는 주어진 a, b, c를 포함한 세 등식을 a, b, c를 근으로 갖는 방정식으로 이해한 후, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표임을 이용하여 그래프를 그려 a, b, c의 대소 관계를 찾아야 한다.

세 등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$에서 a, b, c를 세 방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=x$의 근으로 생각해 보자. 이때 이 방정식에서 세 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$의 그래프와 두 직선 $y=x$, $y=2x$를 그려 교점의 x좌표로 대소 관계를 파악하려고 한다면 위의 다섯 개의 함수 사이에 특별한 관계가 없으므로 그래프를 정확히 그리기가 어렵다. 그러나 세 방정식을 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x$, $\log_{\frac{1}{3}}x=2x$, $\log_{\frac{1}{2}}x=2x$로 변형한다면 세 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프와 직선 $y=2x$만 그리면 된다.

이때 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이기 때문에 그래프를 그리기가 조금 더 수월하다.

03 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 만족시키는 $f(x)$의 값을 정수 부분과 소수 부분으로 나누어 생각한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 $f(x)$의 값이 정수임을 이용하여 a_n의 규칙을 찾는다.
❸ 단계	a_{10}의 값을 구한다.

$\log_2\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$에서 $\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$

$\therefore 1\le\dfrac{f(x)}{[f(x)]}<2$

이때 $f(x)=\log_2 x=k+\alpha$ (k는 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

$[f(x)]=k$이므로 $1\le\dfrac{k+\alpha}{k}<2$

$1\le 1+\frac{a}{k}<2 \qquad \therefore 0\le \frac{a}{k}<1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

그런데 $0<x<1$에서 $\log_2 x<0$, 즉 $k+a<0$이고

$0\le a<1$이므로 $k<0$

㉠의 양변에 k를 곱하면

$k<a\le 0$이고, $0\le a<1$이므로 $a=0$

즉, $f(x)=\log_2 x=k$이므로

$x=2^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$ (단, k는 음의 정수)

이때 $-k=n$으로 놓으면 n은 자연수이고, n이 증가하면 x의 값은 감소한다.

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \therefore a_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$ 　　답 $\frac{1}{1024}$

04 해결단계

❶ 단계	$n=1, 2, 3, 4$를 대입하여 네 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$, $y=f_4(x)$를 구하고, 그래프를 그린다.
❷ 단계	세 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}} x$, $k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그린다.
❸ 단계	**❶, ❷단계**에서 그린 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하고, $a+b+c$의 값을 구한다.

$f_n(x)=-|x-1|+\frac{n+4}{4}$ $\left(단,\ 1-\frac{n}{4}\le x\le 1+\frac{n}{4}\right)$

에서 n 대신에 1, 2, 3, 4를 대입하면

$f_1(x)=-|x-1|+\frac{5}{4}$ $\left(단,\ \frac{3}{4}\le x\le \frac{5}{4}\right)$

$f_2(x)=-|x-1|+\frac{3}{2}$ $\left(단,\ \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}\right)$

$f_3(x)=-|x-1|+\frac{7}{4}$ $\left(단,\ \frac{1}{4}\le x\le \frac{7}{4}\right)$

$f_4(x)=-|x-1|+2$ (단, $0\le x\le 2$)

이때 $1-\frac{n}{4}\le x\le 1+\frac{n}{4}$에서

$-\frac{n}{4}\le x-1\le \frac{n}{4}$

$|x-1|\le \frac{n}{4}$, $-|x-1|\ge -\frac{n}{4}$

$\therefore -|x-1|+\frac{n+4}{4}\ge 1$

즉, 함수 $y=f_n(x)$의 최솟값은 1이다.

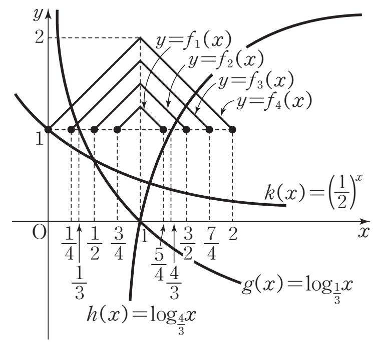
이때 세 곡선 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}} x$, $k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 y좌표가 1인 점을 각각 구하면

$1=\log_{\frac{1}{3}} x$에서 $x=\frac{1}{3} \qquad \therefore \left(\frac{1}{3},\ 1\right)$

$1=\log_{\frac{4}{3}} x$에서 $x=\frac{4}{3} \qquad \therefore \left(\frac{4}{3},\ 1\right)$

$1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $x=0 \qquad \therefore (0,\ 1)$

세 곡선 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}} x$, $k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 네 함수 $y=f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, 4)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $a=2$, $b=3$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+3+1=6$ 　　답 6

05 해결단계

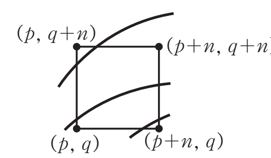
❶ 단계	조건 ㈎를 만족시키면서 한 변의 길이가 3 또는 4인 정사각형은 각 변이 좌표축에 평행해야 함을 파악한다.
❷ 단계	정사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하고, 조건 ㈏를 만족시키기 위한 p, q의 조건을 구한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구한 후, a_3+a_4의 값을 구한다.

네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 자연수이면서 한 변의 길이가 3 또는 4인 정사각형은 각 변이 모두 x축 또는 y축에 평행해야 한다.

한 변의 길이를 n이라 하고 네 꼭짓점의 좌표를

$(p,\ q)$, $(p+n,\ q)$, $(p,\ q+n)$, $(p+n,\ q+n)$

이라 하면 조건 ㈏에서 정사각형은 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16} x$와 만나야 하므로 다음 그림과 같아야 한다.



점 $(p,\ q+n)$은 곡선 $y=\log_2 x$보다 위쪽에 위치해야 하고, 점 $(p+n,\ q)$는 곡선 $y=\log_{16} x$보다 아래쪽에 위치해야 하므로

$q+n>\log_2 p$에서 (밑)$=2>1$이므로 $p<2^{q+n}$

$q<\log_{16}(p+n)$에서 (밑)$=16>1$이므로 $p+n>16^q$

$\therefore p>16^q-n$

따라서 $16^q-n<p<2^{q+n}$이다.

(i) $n=3$일 때,

$16^q-3<p<2^{q+3}$

$q=1$이면 $13<p<16$이므로 $p=14$, 15

$q\ge 2$이면 $16^q-3=2^{4q}-3>2^{q+3}$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 p의 값이 존재하지 않는다.

$\therefore a_3=2$

(ii) $n=4$일 때,

$16^q-4<p<2^{q+4}$

$q=1$이면 $12<p<32$이므로

$p=13$, 14, 15, $\cdots$, 31

$q\ge 2$이면 $16^q-4=2^{4q}-4>2^{q+4}$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 p의 값이 존재하지 않는다.

$\therefore a_4=31-13+1=19$

(i), (ii)에서 $a_3+a_4=2+19=21$ **답** 21

BLACKLABEL 특강 **참고**

정사각형의 각 변이 x축, y축에 평행하지 않다고 가정하자. 정사각형의 네 꼭짓점 중 이웃한 두 꼭짓점의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(x_1<x_2, y_1<y_2)$라 하면 정사각형의 한 변의 길이 n은 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다. 또한, x_1, x_2, y_1, y_2는 모두 자연수이므로 x_2-x_1, y_2-y_1도 자연수이고, (x_2-x_1, y_2-y_1, n) 또는 (y_2-y_1, x_2-x_1, n)은 피타고라스 정리를 만족시키는 피타고라스 수이다. 이때 $n=3$ 또는 $n=4$인 경우는 존재하지 않으므로 한 변의 길이가 3 또는 4이면서 네 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수인 정사각형은 각 변이 모두 x축 또는 y축에 평행해야 한다. 같은 방법으로 한 변의 길이가 7 또는 9인 정사각형의 각 변도 항상 x축, y축에 평행해야 한다.

06 해결단계

❶ 단계	두 점 P, Q가 직선 $y=x+2$ 위의 점임을 이용하여 두 점의 좌표를 정한다.
❷ 단계	두 점 P, Q가 두 곡선 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$ 위의 점이므로 ❶단계에서 정한 두 점 P, Q의 좌표를 대입하여 관계식을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 관계식을 연립하여 a, b의 값을 각각 구한 후, ab의 값을 구한다.

세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프가 모두 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나므로

P$(p, p+2)$, Q$(q, q+2)$라 하자.

두 점 P, Q는 곡선 $y=\log_a bx$ 위의 점이므로

$p+2=\log_a bp$ ······㉠

$q+2=\log_a bq$ ······㉡

㉠－㉡을 하면

$p-q=\log_a bp-\log_a bq$

$p-q=\log_a \dfrac{p}{q}$, $a^{p-q}=\dfrac{p}{q}$

$\therefore a^p=\dfrac{p}{q}a^q$ ······㉢

또한, 두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x+b$ 위의 점이므로

$p+2=a^p+b$ ······㉣

$q+2=a^q+b$ ······㉤

㉣－㉤을 하면

$p-q=a^p-a^q$

$=\dfrac{p}{q}a^q-a^q$ ($\because$ ㉢)

$=\dfrac{p-q}{q}a^q$

한 직선 위의 두 점 P, Q가 서로 다른 점이면 x좌표도 서로 다르므로 $p\neq q$이고, 위의 식의 양변을 $p-q$로 나누면

$1=\dfrac{a^q}{q}$ $\quad\therefore a^q=q$

위의 식을 ㉤에 대입하면

$q+2=q+b$ $\quad\therefore b=2$

$b=2$와 $q=a^q$를 ㉡에 대입하면

$q+2=\log_a 2a^q$, $q+2=\log_a 2+q$

$2=\log_a 2$, $a^2=2$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

$\therefore ab=2\sqrt{2}$ **답** $2\sqrt{2}$

• 다른 풀이 •

세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프를 모두 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수의 식은

$y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$, $y=x$

세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프가 모두 서로 다른 두 점에서 만나므로 세 함수

$y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$, $y=x$의 그래프도 모두 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 두 곡선 $y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$는 서로 역함수 관계이어야 한다.

$y=\log_a b(x-2)$에서 $b(x-2)=a^y$

$x-2=\dfrac{a^y}{b}$, $x=\dfrac{a^y}{b}+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{a^x}{b}+2$

위의 함수가 $y=a^{x-2}+b$와 같아야 하므로

$\dfrac{1}{b}=a^{-2}$, $b=2$ $\quad\therefore a=\sqrt{2}$, $b=2$

$\therefore ab=2\sqrt{2}$

07 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 점 B의 y좌표가 1보다 크고, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$가 감소함수임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	ㄴ은 점 A의 y좌표가 1보다 작고, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$이 감소함수임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄷ은 주어진 네 곡선 사이의 관계를 이해하고, ㄴ에서 구한 것을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 점 B는 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위의 점이므로 진수의 조건에 의하여 $b>0$

또한, 점 B는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로 $b>0$이면

$2^b>1$ ······㉠

한편, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위의 점 중에서 y좌표가 1인 점은

$1=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $x=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 ㉠에 의하여 $b<\dfrac{1}{2}$

$\therefore 0<b<\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 점 A의 x좌표는 음수이므로

$a<0$에서 $2^a<1$ ······㉡

한편, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 위의 점 중에서 y좌표가 1인 점은

$1=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 ㉡에 의하여

$a > -\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore 2^a > 2^{-\frac{1}{2}}$ ($\because$ (밑)$=2>1$)

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < 2^a < 1$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^{x-1}$이고, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$이므로 두 점 A, C의 y좌표는 같아야 한다.

즉, $2^a = \log_{\frac{1}{2}} c$

이때 ㄴ에서 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^a < 1$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \log_{\frac{1}{2}} c < 1$

$\therefore \frac{1}{2} < c < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\left(\because (\text{밑})=\frac{1}{2}<1\right)$

한편, 점 C$(c, \log_{\frac{1}{2}} c)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$d = \frac{|c - \log_{\frac{1}{2}} c|}{\sqrt{2}} = \frac{\log_{\frac{1}{2}} c - c}{\sqrt{2}}$

이때 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 y는 x가 최대일 때 최솟값을 갖고, x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \log_{\frac{1}{2}} c - c < \frac{1}{2}$이므로

$d < \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

이것이 수능 p. 42

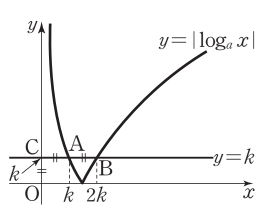
1 75	2 ③	3 ①	4 192

1

해결단계

❶ 단계	$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$를 이용하여 k, a의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	곡선 $y=\lvert\log_a x\rvert$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리 d를 구한다.
❸ 단계	$20d$의 값을 구한다.

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 (k, k)이고, 점 B의 좌표는 $(2k, k)$이다.



점 A(k, k)는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k = -\log_a k$ $\qquad \cdots\cdots ㉠$

점 B$(2k, k)$는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k = \log_a 2k$ $\qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡$-$㉠을 하면

$\log_a 2k + \log_a k = 0$, $\log_a 2k^2 = 0$

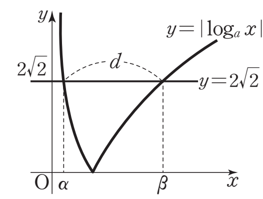
$2k^2 = 1 \qquad \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because k>0$)

또한, ㉡에서 $a^k = 2k$이므로

$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$a = (2k)^{\frac{1}{k}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad \cdots\cdots ㉢$

다음 그림과 같이 곡선 $y=\lvert\log_a x\rvert$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.



$-\log_a \alpha = 2\sqrt{2}$에서 $\log_a \alpha = -2\sqrt{2}$이므로

$\alpha = a^{-2\sqrt{2}} = 2^{-2}$ ($\because$ ㉢)

$= \frac{1}{4}$

$\log_a \beta = 2\sqrt{2}$에서

$\beta = a^{2\sqrt{2}} = 2^2$ ($\because$ ㉢)

$=4$

따라서 $d = \beta - \alpha = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$이므로

$20d = 20 \times \frac{15}{4} = 75$ **답** 75

2

해결단계

❶ 단계	두 점 P, R가 두 곡선의 교점임을 이용하여 x_1, x_3에 관한 식을 각각 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 이용하여 x_1과 x_3을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하고, x_1x_3의 값을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 값을 이용하여 x_1+x_3의 값을 구한다.

점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=-\log_2 x$의 교점이므로

$\log_2(-x_1+k) = -\log_2 x_1$

$-x_1 + k = \frac{1}{x_1}$

$\therefore x_1^2 - kx_1 + 1 = 0$ $\qquad \cdots\cdots ㉠$

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$의 교점이므로

$-\log_2(-x_3+k) = \log_2 x_3$

$\frac{1}{-x_3+k} = x_3$

$\therefore x_3^2 - kx_3 + 1 = 0$ $\qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_3 = 1$

이때 $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$이므로

$(x_1+x_3)^2 = (x_3-x_1)^2 + 4x_1x_3$

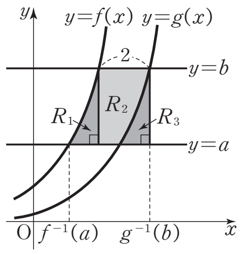
$= (2\sqrt{3})^2 + 4\times 1 = 16$

$\therefore x_1 + x_3 = 4$ **답** ③

3 해결단계

❶ 단계	조건 ㈎를 만족시키는 a, b의 관계식을 구한다.
❷ 단계	조건 ㈏를 만족시키는 a, b의 관계식을 구한다.
❸ 단계	a, b의 값을 각각 구하고, $a+b$의 값을 구한다.

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$S_1=S_3$

조건 ㈎에서

$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$

$\therefore b-a=3$ ······㉠

조건 ㈏에서

$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면

$f(p)=a$, $g(q)=b$이므로

$2^p=a$, $2^{q-2}=b$

$\therefore p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$

이때

$q-p=\log_2 4b-\log_2 a$

$=\log_2 \dfrac{4b}{a}=\log_2 6$

이므로

$\dfrac{4b}{a}=6$ $\quad\therefore 3a=2b$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=9$

$\therefore a+b=15$

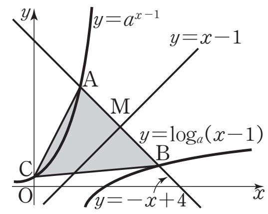
답 ①

4 해결단계

❶ 단계	두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$이 어떤 직선에 대하여 대칭인지 그 직선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 직선과 직선 $y=-x+4$의 교점을 구하고 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$임을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 점 A의 좌표를 이용하여 a의 값을 구하고 삼각형 ABC의 넓이 S를 구한 후, $50\times S$의 값을 구한다.

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

이때 다음 그림과 같이 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면



$-x+4=x-1$에서 $2x=5$ $\quad\therefore x=\dfrac{5}{2}$

이것을 $y=x-1$에 대입하면 $y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$ $\left(0<k<\dfrac{5}{2}\right)$라 하면

$\overline{AM}=\sqrt{\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\dfrac{5}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2k^2-10k+\dfrac{25}{2}}=\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2k^2-10k+\dfrac{25}{2}=2$

$4k^2-20k+21=0$

$(2k-3)(2k-7)=0$

$\therefore k=\dfrac{3}{2}$ $\left(\because 0<k<\dfrac{5}{2}\right)$

즉, $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$이고 점 A는 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점이므로

$\dfrac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$, $a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore a=\dfrac{25}{4}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$이고,

점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\dfrac{\left|0+\dfrac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{48\sqrt{2}}{25}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{48\sqrt{2}}{25}$

$=\dfrac{96}{25}$

$\therefore 50\times S=50\times\dfrac{96}{25}=192$

답 192

Ⅱ 삼각함수

05 삼각함수의 정의

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 45~46

01 ③	02 6	03 $\frac{12}{7}\pi$	04 ③	05 ④
06 $3\sqrt{5}\pi$	07 ①	08 $\frac{1}{2}$	09 ④	10 ①
11 $8\sqrt{5}$	12 ④	13 ①	14 ①	15 2
16 ③				

01 ㄱ. $225^\circ=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{4}\pi$ (참)

ㄴ. $-1035^\circ=360^\circ\times(-3)+45^\circ$이므로 제1사분면의 각이다. (거짓)

ㄷ. 1라디안은 호의 길이와 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

02 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가

$40^\circ=40\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$

이고, 각 θ를 나타내는 동경이 동경 OP와 일치하므로

$\theta=2n\pi+\frac{2}{9}\pi$ (단, n은 정수)

이때 $-\frac{9}{2}\pi<\theta<\frac{15}{2}\pi$에서

$-\frac{9}{2}\pi<2n\pi+\frac{2}{9}\pi<\frac{15}{2}\pi$

$-\frac{9}{2}\pi-\frac{2}{9}\pi<2n\pi<\frac{15}{2}\pi-\frac{2}{9}\pi$

$-\frac{85}{18}<2n<\frac{131}{18}$

$\therefore -\frac{85}{36}<n<\frac{131}{36}$

즉, 부등식을 만족시키는 정수 n은 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이므로 구하는 각 θ의 개수는 6이다. **답** 6

03 각 2θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+5\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$7\theta=2n\pi \quad \therefore \theta=\frac{2n\pi}{7}$ ……㉠

이때 $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n\pi}{7}<\pi$이므로 $0<n<\frac{7}{2}$

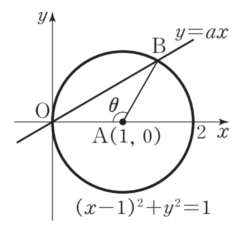
$\therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ ……㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{6}{7}\pi$

$\therefore \frac{2}{7}\pi+\frac{4}{7}\pi+\frac{6}{7}\pi=\frac{12}{7}\pi$ **답** $\frac{12}{7}\pi$

04 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심을 A, 이 원과 직선 $y=ax$ $(a>0)$의 두 교점 중 원점이 아닌 점을 B라 하면 오른쪽 그림과 같다.



$\angle OAB=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 하면 원 $(x-1)^2+y^2=1$이 직선 $y=ax$에 의하여 잘려서 생긴 두 호의 길이의 비가 $1:2$이므로 짧은 호 OB의 길이는

$\frac{1}{3}\times2\pi\times1=1\times\theta \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

이때 삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{AB}=1$인 이등변삼각형이므로

$\angle BOA=\angle OBA=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{6}$

$\therefore a=\tan(\angle BOA)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **답** ③

05 주어진 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$

반지름의 길이 r를 10 % 늘이고, 중심각의 크기 θ를 20 % 줄인 부채꼴의 넓이를 S'이라 하면

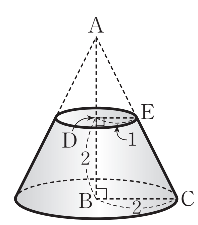
$S'=\frac{1}{2}\times\{(1+0.1)r\}^2\times(1-0.2)\theta$

$=\frac{1}{2}r^2\theta\times1.1^2\times0.8$

$=0.968S=(1-0.032)S$

따라서 부채꼴의 넓이는 3.2 % 줄어든다. **답** ④

06 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, D, E를 정하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 AA 닮음이므로



$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$

즉, $\overline{AD}:(\overline{AD}+2)=1:2$에서

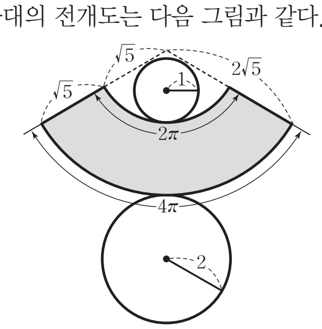
$\overline{AD}+2=2\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=2$

또한, $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{AE}=\overline{CE}=\sqrt{5}$

따라서 원뿔대의 전개도는 다음 그림과 같다.



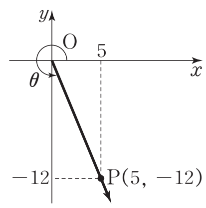
이때 원뿔대의 옆면의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4\pi-\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 2\pi$

$=4\sqrt{5}\pi-\sqrt{5}\pi=3\sqrt{5}\pi$

답 $3\sqrt{5}\pi$

07 $\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$
이므로



$\sin\theta=-\frac{12}{13},\ \cos\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1+\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$

$=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}$

답 ①

• 다른 풀이 •

P$(5,\ -12)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$
동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13},\ \tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}$

$=-\frac{13}{12}-\frac{5}{12}=-\frac{3}{2}$

08 $\triangle$POA에서 $\tan\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\overline{AP}$

$\triangle$BOQ에서 $\tan\theta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}$

즉, $\overline{AP}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}$에서 $\overline{OQ}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{AP}}$

그런데 $\overline{OQ}=2\overline{AP}\times\overline{BQ}$이므로

$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AP}}=2\overline{AP}\times\overline{BQ}$

$2\overline{AP}^2=1\qquad \therefore \overline{AP}^2=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan^2\theta=\overline{AP}^2=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

$\triangle$BOQ, $\triangle$POA에서 세 선분 OQ, AP, BQ의 길이를 각각 θ로 나타내면
$\overline{OQ}=\overline{OB}\cos\theta=\cos\theta$, $\overline{AP}=\overline{OA}\tan\theta=\tan\theta$,
$\overline{BQ}=\overline{OB}\sin\theta=\sin\theta$
이때 $\overline{OQ}=2\overline{AP}\times\overline{BQ}$에서
$\cos\theta=2\tan\theta\times\sin\theta$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$이므로 위의 식의 양변을 $2\cos\theta$로 나누면

$\frac{1}{2}=\tan\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \tan^2\theta=\frac{1}{2}$

09 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta<0$

또한, $\sin\theta\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \tan\theta>0$

즉, $\sin\theta<0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta<0,\ \cos\theta-\tan\theta<0$

$\therefore |\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta-\tan\theta|$

$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta$

답 ④

10 $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\sqrt{3}$에서

$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

$(\sqrt{3}+1)\sin\theta=(\sqrt{3}-1)\cos\theta,\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

답 ①

• 다른 풀이 •

$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\sqrt{3}$이므로

$1+\tan\theta=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\theta$

$(1+\sqrt{3})\tan\theta=\sqrt{3}-1$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

11 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{4\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{4\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=8\sqrt{5}$

답 $8\sqrt{5}$

12

점 $\mathrm{P}(x, y)$가 단위원 위의 점이므로

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$

즉, $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{2}$에서

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{5}{2}$$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{5}$

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=1-2\times\left(-\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{9}{5}$$

이때 $x<0$, $y>0$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{9}{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ④

• 다른 풀이 •

삼각함수의 정의에 의하여 $\dfrac{y}{x}=\tan\theta$

이때 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-\dfrac{5}{2}$에서 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{5}{2}$

$2\tan^2\theta+5\tan\theta+2=0$

$(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0$

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\tan\theta=-2$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

즉, 점 P의 좌표는 $(-k, 2k)$ 또는 $(-2k, k)$ $(k>0)$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5}k$

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sin\theta+(-\cos\theta)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

13

이차방정식 $x^2+2ax+4=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-2a$$

$$\therefore \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-2a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\frac{1}{4}}=-2a$$

$$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{4}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2}{4}$, $1+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{a^2}{4}$ ($\because$ ㉡)

$\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3}{2}$, $a^2=6$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{6}$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

즉, ㉠에서 $-2a>0$이므로 $a<0$

$\therefore a=-\sqrt{6}$ 답 ①

14

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos(2\pi+\theta)+\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=-\cos\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times(-\sin\theta)$$
$$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-1$$

답 ①

15

$75^\circ=90^\circ-15^\circ$이므로 주어진 식의 삼각함수를 모두 15°에 대한 삼각함수로 변환하여 계산하면

$$\frac{\sin 75^\circ-\cos 75^\circ-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\tan 75^\circ-\cos 75^\circ}$$
$$=\frac{\sin(90^\circ-15^\circ)-\cos(90^\circ-15^\circ)-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\tan(90^\circ-15^\circ)-\cos(90^\circ-15^\circ)}$$
$$=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\times\frac{1}{\tan 15^\circ}-\sin 15^\circ}$$
$$=\frac{2\cos 15^\circ-2\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\times\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}-\sin 15^\circ}$$
$$=\frac{2(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=2$$

답 2

BLACKLABEL 특강 **풀이 첨삭**

90°를 이용한 삼각함수의 변환에 익숙하지 않다면 다음과 같이 $\dfrac{\pi}{2}$를 이용하여 변환해도 된다.

$15^\circ=\theta$로 놓으면 $75^\circ=90^\circ-15^\circ=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\sin 75^\circ=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\cos 15^\circ$

$\cos 75^\circ=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sin 15^\circ$

$\tan 75^\circ=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

16

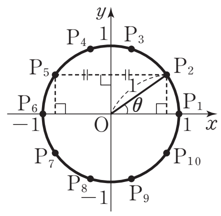
단위원을 10등분하였고 $\angle \mathrm{P_1OP_2}=\theta$이므로

$10\theta=2\pi \qquad \therefore 5\theta=\pi$

$$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta$$
$$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$$
$$+\cos(\pi+\theta)+\cos(\pi+2\theta)$$
$$+\cos(\pi+3\theta)+\cos(\pi+4\theta)$$
$$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$$
$$-\cos\theta-\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos 4\theta$$
$$=\cos 5\theta=\cos\pi=-1$$

답 ③

• 다른 풀이 •



오른쪽 그림에서 두 점 P_1과 P_6, 두 점 P_2와 P_5, 두 점 P_3과 P_4, 두 점 P_7과 P_{10}, 두 점 P_8과 P_9는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 각 두 점의 x좌표는 절댓값이 같고, 부호가 서로 반대이다.

즉, 삼각함수의 정의에 의하여 점 P_2의 x좌표는 $\cos\theta$이고 점 P_5의 x좌표는 $\cos 4\theta$이므로

$\cos\theta+\cos 4\theta=0$

같은 방법으로

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$

$$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta+\cos 6\theta+\cos 7\theta+\cos 8\theta+\cos 9\theta$$
$$=\cos 5\theta=\cos\pi=-1$$

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 47~50

01 $\frac{3}{5}\pi$	02 ⑤	03 4	04 9	05 25
06 30	07 8	08 ②	09 ②	10 ④
11 3	12 ④	13 ⑤	14 ③	15 ③
16 ①	17 ②	18 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	19 ②	20 $\frac{7}{8}$
21 $\frac{5}{2}\pi$	22 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	23 ⑤	24 24	25 37
26 ①	27 ③	28 23	29 48	30 36

01 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고, 방향이 서로 반대이므로 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $6\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이므로

$5\theta=2n\pi+\pi \qquad \therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ……㉠

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{4}<n<2$

$\therefore n=1$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2\times1+1}{5}\pi=\frac{3}{5}\pi$

답 $\frac{3}{5}\pi$

02 θ가 제1사분면의 각이므로

$\theta=2n\pi+\alpha$ $\left(단,\ n은\ 정수,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \frac{\theta}{2}=n\pi+\frac{\alpha}{2}$

(i) $n=2m$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=2m\pi+\frac{\alpha}{2}$에서 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

즉, $\frac{\theta}{2}$가 제3사분면의 각이라는 조건에 맞지 않다.

(ii) $n=2m+1$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=(2m+1)\pi+\frac{\alpha}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}$에서

$\pi<\pi+\frac{\alpha}{2}<\frac{5}{4}\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서

$\frac{\theta}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore \frac{\theta}{4}=m\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$

(iii) $m=2k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}<\frac{5}{8}\pi$이므로

$\frac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

(iv) $m=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}=2k\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}$에서

$\frac{3}{2}\pi<\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}<\frac{13}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

(iii), (iv)에서 $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 ⑤

• 다른 풀이 •

θ가 제1사분면의 각이므로

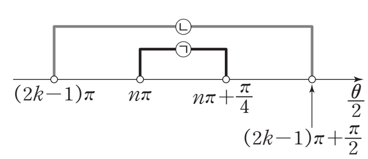
$2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$\therefore n\pi<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{4}$ ……㉠

그런데 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이므로

$(2k-1)\pi<\frac{\theta}{2}<(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, k는 정수) ……㉡

이때 제1사분면의 각 θ에 대하여 $\frac{\theta}{2}$가 제3사분면의 각이므로 부등식 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $(2k-1)\pi\le n\pi$에서 $2k-1\le n$

$n\pi+\frac{\pi}{4}\le(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $n\le 2k-\frac{3}{4}$

$\therefore 2k-1\le n\le 2k-\frac{3}{4}$

이때 n, k가 모두 정수이므로 $n=2k-1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$(2k-1)\pi<\dfrac{\theta}{2}<(2k-1)\pi+\dfrac{\pi}{4}$

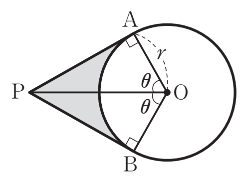
$\therefore\ \dfrac{(2k-1)}{2}\pi<\dfrac{\theta}{4}<\dfrac{(2k-1)}{2}\pi+\dfrac{\pi}{8}$

따라서 $\dfrac{\theta}{4}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

03 $\overline{\mathrm{AR}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}$는 원의 지름이므로 부채꼴 OAB와 부채꼴 OQR의 넓이는 서로 같다.

$\overline{\mathrm{OA}}=r$라 하면

(부채꼴 OAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}r^2\times2\theta=r^2\theta$ ……㉠



오른쪽 그림과 같이 두 점 O, P를 선분으로 연결하면 △OAP, △OBP는 합동이므로

$\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}=r\tan\theta$

이때 주어진 그림의 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$ 및 호 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이와 같다.

$\therefore$ (부채꼴 OAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\square\mathrm{OAPB}$

$=\triangle\mathrm{OAP}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}}$

$=\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta$ ……㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$r^2\theta=\dfrac{1}{2}r^2\tan\theta\qquad\therefore\ \tan\theta=2\theta$

$\therefore\ \dfrac{2\tan\theta}{\theta}=\dfrac{2\times2\theta}{\theta}=4$

답 4

04 부채꼴 PQR가 반원의 둘레를 따라 회전하면서 부채꼴 PQR의 중심 P가 반원의 둘레와 두 번째로 만나는 순간에 처음 자리로 되돌아 왔으므로 반원의 둘레의 길이는 부채꼴 PQR의 둘레의 길이의 2배이다. 이때

(반원의 둘레의 길이)$=2\times3+3\times\pi=6+3\pi$,

(부채꼴 PQR의 둘레의 길이)$=2\times2+2\times\theta=4+2\theta$

이므로

$6+3\pi=2(4+2\theta)$, $6+3\pi=8+4\theta$

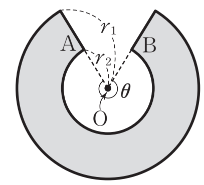
$4\theta=3\pi-2\qquad\therefore\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$24ab=24\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=9$

답 9

05 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 정하고 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 색칠한 도형의 둘레의 길이가 20이므로



$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=20$

$\therefore\ (r_1+r_2)\theta$

$=20-2(r_1-r_2)$ ……㉠

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}r_1^2\theta-\dfrac{1}{2}r_2^2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1^2-r_2^2)\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1-r_2)\{20-2(r_1-r_2)\}$ ($\because$ ㉠)

$=-(r_1-r_2)^2+10(r_1-r_2)$

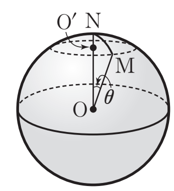
$=-(r_1-r_2-5)^2+25$

이때 ㉠에서 $0<r_1-r_2<10$

따라서 $r_1-r_2=5$일 때, 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 25이다.

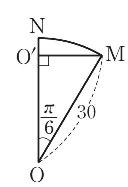
답 25

06 오른쪽 그림과 같이 구 위의 한 점 N에서 고정한 실의 나머지 한 끝이 놓인 지점을 M, 구의 중심을 O라 하면 $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{ON}}=30$



부채꼴 OMN에서 $\angle\mathrm{NOM}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{NM}}=30\theta$이고 실의 길이는 5π이므로

$5\pi=30\theta\qquad\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$



이때 실 끝의 자취의 길이 l은 점 M이 그리는 원의 둘레의 길이이다. 이 원의 중심을 O′이라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{O'M}}=\overline{\mathrm{OM}}\sin\dfrac{\pi}{6}=30\times\dfrac{1}{2}=15$

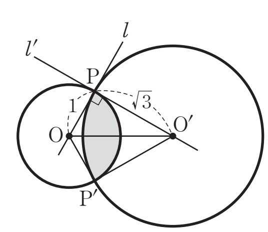
△OO′M에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{O'M}}}{\overline{\mathrm{OM}}}=\sin\dfrac{\pi}{6}$

따라서 자취의 길이 l은

$l=2\pi\times15=30\pi\qquad\therefore\ \dfrac{l}{\pi}=\dfrac{30\pi}{\pi}=30$

답 30

07 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 두 교점을 P, P′이라 하자.



점 P에서의 각 원의 접선을 l, l'이라 하면 $l\perp l'$이고, 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로 l, l'은 서로 다른 원의 중심을 지난다.

즉, $\angle\mathrm{OPO'}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{O'P}}=\sqrt{3}$이므로

△OPO′에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

즉, $\overline{\mathrm{OO'}}:\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{O'P}}=2:1:\sqrt{3}$이므로

$\angle \mathrm{POO'}=\frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{PO'O}=\frac{\pi}{6}$

같은 방법으로 $\triangle \mathrm{OP'O'}$에서

$\angle \mathrm{P'OO'}=\frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{P'O'O}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ \angle \mathrm{POP'}=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$, $\angle \mathrm{PO'P'}=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

구하는 넓이를 S라 하면

$S=(\text{부채꼴 OPP'의 넓이})+(\text{부채꼴 O'PP'의 넓이})$

$\qquad -\underbrace{(\text{사각형 OPO'P'의 넓이})}_{=2\triangle \mathrm{OPO'}}$

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}-2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)$

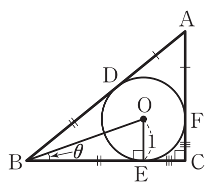
$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}=\frac{a}{6}\pi-\sqrt{b}$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a+b=5+3=8$

답 8

08 직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA와 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CF}}$

또한, 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로 $\angle \mathrm{OEB}=90^\circ$

직각삼각형 OBE에서 $\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{OE}}=1$

이때 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$

$\left(\frac{1}{\tan\theta}+x\right)^2=\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)^2+(x+1)^2$

$\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2x}{\tan\theta}+x^2=\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1+x^2+2x+1$

$2x\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}+2$

$2x\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=2\times\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta}$

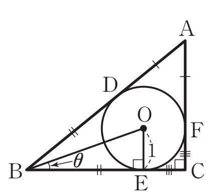
$\therefore\ x=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=x+1=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+1=\frac{2}{1-\tan\theta}$

답 ②

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변과 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면



$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CF}}$

직각삼각형 OBE에서

$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\overline{\mathrm{BE}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{BE}}}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{OE}}=1$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=x$라 하면 내접원의 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times1\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}})$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)(x+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2x+2\right)$

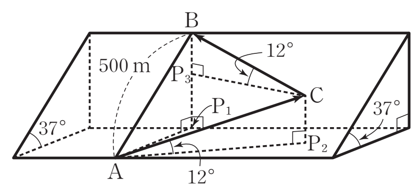
$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)=2(x+1)+\frac{2}{\tan\theta}$

$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}$

$(x+1)\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{\tan\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=x+1=\frac{2}{\tan\theta}\times\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}$

09 다음 그림과 같이 A 지점과 B 지점을 지나는 우회도로가 경유하는 지점을 C라 하고, 두 지점 B, C에서 경사 없는 바닥면에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, C 지점에서 선분 $\mathrm{BP_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P_3}$이라 하자.



$\overline{\mathrm{CP_2}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin 12^\circ$, $\overline{\mathrm{BP_3}}=\overline{\mathrm{BC}}\sin 12^\circ$이므로

$\overline{\mathrm{BP_1}}=\overline{\mathrm{CP_2}}+\overline{\mathrm{BP_3}}$

$\quad=(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}})\sin 12^\circ$

또한, $\overline{\mathrm{BP_1}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 37^\circ=500\sin 37^\circ$이므로

$(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}})\sin 12^\circ=500\sin 37^\circ$

따라서 우회도로의 거리는

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=500\times\frac{\sin 37^\circ}{\sin 12^\circ}$

$\qquad=500\times\frac{0.6}{0.2}$

$\qquad=1500(\mathrm{m})$

답 ②

10 삼각형 OBC에서 $\angle \mathrm{BOC}=\pi-\theta$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OB}}\times\tan(\pi-\theta)=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

삼각형 OAD에서 $\angle \mathrm{OAD}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{AOD}=\pi-\theta$이므로

$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{OD}}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore\ \triangle \mathrm{OCD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$\qquad=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times(-\tan\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$

또한, 부채꼴 OAB에서 $\angle AOB=\pi-\theta$이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}$

따라서 $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ 및 $\overset{\frown}{AB}$로 둘러싸인 부분의 넓이는

(삼각형 OCD의 넓이)−(부채꼴 OAB의 넓이)

$=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}-\frac{\pi-\theta}{2}$

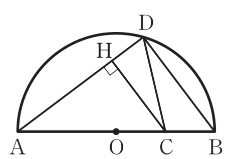
$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 참고

원의 접선의 방정식을 이용하여 $\overline{OD}$를 구할 수도 있다.
주어진 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이므로 $A(\cos\theta, \sin\theta)$
점 A에서의 원의 접선의 방정식은
$x\cos\theta+y\sin\theta=1$
점 D는 접선의 x절편이므로
$x\cos\theta=1 \quad \therefore x=\frac{1}{\cos\theta}$
즉, $D\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$이므로 $\overline{OD}=-\frac{1}{\cos\theta}$

11

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 ACH에서

$\tan(\angle CAD)=\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$,

직각삼각형 CDH에서 $\tan(\angle ADC)=\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$이므로

$\frac{\tan(\angle ADC)}{\tan(\angle CAD)}=\frac{\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}}{\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}$

또한, $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=3:1 \quad \therefore \overline{AC}=3\overline{BC}$ ······㉠

한편, 선분 AB가 반원 O의 지름이므로

$\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

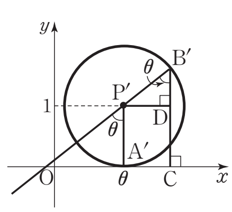
$\therefore \triangle ACH \backsim \triangle ABD$ (AA 닮음)

$\therefore \frac{\tan(\angle ADC)}{\tan(\angle CAD)}=\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=3$ ($\because$ ㉠) 답 3

12

$\overline{OP}=1$, $\angle OPA=\theta$에서 $\overset{\frown}{OA}=\theta$이므로 원을 x축의 방향으로 θ만큼 굴리면 점 A가 x축 위에 놓이게 된다.

두 점 P, A가 이동한 점을 각각 P′, A′이라 하고, 점 B′에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 P′에서 $\overline{B'C}$에 내린 수선의 발을 D라 하면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\triangle B'P'D$는 직각삼각형이고 $\overline{B'P'}=1$이므로

$\overline{P'D}=\overline{B'P'}\sin\theta=\sin\theta$

$\overline{B'D}=\overline{B'P'}\cos\theta=\cos\theta$

$\therefore$ (점 B′의 x좌표)$=\overline{OA'}+\overline{A'C}$

$=\overline{OA'}+\overline{P'D}=\theta+\sin\theta$,

(점 B′의 y좌표)$=\overline{CD}+\overline{B'D}$

$=\overline{A'P'}+\overline{B'D}=1+\cos\theta$

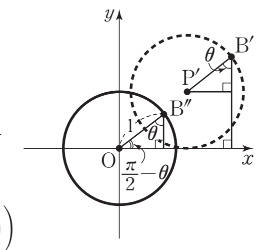
따라서 점 B′의 좌표는 $(\theta+\sin\theta, 1+\cos\theta)$이다.

답 ④

• 다른 풀이 •

원을 굴렸을 때, 점 P가 이동한 점을 P′이라 하면 $P'(\theta, 1)$

점 P′이 원점에 오도록, 즉 x축, y축의 방향으로 각각 $-\theta$, -1만큼 원을 평행이동하였을 때 점 B′이 이동한 점을 B″이라 하면 오른쪽 그림과 같다.



$B''\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$\therefore B''(\sin\theta, \cos\theta)$

다시 원점이 점 P′에 오도록, 즉 x축, y축의 방향으로 각각 θ, 1만큼 원을 평행이동하면 점 B″이 점 B′에 놓이게 되므로

$B'(\theta+\sin\theta, 1+\cos\theta)$

13

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{23}{32}$

즉, $2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{9}{32}$이므로

$\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{9}{64}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\underline{\sin\theta>0, \cos\theta<0}$이므로

$\sin\theta\cos\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\sin\theta\cos\theta=-\sqrt{\frac{9}{64}}=-\frac{3}{8}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)$

$=\frac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 답 ⑤

14

ㄱ. $\frac{\cos x}{\cos x+1}+\frac{\cos x}{\cos x-1}$

$=\frac{\cos x(\cos x-1)+\cos x(\cos x+1)}{(\cos x+1)(\cos x-1)}$

$=\frac{\cos^2 x-\cos x+\cos^2 x+\cos x}{\cos^2 x-1}$

$=\frac{2\cos^2 x}{-\sin^2 x}$

$=-\dfrac{2}{\tan^2 x}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1+\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$=\dfrac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{2}{\sin x}$ (거짓)

ㄷ. $\left(\tan x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

$=\dfrac{(\sin x+1)^2}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

15

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로

$\log_{\cos x}\sqrt{\tan x}+\log_{\sin x}\tan x=0$에서

$\dfrac{1}{2}\log_{\cos x}\dfrac{\sin x}{\cos x}+\log_{\sin x}\dfrac{\sin x}{\cos x}=0$

$\dfrac{1}{2}(\log_{\cos x}\sin x-1)+(1-\log_{\sin x}\cos x)=0$

$\dfrac{1}{2}\log_{\cos x}\sin x-\log_{\sin x}\cos x+\dfrac{1}{2}=0$

$\log_{\cos x}\sin x-2\log_{\sin x}\cos x+1=0$

$\log_{\cos x}\sin x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$0<\sin\theta<1$, $0<\cos\theta<1$이므로 $\log_{\cos\theta}\sin\theta>0$

$t-\dfrac{2}{t}+1=0$, $t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

이때 $t>0$이므로

$t=1$

따라서 $\log_{\cos x}\sin x=1$이므로

$\sin x=\cos x$ $\quad\therefore \tan x=1$ **답** ③

16

$f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=x$에서 $A=\dfrac{x}{1-x}$라 하면

$\dfrac{1}{A}=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}-1$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{A}+1=\dfrac{1+A}{A}$

$\therefore x=\dfrac{A}{1+A}$

이때 $0<x<1$에서 $0<\dfrac{A}{1+A}<1$

$0<1-\dfrac{1}{1+A}<1$, $0<\dfrac{1}{1+A}<1$

$1+A>1$ $\quad\therefore A>0$

즉, $f(A)=\dfrac{A}{1+A}$ $(A>0)$이므로

$f(\tan^2\theta)=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\sin^2\theta$ **답** ①

17

조건 (가)에서

$2n\pi<2\theta<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$n\pi<\theta<n\pi+\dfrac{\pi}{4}$

즉, θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

조건 (나)에서 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0$이므로

$\dfrac{D}{4}=\cos^2\theta-3\sin^2\theta$

$=1-4\sin^2\theta=0$

즉, $\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

또한, 주어진 이차방정식이 음수인 중근을 가지므로

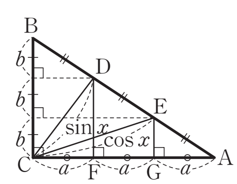
$\dfrac{\cos\theta}{3}<0$ $\quad\therefore \cos\theta<0$

따라서 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ **답** ②

18

$\overline{AC}=3a$, $\overline{BC}=3b$라 하고, 점 D, E에서 $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하면 오른쪽 그림과 같다.



직각삼각형 CFD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}^2=a^2+(2b)^2$

$=a^2+4b^2=\sin^2 x$ ……㉠

직각삼각형 CGE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}^2=(2a)^2+b^2$

$=4a^2+b^2=\cos^2 x$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$5(a^2+b^2)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\therefore a^2+b^2=\dfrac{1}{5}$

따라서 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=(3a)^2+(3b)^2=9(a^2+b^2)=9\times\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

19 A$(a,\ 0)$, C$(0,\ b)$이고, $\overline{OC'}=\overline{OC}=b$, $\angle AOC'=\theta$이므로 점 C′의 좌표는 $(b\cos\theta,\ b\sin\theta)$이다.

$\therefore \overline{AC}^2=a^2+b^2$ ……㉠,

$\overline{AC'}^2=(a-b\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2$
$=a^2-2ab\cos\theta+b^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$
$=a^2-2ab\cos\theta+b^2$ ……㉡

이때 ㉠, ㉡을 $\overline{AC}^2-\overline{AC'}^2=12$에 대입하면

$a^2+b^2-(a^2-2ab\cos\theta+b^2)=12$

$2ab\cos\theta=12$ $\therefore ab=\frac{6}{\cos\theta}$

따라서 직사각형 OABC의 넓이를 S라 하면

$S=ab=\frac{6}{\cos\theta}$ 답 ②

20 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+1=0$의 두 근이 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$에서

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=4$, $\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$
$=1^2-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
(1) $a,\ b,\ c$가 모두 유리수일 때,
$p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다. (단, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
(2) $a,\ b,\ c$가 모두 실수일 때,
$p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

21 이차방정식 $kx^2-(k+2)x+(k+1)=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{k+2}{k}$ ……㉠,

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k+1}{k}$ ……㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$1+\frac{2(k+1)}{k}=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$\frac{(k+2)^2}{k^2}-\frac{2(k+1)}{k}-1=0$

$k\neq0$이므로 위의 식의 양변에 k^2을 곱하면

$k^2+4k+4-2k^2-2k-k^2=0$

$-2k^2+2k+4=0$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $k=2$이면 주어진 이차방정식은 $2x^2-4x+3=0$이고, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times3=4-6=-2<0$

이므로 허근을 갖는다.

$\therefore k=-1$

$k=-1$일 때, 주어진 이차방정식은 $-x^2-x=0$이므로

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로

(i) $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$일 때, $\theta=\pi$

(ii) $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$일 때, $\theta=\frac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$ 답 $\frac{5}{2}\pi$

22 두 방정식 $x^2-6x\sin\theta+1=0$, $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 모두 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

방정식 $x^2-6x\sin\theta+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-6\sin\theta+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=6\sin\theta$ ……㉠

또한, 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$36\sin^2\theta+12\sin\theta-3=0$

$12\sin^2\theta+4\sin\theta-1=0$

$(6\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{6}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

그런데 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ ($\because \cos\theta<0$)

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

단계	채점 기준	배점
㈎	주어진 이차방정식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$을 θ를 이용하여 나타낸 경우	40%
㈏	주어진 사차방정식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식을 세운 경우	40%
㈐	㈎에서 구한 식을 ㈏에 대입하여 $\sin\theta$의 값을 구한 후, $\cos\theta$의 값을 구한 경우	20%

• 다른 풀이 •

두 방정식의 공통근을 a라 하면 a가 이차방정식
$x^2-6x\sin\theta+1=0$의 근이므로
$a^2-6a\sin\theta+1=0$
$\therefore a^2=6a\sin\theta-1$ ……㉡
사차방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$에서 $x=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다. $a\neq0$
사차방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

(i) $t=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$이므로 $x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 근이 공통근 a이면

$a^2+3a+1=0$ ……㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$6a\sin\theta-1+3a+1=0$, $6a\sin\theta+3a=0$

$3a(2\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because a\neq0$)

(ii) $t=1$일 때,

$x+\frac{1}{x}=1$이므로 $x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 근이 공통근 a이면

$a^2-a+1=0$ ……㉣

㉡을 ㉣에 대입하면

$6a\sin\theta-1-a+1=0$, $6a\sin\theta-a=0$

$a(6\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{6}$ ($\because a\neq0$)

그런데 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로 조건에 맞지 않다.

(i), (ii)에서 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

따라서 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\sqrt{\frac{3}{4}}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23 $0<A<\pi$, $0<B<\pi$, $A\neq B$에서 $\sin A=\sin B$이므로 $B=\pi-A$, 즉 $A+B=\pi$이다. 두 각 A, B가 나타내는 두 동경은 y축에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ (참)

ㄴ. $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$

$=0$ (참)

ㄷ. $\tan A+\tan B=\tan A+\tan(\pi-A)$

$=\tan A-\tan A$

$=0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

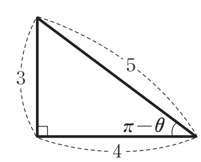
24 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 기울기는 $\tan\theta$이므로 직선 $3x+4y+3=0$, 즉

$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$에서 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$이고, $\tan\theta<0$이므로 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이다.

$\therefore \sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

이때 오른쪽 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 3, 4인 직각삼각형을 생각하면



$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$\cos(\pi+\theta)+\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{5}$

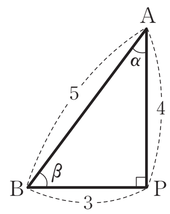
따라서 $p=5$, $q=19$이므로 $p+q=5+19=24$ 답 24

25 원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이때 $\triangle ABP$는 빗변이 $\overline{AB}$인 직각삼각형이므로



$\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$$\begin{aligned}\sin(5\alpha+4\beta)&=\sin\{4(\alpha+\beta)+\alpha\}\\&=\sin(2\pi+\alpha)\\&=\sin\alpha=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha+4\beta)&=\cos\{3(\alpha+\beta)+\beta\}\\&=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\beta\right)=\sin\beta=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$\therefore \sin(5\alpha+4\beta)\cos(3\alpha+4\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

따라서 $p=25$, $q=12$이므로

$p+q=25+12=37$ 　　답 37

26 $\tan\theta=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $(0<x<1)$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta=\frac{1-x}{x}$, $\tan^2\theta=\frac{1}{x}-1$

$\frac{1}{x}=1+\tan^2\theta$

$$\begin{aligned}\therefore x&=\frac{1}{1+\tan^2\theta}\\&=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\\&=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\&=\cos^2\theta\end{aligned}$$

이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{\sin^2\theta}{x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\sin^2\theta}{x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta(\cos^2\theta-\cos\theta)+\sin^2\theta(\cos^2\theta+\cos\theta)}{(\cos^2\theta+\cos\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta)}\\&=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta-\cos^2\theta}\\&=\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)}\\&=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}=\frac{2\sin^2\theta}{-\sin^2\theta}\\&=-2\ (\because \tan\theta\neq0\text{이므로 }\sin\theta\neq0)\end{aligned}$$

$0<x<1$에서 $\frac{1-x}{x}>0$이므로 $\tan\theta>0$ 　　답 ①

27 ㄱ. $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

$$\begin{aligned}&\sin^2 2^\circ+\sin^2 4^\circ+\sin^2 6^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 90^\circ\\&=(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+(\sin^2 4^\circ+\sin^2 86^\circ)+\cdots\\&\qquad+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 90^\circ\\&=(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+(\sin^2 4^\circ+\cos^2 4^\circ)+\cdots\\&\qquad+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 90^\circ\\&=1\times22+1^2=23\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}&\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ\\&=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+\cdots\\&\qquad+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ\\&=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots\\&\qquad+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ\\&=1\times44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0\\&=\frac{89}{2}\ (\text{거짓})\end{aligned}$$

ㄷ. $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$$\begin{aligned}&\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ\\&=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)\times\cdots\\&\qquad\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ\\&=\left(\tan 1^\circ\times\frac{1}{\tan 1^\circ}\right)\times\left(\tan 2^\circ\times\frac{1}{\tan 2^\circ}\right)\times\cdots\\&\qquad\times\left(\tan 44^\circ\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\right)\times\tan 45^\circ\\&=1^{44}\times1=1\ (\text{참})\end{aligned}$$

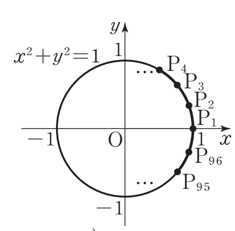
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 　　답 ③

28 $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)\\&\qquad-(\tan^2 67^\circ+\tan^2 68^\circ+\tan^2 69^\circ+\cdots+\tan^2 89^\circ)\\&=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)\\&\qquad-\left(\frac{1}{\tan^2 23^\circ}+\frac{1}{\tan^2 22^\circ}+\frac{1}{\tan^2 21^\circ}+\cdots+\frac{1}{\tan^2 1^\circ}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)\\&\qquad-\left(\frac{\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}+\frac{\cos^2 22^\circ}{\sin^2 22^\circ}+\frac{\cos^2 21^\circ}{\sin^2 21^\circ}+\cdots+\frac{\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}\right)\\&=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}-\frac{\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2 2^\circ}-\frac{\cos^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{\sin^2 23^\circ}-\frac{\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}\right)\\&=\frac{1-\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1-\cos^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}+\cdots+\frac{1-\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}\\&=\frac{\sin^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}+\frac{\sin^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}+\cdots+\frac{\sin^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}\\&=1\times23=23\end{aligned}$$

답 23

29 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$에 내접하는 정96각형의 각 꼭짓점을 $P_n(a_n,\ b_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 96)$이라 하면



$\angle P_nOP_{n+1}=\frac{\pi}{48}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 95$),

$\angle P_1OP_{96}=\frac{\pi}{48}$

동경 OP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하면

$$\theta_{n+48}-\theta_n=\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+48}$$
$$=\frac{\pi}{48}\times 48=\pi \ (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 48)$$

$\therefore\ \theta_{n+48}=\theta_n+\pi$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 48$)

점 P_n이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a_n=\cos\theta_n$

$\therefore\ {a_{n+48}}^2=\cos^2\theta_{n+48}=\cos^2(\theta_n+\pi)=\cos^2\theta_n={a_n}^2$

$\therefore\ {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{96}}^2$

$={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{48}}^2+{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{48}}^2$

$=2({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{48}}^2)$ ……㉠

또한,

$$\theta_{n+24}-\theta_n=\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+24}=\frac{\pi}{48}\times 24=\frac{\pi}{2}$$
(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 24$)

이므로

$\theta_{n+24}=\theta_n+\frac{\pi}{2}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 24$)

$\therefore\ {a_n}^2+{a_{n+24}}^2=\cos^2\theta_n+\cos^2\left(\theta_n+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos^2\theta_n+\sin^2\theta_n=1$

즉,

${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{48}}^2$

$=({a_1}^2+{a_{25}}^2)+({a_2}^2+{a_{26}}^2)+\cdots+({a_{24}}^2+{a_{48}}^2)$

$=1\times 24=24$

이므로 ㉠에서

${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{96}}^2=2\times 24=48$ **답** 48

30 해결단계

❶ 단계	동경 OP가 한 번에 $\frac{5}{18}\pi$만큼 회전하므로 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는 $2n\pi\div\frac{5}{18}\pi=\frac{36n}{5}$ (n은 자연수)임을 안다.
❷ 단계	N의 값을 구한다.
❸ 단계	$\sin\theta_{19}=-\sin\theta_1$, $\sin\theta_{20}=-\sin\theta_2$, $\cdots$, $\sin\theta_{36}=-\sin\theta_{18}$임을 이용하여 식을 정리한 후, 답을 구한다.

동경 OP가 한 번에 $\frac{5}{18}\pi$만큼 회전하므로 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는

$2n\pi\div\frac{5}{18}\pi=2n\pi\times\frac{18}{5\pi}=\frac{36n}{5}$ (단, n은 자연수)

위의 값이 자연수가 되는 n의 최솟값은 5이므로 처음으로 다시 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는

$N=\frac{36\times 5}{5}=36$

이때 $\theta_k=\frac{5}{18}\pi\times k$이므로

$\sin\theta_{19}=\sin\left(\frac{5}{18}\pi\times 19\right)=\sin\frac{95}{18}\pi$

$=\sin\left(5\pi+\frac{5}{18}\pi\right)=\sin\left(\pi+\frac{5}{18}\pi\right)$

$=-\sin\frac{5}{18}\pi=-\sin\theta_1$

같은 방법으로

$\sin\theta_{20}=-\sin\theta_2$, $\sin\theta_{21}=-\sin\theta_3$, $\cdots$,

$\sin\theta_{36}=-\sin\theta_{18}$

$\therefore\ N+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_N$

$=36+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{36}$

$=36+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{18}$

$-(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{18})$

$=36$ **답** 36

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 51

01 -1	**02** 4	**03** π	**04** $2\sqrt{26}$	**05** 218
06 $\frac{100}{3}\pi$	**07** $\frac{\sqrt{6}}{3}$			

01 해결단계

❶ 단계	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$과 $\sin x+\cos x=-1$을 연립하여 $\sin x$와 $\cos x$의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	$\sin^{2023}x+\cos^{2023}x$의 값을 구한다.

$\sin x+\cos x=-1$, 즉 $\cos x=-\sin x-1$을

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$에 대입하면

$\sin^2 x+(-\sin x-1)^2=1$

$\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x+1=1$

$2\sin^2 x+2\sin x=0$, $2\sin x(\sin x+1)=0$

$\therefore\ \sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$

즉, $\cos x=-\sin x-1$에서

$\sin x=0$일 때, $\cos x=-1$

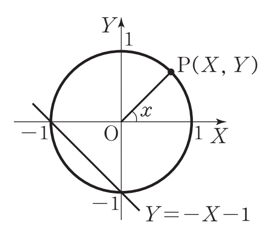
$\sin x=-1$일 때, $\cos x=0$

$\therefore\ \sin^{2023}x+\cos^{2023}x=-1$ **답** -1

• 다른 풀이 •

$\cos x=X$, $\sin x=Y$로 놓으면 $X^2+Y^2=1$이므로 점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$는 원 $X^2+Y^2=1$ 위의 점 중에서 직선 OP가 X축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 x인 점이다.

이때 $\sin x+\cos x=-1$은 $Y+X=-1$이므로 원 $X^2+Y^2=1$과 직선 $Y+X=-1$, 즉 $Y=-X-1$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 원 $X^2+Y^2=1$과 직선 $Y=-X-1$의 교점의 좌표 $(X,\ Y)$는 $(-1,\ 0)$ 또는 $(0,\ -1)$이므로 조건을 만족시키는 x에 대하여

$\cos x=-1$, $\sin x=0$ 또는 $\cos x=0$, $\sin x=-1$

$\therefore\ \sin^{2023}x+\cos^{2023}x=-1$

02 해결단계

❶단계	$\cos t$, $\sin t$를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.
❷단계	❶단계에서 구한 식을 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$에 대입하여 주어진 물체가 움직이는 자취의 방정식을 구한다.
❸단계	❷단계에서 구한 자취를 좌표평면 위에 나타낸 후, 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때와 가장 가까이 있을 때의 두 거리의 차를 구한다.

$x=2+2\cos t$, $y=6+2\sin t$에서

$\cos t=\dfrac{x-2}{2}$, $\sin t=\dfrac{y-6}{2}$

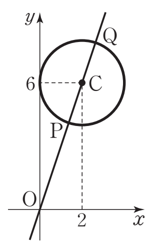
이때 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로

$\left(\dfrac{y-6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2=1$

$\therefore (x-2)^2+(y-6)^2=4$

즉, 주어진 물체는 중심의 좌표가 $(2,\ 6)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 둘레 위를 움직인다.

원 $(x-2)^2+(y-6)^2=4$의 중심을 C라 하면 C$(2,\ 6)$이고 반지름의 길이는 2이다.



오른쪽 그림과 같이 직선 OC가 원과 만나는 두 점 중 원점에 가까운 점을 P, 나머지 한 점을 Q라 하면 주어진 물체가 가장 멀리 떨어져 있을 때의 거리는 $\overline{\mathrm{OQ}}$, 가장 가까이 있을 때의 거리는 $\overline{\mathrm{OP}}$이다.

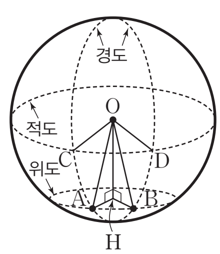
따라서 구하는 거리의 차는

$\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\times 2=4$

답 4

03 해결단계

❶단계	두 점 A, B의 경도를 나타내는 선이 적도를 나타내는 선과 만나는 점을 각각 C, D, 구의 중심 O에서 두 점 A, B의 위도를 나타내는 선이 그리는 원 모양의 평면 위에 수직으로 내린 점을 H라 하였을 때, $\angle$AHB, $\angle$COH, $\angle$AOH의 크기를 구한 후, $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이를 구한다.
❷단계	$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 경도를 나타내는 선이 적도를 나타내는 선과 만나는 점을 각각 C, D라 하면

$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{DOB}=60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$

구의 중심 O에서 두 점 A, B의 위도를 나타내는 선이 그리는 원 모양의 평면 위에 수직으로 내린 점을 H라 하면 점 A가 동경 145°, 점 B가 서경 170°에 위치하므로 각 AHB의 크기는

$360^\circ-145^\circ-170^\circ=45^\circ$

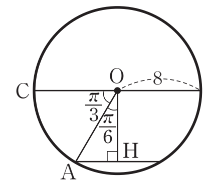
$\therefore \angle\mathrm{AHB}=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$

한편, 점 C는 적도를 나타내는 선 위에 있으므로

$\angle\mathrm{COH}=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{COH}-\angle\mathrm{COA}$

$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$



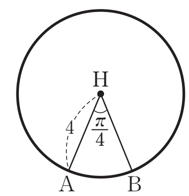
이때 네 점 O, A, C, H를 지나는 평면으로 구를 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.

삼각형 OAH에서 $\overline{\mathrm{OA}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin(\angle\mathrm{AOH})$

$=8\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=8\times\dfrac{1}{2}=4$



또한, 두 점 A, B의 위도를 나타내는 선이 그리는 원 모양의 평면은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 최단 거리는

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}\times\angle\mathrm{AHB}$

$=4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$

답 π

04 해결단계

❶단계	사분원의 호를 $(2n+1)$등분한 각 호의 중심각의 크기를 θ라 하고 $\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n)$를 사분원의 반지름의 길이 $\overline{\mathrm{OA}}$ 및 θ에 대한 식으로 나타낸다.
❷단계	$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{Q}_{2n}}^2=624$를 만족시키는 $\overline{\mathrm{OA}}$를 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸단계	부채꼴 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이 $S(n)$을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❹단계	$\dfrac{S(n)}{\pi}$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 찾아 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이의 최솟값을 구한다.

점 B를 점 P_{2n+1}이라 하고

$\angle\mathrm{AOP}_1=\angle\mathrm{P}_i\mathrm{OP}_{i+1}=\theta$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n$)

라 하면 점 P_i가 사분원의 호를 $(2n+1)$등분하였으므로

$\theta=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2n+1}$　　$\therefore (2n+1)\theta=\dfrac{\pi}{2}$,

$\angle\mathrm{P}_i\mathrm{OA}=i\theta$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$

$\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{OQ}_i$는 $\angle\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i}=\overline{\mathrm{OP}_i}\times\sin(\angle\mathrm{P}_i\mathrm{OQ}_i)$

$=\overline{\mathrm{OP}_i}\sin i\theta$

$=\overline{\mathrm{OA}}\sin i\theta$

$\therefore \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2\sin^2 i\theta$

이때 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{Q}_{2n}}^2=624$이므로

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{Q}_{2n}}^2$

$=\overline{\mathrm{OA}}^2(\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 2n\theta)$

$=\overline{\mathrm{OA}}^2[\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$

$+\sin^2\{(2n+1)\theta-n\theta\}$

$+\sin^2\{(2n+1)\theta-(n-1)\theta\}$

$+\cdots+\sin^2\{(2n+1)\theta-\theta\}]$　$(2n+1)\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$=\overline{\mathrm{OA}}^2\left[\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-n\theta\right)\right.$

$\left.+\sin^2\left\{\dfrac{\pi}{2}-(n-1)\theta\right\}+\cdots+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

$=\overline{\mathrm{OA}}^2(\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta$

$+\cos^2 n\theta+\cdots+\cos^2 2\theta+\cos^2\theta)$

$=\overline{\text{OA}}^2\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)+\cdots$
$+(\sin^2 n\theta+\cos^2 n\theta)\}$

$=\overline{\text{OA}}^2\times(1\times n)=n\overline{\text{OA}}^2=624$

$\therefore \overline{\text{OA}}^2=\dfrac{624}{n}$

한편, 부채꼴 $\text{OP}_n\text{P}_{n+1}$의 넓이가 $S(n)$이므로

$S(n)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}^2\times\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$

$(2n+1)\theta=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2(2n+1)}$

$=\dfrac{624}{4n(2n+1)}\pi=\dfrac{156}{n(2n+1)}\pi$

$\therefore \dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{156}{n(2n+1)}=\dfrac{2^2\times3\times13}{n(2n+1)}$

$\dfrac{S(n)}{\pi}$의 값이 자연수가 되어야 하고, $2n+1$이 홀수이므로

$2n+1=3$ 또는 $2n+1=13$ 또는 $2n+1=39$

$\therefore n=1$ 또는 $n=6$ 또는 $n=19$

$n=1$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{1\times3}=52$

$n=6$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{6\times13}=2$

$n=19$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{19\times39}=\dfrac{4}{19}$

$\therefore n=1$ 또는 $n=6$

한편, $\overline{\text{OA}}^2=\dfrac{624}{n}$이므로 n이 최대일 때 $\overline{\text{OA}}$의 길이는 최소이다.

따라서 선분 OA의 길이의 최솟값, 즉 $n=6$일 때 선분 OA의 길이는

$\sqrt{\dfrac{624}{6}}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$ **답** $2\sqrt{26}$

05 해결단계

❶ 단계	$\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 값이 최대일 때의 점 P_n의 위치와 최소일 때의 점 P_n의 위치를 각각 확인한다.
❷ 단계	❶단계에서 확인한 점 P_n의 위치에 따른 $\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.
❸ 단계	$f(n)$을 n에 대한 식으로 나타내어 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

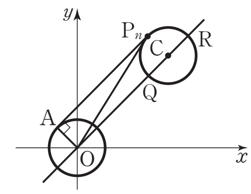
원 $x^2+y^2=2$의 중심은 원점 $\text{O}(0,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 또한, 원 $(x-n)^2+(y-n)^2=2$의 중심을 C라 하면 $\text{C}(n,\ n)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

직선 AP_n이 점 A에서의 원의 접선이므로 $\triangle\text{OAP}_n$은 $\angle\text{OAP}_n=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 $\overline{\text{OA}}=\sqrt{2}$이므로

$\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})=\dfrac{\overline{\text{OA}}}{\overline{\text{OP}_n}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\overline{\text{OP}_n}}$

즉, $\overline{\text{OP}_n}$의 길이가 최대일 때 $\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 값은 최소이고 $\overline{\text{OP}_n}$의 길이가 최소일 때 $\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 값은 최대이다.



위의 그림과 같이 직선 OC가 원 $(x-n)^2+(y-n)^2=2$와 만나는 점 중 원점 O에 가까이 있는 점을 Q, 원점 O에 멀리 있는 점을 R라 하면 $\overline{\text{OP}_n}$의 길이는 점 P_n이 점 Q의 위치에 있을 때 최소이고 점 R의 위치에 있을 때 최대이다.

이때 $\overline{\text{OC}}=\sqrt{n^2+n^2}=\sqrt{2}n$이므로

$(\overline{\text{OP}_n}$의 길이의 최솟값$)=\overline{\text{OQ}}$
$=\overline{\text{OC}}-\overline{\text{CQ}}$
$=\sqrt{2}n-\sqrt{2}$

$(\overline{\text{OP}_n}$의 길이의 최댓값$)=\overline{\text{OR}}$
$=\overline{\text{OC}}+\overline{\text{CR}}$
$=\sqrt{2}n+\sqrt{2}$

따라서 $\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 최댓값은

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}n-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{n-1}$

$\sin(\angle\text{AP}_n\text{O})$의 최솟값은

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}n+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore f(n)=\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{6}}\right)\right.$
$\left.+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{8}}-\dfrac{1}{10}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{9}}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{106}{165}=\dfrac{53}{165}$

따라서 $p=165$, $q=53$이므로

$p+q=165+53=218$ **답** 218

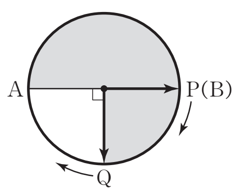
06 해결단계

❶ 단계	두 선분 OP, OQ가 1초당 회전하는 각의 크기를 구한다.
❷ 단계	15초 단위로 두 선분 OP, OQ의 위치와 그때의 원의 내부의 흰색 부분과 검은색 부분을 나타낸다.
❸ 단계	원의 내부 상태가 반복되는 주기를 찾고 1000초 후의 원의 내부를 그림으로 나타낸다.
❹ 단계	1000초 후의 검은색 부분의 넓이를 구한다.

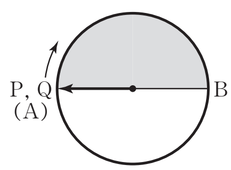
두 선분 OP, OQ가 원을 한 바퀴 도는 데 각각 30초, 60초가 걸리므로 1초당 선분 OP는 $\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$, 선분 OQ는 $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$만큼 회전한다.

$\angle AOB=\pi$이므로 선분 OA에서 출발한 선분 OP는 15초 후에 선분 OB에 도착하고, 그때의 선분 OQ는 선분 OB에서 시계 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전한 곳에 도착한다.

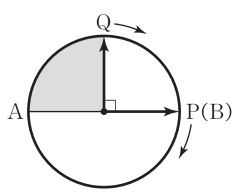
즉, 15초마다 두 선분 OP, OQ는 시계 방향으로 각각 π만큼, $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하므로 두 선분이 동시에 출발하여 15초, 30초, 45초, 60초가 되는 순간, 흰색 부분과 검은색 부분을 나타내면 다음 그림과 같다.



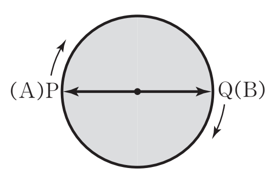
[15초]



[30초]

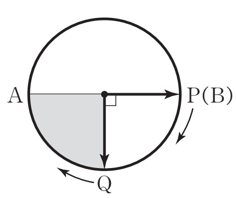


[45초]

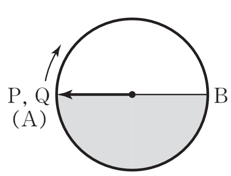


[60초]

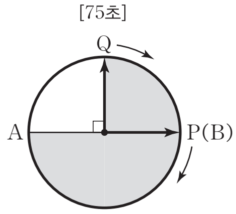
60초가 지났을 때, 두 선분 OP, OQ는 각각 처음과 같은 위치인 두 선분 OA, OB에 위치하고, 이때 원의 내부 전체가 검은색이므로 출발한 지 60초 후 두 선분 OP, OQ의 위치는 출발 직후와 같으면서 검은색 부분은 흰색으로, 흰색 부분은 검은색으로 바뀐다.



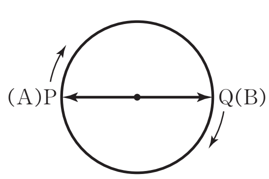
[75초]



[90초]



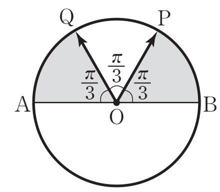
[105초]



[120초]

즉, 출발한 지 120초 후 두 선분 OP, OQ의 위치와 원의 내부의 흰색 부분과 검은색 부분은 출발 직후와 동일해지므로 원의 내부는 120초를 주기로 반복된다. 이때 $1000=120\times8+40$이므로 두 선분 OP, OQ가 출발한 지 1000초 후의 원의 내부는 출발한 지 40초 후의 원의 내부와 같다.

이는 출발한 지 30초가 지났을 때의 원의 내부에서 10초가 더 지났으므로 오른쪽 그림과 같이 선분 OP는 선분 OA에서 $\frac{\pi}{15}\times10=\frac{2}{3}\pi$만큼, 선분 OQ는 선분 OA에서 $\frac{\pi}{30}\times10=\frac{\pi}{3}$만큼 회전한 위치에 있다.



따라서 출발한 지 1000초 후, 검은색 부분의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 두 개의 넓이의 합과 같으므로

$2\times\left(\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{\pi}{3}\right)=\frac{100}{3}\pi$

답 $\frac{100}{3}\pi$

07 해결단계

❶ 단계	두 삼각형 EBA, ECD가 모두 이등변삼각형이고, 서로 닮음임을 파악한다.
❷ 단계	두 삼각형 EBA, ECD의 한 변의 길이를 각각 θ로 나타낸다.
❸ 단계	삼각형 ECD의 넓이는 삼각형 EBA의 넓이의 $\frac{1}{9}$배가 되도록 하는 $\cos\theta$의 값을 구한다.

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle ADC=\angle ABC$ ($\because$ $\overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각)

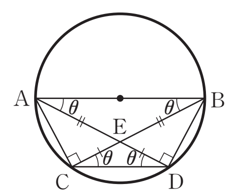
$\angle BAD=\angle BCD$ ($\because$ $\overset{\frown}{BD}$에 대한 원주각)

이때 두 선분 AB, CD가 평행하므로

$\angle BAD=\angle ADC$, $\angle ABC=\angle BCD$

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ABC=\angle BAD=\angle BCD=\theta$

즉, 두 삼각형 EBA, ECD는 모두 이등변삼각형이고 서로 닮음이다.



한편, 선분 AB가 원의 지름이므로

$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$

$\overline{AB}=a$라 하면 $\triangle ACB$는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=a\sin\theta$, $\overline{BC}=a\cos\theta$

또한, $\overline{AE}=\overline{BE}=x$, $\overline{CE}=\overline{DE}=y$라 하면

$\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BE}$에서 $x+y=a\cos\theta$ ······㉠

$\triangle ACE$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2+\overline{CE}^2$

$x^2=a^2\sin^2\theta+y^2$

$a^2\sin^2\theta=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

㉠을 위의 식에 대입하면

$a^2\sin^2\theta=a(x-y)\cos\theta$

$\therefore$ $x-y=\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{a}{2\cos\theta}$, $y=a\cos\theta-\frac{a}{2\cos\theta}$

이때 두 삼각형 EBA, ECD가 서로 닮음이고, 넓이의 비가 $9:1$이므로 닮음비는 $3:1$이다. 즉,

$x:y=3:1$에서

$$\frac{a}{2\cos\theta} : \left(a\cos\theta - \frac{a}{2\cos\theta}\right) = 3 : 1$$

$$3a\cos\theta - \frac{3a}{2\cos\theta} = \frac{a}{2\cos\theta}$$

위의 식의 양변에 $2\cos\theta$를 곱하면

$6a\cos^2\theta - 3a = a$, $6\cos^2\theta = 4$

$$\cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{에서 } \cos\theta>0\right)$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

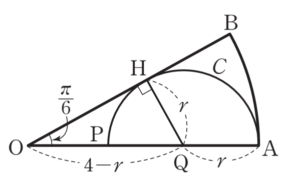
이것이 수능 p. 52

1 ④ 2 ④ 3 ⑤ 4 80

1 해결단계

❶ 단계	부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$임을 이용하여 반원 C의 반지름의 길이를 구한다.
❷ 단계	**❶단계**에서 구한 반지름의 길이를 이용하여 S_1, S_2의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 값을 이용하여 S_1-S_2의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 반원 C의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{OA}=4$이므로 $\overline{OQ}=4-r$이고, 선분 OB와 반원 C의 접점을 H라 하면 $\overline{QH}=r$이다.



부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\frac{r}{4-r} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$에서

$2r = 4-r$

$3r = 4 \qquad \therefore r = \frac{4}{3}$

따라서

$S_1 = \frac{1}{2}\times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$,

$S_2 = \frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi$

이므로

$S_1 - S_2 = \frac{4}{3}\pi - \frac{8}{9}\pi = \frac{4}{9}\pi$

답 ④

2 해결단계

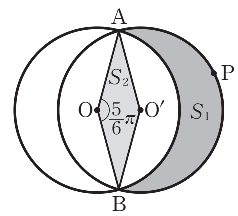
❶ 단계	마름모의 성질을 이용하여 $\angle$AO′B의 크기를 구한다.
❷ 단계	부채꼴의 넓이를 이용하여 S_1-S_2의 값을 구한다.

마름모 AOBO′에서

$\angle\text{AO}'\text{B} = \angle\text{AOB} = \frac{5}{6}\pi$

다음 그림과 같이 원 O'과 넓이가 S_1인 도형의 경계선의 공통부분 위에 점 P를 놓으면 호 APB의 중심각은

$2\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$



이때 원 O'에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′BP의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면

$S_1 = T_1 + S_2 - T_2$ *

$\therefore S_1 - S_2 = T_1 - T_2$

$= \left(\frac{1}{2}\times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$

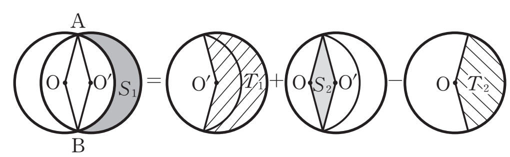
$= \frac{21}{4}\pi - \frac{15}{4}\pi$

$= \frac{3}{2}\pi$

답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

*를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

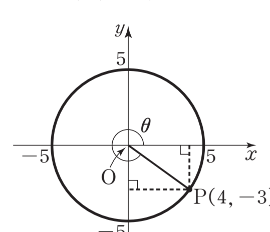


3 해결단계

❶ 단계	$\overline{OP}$의 길이를 구하여 점 P가 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OP}$인 원 위에 있음을 확인한다.
❷ 단계	삼각함수의 정의를 이용하여 $\cos\theta$, $\sin\theta$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 값을 이용하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin\theta$의 값을 구한다.

원점 O에 대하여 $\overline{OP} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$이므로

다음 그림과 같이 점 P는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위에 있다.



즉, 삼각함수 정의에 의하여

$\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=-\frac{3}{5}$이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin\theta=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=\frac{7}{5}$$

답 ⑤

4

해결단계

❶ 단계	원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C로 나타낸다.
❷ 단계	$\sin\alpha=\frac{1}{3}$을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.
❸ 단계	삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\beta$, $\tan\gamma$의 값을 각각 구하고 $9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)$의 값을 구한다.

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 P가 제1사분면 위에 있으므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$이고, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

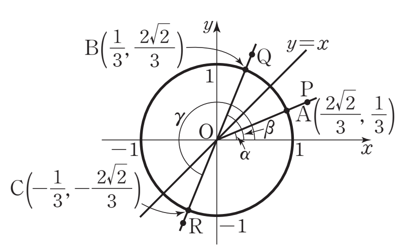
$\therefore A\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$

이때 점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 동경 OQ도 동경 OP와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore B\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

또한, 점 R가 점 Q와 원점에 대하여 대칭이므로 동경 OR도 동경 OQ와 원점에 대하여 대칭이고, 두 점 B, C도 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$



삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\gamma=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$이므로

$9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\times\left(\frac{8}{9}+8\right)=80$

답 80

06 삼각함수의 그래프

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 54~55

01 ⑤	02 ③	03 5	04 -1	05 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
06 1	07 ④	08 $\frac{7}{6}\pi$	09 ③	10 ③
11 ④	12 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	13 ③	14 ⑤	15 ②

01

주어진 함수는 주기함수이고, 보기의 각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

① (주기)$=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

② (주기)$=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

③ (주기)$=\pi$

④ (주기)$=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

⑤ (주기)$=\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\sqrt{2})$를 만족시키는 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

주기가 $\sqrt{2}$가 아니더라도 $f(x)=f(x+\sqrt{2})$를 만족시킬 수 있다.

예를 들어, 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이면

$f(x)=f\left(x+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=f\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=f(x+\sqrt{2})$

02

ㄱ. 최댓값은 $|-2|+1=2+1=3$이고,

최솟값은 $-|-2|+1=-2+1=-1$이다. (참)

ㄴ. $y=-2\cos(3x-\pi)+1$에서

$y-1=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로 이 함수의 그래프는

함수 $y=-2\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=-2\cos(3x-\pi)+1$이라 하면 함수 $f(x)$는

주기가 $\frac{2}{3}\pi$인 주기함수이므로

$f(x)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

즉,

$-2\cos(3x-\pi)+1$

$=-2\cos\left\{3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-\pi\right\}+1$

$=-2\cos(3x+\pi)+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 함수

$y=-2\cos(3x+\pi)+1$의 그래프와 일치한다.

(참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

03 함수 $f(x)=a\sin\dfrac{x}{2b}+c$의 최솟값이 -1이므로

$-|a|+c=-1$

그런데 $a>0$이므로

$-a+c=-1$ ……㉠

또한, 함수 $f(x)=a\sin\dfrac{x}{2b}+c$의 주기가 4π이므로

$$\frac{2\pi}{\left|\dfrac{1}{2b}\right|}=4\pi$$

그런데 $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{\dfrac{1}{2b}}=4\pi$$

$4b\pi=4\pi \qquad \therefore b=1$

이때 $f(x)=a\sin\dfrac{x}{2}+c$에서 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{11}{4}$이므로

$a\sin\dfrac{\pi}{6}+c=\dfrac{11}{4}$, $\dfrac{1}{2}a+c=\dfrac{11}{4}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{5}{2}$, $c=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a+b+c=\dfrac{5}{2}+1+\dfrac{3}{2}=5$ **답** 5

04 주어진 함수의 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이므로

$|a|+d=1$, $-|a|+d=-3$

그런데 $a>0$이므로

$a+d=1$, $-a+d=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=-1$

또한, 주어진 그래프의 주기는 $\dfrac{3}{2}\pi-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\pi$이므로

$\dfrac{2\pi}{|b|}=2\pi$, $|b|=1 \qquad \therefore b=1\ (\because b>0)$

즉, 주어진 함수의 식은 $y=2\cos(x-c\pi)-1$이다.

그런데 이 함수의 그래프가 점 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$을 지나므로

$1=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-c\pi\right)-1$, $2=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-c\pi\right)$

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-c\pi\right)=1$

이때 $0<c\le\dfrac{1}{2}$에서 $0\le\dfrac{\pi}{2}-c\pi<\dfrac{\pi}{2}$이므로

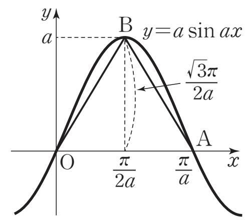
$\dfrac{\pi}{2}-c\pi=0 \qquad \therefore c=\dfrac{1}{2}$

$\therefore abcd=2\times1\times\dfrac{1}{2}\times(-1)=-1$ **답** -1

05 함수 $y=a\sin ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{2\pi}{a}\ (\because a>0)$이므로

점 A의 x좌표는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{a}=\dfrac{\pi}{a}$



즉, △OAB는 한 변의 길이가 $\dfrac{\pi}{a}$인 정삼각형이므로 그 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\pi}{a}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2a}$이다.

따라서 점 B의 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2a}$이다.

이때 △OAB가 정삼각형이면 점 B의 x좌표는 선분 OA의 중점의 x좌표와 같으므로 점 B의 y좌표는 함수 $y=a\sin ax$의 최댓값이 된다.

함수 $y=a\sin ax$의 최댓값은 $a\ (\because a>0)$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2a} \qquad \therefore a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ **답** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

06 $y=\cos^2\left(x-\dfrac{3}{2}\pi\right)-3\cos^2(\pi-x)-4\sin(x+2\pi)$

$=\cos^2\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)-3\cos^2(\pi-x)-4\sin(2\pi+x)$

$=(-\sin x)^2-3(-\cos x)^2-4\sin x$

$=\sin^2 x-3\cos^2 x-4\sin x$

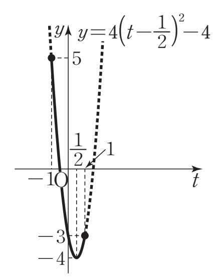
$=\sin^2 x-3(1-\sin^2 x)-4\sin x$

$=4\sin^2 x-4\sin x-3$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le1$이고 주어진 함수는

$y=4t^2-4t-3=4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-4$

이므로 오른쪽 그림에서



최댓값은 $t=-1$일 때

$4\left(-1-\dfrac{1}{2}\right)^2-4=5$,

최솟값은 $t=\dfrac{1}{2}$일 때

$4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2-4=-4$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

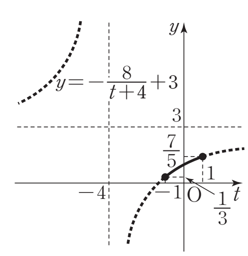
$5+(-4)=1$ **답** 1

07 $y=\dfrac{3\sin x+4}{\sin x+4}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

주어진 함수는

$y=\dfrac{3t+4}{t+4}=\dfrac{3(t+4)-8}{t+4}=-\dfrac{8}{t+4}+3$

이므로 오른쪽 그림에서



최댓값은 $t=1$일 때

$-\dfrac{8}{1+4}+3=\dfrac{7}{5}$,

최솟값은 $t=-1$일 때

$-\dfrac{8}{-1+4}+3=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

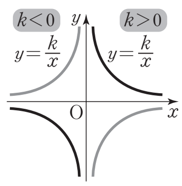
$\frac{7}{5}+\frac{1}{3}=\frac{26}{15}$

즉, $m=15$, $n=26$이므로

$m+n=41$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프



(1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
(2) 원점에 대하여 대칭이다.
(3) 점근선은 x축, y축이다.
(4) $k>0$이면 그래프가 제1, 3사분면에 있고, $k<0$이면 그래프가 제2, 4사분면에 있다.
(5) $|k|$의 값이 커질수록 곡선은 원점에서 멀어진다.

유리함수 $y=\frac{k}{x-m}+n$ $(k\neq0)$의 그래프

(1) 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.
(2) 정의역은 $\{x|x\neq m$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq n$인 실수$\}$이다.
(3) 점 (m, n)에 대하여 대칭이다.
(4) 점근선은 두 직선 $x=m$, $y=n$이다.

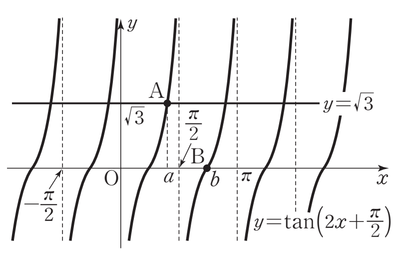
서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

t에 대한 유리함수 $y=f(t)$의 점근선의 방정식을 $t=p$라 할 때, $a\le t\le b$ (a, b는 실수)에서 유리함수 $y=f(t)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하려면 $p<a$ 또는 $p>b$이어야 하고, $f(a)$, $f(b)$ 중 하나는 최댓값, 하나는 최솟값이어야 한다.

즉, 문제에서 함수 $f(t)=\frac{3t+4}{t+4}$라 하면 $-1\le t\le 1$에서 최댓값과 최솟값의 합은 $f(-1)+f(1)$이다.

08

함수 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 그 그래프는 함수 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것과 같으므로 함수 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 $A(a, \sqrt{3})$이 함수 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프 위의 점이므로

$\tan\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

이때 $0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}<2a+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$이므로

$2a+\frac{\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{3}$, $2a=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore a=\frac{5}{12}\pi$

또한, 점 $B(b, 0)$이 함수 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프 위의 점이므로

$\tan\left(2b+\frac{\pi}{2}\right)=0$

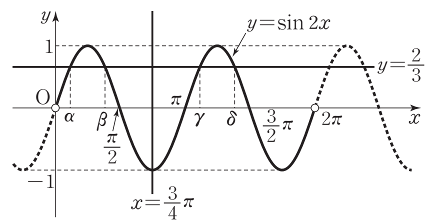
이때 $\frac{\pi}{2}<b<\pi$에서 $\frac{3}{2}\pi<2b+\frac{\pi}{2}<\frac{5}{2}\pi$이므로

$2b+\frac{\pi}{2}=2\pi$, $2b=\frac{3}{2}\pi$ $\quad\therefore b=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore a+b=\frac{5}{12}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{7}{6}\pi$ 답 $\frac{7}{6}\pi$

09

$0<x<2\pi$에서 $-1\le\sin 2x\le1$이고, 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $0<x<2\pi$에서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식의 네 실근을 각각 α, β, γ, δ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$라 하면 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 $0<x<\frac{3}{2}\pi$에서 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{4}\pi$

$\alpha+\delta=\beta+\gamma=\frac{3}{2}\pi$

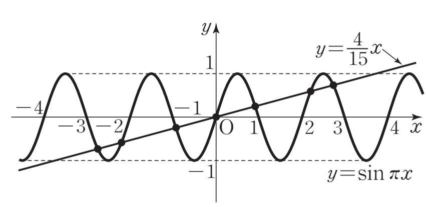
$\therefore \theta=\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

$\therefore \sin\frac{\theta}{6}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 답 ③

10

방정식 $\sin\pi x=\frac{4}{15}x$의 실근은 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

이때 $-1\le\sin\pi x\le1$이고, 함수 $y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수도 7이다. 답 ③

11 $\cos^2 x+2a\sin x=a^2$에서

$(1-\sin^2 x)+2a\sin x=a^2$

$\sin^2 x-2a\sin x+a^2-1=0$

$\sin^2 x-2a\sin x+(a-1)(a+1)=0$

$(\sin x-a+1)(\sin x-a-1)=0$

$\therefore \sin x=a-1$ 또는 $\sin x=a+1$ ······㉠

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 ㉠의 해가 존재하려면

$-1\le a-1\le1$ 또는 $-1\le a+1\le1$

즉, $0\le a\le2$ 또는 $-2\le a\le0$이어야 하므로

$-2\le a\le2$

답 ④

12 x에 대한 이차방정식 $2x^2-4x\cos\theta-3\sin\theta=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta+6\sin\theta=0$

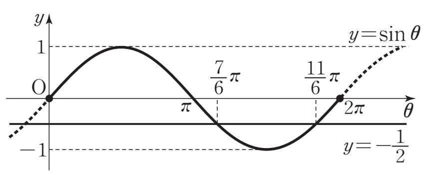
$4(1-\sin^2\theta)+6\sin\theta=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin\theta\le1$)

$0\le\theta\le2\pi$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{7}{6}\pi$일 때,

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}\pi$

$=-1+0=-1$

(ii) $\theta=\frac{11}{6}\pi$일 때,

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 식의 값의 합은

$-1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

• 다른 풀이 •

$\theta+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin t+\cos t$

$0\le\theta\le2\pi$에서

$\frac{\pi}{3}\le\theta+\frac{\pi}{3}\le2\pi+\frac{\pi}{3}$ $\therefore \frac{\pi}{3}\le t\le\frac{7}{3}\pi$

이때 x에 대한 이차방정식 $2x^2-4x\cos\theta-3\sin\theta=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta+6\sin\theta=0$

$4(1-\sin^2\theta)+6\sin\theta=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$

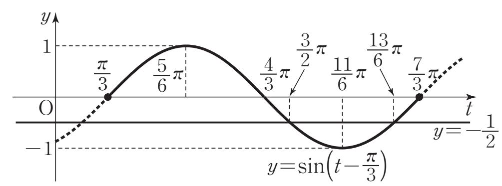
$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin\theta\le1$)

$\therefore \sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ ······㉠

$\theta+\frac{\pi}{3}=t$이므로

함수 $y=\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y=\sin t$의 그래프를 t축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



㉠에서 $t=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$이다.

(i) $t=\frac{3}{2}\pi$일 때,

$\sin t=-1$, $\cos t=0$이므로

$\sin t+\cos t=-1$

(ii) $t=\frac{13}{6}\pi$일 때,

$\sin t=\frac{1}{2}$, $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin t+\cos t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 식의 값의 합은

$-1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

13 로그의 정의에 의하여 $1+\sin x>0$, $\cos x>0$

$\therefore \sin x>-1$, $\cos x>0$ ······㉠

$\log_4(1+\sin x)-\log_2\cos x>\frac{1}{2}$에서

$\log_4(1+\sin x)-\log_4\cos^2 x>\frac{1}{2}$

$$\log_4 \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} > \frac{1}{2}$$

이때 (밑)$=4>1$이므로

$$\frac{1+\sin x}{\cos^2 x} > 4^{\frac{1}{2}},\ \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} > 2$$

$$\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} > 2$$

㉠에서 $1+\sin x>0$이므로

$$\frac{1}{1-\sin x} > 2$$

이때 $1-\sin x \neq 0$, 즉 $\sin x \neq 1$ ……㉡

이고 $1-\sin x>0$이므로 부등식의 양변에 $1-\sin x$를 곱하면

$1>2(1-\sin x)$, $2\sin x>1$

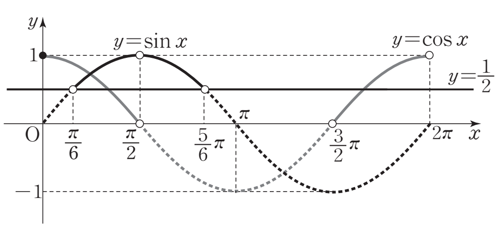
$\therefore \sin x>\frac{1}{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 두 부등식

$\frac{1}{2}<\sin x<1$, $\cos x>0$

을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위가 주어진 부등식의 해이다.

$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{6}{2}=3$$

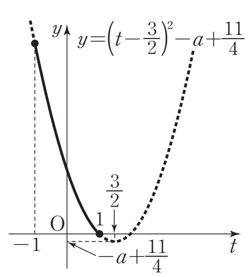
답 ③

14 $\cos^2\theta-3\cos\theta-a+5\ge 0$에서 $\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 부등식은

$t^2-3t-a+5\ge 0$

$f(t)=t^2-3t-a+5$라 하면

$$f(t)=t^2-3t-a+5$$
$$=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{11}{4}$$



이때 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은

$f(1)=1-3-a+5=-a+3$

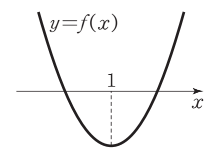
주어진 부등식이 항상 성립하려면 ($f(t)$의 최솟값)≥ 0이어야 하므로

$-a+3\ge 0$ $\quad\therefore a\le 3$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 3이다.

답 ⑤

15 $f(x)=2x^2-4x\cos^2\theta+1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로 오른쪽 그림과 같이 $f(1)<0$이어야 한다.



즉, $2-4\cos^2\theta+1<0$에서

$-4\cos^2\theta+3<0$, $\cos^2\theta-\frac{3}{4}>0$ *

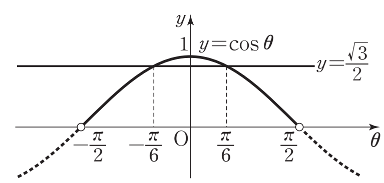
$$\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$$

$\therefore \cos\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……㉠

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 ㉠의 해는 $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}$이므로

$\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \beta-\alpha=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$$

답 ②

• 다른 풀이 •

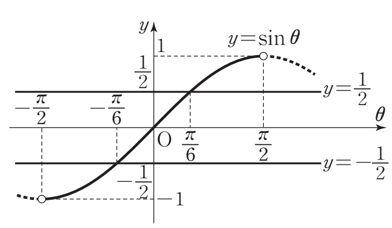
*에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$1-\sin^2\theta-\frac{3}{4}>0$, $\sin^2\theta-\frac{1}{4}<0$

$$\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)<0$$

$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $-\frac{1}{2}<\sin\theta<\frac{1}{2}$의 해는

$-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

(1) 두 근이 모두 p보다 클 때,

$$D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$$

(2) 두 근이 모두 p보다 작을 때,

$$D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$$

(3) 두 근 사이에 p가 있을 때,

$$f(p)<0$$

(4) 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$ 사이에 있을 때,

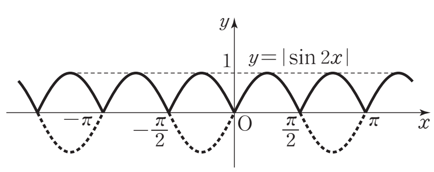
$$D\geq 0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$$

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 56~59

01 ①	02 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	03 $4\sqrt{3}$	04 ④	05 ③
06 ⑤	07 ②	08 ④	09 ②	10 5
11 ④	12 4	13 −9	14 ③	15 7π
16 ②	17 ③	18 11	19 ③	20 ③
21 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$	22 ②	23 $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	24 $\frac{35}{12}\pi$	
25 ③	26 16	27 9	28 $\frac{\pi}{6}$	

01

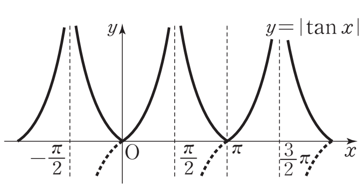
(ⅰ) $-1\leq \sin 2x\leq 1$이고, 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|\sin 2x|$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

$\therefore\ a=\frac{\pi}{2}$

(ⅱ) 함수 $y=\tan x$의 주기는 π이고, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로 함수 $y=|\tan x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

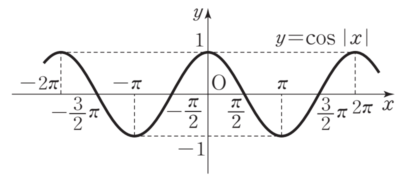


따라서 함수 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

$\therefore\ b=\pi$

(ⅲ) $\cos|x|=\begin{cases}\cos x & (x\geq 0)\\ \cos(-x) & (x<0)\end{cases}$

그런데 $\cos(-x)=\cos x$에서 $\cos|x|=\cos x$이므로 함수 $y=\cos|x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다.

$\therefore\ c=2\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a<b<c$ **답** ①

02

함수 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$의 주기가 p이므로 $f(x+p)=f(x)$이다.

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(p)=f(0)$이므로

$\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}=\sqrt{1+\cos 0}+\sqrt{1-\cos 0}$

$\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}=\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1+\cos p+2\sqrt{1-\cos^2 p}+1-\cos p=2$

$\therefore\ \sqrt{1-\cos^2 p}=0$

이때 $1-\cos^2 p=\sin^2 p$이므로

$\sqrt{\sin^2 p}=0$

$\therefore\ |\sin p|=0$

위의 식을 만족시키는 최소인 양수 p의 값은 π이므로

$\sin\left(\pi+\frac{p}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **답** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

03

함수 $y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ c\right)$를 지나므로

$c=\tan\frac{\pi}{3}\qquad \therefore\ c=\sqrt{3}$

주어진 그래프에서 함수 $y=a\sin bx$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

$\therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$

즉, 함수 $y=a\sin 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ abc=2\times 2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ **답** $4\sqrt{3}$

04

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

또한, $f(x+1)=f(-x+1)$에서 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

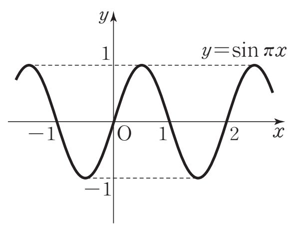
ㄱ. $f(x)=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$$

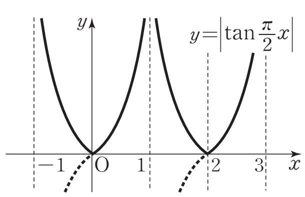
$$=\sin\pi x$$

이때 (주기)$=\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니다.

ㄴ. 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이고, 점근선의 방정식은 $x=2n+1$ (n은 정수)이므로 함수 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

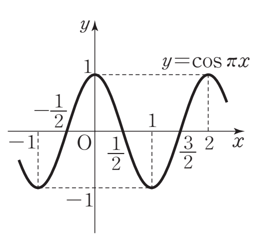
ㄷ. $f(x)=\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)$$

$$=\cos\pi x$$

이때 (주기)$=\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. **답 ④**

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
$f(x+1)=f(-x+1)$이므로 이 식에 x 대신에 $x+1$을 대입하면
$f(x+2)=f(-x)$
그런데 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x+2)=f(x)$
즉, $y=f(x)$는 주기가 2인 함수이다.
따라서 주기가 2이고, 그래프가 y축에 대하여 대칭인 함수를 골라도 된다.

05 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이다.

이때 직선 AC는 x축과 평행하고, $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$이므로 직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이다.
양수 t에 대하여 $\mathrm{B}(t, \sqrt{3}t)$로 놓으면 점 A는 점 B와 원점에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{A}(-t, -\sqrt{3}t)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{t-(-t)\}^2+\{\sqrt{3}t-(-\sqrt{3}t)\}^2}$
$=\sqrt{16t^2}$
$=4t\ (\because t>0)$

이때 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$
점 C는 점 A를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로
$\mathrm{C}(-t+a, -\sqrt{3}t)$ $\quad\therefore \mathrm{C}(3t, -\sqrt{3}t)$
점 C는 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위에 있으므로

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3}{4}\pi$

즉, $-\sqrt{3}t=-1$이므로 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore a=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **답 ③**

• 다른 풀이 •

함수 $f(x)$의 주기는 a이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=a$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=a$
이때 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이므로
$\overline{\mathrm{BO}}=\frac{a}{2}$

점 B의 x좌표는 $\overline{\mathrm{BO}}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{a}{4}$,

점 B의 y좌표는 $\overline{\mathrm{BO}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

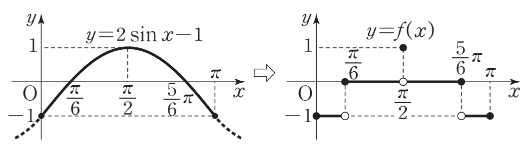
이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\left(\frac{\pi}{a}\times\frac{a}{4}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\frac{\pi}{4}$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{4}a=1$이므로 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

06 함수 $y=2\sin x-1\ (0\le x\le\pi)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로 치역의 원소는 3개이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점으로 만들 수 있는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형은 꼭짓점의 좌표가 세 점 $(0, -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, -1)$인 삼각형이므로 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\pi\times2=\pi$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

• 다른 풀이 •

ㄴ. $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1\right]$

$=[2\cos x-1]$

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right]$

$=[2\cos x-1]$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (참)

07 주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 5, -5이므로 $\alpha_1=5$ ($\because \alpha_1>0$)

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{|\beta_1|}=4$에서 $|\beta_1|=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \beta_1=\frac{\pi}{2}$ ($\because \beta_1>0$)

함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\gamma_1\right)$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=5\sin(-\gamma_1)$, $-5\sin\gamma_1=5$

$\sin\gamma_1=-1$ $\quad\therefore \gamma_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

같은 방법으로 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_2=\frac{1}{2}$ ($\because \alpha_2>0$)

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{|\beta_2|}=4$에서 $|\beta_2|=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \beta_2=\frac{\pi}{2}$ ($\because \beta_2>0$)

함수 $g(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\gamma_2\right)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$0=\frac{1}{2}\cos(-\gamma_2)$, $\cos\gamma_2=0$

$\therefore \gamma_2=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (단, m은 정수)

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 모두 4이므로 임의의 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$, $g(x+4)=g(x)$

이때 $h(x)=f(x)-g(x)$이므로

$h(x+4)=f(x+4)-g(x+4)$

$=f(x)-g(x)=h(x)$

$\frac{4}{n}$ (n은 자연수)

즉, 함수 $h(x)$의 주기는 4 또는 4보다 작다. (거짓)

ㄴ. $\alpha_1=5$, $\beta_1=\frac{\pi}{2}$, $\gamma_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=5\cos\frac{\pi}{2}x$

즉, 두 상수 a, b에 대하여 $f(x)=a\cos bx$ 꼴로 나타낼 수 있다. (참)

ㄷ. $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{\pi}{2}$, $\gamma_2=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (m은 정수)이므로

$g(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-2m\pi\mp\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\mp\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$ 또는 $g(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

그런데 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

ㄴ에서 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{2}x$이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 4로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 10배 확대한 후 x축의 방향으로 $4k-1$ (k는 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

$2k'-1$ (k'은 정수)로 두어도 된다.

즉, $f(x)=10g(x-4k+1)$ (k는 정수)이므로

$a=10$, $b=4k-1$

이때 $9<b<13$이므로 $9<4k-1<13$

$10<4k<14 \quad \therefore \frac{5}{2}<k<\frac{7}{2}$

k는 정수이므로 $k=3 \quad \therefore b=11$

$\therefore a+b=10+11=21$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y=\cos x$의 그래프와 같으므로 두 삼각함수 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{2}x$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$는 y축의 방향으로 확대 또는 축소하고 x축의 방향으로 평행이동하여 같은 그래프가 되도록 만들 수 있다.
이와 같은 방식으로 접근하면 sin과 cos으로 이루어진 두 삼각함수의 그래프는 언제나 확대와 평행이동을 이용하여 일치하게 만들 수 있다.

08

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$\qquad=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$
$\qquad=(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$\therefore f(\theta)=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$
$\qquad=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$
$\qquad=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$\sin\theta+\cos\theta=0$에서 $\sin\theta=-\cos\theta$, $\tan\theta=-1$

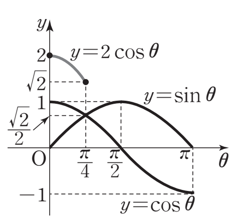
$\therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le\theta\le\pi$)

$\sin\theta-\cos\theta=0$에서 $\sin\theta=\cos\theta$, $\tan\theta=-1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0\le\theta\le\pi$)

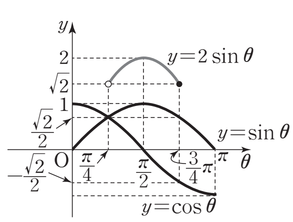
(i) $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\ge0$, $\sin\theta-\cos\theta\le0$이므로
$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)$
$\qquad=2\cos\theta$



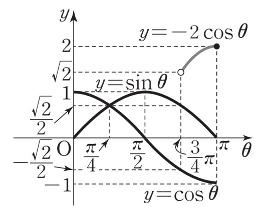
(ii) $\frac{\pi}{4}<\theta\le\frac{3}{4}$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\ge0$, $\sin\theta-\cos\theta\ge0$이므로
$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$
$\qquad=2\sin\theta$

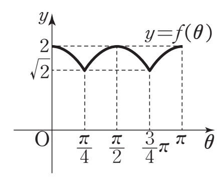


(iii) $\frac{3}{4}\pi<\theta\le\pi$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\le0$, $\sin\theta-\cos\theta\ge0$이므로
$f(\theta)=-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta-\cos\theta$
$\qquad=-2\cos\theta$



(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(\theta)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ④

09

ㄱ. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$에서 $0<\frac{\pi}{4}-\alpha<\pi$이므로

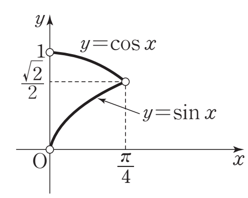
$-\frac{3}{4}\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}$

그런데 $0<\alpha<\pi$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$

오른쪽 그림에서

$\sin\alpha<\cos\beta$ (참)



ㄴ. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\frac{\pi}{2}<\pi$이므로

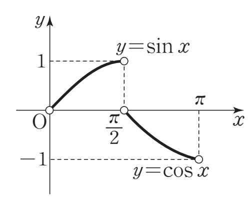
$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

그런데 $0<\alpha<\pi$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

오른쪽 그림에서

$\sin\alpha>\cos\beta$ (참)



ㄷ. $\alpha+\beta=\pi$, 즉 $\beta=\pi-\alpha$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\alpha-\cos(\pi-\alpha)$
$\qquad=\cos\alpha+\cos\alpha$
$\qquad=2\cos\alpha$

이때 $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos\alpha\ge0$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\alpha\ge0$에서 $\cos\alpha\ge\cos\beta$,

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$일 때, $\cos\alpha<0$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\alpha<0$에서

$\cos\alpha<\cos\beta$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

ㄱ. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$에서 $\alpha=\frac{\pi}{4}-\beta$이므로

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

$\qquad=\cos\left(-\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)<\cos\beta$이므로

$\sin\alpha<\cos\beta$ (참) — $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $y=\cos x$는 감소함수

ㄴ. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$$\sin\alpha-\cos\beta=\sin\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha$$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha-\cos\beta=2\sin\alpha>0$이다.

$\therefore \sin\alpha>\cos\beta$ (참)

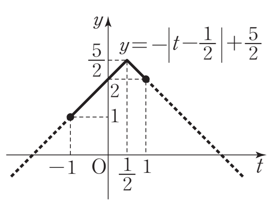
10 $y=-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}$에서 $\sin 2x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는 $y=-\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}$

(i) $-1\le t<\frac{1}{2}$일 때, $y=t-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=t+2$

(ii) $\frac{1}{2}\le t\le 1$일 때, $y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=-t+3$

(i), (ii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때,



$M=-\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

최솟값은 $t=-1$일 때,

$m=-\left|-1-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$

$\therefore 2Mm=2\times\frac{5}{2}\times 1=5$ **답** 5

• 다른 풀이 •

모든 실수 x에 대하여

$-1\le\sin 2x\le 1$이므로

$-\frac{3}{2}\le\sin 2x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$, $0\le\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}\le-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|\le 0$

$\therefore 1\le-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}\le\frac{5}{2}$

따라서 최댓값 $M=\frac{5}{2}$, 최솟값 $m=1$이므로

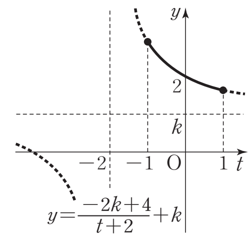
$2Mm=2\times\frac{5}{2}\times 1=5$

11 $y=\frac{4+k\sin\theta}{2+\sin\theta}$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta\le 2\pi$에서

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$$y=\frac{4+kt}{2+t}=\frac{k(2+t)-2k+4}{2+t}$$
$$=\frac{-2k+4}{t+2}+k\ (-1\le t\le 1)$$

이때 $k<2$에서 $-2k+4>0$이므로 오른쪽 그림에서 최댓값은 $t=-1$일 때,



$\frac{-2k+4}{(-1)+2}+k=4-k$

최솟값은 $t=1$일 때,

$\frac{-2k+4}{1+2}+k=\frac{4+k}{3}$

최댓값과 최솟값의 합이 5이므로

$4-k+\frac{4+k}{3}=5$, $12-3k+4+k=15$

$2k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{2}$ **답** ④

12 $(f\circ g)(x)=2(-\cos x)^2+\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}+k$

이때 $1-\cos x\ge 0$, $1+\cos x\ge 0$이므로

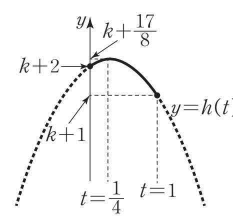
$$(f\circ g)(x)=2\cos^2 x+\sqrt{1-\cos^2 x}+k$$
$$=2(1-\sin^2 x)+\sqrt{\sin^2 x}+k$$
$$=-2\sin^2 x+|\sin x|+k+2$$
$$=-2|\sin x|^2+|\sin x|+k+2$$

$|\sin x|=t\ (0\le t\le 1)$로 놓고,

$(f\circ g)(x)=h(t)$라 하면

$$h(t)=-2t^2+t+k+2$$
$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+k+\frac{17}{8}$$

이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $h(t)$는 $t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $h\left(\frac{1}{4}\right)=k+\frac{17}{8}$,

$t=1$일 때 최솟값 $h(1)=k+1$을 갖는다.

함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값이 $\frac{31}{16}$이므로

$k+1=\frac{31}{16}\qquad\therefore k=\frac{15}{16}$

$$\therefore k+M=k+k+\frac{17}{8}$$
$$=2k+\frac{17}{8}$$
$$=2\times\frac{15}{16}+\frac{17}{8}=4$$

답 4

13 $y=\sin^2 x+2a\cos x-1$

$=1-\cos^2 x+2a\cos x-1$

$=-\cos^2 x+2a\cos x$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

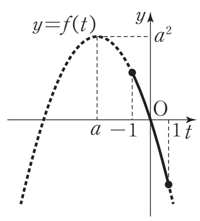
주어진 함수는

$y=-t^2+2at$

$\quad=-(t-a)^2+a^2\ (-1\le t\le 1)$

$f(t)=-(t-a)^2+a^2$이라 하면

(i) $a<-1$일 때, $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=-1$일 때,

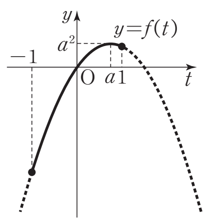


$f(-1)=-1-2a=5$

$2a=-6 \qquad \therefore a=-3$

(ii) $-1\le a\le 1$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=a$일 때,



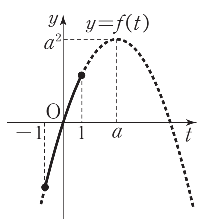
$f(a)=a^2=5$

$\therefore a=\pm\sqrt{5}$

그런데 $-1\le a\le 1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

(iii) $a>1$일 때,

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=1$일 때,



$f(1)=-1+2a=5$

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a의 값은 -3, 3이므로 그 곱은

$(-3)\times 3=-9$

답 -9

14 $a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2=4ab\cos\theta$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos\theta$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4\cos\theta=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$=2$

$\therefore \cos\theta\ge\frac{1}{2}$

이때 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos\theta\le 1$

$\therefore \frac{1}{2}\le\cos\theta\le 1$

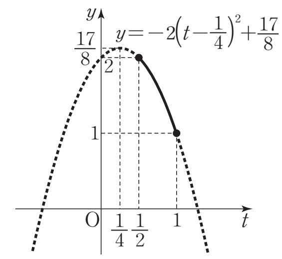
$2\sin^2\theta+\cos\theta=2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta$

$\qquad=-2\cos^2\theta+\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\le t\le 1$이고 주어진 식은

$-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

$f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$이라 하면 함수 $y=f(t)$ $\left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때,



$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

$\quad=-\frac{1}{8}+\frac{17}{8}$

$\quad=2$

답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

양수 a, b에 대하여 $a^2>0$, $b^2>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)
이때 $a^2+b^2=4ab\cos\theta$이므로
$4ab\cos\theta\ge 2ab$
$\therefore \cos\theta\ge\frac{1}{2}$

15 $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}-\dfrac{4\cos\left(\frac{5}{12}\pi-x\right)}{\sin\left(x+\frac{7}{12}\pi\right)}+3$에서

$\cos\left(\frac{5}{12}\pi-x\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$,

$\sin\left(x+\frac{7}{12}\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}=\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

이므로 주어진 함수는

$f(x)=\dfrac{2}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}-\dfrac{4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}+3$

$\quad=\dfrac{2\left\{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}$

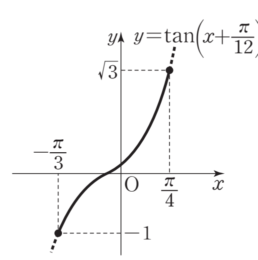
$\qquad-\dfrac{4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}+3$

$\quad=2\left\{\tan^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+1\right\}-4\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+3$

$\quad=2\tan^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-4\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+5$

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

함수 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

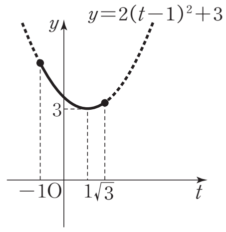


$-1\le\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\le\sqrt{3}$

이때 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=t$로 놓으면

주어진 함수는

$y=2t^2-4t+5$
$\quad=2(t-1)^2+3\ (-1\le t\le\sqrt{3})$
이고 이 함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값과 최솟값은 각각 $t=-1$, $t=1$일 때 갖는다.



$t=-1$, 즉 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-1$

에서

$x+\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 $x=-\frac{\pi}{3}$ $\qquad\therefore a=-\frac{\pi}{3}$

이때의 최댓값은

$M=2(-1-1)^2+3=11$

또한, $t=1$, 즉 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=1$에서

$x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}\right)$

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{4}$이므로

이므로 $x=\frac{\pi}{6}$ $\qquad\therefore b=\frac{\pi}{6}$

이때의 최솟값은 $m=3$

$\therefore\ |(a-b)(M+m)|=\left|\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\times(11+3)\right|$

$\qquad=\frac{\pi}{2}\times14=7\pi$

답 7π

16

$\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y & \cdots\cdots㉠\\ 2\cos x+\cos y=1 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$에서

㉠의 양변을 제곱하면

$2\sin^2 x=\sin^2 y$ $\qquad\cdots\cdots㉢$

㉡에서 $1-2\cos x=\cos y$이므로 양변을 제곱하면

$4\cos^2 x-4\cos x+1=\cos^2 y$ $\qquad\cdots\cdots㉣$

㉢+㉣을 하면

$2\sin^2 x+4\cos^2 x-4\cos x+1=\sin^2 y+\cos^2 y$

$2(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x-4\cos x+1=1$

$2-2\cos^2 x+4\cos^2 x-4\cos x=0$

$\cos^2 x-2\cos x+1=0$

$(\cos x-1)^2=0$, $\cos x=1$

$\therefore\ x=0\ (\because\ 0\le x<2\pi)$

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $\sin y=0$

$\therefore\ y=0$ 또는 $y=\pi\ (\because\ 0\le y<2\pi)$

그런데 $x=0$, $y=0$이면 ㉡에서

$2+1=3\ne1$이므로 모순이다.

$\therefore\ x=0,\ y=\pi$

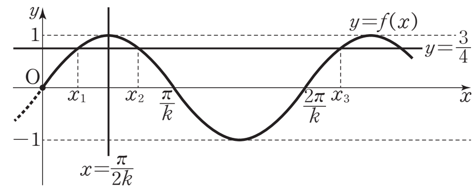
따라서 $a=0$, $b=\pi$이므로

$a+b=\pi$

답 ②

17

함수 $f(x)=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이므로 다음 그림과 같이 $0\le x\le\frac{\pi}{k}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2k}$에 대하여 대칭이다.



또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 작은 값부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$이라 하면 방정식 $f(x)=\frac{3}{4}$의 근은 x_1, x_2, x_3, $\cdots$과 같다.

이때 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2k}$이므로

$x_1+x_2=\frac{\pi}{k}$

$\therefore\ f(x_1+x_2+x_3)=f\left(\frac{\pi}{k}+x_3\right)=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+x_3\right)$

$\qquad=\sin(\pi+kx_3)=-\sin kx_3$

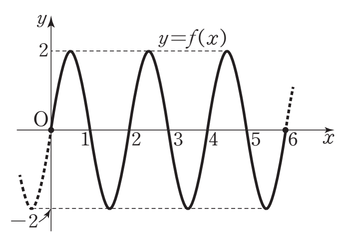
$\qquad=-f(x_3)=-\frac{3}{4}$

답 ③

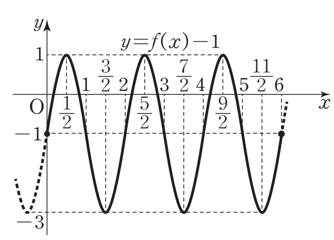
18

$f(x)=2\sin\pi x$라 하면 $-2\le2\sin\pi x\le2$이므로 함수 $f(x)$는 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고, 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$인 함수이다.

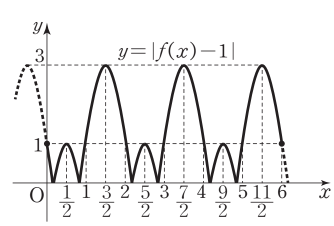
따라서 $0\le x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)-1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

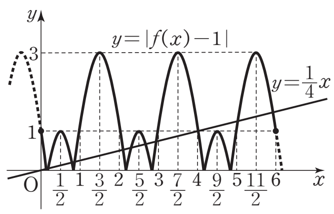


함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)-1$의 그래프에서 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



방정식 $|f(x)-1|=\frac{1}{4}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수와 같다.

$0\le x\le 6$일 때, 두 함수 $y=|f(x)-1|$, $y=\frac{1}{4}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로 함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수는 11이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수도 11이다. **답** 11

• 다른 풀이 •

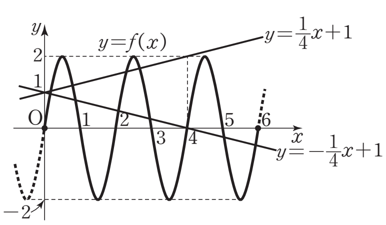
방정식 $|f(x)-1|=\frac{1}{4}x$에서

$f(x)-1=\pm\frac{1}{4}x$, $f(x)=\pm\frac{1}{4}x+1$

$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{4}x+1$ 또는 $f(x)=-\frac{1}{4}x+1$

즉, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 두 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x+1$, $f(x)=-\frac{1}{4}x+1$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

이때 함수 $f(x)=2\sin\pi x$는 최댓값과 최솟값이 각각 2, -2이고, 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$인 함수이므로 $0\le x\le 6$에서 세 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{4}x+1$, $y=-\frac{1}{4}x+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 11이다.

19

$\sin^{2023}x-\cos^{2024}x=1$에서

$\sin^{2023}x=\cos^{2024}x+1$ ……㉠

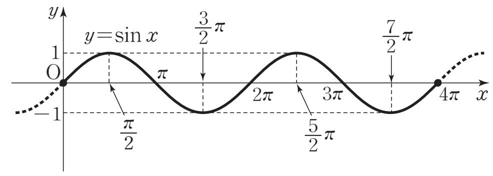
이때 $0\le\cos^{2024}x\le 1$이므로

$1\le\cos^{2024}x+1\le 2$

또한, $-1\le\sin^{2023}x\le 1$이므로 ㉠에서 (좌변)=(우변)이려면

$\sin^{2023}x=1$이어야 한다.

$\therefore$ $\sin x=1$



$0\le x\le 4\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $\sin x=1$을 만족시키는 x의 값은

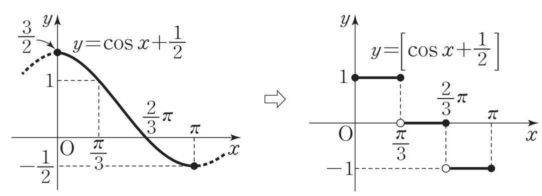
$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}\pi$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi=3\pi$ **답** ③

20

$0\le x\le\pi$에서 함수 $y=\cos x+\frac{1}{2}$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



방정식 $\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=x-k$의 정수해가 존재하려면 두 함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$, $y=x-k$의 그래프의 교점 중에서 x좌표가 정수인 점이 존재해야 한다.

이때 $\frac{\pi}{3}\fallingdotseq 1.05$, $\frac{2}{3}\pi\fallingdotseq 2.09$, $\pi\fallingdotseq 3.14$이므로 교점의 x좌표로 가능한 것은 0, 1, 2, 3이다.

(i) 교점의 x좌표가 0인 경우

함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$y=x-k$에서 $1=0-k$

$\therefore$ $k=-1$

(ii) 교점의 x좌표가 1인 경우

함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$0<1<\frac{\pi}{3}$

$y=x-k$에서 $1=1-k$

$\therefore$ $k=0$

(iii) 교점의 x좌표가 2인 경우

함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$\frac{\pi}{3}<2<\frac{2}{3}\pi$

$y=x-k$에서 $0=2-k$

$\therefore$ $k=2$

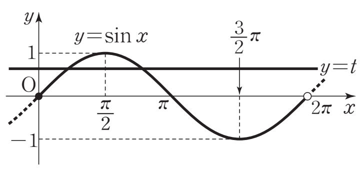
(iv) 교점의 x좌표가 3인 경우

함수 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(3,\ -1)$을 지

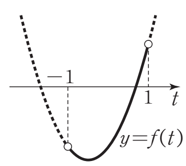
$\frac{2}{3}\pi<3<\pi$

나므로
$y=x-k$에서 $-1=3-k$
$\therefore k=4$
(i)~(iv)에서 주어진 방정식의 정수해가 존재하도록 하는 k의 값은 -1, 0, 2, 4이므로 그 합은
$-1+0+2+4=5$ **답** ③

21 $2\cos^2 x-2\sin x+2a-3=0$에서
$2(1-\sin^2 x)-2\sin x+2a-3=0$
$\therefore 2\sin^2 x+2\sin x-2a+1=0$ ……㉠
$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $\sin x=t$는 $t=-1$ 또는 $t=1$일 때 하나의 실근을 갖고, $-1<t<1$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.



방정식 ㉠에서 $\sin x=t$로 놓으면 $2t^2-2t-2a+1=0$이고, $f(t)=2t^2+2t-2a+1$이라 하면 t에 대한 방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 실근으로 -1, 1을 갖거나 $-1<t<1$에서 중근 또는 하나의 실근만을 가져야 한다.
이때 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(t)=0$은 두 실근으로 -1, 1을 동시에 가질 수 없다.*

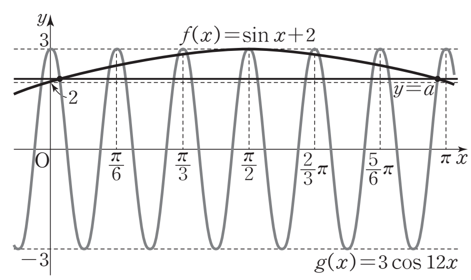


(i) $-1<t<1$에서 중근을 가질 때,
$f(t)=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-2a+\dfrac{1}{2}$에서
$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2a+\dfrac{1}{2}=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{4}$
(ii) $-1<t<1$에서 하나의 실근만을 가질 때,
$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로
$f(-1)=2-2-2a+1$
$=-2a+1$,
$f(1)=2+2-2a+1=-2a+5$
에서 $(-2a+1)(-2a+5)<0$
$(2a-1)(2a-5)<0$ $\therefore \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$
(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값 또는 그 범위는
$a=\dfrac{1}{4}$ 또는 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ **답** $a=\dfrac{1}{4}$ 또는 $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{5}{2}$

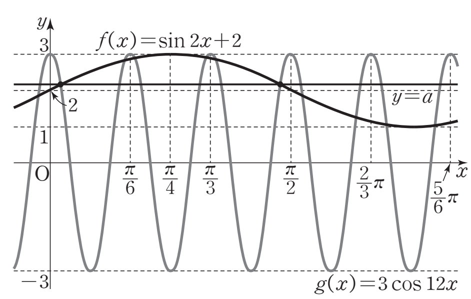
BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$t=-1$, $t=1$을 근으로 갖고, t^2의 계수가 2인 이차방정식은 $2(t+1)(t-1)=0$에서 $2t^2-2=0$으로 t의 계수가 0이다.
그런데 방정식 $f(t)=0$의 t의 계수는 2이므로 방정식 $f(t)=0$은 $t=-1$, $t=1$을 모두 근으로 가질 수 없다.

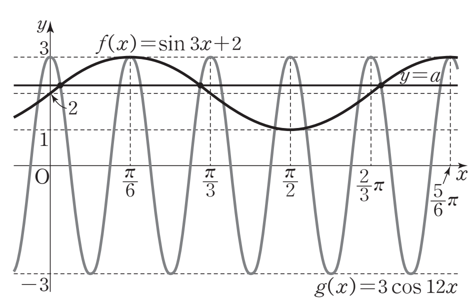
22 함수 $f(x)=\sin kx+2$는 최댓값이 3, 최솟값이 1이고, 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$ (k는 자연수)인 함수이다.
또한, 함수 $g(x)=3\cos 12x$는 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고, 주기가 $\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$인 함수이다.
$A=\{x\,|\,f(x)=a\}$, $B=\{x\,|\,g(x)=a\}$라 할 때, $A\subset B$를 만족시키기 위해서는 방정식 $f(x)=a$의 실근이 모두 방정식 $g(x)=a$의 실근이 되어야 하므로 $\dfrac{2\pi}{k}$, $\dfrac{4\pi}{k}$, $\dfrac{6\pi}{k}$, …의 값이 모두 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{6}$, …의 값에 대응될 수 있어야 한다.
주기의 배수
즉, k가 12의 약수이어야 하므로 가능한 k의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이다.
(i) $k=1$일 때,
$f(x)=\sin x+2$의 주기가 2π이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A\subset B$
(ii) $k=2$일 때,
$f(x)=\sin 2x+2$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



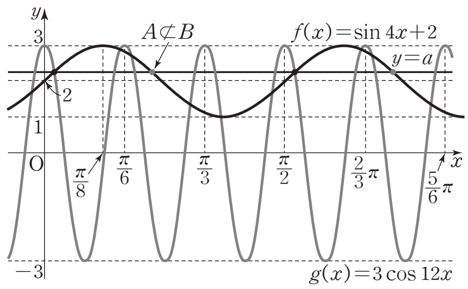
$\therefore A\subset B$
(iii) $k=3$일 때,
$f(x)=\sin 3x+2$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{3}$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(iv) $k=4$일 때,

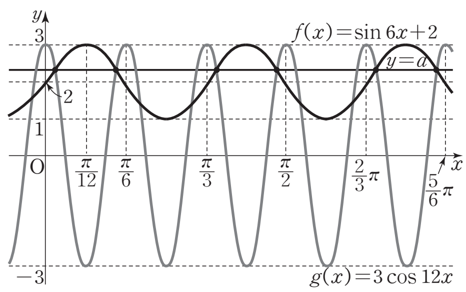
$f(x)=\sin 4x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \not\subset B$

(v) $k=6$일 때,

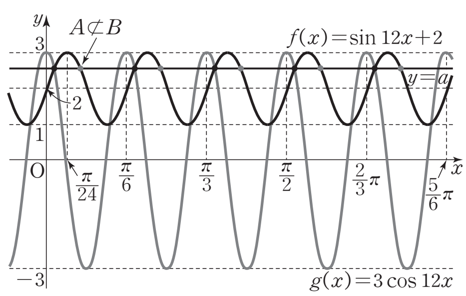
$f(x)=\sin 6x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(vi) $k=12$일 때,

$f(x)=\sin 12x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \not\subset B$

(i)~(vi)에서 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$를 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 6의 4개이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로 그 주기의 반 $\frac{\pi}{k}$가 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \cdots$일 때, $A \subset B$가 성립한다.

즉, $\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{6}\times n$ (n은 자연수)이므로 $k\times n=6$

따라서 $k=\frac{6}{n}$이고 k가 자연수이므로 조건을 만족시키는 k는 1, 2, 3, 6이다.

23 해결단계

❶ 단계	$\sin(\pi\sin\alpha)+\cos(\pi\cos\beta)=2$에서 $\sin(\pi\sin\alpha)$, $\cos(\pi\cos\beta)$의 값을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 값과 두 함수 $y=\sin\alpha$, $y=\cos\beta$의 그래프를 이용하여 α, β의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	$\alpha+\beta$의 값을 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$에 대입하여 식의 최솟값을 구한다.

$0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$에서

$0\le\sin\alpha\le 1$, $-1\le\cos\beta\le 1$이므로

$0\le\pi\sin\alpha\le\pi$, $-\pi\le\pi\cos\beta\le\pi$

즉, $0\le\sin(\pi\sin\alpha)\le 1$, $-1\le\cos(\pi\cos\beta)\le 1$이므로

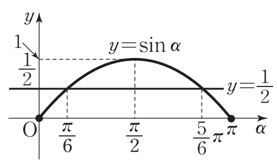
$\sin(\pi\sin\alpha)+\cos(\pi\cos\beta)=2$에서

$\sin(\pi\sin\alpha)=1$, $\cos(\pi\cos\beta)=1$

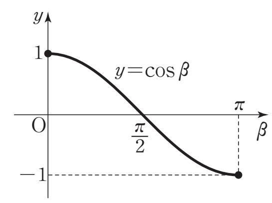
이때 $0\le\pi\sin\alpha\le\pi$, $-\pi\le\pi\cos\beta\le\pi$이므로

$\pi\sin\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\pi\cos\beta=0$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=0$



[그림 1]



[그림 2]

$0\le\alpha\le\pi$에서 함수 $y=\sin\alpha$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 방정식 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$을 만족시키는 α의 값은

$\alpha=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$

$0\le\beta\le\pi$에서 함수 $y=\cos\beta$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 방정식 $\cos\beta=0$을 만족시키는 β의 값은

$\beta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha+\beta=\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi$

(i) $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$일 때,

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sin\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(ii) $\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi$일 때,

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

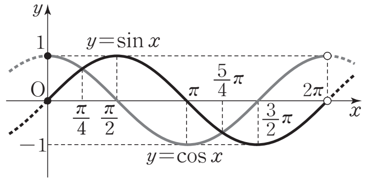
$=-\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sin\frac{4}{3}\pi+\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은

$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **답** $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

24 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $\sin x\le\cos x$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$ ……㉠

또한, $2\sin^2 x-5\cos x+1\ge0$에서

$2(1-\cos^2 x)-5\cos x+1\ge0$

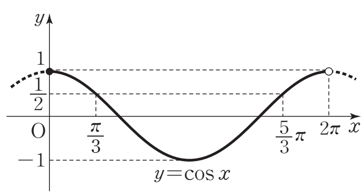
$2-2\cos^2 x-5\cos x+1\ge0$

$2\cos^2 x+5\cos x-3\le0$

$(\cos x+3)(2\cos x-1)\le0$

$\therefore\ -1\le\cos x\le\frac{1}{2}\ (\because\ -1\le\cos x\le1)$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $-1\le\cos x\le\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{5}{4}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{5}{4}\pi+\frac{5}{3}\pi=\frac{35}{12}\pi$ 답 $\frac{35}{12}\pi$

25 $f(x)=x^2-2x\cos\theta+\sin^2\theta$

$=x^2-2x\cos\theta+1-\cos^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2+1-2\cos^2\theta$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta,\ 1-2\cos^2\theta)$

이때 꼭짓점과 원점 사이의 거리가 1 이하이므로

$\sqrt{\cos^2\theta+(1-2\cos^2\theta)^2}\le1$

$\cos^2\theta+(1-2\cos^2\theta)^2\le1$

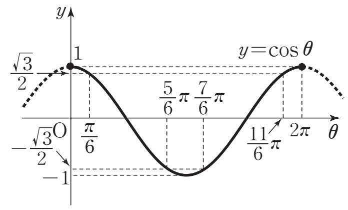
$\cos^2\theta+1-4\cos^2\theta+4\cos^4\theta\le1$

$4\cos^4\theta-3\cos^2\theta\le0$

$\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)\le0$

$0\le\cos^2\theta\le\frac{3}{4}$ $\quad\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……㉠

$0\le\theta\le2\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는

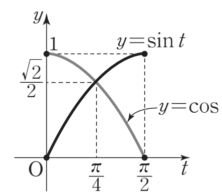
$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le\theta\le\frac{11}{6}\pi$

따라서 θ의 값으로 가능하지 않은 것은 ③이다. 답 ③

26 $0\le|\cos 2x|\le1$이므로 $0\le\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|\le\frac{\pi}{2}$

이때 $\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|=t$로 놓으면 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서

두 함수 $y=\sin t$, $y=\cos t$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $\sin t\ge\cos t$를 만족시키는 t의 값의 범위는



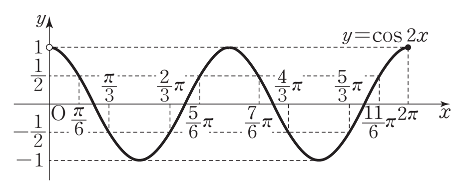
$\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$

즉, $\frac{\pi}{4}\le\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\le|\cos 2x|\le1$

$\therefore\ -1\le\cos 2x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2}\le\cos 2x\le1$ ……㉠

한편, 함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, $0<x\le2\pi$에서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $0<x\le2\pi$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi$ 또는

$\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi\le x\le2\pi$

이때 $\frac{\pi}{3}<2<\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi<3<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{4}{3}\pi<5<\frac{5}{3}\pi$,

$\frac{11}{6}\pi<6<2\pi$이므로 자연수 x는 2, 3, 5, 6이다.

$\rightarrow \frac{\pi}{6}<1<\frac{\pi}{3}$, $\frac{7}{6}\pi<4<\frac{4}{3}\pi$, $7>2\pi$

따라서 그 합은

$2+3+5+6=16$ 답 16

단계	채점 기준	배점
(가)	$\left\|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right\|=t$로 놓고 $\sin t\ge\cos t$를 만족시키는 t의 값의 범위를 구한 경우	40%
(나)	주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 x의 값의 범위에 속하는 자연수를 구하고 그 합을 구한 경우	20%

27 $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\ge0$에서

$\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 주어진 부등식은

$2\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-\left\{-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-1\ge0$

$2-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\ge0$

$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\le0$

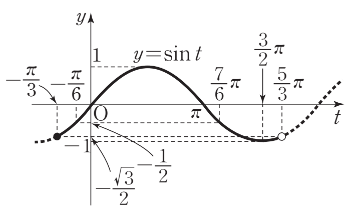
이때 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=A$로 놓으면 $\underline{-1\le A\le1}$이고 주어진 부등식은 $2A^2-A-1\le0$이다.

$0\le x<2\pi$에서
$-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$
$\therefore -1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le1$

즉, $(2A+1)(A-1)\le0$이므로 $-\frac{1}{2}\le A\le1$

$\therefore -\frac{1}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le1$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이므로 함수 $y=\sin t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$-\frac{1}{2}\le\sin t\le1$을 만족시키는 t의 값의 범위는

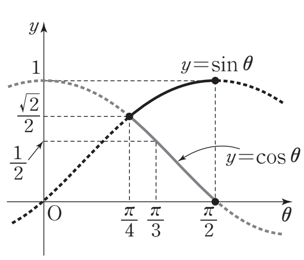
$-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{7}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{7}{6}\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{\pi}{6}}=9$ **답** 9

28 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$\min(\sin\theta,\ \cos\theta)=\cos\theta$

(i) $\cos\theta\le1-\cos\theta$일 때,

$2\cos\theta\le1$에서 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

이때 $\min(\sin\theta,\ \cos\theta)+\max(\cos\theta,\ 1-\cos\theta)=1$에서 $\cos\theta+1-\cos\theta=1$이므로 주어진 방정식이 항상 성립한다.

(ii) $\cos\theta>1-\cos\theta$일 때,

$2\cos\theta>1$에서 $\cos\theta>\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 위의 그림과 같으므로 구하는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{3}$

이때 $\min(\sin\theta,\ \cos\theta)+\max(\cos\theta,\ 1-\cos\theta)=1$에서 $\cos\theta+\cos\theta=1$이므로

$2\cos\theta=1$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

그런데 $\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 방정식을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

따라서 θ의 최솟값은 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, 최댓값은 $\beta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ **답** $\frac{\pi}{6}$

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 60

01 $a=30$, $b=\pi$, $c=40$	**02** $2\pi^2$	**03** 78	**04** $-\frac{3}{4}$
05 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**06** ①	**07** 18	

01 해결단계

❶ 단계	주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, c의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	주어진 함수의 주기를 이용하여 b의 값을 구한다.

원의 반지름의 길이는 30 cm이고, 페달이 최저점을 지날 때 지면으로부터의 높이가 10 cm이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $2\times30+10=70$, 최솟값은 10이다.

즉, $f(x)=a\sin b\left(x-\frac{1}{2}\right)+c$에서

$|a|+c=70$, $-|a|+c=10$이므로

$a+c=70$, $-a+c=10$ ($\because a>0$)

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=30$, $c=40$

또한, 페달이 한 바퀴 도는 데 2초가 걸리므로 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

즉, $\frac{2\pi}{|b|}=2$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2$ ($\because b>0$)

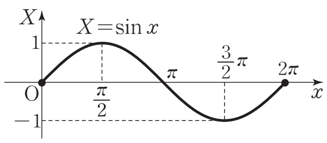
$\therefore b=\pi$

$\therefore a=30$, $b=\pi$, $c=40$ **답** $a=30$, $b=\pi$, $c=40$

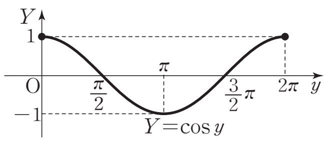
02 해결단계

❶ 단계	$\sin x\cos y\ge 0$에서 $\sin x\ge 0$, $\cos y\ge 0$ 또는 $\sin x\le 0$, $\cos y\le 0$임을 안다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 조건을 만족시키는 x, y의 값의 범위를 구한 후, 이를 좌표평면 위에 나타내어 영역의 넓이를 구한다.

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $X=\sin x$의 그래프는 [그림 1]과 같고, $0\le y\le 2\pi$에서 함수 $Y=\cos y$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

$\sin x\cos y\ge 0$에서

(i) $\sin x\ge 0$, $\cos y\ge 0$일 때,

위의 부등식을 만족시키는 x, y의 값의 범위는

[그림 1]에서 $0\le x\le \pi$ 또는 $x=2\pi$,

[그림 2]에서 $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi\le y\le 2\pi$

(ii) $\sin x\le 0$, $\cos y\le 0$일 때,

위의 부등식을 만족시키는 x, y의 값의 범위는

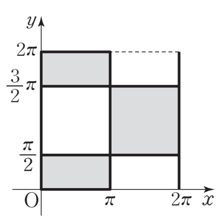
[그림 1]에서 $x=0$ 또는 $\pi\le x\le 2\pi$,

[그림 2]에서 $\dfrac{\pi}{2}\le y\le \dfrac{3}{2}\pi$

(i), (ii)에서 구한 범위를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 영역의 넓이는

$2\times\left(\pi\times\dfrac{\pi}{2}\right)+\pi\times\pi$

$=\pi^2+\pi^2=2\pi^2$



(단, 경계선 포함)

답 $2\pi^2$

03 해결단계

❶ 단계	x의 범위를 $-2\pi\le x<0$과 $0\le x\le 2\pi$인 경우로 나누고 각 범위에서 방정식 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 x의 값의 개수와 합을 각각 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$$f(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|=\begin{cases}|-2\sin x+1| & (-2\pi\le x<0)\\ |2\sin 3x+1| & (0\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=1$의 근과 같다.

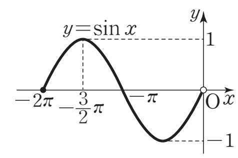
(i) $-2\pi\le x<0$일 때,

방정식 $f(x)=1$에서 $|-2\sin x+1|=1$

$-2\sin x+1=1$ 또는 $-2\sin x+1=-1$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

$-2\pi\le x<0$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\sin x=0$에서

$x=-2\pi$ 또는 $x=-\pi$

$\sin x=1$에서 $x=-\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 방정식 $f(x)=1$의 모든 근의 합은

$(-2\pi)+(-\pi)+\left(-\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{9}{2}\pi$

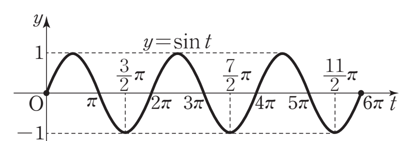
(ii) $0\le x\le 2\pi$일 때,

방정식 $f(x)=1$에서 $|2\sin 3x+1|=1$

$2\sin 3x+1=1$ 또는 $2\sin 3x+1=-1$

$\therefore \sin 3x=0$ 또는 $\sin 3x=-1$

이때 $3x=t$로 놓으면 $0\le 3x\le 6\pi$이므로 함수 $y=\sin t$ $(0\le t\le 6\pi)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\sin t=0$에서 $t=0$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π이므로

$x=0$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$, π, $\dfrac{4}{3}\pi$, $\dfrac{5}{3}\pi$, 2π

$\sin t=-1$에서 $t=\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{7}{2}\pi$, $\dfrac{11}{2}\pi$이므로

$x=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$

따라서 방정식 $f(x)=1$의 모든 근의 합은

$0+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi+\pi+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{5}{3}\pi+2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{7}{6}\pi+\dfrac{11}{6}\pi$

$=\dfrac{21}{2}\pi$

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=1$의 근은 모두 13개이므로 $n=13$이고, 그 합은

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n&=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{13}\\&=\left(-\dfrac{9}{2}\pi\right)+\dfrac{21}{2}\pi\\&=6\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \dfrac{n}{\pi}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)&=\dfrac{13}{\pi}\times 6\pi\\&=78\end{aligned}$$

답 78

• 다른 풀이 •

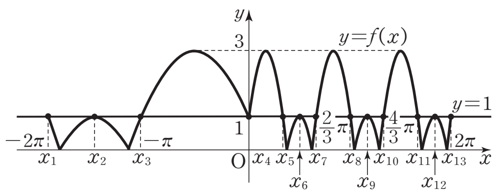
함수 $f(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$의 그래프를 직접 그린 후, 삼각함수의 주기와 대칭성을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수도 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를

작은 순서대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} |-2\sin x+1| & (-2\pi\le x<0) \\ |2\sin 3x+1| & (0\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 모두 13개이므로 $n=13$

$-2\pi\le x<0$에서 생기는 교점의 x좌표가 x_1, x_2, x_3이고, x_1, x_3은 직선 $x=x_2$에 대하여 대칭이므로

$$x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ x_1+x_2+x_3&=x_1+\frac{x_1+x_3}{2}+x_3\\&=\frac{3}{2}(x_1+x_3)\\&=\frac{3}{2}(-2\pi-\pi)\\&=\frac{3}{2}\times(-3\pi)=-\frac{9}{2}\pi\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$0\le x\le 2\pi$에서 생기는 교점의 x좌표가 x_4, x_5, x_6, $\cdots$, x_{13}이고, $x_4=0$, x_5, x_7은 직선 $x=x_6$에 대하여 대칭, x_8, x_{10}은 직선 $x=x_9$에 대하여 대칭, x_{11}, x_{13}은 직선 $x=x_{12}$에 대하여 대칭이다.

즉, $x_6=\frac{x_5+x_7}{2}$, $x_9=\frac{x_8+x_{10}}{2}$, $x_{12}=\frac{x_{11}+x_{13}}{2}$이므로

$$\begin{aligned}&x_4+x_5+x_6+\cdots+x_{13}\\&=0+\frac{3}{2}(x_5+x_7)+\frac{3}{2}(x_8+x_{10})+\frac{3}{2}(x_{11}+x_{13})\\&=\frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉡$$

또한, x_5, x_8은 직선 $x=x_7$에 대하여 대칭이고, x_{10}, x_{13}은 직선 $x=x_{11}$에 대하여 대칭이므로

$x_7=\frac{x_5+x_8}{2}$에서 $x_5+x_8=2x_7$, $x_{11}=\frac{x_{10}+x_{13}}{2}$

위의 식을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})\\&=\frac{3}{2}\left\{3x_7+\frac{3}{2}(x_{10}+x_{13})\right\}\\&=\frac{3}{2}\left\{3\times\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi+2\pi\right)\right\}\\&=\frac{3}{2}\times 7\pi\\&=\frac{21}{2}\pi\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉢에서

$$\begin{aligned}\frac{n}{\pi}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)&=\frac{13}{\pi}\times\left(-\frac{9}{2}\pi+\frac{21}{2}\pi\right)\\&=\frac{13}{\pi}\times 6\pi=78\end{aligned}$$

04 해결단계

❶ 단계	$\cos x=X$, $\sin x=Y$로 치환하고 $X^2+Y^2=1$임을 파악한다.
❷ 단계	주어진 함수에 $\cos x=X$, $\sin x=Y$를 대입하여 직선의 방정식을 구한다.
❸ 단계	원의 중심 $(0,\ 0)$과 ❷ 단계에서 구한 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같음을 이용하여 최댓값을 구한다.

$\cos x=X$, $\sin x=Y$로 놓으면 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$이므로

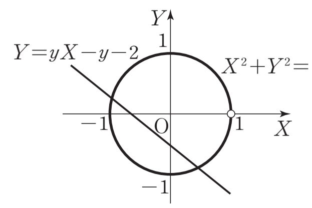
$X^2+Y^2=1$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

또한, $y=\frac{\sin x+2}{\cos x-1}$에서 $y=\frac{Y+2}{X-1}$ $(X\ne 1)$이므로

$Y+2=y(X-1)$

$yX-Y-y-2=0$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

이때 오른쪽 그림의 XY좌표평면에서 원 ㉠과 직선 ㉡이 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{|-y-2|}{\sqrt{y^2+(-1)^2}}\le 1$, $|y+2|\le\sqrt{y^2+1}$

$|y+2|\ge 0$, $\sqrt{y^2+1}\ge 0$이므로 위의 부등식의 양변을 제곱하면

$(y+2)^2\le y^2+1$, $4y\le -3$ $\quad\therefore\ y\le -\frac{3}{4}$

따라서 구하는 최댓값은 $-\frac{3}{4}$이다. 답 $-\frac{3}{4}$

• 다른 풀이 •

$\sin x=X$, $\cos x=Y$로 놓으면 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$X^2+Y^2=1$

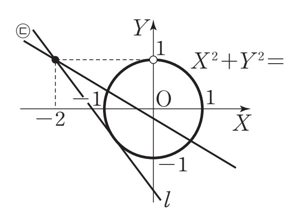
또한, $y=\frac{\sin x+2}{\cos x-1}$에서 $y=\frac{X+2}{Y-1}$ $(Y\ne 1)$이므로

$y(Y-1)=X+2$

$\therefore\ X-yY+y+2=0$ $\quad\cdots\cdots ㉢$

이때 ㉢은 XY좌표평면에서 점 $(-2,\ 1)$을 지나는 직선이고, y는 기울기의 역수이므로 y가 최대이려면 직선 ㉢의 기울기가 최소이어야 한다.

원 $X^2+Y^2=1$과 직선 ㉢을 XY좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 직선 ㉢의 기울기가 최소인 경우는 직선 ㉢이 직선 l과 같이 원과 접할 때이다.



따라서 직선 ㉢과 원 $X^2+Y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|y+2|}{\sqrt{1+(-y)^2}}=1$, $|y+2|=\sqrt{1+y^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$y^2+4y+4=1+y^2$, $4y=-3$ $\quad\therefore\ y=-\frac{3}{4}$

따라서 y의 최댓값은 $-\frac{3}{4}$이다.

서울대 선배들의 강추문제 | **1등급 비법 노하우**

이 문제는 다양한 풀이 방법이 있는데, $\cos x=X$, $\sin x=Y$로 치환하여 그래프로 푸는 것이 가장 간단하다. 또한, 문제를 푸는 과정에서 $X^2+Y^2=1$로 XY좌표평면에 반지름의 길이가 1인 원을 그리는 접근을 하는 학생들은 드물지만 삼각함수를 치환하여 복잡한 그래프나 θ의 값을 하나하나 구하지 않아도 쉽게 문제를 해결할 수 있는 좋은 방법이다.

05 해결단계

❶ 단계	$2t-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓고, 삼각형 ABC의 넓이를 θ에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 θ의 값의 범위를 구하고 이때의 t의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	α와 β의 값을 각각 구한 후, $\sin(\beta-\alpha)$의 값을 구한다.

점 $\mathrm{C}\left(\sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right)$에서

$2t-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면 $\mathrm{C}(\sin\theta, \cos\theta)$

$0\le t<\frac{5}{12}\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3}\le 2t-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore -\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

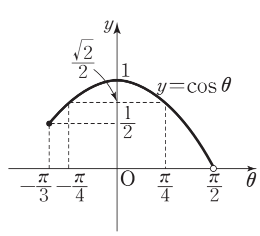
즉, $\cos\theta>0$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\cos\theta$$
$$=\frac{5}{4}\cos\theta$$

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이상이 되어야 하므로

$\frac{5}{4}\cos\theta\ge\frac{5\sqrt{2}}{8}$에서 $\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

즉, $-\frac{\pi}{4}\le 2t-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\pi}{12}\le 2t\le\frac{7}{12}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{24}\le t\le\frac{7}{24}\pi$

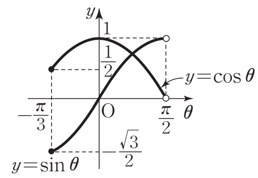
따라서 $\alpha=\frac{\pi}{24}$, $\beta=\frac{7}{24}\pi$이므로

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\left(\frac{7}{24}\pi-\frac{\pi}{24}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

BLACKLABEL 특강 | **참고**

$-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

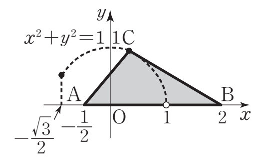


$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\theta<1$,

$0<\cos\theta\le 1$이다.

또한, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 점 C는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.

따라서 세 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(2, 0)$, $\mathrm{C}(\sin\theta, \cos\theta)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



06 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 $\sin x$에 대한 식으로 정리한다.
❷ 단계	$\sin x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 식으로 바꾼 후, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 t의 조건을 구한다.
❸ 단계	점 (a, b)의 자취의 방정식을 구하고, 그 자취를 좌표평면 위에 나타낸 것을 찾는다.

$\cos^2 x+a\sin x-b=0$에서

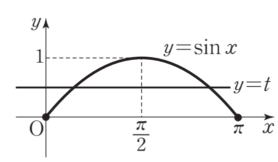
$1-\sin^2 x+a\sin x-b=0$

$\therefore \sin^2 x-a\sin x+b-1=0$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $0\le t\le 1$이고 주어진 방정식은

$t^2-at+b-1=0$ ……㉠

$0\le x\le\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$0\le t<1$일 때, 방정식 $\sin x=t$는 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 x에 대한 방정식 $\sin^2 x-a\sin x+b-1=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 t에 대한 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 갖고 그 중에서 한 근이 $t=\sin x=1$이어야 한다.

㉠에 $t=1$을 대입하면

$1^2-a+b-1=0$ $\therefore b=a$

즉, $t^2-at+a-1=0$에서

$(t-1)\{t-(a-1)\}=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=a-1$

또한, t에 대한 방정식 $t^2-at+b-1=0$의 나머지 한 근이 $0\le t<1$을 만족시켜야 하므로

$0\le a-1<1$ $\therefore 1\le a<2$

따라서 점 (a, b)의 자취의 방정식은 $b=a\ (1\le a<2)$이므로 자취를 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다. 답 ①

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 좀 어렵게 느껴질 수 있지만 이차방정식과 삼각함수를 연관시킨 문제가 수능 또는 학교 시험에서 자주 출제되므로 잘 알아두어야 한다.
우선 주어진 식을 $\sin x$에 대한 식으로 바꾸면
$\sin^2 x-a\sin x+b-1=0$이고 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $\sin x=t$로 치환한 방정식 $t^2-at+b-1=0$이 실근 $t=1$, $0\le t<1$인 하나의 실근을 가져야 함을 알아야 한다. 왜냐하면 두 근이 모두 $0\le t<1$을 만족시키면 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖기 때문이다.

07 해결단계

❶ 단계	n에 1, 2, 3, …을 대입하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	$0<k<1$임을 이용하여 정수인 $f(t)$의 값은 0 또는 1뿐임을 파악한다.
❸ 단계	$f(t)=0$, $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수를 구한 후, $g(a)=85$가 되도록 하는 a의 값을 구한다.
❹ 단계	$\log_a \frac{1}{2}$의 값을 구한다.

두 함수 $y=2k^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x$, $y=-2k^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$는 모두 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고, $x=4n-4$, $x=4n-2$, $x=4n$에서의 함숫값이 모두 0이며 최댓값이 각각 $2k^{2n-1}$, $2k^{2n}$이다.
n에 1, 2, 3, …을 대입하여 함수 $y=f(x)$를 구하면

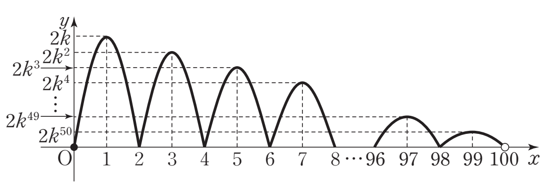
$$n=1\text{일 때, } f(x)=\begin{cases} 2k\sin\frac{\pi}{2}x & (0\le x<2) \\ -2k^2\sin\frac{\pi}{2}x & (2\le x<4)\end{cases}$$

$$n=2\text{일 때, } f(x)=\begin{cases} 2k^3\sin\frac{\pi}{2}x & (4\le x<6) \\ -2k^4\sin\frac{\pi}{2}x & (6\le x<8)\end{cases}$$

$$n=3\text{일 때, } f(x)=\begin{cases} 2k^5\sin\frac{\pi}{2}x & (8\le x<10) \\ -2k^6\sin\frac{\pi}{2}x & (10\le x<12)\end{cases}$$

⋮

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 모든 자연수 n에 대하여
$0<k<1$에서 $0<2k^n<2$이므로 $f(t)$의 값이 가질 수 있는 정수는 0과 1뿐이다.
(i) $f(t)=0$일 때,
위의 식을 만족시키는 t는 0, 2, 4, …, 98의 50개이다.
(ii) $f(t)=1$일 때,
위의 식을 만족시키는 t의 개수는 k의 값에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

$2k=1$, 즉 $k=\frac{1}{2}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 1
$2k^2=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 $2+1$
$2k^3=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 $2+2+1$
⋮
$2k^m=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ (m은 자연수)이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는
$2\times(m-1)+1=2m-1$

(i), (ii)에서 $f(t)$의 값이 정수가 되도록 하는 t의 개수는

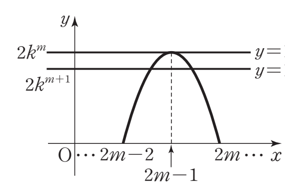
$$g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right)=50+(2m-1)$$
$$=2m+49$$

즉, $2m+49=85$에서 $2m=36$
$\therefore m=18$
따라서 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}}$이므로

$\log_a \frac{1}{2}=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}}}\frac{1}{2}=18$ 답 18

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

(ii)에서 $2k^m$ (m은 자연수)의 값이 1이 되는 경우를 기준으로 하여 t의 개수를 구하는 이유를 알아보자.
$f(t)=0$이 되도록 하는 t의 개수가 50이고, $f(t)$의 값이 정수가 되도록 하는 t의 총개수가 85이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수는 $85-50=35$이어야 한다.



$2k^m=1$이면 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같이 $x=2m-1$일 때 접한다. 이때 구간 $0<x<2$, $2<x<4$, $4<x<6$, …, $2m-4<x<2m-2$마다 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수가 35인 k의 값을 구할 수 있다.
그러나 $2k^m<1<2k^{m-1}$이면 구간 $0<x<2$, $2<x<4$, $4<x<6$, …, $2m-2<x<2m$마다 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 모두 2이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수는 짝수이다. 즉, $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수가 35인 k의 값이 존재하지 않으므로 $2k^m=1$이 되는 경우만을 따져도 된다.

이것이 수능 p. 61

1 ③	2 480	3 ④

1

해결단계

❶ 단계	삼각형 OAB의 넓이가 5임을 이용하여 두 양수 a, b에 대한 관계식을 구한다.
❷ 단계	두 직선 OA와 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$임을 이용하여 두 양수 a, b에 대한 관계식을 구한다.
❸ 단계	**❶단계**와 **❷단계**에서 구한 두 관계식을 연립하여 a, b의 값을 각각 구하고 $a+b$의 값을 구한다.

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{b}$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{2}{b}=5$

즉, $\frac{a}{b}=5$이므로 $a=5b$ ……㉠

또한, 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2b}$, $\frac{5}{2b}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$$
$$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$$

에서 $a^2b^2=\frac{25}{16}$이므로 $ab=\frac{5}{4}$ ($\because ab>0$) ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$5b^2=\frac{5}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}$ ($\because b>0$)

즉, $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=3$ 답 ③

2

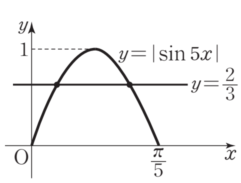
해결단계

❶ 단계	$n=5$일 때, 방정식 $\lvert\sin 5x\rvert=\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수 a_5의 값을 구한다.
❷ 단계	$n=6$일 때, 함수 $y=\lvert\sin 6x\rvert$의 그래프가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭임을 이용하여 방정식 $\lvert\sin 6x\rvert=\frac{2}{3}$의 서로 다른 모든 실근의 합 b_6의 값을 구한다.
❸ 단계	**❶단계**와 **❷단계**에서 구한 값을 이용하여 k의 값을 구한다.

(i) $n=5$일 때,

함수 $y=\lvert\sin 5x\rvert$의 주기는 $\frac{\pi}{5}$이고,

$0\le x\le\frac{\pi}{5}$에서 함수 $y=\lvert\sin 5x\rvert$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식



$\lvert\sin 5x\rvert=\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는

$2\times\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=20$

$\therefore a_5=20$

(ii) $n=6$일 때,

함수 $y=\lvert\sin 6x\rvert$의 주기는 $\frac{\pi}{6}$이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\lvert\sin 6x\rvert=\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수는 $2\times\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=24$

또한, 함수 $y=\lvert\sin 6x\rvert$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{24}라 하면

$\frac{x_1+x_{24}}{2}=\frac{x_2+x_{23}}{2}=\frac{x_3+x_{22}}{2}=\cdots=\frac{x_{12}+x_{13}}{2}=\pi$

$\therefore x_1+x_{24}=x_2+x_{23}=x_3+x_{22}=\cdots=x_{12}+x_{13}=2\pi$

$\therefore b_6=12\times 2\pi=24\pi$

(i), (ii)에서 $a_5b_6=20\times 24\pi=480\pi$이므로

$k=480$ 답 480

3

해결단계

❶ 단계	a_k의 값은 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수임을 확인한다.
❷ 단계	$k=1, 2, 3, 4, 5$일 때의 a_k의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 각 a_k의 값의 합을 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

(i) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$일 때,

$f(x)=\sin x$이므로

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$일 때,

$f(x)=2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x$이므로

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(i), (ii)에서 a_k는 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1$, 5일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

즉, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이므로

$a_1=a_5=2$

$k=2,\ 4$일 때, $\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 방정식 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 2이므로

$a_2=a_4=2$

$k=3$일 때, $\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)=1$

즉, 방정식 $\sin x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로

$a_3=1$

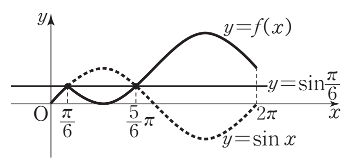
$\therefore\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$ 답 ④

• 다른 풀이 •

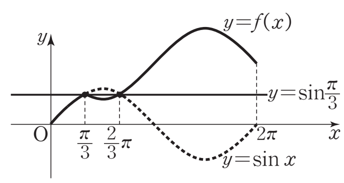
다음 그림은 k의 값에 따른 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면 위에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\dfrac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

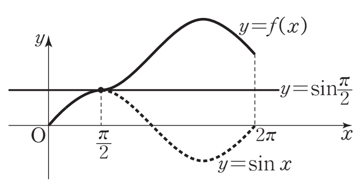
(i) $k=1$일 때, $a_1=2$



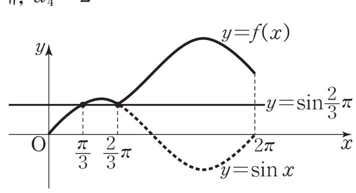
(ii) $k=2$일 때, $a_2=2$



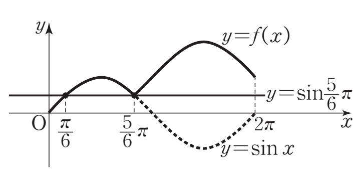
(iii) $k=3$일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$일 때, $a_5=2$



(i)~(v)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

07 사인법칙과 코사인법칙

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 63

01 30	**02** ⑤	**03** ⑤	**04** ⑤	**05** ④
06 ③	**07** $4\sqrt{6}$	**08** $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$		

01 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$는 원의 지름이다.

$\triangle\mathrm{ABD}$에서 $\angle\mathrm{A}=180^\circ-(50^\circ+40^\circ)=90^\circ$

즉, $\triangle\mathrm{ABD}$는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$는 원의 지름이다.

이때 원의 반지름의 길이를 R라 하면 $2R=20\sqrt{3}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\underbrace{\sin(50^\circ+70^\circ)}_{\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ}}=2R,\ \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=20\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30$ 답 30

02 $6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C=k$라 하면

$\sin A=\dfrac{k}{6},\ \sin B=\dfrac{k}{2\sqrt{3}},\ \sin C=\dfrac{k}{3}$

$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{k}{6}:\dfrac{k}{2\sqrt{3}}:\dfrac{k}{3}$

$=1:\sqrt{3}:2$ $=a:b:c$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$, $\angle\mathrm{B}=60^\circ$, $\angle\mathrm{A}=30^\circ$이므로 $\angle\mathrm{A}$의 크기는 30°이다. 답 ⑤

03 $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=180^\circ$에서

$\angle\mathrm{C}=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12(\mathrm{km})$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

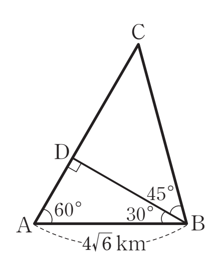
오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$, $\angle\mathrm{CBD}=45^\circ$

$\triangle\mathrm{ABD}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:1:\sqrt{3}$이므로

$4\sqrt{6}:\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=2:1:\sqrt{3}$



$\therefore\ \overline{AD}=2\sqrt{6}(\text{km}),\ \overline{BD}=6\sqrt{2}(\text{km})$

또한, $\triangle BCD$에서 $\angle BCD=45°$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}:\overline{BC}=1:1:\sqrt{2}$

$6\sqrt{2}:\overline{CD}:\overline{BC}=1:1:\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{CD}=6\sqrt{2}(\text{km}),\ \overline{BC}=12(\text{km})$

04

$\angle A=2\alpha$, $\overline{AD}=x$라 하면 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=6:4=3:2$

이때 $\overline{BC}=5\sqrt{3}$이므로

$\overline{BD}=3\sqrt{3},\ \overline{CD}=2\sqrt{3}$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{6^2+x^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times6\times x}=\frac{x^2+9}{12x}$$

$\triangle ADC$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

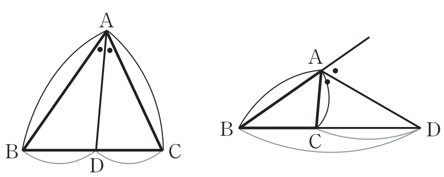
$$\cos\alpha=\frac{4^2+x^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times x}=\frac{x^2+4}{8x}$$

즉, $\dfrac{x^2+9}{12x}=\dfrac{x^2+4}{8x}$에서 $x^2-6=0$

$\therefore\ x=\sqrt{6}\ (\because\ x>0)$ 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 각의 이등분선의 성질



삼각형 ABC에서
$\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 또는 $\angle A$의 외각의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 D라 하면
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

05

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos60°$$
$$=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{2}=12$$

$\therefore\ \overline{BC}=2\sqrt{3}(\text{km})\ (\because\ \overline{BC}>0)$ *

이때 학교를 세우려는 지점을 P라 하면 점 P는 세 지점 A, B, C로부터 같은 거리에 있으므로 $\triangle ABC$의 외접원의 중심이다.

즉, $\overline{PC}$는 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이이므로

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60°}=2\overline{PC},\ \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\overline{PC}$$

$4=2\overline{PC}\qquad\therefore\ \overline{PC}=2(\text{km})$

따라서 구하는 거리는 2 km이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 $\overline{AB}=4$ km, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$ km, $\overline{CA}=2$ km

$4^2=(2\sqrt{3})^2+2^2$이므로 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

따라서 학교를 세우려는 지점은 $\triangle ABC$의 외접원의 중심, 즉 외심이고, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 일치하므로 지점 C와 학교를 세우려는 지점 사이의 거리는

$\dfrac{1}{2}\times4=2(\text{km})$

06

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R},\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

$2\sin A\cos B=\sin C$에서

$$2\times\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$$

$c^2+a^2-b^2=c^2,\ a^2-b^2=0$

$(a+b)(a-b)=0\qquad\therefore\ a=b\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ③

07

$\triangle DBC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

또한, $\triangle ABD$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{7^2+4^2-5^2}{2\times7\times4}=\frac{40}{56}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore\ \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\therefore\ \triangle ABD=\frac{1}{2}\times7\times4\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times7\times4\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{6}$

• 다른 풀이 •

$\triangle DBC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

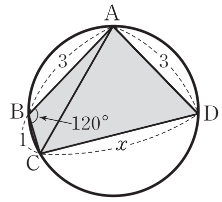
따라서 $\triangle ABD$에서 $s=\dfrac{7+4+5}{2}=8$이라 하면 헤론의 공식에 의하여

$$\triangle ABD=\sqrt{8(8-7)(8-4)(8-5)}$$
$$=\sqrt{8\times1\times4\times3}=4\sqrt{6}$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이런 유형의 문제는 내신에 자주 출제되므로 주의하여 알아두어야 한다. 코사인법칙은 삼각형의 세 변의 길이만 알면 어떤 각도 코사인값을 구할 수 있다는 점에서 유용하다. 코사인값을 알면 사인값, 탄젠트값은 저절로 얻을 수 있으므로 코사인법칙은 아주 유용한 법칙이다. 이 문제에서는 $\triangle ABD$의 넓이를 구해야 하므로 적어도 두 변의 길이와 끼인각의 크기를 알아야 한다. 이때 $\overline{BD}=5$임을 쉽게 알 수 있으므로 어느 한 각의 크기를 코사인법칙으로 구하고 이를 이용하여 사인값을 쉽게 구할 수 있다.

08 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2$
$=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos 120^\circ$
$=1+9-2\times1\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$=13$

원에 내접하는 사각형의 마주보는 대각의 크기의 합은 180°이므로

이때 사각형 ABCD가 원에 내접하므로
$\angle B+\angle D=180^\circ$, $120^\circ+\angle D=180^\circ$ $\quad\therefore \angle D=60^\circ$
또한, $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여
$13=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos 60^\circ$
$13=9+x^2-2\times3\times x\times\dfrac{1}{2}$
$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=4\ (\because x>0)$
$\therefore \square ABCD$
$=\triangle ABC+\triangle ACD$
$=\dfrac{1}{2}\times3\times1\times\sin 120^\circ+\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin 60^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\times3\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{3}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

답 $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 64~67

01 ④	02 $\frac{33}{8}$	03 ④	04 $4\sqrt{3}$	05 23
06 ⑤	07 ⑤	08 7	09 30 m	10 $\frac{9\sqrt{5}}{40}$ cm^2
11 ⑤	12 ①	13 291	14 ④	
15 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형				16 ④
17 $\frac{25}{4}$	18 ③	19 ③	20 $2\sqrt{3}$	21 ③
22 ⑤	23 103	24 14	25 12	26 ⑤
27 $4\sqrt{7}$				

01 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 네 삼각형 ABC, ABD, ABE, ABF에서 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin(\angle CAB)=\dfrac{\overline{BC}}{2R}=\dfrac{1}{5}$이므로
$\sin(\angle DAB)=\dfrac{\overline{BD}}{2R}=\dfrac{2\overline{BC}}{2R}=2\times\dfrac{\overline{BC}}{2R}$
$=2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$
$\sin(\angle EAB)=\dfrac{\overline{BE}}{2R}=\dfrac{3\overline{BC}}{2R}=3\times\dfrac{\overline{BC}}{2R}$
$=3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$
$\sin(\angle FAB)=\dfrac{\overline{BF}}{2R}=\dfrac{4\overline{BC}}{2R}=4\times\dfrac{\overline{BC}}{2R}$
$=4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$
$\therefore \sin(\angle DAB)+\sin(\angle EAB)+\sin(\angle FAB)$
$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{5}$

답 ④

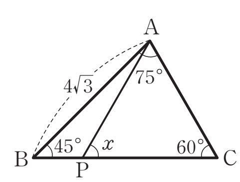
02 $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$에서
$b+c=5k$, $c+a=6k$, $a+b=7k$라 하고
위의 세 식을 연립하여 풀면
$a=4k$, $b=3k$, $c=2k$
이때 $\triangle ABC$에서 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이므로
$\sin A=\dfrac{a}{2R}=\dfrac{4k}{2R}$
$\sin B=\dfrac{b}{2R}=\dfrac{3k}{2R}$
$\sin C=\dfrac{c}{2R}=\dfrac{2k}{2R}$
$\therefore \dfrac{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}{\sin A\sin B\sin C}$
$=\dfrac{\left(\dfrac{4k}{2R}\right)^3+\left(\dfrac{3k}{2R}\right)^3+\left(\dfrac{2k}{2R}\right)^3}{\dfrac{4k}{2R}\times\dfrac{3k}{2R}\times\dfrac{2k}{2R}}$
$=\dfrac{64k^3+27k^3+8k^3}{24k^3}=\dfrac{99}{24}=\dfrac{33}{8}$

답 $\dfrac{33}{8}$

BLACKLABEL 특강 참고

사인법칙의 변형에 의하여
$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$이므로
$\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 값에 각각 a, b, c를 대입하여 계산해도 결과는 같다.

03 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$에서
$\angle C=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$
이므로 사인법칙에 의하여



$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$
$\therefore \overline{AC}=4\sqrt{2}$

점 P가 점 B 위에 있을 때
점 P가 점 C로 가까이 갈 때

이때 $\angle APC=x\ (45^\circ\le x<120^\circ)$라 하고 $\triangle APC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
$2R=\dfrac{\overline{AC}}{\sin x}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin x}\ge4\sqrt{2}\ \left(\because \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin x\le1\right)$
따라서 $\triangle APC$의 외접원의 지름의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

답 ④

• 다른 풀이 •

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$에서

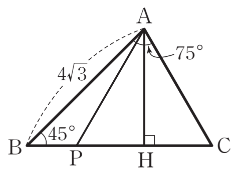
$\angle C=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

$\triangle APC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{AP}$ ······㉠

즉, $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때 $\triangle APC$의 외접원의 지름의 길이가 최소이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때는 점 P가 점 H 위에 있을 때이므로



$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 45^\circ$

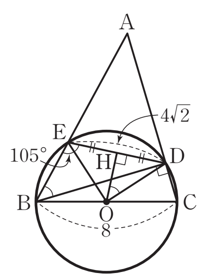
$=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

에서 $\overline{AP}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

따라서 ㉠에서 $\triangle APC$의 외접원의 지름의 길이의 최솟값은

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{2}$

04 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 DE에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{HD}=2\sqrt{2}$, $\overline{OD}=4$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{HD}^2}$

$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle ODH$는 $\angle OHD=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\angle HOD=45^\circ$

같은 방법으로 $\angle HOE=45^\circ$

즉, $\angle EOD=90^\circ$이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle EBD=\dfrac{1}{2}\angle EOD$

$=\dfrac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

$\triangle BDE$에서 $\angle EDB=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

$\therefore\ \angle ADE=\angle ADB-\angle EDB$

$=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

또한, $\angle DEB=105^\circ$이므로

$\angle AED=180^\circ-\angle DEB$

$=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

$\triangle AED$에서 $\angle EAD=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

따라서 $\triangle AED$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{ED}}{\sin 45^\circ}$에서 $\dfrac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore\ \overline{AE}=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

답 $4\sqrt{3}$

05 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$

무게중심 G는 중선 AD를 $2:1$로 내분하므로 선분 AG의 중점을 E라 하면

$\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{GD}=1$

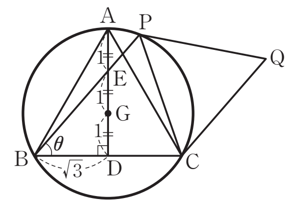
직각삼각형 EBD에서

$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{ED}=2$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$

또한, $\angle PBC=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$



이때 주어진 원의 반지름의 길이는 $\overline{AG}=2$이므로 삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

정삼각형의 무게중심은 정삼각형의 외접원의 중심, 즉 외심과 일치하므로 점 G는 주어진 원의 중심이다.

$2\times 2=\dfrac{\overline{PC}}{\sin\theta}$에서 $4=\dfrac{\overline{PC}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}$

$\therefore\ \overline{PC}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

따라서 정삼각형 PCQ의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{PC}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{8}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{16}{7}\sqrt{3}$

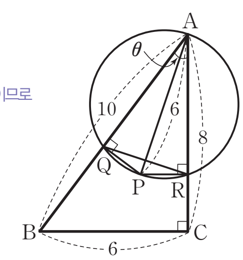
이므로 $p=7$, $q=16$

$\therefore\ p+q=23$

답 23

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$가 지름이고 사각형 AQPR가 내접하는 원을 그리자.

$\angle AQP+\angle ARP=180^\circ$이므로



이때 이 원의 반지름의 길이가 3이므로 $\angle QAR=\theta$라 하면

$\triangle AQR$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{QR}}{\sin\theta}=6$

또한, $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로

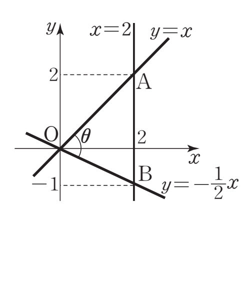
$\sin\theta=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\dfrac{\overline{QR}}{\sin\theta}=6$에서 $\dfrac{\overline{QR}}{\frac{3}{5}}=6$

$\therefore\ \overline{QR}=6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$

답 ⑤

07 다음 그림과 같이 직선 $x=2$와 두 직선 $y=x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$의 교점을 각각 A, B라 하면 $A(2,\ 2)$, $B(2,\ -1)$



삼각형 OBA에서

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{AB}=2-(-1)=3$

이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-3^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}$$

$$=\frac{8+5-9}{4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

이때 θ는 예각이므로 $\sin\theta>0$

따라서

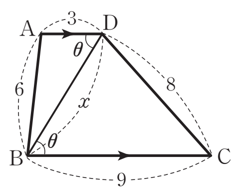
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 ⑤

08 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로



$\angle ADB=\angle DBC$ ($\because$ 엇각)

이때 $\angle ADB=\angle DBC=\theta$,

$\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle ABD$와 $\triangle BCD$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{x^2+3^2-6^2}{2\times x\times3}=\frac{x^2+9^2-8^2}{2\times x\times9}$$

$$\frac{x^2-27}{6x}=\frac{x^2+17}{18x}$$

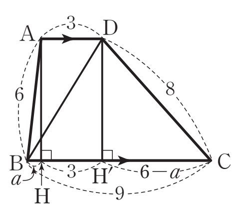
$3x^2-81=x^2+17$, $2x^2=98$

$x^2=49$ $\quad\therefore x=7$ ($\because x>0$)

따라서 대각선 BD의 길이는 7이다.

답 7

• 다른 풀이 •



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고

$\overline{BH}=a$라 하면

$\overline{HH'}=\overline{AD}=3$,

$\overline{H'C}=9-3-a=6-a$

이때 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\overline{AH}=\overline{DH'}$이고 $\triangle ABH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}^2=6^2-a^2=36-a^2$

$\triangle DH'C$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DH'}^2=8^2-(6-a)^2=64-(6-a)^2$

즉, $\underbrace{36-a^2=64-(6-a)^2}_{\overline{AH}=\overline{DH'}\text{이면 }\overline{AH}^2=\overline{DH'}^2\text{이므로}}$에서 $12a=8$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

$$\therefore \overline{AH}=\overline{DH'}=\sqrt{6^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{320}{9}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

따라서

$$\overline{BH'}=a+3=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3},\ \overline{DH'}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

이므로 $\triangle DBH'$에서 피타고라스 정리에 의하여

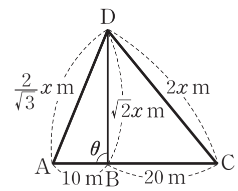
$$\overline{BD}=\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{441}{9}}=\sqrt{49}=7$$

09 세 지점에서 올려다 본 건물의 꼭대기를 D라 하고, 건물의 높이를 x m라 하면

$$\overline{AD}=\frac{x}{\sin60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}x\ (\text{m})$$

$$\overline{BD}=\frac{x}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}x\ (\text{m})$$

$$\overline{CD}=\frac{x}{\sin30^\circ}=2x\ (\text{m})$$



이때 오른쪽 그림과 같이 $\angle ABD=\theta$라 하면 $\triangle ABD$, $\triangle BCD$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{10^2+(\sqrt{2}x)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{2\times10\times\sqrt{2}x}$$

$$=\frac{100+\frac{2}{3}x^2}{20\sqrt{2}x}$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{20^2+(\sqrt{2}x)^2-(2x)^2}{2\times20\times\sqrt{2}x}=\frac{400-2x^2}{40\sqrt{2}x}$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$$\frac{100+\frac{2}{3}x^2}{20\sqrt{2}x}=-\frac{400-2x^2}{40\sqrt{2}x}$$

$$200+\frac{4}{3}x^2=-400+2x^2,\ \frac{2}{3}x^2=600$$

$x^2=900$ $\quad\therefore x=30$ ($\because x>0$)

따라서 이 건물의 높이는 30 m이다.

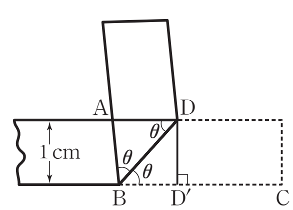
답 30 m

10 $\cos\theta=\frac{2}{3}$이므로 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

또한, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 $\triangle BD'D$에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{DD'}}{\overline{BD}}=\frac{1}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \overline{BD}=\frac{3}{\sqrt{5}}(\text{cm})$$



접은 각 엇각

이때 $\angle ABD=\angle DBC=\angle ADB=\theta$에서 $\triangle ABD$는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AD}\times\overline{BD}}$$

$$=\frac{\overline{AD}^2+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{AD}\times\frac{3}{\sqrt{5}}}\ (\because\ \overline{AB}=\overline{AD})$$

$$=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{6}{\sqrt{5}}\overline{AD}}=\frac{3\sqrt{5}}{10\overline{AD}}=\frac{2}{3}$$

이므로 $20\overline{AD}=9\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ \overline{AD}=\frac{9\sqrt{5}}{20}(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DD'}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{5}}{20}\times1=\frac{9\sqrt{5}}{40}(\text{cm}^2)$ 답 $\frac{9\sqrt{5}}{40}\ \text{cm}^2$

11 ㄱ. $a=5$이면 △ABC는 직각삼각형이므로 $\overline{BC}$는 원의 지름이다.
$5^2=3^2+4^2$이므로

$\therefore\ R=\frac{5}{2}$ (참)

ㄴ. △ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=2R,\ a=2R\sin A$

$\therefore\ a=2\times4\times\sin A=8\sin A$ (참)

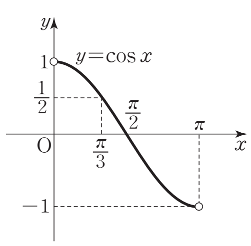
ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$의 각 변을 제곱하면 $1<a^2\le13$이고 △ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4}=\frac{25-a^2}{24}$

이므로 $-13\le-a^2<-1,\ 12\le25-a^2<24$

$\frac{1}{2}\le\frac{25-a^2}{24}<1$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}\le\cos A<1$

이때 ∠A는 삼각형의 한 내각이므로 $0<\angle A<\pi$이고, $0<x<\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0<\angle A\le\frac{\pi}{3}$

따라서 ∠A의 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

12 $\overline{BD}=a$라 하면 △ODB가 직각삼각형이고 $\angle BOD=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{OB}=2a$, $\overline{OD}=\sqrt{3}a$이다.
$\overline{OB}:\overline{BD}:\overline{OD}=2:1:\sqrt{3}$이므로

이때 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=2\overline{OB}=2\times2a=4a$

이므로 △ADB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=(4a)^2+a^2-2\times4a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=16a^2+a^2-2\times4a\times a\times\frac{1}{2}=13a^2$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{13}a\ (\because\ \overline{AD}>0)$

또한, △ADB에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\frac{(4a)^2+(\sqrt{13}a)^2-a^2}{2\times4a\times\sqrt{13}a}=\frac{16a^2+13a^2-a^2}{8\sqrt{13}a^2}$

$=\frac{7}{2\sqrt{13}}$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\frac{49}{52}}=\sqrt{\frac{3}{52}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}}{\frac{7}{2\sqrt{13}}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$ 답 ①

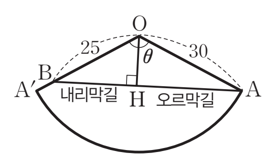
서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

삼각형에 대한 조건이 몇 가지 주어지고 미지수를 구하는 문제는 내신이나 수능에서 계산형 문제로 자주 출제된다. 이때 주어진 조건으로 얻을 수 있는 것이 무엇인지 확인하고 답을 구하는데 필요한 것을 차근차근 계산하면 쉽게 해결할 수 있다. 이 문제에서는 $\angle BOD=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{OB}=2$, $\overline{BD}=1$로 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 즉, $\overline{AB}=4$이고, △ADB에서 $\angle B=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙을 이용하면 $\overline{AD}$의 길이를 구할 수 있다. 마지막으로 △ADB에서 코사인법칙의 변형을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구하면 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값도 각각 구할 수 있다.

13 해결단계

❶ 단계	주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면의 전개도를 그린다.
❷ 단계	❶단계에서 그린 부채꼴의 중심각의 크기를 구한 후, △OAB에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AB의 길이를 구한다.
❸ 단계	△OAB의 넓이를 이용하여 선분 OH의 길이를 구한다.
❹ 단계	△OBH에서 피타고라스 정리를 이용하여 선분 BH의 길이를 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.



이때 밑면인 원의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\pi\times10=30\theta$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

△OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=30^2+25^2-2\times30\times25\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=900+625-2\times30\times25\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2275$

$\therefore\ \overline{AB}=5\sqrt{91}\ (\because\ \overline{AB}>0)$

또한, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times5\sqrt{91}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times30\times25\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$\sqrt{91}\times\overline{OH}=150\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{OH}=\frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

직각삼각형 OBH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BH}^2=25^2-\left(\frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=625-\frac{5625\times3}{91}$$

$$=625\left(1-\frac{27}{91}\right)=\frac{625\times64}{91}$$

$\therefore \overline{BH}=\frac{200}{\sqrt{91}}$ ($\because \overline{BH}>0$)

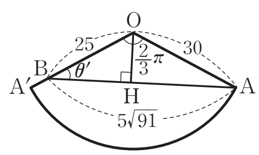
따라서 내리막길의 길이는 $\frac{200}{\sqrt{91}}=\frac{a}{\sqrt{b}}$이므로

$a=200$, $b=91$

$\therefore a+b=291$ 답 291

• 다른 풀이 •

*에서 주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\angle OBA=\theta'$이라 하면

$\triangle OAB$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta'=\frac{25^2+(5\sqrt{91})^2-30^2}{2\times25\times5\sqrt{91}}$$

$$=\frac{2000}{250\sqrt{91}}=\frac{8}{\sqrt{91}}$$

$\therefore \overline{BH}=25\cos\theta'$

$$=25\times\frac{8}{\sqrt{91}}=\frac{200}{\sqrt{91}}$$

따라서 $a=200$, $b=91$이므로

$a+b=291$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

주어진 도형의 꼭짓점 O에서 선분 AB 위를 이동하는 점 P까지의 거리는 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 이동함에 따라 변함을 파악할 수 있다.
특히, 점 P가 점 A에서 점 H까지 이동할 때는 선분 OP의 길이가 점점 짧아지고 있지만 점 P가 점 H에서 점 B로 이동할 때는 선분 OP의 길이가 다시 길어지고 있음을 확인할 수 있다.
따라서 점 H의 위치가 오르막길과 내리막길의 기준이 된다.

14 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\cos^2 B+(\sin C+\cos A)(\sin C-\cos A)=0$$

$\cos^2 B+\sin^2 C-\cos^2 A=0$

$1-\sin^2 B+\sin^2 C-(1-\sin^2 A)=0$

$\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=0$

이때 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$$

$\frac{a^2-b^2+c^2}{4R^2}=0$ $\quad\therefore b^2=a^2+c^2$ ($\because R\neq0$)

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 답 ④

15 $\cos A:\cos B=b:a$에서 $a\cos A=b\cos B$이고

$\triangle ABC$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

위의 식의 양변에 $2abc$를 곱하면

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

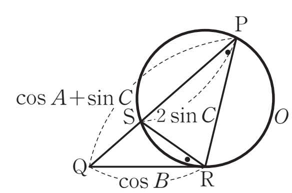
답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

단계	채점 기준	배점
(가)	$\cos A:\cos B=b:a$에서 $a\cos A=b\cos B$임을 알고 코사인법칙의 변형을 이용하여 이 식을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸 경우	50%
(나)	(가)에서 나타낸 식을 인수분해하여 $\triangle ABC$가 어떤 삼각형인지 구한 경우	50%

16 $\overline{PQ}=\cos A+\sin C$, $\overline{PS}=2\sin C$이므로

$\overline{QS}=\cos A-\sin C$

두 삼각형 PQR, RQS에서



$\angle QPR=\angle QRS$,

$\angle PQR=\angle RQS$ (공통)

이므로

$\triangle PQR\backsim\triangle RQS$ (AA 닮음)

즉, $\overline{PQ}:\overline{RQ}=\overline{QR}:\overline{QS}$에서

$\overline{QR}^2=\overline{PQ}\times\overline{QS}$이므로

$\cos^2 B=(\cos A+\sin C)(\cos A-\sin C)$

$\cos^2 B=\cos^2 A-\sin^2 C$

$1-\sin^2 B=(1-\sin^2 A)-\sin^2 C$

$\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=0$

이때 $\triangle ABC$에서 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$$

$\frac{a^2-b^2+c^2}{4R^2}=0$ $\quad\therefore b^2=a^2+c^2$ ($\because R\neq0$)

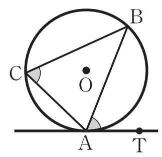
따라서 $\triangle ABC$는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

원의 접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

$\angle BAT=\angle ACB$



17 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$, $\overline{CA}=b$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

조건 (나)에서 $\overline{CA}=\overline{BC}\cos C-\overline{AB}\cos A$이므로

$b=a\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$

$=\dfrac{2a^2-2c^2}{2b}=\dfrac{a^2-c^2}{b}$

즉, $2b^2=2a^2-2c^2$이므로 $a^2=b^2+c^2$

따라서 △ABC는 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. ……㉠

또한, $A+B+C=\pi$에서 $A-B+C=\pi-2B$이므로

$\dfrac{A-B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-B$

조건 (다)에서 $\sin A=2\sin\dfrac{A-B+C}{2}\sin C$이므로

$\sin A=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)\sin C$

$\sin A=2\cos B\sin C$

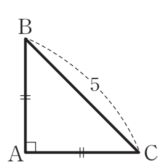
$\dfrac{a}{2R}=2\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\dfrac{c}{2R}$

$a=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{a}$ ($\because R\neq0$)

$a^2=a^2+c^2-b^2$, $b^2=c^2$ $\quad\therefore b=c$ ($\because b>0$, $c>0$)

즉, △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. ……㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이고, 조건 (가)에서 $\overline{BC}=5$이므로 $\overline{AB}=\overline{CA}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

답 $\dfrac{25}{4}$

18 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$ ←한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례

$=\angle C:\angle A:\angle B$ ←한 원에서 부채꼴의 중심각의 크기는 원주각의 크기에 정비례

그런데 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=1:1:4$이므로

$\angle A=\angle C=180^\circ\times\dfrac{1}{6}=30^\circ$,

└ 삼각형의 세 내각의 합은 180°

$\angle B=180^\circ\times\dfrac{4}{6}=120^\circ$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=1$이고, 사인법칙의 변형에 의하여

$\underset{\overline{BC}}{a}=\underset{\overline{AB}}{c}=2R\sin A=2\times1\times\sin30^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\therefore$ $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

답 ③

19 $\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하면 직각이등변삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{a^2+a^2}=6$, $\sqrt{2a^2}=6$ $\quad\therefore a=3\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

또한, 직각이등변삼각형 ACQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{b^2+b^2}=4$, $\sqrt{2b^2}=4$ $\quad\therefore b=2\sqrt{2}$ ($\because b>0$)

이때 $\angle PAB=\angle QAC=45^\circ$이므로 ← △ABP, △ACQ가 직각이등변삼각형이므로

$\angle PAQ=90^\circ+\angle BAC$이고, 삼각형 APQ의 넓이가 4이므로

$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}ab\sin(\angle PAQ)$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin(90^\circ+\angle BAC)$

$=6\cos(\angle BAC)=4$

$\therefore$ $\cos(\angle BAC)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

답 ③

20 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

이때 선분 PQ에 의하여 삼각형 ABC의 넓이가 이등분되므로

$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{3}$

$\therefore$ $\overline{AP}\times\overline{AQ}=12$

또한, △APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\cos60^\circ$

$=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times12\times\dfrac{1}{2}$

$\geq2\sqrt{\overline{AP}^2\times\overline{AQ}^2}-12$ ← $\overline{AP}^2>0$, $\overline{AQ}^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

(단, 등호는 $\overline{AP}=\overline{AQ}$일 때 성립)

$=2\overline{AP}\times\overline{AQ}-12$

$=2\times12-12=12$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

21 $\overline{OB}$의 중점이 C이므로

$\overline{OC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

선분 CP의 길이를 $x\ (x>0)$라 하면 삼각형 OPC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{OP}^2+\overline{CP}^2-\overline{OC}^2}{2\times\overline{OP}\times\overline{CP}}$$
$$=\frac{6^2+x^2-3^2}{12x}$$
$$=\frac{1}{12}\left(x+\frac{27}{x}\right)$$

이때 $x>0$, $\frac{27}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{27}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{27}{x}}\ (\text{단, 등호는 } x=3\sqrt{3}\text{일 때 성립})$$
$$=6\sqrt{3}$$

즉, $\frac{1}{12}\left(x+\frac{27}{x}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\cos\theta\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

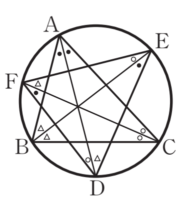
$x=3\sqrt{3}$일 때 $\cos\theta$의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 이때의 θ의 값은 $\frac{\pi}{6}$이다. θ는 예각이므로

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때의 삼각형 OPC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6\times\sin\frac{\pi}{6}=9\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

22 삼각형 ABC의 세 각의 이등분선이 외접원과 만나는 점이 각각 D, E, F이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로



$\angle BAD=\angle CAD=\angle CFD$
$=\angle BED=\bullet \leftarrow \frac{A}{2}$

$\angle ABE=\angle CBE=\angle CFE$
$=\angle ADE=\triangle \leftarrow \frac{B}{2}$

$\angle ACF=\angle BCF=\angle BEF$
$=\angle ADF=\circ \leftarrow \frac{C}{2}$

$A+B+C=\pi$이므로

$$D=\triangle+\circ=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},$$
$$E=\bullet+\circ=\frac{A+C}{2}=\frac{\pi-B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},$$
$$F=\bullet+\triangle=\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편, $\overline{EF}=d$, $\overline{DF}=e$, $\overline{DE}=f$라 하면 삼각형 DEF의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙의 변형에 의하여 $\sin D=\frac{d}{2R}$

$$\therefore\ \triangle DEF=\frac{1}{2}ef\sin D=\frac{1}{2}ef\times\frac{d}{2R}=\frac{def}{4R}$$

또한, $d=2R\sin D$, $e=2R\sin E$, $f=2R\sin F$이므로

$\triangle DEF$
$$=\frac{def}{4R}$$
$$=\frac{2R\sin D\times 2R\sin E\times 2R\sin F}{4R}$$
$$=2R^2\sin D\sin E\sin F$$
$$=2R^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$(\because ㉠)$
$$=2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

답 ⑤

23 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$$
$$=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\times 6\times 5}=\frac{3}{4}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}\ \left(\because 0<A<\frac{\pi}{2}\right)$$

△ABC가 예각삼각형이므로

$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times 6\times 5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

또한, $\overline{PF}=x\ (x>0)$라 하면 $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left(6\times x+4\times\sqrt{7}+5\times\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$
$$=3x+\frac{13\sqrt{7}}{4}$$

즉, $\frac{15\sqrt{7}}{4}=3x+\frac{13\sqrt{7}}{4}$에서

$3x=\frac{\sqrt{7}}{2}\qquad\therefore\ x=\frac{\sqrt{7}}{6}$

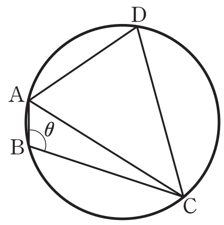
이때 □AFPE에서 $\angle FPE=\pi-A$이므로

$$\triangle EFP=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PE}\times\sin(\angle FPE)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin(\pi-A)$$
$$=\frac{7}{24}\times\sin A$$
$$=\frac{7}{24}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{96}$$

따라서 $p=96$, $q=7$이므로

$p+q=103$ 답 103

24



위의 그림과 같이 $\angle ABC=\theta$로 놓으면

$\cos\theta=-\frac{1}{5}<0$이므로 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+5^2-2\times1\times5\times\cos\theta$

$=1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=28$ ……㉠

삼각형 ACD에서 $\angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{CD}=x$, $\overline{AD}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=x^2+y^2-2xy\cos(\pi-\theta)$

$=x^2+y^2+2xy\cos\theta$

$=x^2+y^2-\frac{2}{5}xy=28$ ($\because$ ㉠) ……㉡

한편, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{25}}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

이때 사각형 ABCD의 넓이가 $4\sqrt{6}$이므로

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times1\times5\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{5}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}xy\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{5}xy=4\sqrt{6}$

즉, $\frac{\sqrt{6}}{5}xy=3\sqrt{6}$이므로 $xy=15$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+y^2-\frac{2}{5}\times15=28$

$\therefore x^2+y^2=34$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$x+y=\sqrt{34+2\times15}=\sqrt{64}=8$ ($\because x>0,\ y>0$)

따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$1+5+x+y=6+8=14$ 답 14

BLACKLABEL 특강 필수 개념

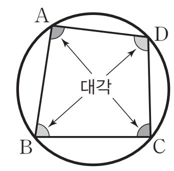
원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

즉, 사각형 ABCD에서

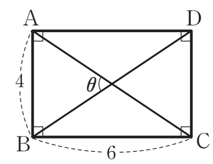
$\angle A+\angle C=180^\circ$,

$\angle B+\angle D=180^\circ$



25

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

이때 직사각형의 두 대각선의 길이는 같으므로

$\overline{BD}=\overline{AC}=2\sqrt{13}$

직사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\overline{AB}\times\overline{BC}$

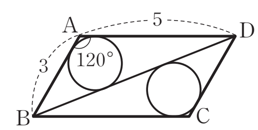
$\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times2\sqrt{13}\times\sin\theta=4\times6$

$26\sin\theta=24$ $\therefore \sin\theta=\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$

따라서 $\frac{12}{13}=\frac{k}{13}$에서 $k=12$ 답 12

26

평행사변형 ABCD의 넓이는



$3\times5\times\sin120^\circ=15\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos120^\circ$

$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=9+25+15=49$

$\therefore \overline{BD}=7$ ($\because \overline{BD}>0$)

이때 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\times(3+5+7)=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ$

$\frac{15}{2}r=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

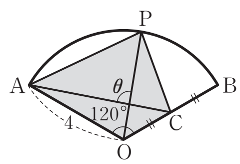
오려내는 내접원 한 개의 넓이는

$\pi r^2=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\pi$

따라서 오려내고 남은 넓이는 평행사변형의 넓이에서 내접원 두 개의 넓이를 빼면 되므로

$\frac{15\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\pi\times2=\frac{15\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\pi$ 답 ⑤

27 $\overline{OB}$의 중점이 C이므로



$\overline{OC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 4=2$

삼각형 AOC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\underbrace{\cos 120^\circ}_{=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ}$

$=16+4-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$

$\therefore\ \overline{AC}=2\sqrt{7}\ (\because \overline{AC}>0)$

이때 사각형 AOCP의 두 대각선 AC, OP가 이루는 각 중 작은 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, 사각형 AOCP의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OP}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\underbrace{4}_{\text{부채꼴의 반지름의 길이}}\times\sin\theta$

$=4\sqrt{7}\sin\theta$

그런데 $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta\le1$이므로

$0<S\le4\sqrt{7}$ (단, 등호는 $\theta=90^\circ$일 때 성립)

따라서 구하는 사각형 AOCP의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{7}$이다.

답 $4\sqrt{7}$

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 68

01 31 km	02 4	03 3	04 25	05 12
06 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	07 7			

01 해결단계

❶ 단계	$\overline{PQ}$의 길이를 구한 후, △APQ에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{AP}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	△BQP에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{BP}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	△APB에서 코사인법칙을 이용하여 두 건물 A와 B 사이의 거리를 구한다.

지점 P에서 시속 25 km로 1시간을 달려 지점 Q로 이동하였으므로

$\overline{PQ}=25\times1=25$(km)

이때 삼각형 APQ에서

$\angle QAP+\angle APQ=45^\circ$이므로

$\angle QAP=45^\circ-15^\circ=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle AQP)}$

$\frac{25}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AP}}{\underbrace{\sin 135^\circ}_{=180^\circ-45^\circ}}$

$\therefore\ \overline{AP}=\frac{25}{\sin 30^\circ}\times\sin 135^\circ$

$=\frac{25}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}$(km)

또한, 삼각형 BQP에서

$\angle QPB+\angle QBP=60^\circ$이므로

$\angle QBP=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QBP)}=\frac{\overline{PB}}{\sin(\angle PQB)}$

$\frac{25}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{PB}}{\underbrace{\sin 120^\circ}_{=180^\circ-60^\circ}}$

$\therefore\ \overline{PB}=\frac{25}{\sin 30^\circ}\times\sin 120^\circ=\frac{25}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$(km)

따라서 삼각형 APB에서 $\angle APB=45^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{PB}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{PB}\times\cos 45^\circ$

$=(25\sqrt{2})^2+(25\sqrt{3})^2-2\times25\sqrt{2}\times25\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=1250+1875-1250\sqrt{3}=3125-1250\sqrt{3}$

$=3125-1250\times1.7\ (\because \sqrt{3}=1.7)$

$=1000$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{1000}=10\sqrt{10}$

$=10\times3.1\ (\because \sqrt{10}=3.1)$

$=31$(km)

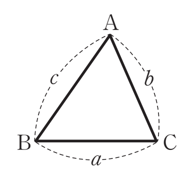
따라서 두 건물 A와 B 사이의 거리는 31 km이다.

답 31 km

02 해결단계

❶ 단계	△ABC에서 사인법칙의 변형과 코사인법칙의 변형을 이용하여 $\sin B$, $\sin C$, $\cos A$를 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 주어진 식에 대입하여 정리한다.
❸ 단계	$\angle C=90^\circ$, $\angle A=90^\circ$, $\angle B=90^\circ$일 때로 나누어 ❷단계에서 구한 식을 푼 후, 모든 상수 k의 값의 합을 구한다.

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여



$\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ ······㉠

또한, △ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ······㉡

㉠, ㉡을 $2\cos A\sin C=(k-1)\sin B$에 대입하면

$2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{c}{2R}=(k-1)\frac{b}{2R}$

$\therefore\ b^2+c^2-a^2=(k-1)b^2$ ······㉢

(i) $\angle C=90^\circ$, 즉 $a^2+b^2=c^2$이면 $c^2-a^2=b^2$이므로 ㉢에서

$2b^2=(k-1)b^2$, $2=k-1$ $\therefore\ k=3$

(ii) $\angle A=90^\circ$, 즉 $b^2+c^2=a^2$이면 ㉢에서

$0=(k-1)b^2$ $\therefore\ k=1\ (\because b\ne0)$

(iii) $\angle B=90^\circ$, 즉 $c^2+a^2=b^2$이면 $c^2-b^2=-a^2$

이때 $\overline{AB}>\overline{CA}$에서 $c>b$이므로 $c^2-b^2>0$

그런데 $-a^2<0$이므로 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=1$ 또는 $k=3$이므로 구하는 합은

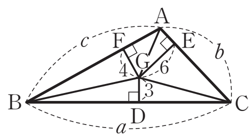
$1+3=4$

답 4

03 해결단계

❶ 단계	무게중심의 성질을 이용하여 세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이가 같음을 안다.
❷ 단계	세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이를 이용하여 세 변의 길이의 비를 구한다.
❸ 단계	사인법칙의 변형을 이용하여 $\sin A : \sin B : \sin C$를 구한 후, $\frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B}$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면 점 G는 △ABC의 무게중심이므로



△ABG=△BCG=△CAG

즉, $\frac{1}{2}\times4\times c=\frac{1}{2}\times3\times a=\frac{1}{2}\times6\times b$에서

$4c=3a=6b$

이때 $3a=6b$에서 $a=2b$, $4c=6b$에서 $c=\frac{3}{2}b$이므로

$a : b : c=2b : b : \frac{3}{2}b=4 : 2 : 3$

따라서 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c=4 : 2 : 3$이므로

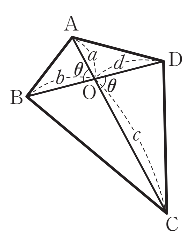
$\sin A=4k$, $\sin B=2k$, $\sin C=3k$ (k는 양수)라 하면

$\frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B}=\frac{4k\times3k}{(2k)^2}=3$ **답** 3

04 해결단계

❶ 단계	$\angle AOB=\angle COD=\theta$로 놓은 후, 두 삼각형 OAB, OCD의 넓이를 각각 식으로 나타낸다.
❷ 단계	두 삼각형 OBC, ODA의 넓이를 각각 구한다.
❸ 단계	**❶, ❷단계**에서 구한 식을 이용하여 □ABCD의 넓이를 식으로 나타낸 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 □ABCD의 넓이의 최솟값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\angle AOB=\angle COD=\theta$, $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$, $\overline{OD}=d$라 하자.



두 삼각형 OAB, OCD의 넓이가 각각 4, 9이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\theta=4$에서 $\sin\theta=\frac{8}{ab}$ ($\because ab\neq0$) ······㉠

$\frac{1}{2}cd\sin\theta=9$에서 $\sin\theta=\frac{18}{cd}$ ($\because cd\neq0$) ······㉡

한편,

$\triangle OBC=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$,

$\triangle ODA=\frac{1}{2}ad\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}ad\sin\theta$이므로

□ABCD

$=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=4+\frac{1}{2}bc\sin\theta+9+\frac{1}{2}ad\sin\theta$

$=4+\frac{1}{2}bc\times\frac{8}{ab}+9+\frac{1}{2}ad\times\frac{18}{cd}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=13+\frac{4c}{a}+\frac{9a}{c}$

$\sin\theta=\frac{8}{ab}=\frac{18}{cd}$이므로 서로 바꾸어 대입하여 계산해도 된다.

이때 $\frac{4c}{a}>0$, $\frac{9a}{c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\square ABCD=13+\frac{4c}{a}+\frac{9a}{c}$$
$$\geq13+2\sqrt{\frac{4c}{a}\times\frac{9a}{c}}$$
(단, 등호는 $3a=2c$일 때 성립)
$$=25$$

따라서 □ABCD의 넓이의 최솟값은 25이다. **답** 25

05 해결단계

❶ 단계	직원뿔의 옆면의 중심각의 크기를 구한다.
❷ 단계	직원뿔의 꼭짓점을 O′이라 할 때, $\overline{OA'}=1$, $\overline{OB'}=2$임을 이용하여 두 점 A, B가 꼭짓점 O′에서부터 모선의 길이를 각각 1 : 2, 2 : 1로 내분하는 점임을 파악한다.
❸ 단계	밑면의 중심 O에서 각각 두 점 A′, B′ 방향으로 반직선을 그려 원과 만나는 점을 C, D라 할 때, $\angle A'OB'=\frac{\pi}{2}$임을 이용하여 $\overset{\frown}{CD}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overset{\frown}{CD}$의 길이를 이용하여 ∠AO′B의 크기를 구한 후, 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}^2$, 즉 d^2의 값을 구한다.
❺ 단계	두 유리수 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

직원뿔의 옆면의 전개도는 부채꼴이고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 옆면의 중심각의 크기를 θ라 하면

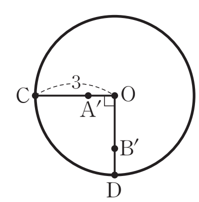
$6\theta=2\pi\times3$ $\therefore \theta=\pi$

이때 밑면 위의 두 점 A′, B′에 대하여 $\overline{OA'}=1$, $\overline{OB'}=2$이고, 밑면의 반지름의 길이는 3이므로 직원뿔의 옆면 위의 두 점 A, B는 각각 직원뿔의 꼭짓점에서부터 모선의 길이를 1 : 2, 2 : 1로 내분하는 점이다.

즉, 직원뿔의 꼭짓점을 O′이라 하면

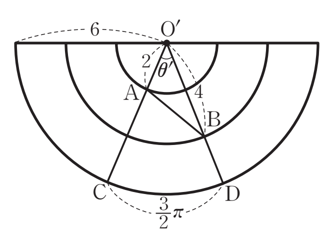
$\overline{O'A}=2$, $\overline{O'B}=4$

한편, 밑면의 중심 O에서 두 점 A′, B′으로 반직선을 각각 그어 원과 만나는 점을 C, D라 하면



$\angle A'OB'=\frac{\pi}{2}$에서 $\angle COD=\frac{\pi}{2}$이고, 밑면의 반지름의 길이가 3이므로

$\overset{\frown}{CD}=3\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$



두 점 C, D는 직원뿔의 꼭짓점 O′에서 두 점 A, B를 지나는 직선을 각각 그었을 때, 밑면과 만나는 점이므로 $\angle CO'D=\theta'$이라 하면

$6\theta'=\frac{3}{2}\pi$에서 $\theta'=\frac{\pi}{4}$

$\triangle$O′AB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{O'A}^2+\overline{O'B}^2-2\times\overline{O'A}\times\overline{O'B}\times\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=20-8\sqrt{2}$$

따라서 $d^2=20-8\sqrt{2}$이므로 $p=20$, $q=-8$

$\therefore p+q=12$ 답 12

06 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이를 구한다.
❷ 단계	삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하여 원 O의 지름의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\angle EAB=\frac{\pi}{6}$임을 파악한 후, 삼각형 AEB에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{BE}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	삼각형 AEB에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AE}$의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=13$$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}$ ($\because \overline{BC}>0$)

삼각형 ABC의 외접원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=\frac{\sqrt{13}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \overline{DE}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

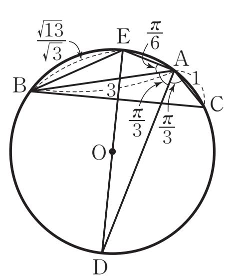
선분 DE가 원의 지름이므로 $\angle EAD=\frac{\pi}{2}$이고, 선분 AD가 $\angle$A를 이등분하므로

$$\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle EAB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

삼각형 AEB가 원 O에 내접하므로 사인법칙의 변형에 의하여

$$\overline{BE}=2R\sin(\angle EAB)=2R\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$



따라서 삼각형 AEB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{AE}\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\overline{AE}^2+3^2-2\times\overline{AE}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AE}^2-3\sqrt{3}\,\overline{AE}+\frac{14}{3}=0$$

$$3\overline{AE}^2-9\sqrt{3}\,\overline{AE}+14=0$$

$$(\sqrt{3}\,\overline{AE}-2)(\sqrt{3}\,\overline{AE}-7)=0$$

$$\therefore \overline{AE}=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } \overline{AE}=\frac{7}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $\triangle$AED는 $\overline{DE}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2-\overline{AE}^2}$$

㉠에서

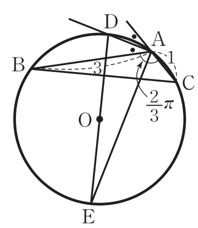
$\overline{AE}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=\frac{7}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{AD}=1$

이때 $\overline{AE}<\overline{AD}$이므로

$$\overline{AE}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$ 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

BLACKLABEL 특강 **참고**

$\angle$A의 외각의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 D, 점 D와 원의 중심을 지나는 직선이 원과 만나는 점을 E라 하면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $\overline{AE}>\overline{AD}$이므로 $\overline{AE}=\frac{7}{\sqrt{3}}$은 주어진 문제에서 $\angle$A의 이등분선을 $\angle$A의 외각의 이등분선으로 바꾸어 생각한 경우이다.

07 해결단계

❶ 단계	$h(\theta)$가 원점과 점 P 사이의 거리의 제곱임을 이해한다.
❷ 단계	호 AB의 길이와 호 BP의 길이가 같음을 이용하여 $\angle$BQP의 크기를 구한 후, $\angle$OQP의 크기를 구한다.
❸ 단계	코사인법칙을 이용하여 $\overline{OP}^2$의 값을 구한 후, $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구한다.

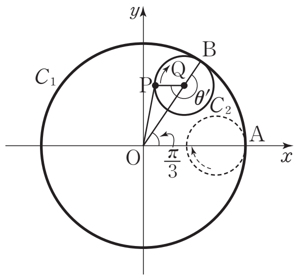
P$(f(\theta),\ g(\theta))$에 대하여 $\overline{OP}^2=\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2$이므로

$$h(\theta)=\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2=\overline{OP}^2$$

즉, $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 원점과 점 P 사이의 거리의 제곱이다.

다음 그림과 같이 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 반직선 OQ가 원 C_1과 만나는 점을 B라 하면

$\angle\mathrm{BOA}=\frac{\pi}{3}$



원 C_2가 원 C_1에 내접하면서 미끄러지지 않게 굴렀으므로 부채꼴 BOA의 호 AB와 부채꼴 BQP의 호 BP의 길이가 같다. 즉, $\angle\mathrm{BQP}=\theta'$이라 하면

$4\times\frac{\pi}{3}=1\times\theta'$에서 $\theta'=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore\ \angle\mathrm{OQP}=\theta'-\pi=\frac{4}{3}\pi-\pi=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=3$이므로 $\triangle\mathrm{OQP}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}h\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\overline{\mathrm{OP}}^2\\&=\overline{\mathrm{OQ}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2-2\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos(\angle\mathrm{OQP})\\&=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=9+1-2\times3\times1\times\frac{1}{2}\\&=7\end{aligned}$$

답 7

이것이 수능 p. 69

1 27　　2 ②　　3 ④　　4 ③

1

해결단계

❶ 단계	삼각함수의 정의를 이용하여 두 선분 AB, AC의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	코사인법칙을 이용하여 선분 DC의 길이를 구한다.
❸ 단계	사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구한 후, S의 값을 구하여 $\frac{S}{\pi}$의 값을 구한다.

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$에서

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta$에서

$12\sqrt{2}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=18$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta=18\times\frac{1}{3}=6$

또한, 점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\frac{5}{9}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{9}\times18=10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DC}}^2&=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos\theta\\&=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{1}{3}\\&=96\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 r라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin\theta}=2r,\ \frac{4\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2r\qquad\therefore\ r=3\sqrt{3}$

따라서 삼각형 CAD의 외접원의 넓이 S는

$S=\pi r^2=\pi\times(3\sqrt{3})^2=27\pi$

$\therefore\ \frac{S}{\pi}=27$

답 27

2

해결단계

❶ 단계	사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	코사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값을 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=4\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}&=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}\end{aligned}$$

또한, 삼각형 BDC의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}&=\sin(\angle\mathrm{BCD})\times4\sqrt{7}\\&=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8\end{aligned}$$

□ABCD가 원에 내접하므로

한편, $\angle\mathrm{BDC}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=x\ (x>0)$라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$x^2+8x-20=0$

$(x+10)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ x>0)$

따라서 $\overline{CD}=2$이므로

$\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$ 답 ②

3 해결단계

❶ 단계	코사인법칙을 이용하여 $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	두 삼각형 ADE, ABE의 넓이를 각각 구한다.
❸ 단계	$\triangle BDE=\triangle ADE-\triangle ABE$임을 이용하여 삼각형 BDE의 넓이를 구한다.

$\overline{AD}=\overline{CE}=a$ $(a>0)$라 하면

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2\times a\times(a+1)\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ $(\because a>0)$

따라서 $\overline{AE}=4$, $\overline{AD}=3$이므로

$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3},$$

$$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle BDE=\triangle ADE-\triangle ABE=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

답 ④

4 해결단계

❶ 단계	$4\sin\theta=3\cos\theta$임을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	$\overline{PA}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\triangle ADC=\triangle PAD+\triangle PDC-\triangle PAC$임을 이용하여 삼각형 ADC의 넓이를 구한다.

$4\sin\theta=3\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

또한, $\overline{AB}=10$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{PA}=10\cos\theta=10\times\frac{4}{5}=8$

따라서 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=8$이고,

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OPA=\angle OAP=\theta$에서

$\angle CPD=\angle APB-\angle OPA=\frac{\pi}{2}-\theta$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ADC&=\triangle PAD+\triangle PDC-\triangle PAC\\&=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times8\times8\\&=32\sin\theta+32\cos\theta-32\\&=32\times\frac{3}{5}+32\times\frac{4}{5}-32\\&=\frac{64}{5}\end{aligned}$$

답 ③

III 수열

08 등차수열과 등비수열

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 73~74

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 12	05 ③
06 ④	07 1545	08 ④	09 ⑤	10 ②
11 ②	12 ③	13 10	14 50만 원	15 ③
16 273				

01 3과 4의 최소공배수는 12이므로 주어진 수열을 12의 배수가 나올 때마다 한 묶음씩으로 생각하면 다음과 같이 6개씩 항을 묶을 수 있다.

$(3, 4, 6, 8, 9, 12)$, $(15, 16, 18, 20, 21, 24)$,

$(27, 28, 30, 32, 33, 36)$, $\cdots$

한 묶음의 항의 개수는 6이고 $101=6\times16+5$이므로 주어진 수열의 제101항은 17번째 묶음의 5번째 항이다.

이때 각 묶음의 마지막 항은 12의 배수이므로 17번째 묶음의 마지막 항은 $12\times17=204$

또한, 각 묶음에서 5번째 항은 마지막 항보다 3만큼 작은 수이다.

따라서 구하는 제101항은

$204-3=201$ 답 ③

02 등차수열 x, a_1, a_2, a_3, y의 공차를 d_1이라 하면

$y=x+4d_1$ $\quad\therefore d_1=\frac{y-x}{4}$

등차수열 x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y의 공차를 d_2라 하면

$y=x+6d_2$ $\quad\therefore d_2=\frac{y-x}{6}$

$$\therefore \frac{a_2-a_1}{b_5-b_4}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}}=\frac{3}{2}\ (\because x\neq y)$$

답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

문제에서 조건 '$x\neq y$'가 있는 이유

만약 $x=y$이면 두 등차수열 x, a_1, a_2, a_3, y와 x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y의 공차는 모두 0일 수밖에 없다. 이때 b_5-b_4는 수열 x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y의 공차로, 그 값이 0이면 $\frac{a_2-a_1}{b_5-b_4}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 문제에서 구하는 식의 값이 존재하기 위해서는 조건 '$x\neq y$'가 반드시 필요하다.

03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 일반항은

$a_n=a+(n-1)d$

$a_2+a_{10}=68$에서 $(a+d)+(a+9d)=68$

$\therefore 2a+10d=68$ ……㉠

$a_6+a_{15}=122$에서 $(a+5d)+(a+14d)=122$

$\therefore 2a+19d=122$ ……㉡

㉡−㉠을 하면

$9d=54 \quad \therefore d=6$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$2a+60=68,\ 2a=8 \quad \therefore a=4$

$\therefore a_{40}=a+39d=4+39\times6$

$=238$

답 ⑤

04 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 5이므로 첫째항을 a라 하면

$a_{18}=28$에서 $a+17\times5=28 \quad \therefore a=-57$

$\therefore a_n=-57+(n-1)\times5=5n-62$

그런데 $a_n>0$이 되는 경우는 $5n-62>0$에서 $5n>62$

$\therefore n>\frac{62}{5}=12.4$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 양수이므로

$|a_1|>|a_2|>\cdots>|a_{12}|,\ |a_{13}|<|a_{14}|<\cdots$

이때 $a_{12}=5\times12-62=-2,\ a_{13}=5\times13-62=3$이므로

$|a_{12}|<|a_{13}|$

따라서 $|a_n|$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값은 12이다.

답 12

05 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$에서

$(x-4)(x-n+4)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수 1, α, β가 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ ……㉠

(i) $\alpha=4$이고 $\beta=n-4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $4<n-4$, 즉 $n>8$

㉠에서 $2\times4=(n-4)+1,\ n-3=8$

$\therefore n=11$

(ii) $\alpha=n-4$이고 $\beta=4$인 경우

$\alpha<\beta$이므로 $n-4<4$, 즉 $n<8$

㉠에서 $2(n-4)=4+1,\ 2n-8=5$

$\therefore n=\frac{13}{2}$

(i), (ii)에서 n은 자연수이므로 $n=11$

답 ③

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=4(n-4)$ ……㉡

세 수 1, α, β가 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$\alpha=1+d,\ \beta=1+2d$

$\therefore \alpha+\beta=3d+2,$

$\alpha\beta=(1+d)(1+2d)=2d^2+3d+1$ ……㉢

이때 ㉡, ㉢에서

$n=3d+2$ ……㉣

$4(n-4)=2d^2+3d+1$ ……㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$4(3d-2)=2d^2+3d+1$

$12d-8=2d^2+3d+1$

$2d^2-9d+9=0,\ (2d-3)(d-3)=0$

$\therefore d=\frac{3}{2}$ 또는 $d=3$

㉣에서 $n=\frac{13}{2}$ 또는 $n=11$

이때 n은 자연수이므로 $n=11$

06 삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근은 $a-d,\ a,\ a+d$로 놓을 수 있다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6 \quad \therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$8-24-8+k=0 \quad \therefore k=24$

답 ④

BLACKLABEL 특강 | 필수 개념

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

07 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$라 하면

$a_5=a_6-d,\ a_7=a_6+d$

즉, $a_5+a_6+a_7=45$에서

$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)=45$

$3a_6=45 \quad \therefore a_6=15$

또한, $a_5a_7=221$에서 $(15-d)(15+d)=221$

$225-d^2=221,\ d^2=4 \quad \therefore d=2\ (\because d>0)$

즉, $a_6=a_1+5\times2=15$에서 $a_1=5$

따라서 $a_2=5+2=7,\ a_{30}=5+29\times2=63$이므로

$a_1+2a_2+a_3+2a_4+a_5+2a_6+\cdots+a_{29}+2a_{30}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30})$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{a_{2n}\}$도 등차수열이다.

$=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}+\frac{15(a_2+a_{30})}{2}$

$=\frac{30\times(5+63)}{2}+\frac{15\times(7+63)}{2}$

$=1020+525=1545$

답 1545

08 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{30}=116$에서 $a+29d=116$ ……㉠

$a_{50}=56$에서 $a+49d=56$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=203$, $d=-3$ *

따라서 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$$S_n=\frac{n\{2\times203+(n-1)\times(-3)\}}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}n^2+\frac{409}{2}n$$

$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{409}{6}\right)^2+\frac{409^2}{24}$$

이때 $\frac{409}{6}=68.1\times\times\times$이고, n은 자연수이므로

$n=68$일 때 S_n은 최대이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 $a_n=203+(n-1)\times(-3)=-3n+206$이다.

그런데 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 최대가 되려면 a_n의 값이 음수가 되기 바로 전의 항까지 더하면 된다.

이때 $-3n+206\geq0$에서 $n\leq68.6\times\times\times$

따라서 첫째항부터 제68항까지의 합이 최대이므로

조건을 만족시키는 n의 값은 68이다.

09

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{14}}{a_4}+\frac{a_{15}}{a_5}$$

$$=\frac{a_1r^{10}}{a_1}+\frac{a_1r^{11}}{a_1r}+\frac{a_1r^{12}}{a_1r^2}+\frac{a_1r^{13}}{a_1r^3}+\frac{a_1r^{14}}{a_1r^4}$$

$$=r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}=5r^{10}=20$$

$\therefore r^{10}=4$

$\therefore \frac{a_{40}}{a_{20}}=\frac{a_1r^{39}}{a_1r^{19}}=r^{20}=(r^{10})^2=4^2=16$ 답 ⑤

10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$7a_n+a_{n+1}=7ar^{n-1}+ar^n$

$=(7a+ar)r^{n-1}$

즉, 수열 $\{7a_n+a_{n+1}\}$의 첫째항은 $7a+ar$, 공비는 r이므로

$7a+ar=18$, $r=2$

$r=2$를 $7a+ar=18$에 대입하면

$9a=18$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_2=2^2=4$ 답 ②

11

12, $x-4$, $y-3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x-4)=12+(y-3)$

$2x-8=y+9$ $\therefore y=2x-17$ ⋯⋯㉠

$10-3x$, $y+9$, 4가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(y+9)^2=(10-3x)\times4$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-8)^2=4(10-3x)$

$4x^2-32x+64=40-12x$

$4x^2-20x+24=0$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

위의 값을 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$x=2$일 때 $y=-13$, $x=3$일 때 $y=-11$

따라서 xy의 최댓값은 $x=2$, $y=-13$일 때이므로

$xy=-26$ 답 ②

12

세 모서리의 길이 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면

$b=ar$, $c=ar^2$

직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=2(a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a)$

$=2ar(a+ar+ar^2)=160$ ⋯⋯㉠

직육면체의 모든 모서리의 길이의 총합은

$4(a+b+c)=4(a+ar+ar^2)=80$

즉, $a+ar+ar^2=20$이므로

이것을 ㉠에 대입하면

$2\times ar\times20=160$ $\therefore ar=4$

따라서 주어진 직육면체의 부피는

$abc=a\times ar\times ar^2$

$=(ar)^3=4^3=64$ 답 ③

13

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=21$에서 $a+ar+ar^2=21$

$\therefore a(1+r+r^2)=21$ ⋯⋯㉠

$a_2+a_4+a_6=126$에서 $ar+ar^3+ar^5=126$

$ar(1+r^2+r^4)=126$ 복이차식의 인수분해

$\therefore ar(1+r+r^2)(1-r+r^2)=126$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$21r(1-r+r^2)=126$, $r(1-r+r^2)=6$

$r^3-r^2+r-6=0$ ⋯⋯㉢

㉢에 $r=2$를 대입하면 등식이 성립하므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 ㉢의 좌변을 인수분해하면

2	1	−1	1	−6
		2	2	6
	1	1	3	0

$(r-2)(r^2+r+3)=0$

이때 이차방정식 $r^2+r+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times3=-11<0$, 즉 실근을 갖지 않으므로 방정식 ㉢의 실근은 $r=2$뿐이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a(1+2+4)=21$, $7a=21$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times2^{n-1}$

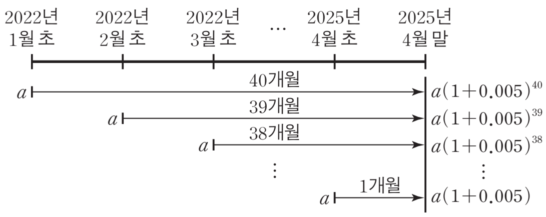
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k>3000$에서

$\frac{3(2^k-1)}{2-1}>3000$, $3(2^k-1)>3000$

$2^k-1>1000$, $2^k>1001$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10이다. 답 10

14 매월 초에 a만 원씩 적립한다고 하면 a만 원에 대한 2025년 4월 말의 원리합계는 다음과 같다.



2025년 4월 말에 지급받는 총액이 2211만 원이므로

$a\times1.005+a\times1.005^2+a\times1.005^3+\cdots+a\times1.005^{40}$

$=\dfrac{a\times1.005\times(1.005^{40}-1)}{1.005-1}$

$=\dfrac{a\times1.005\times(1.22-1)}{0.005}$ $(\because 1.005^{40}=1.22)$

$=a\times201\times0.22$

$=44.22\times a=2211$(만 원)

$\therefore a=50$(만 원)

따라서 수현이가 매월 적립해야 하는 금액은 50만 원이다.

답 50만 원

15 $S_n=n^2-2n+4$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n+4)-\{(n-1)^2-2(n-1)+4\}$
$=2n-3$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1-2+4=3$

(i), (ii)에서

$a_1=3$, $a_n=2n-3$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

ㄱ. $a_2=2\times2-3=1$ (참)

ㄴ. $a_3=2\times3-3=3$, $a_4=2\times4-3=5$이므로

$a_3-a_1=3-3=0$, $a_4-a_2=5-1=4$

$\therefore a_3-a_1\neq a_4-a_2$ (거짓)

ㄷ. $a_n=2n-3>100$에서 $n>51.5$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 52이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

16 $S_n=2^n-1$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$
$=2\times2^{n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^1-1=1$

(i), (ii)에서

$a_n=2^{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$\therefore a_1+a_5+a_9=1+2^4+2^8$
$=1+16+256$
$=273$

답 273

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 75~79

01 ①	02 34	03 ⑤	04 197	05 24
06 ⑤	07 54	08 ①	09 36	10 ②
11 612	12 ②	13 442	14 43	15 ②
16 ③	17 ①	18 ①	19 ③	20 ⑤
21 15	22 25	23 ④	24 ⑤	25 $150\sqrt{2}$
26 ②	27 101	28 45	29 ①	30 8
31 ①	32 1023	33 ④	34 $762\sqrt{2}$	35 39
36 187				

01 2로 나누어떨어지지 않는 수는 홀수이므로 2로도 3으로도 나누어떨어지지 않는 자연수는 3의 배수가 아닌 홀수이다.

즉, 홀수를 순서대로 3개씩 한 줄에 나열할 때, 오른쪽과 같이 가운데 수는 지워지고 남은 수가 크기순으로 수열 $\{a_n\}$의 항을 이룬다.

1	~~3~~	5
7	~~9~~	11
13	~~15~~	17
19	~~21~~	23
25	~~27~~	29
	⋮	

또한, 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 2개씩 한 줄에 나열하면 a_{50}의 값은 25번째 줄의 두 번째 수이다.

또한, 각 줄의 두 번째 수는 순서대로

1번째 줄 : $5=6\times1-1$

2번째 줄 : $11=6\times2-1$

3번째 줄 : $17=6\times3-1$

⋮

이와 같이 계속되므로 25번째 줄의 두 번째 수는

$a_{50}=6\times25-1=149$

답 ①

• 다른 풀이 •

$\{a_n\}$: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, …이므로

$a_{n+2}=a_n+6$이 성립한다.

$\therefore a_{50}=a_{48}+6=a_{46}+6\times2=a_{44}+6\times3=\cdots$
$=a_2+6\times24$
$=5+144=149$

02 $(n+6)^2=n^2+12n+36=6(2n+6)+n^2$

이때 $6(2n+6)$은 6의 배수이므로 $(n+6)^2$을 6으로 나눈 나머지와 n^2을 6으로 나눈 나머지는 서로 같다.

즉, $a_{n+6}=a_n$이 성립한다.

자연수 $n=1, 2, 3, \cdots, 6$에 대하여

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=1$, $a_6=0$

$\therefore a_2=a_8=a_{14}=\cdots=4$, $a_4=a_{10}=a_{16}=\cdots=4$

따라서 $a_n=4$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은 2, 4, 8, 10, …, 94, 98, 100의 34개이다.

답 34

03 자연수 n이 두 자연수 p, q의 곱으로 표현될 때, 즉 $n=p\times q$일 때, p와 q는 모두 n의 약수이다.

자연수 n의 양의 약수의 개수를 N이라 하면 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) N이 짝수, 즉 $N=2k$ (k는 자연수)일 때,

자연수 n의 약수를 가장 작은 것부터 크기순으로
$p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_{2k}$ (k는 자연수)라 하면
$n=p_1\times p_{2k}=p_2\times p_{2k-1}=\cdots$
$=p_{k-1}\times p_{k+2}=p_k\times p_{k+1}$
즉, n을 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수 a_n은
$a_n=k=\dfrac{N}{2}$

(ii) N이 홀수, 즉 $N=2k-1$ (k는 자연수)일 때,
자연수 n의 약수를 가장 작은 것부터 크기순으로
$p_1, p_2, p_3, p_4, \cdots, p_{2k-1}$ (k는 자연수)이라 하면
$n=p_1\times p_{2k-1}=p_2\times p_{2k-2}=\cdots$
$=p_{k-1}\times p_{k+1}=p_k\times p_k$
즉, n을 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수 a_n은
$a_n=k=\dfrac{N+1}{2}$

ㄱ. $72=2^3\times 3^2$의 약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)=12$로 짝수이므로 (i)에서
$a_{72}=\dfrac{12}{2}=6$
$81=3^4$의 약수의 개수는 $4+1=5$로 홀수이므로 (ii)에서
$a_{81}=\dfrac{5+1}{2}=3$
$\therefore a_{72}+a_{81}=6+3=9$ (참)

ㄴ. $a_n=3$을 만족시키는 자연수 n의 약수의 개수를 m이라 하자.
m이 짝수일 때, (i)에 의하여
$\dfrac{m}{2}=3 \qquad \therefore m=6$
약수의 개수가 6인 자연수 n의 최솟값은
$2^2\times 3=12$
m이 홀수일 때, (ii)에 의하여
$\dfrac{m+1}{2}=3 \qquad \therefore m=5$
약수의 개수가 5인 자연수 n의 최솟값은
$2^4=16$
즉, $a_n=3$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 12이다. (거짓)

ㄷ. 두 자연수 m, n이 소수이면 m과 n의 약수의 개수는 모두 2이므로 (i)에 의하여
$a_m=a_n=\dfrac{2}{2}=1 \qquad \therefore a_m+a_n=2$
① $m=n$일 때,
$mn=m^2$의 약수의 개수는 3으로 홀수이므로 (ii)에 의하여 $a_{mn}=\dfrac{3+1}{2}=2$
② $m\neq n$일 때,
$m\times n$의 약수의 개수는 $(1+1)\times(1+1)=4$로 짝수이므로 (i)에 의하여 $a_{mn}=\dfrac{4}{2}=2$
①, ②에서 $a_{mn}=2$
즉, 두 자연수 m, n이 소수이면
$a_m+a_n=a_{mn}=2$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

04 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 조건 ㈎에서 $a_2+a_4+a_6=123$이므로
$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)=123$
$3(a+3d)=123 \qquad \therefore a+3d=41 \qquad \cdots\cdots ㉠$
조건 ㈏에서 $a_n>116$을 만족시키는 n의 최솟값이 17이므로 $a_{16}\le 116$, $a_{17}>116$이다.
$a_{16}\le 116$에서 $a+15d\le 116$
$(a+3d)+12d\le 116$, $41+12d\le 116$ ($\because$ ㉠)
$12d\le 75 \qquad \therefore d\le \dfrac{25}{4}=6.25 \qquad \cdots\cdots ㉡$
$a_{17}>116$에서 $a+16d>116$
$(a+3d)+13d>116$, $41+13d>116$ ($\because$ ㉠)
$13d>75 \qquad \therefore d>\dfrac{75}{13}=5.7\times\times\times \qquad \cdots\cdots ㉢$
㉡, ㉢에서 $5.7\times\times\times<d\le 6.25$
d는 정수이므로
$d=6$
이것을 ㉠에 대입하면 $a=23$이므로
$a_{30}=a+29d$
$=23+29\times 6$
$=23+174$
$=197$
답 197

05 선분을 일정한 간격으로 그었으므로 수열 $\{x_n\}$은 등차수열을 이룬다.
이 수열의 공차를 d ($d>0$)라 하면 $x_1=-1$이므로
$x_n=-1+(n-1)d$
$x_7=-1+6d=1$이므로
$6d=2 \qquad \therefore d=\dfrac{1}{3}$
$\therefore x_n=-1+\dfrac{1}{3}(n-1)$
$=\dfrac{1}{3}n-\dfrac{4}{3}$
이때 각 선분의 연장선과 x축의 교점의 x좌표가 x_n이므로 두 곡선 사이의 선분의 길이를 구하면
$l_n=x_n^2+ax_n+b-x_n^2$
$=\underline{ax_n+b}$ *
$=a\left(\dfrac{1}{3}n-\dfrac{4}{3}\right)+b$
$l_1=2$이므로 $-a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$
$l_7=10$이므로 $a+b=10 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$이므로
$ab=24$
답 24

단계	채점 기준	배점
(가)	등차수열 $\{x_n\}$의 일반항을 n에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(나)	수열 $\{l_n\}$의 일반항을 n에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(다)	주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, ab의 값을 구한 경우	30%

BLACKLABEL 특강 참고 *

등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 n에 대한 일차식으로 나타낼 수 있다.
등차수열 $\{x_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 p, q라 하면
$x_n=p+(n-1)q$ (단, p, q는 상수)
이때 * 에서 $l_n=ax_n+b$이므로
$l_n=a\{p+(n-1)q\}+b=ap+b+(n-1)aq$
즉, 수열 $\{l_n\}$의 일반항을 n에 대한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{l_n\}$도 등차수열이다.

06

ㄱ. $T_4=a_1-a_2+a_3-a_4$
$=-(a_2-a_1)-(a_4-a_3)$
$=-d-d=-2d$ (거짓)

ㄴ. $T_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$
$=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)$
$=a_1+d+d$
$=a_1+2d=a_3$ (참)

ㄷ. $T_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$이므로
$T_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{2n-2}a_{2n-1}+(-1)^{2n-1}a_{2n}$
$=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}$
$T_{2(n-1)}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{2(n-1)-1}a_{2(n-1)}$
$=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2n-2}$
$\therefore T_{2n}-T_{2(n-1)}=a_{2n-1}-a_{2n}=-d$
즉, 수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

n의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) n이 짝수일 때,
$T_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)$
$=-d\times\frac{n}{2}=-\frac{dn}{2}$

(ii) n이 홀수일 때,
$T_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})+a_n$
$=-d\times\frac{n-1}{2}+a_1+(n-1)d$
$=a_1+\frac{n-1}{2}\times d$

ㄱ. (i)에 $n=4$를 대입하면 $T_4=-2d$ (거짓)
ㄴ. (ii)에 $n=5$를 대입하면 $T_5=a_1+2d=a_3$ (참)
ㄷ. $2n$은 짝수이므로 (i)에 의하여
$T_{2n}=-\frac{d\times 2n}{2}=-dn$
이때 수열 $\{T_{2n}\}$의 일반항 T_{2n}이 n에 대한 일차식이므로 수열 $\{T_{2n}\}$은 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄷ에서
$T_2=a_1-a_2=-d$
$T_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)=-2d$
$T_6=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)=-3d$
$\vdots$
즉, 수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다.

07

조건 (나)에서 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 각 항에서 3의 배수를 제외시킨 것이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a=3k$ (k는 자연수) 꼴인 경우
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_1, a_4, a_7, $\cdots$이다.
$\therefore \{b_n\}$: a_2, a_3, a_5, a_6, a_8, a_9, $\cdots$
즉, $b_{40}=a_{60}=172$이므로
$a+59\times2=172$
$\therefore a=54$

(ii) $a=3k-1$ (k는 자연수) 꼴인 경우
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_3, a_6, a_9, $\cdots$이다.
$\therefore \{b_n\}$: a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8, $\cdots$
즉, $b_{40}=a_{59}=172$이므로
$a+58\times2=172$
$\therefore a=56$

(iii) $a=3k-2$ (k는 자연수) 꼴인 경우
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_2, a_5, a_8, $\cdots$이다.
$\therefore \{b_n\}$: a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, a_9, $\cdots$
즉, $b_{40}=a_{60}=172$이므로
$a+59\times2=172$
$\therefore a=54$
그런데 $a=3k-2$ 꼴이어야 하므로 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 a의 최솟값은 54이다. 답 54

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

수열 $\{a_n\}$의 세 항마다 하나씩 3의 배수가 지워지고 남은 수들을 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{b_n\}$이므로 지워지는 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

$\{a_n\}$: a_1, a_2, a_3 / a_4, a_5, a_6 / $\cdots$ / a_{58}, a_{59}, a_{60} / $\cdots$
(i) $\times$, b_1, b_2 / $\times$, b_3, b_4 / $\cdots$ / $\times$, b_{39}, b_{40} / $\cdots$
(ii) b_1, b_2, $\times$ / b_3, b_4, $\times$ / $\cdots$ / b_{39}, b_{40}, $\times$ / $\cdots$
(iii) b_1, $\times$, b_2 / b_3, $\times$, b_4 / $\cdots$ / b_{39}, $\times$, b_{40} / $\cdots$

즉, (i), (iii)에서 $b_{40}=a_{60}$, (ii)에서 $b_{40}=a_{59}$이다.

08

$f(x)=x^2-ax+2a$라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 p, q, r이므로 나머지 정리에 의하여

$p=f(-1)=(-1)^2-a\times(-1)+2a=3a+1$,

$q=f(1)=1^2-a\times1+2a=a+1$,

$r=f(2)=2^2-a\times2+2a=4$

이때 세 수 p, q, r, 즉 $3a+1$, $a+1$, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+1)=(3a+1)+4$, $2a+2=3a+5$

$\therefore a=-3$ 답 ①

09 $f(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f(a)=\frac{1}{a}$, $f(2)=\frac{1}{2}$, $f(b)=\frac{1}{b}$

조건 (나)에서 세 수 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{b}$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $\quad\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ $\quad$ ……㉠

$\therefore a+25b=(a+25b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ($\because$ ㉠)

$=26+\frac{25b}{a}+\frac{a}{b}$ $\quad$ ……㉡

조건 (가)에서 $ab>0$이므로 $\frac{25b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{25b}{a}+\frac{a}{b}\geq2\sqrt{\frac{25b}{a}\times\frac{a}{b}}$

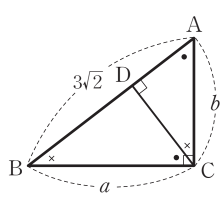
$=10$ $\left(\text{단, 등호는 } a=6,\ b=\frac{6}{5}\text{일 때 성립한다.}\right)$

$\therefore a+25b\geq26+10$ ($\because$ ㉡)

$=36$

따라서 $a+25b$의 최솟값은 36이다. 답 36

10 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면 △ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



$a^2+b^2=(3\sqrt{2})^2$

$\therefore a^2+b^2=18$ $\quad$ ……㉠

△ABC∽△CBD이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BD}$에서 $3\sqrt{2}:a=a:\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=\frac{a^2}{3\sqrt{2}}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{CD}$에서 $3\sqrt{2}:b=a:\overline{CD}$

$\therefore \overline{CD}=\frac{ab}{3\sqrt{2}}$

△ABC∽△ACD이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$에서 $3\sqrt{2}:b=b:\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{b^2}{3\sqrt{2}}$

즉, 세 삼각형의 넓이는

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{ab}{3\sqrt{2}}\times\frac{b^2}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{36}ab^3$

$\triangle CBD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{3\sqrt{2}}\times\frac{ab}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{36}a^3b$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}ab$

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times\frac{1}{36}a^3b=\frac{1}{36}ab^3+\frac{1}{2}ab$

그런데 $a>0$, $b>0$에서 $ab\neq0$이므로 양변에 $\frac{36}{ab}$을 곱하면

$2a^2=b^2+18$ $\quad\therefore b^2=2a^2-18$ $\quad$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3a^2-18=18$, $3a^2=36$

$a^2=12$ $\quad\therefore a=2\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

위의 값을 ㉡에 대입하면

$b^2=2\times12-18=6$ $\quad\therefore b=\sqrt{6}$ ($\because b>0$)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$\triangle ABC=\triangle ACD+\triangle CBD$ $\quad$ ……㉢

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\triangle CBD=\triangle ACD+\triangle ABC$ $\quad$ ……㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$2\triangle CBD=2\triangle ACD+\triangle CBD$

즉, $\triangle CBD=2\triangle ACD$이므로

$\triangle ACD:\triangle CBD=1:2$

이때 두 삼각형 ACD, CBD는 각각 변 AD와 변 BD를 밑변으로 하고 높이가 서로 같은 삼각형이므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\overline{AD}:\overline{BD}=1:2$이고 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\sqrt{2}$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$

△ABC∽△ACD에서

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$, $3\sqrt{2}:\overline{AC}=\overline{AC}:\sqrt{2}$

$\overline{AC}^2=6$ $\quad\therefore \overline{AC}=\sqrt{6}$ ($\because \overline{AC}>0$)

△ABC∽△CBD에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BD}$, $3\sqrt{2}:\overline{BC}=\overline{BC}:2\sqrt{2}$

$\overline{BC}^2=12$ $\quad\therefore \overline{BC}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{BC}>0$)

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-4$에서 $a+2d=-4$ $\quad$ ……㉠

$a_9=44$에서 $a+8d=44$ $\quad$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20$, $d=8$

$\therefore a_n=-20+(n-1)\times8$

$=8n-28$

이때 $a_n<0$, 즉 $8n-28<0$에서

$n<3.5$

따라서 $n\le3$이면 $a_n<0$이고, $n\ge4$이면 $a_n>0$이다.

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$

$=-(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+\cdots+a_{15})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})-2(a_1+a_2+a_3)$

$=\dfrac{15\{2\times(-20)+(15-1)\times8\}}{2}-2(-20-12-4)$

$=540+72=612$ 답 612

12 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로

$a_n=30-(n-1)d$

$\therefore a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}$

$=\dfrac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\dfrac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$

이때 $k+1>0$이므로

$60-(2m+k-2)d=0$

$(2m+k-2)d=60 \qquad \therefore 2m+k=2+\dfrac{60}{d}$

그런데 m, k가 자연수이므로 위의 식을 만족시키는 d는 60의 약수이어야 한다.

따라서 $60=2^2\times3\times5$이므로 d의 개수는

$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=0$, 즉 등차수열의 연속하는 $(k+1)$개의 항의 합이 0이므로 k의 값에 따라 수열 a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, $\cdots$, a_{m+k}를 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k+1$이 홀수일 때,

$\cdots$, d, 0, $-d$, $\cdots$

이때 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열에서 항의 값이 0이 되려면 d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로

$d=1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

(ii) $k+1$이 짝수일 때,

$\cdots, \dfrac{d}{2}, -\dfrac{d}{2}, \cdots$

이때 $a_n=30-(n-1)d$이므로

$30-(n-1)d=\dfrac{d}{2}$에서 $(n-1)d=-\dfrac{d}{2}+30$

$n-1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{30}{d} \qquad \therefore n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{30}{d}$

그런데 n은 자연수이므로

$d=4, 12, 20, 60$

(i), (ii)에서 구하는 d의 개수는 12이다.

13 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{11}+a_{21}=82$에서 $(a+10d)+(a+20d)=82$

$2a+30d=82 \qquad \therefore a+15d=41 \qquad \cdots\cdots㉠$

$a_{11}-a_{21}=6$에서 $(a+10d)-(a+20d)=6$

$-10d=6 \qquad \therefore d=-\dfrac{3}{5}$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$a+15\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=41$

$a-9=41 \qquad \therefore a=50$

$\therefore a_n=50+(n-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right) \qquad \cdots\cdots㉡$

이때 집합 A의 원소 a_n의 값은 자연수이므로

$50+(n-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)>0$, $n-1<\dfrac{250}{3}$

$\therefore n<\dfrac{253}{3}=84.3\times\times\times$

또한, a_n의 값이 자연수가 되려면 ㉡에서 $n-1$의 값은 0 또는 5의 배수이어야 한다. 즉, 조건을 만족시키는 n의 값은 1, 6, 11, $\cdots$, 81의 17개이다.

따라서 $\underbrace{\text{수열 } a_1, a_6, a_{11}, \cdots, a_{81}}_{\text{공차는 } 5d=-3\text{이다.}}$은 첫째항이 50이고, 제17항이 $a_{81}=50+(81-1)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2$인 등차수열이므로 그 합은

$\dfrac{17(50+2)}{2}=442$ 답 442

14 $S_{17}=S_{18}$이므로

$S_{18}-S_{17}=0 \qquad \therefore a_{18}=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 34이므로

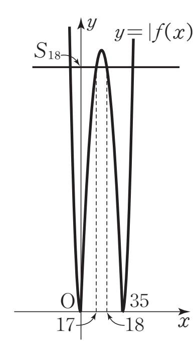
$a_{18}=34+(18-1)\times d=0$

$17d=-34 \qquad \therefore d=-2$

$\therefore S_n=\dfrac{n\{2\times34+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n(n-35) \qquad \cdots\cdots㉠$

$f(x)=-x(x-35)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 자연수 n에 대하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(i) $1\le n\le35$인 자연수 n에 대하여

$f(18)\ge|f(n)|$

즉, $1\le n\le35$인 자연수 n에 대하여 $|S_n|>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $n>35$인 자연수 n에 대하여 $|S_n|>S_{18}$이 성립하려면 $-S_n>S_{18}$이어야 한다.

즉, ㉠에 의하여 $S_{18}=-18(18-35)=306$이므로 $n(n-35)>306$이 성립해야 한다.

이때 $n=42$이면 $n(n-35)=42\times7=294$이고 $n=43$이면 $n(n-35)=43\times8=344$이므로

$-S_n > S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다.
(i), (ii)에서 $|S_n| > S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다. **답** 43

15 공차가 양수인 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$에 대하여 조건 (나), (다)에서 홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크므로 m은 홀수이다.
또한, 홀수 m에 대하여 자연수 $1, 2, 3, \cdots, m$ 중에서 홀수는 $\frac{m+1}{2}$개, 짝수는 $\frac{m-1}{2}$개이다.
조건 (나)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_m=90$이므로

$$\frac{\frac{m+1}{2}(a_1+a_m)}{2}=90$$

$\therefore (m+1)(a_1+a_m)=360$ ……㉠
조건 (다)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{m-1}=72$이므로

$$\frac{\frac{m-1}{2}(a_2+a_{m-1})}{2}=72$$

$\therefore (m-1)(a_2+a_{m-1})=288$
이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$라 하면
$a_2+a_{m-1}=a_1+d+a_{m-1}=a_1+a_m$이므로
$(m-1)(a_2+a_{m-1})=288$에서
$(m-1)(a_1+a_m)=288$ ……㉡
㉠−㉡을 하면
$2(a_1+a_m)=72 \quad \therefore a_1+a_m=36$
이것을 ㉠에 대입하면
$36(m+1)=360,\ m+1=10 \quad \therefore m=9$
$\therefore a_1+a_m+m=36+9=45$ **답** ②

16 ㄱ. $S_{14}=S_{28}$에서
$a_1+a_2+\cdots+a_{14}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{14})+(a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{28})$
$\therefore a_{15}+a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{28}=0$ (참)
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
$\underline{a_{15}+a_{28}=a_{16}+a_{27}=\cdots=a_{19}+a_{24}=\cdots=a_{21}+a_{22}}$ 공차를 d라 하면 모두 $2a_1+41d$이다.
즉, ㄱ에서 $7(a_{19}+a_{24})=0$이므로
$a_{19}+a_{24}=0 \quad \therefore a_{19}=-a_{24}$
$\therefore |a_{19}|=|a_{24}|$ (참)
ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 ㄴ에서
$a_{19}+a_{24}=0$이므로
$a_1+18d+a_1+23d=0,\ 2a_1=-41d$
$\therefore a_1=-\frac{41}{2}d$
이때 $a_1>0$이므로 $d<0$이고,
$a_n=-\frac{41}{2}d+(n-1)d=d\left(n-\frac{43}{2}\right)$
S_n의 값이 최대가 되는 것은 $a_n>0$인 항만을 모두 더했을 때이므로
$d\left(n-\frac{43}{2}\right)\ge 0 \quad \therefore n\le 21.5\ (\because d<0)$
즉, $n=21$일 때, S_n은 최댓값을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

17 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면
$b=ar,\ c=br=ar^2$
$a+b+c=7$에서 $a+ar+ar^2=7$이므로
$a(1+r+r^2)=7$ ……㉠
$a^2+b^2+c^2=91$에서 $a^2+a^2r^2+a^2r^4=91$이므로
$a^2(1+r^2+r^4)=91$
한편, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$7^2=91+2(a^2r+a^2r^3+a^2r^2)$
$2a^2r(1+r+r^2)=-42$
$\therefore a^2r(1+r+r^2)=-21$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $ar=-3$
$\therefore abc=a\times ar\times ar^2=(ar)^3$
$=(-3)^3=-27$ **답** ①

• 다른 풀이 •

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r라 하면
$b=ar,\ c=ar^2$
$a+b+c=7$에서 $a+ar+ar^2=7$
$\therefore a(1+r+r^2)=7$ ……㉢
$a^2+b^2+c^2=91$에서 $a^2+a^2r^2+a^2r^4=91$
$a^2(1+r^2+r^4)=91,\ \underline{a^2(1+r+r^2)(1-r+r^2)}=91$ 복이차식의 인수분해
㉢을 위의 식에 대입하면
$7a(1-r+r^2)=91$
$\therefore a(1-r+r^2)=13$ ……㉣
㉢−㉣을 하면 $2ar=-6 \quad \therefore ar=-3$
$\therefore abc=a\times ar\times ar^2=(ar)^3$
$=(-3)^3=-27$

18 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_1+a_3=12$에서 $a+ar^2=12$ ……㉠
$a_1+a_3+a_5+a_7=15$에서
$12+a_5+a_7=15$
즉, $a_5+a_7=3$에서
$ar^4+ar^6=3 \quad \therefore r^4(a+ar^2)=3$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$12r^4=3 \quad \therefore r^4=\frac{1}{4}$
이때 모든 항이 실수이므로 $r^2=\frac{1}{2}$ ……㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a+\frac{1}{2}a=12,\ \frac{3}{2}a=12 \quad \therefore a=8$
$\therefore a_1a_2a_3a_4=a\times ar\times ar^2\times ar^3=a^4r^6=a^4(r^2)^3$
$=8^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2^{12}}{2^3}=2^9$ **답** ①

19 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=br^{n-1}$

$a_nb_n=\dfrac{(a_{n+1})^2+4(b_{n+1})^2}{5}$에서

$ar^{n-1}\times br^{n-1}=\dfrac{(ar^n)^2+4(br^n)^2}{5}$

$abr^{2n-2}=\dfrac{a^2r^{2n}+4b^2r^{2n}}{5}$ ($\because r>0$)

$(a^2+4b^2)r^2=5ab$

$\therefore r^2=\dfrac{5ab}{a^2+4b^2}=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}$ ……㉠

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{4b}{a}>0$이고 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
모든 항이 양수이므로 $a>0$, $b>0$, $r>0$

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{4b}{a}}=4$

(단, 등호는 $a^2=4b^2$일 때 성립한다.)

$\therefore r^2=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}\leq\dfrac{5}{4}$ ($\because$ ㉠)

따라서 공비 r의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다.

답 ③

20 조건 ㈏에서 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{e}{d}$, 즉 $d^2=ae$이므로 a, d, e 또는 e, d, a는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

또한, 조건 ㈐에서 $a=kd$, $b=\dfrac{e}{k}$이므로

$k=\dfrac{a}{d}=\dfrac{e}{b}$ $\quad\therefore ab=de$

따라서 a, d, e, b 또는 b, e, d, a는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

조건 ㈎에서 $a<c$이므로 a, d, e, b, c 또는 b, e, d, a, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 이때의 c는 제5항이다.
조건 ㈏에서 (a, d, e) 또는 (e, d, a)의 순서대로 등비수열을 이루므로 (a, e, d, b), (b, d, e, a), (d, a, b, e), (d, b, a, e), (e, a, b, d), (e, b, a, d)의 경우는 생각하지 않는다.

$\therefore n=5$

답 ⑤

21 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d ($d\neq 0$)라 하면

$a_2=a+d$, $a_4=a+3d$, $a_9=a+8d$ ……㉠

이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)$

$a^2+6ad+9d^2=a^2+9ad+8d^2$

$d^2-3ad=0$, $d(d-3a)=0$

$\therefore d=3a$ ($\because d\neq 0$)

이것을 ㉠에 각각 대입하여 정리하면

$a_2=4a$, $a_4=10a$, $a_9=25a$

$\therefore r=\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{10a}{4a}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore 6r=6\times\dfrac{5}{2}=15$

답 15

22 [그림 2]에서 b는 3과 1의 최소공배수이므로 3이고, c는 1과 4의 최소공배수이므로 4이다.

이때 e와 12의 최대공약수가 $b=3$이므로

$e=3k$ (k는 자연수)라 하면 k와 4는 서로소이다.

또한, f와 12의 최대공약수가 $c=4$이므로

$f=4l$ (l은 자연수)이라 하면 l과 3은 서로소이다.

한편, e, 12, f가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$12^2=ef$에서

$144=3k\times 4l=12kl$ $\quad\therefore kl=12$

이때 k, l은 각각 4, 3과 서로소인 자연수이므로

$k=3$, $l=4$

$\therefore e=3\times 3=9$, $f=4\times 4=16$

$\therefore e+f=9+16=25$

답 25

23 $x=n+a$ (n은 양의 정수, $0<a<1$)라 하면 *

$[x]=n$, $x-[x]=(n+a)-n=a$

이때 세 수 $x-[x]$, $[x]$, x, 즉 a, n, $n+a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$n^2=a(n+a)$, $a^2+na-n^2=0$

$\left(\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{a}{n}-1=0$ $\quad\therefore \dfrac{a}{n}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $0<\dfrac{a}{n}<1$이므로 $\dfrac{a}{n}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$이고,

$0<a<1$이므로 $n=1$이어야 한다.

$\therefore a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x-[x]=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

양의 실수 x의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a라 하면

$x=n+a$ (단, n은 0 또는 양의 정수 $0\leq a<1$)

(i) $n=0$, $a=0$일 때,

$x=0$이므로 x는 양의 실수라는 조건에 모순이다.

(ii) $n=0$, $a\neq 0$일 때,

$x=a$, $[x]=0$이므로 $x-[x]$, $[x]$, x는 a, 0, a이고, 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

(iii) $n\neq 0$, $a=0$일 때,

$x=n$, $[x]=n$이므로 $x-[x]$, $[x]$, x는 0, n, n이고, 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $n\neq 0$, $a\neq 0$이므로

$x=n+a$ (단, n은 양의 정수, $0<a<1$)

24 이차방정식 $px^2+2qx+r=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=q^2-pr$ ……㉠

ㄱ. p^2, q^2, r^2이 이 순서대로 등차수열을 이루면

$q^2=\dfrac{p^2+r^2}{2}$

㉠에서

$\dfrac{D}{4}=\dfrac{p^2+r^2}{2}-pr$

$=\dfrac{p^2-2pr+r^2}{2}$

$=\dfrac{(p-r)^2}{2}$

이때 p, r는 서로 다른 양수이므로 $\dfrac{(p-r)^2}{2}>0$

즉, $\dfrac{D}{4}>0$이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{r}$이 이 순서대로 등비수열을 이루면

$\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1}{pr}$ $\qquad\therefore q^2=pr$

㉠에서

$\dfrac{D}{4}=pr-pr=0$

즉, $\dfrac{D}{4}=0$이므로 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{r}$이 이 순서대로 등차수열을 이루면

$\dfrac{2}{q}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{p+r}{pr}$

$q=\dfrac{2pr}{p+r}$ $\qquad\therefore q^2=\dfrac{4p^2r^2}{(p+r)^2}$

㉠에서

$\dfrac{D}{4}=\dfrac{4p^2r^2}{(p+r)^2}-pr$

$=pr\times\dfrac{4pr-(p+r)^2}{(p+r)^2}$

$=pr\times\dfrac{-(p-r)^2}{(p+r)^2}$

$=-pr\times\left(\dfrac{p-r}{p+r}\right)^2$

이때 p, r는 서로 다른 양수이므로

$pr>0$, $\left(\dfrac{p-r}{p+r}\right)^2>0$

$\therefore -pr\times\left(\dfrac{p-r}{p+r}\right)^2<0$

즉, $\dfrac{D}{4}<0$이므로 주어진 이차방정식은 허근을 갖는다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

25 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=50\sqrt{2}$ ……㉠

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$은 첫째항이 $a_{21}=a_1r^{20}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=\dfrac{a_1r^{20}(r^{10}-1)}{r-1}$

$=450\sqrt{2}$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$50\sqrt{2}r^{20}=450\sqrt{2}$, $r^{20}=9$

$\therefore r^{10}=3$ ($\because \underbrace{r^{10}>0}_{r\text{은 실수이므로}}$)

따라서 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$은 첫째항이 $a_{11}=a_1r^{10}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=\dfrac{a_1r^{10}(r^{10}-1)}{r-1}$

$=r^{10}\times\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}$

$=3\times50\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

$=150\sqrt{2}$ **답** $150\sqrt{2}$

• 다른 풀이 •

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$

$=a_1r^{20}+a_2r^{20}+a_3r^{20}+\cdots+a_{10}r^{20}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{20}$

$=S_{10}r^{20}$

이때 $S_{10}=50\sqrt{2}$, $S_{10}r^{20}=450\sqrt{2}$이므로

$r^{20}=\dfrac{S_{10}r^{20}}{S_{10}}=\dfrac{450\sqrt{2}}{50\sqrt{2}}=9$, $(r^{10})^2=9$

$\therefore r^{10}=3$ ($\because r^{10}>0$)

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=a_1r^{10}+a_2r^{10}+a_3r^{10}+\cdots+a_{10}r^{10}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{10}$

$=S_{10}r^{10}$

$=50\sqrt{2}\times3$

$=150\sqrt{2}$

BLACKLABEL 특강 **참고**

등비수열의 일정한 개수의 항의 합으로 이루어진 수열도 등비수열을 이루므로 주어진 문제에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_1$, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=S_2$, $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=S_3$이라 하면 세 수 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

공비를 R라 할 때, $\dfrac{S_3}{S_1}=9$에서 $R=3$ ($\because R>0$)

$\therefore S_2=S_1\times R=50\sqrt{2}\times3=150\sqrt{2}$

또한, 등차수열의 일정한 개수의 항의 합으로 이루어진 수열도 등차수열을 이룬다.

26 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

첫째항부터 제5항까지의 합이 $\dfrac{31}{2}$이므로

$\dfrac{a_1(r^5-1)}{r-1}=\dfrac{31}{2}$ ……㉠

또한, 첫째항부터 제5항까지의 곱은 32이므로

$a_1\times a_1r\times a_1r^2\times a_1r^3\times a_1r^4=32$

$a_1^5r^{10}=32$, $(a_1r^2)^5=32$

$\therefore a_1r^2=2$ ……㉡

$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$$
$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1r}+\frac{1}{a_1r^2}+\frac{1}{a_1r^3}+\frac{1}{a_1r^4}$$
$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}\times\frac{1}{r}+\frac{1}{a_1}\times\left(\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{a_1}\times\left(\frac{1}{r}\right)^3+\frac{1}{a_1}\times\left(\frac{1}{r}\right)^4$$
$$=\frac{\frac{1}{a_1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{a_1}\times\frac{r^5-1}{r^5}}{\frac{r-1}{r}}$$
$$=\frac{r^5-1}{a_1r^4(r-1)}=\frac{a_1(r^5-1)}{a_1^2r^4(r-1)}$$
$$=\left(\frac{1}{a_1r^2}\right)^2\times\frac{a_1(r^5-1)}{r-1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{31}{2}\ (\because ㉠, ㉡)$$
$$=\frac{31}{8}$$

답 ②

• 다른 풀이 •

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4$$
$$=a(1+r+r^2+r^3+r^4)$$
$$=\frac{31}{2}\quad\cdots\cdots ㉢$$

첫째항부터 제5항까지의 곱이 32이므로

$$a_1a_2a_3a_4a_5=a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4$$
$$=a^5r^{10}=(ar^2)^5=32$$
$$\therefore ar^2=2\quad\cdots\cdots ㉣$$
$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}$$
$$=\frac{1}{ar^4}(1+r+r^2+r^3+r^4)$$
$$=\frac{1}{(ar^2)^2}\times a(1+r+r^2+r^3+r^4)$$
$$=\frac{1}{2^2}\times\frac{31}{2}\ (\because ㉢, ㉣)$$
$$=\frac{31}{8}$$

27 $f(x)=2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100}$에서

$$(f\circ f)(x)=2+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})$$
$$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^2$$
$$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^3+\cdots$$
$$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^{100}$$

즉, 함수 $(f\circ f)(x)$의 상수항은

$$2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}=2+\frac{2(2^{100}-1)}{2-1}$$
$$=2+(2^{101}-2)$$
$$=2^{101}=2^k$$

따라서 구하는 k의 값은 101이다.

답 101

• 다른 풀이 •

함수 $f(f(x))$의 상수항은 $x=0$일 때의 함숫값이므로

$f(0)=2$

$$\therefore f(f(0))=f(2)$$
$$=2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$$
$$=2+\frac{2(2^{100}-1)}{2-1}$$
$$=2+2^{101}-2$$
$$=2^{101}=2^k$$

따라서 k의 값은 101이다.

28 5, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 15가 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r $(r\neq1)$라 하면

$5\times r^{n+1}=15\qquad \therefore r^{n+1}=3$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=5r+5r^2+5r^3+\cdots+5r^n$$
$$=\frac{5r(r^n-1)}{r-1}$$
$$=\frac{5(r^{n+1}-r)}{r-1}$$
$$=\frac{5(3-r)}{r-1}\ (\because r^{n+1}=3),$$
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$
$$=\frac{1}{5r}+\frac{1}{5r^2}+\frac{1}{5r^3}+\cdots+\frac{1}{5r^n}$$
$$=\frac{\frac{1}{5r}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$
$$=\frac{\frac{1}{5r}\times\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}}$$
$$=\frac{r^n-1}{5r^n(r-1)}=\frac{r^{n+1}-r}{5r^{n+1}(r-1)}$$
$$=\frac{3-r}{15(r-1)}\ (\because r^{n+1}=3)$$

또한, 5, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_n, 15가 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d $(d\neq0)$라 하면

$5+(n+1)d=15\qquad \therefore (n+1)d=10$

$$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$$
$$=(5+d)+(5+2d)+(5+3d)+\cdots+(5+nd)$$
$$=\frac{n\{(5+d)+(5+nd)\}}{2}$$
$$=\frac{n\{10+(n+1)d\}}{2}$$
$$=\frac{n(10+10)}{2}\ (\because (n+1)d=10)$$
$$=10n$$

따라서 주어진 등식

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=6$$에서

$$\frac{\frac{3-r}{15(r-1)}\times 10n}{\frac{5(3-r)}{r-1}}=6$$

$\frac{2n}{15}=6 \qquad \therefore n=45$

답 45

29 정사각형 모양의 종이 ABCD의 한 변의 길이가 2이고, 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1은 각 변의 중점이므로 종이 ABCD를 접어 만든 도형 $A_1B_1C_1D_1$은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.

즉, S_1을 펼쳤을 때, 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

S_1을 접어 만든 도형 $A_2B_2C_2D_2$는 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 S_1에서 이미 접은 종이를 다시 접어서 종이가 2겹이므로 S_2를 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$2\times(4\times1)=8$

S_2를 접어 만든 도형 $A_3B_3C_3D_3$은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고, S_1, S_2에서 이미 접은 종이를 다시 접어서 종이가 4겹이므로 S_3을 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$4\times\left(4\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=8\sqrt{2}$

$\vdots$

이와 같이 계속되므로 S_n을 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$l_5=\frac{4\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$=4\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})$$
$$=24+28\sqrt{2}$$

답 ①

30 n번째 반원의 지름의 길이를 a_n이라 하면

$a_1=2\times1=2$

반원의 넓이가 2배씩 증가하므로 반원의 지름의 길이는 $\sqrt{2}$배씩 증가한다.

$\therefore a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$

완성된 반원의 지름의 길이의 합은 $\overline{AB}$의 길이인 100보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{2\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}\le100$$

$(\sqrt{2})^n\le50(\sqrt{2}-1)+1$

$=21.7$ ($\because \sqrt{2}=1.414$)

이때 $n=8$이면 $(\sqrt{2})^8=2^4=16$,

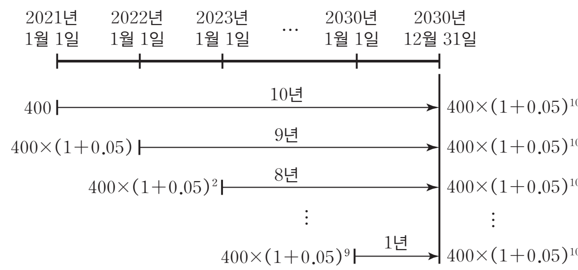
$n=9$이면 $(\sqrt{2})^9=2^4\times\sqrt{2}=16\times1.414=22.624$

이므로 n의 최댓값은 8이다.

따라서 완성된 반원의 최대 개수는 8이다.

답 8

31 매년 전년도보다 5 % 증액하여 적립하므로 2030년 12월 31일의 원리합계는 다음과 같다.



$\therefore 10\times400\times1.05^{10}=10\times400\times1.16$

$=4640$(만 원)

따라서 구하는 원리합계는 4640만 원이다.

답 ①

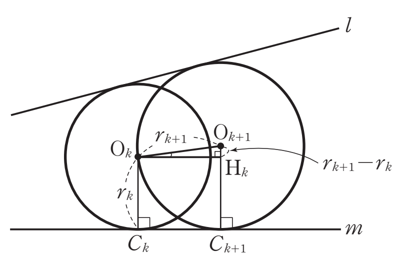
BLACKLABEL 특강 해결 실마리

첫해에 400만 원을 적립하였고, 이 금액은 10년 동안 연이율 5 %의 복리로 계산하면 (400×1.05^{10})만 원이다.
이후로는 매년 전년도보다 5 % 증액하여 적립하므로 두 번째 해에 저금한 금액은 (400×1.05)만 원이고, 이 금액을 9년 동안 연이율 5 %의 복리로 계산하면 $400\times1.05\times1.05^9=400\times1.05^{10}$(만 원)이다.
같은 방법으로 계산하면 매년 적립한 금액의 2030년 12월 31일까지의 원리합계는 모두 (400×1.05^{10})만 원으로 동일하므로 총 원리합계는 $(10\times400\times1.05^{10})$만 원이다.

32 해결단계

❶ 단계	원 C_k의 중심을 O_k라 하고, 점 O_k에서 점 O_{k+1}을 지나면서 직선 m에 수직인 선분에 내린 수선의 발을 H_k라 할 때, $\angle O_{k+1}O_kH_k$의 크기는 k의 값에 관계없이 항상 일정함을 확인한다.
❷ 단계	$\sin(\angle O_{k+1}O_kH_k)=p$ (p는 상수)라 하고, 수열 $\{r_n\}$이 등비수열을 이루는 것을 확인한 후, 그 공비를 p를 사용하여 나타낸다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 것을 이용하여 수열 $\{S_n\}$이 등비수열을 이루는 것을 확인한 후, 등비수열 $\{S_n\}$의 일반항 S_n을 구하고, 주어진 식의 값을 구한다.

원 C_k의 반지름의 길이를 r_k, 중심을 O_k라 하면 $r_k<r_{k+1}$ ($S_1<S_2$이므로) 이고, 점 O_k에서 점 O_{k+1}을 지나면서 직선 m에 수직인 선분에 내린 수선의 발을 H_k라 하면 다음 그림과 같다.



$\sin(\angle O_{k+1}O_kH_k)$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 일정하므로 그 값을 p (p는 상수)라 하면

$\dfrac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}}=p$ $\therefore r_{k+1}=\dfrac{1}{1-p}r_k$ ($\because p\neq1$)

$r_{k+1}>r_k>0$

즉, 수열 $\{r_k\}$는 공비가 $\dfrac{1}{1-p}$인 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$는 공비가 $\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^2$인 등비수열이다.

$S_k=\pi r_k^2$

이때 $S_1=1$이므로 일반항 S_n은

$S_n=\left\{\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^2\right\}^{n-1}$

또한, $S_5=4$이므로 $S_5=\left\{\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^2\right\}^4=4$에서

$\left\{\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^2\right\}^2=2$ $\therefore \left(\dfrac{1}{1-p}\right)^2=\sqrt{2}$

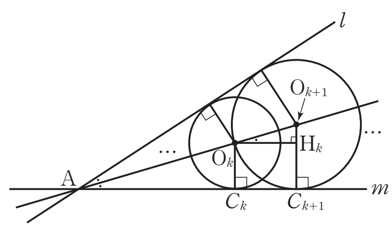
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $(\sqrt{2})^2=2$인 등비수열이 된다.

$\therefore S_1+S_3+S_5+\cdots+S_{19}=\dfrac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}=1023$

답 1023

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

다음 그림과 같이 자연수 k에 대하여 원 C_k의 중심 O_k는 모두 한 직선 위에 있고, •로 표시된 각의 크기는 모두 같다.



33 ㄱ. 주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$S_1+T_1=a_1+b_1=\dfrac{9-3}{2}=3$

이때 $a_1=b_1$이면 $a_1=b_1=\dfrac{3}{2}$ (거짓)

ㄴ. (i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$, $b_n=T_n-T_{n-1}$이므로

$a_n+b_n=(S_n-S_{n-1})+(T_n-T_{n-1})$
$=(S_n+T_n)-(S_{n-1}+T_{n-1})$
$=\dfrac{9n^2-3n}{2}-\dfrac{9(n-1)^2-3(n-1)}{2}$
$=\dfrac{9n^2-3n}{2}-\dfrac{9n^2-21n+12}{2}$
$=9n-6$

(ii) $n=1$일 때, $a_1+b_1=3$

(i), (ii)에서 $a_n+b_n=9n-6$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

이때 $a_n=n+3$이면

$b_n=(9n-6)-(n+3)=8n-9$ (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$의 공차가 d_1, 수열 $\{b_n\}$의 공차가 d_2이므로

$a_n+b_n=a_1+(n-1)d_1+b_1+(n-1)d_2$
$=a_1+b_1+(d_1+d_2)(n-1)$

한편, ㄴ에서

$a_n+b_n=9n-6=3+9(n-1)$

$\therefore a_1+b_1=3$, $d_1+d_2=9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a_1, 공차가 d_1이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a_1+d_1(n-1)\}}{2}$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 b_1, 공차가 d_2이므로

$T_n=\dfrac{n\{2b_1+d_2(n-1)\}}{2}$

$\therefore S_n+T_n$
$=\dfrac{n\{2a_1+d_1(n-1)\}}{2}+\dfrac{n\{2b_1+d_2(n-1)\}}{2}$
$=\dfrac{n\{2(a_1+b_1)+(d_1+d_2)(n-1)\}}{2}$

이때 $S_n+T_n=\dfrac{9n^2-3n}{2}=\dfrac{n(9n-3)}{2}$이므로

$d_1+d_2=9$, $2(a_1+b_1)-(d_1+d_2)=-3$

즉, $2(a_1+b_1)-9=-3$이므로 $2(a_1+b_1)=6$

$\therefore a_1+b_1=3$, $d_1+d_2=9$

ㄱ. $a_1=b_1$이면

$2a_1=3$ $\therefore a_1=\dfrac{3}{2}$ (거짓)

ㄴ. $a_n=n+3$이면 $a_1=4$이므로 $b_1=-1$

$d_1=1$이므로 $d_2=8$

$\therefore b_n=-1+8(n-1)=8n-9$ (참)

ㄷ. $d_1+d_2=9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

34 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n}=3\times2^n-3$에서

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n-2}=3\times2^{n-1}-3$이므로

$a_{2n}=3\times2^n-3\times2^{n-1}$
$=3\times2^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r ($r>0$)라 하면

$\dfrac{a_4}{a_2}=r^2$에서 $r^2=\dfrac{6}{3}=2$ $\therefore r=\sqrt{2}$ ($\because r>0$)

$a_2=3$에서 $ar=3$

$\therefore a=\dfrac{3}{r}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a_n=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}$

따라서 $a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{17}$은 첫째항이

$a_5=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2})^4=6\sqrt{2}$이고, 공비가 $(\sqrt{2})^2=2$, 항의 개수가 7인 등비수열의 합이므로

$a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{17}=\dfrac{6\sqrt{2}(2^7-1)}{2-1}$
$=762\sqrt{2}$

답 $762\sqrt{2}$

35 $(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+4$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$에서

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

$(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2$ $(\because\ a_{n+1}>a_n)$

또한, $a_2-a_1=3-1=2$이므로

$a_{n+1}-a_n=2$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$\therefore\ a_{20}=2\times 20-1=39$ **답** 39

36 $S_n=n^2+1$에서

(i) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+1)-\{(n-1)^2+1\}$

$=2n-1$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+1=2$

$T_n=\dfrac{n(4n^2+21n-1)}{6}+6$에서

(iii) $n\geq 2$일 때,

$a_nb_n=T_n-T_{n-1}$

$=\left\{\dfrac{n(4n^2+21n-1)}{6}+6\right\}$

$-\left[\dfrac{(n-1)\{4(n-1)^2+21(n-1)-1\}}{6}+6\right]$

$=\dfrac{12n^2+30n-18}{6}$

$=2n^2+5n-3$

$=(2n-1)(n+3)$

(iv) $n=1$일 때,

$a_1b_1=T_1=\dfrac{4+21-1}{6}+6=4+6=10$

(i)~(iv)에서

$a_1=2,\ a_n=2n-1$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

$b_1=5,\ b_n=n+3$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$(2+3+5+7+\cdots+19)+(5+5+6+7+\cdots+13)$

$=2+\dfrac{9\times(3+19)}{2}+5+\dfrac{9\times(5+13)}{2}$

$=2+99+5+81=187$ **답** 187

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 수열 $\{a_nb_n\}$이나 $\{a_n+b_n\}$을 다루는 점에서 조금은 생소한 문제이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이면
$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이므로 일반항 $a_n=f(n)$을 구할 수 있다. 이때 $S_0=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 $a_n=f(n)$이지만 $S_0\neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 $a_n=f(n)$이다.

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 80

01 11	**02** ①	**03** 1	**04** $2\sqrt{46}$	**05** $-\dfrac{57}{8}$
06 435				

01 해결단계

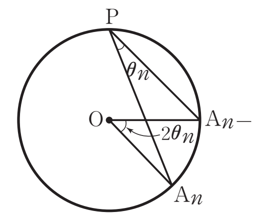
❶ 단계	원의 중심을 O, $\angle A_{n-1}PA_n=\theta_n$이라 할 때, 원주각의 성질에 의하여 $\angle A_{n-1}OA_n=2\theta_n$임을 이해한다.
❷ 단계	등비수열의 합의 공식을 이용하여 $l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}$의 값을 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이

$\angle A_{n-1}PA_n=\theta_n$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이라 하고, 원의 중심을 O라 하면 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로



$\angle A_{n-1}OA_n=2\theta_n$이다.

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$의 길이는

$l_n=2\times 2\theta_n=4\theta_n$

수열 $\{\theta_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{6}$, 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열이므로

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}=4(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{10})$

$=4\times\dfrac{\dfrac{\pi}{6}\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}$

$=\pi\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

$\therefore\ p=1,\ q=10$ $\therefore\ p+q=11$ **답** 11

02 해결단계

❶ 단계	등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 a, r라 하고 $a_{n+1}-a_n$을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	반례를 찾아 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 일반항 a_n은 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}=ar\times r^{n-1}-ar^{n-1}$

$=a(r-1)r^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. (반례) 수열 $\{a_n\}$이 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, $\cdots$이면 수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$은 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$로 등차수열이지만 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. (반례) 수열 $\{a_n\}$이 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, $\cdots$이면 수열 $\{a_na_{n+1}\}$은 1, 2, 4, 8, 16, 32, $\cdots$로 등비수열이지만 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 1, 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{8}$, $\cdots$로 등비수열이 아니다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

• 다른 풀이 •

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{ra_{n+1}-a_{n+1}}{ra_n-a_n}=\frac{(r-1)a_{n+1}}{(r-1)a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$$

즉, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. 수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=d$

$\therefore a_{n+2}-a_n=d$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공차가 d인 등차수열을 이룬다.

이때 수열 $\{a_n\}$이 등차수열인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_na_{n+1}\}$이 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=r$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공비가 r인 등비수열을 이루므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열을 이룬다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등비수열을 이루는지는 알 수 없다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이러한 유형의 문제는 출제 빈도가 높으므로 기본적인 접근 방법을 익혀 두는 것이 좋다.
첫 번째 방법은 주어진 수열이 등차수열이나 등비수열이면 일반항을 구해 계산하는 것이다. 이때에는 첫째항에 주의한다.
두 번째 방법은 숫자를 대입해 반례를 찾는 것이다.
가능하면 위의 두 가지 방법을 모두 사용하여 실수를 줄이도록 하자.

03 해결단계

❶ 단계	두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{S_{2n}\}$의 일반항을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 일반항과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구한다.
❸ 단계	$a_{15}=99$와 $a_2=1$을 이용하여 a_1의 값을 구한다.

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=1$, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_{2n}=1+4(n-1)=4n-3$

수열 $\{S_{2n}\}$은 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항을 S_2라 하면

$S_{2n}=S_2\times 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore a_{2n}+a_{2n-1}&=S_{2n}-S_{2n-2}\\&=S_2\times 2^{n-1}-S_2\times 2^{n-2}\\&=S_2\times 2^{n-2}\ (\text{단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\end{aligned}$$

$a_{2n}=4n-3$이므로

$a_{2n-1}=S_2\times 2^{n-2}-4n+3$

위의 식에 $n=8$을 대입하면

$a_{15}=S_2\times 2^6-4\times 8+3$

즉, $64S_2-29=99$이므로 $64S_2=128$

$\therefore S_2=2$

$a_2=1$이므로 $S_2=a_1+a_2=a_1+1=2$

$\therefore a_1=1$ **답** 1

• 다른 풀이 •

$a_2=1$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 4인 등차수열이므로

$a_2=1$, $a_4=5$, $a_6=9$, $\cdots$

한편, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$$\begin{aligned}S_{14}&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}\\&=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{14})\\&=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+\frac{7\times(2\times1+4\times6)}{2}\\&=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+91 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{16}&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}\\&=(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15})+(a_2+a_4+\cdots+a_{14}+a_{16})\\&=(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+99)+\frac{8\times(2\times1+4\times7)}{2}\quad(\because a_{15}=99)\\&=(a_1+a_3+\cdots+a_{13})+99+120\\&=(a_1+a_3+\cdots+a_{13})+219 \quad\cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때 수열 $\{S_{2n}\}$은 공비가 2인 등비수열이므로

$2S_{14}=S_{16}$에서 $2\times$㉠$=$㉡이므로

$2\{(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+91\}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+219$

$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{13}=37$

이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$S_{14}=\underbrace{128}_{2^7}$, $S_{16}=\underbrace{256}_{2^8}$

따라서 $S_{2n}=2^n$이므로 $S_2=a_1+a_2$에서

$2=a_1+1$ $\quad\therefore a_1=1$

04 해결단계

❶ 단계	삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$임을 이용하여 $\overline{DE}$, $\overline{EC}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룸을 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	이등변삼각형의 성질을 이용하여 삼각형 DEB의 넓이를 구한 후, 평행사변형 ABCD의 넓이를 구한다.
❹ 단계	❸단계에서 구한 넓이를 이용하여 평행사변형 ABCD의 높이를 구한 후, 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다.

$\triangle EBC=\frac{1}{5}\square ABCD$, $\triangle DBC=\frac{1}{2}\square ABCD$이므로

$\triangle DEB=\triangle DBC-\triangle EBC$

$=\frac{1}{2}\square ABCD-\frac{1}{5}\square ABCD$

$=\frac{3}{10}\square ABCD$ ……㉠

$\triangle DEB:\triangle EBC=\frac{3}{10}\square ABCD:\frac{1}{5}\square ABCD$

$=3:2$

에서 $\overline{DE}:\overline{CE}=3:2$ △DEB, △EBC의 밑변을 각각 DE, CE라 하면 높이가 같으므로

즉, $\overline{CD}=\overline{AB}=20$이므로 $\overline{DE}=12$, $\overline{CE}=8$

이때 $\triangle EDA'$, $\triangle EBC$에서

$\angle A'ED=\angle CEB$ ($\because$ 맞꼭지각),

$\angle DA'E=\angle BCE$, $\overline{A'D}=\overline{CB}$이므로 평행사변형의 대각 평행사변형의 대변

$\triangle EDA'\equiv\triangle EBC$ (ASA 합동)

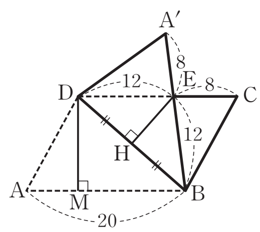
$\therefore \overline{EB}=\overline{DE}=12$

$\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{EB}^2=\overline{CE}\times\overline{BD}$에서 $12^2=8\times\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=18$

한편, 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle DEB$가 이등변삼각형이므로 $\overline{EH}$는 $\overline{DB}$를 수직이등분한다.



이때 $\triangle DHE$가 직각삼각형이고, $\overline{DH}=9$이므로

$\overline{EH}=\sqrt{12^2-9^2}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

$\therefore \triangle DEB=\frac{1}{2}\times18\times3\sqrt{7}=27\sqrt{7}$,

$\square ABCD=90\sqrt{7}$ ($\because$ ㉠)

또한, 위의 그림과 같이 점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\square ABCD=20\times\overline{DM}=90\sqrt{7}$

$\therefore \overline{DM}=\frac{9\sqrt{7}}{2}$

$\triangle DMB$가 직각삼각형이므로

$\overline{MB}=\sqrt{18^2-\left(\frac{9\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{729}{4}}=\frac{27}{2}$

$\therefore \overline{AM}=\overline{AB}-\overline{MB}=20-\frac{27}{2}=\frac{13}{2}$

따라서 $\triangle DAM$이 직각삼각형이므로

$\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{9\sqrt{7}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{736}{4}}=\sqrt{184}=2\sqrt{46}$ 답 $2\sqrt{46}$

• 다른 풀이 •

삼각형 EBC, 평행사변형 ABCD의 밑변을 각각 $\overline{CE}$, $\overline{CD}$라 하고, 높이를 h라 하면 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times h=\frac{1}{5}\times\overline{CD}\times h$

$\therefore \overline{CE}=\frac{2}{5}\times20$ ($\because \overline{CD}=\overline{AB}=20$)

$=8$

한편, $\angle A'ED=\angle CEB$ ($\because$ 맞꼭지각),

$\angle DA'E=\angle BCE$, $\overline{A'D}=\overline{CB}$이므로

$\triangle EDA'\equiv\triangle EBC$ (ASA 합동)

즉, $\overline{A'E}=\overline{CE}=8$이므로

$\overline{EB}=\overline{A'B}-\overline{A'E}=20-8=12$

$\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$, 즉 8, 12, $\overline{BD}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$12^2=8\times\overline{BD}$ $\therefore \overline{BD}=18$

$\angle DAB=\angle ECB=\theta$, $\overline{AD}=\overline{CB}=x$라 하면 $\triangle DAB$와 $\triangle EBC$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\frac{x^2+20^2-18^2}{2\times x\times20}=\frac{8^2+x^2-12^2}{2\times8\times x}$

$2(x^2+76)=5(x^2-80)$

$2x^2+152=5x^2-400$, $3x^2=552$

$x^2=184$ $\therefore x=2\sqrt{46}$

$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{46}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

코사인법칙

(1) 코사인법칙

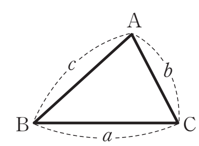
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(2) 코사인법칙의 변형

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



05 해결단계

❶ 단계	주어진 삼차방정식을 인수분해하여 세 근을 구한 후, 조건 (다)를 만족시키는 a, b의 경우를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 나눈 경우에 따라 조건 (가), (나)를 만족시키는 a, b의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 모든 ab의 값의 합을 구한다.

$x^3-(ab+a+b)x^2+ab(a+b+1)x-(ab)^2=0$ ……㉠

㉠의 좌변을 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2(bx-b^2)+a(-bx^2-x^2+b^2x+bx)+x^3-bx^2=0$

$a^2b(x-b)-a(b+1)(x-b)x+x^2(x-b)=0$

$(x-b)\{a^2b-a(b+1)x+x^2\}=0$

$(x-b)(x-a)(x-ab)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=ab$

즉, 삼차방정식 ㉠의 세 근은 a, b, ab이다.

그런데 조건 (다)에 의하여 세 근 중에서 한 근은 양수, 두 근은 음수이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a<0$, $b<0$인 경우

조건 ㈎에서 a, ab, b가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
또는 b, ab, a가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
즉, ab가 등비중항이므로

$(ab)^2=ab \qquad \therefore ab=1$ ($\because ab\neq 0$)

또한, 조건 ㈏에서
또는 ab, b, a가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
a, b, ab 또는 b, a, ab
또는 ab, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, a 또는 b가 등차중항이므로

$2b=a+ab$ 또는 $2a=b+ab$

이때 $ab=1$에서 $b=\frac{1}{a}$이므로 위의 두 식에 각각 대입하면 $\frac{2}{a}=a+1$ 또는 $2a=\frac{1}{a}+1$

위의 두 식의 양변에 각각 a를 곱하여 정리하면

$a^2+a-2=0$ 또는 $2a^2-a-1=0$

$(a+2)(a-1)=0$ 또는 $(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-2,\ b=-\frac{1}{2},\ ab=1$

또는 $a=-\frac{1}{2},\ b=-2,\ ab=1$

(ii) $a<0$, $b>0$인 경우

조건 ㈎에서 a, b, ab가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
또는 ab, b, a가 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
즉, b가 등비중항이므로

$b^2=a^2b \qquad \therefore b=a^2$ ($\because b\neq 0$) ……㉡

또한, 조건 ㈏에서

ab, a, b 또는 a, ab, b
또는 b, ab, a가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
또는 b, a, ab가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉, a 또는 ab가 등차중항이므로

$2a=b+ab$ 또는 $2ab=a+b$ ……㉢

㉡을 ㉢에 각각 대입하여 풀면

$2a=b+ab$에서 $2a=a^2+a^3$

$a^3+a^2-2a=0,\ a(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-2,\ b=4,\ ab=-8$

또는 $2ab=a+b$에서 $2a^3=a+a^2$

$2a^3-a^2-a=0,\ a(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4},\ ab=-\frac{1}{8}$

(iii) $a>0$, $b<0$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 계산하면

$ab=-8$ 또는 $ab=-\frac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 서로 다른 ab의 값은 1, -8, $-\frac{1}{8}$이므로 그 합은

$1+(-8)+\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{57}{8}$ **답** $-\frac{57}{8}$

06 해결단계

❶ 단계	조건 ㈎를 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n과 집합 A를 구한다.
❷ 단계	조건 ㈏를 이용하여 세 집합 $A\cap B$, $A\cap B^C$, $A^C\cap B$의 원소의 개수를 각각 구한다.
❸ 단계	수열 $\{b_n\}$이 등차수열임을 이용하여 **❷단계**에서 구한 것과 조건 ㈐를 동시에 만족시키는 집합 $A\cap B$를 구한다.
❹ 단계	집합 B의 원소의 개수를 구한 후, 집합 B의 원소가 60 이하임을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 공차를 구한다.
❺ 단계	집합 B의 모든 원소의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면 조건 ㈎에서

$a_{10}=a_1+9d_1=1+9d_1=55$

$9d_1=54 \qquad \therefore d_1=6$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times 6=6n-5$

$\therefore A=\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55\}$

$\therefore n(A)=10$

조건 ㈏에서 $n(A\cap B)=n(A\cap B^C)$이고,

$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)$이므로

$n(A\cap B)=n(A\cap B^C)=5$

한편, 집합 A의 원소를 크기순으로 나열했을 때, 이웃한 두 항이 $A\cap B$의 원소이면 수열 $\{b_n\}$이 등차수열이므로 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소가 된다.

즉, 이 경우에 $n(A\cap B)=10$이므로 $n(A\cap B)=5$에 모순이다.

따라서 집합 A에서 이웃하지 않은 항으로 집합 $A\cap B$에 속하는 5개의 원소를 선택해야 하고, 그 경우는 다음과 같다.

(i) $A\cap B=\{1, 13, 25, 37, 49\}$일 때,

모든 원소의 합이 $\frac{5(1+49)}{2}=125$이므로 조건 ㈐를 만족시킨다.

(ii) $A\cap B=\{7, 19, 31, 43, 55\}$일 때,

모든 원소의 합이 $\frac{5(7+55)}{2}=155$이므로 조건 ㈐를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $A\cap B=\{1, 13, 25, 37, 49\}$

한편, 조건 ㈏에서 $n(A\cap B)=\frac{1}{2}\times n(A^C\cap B)=5$이므로

$n(A^C\cap B)=10$

$\therefore n(B)=n(A\cap B)+n(A^C\cap B)$
$\qquad\qquad =5+10=15$

집합 B의 원소를 크기순으로 나열한 것을 수열 $\{c_n\}$이라 하고, 이 수열의 공차를 d_2라 하면 1, 13, 25, 37, 49는 공차가 12인 등차수열이므로 d_2는 12의 양의 약수이다.

그런데 $d_2\geq 6$이면 집합 B의 원소의 개수가 공차가 6인 집합 A의 원소의 개수보다 같거나 작아지므로

$n(A)=10<n(B)=15$

에 모순이다. 즉, $d_2<6$이어야 한다.

$\therefore d_2=1$ 또는 $d_2=2$ 또는 $d_2=3$ 또는 $d_2=4$

d_2의 각 값에 따라 집합 B의 가장 큰 원소 c_{15}는

$c_{15}>49$를 만족시켜야 한다.
$d_2=1$이면 $c_{15}=1+14\times1=15<49$
$d_2=2$이면 $c_{15}=1+14\times2=29<49$
$d_2=3$이면 $c_{15}=1+14\times3=43<49$
$d_2=4$이면 $c_{15}=1+14\times4=57>49$
$\therefore d_2=4$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 첫째항이 1이고, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합과 같으므로
$\frac{15\times(1+57)}{2}=435$ 답 435

BLACKLABEL 특강 참고

공차가 각각 x, y인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$이라 하자.
$n(A\cap B)\geq3$이면 집합 $A\cap B$의 원소들을 크기순으로 나열한 것은 등차수열을 이루고, 공차는 $|x|$, $|y|$의 최소공배수가 된다.
위의 문제에서 집합 $A\cap B$의 원소들을 크기순으로 나열한 것이 공차가 12인 등차수열을 이루므로 d_1, d_2의 최소공배수는 12가 된다. 이때 $d_1=6$, $d_2<6$이므로 $d_2=4$이다.

이것이 수능 p. 81

1 ⑤ 2 117 3 9 4 26

1 해결단계

❶ 단계	등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하고, d와 r의 관계식을 구한다.
❷ 단계	$94<a_{11}<109$를 만족시키는 공차 d, 공비 r를 각각 구한다.
❸ 단계	a_7+b_8의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.
$a_7=a_6+d$, $b_7=b_6\times r$이고, $a_6=b_6=9$이므로
조건 (가)에서
$9+d=9r$ ……㉠
즉, $r=1+\frac{d}{9}$이고 d, r는 자연수이므로 d는 9의 배수이다.
$a_{11}=a_6+5d=9+5d$이므로 조건 (나)에서
$94<9+5d<109$ $\therefore 17<d<20$
이때 d는 9의 배수이므로 $d=18$
이것을 ㉠에 대입하면
$9+18=9r$ $\therefore r=3$
$\therefore a_7+b_8=(a_6+d)+(b_6\times r^2)$
$=(9+18)+(9\times3^2)=108$ 답 ⑤

2 해결단계

❶ 단계	등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 a, d라 한 후, 일반항을 나타내고 조건 (나)를 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	조건 (나)를 만족시키는 자연수 k의 값을 구한다.
❸ 단계	$90\leq a_{16}\leq100$을 만족시키는 a, d의 값을 각각 구하고, a_{20}의 값을 구한다.

$a_1=a$라 하면 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n=a+(n-1)d$
또한, 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로
a는 자연수이고 $d\geq1$이다.
조건 (나)에서 $k\geq3$인 자연수 k에 대하여 세 항
a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a_k^2=a_2\times a_{3k-1}$
$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$
$a^2+2a(k-1)d+(k-1)^2d^2$
$=a^2+(3k-2)ad+ad+(3k-2)d^2$
$2a(k-1)+(k-1)^2d=(3k-2)a+a+(3k-2)d$
$(\because d\geq1)$
$\therefore d(k^2-5k+3)=a(k+1)$ ……㉠
한편, 조건 (가)에서 $0<a\leq d$, 즉 $a(k+1)\leq d(k+1)$이므로
㉠에서
$d(k^2-5k+3)\leq d(k+1)$
$k^2-5k+3\leq k+1$
$k^2-6k+2\leq0$
$3-\sqrt{7}\leq k\leq3+\sqrt{7}$
k는 $k\geq3$인 자연수이므로
$k=3, 4, 5$
이때 ㉠에서 $\underbrace{k^2-5k+3>0}_{*}$이므로
$k=5$, $d=2a$
$a_{16}=a+15d=a+15\times2a=31a$
$90\leq a_{16}\leq100$에서 $90\leq31a\leq100$이므로
$a=3$ $\therefore d=2\times3=6$
$\therefore a_{20}=a+19d=3+19\times6=117$ 답 117

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

*에서 $d(k^2-5k+3)=a(k+1)$에 $k=3, 4, 5$를 각각 대입해 보자.
(i) $k=3$일 때,
$d(3^2-5\times3+3)=a(3+1)$이므로 $-3d=4a$
즉, 조건 $0<a\leq d$를 만족시키지 않는다.
(ii) $k=4$일 때,
$d(4^2-5\times4+3)=a(4+1)$이므로 $-d=5a$
즉, 조건 $0<a\leq d$를 만족시키지 않는다.
(iii) $k=5$일 때,
$d(5^2-5\times5+3)=a(5+1)$이므로 $3d=6a$ $\therefore d=2a$
즉, 조건 $0<a\leq d$를 만족시킨다.

3 해결단계

❶ 단계	등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	❶단계에서 세운 식에 $n=1$, 2를 각각 대입하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 구한다.
❸ 단계	a_4의 값을 구한다.

모든 자연수 n에 대하여
$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$이므로
$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$에서
$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times3^{n-1}$ ……㉠
㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2+a_3+a_4=13$
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$이므로
$a_1r(1+r+r^2)=13$ ……㉡
또한, ㉠에 $n=2$를 대입하면
$a_3+a_4+a_5=13\times3=39$
즉, $a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$이므로
$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ ……㉢
㉢÷㉡을 하면

$$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\frac{39}{13} \qquad \therefore r=3$$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$$a_1\times3\times(1+3+9)=13 \qquad \therefore a_1=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a_4=a_1r^3=\frac{1}{3}\times3^3=9$$

답 9

4

해결단계

❶단계	수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 부등식 $S_k>S_{k+1}$을 a_{k+1}에 대한 부등식으로 변형한다.
❷단계	등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 **❶단계**의 부등식을 만족시키는 공차의 조건을 파악한다.
❸단계	**❷단계**의 조건과 조건 ㈏를 이용하여 조건 ㈎를 만족시키는 k의 값을 구한다.
❹단계	수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한 후, a_2의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$S_k>S_{k+1}$에서 $S_{k+1}-S_k<0$
이때 $S_{k+1}-S_k=a_{k+1}$이므로 $a_{k+1}<0$
즉, $S_k>S_{k+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k는 $a_{k+1}<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수이므로
조건 ㈎에서 $a_{k+1}<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k에 대하여 $S_k=102$이다.
이때 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $n\le k$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이고 $d<0$이어야 한다.

즉, 조건 ㈏에서 $a_8=-\frac{5}{4}a_5$이므로

$a_5>0$, $a_8<0$ ← $d<0$이므로
또한, $a_5a_6a_7<0$에서 $a_6a_7<0$이므로
$a_6>0$, $a_7<0$ ← $d<0$이므로
따라서 $a_{k+1}<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k는 6이므로 $S_6=102$

즉, $S_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=102$이므로

$2a+5d=34$ ……㉠

$a_8=-\frac{5}{4}a_5$에서 $a+7d=-\frac{5}{4}(a+4d)$이므로

$3a+16d=0$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=32$, $d=-6$
$\therefore a_2=a+d=32+(-6)=26$

답 26

09 수열의 합

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 83

01 ②	02 ⑤	03 24	04 ①	05 2
06 1	07 2056	08 ④		

01

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k=18 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k-\left(\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)=18-16$$
$$-\sum_{k=1}^{10}a_k=2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=-2$$

위의 식을 ㉡에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10}a_k^2-(-2)=16$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k^2=14$$

답 ②

02

ㄱ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n$$
$$=n^2+n-n=n^2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\displaystyle\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=n+n+1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$
$$=\frac{12n^2+6n+2n^2+3n+1}{6n}$$
$$=\frac{14n^2+9n+1}{6n} \text{ (참)}$$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\ (참)$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

03

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구하면

(i) $n\geq2$일 때,

$$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$$
$$=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$
$$=n^2+4n-(n^2-2n+1+4n-4)$$
$$=2n+3$$

(ii) $n=1$일 때,

$$a_1=1^2+4=5$$

(i), (ii)에서

$a_{2n-1}=2n+3$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

위의 일반항에 $n=2$를 대입하면 $a_3=2\times2+3=7$

이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_3-a_1=2d$에서 $7-5=2d$

$2d=2 \qquad \therefore d=1$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times1=n+4$

$\therefore a_{20}=20+4=24$

답 24

• 다른 풀이 1 •

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=n^2+4n$에서

$n=1$일 때, $a_1=1^2+4=5$,

$n=2$일 때, $a_1+a_3=2^2+4\times2=12$

이므로 $a_3=12-5=7$

이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_3-a_1=2d$, 즉 $7-5=2d$

$2d=2 \qquad \therefore d=1$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times1=n+4$

$\therefore a_{20}=20+4=24$

• 다른 풀이 2 •

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 한 것이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=S_n$이라 하면 $S_n=n^2+4n$이므로

$S_{11}=11^2+4\times11=165$, $S_9=9^2+4\times9=117$

에서

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{21}=165 \qquad \cdots\cdots㉠$

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{17}=117 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠$-$㉡을 하면

$a_{21}+a_{19}=48$

이때 a_{20}은 a_{19}, a_{21}의 등차중항이므로

$2a_{20}=a_{19}+a_{21}$에서 $2a_{20}=48$

$\therefore a_{20}=24$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

이 문제에서 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$은 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들의 합이다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$S_{2n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}$이므로
$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\neq S_{2n-1}$
즉, $\sum$를 S_n으로 바꾸어 나타낼 때 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=S_{2n-1}$로 두고 문제를 풀어 답을 틀리는 경우가 있으니 주의하도록 하자.

04

주어진 식의 일반항을 a_k (k는 자연수)라 하면

$$a_k=\frac{1}{(3k-1)(3k+2)},\ a_{10}=\frac{1}{29\times32}$$

이때 구하는 수열의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{29}}-\frac{1}{32}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{15}{32}=\frac{5}{32}$$

따라서 $p=32$, $q=5$이므로

$p+q=37$

답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

수열의 합의 소거형태

부분분수에서 소거하여 수열의 합을 구할 때, 소거가 안 되는 수의 위치는 대칭을 이룬다.
예를 들어,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k+1}-\frac{k+4}{k+3}\right)$$
$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+3}{n+2}\right)+\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+4}{n+3}\right)$$
$$=\left(\frac{3}{2}-\cancel{\frac{5}{4}}\right)+\left(\frac{4}{3}-\cancel{\frac{6}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{5}{4}}-\cancel{\frac{7}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{n+1}{n}}-\frac{n+3}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{n+2}{n+1}}-\frac{n+4}{n+3}\right)$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{n+3}{n+2}-\frac{n+4}{n+3}$$

와 같이 앞에서 첫 번째, 세 번째 수가 소거되지 않으면 뒤에서 첫 번째, 세 번째 수도 소거되지 않는다.

05

첫째항이 4, 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times1=n+3$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3}}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})$$
$$=(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{4})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{5}})+\cdots+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{15}})$$
$$=-\sqrt{4}+\sqrt{16}$$
$$=-2+4=2$$

답 2

• 다른 풀이 •

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 1인 등차수열이므로 $a_{k+1}-a_k=1$

$$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$
$$=(\cancel{\sqrt{a_2}}-\sqrt{a_1})+(\cancel{\sqrt{a_3}}-\cancel{\sqrt{a_2}})+(\cancel{\sqrt{a_4}}-\cancel{\sqrt{a_3}})+\cdots+(\sqrt{a_{13}}-\cancel{\sqrt{a_{12}}})$$
$$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}$$
$$=\sqrt{16}-\sqrt{4}\ (\because a_n=4+(n-1)\times 1=n+3)$$
$$=4-2=2$$

06

자연수 n에 대하여 $f(n)=(9^n$의 일의 자리의 수$)$이므로

$f(1)=9,\ f(2)=1,\ f(3)=9,\ f(4)=1,\ \cdots$

즉, 수열 $\{f(n)\}$은

$9,\ 1,\ 9,\ 1,\ 9,\ 1,\ 9,\ 1,\ \cdots$

마찬가지로 $g(n)=(8^n$의 일의 자리의 수$)$이므로

$g(1)=8,\ g(2)=4,\ g(3)=2,\ g(4)=6,\ g(5)=8,\ \cdots$

즉, 수열 $\{g(n)\}$은

$8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6,\ \cdots$

이때 $a_n=f(n)-g(n)$이므로 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ -3,\ 7,\ -5,\ 1,\ -3,\ 7,\ -5,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ -3,\ 7,\ -5$가 이 순서대로 계속 반복된다.

따라서 $777=4\times 194+1$이므로

$$\sum_{k=1}^{777}a_k=\sum_{k=1}^{776}a_k+a_{777}$$
$$=194\sum_{k=1}^{4}a_k+a_1$$
$$=194(1-3+7-5)+a_1$$
$$=a_1=1$$

답 1

BLACKLABEL 특강 참고

자연수 a에 대하여 $a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots$의 일의 자리의 수를 구할 때는 거듭제곱의 값을 모두 구하지 않고 다음과 같이 일의 자리의 수만 계산하여 구해도 된다.

3의 일의 자리의 수 ⇨ 3

3^2의 일의 자리의 수 ⇨ $3\times 3=9$에서 9

3^3의 일의 자리의 수 ⇨ $9\times 3=27$에서 7

3^4의 일의 자리의 수 ⇨ $7\times 3=21$에서 1

⋮

07

[1단계]에서 색칠된 정사각형 하나의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고, 색칠된 정사각형의 개수는 2이므로

$a_1=2,\ b_1=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

[2단계]에서 색칠된 정사각형 하나의 넓이는

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$이고, 색칠된 정사각형의 개수는 4이므로

$a_2=4=2^2,\ b_2=\frac{1}{16}\times 4=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$

[3단계]에서 색칠된 정사각형 하나의 넓이는

$\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$이고, 색칠된 정사각형의 개수는 8이므로

$a_3=8=2^3,\ b_3=\frac{1}{64}\times 8=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$

⋮

따라서 $[n$단계$]$에서 색칠된 정사각형 하나의 넓이는

$\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{2n}}$이고, 색칠된 정사각형의 개수는 2^n이므로

$a_n=2^n,\ b_n=\frac{1}{2^{2n}}\times 2^n=\frac{1}{2^n}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k(b_k+1)=\sum_{k=1}^{10}2^k\left(\frac{1}{2^k}+1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(1+2^k)$$
$$=10+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$=10+2046$$
$$=2056$$

답 2056

08

주어진 수열을

$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{5}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right),\ \cdots,$

$\left(\frac{25}{25},\ \frac{24}{25},\ \frac{23}{25},\ \cdots,\ \frac{1}{25}\right),$

$\left(\frac{27}{27},\ \frac{26}{27},\ \frac{25}{27},\ \cdots,\ \frac{4}{27},\ \cdots,\ \frac{1}{27}\right),\ \cdots$

과 같이 분모가 같은 것끼리 묶은 군수열로 생각하면

제n군의 분모는 $2n-1$이고, 항의 개수도 $2n-1$이므로

$\frac{4}{27}$는 제14군의 24번째 항이다.

한편, 제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{13}k-13$$
$$=2\times\frac{13\times 14}{2}-13$$
$$=182-13$$
$$=169$$

따라서 $169+24=193$이므로 $\frac{4}{27}$는 193번째 항에서 처음으로 나타난다.

답 ④

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 84~87

01 ④	02 ②	03 60	04 188	05 400
06 ③	07 ⑤	08 10	09 3025	10 ②
11 ①	12 ②	13 $\frac{1}{2020}$	14 240	15 ⑤
16 127	17 ②	18 99	19 120	20 440
21 ②	22 120	23 ②	24 220	25 ③
26 ④	27 ①	28 46	29 ①	30 ⑤
31 231				

01 ㄱ. $\sum_{n=1}^{46} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{46}$

$= a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{44}+a_{45}+a_{46})$

$= a_1+\sum_{k=1}^{15}(a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1})$ (참)

ㄴ. $1+2+2^2+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}2^k$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{l=2}^{11}(l-1)^5=1^5+2^5+3^5+\cdots+10^5$

$=\sum_{k=1}^{10}k^5$ (참)

$\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 변수인 k는 i, j, l 등 다른 문자로 바꾸어도 무방하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ④

02 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_1-\cancel{a_2})+(\cancel{a_2}-\cancel{a_3})+(\cancel{a_3}-\cancel{a_4})+\cdots+(\cancel{a_n}-a_{n+1})$

$=a_1-a_{n+1}=-n^2+n$

이때 $a_1=1$이므로

$1-a_{n+1}=-n^2+n$

$a_{n+1}=n^2-n+1$

$\therefore a_{11}=10^2-10+1=91$ **답** ②

03 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+cn$이므로

$a_{10}=\sum_{k=1}^{5}a_{2k}-\sum_{k=1}^{4}a_{2k}$

$=(5^2+5c)-(4^2+4c)=9+c$

$a_{10}=11$에서 $9+c=11$

$\therefore c=2$

즉, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=2n^2-5n$, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+2n$이고,

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=(2n^2-5n)+(n^2+2n)=3n^2-3n$

위의 식의 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3\times5^2-3\times5=60$ **답** 60

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=cn^2-5n$에서

$a_1=c-5$,

$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$

$=cn^2-5n-\{c(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=cn^2-5n-(cn^2-2cn+c-5n+5)$

$=2cn-c-5$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

이므로

$a_{2n-1}=2cn-c-5$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

또한, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+cn$에서

$a_2=1+c$,

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}$

$=n^2+cn-\{(n-1)^2+c(n-1)\}$

$=n^2+cn-(n^2-2n+1+cn-c)$

$=2n+c-1$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

이므로

$a_{2n}=2n+c-1$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

이때 $a_{10}=11$이므로

$2\times5+c-1=11$, $9+c=11$ $\therefore c=2$

$\therefore a_{2n-1}=4n-7$, $a_{2n}=2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(4k-7+2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{5}(6k-6)=6\times\frac{5\times6}{2}-6\times5$

$=90-30$

$=60$

BLACKLABEL 특강 **오답 피하기**

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$이므로

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=(cn^2-5n)+(n^2+cn)$

$=(c+1)n^2+(c-5)n$

위의 식의 양변에 $n=\frac{m}{2}$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=(c+1)\left(\frac{m}{2}\right)^2+(c-5)\frac{m}{2}$

$=\frac{c+1}{4}m^2+\frac{c-5}{2}m$

이러한 방법으로 $\sum_{k=1}^{m}a_k$를 구하여 틀리는 경우가 있다. $\sum_{k=1}^{2n}a_k$는 첫째항부터 짝수 번째 항까지의 합을 나타낸 것이므로 이 문제처럼 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$가 다르게 정의된 경우에 $\sum_{k=1}^{2n}a_k$의 식을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k$의 식을 구하면 오류가 발생할 수 있음에 주의하자.

04 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{2n^2-n}{n}=2n-1$, $b_n=\frac{-(2-n)}{n}$

즉, $b_n-1=\frac{-2+n}{n}-1=-\frac{2}{n}+1-1=-\frac{2}{n}$이므로

$\frac{1}{b_n-1}=-\frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{16}\left(a_k+\frac{1}{b_k-1}\right)&=\sum_{k=1}^{16}\left\{(2k-1)-\frac{k}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{16}\left(\frac{3}{2}k-1\right)\\&=\frac{3}{2}\times\frac{16\times17}{2}-1\times16\\&=204-16=188\end{aligned}$$

답 188

05

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{5}jk\right)-\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{10}(j+k)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{j=1}^{5}j\right)-\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{10}j+\sum_{j=1}^{10}k\right)\\&=\sum_{k=1}^{10}\left(k\times\frac{5\times6}{2}\right)-\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{10\times11}{2}+10k\right)\\&=15\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{5}55-10\sum_{k=1}^{5}k\\&=15\times\frac{10\times11}{2}-55\times5-10\times\frac{5\times6}{2}\\&=825-275-150\\&=400\end{aligned}$$

답 400

06

$n=1$일 때, $\frac{(n-1)^3}{n}=\frac{(1-1)^3}{1}=0$이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{(k+1)^3}{k}-\sum_{n=2}^{t}\frac{(n-1)^3}{n}\right\}\\&=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{(k+1)^3}{k}-\sum_{n=1}^{t}\frac{(n-1)^3}{n}\right\}\\&=\sum_{t=1}^{10}\left[t^3-\sum_{k=1}^{t}\left\{\frac{(k+1)^3}{k}+\frac{(k-1)^3}{k}\right\}\right]\\&=\sum_{t=1}^{10}\left(t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{2k^3+6k}{k}\right)\\&=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}(2k^2+6)\right\}\\&=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-2\times\frac{t(t+1)(2t+1)}{6}-6t\right\}\\&=\sum_{t=1}^{10}\left(\frac{1}{3}t^3-t^2-\frac{19}{3}t\right)\\&=\frac{1}{3}\times\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{19}{3}\times\frac{10\times11}{2}\\&=\frac{3025}{3}-385-\frac{1045}{3}=275\end{aligned}$$

답 ③

07

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}\\&=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-29^2+30^2\\&=-(1^2+3^2+5^2+\cdots+29^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+30^2)\\&=-\sum_{k=1}^{15}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{15}(2k)^2\\&=\sum_{k=1}^{15}\{-(2k-1)^2+(2k)^2\}\\&=\sum_{k=1}^{15}(4k-1)\\&=4\times\frac{15\times16}{2}-1\times15\\&=480-15=465\end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른 풀이 •

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}\\&=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-29^2+30^2\\&=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots+(-29^2+30^2)\\&=(-1+2)(1+2)+(-3+4)(3+4)+\cdots\\&\qquad+(-29+30)(29+30)\\&=1+2+3+4+\cdots+29+30\\&=\sum_{k=1}^{30}k\\&=\frac{30\times31}{2}=465\end{aligned}$$

08

$$\begin{aligned}&1\times(2n-1)+2\times(2n-3)+3\times(2n-5)+\cdots+n\times1\\&=\sum_{k=1}^{n}[k\times\{2n-(2k-1)\}]\\&=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+1)k\}\\&=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=n(n+1)(2n+1)\left(-\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=385$이고 385를 소인수분해하면 $385=5\times7\times11$이므로

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1)&=2\times3\times5\times7\times11\\&=10\times11\times(2\times10+1)\end{aligned}$$

$\therefore n=10$

답 10

09

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2\\&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2)\\&\quad+(2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2)\\&\quad+(3^2+\cdots+9^2+10^2)\\&\qquad\vdots\\&\quad+(9^2+10^2)\\&\quad+10^2\\&=1^2\times1+2^2\times2+3^2\times3+\cdots+10^2\times10\\&=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3\\&=\sum_{k=1}^{10}k^3\\&=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2=3025\end{aligned}$$

답 3025

단계	채점 기준	배점
(가)	$\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$을 구체적인 수로 나열하여 $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$으로 변형한 경우	80%
(나)	자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 주어진 식의 값을 구한 경우	20%

10 $\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m<\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<n^2+n+\frac{1}{4}-m<\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$

이때 m, n은 자연수이므로 n^2+n-m은 정수이다.

즉, $n^2+n-m=0$이므로 $m=n^2+n$

$\therefore a_n=n^2+n$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$

$=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$

$=55+15=70$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

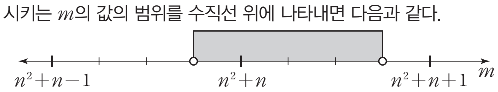
수직선을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m의 값을 구해보자.

$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}<m-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}<m<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$\therefore n^2+n-\frac{1}{4}<m<n^2+n+\frac{3}{4}$

이때 자연수 n에 대하여 n^2+n도 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 m의 값의 범위를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



그런데 m은 자연수이므로 $a_n=n^2+n$

11 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $S_n=n^3$이므로

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3$

$=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)=3n^2-3n+1$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^3=1$

(i), (ii)에서 $a_n=3n^2-3n+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이므로

$a_{2n}=3\times(2n)^2-3\times2n+1$

$=12n^2-6n+1$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_{2k}=\sum_{k=1}^{99}a_{2k}+a_{200}$

$=\sum_{k=1}^{99}(12k^2-6k+1)+a_{200}$

$=12\sum_{k=1}^{99}k^2-6\sum_{k=1}^{99}k+\sum_{k=1}^{99}1+a_{200}$

위의 식에서

$12\sum_{k=1}^{99}k^2=12\times\frac{99\times100\times199}{6}$, $2\times99\times100\times199$

$6\sum_{k=1}^{99}k=6\times\frac{99\times100}{2}$, $\sum_{k=1}^{99}1=1\times99$ $3\times99\times100$

이므로 각각 99로 나누어떨어진다.

즉, $12\sum_{k=1}^{99}k^2-6\sum_{k=1}^{99}k+\sum_{k=1}^{99}1$은 99로 나누어떨어지므로

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$를 99로 나눈 나머지는 a_{200}을 99로 나눈 나머지와 같다. 이때

$a_{200}=12\times100^2-6\times100+1$

$=12(99+1)^2-6(99+1)+1$

$=12(99^2+2\times99\times1+1^2)-6\times99-6+1$

$=99(12\times99+12\times2-6)+7$

이므로 a_{200}을 99로 나눈 나머지는 7이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$를 99로 나눈 나머지는 7이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3$에서

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=n^3-(n-1)^3$

$=3n^2-3n+1$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

또한, $a_1=1^3=1$이므로

$a_{2n}=3\times(2n)^2-3\times2n+1$

$=12n^2-6n+1$

이때 $99=a$로 놓으면

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}=\sum_{k=1}^{a+1}(12k^2-6k+1)$

$=12\times\frac{(a+1)(a+2)(2a+3)}{6}$

$-6\times\frac{(a+1)(a+2)}{2}+(a+1)$

$=2(a+1)(a+2)(2a+3)$

$-3(a+1)(a+2)+a+1$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$의 값을 99로 나눈 나머지는 다항식 ㉠을 a로 나눈 나머지와 같으므로 나머지정리에 의하여 ㉠에 $a=0$을 대입하면 나머지는

$2\times1\times2\times3-3\times1\times2+1=7$

12 $a_na_{n+1}-7=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$이므로

${a_n}^2=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2-\sum_{k=1}^{n-1}{a_k}^2$

$=(a_na_{n+1}-7)-(a_{n-1}a_n-7)$

$=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$

$=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

위의 식의 양변을 a_n ($a_n\neq0$)으로 나누면

$a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

위의 식을 이용하여 a_{11}을 a_8과 a_7로 나타내면

$$\begin{aligned}a_{11}&=a_{10}+a_9\\&=(a_9+a_8)+(a_8+a_7)\\&=a_9+2a_8+a_7\\&=(a_8+a_7)+2a_8+a_7\\&=3a_8+2a_7\end{aligned}$$

따라서 바르게 나타낸 것은 ②이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

$a_na_{n+1}-7=\sum_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_1a_2-7=a_1^{\ 2}$

이때 $a_1=1$이므로 $a_2-7=1$ $\quad\therefore\ a_2=8$

a_1과 a_2를 이용하여 a_7, a_8, a_{11}의 값을 구하면

$a_7=69$, $a_8=112$, $a_{11}=474$

$a_{11}=pa_8+qa_7$, 즉 $474=112p+69q$를 만족시키는 두 자연수 p, q를 구하면 $p=3$, $q=2$뿐이다.

13 $a_{2020}n^{2020}+a_{2019}n^{2019}+a_{2018}n^{2018}+\cdots+a_0=\sum_{k=0}^{2020}a_kn^k$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k^{2019}=\sum_{k=0}^{2020}a_kn^k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\sum_{k=1}^{n}k^{2019}=S_n$이라 하면 $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}n^{2019}&=S_n-S_{n-1}\\&=\sum_{k=0}^{2020}a_kn^k-\sum_{k=0}^{2020}a_k(n-1)^k\ (\because ㉠)\\&=\sum_{k=0}^{2020}a_k\{n^k-(n-1)^k\}\\&=a_0\{n^0-(n-1)^0\}\\&\quad+a_1\{n^1-(n-1)^1\}\\&\quad+a_2\{n^2-(n-1)^2\}\\&\quad\vdots\\&\quad+a_{2020}\{n^{2020}-(n-1)^{2020}\}\\&=a_1+a_2(2n-1)+a_3(3n^2-3n+1)+\cdots\\&\quad+a_{2020}(2020n^{2019}-\cdots-1)\ (\text{단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\end{aligned}$$

위의 등식은 2 이상의 자연수 n에 대한 항등식이므로 양변의 n^{2019}의 계수는 서로 같다.

즉, $1=2020a_{2020}$이므로

$a_{2020}=\dfrac{1}{2020}$ 답 $\dfrac{1}{2020}$

14 해결단계

❶ 단계	S_n을 이용하여 a_n과 a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 관계식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 구한 후, b_n을 a_n에 관한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{b_k-1}=86$을 만족시키는 p의 값을 구한다.
❹ 단계	$(p+4)\times b_1\times b_3\times b_5\times b_7\times b_9\times b_{11}$의 값을 구한다.

(i) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(4n^2+pn)-\{4(n-1)^2+p(n-1)\}\\&=8n+p-4\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4+p$

(i), (ii)에서

$a_n=8n+p-4$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) $\cdots\cdots ㉠$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 8인 등차수열이므로 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+2}=2a_{k+1}$이 성립한다.

이차방정식 $a_kx^2-2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$에서

$a_kx^2-(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$

$(x-1)(a_kx-a_{k+2})=0 \qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이고 공차가 8인 등차수열이므로 $a_{k+2}>a_k$에서 $\dfrac{a_{k+2}}{a_k}>1$

즉, 이차방정식 $a_kx^2-2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$의 두 실근 중 큰 수는 $\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$이므로 $b_k=\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$ $\cdots\cdots ㉡$

$\dfrac{1}{b_k-1}=\dfrac{1}{\frac{a_{k+2}}{a_k}-1}=\dfrac{a_k}{a_{k+2}-a_k}=\dfrac{a_k}{16}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{b_k-1}&=\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{16}=\frac{1}{16}S_8\\&=\frac{1}{16}(4\times8^2+8p)\\&=16+\frac{p}{2}=86\end{aligned}$$

$\dfrac{p}{2}=70 \qquad \therefore\ p=140$

㉠에서 $a_n=8n+(140-4)=8n+136$이므로

$(p+4)\times b_1\times b_3\times b_5\times b_7\times b_9\times b_{11}$

$=144\times\dfrac{\cancel{a_3}}{a_1}\times\dfrac{\cancel{a_5}}{\cancel{a_3}}\times\dfrac{\cancel{a_7}}{\cancel{a_5}}\times\cdots\times\dfrac{a_{13}}{\cancel{a_{11}}}\ (\because ㉡)$

$=144\times\dfrac{a_{13}}{a_1}=144\times\dfrac{240}{144}=240$ 답 240

BLACKLABEL 특강 참고

등차수열과 등비수열의 합의 일반항

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 상수) 꼴, 즉 n에 대한 이차식이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 이때 $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이루고, $C\neq0$이면 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열을 이루며 공차는 n^2의 계수의 두 배인 $2A$이다.

또한, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 T_n이 $T_n=Ar^n+B$ ($r\neq0$, $r\neq1$, A, B는 상수) 꼴이면 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이다. 이때 $A+B=0$이면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이루고, $A+B\neq0$이면 수열 $\{b_n\}$은 제2항부터 등비수열을 이루며 공비는 지수 n의 밑인 r이다.

15 $S_n=n^2+6n$이므로

(i) $n\ge2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(n^2+6n)-\{(n-1)^2+6(n-1)\}\\&=2n+5\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1+6=7$

(i), (ii)에서

$a_n=2n+5$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+5)(2k+7)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+5}}-\frac{1}{2n+7}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2n+7}\right)=\frac{n}{7(2n+7)}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}<\frac{7}{100}$에서 $\frac{n}{7(2n+7)}<\frac{7}{100}$

$100n<98n+343$, $2n<343$

$\therefore n<171.5$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 171이다. 답 ⑤

16 직선 $y=nx+a_n$과 곡선 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$이 접하므로 이차방정식 $nx+a_n=x^2-x+\frac{1}{4}$, 즉 $x^2-(1+n)x+\frac{1}{4}-a_n=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(1+n)^2-4\left(\frac{1}{4}-a_n\right)=0$$

$n^2+2n+1-1+4a_n=0$, $4a_n=-n^2-2n$

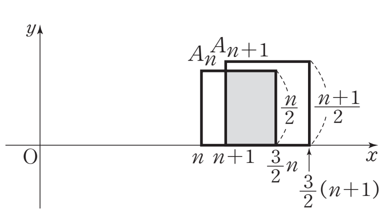
$$\therefore a_n=\frac{-n^2-2n}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{7}\frac{1}{|a_k|}$$
$$=\sum_{k=1}^{7}\frac{4}{k^2+2k}\ (\because\ a_k<0)$$
$$=4\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=4\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)\right\}$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)=\frac{91}{36}$$

따라서 $p=36$, $q=91$이므로

$p+q=127$ 답 127

17



위의 그림에서 어두운 부분의 세로의 길이는 정사각형 A_n의 세로의 길이인 $\frac{n}{2}$이고, 가로의 길이는 $\frac{3}{2}n-(n+1)=\frac{n-2}{2}$이므로 어두운 부분의 넓이는

$$a_n=\frac{n-2}{2}\times\frac{n}{2}=\frac{n(n-2)}{4}\ (\text{단, } n=3, 4, 5, \cdots)$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{10}\frac{4}{n(n-2)}=4\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{n(n-2)}$$
$$=4\times\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{10}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=2\times\frac{58}{45}$$
$$=\frac{116}{45}$$

답 ②

18 $a_n\neq0$인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 n에 대한 일차식으로 표현할 수 있으므로 $a_n=\alpha n+\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$a_{n+1}=\alpha(n+1)+\beta$

$\therefore a_{n+1}-a_n=\alpha$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 α이다.

한편, $a_na_{n+1}=(\alpha n+\beta)\{\alpha(n+1)+\beta\}$이므로

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(\alpha n+\beta)\{\alpha(n+1)+\beta\}}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha n+\beta}-\frac{1}{\alpha(n+1)+\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

즉,

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{1}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_2}}-\cancel{\frac{1}{a_3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{a_3}}-\cancel{\frac{1}{a_4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{a_{99}}}-\frac{1}{a_{100}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{100}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{a_1a_{100}}{a_ka_{k+1}}=a_1a_{100}\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\frac{a_1a_{100}}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{100}}\right)$$
$$=\frac{a_1a_{100}}{\alpha}\times\frac{a_{100}-a_1}{a_1a_{100}}$$
$$=\frac{a_{100}-a_1}{\alpha}$$

$$=\frac{100\alpha+\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha}\ (\because\ a_n=\alpha n+\beta)$$

$$=\frac{99\alpha}{\alpha}=99$$

답 99

19 각 항이 $2\sqrt{1}+\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}+3\sqrt{4}$, $\cdots$인 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\}\{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\}}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

소거할 때 계산하기 쉬운 형태로 변경

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이때

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\cdots$$

$$+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{10}{11}$$

이므로

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{11},\ \sqrt{n+1}=11$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$n+1=121\qquad\therefore\ n=120$

답 120

20 $a_n=\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}$이므로

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}$$

$$=\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{(\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1})+(\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1})\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(2\sqrt{2k})^2=\sum_{k=1}^{10}8k$$

$$=8\sum_{k=1}^{10}k=8\times\frac{10\times11}{2}$$

$$=440$$

답 440

21 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=n^2$에서 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=S_n$이라 하면

$S_n=n^2$이므로

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n^2=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

$\therefore\ a_n=\sqrt{2n-1}\ (\because\ a_n>0)$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1^2=S_1=1\qquad\therefore\ a_1=1\ (\because\ a_1>0)$

(i), (ii)에서

$a_n=\sqrt{2n-1}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{79}})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{1})$$

$$=\frac{1}{2}(9-1)=4$$

답 ②

22 $\frac{n(n+1)}{2}$의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, $\cdots$

이때 $\frac{n(n+1)}{2}$을 n으로 나눌 때의 나머지가 $f(n)$이므로

$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=0,\ f(4)=2,$

$f(5)=0,\ f(6)=3,\ f(7)=0,\ f(8)=4,\ \cdots$

$$\therefore\ f(n)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ \frac{n}{2} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}f(k)=f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(30)$$

$$(\because\ f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(29)=0)$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}+\cdots+\frac{30}{2}$$

$$=1+2+3+\cdots+15$$

$$=\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\times16}{2}$$

$$=120$$

답 120

• 다른 풀이 •

자연수 n에 대하여 $\frac{n(n+1)}{2}$을 n으로 나눌 때의 나머지가 $f(n)$이므로

(i) n이 홀수일 때,

$n=2p-1$ (p는 자연수)이라 하면

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2p-1)\times2p}{2}=p(2p-1)$$

이므로 $p(2p-1)$을 $2p-1$로 나눈 나머지는 0이다.

$\therefore f(n)=f(2p-1)=0$

(ii) n이 짝수일 때,

$n=2p$ (p는 자연수)라 하면

$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2p(2p+1)}{2}=p(2p+1)$

이므로 $2p^2+p$를 $2p$로 나눈 나머지는 p이다.

$\therefore f(n)=f(2p)=p$

(i), (ii)에서

$$\sum_{k=1}^{30} f(k)=\sum_{k=1}^{15} f(2k-1)+\sum_{k=1}^{15} f(2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{15} 0+\sum_{k=1}^{15} k$$
$$=\frac{15\times16}{2}=120$$

23 방정식 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

이때 $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$이고, ω^n의 실수부분이 $f(n)$이므로

$\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$에서 $f(1)=-\frac{1}{2}$,

$\omega^2=-\omega-1$에서 $f(2)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$,

$\omega^3=1$에서 $f(3)=1$,

$\omega^4=\omega^3\times\omega=\omega$에서 $f(4)=f(1)=-\frac{1}{2}$,

$\omega^5=\omega^3\times\omega^2=\omega^2$에서 $f(5)=f(2)=-\frac{1}{2}$,

⋮

즉, $f(n)$은 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 계속 반복된다.

따라서 $100=3\times33+1$이므로

$$\sum_{k=1}^{100} f(k)=\sum_{k=1}^{99} f(k)+f(100)$$
$$=33\sum_{k=1}^{3} f(k)+f(1)$$
$$=33\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

답 ②

24 $xy+96=8x+12y+5^n$에서

$x(y-8)-12(y-8)=5^n$

$(x-12)(y-8)=5^n$ ……㉠

이때 x, y가 정수이므로 $x-12$, $y-8$도 정수이다.

즉, $x-12$, $y-8$은 5^n의 양의 약수 또는 음의 약수이므로 ㉠에서 $x-12$가 될 수 있는 값은

5^0, 5^1, 5^2, …, 5^n 또는 -5^0, -5^1, -5^2, …, -5^n

또한, 각 $x-12$의 값에 따라 $y-8$의 값도 하나씩 정해지므로 정수 x, y의 순서쌍의 개수 a_n은

$a_n=(n+1)\times2=2(n+1)$

$\therefore a_{2k-1}=2(2k-1+1)=4k$

따라서 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{5} ka_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5} 4k^2=4\sum_{k=1}^{5} k^2=4\times\frac{5\times6\times11}{6}=220$$

답 220

25 N을 n으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 각각 Q, R라 하면

$N=n\times Q+R$ (단, $0\le R<n$)

이때 몫과 나머지의 합이 n이어야 하므로

$Q+R=n \qquad \therefore R=n-Q$

$\therefore N=n\times Q+(n-Q)$ (단, $0<Q\le n$)

a_n은 n으로 나누었을 때, 몫과 나머지의 합이 n인 자연수들의 합이므로

$$a_n=\{n\times1+(n-1)\}+\{n\times2+(n-2)\}+\{n\times3+(n-3)\}+\cdots+\{n\times(n-1)+1\}+(n\times n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{n\times k+(n-k)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(n-1)k+n\}$$
$$=(n-1)\times\frac{n(n+1)}{2}+n^2$$
$$=\frac{n^3+2n^2-n}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{10} a_k=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+2k^2-k}{2}$$
$$=\frac{1}{22}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{22}(3025+770-55)$$
$$=170$$

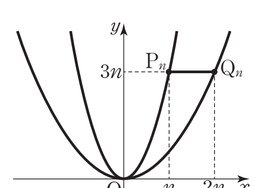
답 ③

26 함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가 점 $P_n(n,\ 3n)$을 지날 때

$3n=\frac{1}{k}\times n^2$에서 $k=\frac{1}{3}n$이고, 점 $Q_n(2n,\ 3n)$을 지날 때 $3n=\frac{1}{k}\times4n^2$에서 $k=\frac{4}{3}n$이므로

선분 P_nQ_n과 곡선 $y=\frac{1}{k}x^2$이 만나기 위한 k의 값의 범위는

$\frac{1}{3}n\le k\le\frac{4}{3}n$ ……㉠



n은 자연수이므로 자연수 m에 대하여 다음과 같이 나누어 생각해 보자.

(ⅰ) $n=3m-2$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}(3m-2)\le k\le\frac{4}{3}(3m-2)$

$\therefore m-\frac{2}{3}\le k\le 4m-2-\frac{2}{3}$

이때 m, $4m-2$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $m, m+1, m+2, \cdots, 4m-3$

$4m-2-m=3m-2$

(ⅱ) $n=3m-1$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}(3m-1)\le k\le\frac{4}{3}(3m-1)$

$\therefore m-\frac{1}{3}\le k\le 4m-1-\frac{1}{3}$

이때 m, $4m-1$은 자연수이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $m, m+1, m+2, \cdots, 4m-2$

$4m-1-m=3m-1$

(ⅲ) $n=3m$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}\times 3m\le k\le\frac{4}{3}\times 3m$

$\therefore m\le k\le 4m$

이때 m, $4m$은 자연수이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $m, m+1, m+2, \cdots, 4m$

$4m+1-m=3m+1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\sum_{n=1}^{17}a_n=\sum_{n=1}^{6}a_{3n-2}+\sum_{n=1}^{6}a_{3n-1}+\sum_{n=1}^{5}a_{3n}$$
$$=\sum_{n=1}^{6}(3n-2)+\sum_{n=1}^{6}(3n-1)+\sum_{n=1}^{5}(3n+1)$$
$$=3\times\frac{6\times 7}{2}-6\times 2+3\times\frac{6\times 7}{2}-6+3\times\frac{5\times 6}{2}+5$$
$$=63-12+63-6+45+5$$
$$=158$$

답 ④

27 $15(k-1)+1\le n\le 15k$ (k는 자연수)를 만족시키는 자연수 n 중에서 15와 서로소인 자연수는

$15(k-1)+1$, $15(k-1)+2$, $15(k-1)+4$,
$15(k-1)+7$, $15(k-1)+8$, $15(k-1)+11$,
$15(k-1)+13$, $15(k-1)+14$의 8개이다.

$8\times 2=16$이므로 a_{16}은 $16\le n\le 30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중에서 가장 큰 수이다.

즉, $\sum_{n=1}^{16}a_n$은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이고, 1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있으므로

$$\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{30}n-\sum_{n=1}^{10}3n-\sum_{n=1}^{6}5n+\sum_{n=1}^{2}15n$$
$$=\frac{30\times 31}{2}-3\times\frac{10\times 11}{2}-5\times\frac{6\times 7}{2}+15\times\frac{2\times 3}{2}$$
$$=465-165-105+45=240$$

답 ①

• 다른 풀이 •

15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 구하면

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=7$, $a_5=8$, $a_6=11$, $a_7=13$, $a_8=14$, $\cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{8}a_n=1+2+4+7+8+11+13+14=60$

이때 14 이하의 자연수 k가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15$, $a_{10}=a_2+15$, $\cdots$, $a_{16}=a_8+15$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{16}a_n$$
$$=2\sum_{n=1}^{8}a_n+15\times 8$$
$$=2\times 60+120$$
$$=240$$

28 집합 $A_n=\{x\,|\,(x-n)(x-2n+1)\le 0\}$이므로

$(x-n)(x-2n+1)\le 0$에서 $n\le x\le 2n-1$

$\therefore A_n=\{x\,|\,n\le x\le 2n-1\}$

$25\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면

$n\le 25\le 2n-1$

$n\le 25$이고, $25\le 2n-1$에서 $n\ge 13$이므로

$13\le n\le 25$

$$\therefore a_n=\begin{cases}-1 & (1\le n\le 12 \text{ 또는 } n\ge 26)\\ 1 & (13\le n\le 25)\end{cases}$$

한편,

$\sum_{k=1}^{12}a_k=(-1)\times 12=-12$,

$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k=(-1)\times 12+1\times 13=1$

이므로 $\sum_{k=1}^{m}a_k=-20$이려면 $m\ge 26$이어야 한다.

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k+\sum_{k=26}^{m}a_k$$
$$=(-1)\times 12+1\times 13+(-1)\times(m-25)$$
$$=-m+26=-20$$

$\therefore m=46$

답 46

29 주어진 수열을

$(1, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(3, 0, 0, 0)$, $(4, 0, 0, 0, 0)$, $\cdots$

과 같이 군수열로 생각하면 제n군의 0의 개수는 n이므로

제1군부터 제n군까지 0의 개수는 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이다.

$n=13$일 때, 즉 제13군까지는 0이 $\frac{13\times 14}{2}=91$(개)이므로 100번째로 나타나는 0은 제14군의 10번째 항이다.

제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13}(k+1)=\sum_{k=1}^{13}k+\sum_{k=1}^{13}1=\frac{13\times 14}{2}+13=104(\text{개})$$

이므로 100번째로 나타나는 0은 $104+10=114$에서 제114항이다.

답 ①

• 다른 풀이 1 •

주어진 수열을

(1), (0, 2), (0, 0, 3), (0, 0, 0, 4), ⋯

와 같이 군수열로 생각하면 제n군의 0의 개수는 $n-1$이므로 제1군부터 제n군까지의 0의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$$

이때 $n=14$일 때, 즉 제14군까지는 0이 $\frac{13\times14}{2}=91$(개)이므로 100번째로 나타나는 0은 제15군의 9번째 항이다.

제1군부터 제14군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{14}k=\frac{14\times15}{2}=105$(개)이므로

100번째로 나타나는 0은 $105+9=114$에서 제114항이다.

• 다른 풀이 2 •

주어진 수열을

(1, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0), ⋯

과 같이 군수열로 생각하면 제n군에서 0이 아닌 수는 제n군의 첫 번째 수인 n뿐이다.

100번째로 나타나는 0이 제14군에 있고, 이 앞에 0이 아닌 수는 각 군의 첫 번째 항인 1, 2, 3, ⋯, 14이므로 100번째로 나타나는 0은 $100+14=114$에서 제114항이다.

30

n행에 놓인 수의 합을 A_n이라 하면

$$\begin{aligned}A_n&=(n+1)+2(n+1)+3(n+1)+\cdots+n(n+1)\\&=(n+1)(1+2+3+\cdots+n)\\&=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(n^3+2n^2+n)\end{aligned}$$

상자 안의 수는 모두 10행이므로 그 총합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}A_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}(k^3+2k^2+k)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}(3025+770+55)=1925\end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른 풀이 •

n행에 놓인 수는 첫째항이 $n+1$, 공차가 $n+1$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 수이다.

n행에 놓인 수의 합을 A_n이라 하면

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{n\{2(n+1)+(n-1)(n+1)\}}{2}\\&=\frac{n(n^2+2n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(n^3+2n^2+n)\end{aligned}$$

따라서 1행부터 10행에 놓인 수의 총합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}A_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}(k^3+2k^2+k)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}(3025+770+55)=1925\end{aligned}$$

31

주어진 수열을

$(1),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \cdots$

과 같이 군수열로 생각하면 제n군의 최솟값은 $\frac{1}{n}$이므로

처음으로 $\frac{1}{20}$보다 작아지는 항은 $\frac{1}{21}$이고, $\frac{1}{21}$은 제21군의 마지막 항이다. $\frac{1}{20}<\frac{2}{21}$이므로

따라서 제1군부터 제21군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{21}k=\frac{21\times22}{2}=231$이므로 $\frac{1}{21}$은 231번째 항이다.

$\therefore\ m=231$

답 231

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 88

01 $\frac{1}{101}$	02 5166	03 ④	04 $\frac{81}{55}$	05 100
06 7	07 2144	08 184		

01

해결단계

❶ 단계	$\left\{x-\frac{1}{k(k+1)}\right\}^2$을 전개하여 $f(x)$를 x에 대한 이차식으로 나타낸 후, 부분분수 분해를 이용하여 x의 계수를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 완전제곱 꼴로 변형하여 $f(x)$의 값이 최소가 되는 x의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{100}\left\{x-\frac{1}{k(k+1)}\right\}^2\\&=\sum_{k=1}^{100}\left\{x^2-\frac{2}{k(k+1)}x+\frac{1}{k^2(k+1)^2}\right\}\\&=100x^2-2x\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2(k+1)^2}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{100}}-\frac{1}{101}\right)\\&=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=100x^2-\frac{200}{101}x+\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2(k+1)^2}\\&=100\left(x-\frac{1}{101}\right)^2-\frac{100}{101^2}+\underbrace{\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2(k+1)^2}}_{\text{상수}}\end{aligned}$$

즉, x^2의 계수가 양수이므로 이차함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{101}$일 때 최솟값을 갖는다.

답 $\frac{1}{101}$

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이 문제는 $\sum_{k=1}^{100}$을 보고 직접 일일이 계산하는 것이 아니라, 소거를 통해 간단하게 정리할 수 있는 규칙성을 찾는 것이 중요하다. 전개를 하면 $f(x)=100x^2-2x\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k^2(k+1)^2}$인데 이차함수가 최솟값을 가질 때의 x의 값은 x^2항과 x항만 관련이 있으므로 상수항은 복잡한 경우 무시하도록 한다. 또한, $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$을 부분분수 분해를 이용하여 간단하게 정리하면 $f(x)=100x^2-\frac{200}{101}x+C$ (C는 상수항)이므로 주어진 이차함수가 최솟값을 가질 때의 x의 값은 식을 완전제곱 꼴로 변형하면 쉽게 구할 수 있다.

02 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 n 대신에 $n+3$을 대입한다.
❷ 단계	$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$로 치환한 후, ❶단계에서 구한 식과 주어진 식을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{k=0}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3})$의 값을 구한다.

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=8n+4$ ……㉠

㉠의 n 대신에 $n+3$을 대입하면

$a_{n+3}+a_{n+4}+a_{n+5}+a_{n+6}=8(n+3)+4$

$=8n+28$ ……㉡

㉡－㉠을 하면

$a_{n+4}+a_{n+5}+a_{n+6}-(a_n+a_{n+1}+a_{n+2})=24$

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=b_n$으로 놓으면

$b_{n+4}-b_n=24$

자연수 n에 대하여 수열 $\{b_{4n+m}\}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ 3)$은 공차가 24인 등차수열이다.

이때 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=b_n$에 $n=1$을 대입하면

$b_1=a_1+a_2+a_3=1+2+3=6$

$\therefore\ b_5=b_1+24=6+24=30$

따라서 수열 $\{b_{4n+1}\}$은 첫째항이 $b_5=30$이고 공차가 24인 등차수열이므로

$b_{4n+1}=30+24(n-1)=24n+6$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3})=\sum_{k=0}^{20}b_{4k+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{20}(24k+6)$$
$$=6+\sum_{k=1}^{20}(24k+6)$$
$$=6+24\times\frac{20\times21}{2}+20\times6$$
$$=6+5040+120=5166$$

답 5166

• 다른 풀이 1 •

$T_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

이라 하면 수열 $\{T_n\}$은 공차가 8인 등차수열이고

$$T_{n+1}-T_n=(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4})-(a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3})$$
$$=a_{n+4}-a_n$$

이므로

$a_{n+4}-a_n=8$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

이때 $n=4k$ (k는 자연수)라 하면 $a_{4k+4}-a_{4k}=8$, 즉 $a_{4(k+1)}-a_{4k}=8$이므로 수열 $\{a_{4k}\}$도 공차가 8인 등차수열이다.

주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=12$

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$이므로

$1+2+3+a_4=12$ $\quad\therefore\ a_4=6$

$\therefore\ a_{4k}=6+8(k-1)=8k-2$

$$\therefore\ \sum_{k=0}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3})$$
$$=a_1+a_2+a_3+\sum_{k=1}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3})$$
$$=6+\sum_{k=1}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k})-\sum_{k=1}^{20}a_{4k}$$
$$=6+\sum_{k=1}^{20}T_{4k}-\sum_{k=1}^{20}a_{4k}$$
$$=6+\sum_{k=1}^{20}(\underbrace{32k+4}_{=8\times4k+4})-\sum_{k=1}^{20}(8k-2)$$
$$=6+\sum_{k=1}^{20}(24k+6)$$
$$=6+24\times\frac{20\times21}{2}+20\times6$$
$$=6+5040+120=5166$$

• 다른 풀이 2 •

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=8n+4$ ……㉢

㉢의 n 대신에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}=8n+12$ ……㉣

㉣－㉢을 하면

$a_{n+4}-a_n=8$

또한, $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$이므로

$$\sum_{k=0}^{20}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3})$$
$$=(a_1+a_2+a_3)+(a_5+a_6+a_7)+(a_9+a_{10}+a_{11})+\cdots+(a_{81}+a_{82}+a_{83})$$
$$=(a_1+a_5+a_9+\cdots+a_{81})+(a_2+a_6+a_{10}+\cdots+a_{82})+(a_3+a_7+a_{11}+\cdots+a_{83})$$
$$=\frac{21\times(2\times1+8\times20)}{2}+\frac{21\times(2\times2+8\times20)}{2}+\frac{21\times(3\times2+8\times20)}{2}$$
$$=1701+1722+1743$$
$$=5166$$

03 해결단계

❶ 단계	주어진 일반항 a_n을 이용하여 $\sum_{k=1}^{m}a_k$를 m을 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 자연수가 되도록 하는 조건을 구한다.
❸ 단계	주어진 조건을 만족시키는 m의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times2}{3}+\log_2\frac{2\times3}{4}+\log_2\frac{2\times4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times2}{\cancel{3}}\times\frac{2\times\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{2\times\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{2\times(\cancel{m+1})}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{m}a_k=N$ (N은 100 이하의 자연수)이라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N$에서 $\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N}$

$\therefore m+2=2^{m+1-2N}$

m은 자연수이므로 $m+2\geq3$

즉, $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(i) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때,

$2^{3-2N}=2^2$이므로 $3-2N=2$ $\quad\therefore N=\frac{1}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq2$

(ii) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때,

$2^{7-2N}=2^3$이므로 $7-2N=3$ $\quad\therefore N=2$

(iii) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때,

$2^{15-2N}=2^4$이므로 $15-2N=4$ $\quad\therefore N=\frac{11}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq14$

(iv) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때,

$2^{31-2N}=2^5$이므로 $31-2N=5$ $\quad\therefore N=13$

(v) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때,

$2^{63-2N}=2^6$이므로 $63-2N=6$ $\quad\therefore N=\frac{57}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq62$

(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때,

$2^{127-2N}=2^7$이므로 $127-2N=7$ $\quad\therefore N=60$

(vii) $m+2\geq2^8$일 때, $N>100$

(i)~(vii)에서 $m=6$, 30, 126이므로

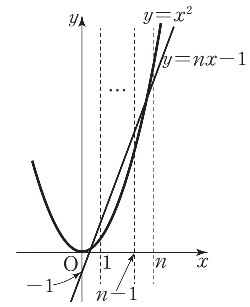
모든 m의 값의 합은

$6+30+126=162$ 답 ④

04 해결단계

❶ 단계	두 그래프로 둘러싸인 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 x좌표를 a (a는 자연수)라 하고, 각 a의 값에 따라 y좌표가 자연수인 점의 개수를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 일반항 a_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값을 구한다.

좌표평면 위에 두 함수 $y=x^2$, $y=nx-1$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



두 그래프로 둘러싸인 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점 가운데 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표를 a ($a<n$)* 라 하면 구하는 점의 y좌표는 a^2보다 크거나 같고, $na-1$보다 작거나 같은 자연수이다. 즉,

$a=1$일 때 y좌표로 가능한 값은

$1^2=1$, 2, 3, $\cdots$, $n-1$의 $(n-1)$개,

$a=2$일 때 y좌표로 가능한 값은

$2^2=4$, 5, 6, $\cdots$, $2n-1$의 $(2n-4)$개,

⋮

$a=k$일 때 y좌표로 가능한 값은

k^2, k^2+1, k^2+2, $\cdots$, $nk-1$의 $(nk-k^2)$개이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)$$
$$=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=2}^{10}\frac{6}{k(k-1)(k+1)}$$
$$=6\times\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{10}\left\{\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$
$$=3\left\{\left(\frac{1}{1\times2}-\cancel{\frac{1}{2\times3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\times3}}-\cancel{\frac{1}{3\times4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3\times4}}-\cancel{\frac{1}{4\times5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9\times10}}-\frac{1}{10\times11}\right)\right\}$$
$$=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right)$$
$$=3\times\frac{54}{110}$$
$$=\frac{81}{55}$$

답 $\frac{81}{55}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$a=n-1$일 때,

$(n-1)^2=n^2-2n+1$, $n(n-1)-1=n^2-n-1$이고

$n^2-2n+1-(n^2-n-1)=-n+2\leq0$ ($\because$ n은 2 이상의 자연수)

이므로

$(n-1)^2\leq n(n-1)-1$

$a=n$일 때,

$n^2>n^2-1$

이므로 두 그래프로 둘러싸인 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점 가운데 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표인 a의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$이다.

05 해결단계

❶ 단계	$S_n=a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3$, $T_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$으로 치환한 후, 수열의 합과 일반항 사이의 관계식을 이용하여 a_n^3을 a_n과 T_n에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식과 이 식의 n 대신에 $n-1$을 대입한 식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한 후, a_{100}의 값을 구한다.

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2$ ······㉠

에서

$S_n=a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3$, $T_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

이라 하면 $S_n=T_n^2$이고

$n\ge 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n^3&=S_n-S_{n-1}\\&=T_n^2-T_{n-1}^2\\&=(T_n-T_{n-1})(T_n+T_{n-1})\\&=a_n(T_n+T_{n-1})\end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$이 양의 실수로 이루어져 있으므로 위의 식의 양변을 a_n으로 나누면

$a_n^2=T_n+T_{n-1}$, $a_n^2=T_n+T_n-a_n$

$\therefore a_n^2=2T_n-a_n$ ······㉡

위의 식의 n 대신에 $n-1$을 대입하면

$a_{n-1}^2=2T_{n-1}-a_{n-1}$ ······㉢

㉡－㉢을 하면

$$\begin{aligned}a_n^2-a_{n-1}^2&=2(T_n-T_{n-1})-a_n+a_{n-1}\\&=2a_n-a_n+a_{n-1}\end{aligned}$$

$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$

$\therefore a_n-a_{n-1}=1$ ($\because a_n+a_{n-1}>0$)

한편, ㉠의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_1^3=a_1^2$ $\quad\therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고, 공차가 1인 등차수열이다.

따라서 $a_n=n$이므로

$a_{100}=100$ **답** 100

BLACKLABEL 특강 참고

이 문제는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식 사이의 관계를 이용한 문제이다.

$\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)^2$

이때 $k=a_k$라 하면 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^2$, 즉

$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2$

이 성립하므로 $a_n=n$이다.

06 해결단계

❶ 단계	$0<\frac{1}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$을 $\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{3}$로 변형한다.
❷ 단계	부등식의 각 변에 5를 계속 곱하여 자연수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 값을 차례대로 구한 후 수열 $\{a_n\}$의 규칙성을 찾는다.
❸ 단계	$a_{2020}+a_{2021}+a_{2022}$의 값을 구한다.

$0<\dfrac{1}{3}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{5^k}<\dfrac{1}{5^n}$에서

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5^n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{5^k}<\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5^n}<\dfrac{a_1}{5}+\dfrac{a_2}{5^2}+\dfrac{a_3}{5^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^n}<\dfrac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{5^{n-1}}<a_1+\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^{n-1}}<\dfrac{5}{3}$ ······㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $\dfrac{2}{3}<a_1<\dfrac{5}{3}$이므로

$a_1=1$ ($\because a_1$은 자연수)

㉠의 각 변에서 1을 빼면

$\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{5^{n-1}}<\dfrac{a_2}{5}+\dfrac{a_3}{5^2}+\dfrac{a_4}{5^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^{n-1}}<\dfrac{2}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{5^{n-2}}<a_2+\dfrac{a_3}{5}+\dfrac{a_4}{5^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^{n-2}}<\dfrac{10}{3}$ ······㉡

㉡에 $n=2$를 대입하면 $\dfrac{7}{3}<a_2<\dfrac{10}{3}$이므로

$a_2=3$ ($\because a_2$는 자연수)

㉡의 각 변에서 3을 빼면

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5^{n-2}}<\dfrac{a_3}{5}+\dfrac{a_4}{5^2}+\dfrac{a_5}{5^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^{n-2}}<\dfrac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{5^{n-3}}<a_3+\dfrac{a_4}{5}+\dfrac{a_5}{5^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{5^{n-3}}<\dfrac{5}{3}$

위의 식에 $n=3$을 대입하면 $\dfrac{2}{3}<a_3<\dfrac{5}{3}$이므로

$a_3=1$ ($\because a_3$은 자연수)

같은 방법으로 계속하면

$a_4=3$, $a_5=1$, $a_6=3$, $\cdots$

$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n\text{이 홀수})\\ 3 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$\therefore a_{2020}+a_{2021}+a_{2022}=3+1+3=7$ **답** 7

07 해결단계

❶ 단계	다항식 $n^4+3n^3-129n^2+14n+35$를 $n+13$으로 나눈 몫과 나머지를 각각 구한다.
❷ 단계	n의 값의 범위에 따른 일반항 a_n을 구한다.
❸ 단계	$\sum\limits_{n=1}^{15}a_n$의 값을 구한다.

다항식 $n^4+3n^3-129n^2+14n+35$를 $n+13$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

-13	1	3	-129	14	35
		-13	130	-13	-13
	1	-10	1	1	22

에서

$n^4+3n^3-129n^2+14n+35$

$=(n+13)(n^3-10n^2+n+1)+22$

이므로

$$\frac{n^4+3n^3-129n^2+14n+35}{n+13}$$
$$=\frac{(n+13)(n^3-10n^2+n+1)+22}{n+13}$$
$$=(n^3-10n^2+n+1)+\frac{22}{n+13}$$
$$\therefore\ a_n=\left[\frac{n^4+3n^3-129n^2+14n+35}{n+13}\right]$$
$$=n^3-10n^2+n+1+\left[\frac{22}{n+13}\right]$$

이때 n의 값에 따라 $\left[\frac{22}{n+13}\right]$의 값이 달라지므로

$1\le n\le 15$에서 a_n은 다음과 같이 구간을 나누어 구한다.

(i) $1\le n\le 9$일 때,

$14\le n+13\le 22$에서 $1\le\frac{22}{n+13}\le\frac{11}{7}$

즉, $\left[\frac{22}{n+13}\right]=1$이므로

$a_n=n^3-10n^2+n+2$

(ii) $10\le n\le 15$일 때,

$23\le n+13\le 28$에서 $\frac{11}{14}\le\frac{22}{n+13}\le\frac{22}{23}$

즉, $\left[\frac{22}{n+13}\right]=0$이므로

$a_n=n^3-10n^2+n+1$

(i), (ii)에서

$$a_n=\begin{cases}n^3-10n^2+n+2 & (1\le n\le 9)\\ n^3-10n^2+n+1 & (10\le n\le 15)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{15}a_n$$
$$=\sum_{n=1}^{9}(n^3-10n^2+n+2)+\sum_{n=10}^{15}(n^3-10n^2+n+1)$$
$$=\sum_{n=1}^{9}(n^3-10n^2+n+1)+9+\sum_{n=10}^{15}(n^3-10n^2+n+1)$$
$$=\sum_{n=1}^{15}(n^3-10n^2+n+1)+9$$
$$=\left(\frac{15\times16}{2}\right)^2-10\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{15\times16}{2}+15+9$$
$$=14400-12400+120+15+9$$
$$=2144$$

답 2144

08 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 집합 A에 속하지 않는 원소를 $a_i\ (1\le i\le 15)$를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	두 집합 A, A^C의 모든 원소의 제곱의 합이 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같음을 식으로 나타낸다.
❸ 단계	조건 (나)와 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 $\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 집합 A의 임의의 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i\ (1\le i\le 15)$로 나타낼 수 있다.

따라서 $\sum_{i=1}^{15}a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다. 즉,

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30}i^2$$
$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31^2-62a_i+a_i^2)=\frac{30\times31\times61}{6}$$

이때 조건 (나)에서 $\sum_{i=1}^{15}a_i=264$이므로

$$2\sum_{i=1}^{15}a_i^2+15\times31^2-62\times264=5\times31\times61$$
$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{2}(5\times31\times61-15\times31^2+62\times264)$$
$$=\frac{31}{2}(5\times61-15\times31+2\times264)$$
$$=\frac{31}{2}(305-465+528)$$
$$=31\times184$$
$$\therefore\ \frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{31}\times31\times184=184$$

답 184

BLACKLABEL 특강 참고

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 $(1, 30)$, $(2, 29)$, $\cdots$, $(15, 16)$이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 주어진 조건을 만족시키는 집합 A는 여러 개가 있는데, 위의 방법을 이용하여 집합 A 중에서 하나를 구해보면 다음과 같다.
$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$

이것이 수능 p. 89

1 ③　2 ①　3 ③　4 395

1 해결단계

❶ 단계	n의 값의 범위에 따른 $f(n)$의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	$\sum_{n=2}^{10}f(n)$의 값을 구한다.

$(n-5)$의 n제곱근은 방정식 $x^n=n-5$를 만족시키는 x의 값이므로 이 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하면 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $2\le n\le 4$일 때,

$n-5<0$이므로 n이 짝수이면 실수인 것은 없고, n이 홀수이면 실수인 것은 $\sqrt[n]{n-5}$이다.

$\therefore\ f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0$

(ii) $n=5$일 때,

$n-5=0$이므로 실수인 것은 0이다.

$\therefore\ f(5)=1$

(iii) $6\le n\le 10$일 때,

$n-5>0$이므로 n이 짝수이면 실수인 것은 $\sqrt[n]{n-5}$, $-\sqrt[n]{n-5}$이고, n이 홀수이면 실수인 것은 $\sqrt[n]{n-5}$이다.

$\therefore f(6)=2,\ f(7)=1,\ f(8)=2,\ f(9)=1,$
$f(10)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\sum_{n=2}^{10} f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$ 　　답 ③

2 해결단계

❶ 단계	36의 양의 약수를 나열하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$의 값을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 각 a_k에 따른 $f(a_k)$의 값이 홀수인지 짝수인지 판단한다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$의 값을 구한다.

36의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다.
이때 $f(1), f(4), f(9), f(36)$은 홀수,
$f(2), f(3), f(6), f(12), f(18)$은 짝수이므로

$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$
$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 4+\log 6-\log 9$
$+\log 12+\log 18-\log 36$
$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$
$=\log 6$
$=\log 2+\log 3$ 　　답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

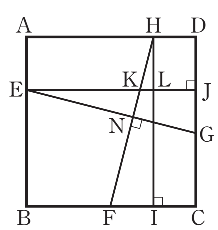
제곱수의 약수의 개수

(1) 소수의 제곱수의 약수의 개수는 3이다.
(2) 자연수의 제곱수의 약수의 개수는 홀수이다.

3 해결단계

❶ 단계	점 H에서 변 BC, 점 E에서 변 CD에 수선의 발을 각각 내린다.
❷ 단계	$\overline{EG}=\overline{HF}$임을 확인한다.
❸ 단계	S_n을 n에 대한 식으로 나타낸 후, $\sum_{n=1}^{10}S_n$의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 점 H에서 변 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 E에서 변 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자.



두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고, 선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하자.
△HKL과 △EKN에서
∠HKL=∠EKN이고 ∠KLH=∠KNE=90°이므로
△HKL∽△EKN (AA 닮음)
∴ ∠KHL=∠KEN

또한, $\overline{HI}=\overline{EJ}$이고 △HKL∽△HFI (AA 닮음)이므로
△HFI≡△EGJ (ASA 합동)
따라서 $\overline{EG}=\overline{HF}=\sqrt{4n^2+1}$이므로

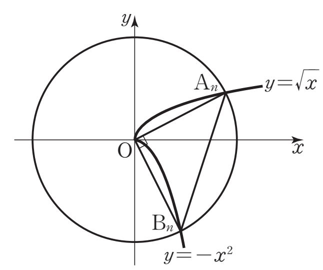
$S_n=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{4n^2+1}$
$=\dfrac{4n^2+1}{2}$
$=2n^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+\dfrac{1}{2}\right)$
$=2\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+\dfrac{1}{2}\times10$
$=770+5$
$=775$ 　　답 ③

4 해결단계

❶ 단계	곡선 $y=-x^2\ (x\ge0)$을 원점에 대하여 90°만큼 회전시킨 그래프가 곡선 $y=\sqrt{x}$와 같음을 확인하여 $\triangle A_nOB_n$이 직각이등변삼각형임을 보인다.
❷ 단계	S_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2S_n}{n^2}$의 값을 구한다.

$\overline{OA_n}=\overline{OB_n}$이므로 두 점 A_n, B_n은 중심이 O인 원 위의 점이다.
이 원의 반지름의 길이는
$\overline{OA_n}=\sqrt{n^4+n^2}=n\sqrt{n^2+1}$
이때 다음 그림과 같이 곡선 $y=-x^2\ (x\ge0)$을 원점 O에 대하여 90°만큼 회전시킨 그래프는 곡선 $y=\sqrt{x}$와 같으므로
$\angle A_nOB_n=90°$



즉, $\triangle A_nOB_n$은 직각이등변삼각형이므로

$S_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times\overline{OB_n}$
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA_n}^2$
$=\dfrac{1}{2}n^2(n^2+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\dfrac{2S_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2\times\frac{1}{2}n^2(n^2+1)}{n^2}$
$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)$
$=\dfrac{10\times11\times21}{6}+10$
$=385+10$
$=395$ 　　답 395

10 수학적 귀납법

STEP 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 91

01 ③	02 ③	03 297	04 ④	05 ④
06 ③	07 풀이 참조			

01 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1=28$, $a_3=22$이므로

$28+2d=22$

$2d=-6 \qquad \therefore d=-3$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=28+(n-1)\times(-3)$

$\quad=-3n+31$

$\therefore a_6=-3\times6+31=13$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$=a_n=-3n+31$ (참)

ㄷ. $a_n=-3n+31<0$에서

$n>\frac{31}{3}=10.3\times\times\times$

즉, 수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

02 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 이 수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=90 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=1530 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{\frac{a(r^8-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{1530}{90}$, $\frac{r^8-1}{r^4-1}=17$

$\frac{(r^4+1)(r^4-1)}{r^4-1}=17$, $r^4+1=17$

$r^4=16 \qquad \therefore r=-2$ 또는 $r=2$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r>0$

$\therefore r=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=90$, $15a=90 \qquad \therefore a=6$

$\therefore S_{10}=\frac{6(2^{10}-1)}{2-1}=6\times1023=6138$ 답 ③

03 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1}$의 양변의 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{a_n} \qquad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 1인 등차수열이므로 일반항 $\frac{1}{a_n}$은

$\frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n \qquad \therefore a_n=\frac{1}{n}$

$A=\sum_{k=1}^{9}a_ka_{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$B=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{9}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}$

$=330$

$\therefore AB=\frac{9}{10}\times330=297$ 답 297

04 $b_{n+1}=b_n+4$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=3$, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 b_n은

$b_n=3+(n-1)\times4$

$\quad=4n-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_n+b_n-a_{n+1}=0$에 ㉠을 대입하면

$a_n+4n-1-a_{n+1}=0$

$\therefore a_{n+1}=a_n+4n-1$

위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$, 10을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+3\\ \cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+7\\ \cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+11\\ &\ \vdots\\ +)\ a_{11}&=\cancel{a_{10}}+39\\ \hline a_{11}&=a_1+3+7+11+\cdots+39\end{aligned}$$

$=a_1+\sum_{k=1}^{10}(4k-1)$

$=2+4\times\frac{10\times11}{2}-10$ ($\because a_1=2$)

$=212$ 답 ④

05 $a_{n+1}=(2n-1)a_n$의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례

대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=1\times a_1$$
$$\cancel{a_3}=3\times \cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=5\times \cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=(2n-3)\times \cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-3)\times a_1 \text{ (단, } n\ge2)$$
$$=1\times3\times5\times7\times\cdots\times(2n-3)\ (\because a_1=1)$$

한편, $a_5=1\times3\times5\times7=105$이므로 5 이상의 자연수 k에 대하여 a_k는 모두 105로 나누어떨어진다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020}$을 105로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 105로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+3+15=20$이므로 구하는 나머지는 20이다. **답** ④

06

$2a_{n+1}=a_n+3$에서 $\overset{a_{n+1}=pa_n+q\text{에서 } p\neq1,\ pq\neq0}{\underline{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}}}$ ……㉠

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$라 하면 $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$

위의 식이 ㉠과 같으므로

$$p=\frac{1}{2},\ -p\alpha+\alpha=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\alpha+\alpha=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\alpha=\frac{3}{2} \qquad \therefore \alpha=3$$

$$\therefore a_{n+1}-3=\frac{1}{2}(a_n-3)$$

즉, 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=4-3=1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-3=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore a_n=3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$a_n>\frac{193}{64}$에서 $3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>\frac{193}{64}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}>\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6},\ n-1<6$$

$$\therefore n<7$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 6이다. **답** ③

> **BLACKLABEL 특강** 풀이 첨삭
>
> $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq1,\ pq\neq0)$ 꼴의 귀납적 정의에서 점화식을 변형하는 방법은 다음과 같다.
>
> (i) $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 놓고 식을 정리하면
> $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$
>
> (ii) $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$와 $a_{n+1}=pa_n+q$가 같은 식을 나타내어야 하므로 $-p\alpha+\alpha=q$, 즉 $\alpha=\frac{q}{1-p}$로부터 α의 값을 구한다.

07

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$에서

(좌변)$=$(우변)$=\boxed{2}$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3} \qquad \cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+\boxed{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\boxed{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) : 2, (나) : $(k+1)(k+2)$,

(다) : $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ **답** 풀이 참조

STEP 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 92~94

01 8	02 105	03 ⑤	04 $-\frac{1}{2}$	05 31
06 ④	07 624	08 ④	09 ②	10 ②
11 ②	12 158	13 0	14 ⑤	15 54
16 ③	17 풀이 참조	18 풀이 참조	19 ④	20 풀이 참조

01

$a_{n+1}{}^2+4a_n{}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$에서

$(a_1-2)^2+a_{n+1}{}^2-4a_{n+1}a_n+4a_n{}^2=0$

$\therefore (a_1-2)^2+(a_{n+1}-2a_n)^2=0$

이때 a_n, a_{n+1}은 실수이므로

$a_1-2=0$, $a_{n+1}-2a_n=0$

$\therefore a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$$

이때 $\sum_{k=1}^{m}a_k=510$이므로

$$\sum_{k=1}^{m}2^k=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=2^{m+1}-2=510$$

즉, $2^{m+1}=512=2^9$이므로

$m+1=9 \qquad \therefore m=8$ **답** 8

02

$a_{n+1}a_n-2a_{n+2}a_n+a_{n+1}a_{n+2}=0$의 양변을 $a_na_{n+1}a_{n+2}$로 나누면

$$\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}=0 \qquad \therefore \frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$, 공차가

$\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$인 등차수열이므로 일반항 $\dfrac{1}{a_n}$은

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{20\times21}{2}=105$$

답 105

03

ㄱ. $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$a_2=\frac{4a_1-2}{a_1+1}=\frac{12-2}{3+1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$a_3=\frac{4a_2-2}{a_2+1}=\frac{10-2}{\frac{5}{2}+1}=\frac{8}{\frac{7}{2}}=\frac{16}{7}\ (\text{참})$$

ㄴ. $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$$a_{n+1}-1=\frac{4a_n-2-(a_n+1)}{a_n+1}=\frac{3(a_n-1)}{a_n+1}\quad\cdots\cdots㉠$$

$$a_{n+1}-2=\frac{4a_n-2-2(a_n+1)}{a_n+1}=\frac{2(a_n-2)}{a_n+1}\quad\cdots\cdots㉡$$

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_n-2}{a_n-1}$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-1}\right\}$는 첫째항이 $\dfrac{a_1-2}{a_1-1}=\dfrac{3-2}{3-1}=\dfrac{1}{2}$,

공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\dfrac{a_n-2}{a_n-1}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k-2}{a_k-1}=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}\ (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

04

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$a_{n+2}x^2+(a_n+a_{n+2})x+a_n=0$$

$$(a_{n+2}x+a_n)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{a_n}{a_{n+2}}\ \text{또는}\ x=-1$$

$$\therefore b_n=-\frac{a_n}{a_{n+2}}\ (\because b_n\neq-1)$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$라 하면

$$\frac{b_n}{b_n+1}=\frac{-\frac{a_n}{a_{n+2}}}{-\frac{a_n}{a_{n+2}}+1}=\frac{-\frac{a_n}{a_{n+2}}}{\frac{-a_n+a_{n+2}}{a_{n+2}}}$$

$$=\frac{-a_n}{a_{n+2}-a_n}$$

$$=\frac{-a_1-(n-1)d}{2d}$$

$$=-\frac{a_1}{2d}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

답 $-\dfrac{1}{2}$

> **BLACKLABEL 특강** 필수 개념
>
> **일반항에서 공차와 공비 찾기**
>
> (1) 일반항 a_n이 n에 대한 일차식인 $a_n=An+B$ (A, B는 상수) 꼴일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 공차는 n의 계수인 A이다.
>
> (2) 일반항 b_n이 $b_n=A\times B^n$ (A, B는 상수) 꼴일 때, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이고 공비는 지수 n의 밑인 B이다.

05

$$a_{n+1}=a_n+(-1)^n\times\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$=a_n+(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$=a_n+(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}-2+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$, 14를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{a_2}=a_1-\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\cancel{a_4}=\cancel{a_3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\vdots$$

$$+\underline{)\ a_{15}=\cancel{a_{14}}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)}$$

$$a_{15}=a_1-1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{14}}+\frac{1}{15}$$

$$=a_1-1+\frac{1}{15}=a_1-\frac{14}{15}$$

$$=2-\frac{14}{15}\ (\because a_1=2)$$

$$=\frac{16}{15}$$

따라서 $p=15$, $q=16$이므로 $p+q=31$

답 31

06

$pa_{n+1}=qa_n+r$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$) $\cdots\cdots㉠$

ㄱ. $r=0$이므로 ㉠에서

$$pa_{n+1}=qa_n\qquad\therefore a_{n+1}=\frac{q}{p}a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다. (거짓)

ㄴ. $p=q$이므로 ㉠에서

$$a_{n+1}=a_n+\frac{r}{p}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\frac{r}{p}$인 등차수열이고, 일반항 a_n은

$$a_n=1+(n-1)\times\frac{r}{p}\ (\because a_1=1)$$
$$=\frac{r}{p}n-\frac{r}{p}+1$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n\left(1+\frac{r}{p}n-\frac{r}{p}+1\right)}{2}$$
$$=\frac{n(rn+2p-r)}{2p}\ \text{(참)}$$

ㄷ. $p=q+r$이면 $r=p-q$이므로 ㉠에서

$$pa_{n+1}=qa_n+p-q$$
$$p(a_{n+1}-1)=q(a_n-1)$$
$$\therefore a_{n+1}-1=\frac{q}{p}(a_n-1)$$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 공비가 $\frac{q}{p}$인 등비수열이므로

$$a_n-1=(a_1-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

이때 $a_1=1$이므로

$a_n-1=0 \qquad \therefore a_n=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

07

$n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n+2n+1$의 양변을 $n^2(n+1)^2$으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$\frac{a_n}{n^2}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=b_n+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{b_2}=b_1+\frac{3}{1^2\times 2^2}$$
$$\cancel{b_3}=\cancel{b_2}+\frac{5}{2^2\times 3^2}$$
$$\cancel{b_4}=\cancel{b_3}+\frac{7}{3^2\times 4^2}$$
$$\vdots$$
$$+\big)\ b_n=\cancel{b_{n-1}}+\frac{2n-1}{(n-1)^2n^2}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$=\frac{2k+1}{k^2(k^2+2k+1)}$
$=\frac{2k+1}{2k+1}\times\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+2k+1}\right)$
$=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\ \left(\because b_1=\frac{a_1}{1^2}=\frac{0}{1}=0\right)$$
$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2^2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}\right)+\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{(n-1)^2}}-\frac{1}{n^2}\right\}$$
$$=1-\frac{1}{n^2}$$
$$\therefore a_n=n^2b_n=n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=n^2-1$$

$\therefore a_{25}=25^2-1=624$ **답** 624

08

$S_n=1-(n+1)a_n$에서 $S_1=1-2a_1$

$S_1=a_1$이므로

$a_1=1-2a_1$, $3a_1=1 \qquad \therefore a_1=\frac{1}{3}$

$n\ge2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\{1-(n+1)a_n\}-\{1-na_{n-1}\}$$
$$=na_{n-1}-(n+1)a_n$$

$(n+2)a_n=na_{n-1} \qquad \therefore a_n=\frac{n}{n+2}a_{n-1}$ (단, $n\ge2$)

위의 식의 n 대신에 2, 3, 4, $\cdots$, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{4}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{5}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{6}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_n=\frac{n}{n+2}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=a_1\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n}{n+2}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{4}}{6}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\times\frac{\cancel{n}}{n+2}$$
$$\left(\because a_1=\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\ (\text{단, } n\ge2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+20\right)$$
$$=285$$

답 ④

서울대 선배들의 강추문제 **1등급 비법 노하우**

이 문제는 수열의 합 S_n을 이용하여 귀납적으로 정의함으로써 일반항을 구하는 과정을 한 단계 더 복잡하게 만들어 놓았다.
기본적으로 귀납적 정의의 형태는 매우 다양하기 때문에 그것을 다 외울 필요는 없고, 기본적인 몇 가지만 정확하게 알고 있으면 된다.
이 문제에서도 먼저 $S_n-S_{n-1}=a_n$임을 이용하여 a_n과 a_{n-1} 사이의 관계식을 구한 후 일반항 a_n을 구하면 된다. 기본적인 귀납적 정의의 형태가 안 보일 경우에는 직접 숫자를 대입해 가며 규칙을 찾아가는 것도 하나의 방법이다.

09 $na_n=(n-1)S_n$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면 $2a_2=(2-1)S_2=a_1+a_2$

$\therefore a_2=a_1=1$ ($\because a_1=1$)

㉠에서 $S_n=\dfrac{n}{n-1}a_n$이므로 $n\geq 3$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{n-1}a_n-\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\dfrac{1}{n-1}a_n=\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}$ (단, $n\geq 3$)

위의 식의 n 대신에 3, 4, 5, $\cdots$, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_3}&=\frac{2^2}{1}a_2\\
\cancel{a_4}&=\frac{3^2}{2}\cancel{a_3}\\
\cancel{a_5}&=\frac{4^2}{3}\cancel{a_4}\\
&\vdots\\
\times)\ a_n&=\frac{(n-1)^2}{n-2}\cancel{a_{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2^2}{1}\times\frac{3^2}{2}\times\frac{4^2}{3}\times\cdots\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times a_2\\
&=1\times\frac{2^{\cancel{2}}}{1}\times\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\times\frac{4^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{(n-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{n-3}}\times\frac{(n-1)^2}{\cancel{n-2}}\\
&\qquad(\because a_2=1)\\
&=1\times2\times3\times4\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)^2\\
&=(n-1)\times(n-1)!
\end{aligned}$$

$\therefore a_{20}=19\times 19!$

답 ②

10 $\sum_{k=1}^{n}a_k-na_n=n\log n-\log f(n)$ ……㉠

위의 식의 n 대신에 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}a_k-(n-1)a_{n-1}$

$=(n-1)\log(n-1)-\log f(n-1)$ (단, $n\geq 2$) ……㉡

㉠$-$㉡을 하면

$a_n-na_n+(n-1)a_{n-1}=n\log n-(n-1)\log(n-1)$
$-\log f(n)+\log f(n-1)$

$(1-n)a_n-(1-n)a_{n-1}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log\dfrac{f(n)}{f(n-1)}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log\dfrac{n!}{(n-1)!}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log n$

$=(1-n)\log(n-1)-(1-n)\log n$

위의 식의 양변을 $1-n$으로 나누면

$a_n-a_{n-1}=\log(n-1)-\log n$ (단, $n\geq 2$)

위의 식의 n 대신에 2, 3, 4, $\cdots$, 20을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}-a_1&=\log 1-\log 2\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=\log 2-\log 3\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=\log 3-\log 4\\
&\vdots\\
+)\ a_{20}-\cancel{a_{19}}&=\log 19-\log 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{20}-a_1&=(\log 1-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 2}-\cancel{\log 3})+\cdots\\
&\qquad+(\cancel{\log 19}-\log 20)\\
&=\log 1-\log 20\\
&=-\log 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_{20}&=a_1-\log 20\\
&=2-\log 20\ (\because a_1=2)\\
&=\log 5
\end{aligned}$$

답 ②

11 해결단계

❶ 단계	수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	na_n을 b_n으로 놓고 b_{n+1}과 b_n 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 관계식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.
❹ 단계	a_{10}의 값을 구한다.

$S_n=\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3-a_n$의 양변에 n을 곱하면

$nS_n=(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3n-na_n$ ……㉠

㉠의 n 대신에 $n+1$을 대입하면

$(n+1)S_{n+1}$

$=(S_1+S_2+\cdots+S_n)+3(n+1)-(n+1)a_{n+1}$ ……㉡

㉡$-$㉠을 하면

$(n+1)S_{n+1}-nS_n=S_n+3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$(n+1)S_{n+1}-(n+1)S_n=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$\therefore (n+1)(S_{n+1}-S_n)=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$(n+1)a_{n+1}=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$2(n+1)a_{n+1}=na_n+3$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

이때 $na_n=b_n$으로 놓으면

$2b_{n+1}=b_n+3$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{3}{2}$

$\therefore b_{n+1}-3=\dfrac{1}{2}(b_n-3)$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉢

한편, ㉠에 $n=2$를 대입하면

$2S_2=S_1+6-2a_2$

$2(4+a_2)=10-2a_2$ ($\because a_1=4$) $\qquad\therefore a_2=\dfrac{1}{2}$

$b_2=2a_2=1$이므로 $b_2-3=-2$

즉, ㉢에서 수열 $\{b_n-3\}$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)은 제2항이 -2, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$b_n-3=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

$\therefore b_n=3-\frac{1}{2^{n-3}}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

따라서 $a_n=\frac{b_n}{n}=\frac{3}{n}-\frac{1}{n\times2^{n-3}}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)이므로

$a_{10}=\frac{3}{10}-\frac{1}{5\times2^8}$ 답 ②

12 $a_na_{n+1}=2a_n-1$의 양변을 a_n으로 나누면

$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$

이때 $a_1=5$이므로

$a_1=5=1+\frac{4}{1}$

$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}=1+\frac{4}{5}$

$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}=1+\frac{4}{9}$

$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{9}{13}=\frac{17}{13}=1+\frac{4}{13}$

⋮

$\therefore a_n=1+\frac{4}{1+(n-1)\times4}=1+\frac{4}{4n-3}$

$=\frac{4n+1}{4n-3}$

따라서 $a_{20}=\frac{4\times20+1}{4\times20-3}=\frac{81}{77}$이므로

$p=77,\ q=81$

$\therefore p+q=158$ 답 158

• 다른 풀이 •

$a_na_{n+1}=2a_n-1$의 양변을 a_n으로 나누면

$a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{a_n}$

이때 $a_1=5$이므로

$a_1=\frac{5}{1}$

$a_2=\frac{2a_1-1}{a_1}=\frac{2\times5-1}{5}=\frac{9}{5}$

$a_3=\frac{2a_2-1}{a_2}=\frac{2\times\frac{9}{5}-1}{\frac{9}{5}}=\frac{13}{9}$

$a_4=\frac{2a_3-1}{a_3}=\frac{2\times\frac{13}{9}-1}{\frac{13}{9}}=\frac{17}{13}$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 분모, 분자는 각각 첫째항이 1, 5이고 공차는 모두 4인 등차수열이므로

$a_n=\frac{5+(n-1)\times4}{1+(n-1)\times4}=\frac{4n+1}{4n-3}$

따라서 $a_{20}=\frac{4\times20+1}{4\times20-3}=\frac{81}{77}$이므로

$p=77,\ q=81$ $\quad\therefore p+q=158$

13 $a_{n+1}-a_n=(-1)^n(a_n-a_{n-1})$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉠

(ⅰ) n이 홀수일 때,

㉠에서 $a_{n+1}-a_n=-(a_n-a_{n-1})$

$a_{n+1}-a_n=-a_n+a_{n-1}$

$\therefore a_{n+1}=a_{n-1}$

즉, 짝수항끼리는 모두 같고, $a_2=0$이므로

$a_{2k}=0$ (단, k는 자연수)

(ⅱ) n이 짝수일 때,

㉠에서 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$

이때 (ⅰ)에서 $a_{2k}=0$이므로

$a_{n+1}=-a_{n-1}$ ($\because n$은 짝수)

$a_1=1$이므로 $a_{2k-1}=(-1)^{k+1}$ (단, k는 자연수)

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\(-1)^{k+1} & (n=2k-1)\end{cases}$ (단, k는 자연수)

$\therefore \sum_{k=1}^{200}a_k=\sum_{k=1}^{100}a_{2k}+\sum_{k=1}^{100}a_{2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{100}0+\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}$

$=0$ 답 0

14 $a_{n+1}+a_n=b_{n+1}-b_n$의 n 대신에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2+a_1=\cancel{b_2}-b_1$

$a_3+a_2=\cancel{b_3}-\cancel{b_2}$

$a_4+a_3=\cancel{b_4}-\cancel{b_3}$

⋮

$+\underline{)\ a_{10}+a_9=b_{10}-\cancel{b_9}}$

$a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_9)+a_{10}=b_{10}-b_1$

즉, $2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})-a_1-a_{10}=b_{10}-b_1$에서

$2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=a_{10}+b_{10}+a_1-b_1=30$

($\because a_1=b_1,\ a_{10}+b_{10}=30$)

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=15$ 답 ⑤

15 $\overline{P_{n-1}P_n}=a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이라 하면 규칙 (가), (다)에서

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_na_{n+2}=a_{n+1}+1$

이때 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+1}{a_n}$의 n 대신에 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하면

$a_3=\frac{2+1}{3}=1,\ a_4=\frac{1+1}{2}=1,\ a_5=\frac{1+1}{1}=2,$

$a_6=\frac{2+1}{1}=3,\ a_7=\frac{3+1}{2}=2,\ a_8=\frac{2+1}{3}=1,$

$a_9=\frac{1+1}{2}=1,\ a_{10}=\frac{1+1}{1}=2,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은

$\begin{cases}a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=1,\ a_5=2\\a_{n+5}=a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)\end{cases}$

따라서 $x_{30}=a_1+a_3+\cdots+a_{29}$, $y_{30}=a_2+a_4+\cdots+a_{30}$이므로

$$\begin{aligned}x_{30}+y_{30}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{29}+a_{30}\\&=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\\&=6(3+2+1+1+2)=54\end{aligned}$$

답 54

16 해결단계

❶ 단계	$\sum_{n=1}^{19} a_n$을 a_n+a_{n+1}의 합의 꼴로 변형하여 합을 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	$b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$로 놓은 후, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구하여 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$a_n+a_{n+1}=n^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……㉠

ㄱ. $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{19} a_n&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}\\&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19})\\&=1+2^2+4^2+\cdots+18^2\\&=1+\sum_{k=1}^{9}(2k)^2=1+4\sum_{k=1}^{9}k^2\\&=1+4\times\frac{9\times10\times19}{6}=1141\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. ㉠에서 $a_{n+1}=n^2-a_n$이고 $a_1=1$이므로

$a_2=1^2-a_1=1-1=0$

$a_3=2^2-a_2=4-0=4$

$a_4=3^2-a_3=9-4=5$

$a_5=4^2-a_4=16-5=11$

$a_6=5^2-a_5=25-11=14$

$a_7=6^2-a_6=36-14=22$

$a_8=7^2-a_7=49-22=27$

⋮

이때 $b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$이라 하면

$b_1=-1$, $b_2=1$, $b_3=3$, $b_4=5$, $\cdots$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -1이고 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n=-1+(n-1)\times2=2n-3$

$\therefore a_{20}-a_{19}=b_{10}=2\times10-3=17$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$이고, $b_n=2n-3$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15}(a_{2n}-a_{2n-1})&=\sum_{n=1}^{15}(2n-3)\\&=2\times\frac{15\times16}{2}-15\times3\\&=195\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 1 •

$a_n+a_{n+1}=n^2$에서 $a_{n+1}=-a_n+n^2$이므로

$a_2=-a_1+1^2=-1+1^2$

$a_3=-a_2+2^2=1-1^2+2^2$

$a_4=-a_3+3^2=-1+1^2-2^2+3^2$

$a_5=-a_4+4^2=1-1^2+2^2-3^2+4^2$

⋮

즉, 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}a_{2n-1}&=1-1^2+2^2-3^2+\cdots+(2n-2)^2\\&=1+(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots\\&\qquad+\{-(2n-3)^2+(2n-2)^2\}\\&=1+(1+2)+(3+4)+\cdots\\&\qquad+\{(2n-3)+(2n-2)\}\\&=1+\sum_{k=1}^{2n-2}k\\&=1+\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}\\&=1+(n-1)(2n-1)\\&=2n^2-3n+2\end{aligned}$$

이때 $a_n+a_{n+1}=n^2$이므로

$a_{2n-1}+a_{2n}=\underbrace{(2n-1)^2}_{=4n^2-4n+1}$에서

$$\begin{aligned}a_{2n}&=-a_{2n-1}+(2n-1)^2\\&=-2n^2+3n-2+4n^2-4n+1\\&=2n^2-n-1\end{aligned}$$

ㄱ. $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{19}a_n&=\sum_{k=1}^{9}(a_{2k-1}+a_{2k})+a_{19}\\&=\sum_{k=1}^{9}(4k^2-4k+1)+(2\times10^2-3\times10+2)\\&=4\times\frac{9\times10\times19}{6}-4\times\frac{9\times10}{2}+9+172\\&=1140-180+9+172\\&=1141\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}a_{2n}-a_{2n-1}&=(2n^2-n-1)-(2n^2-3n+2)\\&=2n^2-n-1-2n^2+3n-2\\&=2n-3\end{aligned}$$

$\therefore a_{20}-a_{19}=2\times10-3=17$ (거짓)

ㄷ. $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15}(a_{2n}-a_{2n-1})&=\sum_{n=1}^{15}(2n-3)\\&=2\times\frac{15\times16}{2}-45\\&=195\ (\text{참})\end{aligned}$$

• 다른 풀이 2 •

ㄴ. $a_n+a_{n+1}=n^2$에서 $a_{n+1}=n^2-a_n$이므로

$a_2=1^2-a_1=1-1=0$

$a_3=2^2-a_2=2^2-0=2^2$

$a_4=3^2-a_3=3^2-2^2$

$a_5=4^2-a_4=4^2-3^2+2^2$

⋮

$a_{19}=18^2-a_{18}=18^2-17^2+16^2-\cdots+2^2$

$a_{20}=19^2-a_{19}=19^2-18^2+17^2-\cdots+3^2-2^2$

$$\begin{aligned}\therefore a_{20}-a_{19}&\\&=(19^2-18^2)-(18^2-17^2)+(17^2-16^2)-\cdots\\&\qquad+(3^2-2^2)-2^2\\&=(19+\cancel{18})-(\cancel{18}+\cancel{17})+(\cancel{17}+\cancel{16})-\cdots\\&\qquad+(\cancel{3}+2)-4\\&=19+2-4=17\ (\text{거짓})\end{aligned}$$

17 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\boxed{\sqrt{3k+1}}}$$

위의 부등식의 양변에 $\frac{\boxed{2k+1}}{2k+2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{\boxed{2k+1}}{2k+2}$$
$$\le\frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}$$

이때

$(2k+2)^2(3k+1)$
$=\{(2k+1)+1\}^2(3k+1)$
$=\{(2k+1)^2+2(2k+1)+1\}(3k+1)$
$=(2k+1)^2(3k+1)+2(2k+1)(3k+1)+(3k+1)$
$=(2k+1)^2(3k+1)+12k^2+13k+3$
$=(2k+1)^2(3k+1)+3(4k^2+4k+1)+k$
$=(2k+1)^2(3k+1)+3(2k+1)^2+k$
$=(2k+1)^2(3k+4)+k$

이므로

$$\left\{\frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}\right\}^2=\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2(3k+1)}$$
$$=\frac{(\boxed{2k+1})^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k}$$
$$=\frac{1}{3k+4+\frac{k}{(2k+1)^2}}$$
$$<\frac{1}{\boxed{3k+4}}\ (\because k\ge1)$$

$$\therefore \frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}<\frac{1}{\sqrt{\boxed{3k+4}}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) : $\sqrt{3k+1}$, (나) : $2k+1$, (다) : $3k+4$ **답** 풀이 참조

18 (i) $n=4$일 때,

$1\times2\times3\times4=24>16=2^4$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge4)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k>2^k$

위의 부등식의 양변에 $k+1$을 곱하면

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k\times(k+1)>2^k\times(k+1)$ ……㉠

이때 $k\ge4$이므로

$2^k(k+1)\ge2^k\times5>2^{k+1}$

즉, ㉠에서

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k\times(k+1)>2^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 4 이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. **답** 풀이 참조

단계	채점 기준	배점
(가)	$n=4$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보인 경우	30%
(나)	$n=k\ (k\ge4)$일 때 주어진 부등식이 성립함을 가정한 후, $n=k+1$일 때도 성립함을 보인 경우	70%

19 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=(2^2-1)\times1+0=3$

(우변)$=2^2-2\times2^{-1}=3$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}$$
$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}$$
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{2\times7+2}}{2^{3\times(3+1)}}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$ **답** ④

20 (i) $n=2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$에서 $a_1=\frac{1}{1}=1$, $a_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

즉, $n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$에서

(좌변)$=2+1=3$, (우변)$=2\times\frac{3}{2}=3$

이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=ka_k$ ……㉠

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}$에서

$a_n=a_{n+1}-\frac{1}{n+1}$ ……㉡

㉠의 좌변에 $1+a_k$를 더하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+1+a_k$

$=ka_k+1+a_k$ ($\because$ ㉠)

$=(k+1)a_k+1$

$=(k+1)\left(a_{k+1}-\dfrac{1}{k+1}\right)+1$ ($\because$ ㉡)

$=(k+1)a_{k+1}$

$\therefore$ $(k+1)+a_1+a_2+\cdots+a_k=(k+1)a_{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식 $n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$이 성립한다. **답** 풀이 참조

단계	채점 기준	배점
(가)	$n=2$일 때, 주어진 등식이 성립함을 보인 경우	30%
(나)	$n=k$ $(k\ge 2)$일 때 주어진 등식이 성립함을 가정한 후, $n=k+1$일 때도 성립함을 보인 경우	70%

STEP 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 95

01 36 **02** ② **03** ⑤ **04** 10 **05** 129
06 $\dfrac{17}{9}$ **07** 10

01 해결단계

❶ 단계	마지막 바둑돌이 검은 바둑돌인 경우와 흰 바둑돌인 경우를 나누어 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구하고, p, q의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	a_1, a_2의 값을 구한다.
❸ 단계	**❶단계**에서 구한 값과 **❷단계**에서 구한 값을 이용하여 $p+q+a_7$의 값을 구한다.

임의의 바둑돌 $(n+2)$개를 나열하는 방법의 수는 a_{n+2}이다.

(i) $(n+2)$번째 바둑돌이 검은 바둑돌인 경우
$(n+1)$번째 바둑돌은 검은 바둑돌이어도 가능하고, 흰 바둑돌이어도 가능하다.
즉, 이 방법의 수는 a_{n+1}이다.

(ii) $(n+2)$번째 바둑돌이 흰 바둑돌인 경우
$(n+1)$번째 바둑돌은 반드시 검은 바둑돌이어야 하므로 (i)에서 이 방법의 수는 a_n이다.

(i), (ii)에서

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ……㉠

이므로 $p=1$, $q=1$이다.

한편, 임의의 바둑돌 한 개를 나열하는 방법의 수는 ○, ●의 2개이므로 $a_1=2$

임의의 바둑돌 두 개를 나열하는 방법의 수는 ●●, ○●, ●○의 3개이므로 $a_2=3$

㉠에서 $a_3=2+3=5$, $a_4=3+5=8$, $a_5=5+8=13$, $a_6=8+13=21$이므로

$a_7=13+21=34$

$\therefore$ $p+q+a_7=1+1+34=36$ **답** 36

02 해결단계

❶ 단계	자연수 k가 1일 때, 조건을 만족시키는지 확인한다.
❷ 단계	자연수 k가 2, 3, 4, $\cdots$일 때 조건을 만족시키는지 확인하고, 그 규칙을 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$

즉, $a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}$

$\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{k}$, 즉 $a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 차례대로 나열하면 $0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}, 0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}, \cdots$이다.

$22=3\times 7+1$에서 $a_{22}=0$이므로

$k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편, $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{2}{k}$

$\dfrac{2}{k+1}<\dfrac{2}{k}$, 즉 $a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 수열 $\{a_n\}$을 첫째항부터 차례대로 나열하면 $0, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, 0, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{12}, \cdots$이다.

$22=5\times 4+2$에서 $a_{22}=\dfrac{1}{3}$이므로

$k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

같은 방법으로 계속하면

$k=3$일 때, $a_8=0$이므로

$22=7\times 3+1$에서 $a_{22}=0$이다.

즉, $k=3$은 조건을 만족시킨다.

$4\le k\le 9$일 때, $a_{22}\ne 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=10$일 때, $a_{22}=0$이므로 조건을 만족시킨다.

$k\ge 11$일 때, $a_{22}\ne 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값은 1, 3, 10이므로 그 합은

$1+3+10=14$ **답** ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$k>m-1$에서 $a_{2m+2}=\dfrac{k-m}{k(k+1)}$($m$은 자연수)이므로 $k=m$이면 $a_{2m+2}=0$이고, 수열 $\{a_n\}$의 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2m+1}$ 중에서 그 값이 0인 항은 a_1뿐이다. 또한, $a_1=a_{2m+2}=a_{4m+3}=\cdots=0$ (m은 자연수)이므로 $a_{22}=0$이려면 $22=(2m+1)\times l+1$ (l은 자연수)이어야 한다. 즉, $2m+1$은 21의 약수이어야 하므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 1, 3, 10이다.
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값 역시 1, 3, 10이다.

03 해결단계

❶ 단계	주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a_n과 b_n 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	주어진 조건과 ❶단계의 결과를 이용하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	a_n을 구하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$3n^2a_n+(4a_n-b_n)n+a_n-b_n=0$에서
$(3n^2+4n+1)a_n-(n+1)b_n=0$
$(3n+1)(n+1)a_n-(n+1)b_n=0$
$(n+1)\{(3n+1)a_n-b_n\}=0$
즉, $(3n+1)a_n-b_n=0$ ($\because n+1>0$)이므로
$b_n=(3n+1)a_n$
이때 $b_n=(3n-2)a_{n+1}$이므로
$(3n+1)a_n=(3n-2)a_{n+1}$ $\quad\therefore a_{n+1}=\dfrac{3n+1}{3n-2}a_n$
위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{4}{1}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{7}{4}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{10}{7}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\big)\ a_n=\frac{3n-2}{3n-5}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{4}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{10}{7}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n-5}\times a_1$$
$$=\frac{\cancel{4}}{1}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{7}}\times\cdots\times\frac{3n-2}{\cancel{3n-5}}\times 2\ (\because a_1=2)$$
$$=2(3n-2)=6n-4$$

ㄱ. $a_5=6\times5-4=26$ (거짓)
ㄴ. $a_n=6n-4=2+6(n-1)$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 6인 등차수열이므로
$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ (참)
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(6k-4)$
$=6\times\dfrac{10\times11}{2}-10\times4=290$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

04 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 n 대신에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 값을 구한다.
❷ 단계	수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{100}a_k$의 값을 구한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ $\quad\cdots\cdots$㉠
㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)$
$\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2a_1}$, $a_1^2=1$ $\quad\therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)
㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_1+a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_2+\dfrac{1}{a_2}\right)$
$1+\dfrac{1}{2}a_2-\dfrac{1}{2a_2}=0$, $a_2^2+2a_2-1=0$
$\therefore a_2=\sqrt{2}-1$ ($\because a_2>0$)
㉠에 $n=3$을 대입하면
$a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{2}\left(a_3+\dfrac{1}{a_3}\right)$
$1+\sqrt{2}-1+\dfrac{1}{2}a_3-\dfrac{1}{2a_3}=0$, $a_3^2+2\sqrt{2}a_3-1=0$
$\therefore a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ($\because a_3>0$)
$\vdots$
$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$
$=\cancel{1}+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$
$=\sqrt{100}=10$ **답** 10

• 다른 풀이 1 •

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$에서
$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$
$\therefore 2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $\quad\cdots\cdots$㉡
㉡에 $n=1$을 대입하면
$2S_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$, $2a_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$
$a_1=\dfrac{1}{a_1}$, $a_1^2=1$ $\quad\therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)
또한, ㉡의 n 대신에 $n-1$을 대입하면
$2S_{n-1}=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$ (단, $n\ge2$) $\quad\cdots\cdots$㉢
㉡$-$㉢을 하면
$2a_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$
$a_n-\dfrac{1}{a_n}=-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ $\quad\cdots\cdots$㉣
위의 식의 양변을 제곱하면
$a_n^2-2+\dfrac{1}{a_n^2}=a_{n-1}^2+2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}$
이때 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=X_n$으로 놓으면

$X_n-2=X_{n-1}+2 \qquad \therefore X_n=X_{n-1}+4$ (단, $n\ge 2$)

즉, 수열 $\{X_n\}$은 공차가 4이고 첫째항이

$X_1=a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}=2$인 등차수열이므로

$X_n=2+4(n-1)=4n-2$

$a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=X_n$이므로 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n-2$

$a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n$, $\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2=4n$

$\therefore a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n}$ ($\because a_n>0$)

위의 식의 양변에 각각 a_n을 곱하여 정리하면

$a_n^2-2\sqrt{n}a_n+1=0$

$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 또는 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$

그런데 ㉣에서

$a_n+a_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}$

이고, $a_n>0$, $a_{n-1}>0$이므로

$a_{n-1}>a_n$

$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

• 다른 풀이 2 •

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$에서 $S_n=\dfrac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$

$2S_n=S_n-S_{n-1}+\dfrac{1}{S_n-S_{n-1}}$

위의 식의 양변에 S_n-S_{n-1}을 곱하면

$2S_n(S_n-S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2+1$

$2S_n^2-2S_nS_{n-1}=S_n^2-2S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2+1$

$S_n^2=S_{n-1}^2+1$

이때 $S_n^2=b_n$으로 놓으면 $b_n=b_{n-1}+1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=S_1^2=a_1^2=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$b_n=1+(n-1)=n$

따라서 $S_n^2=n$이므로 $S_n=\sqrt{n}$ ($\because a_n>0$)

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{100}a_k=S_{100}=\sqrt{100}=10$

05 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 n 대신에 1, 2, 3, ⋯, 2020을 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.
❷ 단계	$a_1=a_{2021}+22$임을 이용하여 $\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n$의 값을 구한다.

$a_{n+1}=(-1)^n\times n-7a_n$의 n 대신에 1, 2, 3, ⋯, 2020을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=-1-7a_1$

$a_3=2-7a_2$

$a_4=-3-7a_3$

⋮

$+)\ a_{2021}=2020-7a_{2020}$

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2021}$

$=\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-2019+2020)\}$
$\qquad -7(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2020})$

$=1010-7\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n$

$\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n-a_1+a_{2021}=1010-7\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n$

이때 $a_1=a_{2021}+22$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n-22=1010-7\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n$

$8\sum\limits_{n=1}^{2020}a_n=1010+22=1032$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{2020}a_n=129$

답 129

06 해결단계

❶ 단계	주어진 관계식을 이용하여 $a_3=3$, $a_6=37$을 만족시키는 a_4의 값을 구한다.
❷ 단계	주어진 항들 사이의 관계식을 항의 번호의 역방향으로 재정의한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합을 구한다.

$a_4=k$라 하고 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

(ⅰ) $a_3\le a_4$일 때,

$a_3=3$이므로 $3\le k$

또한, $a_5=3a_3+a_4=9+k$

이때 $k<9+k$, 즉 $a_4<a_5$이므로

$a_6=3a_4+a_5=3k+(9+k)=4k+9$

즉, $4k+9=37$이므로 $k=7$

$3\le 7$, 즉 $a_3\le a_4$이므로 $a_4=7$

(ⅱ) $a_3>a_4$일 때,

$a_3=3$이므로 $3>k$

또한, $a_5=a_3+a_4=3+k$

이때 $k<3+k$, 즉 $a_4<a_5$이므로

$a_6=3a_4+a_5=3k+(3+k)=4k+3$

즉, $4k+3=37$이므로 $k=\dfrac{17}{2}$

$\dfrac{17}{2}>3$, 즉 $a_4>a_3$이므로 $a_4\ne\dfrac{17}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_4=7$이다.

한편, 주어진 식에서

$a_n\le a_{n+1}$이면 $a_{n+2}=3a_n+a_{n+1}$이므로

$a_n=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3}$

$a_n>a_{n+1}$이면 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$이므로

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_{n+2}-a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$

이때 $a_3=3$, $a_4=7$에서 항을 역으로 계산하면

(iii) $a_2\le a_3$일 때,

$a_2=\frac{a_4-a_3}{3}=\frac{7-3}{3}=\frac{4}{3}$

$\frac{4}{3}<3$, 즉 $a_2<a_3$이므로 $a_2=\frac{4}{3}$

① $a_1\le a_2$일 때,

$a_1=\frac{a_3-a_2}{3}=\frac{3-\frac{4}{3}}{3}=\frac{5}{9}$

$\frac{5}{9}<\frac{4}{3}$, 즉 $a_1<a_2$이므로 $a_1=\frac{5}{9}$

② $a_1>a_2$일 때,

$a_1=a_3-a_2=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}>\frac{4}{3}$, 즉 $a_1>a_2$이므로 $a_1=\frac{5}{3}$

(iv) $a_2>a_3$일 때,

$a_2=a_4-a_3=7-3=4$

$4>3$, 즉 $a_2>a_3$이므로 $a_2=4$

① $a_1\le a_2$일 때,

$a_1=\frac{a_3-a_2}{3}=\frac{3-4}{3}=-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}<4$, 즉 $a_1<a_2$이므로 $a_1=-\frac{1}{3}$

② $a_1>a_2$일 때,

$a_1=a_3-a_2=3-4=-1$

$-1<4$, 즉 $a_1<a_2$이므로 $a_1\ne-1$

(iii), (iv)에서 a_1의 값이 될 수 있는 것은 $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}$이므로 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{5}{9}+\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{17}{9}$ 답 $\frac{17}{9}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

수열 $\{a_n\}$을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{3}$	3	7	16	37
$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	7	16	37
$-\frac{1}{3}$	4	3	7	16	37

07 해결단계

❶ 단계	주어진 점화식의 양변을 각각 3^{n+1}으로 나눈 후, $\frac{a_n}{3^n}=b_n$으로 치환하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 것을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한 후, a_{20}의 값을 구한다.
❸ 단계	상용로그를 이용하여 a_{20}이 몇 자리의 자연수인지 구한다.

$a_{n+1}=2a_n+3^n$의 양변을 3^{n+1}으로 나누면

$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\times\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$

이때 $\frac{a_n}{3^n}=b_n$으로 놓으면 $b_1=\frac{a_1}{3}=\frac{7}{3}$이고,

$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$

$\therefore b_{n+1}-1=\frac{2}{3}(b_n-1)$

즉, 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$이고,

공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이므로

$b_n-1=\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore b_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1$

이때 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$이므로

$a_n=3^n\times b_n=3^n\times\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1\right\}$

$=2^{n+1}+3^n$

$\therefore a_{20}=2^{21}+3^{20}$

한편,

$\log 2^{21}=21\log 2=21\times0.3=6.3$,

$\log 3^{20}=20\log 3=20\times0.47=9.4$

이므로 2^{21}, 3^{20}의 자릿수는 각각 7, 10이다.

그런데 $\log 3^{20}=9.4$이고, $\log 2=0.3$, $\log 3=0.47$이므로

$\log 2<0.4<\log 3$

$9+\log 2<9.4<9+\log 3$

$\log(2\times10^9)<\log 3^{20}<\log(3\times10^9)$

$\therefore 2\times10^9<3^{20}<3\times10^9$

즉, 3^{20}은 최고 자리의 숫자가 2로 시작되는 10자리의 자연수이므로 3^{20}에 7자리의 자연수인 2^{21}을 더하여도 자릿수가 늘어나지 않는다.

따라서 a_{20}의 자릿수는 3^{20}의 자릿수와 같으므로 a_{20}은 10자리의 자연수이다.

$\therefore m=10$ 답 10

이것이 수능 p. 96

1 510 **2** ④ **3** ①

1 해결단계

❶ 단계	주어진 이차방정식이 중근을 갖도록 판별식을 이용한 식을 세운다.
❷ 단계	수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 확인한다.
❸ 단계	수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 구하고, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구한다.

이차방정식 $a_nx^2-a_{n+1}x+a_n=0$이 모든 자연수 n에 대하여 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=a_{n+1}^2-4a_n^2=0$

$(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$a_{n+1}=2a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{8} a_k=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$ 답 510

2 해결단계

❶ 단계	a_1, a_2, a_3, …의 값을 구하여 $a_{n+4}=a_n$임을 확인한다.
❷ 단계	a_9와 a_{12}의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 값을 이용하여 a_9+a_{12}의 값을 구한다.

$a_1=10$이므로

$a_2=5-\frac{10}{10}=4$

$a_3=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$a_4=-2\times\frac{5}{2}+3=-2$

$a_5=5-\frac{10}{-2}=5+5=10=a_1$

⋮

즉, 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$이다.

따라서 $a_9=a_5=a_1=10$, $a_{12}=a_8=a_4=-2$이므로

$a_9+a_{12}=8$ 답 ④

3 해결단계

❶ 단계	합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 주어진 식을 정리한다.
❷ 단계	❶단계의 결과를 이용하여 a_{n-1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	$f(n)$과 $g(n)$, p의 값을 구하여 $\frac{f(p)}{g(p)}$의 값을 구한다.

$n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$

이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\geq2)$이다.

$S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$이므로

$3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\geq1)$이다.

$3a_n=3(S_n-S_{n-1})$

$=(n+2)\times a_n-(\boxed{n+1})\times a_{n-1}$ (단, $n\geq2$)

즉, $(n-1)a_n=(n+1)\times a_{n-1}$에서 $a_1=2\neq0$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq0$

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{\frac{n+1}{n-1}}$ (단, $n\geq2$) *

따라서

$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$

$=\cancel{2}\times\frac{\cancel{3}}{1}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{10}{\cancel{8}}\times\frac{11}{\cancel{9}}$

$=\boxed{110}$

즉, $f(n)=n+1$, $g(n)=\frac{n+1}{n-1}$, $p=110$이므로

$\frac{f(p)}{g(p)}=\frac{111}{\frac{111}{109}}=109$ 답 ①

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

*에서 $a_n=\frac{n+1}{n-1}\times a_{n-1}$이므로

$a_{10}=\frac{11}{9}\times a_9$

$=\frac{11}{9}\times\frac{10}{8}\times a_8$

$=\frac{11}{9}\times\frac{10}{8}\times\frac{9}{7}\times a_7$

⋮

$=\frac{11}{\cancel{9}}\times\frac{10}{\cancel{8}}\times\frac{\cancel{9}}{\cancel{7}}\times\cdots\times\frac{\cancel{4}}{2}\times\frac{\cancel{3}}{1}\times a_1$

$=110$ ($\because a_1=2$)