

b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

1등급을 위한 명품 수학

블랙라벨
1

Speed Check

I 수열의 극한

01. 수열의 극한

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	p.9	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.10~14	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.15	이것이 수능	p.16
01 ④ 02 ① 03 ① 04 ④ 05 13 06 ④ 07 3 08 5		01 2 02 ⑤ 03 ② 04 1 05 ① 06 ③ 07 165 08 $\frac{5}{8}$ 09 $a=\frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{16}$ 10 50 11 ② 12 ⑤ 13 ② 14 ② 15 56 16 10 17 ③ 18 ② 19 -6 20 2 21 ② 22 ③ 23 35 24 $\frac{2}{45}$ 25 83 26 ① 27 ③ 28 ② 29 24 30 $\frac{9}{8}$ 31 ③ 32 2π 33 ③ 34 6 35 ② 36 20		01 47 02 23 03 $\frac{9}{4}$ 04 21 05 ⑤ 06 25 07 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$		1 4 2 50 3 ⑤ 4 ④	

02. 급수

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.18~19	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.20~24	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.25	이것이 수능	p.26
01 ③ 02 -1 03 ③ 04 15 05 ⑤ 06 ② 07 ③ 08 $-\frac{1}{3}$ 09 ① 10 ① 11 37 12 ⑤ 13 ⑤ 14 ①		01 2 02 ① 03 ① 04 $\frac{1}{2}$ 05 $\frac{5}{6}$ 06 3 07 $\frac{1}{2}$ 08 6 09 ⑤ 10 ⑤ 11 -57 12 $-A-2B-1$ 13 ⑤ 14 ③ 15 ④ 16 11 17 $\frac{1}{2}$ 18 $\frac{\sqrt{10}+1}{9}$ 19 ④ 20 ③ 21 ⑤ 22 ⑤ 23 3 24 ② 25 $\frac{5}{2}$ 26 82 27 3π 28 5 29 9 30 ③ 31 ③		01 π, γ, ι, τ 02 ① 03 7 04 1 05 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 06 $\frac{3}{4}$ 07 157		1 ② 2 ② 3 ④	

II 미분법

03. 지수함수와 로그함수의 미분

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.29~30	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.31~33	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.34	이것이 수능	p.35
01 15 02 3 03 ② 04 ② 05 4 06 ④ 07 6 08 ① 09 ⑤ 10 ② 11 36 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ② 16 e		01 ② 02 $\frac{1}{2}$ 03 $\ln 2$ 04 ⑤ 05 ① 06 ① 07 ④ 08 $\frac{\ln 2}{e}$ 09 23 10 7 11 ④ 12 ② 13 $\frac{1}{2}$ 14 $4 \ln 2$ 15 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 16 $\frac{1}{2}$ 17 e^2 18 ② 19 ④ 20 ① 21 4 22 ② 23 2		01 4 02 2 03 21 04 $-e^2$ 05 9 06 $\frac{1}{2}e$ 07 5		1 ① 2 ② 3 ④ 4 ④	

04. 삼각함수의 미분

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	p.38	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.39~42	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.43	이것이 수능	p.44
01 ③ 02 ④ 03 ② 04 24 05 ② 06 2 07 21 08 ④		01 $\frac{3}{7}$ 02 $\frac{8}{5}$ 03 ② 04 $\frac{\pi}{6}$ 05 ③ 06 ② 07 -1 08 $\sqrt{3}m$ 09 ⑤ 10 24π 11 $\sqrt{5}$ 12 $8-4\sqrt{5}$ 13 $\frac{1}{4}$ 14 ⑤ 15 31 16 ④ 17 ④ 18 ⑤ 19 1 20 8 21 ⑤ 22 21 23 25 24 $\frac{2}{9}$ 25 ⑤ 26 2 27 ④ 28 $\frac{1}{3}$		01 $\frac{2+\pi}{2-\pi}$ 02 $f(\theta)=x-y$ 03 4 04 40 05 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 06 2		1 11 2 43 3 40 4 ②	

05. 여러 가지 미분법

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	p.47	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.48~52	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.53	이것이 수능	p.54
01 ④ 02 -2 03 ④ 04 50 05 ③ 06 ① 07 16 08 ①		01 4 02 ① 03 ④ 04 $\frac{16}{9}$ 05 ② 06 $3 \ln 2$ 07 10 08 ① 09 $36e^2$ 10 $-\frac{1}{4}$ 11 ② 12 2π 13 ③ 14 $\frac{3-\pi}{2}$ 15 $-\frac{18}{7}$ 16 ④ 17 $\frac{1}{2}$ 18 ⑤ 19 ④ 20 ① 21 $-\frac{3}{8}$ 22 $\frac{2}{3}$ 23 ④ 24 5 25 10 26 ② 27 ③ 28 7 29 ② 30 ③ 31 0 32 5 33 ⑤ 34 34 35 ④		01 3 02 $\frac{1}{256}$ 03 $\frac{1}{5}$ 04 $-\sqrt{2}$ 05 ④ 06 $\frac{1}{2}$ 07 48		1 ④ 2 ④ 3 ② 4 30	

06. 도함수의 활용 (1)

Step 1 / 우수 기술 대표 문제				p.56	Step 2 / 최고의 변별력 문제								pp.57~61		Step 3 / 종합 사고력 문제				p.62	이것이 수능		p.63
01 ②	02 ②	03 2	04 ①		01 4	02 ⑤	03 15	04 ②	05 ②	06 1	07 ⑤	08 ④		01 1189	02 $2\sqrt{3}$	03 148	04 $-\frac{15}{2}$	05 1		1 ④	2 72	
05 ④	06 96	07 ①			09 ②	$10 \frac{e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}$		11 ⑤	12 ⑤	13 432	14 ③	$15 \frac{1}{2}$		06 ⑤						3 ④	4 ①	
					16 ③	17 ③	18 21	19 ③	20 2	21 $\sqrt{3}e^3$	22 18	23 ①										
					24 32	25 ③	26 ④	27 13	28 ②	29 120	30 8	31 ④										
					32 $5-2\sqrt{5}$		33 ④															

07. 도함수의 활용 (2)

Step 1 / 우수 기술 대표 문제				p.65	Step 2 / 최고의 변별력 문제							pp.66~68	Step 3 / 종합 사고력 문제					p.69	이것이 수능		p.70
01 ①	02 ⑤	03 $\sqrt{3}$	04 $a \leq 2e$		01 e	02 $\frac{3}{4} - \ln 2$	03 e^{2x}	04 ⑤	05 ③	06 ⑤	07 ⑤		01 44	02 2	03 $\frac{29}{32}$	04 6	05 ④		1 30	2 71	
05 ④	06 ④	07 1	08 ③			08 ⑤	09 $\frac{1}{2}$	10 $-\frac{1}{4}$	11 $\frac{16}{e^x}$	12 ⑤	13 ②	14 48	15 ③		06 22				3 4	4 ②	
					16 $\frac{3}{4}$	17 4	18 ④	19 ⑤	20 2π												

Ⅲ 적분법

08. 여러 가지 적분법

Step 1 / 우수 기술 대표 문제				p.73	Step 2 / 최고의 변별력 문제								pp.74~76	Step 3 / 종합 사고력 문제				p.77	이것이 수능		p.78
01 ④	02 2	03 ④	04 e^2		01 11	02 ④	03 ②	04 ②	05 6	06 ④	07 ①	08 3π		01 $\frac{1}{4}$	02 πe^x	03 $2 + \ln \frac{5}{4}$	04 $\frac{5}{12}\pi$		1 ①	2 ②	
05 ②	06 ⑤	07 ①	08 $\frac{\pi}{2}$		09 ①	10 $\frac{1}{6}$	11 41	12 ⑤	13 $-2 \ln 2$	14 $\ln \sqrt{3}$	15 ④			05 ⑤	06 $\frac{19}{4}$	07 $\frac{3}{2} - \ln 2$			3 ⑤	4 ④	
					16 ②	17 $\frac{1}{e^{2x}-1}$		18 $\pi+3$	19 $3e^2$	20 1	21 ④	22 $\frac{1}{2}$									
					23 ①	24 $\frac{\pi}{3}$															

09. 정적분

Step 1 / 우수 기술 대표 문제				p.80	Step 2 / 최고의 변별력 문제				pp.81~84	Step 3 / 종합 사고력 문제				p.85	이것이 수능		p.86		
01 ②	02 18	03 21	04 ⑤		01 $4-e$	02 ④	03 ⑤	04 $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$	05 $\frac{4(e-e^{-1})}{3}$	06 8	07 1		01 $-\frac{\pi}{4}$	02 2	03 $\frac{1}{e-1}$	04 107	05 26	1 12	2 ⑤
05 ②	06 ①	07 2	08 ②															3 ①	4 ③
					08 ③	09 ④	10 ①	11 8	12 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$	13 17	14 $5\pi+60$		06 $\frac{3}{2}\pi+2$		07 ②				
					15 ②	16 288	17 ③	18 18	19 2	20 $2+2\ln 2$	21 $\frac{\pi}{2}$								
					22 $-e$	23 $\frac{1}{2}\ln 5$		24 $\frac{1}{2}e$	25 36	26 ②	27 ③	28 0.32							

10. 정적분의 활용

Step 1 / 우수 기술 대표 문제				p.88	Step 2 / 최고의 변별력 문제								pp.89~94	Step 3 / 종합 사고력 문제				p.95	이것이 수능		p.96
01 $\frac{5}{186}$	02 ③	03 ③	04 ②		01 ④	02 $-\frac{1}{8}$	03 $\frac{16}{3}$	04 6	05 $\frac{3}{4}$	06 30	07 ⑤	08 $\frac{8}{\pi}$		01 4	02 $\frac{11}{3}$	03 $12 \ln \frac{3}{2} - \frac{14}{3}$	04 $\frac{108}{5}$		1 96	2 ⑤	
05 369	06 ④	07 15	08 ②		09 ②	10 ③	11 ④	12 ③	13 ①	14 3π	15 ④	16 14		05 15	06 $\frac{\sqrt{2}}{2}$				3 ⑤	4 ④	
					17 $-\frac{4}{\pi^2}$	18 50	19 $8-2\pi$		20 ⑤	21 $\frac{1}{6}$	22 6, 2	23 ④									
					24 $\frac{1}{3}$	25 ④	26 504	27 $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$		28 60	29 ⑤	30 3									
					31 ①	32 ④	33 $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$	34 6	35 $\frac{61}{27}$	36 π	37 ④										
					38 4	39 ⑤	40 ⑤														

I

수열의 극한

01 수열의 극한

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 9

01 ④ 02 ① 03 ① 04 ④ 05 13
06 ④ 07 3 08 5

- 01 ㄱ. $\frac{(-1)^n}{n}$ 의 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 이므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.
- ㄴ. $(-1)^n n$ 의 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면 $-1, 2, -3, 4, \dots$ 이므로 수열 $\{(-1)^n n\}$ 은 진동(발산)한다.
- ㄷ. $(-1)^n + (-1)^{n+1}$ 의 n 대신에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면 0, 0, 0, 0, ...이므로 수열 $\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\}$ 은 0에 수렴한다.
- ㄹ. 자연수 n 에 대하여 $\sin n\pi = 0$ 이므로 $2 - \sin n\pi = 2 - 0 = 2$
즉, 수열 $\{2 - \sin n\pi\}$ 은 2에 수렴한다.
따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. **답 ④**

- 02 $(a_n + b_n)^2 = (a_n^2 + b_n^2) + 2a_nb_n$ 이므로
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)^2 - (a_n^2 + b_n^2)}{2}$$
$$= \frac{5^2 - 13}{2} = 6$$

또한, $(a_n - b_n)^2 = (a_n^2 + b_n^2) - 2a_nb_n$ 이므로
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n^2 + b_n^2) - 2a_nb_n\}$$
$$= 13 - 2 \times 6 = 1$$

이때, $a_n > b_n$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 1$
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\}$$
$$= \frac{1}{2} \times (5 + 1) = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(a_n + 1)(b_n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_nb_n + (a_n + b_n) + 1}$$
$$= \frac{3}{6 + 5 + 1} = \frac{1}{4} \quad \text{답 ①}$$

• 다른풀이 •

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5 \text{에서 } \alpha + \beta = 5 \quad \dots\dots ㉑$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 13 \text{에서 } \alpha^2 + \beta^2 = 13 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒에서

$$\alpha\beta = \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2} = \frac{5^2 - 13}{2} = 6$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$
$$= \sqrt{5^2 - 4 \times 6} = 1 \quad (\because a_n > b_n \text{에서 } \alpha \geq \beta) \quad \dots\dots ㉓$$

㉑ + ㉓을 하면

$$2\alpha = 6 \quad \therefore \alpha = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(a_n + 1)(b_n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_nb_n + a_n + b_n + 1}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$
$$= \frac{3}{6 + 5 + 1} = \frac{1}{4}$$

- 03 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^3 + cn - 5}{(an + 1)(n - 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^3 + cn - 5}{an^2 + (1 - 2a)n - 2}$
이때, $b \neq 0$ 이면 위의 수열은 발산하므로 $b = 0$
또한, $a \neq 0, b = 0$ 이면 이 수열은 4가 아닌 0에 수렴하므로 $a = 0$
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^3 + cn - 5}{(an + 1)(n - 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn - 5}{n - 2}$$
$$(\because a = 0, b = 0)$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c - \frac{5}{n}}{1 - \frac{2}{n}} = c = 4$$

따라서 $a = 0, b = 0, c = 4$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{an^2 + cn + 1} - \sqrt{an^2 + n + b}}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n + 1} - \sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{4n + 1} + \sqrt{n})}{4n + 1 - n}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n + n}}{3n + 1}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 1}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{4 + 0} + 1}{3 + 0} = 1 \quad \text{답 ①}$$

- 04 $2n^2 - 1 < na_n < 2n^2 + 1$ 에서
$$\frac{2n^2 - 1}{n^2} < \frac{a_n}{n} < \frac{2n^2 + 1}{n^2}$$
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2} = 2$ 이므로
$$2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq 2 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2n - 1}{n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{2 + 2 - 0}{1 + 0} = 4\end{aligned}$$

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned}2n^2 - 1 &< na_n < 2n^2 + 1 \text{에서} \\ 2n - \frac{1}{n} &< a_n < 2n + \frac{1}{n} \\ 4n - 1 - \frac{1}{n} &< a_n + 2n - 1 < 4n - 1 + \frac{1}{n} \\ \frac{4n^2 - n - 1}{n^2 + 2n} &< \frac{a_n + 2n - 1}{n + 2} < \frac{4n^2 - n + 1}{n^2 + 2n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n - 1}{n^2 + 2n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2n - 1}{n + 2} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n + 1}{n^2 + 2n} \\ \text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n - 1}{n^2 + 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n + 1}{n^2 + 2n} = 4 \text{이므로} \\ 4 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2n - 1}{n + 2} &\leq 4 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2n - 1}{n + 2} = 4\end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}05 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c+5)^{n+1} + c^{n+5}}{(c+5)^n + c^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c+5) + c^5 \times \left(\frac{c}{c+5}\right)^n}{1 + \left(\frac{c}{c+5}\right)^n} \\ &= \frac{(c+5) + c^5 \times 0}{1 + 0} \left(\because 0 < \frac{c}{c+5} < 1\right) \\ &= c + 5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-3)^{n-3} + d^{n+1}}{(d-3)^n + d^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{d^3} \left(\frac{d-3}{d}\right)^{n-3} + d}{\left(\frac{d-3}{d}\right)^n + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{d^3} \times 0 + d}{0 + 1} \left(\because 0 < \frac{d-3}{d} < 1\right) \\ &= d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= 18 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= 18, (c+5) - d = 18 \\ \therefore c - d &= 13\end{aligned}$$

답 13

06 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1$

$$\begin{aligned}\neg. \text{ 수열 } \left\{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^n\right\} \text{의 공비는 } 1 + \frac{r}{2} \\ -1 < r \leq 1 \text{에서 } -\frac{1}{2} < \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2} \\ \therefore \frac{1}{2} < 1 + \frac{r}{2} \leq \frac{3}{2} \\ \text{따라서 } \frac{1}{2} < (\text{공비}) \leq \frac{3}{2} \text{이므로 수열 } \left\{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^n\right\} \text{은 항} \\ \text{상 수렴하는 수열은 아니다.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. \text{ 수열 } \left\{\left(\frac{1+r}{2}\right)^n\right\} \text{의 공비는 } \frac{1+r}{2} \\ -1 < r \leq 1 \text{에서 } 0 < 1+r \leq 2 \\ \therefore 0 < \frac{1+r}{2} \leq 1\end{aligned}$$

따라서 $0 < (\text{공비}) \leq 1$ 이므로 수열 $\left\{\left(\frac{1+r}{2}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.

$$\begin{aligned}\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r^n}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \\ \text{수열 } \{r^n\} \text{이 수렴하므로 수열 } \left\{1 + \frac{r^n}{2}\right\} \text{은 항상 수렴} \\ \text{한다.} \\ \text{그러므로 항상 수렴하는 수열은 } \neg, \neg \text{이다.}\end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}07 \quad (i) \ r = -1 \text{일 때,} \\ \text{수열 } \{r^n\} \text{은 } -1, 1, -1, 1, \dots \text{이므로} \\ \text{수열 } \left\{\frac{r^n}{2+r^n}\right\} \text{은 } -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3}, \dots \text{이다. 즉, 이} \\ \text{수열은 진동(발산)하므로 극한값은 없다.} \\ (ii) \ |r| < 1 \text{일 때,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= 0 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2+r^n} &= \frac{0}{2+0} = 0 \\ (iii) \ r = 1 \text{일 때,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= 1 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2+r^n} &= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ (iv) \ |r| > 1 \text{일 때,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| &= \infty \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2+r^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{r^n} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \\ (i) \sim (iv) \text{에서 } A &= \left\{0, \frac{1}{3}, 1\right\} \text{이므로 } n(A) = 3\end{aligned}$$

답 3

$$\begin{aligned}08 \quad \text{직선 } x=1 \text{이 두 곡선 } y=\frac{4}{x}, y=-\frac{6}{x} \text{과 만나는 점이 각} \\ \text{각 } A, B \text{이므로} \\ A(1, 4), B(1, -6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{직선 } x=n+1 \text{이 두 곡선 } y=\frac{4}{x}, y=-\frac{6}{x} \text{과 만나는 점} \\ \text{이 각각 } P_n, Q_n \text{이므로}\end{aligned}$$

$$P_n\left(n+1, \frac{4}{n+1}\right), Q_n\left(n+1, -\frac{6}{n+1}\right)$$

이때, 사다리꼴 ABQ_nP_n 의 넓이는

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \times n \times \left(10 + \frac{4}{n+1} + \frac{6}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} n \left(10 + \frac{10}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} \left(10 + \frac{10}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(10 + \frac{10}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (10+0) = 5\end{aligned}$$

답 5

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 10~14

01 2	02 ⑤	03 ②	04 1	05 ①
06 ③	07 165	08 $\frac{5}{8}$	09 $a = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{16}$	
10 50	11 ②	12 ⑤	13 ②	14 ②
15 56	16 10	17 ③	18 ②	19 -6
20 2	21 ②	22 ③	23 35	24 $\frac{2}{45}$
25 83	26 ①	27 ③	28 ②	29 24
30 $\frac{9}{8}$	31 ③	32 2π	33 ③	34 6
35 ②	36 20			

01 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= a + (a+2d) + (a+4d) + (a+6d) + (a+8d) \\ &= 5a + 20d = 170\end{aligned}$$

$$\therefore a + 4d = 34 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

조건 (다)에서 $a_{18} < 140$, $a_{19} \geq 140$ 이므로

$$\begin{aligned}a_{18} &= a + 17d = (a + 4d) + 13d \\ &= 34 + 13d < 140 \quad (\because \textcircled{A})\end{aligned}$$

$$13d < 106 \quad \therefore d < 8.1 \times \times \times \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\begin{aligned}a_{19} &= a + 18d = (a + 4d) + 14d \\ &= 34 + 14d \geq 140 \quad (\because \textcircled{A})\end{aligned}$$

$$14d \geq 106 \quad \therefore d \geq 7.5 \times \times \times \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 정수이므로 첫째항과 공차는 모두 정수이어야 한다.

즉, $\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 에서 $d=8$

이것을 $\textcircled{A}$ 에 대입하여 정리하면 $a=2$

따라서 $a_n = 2 + 8(n-1) = 8n - 6$ 이므로

$$a_{2n-1} = 8(2n-1) - 6 = 16n - 14$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \sum_{k=1}^n (16k - 14)$$

$$= 16 \times \frac{n(n+1)}{2} - 14n$$

$$= 8n^2 - 6n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}}{4n^2 - 3n + 7}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 6n}{4n^2 - 3n + 7}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{6}{n}}{4 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{8}{4} = 2$$

답 2

$$\begin{aligned}\text{02} \quad \frac{1}{n^k} \left\{ \left(n + \frac{1}{n} \right)^{10} - \frac{1}{n^{10}} \right\} &= \frac{1}{n^k} \left\{ \left(\frac{n^2+1}{n} \right)^{10} - \frac{1}{n^{10}} \right\} \\ &= \frac{1}{n^k} \left\{ \frac{(n^2+1)^{10}}{n^{10}} - \frac{1}{n^{10}} \right\} \\ &= \frac{1}{n^k} \left\{ \frac{(n^2+1)^{10} - 1}{n^{10}} \right\} \\ &= \frac{(n^2+1)^{10} - 1}{n^{k+10}}\end{aligned}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \left\{ \left(n + \frac{1}{n} \right)^{10} - \frac{1}{n^{10}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{10} - 1}{n^{k+10}}$$

의 값이 존재하려면 분모의 최고차항의 차수가 분자의 최고차항의 차수보다 크거나 같아야 하므로

$$k+10 \geq 20 \quad \therefore k \geq 10$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 10이다.

답 ⑤

03 집합 S_n 의 부분집합 중 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$ 보다 큰 집합의 두 원소를 a, b ($a < b$)라 하자.

$$b - a > 2n \text{이므로 } b > a + 2n \quad (\text{단, } 1 \leq a < b \leq 3n)$$

$$a=1 \text{일 때, } b=2n+2, 2n+3, \dots, 3n \text{이므로}$$

가능한 부분집합 $\{a, b\}$ 는

$$\{1, 2n+2\}, \{1, 2n+3\}, \dots, \{1, 3n\} \text{의 } (n-1) \text{개}$$

$$a=2 \text{일 때, } b=2n+3, 2n+4, \dots, 3n \text{이므로}$$

가능한 부분집합 $\{a, b\}$ 는

$$\{2, 2n+3\}, \{2, 2n+4\}, \dots, \{2, 3n\} \text{의 } (n-2) \text{개}$$

$\vdots$

$$a=n-1 \text{일 때, } b=3n \text{이므로}$$

가능한 부분집합 $\{a, b\}$ 는 $\{n-1, 3n\}$ 의 1개

$n \leq a < 3n$ 이면 $b > a + 2n$ 을 만족시키는 b 는 존재하지 않는다.

따라서 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$ 보다 큰 집합 S_n 의 모든 부분집합의 개수는

$$a_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n^3 - n}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} \times \frac{n^3 - n}{6} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 ②

04 $a_i + b_i = n + 1$ 에서 $a_i = n + 1 - b_i$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{i=1}^n (a_i - 2b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (n+1-b_i-2b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (n+1-3b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \{(n+1)^2 - 6(n+1)b_i + 9b_i^2\} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i &= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{i=1}^n b_i^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{i=1}^n \{(n+1)^2 - 6(n+1)b_i + 9b_i^2\} \\ &= \sum_{i=1}^n (n+1)^2 - 6(n+1) \sum_{i=1}^n b_i + 9 \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= n(n+1)^2 - \frac{6(n+1)n(n+1)}{2} \\ &\quad + \frac{9n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n^3 + 2n^2 + n - 3n^3 - 6n^2 - 3n + 3n^3 + \frac{9}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \\ &= n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}}{1} = 1 \end{aligned}$$

답 1

05 $f(x) = \sum_{k=1}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(x^2 - \frac{2k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned} &= nx^2 - \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}x \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= nx^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \\ &= n\left(x - \frac{n+1}{2n}\right)^2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4n} \end{aligned}$$

따라서 주어진 이차함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$x = \frac{n+1}{2n}$ 일 때 $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4n}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4n} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12n} = \frac{n^2-1}{12n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2-1}{12n}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{12n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{12} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

답 ①

06 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)$

$$\begin{aligned} &= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + n \\ &= n^3 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{S_n - 1}{S_n + 1} = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_2 b_3 b_4 \cdots b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 \times 7}{3 \times 3} \times \frac{2 \times 13}{4 \times 7} \times \frac{3 \times 21}{5 \times 13} \times \frac{4 \times 31}{6 \times 21} \times \cdots \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(n-2)(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+3)} \times \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{3\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 ③

07 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+6n} + \cdots + \sqrt{n^2+30n} - 10n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\sqrt{n^2+3n} - n) + (\sqrt{n^2+6n} - n) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n^2+30n} - n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + n} + \frac{6n}{\sqrt{n^2+6n} + n} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{30n}{\sqrt{n^2+30n} + n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1} + \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}} + 1} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{30}{\sqrt{1+\frac{30}{n}} + 1} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{6}{2} + \frac{9}{2} + \cdots + \frac{30}{2} \quad \leftarrow \text{첫째항이 } \frac{3}{2}, \text{ 제10항이 } \frac{30}{2} = 15 \text{인} \\ &\quad \text{등차수열의 합이다.} \\ &= \frac{10 \times \left(\frac{3}{2} + \frac{30}{2}\right)}{2} = \frac{165}{2} \end{aligned}$$

따라서 $A = \frac{165}{2}$ 이므로 $2A = 2 \times \frac{165}{2} = 165$

답 165

08 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{16n^2-8n+1} < \sqrt{16n^2-3n} < \sqrt{16n^2} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(4n-1)^2} < \sqrt{16n^2-3n} < \sqrt{(4n)^2}$$

$$4n-1 < \sqrt{16n^2-3n} < 4n$$

$$\therefore [\sqrt{16n^2-3n}] = 4n-1$$

$$a_n = \sqrt{16n^2-3n} - [\sqrt{16n^2-3n}]$$

$$= \sqrt{16n^2-3n} - (4n-1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{16n^2-3n} - (4n-1)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2-3n-(4n-1)^2}{\sqrt{16n^2-3n}+4n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{\sqrt{16n^2-3n}+4n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{\sqrt{16-\frac{3}{n}}+4-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{16+4}} = \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$[\sqrt{16n^2-3n}]$ 의 값을 구한 경우	40%
(나)	유리화를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한 경우	60%

09 $a_n = n \left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} - a \right) = \frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} - a}{\frac{1}{n}}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{의 값이 존재하려면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} - a \right) = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} - a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{n-1}{4n+1} - \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5n}{16n+4}}{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}} + \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5}{16+\frac{4}{n}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{5}{16}}{\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}} = -\frac{5}{16}$$

답 $a = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{16}$

10 $(n+2)a_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{c_n}{n+2}$

$$(2n^2-1)b_n = d_n \text{으로 놓으면 } b_n = \frac{d_n}{2n^2-1}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 10, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 10 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^3 a_n b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (n+1)^3 \times \frac{c_n}{n+2} \times \frac{d_n}{2n^2-1} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 c_n d_n}{(n+2)(2n^2-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)(2n^2-1)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$$

답 50

11 $b_n - 2a_n = c_n$ 으로 놓으면 $\frac{b_n}{a_n} - 2 = \frac{c_n}{a_n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 8, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n} - 2 \right) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n^2}{a_n} - \frac{8a_n^2}{b_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^3 - 8a_n^3}{a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b_n - 2a_n)(b_n^2 + 2a_n b_n + 4a_n^2)}{a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2a_n) \left(\frac{b_n}{a_n} + 2 + \frac{4a_n}{b_n} \right)$$

$$= 8 \times \left(2 + 2 + 4 \times \frac{1}{2} \right) = 48$$

답 ②

12 ㄱ. 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴한다고 가정하면 수열 $\{a_n\}$ 이 발산하므로 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 발산한다.

그런데 수열 $\{a_n + b_n\}$ 이 0에 수렴하므로 모순이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다. (참)

ㄴ. (반례) $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$ 이라 하면 $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ 이

$$\text{므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

그런데 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 로 두 수열 $\{a_n\},$

$\{b_n\}$ 은 모두 발산한다. (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 이 발산한다고 가정하면 수열 $\left\{a_n + \frac{n}{2n+1}\right\}$

도 발산하므로 모순이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^2$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 도 수렴한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

• 다른풀이 •

$$\text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{이므로 두 수열}$$

$$\left\{a_n + \frac{n}{2n+1}\right\}, \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} \text{이 모두 수렴한다.}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n + \frac{n}{2n+1} \right) - \frac{n}{2n+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{n}{2n+1} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴하고, 수열 $\{a_n^2\}$ 도 수렴한다. (참)

13 ㄱ. (반례) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

이때, 수열 $\{a_n\}$ 은

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 발산(진동)한다. (거짓)

ㄴ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a_1 , 공차를 d 라 하면

$d > 0$ 일 때, 어떤 자연수 k 에 대하여 $n \geq k$ 이면

$$a_n > 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

$$d = 0 \text{일 때, } a_n = a_1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = f(a_1)$$

$d < 0$ 일 때, 어떤 자연수 k 에 대하여 $n \geq k$ 이면

$$a_n < 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 항상 수렴한다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = n$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다.

그런데 $a_n > 0$ 이므로 $b_n = 1$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴하지만 수열

$\{a_n\}$ 은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

14 $2n+1 < a_n < 2n+2$ 에서

$$2n+3 < a_{n+1} < 2n+4$$

$$2n+5 < a_{n+2} < 2n+6$$

⋮

$$4n+1 < a_{2n} < 4n+2$$

위의 식을 변끼리 더하면

$$\frac{(n+1)(2n+1+4n+1)}{2} < a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$$

$$< \frac{(n+1)(2n+2+4n+2)}{2}$$

$$(n+1)(3n+1) < a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} < (n+1)(3n+2)$$

$$\frac{1}{(n+1)(3n+2)} < \frac{1}{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}$$

$$< \frac{1}{(n+1)(3n+1)}$$

$$\frac{n^2}{(n+1)(3n+2)} < \frac{n^2}{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}$$

$$< \frac{n^2}{(n+1)(3n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(3n+2)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(3n+1)}$$

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(3n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}} = \frac{1}{3}$$

답 ②

15 조건 ㄴ의 부등식의 각 변에 $(2n+1)$ 을 곱하면

$$\frac{2n(2n+1)}{3n^2+2n+1} < (2n+1)(a_n+b_n) < \frac{(2n+1)^2}{3n^2+2n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n+1)}{3n^2+2n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(a_n+b_n)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{3n^2+2n+2}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n+1)}{3n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{3n^2+2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{4}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(a_n+b_n) \leq \frac{4}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(a_n+b_n) = \frac{4}{3}$$

조건 ㄱ에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n = 5$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2n+1)(a_n+b_n) - (2n+1)a_n\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(a_n+b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n$$

$$= \frac{4}{3} - 5 = -\frac{11}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2b_n}{2a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(a_n - 2b_n)}{(2n+1)(2a_n + b_n)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)a_n - 2(2n+1)b_n}{2(2n+1)a_n + (2n+1)b_n}$$

$$= \frac{5 - 2 \times \left(-\frac{11}{3}\right)}{2 \times 5 + \left(-\frac{11}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{37}{3}}{\frac{19}{3}} = \frac{37}{19}$$

따라서 $p=19, q=37$ 이므로

$$p+q=19+37=56$$

답 56

16 가우스 기호 $\left[\right]$ 의 성질에 의하여

$$\left[\frac{n}{10} \right] \leq \frac{n}{10} < \left[\frac{n}{10} \right] + 1$$

$$\frac{n}{10} - 1 < \left[\frac{n}{10} \right] \leq \frac{n}{10}$$

n 이 자연수이므로

$$\frac{1}{n} \left(\frac{n}{10} - 1 \right) < \frac{1}{n} \left[\frac{n}{10} \right] \leq \frac{1}{n} \times \frac{n}{10}$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \left[\frac{n}{10} \right] \leq \frac{1}{10}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{10} \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n}{10} \right] = \frac{1}{10} \quad \therefore A = \frac{1}{10}$$

$$\therefore 100A = 100 \times \frac{1}{10} = 10$$

답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	$\left[\frac{n}{10} \right] \leq \frac{n}{10} < \left[\frac{n}{10} \right] + 1$ 임을 이용하여 $\frac{1}{n} \left[\frac{n}{10} \right]$ 의 값의 범위를 구한 경우	60%
(나)	수열의 극한값의 대소 관계를 이용하여 A 의 값을 구한 후, $100A$ 의 값을 구한 경우	40%

17 ㄱ. (반례) $\{a_n\} : 2, 1, 1, 1, \dots, \{b_n\} : 1, 2, 2, 2, \dots$ 이면 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 각각 수렴하고, 수열 $\{a_n - b_n\}$ 이 -1 로 수렴하지만 $n=1$ 인 경우 $a_1 > b_1$ 이다. (거짓)

ㄴ. (반례) $a_n = (-1)^n$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n-1} = -1 = \alpha,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1 = \beta \text{에서 } \alpha < \beta \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{은 진동(발산)한다. (거짓)}$$

ㄷ. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 각각 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \text{ (}\alpha, \beta \text{는 실수)라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \beta - \alpha = 0 \text{에서 } \alpha = \beta$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha (= \beta)$$

$$\text{이때, } a_n < c_n < b_n \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha (= \beta) \text{이다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

18 해결단계

① 단계	주어진 수열을 묶어 군수열로 생각한다.
② 단계	주어진 수열에서 $\frac{1}{3}$ 이 나오는 위치를 파악한 후, $\frac{1}{3}$ 이 k 개 나오는 항의 수의 범위를 구한다.
③ 단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 의 값을 구한다.

주어진 수열을

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$$

로 나타내면

$$\left(\frac{1}{1} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right), \dots$$

와 같이 분모가 같은 것끼리 묶어 군수열로 생각할 수 있다.

모든 자연수 k 에 대하여 제 $3k$ 군의 k 번째 항이 $\frac{1}{3}$ 이고,

제1군부터 제 $(3k-1)$ 군까지의 항의 개수가

$$\sum_{m=1}^{3k-1} m = \frac{3k(3k-1)}{2} = \frac{9k^2-3k}{2} = \frac{9k^2-3k}{2} + k$$

이므로 k 번째로 나타나는 $\frac{1}{3}$ 은 제 $\frac{9k^2-3k}{2}$ 항이다.

이때, 첫째항부터 제 n 항까지 중에서 $\frac{1}{3}$ 의 개수가 a_n 이므로

$$\text{로 } \frac{9k^2-3k}{2} \leq n < \frac{9(k+1)^2-3(k+1)}{2}, \text{ 즉}$$

$$\frac{9k^2-3k}{2} \leq n < \frac{9k^2+17k+8}{2} \text{일 때 } a_n = k \text{이다.}$$

$$\frac{9k^2-3k}{2} \leq n < \frac{9k^2+17k+8}{2} \text{에서}$$

$$\sqrt{\frac{9k^2-3k}{2}} \leq \sqrt{n} < \sqrt{\frac{9k^2+17k+8}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{9k^2+17k+8}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{9k^2-3k}}$$

$$\sqrt{\frac{2k^2}{9k^2+17k+8}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{2k^2}{9k^2-3k}} \quad (\because a_n = k)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2k^2}{9k^2+17k+8}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2k^2}{9k^2-3k}}$$

$n \rightarrow \infty$ 이면 $k \rightarrow \infty$ 이고

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2k^2}{9k^2+17k+8}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{9+\frac{17}{k}+\frac{8}{k^2}}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2k^2}{9k^2-3k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{9-\frac{1}{k}}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{2}}{3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 ②

• 다른풀이 •

주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{1} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \right), \dots$$

와 같이 분모가 같은 것끼리 묶어 군수열로 생각하면 k 번째로 나타나는 $\frac{1}{3}$ 은

$$\frac{1}{3}$$

$$\sum_{m=1}^{3k-1} m + k = \frac{3k(3k-1)}{2} + k = \frac{9k^2-k}{2}$$

에서 제 $\frac{9k^2-k}{2}$ 항이다.

$$\text{즉, } n = \frac{9k^2-k}{2} \text{이면 } a_n = k \text{이다.}$$

$$\frac{9k^2-k}{2} = n \text{에서 } 9k^2-k-2n=0$$

$$\therefore k = \frac{1 + \sqrt{1+72n}}{18} \quad (\because k \text{는 자연수})$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1+72n}}{18\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{1}{n} + 72}}{18} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

19 다항식 $(x^2 - 2x + 3)^n$ 을 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x + 3)^n &= (x^2 - 1)Q(x) + R(x) \\ &= (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

위의 식의 양변에

$$x=1 \text{을 대입하면 } 2^n = a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x=-1 \text{을 대입하면 } 6^n = -a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{2}(2^n - 6^n), \quad b = \frac{1}{2}(2^n + 6^n)$$

따라서 $R(x) = \frac{1}{2}(2^n - 6^n)x + \frac{1}{2}(2^n + 6^n)$ 이므로

$$\begin{aligned} R(3) &= \frac{3}{2}(2^n - 6^n) + \frac{1}{2}(2^n + 6^n) \\ &= 2^{n+1} - 6^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 2^n}{R(3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 2^n}{2^{n+1} - 6^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = -6 \quad \text{답 } -6 \end{aligned}$$

20 등비수열 $\{(2x^2 - 4x + 1)^n\}$ 의 공비는 $2x^2 - 4x + 1$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면 $-1 < 2x^2 - 4x + 1 \leq 1$ 이어야 한다.

$$-1 < 2x^2 - 4x + 1 \text{에서 } 2x^2 - 4x + 2 > 0$$

$$x^2 - 2x + 1 > 0, \quad (x-1)^2 > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2x^2 - 4x + 1 \leq 1 \text{에서 } 2x^2 - 4x \leq 0$$

$$x^2 - 2x \leq 0, \quad x(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 2$$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하기 위한 정수 x 는 0, 2
이므로 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$0 + 2 = 2 \quad \text{답 } 2$$

21 $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{7}{3}$ 의 n 대신에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \frac{a_3}{a_4} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{a_n} > \left(\frac{7}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_1}{a_n} > \left(\frac{7}{3}\right)^{n-1}, \quad \frac{a_n}{a_1} < \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$$

$$0 < a_n < a_1 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \quad (\because a_n > 0)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7a_n - n^3 + 2}{4a_n + 5n^3 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 2}{5n^3 + 3n} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{n^3}}{5 + \frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{5} \quad \text{답 } \textcircled{2} \end{aligned}$$

• 다른풀이 •

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{7}{3} > 1 \text{이므로 } 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots > 0$$

$$\therefore 0 < a_n < a_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 각 변을 n^3 으로 나누면

$$0 < \frac{a_n}{n^3} < \frac{a_1}{n^3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{n^3}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{n^3} = 0 \quad (\because a_1 \text{은 상수}) \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7a_n - n^3 + 2}{4a_n + 5n^3 + 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7 \times \frac{a_n}{n^3} - 1 + \frac{2}{n^3}}{4 \times \frac{a_n}{n^3} + 5 + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{-7 \times 0 - 1 + 0}{4 \times 0 + 5 + 0} \\ &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

22 직선 $y = g(x)$ 는 원점과 점 (3, 3)을 지나므로

$$g(x) = x$$

주어진 그래프에서 $f(2) = 4$ 이고, $g(2) = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} h(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(2)\}^{n+1} + 5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n + \{g(2)\}^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 5 \times 2^n}{4^n + 2^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 4 \end{aligned}$$

같은 방법으로 주어진 그래프에서 $f(3) = 3$ 이고,

$$g(3) = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} h(3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(3)\}^{n+1} + 5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n + \{g(3)\}^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5 \times 3^n}{3^n + 3^n} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \times 3^n}{2 \times 3^n} = 4$$

$$\therefore h(2) + h(3) = 4 + 4 = 8$$

답 $\textcircled{3}$

23 (i) $1 \leq a < 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times a^n + 4^{n+1}}{a^{n+1} + b \times 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times \left(\frac{a}{4}\right)^n + 4}{a \times \left(\frac{a}{4}\right)^n + b} \\ = \frac{7 \times 0 + 4}{a \times 0 + b} = \frac{4}{b}$$

즉, $\frac{4}{b} > 1$ 에서 $b < 4$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 \times 3 = 9 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{가능한 } a \text{는 } 1, 2, 3 \text{의 } 3 \text{개} \\ \text{가능한 } b \text{는 } 1, 2, 3 \text{의 } 3 \text{개이다} \end{array}$$

(ii) $a = 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times 4^n + 4^{n+1}}{4^{n+1} + b \times 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11 \times 4^n}{(4+b) \times 4^n} \\ = \frac{11}{4+b}$$

즉, $\frac{11}{4+b} > 1$ 에서 $4+b < 11$

$\therefore b < 7$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$1 \times 6 = 6 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{가능한 } a \text{는 } 4 \text{의 } 1 \text{개} \\ \text{가능한 } b \text{는 } 1, 2, 3, \dots, 6 \text{의 } 6 \text{개이다} \end{array}$$

(iii) $4 < a \leq 10$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times a^n + 4^{n+1}}{a^{n+1} + b \times 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 4 \times \left(\frac{4}{a}\right)^n}{a + b \times \left(\frac{4}{a}\right)^n} \\ = \frac{7 + 4 \times 0}{a + b \times 0} = \frac{7}{a}$$

즉, $\frac{7}{a} > 1$ 에서 $a < 7$ 이므로 $4 < a < 7$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$2 \times 10 = 20 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{가능한 } a \text{는 } 5, 6 \text{의 } 2 \text{개} \\ \text{가능한 } b \text{는 } 1, 2, 3, \dots, 10 \text{의 } 10 \text{개이다} \end{array}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$9 + 6 + 20 = 35$$

답 35

24 $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n < a_n < \frac{3^{n+1}}{2}$ 에서

$$\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} < a_n < \frac{3^{n+1}}{2}$$

위의 부등식의 각 변을 3^n 으로 나누면

$$\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{a_n}{3^n} < \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$|b_{n+1}| = \frac{1}{4} |b_n|$ 에서 수열 $\{|b_n|\}$ 은 첫째항이

$|b_1| = 2$ 이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$|b_n| = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n - 2^n}{3^{n+2} a_n + 9^{n-1} b_n + 3^{2n+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n}{\frac{a_n}{3^n} + \frac{b_n}{81} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times 0}{\frac{3}{2} + \frac{0}{81} + 1} \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8}) = \frac{2}{45}$$

답 $\frac{2}{45}$

25 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5x^{n+1} + 4}{x^{n-1} + 2}$ 에서

(i) $-1 < x < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{5 \times 0 + 4}{0 + 2} = 2$$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{5 + 4}{1 + 2} = 3$$

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n-1} = \infty \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + \frac{4}{x^{n-1}}}{1 + \frac{2}{x^{n-1}}} = 5x^2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f\left(\frac{k-3}{3}\right) = \begin{cases} 2 & (k=1, 2, 3, 4, 5) \\ 3 & (k=6) \\ 5\left(\frac{k-3}{3}\right)^2 & (k=7, 8, 9, 10) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{k-3}{3}\right)$$

$$= 5 \times 2 + 3 + 5 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \right]$$

$$= 10 + 3 + 5 \times 14 = 83$$

답 83

26 $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{2n}}$ 에서

(i) $\left|\frac{x}{2}-1\right|<1$, 즉 $0<x<4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{f(x)-0}{1+0} = x^2+ax+b$$

(ii) $\left|\frac{x}{2}-1\right|=1$, 즉 $x=0$ 또는 $x=4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{1+1} = \frac{x^2+ax+b-1}{2}$$

(iii) $\left|\frac{x}{2}-1\right|>1$, 즉 $x<0$ 또는 $x>4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2n} = \infty \text{이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2n}} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2n}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & (0<x<4) \\ \frac{x^2+ax+b-1}{2} & (x=0 \text{ 또는 } x=4) \\ -1 & (x<0 \text{ 또는 } x>4) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$, $x=4$ 에서도 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \text{이어야 하므로}$$

$$-1 = b = \frac{b-1}{2} \text{에서 } b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = g(4) \text{이어야 하므로}$$

$$16+4a+b = -1 = \frac{16+4a+b-1}{2} \text{에서}$$

$$16+4a-1 = -1, 4a = -16 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore ab = -4 \times (-1) = 4$$

답 ①

27 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+(3^x)^n}{3^n+(3^x)^n}$ 에서

(i) $x<1$ 일 때, $3^x<3$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{3^n} + \left(\frac{3^x}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{3^x}{3}\right)^n} = 0$$

(ii) $x=1$ 일 때, $3^x=3$ 이므로

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+3^n}{3^n+3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{3^n} + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

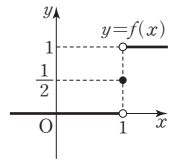
(iii) $x>1$ 일 때, $3^x>3$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{(3^x)^n} + 1}{\left(\frac{3}{3^x}\right)^n + 1} = 1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x<1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ③

28 $-1< x \leq 1$ 에서 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x^{2n} + |x|}{x^{2n} + 1}$ 이므로

(i) $-1< x < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{이므로}$$

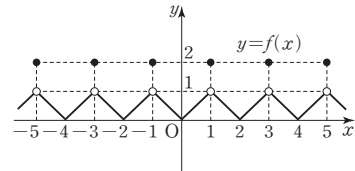
$$f(x) = \frac{3 \times 0 + |x|}{0 + 1} = |x|$$

(ii) $x=1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1 \text{이므로}$$

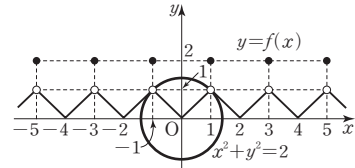
$$f(1) = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

또한, $f(x) = f(x+2)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



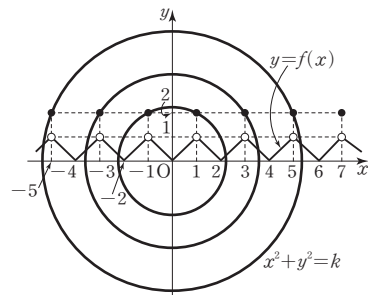
ㄱ. $f(3) = f(1) = 2$ (참)

ㄴ. 원 $x^2+y^2=2$ 는 중심이 $(0, 0)$ 이고, 두 점 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 을 지나므로 다음 그림과 같다.



따라서 원 $x^2+y^2=2$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나지 않는다. (참)

ㄷ. 원 $x^2+y^2=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 서로 다른 네 점에서 만나려면 $x>0$ 일 때 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



위의 그림과 같이 원 $x^2+y^2=k$ 가 점 $(1, 2)$, $(3, 2)$, $(5, 2)$, ..., 즉 점 $(2n-1, 2)$ (n 은 자연수)를 지날 때, 원 $x^2+y^2=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 서로 다른 네 점에서 만난다.

$(2n-1)^2 + 2^2 = k^2$ 이고 $k \leq 100$ 이므로
 $(2n-1)^2 + 4 \leq 100$, $(2n-1)^2 \leq 96$
 $\therefore n=1, 2, 3, 4, 5$
 따라서 100 이하의 자연수 k 의 개수는 5이다. (거짓)
 그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. ▶ ②

29 이차방정식 $x^2 - \sqrt{a_n}x + \frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로
 $D = (-\sqrt{a_n})^2 - 4\left\{\frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\right\} = 0$ 에서
 $a_n - a_{n+1} + \frac{4}{n(n+1)} = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{4}{n(n+1)}$
 $\therefore a_{n+1} = a_n + 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
 위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ a_3 &= a_2 + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ a_4 &= a_3 + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\vdots \\ +) \quad a_n &= a_{n-1} + 4\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ a_n &= a_1 + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 20 + 4\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (\because a_1 = 20) \\ &= 24 - \frac{4}{n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(24 - \frac{4}{n}\right) = 24 \end{aligned}$$
 ▶ 24

30 $a_n a_{n+1} = 3^n$ 의 n 대신에 $n+1$ 을 대입하면
 $a_{n+1} a_{n+2} = 3^{n+1}$
 $\frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3^n}$, $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 3$
 $\therefore a_{n+2} = 3a_n$
 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 2$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로
 $a_{2n-1} = 2 \times 3^{n-1}$ ㉠
 한편, $a_n a_{n+1} = 3^n$ 에 $n=1$ 을 대입하면
 $a_1 a_2 = 3$, $2a_2 = 3 \quad \therefore a_2 = \frac{3}{2}$
 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a_2 = \frac{3}{2}$ 이고 공비가 3인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = \frac{\frac{3}{2}(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{4}(3^n - 1) \quad \text{.....} \textcircled{㉡}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_{2k}}{a_{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}(3^n - 1)}{2 \times 3^{n-1}} \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}\left(3 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times (3 - 0)}{2} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

▶ $\frac{9}{8}$

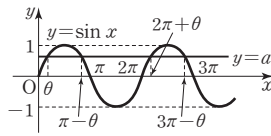
31 $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = 4\sqrt{x}$ 이므로
 $a_{2n} = f(a_{2n-1}) = \frac{1}{4}a_{2n-1}^2$ ㉠
 $a_{2n+1} = g(a_{2n}) = 4\sqrt{a_{2n}}$ ㉡
 ㉡에서 $\sqrt{a_{2n}} = \frac{1}{4}a_{2n+1}$
 $\therefore a_{2n} = \frac{1}{16}a_{2n+1}^2$
 이것을 ㉠에 대입하여 정리하면
 $\frac{1}{16}a_{2n+1}^2 = \frac{1}{4}a_{2n-1}^2$, $a_{2n+1}^2 = 4a_{2n-1}^2$
 $\therefore a_{2n+1} = 2a_{2n-1}$ 또는 $a_{2n+1} = -2a_{2n-1}$
 그런데 $a_1 > 0$ 이고 $a_n > 0$ 이므로
 $a_{2n+1} = 2a_{2n-1}$
 즉, 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 공비가 2인 등비수열이므로
 $a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2^{n-1}$ ㉢

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{8} \times 4^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1 \times (4^n - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{4^n - 1}{24} \quad \text{.....} \textcircled{㉣} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_{2k}}{a_{2n-1}^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^n - 1}{24}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2^{n-1}\right)^2} \quad (\because \textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{12 \times 4^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{4^{n-1}}}{12} \\ &= \frac{4 - 0}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

▶ ③

32 $\sin \alpha = \cos \beta$ 에서 $\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$㉠

이때, $\sin \alpha = a$ 라 하고 방
정식 $\sin x = a$ 의 가장 작은
근을 θ 라 하면



$x = \theta, \pi - \theta, 2\pi + \theta,$

$3\pi - \theta, \dots$

이므로 음이 아닌 정수 m 에 대하여 $x = m\pi + (-1)^m \theta$
라 할 수 있다.

즉, ㉠에서 $\frac{\pi}{2} - \beta = k\pi + (-1)^k \alpha$ (단, k 는 정수)

.....㉡

(i) $k = 2k'$ (k' 은 정수)일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\pi}{2} - \beta = 2k'\pi + \alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - 2k'\pi$$

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta - 2k'\pi \right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$= \sin \beta$$

조건을 만족시키므로

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - 2k'\pi$$

(ii) $k = 2k' - 1$ (k' 은 정수)일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\pi}{2} - \beta = (2k' - 1)\pi - \alpha$$

$$\therefore \alpha = (2k' - 1)\pi + \beta - \frac{\pi}{2}$$

$$= 2k'\pi + \beta - \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos \alpha = \cos \left(2k'\pi + \beta - \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$= \cos \left(\beta - \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$= -\sin \alpha$$

$\cos \alpha = \sin \beta$ 를 만족시키지 않으므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - 2k'\pi$ (k' 은 정수)이므로 이 값
을 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \frac{\pi}{2} + 6\pi, \dots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$, 공차가 2π 인 등차수열이
므로

$$a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-1) = 2\pi n - \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi n - \frac{3}{2}\pi}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi - \frac{3\pi}{2n}}{1} = 2\pi$$

답 2π

33 직선 $x=n$ 이 두 곡선 $y=\sqrt{5x+4}$, $y=\sqrt{2x-1}$ 과 만나는 점이 각각 A_n, B_n 이므로

$$A_n(n, \sqrt{5n+4}), B_n(n, \sqrt{2n-1})$$

두 선분 OA_n, OB_n 의 길이가 각각 a_n, b_n 이므로

$$a_n = \sqrt{n^2 + 5n + 4}, b_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{a_n - b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{\sqrt{n^2 + 5n + 4} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12(\sqrt{n^2 + 5n + 4} + \sqrt{n^2 + 2n - 1})}{(n^2 + 5n + 4) - (n^2 + 2n - 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12(\sqrt{n^2 + 5n + 4} + \sqrt{n^2 + 2n - 1})}{3n + 5}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12\left(\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)}{3 + \frac{5}{n}}$$

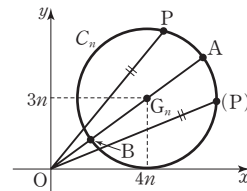
$$= \frac{12 \times (\sqrt{1} + \sqrt{1})}{3} = 8$$

답 ③

34 원 C_n 은 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 $3n$ 이다.

원 C_n 의 중심을 $G_n(4n, 3n)$ 이라 하면

$$\overline{OG_n} = \sqrt{(4n)^2 + (3n)^2} = \sqrt{25n^2} = 5n$$



위의 그림과 같이 직선 OG_n 과 원 C_n 이 만나는 두 점을
각각 A, B라 하면 선분 OP 의 길이는

$$\overline{OB} \leq \overline{OP} \leq \overline{OA}$$

$$\overline{OA} = \overline{OG_n} + \overline{G_nA} \quad \text{원 } C_n \text{의 반지름의 길이}$$

$$\overline{OA} = \overline{OG_n} + 3n = 8n, \overline{OB} = \overline{OG_n} - 3n = 2n \text{이므로}$$

$$2n \leq \overline{OP} \leq 8n$$

선분 OP 의 길이가 자연수이므로

$$\overline{OP} = 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, 8n$$

이때, $\overline{OP} = 2n$ 또는 $\overline{OP} = 8n$ 이라면 점 P는 점 B 또는

점 A이어야 하므로 이때의 점 P의 개수는 각각 1이다.

또한, $\overline{OP} = 2n+1, 2n+2, \dots, 8n-1$ 이라면 점 P는 지

$$(6n-1) \text{개}$$

름 AB를 기준으로 위쪽과 아래쪽에 각각 하나씩 존재해
야 하므로 이때의 점 P의 개수는 모두 2이다.

따라서 구하는 점 P의 개수는

$$a_n = 1 + 1 + 2 \times (6n-1) = 12n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 12k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \times 12 \times \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(n+1)}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1} = 6$$

답 6

35 점 $A(2n, n)$ 을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $A(2n, n)$ 을 지나므로

$$(2n-r)^2 + (n-r)^2 = r^2$$

$$4n^2 - 4nr + r^2 + n^2 - 2nr + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 6nr + 5n^2 = 0, (r-5n)(r-n) = 0$$

$$\therefore r = 5n \text{ 또는 } r = n$$

$$\therefore C_1: (x-n)^2 + (y-n)^2 = n^2,$$

$$C_2: (x-5n)^2 + (y-5n)^2 = 25n^2$$

두 원 C_1, C_2 가 각각 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 원 C_1, C_2 가 만나는 두 점 A, B 는 서로 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

즉, $B(n, 2n)$

한편, 원 C_2 위의 한 점 P 에

대하여 삼각형 APB 의 넓

이가 최대려면 삼각형

APB 의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 할 때

높이가 최대이어야 하므로

$\overline{AB}$ 의 중점 H 에 대하여 직

선 HP 가 원 C_2 의 중심을 지나야 한다.

이때, 원 C_2 의 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이 원 C_2 의 중심을 지나므로 삼각형 APB 의 넓이가 최대가 되도록 하는 직선 HP 는 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이다.

직선 AB 의 방정식은

$$y - 2n = \frac{2n - n}{n - 2n}(x - n)$$

$$y - 2n = -(x - n)$$

$$\therefore x + y - 3n = 0$$

직선 $x + y - 3n = 0$ 과 원 C_2 의 중심 $(5n, 5n)$ 사이의 거리는

$$\frac{|5n + 5n - 3n|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7n}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}n$$

$$\text{이므로 } \overline{HP} \leq \frac{7\sqrt{2}}{2}n + 5n = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} + 5\right)n$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2n - n)^2 + (n - 2n)^2}$$

$$= \sqrt{2n^2} = \sqrt{2}n$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}n \times \left(\frac{7\sqrt{2}}{2} + 5\right)n$$

$$= \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}n^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2n^2 - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}n^2}{2n^2 - 3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7 + 5\sqrt{2}}{2}}{2 - \frac{3}{n}}$$

$$= \frac{7 + 5\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

36 해결단계

① 단계	두 곡선 $y = -\sqrt{nx}, y = \frac{1}{n}x^2$ 의 위치 관계를 파악한다.
② 단계	a_n 의 값의 범위를 n 을 이용하여 나타낸다.
③ 단계	$80 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1}$ 의 값을 구한다.

함수 $y = -\sqrt{nx}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한

후, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$-x = -\sqrt{ny} \text{에서 } x = \sqrt{ny}$$

$$x^2 = ny \quad \therefore y = \frac{1}{n}x^2$$

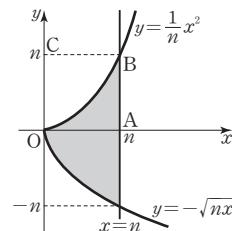
즉, 두 곡선 $y = -\sqrt{nx}, y = \frac{1}{n}x^2$ 과 직선 $x = n$ 으로 둘러

싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같고, 곡선

$y = \frac{1}{n}x^2 (x \geq 0)$ 과 y 축, 직선 $y = n$ 으로 둘러싸인 도형

과 곡선 $y = -\sqrt{nx}$ 와 x 축, 직선 $x = n$ 으로 둘러싸인 도

형은 합동이다.



(단, 경계선 포함)

위의 그림에서 $O(0, 0), A(n, 0), B(n, n), C(0, n)$ 이라 하면 구하는 점의 개수는 정사각형 $OABC$ 의 둘레 및

내부에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수에서 y 축 위의 점의 개수를 빼고 곡선 $y = \frac{1}{n}x^2$ 위의 점의 개수를 더하면 된다.

정사각형 $OABC$ 의 둘레 및 내부에 포함되면서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $(n+1)^2$

이 중에서 y 축 위의 점의 개수는 $n+1$

이때, 곡선 $y = \frac{1}{n}x^2$ 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n 이라 하면

$$2 \leq b_n \leq n+1 \text{이므로}$$

$$(n+1)^2 - (n+1) + 2 \leq a_n \leq (n+1)^2 - (n+1) + n+1$$

$$n^2 + n + 2 \leq a_n \leq n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{n^2 + n + 2}{4n^2 + 2n + 1} \leq \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1} \leq \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2n + 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 2}{4n^2 + 2n + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2n + 1}$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 2}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1} \leq \frac{1}{4}$$

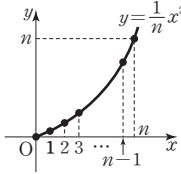
따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{4}$ 이므로

$$80 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2 + 2n + 1} = 80 \times \frac{1}{4} = 20$$

답 20

blacklabel 특강 풀이첨삭

곡선 $y = \frac{1}{n}x^2$ 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 b_n 은 n 이 소수일 때, 즉 조건을 만족시키는 점이 $(0, 0)$, (n, n) 일 때가 최소이고, 오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x \leq n$ 인 모든 정수 x 에 대하여 $\frac{1}{n}x^2$ 의 값이 모두 정수일 때가 최대이다.
따라서 $2 \leq b_n \leq n+1$ 이다.



Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 15

- 01 47 02 23 03 $\frac{9}{4}$ 04 21 05 ⑤
06 25 07 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

01 해결단계

① 단계	조건 (따)를 조건 (나)를 이용하여 정리한다.
② 단계	①단계에서 정리한 식이 성립하도록 하는 p, q, r 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	조건 (가)에 맞는 순서쌍 (p, q, r) 의 개수를 구한다.

조건 (다)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (pn+2)(qn+r)a_n = 45$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (4n-7)a_n \times \frac{(pn+2)(qn+r)}{4n-7} \right\} = 45$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n-7)a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(pn+2)(qn+r)}{4n-7} = 45$$

$$5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(pn+2)(qn+r)}{4n-7} = 45 \quad (\because \text{조건 (다)})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(pn+2)(qn+r)}{4n-7} = 9$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pqn^2 + (pr+2q)n + 2r}{4n-7} = 9$$

이때, $pq \neq 0$ 이면 위의 수열은 발산하므로

$$pq = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pqn^2 + (pr+2q)n + 2r}{4n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(pr+2q)n + 2r}{4n-7}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pr+2q + \frac{2r}{n}}{4 - \frac{7}{n}}$$

$$= \frac{pr+2q}{4} = 9$$

$$\therefore pr+2q = 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $p=0$ 또는 $q=0$ 이므로

(i) $p=0$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에서 } 2q = 36 \quad \therefore q = 18$$

조건 (가)에 의하여 r 는 집합 $\{x | 0 \leq x \leq 40, x \text{는 정수}\}$

의 원소이고, p, q, r 는 서로 다른 세 정수이므로 가능한 순서쌍 (p, q, r) 의 개수는

$$41 - \overline{2} = 39 \quad r=0 \text{ 또는 } r=18 \text{인 경우는 제외한다.}$$

(ii) $q=0$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에서 } pr = 36 = 2^2 \times 3^2$$

이것을 만족시키는 순서쌍 (p, r) 의 개수는

$$(2+1) \times (2+1) - \overline{1} = 9 - 1 = 8 \quad (p, r) \text{가 } (6, 6) \text{인 경우는 제외한다.}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (p, q, r) 의 개수는

$$39 + 8 = 47$$

답 47

02 해결단계

① 단계	$a_{n+1} - a_n$ 의 값의 범위를 부등식으로 나타낸다.
② 단계	n 대신에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.
③ 단계	극한값의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값의 범위를 구한 후, 최댓값 M 을 구하여 $4M$ 의 값을 구한다.

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n(n+2)} \text{에서}$$

$$-\frac{1}{n(n+2)} \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{n(n+2)}$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \leq a_2 - a_1 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \leq a_3 - a_2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \leq a_4 - a_3 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

⋮

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \leq a_{n-1} - a_{n-2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$+ \left(\dots \right) \leq a_n - a_{n-1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq a_n - a_1$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\frac{17}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \leq a_n \leq \frac{23}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

($\because a_1 = 5$)

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{17}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right\} = \frac{17}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{23}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right\} = \frac{23}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{17}{4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{23}{4}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 최댓값은 $M = \frac{23}{4}$ 이므로

$$4M = 4 \times \frac{23}{4} = 23$$

답 23

03 해결단계

① 단계	n 회 반복한 후 그릇 B에 담긴 물의 양을 b_n L이라 할 때, $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	①단계의 관계식과 두 그릇에 담긴 물의 총 양이 3 L임을 이용하여 a_{n+1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 후, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한다.

처음 3 L의 물을 그릇 A에 1 L, 그릇 B에 2 L로 나누어 담았으므로 이때의 두 그릇 A, B에 담긴 물의 양을 각각 a_0 L, b_0 L이라 하면

$$a_0=1, b_0=2$$

그릇 A의 물 중에서 $\frac{1}{3}$ 의 물을 퍼내어 그릇 B에 붓고,

다시 그릇 B의 물 중에서 $\frac{1}{2}$ 의 물을 퍼내어 그릇 A에 붓는 시행을 반복하므로 n 회 반복한 후 그릇 A, B에 담긴 물의 양을 각각 a_n L, b_n L라 하면

$$a_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{6},$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{3}a_n\right) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{3}a_n\right) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{2}b_n & \dots\dots\textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$$

두 그릇 A, B에 담긴 물의 총 양은 3 L로 일정하므로

$$a_n + b_n = 3 \text{에서 } b_n = 3 - a_n$$

위의 식을 ①에 대입하여 정리하면

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{2}(3 - a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{3}{2} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \text{라 하면 } a_{n+1} = pa_n - p\alpha + \alpha$$

위의 식이 ②과 같으므로

$$p = \frac{1}{3}, -p\alpha + \alpha = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{3}\alpha + \alpha = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\alpha = \frac{3}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a_{n+1} - \frac{9}{4} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{수열 } \left\{a_n - \frac{9}{4}\right\} \text{는 첫째항이 } a_1 - \frac{9}{4} = \frac{11}{6} - \frac{9}{4} = -\frac{5}{12} \text{이}$$

고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - \frac{9}{4} = -\frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = -\frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{-\frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{9}{4}\right\} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{4}$

blacklabel 특강 참고

$a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$) 꼴로 정의된 수열의 극한

$$a_{n+1} = pa_n + q \text{를 } a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

꼴로 변형하면 수열 $\{a_n - \alpha\}$ 는 첫째항이 $a_1 - \alpha$ 이고 공비가 p 인 등비수열이므로

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)p^{n-1} \quad \therefore a_n = (a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$$

이때, $|p| < 1$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha\} = \alpha$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값이 존재하고, 그 값은 α 이다.

한편, 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 a 가 존재하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{이므로 } a_{n+1} = pa_n + q \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + q) \quad \therefore a = pa + q \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

①에서 $q = -pa + a$ 이므로 ②과 같다.

따라서 $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 극한은 $|p| < 1$ 일 때 존재하며 그 극한값은 수열의 귀납적 정의 $a_{n+1} = pa_n + q$ 의 양변에 극한을 취하여 구하면 된다.

04 해결단계

① 단계	$ f(x) < 1, f(x) = -1, f(x) = 1, f(x) > 1$ 로 범위를 나누어 함수 $g(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $g(x)$ 가 $x=2, x=5$ 에서만 불연속이기 위한 함수 $f(x)$ 의 조건을 찾는다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 를 구한 후, $f(7)$ 의 값을 구한다.

(i) $|f(x)| < 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n+1} = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(ii) $f(x) = -1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n+1} = -1 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{-1-1}{1+1} = -1$$

(iii) $f(x) = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n+1} = 1 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iv) $|f(x)| > 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x)\}^{2n+1} = \infty \text{이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - \frac{1}{\{f(x)\}^{2n}}}{1 + \frac{1}{\{f(x)\}^{2n}}} = f(x)$$

(i) ~ (iv)에서

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (|f(x)| < 1) \\ -1 & (f(x) = -1) \\ 0 & (f(x) = 1) \\ f(x) & (|f(x)| > 1) \end{cases}$$

삼차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 함수 $g(x)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표에서 불연속이다.

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=2, x=5$ 에서만 불연속이므로 방정식 $f(x)=1$, 즉 $f(x)-1=0$ 의 실근은 2 또는 5이어야 한다. 즉,

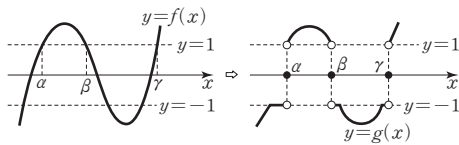
$$f(x)-1=(x-2)^2(x-5) \text{ 또는 } f(x)-1=(x-2)(x-5)^2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$f(x)=(x-2)^2(x-5)+1 \text{ 또는 } f(x)=(x-2)(x-5)^2+1$$

- ① $f(x)=(x-2)^2(x-5)+1$ 일 때,
 $f(3)=-1$ 이므로 $g(3)=-1$
 $g(3)>0$ 이어야 하므로 모순이다.
- ② $f(x)=(x-2)(x-5)^2+1$ 일 때,
 $f(3)=5$ 이므로 $g(3)=5$
 $g(3)>0$ 을 만족시킨다.
- ①, ②에서 $f(x)=(x-2)(x-5)^2+1$ 이므로
 $f(7)=5 \times 2^2+1=21$

답 21

blacklabel 특강 풀이첨삭



임의의 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그리면 위의 그림과 같다. 이때, 함수 $g(x)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표에서만 불연속이므로 조건에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는 2, 5 이어야 한다.

05 해결단계

① 단계	조건 ㉞를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	$f(2n-1)$ 과 $f(2n+1)$ 의 대소 관계를 파악한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	수열의 기본 성질과 조건 ㉞를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$$f(n)=\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k$$

ㄱ. 조건 ㉞의 $a_n < a_{n+1} < 0$ 에서

$$a_n - a_{n+1} < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 - f(2n)$$

$$= a_1 - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k$$

$$= a_1 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n})$$

$$= a_1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_{2n}$$

$$= (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}$$

$$< 0 \quad (\because \textcircled{1}, a_n < 0 \text{ 이므로 } a_{2n} < 0)$$

$$\therefore a_1 < f(2n) \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f(2n+1) - f(2n-1)$

$$= \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k$$

$$= (-1)^{2n-1} a_{2n} + (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1}$$

$$= -a_{2n} + a_{2n+1} > 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $f(2n+1) > f(2n-1)$ 이므로 $f(2n-1)$ 은 증가 함수이다. (참)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(2n-1) = \alpha \text{ 이면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(2n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k + (-1)^{2n-1} a_{2n} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} f(2n-1) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$$

$$= \alpha - 0 \quad (\because \text{조건 ㉞})$$

$$= \alpha \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

06 해결단계

① 단계	삼각형 OP_nQ_n 의 세 변의 길이를 각각 n 에 대하여 나타낸다.
② 단계	삼각형의 내심과 외심의 성질을 이용하여 a_n 과 b_n 을 각각 n 에 대하여 나타낸다.
③ 단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ 의 값을 구한 후, $100L$ 의 값을 구한다.

주어진 조건에 의하여

$$P_n(n, 0), Q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{3}}{n}\right)$$

$$\overline{OP_n} = p_n, \overline{OQ_n} = q_n, \overline{P_nQ_n} = r_n \text{ 이라 하면}$$

$$p_n = n$$

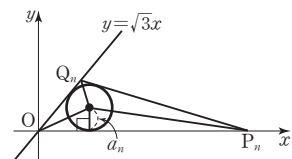
$$q_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{n}$$

$$r_n = \sqrt{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{n^2 - 2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^4 - 2n^2 + 4}{n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}$$



한편, 삼각형 OP_nQ_n 의 내접원의 중심에서 x 축까지의 거리 a_n 은 내접원의 반지름의 길이와 같으므로 삼각형

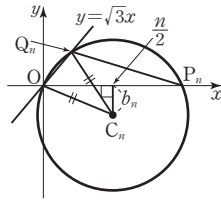
OP_nQ_n 의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{2} \times n \times \frac{\sqrt{3}}{n} = \frac{1}{2} (p_n + q_n + r_n) \times a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{\sqrt{3}}{p_n + q_n + r_n}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{n + \frac{2}{n} + \frac{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



삼각형 OP_nQ_n 의 외접원의 중심을 $C_n(x_n, y_n)$ 이라 하면 점 C_n 은 선분 OP_n 의 수직이등분선 위에 있으므로

$x_n = \frac{n}{2}$ 이다.

$\overline{OC_n} = \overline{Q_nC_n}$ 에서 $\overline{OC_n}^2 = \overline{Q_nC_n}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2}\right)^2 + y_n^2 &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y_n - \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2 \\ \frac{n^2}{4} + y_n^2 &= \frac{n^2}{4} - 1 + \frac{1}{n^2} + y_n^2 - \frac{2\sqrt{3}}{n}y_n + \frac{3}{n^2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{n}y_n &= \frac{4}{n^2} - 1, \quad \frac{2\sqrt{3}}{n}y_n = \frac{4 - n^2}{n^2} \\ \therefore y_n &= \frac{4 - n^2}{2\sqrt{3}n} \end{aligned}$$

$b_n = |y_n|$ 이므로 $n \geq 2$ 일 때

$$b_n = \frac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}n} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4}} \times \frac{n^2 - 4}{2\sqrt{3}n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{2(n^2 + 2 + \sqrt{n^4 - 2n^2 + 4})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{2\left(1 + \frac{2}{n^2} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^4}}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \times (1 + \sqrt{1})} = \frac{1}{4} \\ \therefore 100L &= 100 \times \frac{1}{4} = 25 \end{aligned}$$

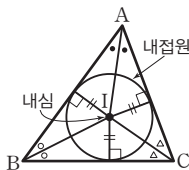
답 25

blacklabel 특강 필수 개념

삼각형의 내심

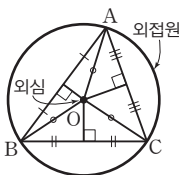
- 원 I가 삼각형 ABC의 세 변에 모두 접할 때, 이 원 I를 삼각형 ABC의 내접원이라 하고 내접원의 중심 I를 내심이라 한다.
- 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$$



삼각형의 외심

- 삼각형 ABC의 모든 꼭짓점이 원 O 위에 있을 때, 이 원 O를 삼각형 ABC의 외접원이라 하고 외접원의 중심 O를 외심이라 한다.
- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.
⇨ $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ (외접원의 반지름의 길이)



07 해결단계

① 단계	$x = a_n$ 이 주어진 방정식의 근임을 이용하여 a_n 에 대한 관계식을 세운다.
② 단계	①단계에서 구한 식을 $\frac{1}{n} = \frac{10a_n^2 - 15}{a_n^3 + 7}$ 로 정리한 후, 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값을 구한다.

$x = a_n$ 은 방정식 $x^3 - 10nx^2 + 15n + 7 = 0$ 의 근이므로

$$a_n^3 - 10na_n^2 + 15n + 7 = 0$$

$$n(10a_n^2 - 15) = a_n^3 + 7$$

$$\therefore \frac{1}{n} = \frac{10a_n^2 - 15}{a_n^3 + 7}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_n^2 - 15}{a_n^3 + 7} = \frac{10\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^2 - 15}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^3 + 7} = 0$$

$$10\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^2 - 15 = 0, \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

그런데 a_n 은 주어진 방정식의 가장 작은 해이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{답 } -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

blacklabel 특강 참고

$$x^3 - 10nx^2 + 15n + 7 = 0 \text{에서 } x^3 + 7 = n(10x^2 - 15)$$

$$\therefore n = \frac{x^3 + 7}{10x^2 - 15}$$

$f(x) = \frac{x^3 + 7}{10x^2 - 15}$ 이라 하면 방정식 $x^3 - 10nx^2 + 15n + 7 = 0$ 의 해는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = n$ 의 교점의 x 좌표이다.

이때, $10x^2 - 15 \neq 0$, 즉 $10\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \neq 0$ 에서 $x \neq \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

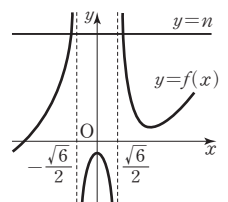
이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 두 직선 $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 을 점근선으로 갖고, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}^-} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2}^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}^+} f(x) = \infty$$

의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $n \rightarrow \infty$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = n$ 의 교점의 x 좌표 중 가장 작은 해인 a_n 은 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 으로 수렴한다.



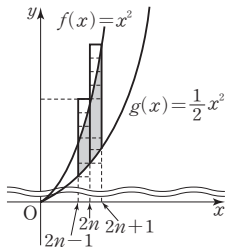
1 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)에서 정사각형의 내부는 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 직선 $x=2n-1$ 로 둘러싸인 영역의 내부와 만나야 함을 파악한다.
② 단계	$S_{n+1}-S_n$ 은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 두 직선 $x=2n-1$, $x=2n+1$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 직선 $x=2n-1$ 과 내부가 만나는 정사각형의 개수와 같음을 파악한다.
③ 단계	$2n-1 \leq x < 2n$, $2n \leq x < 2n+1$ 로 나누어 $S_{n+1}-S_n$ 을 구한 후, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}$ 의 값을 구한다.

조건 (나)에 의하여 정사각형의 내부는 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 직선 $x=2n-1$ 로 둘러싸인 영역의 내부와 만나야 한다.

이때, S_{n+1} 은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 직선 $x=2n+1$ 로 둘러싸인 영역의 내부와 내부가 만나는 정사각형의 개수이므로 $S_{n+1}-S_n$ 은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 두 직선 $x=2n-1$, $x=2n+1$ 로 둘러싸인 영역의 내부 또는 직선 $x=2n-1$ 과 내부가 만나는 정사각형의 개수와 같다.

.....㉠



$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이라 하면

(i) $2n-1 \leq x < 2n$ 일 때,

$$f(2n)=(2n)^2=4n^2,$$

$$g(2n-1)=\frac{1}{2}(2n-1)^2=2n^2-2n+\frac{1}{2}$$

이때, 조건 (가)에서 정사각형의 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표는 모두 정수이고 정사각형의 한 변의 길이는 1이므로 ㉠을 만족시키는 정사각형의 개수는

$$4n^2 - (2n^2 - 2n) = 2n^2 + 2n$$

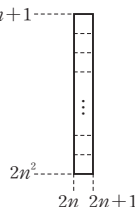
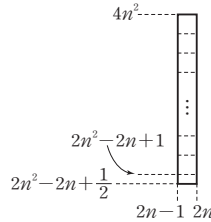
(ii) $2n \leq x < 2n+1$ 일 때,

$$f(2n+1)=(2n+1)^2=4n^2+4n+1,$$

$$g(2n)=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$$

이때, 조건 (가)에서 정사각형의 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표는 모두 정수이고 정사각형의 한 변의 길이는 1이므로 ㉠을 만족시키는 정사각형의 개수는

$$(4n^2+4n+1) - 2n^2 = 2n^2+4n+1$$



(i), (ii)에서

$$S_{n+1}-S_n=(2n^2+2n)+(2n^2+4n+1) \\ =4n^2+6n+1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}-S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+6n+1}{n^2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} \\ = 4$$

답 4

2 해결단계

① 단계	점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선 l_n 의 방정식을 구한 후, 접선 l_n 이 x 축과 만나는 점을 X_n 이라 하고 두 점 X_n , Y_n 의 좌표를 각각 구한다.
② 단계	원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그으면 원 밖의 한 점에서 두 접점까지의 거리는 서로 같음을 이용하여 두 선분 Y_nR_n , OQ_n 의 길이를 각각 구한다.
③ 단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OQ_n}{Y_nR_n}$ 의 값을 구한 후, 100α 의 값을 구한다.

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$

점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선의 기울기가 $2n$ 이므로 접선 l_n 의 방정식은

$$y-n^2=2n(x-n) \quad \therefore y=2nx-n^2$$

직선 l_n 이 x 축과 만나는 점을 X_n 이라 하면 y 축과 만나는 점은 Y_n 이므로

$$X_n\left(\frac{n}{2}, 0\right), Y_n(0, -n^2)$$

한편, 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그으면 원 밖의 한 점과 두 접점 사이의 거리는 서로 같으므로

$$\overline{Y_nR_n}=\overline{Y_nP_n}, \overline{X_nP_n}=\overline{X_nQ_n}$$

$$\therefore \overline{Y_nR_n}=\overline{Y_nP_n}$$

$$=\sqrt{(n-0)^2+\{n^2-(-n^2)\}^2}$$

$$=\sqrt{4n^4+n^2},$$

$$\overline{OQ_n}=\overline{OX_n}+\overline{X_nQ_n}=\overline{OX_n}+\overline{X_nP_n}$$

$$=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(n-\frac{n}{2}\right)^2+(n^2-0)^2}$$

$$=\frac{n}{2}+\sqrt{n^4+\frac{n^2}{4}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{Y_nR_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2}+\sqrt{n^4+\frac{n^2}{4}}}{\sqrt{4n^4+n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이므로

$$100\alpha=100 \times \frac{1}{2}=50$$

답 50

3 해결단계

① 단계	$\left \frac{x-1}{k}\right < 1, \left \frac{x-1}{k}\right = 1, \left \frac{x-1}{k}\right > 1$ 로 범위를 나누어 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $(f \circ f)(k) = 0$ 을 만족시켜야 함을 파악한다.
③ 단계	k 와 $1-k$ 의 대소 관계에 따라 ②단계를 만족시키는 k 의 값을 구한 후, $(g \circ f)(k)$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n} - 1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n} + 1} \quad (k > 0) \text{에서}$$

(i) $\left|\frac{x-1}{k}\right| < 1$, 즉 $1-k < x < k+1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(ii) $\left|\frac{x-1}{k}\right| = 1$, 즉 $x = 1-k$ 또는 $x = k+1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iii) $\left|\frac{x-1}{k}\right| > 1$, 즉 $x < 1-k$ 또는 $x > k+1$ 일 때,

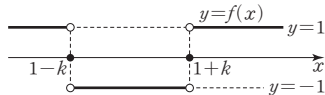
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n} = \infty \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (1-k < x < k+1) \\ 0 & (x = 1-k \text{ 또는 } x = k+1) \\ 1 & (x < 1-k \text{ 또는 } x > k+1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = k$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow k} (x-k)^2 = (f \circ f)(k)$$

이때, $\lim_{x \rightarrow k} (x-k)^2 = 0$ 이므로 $(f \circ f)(k) = 0$

① $k < 1-k$, 즉 $k < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$f(k) = 1 \text{이므로 } (f \circ f)(k) = f(f(k)) = f(1)$$

$$\text{이때, } 1-k < 1, 1+k > 1 \text{이므로 } f(1) = -1$$

$$\therefore (f \circ f)(k) = f(1) = -1$$

그런데 $(f \circ f)(k) = 0$ 이어야 하므로 모순이다.

② $k = 1-k$, 즉 $k = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$f(k) = 0 \text{이므로 } (f \circ f)(k) = f(f(k)) = f(0) = 1$$

그런데 $(f \circ f)(k) = 0$ 이어야 하므로 모순이다.

③ $k > 1-k$, 즉 $k > \frac{1}{2}$ 일 때,

$$f(k) = -1 \text{이므로 } (f \circ f)(k) = f(f(k)) = f(-1)$$

$$1-k < \frac{1}{2}, 1+k > \frac{3}{2} \text{이므로 } f(-1) = 0 \text{이려면}$$

$$1-k = -1 \quad \therefore k = 2$$

①, ②, ③에서 $k = 2$ 이므로

$$(g \circ f)(k) = (g \circ f)(2) = g(f(2))$$

$$= g(-1)$$

$$= (-1-2)^2 = 9$$

답 ⑤

4

해결단계

① 단계	$\frac{k}{10} < 1, \frac{k}{10} = 1, \frac{k}{10} > 1$ 로 범위를 나누어 수열 $\{a_k\}$ 를 구한다.
② 단계	$\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구한다.

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1} \text{에서}$$

(i) $\frac{k}{10} < 1$, 즉 $k < 10$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^n = 0$$

이므로

$$a_k = \frac{2 \times 0 + 0}{0 + 0 + 1} = 0$$

(ii) $\frac{k}{10} = 1$, 즉 $k = 10$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^n = 1$$

이므로

$$a_{10} = \frac{2 \times 1 + 1}{1 + 1 + 1} = 1$$

(iii) $\frac{k}{10} > 1$, 즉 $k > 10$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{10}\right)^n = \infty$$

이므로

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{k}{10} + \left(\frac{10}{k}\right)^n}{1 + \left(\frac{10}{k}\right)^n + \left(\frac{10}{k}\right)^{2n}} = \frac{k}{5}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^9 a_k + a_{10} + \sum_{k=11}^{20} a_k$$

$$= 9 \times 0 + 1 + \sum_{k=11}^{20} \frac{k}{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{5} \left(\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{10} k \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{5} \times \left(\frac{20 \times 21}{2} - \frac{10 \times 11}{2} \right)$$

$$= 1 + 31 = 32$$

답 ④

02 급수

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp. 18~19

01 ㉓	02 -1	03 ㉓	04 15	05 ㉓
06 ㉓	07 ㉓	08 $-\frac{1}{3}$	09 ㉓	10 ㉓
11 37	12 ㉓	13 ㉓	14 ㉓	

01 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{6}{5}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+3}{n+2}\right) \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{n+3}{n+2} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{n+3}{n+2}\right) \\
 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ㉓

02 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_n &= \log_2 \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\
 &= \log_2 \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \\
 &= \log_2 \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \\
 &= \log_2 \left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\
 \text{이때, 주어진 급수의 제 } n \text{ 항까지의 부분합을 } S_n \text{이라 하면} \\
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \log_2 \left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+2}{k+1} \right) \\
 &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \\
 &\quad + \cdots + \log_2 \left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\
 &= \log_2 \left\{ \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \times \cdots \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \log_2 \frac{n+2}{2(n+1)} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+2}{2(n+1)} \\
 &= \log_2 \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} \right\} \\
 &= \log_2 \frac{1}{2} = -1
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은 -1 이다.

답 -1

03 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$ 의 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{3}{1} a_1 \\
 a_3 &= \frac{4}{2} a_2 \\
 a_4 &= \frac{5}{3} a_3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= \frac{n+1}{n-1} a_{n-1} \\
 \times \left(a_n &= \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} a_1 \right. \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \times 2 \quad (\because a_1 = 2) \\
 &= n(n+1) \quad \cdots \cdots \text{㉑}
 \end{aligned}$$

이때, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$ 의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_n} &= \frac{n+2}{n} \times \frac{1}{a_{n+1}} \\
 \therefore \frac{n}{a_n} &= \frac{n+2}{a_{n+1}} \quad \cdots \cdots \text{㉒}
 \end{aligned}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{a_{n+1}} - \frac{n}{a_n} \right)$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{a_{k+1}} - \frac{k}{a_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{a_{k+1}} - \frac{k+2}{a_{k+1}} \right) \quad (\because \text{㉒}) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}} \\
 &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad (\because \text{㉑}) \\
 &= - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= - \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
 &= - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ㉓

• 다른풀이 •

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{a_{n+1}} - \frac{n}{a_n} \right)$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{a_{k+1}} - \frac{k}{a_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k(k+1)} \right\} \quad (\because \text{㉑}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

04 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 3\right) = 30$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 3\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 3\right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3 \quad \cdots \text{㉠}$$

또한, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n^2} - 5\right) = 100$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n^2} - 5\right)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{n^2} - 5\right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = 5 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + na_n + 2b_n}{5n^2 + 2na_n - 2b_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{a_n}{n} + 2 \times \frac{b_n}{n^2}}{5 + 2 \times \frac{a_n}{n} - 2 \times \frac{b_n}{n^2}} \\
 &= \frac{2 + 3 + 2 \times 5}{5 + 2 \times 3 - 2 \times 5} \quad (\because \text{㉠}, \text{㉡}) \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

답 15

05 ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ 은 발산한다.

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ 은 수렴한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \\
 &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ 은 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\
 &= 0 \times \beta = 0 \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 은 발산한다.

ㄴ $\frac{1}{0}$ 꼴이므로 발산

(참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 에서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

07 이차방정식 $x^2 - 2nx + n^2 - 1 = 0$ 에서 두 근의 곱이 a_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n = n^2 - 1$$

급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{a_n}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{a_k} \\
 &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k-1)(k+1)} \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
 \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ③

08 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= r \cos \pi + r^2 \cos \frac{3}{2}\pi + r^3 \cos 2\pi + r^4 \cos \frac{5}{2}\pi + \cdots \\
 &= -r + r^3 - r^5 + \cdots \\
 &= \frac{-r}{1 - (-r^2)} \quad (\because -1 < r < 1 \text{에서 } -1 < -r^2 \leq 0) \\
 &= \frac{-r}{1+r^2} = \frac{3}{10} \\
 -10r &= 3(1+r^2), \quad 3r^2 + 10r + 3 = 0 \\
 (3r+1)(r+3) &= 0 \\
 \therefore r &= -\frac{1}{3} \quad (\because -1 < r < 1)
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{3}$

09 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($-1 < r < 1$)라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 에서

$$\frac{a}{1-r} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 3 \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 3, \quad \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 3$$

$$\frac{a}{1+r} \times \frac{a}{1-r} = 3$$

$$\therefore \frac{a}{1+r} = 3 \quad (\because \textcircled{1}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{2}, r = -\frac{1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 $a^3 = \frac{27}{8}$, 공비가 $r^3 = -\frac{1}{8}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{\frac{27}{8}}{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)} = 3$$

답 ①

10 등비수열 $\left\{ \left(\frac{2r-1}{3} \right)^n \right\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < \frac{2r-1}{3} \leq 1, \quad -3 < 2r-1 \leq 3$$

$$-2 < 2r \leq 4 \quad \therefore -1 < r \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\therefore$ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2n-1}$ 의 공비는 $\left(\frac{1-r}{2} \right)^2$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } -2 \leq -r < 1, \quad -1 \leq 1-r < 2$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1-r}{2} < 1 \quad \therefore 0 \leq \left(\frac{1-r}{2} \right)^2 < 1$$

즉, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2n-1}$ 은 수렴한다.

$\therefore$ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+r}{3} \right)^n$ 의 공비는 $\frac{1+r}{3}$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } 0 < 1+r \leq 3 \text{이므로 } 0 < \frac{1+r}{3} \leq 1$$

즉, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+r}{3} \right)^n$ 은 항상 수렴한다고 할 수 없다.

$\therefore$ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^n$ 의 공비는 $\frac{1}{1+r}$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } 0 < 1+r \leq 3 \text{이므로 } \frac{1}{1+r} \geq \frac{1}{3}$$

즉, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^n$ 은 항상 수렴한다고 할 수 없다.

따라서 항상 수렴하는 급수는 $\textcircled{1}$ 뿐이다.

답 ①

11 사각형 $P_n Q_{n+1} Q_{n+2} P_{n+1}$ 의 네 꼭짓점은 $P_n(n, 3^n)$, $Q_{n+1}(n+1, 0)$, $Q_{n+2}(n+2, 0)$, $P_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$ 이므로 두 점 P_{n+1}, Q_{n+1} 의 x 좌표는 같다.

오른쪽 그림에서

$$a_n = \triangle P_n Q_{n+1} P_{n+1}$$

$$+ \triangle P_{n+1} Q_{n+1} Q_{n+2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 3^{n+1} + \frac{1}{2} \times 1 \times 3^{n+1}$$

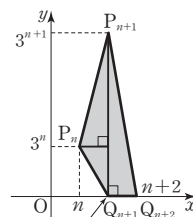
$$= 3^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

따라서 $p=6, q=1$ 이므로

$$p^2 + q^2 = 6^2 + 1^2 = 37$$

답 37



12 $0.\dot{0}6\dot{0}7 = 0.0607607607\cdots$ 이므로

$$a_1=0, a_2=6, a_3=0, a_4=7, a_5=6, a_6=0, a_7=7, \cdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \frac{a_5}{5^5} + \frac{a_6}{5^6} + \frac{a_7}{5^7} + \cdots$$

$$= \frac{6}{5^2} + \frac{7}{5^4} + \frac{6}{5^5} + \frac{7}{5^7} + \frac{6}{5^8} + \frac{7}{5^{10}} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \times \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^8} + \dots \right) \\
 &\quad + 7 \times \left(\frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^{10}} + \dots \right) \\
 &= 6 \times \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{125}} + 7 \times \frac{\frac{1}{625}}{1 - \frac{1}{125}} \\
 &= 6 \times \frac{5}{124} + 7 \times \frac{1}{620} \\
 &= \frac{157}{620}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

13 $\overline{P_0P_1} = 4$, $\overline{P_nP_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{P_{n-1}P_n}$ 이므로

$$\overline{P_{n-1}P_n} = 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때, 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}
 x &= \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \dots \\
 &= 4 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \\
 &= \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3},
 \end{aligned}$$

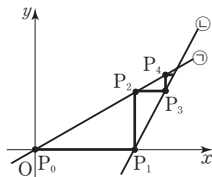
$$\begin{aligned}
 y &= \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_5} + \dots \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \dots \\
 &= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3} \right)$ 이다.

답 ⑤

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

n 이 짝수일때의 점 P_n 을 이은 직선과 n 이 홀수일때의 점 P_n 을 이은 직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



두 점 $P_0(0, 0)$, $P_2(4, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 점 $P_1(4, 0)$, $P_3(5, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = 2x - 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

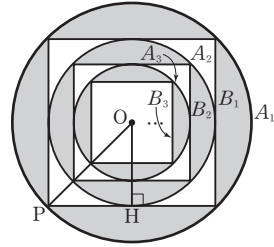
점 P_n 은 두 직선 ㉠, ㉡의 위를 번갈아 가면서 위치하므로 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점은 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이다.

따라서 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x = \frac{16}{3}, y = \frac{8}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3} \right)$ 이다.

14



위의 그림과 같이 원 A_1 의 중심을 O , 원 A_1 과 정사각형 B_1 의 한 교점을 P , 중심 O 에서 점 P 를 포함한 정사각형 B_1 의 한 변에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\triangle OPH$ 는 직각이등변삼각형이고 $\overline{OP} = 1$ 이므로

$$\overline{PH} = \overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

정사각형 B_1 의 한 변의 길이는 $2\overline{PH} = \sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = \pi \times 1^2 - (\sqrt{2})^2 = \pi - 2$$

원 A_2 의 반지름의 길이가 $\overline{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 두 원 A_1, A_2

의 반지름의 길이의 비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 $\sqrt{2} : 1$ 이고 넓이의 비는 $2 : 1$ 이다.

또한, 두 원 A_1, A_2 에 각각 내접한 두 정사각형 B_1, B_2 의 넓이의 비도 $2 : 1$ 이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\pi - 2$ 이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi - 2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi - 4$$

답 ①

• 다른풀이 •

원 A_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 원 A_n 에 내접하는 정사각형 B_n 의 대각선의 길이가 $2r_n$ 이므로 정사각형 B_n 의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}r_n$ 이다.

즉, 정사각형 B_n 에 내접하는 원 A_{n+1} 의 지름의 길이가 $\sqrt{2}r_n$ 이므로 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$ 이다.

$$\therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n$$

따라서 $r_1 = 1$, $r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}r_n$ 이므로 수열 $\{r_n\}$ 은

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore A_n = \pi \times r_n^2 = \pi \times \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{\pi}{2^{n-1}},$$

$$B_n = (\sqrt{2}r_n)^2 = 2 \times \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{2}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi - 2}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{\pi - 2}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi - 4$$

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 20~24

01 2	02 ①	03 ①	04 $\frac{1}{2}$	05 $\frac{5}{6}$
06 3	07 $\frac{1}{2}$	08 6	09 ⑤	10 ⑤
11 -57	12 $-A-2B-1$	13 ⑤	14 ③	
15 ④	16 11	17 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{\sqrt{10}+1}{9}$	19 ④
20 ③	21 ⑤	22 ⑤	23 3	24 ②
25 $\frac{5}{2}$	26 82	27 3π	28 5	29 9
30 ③	31 ③			

01 $a_1=1, a_2=2$ 이고 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면

1, 2, 3, 5, 8, ...

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

한편, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\ &= \frac{1}{a_2} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \infty \right) \quad \frac{1}{\infty} \text{ 꼴이므로 0으로 수렴} \\ &= \frac{1}{2} \quad (\because a_2=2) \end{aligned}$$

따라서 $A=\frac{1}{2}$ 이므로 $4A=4 \times \frac{1}{2}=2$ 답 2

02 주어진 세 급수 A, B, C 의 제 n 항까지의 부분합을 각각 S_n, T_n, R_n 이라 하면

(i) $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots$ 에서

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$$

따라서 주어진 급수가 1에 수렴하므로 $A=1$

(ii) $B=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots$

$$\text{에서 } T_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1$$

따라서 주어진 급수가 1에 수렴하므로 $B=1$

$$(iii) C=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\dots$$

$$\text{에서 } R_{2n-1}=1+\frac{1}{2n}, R_{2n}=1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n} = 1$$

따라서 주어진 급수가 1에 수렴하므로 $C=1$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B=C=1$

답 ①

blacklabel 특강 풀이첨삭

항의 부호가 교대로 변하는 급수

항의 부호가 교대로 변하는 급수는 홀수 번째까지의 부분합 S_{2n-1} 과 짝수 번째까지의 부분합 S_{2n} 의 극한값을 구하여

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ 이면 주어진 급수는 S 에 수렴한다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이면 주어진 급수는 발산한다.

03 $S_n=\frac{n(3n+1)}{2}$ 이므로

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)(3n-2)}{2} \\ &= \frac{3n^2+n-3n^2+5n-2}{2} = 3n-1 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{1 \times (3+1)}{2} = 2$$

(i), (ii)에서 $a_n=3n-1$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} & \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

답 ①

04 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2n-1}, b_n=\frac{3}{2n+3}$ 이므로 두 수열 $\{a_n\},$

$\{b_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면 다음과 같다.

$$\{a_n\} : 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{7}, 0, \frac{2}{11}, \dots$$

$$\{b_n\} : \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \frac{3}{11}, \frac{3}{13}, \frac{3}{15}, \dots$$

이때, 수열 $\{a_nb_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열하면 다음과 같다.

$$\{a_nb_n\} : 0, \frac{2 \times 3}{3 \times 7}, 0, \frac{2 \times 3}{7 \times 11}, 0, \frac{2 \times 3}{11 \times 15}, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n &= 0 + \frac{2 \times 3}{3 \times 7} + 0 + \frac{2 \times 3}{7 \times 11} + 0 + \frac{2 \times 3}{11 \times 15} + \dots \\ &= 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} \\ &= 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	수열 $\{a_nb_n\}$ 의 각 항을 차례대로 나열한 경우	30%
(나)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 의 부분합을 부분분수 분해를 이용하여 간단하게 나타낸 경우	40%
(다)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 의 값을 구한 경우	30%

05 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 는 상수, $A \neq 0$)이라 하면 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{An^2+Bn}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A + \frac{B}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2Bn}-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2Bn}{\sqrt{n^2+2Bn}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2B}{\sqrt{1+\frac{2B}{n}}+1} \\ &= \frac{2B}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore B = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \text{ 이므로}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \left[\frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{3}{2}(n-1) \right] \\ &= n+1 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

(i), (ii)에서 $a_n = n+1$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_k S_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1) \times \frac{1}{2}k(k+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)(k+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{6}$

blacklabel 특강 해결실마리

첫째항이 a , 공차가 d ($d \neq 0$)인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_n = a + d(n-1), S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

즉, a_n 은 n 에 대한 일차식이고 그 합 S_n 은 상수항이 0인 n 에 대한 이차식이다.

따라서 위의 문항에서 S_n 은 첫째항부터 등차수열을 이루는 수열의 합이므로 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 는 상수, $A \neq 0$)으로 나타낼 수 있다.

06 해결단계

① 단계	주어진 식을 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n-2} \right\}$ 에 대한 식으로 변형한다.
② 단계	수열 $\left\{ \frac{1}{a_n-2} \right\}$ 의 일반항을 구한 후, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-2)(a_{n+1}-2)$ 의 값을 구한다.
③ 단계	p, q 의 값을 각각 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} a_{n+1}-2 &= \frac{a_n-2}{-a_n+3} \\ &= \frac{a_n-2}{-(a_n-2)+1} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}-2} &= \frac{-(a_n-2)+1}{a_n-2} \\ &= -1 + \frac{1}{a_n-2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-2} - \frac{1}{a_n-2} = -1$$

$$\text{즉, 수열 } \left\{ \frac{1}{a_n-2} \right\} \text{은 첫째항이 } \frac{1}{a_1-2} = \frac{1}{3-2} = -2 \text{이}$$

고 공차가 -1 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n-2} &= -2 + (-1)(n-1) \\ &= -n-1 = -(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore a_n - 2 &= -\frac{1}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)(a_{n+1} - 2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k - 2)(a_{k+1} - 2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+1} \right) \left(-\frac{1}{k+2} \right) \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=2, q=1$ 이므로
 $p+q=2+1=3$

답 3

07 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\begin{aligned}
 2+6+12+\dots+n(n+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n k(k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2+6+12+\dots+n(n+1)} &= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} \\
 &= \frac{2n+1}{2n+4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{4n^2} - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2+6+12+\dots+n(n+1)} \right\} \\
 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{4n^2} - \frac{2n+1}{2n+4} \right) = 3
 \end{aligned}$$

이때, 위의 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{4n^2} - \frac{2n+1}{2n+4} \right) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - a_n}{4n^2 + a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{a_n}{4n^2}}{1 + \frac{a_n}{4n^2}} \\
 &= \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

08 조건 (가)의 $2n^3 + 1 < (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)a_n$ 에서

$$2n^3 + 1 < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} a_n$$

$$\therefore a_n > \frac{6(2n^3 + 1)}{n(n+1)(2n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 조건 (나)의 $\frac{1}{2}a_n + b_n < 3$ 에서

$$\frac{1}{2}a_n < 3 - b_n \quad \therefore a_n < 6 - 2b_n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\frac{6(2n^3 + 1)}{n(n+1)(2n+1)} < a_n < 6 - 2b_n$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(2n^3 + 1)}{n(n+1)(2n+1)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (6 - 2b_n)$$

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(2n^3 + 1)}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\left(2 + \frac{1}{n^3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = 6$$

조건 (다)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} (6 - 2b_n) = 6 - 2 \times 0 = 6$$

따라서 $6 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 6$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

답 6

09 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$ 에서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1),$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\textcircled{1}$ 에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (참)

ㄴ. $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\
 &= -1 + 0 = -1 \neq 0
 \end{aligned}$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 발산한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 S_n 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k + 1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + n) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - 2a_n + n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\
 &= 2 - 2 \times (-1) \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= 4 \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

10 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = p, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = q$ (p, q 는 상수)

라 하고 $2a_n + b_n = c_n, \quad a_n - 2b_n = d_n$ 으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = p,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = q$$

$$\text{이때, } a_n = \frac{2c_n + d_n}{5}, b_n = \frac{c_n - 2d_n}{5} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n + d_n}{5} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \\ &= \frac{2}{5}p + \frac{1}{5}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - 2d_n}{5} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \\ &= \frac{1}{5}p - \frac{2}{5}q \end{aligned}$$

따라서 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 수렴한다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \alpha - \beta &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) > 0 \quad (\because a_n > b_n) \\ \therefore \alpha > \beta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \\ &= \alpha + \beta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

11 조건 ㄱ에서 $2a_n + b_n = \frac{6}{4n^2 - 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2a_k + b_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{4k^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (2a_n + b_n) - 2a_n \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= 3 - 2 \times 30 = -57 \end{aligned}$$

답 -57

12 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} - a_n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 (a_{k+1} - a_k)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ 2^2(a_2 - a_1) + 3^2(a_3 - a_2) + 4^2(a_4 - a_3) \\ &\quad + \cdots + (n+1)^2(a_{n+1} - a_n) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [-\{ 4a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2n+1)a_n \} \\ &\quad + (n+1)^2 a_{n+1}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [-a_1 - \{ 3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2n+1)a_n \} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 a_{n+1}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -a_1 - \sum_{k=1}^n (2k+1)a_k \right\} \\ &\quad \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \right) \end{aligned}$$

$$= -a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)a_n$$

$$= -a_1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$= -A - 2B - 1 \quad (\because a_1 = 1)$$

답 $-A - 2B - 1$

13 $1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + p + p^2 + \cdots + p^n}{7^n} &= \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+1} - 1}{7^n} \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p \times \left(\frac{p}{7} \right)^n - \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{p-1} \left(\frac{\frac{p^2}{7}}{1 - \frac{p}{7}} - \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} \right) \quad \left(\because \frac{1}{7} < \frac{p}{7} < 1 \right) \\ &= \frac{1}{p-1} \left(\frac{\frac{p^2}{7}}{\frac{7-p}{7}} - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{p-1} \times \frac{6p^2 + p - 7}{6(7-p)} \\ &= \frac{(6p+7)(p-1)}{6(p-1)(7-p)} \\ &= \frac{6p+7}{6(7-p)} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 12(7-p) = 6p+7 \text{에서 } 84 - 12p = 6p+7$$

$$18p = 77 \quad \therefore p = \frac{77}{18}$$

$$\therefore 36p = 36 \times \frac{77}{18} = 154$$

답 ⑤

14 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} \text{ 이므로}$$

$$|S - S_n| = \left| \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} \right| = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{이때, } |S - S_n| < \frac{1}{768} \text{ 이므로 } \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n < \frac{1}{768} \text{에서}$$

$$\frac{1}{3 \times 4^{n-1}} < \frac{1}{3 \times 2^8}, \quad 3 \times 4^{n-1} > 3 \times 2^8$$

$$4^{n-1} > 4^4, n-1 > 4 \quad \therefore n > 5$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 ③

15 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{6}{7^n} + \frac{6}{7^{n+1}} + \frac{6}{7^{n+2}} + \cdots + \frac{6}{7^{2n-1}} \\ &= \frac{\frac{6}{7^n} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{7}} \\ &= \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} - \frac{1}{7} \times \left(\frac{1}{49} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{7} \right)^{n-1} - \frac{1}{7} \times \left(\frac{1}{49} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{49}} \\ &= \frac{7}{6} - \frac{7}{48} = \frac{49}{48} \end{aligned}$$

답 ④

16 $a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + \cdots + 10^{n-1}a_n = 9n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

①의 n 대신에 $n-1$ 을 대입하면

$$a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + \cdots + 10^{n-2}a_{n-1} = 9(n-1) + 1 \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$10^{n-1}a_n = 9 \quad \therefore a_n = 9 \times \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

①에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 = 10$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \\ &= 10 + \sum_{n=2}^{\infty} 9 \times \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \\ &= 10 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 10 + 1 = 11 \end{aligned}$$

답 11

17 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 첫째항이 모두 1이고, 공비가 각각 $\frac{1}{2}$, r 이므로 일반항은

$$a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, b_n = r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=2}^{\infty} b_k + \sum_{k=3}^{\infty} a_k + \sum_{k=4}^{\infty} b_k \\ &\quad + \cdots + \sum_{k=2n-1}^{\infty} a_k + \sum_{k=2n}^{\infty} b_k \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=2s-1}^{\infty} a_k + \sum_{k=2s}^{\infty} b_k \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \left\{ \sum_{k=2s-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + \sum_{k=2s}^{\infty} r^{k-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{2s-2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{r^{2s-1}}{1-r} \right\} \\ &= \sum_{s=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{2s-3} + \frac{r^{2s-1}}{1-r} \right\} \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 4$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{2s-3} + \frac{r^{2s-1}}{1-r} \right\}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1-r} \times \frac{r}{1-r^2}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{r}{(1-r)(1-r^2)} = 4$$

$$\frac{r}{(1-r)(1-r^2)} = \frac{4}{3}, 3r = 4(1-r)(1-r^2)$$

$$4r^3 - 4r^2 - 7r + 4 = 0, \left(r - \frac{1}{2} \right) (4r^2 - 2r - 8) = 0$$

$$2 \left(r - \frac{1}{2} \right) (2r^2 - r - 4) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

그런데 $-1 < r < 1$ 이므로 구하는 r 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\frac{1}{2}$

18 조건 (타)의 $\log_{a_n} x + \log_{a_{n+1}} x = \log x$ 에서

$$\frac{\log x}{\log a_n} + \frac{\log x}{\log a_{n+1}} = \log x$$

$x \neq 1$ 에서 $\log x \neq 0$ 이므로 양변을 $\log x$ 로 나누면

$$\frac{1}{\log a_n} + \frac{1}{\log a_{n+1}} = 1, \frac{1}{\log a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\log a_n}$$

$$\frac{1}{\log a_{n+1}} = \frac{\log a_n - 1}{\log a_n}$$

$$\therefore \log a_{n+1} = \frac{\log a_n}{\log a_n - 1}$$

$$a_1 = \frac{1}{10} \text{에서 } \log a_1 = \log \frac{1}{10} = -1 \text{이므로}$$

$$\log a_2 = \frac{\log a_1}{\log a_1 - 1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_2 = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\log a_3 = \frac{\log a_2}{\log a_2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1$$

$$\therefore a_3 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$\vdots$

같은 방법으로 계산하면 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n-1} = \frac{1}{10}, a_{2n} = \sqrt{10}$$

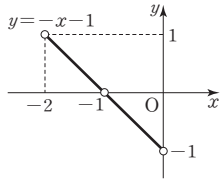
이므로

$$b_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2n-1} a_{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{10} \times \sqrt{10} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \right)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^n \\ &= \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{1 - \frac{\sqrt{10}}{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10 - \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10} + 1}{9} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{10} + 1}{9}\end{aligned}$$

- 19** 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r-1)^{n+1}}$ 의 첫째항은 $\frac{1}{(r-1)^2}$, 공비는 $\frac{1}{r-1}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하기 위해서는 $-1 < \frac{1}{r-1} < 0$ 또는 $0 < \frac{1}{r-1} < 1$ ㉠ 이어야 한다.
- (i) $r > 1$ 일 때,
 $r-1 > 0$ 이므로 ㉠의 부등식의 각 변에 $r-1$ 을 곱하면
 $-r+1 < 1 < 0$ 또는 $0 < 1 < r-1$
 $r > 0$ 또는 $r > 2 \quad \therefore r > 2$
- (ii) $r < 1$ 일 때,
 $r-1 < 0$ 이므로 ㉠의 부등식의 각 변에 $r-1$ 을 곱하면
 $-r+1 > 1 > 0$ 또는 $0 > 1 > r-1$
 $r < 0$ 또는 $r < 2 \quad \therefore r < 0$
- (i), (ii)에서 주어진 등비급수는 $r < 0$ 또는 $r > 2$ 일 때에만 수렴한다.
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

- 20** 등비급수
 $x(1+x) + x(1+x)^2 + x(1+x)^3 + \dots$
 의 첫째항은 $x(1+x)$, 공비는 $1+x$ 이고, 이 급수가 수렴하므로
 $x(1+x) = 0$ 또는 $-1 < 1+x < 1$
 그런데 $x \neq -1, 0$ 이므로
 $-1 < 1+x < 1, 1+x \neq 0$
 $\therefore -2 < x < -1$ 또는 $-1 < x < 0$
 $f(x) = x(1+x) + x(1+x)^2 + x(1+x)^3 + \dots$
 $= \frac{x(1+x)}{1-(1+x)}$
 $= -x-1$ (단, $-2 < x < -1, -1 < x < 0$)
- 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프 위의 점 P의 자취의 길이는 두 점 $(-2, 1)$ 과 $(0, -1)$ 사이의 거리와 같다.
- 따라서 구하는 점 P의 자취의 길이는
 $\sqrt{(-2-0)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$ 답 ③
- 

- 21** 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 s 라 하면
 $a_n = ar^{n-1}, b_n = bs^{n-1}$ (단, $abrs \neq 0$)㉠
- ㄱ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $-1 < r < 1, r \neq 0$
 ㉠에서 $a_{2n} = ar^{2n-1}$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{2n-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이다.
 이때, $0 < r^2 < 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 은 수렴한다. (참)
- ㄴ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하면
 $-1 < r < 1, r \neq 0$ 이고 $-1 < s < 1, s \neq 0$
 ㉠에서 $a_n b_n = ar^{n-1} \times bs^{n-1} = ab(rs)^{n-1}$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, 즉 $\sum_{n=1}^{\infty} ab(rs)^{n-1}$ 은 공비가 rs 인 등비급수이다.
 이때, $-1 < rs < 1, rs \neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다. (참)
- ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴할 때, 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 발산한다고 가정하면 $|r| \geq 1, |s| \geq 1$
 이때, $|rs| = |r||s| \geq 1$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산하게 되어 수렴한다는 조건에 모순이다.
 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴하면 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 중에서 적어도 하나는 수렴한다. (참)
- 그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른풀이 •

- ㄷ. 주어진 명제의 대우는 '두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산한다.'이다.
 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 발산하면 $|r| \geq 1, |s| \geq 1$ 이므로 $|rs| = |r||s| \geq 1$ 이고, ㄴ에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 공비가 rs 인 등비급수이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산한다.
 따라서 대우가 참이면 명제도 참이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

- 22** $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 이라 하자.
 집합 X 를 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 나누려면 집합 X 에서 원소를 뽑아 부분집합으로 만들고, 남은 원소를 또 하나의 부분집합으로 만들면 된다.

집합 X 에서 원소를 $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 개씩 뽑아 각각 부분집합으로 만들면 그 개수는

$$\begin{aligned} & {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_{n-1} \\ &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n - ({}_nC_0 + {}_nC_n) \\ &= 2^n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에서 원소 1을 뽑으면 서로소인 두 부분집합은 $\{1\}$, $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ 이고, 원소 $2, 3, 4, \dots, n$ 을 뽑으면 서로소인 두 부분집합은 $\{1\}$, $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ 이므로 서로 같다.

즉, ①에서 중복되는 경우가 2가지씩 존재하므로 집합 X 를 서로소인 두 부분집합으로 나누는 방법의 수는

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 \\ \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{5^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} \right)^n - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right\} \left(\because \frac{2^{1-1} - 1}{5^1} = 0 \right) \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른풀이 •

$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 이라 하자.

집합 X 를 서로소인 두 부분집합으로 나누므로 집합 X 의 각 원소는 두 부분집합 중에서 하나에 반드시 포함되어야 한다.

집합 X 의 각 원소가 두 부분집합 중에서 한 집합에 포함되는 경우의 수는 2^n

이때, 집합 X 의 모든 원소가 한 부분집합에 모두 포함되는 경우 2가지를 제외해야 한다.

또한, 두 부분집합이 $\{1\}$, $\{2, 3, 4, \dots, n\}$ 인 경우와 $\{2, 3, 4, \dots, n\}$, $\{1\}$ 인 경우는 같으므로 2가지씩 중복된다.

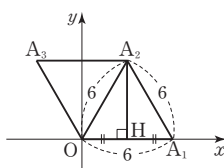
따라서 집합 X 를 나누는 방법의 수는

$$a_n = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

23 정육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 에서 두 점 A_1, A_2 는 반지름의 길이가 6인 원 위의 점이므로 $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{A_1A_2} = 6$

이때, 정삼각형 OA_1A_2 의 꼭짓

점 A_2 에서 변 OA_1 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 선분



A_2H 는 변 OA_1 을 이등분하므로

(점 A_2 의 x 좌표) = 3

(점 A_3 의 x 좌표) = (점 A_2 의 x 좌표) - 6이므로

(점 A_3 의 x 좌표) = 3 - 6 = -3

같은 방법으로 나머지 점의 x 좌표를 구하면

(점 A_4 의 x 좌표) = -6

(점 A_5 의 x 좌표) = -3,

(점 A_6 의 x 좌표) = 3

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 6, 3, -3, -6, -3, 3이 이 순서대로 반복된다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \left(\frac{6}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{-3}{2^3} + \frac{-6}{2^4} + \frac{-3}{2^5} + \frac{3}{2^6} \right) \\ &\quad + \left(\frac{6}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{-3}{2^9} + \frac{-6}{2^{10}} + \frac{-3}{2^{11}} + \frac{3}{2^{12}} \right) + \dots \\ &= \left(\frac{6}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{-3}{2^3} + \frac{-6}{2^4} + \frac{-3}{2^5} + \frac{3}{2^6} \right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \dots \right) \\ &= \left(3 + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{32} + \frac{3}{64} \right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{64}} \\ &= \frac{189}{64} \times \frac{64}{63} = 3 \end{aligned}$$

답 3

• 다른풀이 •

점 A_n 의 x 좌표가 a_n 이므로

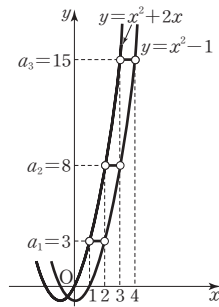
$a_1 = 6, a_2 = 3, a_3 = -3$

또한, 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 A_n, A_{n+3} 은 원점에 대하여 대칭이므로

$a_n = -a_{n+3}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \right) + \left(\frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \frac{a_6}{2^6} \right) \\ &\quad + \left(\frac{a_7}{2^7} + \frac{a_8}{2^8} + \frac{a_9}{2^9} \right) + \dots \\ &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \right) + \left(-\frac{a_1}{2^4} - \frac{a_2}{2^5} - \frac{a_3}{2^6} \right) \\ &\quad + \left(\frac{a_1}{2^7} + \frac{a_2}{2^8} + \frac{a_3}{2^9} \right) + \dots \\ &= a_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} - \dots \right) \\ &\quad + a_2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} - \dots \right) \\ &\quad + a_3 \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} - \dots \right) \\ &= 6 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{8} \right)} + 3 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{8} \right)} \\ &\quad - 3 \times \frac{\frac{1}{8}}{1 - \left(-\frac{1}{8} \right)} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

24 두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x=1$ 일 때, $1^2-1=0$, $1^2+2 \times 1=3$ 이므로 $a=1$ 또는 $a=2$ 이면 $1 \in A$ 이다.

즉, $A \neq \emptyset$ 이므로 1, 2는 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$ 이면 부등식 $x^2-1 < a < x^2+2x$ 에서

$$x^2-1 < 3 < x^2+2x$$

$$x^2-1 < 3 \text{에서 } x^2 < 4$$

$$\therefore -2 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$x^2+2x > 3 \text{에서 } x^2+2x-3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서 $1 < x < 2$ 이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 존재하지 않는다.

즉, $A = \emptyset$ 이므로 $a_1=3$

$x=2$ 일 때, $2^2-1=3$, $2^2+2 \times 2=8$ 이므로 a 의 값이 4, 5, 6, 7 중 하나이면 $2 \in A$ 이다.

즉, $A \neq \emptyset$ 이므로 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$ 의 두 번째 항이 될 수 없다.

그런데 $a=8$ 이면 부등식 $x^2-1 < a < x^2+2x$ 에서

$$x^2-1 < 8 < x^2+2x$$

$$x^2-1 < 8 \text{에서 } x^2 < 9$$

$$\therefore -3 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$$x^2+2x > 8 \text{에서 } x^2+2x-8 > 0$$

$$(x+4)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔에서 $2 < x < 3$ 이므로 부등식을 만족시키는 자연수 x 는 존재하지 않는다.

즉, $A = \emptyset$ 이므로 $a_2=8$

$x=3$ 일 때, $3^2-1=8$, $3^2+2 \times 3=15$ 이므로 a 의 값이 9, 10, 11, 12, 13, 14 중 하나이면 $3 \in A$ 이다.

즉, $A \neq \emptyset$ 이므로 9, 10, 11, 12, 13, 14는 수열 $\{a_n\}$ 의 세 번째 항이 될 수 없다.

그런데 $a=15$ 이면 부등식 $x^2-1 < 15 < x^2+2x$ 를 만족시키는 자연수 x 가 존재하지 않으므로 $a_3=15$ 이다.

⋮

같은 방법으로 계산하면 집합 A 를 공집합이 되도록 하는 자연수 a 는 k^2+2k (k 는 자연수)이어야 한다.

즉, n 번째로 나열된 수 a_n 은

$$a_n = n^2 + 2n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

답 ②

• 다른풀이 •

$x^2-1 < a < x^2+2x$ 에서 $x^2-1 < a$, $a < x^2+2x$

$x^2-1 < a$ 에서 $x^2 < a+1$

$$\therefore -\sqrt{a+1} < x < \sqrt{a+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$a < x^2+2x$ 에서 $x^2+2x+1 > a+1$

$$(x+1)^2 > a+1$$

$$x+1 < -\sqrt{a+1} \text{ 또는 } x+1 > \sqrt{a+1}$$

$$\therefore x < -1-\sqrt{a+1} \text{ 또는 } x > -1+\sqrt{a+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

㉕, ㉖에서 $-1+\sqrt{a+1} < x < \sqrt{a+1}$

$-1+\sqrt{a+1}$, $\sqrt{a+1}$ 의 차가 1이므로 위의 부등호를 만족시키는 자연수 x 의 값이 존재하지 않으려면

$\sqrt{a+1}$ 이 자연수이어야 한다.

즉, $\sqrt{a+1}=k$ 에서 $a+1=k^2$

$\therefore a=k^2-1$ (단, k 는 2 이상의 자연수)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4}$$

25 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항의 분모는 1 또는 2의 배수 또는 5의 배수이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 차례대로 나열하면 다음과 같다.

$$\{a_n\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2 \times 5}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2 \times 5}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{2^5},$$

$$\frac{1}{2^3 \times 5}, \frac{1}{2 \times 5^2}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^4 \times 5}, \frac{1}{2^2 \times 5^2}, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2 \times 5} \\
 &\quad + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3 \times 5} + \frac{1}{2 \times 5^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^4 \times 5} + \frac{1}{2^2 \times 5^2} + \cdots \\
 &= \left\{ 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2^2} \left\{ 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots \right\} + \cdots \\
 &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots \right\} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \\
 &= 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

• 다른풀이 •

$\frac{1}{x}$ 이 정수나 유한소수로 나타내어지려면 x 가 1이거나 x 의 소인수가 2 또는 5이어야 하므로
 $x = 2^k \times 5^l$ (k, l 은 음이 아닌 정수)이라 하면

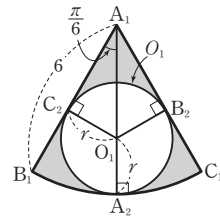
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} &= \frac{1}{2^k \times 5^l} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^k \times 5^l} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{5^l} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{5}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
 &= \frac{5}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

26 777^n 을 5로 나눈 나머지는 777^n 의 일의 자리의 수를 5로 나눈 나머지와 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 을 차례대로 나열하면
 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, ...

$$\begin{aligned}
 \therefore a_n &= \begin{cases} 2 & (n=4k-3) \\ 4 & (n=4k-2) \\ 3 & (n=4k-1) \\ 1 & (n=4k) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 자연수}) \\
 \therefore 30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{\{3 + (-1)^n\}^n} &= 30 \left(\frac{a_2}{2^1} + \frac{a_4}{4^2} + \frac{a_6}{2^3} + \frac{a_8}{4^4} + \cdots \right) \\
 &= 30 \left(\frac{4}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots \right) \\
 &= 30 \left(2 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^4} + \cdots \right) \\
 &= 30 \left\{ \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \cdots \right) \right\} \\
 &= 30 \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} \right) = 30 \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{15} \right) \\
 &= 30 \times \frac{41}{15} = 82
 \end{aligned}$$

답 82

27



원 O_1 의 중심을 O_1 , 반지름의 길이를 r 라 하자.

$\angle O_1 A_1 C_2 = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\triangle O_1 A_1 C_2$ 에서 $\overline{A_1 O_1} = 2r$

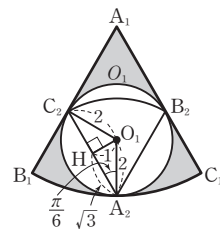
$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 O_1} + \overline{O_1 A_2}$ 에서 $6 = 2r + r$

$6 = 3r \quad \therefore r = 2$

$\therefore S_1 = (\text{부채꼴 } B_1 A_1 C_1 \text{의 넓이}) - (\text{원 } O_1 \text{의 넓이})$

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} - \pi \times 2^2$$

$$= 2\pi$$



점 O_1 에서 선분 $A_2 C_2$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{O_1 A_2} = \overline{O_1 C_2}$ 에서 $\triangle O_1 C_2 A_2$ 는 이등변삼각형이고,

$\angle O_1 A_2 C_2 = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\overline{A_2 H} = \sqrt{3}$

$\therefore \overline{A_2 C_2} = 2\sqrt{3}$

두 부채꼴 $B_1 A_1 C_1$, $B_2 A_2 C_2$ 의 반지름의 길이가 각각 6, $2\sqrt{3}$ 이므로 닮음비는 $3 : \sqrt{3}$ 이고 넓이의 비는

$3^2 : (\sqrt{3})^2$, 즉 $1 : \frac{1}{3}$ 이다.

즉, 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분의 넓이와 그림 R_{n+1} 에

새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{1}{3}$ 이므로

$$S_n = S_1 + \frac{1}{3} S_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} S_1$$

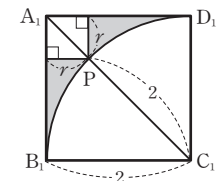
따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = 2\pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비

수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 3\pi$$

답 3π

28



한편, 그림 T_1 에서 큰 원과 작은 원의 반지름의 길이의 비가 $1 : (2\sqrt{3}-3)$ 이므로 그림 T_1 에서 새로 그려진 원과 그림 T_2 에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이의 비도 $1 : (2\sqrt{3}-3)$ 이고 넓이의 비는 $1 : (2\sqrt{3}-3)^2$ 이다.

또한, 그림 T_2 에서 그림 T_1 에 색칠한 3개의 원 내부에 각각 3개의 작은 원을 그리고 그 내부의 색은 지웠으므로 그림 T_2 에 색칠되어 있는 부분의 넓이는

$$S_2 = S_1 - S_1 \times (2\sqrt{3}-3)^2 \times 3$$

$$= S_1 - (63-36\sqrt{3})S_1$$

$$S_3 = S_1 - (63-36\sqrt{3})S_1 + (63-36\sqrt{3})^2 S_1$$

$\vdots$

$$\therefore S_n = S_1 \{1 - (63-36\sqrt{3}) + (63-36\sqrt{3})^2 - \dots + (-63+36\sqrt{3})^{n-1}\}$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $(63-36\sqrt{3})\pi$, 공비가 $-63+36\sqrt{3}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{(63-36\sqrt{3})\pi}{1 - (-63+36\sqrt{3})} = \frac{63-36\sqrt{3}}{64-36\sqrt{3}}\pi$$

따라서 $a=63$, $b=64$ 이므로

$$a+b=63+64=127$$

답 ③

31 그림 R_1 에서 색칠되어 있는 부분의 넓이가 S_1 이므로 S_1 은 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 내부와 원 C_2 의 외부의 공통부분의 넓이와 같다.

$\triangle FEC$ 가 직각이등변삼각형이고,

$$\overline{FC} = \overline{CE} = 1 \text{ 이므로 } \overline{FE} = \sqrt{2}$$

선분 AD의 중점을 G라 하면 S_1 은 직사각형 ABEG의 넓이와 직각삼각형 EFG의 넓이의 합에서 부채꼴 EFG의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$S_1 = 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$= 3 - \frac{\pi}{2}$$

그림 R_2 에서 $\triangle FQR$ 가 직각삼각형이고 $\overline{FR} = \overline{FE} = \sqrt{2}$ 이므로 정사각형 PQRS의 한 변의 길이를 a 라 하면

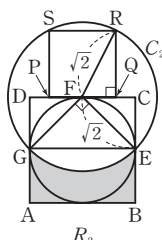
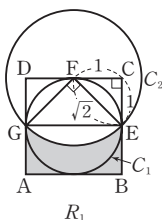
$$\overline{QR} = a, \overline{FQ} = \frac{1}{2}a$$

$\triangle FQR$ 에서

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = (\sqrt{2})^2, \frac{5}{4}a^2 = 2$$

$$a^2 = \frac{8}{5} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{10}}{5} (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{QR} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$



두 정사각형 ABCD, PQRS의 한 변의 길이가 각각

$$2, \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ 이므로 답은 비는 } 2 : \frac{2\sqrt{10}}{5}, \text{ 즉 } 1 : \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ 이고 넓}$$

$$\text{이의 비는 } 1^2 : \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2, \text{ 즉 } 1 : \frac{2}{5} \text{ 이다.}$$

따라서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 비도 $1 : \frac{2}{5}$ 이므로

$$S_2 = S_1 + \frac{2}{5}S_1$$

$$S_3 = S_1 + \frac{2}{5}S_1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 S_1$$

$\vdots$

$$S_n = S_1 \left\{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = 3 - \frac{\pi}{2}$, 공비가 $\frac{2}{5}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3 - \frac{\pi}{2}}{1 - \frac{2}{5}}$$

$$= \frac{5}{3} \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{30 - 5\pi}{6}$$

답 ③

Step 3

1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 25

01 $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

02 ①

03 7

04 1

05 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

06 $\frac{3}{4}$

07 157

01 해결단계

① 단계	$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 은 급수의 부분합을 구한 후, 부분합의 극한값을 구하여 합을 구한다.
② 단계	$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 은 등비급수의 합 공식을 이용하여 합을 구한다.
③ 단계	구한 극한값의 대소 관계를 비교하여 급수의 합이 큰 것부터 순서대로 나열한다.

$$\begin{aligned} & \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k^2+k}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+2)} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5^n} - \frac{1}{4^n} \right) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄹ. } & \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \left(\frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 급수의 합을 큰 것부터 순서대로 나열하면

ㄹ, ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄹ, ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 해결단계

① 단계	급수의 합은 부분합의 극한값과 같음을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	반례를 찾아 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) \\
 &\quad + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_1 + a_{n+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\
 &= -a_1 + a \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a) \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

ㄴ. (반례) $\{a_n\} : 1, 0, 1, 0, \dots, \{b_n\} : 0, 1, 0, 1, \dots$

이라 하면 $a_n b_n = 0$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$ 이므로 급수

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 모두 발산한다. (거짓)

ㄷ. (반례) $\{a_n\} : -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$

이라 하고 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{2n} = 0, S_{2n-1} = -\frac{1}{n}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 0$, 즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ 이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴하지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

blacklabel 특강 참고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 의 발산의 증명

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 의 각 항을 $\frac{1}{2^k}$ (k 는 자연수)과 대소 비교를 해 보면

$$1 > \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{2^2}, \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{5} > \frac{1}{2^3}, \frac{1}{6} > \frac{1}{2^3}, \frac{1}{7} > \frac{1}{2^3},$$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots \\
 &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 도 발산한다.

03 해결단계

① 단계	부분합을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$ 를 S_n 과 a_n 에 대한 식으로 나타낸다.
② 단계	급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 임을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$ 의 값을 구한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 부분합을 T_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=1}^n (a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) \\
 &\quad + \cdots + (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\
 &= a_1 + 2a_2 + 3(a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) + 2a_{n+1} + a_{n+2} \\
 &= 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + 2a_{n+1} + a_{n+2} - 2a_1 - a_2 \\
 &= 3S_n + 2a_{n+1} + a_{n+2} - 2a_1 - a_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 5n - 1}{2n^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\text{또한, } S_n = \frac{8n^2 - 5n - 1}{2n^2 - 1} \text{에서}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{8 - 5 - 1}{2 - 1} = 2$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{8 \times 2^2 - 5 \times 2 - 1}{2 \times 2^2 - 1} = \frac{21}{7} = 3$$

$$\therefore a_1 = 2, a_2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3S_n + 2a_{n+1} + a_{n+2} - 2a_1 - a_2) \quad (\because \textcircled{L}) \\ &= 3 \times 4 + 2 \times 0 + 0 - 2 \times 2 - 1 \quad (\because \textcircled{L}, \textcircled{E}, \textcircled{E}) \\ &= 7 \end{aligned} \quad \text{답 7}$$

04 해결단계

① 단계	주어진 식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.
② 단계	부분분수를 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 변형한 후, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구한다.

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n(n+2)} a_n \text{에서 } \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+2} \times \frac{a_n}{n}$$

$$\frac{a_n}{n} = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+2} b_n$$

위의 식의 n 대신에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{3} b_1 \\ b_3 &= \frac{1}{4} b_2 \\ b_4 &= \frac{1}{5} b_3 \\ &\vdots \\ \times \left(b_n &= \frac{1}{n+1} b_{n-1} \right) \\ b_n &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{n+1} \times b_1 \\ &= \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n+1)} \quad (\because b_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \quad (\text{단, } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) \end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{n} = b_n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_n &= n b_n = \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

05 해결단계

① 단계	부채꼴 $AP_{n-1}P_n$ 의 중심각의 크기를 θ_n 이라 할 때, 두 수열 $\{l_n\}, \{\theta_n\}$ 이 모두 공비가 r 인 등비수열임을 파악한다.
② 단계	두 점 A, P_2 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $\sqrt{3}$ 이고, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{3}{7}\pi$ 임을 이용하여 r 의 값을 구한다.

부채꼴 $AP_{n-1}P_n$ 의 중심각의 크기를 θ_n 이라 하면 부채꼴 $AP_{n-1}P_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta_n = \frac{1}{2} \theta_n$$

조건 (나)에서 $S_{n+1} = r S_n$ 이므로

$$\frac{1}{2} \theta_{n+1} = r \times \frac{1}{2} \theta_n$$

$$\therefore \theta_{n+1} = r \theta_n$$

즉, 수열 $\{\theta_n\}$ 은 공비가 r 인 등비수열이다.

이때, 호 $P_{n-1}P_n$ 의 길이 l_n 은

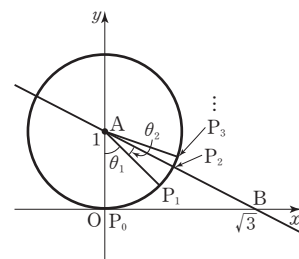
$$l_n = 1 \times \theta_n = \theta_n$$

즉, 수열 $\{l_n\}$ 도 공비가 r 인 등비수열이고,

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{3}{7}\pi$ 이므로 $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \frac{l_1}{1-r} \\ &= \frac{\theta_1}{1-r} = \frac{3}{7}\pi \end{aligned}$$

$$\therefore \theta_1 = \frac{3}{7}\pi(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$



한편, 위의 그림과 같이 두 점 A, P_2 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 B라 하면 점 B의 x 좌표가 $\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle AOB$ 에서 $\overline{OA} : \overline{OB} = 1 : \sqrt{3}$

$$\therefore \angle BAO = \frac{\pi}{3}$$

즉, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\theta_1 + r\theta_1 = \theta_1(1+r) = \frac{\pi}{3}$$

위의 식에 ①을 대입하여 풀면

$$\frac{3}{7}\pi(1-r)(1+r) = \frac{\pi}{3}, \frac{3}{7}(1-r^2) = \frac{1}{3}$$

$$1-r^2 = \frac{7}{9}, r^2 = \frac{2}{9}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{3} (\because r > 0) \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2}}{3}$$

06 해결단계

① 단계	주어진 식을 수열 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ 에 관한 식으로 변형한다.
② 단계	두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}}$ 를 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ 을 이용하여 나타낸다.
③ 단계	①, ②단계에서 구한 식을 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ 의 값을 구한다.

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ 의 양변에 $\frac{1}{3^{n+2}}$ 을 곱하면

$$\frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+2}} + \frac{2a_n}{3^{n+2}}$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \times \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2}{9} \times \frac{a_n}{3^n} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = 0 \quad \dots\dots ②$$

또한, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}}$ 도 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \dots + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} \right) + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_1}{3} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_1}{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{3} (\because ②에서 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = 0, a_1 = 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+2}}{3^{k+2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \frac{a_5}{3^5} + \dots + \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{3^2} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} \right) - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{3^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$$

$$(\because ②에서 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} = 0, a_1 = 1, a_2 = 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{4}{9}$$

따라서 ①에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \times \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2}{9} \times \frac{a_n}{3^n} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

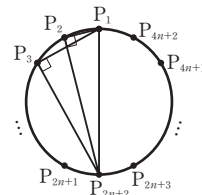
$$\frac{4}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

07 해결단계

① 단계	원의 둘레를 $(4n+2)$ 등분한 점 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{4n+2}$ 을 이용하여 $\overline{P_1P_{2n+2}}$ 가 원의 지름임을 파악한 후, $\sum_{k=1}^{2n} \overline{P_1P_{k+1}}^2$ 을 n 에 대하여 나타낸다.
② 단계	원이 지름 $\overline{P_1P_{2n+2}}$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 S_n 을 구한 후, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{S_n S_{n+1}}$ 의 값을 구한다.
③ 단계	$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{S_n S_{n+1}} \right\}^{m-1}$ 의 값을 구하여 p, q 의 값을 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.



원의 둘레를 $(4n+2)$ 등분하였으므로 선분 P_1P_{2n+2} 는 원의 지름이고, $\triangle P_1P_iP_{2n+2}$ ($2 \leq i \leq 2n+1$ 자연수)는 선분 P_1P_{2n+2} 가 빗변인 직각삼각형이다.

$$\text{즉, } \overline{P_1P_i}^2 + \overline{P_iP_{2n+2}}^2 = \overline{P_1P_{2n+2}}^2 = 9 \quad \dots\dots ①$$

또한, $1 \leq k \leq 2n+1$ 인 자연수 k 에 대하여

$$\overline{P_1P_{1+k}} = \overline{P_{2n+2}P_{2n+2-k}}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_{2n+1}}^2 &= \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_{2n+2}}^2 \\ &= \overline{P_1P_{2n+2}}^2 = 9 (\because ①) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_1P_{2n}}^2 &= \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_3P_{2n+2}}^2 \\ &= \overline{P_1P_{2n+2}}^2 = 9 (\because ①) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \overline{P_1P_{n+1}}^2 + \overline{P_1P_{n+2}}^2 &= \overline{P_1P_{n+1}}^2 + \overline{P_{n+1}P_{2n+2}}^2 \\ &= \overline{P_1P_{2n+2}}^2 = 9 (\because ①) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_1P_4}^2 + \dots + \overline{P_1P_{2n+1}}^2 \\ = 9n \end{aligned}$$

주어진 원은 선분 P_1P_{2n+2} 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_{2n+3}}^2 + \overline{P_1P_{2n+4}}^2 + \overline{P_1P_{2n+5}}^2 + \dots + \overline{P_1P_{4n+2}}^2 \\ = \overline{P_1P_{2n+1}}^2 + \overline{P_1P_{2n}}^2 + \overline{P_1P_{2n-1}}^2 + \dots + \overline{P_1P_2}^2 \\ = 9n \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_n &= \sum_{i=1}^{4n+1} P_i P_{i+1}^{-2} \\
 &= \sum_{i=1}^{2n} P_i P_{i+1}^{-2} + \sum_{i=2n+2}^{4n+1} P_i P_{i+1}^{-2} \\
 &= 9n + 9 + 9n \quad (\because \ominus, \omin�) \\
 &= 18n + 9 \\
 &= 9(2n+1)
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{S_n S_{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{30}{S_k S_{k+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{30}{81(2k+1)(2k+3)} \\
 &= \frac{5}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\
 &= \frac{5}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\
 &= \frac{5}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\
 &= \frac{5}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{81}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{S_n S_{n+1}} \right\}^{m-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{5}{81} \right)^{m-1} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{5}{81}} = \frac{81}{76}
 \end{aligned}$$

그러므로 $p=76$, $q=81$ 이므로
 $p+q=76+81=157$

답 157

이것이 수능

p. 26

1 ②

2 ②

3 ④

1 해결단계

① 단계	$\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = b_n$ 으로 놓고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴함을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구한다.
② 단계	a_n 을 b_n 에 대한 식으로 변형한 후, ①단계에서 구한 값을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 1$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1}$ 이 수렴하
 므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = 0$
 이때, $\frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} = b_n$ 으로 놓으면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이고, $a_n = \frac{(2^n + 1)b_n + 2^{n+1}}{2^n}$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)b_n + 2^{n+1}}{2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) b_n + 2 \right\} = 2
 \end{aligned}$$

답 ②

• 다른풀이 •

주어진 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1}$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} &= 0 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n a_n - 2^{n+1}}{2^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2}{1 + \frac{1}{2^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

2 해결단계

① 단계	급수가 수렴하면 수열의 극한값이 0임을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구한다.
② 단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 2n}{a_n + 2n + 1}$ 의 값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n}{n+3} \right) = 5$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n}{n+3} \right)$ 이 수

렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{2n}{n+3} \right) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 2n}{a_n + 2n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5a_n}{n} - 2}{\frac{a_n}{n} + 2 + \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{5 \times 2 - 2}{2 + 2 + 0} = 2
 \end{aligned}$$

답 ②

3 해결단계

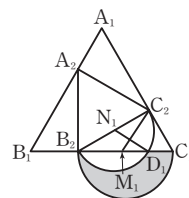
① 단계	선분 B_2C_1 을 지름으로 하는 반원의 넓이를 구한다.
② 단계	그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 구한다.
③ 단계	그림 R_n 에서 새로 색칠되는 도형은 모두 닮음임을 이용하여 넓이의 비를 구한다.
④ 단계	수열 $\{S_n\}$ 이 등비수열의 합임을 파악한 후, ①단계에서 구한 넓이의 비를 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구한다.

선분 B_1C_1 , C_1A_1 을 1 : 2로 내분하는 점이 각각 B_2 , C_2
 이므로 $\overline{B_2C_1} = 2$, $\overline{C_1C_2} = 1$

선분 B_2C_1 을 지름으로 하는 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{B_2C_1}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

다음 그림과 같이 두 선분 B_2C_1 , B_2C_2 의 중점을 각각 M_1 , N_1 이라 하고, 선분 B_2C_2 를 지름으로 하는 반원의 호와 선분 B_2C_1 의 교점을 D_1 이라 하자.



$\overline{M_1C_1} = \overline{C_1C_2} = 1$, $\angle C_2C_1M_1 = \frac{\pi}{3}$ 에서 $\triangle C_1C_2M_1$ 은 정삼각형이므로

$$\angle C_2M_1C_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle B_2M_1C_2 = \frac{2}{3}\pi$$

$\triangle M_1C_2B_2$ 는 $\overline{M_1B_2} = \overline{M_1C_2} = 1$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle M_1C_2B_2 = \angle M_1B_2C_2 = \frac{\pi}{6}$$

$\triangle B_2C_1C_2$ 는 $\angle C_1C_2B_2 = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{B_2C_2}^2 &= \overline{B_2C_1}^2 - \overline{C_1C_2}^2 \\ &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{B_2C_2} = \sqrt{3}$$

같은 방법으로 $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2A_2} = \sqrt{3}$ 이므로 $\triangle A_2B_2C_2$ 는 정삼각형이다.㉠

한편, $\overline{N_1B_2} = \overline{N_1D_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B_2N_1D_1 = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

부채꼴 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{N_1B_2}^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{4}$$

또한, 삼각형 $N_1B_2D_1$ 의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{N_1B_2} \times \overline{N_1D_1} \times \sin \frac{2}{3}\pi \\ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_1 &= (\text{선분 } B_2C_1 \text{을 지름으로 하는 반원의 넓이}) \\ &\quad + (\text{삼각형 } N_1B_2D_1 \text{의 넓이}) \\ &\quad - (\text{부채꼴 } N_1B_2D_1 \text{의 넓이}) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

㉠에서 $\triangle A_2B_2C_2$ 는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형이므로 두 도형 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 의 닮음비는 $3 : \sqrt{3}$ 이고, 넓이의 비는 $3^2 : (\sqrt{3})^2$, 즉 $3 : 1$ 이다. 즉, 그림 R_1 에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2 에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 비도 $3 : 1$ 이므로

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{3}S_1$$

$$S_3 = S_1 + \frac{1}{3}S_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1$$

⋮

$$S_n = S_1 \left\{ 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}$ 이고 공비가

$\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{12\pi + 9\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

답 ④

II 미분법

03 지수함수와 로그함수의 미분

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

pp. 29~30

01 15

02 3

03 ②

04 ②

05 4

06 ④

07 6

08 ①

09 ⑤

10 ②

11 36

12 ②

13 ③

14 ④

15 ②

16 e

$$01 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{2^x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times 2^x - 3 \times 3^x}{2^x - 3^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}$$

$$= \frac{2 \times 0 - 3}{0 - 1} = 3$$

$$\therefore a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x + 5^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[5^x \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 5^{x \times \frac{1}{x}} \left\{ 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \left\{ 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} = 5(1+0)^0 = 5$$

$$\therefore b = 5$$

$$\therefore ab = 3 \times 5 = 15$$

답 15

$$02 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \{\log_a (x^3 + 2x^2 + 3x) - \log_a (3x^3 + 2x^2 + x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a \frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{3x^3 + 2x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$$

$$= \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$= \log_a 3 = 1$$

$$\therefore a = 3$$

답 3

$$03 \quad f(x) = 2^{x-1}, g(x) = 2^x + 2 \text{이므로}$$

직선 $x=t$ 가 x 축 및 두 곡선

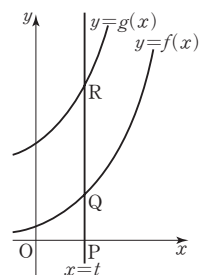
$y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 각각 만나는

점 P, Q, R는

$P(t, 0)$, $Q(t, 2^{t-1})$,

$R(t, 2^t + 2)$

$$\therefore \overline{PQ} = 2^{t-1}, \overline{PR} = 2^t + 2$$



$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{PR}}{PQ} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t + 2}{2^{t-1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2^t}{2^{t-1}} + \frac{2}{2^{t-1}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{2^{t-1}} \right) \\ &= 2 + 0 = 2\end{aligned}$$

답 ②

04 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{bx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right\}^{\frac{a}{b}}$

$$= e^{\frac{a}{b}} = e^4$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1+b^2x)^{\frac{1}{abx}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+b^2x)^{\frac{1}{bx}} \right\}^{\frac{b}{a}} \\ &= e^{\frac{b}{a}} \\ &= e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}\end{aligned}$$

답 ②

05 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)^{ax} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x+4}{x^2} \right)^{ax}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{4x+4}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{4x+4}} \right\}^{\frac{a(4x+4)}{x}}$$

$$= e^{4a} = e^b$$

따라서 $4a=b$ 이므로 $\frac{b}{a}=4$

답 4

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right)^{ax} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^2 \right\}^{ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^{4a} \\ &= e^{4a} = e^b\end{aligned}$$

06 $f(n)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+nx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{x} + \dots + \frac{\ln(1+nx)}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x} + 2 \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} + \dots + n \times \frac{\ln(1+nx)}{nx}} \\ &= \frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2\end{aligned}$$

답 ④

07 $e^{5x} - e^{3x} - e^{2x} + 1$

$$\begin{aligned}&= e^{3x}(e^{2x} - 1) - (e^{2x} - 1) \\ &= (e^{3x} - 1)(e^{2x} - 1) \\ &= (e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)(e^x + 1)(e^x - 1) \\ &= (e^x - 1)^2(e^x + 1)(e^{2x} + e^x + 1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x} - e^{2x} + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2(e^x + 1)(e^{2x} + e^x + 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1)(e^{2x} + e^x + 1) \\ &= 1^2 \times 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$

답 6

08 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-b}{\log_3(x-2)} = \frac{\ln 3}{4}$ 에서 극한값이 존재하고,
 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a}-b) = 0$ 이어야 하므로

$$\sqrt{3+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{3+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{\log_3(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a})(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}{\log_3(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\log_3(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})} \\ x-3=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 3 \text{일 때, } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t}{\log_3(t+1)} \times \frac{1}{\sqrt{t+3+a}+\sqrt{3+a}} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_3(t+1)} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t+3+a}+\sqrt{3+a}} \\ &= \ln 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{\ln 3}{2\sqrt{3+a}} \\ \text{즉, } \frac{\ln 3}{2\sqrt{3+a}} &= \frac{\ln 3}{4} \text{이므로 } 2\sqrt{3+a}=4 \\ \sqrt{3+a} &= 2\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$3+a=4 \quad \therefore a=1$$

이것을 ①에 대입하면 $b=\sqrt{3+1}=2$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

답 ①

09 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{2^{x+1}-a} = \frac{b}{2 \ln 2} \neq 0$ 에서 극한값이 존재하고,
 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (2^{x+1}-a) = 0$ 이어야 하므로

$$2^1 - a = 0 \quad \therefore a = 2$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{2^{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{2(2^x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{2 \times \frac{2^x-1}{x}} = \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2^x-1}{x}} \\ &= \frac{7}{2 \ln 2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{7}{2 \ln 2} = \frac{b}{2 \ln 2} \text{이므로 } b=7$$

$$\therefore a+b=2+7=9$$

답 ⑤

10 삼각형 PAB의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \ln t = \frac{1}{2}(e-1) \ln t$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{2(t-1)}$$

$$= \frac{e-1}{2} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1}$$

이때, $t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1+$ 일 때, $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \frac{e-1}{2} \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+s)}{s}$$

$$= \frac{e-1}{2} \times 1 = \frac{e-1}{2}$$

답 ②

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+2x)} = 3$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{f(x)}{2x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x}$$

$$= 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(x^2)}{e^x - 1}$$

$x^2=t$ 로 놓으면
 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 6$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^3}{e^x - 1} \times \frac{f(x)}{x} \times \frac{f(x^2)}{x^2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2}$$

$$= 1 \times 6 \times 6 = 36$$

답 36

• 다른풀이 •

$$\frac{f(x)}{\ln(1+2x)} = g(x) \text{로 놓으면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 \text{이고 } f(x) = g(x) \ln(1+2x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(x^2)}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \ln(1+2x) \times g(x^2) \ln(1+2x^2)}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^3}{e^x - 1} \times \frac{\ln(1+2x)}{2x} \right.$$

$$\quad \left. \times \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \times 4g(x)g(x^2) \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 4 \times 3 \times 3 = 36$$

12 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x) - f(0)}{x-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\ln(t+1)) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\ln(t+1)) - f(0)}{\ln(t+1) - 0} \times \frac{\ln(t+1)}{t} \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\ln(t+1)) - f(0)}{\ln(t+1) - 0} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t}$$

$$= f'(0) \times 1 = 2 \quad (\because f'(0) = 2)$$

답 ②

• 다른풀이 •

$$f(\ln x) = g(x) \text{로 놓으면 } g(1) = f(0) \text{이고,}$$

$$g'(x) = f'(\ln x) \times \frac{1}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x) - f(0)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$$

$$= g'(1) = \frac{f'(0)}{1} = 2$$

13 함수 $f(x) = (ax+b)e^x$ 의 그래프가 점 $(2, e^2)$ 을 지나므로

$$f(2) = e^2 \text{에서 } (2a+b)e^2 = e^2$$

$$\therefore 2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } f'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x \text{이고,}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, e^2)$ 에서의 접선의 기울기가 $4e^2$ 이므로

$$f'(2) = 4e^2 \text{에서 } (3a+b)e^2 = 4e^2$$

$$\therefore 3a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=3, b=-5$$

$$\text{따라서 } f'(x) = (3x-2)e^x \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ 2 \times \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} + \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \right\}$$

$$= 3f'(3)$$

$$= 3 \times 7e^3 = 21e^3$$

답 ③

14 함수 $f(x) = a \log_b x + c$ 의 그래프가 두 점 $(1, 3),$

$(2, 9)$ 를 지나므로 $f(1)=3, f(2)=9$ 에서

$$c=3, a \log_b 2 + c = 9$$

$$a \log_b 2 = 6 \quad \therefore a = \frac{6}{\log_b 2} = 6 \log_2 b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = a \log_b x + c \text{에서 } f'(x) = \frac{a}{x \ln b} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - c^2}{f(x) - f(c)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{f(x) - f(3)} \quad (\because c=3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{x-3}{f(x) - f(3)} \times (x+3) \right\}$$

$$= \frac{6}{f'(3)}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6 \times \frac{3 \ln b}{a} \\
 &= \frac{18 \ln b}{6 \log_2 b} (\because \textcircled{7}) \\
 &= \frac{3 \log_b 2}{\log_b e} \\
 &= 3 \ln 2
 \end{aligned}$$

답 ④

- 15 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)e^x$ 에서
 $f'(x) = (2x + 2a)e^x + (x^2 + 2ax + 3)e^x$
 $= \{x^2 + 2(a+1)x + 2a+3\}e^x$
 $e^x > 0$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 의 실근이 존재하려면 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2a+3 = 0$ 의 실근이 존재해야 한다.
 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2a+3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (2a+3) \geq 0$
 $a^2 \geq 2 \quad \therefore a \geq \sqrt{2} (\because a > 0)$
 따라서 구하는 양수 a 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

답 ②

- 16 함수 $f(x) = \begin{cases} \ln bx & (0 < x < 1) \\ e^{x-1} - 2ax & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 $x=1$ 에서 미분 가능하려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln bx = f(1)$ 이어야 하므로
 $\ln b = 1 - 2a \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 한편, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분계수가 존재해야 하므로
 $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ e^{x-1} - 2a & (x \geq 1) \end{cases}$
 에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} - 2a)$ 에서
 $1 - 2a = 1 \quad \therefore a = 0$
 이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $\ln b = 1 \quad \therefore b = e$
 $\therefore a + b = 0 + e = e$

답 e

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 31~33

01 ②	02 $\frac{1}{2}$	03 $\ln 2$	04 ⑤	05 ①
06 ①	07 ④	08 $\frac{\ln 2}{e}$	09 23	10 7
11 ④	12 ②	13 $\frac{1}{2}$	14 $4 \ln 2$	15 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
16 $\frac{1}{2}$	17 e^2	18 ②	19 ④	20 ①
21 4	22 ②	23 2		

- 01 $f(2) = 5$ 이므로 $a^2 + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) + 4\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a^x + b + 4) = 0$
 에서 $0 < a < 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$ 이므로 위의 극한값이 존재하지 않는다.
 또한, $a = 1$ 이면 $1 + b + 4 = 0 \quad \therefore b = -5$
 그런데 $a = 1, b = -5$ 는 $\textcircled{7}$ 을 만족시키지 않는다.
 즉, $a > 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ 이므로
 $b + 4 = 0 \quad \therefore b = -4$
 이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $a^2 - 4 = 5, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 1)$
 따라서 $f(x) = 3^x - 4$ 이므로
 $f(3) = 3^3 - 4 = 23$

답 ②

- 02 $-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^3 - 1}{1 + 2x^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t} - t^3 - 1}{1 - 2t^3}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-t}}{1 - 2t^3} - \frac{t^3 + 1}{1 - 2t^3} \right)$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e^t(1 - 2t^3)} + \frac{t^3 + 1}{2t^3 - 1} \right\}$
 이때, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t(1 - 2t^3) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 e^t \left(\frac{1}{t^3} - 2 \right) = -\infty$ 이므로
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t(1 - 2t^3)} = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^3 - 1}{1 + 2x^3}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e^t(1 - 2t^3)} + \frac{t^3 + 1}{2t^3 - 1} \right\}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t(1 - 2t^3)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3 + 1}{2t^3 - 1}$
 $= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

- 03 (i) $2^{a_n-1} \leq n < 2^{a_n}$ 일 때,
 $2^{a_n-1} \leq n$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $a_n - 1 \leq \log_2 n \quad \therefore a_n \leq \log_2 n + 1$
 $n < 2^{a_n}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $\log_2 n < a_n$
 $\therefore \log_2 n < a_n \leq \log_2 n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 (ii) $e^{b_n-1} \leq n < e^{b_n}$ 일 때,
 $e^{b_n-1} \leq n$ 의 양변에 자연로그를 취하면
 $b_n - 1 \leq \ln n \quad \therefore b_n \leq \ln n + 1$
 $n < e^{b_n}$ 의 양변에 자연로그를 취하면
 $\ln n < b_n$
 $\therefore \ln n < b_n \leq \ln n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$n = 1$ 일 때, $0 < a_1 \leq 1, 0 < b_1 \leq 1$ 이므로 $0 < \frac{b_1}{a_1}$

$n \geq 2$ 일 때, $\log_2 n \geq 1$ 이므로

$$\frac{\ln n}{\log_2 n + 1} < \frac{b_n}{a_n} < \frac{\ln n + 1}{\log_2 n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\log_2 n + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 1}{\log_2 n}$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\log_2 n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{\log_2 n}}{1 + \frac{1}{\log_2 n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log_n 2}{\log_n e}}{1 + \frac{1}{\log_2 n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_e 2}{1 + \frac{1}{\log_2 n}} \quad \left[\begin{array}{l} n \rightarrow \infty \text{ 일 때} \\ \log_2 n \rightarrow \infty \text{ 이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_2 n} = 0 \end{array} \right] \\ &= \log_e 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + 1}{\log_2 n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_2 n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_n 2}{\log_n e} + \frac{1}{\log_2 n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_e 2 + \frac{1}{\log_2 n} \right) \\ &= \log_e 2 = \ln 2 \end{aligned}$$

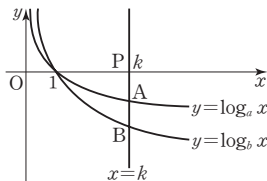
즉, $\ln 2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \leq \ln 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \ln 2$$

답 $\ln 2$

단계	채점 기준	배점
(가)	$2^{a-1} \leq n < 2^a$ 의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하여 a_n 의 범위를 구한 경우	30%
(나)	$e^{b-1} \leq n < e^b$ 의 각 변에 자연로그를 취하여 b_n 의 범위를 구한 경우	30%
(다)	b_n 의 범위를 a_n 의 범위로 나눈 후, 각 변의 극한값을 이용하여 답을 구한 경우	40%

04



두 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ 의 그래프가 직선 $x = k$ 와 만나는 점이 각각 A, B이고, 직선 $x = k$ 가 x 축과 만나는 점이 P이므로 $A(k, \log_a k)$, $B(k, \log_b k)$, $P(k, 0)$

$\overline{AB} = 2\overline{PA}$ 에서

$$|\log_b k - \log_a k| = 2|\log_a k|$$

$$\log_b k = 3 \log_a k, \quad \frac{\log k}{\log b} = \frac{3 \log k}{\log a}$$

$$\log a = 3 \log b \quad (\because k \neq 1 \text{에서 } \log k \neq 0)$$

$$\therefore a = b^3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \frac{b^x + \log_b x}{a^x + \log_a x} \\ &= \frac{b^x + \log_b x}{b^{3x} + \log_b x} \quad (\because a = b^3) \\ &= \frac{b^x + \log_b x}{b^{3x} + \frac{1}{3} \log_b x} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

ㄱ. $0 < x < 1$ 일 때,

$$b^x > a^x > 0, \log_b x > \log_a x > 0 \text{ 이므로}$$

$$b^x + \log_b x > a^x + \log_a x > 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{b^x + \log_b x}{a^x + \log_a x} > 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $x \rightarrow \infty$ 일 때, $\log_b x \rightarrow -\infty$, $b^x \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x + \log_b x}{b^{3x} + \frac{1}{3} \log_b x} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^x}{\log_b x} + 1}{\frac{b^{3x}}{\log_b x} + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad (\text{참})$$

ㄷ. $x \rightarrow 0+$ 일 때, $\log_b x \rightarrow \infty$, $b^x \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{b^{3x} + \frac{1}{3} \log_b x}{b^x + \log_b x} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{b^{3x}}{\log_b x} + \frac{1}{3}}{\frac{b^x}{\log_b x} + 1} = \frac{1}{3} \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

blacklabel 특강 풀이첨삭

$$|\log_b k - \log_a k| = 2|\log_a k| \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < k < 1 \text{ 이면 } 0 < \log_a k < \log_b k < 0 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \log_b k - \log_a k = 2 \log_a k \quad \therefore \log_b k = 3 \log_a k$$

$$k > 1 \text{ 이면 } \log_b k < \log_a k < 0 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -(\log_b k - \log_a k) = -2 \log_a k$$

$$\therefore \log_b k = 3 \log_a k$$

즉, ①을 정리하면 $\log_b k = 3 \log_a k$ 이다.

05

ㄱ. $-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

ㄴ. $x-2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t+2}{2} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{2}{t}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

ㄷ. $1-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1-t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\}^{-1} \\ &= e^{-1} \quad (\because \textcircled{1}) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

따라서 극한값이 e 인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

06

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-t-a}{-t+a} \right)^t$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+a}{t-a} \right)^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{t-a} \right)^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2a}{t-a} \right)^{\frac{t-a}{2a}} \right\}^{\frac{2at}{t-a}} \\
 &= e^{2a}
 \end{aligned}$$

즉, $e^{2a} = e^2$ 이므로 $2a=2$

$\therefore a=1$

답 ①

07 원금 a 를 연이율 $\frac{p}{n}$, 1년마다의 복리로 n 년 동안 예금할 때, n 년 후의 원리합계 $f(n)$ 은

$$f(n) = a \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{a} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n}{a} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{p}{n} \right)^{\frac{n}{p}} \right\}^p \\
 &= e^p
 \end{aligned}$$

답 ④

08 $e \ln x \leq f(x) \leq e^x - e$

$x < 1$ 일 때, $e \ln x < 0$, $e^x - e < 0$ 에서 $f(x) < 0$ 이고,

$2^{x-1} - 1 < 0$ 이므로

$$\frac{2^{x-1} - 1}{e \ln x} \leq \frac{2^{x-1} - 1}{f(x)} \leq \frac{2^{x-1} - 1}{e^x - e}$$

$x > 1$ 일 때, $e \ln x > 0$, $e^x - e > 0$ 에서 $f(x) > 0$ 이고,

$2^{x-1} - 1 > 0$ 이므로

$$\frac{2^{x-1} - 1}{e^x - e} \leq \frac{2^{x-1} - 1}{f(x)} \leq \frac{2^{x-1} - 1}{e \ln x}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{e^x - e}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{e \ln x}$ 에서

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{e^x - e} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{e^{t+1} - e} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2^t - 1}{t} \times \frac{t}{e(e^t - 1)} \right\} \\
 &= \ln 2 \times \frac{1}{e} \times 1 = \frac{\ln 2}{e},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{e \ln x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{e \ln(t+1)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2^t - 1}{t} \times \frac{t}{e \ln(t+1)} \right\} \\
 &= \ln 2 \times \frac{1}{e} \times 1 = \frac{\ln 2}{e}
 \end{aligned}$$

즉, $\frac{\ln 2}{e} \leq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{f(x)} \leq \frac{\ln 2}{e}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{f(x)} = \frac{\ln 2}{e}$$

답 $\frac{\ln 2}{e}$

09 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f(1) = 2$ 이므로 $a + b + c = 2$ ㉠

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} + \frac{1}{2}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x}$ 의 값이 존재하고, $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(ax^2 + bx + c) = 0$ 이므로 $\ln c = 0$

$\therefore c = 1$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$

또한, $f'(x) = 2ax + b$ 이므로 $f'(1) = 2a + b$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} + \frac{1}{2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax^2 + bx + 1)}{x} + \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1 + ax^2 + bx)}{ax^2 + bx} \times (ax + b) \right\} + \frac{1}{2} \\
 &= 1 \times b + \frac{1}{2} = b + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x} + \frac{1}{2}$ 에서

$$2a + b = b + \frac{1}{2}, 2a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{4} + b + 1 = 2 \quad \therefore b = \frac{3}{4}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$ 이므로

$$f(8) = \frac{1}{4} \times 8^2 + \frac{3}{4} \times 8 + 1 = 16 + 6 + 1 = 23$$

답 23

10 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - e^{x-1}}{\ln x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^n - e^t}{\ln(t+1)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{(t+1)^n - e^t}{t} \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{(t+1)^n - 1 + 1 - e^t}{t} \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left\{ \frac{(t+1)^n - 1}{t} - \frac{e^t - 1}{t} \right\} \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{(t+1-1)\{(t+1)^{n-1} + (t+1)^{n-2} + \dots + 1\}}{t} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} - \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^t - 1}{t} \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(t+1)^{n-1} + (t+1)^{n-2} + \dots + 1\} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \\
 &\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \\
 &= n \times 1 - 1 \times 1 \\
 &= n - 1
 \end{aligned}$$

즉, $n-1=6$ 이므로 $n=7$

답 7

•다른풀이•

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - e^{x-1}}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^n - e^t}{\ln(t+1)}$$

이때, $f(t) = (t+1)^n - e^t$ 이라 하면 $f(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{\ln(t+1)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t) - f(0)}{t} \times \frac{t}{\ln(t+1)} \right\} \\ &= f'(0) \times 1 = f'(0) = 6 \end{aligned}$$

$f'(t) = n(t+1)^{n-1} - e^t$ 에서 $f'(0) = n - 1$ 이므로

$$n - 1 = 6 \quad \therefore n = 7$$

11 $f(x) = e^x + x$ 에서 $x > 0$ 이면 $f(x) > 0$ 이므로

$$\ln \{f(x)f(2x)\}$$

$$= \ln f(x) + \ln f(2x)$$

$$= \ln(e^x + x) + \ln(e^{2x} + 2x)$$

$$= \ln e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln e^{2x} \left(1 + \frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

$$= x + \ln \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + 2x + \ln \left(1 + \frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

$$= 3x + \ln \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln \left(1 + \frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \{f(x)f(2x)\}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3x + \ln \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln \left(1 + \frac{2x}{e^{2x}}\right)}{x}$$

$$= 3 + \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{e^x} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{\frac{x}{e^x}} \right\}$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{2}{e^{2x}} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{e^{2x}}\right)}{\frac{2x}{e^{2x}}} \right\}$$

$$= 3 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 6$$

답 ④

12 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 일 때,

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \text{이면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x) - f(x)} \quad \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right\} = 0 - 1 = -1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{f(x) \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \right\}} = 0 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{이면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\}}{\ln f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x) + \ln \frac{g(x)}{f(x)}}{\ln f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{\ln \frac{g(x)}{f(x)}}{\ln f(x)} \right\} \quad \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \text{ 이고,} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln f(x) = \infty \text{ 이다.} \end{array} \right] \\ &= 1 + 0 = 1 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$\frac{0}{\infty}$ 꼴 이므로

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{ 이면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{g(x)} \right\}}{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{f(x)} \right\}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{g(x)} \right\}}{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{f(x)} \right\}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{g(x)} \right\}}{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{f(x)} \right\}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{g(x)} \right\}}{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{f(x)} \right\}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{g(x)} \right\}}{\frac{1}{g(x)}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \left\{ 1 + \frac{1}{f(x)} \right\}} \\ &= 1 \times 1 = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

•다른풀이•

ㄱ. (반례) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{이지만}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} \right)^{x^2 - x} \\ &= 0 \neq 1 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

ㄴ. (반례) $f(x) = g(x) = x$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \text{이지만}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln g(x)}{\ln f(x)} = 1 \neq 0 \text{ (거짓)}$$

$$13 \quad f(n) = \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{n+k+1}{n+k} \right)$$

$$= \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln \frac{2n+1}{2n}$$

$$= \ln \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2n} \right)$$

$$= \ln \frac{2n+1}{n}$$

한편, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = a$ 에서 $\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일

때, $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} (2^t - 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n\{f(n) - a\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \frac{2n+1}{n} - \ln 2 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{2n+1}{2n} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \\
 &= \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

14 $|\log_2 x - 1| = \begin{cases} -(\log_2 x - 1) & (0 < x < 2) \\ \log_2 x - 1 & (x \geq 2) \end{cases}$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b (a < b)라 하면

$$-(\log_2 a - 1) = k \text{에서 } \log_2 a = 1 - k$$

$$\therefore a = 2^{1-k} \quad \therefore A(2^{1-k}, k)$$

$$\log_2 b - 1 = k \text{에서 } \log_2 b = 1 + k$$

$$\therefore b = 2^{1+k} \quad \therefore B(2^{1+k}, k)$$

따라서 $f(k) = \overline{AB} = 2^{1+k} - 2^{1-k}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{f(k)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2^{1+k} - 2^{1-k}}{k} = \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2(2^k - 2^{-k})}{k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2(2^k - 1 + 1 - 2^{-k})}{k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2(2^k - 1)}{k} + \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2(2^{-k} - 1)}{-k} \\
 &= 2 \ln 2 + 2 \ln 2 = 4 \ln 2
 \end{aligned}$$

답 $4 \ln 2$

15 점 A의 x좌표를 t (t > 0)라 하면

$$A(t, e^{\frac{1}{2}t}), B(0, 1), C(t, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{t^2 + (e^{\frac{1}{2}t} - 1)^2},$$

$$\overline{BC} = t$$

점 A가 점 B에 한없이 가까워

지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로 $\cos B$ 의

극한값은

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0+} \cos B &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2 + (e^{\frac{1}{2}t} - 1)^2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}t} - 1}{t} \right)^2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{e^{\frac{1}{2}t} - 1}{\frac{1}{2}t} \times \frac{1}{2} \right)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

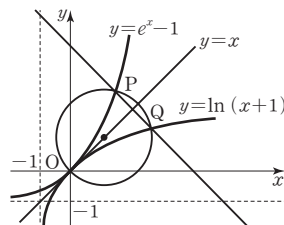
16 $y = e^x - 1$ 에서 $e^x = y + 1$

$$\therefore x = \ln(y + 1)$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y = \ln(x + 1)$

즉, 두 함수 $y = \ln(x + 1)$, $y = e^x - 1$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 곡선 $y = \ln(x + 1)$ 위의 점 P와 곡선 $y = e^x - 1$ 위의 점 Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로 두 점 P, Q도 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

또한, 세 점 O, P, Q를 지나는 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 있어야 한다.



원의 중심을 C(t, t)라 하면 P(a, ln(a + 1)), O(0, 0)이므로 $\overline{OC}^2 = \overline{PC}^2$ 에서

$$t^2 + t^2 = (t - a)^2 + (t - \ln(a + 1))^2$$

$$2at + 2t \ln(a + 1) = a^2 + \{\ln(a + 1)\}^2$$

$$2t\{a + \ln(a + 1)\} = a^2 + \{\ln(a + 1)\}^2$$

$$\therefore t = \frac{a^2 + \{\ln(a + 1)\}^2}{2\{a + \ln(a + 1)\}}$$

따라서 $f(a) = \frac{a^2 + \{\ln(a + 1)\}^2}{2\{a + \ln(a + 1)\}}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{f(a)}{a} &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a^2 + \{\ln(a + 1)\}^2}{2a\{a + \ln(a + 1)\}} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{1 + \left\{ \frac{\ln(a + 1)}{a} \right\}^2}{2\left\{ 1 + \frac{\ln(a + 1)}{a} \right\}} \\
 &= \frac{1 + 1^2}{2 \times (1 + 1)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

17 점 Q의 좌표는 (1, log_a t)이므로

$$\overline{PQ} = t - 1, \overline{AQ} = \log_a t \quad (\because t > 1)$$

이때, 선분 PQ를 반지름으로 하는 원의 넓이 S₁은

$$S_1 = \pi \overline{PQ}^2 = \pi(t - 1)^2$$

삼각형 APQ의 넓이 S₂는

$$S_2 = \frac{1}{2} \overline{PQ} \times \overline{AQ} = \frac{1}{2} (t - 1) \log_a t$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\pi(t - 1)^2}{\frac{1}{2}(t - 1) \log_a t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{2\pi(t - 1)}{\log_a t}
 \end{aligned}$$

이때, $t-1=x$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1+$ 일 때, $x \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{2\pi(t-1)}{\log_a t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2\pi x}{\log_a (x+1)} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{\log_a (x+1)}{x}} \\ &= 2\pi \ln a\end{aligned}$$

즉, $2\pi \ln a = 4\pi$ 이므로 $\ln a = 2$

$$\therefore a = e^2$$

답 e^2

- 18 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{\log_3 x - 1} = 3$ 에서 극한값이 존재하고, $x \rightarrow 3$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-1\} = 0$ 에서 $f(3) = 1$ ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{\log_3 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{\log_3 x - \log_3 3} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \frac{x-3}{\log_3 x - \log_3 3} \right\}\end{aligned}$$

이때, $\log_3 x = h_1(x)$ 라 하면 $h_1'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{\log_3 x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{h_1(x)-h_1(3)} \\ &= f'(3) \times \frac{1}{h_1'(3)} \\ &= f'(3) \times 3 \ln 3 = 3 \\ \therefore f'(3) &= \frac{1}{\ln 3} \quad \text{.....㉡}\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{2-g(x)}{2-\log_5 x} = 50$ 에서 $x \rightarrow 25$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 25} \{2-g(x)\} = 0$ 에서 $g(25) = 2$ ㉢

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 25} \frac{2-g(x)}{2-\log_5 x} &= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{g(x)-2}{\log_5 x - 2} \quad (\because \text{㉢}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{g(x)-g(25)}{\log_5 x - \log_5 25} \\ &= \lim_{x \rightarrow 25} \left\{ \frac{g(x)-g(25)}{x-25} \times \frac{x-25}{\log_5 x - \log_5 25} \right\}\end{aligned}$$

이때, $\log_5 x = h_2(x)$ 라 하면 $h_2'(x) = \frac{1}{x \ln 5}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 25} \frac{2-g(x)}{2-\log_5 x} &= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{g(x)-g(25)}{x-25} \times \lim_{x \rightarrow 25} \frac{x-25}{h_2(x)-h_2(25)} \\ &= g'(25) \times \frac{1}{h_2'(25)} \\ &= g'(25) \times 25 \ln 5 = 50 \\ \therefore g'(25) &= \frac{2}{\ln 5} \quad \text{.....㉣}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-1}{g(25+h)-2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h)-f(3)}{g(25+h)-g(25)} \quad (\because \text{㉠}, \text{㉢}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}}{\frac{g(25+h)-g(25)}{h}} \\ &= \frac{2f'(3)}{g'(25)} \\ &= \frac{2}{\ln 3} \times \frac{\ln 5}{2} \quad (\because \text{㉡}, \text{㉣}) \\ &= \frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 5\end{aligned}$$

답 ㉡

$$\begin{aligned}19 \quad & f(x)g(x) + 3e^x f(x) - g(x) \ln x - 3e^x \ln x \\ &= f(x)\{g(x) + 3e^x\} - \{g(x) + 3e^x\} \ln x \\ &= \{f(x) - \ln x\}\{g(x) + 3e^x\} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) + 3e^x f(x) - g(x) \ln x - 3e^x \ln x}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x) - \ln x\}\{g(x) + 3e^x\}}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - \ln x}{x-1} \times \frac{g(x) + 3e^x}{x-1} \right\} \quad \text{.....㉠}\end{aligned}$$

이때, $f(x) - \ln x = h_1(x)$, $g(x) + 3e^x = h_2(x)$ 라 하면

$$h_1(1) = f(1) - \ln 1 = 0 \quad (\because \text{㉠ } f(1) = 0),$$

$$h_2(1) = g(1) + 3e = 0 \quad (\because \text{㉡ } g(1) = -3e) \text{이므로}$$

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h_1(x) - h_1(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h_2(x) - h_2(1)}{x-1} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= h_1'(1)h_2'(1) \quad \text{.....㉢}\end{aligned}$$

$$h_1(x) = f(x) - \ln x \text{에서 } h_1'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$h_1'(1) = f'(1) - 1$$

$$= 5 - 1 \quad (\because \text{㉡ } f'(1) = 5) = 4$$

$$h_2(x) = g(x) + 3e^x \text{에서 } h_2'(x) = g'(x) + 3e^x \text{이므로}$$

$$h_2'(1) = g'(1) + 3e$$

$$= 1 - 3e + 3e \quad (\because \text{㉢ } g'(1) = 1 - 3e) = 1$$

따라서 ㉢에서 구하는 값은

$$4 \times 1 = 4$$

답 ㉣

- 20 함수 $f(x) = a^x$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 와 만나는 점의
x좌표가 b 이므로 $a^b = b$ ㉠

$$f(x) = a^x \text{에서 } y = a^x \text{로 놓으면}$$

$$x = \log_a y$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_a x$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$\begin{aligned}\therefore g(x) &= \begin{cases} f(x) & (x \leq b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases} \\ &= \begin{cases} a^x & (x \leq b) \\ \log_a x & (x > b) \end{cases}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = g(b) \text{에서}$$

$$a^b = \log_a b \quad \dots\dots\textcircled{\text{A}}$$

또한, $g'(x) = \begin{cases} a^x \ln a & (x < b) \\ \frac{1}{x \ln a} & (x > b) \end{cases}$ 에서 함수 $g(x)$ 가 실수

전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g'(x)$$

$$a^b \ln a = \frac{1}{b \ln a} \quad \dots\dots\textcircled{\text{B}}$$

①을 ①, ②에 각각 대입하여 정리하면

$$b = \log_a b \text{에서 } b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \therefore b \ln a = \ln b$$

$$b \ln a = \frac{1}{b \ln a} \text{에서 } (b \ln a)^2 = 1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$(\ln b)^2 = 1, \ln b = \pm 1$$

$$\therefore b = e^{-1} \text{ 또는 } b = e$$

이때, $b = e$ 이면 $a^e = e$ ($\because$ ①)에서 $a = e^{\frac{1}{e}}$

그런데 $e^{\frac{1}{e}} > 1$ 이므로 모순이다. ($\because 0 < a < 1$)

즉, $b = e^{-1}$ 이므로 ①에서 $a^{e^{-1}} = e^{-1}$

$$\therefore a = e^{-e}$$

$$\therefore ab = e^{-e} \times e^{-1} = e^{-e-1}$$

답 ①

21 $f(x) = 2 \ln(x+1) + 1$ 에서

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} \quad \dots\dots\textcircled{\text{A}}$$

또한, $y = 2 \ln(x+1) + 1$ 로 놓으면

$$\ln(x+1) = \frac{y-1}{2}, x+1 = e^{\frac{y-1}{2}}$$

$$\therefore x = e^{\frac{y-1}{2}} - 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{\frac{x-1}{2}} - 1$

즉, $g(x) = e^{\frac{x-1}{2}} - 1$ 이므로

$$g'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{2}} \quad \dots\dots\textcircled{\text{B}}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) - f(0)}{g(x) - g(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x-1) - f(0)}{x-1} \times \frac{x-1}{g(x) - g(1)} \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{g(x) - g(1)}$$

$$= \frac{f'(0)}{g'(1)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \quad (\because \textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}) = 4$$

답 4

• 다른풀이 •

$f(x) = 2 \ln(x+1) + 1, g(x) = e^{\frac{x-1}{2}} - 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) - f(0)}{g(x) - g(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 \ln x + 1) - 1}{(e^{\frac{x-1}{2}} - 1) - (1 - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{e^{\frac{x-1}{2}} - 1}$$

이때, $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$(\text{주어진 식}) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{e^{\frac{t}{2}} - 1}$$

$$= 4 \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{t}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \right\}$$

$$= 4 \times 1 \times 1 = 4$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 앞으로 배울 역함수의 미분법을 이용하여 쉽게 해결할 수 있다.

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x-1) - f(0)}{(x-1) - 0}}{\frac{g(x) - g(1)}{x-1}} = \frac{f'(0)}{g'(1)}$$

$g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이고, $f(0) = 1$ 이므로 $f'(0) = \frac{1}{g'(1)}$

이때, $f(x) = 2 \ln(x+1) + 1$ 에서 $f'(x) = \frac{2}{x+1}$ 이므로

$$(\text{주어진 식}) = \frac{f'(0)}{g'(1)} = \{f'(0)\}^2 = 2^2 = 4$$

22 $\neg. f(x) = x^2$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $f'(x) = 2x$ 이므로

$$\frac{x^2 - 1}{x-1} = 2c > 2 \quad (\because 1 < c < x) \quad (\text{참})$$

$\neg. g(x) = e^x$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{g(x) - g(2)}{x-2} = g'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(2, x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $g'(x) = e^x$ 이므로

$$\frac{e^x - e^2}{x-2} = e^c > e^2 \quad (\because 2 < c < x) \quad (\text{참})$$

$\neg. h(x) = \ln x$ 라 하면 함수 $h(x)$ 는 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{h(x) - h(e)}{x-e} = h'(c)$$

인 c 가 열린구간 (e, x) 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $h'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \frac{\ln x - 1}{x-e} = \frac{1}{c} < \frac{1}{e}$$

$$(\because e < c < x \text{에서 } \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{e}) \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

blacklabel 특강 필수 개념

평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면 $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

23 해결단계

① 단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{3n+5}{n+2}\right) - f\left(\frac{3n+3}{n+2}\right) \right\}$ 에서 $\frac{1}{n+2}=t$ 로 놓고 식을 정리한다.
② 단계	$f(x)=e^{x-3}$ 의 도함수를 이용하여 ①단계에서 나온 식의 값을 구한다.

$$\frac{3n+5}{n+2}=3-\frac{1}{n+2}, \quad \frac{3n+3}{n+2}=3-\frac{3}{n+2}$$

$$\frac{1}{n+2}=t \text{로 놓으면 } n \rightarrow \infty \text{일 때, } t \rightarrow 0+ \text{이고}$$

$$n=\frac{1}{t}-2=\frac{1-2t}{t} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{3n+5}{n+2}\right) - f\left(\frac{3n+3}{n+2}\right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left[\frac{1-2t}{t} \times \{f(3-t) - f(3-3t)\} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ (1-2t) \times \frac{f(3-t) - f(3) + f(3) - f(3-3t)}{t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ (1-2t) \left[\frac{f(3-t) - f(3)}{-t} \times (-1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{f(3) - f(3-3t)}{-3t} \times 3 \right] \right\} \\ &= 1 \times \{-f'(3) + 3f'(3)\} \\ & \quad (\because f(x)=e^{x-3} \text{에서 } f'(x)=e^{x-3}) \\ &= 2f'(3) \\ &= 2 \times e^0 = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 34

- 01 4 02 2 03 21 04 $-e^2$ 05 9
06 $\frac{1}{2}e$ 07 5

01 해결단계

① 단계	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x+t)$ 를 정리한 후, 함수 $g(t)$ 를 구한다.
② 단계	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ag\left(\frac{t}{2}\right)-b}{t}=c$ 가 성립하기 위한 조건을 찾아 a, b, c 사이의 관계식을 구한 후, $\frac{a+3b}{2c}$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x+t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+t}{x+t-1}\right)^{x+t} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+t-1}\right)^{x+t} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+t-1}\right)^{x+t-1}\right]^{\frac{x+t}{x+t-1}} \\ &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+t)\}^t \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x+t) \right\}^t = e^t \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ag\left(\frac{t}{2}\right)-b}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ae^{\frac{t}{2}}-b}{t} = c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

에서 극한값이 존재하고 $t \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{t \rightarrow 0} (ae^{\frac{t}{2}}-b)=0 \text{에서 } a-b=0$$

$$\therefore a=b$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(e^{\frac{t}{2}}-1)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{a}{2} \times \frac{e^{\frac{t}{2}}-1}{\frac{t}{2}} \right) \\ &= \frac{a}{2} \times 1 = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{2}=c \text{에서 } a=2c$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a+3b}{2c} &= \frac{a+3a}{a} \quad (\because b=a, 2c=a) \\ &= \frac{4a}{a} = 4 \end{aligned}$$

답 4

02 해결단계

① 단계	네 점 P_n, Q_n, R_n, S_n 의 좌표를 모두 구한 후, 두 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 를 각각 구한다.
② 단계	$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t)}{f(t)}$ 의 값을 구한다.
③ 단계	$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t)}{f(t)} > 10$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

$$nt=n \ln x \text{에서 } x=e^t \text{이므로 } P_n(e^t, nt)$$

$$nt=(n+1) \ln x \text{에서 } x=e^{\frac{n}{n+1}t} \text{이므로}$$

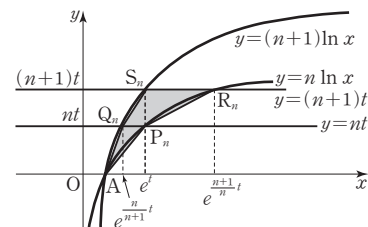
$$Q_n\left(e^{\frac{n}{n+1}t}, nt\right)$$

$$(n+1)t=n \ln x \text{에서 } x=e^{\frac{n+1}{n}t} \text{이므로}$$

$$R_n\left(e^{\frac{n+1}{n}t}, (n+1)t\right)$$

$$(n+1)t=(n+1) \ln x \text{에서 } x=e^t \text{이므로}$$

$$S_n(e^t, (n+1)t)$$



삼각형 AP_nQ_n 과 사각형 $P_nR_nS_nQ_n$ 의 넓이가 각각 $f(t), g(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(e^t - e^{\frac{n}{n+1}t}) \times nt \\ &= \frac{nt}{2}(e^t - e^{\frac{n}{n+1}t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(e^{\frac{n+1}{n}t} - e^t \right) + \left(e^t - e^{\frac{n}{n+1}t} \right) \right] \times t \\ &= \frac{t}{2} \left(e^{\frac{n+1}{n}t} - e^{\frac{n}{n+1}t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t)}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t}{2} \left(e^{\frac{n+1}{n}t} - e^{\frac{n}{n+1}t} \right)}{\frac{nt}{2} \left(e^t - e^{\frac{n}{n+1}t} \right)} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{n}{n+1}t} \left\{ e^{\frac{2n+1}{n(n+1)t}t} - 1 \right\}}{e^{\frac{1}{n+1}t} \left(e^{\frac{1}{n+1}t} - 1 \right)} \\ &= \frac{1}{n} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{e^{\frac{2n+1}{n(n+1)t}t} - 1}{\frac{2n+1}{n(n+1)t}} \times \frac{\frac{1}{n+1}t}{e^{\frac{1}{n+1}t} - 1} \times \frac{2n+1}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \times 1 \times 1 \times \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+1}{n^2} \end{aligned}$$

이때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t)}{f(t)} > 1$ 이어야 하므로

$$\frac{2n+1}{n^2} > 1 \text{에서 } 2n+1 > n^2$$

$$n^2 - 2n - 1 < 0$$

$\therefore 1 \leq n < 1 + \sqrt{2} = 2.4 \times \times \times$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 자연수 n 의 최댓값은 2이다.

답 2

03 해결단계

① 단계	조건 ㉠을 이용하여 a_{n+1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한 후, 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 a_1 을 이용하여 나타낸다.
② 단계	$b_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{f'(x+1)}$ 의 극한값을 구한 후, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{8}{7}$ 을 이용하여 a_1 의 값을 구한다.
③ 단계	로그를 이용하여 $ a_n < \frac{1}{100}$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

$$f(x) = x^2(\ln x)^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x(\ln x)^2 + x^2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x(\ln x)^2 + 2x \ln x$$

$$= 2x \ln x (\ln x + 1)$$

또한, $g(x) = (a_{n+1}x^3 + a_nx^2)e^x$ 에서

$$g'(x) = (3a_{n+1}x^2 + 2a_nx)e^x + (a_{n+1}x^3 + a_nx^2)e^x$$

$$= \{a_{n+1}x^3 + (3a_{n+1} + a_n)x^2 + 2a_nx\}e^x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 ㉠에서 $f'(1) = g'(1)$ 이므로

$$0 = (4a_{n+1} + 3a_n)e, \quad 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

$$\therefore a_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$g'(x) = \left(-\frac{3}{4}a_nx^3 - \frac{5}{4}a_nx^2 + 2a_nx \right)e^x$$

$$= -\frac{1}{4}a_nx(x-1)(3x+8)e^x$$

조건 ㉠에서

$$b_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{f'(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}a_nx(x-1)(3x+8)e^x}{2(x+1) \ln(x+1) \{ \ln(x+1) + 1 \}}$$

$$= -\frac{1}{8}a_n \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(x-1)(3x+8)e^x}{(x+1) \{ \ln(x+1) + 1 \}} \right.$$

$$\left. \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{8}a_n \times \frac{-1 \times 8 \times 1}{1 \times 1} \times 1 = a_n$$

㉡에서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = a_1 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$$b_n = a_1 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{8}{7} \text{에서 } \frac{a_1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}a_1 = \frac{8}{7}$$

$$\therefore a_1 = 2, \quad a_n = 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$|a_n| < \frac{1}{100} \text{에서 } 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{100}$$

위의 부등식의 양변에 밑이 10인 로그를 취하면

$$\log \left[2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right] < \log \frac{1}{100}$$

$$\log 2 + (n-1)(\log 3 - 2 \log 2) < -2$$

$$0.3 + (n-1)(0.48 - 0.6) < -2$$

$$0.12(n-1) > 2.3, \quad 0.12n > 2.42$$

$$\therefore n > 20.1 \times \times \times$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 21이다.

답 21

04 해결단계

① 단계	주어진 부등식을 변형하여 함수 $e^xf(x)$ 의 도함수를 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 함수 $e^xf(x)$ 의 도함수를 적분하여 함수 $e^xf(x)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 를 구하여 도함수 $f'(x)$ 를 구한 후, $f'(-2)$ 의 값을 구한다.

$$g(x) = e^xf(x) \text{라 하면}$$

$$e^{x+h}f(x+h) - e^xf(x) \leq h^2 \text{에서}$$

$$g(x+h) - g(x) \leq h^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $h < 0$ 일 때,

부등식 ㉠의 양변을 h 로 나누면

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geq h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} h$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geq 0$$

(ii) $h > 0$ 일 때,

부등식 ㉠의 양변을 h 로 나누면

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} h$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $g(x) = e^x f(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = 0$$

즉, $g'(x) = 0$ 이므로 $g(x) = c$ (단, c 는 상수)

그런데 $g(0) = f(0) = 1$ 이므로 $c = 1$

$$\therefore g(x) = 1$$

즉, $e^x f(x) = 1$ 이므로 $f(x) = e^{-x}$

따라서 $f'(x) = -e^{-x}$ 이므로

$$f'(-2) = -e^2 \quad \text{답 } -e^2$$

05 해결단계

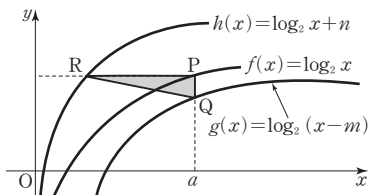
① 단계	세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 를 m , n 을 이용하여 나타낸 후, 세 점 P, Q, R의 좌표를 a , m , n 을 이용하여 나타낸다.
② 단계	삼각형 PQR의 넓이 $S(a)$ 를 구한 후, $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ 를 m , n 을 이용하여 나타낸다.
③ 단계	$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \frac{2}{\ln 2}$ 를 만족시키는 자연수 m , n 의 값을 각각 구한 후, $m+n$ 의 값을 구한다.

곡선 $f(x) = \log_2 x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 곡선이 $y = g(x)$, 곡선 $y = f(x)$ 를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 곡선이 $y = h(x)$ 이므로

$$g(x) = \log_2 (x - m)$$

$$h(x) = \log_2 x + n$$

세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 점 P, Q의 x 좌표는 모두 a 이므로

$$P(a, \log_2 a), Q(a, \log_2 (a - m))$$

점 R의 y 좌표는 점 P의 y 좌표와 같으므로

$$\log_2 x + n = \log_2 a \text{에서}$$

$$\log_2 x = \log_2 a - n = \log_2 (a \times 2^{-n})$$

$$\therefore x = a \times 2^{-n}$$

즉, $R(a \times 2^{-n}, \log_2 a)$ 이다.

삼각형 PQR의 넓이가 $S(a)$ 이므로

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{PQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times (a - a \times 2^{-n}) \{ \log_2 a - \log_2 (a - m) \}$$

$$= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \times \log_2 \frac{a}{a - m}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \times \log_2 \frac{a}{a - m} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \lim_{a \rightarrow \infty} a \log_2 \left(1 + \frac{m}{a - m} \right)$$

.....㉠

이때, $\frac{m}{a - m} = t$ 로 놓으면 $a \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$ 이고

$$a = \frac{m(1+t)}{t} \text{이므로}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \lim_{a \rightarrow \infty} a \log_2 \left(1 + \frac{m}{a - m} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{m(1+t)}{t} \times \log_2 (1+t) \right\} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ m(1+t) \times \frac{\log_2 (1+t)}{t} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \times \frac{m}{\ln 2}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \frac{2}{\ln 2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \times \frac{m}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$$

$$m \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 4 \quad \therefore m(2^n - 1) = 2^{n+2}$$

그런데 m , n 이 모두 자연수이므로 m , $2^n - 1$ 은 모두 2의 거듭제곱이어야 한다.

이것을 만족시키는 자연수 m , n 은 $m=8$, $n=1$ 뿐이므로 $m+n=9$

답 9

06 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 $0 \leq x < a$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 a , b 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	도함수 $f'(x)$ 를 구한 후, $\frac{a}{b} f'(1)$ 의 값을 구한다.

$$-a \leq x < 0 \text{일 때, } f(x) = x^2 e^x$$

$$\text{조건 (나)에서 } f(x+a) = f(x) + b \text{이므로}$$

$$x+a=t \text{로 놓으면 } x=t-a$$

$$-a \leq t-a < 0 \text{에서 } 0 \leq t < a$$

즉, $0 \leq t < a$ 일 때,

$$f(t) = f(t-a) + b$$

$$= (t-a)^2 e^{t-a} + b$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x^2 e^x & (-a \leq x < 0) \\ (x-a)^2 e^{x-a} + b & (0 \leq x < a) \\ \vdots & \vdots \end{cases} \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \{(x-a)^2 e^{x-a} + b\} = a^2 e^{-a} + b$$

$$\therefore a^2 e^{-a} + b = 0 \dots\dots \textcircled{8}$$

또한, $\textcircled{7}$ 에서

$$f'(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 2xe^x + x^2 e^x & (-a < x < 0) \\ 2(x-a)e^{x-a} + (x-a)^2 e^{x-a} & (0 < x < a) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \vdots & \vdots \\ (x^2 + 2x)e^x & (-a < x < 0) \\ (x-a)(x-a+2)e^{x-a} & (0 < x < a) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재해야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (x^2 + 2x)e^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x-a)(x-a+2)e^{x-a}$$

$$-a(-a+2)e^{-a} = 0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because e^{-a} > 0, 0 < a < e)$$

이것을 $\textcircled{8}$ 에 대입하여 풀면

$$4e^{-2} + b = 0 \quad \therefore b = -4e^{-2}$$

따라서 $f'(x) = x(x-2)e^{x-2} \quad (0 < x < 2)$ 이므로

$$f'(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$\therefore \frac{a}{b} f'(1) = \frac{2}{-4e^{-2}} \times \left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}e \quad \text{답 } \frac{1}{2}e$$

07 해결단계

① 단계	$ f(x) $ 와 $ g(x) $ 의 대소 관계를 이용하여 함수 $h(x)$ 를 구한다.
② 단계	그래프를 이용하여 함수 $h(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하지 않은 점이 2개가 되도록 하는 자연수 k 의 개수를 구한다.

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{|f(x)|^n + |g(x)|^n\}^{\frac{1}{n}} \text{에서}$$

(i) $|f(x)| < |g(x)|$ 일 때,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[|g(x)|^n \left\{ \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^n + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= |g(x)| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^n + 1 \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= |g(x)|$$

(ii) $|f(x)| = |g(x)|$ 일 때,

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{2|f(x)|^n\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} |f(x)|$$

$$= |f(x)|$$

(iii) $|f(x)| > |g(x)|$ 일 때,

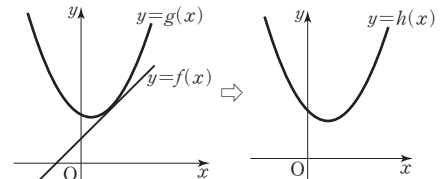
$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[|f(x)|^n \left\{ 1 + \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right|^n \right\} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= |f(x)| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right|^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= |f(x)|$$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(x) = \begin{cases} |g(x)| & (|f(x)| < |g(x)|) \\ |f(x)| & (|f(x)| \geq |g(x)|) \end{cases}$$



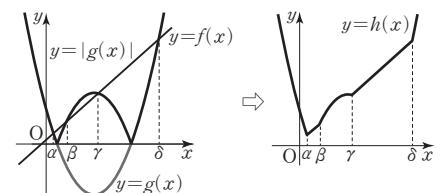
위의 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=f(x)$ 가 만나지 않거나 접하면 $h(x)=g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그런데 함수 $h(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하지 않은 점이 2개이므로 곡선 $y=g(x)$ 는 직선 $y=f(x)$ 와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, 방정식 $kx^2 - 6x + 3 = x + 1$, 즉 $kx^2 - 7x + 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 7^2 - 4 \times k \times 2 > 0 \text{에서 } 49 - 8k > 0$$

$$8k < 49 \quad \therefore k < \frac{49}{8} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$



또한, 위의 그림과 같이 곡선 $y=|g(x)|$ 가 직선 $y=f(x)$ 와 서로 다른 네 점에서 만나면 함수 $h(x)$ 의 미분가능하지 않은 점이 4개이므로 곡선 $y=|g(x)|$ 와 직선 $y=f(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2 또는 3이어야 한다.

k 의 값이 작을수록 곡선

$y=g(x)$ 의 꼭짓점의 y 좌표는

작아지고 곡선 $y=|g(x)|$ 의 꼭

짓점의 y 좌표는 커지므로 오른쪽

그림과 같이 직선 $y=f(x)$ 가 곡

선 $y=|g(x)|$ 와 서로 다른 두 점에서 만나고 한 점에서

접할 때 k 가 최소이다.

즉, 곡선 $y=-g(x)$ 와 직선 $y=f(x)$ 가 접해야 하므로

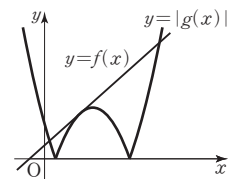
방정식 $-kx^2 + 6x - 3 = x + 1$, 즉 $kx^2 - 5x + 4 = 0$ 이 중

근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 5^2 - 4 \times k \times 4 = 0 \text{에서 } 25 - 16k = 0$$

$$\therefore k = \frac{25}{16} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$



㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$\frac{25}{16} \leq k < \frac{49}{8}$$

따라서 자연수 k 는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

답 5

이것이 수능

p. 35

1 ㉠

2 ㉡

3 ㉢

4 ㉣

1 해결단계

① 단계	점 P의 좌표를 임의의 문자를 사용하여 나타낸 후, 점 P가 직선 $x+y=t$ 위에 있음을 이용하여 사용한 임의의 문자와 t 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$ 를 구한 후, ①단계에서 구한 관계식을 이용하여 정리한다.
③ 단계	$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2S(t)-1}{t}$ 의 값을 구한다.

점 P의 좌표를 $(a, \ln a)$ ($0 < a < 1$)라 하면 점 Q의 좌표는 (a, e^a)

점 P는 직선 $x+y=t$ 위에 있으므로

$$a + \ln a = t, \ln ae^a = t$$

$$\therefore ae^a = e^t$$

삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{HQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times e^a$$

$$= \frac{1}{2} ae^a = \frac{1}{2} e^t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2S(t)-1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2 \times \frac{1}{2} e^t - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

2 해결단계

① 단계	두 점 A, B의 좌표를 t 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	선분 PQ의 길이가 $f(t)$ 이고 삼각형 AQB의 넓이가 1임을 이용하여 $f(t)$ 를 구한다.
③ 단계	$\lim_{t \rightarrow 1+} (t-1)f(t)$ 의 값을 구한다.

$A(t, \ln t)$, $B(t, -\ln t)$ 이므로 $\overline{AB} = 2 \ln t$

선분 PQ의 길이가 $f(t)$ 이고 삼각형 AQB의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PQ} = 1 \text{에서 } \frac{1}{2} \times 2 \ln t \times f(t) = 1$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{\ln t}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} (t-1)f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t-1}{\ln t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s}{\ln(s+1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ②

3

해결단계

① 단계	조건 (내)와 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속임을 이용하여 $x < 0$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 방정식을 구한다.
② 단계	$f\left(\frac{1}{2}\right)$ 과 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능함을 이용하여 a, b 의 값을 각각 구하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, 조건 (가)에서

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (axe^{2x} + bx^2) = 0$$

한편, 임의의 실수 x_1 ($x_1 < 0$)에 대하여

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{3x - 3x_1}{x - x_1} \quad (\because \text{조건 (나)}) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{3(x - x_1)}{x - x_1} = 3 \end{aligned}$$

이므로 $x < 0$ 일 때 $f'(x) = 3$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 3 dx$$

$$= 3x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$f(0) = 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0-} (3x + C) = 0$$

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3x & (x \leq 0) \\ axe^{2x} + bx^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재해야 한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ ae^{2x} + 2axe^{2x} + 2bx & (x > 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ a(1+2x)e^{2x} + 2bx & (x > 0) \end{cases} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} 3 = \lim_{x \rightarrow 0+} (ae^{2x} + 2axe^{2x} + 2bx)$$

$$\therefore a = 3$$

$$\text{또한, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e \text{이므로}$$

$$\frac{3}{2}e + \frac{1}{4}b = 2e \text{에서 } \frac{1}{4}b = \frac{1}{2}e$$

$$\therefore b = 2e$$

따라서 ㉠에서 $x > 0$ 일 때 $f'(x) = 3(2x+1)e^{2x} + 4ex$ 이므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6e + 2e = 8e$$

답 ④

4

해결단계

① 단계	직선 $y=x+t$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 접할 때의 경우를 각각 t_1, t_2 라 하고, t_1, t_2 의 대소 관계에 따라 함수 $g(t)$ 의 불연속점의 개수를 파악한다.
② 단계	함수 $g(t)$ 의 불연속인 점의 개수가 1일 때의 k 의 값을 구한다.

실수 t 에 대하여 직선 $y=x+t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 $g(t)$ 이므로

직선 $y=x+t$ 가 곡선 $y=x^2+k$ 와 접할 때의 t 의 값을 t_1 ,
곡선 $y=\ln(x-2)$ 와 접할 때의 t 의 값을 t_2 라 하자.

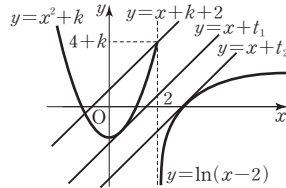
또한, 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(2, 4+k)$ 를 지나므로 직선 $y=x+t$ 가 이 점을 지날 때의 t 의 값은

$$4+k=2+t \text{에서 } t=k+2$$

(i) $t_1 > t_2$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (t < t_2) \\ 1 & (t = t_2) \\ 0 & (t_2 < t < t_1) \\ 1 & (t = t_1) \\ 2 & (t_1 < t \leq k+2) \\ 1 & (t > k+2) \end{cases}$$



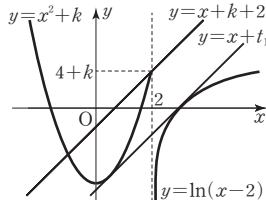
함수 $g(t)$ 는 $t=t_2, t=t_1, t=k+2$ 에서 불연속이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $t_1 = t_2$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=x+t$ 와 서로 다른 두 점에서 접한다.

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (t \leq k+2) \\ 1 & (t > k+2) \end{cases}$$

이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=k+2$ 에서 미분가능하지 않는다.
함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 1이므로 조건을 만족시킨다.



(iii) $t_1 < t_2$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 계산하면 함수 $g(t)$ 는 $k+2$ 와 t_1, t_2 의 대소 관계에 따라 그래프의 개형이 다르지만 $t=t_1, t=k+2$ 또는 $t=t_2, t=t_1, t=k+2$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수가 1인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $t_1 = t_2$

즉, 직선 $y=x+t$ 가 두 곡선 $y=x^2+k, y=\ln(x-2)$ 에 모두 접해야 한다.

$$y=\ln(x-2) \text{에서 } y'=\frac{1}{x-2}$$

접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{1}{x-2}=1 \text{에서 } x-2=1 \quad \therefore x=3$$

즉, 직선 $y=x+t$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지나야하므로

$$0=3+t \quad \therefore t=-3$$

직선 $y=x-3$ 과 곡선 $y=x^2+k$ 가 접해야 하므로 이차방정식 $x^2+k=x-3$, 즉 $x^2-x+k+3=0$ 이 중근을 가져야 한다. 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4(k+3)=0 \text{에서 } -4k-11=0$$

$$4k=-11 \quad \therefore k=-\frac{11}{4}$$

답 ④

04 삼각함수의 미분

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 38

01 ③

02 ④

03 ②

04 24

05 ②

06 2

07 21

08 ④

01 이차방정식 $2x^2-7x+2=0$ 의 두 근이 $\tan \theta, \cot \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{7}{2}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{7}{2} \quad \therefore \cos \theta \sin \theta = \frac{2}{7}$$

한편, $\sin \theta + \cos \theta = t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = t^2$$

$$t^2 = 1 + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{11}{7}, \quad t = \pm \sqrt{\frac{11}{7}}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{11}{7}}$$

$$\left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta + \cos \theta > 0 \right)$$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 $\csc \theta, \sec \theta$ 이므로
 $a = \csc \theta + \sec \theta$

$$= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{11}{7}} \times \frac{7}{2} = \frac{\sqrt{77}}{2}$$

$$b = \csc \theta \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = \frac{77}{4} - \frac{49}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

답 ③

• 다른풀이 •

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 $\csc \theta, \sec \theta$ 이므로
 $a = \csc \theta + \sec \theta, b = \csc \theta \sec \theta$

$$a^2 - b^2 = (\csc \theta + \sec \theta)^2 - (\csc \theta \sec \theta)^2$$

$$= \csc^2 \theta + 2 \csc \theta \sec \theta + \sec^2 \theta - (\csc \theta \sec \theta)^2$$

$$= (1 + \cot^2 \theta) + 2 \csc \theta \sec \theta + (1 + \tan^2 \theta)$$

$$- (\csc \theta \sec \theta)^2$$

$$= 2 + (\cot^2 \theta + \tan^2 \theta) + 2 \csc \theta \sec \theta$$

$$- (\csc \theta \sec \theta)^2$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

이때, 이차방정식의 $2x^2-7x+2=0$ 의 두 근이 $\tan \theta, \cot \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{7}{2}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변을 제곱하면 } \tan^2 \theta + 2 + \cot^2 \theta = \frac{49}{4}$$

$$\therefore \tan^2 \theta + \cot^2 \theta = \frac{41}{4}$$

$$\text{또한, } \textcircled{2} \text{에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{7}{2}, \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \sec \theta \csc \theta = \frac{7}{2}$$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$$2 + \frac{41}{4} + 2 \times \frac{7}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 7$$

02 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 에서

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

이때, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \times \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \times \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$$

답 ④

03 두 직선 $x - 2y + 1 = 0$, $mx + y + 3 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$x - 2y + 1 = 0, \text{ 즉 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{에서 } \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$mx + y + 3 = 0, \text{ 즉 } y = -mx - 3 \text{에서 } \tan \beta = -m$$

이때, 두 직선이 이루는 예각의 크기가 60° 가 되려면

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan 60^\circ \text{에서}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\left| \frac{\frac{1}{2} - (-m)}{1 + \frac{1}{2} \times (-m)} \right| = \sqrt{3}, \left| \frac{1 + 2m}{2 - m} \right| = \sqrt{3}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\frac{(1 + 2m)^2}{(2 - m)^2} = 3, 4m^2 + 4m + 1 = 3(m^2 - 4m + 4)$$

$$\therefore m^2 + 16m - 11 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 m 의 값의 합은 -16 이다.

답 ②

04 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로

$$y = 2 \sin x + \cos x - 1$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos x \right) - 1$$

$$= \sqrt{5} \sin(x + \theta) - 1 \quad \left(\text{단, } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

이 함수가 $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가지려면 $\sin(\alpha + \theta) = 1$ 이어야 하므로

$$\alpha + \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore 2\alpha = 4n\pi + \pi - 2\theta$$

$$\therefore 30 \sin 2\alpha = 30 \sin(4n\pi + \pi - 2\theta)$$

$$= 30 \sin 2\theta$$

$$= 60 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 60 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 24$$

답 24

05 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이고

$$\cos \frac{\pi}{2} x = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} (1 + t) \right\}$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t \right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \left(\cos \frac{\pi}{2} x \right)}{x - 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{t}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{-\sin \frac{\pi}{2} t} \times \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{-\sin \frac{\pi}{2} t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \times 1 \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

답 ②

06 부채꼴 OAB의 반지름의 길이는 1이므로 $\angle POB = \theta$ 라

하면 호 PB의 길이 l 과 삼각형 OPB의 넓이 S 는

$$l = 1 \times \theta = \theta$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

이때, 점 P가 호 AB를 따라 점 B에 한없이 가까워지면

$\theta \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{l}{S} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\frac{1}{2} \sin \theta} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \theta}$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

답 2

07 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{ax-1}-b} = 1$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax-1}-b) = 0$ 이어야 하므로

$$\sqrt{a-1}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{a-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{ax-1}-b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{ax-1}-\sqrt{a-1}} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1) \times (\sqrt{ax-1} + \sqrt{a-1})}{(\sqrt{ax-1}-\sqrt{a-1})(\sqrt{ax-1} + \sqrt{a-1})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1) \times (\sqrt{ax-1} + \sqrt{a-1})}{a(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \frac{\sqrt{ax-1} + \sqrt{a-1}}{a} \right\} \\
 &= 1 \times \frac{2\sqrt{a-1}}{a} = \frac{2\sqrt{a-1}}{a} \\
 &\text{즉, } \frac{2\sqrt{a-1}}{a} = 1 \text{이므로 } 2\sqrt{a-1} = a
 \end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4(a-1) = a^2, a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$b = \sqrt{2-1} = 1$$

$$\therefore 10a + b = 10 \times 2 + 1 = 21$$

답 21

08 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 에서

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

이때, $f'(a) = 0$ 이므로 $2e^a \cos a = 0$

그런데 $e^a > 0$ 이므로 $\cos a = 0$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq a \leq \pi)$$

$$\therefore f(a) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}(1+0) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

답 ④

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 39~42

01 $\frac{3}{7}$	02 $\frac{8}{5}$	03 ②	04 $\frac{\pi}{6}$	05 ③
06 ②	07 -1	08 $\sqrt{3}m$	09 ⑤	10 24π
11 $\sqrt{5}$	12 $8-4\sqrt{5}$	13 $\frac{1}{4}$	14 ⑤	15 31
16 ④	17 ④	18 ⑤	19 1	20 8
21 ⑤	22 21	23 25	24 $\frac{2}{9}$	25 ⑤
26 2	27 ④	28 $\frac{1}{3}$		

01 $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ 에서 $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

$$(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x) = 1$$

이때, $\csc x + \cot x = \frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{5}{2}(\csc x - \cot x) = 1 \quad \therefore \csc x - \cot x = \frac{2}{5}$$

위의 식과 $\csc x + \cot x = \frac{5}{2}$ 를 연립하여 풀면

$$\csc x = \frac{29}{20}, \cot x = \frac{21}{20}$$

$$\therefore \sin x = \frac{20}{29}, \tan x = \frac{20}{21}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{에서 } \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} \text{이므로}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\frac{20}{21}}{\frac{20}{29}} = \frac{29}{21}$$

$$\therefore \sec x - \tan x = \frac{29}{21} - \frac{20}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

• 다른풀이 •

$$\csc x + \cot x = \frac{5}{2} \text{에서 } \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 2(1 + \cos x) = 5 \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4(1 + 2\cos x + \cos^2 x) = 25 \sin^2 x$$

$$4 + 8\cos x + 4\cos^2 x = 25(1 - \cos^2 x)$$

$$29\cos^2 x + 8\cos x - 21 = 0$$

$$(29\cos x - 21)(\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{21}{29} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

이때, $\cos x = -1$ 이면 $\csc x + \cot x = \frac{5}{2}$ 를 만족시키지

$$\text{않으므로 } \cos x = \frac{21}{29}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } \sin x = \frac{20}{29}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sec x - \tan x &= \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \frac{29}{21} - \frac{20}{21} \times \frac{20}{29} \\
 &= \frac{29}{21} - \frac{20}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

02 원점을 지나고 서로 수직인 두 직선 l, m 의 방정식을 각각 $y = ax, y = -\frac{1}{a}x$ 라 하자.

직선 l 이 곡선 $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ 와 만나는 두 점 A, B의 x 좌

표를 각각 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면 방정식 $\frac{1}{8}x^2 - 2 = ax$, 즉 $x^2 - 8ax - 16 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8a, \alpha\beta = -16$$

$$\therefore \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \quad (\because \alpha > \beta)$$

$$= \sqrt{(8a)^2 - 4 \times (-16)}$$

$$= \sqrt{64a^2 + 64} = 8\sqrt{a^2 + 1}$$

A($\alpha, a\alpha$), B($\beta, a\beta$)이므로

$$AB = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (a\alpha - a\beta)^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha - \beta)^2(a^2 + 1)}$$

$$= (\alpha - \beta)\sqrt{a^2 + 1} = 8(a^2 + 1)$$

같은 방법으로 직선 m 이 곡선 $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ 와 만나는 두

점 C, D의 x 좌표를 각각 γ, δ ($\gamma > \delta$)라 하면 방정식

$$\frac{1}{8}x^2 - 2 = -\frac{1}{a}x, \text{ 즉 } ax^2 + 8x - 16a = 0 \text{의 두 근이 } \gamma, \delta$$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma + \delta = -\frac{8}{a}, \gamma\delta = -16$$

$$\begin{aligned}\gamma - \delta &= \sqrt{(\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta} = \sqrt{\left(-\frac{8}{a}\right)^2 + 64} \\ &= 8\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}\end{aligned}$$

$$C\left(\gamma, -\frac{\gamma}{a}\right), D\left(\delta, -\frac{\delta}{a}\right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \sqrt{(\gamma - \delta)^2 + \left(-\frac{\gamma}{a} + \frac{\delta}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\gamma - \delta)^2 \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)} = 8\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{16}{25} \text{이므로 } \frac{8(a^2 + 1)}{8\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)} = \frac{16}{25}$$

$$25(a^2 + 1) = 16\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)$$

$$25a^2(a^2 + 1) = 16(a^2 + 1), 25a^2 = 16 \quad (\because a^2 + 1 > 0)$$

$$a^2 = \frac{16}{25} \quad \therefore a = \pm \frac{4}{5}$$

이때, 직선 l 이 x 축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가

θ 이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$a = \tan \theta > 0 \quad \therefore a = \tan \theta = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\csc \theta} \left(\frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\csc \theta} \times \frac{2 \sec \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\csc \theta} \times \frac{2 \sec \theta}{(1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta} \\ &= \sin \theta \times \frac{2}{\cos \theta} \\ &= 2 \tan \theta = \frac{8}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{8}{5}$

$$\begin{aligned}03 \quad f(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin(\pi + x) \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x\right) \\ &\quad \times \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x\right) - \sin x \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) - \sin x \\ &= \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin^2 x - \sin x \\ &= \frac{3}{4} (1 - \sin^2 x) - \frac{1}{4} \sin^2 x - \sin x \\ &= -\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

이때, $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수를 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = -t^2 - t + \frac{3}{4} = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = g(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값은

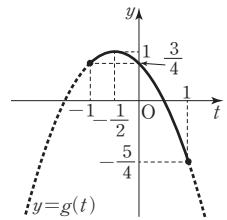
$$M = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 1$$

$t = 1$ 일 때, 최솟값은

$$m = -\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore M + m = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

답 ②



$$\begin{aligned}04 \quad (\tan x + \sqrt{3})(\tan y - \sqrt{3}) &= -4 \text{에서} \\ \tan x \tan y - \sqrt{3}(\tan x - \tan y) - 3 &= -4 \\ 1 + \tan x \tan y &= \sqrt{3}(\tan x - \tan y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan(x - y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{\sqrt{3}(\tan x - \tan y)} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

이때, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\frac{\pi}{2} < x - y < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$x - y = \frac{\pi}{6} \quad \text{답 } \frac{\pi}{6}$$

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식을 전개하여 간단히 정리한 경우	20%
(나)	(가)에서 정리한 식을 $\tan(x - y)$ 에 대입하여 그 값을 구한 경우	50%
(다)	x, y 의 값의 범위를 이용하여 $x - y$ 의 값의 범위를 파악한 후, $x - y$ 의 값을 구한 경우	30%

$$05 \quad g\left(-\frac{1}{3}\right) = a, g\left(\frac{2}{3}\right) = b \text{라 하면 함수 } g(x) \text{의 역함수가}$$

$$f(x) = \sin x \text{이므로 } f(a) = -\frac{1}{3}, f(b) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\sin a = -\frac{1}{3}, \sin b = \frac{2}{3}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x \geq 0$ 이므로

$$\cos a = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos b = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\theta_1 = a + b$, $\theta_2 = a - b$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \cos(a + b) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{10} + 2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \theta_2 &= \cos(a - b) \\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = \frac{2\sqrt{10}+2}{9} + \frac{2\sqrt{10}-2}{9} = \frac{4}{9}\sqrt{10}$$

답 ③

06 점 P(2, 3)에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-3=m(x-2) \text{에서 } y=mx-2m+3$$

원점과 직선 $mx-y-2m+3=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{|-2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{에서 } |-2m+3|=\sqrt{m^2+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4m^2-12m+9=m^2+1$$

$$\therefore 3m^2-12m+8=0$$

한편, 두 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 각각 α, β 이므로 $\tan \alpha, \tan \beta$ 가 각각 두 접선의 기울기이다.

즉, 이차방정식 $3m^2-12m+8=0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 4, \tan \alpha \tan \beta = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{4}{1 - \frac{8}{3}} = \frac{4}{-\frac{5}{3}} \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

답 ②

• 다른풀이 •

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원에 그은 두 접선이 x 축과 만나는 점을 Q, R라 하고, 직선 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.

$$\angle RPQ = \alpha - \beta \text{이므로}$$

$$\angle OPQ = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

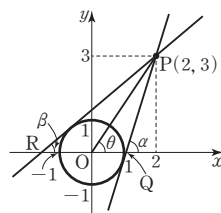
$$\triangle OQP \text{에서 } \theta + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \alpha \text{이므로}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\text{이때, 점 P의 좌표가 (2, 3)이므로 } \tan \theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } \tan \left\{ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{2 \tan \left\{ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\}}{1 - \tan^2 \left\{ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\}} \\ &= \frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^2} = -\frac{12}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &07 \quad \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) \\ &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = 1 \text{에서 } \sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 \beta$$

$$\text{이때, } 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1 \text{이므로 } 0 \leq 1 + \sin^2 \beta \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq \sin^2 \beta \leq 0$$

$$\text{그런데 } 0 \leq \sin^2 \beta \leq 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \beta = 0$$

$$\therefore \sin^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \times 1 = -1$$

답 -1

• 다른풀이 •

$$\sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta) = 1 \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin(\alpha+\beta) \leq 1, -1 \leq \sin(\alpha-\beta) \leq 1 \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = 1, \sin(\alpha-\beta) = 1$$

$$\text{또는 } \sin(\alpha+\beta) = -1, \sin(\alpha-\beta) = -1$$

$$\sin^2(\alpha \pm \beta) + \cos^2(\alpha \pm \beta) = 1 \text{ (복부호 동순)이므로}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 0, \cos(\alpha-\beta) = 0$$

$$\therefore \cos 2\alpha$$

$$= \cos \{(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)\}$$

$$= \cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)$$

$$= 0 - 1 = -1$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 삼각함수의 덧셈정리의 적당한 변형을 이용하여 푸는 문제이다. 문제 자체는 간단해 보이지만 담고 있는 내용은 꽤 주목할 만하다. 먼저 삼각함수의 덧셈정리를 사용하면 주어진 식은 $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = 1$ 로 정리할 수 있다. 여기서 중요한 것은 항을 정리할 때, $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ 를 이용하여 식을 변형하는 것이다. 삼각함수는 정의를 포함하여 외워야 할 부분이 많은 단원이지만, 가장 기본이 되는 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 을 잊어서는 안 된다.

08 조명과 받침대 사이의 거리를 x m라

하면 오른쪽 그림에서

$$\tan \alpha = \frac{3}{x}, \tan \beta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

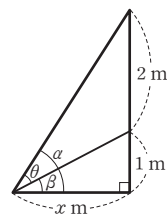
$$= \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2}{x + \frac{3}{x}}$$

이때, $x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{3}{x}}$$

$$= 2\sqrt{3} \left(\text{단, 등호는 } x = \frac{3}{x} \text{일 때 성립} \right)$$

$$\therefore \tan \theta \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$x = \frac{3}{x}$ 일 때 $\tan \theta$ 의 값이 최대가 되고, 이때의 각 θ 도 최대가 되므로

$$x^2 = 3 \text{에서 } x = \sqrt{3} (\because x > 0)$$

따라서 조명과 받침대 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ m이다.

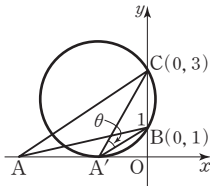
답 $\sqrt{3}$ m

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용한 문제로 주어진 조건을 이용하여 식을 세울 수 있도록 α, β, θ 사이의 관계를 아는 것이 중요하다. 이 문제를 좌표평면 위로 옮겨 다른 방법으로 풀어 보자.

받침대와 조각상을 y 축, 조명을 x 축 위의 점이라 하면 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. B(0, 1), C(0, 3)을 지나고 x 축에 접하는 원을 그리면 점 A는 조명의 위치이고 점 A가 원과 x 축의 접점 A'에 있을 때 θ 의 값이 가장 커진다. 이때, θ 의 값이 커질수록 $\tan \theta$ 의 값이 커지므로 θ 의 값이 최대일 때, $\tan \theta$ 의 값도 최대가 된다.

원의 중심을 D(a, b)라 하면 반지름의 길이가 b이므로 $BD = CD = b$ 에서 $\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b-3)^2} = b$
 $\therefore a = -\sqrt{3}, b = 2 \quad \therefore OA' = \sqrt{3}$



09 $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ 이므로

$$f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2}$$

$$= \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cos \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{13}} \sin \frac{x}{2} \right)$$

$$= \sqrt{13} \cos \left(\frac{x}{2} + \alpha \right)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ 이다. (참)

ㄴ. $-1 \leq \cos \left(\frac{x}{2} + \alpha \right) \leq 1$ 에서

$$-\sqrt{13} \leq \sqrt{13} \cos \left(\frac{x}{2} + \alpha \right) \leq \sqrt{13}$$

이므로 최댓값은 $\sqrt{13}$, 최솟값은 $-\sqrt{13}$ 이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $\cos \left(\frac{x}{2} + \alpha \right) = 1$ 인 x 에서 최댓값을 가지므로

$$\frac{a}{2} + \alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

$$= 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\text{에서 } \frac{a}{2} = 2n\pi - \alpha$$

$$\therefore \tan \frac{a}{2} = \tan (2n\pi - \alpha)$$

$$= -\tan \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= -\frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} (\because \textcircled{1}) = -\frac{3}{2} \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

10 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ 이므로

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right)$$

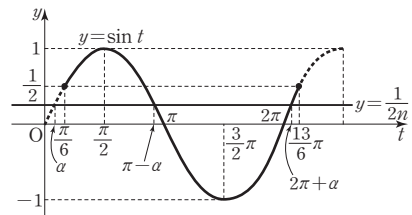
$$= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

즉, 주어진 집합의 원소는 방정식 $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{n}$,

즉 $\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2n}$ 의 근이다.

$x + \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{13}{6}\pi$

함수 $y = \sin t \left(\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{13}{6}\pi \right)$ 의 그래프는 다음과 같다.



(i) $n = 1$ 일 때,

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{에서 } t = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

$$x = t - \frac{\pi}{6} \text{이므로 } x = 0, \frac{2}{3}\pi, 2\pi$$

$$\therefore a_1 = 0 + \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

위의 그림에서 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2n}$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 하면

$$\sin t = \frac{1}{2n} \left(\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{13}{6}\pi \right) \text{에서 } t = \pi - \alpha, 2\pi + \alpha$$

$$x = t - \frac{\pi}{6} \text{이므로 } x = \frac{5}{6}\pi - \alpha, \frac{11}{6}\pi + \alpha$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{5}{6}\pi - \alpha \right) + \left(\frac{11}{6}\pi + \alpha \right) = \frac{8}{3}\pi$$

(i), (ii)에서 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{8}{3}\pi$ 이므로

$$\sum_{n=1}^9 a_n = \frac{8}{3}\pi \times 9 = 24\pi$$

답 24 π

11 오른쪽 그림과 같이

$\angle POA = \theta$ 라 하면

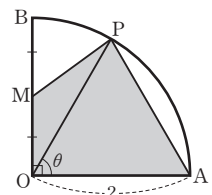
$$\triangle OAP = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta$$

$\triangle OPM$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$= \cos \theta$$



$$\begin{aligned}
 \therefore \square OAPM &= \triangle OAP + \triangle OPM \\
 &= 2\sin\theta + \cos\theta \\
 &= \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta\right) \\
 &= \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha) \\
 &\quad \left(\text{단, } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)
 \end{aligned}$$

이때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin(\theta + \alpha)$ 의 최댓값은 1이다.

따라서 사각형 OAPM의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이다.

답 $\sqrt{5}$

12 $\sin x + \cos x = \frac{\sin x \cos x}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{(\sin x \cos x)^2}{4}$$

$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{(\sin x \cos x)^2}{4}$$

$\sin x \cos x = t$ 로 놓으면

$$1 + 2t = \frac{t^2}{4}, t^2 - 8t - 4 = 0$$

$$\therefore t = 4 \pm \sqrt{20} = 4 \pm 2\sqrt{5}$$

이때, $t = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ 이고 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$-\pi \leq 2x \leq \pi$ 이므로

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \text{이므로 } t = 4 - 2\sqrt{5}$$

따라서 $\sin x \cos x = 4 - 2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$= 2 \times (4 - 2\sqrt{5})$$

$$= 8 - 4\sqrt{5}$$

답 $8 - 4\sqrt{5}$

13 $\angle ABC = \theta$ 라 하면 $\angle ABD = \angle CBD = \frac{\theta}{2}$

$\overline{AB} = 1$ 이므로

$$\triangle ABD \text{에서 } \overline{AD} = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{BC} = \cos \theta$$

사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $\frac{19}{8}$ 이므로

$$2\overline{AD} + \overline{BC} + 1 = \frac{19}{8}$$

$$2\sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta = \frac{11}{8}, 2\sin \frac{\theta}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{11}{8}$$

$$16\sin^2 \frac{\theta}{2} - 16\sin \frac{\theta}{2} + 3 = 0$$

$$\left(4\sin \frac{\theta}{2} - 1\right)\left(4\sin \frac{\theta}{2} - 3\right) = 0$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} \left(\because \overline{AD} = \sin \frac{\theta}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{1}{4}$ 이다.

답 $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \overline{PQ}^2 &= (x-y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left\{\sin x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \left(\because x-y = \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{\pi^2}{4} + \left\{\sin x + \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\right\}^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{4} + (\sin x - \cos x)^2 \\
 &= \frac{\pi^2}{4} + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x \\
 &= \frac{\pi^2}{4} + 1 - 2\sin x \cos x \\
 &= \frac{\pi^2}{4} + 1 - \sin 2x
 \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $0 \leq 2x \leq 2\pi$ 이고 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로

$\overline{PQ}^2$ 은 $\sin 2x = -1$, 즉 $2x = \frac{3}{2}\pi$ 일 때, 최댓값 $\frac{\pi^2}{4} + 2$ 를 갖는다.

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

답 ⑤

15 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$\left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta > 0\right)$

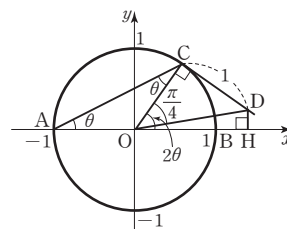
$\overline{OA} = \overline{OC} = 1$ 에서 $\triangle AOC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\angle OCA = \angle OAC = \theta \quad \therefore \angle COB = 2\theta$$

$\overline{OC} = \overline{CD} = 1$, $\angle OCD = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\triangle COD$ 는 직각이등변

삼각형이므로

$$\overline{OD} = \sqrt{2}, \angle COD = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \angle DOH = 2\theta - \frac{\pi}{4}$$



$\triangle OHD$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OH} &= \overline{OD} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2}\left(\cos 2\theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2}\left[\left(2\cos^2 \theta - 1\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sin \theta \cos \theta \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
 &= 2\cos^2 \theta - 1 + 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 2 \times \frac{16}{25} - 1 + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{31}{25}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BH} = \overline{OH} - \overline{OB} = \frac{31}{25} - 1 = -\frac{6}{25}$$

따라서 $p = 25$, $q = 6$ 이므로

$$p + q = 25 + 6 = 31$$

답 31

•다른풀이•

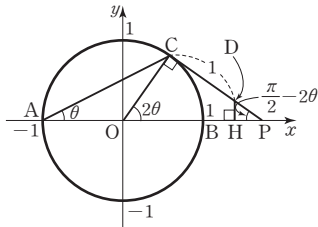
$\triangle AOC$ 는 $\overline{OA}=\overline{OC}=1$ 인 이등변삼각형이므로
 $\angle OCA=\angle OAC=\theta \quad \therefore \angle COB=2\theta$

$\cos \theta = \frac{4}{5}$ 에서

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25},$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{1 - \cos^2 2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$$

($\because 0 < 2\theta < \pi$ 에서 $\sin 2\theta > 0$)



직선 CD와 x 축이 만나는 점을 P라 하면

$\overline{OC}=1$, $\angle OCP=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\triangle OPC$ 에서

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OC}}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\frac{7}{25}} = \frac{25}{7}$$

$$\overline{CP} = \overline{OP} \sin 2\theta = \frac{25}{7} \times \frac{24}{25} = \frac{24}{7}$$

$$\therefore \overline{DP} = \overline{CP} - \overline{CD} = \frac{24}{7} - 1 = \frac{17}{7},$$

$$\overline{HP} = \overline{OP} - (\overline{OB} + \overline{BH}) = \frac{25}{7} - (1 + \overline{BH})$$

$$= \frac{18}{7} - \overline{BH}$$

$\angle CPO = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ 이므로 $\triangle DHP$ 에서

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \frac{\overline{HP}}{\overline{DP}}, \quad \overline{DP} \sin 2\theta = \overline{HP}$$

$$\frac{17}{7} \times \frac{24}{25} = \frac{18}{7} - \overline{BH}$$

$$\therefore \overline{BH} = \frac{18}{7} - \frac{17}{7} \times \frac{24}{25} = \frac{6}{25}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{f(x)} \times \frac{\tan x}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이어야 한다.

이때, $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (\text{참})$$

$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 에서 0이 아닌 극한값이 존재하고,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ($\because \neg$)이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan f(x)}{\tan g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan f(x)}{f(x)} \times \frac{g(x)}{\tan g(x)} \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

$$\begin{aligned} 17 \quad \sin x \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \\ &= -2 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= -2 \sin^3 \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^3 \frac{x}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3 \times 8} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{4} \times 1^3 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 18 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^a + 1)}{(1 - \cos 2x) \tan bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos 2x) \ln(x^a + 1)}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) \tan bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos 2x) \ln(x^a + 1)}{(1 - \cos^2 2x) \tan bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos 2x) \ln(x^a + 1)}{\sin^2 2x \tan bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^a + 1)}{x^a} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{\sin^2 2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\tan bx} \\ &\quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a(1 + \cos 2x)}{4bx^3} \end{aligned}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^a}{4bx^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{2bx^3}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{2bx^3} = \frac{1}{8} \text{이므로 } a=3$$

$$\text{또한, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{2bx^3} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{8} \text{이므로 } b=4$$

$$\therefore a+b=3+4=7$$

답 ⑤

19 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수, 즉 원점에 대하여 대칭인 함수이다.

그런데 $f(x)$ 가 삼차함수이므로

$f(x) = ax^3 + bx$ ($a \neq 0$, b 는 상수)라 할 수 있다.

이때, $f(1)=3, f(2)=12$ 이므로

$$a+b=3, 8a+2b=12$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2 \quad \therefore f(x)=x^3+2x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x + 2 \sin x}{\sin(x^3 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x + 2) \sin x}{\sin(x^3 + 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^3 + 2x}{\sin(x^3 + 2x)} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin^2 x + 2}{x^2 + 2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{0+2}{0+2} = 1$$

답 1

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 은 삼각함수의 극한에서 자주 이용되는 내용 중 하나이다. 이 내용은 단순 계산 문제에서부터 어려운 활용 문제까지 많이 이용되므로 단순히 계산에 응용하는 수준을 넘어 그 의미까지 정확히 알아 두도록 하자. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 의 기하학적 의미는 두 함수 $y=x$, $y=\sin x$ 의 그래프가 전혀 다르지만 $x=0$ 의 근처에서 보면 두 함수의 그래프가 거의 일치한다는 것을 뜻한다.

20 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$g(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g(f(x)) = \{f(x)\}^2 + af(x) + b$$

$$= \begin{cases} \left\{ \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \right\}^2 + \frac{a \ln(\cos x)}{x^2} + b & (x \neq 0) \\ \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}a + b & (x = 0) \end{cases}$$

함수 $g(f(x))$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0)) \text{을 만족시켜야 한다.}$$

.....㉠

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad \text{.....㉡}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \text{에서 } \cos x - 1 = t \text{로 놓으면}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1}$$

$$= (-1) \times 1^2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

㉡에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \quad \text{.....㉢}$$

즉, ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2} \right)^2 + \frac{a \ln(\cos x)}{x^2} + b \right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}a + b$$

$$\text{이고, } g(f(0)) = \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}a + b \text{이므로}$$

$$\left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}a + b = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}a + b$$

$$3a = -6 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 2x + b$$

$$\text{또한, } f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 2x + b) \ln(\cos x)}{x^2} & (x \neq 0) \\ \frac{5}{2}b & (x = 0) \end{cases}$$

에서 함수 $f(x)g(x)$ 도 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0) \text{을 만족시켜야 한다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 2x + b) \ln(\cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \times (x^2 - 2x + b) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \times b \quad (\because \text{㉢}) = -\frac{1}{2}b \end{aligned}$$

$$\text{이고, } f(0)g(0) = \frac{5}{2}b \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2}b = \frac{5}{2}b, 3b = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2 - 2x \text{이므로}$$

$$g(4) = 4^2 - 2 \times 4 = 8$$

답 8

21 (부채꼴 OAB의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta = \frac{\theta}{2}$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$$

부채꼴 OAB와 삼각형 OBC의 넓이가 같으므로

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\sin \alpha}{2} \quad \therefore \theta = \sin \alpha \quad \text{.....㉠}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin(\tan \theta)}{\sin \alpha} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin(\tan \theta)}{\theta} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin(\tan \theta)}{\tan \theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right\}$$

$$= 1 \times 1 = 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. ㉠에서 $\theta \rightarrow 0+$ 이면 $\alpha \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\alpha}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \quad (\because \text{㉠}) = 1 \quad (\text{참})$$

ㄷ. ㉠에서 $\theta \rightarrow 0+$ 이면 $\alpha \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+\alpha)}{\theta} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+\alpha)}{\sin \alpha} \quad (\because \text{㉠})$$

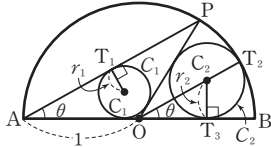
$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right\}$$

$$= 1 \times 1 = 1 \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

22



위의 그림과 같이 삼각형 OPA에 내접하는 원을 C_1 , 부채꼴 OBP에 내접하는 원을 C_2 , 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 , 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하자.

원 C_1 과 선분 AP의 접점을 T_1 이라 하면 $\triangle OT_1A$ 에서 $\overline{AT_1} = \overline{OA} \cos \theta = \cos \theta$

$\angle T_1AC_1 = \frac{\theta}{2}$ 이므로 $\triangle AC_1T_1$ 에서

$$r_1 = \overline{AT_1} \tan \frac{\theta}{2} = \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

원 C_2 와 호 BP, 선분 OB의 접점을 각각 T_2, T_3 이라 하면

$\angle PAB = \theta$ 에서 $\angle POB = 2\theta$ 이므로 $\angle T_2OB = \theta$

또한, $\overline{OC_2} = 1 - \overline{C_2T_2} = 1 - r_2$ 이고, $\triangle OT_3C_2$ 에서

$\overline{C_2T_3} = \overline{OC_2} \sin \theta$ 이므로

$$r_2 = (1 - r_2) \sin \theta, r_2 = \sin \theta - r_2 \sin \theta$$

$$r_2 + r_2 \sin \theta = \sin \theta \quad \therefore r_2 = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

이때, 두 원 C_1, C_2 의 둘레의 길이를 각각 $f(\theta), g(\theta)$ 라 하므로

$$f(\theta) = 2\pi r_1 = 2\pi \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}$$

$$g(\theta) = 2\pi r_2 = \frac{2\pi \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2}{f(\theta)g(\theta)} &= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \times 1 \times 1 \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2\pi^2} \end{aligned}$$

따라서 $p=2, q=1$ 이므로

$$10p + q = 10 \times 2 + 1 = 21$$

답 21

23

두 원 C_1, C_2 의 지름의 길이의 합이 10이므로 원 C_1 의 반지름의 길이를 r 라 하면 원 C_2 의 반지름의 길이는 $5-r$ 이다.

원 C_2 의 중심을 O_2 라 하면

$\angle O_2PB = \angle O_2BP = \theta$ 이므로

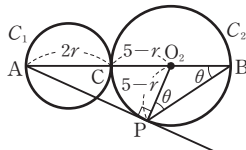
$\angle AO_2P = 2\theta$

$\angle O_2PA = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\triangle APO_2$ 에서

$$\cos 2\theta = \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_2A}} = \frac{5-r}{5+r}$$

$$(5+r) \cos 2\theta = 5-r, r(\cos 2\theta + 1) = 5 - 5 \cos 2\theta$$

$$\therefore r = \frac{5(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta + 1}$$



원 C_1 의 넓이가 $S(\theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \pi \times \left\{ \frac{5(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta + 1} \right\}^2$$

$$= \frac{25\pi(1 - \cos 2\theta)^2}{(\cos 2\theta + 1)^2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\pi \tan^4 \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{25(1 - \cos 2\theta)^2}{\tan^4 \theta (\cos 2\theta + 1)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{25(1 - \cos 2\theta)^2 (1 + \cos 2\theta)^2}{\tan^4 \theta (\cos 2\theta + 1)^4}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{25 \sin^4 2\theta}{\tan^4 \theta (\cos 2\theta + 1)^4}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin^4 2\theta}{(2\theta)^4} \times \frac{\theta^4}{\tan^4 \theta} \times \frac{25 \times 16}{(\cos 2\theta + 1)^4} \right\}$$

$$= 1^4 \times 1^4 \times \frac{25 \times 16}{2^4} = 25$$

답 25

24 해결단계

① 단계	주어진 반원의 중심을 O라 하고 선분 DP를 지름으로 하는 원 중 반지름의 길이가 가장 작은 경우는 세 점 O, D, P가 한 직선 위에 있는 경우임을 파악한 후, 이때의 $r_1(\theta)$ 를 구한다.
② 단계	선분 EQ를 지름으로 하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 경우는 점 Q가 점 A의 위치에 있어야 할 때임을 파악한 후, 이때의 $r_2(\theta)$ 를 구한다.
③ 단계	$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r_1(\theta)r_2(\theta)}{\theta^2}$ 의 값을 구한다.

$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\overline{AB} = 2$ 이므로

$$\overline{BC} = 2 \sin \theta, \overline{AC} = 2 \cos \theta$$

점 D는 선분 BC를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{CD} = \frac{1}{3} \overline{BC} = \frac{2}{3} \sin \theta$$

점 E는 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점이므로

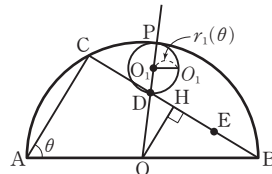
$$\overline{BE} = \frac{1}{4} \overline{BC} = \frac{1}{2} \sin \theta, \overline{CE} = \frac{3}{4} \overline{BC} = \frac{3}{2} \sin \theta$$

한편, 반원의 중심을 O라 할 때, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{CH} = \overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \sin \theta$$

$$\therefore \overline{DH} = \overline{CH} - \overline{CD} = \sin \theta - \frac{2}{3} \sin \theta = \frac{1}{3} \sin \theta,$$

$$\overline{EH} = \overline{BH} - \overline{BE} = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$



호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 DP를 지름으로 하는 원 중 반지름의 길이가 가장 작은 원이 O_1 이므로 원 O_1 의 중심을 O_1 이라 하면 세 점 O, D, P는 한 직선 위에 있어야 하고, 원 O_1 의 지름은 선분 DP이므로 이 세 점을 지나는 직선은 점 O_1 을 지난다.

$\angle HOB = \theta$, $\overline{OB} = 1$ 이므로 $\triangle OBH$ 에서 $\overline{OH} = \cos \theta$
 $\triangle ODH$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{DH}^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{9}} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{9}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

$\overline{OP} = \overline{OD} + 2r_1(\theta)$ 이므로

$$\begin{aligned}1 &= \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta} + 2r_1(\theta) \\ \therefore r_1(\theta) &= \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}}{2}\end{aligned}$$

또한, 호 AB 위의 점 Q에 대하여 선분 EQ를 지름으로 하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원이 O_2 이므로 원 O_2 는 점 Q가 점 A에 위치할 때이다.

$\triangle AEC$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{EA} &= \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{CE}^2} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \theta + \frac{9}{4} \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{4(1 - \sin^2 \theta) + \frac{9}{4} \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{4 - \frac{7}{4} \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

이고, $2r_2(\theta) = \overline{EA}$ 이므로

$$\begin{aligned}r_2(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{7}{4} \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 \theta} \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{r_1(\theta)r_2(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 \theta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}\right)}{2\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 \theta} \left\{1 - \left(1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta\right)\right\}}{2\theta^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}\right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{8}{9} \sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 \theta}}{2\theta^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}\right)} \\ &= \frac{4}{9} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{7}{16} \sin^2 \theta}}{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2 \theta}} \right) \\ &= \frac{4}{9} \times 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{9}$

25 $f(x) = \cos x(\sin x + 1)$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x \\ &= -\sin^2 x - \sin x + (1 - \sin^2 x) \\ &= -2 \sin^2 x - \sin x + 1\end{aligned}$$

방정식 $f'(x) = 0$ 에서

$$-2 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{에서}$$

$$(i) \sin x = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$(ii) \sin x = -1 \text{ 일 때, } x = \frac{3\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 방정식 $f'(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

답 ⑤

26 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^2 \cos x - x^2 \cos t}{t - x}$ 에서 $t - x = p$ 로 놓으면

$t = p + x$ 이고 $t \rightarrow x$ 일 때 $p \rightarrow 0$ 이므로

$f(x)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^2 \cos x - x^2 \cos t}{t - x} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+x)^2 \cos x - x^2 \cos(p+x)}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+x)^2 \cos x - x^2 \cos(p+x) + x^2 \cos x - x^2 \cos x}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{(p+x)^2 \cos x - x^2 \cos x}{p} - \frac{x^2 \cos(p+x) - x^2 \cos x}{p} \right\} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{(p^2 + 2px) \cos x}{p} - \frac{x^2 \{\cos(p+x) - \cos x\}}{p} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[(p+2x) \cos x - \frac{x^2 \{\cos(p+x) - \cos x\}}{p} \right] \\ &= 2x \cos x - x^2 \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\cos(p+x) - \cos x}{p} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때, $g(x) = \cos x$ 라 하면 $g'(x) = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\cos(p+x) - \cos x}{p} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g(p+x) - g(x)}{p} \\ &= g'(x) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

즉, $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x \cos x - x^2(-\sin x) \\ &= 2x \cos x + x^2 \sin x\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos x + 2x(-\sin x) + 2x \sin x + x^2 \cos x \\ &= (x^2 + 2) \cos x\end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = (0^2 + 2) \times \cos 0 = 2$$

답 2

• 다른풀이 •

$g(t) = t^2 \cos x - x^2 \cos t$ 라 하면 $g(x) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^2 \cos x - x^2 \cos t}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

이때, $g(t) = t^2 \cos x - x^2 \cos t$ 에서

$g'(t) = 2t \cos x + x^2 \sin t$ 이므로

$f(x) = 2x \cos x + x^2 \sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos x - 2x \sin x + 2x \sin x + x^2 \cos x \\ &= 2 \cos x + x^2 \cos x \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = 2$$

27 $g(x) = e^{-x} \sin x + f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} \sin x + f(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin x}{e^x x^3} + \frac{f(x)}{x^3} \right\} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $|\sin x| \leq 1$ 에서 $\left| \frac{\sin x}{e^x x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{e^x x^3} \right|$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{e^x x^3} \right| = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^x x^3} = 0$$

즉, ①에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 4$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로

$$f(x) = 4x^3 + ax \quad (a \text{ 는 상수})$$

라 할 수 있다.

즉, $g(x) = e^{-x} \sin x + 4x^3 + ax$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x + 12x^2 + a \\ &= e^{-x} (\cos x - \sin x) + 12x^2 + a \\ &= -\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12x^2 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g'(x)}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12x^2 + a}{x - \frac{\pi}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

위의 극한값이 0이 아니고, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ -\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12x^2 + a \right\} = 0 \text{ 에서}$$

$$12 \times \frac{\pi^2}{16} + a = 0 \quad \therefore a = -\frac{3}{4} \pi^2$$

따라서 ②에서

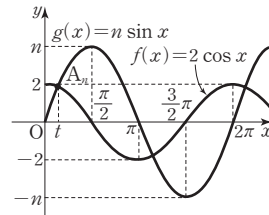
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g'(x)}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12x^2 - \frac{3}{4} \pi^2}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{-\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 12 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{-\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{x - \frac{\pi}{4}} + 12 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

$x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $x = t + \frac{\pi}{4}$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{-\sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{x - \frac{\pi}{4}} + 12 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{-\sqrt{2} e^{-\left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \sin t}{t} + 12 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sqrt{2} e^{-\left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \times \frac{\sin t}{t} + 12 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= -\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}} + 6\pi \end{aligned}$$

답 ④

28



점 A_n 의 x 좌표를 t 라 하면 점 A_n 은 두 함수

$f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = n \sin x$ 의 그래프의 교점 중에서 x 좌표가 가장 작으므로

$$0 < t < \frac{\pi}{2}, \quad 2 \cos t = n \sin t$$

$\cos t \neq 0$ 이므로

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{2}{n} \quad \therefore \tan t = \frac{2}{n}$$

$\tan t = \frac{2}{n}$ 인 직각삼각형은 오른쪽 그림

과 같이 그릴 수 있으므로

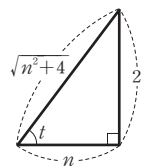
$$\sin t = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4}}, \quad \cos t = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 점 A_n 에서의 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 접선이 x 축과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$f'(x) = -2 \sin x, \quad g'(x) = n \cos x \text{ 에서}$$

$$\tan \alpha = -2 \sin t, \quad \tan \beta = n \cos t$$

두 접선이 이루는 예각의 크기가 θ_n 이므로



$$\begin{aligned}
 \tan \theta_n &= |\tan(\alpha - \beta)| \\
 &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\
 &= \left| \frac{-2 \sin t - n \cos t}{1 - 2 \sin t \times n \cos t} \right| \\
 &= \left| \frac{-2 \times \frac{2}{\sqrt{n^2+4}} - n \times \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}}{1 - 2 \times \frac{2}{\sqrt{n^2+4}} \times n \times \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}} \right| \quad (\because \ominus) \\
 &= \left| \frac{-4\sqrt{n^2+4} - n^2\sqrt{n^2+4}}{n^2+4 - 4n^2} \right| \\
 &= \left| \frac{-(n^2+4)\sqrt{n^2+4}}{-3n^2+4} \right| \\
 &= \frac{(n^2+4)\sqrt{n^2+4}}{3n^2-4} \quad (\because n \geq 2 \text{인 자연수}) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \theta_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+4)\sqrt{n^2+4}}{n(3n^2-4)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}}{3 - \frac{4}{n^2}} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

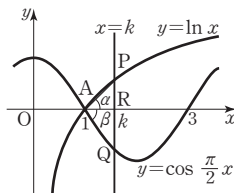
Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 43

- 01 $\frac{2+\pi}{2-\pi}$ 02 $f(\theta) = x - y$ 03 4 04 40
 05 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 06 2

01 해결단계

① 단계	직선 $x=k$ 가 x 축과 만나는 점을 R, $\angle PAR = \alpha$, $\angle QAR = \beta$ 라 하고, 세 선분 AR, PR, QR의 길이를 이용하여 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 의 값을 구한다.
② 단계	$\theta = \alpha + \beta$ 이므로 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan \theta$ 를 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 를 이용하여 나타낸다.
③ 단계	$k \rightarrow 1+$ 일 때, $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 의 값을 구하여 $\lim_{k \rightarrow 1+} \tan \theta$ 의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=k$ 가 x 축과 만나는 점을 R
 라 하고, $\angle PAR = \alpha$,
 $\angle QAR = \beta$ 라 하면 세 점 P,
 Q, R는 각각 두 함수 $y = \ln x$,
 $y = \cos \frac{\pi}{2}x$ 와 x 축 위의 점이므로



$P(k, \ln k)$, $Q\left(k, \cos \frac{\pi}{2}k\right)$, $R(k, 0)$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\overline{PR}}{\overline{AR}} = \frac{\ln k}{k-1}, \quad \tan \beta = \frac{\overline{QR}}{\overline{AR}} = \frac{-\cos \frac{\pi}{2}k}{k-1}$$

$k-1=t$ 로 놓으면 $k=t+1$ 이고,

$k \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{k \rightarrow 1+} \tan \alpha = \lim_{k \rightarrow 1+} \frac{\ln k}{k-1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 1+} \tan \beta &= \lim_{k \rightarrow 1+} \frac{-\cos \frac{\pi}{2}k}{k-1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\cos \left\{ \frac{\pi}{2}(1+t) \right\}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t \right)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{t} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \\
 &= \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

이때, $\theta = \alpha + \beta$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow 1+} \tan \theta &= \lim_{k \rightarrow 1+} \tan(\alpha + \beta) \\
 &= \lim_{k \rightarrow 1+} \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\
 &= \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{1 - 1 \times \frac{\pi}{2}} = \frac{2 + \pi}{2 - \pi}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2+\pi}{2-\pi}$

02 해결단계

① 단계	삼각함수의 덧셈정리를 응용하여 함수 $f(\theta)$ 를 정리한다.
② 단계	①단계에서 구한 식을 이용하여 x, y 를 간단히 한다.
③ 단계	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $x-y$ 를 구하여 $f(\theta)$ 를 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\
 &= \sqrt{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\
 &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\
 &= \sqrt{2 - 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \\
 &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|
 \end{aligned}$$

이므로

$$x = f\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right|,$$

$$y = f\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right|$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{12}\pi, \quad -\frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{12}$$

이므로

$$f(\theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (\because \sin \frac{\theta}{2} > 0) \quad \dots\dots \ominus$$

$$\begin{aligned}x &= 2 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \left(\because \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) > 0\right) \\&= 2\left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\pi}{3}\right) \\&= \sin\frac{\theta}{2} + \sqrt{3} \cos\frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\textcircled{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= -2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \left(\because \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < 0\right) \\&= -2\left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\pi}{3}\right) \\&= -\sin\frac{\theta}{2} + \sqrt{3} \cos\frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\textcircled{B}\end{aligned}$$

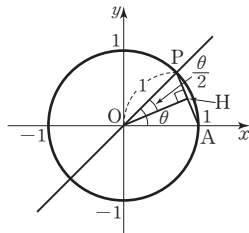
따라서 ㉠-㉡을 하면

$$x-y=2 \sin\frac{\theta}{2}=f(\theta) \quad (\because \textcircled{A})$$

$$\therefore f(\theta)=x-y \quad \text{답 } f(\theta)=x-y$$

•다른풀이•

$f(\theta)=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$ 에서 함수 $f(\theta)$ 는 두 점 $(1, 0)$, $(\cos\theta, \sin\theta)$ 사이의 거리와 같다.
이때, 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 는 원점을 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 인 직선과 원 $x^2+y^2=1$ 의 교점이다.



$P(\cos\theta, \sin\theta)$, $A(1, 0)$ 이라 하고 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OP}=1, \angle POH=\frac{\theta}{2} \text{이므로 } \overline{PH}=\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore f(\theta)=\overline{PA}=2\overline{PH}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

03 해결단계

① 단계	x, y, z 가 $x+y+z=\frac{3}{8}\pi$ 를 만족시키는 등차수열임을 이용하여 x, z 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	삼각함수 사이의 관계를 이용하여 $\frac{\csc^2 x - \sec^2 x}{\csc^2 x + \sec^2 x} \times \frac{2 \csc^2 z - 4}{\cot^2 z + 1}$ 를 z 에 대한 식으로 정리한다.
③ 단계	a 의 값을 구한다.

세 실수 x, y, z 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$x=y-d, z=y+d$$

$$x+y+z=\frac{3}{8}\pi \text{이므로}$$

$$(y-d)+y+(y+d)=\frac{3}{8}\pi, 3y=\frac{3}{8}\pi$$

$$\therefore y=\frac{\pi}{8}, x+z=\frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\frac{\csc^2 x - \sec^2 x}{\csc^2 x + \sec^2 x} \times \frac{2 \csc^2 z - 4}{\cot^2 z + 1} = \sin az \text{에서}$$

$$\begin{aligned}\frac{\csc^2 x - \sec^2 x}{\csc^2 x + \sec^2 x} &= \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} \\&= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \\&= \cos^2 x - \sin^2 x \\&= \cos 2x \\&= \cos\left\{2\left(\frac{\pi}{4} - z\right)\right\}\end{aligned}$$

$$\left(\because \textcircled{1} \text{에서 } x=\frac{\pi}{4}-z\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2z\right) = \sin 2z$$

$$\begin{aligned}\frac{2 \csc^2 z - 4}{\cot^2 z + 1} &= \frac{2(\csc^2 z - 2)}{\cot^2 z + 1} \\&= \frac{2(\csc^2 z - 2)}{\csc^2 z} \\&= 2\left(1 - \frac{2}{\csc^2 z}\right) \\&= 2(1 - 2 \sin^2 z) \\&= 2 \cos 2z\end{aligned}$$

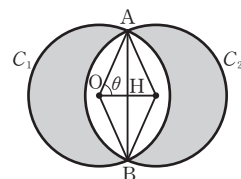
이때, $\sin 2z \times 2 \cos 2z = \sin 4z$ 이므로

$$a=4$$

답 4

04 해결단계

① 단계	$\angle AOH=\theta$ 라 하고 $S(r)$ 와 r 를 θ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$r \rightarrow \infty$ 이면 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 임을 이용하여 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r)}{r}$ 의 값을 구한다.



위의 그림과 같이 원 C_1 의 중심을 O, 두 원 C_1, C_2 의 교점을 A, B, 선분 AB의 중점을 H라 하고,

$$\angle AOH=\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{라 하자.}$$

직각삼각형 AOH에서 $\overline{AO}=r, \overline{OH}=5$ 이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{r^2-25}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{r^2-25}}{r}, \cos\theta=\frac{5}{r} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이때,

$$\begin{aligned}(\text{삼각형 OAB의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} \\&= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{r^2-25} \times 5 \\&= 5\sqrt{r^2-25},\end{aligned}$$

$$(\text{부채꼴 OAB의 넓이}) = \frac{1}{2}r^2 \times 2\theta = r^2\theta$$

이고, 원 C_1 의 내부와 원 C_2 의 외부의 공통부분과, 원 C_2 의 내부와 원 C_1 의 외부의 공통부분의 넓이의 합이 $S(r)$ 이므로

$$\begin{aligned} S(r) &= 2[(\text{원 } C_1\text{의 넓이}) \\ &\quad - 2\{(\text{부채꼴 OAB의 넓이}) - \triangle OAB\}] \\ &= 2\{\pi r^2 - 2(r^2\theta - 5\sqrt{r^2-25})\} \\ &= 2\pi r^2 - 4r^2\theta + 20\sqrt{r^2-25} \\ \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r)}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2\pi r^2 - 4r^2\theta + 20\sqrt{r^2-25}}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} 4r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{20\sqrt{r^2-25}}{r} \end{aligned}$$

.....㉠

이때, ㉠에서 $r = \frac{5}{\cos \theta}$ 이므로

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 4r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{20}{\cos \theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$t = \frac{\pi}{2} - \theta$ 로 놓으면 $r \rightarrow \infty$ 일 때 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 이므로 $t \rightarrow 0$ 이다. 즉,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{20}{\cos \theta} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{20t}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \\ &= 20 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\sin t} \\ &= 20 \times 1 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(r)}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} 4r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{20\sqrt{r^2-25}}{r} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 20 + \lim_{r \rightarrow \infty} 20\sqrt{1 - \frac{25}{r^2}} = 20 + 20 = 40 \end{aligned}$$

답 40

05 해결단계

① 단계	삼각비를 이용하여 $\overline{QH}$ 의 길이를 구한 후, $S(\theta)$ 를 구한다.
② 단계	$S'(\theta)$ 를 구한 후, $S'(\theta)=0$ 이 되는 θ 에 대하여 $\sin \theta$ 의 값을 구한다.
③ 단계	삼각비를 이용하여 $\overline{PH}$ 의 길이를 구한 후, $\frac{\overline{QH}}{\overline{PH}}$ 를 간단히 정리한다.
④ 단계	②단계에서 구한 $\sin \theta$ 의 값을 ③단계에서 정리한 식에 대입하여 $\frac{\overline{QH}}{\overline{PH}}$ 의 값을 구한다.

$$\angle QAB = \theta \text{이므로 } \angle AOP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\triangle OPH \text{에서 } \overline{OH} = \overline{OP} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 4 \sin \theta$$

즉, $\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 4 - 4 \sin \theta$ 이므로 $\triangle AHQ$ 에서

$$\overline{QH} = \overline{AH} \tan \theta = (4 - 4 \sin \theta) \tan \theta \quad \dots\dots \text{㉠}$$

삼각형 AOQ의 넓이가 $S(\theta)$ 이므로

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{QH} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - 4 \sin \theta) \tan \theta \\ &= (8 - 8 \sin \theta) \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= -8 \cos \theta \tan \theta + (8 - 8 \sin \theta) \sec^2 \theta \\ &= -8 \sin \theta + \frac{8(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{-8 \sin \theta \cos^2 \theta + 8(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{8\{-\sin \theta(1 - \sin^2 \theta) + 1 - \sin \theta\}}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{8(\sin^3 \theta - 2 \sin \theta + 1)}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{8(\sin \theta - 1)(\sin^2 \theta + \sin \theta - 1)}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$S'(\theta) = 0 \text{에서 } \sin \theta = 1 \text{ 또는 } \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 1 \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 또는}$$

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \sin \theta < 1$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이제 위의 방정식을 만족시키는 θ 에 대하여 $\frac{\overline{QH}}{\overline{PH}}$ 의 값을 구하자.

㉠에서 $\overline{QH} = (4 - 4 \sin \theta) \tan \theta$ 이고,

$\triangle OPH$ 에서 $\overline{PH} = \overline{OP} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 4 \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\overline{QH}}{\overline{PH}} &= \frac{(4 - 4 \sin \theta) \tan \theta}{4 \cos \theta} \\ &= \frac{(1 - \sin \theta) \tan \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{(1 - \sin^2 \theta) \tan \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos^2 \theta \tan \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \quad (\because \text{㉡}) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

06 해결단계

① 단계	삼각비를 이용하여 $\overline{QM}$, $\overline{QN}$ 의 길이를 각각 구한 후, $S(\theta)$ 를 구한다.
② 단계	점 N에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각비를 이용하여 $\overline{HR}$, $\overline{PR}$ 의 길이를 각각 구한 후, $T(\theta)$ 를 구한다.
③ 단계	$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^2 \times S(\theta)}{T(\theta)}$ 의 값을 구한다.

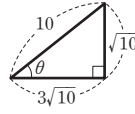
원 C_1 이 x 축에 대하여 대칭이고, 점 P를 원점과 x 축에 대하여 각각 대칭이동시킨 점이 Q, R이므로

$\widehat{PA} = \widehat{AR}$ 이고, $\angle POA = \angle AOR$

2 해결단계

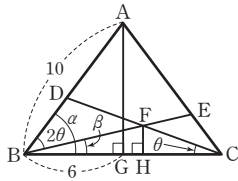
① 단계	$\sin \theta$ 의 값과 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 이용하여 $\tan 2\theta$, $\tan \angle ABC$ 의 값을 각각 구한다.
② 단계	$\angle ABC$ 와 각 θ 를 이용하여 $\tan \angle FBH$ 의 값을 구한다.
③ 단계	$BH+CH=12$ 임을 이용하여 FH 의 길이를 구한 후, p , q 의 값을 각각 구하여 $p+q$ 의 값을 구한다.

$\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 오른쪽 그림과 같은



직각삼각형을 생각하면 $\tan \theta = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이므로 $\overline{BG}=6$

$\triangle ABG$ 에서 $\overline{AB}=10$ 이므로 $\overline{AG}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ 이고

$\angle CBA=\alpha$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

이때, $\angle CBE=\beta$ 라 하면 $\beta=\alpha-2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan(\alpha - 2\theta) = \frac{\tan \alpha - \tan 2\theta}{1 + \tan \alpha \tan 2\theta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\triangle BHF$ 에서 $\tan \beta = \frac{\overline{FH}}{\overline{BH}}$ 이므로

$$\overline{BH} = \frac{\overline{FH}}{\tan \beta} = \frac{24}{7} \overline{FH}$$

$\triangle FHC$ 에서 $\tan \theta = \frac{\overline{FH}}{\overline{HC}}$ 이므로

$$\overline{HC} = \frac{\overline{FH}}{\tan \theta} = 3\overline{FH}$$

$$\overline{BH} + \overline{CH} = 12 \text{이므로 } \left(\frac{24}{7} + 3\right) \overline{FH} = 12$$

$$\frac{45}{7} \overline{FH} = 12 \quad \therefore \overline{FH} = 12 \times \frac{7}{45} = \frac{28}{15}$$

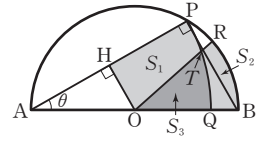
따라서 $p=15$, $q=28$ 이므로

$$p+q=15+28=43$$

답 43

3 해결단계

① 단계	두 선분 OT, OQ와 호 TQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 이라 하고 S_1+S_3 , S_2+S_3 의 값을 구하는 방법을 생각한다.
② 단계	S_1-S_2 를 θ 를 이용하여 나타낸 후, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1-S_2}{\overline{OH}}$ 의 값을 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 답을 이용하여 $50a$ 의 값을 구한다.



두 선분 OT, OQ와 호 TQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 이라 하면

$$S_1 + S_3$$

$$= (\text{부채꼴 APQ의 넓이}) - (\text{삼각형 AOH의 넓이})$$

$$S_2 + S_3 = (\text{부채꼴 OBR의 넓이})$$

이므로

$$S_1 - S_2$$

$$= (S_1 + S_3) - (S_2 + S_3)$$

$$= (\text{부채꼴 APQ의 넓이}) - (\text{삼각형 AOH의 넓이})$$

$$- (\text{부채꼴 OBR의 넓이})$$

.....㉠

$\triangle ABP$ 에서 $\overline{AB}=2$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\therefore (\text{부채꼴 APQ의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 \cos \theta)^2 \times \theta = 2\theta \cos^2 \theta$$

$\triangle AOH$ 에서 $\overline{OA}=1$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{OA} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{OH} = \overline{OA} \sin \theta = \sin \theta$$

$$\therefore (\text{삼각형 AOH의 넓이}) = \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta$$

$\angle OAP = \angle OPA = \theta$ 이므로 $\angle POB = 2\theta$ 이고 호 PR의 길이와 호 RB의 길이의 비가 3:7이므로 두 호 PR, RB의 중심각의 크기의 비도 3:7이다. 즉,

$$\angle ROB = 2\theta \times \frac{7}{10} = \frac{7}{5}\theta$$

$$\therefore (\text{부채꼴 OBR의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{7}{5}\theta = \frac{7}{10}\theta$$

㉠에서

$$S_1 - S_2 = 2\theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta - \frac{7}{10}\theta$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1 - S_2}{\overline{OH}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 2 \cos^2 \theta \times \frac{\theta}{\sin \theta} - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{7}{10} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \right\}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{10} = \frac{4}{5}$$

따라서 $a = \frac{4}{5}$ 이므로

$$50a = 50 \times \frac{4}{5} = 40$$

답 40

4 해결단계

① 단계	△ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle CAB=\theta$ 임을 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 의 값을 각각 θ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	선분 CD가 $\angle ACB$ 를 이등분함을 이용하여 $\overline{AD}$ 의 길이를 구한 후, 부채꼴 ADE의 넓이 $S(\theta)$ 를 구한다.
③ 단계	$\overline{CE}$ 의 길이를 구한 후, 삼각형 BCE의 넓이 $T(\theta)$ 를 구한다.
④ 단계	$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값을 구한다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle CAB=\theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{AC}} \text{에서 } \overline{AC} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} \text{에서 } \overline{BC} = \tan \theta$$

이때, 직선 CD가 $\angle ACB$ 를 이등분하므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{BD} \text{에서}$$

$$\overline{AC} \times \overline{BD} = \overline{BC} \times \overline{AD}$$

$$\overline{AC}(\overline{AB} - \overline{AD}) = \overline{BC} \times \overline{AD}$$

$$\overline{AC} \times \overline{AB} - \overline{AC} \times \overline{AD} = \overline{BC} \times \overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{\overline{AC} + \overline{BC}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos \theta} \times 1}{\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta} = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

부채꼴 ADE의 넓이가 $S(\theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)^2 \times \theta = \frac{\theta}{2(1 + \sin \theta)^2}$$

한편,

$$\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{AD}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

이고 삼각형 BCE의 넓이가 $T(\theta)$ 이므로

$$T(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CE} \times \sin(\angle BCE)$$

$$= \frac{1}{2} \times \tan \theta \times \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) \quad \text{---} \cos \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\left\{ \frac{\theta}{2(1 + \sin \theta)^2} \right\}^2}{\frac{1}{2} \sin \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\theta^2}{4(1 + \sin \theta)^4}}{\frac{1}{2} \sin \theta \times \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta^2 \cos \theta}{2 \sin \theta(1 + \sin \theta - \cos \theta)(1 + \sin \theta)^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{(1 + \sin \theta)^3} \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta}} \right\} \quad \text{---} \sin^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$$

05 여러 가지 미분법

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 47

01 ④

02 -2

03 ④

04 50

05 ③

06 ①

07 16

08 ①

01 $g(x) = \frac{x}{1-f(x)}$ 에서

$$g'(x) = \frac{x'\{1-f(x)\} - x\{1-f(x)\}'}{\{1-f(x)\}^2}$$

$$= \frac{1-f(x) + xf'(x)}{\{1-f(x)\}^2}$$

$$\therefore g'(0) = \frac{1-f(0)}{\{1-f(0)\}^2}$$

$$= \frac{1}{1-f(0)} \quad (\because f(0) \neq 1)$$

이때, $g'(0) = \frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{1}{1-f(0)} = \frac{1}{3}$ 에서

$$1-f(0)=3 \quad \therefore f(0)=-2$$

답 ④

02 $f(x) = \frac{1+\sec x}{\tan x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(1+\sec x)' \tan x - (1+\sec x)(\tan x)'}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sec x \tan x \times \tan x - (1+\sec x) \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= \sec x - \frac{1+\sec x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin^2 x} \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right)$$

따라서 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2 - \frac{4}{3} \times (1+2)$$

$$= 2 - 4 = -2$$

답 -2

03 조건 ㉠에서 $f(g(x)) = 4x^2 + 6x - 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 8x + 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1) = 14$$

조건 ㉡에서 $g(1)=2$ 이므로

$$f'(2)g'(1) = 14$$

조건 ㉢에서 $f'(2)=4$ 이므로

$$4g'(1) = 14 \quad \therefore g'(1) = \frac{7}{2}$$

답 ④

04 점 $(e, -e)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로
 $f(e)=-e$
 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선과 곡선
 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선이 서로 수직이고
 접선의 기울기가 각각 $f'(e), g'(e)$ 이므로
 $f'(e)g'(e)=-1 \quad \dots\dots\textcircled{7}$
 $g(x)=f(x) \ln x^4=4f(x) \ln x$ 에서
 $g'(x)=4f'(x) \times \ln x + 4f(x) \times \frac{1}{x}$
 $\therefore g'(e)=4f'(e) \times \ln e + 4f(e) \times \frac{1}{e}$
 $=4f'(e) + \frac{4f(e)}{e}$
 $=4f'(e) - 4 \quad (\because f(e)=-e)$
 이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $f'(e)\{4f'(e) - 4\} = -1$
 $4\{f'(e)\}^2 - 4f'(e) + 1 = 0$
 $\{2f'(e) - 1\}^2 = 0 \quad \therefore f'(e) = \frac{1}{2}$
 $\therefore 100f'(e) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ 답 50

05 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면
 $\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2}$
 $= \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$
 $\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2}$
 $= \frac{-2t^2 + 2}{(1+t^2)^2}$
 $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-2t^2 + 2}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}$
 $= \frac{t^2 - 1}{2t}$

따라서 $t=2$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{2^2 - 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$
답 ③

06 주어진 곡선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $1+b=0 \quad \therefore b=-1$
 또한, $x^4+y^3+axy+b=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $4x^3+3y^2\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$
 $(3y^2+ax)\frac{dy}{dx}=-4x^3-ay$
 $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3+ay}{3y^2+ax}$
 주어진 곡선 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 -2 이므로

$$-\frac{4}{a} = -2 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore ab=2 \times (-1) = -2$$

답 ①

07 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)\}^2 - \{g(1)\}^2}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)-g(1)\}\{g(x)+g(1)\}}{x-1}$
 $= 2g(1)g'(1) \quad \dots\dots\textcircled{7}$
 이때, $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계에 있으므로
 $f(4)=1$ 에서 $g(1)=4$
 또한, $f(g(x))=x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(g(x))g'(x)=1$ 이므로 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$
 $\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(4)}=2$
 따라서 $\textcircled{7}$ 에서
 (주어진 식) $= 2g(1)g'(1)$
 $= 2 \times 4 \times 2 = 16$ 답 16

08 조건 (나)의 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x))-1}{x-1} = 3$ 에서 극한값이 존재하고
 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f'(f(x))-1\} = 0$ 이어야 하므로
 $f'(f(1))-1=0 \quad \therefore f'(f(1))=1$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x))-1}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right\}$
 $= f''(f(1)) \times f'(1)$
 $= f''(2) \times 3 \quad (\because \text{조건 (가)에서 } f(1)=2, f'(1)=3)$
 $= 3f''(2)$
 조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x))-1}{x-1} = 3$ 이므로
 $3f''(2)=3 \quad \therefore f''(2)=1$ 답 ①

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 48~52

01 4	02 ①	03 ④	04 $\frac{16}{9}$	05 ②
06 $3 \ln 2$	07 10	08 ①	09 $36e^2$	10 $-\frac{1}{4}$
11 ②	12 2π	13 ③	14 $\frac{3-\pi}{2}$	15 $-\frac{18}{7}$
16 ④	17 $\frac{1}{2}$	18 ⑤	19 ④	20 ①
21 $-\frac{3}{8}$	22 $\frac{2}{3}$	23 ④	24 5	25 10
26 ②	27 ③	28 7	29 ②	30 ③
31 0	32 5	33 ⑤	34 34	35 ④

01 $f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax}$ 에서

$$f'(x) = \frac{b(x^2+ax) - (bx+2)(2x+a)}{(x^2+ax)^2}$$

$$= -\frac{bx^2+4x+2a}{(x^2+ax)^2}$$
 이때, $x^2+ax \neq 0$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서
 $bx^2+4x+2a=0$ (단, $b \neq 0$)
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 (두 근의 합) $= -\frac{4}{b} = -2$, (두 근의 곱) $= \frac{2a}{b} = \frac{2}{3}$
 $\therefore a = \frac{2}{3}, b = 2$
 $\therefore 3a+b = 3 \times \frac{2}{3} + 2 = 4$ 답 4

02 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\frac{3}{25}$ 에서
 $f'(2) = -\frac{3}{25}$ ㉑
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = 0$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = 0$
 $\frac{1}{2}f'(1) = 0 \quad \therefore f'(1) = 0$ ㉒
 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 에서
 $f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$
 ㉑에서 $\frac{-4a-4b+a}{25} = -\frac{3}{25}$ 이므로
 $3a+4b=3$ ㉓
 ㉒에서 $\frac{-a-2b+a}{4} = 0$ 이므로 $2b=0$ ㉔
 ㉓, ㉔을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$
 $\therefore a^2+b^2 = 1^2+0^2 = 1$ 답 ①

03 $f(x) = \frac{\cos x}{3(\sin x + \cos x)}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(\cos x)'(\sin x + \cos x) - \cos x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-\sin x(\sin x + \cos x) - \cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= -\frac{1}{3(1+2\sin x \cos x)} \quad \begin{matrix} \text{---} \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ \text{---} 1 + 2\sin x \cos x \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{3(1+\sin 2x)}$$

이때, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3}{2}\pi$
 $-1 < \sin 2x \leq 1, 0 < 1 + \sin 2x \leq 2$
 $0 < 3(1 + \sin 2x) \leq 6, \frac{1}{3(1 + \sin 2x)} \geq \frac{1}{6}$
 $-\frac{1}{3(1 + \sin 2x)} \leq -\frac{1}{6} \quad \therefore f'(x) \leq -\frac{1}{6}$
 따라서 구하는 $f'(x)$ 의 최댓값은 $-\frac{1}{6}$ 이다. 답 ④

04 $f_n(x) = 1 + e^{-2 \ln x} + e^{-4 \ln x} + e^{-6 \ln x} + \dots + e^{-2n \ln x}$

$$= 1 + x^{-2 \ln e} + x^{-4 \ln e} + x^{-6 \ln e} + \dots + x^{-2n \ln e}$$

$$= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}$$

$$\therefore f_n(x) = \frac{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\begin{matrix} \text{---} a^{\log_e b} \\ \text{---} b^{\log_e a} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{---} \text{첫째항이 1, 공비가 } \frac{1}{x^2} \text{인 등비수열의 합} \end{matrix}$$

이때, $x > 1$ 에서 $0 < \frac{1}{x^2} < 1$ 이므로

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
 위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\therefore F(2) - F'(2) = \frac{2^2}{2^2-1} - \frac{(-2) \times 2}{(2^2-1)^2}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$
 답 16/9

05 $f(0)=0$ 이므로 $g(0) = \frac{0}{f(0)+1} = \frac{0}{0+1} = 0$
 이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \quad (\because g(0)=0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{f(x)+1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)+1} \quad \dots\dots \text{㉑}$$

가 존재해야 한다.

㉑. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

㉑에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)+1} = \frac{0}{0+1} = 0$

즉, 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 함수 $g(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하다.

㉒. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 ㉑에서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

㉓. (반례) $f(x) = \begin{cases} x^3-1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 이라 하면

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ 이므로 $x=0$ 에서의 함수값이 존재한다.

그런데 $g(x) = \frac{x^2}{f(x)+1} = \frac{x^2}{x^3-1+1} = \frac{1}{x}$ 이므로
 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분불가능하다. **답 ②**

06 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-4}{h} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $h \rightarrow 0$ 일 때,
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(h)-4\} = 0$ 이어야 하므로 $f(0) = 4$
 $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) = 3$
 한편, $(f \circ g)(x) = F(x)$ 라 하면 $g(x) = 2^x - 1$ 에서
 $F(0) = f(g(0)) = f(0) = 4$
 또한, $g'(x) = 2^x \ln 2$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(h)-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h)-F(0)}{h} = F'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(0)g'(0) = 3 \times 2^0 \ln 2 = 3 \ln 2$ **답 3 ln 2**

•다른풀이•

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(h)-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(h))-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(h))-4}{g(h)} \times \frac{g(h)}{h} \right\}$
 이때, $g(x) = 2^x - 1$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 $g(h) \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(h))-4}{g(h)} \times \frac{g(h)}{h} \right\} = \lim_{g(h) \rightarrow 0} \frac{f(g(h))-4}{g(h)} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h-1}{h} = 3 \times \ln 2 \left(\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-4}{h} = 3 \right) = 3 \ln 2$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 합성함수와 미분을 함께 다루는 문제이다. 비교적 간단한 문제이지만, 합성함수가 복잡할 경우 실수를 할 수 있으므로 조심해야 한다. 합성함수에 어려움을 겪는다면 $(f \circ g)(x) = F(x)$ 로 치환하여 문제를 풀어보는 것도 좋다. 또한, 합성함수와 역함수가 섞여 나오는 문제도 종종 출제되니, 각각에 대한 개념을 정확히 알고 있어야 한다.

07 $p(x) = (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$ 에서
 $p'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$ ㉠
 $p'(0) = 10$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $p'(0) = h'(g(f(0)))g'(f(0))f'(0) = 10$ ㉡
 이때, $f(x) = \frac{4x-1}{1-3x}$ 에서
 $f'(x) = \frac{4(1-3x) + 3(4x-1)}{(1-3x)^2} = \frac{1}{(1-3x)^2}$

$\therefore f(0) = -1, f'(0) = 1$
 이것을 ㉡에 대입하면
 $h'(g(-1))g'(-1) = 10$ **답 10**

08 $\log \{1+f(x)\} + xf(x) = \log 2$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $\log \{1+f(0)\} = \log 2, 1+f(0) = 2$
 $\therefore f(0) = 1$
 ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\frac{f'(x)}{\{1+f(x)\} \ln 10} + f(x) + xf'(x) = 0$
 위의 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $\frac{f'(0)}{\{1+f(0)\} \ln 10} + f(0) = 0$
 이때, $f(0) = 1$ 이므로 $\frac{f'(0)}{2 \ln 10} = -1$
 $\therefore f'(0) = -2 \ln 10$ **답 ①**

09 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e+3x)-f(e-3x)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e+3x)-f(e)+f(e)-f(e-3x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e+3x)-f(e)}{3x} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e)-f(e-3x)}{-3x}$
 $= 3f'(e) + 3f'(e) = 6f'(e)$ ㉠
 한편, $x > 0$ 에서 $x^{3 \ln x} > 0$ 이므로 $f(x) = x^{3 \ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면
 $\ln f(x) = \ln x^{3 \ln x} \therefore \ln f(x) = 3(\ln x)^2$
 위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 6 \ln x \times \frac{1}{x}$
 $\therefore f'(x) = \frac{6f(x) \ln x}{x}$
 따라서 ㉠에서
 (주어진 식) $= 6f'(e) = 6 \times \frac{6f(e) \ln e}{e} = \frac{36f(e)}{e} = \frac{36e^{3 \ln e}}{e} = 36e^2$ **답 36e²**

10 $f(x) = \tan \frac{2\pi}{x}$ 에서 $f(1) = \tan 2\pi = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x))-g(0)}{x-1} = \frac{\pi}{2}$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(f(x))-g(f(1))}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(f(x))-g(f(1))}{f(x)-f(1)} \times \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right\} = g'(f(1))f'(1) = \frac{\pi}{2}$
 $\therefore g'(0)f'(1) = \frac{\pi}{2}$ ㉠

한편, $f(x) = \tan \frac{2\pi}{x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2 \frac{2\pi}{x} \times \left(\frac{-2\pi}{x^2} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{x^2 \cos^2 \frac{2\pi}{x}} \end{aligned}$$

이므로

$$f'(1) = -\frac{2\pi}{\cos^2 2\pi} = -2\pi$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$g'(0) \times (-2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore g'(0) = -\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \frac{\pi}{6}}{x} = \sqrt{3} \text{에서 극한값이 존재하고}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(2x) - \frac{\pi}{6} \right\} = 0 \text{에서 } f(0) = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \frac{\pi}{6}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \times 2 \right\} \\ &= 2f'(0) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2 - \sin f(2x)}{2 + \sin f(2x)} \\ &= \frac{4 - \{2 + \sin f(2x)\}}{2 + \sin f(2x)} \\ &= \frac{4}{2 + \sin f(2x)} - 1 \end{aligned}$$

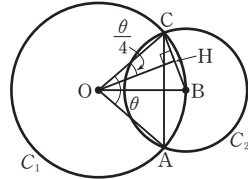
에서

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-4\{2 + \sin f(2x)\}'}{\{2 + \sin f(2x)\}^2} \\ &= \frac{-4 \cos f(2x) \times f'(2x) \times 2}{\{2 + \sin f(2x)\}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{-8f'(0) \cos f(0)}{\{2 + \sin f(0)\}^2} \\ &= \frac{-8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos \frac{\pi}{6}}{\left(2 + \sin \frac{\pi}{6}\right)^2} \\ &= \frac{-8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{-6}{\frac{25}{4}} = -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

답 ②

12



위의 그림과 같이 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을

H라 하면 $\triangle OHC$ 에서 $\angle COH = \frac{\theta}{4}$, $\overline{OC} = 1$ 이므로

$$\overline{CH} = \sin \frac{\theta}{4}, \overline{OH} = \cos \frac{\theta}{4}$$

원 C_2 의 반지름의 길이가 $\overline{BC} = 2\overline{CH} = 2 \sin \frac{\theta}{4}$ 이므로

원 C_2 의 넓이는

$$S(\theta) = \pi \times \left(2 \sin \frac{\theta}{4} \right)^2 = 4\pi \sin^2 \frac{\theta}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또한, 삼각형 OBC의 넓이는

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{\theta}{4} \times \cos \frac{\theta}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } T(a) = \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \frac{a}{2} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

한편, ㉠의 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 4\pi \times 2 \sin \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \pi \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 3S'(a) = 3\pi \sin \frac{a}{2} = 3\pi \times \frac{2}{3} \quad (\because \textcircled{8})$$

$$= 2\pi$$

답 2π

• 다른풀이 •

원 C_2 의 반지름의 길이를 r 라 하자.

$\triangle OBC$ 에서 $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$, $\overline{BC} = r$ 이고 $\angle BOC = \frac{\theta}{2}$ 이

므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} r^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 - 2 \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

따라서 원 C_2 의 넓이는

$$S(\theta) = \pi \times r^2 = \pi \left(2 - 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

또한, 삼각형 OBC의 넓이는

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } T(a) = \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \frac{a}{2} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

한편, ㉔의 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$S'(\theta) = \pi \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore 3S'(a) = 3\pi \sin \frac{a}{2}$$

$$= 3\pi \times \frac{2}{3} (\because ㉔) = 2\pi$$

13 ㄱ. α, β, γ 는 방정식 $f(x) - x = 0$, 즉 $f(x) = x$ 의 근이므로

$$f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta, f(\gamma) = \gamma$$

$$\text{이때, } f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha, f(f(\beta)) = f(\beta) = \beta,$$

$$f(f(\gamma)) = f(\gamma) = \gamma \text{이므로 } \alpha, \beta, \gamma \text{는 방정식}$$

$$f(f(x)) - x = 0, \text{ 즉 } f(f(x)) = x \text{의 근이다. (참)}$$

ㄴ. $f(f(x))$ 를 $f(x) - x$ 로 나눈 몫이 $g(x)$, 나머지가 $h(x)$ 이므로

$$f(f(x)) = \{f(x) - x\}g(x) + h(x) \quad \dots\dots ㉑$$

이때, 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) - x$ 도 삼차식이므로 나머지 $h(x)$ 는 이차 이하의 다항식이다.

$$\text{ㄱ에서 } f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta, f(\gamma) = \gamma,$$

$$f(f(\alpha)) = \alpha, f(f(\beta)) = \beta, f(f(\gamma)) = \gamma \text{이므로}$$

㉑에 $x = \alpha, x = \beta, x = \gamma$ 를 각각 대입하여 정리하면

$$\alpha = 0 \times g(\alpha) + h(\alpha), \beta = 0 \times g(\beta) + h(\beta),$$

$$\gamma = 0 \times g(\gamma) + h(\gamma) \text{이므로}$$

$$h(\alpha) = \alpha, h(\beta) = \beta, h(\gamma) = \gamma$$

즉, α, β, γ 는 방정식 $h(x) - x = 0$, 즉, $h(x) = x$ 의 근이다.

이때, $h(x)$ 는 이차 이하의 다항식이므로

$$h(x) = x \text{ (참)}$$

ㄷ. ㉑에서 $f(f(x)) = \{f(x) - x\}g(x) + x \quad \dots\dots ㉒$

조건 ㉔에서 $f(3) = 7$ 이고, 조건 ㉔에서

$$f(f(3)) = 5 \text{이므로 } ㉒ \text{에 } x = 3 \text{을 대입하면}$$

$$f(f(3)) = \{f(3) - 3\}g(3) + 3 \text{에서}$$

$$5 = (7 - 3)g(3) + 3 \quad \therefore g(3) = \frac{1}{2}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(f(x))f'(x)$$

$$= \{f'(x) - 1\}g(x) + \{f(x) - x\}g'(x) + 1$$

위의 식에 $x = 3$ 을 대입하면

$$f'(f(3))f'(3)$$

$$= \{f'(3) - 1\}g(3) + \{f(3) - 3\}g'(3) + 1$$

조건 ㉔에서 $f'(3) = 0$ 이므로

$$0 = (0 - 1) \times \frac{1}{2} + (7 - 3)g'(3) + 1$$

$$4g'(3) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore g'(3) = -\frac{1}{8} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉓

14 해결단계

① 단계	조건 ㉔를 $f\left(\frac{\pi}{4}\right), f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 에 대한 식으로 정리한다.
② 단계	조건 ㉔를 이용하여 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값과 $f'(x)$ 의 값의 범위를 각각 구한다.
③ 단계	①, ②단계에서 구한 식을 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한 후, $a + b$ 의 값을 구한다.

조건 ㉔의 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(f(x)) - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = 1$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ f(f(x)) - \frac{\pi}{4} \right\} = 0 \text{에서}$$

$$f\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots ㉑$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(f(x)) - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(f(x)) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(f(x)) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right]$$

$$= f'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \dots\dots ㉒$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = k$ (k 는 상수)라 하면 ㉑에서 $f(k) = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore f(k) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - k$$

(i) $\frac{\pi}{4} < k$ 이면 조건 ㉔에서

$$f(k) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{4} - k \text{이므로 모순이다.}$$

(ii) $k < \frac{\pi}{4}$ 이면 조건 ㉔에서

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(k) > k - \frac{\pi}{4} \text{이므로 모순이다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k = \frac{\pi}{4} \text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots ㉓$$

이것을 ㉒에 대입하면 $\left\{ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}^2 = 1$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ 또는 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \dots\dots ㉔$$

한편, 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 미분가능

하므로 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에

대하여 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 열린구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하다.

즉, 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

조건 ④에서 $f(x_2) - f(x_1) > x_2 - x_1$ 의 양변을 $\frac{x_2 - x_1}{>0}$ 로 나누면 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > -1$ 이므로

$$f'(c) > -1 \quad (\text{단, } x_1 < c < x_2)$$

이때, 임의의 두 실수 x_1, x_2 는 열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에 존재하므로 $f'(c) > -1$ (단, $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$)

즉, $f'(\frac{\pi}{4}) > -1$ 이므로 ③에서

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad \dots\dots ③$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin^4 x + b \tan x \text{에서} \\ f'(x) &= 4a \sin^3 x \cos x + b \sec^2 x \\ &= 4a \sin^3 x \cos x + \frac{b}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

③, ④에서

$$a \sin^4 \frac{\pi}{4} + b \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$4a \sin^3 \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{b}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{4}a + b = \frac{\pi}{4}, \quad a + 2b = 1$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a = 2 - \pi, b = \frac{\pi - 1}{2}$

$$\therefore a + b = 2 - \pi + \frac{\pi - 1}{2} = \frac{3 - \pi}{2} \quad \text{답 } \frac{3 - \pi}{2}$$

15 점 $P(\frac{2}{9}, \frac{16}{9})$ 이 주어진 함수의 그래프 위에 있으므로

$$\cos^2 t = \frac{2}{9}, \quad 1 + a \sin^4 t = \frac{16}{9}$$

$$\cos^2 t = \frac{2}{9} \text{에서}$$

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \quad \dots\dots ①$$

$$1 + a \sin^4 t = \frac{16}{9} \text{에서 } 1 + a \times \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\frac{49}{81}a = \frac{7}{9} \quad \therefore a = \frac{9}{7}$$

$x = \cos^2 t, y = 1 + \frac{9}{7} \sin^4 t$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos t \times (-\sin t) = -2 \sin t \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{9}{7} \times 4 \sin^3 t \cos t = \frac{36}{7} \sin^3 t \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{36}{7} \sin^3 t \cos t}{-2 \sin t \cos t}$$

$$= -\frac{18}{7} \sin^2 t$$

이때, 이 함수의 그래프 위의 점 P 에서의 접선의 기울기가 b 이므로

$$b = -\frac{18}{7} \times \frac{7}{9} \quad (\because ①)$$

$$= -2$$

$$\therefore ab = \frac{9}{7} \times (-2) = -\frac{18}{7}$$

$$\text{답 } -\frac{18}{7}$$

16 $x = \frac{1-t}{1+t}, y = \frac{t}{1+t}$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1-t)'(1+t) - (1-t)(1+t)'}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1+t)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t'(1+t) - t(1+t)'}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\therefore F(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{(1+t)^2}}{\frac{-2}{(1+t)^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{t=1}^{200} |F(t)| = \sum_{t=1}^{200} \frac{1}{2} = 200 \times \frac{1}{2} = 100$$

답 ④

17 $x = t + t^2 + t^3 + \dots + t^n,$

$$y = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{5}{3}t^3 + \dots + \frac{2n-1}{n}t^n$$

의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1},$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + 3t + 5t^2 + \dots + (2n-1)t^{n-1}$$

$$\therefore f_n(t) = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$$

$$= \frac{1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}}{1 + 3t + 5t^2 + \dots + (2n-1)t^{n-1}}$$

$$g(n) = \lim_{t \rightarrow 1} f_n(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}}{1 + 3t + 5t^2 + \dots + (2n-1)t^{n-1}} = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^2$$

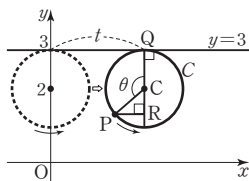
$$= \frac{2}{n^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

18



위의 그림과 같이 원 C의 중심을 C, 원 C와 직선 $y=3$ 의 접점을 Q, 점 P를 지나고 x 축에 평행한 직선이 직선 CQ와 만나는 점을 R라 하고, $\angle QCP = \theta$ 라 하자.

$\overline{CP} = 1$, $\angle PCR = \pi - \theta$ 이므로 $\triangle CPR$ 에서

$$\overline{CR} = \overline{CP} \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\overline{PR} = \overline{CP} \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\therefore P(t - \sin \theta, 2 + \cos \theta)$$

이때, 원 C가 t 만큼 굴러가면 점 P는 t 만큼 원 C의 원주위를 움직이므로 $\widehat{PQ} = t$ 에서 $\theta = t$

$$\therefore P(t - \sin t, 2 + \cos t)$$

점 P가 나타내는 곡선이 F이므로

$$x = t - \sin t, y = 2 + \cos t$$

라 하고 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{1 - \cos t}$$

따라서 $t = \frac{2}{3}\pi$ 일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울

$$\text{기는 } \frac{-\sin \frac{2}{3}\pi}{1 - \cos \frac{2}{3}\pi} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

19

주어진 곡선이 점 $(8, b)$ 를 지나므로

$$2 + a^3\sqrt{b} = 29 \quad \therefore a^3\sqrt{b} = 27 \quad \dots\dots ㉠$$

또한, $\sqrt[3]{x} + a^3\sqrt{y} = 29$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{a}{3\sqrt[3]{y^2}} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{3\sqrt[3]{y^2}}{a} = -\frac{\sqrt[3]{y^2}}{a^3\sqrt[3]{x^2}}$$

주어진 곡선 위의 점 $(8, b)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{27}{4}$

이므로

$$-\frac{\sqrt[3]{b^2}}{4a} = \frac{27}{4} \quad \therefore \sqrt[3]{b^2} = -27a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = -729$$

$$\therefore a + b = (-3) + (-729) = -732 \quad \text{답 ④}$$

20

반응이 시작된 지 0.5초 후의 물질 A의 시간에 대한 질량의 변화율은 $y = \frac{1}{2}$ 일 때의 $\frac{dx}{dy}$ 의 값이다.

$$\frac{x}{4-x} = e^{5(2y-1)} \text{의 양변을 } y \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{1 \times (4-x) - x \times (-1)}{(4-x)^2} \frac{dx}{dy} = e^{5(2y-1)} \times 10$$

$$\frac{4}{(4-x)^2} \frac{dx}{dy} = 10e^{5(2y-1)}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{5}{2}(4-x)^2 e^{5(2y-1)} \quad \dots\dots ㉠$$

이때, $\frac{x}{4-x} = e^{5(2y-1)}$ 에 $y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{x}{4-x} = 1, x = 4-x$$

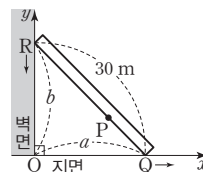
$$2x = 4 \quad \therefore x = 2$$

㉠에 $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{5}{2} \times 2^2 \times 1 = 10$$

따라서 반응이 시작된 지 0.5초 후의 물질 A의 시간에 대한 질량의 변화율은 10 g/s이다. 답 ①

21



두 점 Q, R는 $Q(a, 0), R(0, b)$ 이고, $\triangle OQR$ 는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + b^2 = 900 \quad \dots\dots ㉠$$

선분 QR를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2} \right)$$

$$\therefore P\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

이때, $\frac{2a}{3} = X, \frac{b}{3} = Y$ 라 하면

$$a = \frac{3}{2}X, b = 3Y$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}X\right)^2 + (3Y)^2 = 900$$

$$\therefore \frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 900 \quad \leftarrow X=x, Y=y \text{로 생각하여도 상관없다.}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{9}{4} \times 2x + 9 \times 2y \frac{dy}{dx} = 0, \frac{9}{2}x + 18y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

따라서 점 P의 자취가 그리는 도형 위의 점 (12, 8)에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{12}{4 \times 8} = -\frac{3}{8} \quad \text{답 } -\frac{3}{8}$$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 점 P, Q의 좌표를 a, b 로 나타낸 후, 직각삼각형 OQR에서 피타고라스 정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 경우	20%
(나)	선분 QR를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표와 (가)에서 구한 관계식을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구한 경우	40%
(다)	점 P의 자취의 방정식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 경우	30%
(라)	점 P의 자취가 그리는 도형 위의 점 (12, 8)에서의 접선의 기울기를 구한 경우	10%

22 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{5}{18}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 에서

$$f(3) = g(3)$$

이때, $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 역함수를 가지므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$f(3) = g(3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3) - g(x) + g(3)}{(x-3)g(x)} \quad (\because f(3) = g(3))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \frac{1}{g(x)} \right\} - \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \times \frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$= f'(3) \times \frac{1}{g(3)} - g'(3) \times \frac{1}{g(3)}$$

$$= \frac{1}{3} \{f'(3) - g'(3)\} \quad (\because g(3) = 3)$$

$$= \frac{5}{18}$$

$$\text{에서 } f'(3) - g'(3) = \frac{5}{6}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(3)} \text{에서 } f'(3) = \frac{1}{g'(3)} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{g'(3)} - g'(3) = \frac{5}{6}, \quad 6\{g'(3)\}^2 + 5g'(3) - 6 = 0$$

$$\{3g'(3) - 2\} \{2g'(3) + 3\} = 0$$

$$\therefore g'(3) = \frac{2}{3} \text{ 또는 } g'(x) = -\frac{3}{2}$$

그런데 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore g'(x) \geq 0 \quad (\because g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))})$$

$$\therefore g'(3) = \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}$$

23 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$$f'(x) = 3x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 할 수 있다.}$$

이때,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ &= \frac{1}{3\{g(x)\}^2 + ag(x) + b} \\ &= \frac{1}{3\left\{g(x) + \frac{a}{6}\right\}^2 - \frac{a^2}{12} + b} \end{aligned}$$

에서 $g'(x)$ 는 $g(x) = -\frac{a}{6}$ 를 만족시키는 x 에서 최댓값

$$\frac{1}{-\frac{a^2}{12} + b} \text{을 갖는다.}$$

조건 (나)에서 $g'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 가지므로

$$g(1) = -\frac{a}{6}, \quad \frac{1}{-\frac{a^2}{12} + b} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서 $g(1) = 3$ 이므로

$$-\frac{a}{6} = 3 \quad \therefore a = -18$$

이것을 ①에 대입하여 풀면

$$\frac{1}{-\frac{18^2}{12} + b} = \frac{1}{4}, \quad -27 + b = 4 \quad \therefore b = 31$$

따라서 $f'(x) = 3x^2 - 18x + 31$ 이므로

$$f'(2) = 3 \times 2^2 - 18 \times 2 + 31 = 7$$

$$\text{답 } \textcircled{4}$$

24 점 (3, 1)이 곡선 $y=f(x)$ 위에 있고, 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$f(3) = 1, \quad f'(3) = 2$$

함수 $f(3x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(3x)) = x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(f(3)) = 1 \quad \therefore g(1) = 1$$

한편, 점 (1, a)가 곡선 $y=g(x)$ 위에 있고, 이 점에서의 접선의 기울기가 b이므로

$$g(1)=a, g'(1)=b$$

$$\therefore a=g(1)=1$$

㉗의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(3x)) \times f'(3x) \times 3 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

㉘에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(3)) \times f'(3) \times 3 = 1, g'(1) \times 2 \times 3 = 1$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{6} \quad \therefore b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 30ab = 30 \times 1 \times \frac{1}{6} = 5$$

답 5

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 역함수의 미분을 묻는 문제로, 대부분의 학생들이 어려워하는 부분이다. 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 일 때, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ 이지만, 이 문제에서 이것을 이용하여 풀려고 하면 크게 어려움을 겪는다. 역함수의 미분법의 공식이 함수 $f(x)$ 와 그 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $f(g(x))=x$ 가 성립하므로 이 식을 미분하여 구할 수 있다는 것을 이해해야 한다. 따라서 이 문제에서는 함수 $f(3x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(f(3x))=x$ 와 이 식을 미분하여 얻은 식을 활용하여 접선의 기울기를 구해야 한다.

25 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = 3$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-1\} = 0 \text{이므로 } f(2)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 3$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(1)=2$ 이고,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{에서}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$$

$$h(x) = g\left(g\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \text{라 하면 점 } (2, 4) \text{가 곡선 } y=h(x)$$

위에 있고, 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$h(2)=4, h'(2)=1$$

$$h(2)=4 \text{에서 } g(g(1))=4$$

$$\therefore g(2)=4$$

$$\text{또한, } h'(x) = g'\left(g\left(\frac{1}{2}x\right)\right) g'\left(\frac{1}{2}x\right) \times \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$h'(2)=1 \text{에서 } g'(g(1)) g'(1) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} g'(2) \times \frac{1}{3} = 1 \left(\because g(1)=2, g'(1)=\frac{1}{3} \right)$$

$$\therefore g'(2)=6$$

$$\therefore g(2)+g'(2)=4+6=10$$

답 10

26 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+x} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$

$f(0) \neq 0$ 이라 하면 ㉗에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+x} = \frac{f(0)+g(0)}{f(0)} = 1 \text{이므로}$$

$$f(0)+g(0)=f(0) \quad \therefore g(0)=0$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(0)=0$ 이 되어 모순이다.

따라서 $f(0)=0$ 이므로 $g(0)=0$

㉗에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{g(x)-g(0)}{x}}{\frac{f(x)-f(0)}{x} + 1}$$

$$= \frac{f'(0)+g'(0)}{f'(0)+1} = 1$$

$$f'(0)+1=f'(0)+g'(0)$$

$$\therefore g'(0)=1$$

$$\text{이때, } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \dots\dots \textcircled{㉘} \text{이므로}$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$\therefore f'(0)=1$$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f(0)=0, f'(0)=1 \text{이므로 } c=0, b=1$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + x$$

$$f(1)+g(1)=2 \text{이고 } f(1)=2+a \text{이므로}$$

$$g(1)=2-f(1)=2-(2+a)=-a$$

$$\text{즉, } f(-a)=1 \text{이므로}$$

$$(-a)^3 + a \times (-a)^2 - a = 1$$

$$\therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = x^3 - x^2 + x, f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\textcircled{㉘} \text{에서 } g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))}$$

$$g(6)=k \text{라 하면 } f(k)=6 \text{이므로}$$

$$k^3 - k^2 + k = 6, k^3 - k^2 + k - 6 = 0$$

$$(k-2)(k^2+k+3)=0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k^2+k+3=0$$

그런데 이차방정식 $k^2+k+3=0$ 의 실근이 존재하지 않

으므로 $k=2$

$$\therefore g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))}$$

$$= \frac{1}{f'(2)}$$

$$= \frac{1}{3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1} = \frac{1}{9}$$

답 ②

- 27** 조건 ㉞에서 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(2, 4)$ 를 지나므로
 $f(2)=4$
 $f(x)=x(ax+b)+\ln(x-1)$ 에서
 $2(2a+b)+\ln(2-1)=4, 2a+b=2$
 $\therefore b=2-2a$
 $\therefore f(x)=x(ax+2-2a)+\ln(x-1)$
 조건 ㉝에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(2x)$ 이므로
 $g(2f(x))=x \quad \dots\dots\textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에 $x=2$ 를 대입하면
 $g(2f(2))=2 \quad \therefore g(8)=2 \quad (\because f(2)=4)$
 $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $g'(2f(x)) \times 2f'(x)=1$
 $\therefore g'(2f(x))=\frac{1}{2f'(x)}$
 방정식 $g'(2f(x))=\frac{1}{4g(8)}$ 에서 $\frac{1}{2f'(x)}=\frac{1}{4g(8)}$
 $2f'(x)=4g(8) \quad \dots\dots\textcircled{2}$
 이때, $f(x)=x(ax+2-2a)+\ln(x-1)$ 에서
 $f'(x)=ax+2-2a+x \times a+\frac{1}{x-1}$

$$=2ax-2a+2+\frac{1}{x-1}$$

 이므로 $\textcircled{2}$ 에서
 $2\left(2ax-2a+2+\frac{1}{x-1}\right)=8$
 $2ax-2a+2+\frac{1}{x-1}=4$
 $2ax-2a-2+\frac{1}{x-1}=0$
 로그의 진수의 조건 $x-1>0$ 이므로 위의 식의 양변에 $x-1$ 을 곱하면
 $2ax(x-1)-2a(x-1)-2(x-1)+1=0$
 $2ax^2-(4a+2)x+2a+3=0$
 위의 방정식의 실근의 합이 12이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-\frac{(4a+2)}{2a}=12, 2a+1=12a$
 $10a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{10}$
 $\therefore b=2-2a=2-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$
 $\therefore \frac{b}{a}=\frac{9}{5} \times 10=18$ 답 ③

- 28** 조건 ㉞에서 $g(0)=e^2$ 이므로 $e^{f(0)}=e^2$
 $\therefore f(0)=2$
 $g(x)=e^{f(x)}$ 에서 $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$ 이고
 조건 ㉝에서 방정식 $g'(x)=0$ 의 해가 존재하지 않으므로
 방정식 $f'(x)=0$ 의 해도 존재하지 않는다.

- 이때, $f(x)$ 가 사차 이하의 다항함수이면 $f'(x)$ 는 삼차 이하의 다항함수이므로 곡선 $y=f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면 $f'(x)$ 는 상수함수 또는 이차함수이어야 한다.
 즉, $f(x)$ 는 일차함수 또는 삼차함수이므로
 $f(x)=x+2$ 또는
 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2 \quad (\because f(0)=2)$
 (i) $f(x)=x+2$ 일 때,
 $g(x)=e^{x+2}$ 이므로 $g'(x)=e^{x+2}$
 함수 $g(x)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이고 $g(0)=e^2$ 이므로
 $h(e^2)=0$
 또한, $h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$ 에서
 $h'(e^2)=\frac{1}{g'(h(e^2))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{e^2}$
 조건 ㉝에서 $h'(e^2)=\frac{1}{3e^2}$ 이므로 모순이다.
 (ii) $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 일 때,
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로 곡선 $y=f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$ 이 허근을 가져야 한다. 즉, 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=a^2-3b<0 \quad \therefore a^2<3b \quad \dots\dots\textcircled{1}$
 또한, $g(x)=e^{x^3+ax^2+bx+2}$ 이므로
 $g'(x)=(3x^2+2ax+b)e^{x^3+ax^2+bx+2}$
 $g(0)=e^2$ 에서 $h(e^2)=0$ 이고, $h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}$ 에서
 $h'(e^2)=\frac{1}{g'(h(e^2))}=\frac{1}{g'(0)}$

$$=\frac{1}{be^2}=\frac{1}{3e^2}$$

 $\therefore b=3$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면
 $a^2<9 \quad \therefore -3<a<3$
 (i), (ii)에서
 $f(x)=x^3+ax^2+3x+2 \quad (-3<a<3)$ 이므로
 $f(2)=8+4a+6+2=4a+16$
 $-3<a<3$ 에서 $4<4a+16<28$ 이므로
 $4<f(2)<28$
 따라서 $p=4, q=28$ 이므로
 $\therefore \frac{q}{p}=\frac{28}{4}=7$ 답 7

- 29** $f(x)=e^{3x} \sin x$ 에서
 $f'(x)=3e^{3x} \sin x+e^{3x} \cos x$
 $=e^{3x}(3 \sin x+\cos x)$
 $f''(x)=3e^{3x}(3 \sin x+\cos x)+e^{3x}(3 \cos x-\sin x)$
 $=e^{3x}(8 \sin x+6 \cos x)$

이때, 방정식 $f''(x)=0$ 의 해가 $x=\alpha$ 이므로

$$e^{3\alpha}(8 \sin \alpha + 6 \cos \alpha) = 0$$

$$8 \sin \alpha + 6 \cos \alpha = 0 \quad (\because e^{3\alpha} > 0)$$

$$8 \sin \alpha = -6 \cos \alpha$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$$

답 ②

30 $g(x) = \ln f'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f''(x)}{f'(x)} \\ &= \frac{[1 + \{f(x)\}^2]'}{f'(x)} \quad (\because f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2) \\ &= \frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)} = 2f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \times 1 \quad (\because f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ③

31 닫힌구간 $[x, x + \Delta x]$ 에서의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} \{\cos(x + \Delta x) - \cos x\} + (e^{x+\Delta x} - e^x) \cos x}{\Delta x}$$

이므로

$$f'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} \{\cos(x + \Delta x) - \cos x\} + (e^{x+\Delta x} - e^x) \cos x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x+\Delta x} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &\quad + \cos x \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= e^x \times (\cos x)' + \cos x \times (e^x)'$$

$$= -e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$= -e^x (\sin x - \cos x)$$

$$f''(x) = -e^x (\sin x - \cos x) - e^x (\cos x + \sin x)$$

$$= -2e^x \sin x$$

$$\therefore f''(\pi) = -2e^\pi \sin \pi = 0$$

답 0

32 $f(x) = e^{ax} \sin bx$ 에서

$$f'(x) = ae^{ax} \sin bx + e^{ax} \times b \cos bx$$

$$= e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$f''(x) = ae^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

$$+ e^{ax} (ab \cos bx - b^2 \sin bx)$$

$$= e^{ax} \{(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx\}$$

$$f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) = 0 \text{에서}$$

$$e^{ax} \{(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx\}$$

$$- 4e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) + 13e^{ax} \sin bx = 0$$

$$e^{ax} \{(a^2 - b^2 - 4a + 13) \sin bx + 2b(a - 2) \cos bx\} = 0$$

.....㉠

$e^{ax} > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립하려면

$a^2 - b^2 - 4a + 13 = 0$ 이고 $2b(a - 2) = 0$ 이어야 한다.

$2b(a - 2) = 0$ 에서 $a = 2$ ($\because b > 0$)

이것을 $a^2 - b^2 - 4a + 13 = 0$ 에 대입하면

$$9 - b^2 = 0$$

$$\therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore a + b = 2 + 3 = 5$$

답 5

33 $f(x) = a^x - x \ln a$ 에서

$$f^{(1)}(x) = a^x \ln a - \ln a = (a^x - 1) \ln a$$

$$f^{(2)}(x) = (\ln a)^2 a^x$$

$$f^{(3)}(x) = (\ln a)^3 a^x$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (\ln a)^n a^x \quad (\text{단, } n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\therefore g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x)$$

$$= f^{(1)}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} f^{(n)}(x)$$

$$= (a^x - 1) \ln a + \sum_{n=2}^{\infty} (\ln a)^n a^x$$

$$= (a^x - 1) \ln a + a^x \{(\ln a)^2 + (\ln a)^3 + \dots\}$$

$$= (a^x - 1) \ln a + a^x \times \frac{(\ln a)^2}{1 - \ln a} \quad \begin{array}{l} \text{첫째항이 } (\ln a)^2, \\ \text{공비가 } \ln a \text{인} \\ \text{등비급수의 합} \end{array}$$

$$\left(\because \frac{1}{e} < a < e \text{에서 } -1 < \ln a < 1 \right)$$

$$\therefore g(0) = \frac{(\ln a)^2}{1 - \ln a}$$

답 ⑤

34 조건 ㉠에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 3\} = 0 \text{에서 } f(1) = 3$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(3) = 1$

조건 ㉡의 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f(x)}{x - 1} = 4$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f'(x) + f(x)\} = 0 \text{에서 } f'(1) + f(1) = 0$$

$$\therefore f'(1) = -3 \quad (\because f(1) = 3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f(x)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f(x) - f'(1) - f(1)}{x - 1}$$

$$(\because f'(1) + f(1) = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f'(x) - f'(1)}{x-1} + \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right\} \\
 &= f''(1) + f'(1) = 4 \\
 \therefore f''(1) &= 7 \quad (\because f'(1) = -3) \\
 \text{한편, 역함수의 미분법에 의하여 } g'(x) &= \frac{1}{f'(y)} \quad (y = g(x)) \\
 \text{이므로 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 g''(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{f'(y)} \right\} \\
 &= \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{f'(y)} \right\} \times \frac{dy}{dx} \\
 &= \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \times \frac{dy}{dx} \\
 &= \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \times g'(x) \\
 &= \frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^3} \quad (\because g'(x) = \frac{1}{f'(y)}) \\
 \therefore g''(3) &= -\frac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3} \quad (\because g(3) = 1) \\
 &= -\frac{7}{(-3)^3} \quad (\because f'(1) = -3, f''(1) = 7) \\
 &= \frac{7}{27} \\
 \text{따라서 } p &= 27, q = 7 \text{이므로} \\
 p + q &= 27 + 7 = 34
 \end{aligned}$$

답 34

35 해결단계

① 단계	조건 ㉞을 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.
② 단계	조건 ㉞와 역함수의 미분법을 이용하여 $f^{-1}(e), (f^{-1})'(e), g(e), g'(e)$ 의 값을 모두 구한다.
③ 단계	$h'(e)$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^2 + ax + b)e^x \text{에서 } f(1) = e \text{이므로} \\
 (1 + a + b)e &= e \quad \therefore a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠ \\
 f'(x) &= (2x + a)e^x + (x^2 + ax + b)e^x \\
 &= \{x^2 + (a+2)x + a+b\}e^x \\
 \text{에서 } f'(1) &= e \text{이므로} \\
 \{1 + (a+2) + a+b\}e &= e \\
 \therefore 2a + b &= -2 \quad \dots\dots ㉡ \\
 ㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a &= -2, b = 2 \\
 \therefore f(x) &= (x^2 - 2x + 2)e^x, f'(x) = x^2 e^x \\
 \text{한편, } h(x) &= f^{-1}(x)g(x) \text{에서} \\
 h'(x) &= (f^{-1})'(x)g(x) + f^{-1}(x)g'(x) \text{이므로} \\
 h'(e) &= (f^{-1})'(e)g(e) + f^{-1}(e)g'(e) \quad \dots\dots ㉢ \\
 \text{조건 ㉞에서 } f(1) &= e \text{이므로 } f^{-1}(e) = 1 \\
 \text{또한, } f'(1) &= e \text{이므로} \\
 (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{에서} \\
 (f^{-1})'(e) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{조건 ㉞의 } g(f(x)) &= f'(x) \text{에 } x=1 \text{을 대입하면} \\
 g(f(1)) &= f'(1) \quad \therefore g(e) = e \\
 \text{또한, } g'(f(x))f'(x) &= f''(x) \text{이므로 } x=1 \text{을 대입하면} \\
 g'(f(1))f'(1) &= f''(1) \quad \dots\dots ㉣ \\
 \text{이때, } f'(x) &= x^2 e^x \text{에서 } f''(x) = x(x+2)e^x \text{이므로} \\
 f''(1) &= 3e \\
 \text{즉, ㉣에서 } g'(e) \times e &= 3e \\
 \therefore g'(e) &= 3 \\
 \text{따라서 ㉢에서} \\
 h'(e) &= (f^{-1})'(e)g(e) + f^{-1}(e)g'(e) \\
 &= \frac{1}{e} \times e + 1 \times 3 = 4
 \end{aligned}$$

답 ④

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 53

01 3	02 $\frac{1}{256}$	03 $\frac{1}{5}$	04 $-\sqrt{2}$	05 ④
06 $\frac{1}{2}$	07 48			

01 해결단계

① 단계	조건 ㉞의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하고 $x=0$ 을 대입한다.
② 단계	$f'(x), g'(x)$ 를 구한 후, $f(0), f'(0), g(0), g'(0)$ 의 값을 구한다.
③ 단계	①단계에서 구한 식에 ②단계에서 구한 값을 대입하여 $h'(0)$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
 \text{조건 ㉞에서 } (p \circ f)(x) &= (h \circ g)(x) \text{이므로} \\
 p(f(x)) &= h(g(x)) \\
 \text{위의 식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 p'(f(x))f'(x) &= h'(g(x))g'(x) \\
 \text{위의 식의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면} \\
 p'(f(0))f'(0) &= h'(g(0))g'(0) \quad \dots\dots ㉠ \\
 f(x) &= \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \text{에서} \\
 f'(x) &= \frac{-\sin x(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} \\
 &\quad - \frac{\cos x(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} \\
 &= \frac{-1}{(\cos x + \sin x)^2} \\
 \therefore f(0) &= \frac{1}{1+0} = 1, f'(0) = \frac{-1}{1} = -1 \quad \dots\dots ㉡ \\
 g(x) &= 2 \tan x + \sin x \text{에서} \\
 g'(x) &= 2 \sec^2 x + \cos x \\
 \therefore g(0) &= 0 + 0 = 0, g'(0) = 2 + 1 = 3 \quad \dots\dots ㉢ \\
 ㉠, ㉡ \text{을 ㉢에 대입하면} \\
 p'(1) \times (-1) &= h'(0) \times 3 \\
 \text{이때, 조건 ㉞에서 } p'(1) &= -9 \text{이므로} \\
 3h'(0) &= 9 \quad \therefore h'(0) = 3
 \end{aligned}$$

답 3

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

합성함수의 미분법은 함수의 미분법에서 가장 기본이 되는 내용이다. 수능에서 출제되는 대부분의 미분 문제에서 이용되므로 확실히 이해하고 있도록 하자.

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ 는 $\frac{\Delta(f \circ g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \times \frac{\Delta g}{\Delta x}$ 를 의미하는 것으로 x 에 대한 $f \circ g$ 의 변화량은 $(g$ 에 대한 f 의 변화량) $\times$ (x 에 대한 g 의 변화량)임을 기억하도록 하자. 이 문제에서는 $(p \circ f)(x) = (h \circ g)(x)$ 가 주어져 있으므로 합성함수의 미분법을 이용하면 쉽게 풀 수 있다.

02 해결단계

① 단계	단한구간 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$ 에서 $f(x) > 0$ 임을 확인하고, $f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^{\frac{1}{x}}$ 의 양변에 밑이 e 인 자연로그를 취한 후, 양변을 미분하여 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 를 구한다.
② 단계	① 단계에서 구한 것을 이용하여 함수 $g(x)$ 를 구한 후, 함수 $g'(x)$ 를 구한다.
③ 단계	단한구간 $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$ 에서 함수 $g'(x)$ 가 최댓값을 갖는 x 의 값 k 를 구한 후, $f(k)$ 의 값을 구한다.

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{8} \text{에서 } \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2} - x \leq \frac{1}{4} \text{이므로 } f(x) > 0$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^{\frac{1}{x}} \text{의 양변에 자연로그를 취하면}$$

$$\ln f(x) = \ln \left(\frac{1}{2} - x\right)^{\frac{1}{x}}, \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{1}{x} \times \frac{-1}{\frac{1}{2} - x}$$

$$g(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{f'(x)}{f(x)} \text{이므로}$$

$$g(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} - x\right) \left\{ -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{-1}{x \left(\frac{1}{2} - x\right)} \right\}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - x\right) \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) - x$$

$$g'(x) = \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{2} - x\right) \times \frac{-1}{\frac{1}{2} - x} - 1$$

$$= \ln \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

$$\text{이때, } \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_e \left(\frac{1}{2} - x\right) \text{에서 (밑)} = e > 1 \text{이므로}$$

함수 $g'(x) = \ln \left(\frac{1}{2} - x\right)$ 는 $\frac{1}{2} - x$ 가 최대일 때, 즉 x 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 함수 $g'(x)$ 는 $x = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$k = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(k) &= f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{4}}} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{256}$

03 해결단계

① 단계	조건 (가)를 변형하여 $f'(x)$ 를 구한다.
② 단계	① 단계에서 구한 $f'(x)$ 를 미분하여 $f''(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$f''(10)$ 의 값을 구한다.

조건 (나)에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1) = f(1) + f(1) \quad \therefore f(1) = 0$$

또한, $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ 의 y 대신에 $1 + \frac{h}{x}$ 를 대입하면

$$f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) = \left(1 + \frac{h}{x}\right)f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{x}f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{x}f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{x}f(x) + xf\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x}f(x) + \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \right\} \\ &= \frac{1}{x}f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

이때, $\frac{h}{x} = t$ 로 놓으면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} \quad (\because f(1) = 0) \\ &= f'(1) \\ &= 2 \quad (\because \textcircled{7}) f'(1) = 2) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \textcircled{8} \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{x}f(x) + 2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2}f(x) + \frac{1}{x}f'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}f(x) + \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{x}f(x) + 2 \right\} \quad (\because \textcircled{9}) \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$\therefore f''(10) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

04 해결단계

① 단계	곡선 위의 한 점의 좌표를 t 를 사용하여 나타낸 후, 원점에서 그 점까지의 거리의 제곱을 $f(t)$ 라 하고 $f(t)$ 를 구한다.
② 단계	$f(t)$ 가 최소가 되는 t 를 구한 후, 점 P에서의 접선의 기울기를 구한다.

곡선 $x\sqrt{y}=a$ 위의 한 점의 x 좌표를 t ($t>0$)라 하면

$$t\sqrt{y}=a, \sqrt{y}=\frac{a}{t} \quad \therefore y=\frac{a^2}{t^2}$$

원점과 곡선 $x\sqrt{y}=a$ 위의 점 $(t, \frac{a^2}{t^2})$ 사이의 거리가 최소이면 거리의 제곱도 최소이므로 거리의 제곱을 $f(t)$ 라 하면

$$f(t)=t^2+\left(\frac{a^2}{t^2}\right)^2=t^2+\frac{a^4}{t^4}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t + \frac{-a^4 \times 4t^3}{(t^4)^2} \\ &= 2t - \frac{4a^4}{t^5} \\ &= \frac{2t^6 - 4a^4}{t^5} \end{aligned}$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } 2t^6 - 4a^4 = 0, t^6 = 2a^4$$

$$\therefore t = \sqrt[6]{2a^4} \quad (\because t>0)$$

$t>0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같으므로 함수 $f(t)$ 는 $t = \sqrt[6]{2a^4}$

에서 극소이자 최소이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(\sqrt[6]{2a^4}, \frac{a^2}{(\sqrt[6]{2a^4})^2})$, 즉

$(\sqrt[6]{2a^4}, \frac{a}{\sqrt[3]{4a^2}})$ 이다.

$x\sqrt{y}=a$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{y} + x \times \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0, \frac{x}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$$

그러므로 주어진 곡선의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2 \times \frac{a}{\sqrt[3]{4a^2}}}{\sqrt[6]{2a^4}} = -\frac{2a}{\sqrt[6]{8a^6}} = -\sqrt{2} \quad \text{답 } -\sqrt{2}$$

blacklabel 특강 참고

$$x\sqrt{y}=a \text{에서 } \sqrt{y}=\frac{a}{x} \quad \therefore y=\frac{a^2}{x^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2a^2}{x^3}$$

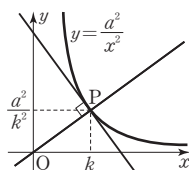
원점과 곡선 위의 한 점 사이의 거리가 최소가 되려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 위의 점 P에서의 접선이 직선 OP와 수직이어야 한다. 점 P의 좌표를 $(k, \frac{a^2}{k^2})$ 이라 하면

$$\left(-\frac{2a^2}{k^3}\right) \times \frac{k}{\frac{a^2}{k^2}} = -1, 2a^4 = k^6$$

$$\therefore k^3 = \sqrt{2}a^2$$

즉, 점 P에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2a^2}{k^3} = -\frac{2a^2}{\sqrt{2}a^2} = -\sqrt{2}$$



05 해결단계

① 단계	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 후, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} \right)$ 의 값을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	역함수의 미분법을 이용하여 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$$\text{ㄱ. } x=t+t^3+t^5+\dots+t^{2n-1},$$

$$y=t+t^2+t^3+\dots+t^{2n-1}$$

의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 1 + 3t^2 + 5t^4 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{1 + 2t + 3t^2 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}}{1 + 3t^2 + 5t^4 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{거짓})$$

ㄴ. $n=2$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 는 $x=t+t^3, y=t+t^2+t^3$ 으로 나타내어진다.

$f(2)=k$ (k 는 상수)라 하면

$$t+t^3=2 \text{에서}$$

$$t^3+t-2=0, (t-1)(t^2+t+2)=0$$

$$\therefore t=1 \quad (\because t^2+t+2>0)$$

즉, $k=f(2)=1+1+1=3$ 이므로

$$f'(2) = \frac{1}{(f^{-1})'(3)} \quad (\text{참})$$

ㄷ. $f^{-1}(0)=a$ (a 는 상수)라 하면 $f(a)=0$ 이므로

$$x=a, y=0$$

$$\text{이때, } y=0 \text{에서 } t+t^2+t^3+\dots+t^{2n-1}=0$$

$$\therefore t=0$$

즉, $a=0$ 이므로 $f(0)=0$

$$\therefore (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)}$$

ㄱ에서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2t + 3t^2 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}}{1 + 3t^2 + 5t^4 + \dots + (2n-1)t^{2n-2}}$$

$$\text{이므로 } t=0 \text{일 때 } \frac{dy}{dx} = 1$$

즉, $f'(0)=1$ 이므로

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

06 해결단계

① 단계	주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 특징을 파악한다.
② 단계	조건 ㄴ을 이용하여 $f(x)$ 와 $f(-x-2)$, $f'(x)$ 와 $f'(-x-2)$ 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	함수 $f(2x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 임을 이용하여 $g'(-\ln 4)$ 의 값을 구한 후, $\frac{1}{g'(-\ln 4)} - 4f(2)$ 의 값을 구한다.

조건 ㄱ에서 $x \geq -1$ 일 때,

$$f(x) = e^{2x-4} \ln(x+2) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x-4} \ln(x+2) + e^{2x-4} \times \frac{1}{x+2} \\ &= e^{2x-4} \left\{ 2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right\} \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

$x \geq -1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

이때, 조건 ㄴ의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(-1) + f(-1) = 0, 2f(-1) = 0$$

$$\therefore f(-1) = 0$$

또한, $f(-1+x) + f(-1-x) = 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고,

$x > -1$ 일 때 $f(x) > 0$, $x < -1$ 일 때 $f(x) < 0$ 이다.

$\dots\dots ㉒$

한편, 조건 ㄴ의 식에 x 대신에 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x) + f(-x-2) = 0 \quad \dots\dots ㉓$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'(-x-2) = 0 \quad \dots\dots ㉔$$

함수 $f(2x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(2x)) = x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(2x)) \times f'(2x) \times 2 = 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{g'(f(2x))} = 2f'(2x) \quad \dots\dots ㉕$$

이때, $f(2k) = -\ln 4$ (k 는 상수)라 하면

$$-\ln 4 < 0 \text{이므로 } 2k < -1 \quad (\because ㉒)$$

㉕에 $x=2k$ 를 대입하면 $f(2k) = -f(-2k-2)$ 이므로

$$f(-2k-2) = \ln 4$$

$-2k-2 > -1$ 이므로 조건 ㄱ에서

$$f(-2k-2) = e^{-4k-8} \ln(-2k)$$

$$\text{즉, } e^{-4k-8} \ln(-2k) = \ln 4 \text{이므로 } k = -2$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 위의 방정식을 만족시키는 k 의 값은 오직 하나뿐이다.

$$\therefore f(-4) = -\ln 4$$

또한, ㉔에 $x=-4$ 를 대입하면 $f'(-4) = f'(2)$

㉑에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2) = 2 \ln 4 + \frac{1}{4}$$

$$\therefore f'(-4) = 2 \ln 4 + \frac{1}{4}$$

따라서 ㉕에서 $\frac{1}{g'(f(-4))} = 2f'(-4)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'(-\ln 4)} &= 2 \left(2 \ln 4 + \frac{1}{4} \right) \\ &= 4 \ln 4 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

또한, $f(2) = e^{4-4} \ln(2+2) = \ln 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'(-\ln 4)} - 4f(2) &= 4 \ln 4 + \frac{1}{2} - 4 \ln 4 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

• 다른풀이 •

$x \geq -1$ 일 때 $f(x) = e^{2x-4} \ln(x+2)$

조건 ㄴ의 x 대신에 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x) + f(-x-2) = 0$$

$$\therefore f(-x-2) = -f(x)$$

$-x-2=t$ 로 놓으면 $x = -t-2$ 이므로

$$-t-2 \geq -1 \text{에서 } t \leq -1$$

즉, $t \leq -1$ 일 때

$$f(t) = f(-x-2)$$

$$= -f(x)$$

$$= -e^{2x-4} \ln(x+2)$$

$$= -e^{-2t-8} \ln(-t)$$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-2x-8} \ln(-x) & (x < -1) \\ e^{2x-4} \ln(x+2) & (x \geq -1) \end{cases} \quad \dots\dots ㉖$$

이므로

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-2x-8} \left\{ 2 \ln(-x) - \frac{1}{x} \right\} & (x < -1) \\ e^{2x-4} \left\{ 2 \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right\} & (x \geq -1) \end{cases} \quad \dots\dots ㉗$$

이때, $x > -1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고, 조건 ㄴ에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$x < -1$ 일 때 $f(x) < 0$

$x > -1$ 일 때 $f(x) > 0$ $\dots\dots ㉘$

한편, 함수 $f(2x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$g(f(2x)) = x$ 이고 이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(2x)) \times f'(2x) \times 2 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{g'(f(2x))} = 2f'(2x) \quad \dots\dots ㉙$$

$f(2k) = -\ln 4$ (k 는 상수)라 하면

$$-\ln 4 < 0 \text{이므로 } 2k < -1 \quad (\because ㉘)$$

즉, ㉙에서 $-e^{-4k-8} \ln(-2k) = -\ln 4$ 이므로

$$e^{4k-8} \ln(-2k) = \ln 4$$

이때, 위의 식에 $k = -2$ 를 대입하면 성립하고 함수

$f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 위의 방정식을 만족시키는 k 의 값은 -2 가 유일하다.

$$\therefore k = -2, f(-4) = -\ln 4$$

㉔에 $x = -2$ 를 대입하면 $\frac{1}{g'(f(-4))} = 2f'(-4)$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{g'(-\ln 4)} &= 2f'(-4) \\ &= 2 \times \left(2 \ln 4 + \frac{1}{4} \right) \quad (\because \textcircled{㉔}) \\ &= 4 \ln 4 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

또한, ㉕에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(2) = \ln 4$

$$\therefore \frac{1}{g'(-\ln 4)} - 4f(2) = \left(4 \ln 4 + \frac{1}{2} \right) - 4 \ln 4 = \frac{1}{2}$$

07 해결단계

① 단계	함수 $g(x)$ 의 미분가능하지 않은 점을 파악한다.
② 단계	사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$ 가 이계도 함수를 갖고, 이 함수가 연속이기 위한 조건을 파악한다.
③ 단계	②단계에서 파악한 조건을 만족시키는 함수 $f'(x)$ 를 구한 후, $f'(3)$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}g(x) &= |2 \sin(x+2|x|) + 1| \\ &= \begin{cases} |2 \sin 3x + 1| & (x \geq 0) \\ |-2 \sin x + 1| & (x < 0) \end{cases}\end{aligned}$$

이때, $2 \sin 3x + 1 = 0$ ($x \geq 0$)에서

$$2 \sin 3x = -1, \quad \sin 3x = -\frac{1}{2}$$

$$3x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \dots$$

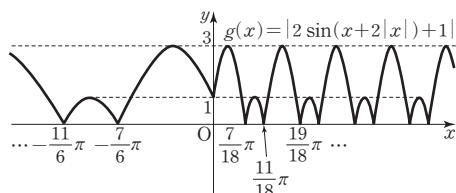
$$\therefore x = \frac{7}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{19}{18}\pi, \dots$$

또한, $-2 \sin x + 1 = 0$ ($x < 0$)에서

$$2 \sin x = 1, \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{7}{6}\pi, -\frac{11}{6}\pi, -\frac{19}{6}\pi, \dots$$

이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x=0$ 과 $g(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값에서 미분가능하지 않다. 따라서 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$ 가 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$ 를 갖고 이 함수 $h''(x)$ 가 연속이라면 두 함수 $h(x)$, $h'(x)$ 가 $x=0$ 과 $g(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값에서 연속이면서 미분가능해야 한다.

이때,

$$g(x) = \begin{cases} -2 \sin x + 1 & \left(-\frac{7}{6}\pi < x < 0\right) \\ 2 \sin 3x + 1 & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases}$$

에서

$$g'(x) = \begin{cases} -2 \cos x & \left(-\frac{7}{6}\pi < x < 0\right) \\ 6 \cos 3x & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2 \cos x) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 6 \cos 3x = 6$$

(i) 함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능할 때,

$$h(x) = f(g(x)) \text{에서 } h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) \text{이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(g(x))g'(x)$$

$$= f'(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x)$$

$$= f'(1) \times (-2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(g(x))g'(x)$$

$$= f'(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x)$$

$$= f'(1) \times 6$$

$$\text{에서 } f'(1) = 0$$

(ii) 함수 $h(x)$ 가 $g(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값에서 미분가능할 때,

$g(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 a 라 하면 (i)과 마찬가지로 $\lim_{x \rightarrow a^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h'(x)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(g(x))g'(x)$$

$$= f'(g(a)) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x)$$

$$= f'(0) \times \lim_{x \rightarrow a^-} g'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(g(x))g'(x)$$

$$= f'(g(a)) \times \lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)$$

$$= f'(0) \times \lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)$$

이때, $\lim_{x \rightarrow a^-} g'(x) = -\lim_{x \rightarrow a^+} g'(x)$ 이므로 $f'(0)=0$ 이어야 한다. 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.

(iii) 함수 $h(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능할 때,

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{에서}$$

$$h''(x) = f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)$$

이때, ㉔에서

$$g''(x) = \begin{cases} 2 \sin x & \left(-\frac{7}{6}\pi < x < 0\right) \\ -18 \sin 3x & \left(0 < x < \frac{7}{18}\pi\right) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} g''(x) = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h''(x) \text{이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h''(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)]$$

$$= f''(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \{g'(x)\}^2$$

$$+ f'(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} g''(x)$$

$$= f''(1) \times (-2)^2,$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} h''(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)] \\ &= f''(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \{g'(x)\}^2 \\ & \quad + f'(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} g''(x) \\ &= f''(1) \times 6^2 \\ & \text{에서 } f''(1)=0 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f'(1)=0, f'(0)=0, f''(1)=0$$

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이면 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x(x-1)(x-a) \\ &= 4x^3 - 4(a+1)x^2 + 4ax \quad (\text{단, } a \text{는 상수}) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8(a+1)x + 4a$$

$$f''(1)=0 \text{이므로 } 12 - 8(a+1) + 4a = 0$$

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f'(x) = 4x(x-1)^2$ 이므로

$$f'(3) = 4 \times 3 \times 2^2 = 48 \quad \text{답 48}$$

이것이 수능

p. 54

1 ④ 2 ④ 3 ② 4 30

1 해결단계

① 단계	주어진 극한을 변형하여 $f(x)$, $g(x)$ 의 미분계수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$f'(x)$, $g'(x)$ 를 각각 구한 후, ①단계에서 정리한 식의 값을 구한다.

$$f(x) = \sin^2 x, g(x) = e^x \text{이므로}$$

$$g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\sin^2 \frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{g(f(x)) - g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right] \\ &= g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f(x) = \sin^2 x, g(x) = e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x, g'(x) = e^x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{x - \frac{\pi}{4}} &= g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= g'\left(\frac{1}{2}\right) \times 1 \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

답 ④

2 해결단계

① 단계	주어진 식의 양변에 자연로그를 취한 후, x 에 대하여 미분한다.
② 단계	①단계에서 구한 식에 $x=\pi$ 를 대입하고, $g'(\pi) = e^\pi g(\pi)$ 를 이용하여 $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$ 의 값을 구한다.

$$g(x) = \frac{f(x) \cos x}{e^x} \text{의 양변에 자연로그를 취하면}$$

$$\ln |g(x)| = \ln \left| \frac{f(x) \cos x}{e^x} \right|$$

$$\ln |g(x)| = \ln |f(x)| + \ln |\cos x| - \ln |e^x|$$

$$\ln |g(x)| = \ln |f(x)| + \ln |\cos x| - x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{-\sin x}{\cos x} - 1$$

위의 식에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} - 1$$

$$\text{이때, } g'(\pi) = e^\pi g(\pi) \text{에서 } \frac{g'(\pi)}{g(\pi)} = e^\pi \text{이므로}$$

$$e^\pi = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} - 1$$

$$\therefore \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = e^\pi + 1$$

답 ④

3 해결단계

① 단계	$f'(x)$ 를 이용하여 함수 $f(x)$ 가 감소함수임을 파악한 후, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 교점이 직선 $y=-x$ 위에 있음을 파악한다.
② 단계	두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 교점은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점임을 파악한 후, α, β 를 구한다.
③ 단계	역함수의 미분법을 이용하여 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $g'(a)$ 를 구한다.
④ 단계	$f'(\beta)=2g'(a)$ 를 이용하여 $f'(\beta)$ 의 값을 구한 후, k 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3kx^2(x^2+1)-kx^3 \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{kx^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 한 교점을 (a, b) 라 하면 점 (b, a) 도 교점이고,

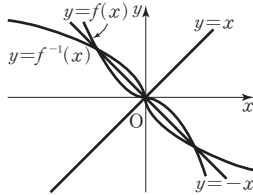
$$f(-x) = -\frac{k(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{kx^3}{x^2+1} = -f(x)$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(-a, -b)$ 를 지난다.

즉, 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 (b, a) , $(-a, -b)$ 를 지난다.

이때, $a \neq -b$ 이면 두 점 (b, a) , $(-a, -b)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{a - (-b)}{b - (-a)} = 1$ 인데 곡선 $y = f(x)$ 는 감소함수이므로 모순이다.

따라서 $a = -b$ 이고 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은 모두 직선 $y = -x$ 위에 있다.



두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 가 만나는 교점은 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점과 같고, 이 점의 x 좌표 중 가장 작은 값과 가장 큰 값이 각각 α , β 이므로

$$-\frac{kx^3}{x^2+1} = -x \text{에서 } kx^3 = x^3 + x$$

$$(k-1)x^3 - x = 0$$

$$(k-1)x\left(x + \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{k-1}} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

$$\text{즉, } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{k-1}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

$$h(x) = f(x - 2\beta) + 2\alpha \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(\beta) &= f(-\beta) + 2\alpha = f(\alpha) + 2\alpha \quad (\because \alpha = -\beta) \\ &= -\alpha + 2\alpha \quad (\because f(\alpha) = -\alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

함수 $h(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(\alpha) = \beta$

$$\text{또한, } g'(x) = \frac{1}{h'(g(x))} \text{에서}$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{h'(g(\alpha))} = \frac{1}{h'(\beta)} \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$h(x) = f(x - 2\beta) + 2\alpha \text{에서 } h'(x) = f'(x - 2\beta) \text{이므로}$$

$$h'(\beta) = f'(-\beta) \quad \dots\dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } g'(\alpha) = \frac{1}{h'(\beta)} = \frac{1}{f'(-\beta)}$$

$$\text{이때, } f(-x) = -f(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x)$$

$$\text{즉, } f'(-\beta) = f'(\beta) \text{이므로}$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{f'(\beta)}$$

$$f'(\beta) = 2g'(\alpha) \text{이므로 } f'(\beta) = \frac{2}{f'(\beta)}$$

$$\{f'(\beta)\}^2 = 2$$

$$\therefore f'(\beta) = -\sqrt{2} \quad (\because f(x) \text{는 감소함수})$$

$$f'(x) = -\frac{kx^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= -\frac{k \times \frac{1}{k-1} \times \left(\frac{1}{k-1} + 3\right)}{\left(\frac{1}{k-1} + 1\right)^2} \quad \left(\because \beta = \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \\ &= -\frac{k(3k-2)}{k^2} = -\frac{3k-2}{k} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{3k-2}{k} = -\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\sqrt{2}k = 3k - 2, (3 - \sqrt{2})k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{3 - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$$

답 ②

4

해결단계

① 단계	삼차함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하기 위한 a 의 값의 범위를 구한다.
② 단계	역함수의 미분법을 이용하여 $n \times g'(n) = 1$ 을 만족시키는 a 와 n 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	①, ②단계에서 구한 식과 a 의 값의 범위를 이용하여 a_n 을 구한 후, $\sum_{n=1}^{27} a_n$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 - ax - a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a$$

삼차함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax - a = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 3 \times (-a) \leq 0, a^2 + 3a \leq 0$$

$$a(a+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 0 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$\text{한편, } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{에서 } g'(n) = \frac{1}{f'(g(n))} \text{이므로}$$

$$\text{로 } n \times g'(n) = 1 \text{에서 } \frac{n}{f'(g(n))} = 1$$

$$\text{이때, } g(n) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = n \text{이고,}$$

$$\frac{n}{f'(k)} = 1 \quad \therefore f'(k) = n$$

$$f(k) = n, f'(k) = n \text{에서 } f(k) = f'(k) \text{이므로}$$

$$k^3 + ak^2 - ak - a = 3k^2 + 2ak - a$$

$$k^3 + (a-3)k^2 - 3ak = 0, k(k-3)(k+a) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=3 \text{ 또는 } k=-a$$

$$f'(k) = n \text{이므로}$$

$$f'(0) = n \text{ 또는 } f'(3) = n \text{ 또는 } f'(-a) = n$$

$$-a = n \text{ 또는 } 27 + 5a = n \text{ 또는 } a^2 - a = n$$

즉, 자연수 n 에 대하여 위의 식을 만족시키는 실수 a ($-3 \leq a \leq 0$)의 개수가 a_n 이다.

$$-3 \leq x \leq 0 \text{에서 세 함수 } y = -x,$$

$$y = 5x + 27, y = x^2 - x \text{의 그래프가 오$$

$$\text{른쪽 그림과 같으므로 이 그래프와 직}$$

$$\text{선 } y = n \text{의 교점의 개수는}$$

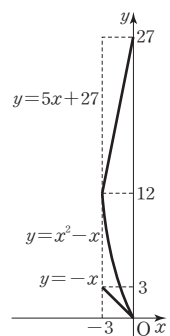
$$a_1 = a_2 = a_3 = 2,$$

$$a_4 = a_5 = a_6 = \dots = a_{27} = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{27} a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{27})$$

$$= 3 \times 2 + 24 \times 1 = 30$$

답 30



06 도함수의 활용(1)

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 56

01 ②

02 ②

03 2

04 ①

05 ④

06 96

07 ①

01 $f(x) = 2 \sin x$ 라 하면 $f'(x) = 2 \cos x$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

즉, 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y - \sqrt{3} = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \therefore y = -x + \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

따라서 $a = -1$, $b = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$ 이므로

$$ab = -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

답 ②

02 $f(x) = a - 2 \cos^2 x$, $g(x) = 2 \sin x$ 라 하고 두 곡선의 접점의 x 좌표를 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)라 하면 접점에서의 y 좌표가 서로 같으므로

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a - 2 \cos^2 t = 2 \sin t$$

$$\therefore a = 2 \cos^2 t + 2 \sin t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $f'(x) = 4 \sin x \cos x$, $g'(x) = 2 \cos x$ 이고 접점에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 4 \sin t \cos t = 2 \cos t$$

$$2 \cos t (2 \sin t - 1) = 0$$

$$\therefore \cos t = 0 \text{ 또는 } \sin t = \frac{1}{2}$$

(i) $\cos t = 0$ 일 때,

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos t = 0$ 을 만족시키는 t 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\sin t = \frac{1}{2}$ 일 때,

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{6}$ 이므로 ①에 대입하면

$$a = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{5}{2}$

답 ②

03 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ($x \neq 0$)에서

$$f'(x) = \frac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}$$

그런데 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $\frac{xe^x(x-2)}{x^4} \leq 0$, $x(x-2) \leq 0$ ($\because e^x > 0$, $x^4 > 0$)

$$\therefore 0 < x \leq 2 \quad (\because x \neq 0)$$

따라서 $a = 0$, $\beta = 2$ 이므로 $a + \beta = 2$

답 2

04 점 (t, e^{2t}) 과 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리가 $f(t)$ 이므로

$$f(t) = \frac{|t - e^{2t}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |t - e^{2t}|$$

$$g(t) = t - e^{2t} \text{이라 하면 } g'(t) = 1 - 2e^{2t}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } 1 - 2e^{2t} = 0$$

$$e^{2t} = \frac{1}{2}, 2t = \ln \frac{1}{2} \quad \therefore t = -\frac{1}{2} \ln 2$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	$-\frac{1}{2} \ln 2$	...
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $g(t)$ 는 $t = -\frac{1}{2} \ln 2$ 에서 극댓값

$$g\left(-\frac{1}{2} \ln 2\right) = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$$

를 갖는다.

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} |g(t)|$ 이므로 두 함수

$y = f(t)$, $y = g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(t)$ 의 극솟값은

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2} \ln 2\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left|g\left(-\frac{1}{2} \ln 2\right)\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left|-\frac{1}{2}(1 + \ln 2)\right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \ln 2) \end{aligned}$$

답 ①

05 $f(x) = xe^x$ 에서

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$$

$$\neg. f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \quad (\because e^x > 0)$$

이때, $f''(-1) = e^{-1} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)

$$\neg. x < -1 \text{에서 } x+1 < 0 \text{이므로 } f'(x) < 0$$

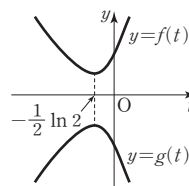
즉, 함수 $f(x)$ 는 $x < -1$ 에서 감소한다. (참)

$$\neg. x < -2 \text{에서 } x+2 < 0 \text{이므로 } f''(x) < 0$$

즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x < -2$ 에서 위로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④



06 $f(x) = \frac{2}{x^2+b}$ 라 하면 점 $(2, a)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이므로 $f(2)=a, f''(2)=0$

$$f(2)=a \text{에서 } \frac{2}{4+b}=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2+b} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \times 2x}{(x^2+b)^2} = -\frac{4x}{(x^2+b)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x^2+b)^2 + 4x \times 2(x^2+b) \times 2x}{(x^2+b)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2+b) + 16x^2}{(x^2+b)^3}$$

$$= \frac{12x^2 - 4b}{(x^2+b)^3}$$

$$f''(2)=0 \text{에서 } \frac{12 \times 4 - 4b}{(4+b)^3} = 0$$

$$48 - 4b = 0 \quad (\because b > 0) \quad \therefore b = 12$$

$b=12$ 를 ①에 대입하여 풀면

$$a = \frac{2}{4+12} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{12}{\frac{1}{8}} = 12 \times 8 = 96$$

답 96

07 주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...	5	...	6	...	8	...
$f'(x)$	-		-	0	+		+		+
$f''(x)$	-	0	+		+	0	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\swarrow$	극소	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ㄱ. 위의 표에서 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 극소이자 최소이다. (참)

ㄴ. $f'(8)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=8$ 에서 미분가능하다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 구간 $(0, 3)$ 에서 위로 볼록하고 구간 $(3, 5)$ 에서 아래로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 57~61

01 4	02 ⑤	03 15	04 ②	05 ②
06 1	07 ⑤	08 ④	09 ②	10 $\frac{e^x}{1-e^{2x}}$
11 ⑤	12 ⑤	13 432	14 ③	15 $\frac{1}{2}$
16 ③	17 ③	18 21	19 ③	20 2
21 $\sqrt{3}e^3$	22 18	23 ①	24 32	25 ③
26 ④	27 13	28 ②	29 120	30 8
31 ④	32 $5-2\sqrt{5}$	33 ④		

01 $x=e^t+1, y=e^{2t}+e^t$ 에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t, \frac{dy}{dt}=2e^{2t}+e^t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t}+e^t}{e^t} = 2e^t+1$$

주어진 곡선 위의 점 $(e^a+1, e^{2a}+e^a)$ 에서의 접선의 기울기는 $2e^a+1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (e^{2a}+e^a) = (2e^a+1)(x - (e^a+1))$$

이 직선의 y 절편이 $g(a)$ 이므로

$$g(a) = -(2e^a+1)(e^a+1) + e^{2a}+e^a$$

$$= -e^{2a}-2e^a-1$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0} \frac{g(a)+4}{a^2-a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-e^{2a}-2e^a+3}{a^2-a}$$

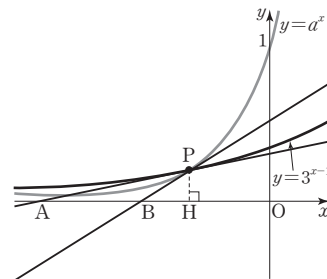
$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-(e^a+3)(e^a-1)}{a(a-1)}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-(e^a+3)}{a-1} \times \frac{e^a-1}{a} \right)$$

$$= \frac{-4}{-1} \times 1 = 4$$

답 4

02 두 곡선 $y=3^{x-1}, y=a^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 P의 x 좌표를 k ($k < 0$)라 하면

$y=3^{x-1}$ 에서 $y'=3^{x-1} \ln 3$ 이므로 점 $P(k, 3^{k-1})$ 에서의 접선의 기울기는 $3^{k-1} \ln 3$ 이다.

즉, 접선의 방정식은

$$y - 3^{k-1} = 3^{k-1} \ln 3 \times (x - k)$$

이고, 이 직선이 x 축과 만나는 점이 A이므로 점 A의 x 좌표는

$$0 - 3^{k-1} = 3^{k-1} \ln 3 \times (x - k)$$

$$-1 = (x - k) \ln 3 \quad (\because 3^{k-1} > 0)$$

$$x = k - \frac{1}{\ln 3} \quad \therefore A\left(k - \frac{1}{\ln 3}, 0\right)$$

또한, $y=a^x$ 에서 $y'=a^x \ln a$ 이므로 점 $P(k, a^k)$ 에서의 접선의 기울기는 $a^k \ln a$ 이다.

즉, 접선의 방정식은

$$y - a^k = a^k \ln a \times (x - k)$$

이고, 이 직선이 x 축과 만나는 점이 B이므로 점 B의 x 좌표는

$$0 - a^k = a^k \ln a \times (x - k)$$

$$-1 = (x - k) \ln a \quad (\because a^k > 0)$$

$$x = k - \frac{1}{\ln a} \quad \therefore B\left(k - \frac{1}{\ln a}, 0\right)$$

$$\therefore \overline{AB} = \left(k - \frac{1}{\ln a}\right) - \left(k - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln a}$$

이때, $H(k, 0)$ 이므로

$$\overline{AH} = k - \left(k - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3}$$

$\triangle PAB : \triangle PAH = 2 : 3$ 이고, 두 삼각형 PAB, PAH 의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 3$ 에서 $3\overline{AB} = 2\overline{AH}$ 이므로

$$3\left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{2}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{3}{\ln a}$$

$$\ln a = 3 \ln 3 = \ln 3^3$$

$$\therefore a = 3^3 = 27$$

답 ⑤

03 $g(x) = f(x^2 - 2x)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$g(3) = f(3) = 3$$

$g(x) = f(x^2 - 2x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$$

위의 식에 $x=3$ 을 대입하면

$$g'(3) = 4f'(3) = 4 \times 3 = 12$$

곡선 $y = g(x)$ 가 직선 $y = h(x)$ 와 점 $(3, g(3))$ 에서 접하므로 직선 $y = h(x)$ 는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(3, g(3))$ 에서의 접선이다.

$$\text{즉, } y - g(3) = g'(3)(x - 3) \text{에서}$$

$$y - 3 = 12(x - 3) \quad \therefore y = 12x - 33$$

따라서 $h(x) = 12x - 33$ 이므로

$$h(4) = 12 \times 4 - 33 = 48 - 33 = 15$$

답 15

04 $f(x) = (ax + 1)2^x$ 이라 하면

$$f'(x) = a \times 2^x + (ax + 1) \times 2^x \ln 2$$

$$= 2^x \{(a \ln 2)x + \ln 2 + a\}$$

점점의 좌표를 $(t, (at + 1)2^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 2^t \{(a \ln 2)t + \ln 2 + a\}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - (at + 1)2^t = 2^t \{(a \ln 2)t + \ln 2 + a\}(x - t)$$

$$\therefore y = 2^t \{(a \ln 2)t + \ln 2 + a\}(x - t) + (at + 1)2^t$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = 2^t \{(a \ln 2)t + \ln 2 + a\} \times (-t) + (at + 1)2^t$$

$$2^t \{(a \ln 2)t^2 + (\ln 2)t - 1\} = 0$$

이때, $2^t > 0$ 이므로

$$(a \ln 2)t^2 + (\ln 2)t - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y = (ax + 1)2^x$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 이차방정식 ①이 중근을 가져야 한다.

①의 판별식을 D 라 하면

$$D = (\ln 2)^2 - 4 \times a \ln 2 \times (-1) = 0 \text{에서}$$

$$(\ln 2)^2 + 4a \ln 2 = 0, \ln 2(\ln 2 + 4a) = 0$$

$$\therefore 4a = -\ln 2 \quad (\because \ln 2 \neq 0)$$

답 ②

05 $f(x) = (a - x)e^x$ 에서

$$f'(x) = (-1) \times e^x + (a - x) \times e^x \times 2x$$

$$= e^x(-2x^2 + 2ax - 1)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 구간에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다. 즉,

$$e^x(-2x^2 + 2ax - 1) \leq 0 \text{에서}$$

$$2x^2 - 2ax + 1 \geq 0 \quad (\because e^x > 0)$$

이차방정식 $2x^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2 \leq 0 \text{에서 } (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

답 ②

06 $f(x) = a \cos x + x$ 에서 $f'(x) = -a \sin x + 1$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가하려면

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{일 때 } f'(x) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

이때, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-1 < \sin x < 1$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + 1 < \underbrace{-a \sin x + 1}_{= f'(x)} < a + 1$$

$$\text{즉, } -a + 1 \geq 0 \text{이어야 하므로 } a \leq 1$$

$$\therefore 0 < a \leq 1 \quad (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

답 1

07 ㄱ. $h(3) = (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 5$ (거짓)

ㄴ. $h(x) = f(g(x))$ 에서 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$h'(2) = f'(g(2))g'(2)$$

이때, 주어진 그래프에서 $2 < g(2) < 3$ 이므로

$$f'(g(2)) < 0 \text{이고, } g'(2) < 0 \text{이므로 } h'(2) > 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. 구간 $(3, 4)$ 에서 $0 < g(x) < 1$ 이므로 $f'(g(x)) > 0$

$$\text{이고, } g'(x) < 0 \text{이므로 } h'(x) < 0$$

즉, 함수 $h(x)$ 는 구간 $(3, 4)$ 에서 감소한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

08 $f(x) = x^2 + a \ln(x + 1)$ 에서

$$f'(x) = 2x + \frac{a}{x + 1} = \frac{2x^2 + 2x + a}{x + 1}$$

$$\text{ㄱ. } g(x) = 2x^2 + 2x + a = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + a \text{라 하자.}$$

$$a = \frac{1}{4} \text{이면 } x > -1 \text{에서}$$

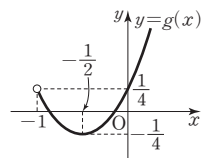
$$\text{함수 } g(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{의}$$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{이때, } -\frac{2 + \sqrt{2}}{4} < x < -\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \text{에서 } g(x) < 0 \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x + 1} < 0 \quad (\because x > -1)$$

즉, 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다. (거짓)



ㄴ. ㄴ에서 $g(x)=2x^2+2x+a$ 이므로

$$g(-1)=g(0)=a<0$$

$x>-1$ 에서 함수 $y=g(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x

축과 한 점에서 만나므로 교점의 x 좌표를 a 라 하면

$x=a$ 의 좌우에서 $g(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바

뀐다.

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x+1} \text{이므로 } f'(a)=\frac{g(a)}{a+1}=0 \text{이고,}$$

$x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바

뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 오직 하나의 극솟값

을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 극값의 개수가 2이려면 방정식

$f'(x)=0$, 즉 $g(x)=0$ 이 $x>-1$ 에서 서로 다른 두

실근을 갖고 이 값의 좌우에서 $f'(x)$, 즉 $g(x)$ 의 부

호가 바뀌어야 한다.

$$\text{즉, } g\left(-\frac{1}{2}\right)<0, g(-1)>0 \text{이어야 하므로}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \text{에서 } -\frac{1}{2}+a<0 \quad \therefore a<\frac{1}{2}$$

$$g(-1)>0 \text{에서 } a>0$$

$$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극값의 개수가 2가 되도록 하는

a 의 값의 범위는 $0<a<\frac{1}{2}$ 이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

09 이차함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값 0을 가지므로 $f(x)$

의 최고차항의 계수를 k 라 하면

$$k<0 \text{이고 } f(x)=k(x-a)^2$$

$e^x f(x)=g(x)$ 라 하면 $g(x)=ke^x(x-a)^2$ 에서

$$g'(x)=ke^x(x-a)^2+ke^x \times 2(x-a)$$

$$=ke^x(x-a)(x-a+2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=a-2 \text{ 또는 } x=a$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $g(x)=e^x f(x)$ 는 $x=a-2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$a=a-2$$

$$\frac{f(x)}{x}=h(x) \text{라 하면 } h(x)=\frac{k(x-a)^2}{x} \quad (x \neq 0) \text{에서}$$

$$h'(x)=\frac{2k(x-a) \times x - k(x-a)^2}{x^2}$$

$$=\frac{k(x-a)(x+a)}{x^2}$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-a \text{ 또는 } x=a$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가지므로

$$\beta=a$$

$$\therefore \beta-a=a-(a-2)=2$$

답 ②

10 $f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$ 에서

$$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$$

$$=-2e^{-x}\sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x=0 \quad (\because e^{-x}>0)$$

$$\therefore x=\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots \quad (\because x>0)$$

$$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$$

$$=2e^{-x}(\sin x-\cos x)$$

(i) $x=2k\pi$ (k 는 자연수)일 때,

$$\text{양수 } f''(2k\pi)=2e^{-2k\pi}(\underbrace{\sin 2k\pi}_{=0}-\underbrace{\cos 2k\pi}_{=-1})$$

$$=-2e^{-2k\pi}<0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2k\pi$ 에서 극대이다.

(ii) $x=(2k-1)\pi$ (k 는 자연수)일 때, $f''((2k-1)\pi)<0$ 이면 그래프가 위로 볼록하므로

$$f''((2k-1)\pi)$$

$$=2e^{-(2k-1)\pi}(\underbrace{\sin (2k-1)\pi}_{=0}-\underbrace{\cos (2k-1)\pi}_{=-1})$$

$$\text{양수 } =2e^{-(2k-1)\pi}>0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=(2k-1)\pi$ 에서 극소이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$ 에서 극솟값을 가지므로 $f''((2k-1)\pi)<0$ 이면 그래프가 아래로 볼록하므로

$$x_i=(2i-1)\pi \quad (\text{단, } i=1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore f(x_i)=e^{-(2i-1)\pi}\{\underbrace{\sin (2i-1)\pi}_{=0}+\underbrace{\cos (2i-1)\pi}_{=-1}\}$$

$$=-e^{-(2i-1)\pi}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)=-e^{-\pi}-e^{-3\pi}-e^{-5\pi}-\cdots$$

$$=\frac{-\frac{1}{e^{\pi}}}{1-\frac{1}{e^{2\pi}}}=\frac{e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}$$

$$\text{답 } \frac{e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}$$

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $f(x)$ 를 미분하여 $f'(x)=0$ 이 되는 x 의 값을 구한 경우	40%
(나)	$f''(x)$ 의 부호를 이용하여 (가)에서 구한 x 의 값 중 극솟값을 갖는 x_n 을 찾은 경우	40%
(다)	$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ 의 값을 구한 경우	20%

11 점 $P(2t, \frac{2}{t})$ ($t>0$)와 점 $A(a, a)$ 사이의 거리의 제곱

이 $f(t)$ 이므로

$$f(t)=(2t-a)^2+\left(\frac{2}{t}-a\right)^2$$

$$=4t^2-4at+\frac{4}{t^2}-\frac{4a}{t}+2a^2$$

$$f'(t)=8t-4a-\frac{8}{t^3}+\frac{4a}{t^2}$$

$$= \frac{8t^4 - 4at^3 + 4at - 8}{t^3}$$

$$= \frac{4(t-1)(t+1)(2t^2 - at + 2)}{t^3}$$

$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $2t^2 - at + 2=0$ ($\because t>0$)
 이때, $g(t)=2t^2 - at + 2$ 라 하면 함수 $f(t)$ 의 극값의 개
 수가 1이 되려면 이차방정식 $g(t)=0$ 이 중근을 갖거나 1
 과 1이 아닌 양수를 실근으로 갖거나 $t>0$ 에서 실근을 갖
 지 않아야 한다.

(i) 이차방정식 $g(t)=0$ 이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 에서
 $a^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$, $a^2 = 16$
 $\therefore a = -4$ 또는 $a = 4$

(ii) 이차방정식 $g(t)=0$ 이 1과 1이 아닌 양수를 실근으
 로 갖는 경우

$g(1)=0$ 이어야 하므로 $2 - a + 2 = 0$
 $\therefore a = 4$

$g(t)=2t^2 - 4t + 2 = 2(t-1)^2$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 중
 근을 갖는다.

(iii) 이차방정식 $g(t)=0$ 이 $t>0$ 에서 실근을 갖지 않는
 경우

이차함수 $y=g(t)$ 의 그래프가
 오른쪽 그림의 ㉠ 또는 ㉡과
 같아야 한다.

㉠ : 이차함수 $y=g(t)$ 의 그래
 프의 축이 y 축의 왼쪽에 위치하면 되고, 이 이차함
 수의 그래프의 축의 방정식은 $t = \frac{a}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{4} < 0 \text{에서 } a < 0$$

㉡ : 이차방정식 $g(t)=0$ 이 허근을 가지면 되므로

$$D < 0 \text{에서 } a^2 - 16 < 0$$

$$(a+4)(a-4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 4$$

㉠, ㉡에서 이차방정식 $g(t)=0$ 이 $t>0$ 에서 실근을 갖
 지 않기 위한 a 의 값의 범위는 $a < 4$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a \leq 4$$

답 ⑤

12 ㄱ. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$f(0)=0$ 이고 $x \neq 0$ 에서 $f(x)>0$ 이므로 $x=0$ 에서
 극솟값을 갖는다.

즉, $f'(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의
 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 0이다.

이때, $p(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))$ 라 하면

$$p'(x)=g'(f(x))f'(x) \text{이므로}$$

$$p'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(0) \times 0 = 0$$

즉, 함수 $y=p(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, 4)$ 에서의 접
 선의 기울기는 0이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=p(x)$, 즉 $y=f(x)$ 와
 $y=(g \circ f)(x)$ 는 $x=0$ 에서의 접선의 기울기가 같
 다. (참)

ㄴ. $g(x)=(x^2+3x+4)e^{-x}$ 에서

$$g'(x)=(2x+3)e^{-x} - (x^2+3x+4)e^{-x}$$

$$= -(x^2+x+1)e^{-x}$$

이므로

$$p'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

$$= -f'(x)[\{f(x)\}^2 + f(x) + 1]e^{-f(x)}$$

이때, $\{f(x)\}^2 + f(x) + 1 > 0$, $e^{-f(x)} > 0$ 이고, 함수
 $f(x)$ 가 감소하는 구간에서 $f'(x) < 0$ 이므로 같은 구
 간에서 $p'(x) > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간에서 함수 $p(x)$,
 즉 $(g \circ f)(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄷ. $h(x)=(g \circ f)(x) - f(x) = p(x) - f(x)$ 라 하면

$$h'(x)$$

$$= p'(x) - f'(x)$$

$$= -f'(x)[\{f(x)\}^2 + f(x) + 1]e^{-f(x)} - f'(x)$$

.....㉠

이때, ㉠에서

$$f'(0)=p'(0)=0 \text{이므로 } h'(0)=0$$

또한, ㉠에서 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극솟값을 가지
 므로 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으
 로 바뀌고, ㉠에서

$[\{f(x)\}^2 + f(x) + 1]e^{-f(x)} + 1 > 0$ 이므로 $x=0$ 의
 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀐다.

따라서 함수 $h(x)$, 즉 $(g \circ f)(x) - f(x)$ 는 $x=0$
 에서 극댓값을 갖는다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

13 해결단계

① 단계	조건 (나)와 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않을 수 있음을 이용하여 함수 $ f(x) $ 가 $x=0$ 에서 미분가능하지 않음을 파악한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고, 극솟값이 -27 이 되도록 하는 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $h(x)$ 의 극댓값 M 과 극솟값 m 을 각각 구한 후, $-\frac{Mm}{16}$ 의 값을 구한다.

조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가
 능하므로

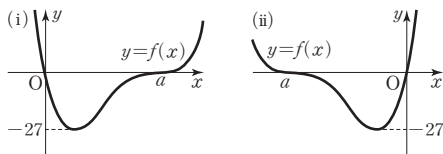
함수 $f(|x|)$ 가 $x=p$ 에서 미분가능하면 함수 $|f(x)|$ 도
 $x=p$ 에서 미분가능하고, 함수 $f(|x|)$ 가 $x=p$ 에서 미
 분가능하지 않으면 함수 $|f(x)|$ 도 $x=p$ 에서 미분가능
 하지 않다.㉠

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 의 극
 솟값이 $-27 < 0$ 이고, 오직 한 점에서만 극값을 가지므로
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서
 만나야 한다. 이 두 점의 x 좌표를 a, b ($a < b$)라 하면 방
 정식 $f(x)=0$ 은 두 실근 a, b 를 갖는다.

그런데 $f'(a)=0$ 이고, $f'(b)=0$ 이면 사차함수 $f(x)$ 의 극값이 3개가 되어 극솟값이 2개 존재하게 되므로 모순이다. 즉, $f'(a) \neq 0$ 또는 $f'(b) \neq 0$ 이고, 함수 $|f(x)|$ 는 이 점에서 미분가능하지 않다. ($\because$ 첨삭 (2))

즉, 함수 $|f(x)|$ 가 미분가능하지 않는 점이 존재하고, ㉠에 의하여 함수 $f(|x|)$ 도 이 점에서 미분가능하지 않다. 그런데 사차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(|x|)$ 가 미분가능하지 않으면 그 점의 x 좌표는 0이어야 한다. 즉, 두 함수 $f(|x|)$, $|f(x)|$ 모두 $x=0$ 에서만 미분가능하지 않다.

$\therefore f(0)=0, f'(0) \neq 0$ ($\because$ 첨삭 (2))㉡
 $b=0$ 이라 하면 방정식 $f(x)=0$ 의 0이 아닌 다른 한 실근은 a 이고 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $x=a$ 에서 중근을 가져야 한다. ($\because$ 첨삭 (1)의 (ii))
 또한, ㉡에서 $x=0$ 은 방정식 $f(x)=0$ 의 중근이 아니므로 $f(x)=x(x-a)^3$



이때, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능해야 하므로 $g'(0)$ 의 값이 존재해야 한다.

(i) $a > 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(|x|)+|f(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x)+f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ -\frac{f(-x)-f(0)}{-x} + \frac{f(x)-f(0)}{x} \right\} \\ &= -f'(0) + f'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(|x|)+|f(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(x)}{x} = 0 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{x}$ 이므로 $g'(0)$ 의 값이 존재한다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(|x|)+|f(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(-x)-f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ -\frac{f(-x)-f(0)}{-x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \right\} \\ &= -f'(0) - f'(0) = -2f'(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(|x|)+|f(x)|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)+f(x)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2f'(0) \end{aligned}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)}{x}$ 이려면

$-2f'(0) = 2f'(0)$ 에서 $f'(0)=0$ 이어야 한다.

그러나 $f'(0) \neq 0$ 이므로 ㉡에 모순이다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-a)^3$ ($a > 0$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-a)^3 + x \cdot 3(x-a)^2 \\ &= (x-a)^2(4x-a) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=\frac{a}{4}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{4}$ 에서 극솟값 $f(\frac{a}{4}) = -\frac{27}{256}a^4$ 을 가

지므로 조건 (가)에서

$$-\frac{27}{256}a^4 = -27, a^4 = 256$$

$\therefore a=4$ ($\because a > 0$)

즉, $f(x)=x(x-4)^3$, $f'(x)=4(x-4)^2(x-1)$ 이므로

$h(x)=f(x)e^x$ 에서

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)e^x + f(x)e^x \\ &= 4(x-4)^2(x-1)e^x + x(x-4)^3e^x \\ &= (x+2)(x-2)(x-4)^2e^x \end{aligned}$$

$h'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...	4	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$h(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $h(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값

$$h(-2) = \frac{f(-2)}{e^2} = \frac{432}{e^2}, x=2 \text{에서 극솟값}$$

$h(2) = f(2)e^2 = -16e^2$ 을 가지므로

$$M = \frac{432}{e^2}, m = -16e^2$$

$$\therefore -\frac{Mm}{16} = -\frac{1}{16} \times \frac{432}{e^2} \times (-16e^2) = 432 \quad \text{답 } 432$$

(첨삭)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가

(1) $x=p$ 에서 미분가능하면

(i) $f(p) > 0$ 또는 $f(p) < 0$ 이거나

(ii) $f(p)=0$ 이면 $f'(p)=0$ 이어야 한다.

즉, $f(p)=0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=p$ 에서 중근을 가져야 한다.

(2) $x=p$ 에서 미분가능하지 않으면 $f(p)=0, f'(p) \neq 0$

14 $0 < a < b < c < \frac{\pi}{2}$ 인 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \text{를 만족시키려면 곡선}$$

$y=f(x)$ 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 위로 볼록해야 하므로 구

간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 $f''(x) < 0$ 이어야 한다.

$$\neg. f(x) = -x^3 - 3x + 2 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 - 3$$

$$\therefore f''(x) = -6x$$

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

$$\neg. f(x) = x + \frac{4}{x} \text{에서 } f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$\therefore f''(x) = \frac{8}{x^3}$$

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록하다.

$$\neg. f(x) = x + \cos x \text{에서 } f'(x) = 1 - \sin x$$

$$\therefore f''(x) = -\cos x$$

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록하다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

15 $x < y$ 인 임의의 두 실수 x, y 에 대하여

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

이러면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록해야 하므로 $f''(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \text{에서}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \times \left(\frac{1}{x-2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$f''(x)$$

$$= \frac{2}{(x-2)^3} e^{\frac{1}{x-2}} - \frac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}} \times \left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$$

$$= \left\{\frac{2}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}\right\} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$= \frac{2x-3}{(x-2)^4} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)^4} e^{\frac{1}{x-2}} \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$2x-3 \geq 0 \left(\because e^{\frac{1}{x-2}} > 0, (x-2)^4 > 0\right)$$

$$2x \geq 3 \quad \therefore \frac{3}{2} \leq x < 2 \left(\because x < 2\right)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $\frac{3}{2} \leq x < 2$ 에서 아래로

볼록하므로 $\beta - \alpha$ 의 최댓값은 $\beta = 2, \alpha = \frac{3}{2}$ 일 때이다.

$$\text{즉, } \beta - \alpha \text{의 최댓값은 } 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

답 1/2

16 $\neg$. 조건 ㉞의 $f(x) = f(-x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = -f'(-x)$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(0) = -f'(0), 2f'(0) = 0$$

$$\therefore f'(0) = 0$$

$$g(x) = e^{f(x)} \text{에서 } g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\therefore g'(0) = e^{f(0)} \times f'(0) = 0 \text{ (참)}$$

$\neg$. $h(x) = f'(x)$ 라 하면 $h'(x) = f''(x)$ 이므로 조건 ㉞에 의하여 $h'(0) = 0$ 이고 $x \neq 0$ 이면 $h'(x) > 0$

또한, $\neg$ 에서 $f'(0) = 0$ 이므로 $h(0) = 0$

즉, 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 원점을 지나고 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$x < 0$ 에서 $h(x) < 0, x > 0$ 에서 $h(x) > 0$ 이다.

따라서 $x=0$ 의 좌우에서 함수 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖는다. (참)

$\neg$. $\neg$ 에서 $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ 이므로

$$g''(x) = f''(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} \times f'(x)$$

$$= e^{f(x)} [f''(x) + \{f'(x)\}^2]$$

$$g''(0) = e^{f(0)} [f''(0) + \{f'(0)\}^2]$$

$$= e^{f(0)} \times (0+0^2) = 0$$

$$(\because \text{㉞에서 } f''(0) = 0, \neg \text{에서 } f'(0) = 0)$$

그런데 $x \neq 0$ 에서 $f''(x) > 0$ ($\because$ 조건 ㉞)이고,

$$\{f'(x)\}^2 > 0 \text{이므로 } x \neq 0 \text{에서 } g''(x) > 0$$

따라서 $x=0$ 의 좌우에서 $g''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 점 $(0, g(0))$ 은 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이 아니다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

17 $\neg$. $f(x) = x^n \ln x$ 에서

$$f'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^n \times \frac{1}{x}$$

$$= x^{n-1} (n \ln x + 1)$$

$$\therefore f'(1) = 1 \times (n \ln 1 + 1) = 1 \text{ (참)}$$

$\neg$. $\neg$ 에서 $f'(x) = x^{n-1} (n \ln x + 1)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } n \ln x + 1 = 0 \left(\because x > 0\right)$$

$$\ln x = -\frac{1}{n} \quad \therefore x = e^{-\frac{1}{n}}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$e^{-\frac{1}{n}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = e^{-\frac{1}{n}}$ 에서 극솟값

$$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln e^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{en} \text{을 가지므로}$$

$$g(n) = -\frac{1}{en}$$

$$g(n) < -\frac{1}{10} \text{에서 } -\frac{1}{en} < -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{en} > \frac{1}{10}$$

$$en < 10 \quad \therefore n < \frac{10}{e} = 3. \times \times \times$$

즉, 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 n 은 2, 3의 2개이다. (거짓)

ㄷ. $f'(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1)$ 에서

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}(n \ln x + 1) + x^{n-1} \times \frac{n}{x}$$

$$= x^{n-2}\{n(n-1) \ln x + 2n-1\}$$

$f''(x) = 0$ 에서 $n(n-1) \ln x + 2n-1 = 0$ ($\because x > 0$)

$$\ln x = \frac{1-2n}{n(n-1)} \quad \therefore x = e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$$

$x = e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$$\alpha_n = e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}} = e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}} = e^{-\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\therefore \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{e^{-\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)}}{e^{-\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)}} = e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}}$$

$$= e^{\frac{-2}{n^2-1}} < 1 \quad \left(\because -\frac{2}{n^2-1} < 0\right)$$

$\therefore \alpha_n < \alpha_{n+1}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

18 $f(x) = 12 - \frac{12x^2}{x^2 + 2x + 3}$ 에서

$$f'(x) = -\frac{24x(x^2 + 2x + 3) - 12x^2(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$= -\frac{24x^2 + 72x}{(x^2 + 2x + 3)^2} = -\frac{24x(x+3)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

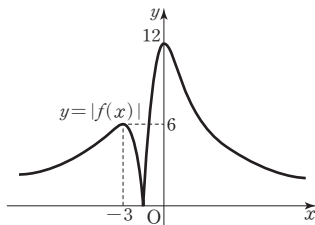
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극솟값 $f(-3) = -6$, $x = 0$ 에서 극댓값 $f(0) = 12$ 를 갖는다.

또한, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수가 $g(t)$ 이므로

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t = 0) \\ 4 & (0 < t < 6) \\ 3 & (t = 6) \\ 2 & (6 < t < 12) \\ 1 & (t = 12) \\ 0 & (t > 12) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = 0, 6, 12$ 에서 불연속이므로

$$n = 3, t_1 = 0, t_2 = 6, t_3 = 12$$

$$\therefore n + t_1 + t_2 + t_3 = 3 + 0 + 6 + 12 = 21$$

답 21

19 $g(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$ 라 하면

$$g'(x) = -\frac{x^2 + 1 - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= -\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$g'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

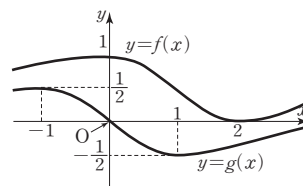
x	...	-1	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	/	극대	\	극소	/

함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 $g(-1) = \frac{1}{2}$, $x = 1$ 에

서 극솟값 $g(1) = -\frac{1}{2}$ 을 갖고,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{이다.}$$

이때, $f(x) = g(x-1) + \frac{1}{2}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같고 그 그래프는 다음 그림과 같다.



$$f(a) = af'(b) \text{에서 } \frac{f(a)}{a} = f'(b) \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이고 $f'(b)$ 는 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다.

$$x > 0 \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{이므로 } \frac{f(a)}{a} \geq 0$$

즉, ①에서 $f'(b) \geq 0$ 이어야 하므로 양수 b 의 최솟값은 2이다.

$$\therefore m = 2$$

$$\therefore 10f\left(\frac{1}{m}\right) = 10f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 10 \times \left\{ \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + 1} + \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 10 \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 4 + 5 = 9$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 20 \quad y &= \frac{ax^3 - 2ax^2 + (2a+2)x - 2}{x^2 - 2x + 2} \\
 &= \frac{ax(x^2 - 2x + 2) + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \\
 &= ax + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 y' &= a + \frac{2(x^2 - 2x + 2) - (2x - 2)^2}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\
 &= a - \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

주어진 함수가 극값을 가지려면 방정식

$$a - \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} = 0, \text{ 즉 } a = \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} \text{가 중근이}$$

아닌 실근을 가져야 한다.㉠

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x^2 - 2x + 2)^2} \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(4x - 4)(x^2 - 2x + 2)^2 - (2x^2 - 4x) \times 2(x^2 - 2x + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^4} \\
 &= \frac{(4x - 4)(x^2 - 2x + 2) - (2x^2 - 4x)(4x - 4)}{(x^2 - 2x + 2)^3} \\
 &= \frac{-4(x - 1)(x^2 - 2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^3}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 - \sqrt{3} \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

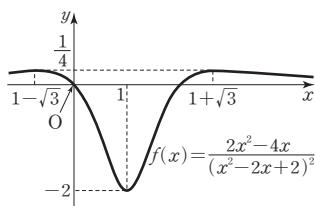
x	...	$1 - \sqrt{3}$	...	1	...	$1 + \sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x = 1 - \sqrt{3}$, $x = 1 + \sqrt{3}$ 에서 극댓값

$$f(1 - \sqrt{3}) = f(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{4},$$

$x = 1$ 에서 극솟값 $f(1) = -2$ 를 갖고,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



㉠을 만족시키려면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a$ 가 접하지 않으면서 만나야 하므로

$$-2 < a < \frac{1}{4}$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

답 2

21 두 점 A, B에서의 각각의 접선 및 x 축으로 둘러싸인 도형이 정삼각형이므로 두 접선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 또는 $-\sqrt{3}$ 이어야 한다.

점 A에서의 접선의 기울기를 $\sqrt{3}$, 점 B에서의 접선의 기울기를 $-\sqrt{3}$ 이라 하자.

이때, 이것을 만족시키는 두 점 A, B가 오직 하나씩만 존재해야 하므로 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 $f'(a) = \sqrt{3}$, $f'(b) = -\sqrt{3}$ 을 만족시키는 a, b 는 각각 하나뿐이어야 한다.㉠

$$f(x) = kxe^{2x-1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= ke^{2x-1} + kxe^{2x-1} \times 2 \\
 &= k(2x+1)e^{2x-1}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2} (\because e^{2x-1} > 0)$$

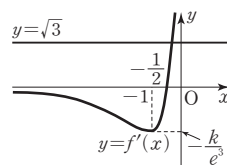
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 2ke^{2x-1} + k(2x+1)e^{2x-1} \times 2 \\
 &= 4k(x+1)e^{2x-1}
 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = -1 (\because e^{2x-1} > 0)$$

함수 $f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f''(x)$	-	0	+		+
$f'(x)$	↘	극소	↗	0	↗

함수 $f'(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 $f'(-1) = -\frac{k}{e^3}$ 를 갖고, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



㉠에서 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y = \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$ 은 각각 한 점에서 만나야 하므로 위의 그림에서 함수 $f'(x)$ 의 극솟값이 $-\sqrt{3}$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } -\sqrt{3} = -\frac{k}{e^3} \text{에서 } k = \sqrt{3}e^3 \quad \text{답 } \sqrt{3}e^3$$

$$22 \quad f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2} \times x^2 - \ln x^2 \times 2x}{x^4} = \frac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2(1 - \ln x^2) = 0 (\because x \neq 0)$$

$$\ln x^2 = 1, x^2 = e$$

$$\therefore x = -\sqrt{e} \text{ 또는 } x = \sqrt{e}$$

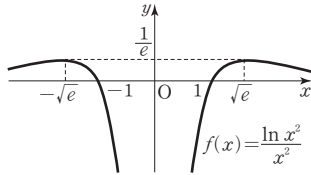
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{e}$	...	(0)	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$	+	0	-		+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘		↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x = \pm\sqrt{e}$ 에서 극댓값 $f(\pm\sqrt{e}) = \frac{1}{e}$ 을 갖

는다.

이때, $f(-x)=f(x)$ 가 성립하므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=-\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $|f(x)-t|$ 의 미분가능하지 않은 점의 개수가 $g(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점 중에서 접하지 않는 것의 개수이다.

$$\therefore g(t) = \begin{cases} 2 & (t \leq 0) \\ 4 & (0 < t < \frac{1}{e}) \\ 0 & (t \geq \frac{1}{e}) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 가 $t=0$, $t=\frac{1}{e}$ 에서 미분가능하지 않으므로 삼차함수 $h(x)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $t=0$, $t=\frac{1}{e}$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{t \rightarrow 0-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow 0-} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(0) \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow 0-} h(g(t)) = h(g(0))$$

$$t \rightarrow 0- \text{일 때 } g(t)=2, t \rightarrow 0+ \text{일 때 } g(t)=4 \text{이므로 } h(2)=h(4) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}-} (h \circ g)(t) = (h \circ g)\left(\frac{1}{e}\right) \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}-} h(g(t)) = h\left(g\left(\frac{1}{e}\right)\right)$$

$$t \rightarrow \frac{1}{e}- \text{일 때 } g(t)=4, t \rightarrow \frac{1}{e}+ \text{일 때 } g(t)=0 \text{이므로 } h(4)=h(0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

즉, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $h(0)=h(4)=h(2)$ 이고, $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$h(x)=x(x-2)(x-4)+a \text{ (} a \text{는 상수)}$$

라 할 수 있다.

$$\therefore h(5)-h(3)=(15+a)-(-3+a)=18 \quad \text{답 18}$$

- 23** $a=-1$ 이면 $0 \leq x < 2$ 에서 $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖지 않는다.
그런데 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로 모순이다. 즉, $a \neq -1$ 이다.

$$f(x)=\frac{(x-a)^2}{x+1} \text{에서}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-a)(x+1)-(x-a)^2}{(x+1)^2} \\ =\frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=-a-2$$

- (i) $a < -a-2$, 즉 $a < -1$ 일 때,

$x=-a-2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-a-2$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{또한, } \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) > 0 \text{이고 함수}$$

$$f(x) \text{는 주기가 2이므로 } \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) > 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\text{따라서 } 0 < -a-2 < 2 \text{에서 } 2 < -a < 4$$

$$\therefore -4 < a < -2$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=-3$

- (ii) $a > -a-2$, 즉 $a > -1$ 일 때,

$x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\text{또한, (i)과 마찬가지로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) > 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 극댓값을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } 0 < a < 2 \text{이고, } a \text{는 정수이므로}$$

$$a=1$$

- (i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 a 의 값은

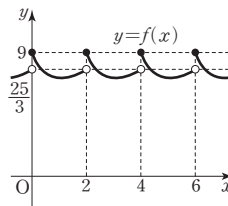
$$-3 \text{ 또는 } 1 \text{이므로 그 곱은}$$

$$-3 \times 1 = -3$$

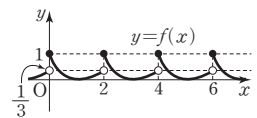
답 ①

blacklabel 특강 참고

$a=-3$ 과 $a=1$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 각각 그려 보면 다음의 [그림 1], [그림 2]와 같고 모두 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.



[그림 1]



[그림 2]

24 $f(x)=\frac{kx}{x^2+4}$ 에서

$$f'(x)=\frac{k(x^2+4)-kx \times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-k(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2kx(x^2+4)^2+k(x^2-4) \times 2(x^2+4) \times 2x}{(x^2+4)^4} \\ =\frac{-2kx(x^2+4)+4kx(x^2-4)}{(x^2+4)^3} \\ =\frac{2kx(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-2\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2\sqrt{3}$$

함수 $f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

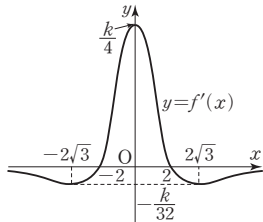
x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f'(x)$ 는 $x=\pm 2\sqrt{3}$ 에서 극솟값 $f'(\pm 2\sqrt{3})=-\frac{k}{32}$,

$x=0$ 에서 극댓값 $f'(0)=\frac{k}{4}$ 를 갖는다.

또한, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 이므로 함수

$y=f'(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f'(x)$ 의 최댓값은 $f'(0)=\frac{k}{4}$, 최솟값은

$f'(\pm 2\sqrt{3})=-\frac{k}{32}$ 이고 그 곱이 -8 이므로

$$\frac{k}{4} \times \left(-\frac{k}{32}\right) = -8 \text{에서 } k^2 = 32^2$$

$\therefore k=32$ ($\because k>0$)

답 32

25

$f(x)=e^{3x}-6e^{2x}+11e^x-6$ 에서

$$f'(x)=3e^{3x}-12e^{2x}+11e^x$$

$e^x=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \ln 3$ 에서 $1 \leq t \leq 3$ 이고 $x=\ln t$ 이므로

$$f(\ln t)=t^3-6t^2+11t-6$$

$$f'(\ln t)=3t^3-12t^2+11t$$

$$g(x)=|f(x)|+\frac{1}{3}|f'(x)-2e^x| \text{이므로}$$

$$g(\ln t)=G(t) \quad (1 \leq t \leq 3) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} G(t) &= |f(\ln t)| + \frac{1}{3}|f'(\ln t) - 2t| \\ &= |t^3 - 6t^2 + 11t - 6| + \frac{1}{3}|3t^3 - 12t^2 + 11t - 2t| \\ &= |t^3 - 6t^2 + 11t - 6| + \frac{1}{3}|3t^3 - 12t^2 + 9t| \\ &= |(t-1)(t-2)(t-3)| + |t(t-1)(t-3)| \end{aligned}$$

(i) $1 \leq t < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} G(t) &= (t-1)(t-2)(t-3) - t(t-1)(t-3) \\ &= t^3 - 6t^2 + 11t - 6 - t^3 + 4t^2 - 3t \\ &= -2t^2 + 8t - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(t) &= -4t + 8 \\ &= -4(t-2) \end{aligned}$$

$1 \leq t < 2$ 에서 $G'(t) > 0$

(ii) $2 \leq t \leq 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} G(t) &= -(t-1)(t-2)(t-3) - t(t-1)(t-3) \\ &= -t^3 + 6t^2 - 11t + 6 - t^3 + 4t^2 - 3t \\ &= -2t^3 + 10t^2 - 14t + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(t) &= -6t^2 + 20t - 14 \\ &= -2(t-1)(3t-7) \end{aligned}$$

$$G'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{7}{3} \quad (\because 2 \leq t \leq 3)$$

(i), (ii)에서 함수 $G(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	...	2	...	$\frac{7}{3}$	...	3
$G'(t)$		+		+	0	-	
$G(t)$	0	↗	2	↗	$\frac{64}{27}$	↘	0

함수 $G(t)$ 는 $t=\frac{7}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{64}{27}$, $t=1$ 또는 $t=3$ 에서 최솟값 0을 가지므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{64}{27} + 0 = \frac{64}{27}$

답 ③

26

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2} \quad (-2 < x < 2)$ 에서

$$f'(x)=1+\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \neg. f'(x)=0 \text{에서 } \sqrt{4-x^2}-x=0 \\ \sqrt{4-x^2}=x \quad (x \geq 0) \quad (\because \sqrt{4-x^2} \geq 0) \end{aligned}$$

$$4-x^2=x^2, 2x^2=4 \quad \therefore x=\sqrt{2} \quad (\because x \geq 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-2)	...	$\sqrt{2}$	...	(2)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 극값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. ㄱ에서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 이다. (참)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } f'(x) &= 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{에서} \\ f''(x) &= -\frac{\sqrt{4-x^2}-x \times \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} \\ &= -\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = -\frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$-2 < x < 2$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 변곡점을 갖지 않는다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

27

$g(x)=e^{3 \sin x+2}$ 에서

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -3 \leq 3 \sin x \leq 3$$

$$-1 \leq 3 \sin x + 2 \leq 5$$

$$(\text{밑})=e > 1 \text{이므로 } e^{-1} \leq e^{3 \sin x+2} \leq e^5$$

$$\therefore \frac{1}{e} \leq g(x) \leq e^5$$

이때, $g(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{e} \leq t \leq e^5$ 이고,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t)$$

$$f(t) = t \ln \sqrt{t} - t = \frac{1}{2} t \ln t - t \text{에서}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2} t \times \frac{1}{t} - 1$$

$$= \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

$\frac{1}{e} \leq t \leq e^5$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{e}$	...	e	...	e^5
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$-\frac{3}{2e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}e^5$

함수 $f(t)$ 는 $t=e^5$ 에서 최댓값 $\frac{3}{2}e^5$, $t=e$ 에서 최솟값

$-\frac{1}{2}e$ 를 가지므로 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$$\frac{3}{2}e^5 \times \left(-\frac{1}{2}e\right) = -\frac{3}{4}e^6$$

따라서 $p=4$, $q=3$, $r=6$ 이므로

$$p+q+r=4+3+6=13$$

답 13

28 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점이 존재하면 함수 $h(x)$ 의 최솟값이 0이어야 한다.

그런데 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $f(1)=e$ 를 가지므로 모순이다.

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 만나지 않고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$ 이어야 한다.

$$\therefore h(x) = |f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

$$\text{그런데 } h(1) = f(1) \text{이므로 } f(1) - g(1) = f(1)$$

$$\therefore g(1) = 0$$

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수이므로

$$g(x) = -(x-1)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면

$$h(x) = e^x + (x-1)(x-a)$$

$$= e^x + x^2 - (a+1)x + a$$

$$h'(x) = e^x + 2x - (a+1)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서}$$

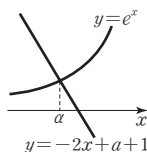
$$e^x = -2x + a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 이 방정식의 근을 $x=a$ 라 하고

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이면서 최소이므로 $a=1$



즉, 방정식 ①의 근이 $x=1$ 이므로 이것을 ①에 대입하면

$$e = -2 + a + 1 \quad \therefore a = e + 1$$

따라서 $g(x) = -(x-1)(x-e-1)$ 이므로

$$g(e) = -(e-1)(e-e-1) = e-1$$

답 ②

29 $f(x) = k(x^2+x)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = k(2x+1)e^{-x} - k(x^2+x)e^{-x}$$

$$= k(-x^2+x+1)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, k(t^2+t)e^{-t})$ 이라 하면 접선의 기울기

는 $f'(t) = k(-t^2+t+1)e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - k(t^2+t)e^{-t} = k(-t^2+t+1)e^{-t}(x-t)$$

$$\therefore y = k(-t^2+t+1)e^{-t}x + kt^3e^{-t}$$

이 직선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = kt^3e^{-t}$$

$$g'(t) = 3kt^2e^{-t} - kt^3e^{-t} = ke^{-t}t^2(3-t)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=3 \quad (\because e^{-t} > 0)$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	3	...
$g'(t)$	+	0	+	0	-
$g(t)$	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$g(3) = \frac{27k}{e^3}$$

이때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 27이므로 $\frac{27k}{e^3} = 27$

$$\therefore k = e^3$$

따라서 $f(x) = (x^2+x)e^{-x+3}$ 이므로

$$f(2)f(4) = 6e \times 20e^{-1} = 120$$

답 120

30 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, (2t+a)e^{-\frac{4}{a}t})$ 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 A, B이므로

$$A(t, 0), B(0, (2t+a)e^{-\frac{4}{a}t})$$

삼각형 OAB의 넓이를 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = \frac{1}{2}t(2t+a)e^{-\frac{4}{a}t} \quad (\because t > 0, (2t+a)e^{-\frac{4}{a}t} > 0)$$

$$= \left(t^2 + \frac{1}{2}at\right)e^{-\frac{4}{a}t}$$

$$g'(t) = \left(2t + \frac{1}{2}a\right)e^{-\frac{4}{a}t} + \left(t^2 + \frac{1}{2}at\right)e^{-\frac{4}{a}t} \times \left(-\frac{4}{a}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{a}t^2 + \frac{1}{2}a\right)e^{-\frac{4}{a}t}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } -\frac{4}{a}t^2 + \frac{1}{2}a = 0 \quad (\because e^{-\frac{4}{a}t} > 0)$$

$$t^2 = \frac{a^2}{8} \quad \therefore t = \frac{a}{2\sqrt{2}} \quad (\because t > 0, a > 0)$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $g(t)$ 는 $t = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \therefore a = 8$$

답 8

- 31 점 $P(t, \cos t)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $f(t)$ 인 원이 직선 $x+2y=0$ 에 접하므로 점 P와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리가 $f(t)$ 이다. 즉,

$$f(t) = \frac{|t+2\cos t|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}|t+2\cos t| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$g(t) = t+2\cos t$ 라 하면 $g'(t) = 1-2\sin t$

$g'(t) = 0$ 에서 $1-2\sin t = 0$

$$\sin t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots (\because t > 0)$$

$t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

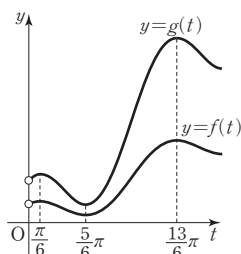
t	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{13\pi}{6}$	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+	0	-
$g(t)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(t)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$,

$x = \frac{5\pi}{6}$ 에서 극솟값 $g(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$,

$x = \frac{13\pi}{6}$ 에서 극댓값 $g(\frac{13\pi}{6}) = \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3}, \dots$ 을 갖는다.

①에서 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}|g(t)|$ 이므로 함수 $y = g(t)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y = f(t)$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{5\pi}{6}$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left| g\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right| \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{5}\pi - 6\sqrt{15}}{30} \end{aligned}$$

답 ④

- 32 $\overline{BP} = a$ m ($0 < a < 3$)이므로 $\overline{PC} = 3 - a$ (m)

$\angle APB = \alpha$, $\angle DPC = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{5}{a}, \tan \beta = \frac{2}{3-a}$$

이때, $\theta = \pi - (\alpha + \beta)$ 이므로

$$\tan \theta = \tan \{\pi - (\alpha + \beta)\} = -\tan (\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{\frac{5}{a} + \frac{2}{3-a}}{1 - \frac{5}{a} \times \frac{2}{3-a}}$$

$$= \frac{-3a+15}{a^2-3a+10}$$

$$f(a) = \frac{-3a+15}{a^2-3a+10} \quad (0 < a < 3) \text{라 하면}$$

$$f'(a) = \frac{-3(a^2-3a+10) - (-3a+15)(2a-3)}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$= \frac{3a^2-30a+15}{(a^2-3a+10)^2} = \frac{3(a^2-10a+5)}{(a^2-3a+10)^2}$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } a^2-10a+5=0 \quad (\because (a^2-3a+10)^2 \neq 0)$$

$$\therefore a = 5 - 2\sqrt{5} \quad (\because 0 < a < 3)$$

$0 < a < 3$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$5-2\sqrt{5}$	...	(3)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	극대	↘	

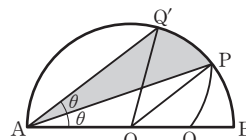
따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = 5 - 2\sqrt{5}$ 에서 극대이면서 최대이므로 두 지점 B, P 사이의 거리는 $(5 - 2\sqrt{5})$ m이다.

$$\therefore a = 5 - 2\sqrt{5}$$

답 $5 - 2\sqrt{5}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\angle APB = \alpha$, $\angle DPC = \beta$ 라 하고 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 를 α 를 이용하여 나타낸 경우	20%
(나)	$\theta = \pi - (\alpha + \beta)$ 임을 이용하여 $\tan \theta$ 를 α 를 이용하여 나타낸 경우	30%
(다)	미분을 이용하여 $\tan \theta$ 의 값이 최대가 되는 a 의 값을 구한 경우	50%

33



위의 그림과 같이 색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB 위에 있게 되는 점을 Q'이라 하자.

색종이를 접었으므로 도형 AQP와 도형 AQ'P는 합동이다. 즉, $S(\theta)$ 는 도형 APQ'의 넓이와 같으므로 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ'과 현 AQ'으로 둘러싸인 도형의 넓이를 빼 것이다.

$\overline{AB} = 2$ 에서 반원의 반지름의 길이는 1이고,

$$\angle PAO = \angle APO = \theta \text{에서 } \angle AOP = \pi - 2\theta,$$

$$\angle Q'AO = \angle AQ'O = 2\theta \text{에서 } \angle AOQ' = \pi - 4\theta \text{이므로}$$

$$S(\theta) = \{(\text{부채꼴 AOP의 넓이}) - \triangle AOP\}$$

$$- \{(\text{부채꼴 AOQ'의 넓이}) - \triangle AOQ'\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \times 1^2 \times (\pi - 2\theta) - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin (\pi - 2\theta) \right\}$$

$$- \left\{ \frac{1}{2} \times 1^2 \times (\pi - 4\theta) - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin (\pi - 4\theta) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta$$

$$\begin{aligned}
 S'(\theta) &= 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 1 \\
 &= 2(2 \cos^2 2\theta - 1) - \cos 2\theta + 1 \\
 &= 4 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 \\
 S'(\theta) = 0 \text{에서 } 4 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 &= 0 \\
 \cos 2\theta = x \text{라 하면 이차방정식 } 4x^2 - x - 1 &= 0 \text{의 근은} \\
 x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \text{이므로} \\
 \cos 2\theta = \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \text{ 또는 } \cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \\
 \text{그런데 } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \text{ 즉 } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \text{에서} \\
 0 < \cos 2\theta < 1 \text{이므로 } \cos 2\theta &= \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \\
 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{에서 } \cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \text{을 만족시키는 } \theta \text{를 } \theta_0 \\
 \text{이라 하면} \\
 \theta < \theta_0 \text{일 때 } S'(\theta) > 0, \\
 \theta > \theta_0 \text{일 때 } S'(\theta) < 0 \\
 \text{이므로 } S(\theta) \text{는 } \theta = \theta_0 \text{에서 극대이면서 최대이다.} \\
 \text{따라서 } \alpha = \theta_0 \text{이므로} \\
 \cos 2\alpha = \cos 2\theta_0 = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}
 \end{aligned}$$

답 ④

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 62

01 1189 02 $2\sqrt{3}$ 03 148 04 $-\frac{15}{2}$ 05 1
06 ⑤

01 해결단계

① 단계	$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 를 구한 후, $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.
② 단계	$\frac{dy}{dx}$ 를 이용하여 주어진 곡선이 극솟값을 갖는 t 의 값을 구한 후 a_n, b_n 을 각각 구한다.
③ 단계	$\sum_{n=1}^{10} \left\{ a_n^2 + \left(b_n - \frac{\pi}{6} \right)^2 \right\}$ 의 값을 구하여 p, q 의 값을 각각 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

$x = -n \cos nt, y = nt - \sin 2nt$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = n^2 \sin nt, \frac{dy}{dt} = n - 2n \cos 2nt$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{n - 2n \cos 2nt}{n^2 \sin nt} \\
 &= \frac{1 - 2 \cos 2nt}{n \sin nt}
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{에서 } 1 - 2 \cos 2nt = 0 \quad (\because n \sin nt \neq 0)$$

$$\cos 2nt = \frac{1}{2}, 2nt = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2n} \text{에서 } 0 < 2nt < \pi \right)$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{6n}$$

주어진 곡선은 $t = \frac{\pi}{6n}$ 에서 $\frac{dy}{dx} = 0$ 이고, $t = \frac{\pi}{6n}$ 의 좌우

에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $t = \frac{\pi}{6n}$ 에서

극솟값을 갖는다.

$$\therefore a_n = -n \cos \left(n \times \frac{\pi}{6n} \right) = -n \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}n,$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= n \times \frac{\pi}{6n} - \sin \left(2n \times \frac{\pi}{6n} \right) = \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{10} \left\{ a_n^2 + \left(b_n - \frac{\pi}{6} \right)^2 \right\} &= \sum_{n=1}^{10} \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}n \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4} \right) \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{3}{4} \times 10 \\
 &= \frac{1155}{4} + \frac{30}{4} = \frac{1185}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=1185$ 이므로

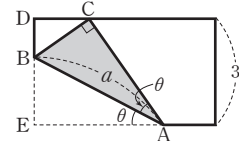
$$p+q=4+1185=1189$$

답 1189

02 해결단계

① 단계	$\overline{AB}$ 를 θ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	함수 $f(\theta)$ 를 구한 후, 함수 $\frac{1}{f(\theta)}$ 을 구한다.
③ 단계	함수 $\frac{1}{f(\theta)}$ 이 최댓값을 갖는 θ 의 값 α 를 구한 후, $f(\alpha)$ 의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 점 B를 포함한 변의 양 끝 점을 D, E라 하고 $\overline{AB}=a$ 라 하자.



종이를 접었으므로 $\angle BAC = \angle BAE = \theta$

$$\triangle ABE \text{에서 } \overline{BE} = a \sin \theta$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{BC} = a \sin \theta, \overline{AC} = a \cos \theta$$

$$\angle ABE = \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \theta \text{이므로}$$

$$\angle DBC = \pi - 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2\theta$$

$$\triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = \overline{BC} \cos 2\theta = a \sin \theta \cos 2\theta$$

$$\text{이때, } \overline{DE} = 3 \text{이므로 } \overline{BD} + \overline{BE} = 3$$

$$a \sin \theta \cos 2\theta + a \sin \theta = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{\sin \theta (\cos 2\theta + 1)}$$

$$= \frac{3}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} \quad (\because \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1)$$

삼각형 ACB의 넓이가 $f(\theta)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times a \sin \theta \times a \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \times \left(\frac{3}{2 \sin \theta \cos^2 \theta} \right)^2 \\ &= \frac{9}{8 \sin \theta \cos^3 \theta} \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{f(\theta)} = \frac{8}{9} \sin \theta \cos^3 \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{f(\theta)} \right\}' &= \frac{8}{9} \{ \cos \theta \cos^3 \theta + \sin \theta \times 3 \cos^2 \theta \times (-\sin \theta) \} \\ &= \frac{8}{9} (\cos^4 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \\ &= \frac{8}{9} (\cos^4 \theta - 3 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)) \\ &= \frac{8}{9} (4 \cos^4 \theta - 3 \cos^2 \theta) \\ &= \frac{8}{9} \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{f(\theta)} \right\}' = 0 \text{에서 } \cos^2 \theta = 0 \text{ 또는 } 4 \cos^2 \theta - 3 = 0 \\ \therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = 0 \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

그런데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos \theta < 1$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

함수 $\frac{1}{f(\theta)}$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\left\{ \frac{1}{f(\theta)} \right\}'$		+	0	-	
$\frac{1}{f(\theta)}$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $\frac{1}{f(\theta)}$ 은 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이면서 최대이므로

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\alpha) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{9}{8 \sin \frac{\pi}{6} \cos^3 \frac{\pi}{6}} = \frac{9}{8 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3}$

03 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한다.
② 단계	함수 $g(t)$ 를 구한 후, 불연속이 되는 t 의 값을 구한다.
③ 단계	$n(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ 의 값을 구하여 p, q 의 값을 각각 구한 후, $p^2 + q^2$ 의 값을 구한다.

$f(x) = ax^2 + bx + \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2ax + b + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 2a - \frac{1}{x^2}$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 2a + b + 1 = 0$$

조건 (나)에 의하여 변곡점은 $x=2$ 일 때이므로

$$f''(2) = 0 \text{에서 } 2a - \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

이것을 $2a + b + 1 = 0$ 에 대입하면 $b = -\frac{5}{4}$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{x} \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	2	...	4	...
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+
$f''(x)$		-		-	0	+		+
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\swarrow$	극소	$\nearrow$

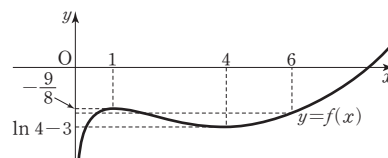
함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $f(1) = -\frac{9}{8}$,

$x=4$ 일 때 극솟값 $f(4) = \ln 4 - 3$ 을 갖는다.

또한, 조건 (가)에서 $f(1) > f(6)$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음

그림과 같다.



점 $(6, t)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 개수가

$g(t)$ 이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 점 $(6, t)$ 가 곡선 $y=f(x)$

위에 있을 때,

$$t = f(6) = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + \ln 6$$

$$= \ln 6 - 3$$

이때, 점 $(6, t)$ 에서 곡선

$y=f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

(ii) 점 $(6, t)$ 가 곡선

$y=f(x)$ 의 변곡점에서의

접선 위에 있을 때,

$$f(2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \ln 2$$

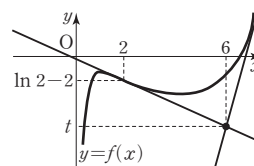
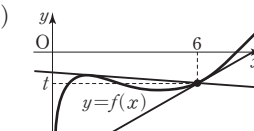
$$= \ln 2 - 2,$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

이므로 변곡점 $(2, \ln 2 - 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (\ln 2 - 2) = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + \ln 2$$



점 $(6, t)$ 가 이 직선 위에 있으므로

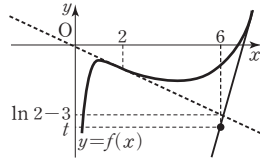
$$t = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \ln 2$$

$$= \ln 2 - 3$$

이때, 점 $(6, t)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

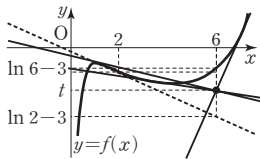
(iii) ① $t < \ln 2 - 3$ 일 때,

점 $(6, t)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 오른쪽 그림과 같이 1이다.



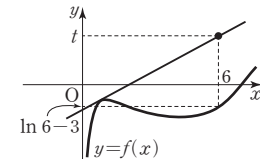
② $\ln 2 - 3 < t < \ln 6 - 3$ 일 때,

점 $(6, t)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 오른쪽 그림과 같이 3이다.



③ $t > \ln 6 - 3$ 일 때,

점 $(6, t)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 오른쪽 그림과 같이 1이다.



(i), (ii), (iii)에서

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < \ln 2 - 3) \\ 2 & (t = \ln 2 - 3) \\ 3 & (\ln 2 - 3 < t < \ln 6 - 3) \\ 2 & (t = \ln 6 - 3) \\ 1 & (t > \ln 6 - 3) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 가 불연속이 되는 t 의 값은

$$t_1 = \ln 2 - 3, t_2 = \ln 6 - 3$$

이므로 $n=2$

$$n(t_1 + t_2) = 2 \times \{(\ln 2 - 3) + (\ln 6 - 3)\}$$

$$= 2 \times (\ln 12 - 6)$$

$$= -12 + 2 \ln 12$$

이므로 $p=-12, q=2$

$$\therefore p^2 + q^2 = (-12)^2 + 2^2 = 148$$

답 148

04 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한다.
② 단계	곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 t 의 값의 범위가 $0 < t < \sqrt{e}$ 임을 이용하여 함수 $g(x)$ 를 구한다.
③ 단계	역함수의 미분법을 이용하여 $h'(t)$ 의 최댓값 k 를 구한 후, $f(k)$ 의 값을 구한다.

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = a(x-2)^2 + b \quad (a \neq 0, a, b \text{는 상수})$$

라 할 수 있고,

$$f'(x) = 2a(x-2), f''(x) = 2a$$

이때, $g(x) = e^{f(x)}$ 에서

$$g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$$

$$g''(x) = f''(x)e^{f(x)} + \{f'(x)\}^2 e^{f(x)}$$

$$= [f''(x) + \{f'(x)\}^2] e^{f(x)}$$

$$= [2a + \{2a(x-2)\}^2] e^{f(x)}$$

조건 (나)에 의하여 $g''(1)=0, g''(3)=0$ 이므로 x 에 대한 이차방정식 $2a + \{2a(x-2)\}^2 = 0$ 의 두 실근이 1, 3이다.

$$x=1 \text{을 대입하면 } 2a + 4a^2 = 0$$

$$2a(2a+1)=0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2} \quad (\because a \neq 0)$$

$g'(x) = (2-x)e^{f(x)}$ 이므로 $g'(x)=0$ 에서 $x=2$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...	3	...
$g'(x)$	+		+	0	-		-
$g''(x)$	+	0	-		-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값

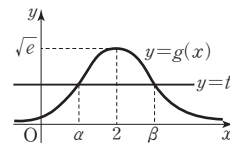
$$g(2) = e^b \text{을 갖고, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{이다.}$$

곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 t 의 값의 범위가 $0 < t < \sqrt{e}$ 이므로

$$e^b = \sqrt{e} \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}, g(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}},$$

$$g'(x) = (2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}} \quad \dots\dots ㉑$$



곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를

$$\alpha, \beta \quad (\alpha < 2 < \beta) \text{라 하면 } g(\alpha) = t, g(\beta) = t \quad \dots\dots ㉒$$

이때, $x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $i(x)$, $x > 2$ 에서 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $j(x)$ 라 하면 ㉑에서

$$\alpha = i(t), \beta = j(t)$$

곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 의 두 교점의 x 좌표의 차가 $h(t)$ 이므로

$$h(t) = \beta - \alpha = j(t) - i(t)$$

$$h'(t) = j'(t) - i'(t) \quad \dots\dots ㉓$$

역함수의 미분법에 의하여

$$i'(t) = \frac{1}{g'(i(t))} = \frac{1}{g'(\alpha)}$$

$$j'(t) = \frac{1}{g'(j(t))} = \frac{1}{g'(\beta)} \quad \dots\dots ㉔$$

또한, ㉑에서 $g'(x) = (2-x)g(x)$ 이고,

$$g(\alpha) = g(\beta), \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \text{이므로}$$

$$g'(\beta) = (2-\beta)g(\beta) = \{2-(4-\alpha)\}g(\alpha)$$

$$= -(2-\alpha)g(\alpha)$$

$$= -g'(\alpha)$$

㉔, ㉕에서

$$h'(t) = \frac{1}{g'(\beta)} - \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{g'(\beta)} + \frac{1}{g'(\beta)}$$

$$= \frac{2}{g'(\beta)}$$

함수 $h'(t)$ 가 최대이러

면 $g'(\beta)$ 는 최소이어야

하고, $x > 2$ 에서 함수

$g'(x)$ 의 증가와 감소를

나타낸 표가 오른쪽과 같으므로 함수 $g'(x)$ 는 $x=3$ 에서
극소이면서 최소이다.

$g'(3) = -e^0 = -1$ 이므로 함수 $h'(t)$ 의 최댓값은

$$k = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\therefore f(-2) = -8 + \frac{1}{2} = -\frac{15}{2} \quad \text{답 } -\frac{15}{2}$$

x	(2)	...	3	...
$g''(x)$		-	0	+
$g'(x)$		\	극소	/

05 해결단계

① 단계	곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점 A의 좌표를 구한 후, 점 A에서의 접선 l 의 방정식을 구한다.
② 단계	점 A를 지나는 직선 m 과 또 다른 접선 n 에 대하여 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형이 직각이등변삼각형일 조건을 찾는다.
③ 단계	②단계에서 구한 조건에 따라 직각이등변삼각형의 넓이를 각각 구한 후, 최댓값을 구한다.

$$f(x) = \ln(x^2+1) \text{에서 } f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

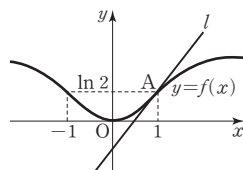
$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-		-	0	+		+
$f''(x)$	-	0	+		+	0	-
$f(x)$	\	$\ln 2$	\	극소	/	$\ln 2$	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 $f(0)=0$ 을 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점 중 x 좌표가 양수인 점이 A이므로 점 A의 좌표는 $(1, \ln 2)$

$x=1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y - \ln 2 = x - 1 \quad \therefore y = x - 1 + \ln 2$$

이때, 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 점 A를 지나는 직선 m 과 곡선 $y=f(x)$ 의 또 다른 접선 n 으로 둘러싸인 도형이 직각이등변삼각형이라면 직선 m 이 직선 l 과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}$ 이어야 한다.

(i) 직선 l 과 직선 m 이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때,

직선 m 이 x 축 또는 y 축과 평행해야 하고, 직선 m 은 점 A($1, \ln 2$)를 지나므로 직선 m 의 방정식은

$$y = \ln 2 \text{ 또는 } x = 1$$

① 직선 m 의 방정식이 $y = \ln 2$ 일 때,

세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형이 직각이등변삼각형이라면 접선 n 은 y 축과 평행하거나 기울기가 -1 이어야 한다.

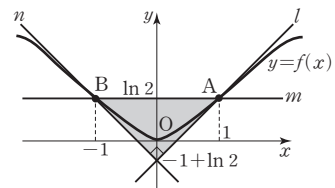
그런데 곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 y 축과 평행한 것은 없으므로 접선 n 은 기울기가 -1 이다.

$$f'(x) = -1 \text{에서 } \frac{2x}{x^2+1} = -1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

즉, B($-1, \ln 2$)이므로 접선 n 은 점 B에서의 접선이고, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형은 다음 그림과 같다.



따라서 $\overline{AB} = 2$ 이므로 이때의 삼각형의 넓이는

$$\frac{2^2}{4} = 1$$

② 직선 m 의 방정식이 $x = 1$ 일 때,

세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형이 직각이등변삼각형이라면 접선 n 은 x 축과 평행하거나 기울기가 -1 이어야 한다.

접선 n 이 x 축과 평행하려면 기울기가 0이어야 하므로

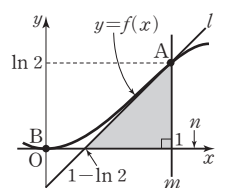
$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

$$\therefore x = 0$$

즉, 점 B($0, 0$)이므로 접선 n 은 점 B에서의 접선이고, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이때의 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$



한편, 접선 n 의 기울기가 -1 이려면

①에서 점

$B(-1, \ln 2)$ 에

서의 접선이므로

세 직선 l, m, n

으로 둘러싸인 도

형은 오른쪽 그림과 같다.

즉, 이때의 삼각형의 넓이는 ①과 같으므로 1

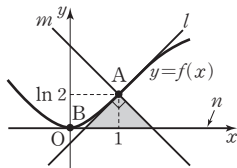
(ii) 직선 l 과 직선 m 이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 일 때,

직선 m 의 기울기가 -1 이므로 방정식은

$$y - \ln 2 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 1 + \ln 2$$

이때, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형이 직각이등변삼각형이라면 접선 n 은 x 축 또는 y 축과 평행해야 한다.

(i)에 의하여 y 축과 평행한 접선은 존재하지 않고, x 축과 평행하려면 접선 n 은 점 $B(0, 0)$ 에서의 접선이다.



이때의 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \ln 2 \times 2 \ln 2 = (\ln 2)^2$$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은 1이다.

답 1

06 해결단계

① 단계	점근선의 방정식을 $y = px + q$ 라 하고, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (px + q)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (px + q)\} = 0$ 을 만족시키는 p, q 의 값을 각각 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판 별한다.
② 단계	$f''(x)$ 의 부호를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 의 극대 또는 극소를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 곡선 $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - \frac{1}{2}x$ 의 점근선이 두 개 존

재하므로 점근선의 방정식을 $y = px + q$ (p, q 는 상수)
라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (px + q)\} = 0 \text{이 성립하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + b} - \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right) x + q \right\} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b - \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right) x + q \right\}^2}{\sqrt{x^2 + ax + b} + \left(p + \frac{1}{2} \right) x + q}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left\{ 1 - \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} x^2 + \{ a - q(2p + 1) \} x + b - q^2}{\sqrt{x^2 + ax + b} + \left(p + \frac{1}{2} \right) x + q}$$

위의 극한값이 존재하려면 $1 - \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 = 0$ 이고, 극

$$\text{한값은 } \frac{a - q(2p + 1)}{1 + p + \frac{1}{2}} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 = \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \text{에서 } p^2 + p - \frac{3}{4} = 0$$

$$4p^2 + 4p - 3 = 0, (2p - 1)(2p + 3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \text{ 또는 } p = -\frac{3}{2}$$

그런데 $p = -\frac{3}{2}$ 이면 ①에서 (분모) = 0이므로 $p = \frac{1}{2}$

이어야 한다.

이것을 ①에 대입하여 풀면 $q = \frac{1}{2}a$

즉, 곡선 $y = f(x)$ 의 점근선은 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$ 이다.

또한, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (px + q)\} = 0$ 이 성립하고

$-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + b} - \left\{ \left(p + \frac{1}{2} \right) x + q \right\} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sqrt{t^2 - at + b} - \left\{ \left(-p - \frac{1}{2} \right) t + q \right\} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - at + b - \left\{ \left(-p - \frac{1}{2} \right) t + q \right\}^2}{\sqrt{t^2 - at + b} + \left(-p - \frac{1}{2} \right) t + q}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\{ 1 - \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \right\} t^2 + \{ q(2p + 1) - a \} t + b - q^2}{\sqrt{t^2 - at + b} + \left(-p - \frac{1}{2} \right) t + q}$$

위의 극한값이 존재하려면 $1 - \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 = 0$ 이고, 극

$$\text{한값은 } \frac{q(2p + 1) - a}{1 - p - \frac{1}{2}} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$1 = \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 \text{에서 } p = \frac{1}{2} \text{ 또는 } p = -\frac{3}{2}$$

그런데 $p = \frac{1}{2}$ 이면 ②에서 (분모) = 0이므로 $p = -\frac{3}{2}$

이어야 한다.

이것을 ②에 대입하여 풀면 $q = -\frac{1}{2}a$

즉, 곡선 $y = f(x)$ 의 점근선은 $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}a$ 이다.

따라서 두 점근선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a, y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}a$ 의

교점의 좌표는 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{4} \right)$ 이므로 직선 $y = -\frac{1}{2}x$ 위
에 있다. (참)

ㄴ. $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - \frac{1}{2}x$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + b}} - \frac{1}{2}$$

$$f''(x)$$

$$= \frac{2 \times 2\sqrt{x^2 + ax + b} - (2x + a) \times \frac{2x + a}{\sqrt{x^2 + ax + b}}}{4(x^2 + ax + b)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4(x^2+ax+b)-(2x+a)^2}{4(x^2+ax+b)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{4b-a^2}{4(x^2+ax+b)^{\frac{3}{2}}} > 0 \\
 &\quad \left(\because \frac{1}{4}a^2 < b \text{에서 } 4b-a^2 > 0 \right)
 \end{aligned}$$

즉, $f'(x)$ 는 증가함수이므로 $x_1 < x_2$ 인 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f'(x_1) < f'(x_2)$ 이다. (참)
 ㄷ, ㄴ에서 $f''(x) > 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고, 극소인 점에서 최솟값을 갖는다.
㉔

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2x+a-\sqrt{x^2+ax+b}}{2\sqrt{x^2+ax+b}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x+a=\sqrt{x^2+ax+b} \quad \text{.....㉕}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4x^2+4ax+a^2=x^2+ax+b$$

$$3x^2+3ax+a^2-b=0$$

$$a^2=2b \text{에서 } b=\frac{1}{2}a^2 \text{이므로}$$

$$3x^2+3ax+\frac{1}{2}a^2=0, \quad 6x^2+6ax+a^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=9a^2-6a^2=3a^2 > 0 \quad (\because a^2 > 0)$$

에서 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$x = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2-6a^2}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6}a$$

이때, ㉕에서 $2x+a > 0$ 이어야 하므로

$$x = \frac{-3+\sqrt{3}}{6}a$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{3}}{6}a \text{의 좌우에서 } f'(x) \text{의 부호가 음에서}$$

양으로 바뀌므로 ㉕에 의하여 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{-3+\sqrt{3}}{6}a \text{에서 극소이면서 최소이다.}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned}
 &f\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6}a\right) \\
 &= 2 \times \frac{-3+\sqrt{3}}{6}a + a - \frac{1}{2} \times \frac{-3+\sqrt{3}}{6}a \\
 &= \frac{3+3\sqrt{3}}{12}a = \frac{\sqrt{3}+1}{4}a \quad (\text{참}) \quad \begin{aligned} &\left[f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - \frac{1}{2}x \right. \\ &\quad \left. = 2x+a - \frac{1}{2}x (\because \text{㉕}) \right]
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㉕

1 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 함을 파악한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린 후, ①단계를 만족시키는 a 의 최솟값 $g(n)$ 을 구한다.
③ 단계	$1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값을 구한 후, 그 합을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{.....㉑}$$

이어야 한다.

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax \text{에서}$$

$$f'(x) = e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\} + e^{x+1}(2x+n-2) + a$$

$$= e^{x+1}(x^2+nx+1) + a$$

이때, $h(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1)$ 이라 하면

$$h'(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1) + e^{x+1}(2x+n)$$

$$= e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$

$$= e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } e^{x+1}(x+1)(x+n+1)=0$$

$$\therefore x = -n-1 \text{ 또는 } x = -1 \quad (\because e^{x+1} > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 함수를 표로 나타내면 다음과 같다.

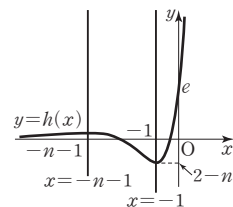
x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는 $x = -n-1$ 에서 극댓값

$$h(-n-1) = \frac{n+2}{e^n}, \quad x=1 \text{에서 극솟값 } h(-1) = 2-n \text{을}$$

$$\text{갖고, } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty \text{이므로 함수}$$

$y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(-1)=2-n$ 이고, ㉑을 만족시키려면 $(h(x)$ 의 최솟값) $+a \geq 0$ 이어야 하므로

$$2-n+a \geq 0 \quad \therefore a \geq n-2$$

실수 a 의 최솟값이 $g(n)$ 이므로

$$g(n) = n-2$$

$$1 \leq g(n) \leq 8 \text{에서 } 1 \leq n-2 \leq 8$$

$$\therefore 3 \leq n \leq 10$$

즉, $n=3, 4, 5, \cdots, 10$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+5+\cdots+10 = \frac{8 \times (3+10)}{2} = 52$$

답 ㉔

2 해결단계

① 단계	조건 ㉞를 이용하여 함수 $g(x)$ 를 상수 a 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$ 에서의 접선을 방정식을 구한 후, 이 직선이 점 $(0, k)$ 를 지날 때의 k 를 t 를 이용하여 나타낸다.
③ 단계	②단계에서 정리한 식을 만족시키는 t 의 값이 $-1 < k < 0$ 에서 3개가 되도록 하는 a 의 값을 구하여 함수 $g(x)$ 를 구한다.
④ 단계	$g(-2) \times g(4)$ 의 값을 구한다.

$$g(x) = f(x)e^{-x} \text{에서}$$

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$$

$$= \{f'(x) - f(x)\}e^{-x}$$

$$g''(x) = \{f''(x) - f'(x)\}e^{-x} - \{f'(x) - f(x)\}e^{-x}$$

$$= \{f''(x) - 2f'(x) + f(x)\}e^{-x}$$

조건 ㉞에서 $g''(1) = g''(4) = 0$ 이고, $e^{-x} > 0$ 이므로

$$f''(1) - 2f'(1) + f(1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

$$f''(4) - 2f'(4) + f(4) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

이때, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b, f''(x) = 2a \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } 2a - 2(2a + b) + (a + b + c) = 0$$

$$\therefore a + b - c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

$$\textcircled{㉟} \text{에서 } 2a - 2(8a + b) + (16a + 4b + c) = 0$$

$$\therefore 2a + 2b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㊱}$$

㉟, ㊱을 연립하여 풀면

$$b = -a, c = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = ax^2 - ax \text{이므로}$$

$$g(x) = a(x^2 - x)e^{-x}$$

$$g'(x) = \{(2ax - a) - (ax^2 - ax)\}e^{-x}$$

$$= a(-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - g(t) = g'(t)(x - t)$$

이 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

$$k - g(t) = -tg'(t)$$

$$\therefore k = g(t) - tg'(t)$$

$$= a(t^2 - t)e^{-t} - at(-t^2 + 3t - 1)e^{-t}$$

$$= a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$$

이때, $h(t) = a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$ 이라 하면 조건 ㉞에 의하여 점 $(0, k)$ ($-1 < k < 0$)에서 곡선 $y=g(x)$ 에 그은 접선의 개수가 3이므로 함수 $y=h(t)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위가 $-1 < k < 0$ 이어야 한다. $\cdots \cdots \textcircled{㊲}$

$$h(t) = a(t^3 - 2t^2)e^{-t} \text{에서}$$

$$h'(t) = a(3t^2 - 4t)e^{-t} - a(t^3 - 2t^2)e^{-t}$$

$$= a(-t^3 + 5t^2 - 4t)e^{-t}$$

$$= -at(t-1)(t-4)e^{-t}$$

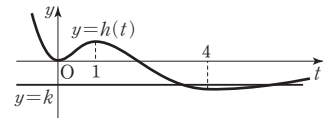
$$h'(t) = 0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $a < 0$ 일 때,

함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(t)$ 는 $t=0$ 에서 극솟값 $h(0)=0$, $t=1$ 에서 극댓값 $h(1)=-\frac{a}{e}$, $t=4$ 에서 극솟값 $h(4)=\frac{32a}{e^4}$ 를 갖고, $\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ 이므로 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그런데 ㊲을 만족시키지 못하므로 모순이다.

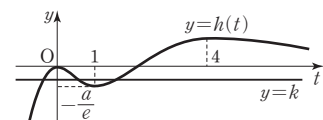
(ii) $a > 0$ 일 때,

함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ 이므로 함수

$y=h(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



㊲을 만족시키려면 $h(1) = -1$ 이어야 하므로

$$-\frac{a}{e} = -1 \text{에서 } a = e$$

(i), (ii)에서 $g(x) = e(x^2 - x)e^{-x}$ 이므로

$$g(-2) \times g(4) = 6e^3 \times 12e^{-3} = 72$$

답 72

3

해결단계

① 단계	$l(x) = f(x) - t $ 라 하고, 함수 $\sqrt{l(x)}$ 의 미분가능하지 않은 점에 대해 파악한다.
② 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 t 의 값에 범위에 따라 함수 $g(t)$ 를 구한다.
③ 단계	합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 사차함수 $h(x)$ 를 구한다.
④ 단계	a, b, c 의 값을 각각 구한 후, $h(a+5) - h(b+3) + c$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6 \sin^2 x \cos x & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin x & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\pi$$

이때, $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x) > 0$ 이고, $x=\pi$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi$ 에서 극솟값 $f(\pi) = -1$ 을 갖는다.

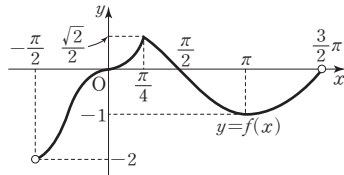
$$\text{또한, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}-} 6 \sin^2 x \cos x = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} (-\sin x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{에서}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌

므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $l(x) = |f(x) - t|$ 라 하면

$$\{\sqrt{l(x)}\}' = \frac{l'(x)}{2\sqrt{l(x)}}$$

에서 함수 $\sqrt{l(x)}$ 는 함수 $l(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 값과 $l(x)=0$ 인 x 의 값에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점과 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점에서 미분가능하지 않을 수 있다.

.....㉠

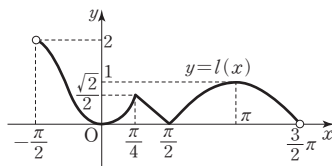
(i) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 뿔족점에서만 만나므로 ㉠을 만족시키는 점은 1개로 $k=1$ 이다.

(ii) $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 서로 다른 두 점에서 접하지 않으면서 만나므로 ㉠을 만족시키는 점은 이 두 점과 곡선 $y=f(x)$ 의 뿔족점의 3개로 $k=3$ 이다.

(iii) $t=0$ 일 때,



곡선 $l(x) = |f(x)|$ 는 위의 그림과 같다.

이때, 함수 $\sqrt{l(x)}$ 에 대하여 $x=0$ 에서의 미분계수를 구해 보면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{l(0+h)} - \sqrt{l(0)}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2|\sin^3 h|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h|}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2|\sin h|} = 0 \end{aligned}$$

이므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

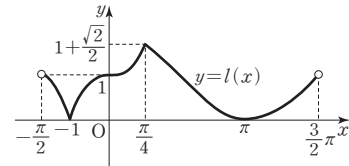
즉, ㉠을 만족시키는 점은 2개이므로 $k=2$ 이다.

(iv) $-1 < t < 0$ 일 때, $\rightarrow (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{2}, 0)$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 서로 다른 세 점에서

접하지 않으면서 만나므로 ㉠을 만족시키는 점은 이 세 점과 곡선 $y=f(x)$ 의 뿔족점의 4개로 $k=4$ 이다.

(v) $t=-1$ 일 때,



곡선 $l(x) = |f(x)+1|$ 은 위의 그림과 같다.

이때, 함수 $\sqrt{l(x)}$ 에 대하여 $x=\pi$ 에서의 미분계수를 구해 보면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{l(\pi+h)} - \sqrt{l(\pi)}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{|1-\cos h|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{\sin^2 h}}{h\sqrt{|1+\cos h|}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-\sin h}{h\sqrt{|1+\cos h|}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{l(\pi+h)} - \sqrt{l(\pi)}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|\cos(\pi+h)+1|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{|1-\cos h|}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{\sin^2 h}}{h\sqrt{|1+\cos h|}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sin h}{h\sqrt{|1+\cos h|}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

이므로 $x=\pi$ 에서 미분가능하지 않다.

즉, ㉠을 만족시키는 점은 3개이므로 $k=3$ 이다.

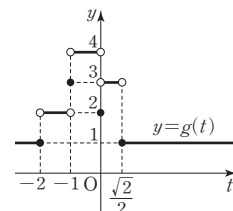
(vi) $-2 < t < -1$ 일 때, $\rightarrow (-1, 0), (\frac{\pi}{4}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}), (\pi, 0)$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 한 점에서 접하지 않으면서 만나므로 ㉠을 만족시키는 점은 이 점과 곡선 $y=f(x)$ 의 뿔족점의 2개로 $k=2$ 이다.

(vii) $t \leq -2$ 또는 $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 는 만나지 않으므로 ㉠을 만족시키는 점은 곡선 $y=f(x)$ 의 뿔족점의 1개로 $k=1$ 이다.

(i) ~ (vii)에서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



사차함수 $h(x)$ 에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $t=-2, t=-1, t=0, t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{에서 } h(3) = h(1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(0) \text{에서}$$

$$h(4) = h(3) = h(2)$$

$$\lim_{t \rightarrow -1-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(-1)$$

$$\text{에서 } h(2) = h(4) = h(3)$$

$$\lim_{t \rightarrow -2-} (h \circ g)(t) = \lim_{t \rightarrow -2+} (h \circ g)(t) = (h \circ g)(-2)$$

$$\text{에서 } h(1) = h(2)$$

즉, $h(1) = h(2) = h(3) = h(4)$ 이고 $h(x)$ 는 최고차항

의 계수가 1인 사차함수이므로

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + m \quad (m \text{은 상수})$$

라 할 수 있다.

$$\text{따라서 } a = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1, b = g(0) = 2, c = g(-1) = 3 \text{이}$$

므로

$$\begin{aligned} h(a+5) - h(b+3) + c &= h(6) - h(5) + 3 \\ &= (120 + m) - (24 + m) + 3 \\ &= 99 \end{aligned}$$

답 ④

4 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한다.
② 단계	k 의 값의 범위를 나누어 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 구한다.
③ 단계	조건 (가), (나)를 만족시키기 위한 k 의 값의 범위를 구한 후, 정수 k 의 개수를 구한다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) = (x-2)^2 e^x + k$ 이므로

$$f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x$$

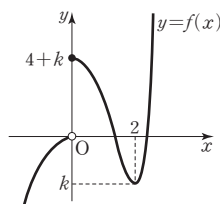
$$= x(x-2)e^x \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \quad (\because x > 0, e^x \neq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$4+k$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 $f(2)=k$ 를 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



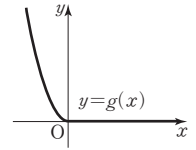
$$g(x) = |f(x)| - f(x) \text{에서}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

k 의 값의 범위에 따라 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

(i) $k \geq 0$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수에서 연속이고,



$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0,$$

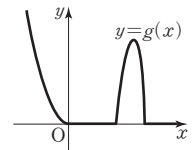
$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{0}{x} = 0$$

이므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 그런데 조건 (나)에서 미분가능하지 않은 점이 2개이므로 모순이다.

(ii) $-4 < k < 0$ 일 때,

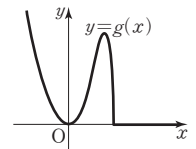
함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수에서 연속이고, (i)에 의하여 $x=0$ 에서 미분가능하다.



즉, 미분가능하지 않은 점은 2개이다.

(iii) $k = -4$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 실수에서 연속이고,



$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x-2)^2 e^x - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ e^x(x-4) + \frac{4(e^x - 1)}{x} \right\} \\ &= -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

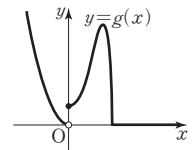
이므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

즉, 미분가능하지 않은 점은 1개이다.

그런데 조건 (나)에서 미분가능하지 않은 점이 2개이므로 모순이다.

(iv) $k < -4$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.



그런데 함수 $g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이므로 모순이다.

(i) ~ (iv)에서 $-4 < k < 0$ 이므로

정수 k 는 $-3, -2, -1$ 의 3개이다.

답 ①

07 도함수의 활용(2)

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 65

- 01 ① 02 ⑤ 03 $\sqrt{3}$ 04 $a \leq 2e$ 05 ④
06 ④ 07 1 08 ③

01 x 에 대한 방정식 $x \ln x - 2x - k = 0$, 즉 $x \ln x - 2x = k$ 가 오직 하나의 실근을 갖기 위해서는 곡선

$y = x \ln x - 2x$ 와 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x \ln x - 2x$ ($x > 0$)라 하면

$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2$

$= \ln x - 1$

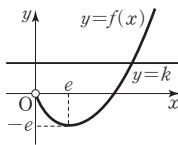
$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = 1 \quad \therefore x = e$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = e$ 일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(e) = e \ln e - 2e = -e$

즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 오직 한 점에서 만나려면



$k = -e$ 또는 $k \geq 0$

따라서 구하는 k 의 최솟값은 $-e$ 이다.

답 ①

02 $4x^2 = e^{x^2}$ 에서 $e^{x^2} - 4x^2 = 0$

$f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ 이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수이다.

$f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x$

$f'(x) = 0$ 에서 $2x(e^{x^2} - 4) = 0$ ①

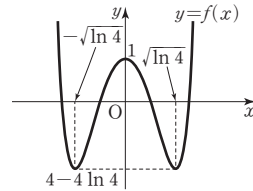
$e^{x^2} = 4$ 에서 $x^2 = \ln 4 \quad \therefore x = \pm \sqrt{\ln 4}$

따라서 ①에서 $x = -\sqrt{\ln 4}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{\ln 4}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{\ln 4}$	...	0	...	$\sqrt{\ln 4}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = \pm \sqrt{\ln 4}$ 일 때 극솟값

$f(\pm \sqrt{\ln 4}) = 4 - 4 \ln 4$, $x = 0$ 일 때 극댓값 $f(0) = 1$ 을 가지므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 교점의 개수가 4이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 ⑤

03 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\sin x > 0$ 이므로

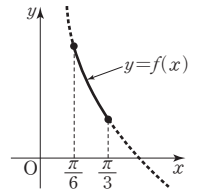
$\cos x \leq k \sin x$ 에서 $\frac{\cos x}{\sin x} \leq k$ ①

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ 라 하면

$f(x) = \cot x$ 이므로

$f'(x) = -\csc^2 x$

$= -\frac{1}{\sin^2 x}$



$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\sin^2 x > 0$ 이므로 $f'(x) < 0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 에서 감소하므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 을 갖는다.

이때, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키는 모든 실수 x 에 대하여

①이 성립하려면 $(f(x))$ 의 최댓값 $\leq k$ 이어야 하므로

$k \geq \sqrt{3}$

따라서 구하는 실수 k 의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

답 $\sqrt{3}$

04 $\frac{1}{x} + 3 \geq a \ln \frac{3x+1}{2x}$ 에서

$\frac{1}{2x} + \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} a \ln \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2x} \right)$

$t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$ 로 놓으면 $x > 0$ 에서 $t > \frac{3}{2}$ 이고

$t \geq \frac{1}{2} a \ln t$

$t > \frac{3}{2}$ 에서 $\ln t > 0$ 이므로 부등식의 양변을 $\ln t$ 로 나누면

$a \leq \frac{2t}{\ln t}$ ①

$f(t) = \frac{2t}{\ln t}$ 라 하면

$f'(t) = \frac{2 \ln t - 2t \times \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{2(\ln t - 1)}{(\ln t)^2}$

$f'(t) = 0$ 에서 $\ln t - 1 = 0 \quad \therefore t = e$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\left(\frac{3}{2}\right)$	...	e	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\	극소	/

함수 $f(t)$ 는 $t=e$ 일 때 극소이면서 최소이고 최솟값은 $f(e)=2e$ 이다.

따라서 $t > \frac{3}{2}$ 에 대하여 ㉠을 만족시키려면

$(f(t) \text{의 최솟값}) \geq a$ 이어야 하므로

$$a \leq 2e$$

답 $a \leq 2e$

- 05** 점 P의 시각 t 에서의 위치 $x=f(t)$ 가 $f(t)=\sin 2t+\sqrt{3} \cos 2t$ 이므로 속도를 $v(t)$ 라 하면 $v(t)=f'(t)$

$$=2 \cos 2t-2\sqrt{3} \sin 2t$$

$$=4\left(\frac{1}{2} \cos 2t-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t\right)$$

$$=4\left(\sin \frac{\pi}{6} \cos 2t-\cos \frac{\pi}{6} \sin 2t\right)$$

$$=-4 \sin \left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$$

이때, $t \geq 0$ 에서 $-1 \leq \sin \left(2t-\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq v(t) \leq 4$$

따라서 점 P의 최대 속도는 4이다.

답 ④

- 06** 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=e^t+e^{-t}$, $y=e^t-e^{-t}$ 이므로 $\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$

즉, 점 P의 시각 t 에서의 속도는 (e^t-e^{-t}, e^t+e^{-t})

한편, $x=\frac{5}{2}$ 일 때의 시각 t 를 구하면

$$e^t+e^{-t}=\frac{5}{2}, 2e^{2t}-5e^t+2=0$$

$$(2e^t-1)(e^t-2)=0$$

$$\therefore e^t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } e^t=2$$

$$\therefore t=\ln \frac{1}{2} \text{ 또는 } t=\ln 2$$

그런데 $t > 0$ 이어야 하므로 $t=\ln 2$ 이다.

따라서 $t=\ln 2$ 일 때의 점 P의 속도는

$$\begin{aligned} (e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}, e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}) &= \left(2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

답 ④

•다른풀이•

점 P의 시각 t 에서의 위치가 $x=e^t+e^{-t}$, $y=e^t-e^{-t}$ 이므로 시각 t 에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \text{ 즉 } (e^t-e^{-t}, e^t+e^{-t}) \quad \dots\dots ㉠$$

$x=\frac{5}{2}$ 일 때의 시각을 t_1 이라 하면 $e^{t_1}+e^{-t_1}=\frac{5}{2}$ 이므로

$$(e^{t_1}-e^{-t_1})^2=(e^{t_1}+e^{-t_1})^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$t > 0$ 에서 $e^t-e^{-t} > 0$ 이므로

$$e^{t_1}-e^{-t_1}=\frac{3}{2}$$

따라서 ㉠에서 $x=\frac{5}{2}$ 일 때의 점 P의 속도는

$$(e^{t_1}-e^{-t_1}, e^{t_1}+e^{-t_1}), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- 07** 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x=e^t \cos t$, $y=e^t \sin t$ 이므로

$$\frac{dx}{dt}=e^t \cos t-e^t \sin t=e^t(\cos t-\sin t),$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t \sin t+e^t \cos t=e^t(\sin t+\cos t)$$

즉, 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(e^t(\cos t-\sin t), e^t(\sin t+\cos t))$$

이므로 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &=\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2} \\ &=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력이 $\sqrt{2}$ 일 때의 시각 t 는

$$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2} \text{에서 } t=1$$

답 1

- 08** 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x=3 \cos \frac{\pi}{4}t, y=3 \sin \frac{\pi}{4}t \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{4}\pi \sin \frac{\pi}{4}t, \frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}\pi \cos \frac{\pi}{4}t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{3}{16}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4}t, \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{3}{16}\pi^2 \sin \frac{\pi}{4}t$$

즉, 점 P의 시각 t 에서의 가속도는

$$\left(-\frac{3}{16}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4}t, -\frac{3}{16}\pi^2 \sin \frac{\pi}{4}t\right)$$

이므로 점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(-\frac{3}{16}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4}t\right)^2+\left(-\frac{3}{16}\pi^2 \sin \frac{\pi}{4}t\right)^2} \\ &=\sqrt{\left(\frac{3}{16}\pi^2\right)^2(\cos^2 \frac{\pi}{4}t+\sin^2 \frac{\pi}{4}t)} \\ &=\frac{3}{16}\pi^2 \end{aligned}$$

답 ③

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 66~68

01 e	02 $\frac{3}{4}-\ln 2$	03 e^{2x}	04 ⑤	05 ③
06 ⑤	07 ⑤	08 ⑤	09 $\frac{1}{2}$	10 $-\frac{1}{4}$
11 $\frac{16}{e^2}$	12 ⑤	13 ②	14 48	15 ③
16 $\frac{3}{4}$	17 4	18 ④	19 ⑤	20 2π

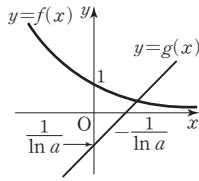
- 01** 방정식 $a^x-x-\frac{1}{\ln a}=0$, 즉 $a^x=x+\frac{1}{\ln a}$ 이 실근을 가지려면 곡선 $y=a^x$ 과 직선 $y=x+\frac{1}{\ln a}$ 이 만나야 한다.
 $f(x)=a^x$, $g(x)=x+\frac{1}{\ln a}$ 이라 하면 $\ln a \neq 0$ 이어야 하므로 $a \neq 1$

$$f'(x) = a^x \ln a, g'(x) = 1$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가
항상 만나므로 조건을 만족시키
는 a 의 값의 범위는 $0 < a < 1$



(ii) $a > 1$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때의 교점의
 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a^t = t + \frac{1}{\ln a} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } a^t \ln a = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t + \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \quad \therefore t = 0$$

이때, $f(0) = a^0 = 1$ 이므로 곡선
과 직선이 만나려면 $g(0) \geq 1$ 이

여야 한다. 즉, $\frac{1}{\ln a} \geq 1$ 에서 $\ln a \leq 1$

$$a \leq e \quad \therefore 1 < a \leq e$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 a
의 값의 범위는 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a \leq e$ 이다.

따라서 $\alpha = 0, \beta = e$ 이므로

$$\alpha + \beta = e$$

답 e

• 다른풀이 •

방정식 $a^x - x - \frac{1}{\ln a} = 0$ 이 실근을 가지려면 함수

$y = a^x - x - \frac{1}{\ln a}$ 의 그래프가 x 축과 만나야 한다.

$f(x) = a^x - x - \frac{1}{\ln a}$ 이라 하면 $f'(x) = a^x \ln a - 1$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } a^x \ln a - 1 = 0, a^x = \frac{1}{\ln a} \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$\ln a < 0$ 이므로 $f'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

이때, $f(0) = 1 - \frac{1}{\ln a} > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 실근을 갖는다.

(ii) $a > 1$ 일 때,

$\ln a > 0$ 이므로 ③에서

$$x = \log_a \left(\frac{1}{\ln a} \right) = -\log_a (\ln a)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\log_a (\ln a)$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -\log_a (\ln a)$ 일 때 극소이자 최소
이고, 최솟값은 $f(-\log_a (\ln a)) = \log_a (\ln a)$ 이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나려면

(함수 $f(x)$ 의 최솟값) ≤ 0 이어야 하므로

$$\log_a (\ln a) \leq 0, 0 < \ln a \leq 1$$

$$\therefore 1 < a \leq e$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는
 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a \leq e$ 이므로

$$\alpha = 0, \beta = e$$

$$\therefore \alpha + \beta = e$$

02 방정식 $\ln x = -x^2 + 3x + k$, 즉 $\ln x + x^2 - 3x = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y = \ln x + x^2 - 3x$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \ln x + x^2 - 3x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 극댓값

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\ln 2 - \frac{5}{4}$$

를 갖고, $x=1$ 일 때 극솟값

$$f(1) = \ln 1 + 1 - 3 = -2$$

를 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 는

오른쪽 그림과 같다.

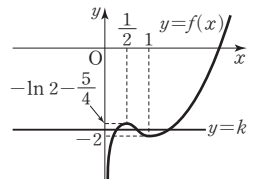
즉, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-2 < k < -\ln 2 - \frac{5}{4}$$

따라서 $p = -2, q = -\ln 2 - \frac{5}{4}$ 이므로

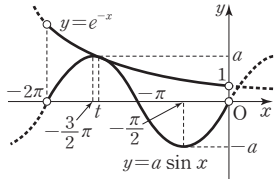
$$q - p = -\ln 2 - \frac{5}{4} - (-2) = \frac{3}{4} - \ln 2 \quad \text{답 } \frac{3}{4} - \ln 2$$



단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 방정식을 $\ln x + x^2 - 3x = k$ 로 변형한 후, 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y = \ln x + x^2 - 3x$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 함을 파악한 경우	30%
(나)	$f(x) = \ln x + x^2 - 3x$ 라 하고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린 경우	40%
(다)	곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구한 경우	20%
(라)	p, q 의 값을 각각 구한 후, $q-p$ 의 값을 구한 경우	10%

03 방정식 $a \sin x = e^{-x}$ 이 주어진 구간에서 오직 하나의 실근을 가지려면 그 구간에서 두 함수 $y = a \sin x$, $y = e^{-x}$ 의 그래프가 한 점에서 만나야 한다.

- (i) $-2\pi < x < 0$ 에서 오직 하나의 실근을 가질 때,
 $-2\pi < x < 0$ 에서 두 함수 $y = a \sin x$, $y = e^{-x}$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 한 점에서 만나려면 접해야 한다.



접점의 x 좌표를 t ($-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi$)라 하면

$x = t$ 에서의 함숫값이 같아야 하므로

$$a \sin t = e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $y = a \sin x$ 에서 $y' = a \cos x$, $y = e^{-x}$ 에서 $y' = -e^{-x}$ 이고, $x = t$ 에서의 접선의 기울기도 같아야 하므로

$$a \cos t = -e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } a(\sin t + \cos t) = 0$$

$$\sin t = -\cos t \quad (\because a > 0)$$

$$-\frac{3}{2}\pi < t < -\pi \text{에서 } \cos t \neq 0 \text{이므로}$$

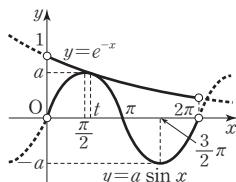
$$\frac{\sin t}{\cos t} = -1, \tan t = -1$$

$$\therefore t = -\frac{5}{4}\pi \quad (\because -\frac{3}{2}\pi < t < -\pi)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$a = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$$

- (ii) $0 < x < 2\pi$ 에서 오직 하나의 실근을 가질 때,
 같은 방법으로 $0 < x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y = a \sin x$, $y = e^{-x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 한 점에서 만나려면 접해야 한다.



접점의 x 좌표를 t ($\frac{\pi}{2} < t < \pi$)라 하면 함숫값과 접선의 기울기가 각각 같아야 하므로

$$a \sin t = e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$a \cos t = -e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{을 하면 } a(\sin t + \cos t) = 0$$

$$\sin t = -\cos t \quad (\because a > 0)$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \pi \text{에서 } \cos t \neq 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\sin t}{\cos t} = -1, \tan t = -1$$

$$\therefore t = \frac{3}{4}\pi \quad (\because \frac{\pi}{2} < t < \pi)$$

$$\text{이것을 } \textcircled{3} \text{에 대입하여 정리하면 } a = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } p = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}, q = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi} \text{이므로}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}} = e^{2\pi}$$

답 $e^{2\pi}$

04 $f(x) = 2x \cos x$ 에서 $f'(x) = 2 \cos x - 2x \sin x$

$$\neg. f'(a) = 0 \text{이면 } 2 \cos a - 2a \sin a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때, } f'(0) = 2 \text{이므로 } a \neq 0$$

$$\text{또한, } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} - \pi \sin \frac{\pi}{2} = -\pi \text{이므로}$$

$$a \neq \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos a \neq 0$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 $2a \cos a$ 로 나누면

$$\frac{1}{a} - \frac{\sin a}{\cos a} = 0, \frac{1}{a} - \tan a = 0$$

$$\therefore \tan a = \frac{1}{a} \quad (\text{참})$$

$\neg$. 함수 $f'(x)$ 는 구간 $[0, \pi]$ 에서 연속이고

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f'(a) = 0$ 인 실수 a 가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 에 존재한다.

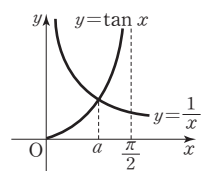
또한, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

$$\neg. f(x) = 2x \cos x \text{이므로 } f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\neg$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극댓값을 가지는 a 가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 에 존재하고, $\neg$ 에 의하여 $\tan a = \frac{1}{a}$ 을 만족시킨다.

$$\text{이때, 두 함수 } y = \tan x, y = \frac{1}{x}$$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 이것을 이용하여 구간



$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가

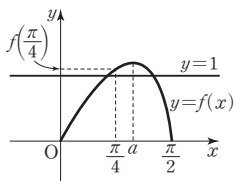
와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 일 때 극대이면서 최대이고

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1 \text{이므로 함수 } y = f(x)$$

의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 두 점에서 만나므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**

05 $f(x)=x^2e^x+1$ 이므로

$$g(x)=\frac{f(|x|)}{x}=\frac{|x|^2e^{|x|}+1}{x}=\frac{x^2e^{|x|}+1}{x}$$

$x>0$ 일 때, $g(x)=\frac{x^2e^x+1}{x}$ 이므로

$$g'(x)=\frac{(2xe^x+x^2e^x)\times x-(x^2e^x+1)}{x^2}=\frac{(x^3+x^2)e^x-1}{x^2}\dots\dots\textcircled{1}$$

$h(x)=(x^3+x^2)e^x-1$ 이라 하면

$$h'(x)=(3x^2+2x)e^x+(x^3+x^2)e^x=(x^3+4x^2+2x)e^x$$

$x>0$ 에서 $h'(x)>0$ 이므로 $x>0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 증가한다.

또한, $h(0)=-1$, $\lim_{x\rightarrow\infty}h(x)=\infty$ 이고 $h(x)$ 가 연속함수이므로 $h(k)=0$ 을 만족시키는 양수 k 가 오직 하나 존재한다.

이때, ①에서 $h(x)=0$ 이면 $g'(x)=0$ 이므로 $x>0$ 에서 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 k 뿐이다. $\dots\dots\textcircled{2}$
한편,

$$g(-x)=\frac{(-x)^2e^{|-x|}+1}{-x}=-\frac{x^2e^{|x|}+1}{x}=-g(x)$$

에서 $-g'(-x)=-g'(x)$, 즉 $g'(-x)=g'(x)$ 이므로 함수 $y=g'(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

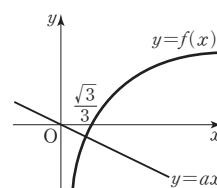
즉, ②에 의하여 $x<0$ 에서 방정식 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $-k$ 뿐이다.

따라서 방정식 $g'(x)=0$ 의 실근의 개수는 2이다. **답 ③**

06 방정식 $ax=2\ln x+\ln 3$ $\dots\dots\textcircled{1}$ 에서

$f(x)=2\ln x+\ln 3$ 이라 하면 방정식 ①의 실근은 직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로 $a<0$ 이면 직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 한 점에서 만난다.
따라서 방정식 ①의 실근의 개수는 1이다. (참)



ㄴ. $a=\ln 3$ 이면 방정식 ①은

$$x\ln 3=2\ln x+\ln 3$$

이때, 위의 식에 $x=1$, $x=3$ 을 각각 대입하면

$$\ln 3=2\ln 1+\ln 3, 3\ln 3=2\ln 3+\ln 3$$

에서 등식이 성립하므로 방정식 ①은 정수인 근 $x=1$, $x=3$ 을 갖는다. (참)

ㄷ. 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(s, 2\ln s+\ln 3)$ ($s>0$)이라 하자.

$$f(x)=2\ln x+\ln 3\text{에서 }f'(x)=\frac{2}{x}\text{이므로 접선의 기울기는 }f'(s)=\frac{2}{s}\text{이고, 접선의 방정식은}$$

$$y-(2\ln s+\ln 3)=\frac{2}{s}(x-s)$$

$$y-(2\ln s+\ln 3)=\frac{2}{s}(x-s)$$

이 직선이 원점을 지나야 하므로

$$-(2\ln s+\ln 3)=-2$$

$$2\ln s=2-\ln 3=\ln \frac{e^2}{3}$$

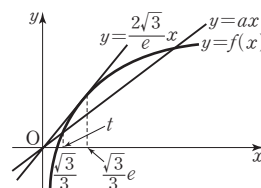
$$\ln s=\frac{1}{2}\ln \frac{e^2}{3}, \ln s=\ln \frac{e}{\sqrt{3}}(\because s>0)$$

$$\therefore s=\frac{e}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}e$$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}e, 2\right)$ 이고 접선의 방정식은

$$y=\frac{2\sqrt{3}}{e}x\text{이다.}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 개수가 두 개 이상이라면 $0<a<\frac{2\sqrt{3}}{e}$



이어야 한다.

이때, 방정식 ①의 실근은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표이므로 가장 작은 값 t 의 값의 범위는

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}e\text{ (참)}$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**

• 다른풀이 •

ㄱ. 로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$ 이므로

$$\textcircled{1}\text{에서 }a=\frac{2\ln x+\ln 3}{x}$$

$$f(x)=0\text{에서 }2\ln x+\ln 3=0$$

$$\ln x=-\frac{1}{2}\ln 3=\ln \frac{\sqrt{3}}{3}(\because x>0)$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - (2 \ln x + \ln 3)}{x^2} \\ = \frac{2 - 2 \ln x - \ln 3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2 - 2 \ln x - \ln 3 = 0$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln \frac{e^2}{3} = \ln \frac{\sqrt{3}}{3} e \quad (\because x > 0)$$

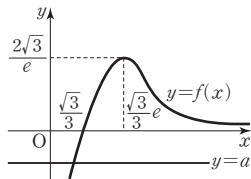
$$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3} e$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\sqrt{3}}{3} e$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3} e$ 에서 극댓값 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3} e\right) = \frac{2\sqrt{3}}{e}$

을 갖고, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



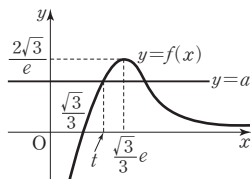
방정식 ①의 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같고, 위의 그림에서 $a < 0$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 는 한 점에서 만나므로 방정식 ①의 실근의 개수는 1이다. (참)

ㄴ. $a = \ln 3$ 이면 ①에서

$$x \ln 3 = 2 \ln x + \ln 3$$

위의 식에 $x=1$, $x=3$ 을 대입하면 등식이 성립하므로 방정식 ①은 $a = \ln 3$ 일 때 정수인 근 $x=1$, $x=3$ 을 갖는다. (참)

ㄷ. 방정식 ①이 두 개 이상의 실근을 가지려면 ㄱ에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 2개 이상이어야 한다.



위의 그림에서 $0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{e}$ 이어야 하므로 가장 작은

근 t 의 값의 범위는 $\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3} e$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

07 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 에서

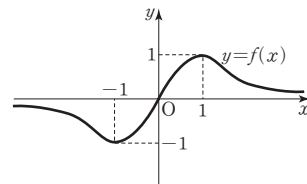
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극솟값 $f(-1) = -1$, $x = 1$ 일 때 극댓값 $f(1) = 1$ 을 갖고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq f(f(x)) \leq 1$$

$$g(x) = f(f(x)) \text{이므로 } -1 \leq g(x) \leq 1$$

따라서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 그 곱은 $1 \times (-1) = -1$ (참)

ㄴ. $g(x) = f(f(x))$ 에서 $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$

$$g'(1) = f'(f(1))f'(1) = 0 \quad (\because f'(1) = 0)$$

$$\text{방정식 } g'(x) = g'(1) \text{에서}$$

$$f'(f(x))f'(x) = 0$$

$$\therefore f'(f(x)) = 0 \text{ 또는 } f'(x) = 0 \quad \dots\dots ①$$

이때, $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 -1과 1이므로 ①에서

$$f(x) = -1 \text{ 또는 } f(x) = 1 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore \underbrace{x = -1}_{f(x)=-1} \text{ 또는 } \underbrace{x = 1}_{f(x)=1}$$

따라서 방정식 $g'(x) = g'(1)$ 의 서로 다른 실근은 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 의 2개이다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 $g'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$$\text{이때, } g'(x) = f'(f(x))f'(x) \text{이므로}$$

(i) $x < -1$ 일 때,

$$-1 < f(x) < 0 \text{에서 } f'(f(x)) > 0 \text{이고,}$$

$$f'(x) < 0 \text{이므로 } g'(x) < 0$$

(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq f(x) < 0 \text{에서 } f'(f(x)) \geq 0 \text{이고,}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{이므로 } g'(x) \geq 0$$

(iii) $0 \leq x \leq 1$ 일 때,

$$0 \leq f(x) \leq 1 \text{에서 } f'(f(x)) \geq 0 \text{이고,}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{이므로 } g'(x) \geq 0$$

(iv) $x > 1$ 일 때,

$$0 < f(x) < 1 \text{에서 } f'(f(x)) > 0 \text{이고,}$$

$$f'(x) < 0 \text{이므로 } g'(x) < 0$$

$g'(x) \geq 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 증가하므로 (i)~(iv)에서 함수 $g(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위는 $-1 \leq x \leq 1$ 이다. (참)
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

08 해결단계

① 단계	조건 ㄱ, ㄴ을 이용하여 a, b, c 의 값을 각각 구한 후, 함수 $f(x)$ 의 공통인 접선을 갖는 두 점을 구하여 함수 $g(t)$ 를 구한다.
② 단계	$f'(x)$ 의 부호를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	방정식 $g(t)=2$ 를 만족시키는 t 의 값을 구한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	함수 $g(t)$ 를 이용하여 $\lim_{t \rightarrow k} g(t) - g(k) = 2$ 를 만족시키는 k 의 값을 구한 후, 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

조건 ㄱ에서 $f(0)=5$ 이므로 $c=5$

$$f(x) = (ax^2 + bx + 5)e^x$$

$$f'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + 5)e^x \\ = \{ax^2 + (2a+b)x + b+5\}e^x$$

$$f''(x) \\ = (2ax + 2a + b)e^x + \{ax^2 + (2a+b)x + b+5\}e^x \\ = \{ax^2 + (4a+b)x + 2a+2b+5\}e^x$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=-1, x=1$ 에서 변곡점을 가지므로

$$f''(-1)=0, f''(1)=0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + (4a+b)x + 2a+2b+5=0$ 의 두 근이 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{4a+b}{a}=0, \frac{2a+2b+5}{a}=-1 \text{에서}$$

$$4a+b=0, 2a+2b+5=-a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-4$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x,$$

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x,$$

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^x$$

$$\therefore f'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x = (x-1)^2 e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because e^x > 0)$$

그런데 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호는 모두 양이므로 함수 $f(x)$ 의 극값은 존재하지 않는다. (참)

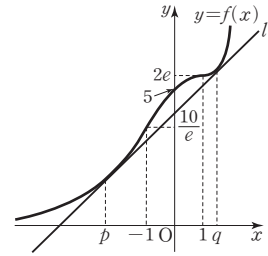
$$\therefore f''(x)=0 \text{에서 } (x^2 - 1)e^x=0$$

$$(x+1)(x-1)e^x=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

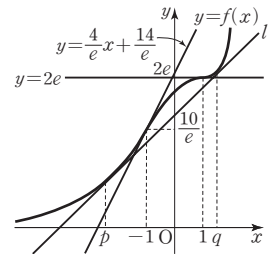
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	$\frac{4}{e}$	+	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{10}{e}$	$\curvearrowright$	$2e$	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 서로 다른 두 점에서 접하는 직선을 l , 두 접점의 x 좌표를 각각 p, q ($p < -1, q > 1$)라 하면 접선의 기울기가 같으므로 $f'(p)=f'(q)$ ㉠

또한, 변곡점 $(-1, \frac{10}{e}), (1, 2e)$ 에서의 접선의 기울기가 각각 $f'(-1)=\frac{4}{e}, f'(1)=0$ 이므로 접선의 방정식은 $y - \frac{10}{e} = \frac{4}{e}(x+1)$, 즉 $y = \frac{4}{e}x + \frac{14}{e}$ 와 $y=2e$ 이다.



함수 $g(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점의 개수이므로

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < p) \\ 2 & (t = p) \\ 3 & (p < t < -1) \\ 2 & (t = -1) \\ 3 & (-1 < t < 1) \\ 1 & (t = 1) \\ 3 & (1 < t < q) \\ 2 & (t = q) \\ 1 & (t > q) \end{cases}$$

즉, 방정식 $g(t)=2$ 의 근은

$$t=p \text{ 또는 } t=-1 \text{ 또는 } t=q$$

$$\text{이므로 } t_1=p, t_2=-1, t_3=q$$

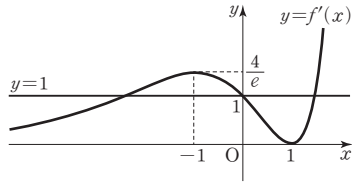
이때, ㉠에서 $f'(p)=f'(q)$ 이고, 위의 그림에서

$t=-1$ 일 때의 접선의 기울기가 $t=p$ 또는 $t=q$ 일 때의 접선의 기울기보다 크다.

$$\therefore f'(t_1)=f'(t_3) < f'(t_2) \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ의 $g(t)$ 에 의하여 $\lim_{t \rightarrow k} g(t) - g(k) = 2$ 를 만족시키는 k 의 값은 1이다.

ㄱ의 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표를 이용하여 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



방정식 $f'(x)=1$ 의 실근의 개수는 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수와 같으므로 위의 그림과 같이 3이다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

09 $\frac{x}{ax+1} \leq \ln(1+x)$ 에서 $\ln(1+x) - \frac{x}{ax+1} \geq 0$

$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{ax+1}$ ($x > 0$)라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{ax+1-x \times a}{(ax+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(ax+1)^2} \\ &= \frac{x\{a^2x - (1-2a)\}}{(1+x)(ax+1)^2} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

(i) $1-2a \leq 0$, 즉 $a \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

㉠에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 증가함수이다.
이때, $f(0)=0$ 이므로 $f(x) > 0$ 이다.

(ii) $1-2a > 0$, 즉 $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때,

㉠에 의하여 $f'(x)=0$ 에서 $x = \frac{1-2a}{a^2}$ ($\because x > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1-2a}{a^2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1-2a}{a^2}$ 일 때 극소이면서 최소이다.

이때, 양수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이려면
($f(x)$ 의 최솟값) ≥ 0 이어야 한다.

그런데 $f(0)=0$ 이고 $f(0) > f\left(\frac{1-2a}{a^2}\right)$ 이므로

$$f\left(\frac{1-2a}{a^2}\right) < 0 \text{이다.}$$

따라서 $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로 양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\frac{1}{2}$

10 $\frac{2}{e^x+1} - (2ax+1) \geq 0$ 에서 $\frac{2}{e^x+1} \geq 2ax+1$

$f(x) = \frac{2}{e^x+1}$, $g(x) = 2ax+1$ 이라 하면 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

이때, $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하려면
 $a < 0$ 이고

$|x=0\text{에서의 곡선 } y=f(x)\text{의 접선의 기울기}|$
 $\leq |x=0\text{에서의 직선 } y=g(x)\text{의 기울기}|$
이어야 한다.

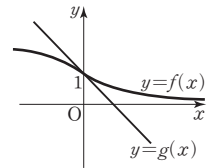
즉, $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$, $g'(x) = 2a$ 에서

$$|f'(0)| \leq |2a| \quad \left[\because \left| \frac{-2e^0}{(e^0+1)^2} \right| = \frac{1}{2} \right]$$

$$\frac{1}{2} \leq -2a \quad (\because a < 0) \quad \therefore a \leq -\frac{1}{4}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

답 $-\frac{1}{4}$



11 $\sqrt{kx} \geq 2 \ln x$ 에서 $f(x) = \sqrt{kx}$, $g(x) = 2 \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{kx}}, \quad g'(x) = \frac{2}{x}$$

오른쪽 그림과 같이 두 곡선
 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 접점의
 x 좌표를 t 라 하면

$f(t) = g(t)$ 에서

$$\sqrt{kt} = 2 \ln t \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(t) = g'(t)$ 에서

$$\frac{k}{2\sqrt{kt}} = \frac{2}{t} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 t^2 - 16kt = 0 \quad (\because k > 0, t > 0)$$

$$kt(kt-16) = 0 \quad \therefore kt = 16 \quad (\because kt > 0) \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면 $4 = 2 \ln t$

$$\ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

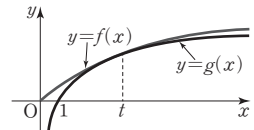
$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하
면 $f(e^2) \geq g(e^2)$ 이어야 하므로

$$e\sqrt{k} \geq 4, \quad \sqrt{k} \geq \frac{4}{e}$$

$$\therefore k \geq \frac{16}{e^2} \quad (\because k > 0)$$

따라서 양수 k 의 최솟값은 $\frac{16}{e^2}$ 이다.

답 $\frac{16}{e^2}$



서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이와 같은 문제는 상수를 기준으로도 풀 수 있는데, 그래프를 그리는데 자신이 있다면 그 방법이 훨씬 직관적이고 간편하다. 주어진 식

$$\sqrt{kx} \geq 2 \ln x \text{에서 } k \text{를 기준으로 정리하면 } k \geq \frac{4(\ln x)^2}{x} \text{이 된다.}$$

$f(x) = \frac{4(\ln x)^2}{x}$ 이라 하고 그래프를 그려 최댓값을 구하면 되는데, 미분을 하면 최댓값이 $x=e^2$ 일 때 생긴다. 따라서 구하는 k 의 최솟값은 $\frac{16}{e^2}$ 이 된다.

12 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = -2 \sin x + a$ 라 하면 임의의 두 x_1, x_2 에 대한 부등식 $\frac{\ln x_1}{x_1} \leq -2 \sin x_2 + a$ 에서

$\ln x$ 에서 $x > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x | x > 0\}$ 이다.

양의 실수 x_1, x_2 에 대한 부등식 $\frac{\ln x_1}{x_1} \leq -2 \sin x_2 + a$ 에서

$$f(x_1) \leq g(x_2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$1 - \ln x = 0 \quad (\because x > 0) \quad \therefore x = e$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = e$ 일 때 극대이면서 최대이고 최댓값은

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

또한, $g(x) = -2 \sin x + a$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-2 \leq -2 \sin x \leq 2$

$$\therefore a - 2 \leq -2 \sin x + a \leq a + 2$$

이때, 임의의 두 양수 x_1, x_2 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하려면 $(f(x) \text{의 최댓값}) \leq (g(x) \text{의 최솟값})$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{1}{e} \leq a - 2 \text{에서 } a \geq 2 + \frac{1}{e}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 한 점에서 만나거나 아래쪽에 있어야 한다.

따라서 구하는 a 의 최솟값은 $2 + \frac{1}{e}$ 이다. **답 ⑤**

13 $f(x) = |x - 1| - \sin x$

$$= \begin{cases} -x + 1 - \sin x & (x \leq 1) \\ x - 1 - \sin x & (x > 1) \end{cases}$$

에서

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \cos x & (x < 1) \\ 1 - \cos x & (x > 1) \end{cases}$$

ㄱ. $x > 1$ 일 때, $f'(x) = 1 - \cos x$

이때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $-1 \leq -\cos x \leq 1$

$$\therefore 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

즉, $f'(x) \geq 0$ 이므로 $x > 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄴ. $x \leq 1$ 일 때, $f(x) = 1 - x - \sin x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{1}{2} > 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} < 0 \quad (\because \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6})$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 에서 연속이고

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 \text{이므로 사잇값 정리에 의하여}$$

$f(\alpha) = 0$ 인 α 가 열린구간 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\therefore \frac{1}{2} < \alpha < \frac{\pi}{6}$$

$x > 1$ 일 때, $f(x) = x - 1 - \sin x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 - \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2 < 0,$$

$$f(2) = 2 - 1 - \sin 2 = 1 - \sin 2$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 2 > 0 \quad (\because \frac{\pi}{2} < 2)$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, 2\right]$ 에서 연속이고

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(2) < 0 \text{이므로 사잇값 정리에 의하여}$$

$f(\beta) = 0$ 인 β 가 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \beta < 2 \quad (\text{참})$$

ㄷ. $m > 0$ 이므로 부등식 $m \sin \frac{4n}{m} > |m - 4n|$ 의 양변을 m 으로 나누면

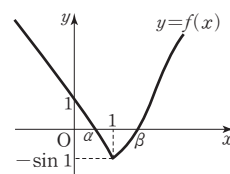
$$\sin \frac{4n}{m} > \left|1 - \frac{4n}{m}\right|$$

$$\left|\frac{4n}{m} - 1\right| - \sin \frac{4n}{m} < 0$$

$$\therefore f\left(\frac{4n}{m}\right) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $x < 1$ 일 때 $f'(x) = -1 - \cos x \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x < 1$ 에서 감소하고, $\neg$ 에서 $x > 1$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

또한, 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근이 α, β ($\alpha < 1, \beta > 1$)이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x) < 0$ 에서 $\alpha < x < \beta$ 이므로 부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 정수 m, n 에 대하여

$$\alpha < \frac{4n}{m} < \beta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때, ㄴ에서 $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} < \beta < 2$ 이므로 부등식

$\textcircled{2}$ 을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 은 $(3, 1), (4, 1)$ 의 2개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ②**

blacklabel 특강 풀이첨삭

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \cos x & (x < 1) \\ 1 - \cos x & (x > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$x < 1$ 일 때 $f'(x) \leq 0$ 이고, $x > 1$ 일 때, $f'(x) \geq 0$ 이다.

즉, 방정식 $f(x) = 0$ 은 2개 이하의 실근을 갖고, 서로 다른 2개의 실근 α, β 를 갖는다면 $\alpha < 1 < \beta$ 이다.

- 14** 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $f(t) = p \sin \pi t - q \cos \pi t$
 이므로 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면
 $v(t) = f'(t) = p\pi \cos \pi t + q\pi \sin \pi t$
 $a(t) = f''(t) = -p\pi^2 \sin \pi t + q\pi^2 \cos \pi t$
 이때, $v\left(\frac{1}{3}\right) = 6\pi$ 이므로
 $p\pi \cos \frac{\pi}{3} + q\pi \sin \frac{\pi}{3} = 6\pi$
 $\frac{p}{2}\pi + \frac{\sqrt{3}q}{2}\pi = 6\pi$
 $\therefore p + \sqrt{3}q = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또한, $a\left(\frac{1}{3}\right) = -2\sqrt{3}\pi^2$ 이므로
 $-p\pi^2 \sin \frac{\pi}{3} + q\pi^2 \cos \frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}\pi^2$
 $-\frac{\sqrt{3}p}{2}\pi^2 + \frac{q}{2}\pi^2 = -2\sqrt{3}\pi^2$
 $\therefore \sqrt{3}p - q = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $p = 6, q = 2\sqrt{3}$
 $\therefore p^2 + q^2 = 36 + 12 = 48$ 답 48

- 15** $x = (2t - 3)e^{-t}$ 에서
 $\frac{dx}{dt} = 2e^{-t} - (2t - 3)e^{-t}$
 $= (-2t + 5)e^{-t}$
 $t < \frac{5}{2}$ 일 때 $\frac{dx}{dt} > 0$,
 $t > \frac{5}{2}$ 일 때 $\frac{dx}{dt} < 0$

 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로
 $\frac{dx}{dt} = 0$ 에서 $(-2t + 5)e^{-t} = 0$
 $-2t + 5 = 0 \quad (\because e^{-t} \neq 0)$
 $t = \frac{5}{2} \quad \therefore a = \frac{5}{2}$
 이때의 위치는
 $b = \left(2 \times \frac{5}{2} - 3\right)e^{-\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}}$
 $\therefore ab = \frac{5}{2} \times 2e^{-\frac{5}{2}} = 5e^{-\frac{5}{2}}$ 답 ③

- 16** $x = 1 + \sin t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = \cos t$
 $y = \cos^2 t - \cos 2t$ 에서
 $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t \times (-\sin t) + 2 \sin 2t$
 $= -2 \sin t \cos t + 4 \sin t \cos t$
 $= 2 \sin t \cos t \quad (\because \sin 2t = 2 \sin t \cos t)$
 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $(\cos t, 2 \sin t \cos t)$
 이므로 속력은
 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t \cos^2 t}$
 $= \sqrt{\cos^2 t + 4(1 - \cos^2 t) \cos^2 t}$
 $= \sqrt{-4 \cos^4 t + 5 \cos^2 t}$

- $\cos^2 t = X$ 로 놓으면 $0 \leq X \leq 1$ 이고
 $\sqrt{-4X^2 + 5X} = \sqrt{-4\left(X - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{25}{16}}$
 따라서 $X = \frac{5}{8}$ 일 때 속력이 최대가 된다.
 즉, $\cos^2 t = \frac{5}{8}$ 이므로 $\sin^2 t = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$
 $\therefore \sin t = \pm \sqrt{\frac{3}{8}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$
 이때의 점 P의 위치 (a, b) 는
 $a = 1 + \sin t = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$,
 $b = \cos^2 t - \cos 2t$
 $= \cos^2 t - (\cos^2 t - \sin^2 t)$
 $= \sin^2 t = \frac{3}{8}$
 $\therefore (a-1)^2 + b = \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

- 17** 점 P의 시각 t_1 에서의 위치를 점 $(4, 0)$ 이라 하면
 $a(1 - \cos^3 \omega t_1) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a \sin^3 \omega t_1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $a > 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서 $\sin \omega t_1 = 0$
 $\therefore \cos \omega t_1 = \pm 1$
 그런데 $\cos \omega t_1 = 1$ 이면 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않으므로
 $\cos \omega t_1 = -1$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면
 $a\{1 - (-1)\} = 4, 2a = 4 \quad \therefore a = 2$
 $x = 2(1 - \cos^3 \omega t), y = 2 \sin^3 \omega t$ 이므로
 $\frac{dx}{dt} = 2 \times 3 \cos^2 \omega t \sin \omega t \times \omega = 6\omega \sin \omega t \cos^2 \omega t$,
 $\frac{dy}{dt} = 2 \times 3 \sin^2 \omega t \cos \omega t \times \omega = 6\omega \sin^2 \omega t \cos \omega t$
 점 P의 시각 t 에서의 속도는
 $(6\omega \sin \omega t \cos^2 \omega t, 6\omega \sin^2 \omega t \cos \omega t)$
 이므로 속력은
 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$
 $= \sqrt{(6\omega \sin \omega t \cos^2 \omega t)^2 + (6\omega \sin^2 \omega t \cos \omega t)^2}$
 $= \sqrt{36\omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t \times (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$
 $= 6\omega |\sin \omega t \cos \omega t| \quad (\because \omega > 0)$
 $= 3\omega |\sin 2\omega t|$
 이때, 속력의 최댓값이 6이므로
 $3\omega = 6 \quad \therefore \omega = 2$
 $\therefore a + \omega = 2 + 2 = 4$ 답 4

- 18** 시각 t 에서의 점 P의 위치를 (x, y) 라 하면
 $y = xe^{x-1}$ 에서
 $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(xe^{x-1}) = \frac{d}{dx}(xe^{x-1}) \times \frac{dx}{dt}$
 $= (e^{x-1} + xe^{x-1}) \frac{dx}{dt}$
 $= (x+1)e^{x-1} \frac{dx}{dt}$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, (x+1)e^{x-1}\frac{dx}{dt}\right)$$

점 P의 속력이 4이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left\{(x+1)e^{x-1}\frac{dx}{dt}\right\}^2} = 4$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{1+(x+1)^2e^{2x-2}} = 4$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{\sqrt{1+(x+1)^2e^{2x-2}}}$$

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발이 Q이므로 점 Q의 위치

는 $(x, 0)$ 이고 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, 0\right)$ 이다.

즉, 점 Q의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 0^2} = \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+(1+x)^2e^{2x-2}}}\end{aligned}$$

따라서 $x=1$ 일 때 점 Q의 속력은

$$\frac{4}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

19 점 P의 속력이 매초 1이고 호 AB를 따라 움직이므로 t 초 후, 호 AP의 길이는 t 이고 호 AP의 중심각의 크기도 t 이다.

즉, 시각 t 에서의 점 P의 위치는 $(\cos t, \sin t)$ 이므로 직선 OP의 방정식은 $y = (\tan t)x$ 이다.

점 Q는 직선 AB, 즉 $y = -x+1$ 과 직선 $y = (\tan t)x$ 의 교점이므로

$$-x+1 = (\tan t)x \text{에서 } (\tan t+1)x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\tan t+1}, y = (\tan t)x = \frac{\tan t}{\tan t+1}$$

시각 t 에서의 점 Q의 속도는

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sec^2 t}{(\tan t+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sec^2 t \times (\tan t+1) - \tan t \times \sec^2 t}{(\tan t+1)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 t}{(\tan t+1)^2}$$

점 P의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 일 때의 시각을 t_1 이라 하면

$$\cos t_1 = \frac{4}{5} \text{이므로 } \tan t_1 = \frac{3}{4}, \sec t_1 = \frac{5}{4}$$

이때의 점 Q의 속도는

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{\sec^2 t_1}{(\tan t_1+1)^2}, \frac{\sec^2 t_1}{(\tan t_1+1)^2}\right) \\ &= \left(-\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}+1\right)^2}, \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}+1\right)^2}\right) = \left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49}\right)\end{aligned}$$

따라서 $a = -\frac{25}{49}$, $b = \frac{25}{49}$ 이므로

$$b-a = \frac{25}{49} - \left(-\frac{25}{49}\right) = \frac{50}{49}$$

답 ⑤

20 원 C는 중심이 원점을 출발하여 직선 $y=x$ 위를 매초 $4\sqrt{2}$ 의 속력으로 움직이므로 t 초동안 움직인 거리는 $4\sqrt{2}t$ 이다.

시각 t 에서의 원 C의 중심을 $C(a, a)$ ($a>0$)라 하면

$$\sqrt{a^2+a^2} = 4\sqrt{2}t, a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}t$$

$$\therefore a = 4t$$

즉, 시각 t 에서의 원 C의 중심의 위치는 $(4t, 4t)$ 이다.

한편, A(1, 0)이라 하면 점 P는 점 A에서 출발하여 원 C 위를 시계 반대 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직이므로 t 초 후 점 A의 위치를 A', 점 P의 위치를 P', 원의 중심의 위치를 O'이라 하면

$$\angle A'O'P' = 2t$$

시각 t 에서의 점 P의 위치는

$$(4t + \cos 2t, 4t + \sin 2t) \text{이다.}$$

원 C의 중심과 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4t = \frac{\sin 2t}{\cos 2t}(x - 4t)$$

$$\therefore y = (\tan 2t)x - 4t \tan 2t + 4t$$

이 직선이 x 축과 만나는 점이 Q이므로

$$0 = (\tan 2t)x - 4t \tan 2t + 4t \text{에서}$$

$$x = \frac{4t \tan 2t - 4t}{\tan 2t} = 4t - 4t \cot 2t$$

$$\therefore Q(4t - 4t \cot 2t, 0)$$

시각 t 에서의 점 Q의 속도는

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 4 \cot 2t - 4t \times (-\csc^2 2t) \times 2$$

$$= 4 - 4 \cot 2t + 8t \csc^2 2t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

에서 $(4 - 4 \cot 2t + 8t \csc^2 2t, 0)$ 이므로 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(4 - 4 \cot 2t + 8t \csc^2 2t)^2 + 0^2} \\ &= |4 - 4 \cot 2t + 8t \csc^2 2t|\end{aligned}$$

따라서 시각 $t = \frac{\pi}{8}$ 에서의 점 Q의 속력은

$$\begin{aligned}\left|4 - 4 \cot \frac{\pi}{4} + 8 \times \frac{\pi}{8} \csc^2 \frac{\pi}{4}\right| &= 2\pi \\ \underbrace{\quad}_{=\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}}=1} \quad \underbrace{\quad}_{=\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2}\end{aligned}$$

답 2π

Step 3

1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 69

01 44

02 2

03 $\frac{29}{32}$

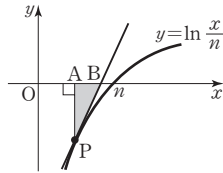
04 6

05 ④

06 22

01 해결단계

① 단계	점 $P\left(t, \ln \frac{t}{n}\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여 점 B의 좌표를 구한다.
② 단계	삼각형 ABP의 넓이 $S(t)$ 를 구한 후, $S(t)$ 의 최댓값을 구한다.
③ 단계	부등식 $S(t) \leq p$ 를 만족시키는 p 의 최솟값 a_n 을 구한 후, $\frac{10}{e^2} < a_n < \frac{100}{e^2}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수를 구한다.



곡선 $y = \ln \frac{x}{n}$ 위의 점 $P\left(t, \ln \frac{t}{n}\right)$ ($0 < t < n$)에서 x 축에 내린 수선의 발이 A이므로

$$A(t, 0)$$

$$y = \ln \frac{x}{n} = \ln x - \ln n \text{에서 } y' = \frac{1}{x}$$

점 $P\left(t, \ln \frac{t}{n}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln \frac{t}{n} = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln \frac{t}{n}$$

이 접선이 x 축과 만나는 점이 B이므로

$$0 = \frac{1}{t}x - 1 + \ln \frac{t}{n} \text{에서 } \frac{1}{t}x = 1 - \ln \frac{t}{n}$$

$$\therefore x = t - t \ln \frac{t}{n}$$

$$\therefore B\left(t - t \ln \frac{t}{n}, 0\right)$$

삼각형 APB의 넓이가 $S(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(t - t \ln \frac{t}{n} \right) - t \right\} \times \left(-\ln \frac{t}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} t \left(\ln \frac{t}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t}{n} \right)^2 + \frac{1}{2} t \times 2 \ln \frac{t}{n} \times \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t}{n} \right)^2 + \ln \frac{t}{n} \end{aligned}$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2} \left(\ln \frac{t}{n} \right)^2 + \ln \frac{t}{n} = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{t}{n} \left(\ln \frac{t}{n} + 2 \right) = 0$$

$$\ln \frac{t}{n} = 0 \text{ 또는 } \ln \frac{t}{n} = -2$$

$$\frac{t}{n} = 1 \text{ 또는 } \frac{t}{n} = e^{-2}$$

$$\therefore t = n \text{ 또는 } t = \frac{n}{e^2}$$

그런데 $0 < t < n$ 이므로 $t = \frac{n}{e^2}$

$0 < t < n$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{n}{e^2}$	...	(n)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

함수 $S(t)$ 는 $t = \frac{n}{e^2}$ 일 때 극대이면서 최대이고 최댓값

$$S\left(\frac{n}{e^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{n}{e^2} \left(\ln \frac{1}{e^2} \right)^2 = \frac{2n}{e^2} \text{을 갖는다.}$$

이때, $0 < t < n$ 인 실수 t 에 대하여 $S(t) \leq p$ 이라면 ($S(t)$ 의 최댓값) $\leq p$ 이어야 하므로

$$\frac{2n}{e^2} \leq p$$

이것을 만족시키는 실수 p 의 최솟값이 $\frac{2n}{e^2}$ 이므로

$$a_n = \frac{2n}{e^2}$$

$$\frac{10}{e^2} < a_n < \frac{100}{e^2} \text{에서 } \frac{10}{e^2} < \frac{2n}{e^2} < \frac{100}{e^2}$$

$$10 < 2n < 100 \quad \therefore 5 < n < 50$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 6, 7, 8, ..., 49의 44개이다. 답 44

02 해결단계

① 단계	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하고, 조건 ㉑, ㉒를 이용하여 a 와 b 사이의 관계식과 c, d 의 값을 각각 구한다.
② 단계	조건 ㉓를 만족시키기 위한 조건을 찾고 a 의 값의 범위를 구한다.
③ 단계	$f(-1)$ 의 최솟값을 구한다.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1} \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 + 1)f'(x) - 2xf(x)}{(x^2 + 1)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$h(x) = (x^2 + 1)f'(x) - 2xf(x)$ 라 하면 조건 ㉒에서 함수 $g(x)$ 가 $x=0, x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$g'(0) = 0, g'(1) = 0 \text{에서 } h(0) = 0, h(1) = 0$$

$$h(0) = 0 \text{에서 } f'(0) = 0$$

$$h(1) = 0 \text{에서 } 2f'(1) - 2f(1) = 0$$

$$\therefore f'(1) = f(1)$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 조건 ㉑에서 $f(0) = 4$ 이므로 $d = 4$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{이므로}$$

$$f'(0) = 0 \text{에서 } c = 0$$

$$f'(1) = f(1) \text{에서 } 3a + 2b = a + b + 4$$

$$\therefore b = 4 - 2a$$

$$\text{즉, } f(x) = ax^3 + (4 - 2a)x^2 + 4,$$

$$f'(x) = 3ax^2 + (8 - 4a)x \text{이므로}$$

$$h(x) = (x^2 + 1)\{3ax^2 + (8 - 4a)x\}$$

$$- 2x\{ax^3 + (4 - 2a)x^2 + 4\}$$

$$= 3ax^4 + (8 - 4a)x^3 + 3ax^2 + (8 - 4a)x$$

$$- 2ax^4 - (8 - 4a)x^3 - 8x$$

$$= ax^4 + 3ax^2 - 4ax$$

$$= ax(x - 1)(x^2 + x + 4)$$

$$\therefore g'(x) = \frac{ax(x - 1)(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 1)^2} \quad (\because \textcircled{1})$$

이때, $g'(x) = 0$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \quad (\because x^2 + x + 4 > 0)$$

(i) $a > 0$ 일 때,

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		\	극소	/

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이고 최솟값

$$g(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{8-a}{2} \text{를 갖는다.}$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		/	극대	\

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극대이면서 최대이고 최댓값

$$g(1) = \frac{f(1)}{2} = \frac{8-a}{2} \text{를 갖는다.}$$

양수 x 에 대하여 $g(x) \geq 3$ 이려면

($g(x)$ 의 최솟값) ≥ 3 이어야 하고, (i), (ii)에서 $a > 0$ 일 때 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 존재하므로

$$g(1) \geq 3 \text{에서 } \frac{8-a}{2} \geq 3, 8-a \geq 6$$

$$a \leq 2 \quad \therefore 0 < a \leq 2$$

$$f(-1) = -a + 4 - 2a + 4 = -3a + 8 \text{이므로}$$

$$0 < a \leq 2 \text{에서 } -6 \leq -3a < 0$$

$$\therefore 2 \leq -3a + 8 < 8$$

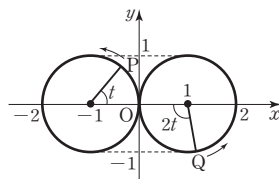
따라서 $f(-1)$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

03 해결단계

① 단계	시각 t 를 이용하여 두 점 P, Q의 위치를 나타낸다.
② 단계	선분 PQ의 길이가 최대일 조건을 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 조건을 이용하여 이때의 선분 PQ의 중점에서 y 축에 내린 수선의 발 R의 속력을 구한다.

점 Q의 속력이 점 P의 속력의 2배이므로 호 OQ의 길이는 호 OP의 길이의 2배이고, 호 OQ의 중심각의 크기도 호 OP의 중심각의 크기의 2배이다.



시각 t 에서의 호 OP의 중심각의 크기가 t 이므로 호 OQ의 중심각의 크기는 $2t$ 이고, 두 점 P, Q는 각각 중심이 $(-1, 0)$, $(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있으므로 시각 t 에서의 위치는

$$P(\cos t - 1, \sin t), Q(1 - \cos 2t, -\sin 2t)$$

선분 PQ의 길이는

PQ

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\cos t - 2 + \cos 2t)^2 + (\sin t + \sin 2t)^2} \\ &= \sqrt{(2 \cos^2 t + \cos t - 3)^2 + (\sin t + 2 \sin t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{(2 \cos t + 3)^2 (\cos t - 1)^2 + \sin^2 t \times (1 + 2 \cos t)^2} \\ &= \sqrt{(1 - \cos t) \{ (2 \cos t + 3)^2 (1 - \cos t) + (1 + \cos t)(1 + 2 \cos t)^2 \}} \\ &= \sqrt{(1 - \cos t)(8 \cos t + 10)} \end{aligned}$$

$$f(t) = (1 - \cos t)(8 \cos t + 10) \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = \sin t(8 \cos t + 10) + (1 - \cos t)(-8 \sin t)$$

$$= 16 \sin t \cos t + 2 \sin t$$

$$= 2 \sin t(8 \cos t + 1)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } \sin t = 0 \text{ 또는 } \cos t = -\frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, 두 점 P, Q는 각각 $t=2\pi$, $t=\pi$ 일 때 원점으로 되돌아 오므로 선분 PQ의 길이는 2π 마다 반복된다.

즉, 함수 $f(t)$ 는 주기가 2π 인 함수이므로 $0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수 $f(t)$ 의 그래프의 개형을 그려 보자.

①의 $\sin t = 0$ 에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{1}{8}$ 의 교점의 x 좌표를

α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$\cos t = -\frac{1}{8} \text{에서 } t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	β	$\cdots$	(2π)
$f'(t)$	0	+	0	−	0	+	0	−	
$f(t)$	0	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0

함수 $f(t)$ 는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$ 일 때 극대이면서 최대이다.

즉, 선분 PQ의 길이는 $\cos t = -\frac{1}{8}$ 일 때 최대이다.

한편, 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\cos t - \cos 2t}{2}, \frac{\sin t - \sin 2t}{2} \right)$$

이므로 이 점에서 y 축에 내린 수선의 발 R는

$$R\left(0, \frac{\sin t - \sin 2t}{2}\right)$$

$$x=0, y = \frac{\sin t - \sin 2t}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t - 2 \cos 2t}{2} = \frac{\cos t - 4 \cos^2 t + 2}{2}$$

$$\text{즉, 점 R의 시각 } t \text{에서의 속도는 } \left(0, \frac{\cos t - 4 \cos^2 t + 2}{2}\right)$$

이므로 점 R의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{\cos t - 4 \cos^2 t + 2}{2}\right)^2} \\ &= \left| \frac{\cos t - 4 \cos^2 t + 2}{2} \right| \end{aligned}$$

따라서 선분 PQ의 길이가 최대일 때의 점 R의 속력은

$$\left| \frac{-\frac{1}{8} - 4 \times \frac{1}{64} + 2}{2} \right| = \frac{29}{32}$$

답 29/32

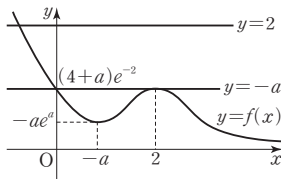
04 해결단계

① 단계	조건 ㉞를 이용하여 a 와 b 사이의 관계식과 a 의 부호를 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 가 $x=-a$ 에서 극솟값을 갖기 위한 a 의 값의 범위를 구한 후, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 파악한다.
③ 단계	조건 ㉞를 만족시키기 위한 조건을 파악한 후, a 의 값을 구한다.
④ 단계	p, q 의 값을 각각 구한 후, $p-q$ 의 값을 구한다.

$f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$ 에서
 $f'(x) = (2x + a)e^{-x} - (x^2 + ax + b)e^{-x}$
 $= -\{x^2 + (a-2)x - a + b\}e^{-x}$
 조건 ㉞에서 $f'(-a) = 0$ 이므로
 $-\{a^2 - a(a-2) - a + b\}e^a = 0$
 $a + b = 0$ ($\because e^a > 0$) $\therefore b = -a$
 또한, $f(-a) > 0$ 이므로
 $f(-a) = (a^2 - a^2 - a)e^a = -ae^a > 0$
 $\therefore a < 0$ ($\because e^a > 0$)
 $f'(x) = -\{x^2 + (a-2)x - a + b\}e^{-x}$
 $= -\{x^2 + (a-2)x - 2a\}e^{-x}$ ($\because b = -a$)
 $= -(x+a)(x-2)e^{-x}$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -a$ 또는 $x = 2$ ㉞
 함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 일 때 극솟값을 가지므로 $x = -a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다.
 그런데 $e^{-x} > 0$ 에서 $f'(x)$ 의 부호는 $-(x+a)(x-2)$ 의 부호와 일치하므로 $-a < 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 일 때 극솟값 $f(-a) = -ae^a$,
 $x = 2$ 일 때 극댓값 $f(2) = (4+a)e^{-2}$ 을 갖는다.
 이때, $0 < -a < 2$, 즉 $-2 < a < 0$ 이므로 $e^{-2} < e^a < 1$
 $\therefore 0 < -ae^a < 2$, $-ae^a < -a$
 조건 ㉞에서 방정식 $f'(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 ㉞에 의하여 두 방정식 $f(x) = -a$,
 $f(x) = 2$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합이 3이어야 하므로
 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y = 2$, $y = -a$ 는
 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(2) = -a$ 이어야 하므로
 $(4+a)e^{-2} = -a$, $a(e^{-2} + 1) = -4e^{-2}$
 $\therefore a = \frac{-4e^{-2}}{e^{-2} + 1} = \frac{-4}{1 + e^2}$
 따라서 $p = 2$, $q = -4$ 이므로
 $p - q = 2 - (-4) = 6$

답 6

05 해결단계

① 단계	방정식 $tf(x) = xf(t)$ 를 $f(x) = \frac{f(t)}{t}x$ 로 변형한 후, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{f(t)}{t}x$ 의 교점의 개수임을 파악한다.
② 단계	원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그린 접선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 좌표를 이용하여 $g(t)$ 의 함수식을 구한다.
③ 단계	함수 $y = g(t)$ 의 그래프를 이용하여 $\neg$, $\wedge$, $\cup$ 의 참, 거짓을 판별한다.

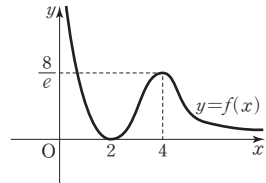
$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2(x-2)^2e^{-x+3} \text{에서} \\
 f'(x) &= 4(x-2)e^{-x+3} - 2(x-2)^2e^{-x+3} \\
 &= 2(x-2)e^{-x+3}\{2 - (x-2)\} \\
 &= 2(x-2)(4-x)e^{-x+3}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 일 때 극솟값 $f(2) = 0$, $x = 4$ 일 때 극댓값 $f(4) = \frac{8}{e}$ 을 가지므로 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $tf(x) = xf(t)$ 에서 $f(x) = \frac{f(t)}{t}x$ ($\because t > 0$)이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{f(t)}{t}x$ 의 서로 다른 교점의 개수와 같다.㉞

이때, 직선 $y = \frac{f(t)}{t}x$ 는 원점과 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점을 지나므로 원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그린 접선을 구해 보자.

접점의 좌표를 $(a, 2(a-2)^2e^{-a+3})$ ($a > 0$)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(a) = 2(a-2)(4-a)e^{-a+3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2(a-2)^2e^{-a+3} = 2(a-2)(4-a)e^{-a+3}(x - a)$$

이 직선이 원점을 지나므로 위의 식에 $x = 0$, $y = 0$ 을 대입하면

$$-2(a-2)^2e^{-a+3} = -2a(a-2)(4-a)e^{-a+3}$$

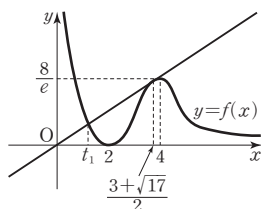
$$(a-2)^2 = a(a-2)(4-a) \quad (\because -2e^{-a+3} \neq 0)$$

$$(a-2)\{(a-2) - a(4-a)\} = 0$$

$$(a-2)(a^2 - 3a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad (\because a > 0)$$

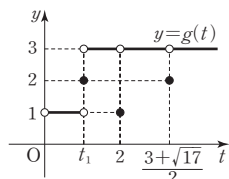
즉, 두 점 $(2, f(2))$, $(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, f(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}))$ 에서의 곡선 $y = f(x)$ 의 접선은 각각 원점을 지난다.



위의 그림과 같이 점 $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, f\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\right)$ 에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 접점이 아닌 점의 x 좌표를 t_1 이라 하면 ㉠에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{f(t)}{t}x$ 의 서로 다른 교점의 개수가 $g(t)$ 이므로

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < t_1) \\ 2 & (t = t_1) \\ 3 & (t_1 < t < 2) \\ 1 & (t = 2) \\ 3 & \left(2 < t < \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \\ 2 & \left(t = \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \\ 3 & \left(t > \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} g(t) = 3$ (참)

ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 $t=t_1$, $t=2$, $t=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 에서 연속이 아니므로 불연속점의 개수는 3이다. (거짓)

ㄷ. 위의 그림에서 방정식 $g(t)=2$ 의 실근은 t_1 , $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 의 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

06 해결단계

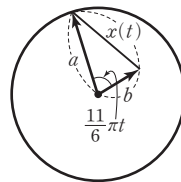
① 단계	시침과 분침의 회전 속도를 이용하여 시각 t 에서의 두 바늘이 이루는 각을 구한다.
② 단계	코사인법칙을 이용하여 $x(t)$ 를 a, b, t 를 이용하여 나타낸 후, $v(t)$ 를 구한다.
③ 단계	$v(t)$ 가 최대가 되는 조건을 찾은 후, k 의 값을 구한다.

시계의 두 바늘이 출발한 후, 두 바늘 모두 처음과 같은 지점에 위치하려면 12시간이 지나야 한다.

$t=12$ 일 때 두 바늘이 처음으로 $t=0$ 일 때의 위치와 같으므로 t 의 단위는 시간이다.

시침은 한 시간 동안 $\frac{\pi}{6}$ 만큼 회전하고, 분침은 한 시간 동안 2π 만큼 회전하므로 시각 t 에서 시침과 분침은 처음 위치에서 각각 $\frac{\pi}{6}t$, $2\pi t$ 만큼씩 회전한 지점에 위치한다.

즉, 시각 $t=0$ 에서 두 바늘은 같은 위치에 있으므로 시각 t 에서 분침과 시침이 이루는 각은 $\frac{11}{6}\pi t$ 이다.



이때, 두 바늘의 끝 점 사이의 거리가 $x(t)$ 이므로 코사인 법칙에 의하여

$$\{x(t)\}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t$$

$$\therefore x(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t}$$

두 바늘의 끝 점이 가까워지거나 멀어지는 속도 $v(t)$ 는

$x'(t) = v(t)$ 이므로 위의 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{2ab \sin \frac{11}{6}\pi t \times \frac{11}{6}\pi}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t}} \\ &= \frac{11ab\pi \sin \frac{11}{6}\pi t}{6\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t}} \end{aligned}$$

이때, $0 < t < \frac{6}{11}$ 에서

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{11ab\pi}{6} \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{11}{6}\pi t}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t}} \\ &= \frac{11ab\pi}{6} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \frac{11}{6}\pi t}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{11}{6}\pi t}} \end{aligned}$$

$z = \cos \frac{11}{6}\pi t$ ($-1 \leq z \leq 1$)로 놓고

$f(z) = \frac{1-z^2}{a^2 + b^2 - 2abz}$ 이라 하자.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{-2z(a^2 + b^2 - 2abz) - (1-z^2)(-2ab)}{(a^2 + b^2 - 2abz)^2} \\ &= \frac{2abz^2 - 2(a^2 + b^2)z + 2ab}{(a^2 + b^2 - 2abz)^2} \\ &= \frac{2(az - b)(bz - a)}{(a^2 + b^2 - 2abz)^2} \end{aligned}$$

$$f'(z) = 0 \text{에서 } z = \frac{b}{a} \text{ 또는 } z = \frac{a}{b}$$

이때, $a > b > 0$ 이므로 $\frac{a}{b} > 1$, $0 < \frac{b}{a} < 1$

$$\therefore z = \frac{b}{a} \quad (\because -1 \leq z \leq 1)$$

함수 $f(z)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

z	-1	...	$\frac{b}{a}$	...	1
$f'(z)$		+	0	-	
$f(z)$		↗	극대	↘	

함수 $f(z)$ 는 $z = \frac{b}{a}$ 일 때, 극대이면서 최대이므로

속도 $v(t)$ 는 $\cos \frac{11}{6}\pi t = \frac{b}{a}$ 를 만족시키는 t ($0 < t < \frac{6}{11}$)에서 최댓값 $\frac{11}{6}b\pi$ 를 갖는다.

같은 방법으로 속도 $v(t)$ 는 $\frac{6}{11} < t < \frac{12}{11}$ 에서 최솟값 $-\frac{11}{6}b\pi$ 를 갖고, 속도 $v(t)$ 는 주기가 $\frac{12}{11}$ 인 연속함수이므로 최대·최소 정리에 의하여 속력 $|v(t)|$ 는 닫힌구간 $\left[\frac{6}{11}n, \frac{6}{11}(n+1)\right]$ ($n=0, 1, 2, \dots, 21$)에서 최댓값을 갖는다.
따라서 속력이 최대가 되는 것은 22회 나타나므로 $k=22$

답 22

이것이 수능

p. 70

1 30

2 71

3 4

4 ②

1 해결단계

① 단계	함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 조건 ㉞를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한다.
② 단계	조건 ㉞를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 상수 β 를 이용하여 나타낸다.
③ 단계	조건 ㉞를 만족시키기 위한 함수 $f(x)$ 의 극댓값의 조건을 구한 후, 상수 β 의 값을 구한다.
④ 단계	함수 $f(x)$ 를 미분하여 $f'(x)$ 를 구한 후, $f'(5)$ 의 값을 구한다.

$g(x)=2x^4e^{-x}$ 에서

$g'(x)=8x^3e^{-x}-2x^4e^{-x}=-2x^3e^{-x}(x-4)$

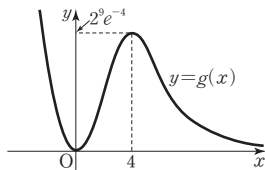
$g'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

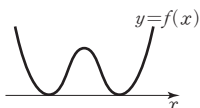
x	...	0	...	4	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	\	극소	/	극대	\

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극솟값 $g(0)=0$, $x=4$ 일 때 극댓값 $g(4)=2^9e^{-4}$ 을 갖고, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=0$ 이므로 함수

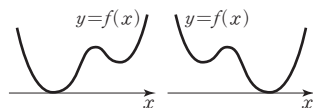
$y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



한편, 사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 최솟값이 0이면 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접해야 하고 그래프의 개형은 다음의 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 [그림 2]와 같고, $x=a$ 에서 x 축에 접한다고 하면 조건 ㉞의 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(g(x))=0$ 의 실근의 개수는 방정식 $g(x)=a$ 의 실근의 개수와 같다.㉞

그런데 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 $a \geq 0$ 일 때, 많아야 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $f(x)=0$ 은 2개의 0 이상의 실근을 가져야 한다.

즉, 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같고 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2(x-\beta)^2 \quad (0 \leq a < \beta) \quad \dots\dots\textcircled{㉞}$$

이라 할 수 있다.

조건 ㉞에서 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로

$h'(0)=0$ 이고 $x=0$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다.

$h(x)=f(g(x))$ 에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ 이고

$x=0$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(g(x))$ 의 부호는 모두 양이어야 한다.

이때, $x=0$ 의 좌우에서 $g(x)>0$ 이므로 $x=0$ 의 우측에서 $f'(x)>0$ 이어야 한다.

그런데 $a>0$ 이면 $x=0$ 의 우측에서 $f'(x)<0$ 이므로 $a=0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \textcircled{㉞} \text{에서 } f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2 \quad \dots\dots\textcircled{㉞}$$

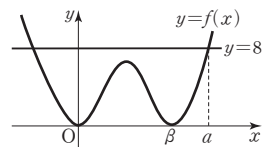
이때, $f(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\beta$ 이므로 ㉞에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 또는 $g(x)=\beta$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이어야 한다.

방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 0뿐이므로 방정식 $g(x)=\beta$ 의 실근의 개수는 3이어야 하고 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\beta$ 는 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

한편, 조건 ㉞에서 방정식 $h(x)=8$, 즉 $f(g(x))=8$ 의 서로 다른 실근의 개수가 6이어야 하므로 $g(x)=t$ 로 놓으면 $t \geq 0$ 이고 주어진 방정식은 $f(t)=8$ 이다.

방정식 $f(t)=8$ 의 근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 의 교점의 개수와 같으므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 작은 경우

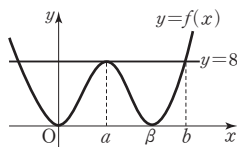


두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중에서 0보다 큰 값을 a 라 하면 $f(t)=8$ 에서 $t=a$ 이므로 방정식 $g(x)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ ($a>0$)

인 직선은 많아야 세 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8인 경우

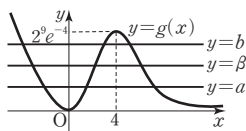


두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중에서 0보다 큰 값을 각각 a , b ($a < b < \beta$)라 하면

$f(t)=8$ 에서 $t=a$ 또는 $t=b$ 이므로 방정식

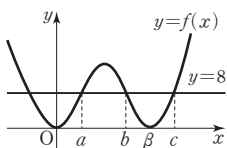
$g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합이 6이어야 한다.

이때, 다음 그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수가 3이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 의 교점의 개수가 3이면 조건을 만족시킨다.



즉, $b < g(4) = 2^9e^{-4}$ 이어야 한다.㉔

(iii) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 큰 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중에서 0보다 큰 값을 각각 a , b , c ($0 < a < b < \beta < c$)라 하면

$f(t)=8$ 에서 $t=a$ 또는 $t=b$ 또는 $t=c$ 이므로 세 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 또는 $g(x)=c$ 의 서로 다른 실근의 개수의 합이 6이어야 한다.

그런데 $a < b < \beta$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=a$, $y=b$ 의 교점의 개수는 각각 3이므로 방정식 $h(x)=8$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 6보다 크다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 8이어야 하므로 ㉔에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-\beta)^2 + x^2(x-\beta) \\ &= x(x-\beta)(2x-\beta) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\beta \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{\beta}{2}$	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\beta}{2}$ 일 때 극댓값을 가지므로

$$f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8 \text{에서 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2=8$$

$$\beta^4=2^8 \quad \therefore \beta=4 \quad (\because \beta > 0)$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$$

$$f(x)=8 \text{에서 } \frac{1}{2}x^2(x-4)^2=8$$

$$x^4-8x^3+16x^2-16=0$$

$$(x-2)^2(x^2-4x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=2-2\sqrt{2} \text{ 또는 } x=2+2\sqrt{2}$$

즉, $b=2+2\sqrt{2}$ 이고 ㉔을 만족시킨다.

따라서 $f'(x)=x(x-4)(2x-4)$ 이므로

$$f'(5)=5 \times 1 \times 6=30$$

답 30

2 해결단계

① 단계	$f(x)=a(x-m)^2+n$ 으로 나타낸 후, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프도 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭임을 파악한다.
② 단계	조건 (나)를 이용하여 a 의 부호와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한 후, 조건 (㉔)을 이용하여 m 의 값을 구한다.
③ 단계	조건 (나), (㉔)을 이용하여 a , n 의 값을 각각 구한 후, $ f(-1) $ 의 값을 구한다.

$f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x)=a(x-m)^2+n \quad (a, m, n \text{은 유리수이고, } a \neq 0)$$

이라 하면

$$f'(x)=2a(x-m), \quad f''(x)=2a$$

두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=|f'(x)|$ 는 각각 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$ 의 그래프도 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.㉕

$x > m$ 일 때,

$$\begin{aligned} g(x) &= |f'(x)|e^{f(x)} \\ &= |2a(x-m)|e^{f(x)} \\ &= 2|a|(x-m)e^{f(x)} \\ g'(x) &= 2|a|\{e^{f(x)} + (x-m)e^{f(x)} \times f'(x)\} \\ &= 2|a|e^{f(x)}\{1+2a(x-m)^2\} \end{aligned}$$

이때, $a > 0$ 이면 $g'(x) > 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x > m$ 에서 증가하고 ㉕에 의하여 $x < m$ 에서 감소하므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 존재하지 않는다.

그런데 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $4\sqrt{e}$ 이므로 $a < 0$

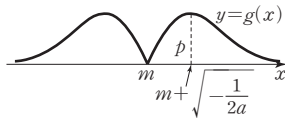
$$g'(x)=0 \text{에서 } 1+2a(x-m)^2=0$$

$$(x-m)^2=-\frac{1}{2a} \quad \therefore x=m+\sqrt{-\frac{1}{2a}} \quad (\because x > m)$$

$x > m$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(m)	$\cdots$	$m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}$ 일 때 극대이면서 최대이고 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 위의 그림에서 $m=2$

또한, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 $4\sqrt{e}$ 이므로

$$g\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=4\sqrt{e}$$

$$\left|f'\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)\right|e^{f\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)}=4\sqrt{e}$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수이고, 조건 (다)에 의하여 방정식

$$g(x)=4\sqrt{e} \text{의 근도 모두 유리수이므로 } f'\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) \text{과}$$

$$f\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) \text{은 각각 유리수이다. 즉,}$$

$$\left|f'\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)\right|=4, f\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\left|f'\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)\right|=4 \text{에서 } \left|2a \times \sqrt{-\frac{1}{2a}}\right|=4$$

$$\sqrt{-2a}=4, -2a=16 \quad \therefore a=-8$$

$$f\left(m+\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=\frac{1}{2} \text{에서 } f\left(2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$-8\left(2+\frac{1}{4}-2\right)^2+n=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+n=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=-8(x-2)^2+1 \text{이므로}$$

$$|f(-1)|=|-8 \times 9+1|=71$$

답 71

3 해결단계

① 단계	점 P의 시각 t 에서의 위치를 이용하여 점 P의 속도와 속력을 각각 구한 후, 점 P의 속력이 최대가 되기 위한 조건을 파악한다.
② 단계	①단계에서 구한 점 P의 속도를 이용하여 점 P의 가속도를 구한 후, 점 P의 속력이 최대가 될 때의 점 P의 가속도의 크기를 구한다.

$$x=1-\cos 4t \text{에서 } \frac{dx}{dt}=4 \sin 4t$$

$$y=\frac{1}{4} \sin 4t \text{에서 } \frac{dy}{dt}=\cos 4t$$

점 P의 속도가 $(4 \sin 4t, \cos 4t)$ 이므로 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(4 \sin 4t)^2+(\cos 4t)^2} \\ &= \sqrt{16 \sin^2 4t+\cos^2 4t} \\ &= \sqrt{16 \sin^2 4t+1-\sin^2 4t} \\ &= \sqrt{15 \sin^2 4t+1} \end{aligned}$$

점 P의 속력이 최대가 되려면

$$\sin^2 4t=1, \text{ 즉 } \cos^2 4t=0$$

이어야 한다.

또한,

$$\frac{dx}{dt}=4 \sin 4t \text{에서 } \frac{d^2x}{dt^2}=16 \cos 4t,$$

$$\frac{dy}{dt}=\cos 4t \text{에서 } \frac{d^2y}{dt^2}=-4 \sin 4t$$

이므로 점 P의 가속도는 $(16 \cos 4t, -4 \sin 4t)$

점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{(16 \cos 4t)^2+(-4 \sin 4t)^2} \\ &= \sqrt{256 \cos^2 4t+16 \sin^2 4t} \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{256 \times 0+16 \times 1}=4$$

답 4

4

해결단계

① 단계	점 Q는 직선 $y=-x$ 위에 있고, 두 직선 PQ, $y=-x$ 가 수직임을 이용하여 점 Q의 좌표를 구한다.
② 단계	점 Q의 속력을 구한 후, $t=1$ 일 때의 속력을 구한다.

점 Q가 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 좌표를 $(a, -a)$ 라 하면 점 P에서 직선 $y=-x$ 에 내린 수선의 발이 Q이므로 직선 PQ와 직선 $y=-x$ 는 서로 수직이다.

즉, 직선 PQ의 기울기가 1이므로

$$\frac{\ln(t^2+1)+a}{t^3+2t-a}=1, \ln(t^2+1)+a=t^3+2t-a$$

$$2a=t^3+2t-\ln(t^2+1)$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}\{t^3+2t-\ln(t^2+1)\}$$

점 Q의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x=\frac{1}{2}\{t^3+2t-\ln(t^2+1)\},$$

$$y=-\frac{1}{2}\{t^3+2t-\ln(t^2+1)\}$$

이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right),$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)$$

즉 점 P의 속도가

$$\left(\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right), -\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)\right) \text{이므로}$$

점 Q의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)\right]^2+\left[-\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)^2} \end{aligned}$$

따라서 $t=1$ 일 때의 점 Q의 속력은

$$\sqrt{\frac{1}{2} \times (3+2-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

답 ②

III

적분법

08 여러 가지 적분법

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 73

- 01 ④ 02 2 03 ④ 04 e^2 05 ②
06 ⑤ 07 ① 08 $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 01 \quad f(x) &= \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $f(1) = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{3} + 2 + 2 + C = \frac{2}{3}$$

$$\therefore C = -4$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2x - 4$ 이므로

$$\begin{aligned} f(9) &= \frac{2}{3} \times 9 \times \sqrt{9} + 2 \times \sqrt{9} + 2 \times 9 - 4 \\ &= 18 + 6 + 18 - 4 \\ &= 38 \end{aligned}$$

답 ④

$$02 \quad \int \frac{8^x}{2^x-1} dx = \int \frac{1}{2^x-1} dx + a \times 4^x + b \times 2^x + x + C$$

에서

$$\int \frac{8^x}{2^x-1} dx - \int \frac{1}{2^x-1} dx = a \times 4^x + b \times 2^x + x + C$$

$$\therefore \int \frac{8^x-1}{2^x-1} dx = a \times 4^x + b \times 2^x + x + C$$

(단, C 는 적분상수)㉠

㉠의 좌변을 정리하면

$$\int \frac{8^x-1}{2^x-1} dx = \int \frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1} dx$$

$$= \int (4^x + 2^x + 1) dx$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

즉, ㉠에서

$$\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = a \times 4^x + b \times 2^x + x + C \text{이므로}$$

$$a = \frac{1}{\ln 4}, \quad b = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{\frac{1}{\ln 4}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

답 2

03 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $\tan^2 x$ 이므로

$$f'(x) = \tan^2 x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \tan^2 x dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0) = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \tan x - x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

답 ④

04 $f(\sqrt{x}) = t$ 로 놓으면 $f(x) > 0$ 에서 $f(\sqrt{x}) > 0$ 이므로 $t > 0$

$$\text{또한, } \frac{dt}{dx} = f'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{이므로}$$

$$F(x) = \int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}f(\sqrt{x})} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{f(\sqrt{x})} \times \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \right\} dx$$

$$= \int \frac{2}{t} dt$$

$$= 2 \ln t + C \quad (\because t > 0)$$

$$= 2 \ln f(\sqrt{x}) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $F(1) = 1$ 이므로

$$2 \ln f(1) + C = 1, \quad 2 \ln 1 + C = 1$$

$$\therefore C = 1$$

즉, $F(x) = 2 \ln f(\sqrt{x}) + 1$ 이므로

$$F(4) = 5 \text{에서 } 2 \ln f(2) + 1 = 5$$

$$\ln f(2) = 2 \quad \therefore f(2) = e^2$$

답 e^2

$$05 \quad f(x) = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx + \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$$

$$= \int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1} dx$$

$$= \int \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x-1)} dx$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x-1} dx$$

이때, $e^x - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C \\ = \ln |e^x - 1| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

그런데 $f(\ln 5) = \ln 2$ 이므로

$$\ln |e^{\ln 5} - 1| + C = \ln 2, \quad \ln |5 - 1| + C = \ln 2$$

$$\ln 4 + C = \ln 2$$

$$\therefore C = \ln 2 - \ln 4 = \ln \frac{2}{4} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln |e^x - 1| - \ln 2$ 이므로

$$f(\ln 9) = \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 \quad \text{답 ②}$$

06 $x > 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{(\ln x)^2}{x}$ 이므로 $f'(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ 이다.

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx \\ = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \\ = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C \\ = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(e, 1)$ 을 지나므로

$$f(e) = 1 \text{에서 } \frac{1}{3} (\ln e)^3 + C = 1$$

$$\frac{1}{3} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + \frac{2}{3}$ 이므로

$$f(e^2) = \frac{(\ln e^2)^3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

07 $f(x) = \int \sin^5 x dx$

$$= \int \sin^4 x \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$f(x) = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

$$= \int \{-(1 - t^2)^2\} dt$$

$$= \int (-t^4 + 2t^2 - 1) dt$$

$$= -\frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 - t + C$$

$$= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$ 이므로

$$-\frac{1}{5} \cos^5 \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} + C = \frac{1}{5}$$

$$\therefore C = \frac{1}{5}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + \frac{1}{5}$

이므로

$$f(0) = -\frac{1}{5} \cos^5 0 + \frac{2}{3} \cos^3 0 - \cos 0 + \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

답 ①

08 $f(x) = \int e^x \cos x dx$ $\leftarrow u(x) = \cos x, v'(x) = e^x$ 으로 놓으면
 $u'(x) = -\sin x, v(x) = e^x$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$
 $\leftarrow p(x) = \sin x, q'(x) = e^x$ 으로 놓으면
 $p'(x) = \cos x, q(x) = e^x$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$\text{즉, } \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

이므로

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) + C_1$$

(단, C_1 은 적분상수)

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C_2$$

(단, C_2 는 적분상수)

이때, $f(0) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} (1 + 0) + C_2 = \frac{1}{2} \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

한편, 부등식 $f(x) \geq \frac{1}{2} e^x$ 에서

$$\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \geq \frac{1}{2} e^x$$

$$\cos x + \sin x \geq 1 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$\text{즉, } \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{삼각함수의 합성에 의하여}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4} \pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

따라서 $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$a + b = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 74~76

01 11	02 ④	03 ②	04 ②	05 6
06 ④	07 ①	08 3π	09 ①	10 $\frac{1}{6}$
11 41	12 ⑤	13 $-2 \ln 2$	14 $\ln \sqrt{3}$	15 ④
16 ②	17 $\frac{1}{e^{2x}-1}$	18 $\pi+3$	19 $3e^2$	20 1
21 ④	22 $\frac{1}{2}$	23 ①	24 $\frac{\pi}{3}$	

01 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면
 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$$= \frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \sqrt{x}-1$$

$$\therefore h(x) = \int h'(x) dx$$

$$= \int (\sqrt{x}-1) dx$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $f(0)=g(0)+2$ 에서 $f(0)-g(0)=2$
 즉, $h(0)=2$ 이므로 $C=2$

따라서 $f(x)-g(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2$ 이므로

$$f(9)-g(9)=\frac{2}{3} \times 9 \times \sqrt{9} - 9 + 2$$

$$= 18 - 9 + 2 = 11$$

답 11

02 $\frac{2}{x} = \frac{d}{dx}\{(x-1)f(x)\}$ 에서

$$\int \frac{2}{x} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx}\{(x-1)f(x)\} \right\} dx$$

$$\therefore 2 \ln x = (x-1)f(x) + C \quad (\because x > 0)$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \{(x-1)f(x) + C\} \quad \therefore C=0$$
 따라서 $2 \ln x = (x-1)f(x)$ 이므로
 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{2 \ln x}{x-1}$

$$\therefore f(e) = \frac{2 \ln e}{e-1} = \frac{2}{e-1}$$

답 ④

03 $\int x f'(x) dx = -2 \ln x + \sqrt{x} + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})$$

이때, $f(1)=2$ 이므로

$$2 - 1 + C_1 = 2 \quad \therefore C_1 = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ 이므로

$$f(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

답 ②

04 $\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ ①
 라 하면

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{a(x+2)^2 + b(x-1)(x+2) + c(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (4a+b+c)x + (4a-2b-c)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)^2} \quad (\because \text{①})$$

위의 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=0, \quad 4a+b+c=4, \quad 4a-2b-c=5$$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=1$$

$$\therefore \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의

기울기가 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} \right\} dx$$

$$= \ln |x-1| - \ln |x+2| - \frac{1}{x+2} + C$$

(단, C 는 적분상수)

이때, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$f(-1) = -1 \text{에서 } \ln 2 - \ln 1 - 1 + C = -1$$

$$\therefore C = -\ln 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \ln |x-1| - \ln |x+2| - \frac{1}{x+2} - \ln 2$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$f(0) = -\ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 2 = -\ln 4 - \frac{1}{2}$$

답 ②

05 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -a+5$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때,
 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이어야 하므로 $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{에서}$$

$$f'(0) = -a + 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, $f'(x) = 4ae^{2x}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(0) = 4a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -a + 5 = 4a$$

$$5a = 5 \quad \therefore a = 1$$

즉, $f'(x) = 4e^{2x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int 4e^{2x} dx$$

$$= 2e^{2x} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $f(0) = 0$ 이므로

$$2 + C = 0 \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = 2e^{2x} - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= 2e^{2 \ln 2} - 2 = 2 \times 2^2 - 2 \\ &= 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

답 6

06 $f'(x) = e^{-2x+1} - \frac{1}{2}e^{-x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \left(e^{-2x+1} - \frac{1}{2}e^{-x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x+1} + \frac{1}{2}e^{-x} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $f(1) = 0$ 이므로

$$-\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} + C = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+1} + \frac{1}{2}e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2n+1} + \frac{1}{2}e^{-n} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{e^{-1}}{1-e^{-2}} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{-e}{2(e^2-1)} + \frac{1}{2(e-1)} \\ &= \frac{1}{2(e^2-1)} \end{aligned}$$

답 ④

07 $f_n(x) = \int \{ \cos(n+1)x - \cos nx \} dx$

$$= \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x - \frac{1}{n} \sin nx + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$f_n(0) = 0 \text{이므로 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sin(n+1)x - \frac{1}{n} \sin nx \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{100} f_n(x)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right) + \left(\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{3} \sin 3x \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{101} \sin 101x - \frac{1}{100} \sin 100x \right)$$

$$= -\sin x + \frac{1}{101} \sin 101x$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{100} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{101} \sin \frac{101\pi}{2}$$

$$= -1 + \frac{1}{101} = -\frac{100}{101}$$

답 ①

08 조건 ㉠에서

(i) $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \{ (2^x - 1)^2 \ln 4 \} dx$$

$$= \int \ln 4 \times (4^x - 2^{x+1} + 1) dx$$

$$= \frac{\ln 4}{\ln 4} 4^x - \frac{\ln 4}{\ln 2} 2^{x+1} + x \ln 4 + C_1$$

$$= 4^x - 2^{x+2} + x \ln 4 + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})$$

(ii) $x > 0$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int a \sin^2 x dx$$

$$= a \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{a}{2} x - \frac{a}{4} \sin 2x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$1 - 4 + C_1 = C_2 \quad \therefore C_2 = C_1 - 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{조건 ㉡에서 } f(-2) = \frac{33}{16} - 4 \ln 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{16} - 1 - 2 \ln 4 + C_1 = \frac{33}{16} - 4 \ln 2$$

$$-\frac{15}{16} - 4 \ln 2 + C_1 = \frac{33}{16} - 4 \ln 2$$

$$\therefore C_1 = \frac{33}{16} + \frac{15}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $C_2 = 0$

$$\text{또한, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{a}{4} \sin \pi = \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{a}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}\pi \times \frac{4}{\pi} = 6$$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} 4^x - 2^{x+2} + x \ln 4 + 3 & (x < 0) \\ 3x - \frac{3}{2} \sin 2x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로

$$f(\pi) = 3\pi - \frac{3}{2} \sin 2\pi = 3\pi \quad \text{답 } 3\pi$$

단계	채점 기준	배점
(가)	$x < 0, x > 0$ 일 때의 함수 $f'(x)$ 의 부정적분을 각각 구한 경우	40%
(나)	조건 (나)를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한 경우	40%
(다)	$f(\pi)$ 의 값을 구한 경우	20%

09 $f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} dx \\ &= \int \frac{\cos x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int (\csc x \cot x - \cot^2 x) dx \\ &= \int (\csc x \cot x - \csc^2 x + 1) dx \\ &= -\csc x + \cot x + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ 이므로

$$-1 + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \therefore C = 0$$

즉, $f(x) = -\csc x + \cot x + x$ 이므로

$$\sqrt{2}f(x) - f'(x) - \sqrt{2}x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(-\csc x + \cot x + x) \\ - \csc x \cot x + \csc^2 x - 1 - \sqrt{2}x + 1 &= 0 \\ -\sqrt{2}\csc x + \sqrt{2}\cot x - \csc x \cot x + \csc^2 x &= 0 \end{aligned}$$

$$\csc x(\csc x - \sqrt{2}) - \cot x(\csc x - \sqrt{2}) = 0$$

$$(\csc x - \sqrt{2})(\csc x - \cot x) = 0$$

$$\therefore \csc x = \sqrt{2} \text{ 또는 } \csc x = \cot x$$

$$\csc x = \sqrt{2} \text{이므로 } \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{4} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$$\csc x = \cot x \text{이면 } \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x = \sin x \cos x, \sin x(\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = 1$$

그런데 $0 < x < \pi$ 에서 $\sin x = 0$ 또는 $\cos x = 1$ 을 만족시키는 x 는 존재하지 않는다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 이므로 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi \quad \text{답 } ①$$

10 $f(x) = \int \cos 4x \cos 2x dx$

$$\begin{aligned} &= \int (1 - 2 \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ \sin 2x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2 \cos 2x \text{이므로} \\ f(x) &= \int (1 - 2t^2) \times \frac{1}{2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2} - t^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$f(0) = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{답 } \frac{1}{6} \end{aligned}$$

11 $e^x + 3 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int e^x \sqrt{e^x + 3} dx \\ &= \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x + 3) \sqrt{e^x + 3} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

한편, $f'(x) = e^x \sqrt{e^x + 3} > 0$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 일 때 최솟값을 갖고, $x = \ln 6$ 일 때 최댓값을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 20이므로

$$\begin{aligned} f(\ln 6) + f(0) &= \left\{ \frac{2}{3} (e^{\ln 6} + 3) \sqrt{e^{\ln 6} + 3} + C \right\} + \left\{ \frac{2}{3} \times 4\sqrt{4} + C \right\} \\ &= \left(\frac{2}{3} \times 9\sqrt{9} + C \right) + \left(\frac{16}{3} + C \right) \\ &= (18 + C) + \left(\frac{16}{3} + C \right) = 20 \end{aligned}$$

$$2C = -\frac{10}{3} \quad \therefore C = -\frac{5}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}(e^x + 3)\sqrt{e^x + 3} - \frac{5}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\ln 13) &= \frac{2}{3}(e^{\ln 13} + 3)\sqrt{e^{\ln 13} + 3} - \frac{5}{3} \\ &= \frac{2}{3} \times 16\sqrt{16} - \frac{5}{3} \\ &= \frac{128}{3} - \frac{5}{3} = 41 \end{aligned}$$

답 41

12 $2^x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2^x \ln 2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{8^x}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x)^2 \times 2^x}{2^x + 1} dx \\ &= \int \frac{t^2}{t+1} \times \frac{1}{\ln 2} dt \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \left\{ \frac{(t+1)(t-1)}{t+1} + \frac{1}{t+1} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \left(t-1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln |t+1| \right) + C \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left\{ \frac{4^x}{2} - 2^x + \ln(2^x + 1) \right\} + C \quad (\because 2^x + 1 > 0) \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f(0) = 1$ 이므로

$$\frac{1}{\ln 2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) + C = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{2 \ln 2}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{\ln 2} \left\{ \frac{4^x}{2} - 2^x + \ln(2^x + 1) \right\} + \frac{1}{2 \ln 2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{\ln 2} (2 - 2 + \ln 3) + \frac{1}{2 \ln 2} \\ &= \frac{1 + 2 \ln 3}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

답 ⑤

13 $\sqrt{x} + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{x(\sqrt{x} + 1)} dx \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int \frac{2}{(t-1)t} dt \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= 2(\ln |t-1| - \ln |t|) + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 0$ 이므로

$$2 \ln \frac{1}{2} + C = 0, \quad -2 \ln 2 + C = 0$$

$$\therefore C = 2 \ln 2$$

따라서 $f(x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right| + 2 \ln 2$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{9}\right) = 2 \ln \left| \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} \right| + 2 \ln 2$$

$$= 2 \ln \frac{1}{4} + 2 \ln 2 = -2 \ln 2$$

답 $-2 \ln 2$

14 $f(x) = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx$

$$= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

이때, $\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x - 1} dx$$

$$= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt$$

$$= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |t-1| - \ln |t+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{0-1}{0+1} \right| + C \right) - \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} \right| + C \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \ln \sqrt{3}$$

답 $\ln \sqrt{3}$

15 조건 (4)에서 $f(x) + f'(x) = (2x+1)e^x + 1$ 의

양변에 e^x 을 곱하면

$$e^x \{f(x) + f'(x)\} = (2x+1)e^{x^2+x} + e^x$$

$$\{e^x f(x)\}' = e^x f(x) + e^x f'(x) \text{이므로}$$

$$\int \{e^x f(x)\}' dx = \int \{(2x+1)e^{x^2+x} + e^x\} dx$$

$$e^x f(x) = \int (2x+1)e^{x^2+x} dx + \int e^x dx$$

$$= \int (2x+1)e^{x^2+x} dx + e^x + C_1$$

(단, C_1 은 적분상수) ㉠

이때, $\int (2x+1)e^{x^2+x} dx$ 에서

$x^2+x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x+1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{x^2+x} dx &= \int e^t dt \\ &= e^t + C_1 \\ &= e^{x^2+x} + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})\end{aligned}$$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$$e^x f(x) = e^{x^2+x} + e^x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때, 조건 ㉡에서 $f(0)=2$ 이므로

㉡에 $x=0$ 을 대입하면

$$2 = 1 + 1 + C \quad \therefore C = 0$$

따라서 $e^x f(x) = e^{x^2+x} + e^x$ 이므로

$$f(x) = e^x + 1 \quad (\because e^x \neq 0)$$

$$\therefore f(-1) = e + 1$$

답 ④

16 해결단계

① 단계	치환적분법을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	미분을 이용하여 함수 $g(x)=xf(x)$ 의 증가와 감소를 파악한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그리고 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	함수 $g(x)$ 의 이계도함수를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$2-x^2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-2x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= -\sqrt{t} + C \\ &= -\sqrt{2-x^2} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때, $f(0)=-\sqrt{2}$ 이므로 $-\sqrt{2}+C=-\sqrt{2}$

$$\therefore C=0$$

따라서 $f(x)=-\sqrt{2-x^2}$ 이므로

$$g(x) = -x\sqrt{2-x^2}$$

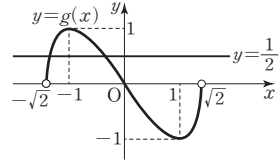
$$\begin{aligned}g'(x) &= -\sqrt{2-x^2} - x \times \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{2x^2-2}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}\end{aligned}$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$(-\sqrt{2})$	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	$(\sqrt{2})$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극댓값 $g(-1)=1$, $x=1$ 일 때 극솟값 $g(1)=-1$ 을 가지므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $g(-1)=1$ 이다. (참)

ㄴ. 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 교점의 개수이다.

위의 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$ 의

서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $g'(x)=\frac{2x^2-2}{\sqrt{2-x^2}}$ 에서

$$\begin{aligned}g''(x) &= \frac{4x\sqrt{2-x^2} - (2x^2-2) \times \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2} \\ &= \frac{4x(2-x^2) + x(2x^2-2)}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{-2x^3+6x}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\end{aligned}$$

$$g''(x)=0 \text{에서 } -2x^3+6x=0$$

$$-2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x=0 \quad (\because -\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$$

$g''(0)=0$ 이고, $x=0$ 의 좌우에서 $g''(x)$ 의 부호가

음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=g(x)$ 는 $x=0$ 에서 변곡점을 갖는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

17 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ &= \int \sin t dt \\ &= -\cos t + C \\ &= -\cos(\ln x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(e^{-\frac{\pi}{2}}, 1)$ 을 지나므로

$$f(e^{-\frac{\pi}{2}})=1 \text{에서}$$

$$-\cos(\ln e^{-\frac{\pi}{2}}) + C = 1$$

$$-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = -\cos(\ln x) + 1$$

곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 방정식

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \text{의 실근과 같으므로} \\
 -\cos(\ln x) + 1 &= 0, \cos(\ln x) = 1 \\
 \ln x &= 2k\pi \quad \therefore x = e^{2k\pi} \text{ (단, } k \text{는 정수)} \\
 \text{그런데 } 0 < x < 1 \text{에서 } \ln x < 0 \text{이므로 } k \text{는 음의 정수이다.} \\
 \text{따라서 } a_1 &= e^{-2\pi}, a_2 = e^{-4\pi}, a_3 = e^{-6\pi}, \dots \text{이므로} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi} = \frac{e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{1}{e^{2\pi} - 1} \quad \text{답 } \frac{1}{e^{2\pi} - 1} \\
 &\quad \text{첫째항이 } e^{-2\pi} \text{이고, 공비가 } e^{-2\pi} \text{인 등비급수의 합}
 \end{aligned}$$

18 $xf(x) = F(x) - x^2 \cos x$㉠

$$\begin{aligned}
 \text{㉠의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 f(x) + xf'(x) &= f(x) - 2x \cos x + x^2 \sin x \\
 xf'(x) &= -2x \cos x + x^2 \sin x \\
 \therefore f'(x) &= -2 \cos x + x \sin x \quad (\because x \neq 0) \\
 \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int (-2 \cos x + x \sin x) dx \quad \begin{array}{l} u(x)=x, v'(x)=\sin x \text{로 놓으면} \\ u'(x)=1, v(x)=-\cos x \end{array} \\
 &= -2 \int \cos x dx + \int x \sin x dx \\
 &= -2 \sin x - x \cos x + \int \cos x dx \\
 &= -2 \sin x - x \cos x + \sin x + C \\
 &= -\sin x - x \cos x + C \\
 &\quad \text{(단, } C \text{는 적분상수)} \quad \text{.....㉡}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때, } F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi \text{이므로 ㉠의 양변에 } x = \frac{\pi}{2} \text{를 대입하면} \\
 \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \cos \frac{\pi}{2} \\
 \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad \text{.....㉢}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{㉡의 양변에 } x = \frac{\pi}{2} \text{를 대입하면} \\
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + C \\
 2 &= -1 + C \quad (\because \text{㉢}) \quad \therefore C = 3 \\
 \text{따라서 } f(x) &= -\sin x - x \cos x + 3 \text{이므로} \\
 f(\pi) &= -\sin \pi - \pi \cos \pi + 3 = \pi + 3 \quad \text{답 } \pi + 3
 \end{aligned}$$

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned}
 xf(x) &= F(x) - x^2 \cos x \text{에서} \\
 xf(x) - F(x) &= -x^2 \cos x \\
 \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} &= -\cos x \quad (\because x \neq 0) \\
 \text{이때, } \left\{ \frac{F(x)}{x} \right\}' &= \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \text{이므로} \\
 \int \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} dx &= \int (-\cos x) dx \\
 \frac{F(x)}{x} &= -\sin x + C \quad \text{(단, } C \text{는 적분상수)} \\
 F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \pi \text{이므로 위의 식의 양변에 } x = \frac{\pi}{2} \text{를 대입하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} &= -\sin \frac{\pi}{2} + C, \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = -1 + C \\
 2 &= -1 + C \quad \therefore C = 3 \\
 \frac{F(x)}{x} &= -\sin x + 3 \text{에서} \\
 F(x) &= -x \sin x + 3x \text{이므로} \\
 f(x) &= -\sin x - x \cos x + 3 \\
 \therefore f(\pi) &= -\sin \pi - \pi \cos \pi + 3 = \pi + 3
 \end{aligned}$$

19 조건 ㉠에서 $\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = xe^x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= \int xe^x dx \quad \begin{array}{l} u(x)=x, v'(x)=e^x \text{으로 놓으면} \\ u'(x)=1, v(x)=e^x \end{array} \\
 &= xe^x - \int e^x dx \\
 &= xe^x - e^x + C_1 \quad \text{(단, } C_1 \text{은 적분상수)} \\
 &\quad \text{.....㉣}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{㉣의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면} \\
 f(0) - g(0) &= -1 + C_1 \\
 \text{이때, 조건 ㉡에서 } f(0) - g(0) &= 0 - 1 = -1 \text{이므로} \\
 -1 + C_1 &= -1 \quad \therefore C_1 = 0 \\
 \therefore f(x) - g(x) &= xe^x - e^x \quad \text{.....㉤}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{한편, 조건 ㉢에서 } \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= (2x+1)e^{2x} \text{이므로} \\
 f(x)g(x) &= \int (2x+1)e^{2x} dx \quad \begin{array}{l} p(x)=2x+1, q'(x)=e^{2x} \text{으로 놓으면} \\ p'(x)=2, q(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \\
 &= (2x+1) \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int 2 \times \frac{1}{2}e^{2x} dx \\
 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C_2 \\
 &= xe^{2x} + C_2 \quad \text{(단, } C_2 \text{는 적분상수)} \quad \text{.....㉥}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{㉤의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(0)g(0) &= C_2 \\
 \text{이때, 조건 ㉡에서 } f(0)g(0) &= 0 \times 1 = 0 \text{이므로} \\
 C_2 &= 0 \\
 \therefore f(x)g(x) &= xe^{2x} \quad \text{.....㉦}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{㉣, ㉦에서} \\
 \{f(x) + g(x)\}^2 &= \{f(x) - g(x)\}^2 + 4f(x)g(x) \\
 &= (xe^x - e^x)^2 + 4xe^{2x} \\
 &= x^2e^{2x} + 2xe^{2x} + e^{2x} \\
 &= (x+1)^2e^{2x} \\
 \therefore f(x) + g(x) &= |x+1|e^x \\
 \therefore f(2) + g(2) &= 3e^2 \quad \text{답 } 3e^2
 \end{aligned}$$

20 $f(x) + xf'(x) = (\ln x)^2$㉧

$$\begin{aligned}
 \{xf(x)\}' &= f(x) + xf'(x) \text{이므로 ㉧에서} \\
 \{xf(x)\}' &= (\ln x)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore xf(x) &= \int \{xf(x)\}' dx \\
 &= \int (\ln x)^2 dx \quad \left[\begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^2, v'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, v(x) = x \end{array} \right] \\
 &= x(\ln x)^2 - \int x \times \frac{2 \ln x}{x} dx \\
 &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \left[\begin{array}{l} p(x) = \ln x, q'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ p'(x) = \frac{1}{x}, q(x) = x \end{array} \right] \\
 &= x(\ln x)^2 - 2 \left(x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \\
 &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{C}
 \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 2$ 이므로 $\textcircled{C}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = (\ln 1)^2 - 2 \ln 1 + 2 + C$$

$$2 = 2 + C \quad \therefore C = 0$$

즉, $xf(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ 이므로

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \quad (\because x > 0)$$

$$= (\ln x - 1)^2 + 1 \geq 1$$

따라서 구하는 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 1이다. 답 1

21 $\int x^2 f(x) dx = g(x)$, $\int x g(x) dx = h'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &\int x^5 f(x) dx \\
 &= \int \{x^3 \times x^2 f(x)\} dx \quad \left[\begin{array}{l} u(x) = x^3, v'(x) = x^2 f(x) \text{로 놓으면} \\ u'(x) = 3x^2, v(x) = g(x) \end{array} \right] \\
 &= x^3 g(x) - \int 3x^2 g(x) dx \\
 &= x^3 g(x) - 3 \int \{x \times x g(x)\} dx \quad \left[\begin{array}{l} p(x) = x, q'(x) = x g(x) \\ \text{로 놓으면} \\ p'(x) = 1, q(x) = h'(x) \end{array} \right] \\
 &= x^3 g(x) - 3 \left\{ x h'(x) - \int h'(x) dx \right\} \\
 &= x^3 g(x) - 3x h'(x) + 3 \int h'(x) dx \\
 &= x^3 g(x) - 3x h'(x) + 3h(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \\
 &\quad \text{답 } \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

22 $f(x) + \frac{x}{2} f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \ln x$ 의 양변에 $2x$ 를 곱하면

$$2x f(x) + x^2 f'(x) = (2x + 4) \ln x$$

$$\{x^2 f(x)\}' = 2x f(x) + x^2 f'(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 f(x) &= \int \{x^2 f(x)\}' dx \\
 &= \int (2x + 4) \ln x dx \quad \left[\begin{array}{l} u(x) = \ln x, v'(x) = 2x + 4 \text{로 놓으면} \\ u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x^2 + 4x \end{array} \right] \\
 &= (x^2 + 4x) \ln x - \int \left\{ \frac{1}{x} \times (x^2 + 4x) \right\} dx \\
 &= (x^2 + 4x) \ln x - \int (x + 4) dx \\
 &= (x^2 + 4x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - 4x + C \\
 &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

이때, $f(1) = -\frac{9}{2}$ 이므로

$$-\frac{1}{2} - 4 + C = -\frac{9}{2} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $x^2 f(x) = (x^2 + 4x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - 4x$ 이므로

$$f(x) = \left(1 + \frac{4}{x}\right) \ln x - \frac{1}{2} - \frac{4}{x} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore f(e) = \left(1 + \frac{4}{e}\right) \ln e - \frac{1}{2} - \frac{4}{e} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

23 $F'(x) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right)$ 이므로

$$\frac{\pi}{4} - \ln x = t \text{로 놓으면}$$

$$\ln x = \frac{\pi}{4} - t \quad \therefore x = e^{\frac{\pi}{4} - t}$$

$$\text{즉, } \frac{dx}{dt} = -e^{\frac{\pi}{4} - t} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int F'(x) dx \\
 &= \int \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) dx \\
 &= \int -\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t dt \\
 &= -\sqrt{2} \int e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t dt \quad \left[\begin{array}{l} u(t) = \sin t, v'(t) = e^{\frac{\pi}{4} - t} \text{로 놓으면} \\ u'(t) = \cos t, v(t) = -e^{\frac{\pi}{4} - t} \end{array} \right] \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 &= -\sqrt{2} \left(-e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t + \int e^{\frac{\pi}{4} - t} \cos t dt \right) \\
 &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t - \sqrt{2} \int e^{\frac{\pi}{4} - t} \cos t dt \quad \left[\begin{array}{l} p(t) = \cos t, q'(t) = e^{\frac{\pi}{4} - t} \text{로 놓으면} \\ p'(t) = -\sin t, q(t) = -e^{\frac{\pi}{4} - t} \end{array} \right] \\
 &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t - \sqrt{2} \left(-e^{\frac{\pi}{4} - t} \cos t - \int e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t dt \right) \\
 &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t + \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \cos t + \sqrt{2} \int e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t dt \\
 &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \sin t + \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} \cos t - F(x) + C_1 \\
 &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} (\sin t + \cos t) - F(x) + C_1 \\
 &\quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수}) \quad (\because \textcircled{1})
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2F(x) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} (\sin t + \cos t) + C_1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4} - t} (\sin t + \cos t) + C_2 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\ln x} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) \right\} + C_2 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} x \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln x \right) \right\} + C_2 \\
 &\quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$F(e^\pi) = -e^\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^\pi \left\{ \sin \left(-\frac{3}{4} \pi \right) + \cos \left(-\frac{3}{4} \pi \right) \right\} + C_2 = -e^\pi$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + C_2 = -e^\pi$$

$$-e^\pi + C_2 = -e^\pi \quad \therefore C_2 = 0$$

따라서 $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) \right\}$
 이므로
 $F(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1$ 답 ①

24 조건 (가)에서 $f'(x) = 2x \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int 2x \cos x dx$$

이때, $u(x) = 2x$, $v'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 2, v(x) = \sin x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int 2x \cos x dx$$

$$= 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

한편, $f'(x) = 0$ 에서 $2x \cos x = 0$

$$0 < x < \pi \text{이므로 } x = \frac{\pi}{2}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$	...	(π)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

즉, $0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 극대이면서

최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2} \times \sin \frac{\pi}{2} + 2 \times \cos \frac{\pi}{2} + C$$

$$= \pi + C$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 π 이므로

$$\pi + C = \pi \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = 2x \sin x + 2 \cos x$$

그런데 두 함수 $y = f(x)$ 와 $g(x) = 2x \sin x + 1$ 의 그래프가 $x = \alpha$ 에서 만나므로

$$2\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 2\alpha \sin \alpha + 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \alpha < \pi) \quad \text{답 } \frac{\pi}{3}$$

Step 3

1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 77

- 01 $\frac{1}{4}$ 02 πe^x 03 $2 + \ln \frac{5}{4}$ 04 $\frac{5}{12}\pi$ 05 ⑤
 06 $\frac{19}{4}$ 07 $\frac{3}{2} - \ln 2$

01 해결단계

① 단계	곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 이용하여 $\overline{OH}$, $\overline{HT}$ 의 길이를 각각 t 에 대한 식으로 나타낸다.
② 단계	$\overline{OH} : \overline{HT} = 2 : 1$ 임을 이용하여 $f(x)$, $f'(x)$ 사이의 관계식을 구한 후, 부정적분을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지남을 이용하여 적분상수를 구한 후, $f(2)$ 의 값을 구한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ ($t > 0$)에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

접선과 x 축의 교점 T 의 x 좌표는 $(y\text{-좌표})=0$

$$-f(t) = f'(t)x - tf'(t) \text{에서}$$

$$x = t - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

$$\therefore \overline{OH} = t, \overline{HT} = \left\{ t - \frac{f(t)}{f'(t)} \right\} - t = -\frac{f(t)}{f'(t)}$$

이때, $\overline{OH} : \overline{HT} = 2 : 1$ 이므로

$$2\overline{HT} = \overline{OH}$$

$$-2 \times \frac{f(t)}{f'(t)} = t \quad \therefore \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{2}{t}$$

$$\text{즉, } \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x} \text{이므로}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \left(-\frac{2}{x} \right) dx$$

$$\ln f(x) = -2 \ln x + C$$

$$= \ln \frac{e^C}{x^2} \quad (\because x > 0, f(x) > 0)$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^C}{x^2} \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$e^C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{이므로}$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

02 해결단계

① 단계	$x=t$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(t)$ 임을 이용하여 부정적분 $f(t)$ 를 구한다.
② 단계	접선의 방정식에서 $g(t)$ 를 구한다.
③ 단계	$f(\pi) + g(\pi)$ 의 값을 구한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식

$$y = e^t (\sin t + \cos t)x + g(t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로

$$f'(t) = e^t (\sin t + \cos t)$$

이때, $u(t) = \sin t + \cos t$, $v'(t) = e^t$ 으로 놓으면

$$u'(t) = \cos t - \sin t, v(t) = e^t \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int f'(t) dt \\
 &= \int e^t (\sin t + \cos t) dt \\
 &= e^t (\sin t + \cos t) - \int e^t (\cos t - \sin t) dt \\
 &= e^t (\sin t + \cos t) - e^t (\cos t - \sin t) \\
 &\quad + \int e^t (-\sin t - \cos t) dt \\
 &= 2e^t \sin t - f(t) + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수}) \\
 2f(t) &= 2e^t \sin t + C_1 \\
 \therefore f(t) &= e^t \sin t + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수}) \\
 \text{곡선 } y=f(x) \text{가 원점을 지나므로 } f(0) &= 0 \text{에서 } C_2=0 \\
 \therefore f(t) &= e^t \sin t \\
 \text{한편, 점 } (t, f(t)) \text{에서의 접선의 방정식은} \\
 y-f(t) &= f'(t)(x-t) \\
 \text{즉, } y &= f'(t)x - tf'(t) + f(t) \text{이므로 ㉠에서} \\
 g(t) &= f(t) - tf'(t) \\
 &= e^t \sin t - te^t (\sin t + \cos t) \\
 \therefore f(\pi) + g(\pi) &= e^\pi \sin \pi + \{e^\pi \sin \pi - \pi e^\pi (\sin \pi + \cos \pi)\} \\
 &= \pi e^\pi
 \end{aligned}$$

답 πe^π

03 해결단계

① 단계	$x < 0$ 에서의 부정적분 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	치환적분법을 이용하여 $x > 0$ 에서의 부정적분 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속임을 이용하여 $f(x)$ 를 구하고, $f(\ln 2)$ 의 값을 구한다.

(i) $x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int dx = x + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})
 \end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -1 + C_1 \quad \therefore C_1 = 2$$

$$\therefore f(x) = x + 2 \quad (\text{단, } x < 0)$$

(ii) $x > 0$ 일 때,

$$e^{2x} + 1 = t \text{로 놓으면 } e^{2x} = t - 1 \text{에서 } e^{2x} - 1 = t - 2 \text{이}$$

$$\text{고 } \frac{dt}{dx} = 2e^{2x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx \\
 &= \int \frac{t-2}{t} \times \frac{1}{2(t-1)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{t-2}{t(t-1)} dt \quad \dots\dots \text{㉠}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때, } \frac{t-2}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} \text{라 두면}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} &= \frac{a(t-1) + bt}{t(t-1)} \\
 &= \frac{(a+b)t - a}{t(t-1)} = \frac{t-2}{t(t-1)}
 \end{aligned}$$

위의 등식은 t 에 대한 항등식이므로

$$a+b=1, \quad -a=-2$$

$$\therefore a=2, \quad b=-1$$

$$\text{즉, } \frac{t-2}{t(t-1)} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t-1} \text{이므로 ㉠에서}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{t-2}{t(t-1)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} (2 \ln |t| - \ln |t-1|) + C_2 \\
 &= \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t-1| + C_2 \\
 &= \ln (e^{2x} + 1) - \frac{1}{2} \ln e^{2x} + C_2 \\
 &\quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \ln (e^{2x} + 1) - \frac{1}{2} \ln e^{2x} + C_2 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2)$$

$$\ln 2 - \frac{1}{2} \times \ln 1 + C_2 = 2$$

$$\therefore C_2 = 2 - \ln 2$$

$$\therefore f(x) = \ln (e^{2x} + 1) - \frac{1}{2} \ln e^{2x} + 2 - \ln 2 \quad (\text{단, } x \geq 0)$$

이때, $\ln 2 > 0$ 이므로

$$f(\ln 2) = \ln (e^{2 \ln 2} + 1) - \frac{1}{2} \ln e^{2 \ln 2} + 2 - \ln 2$$

$$= \ln (4 + 1) - \frac{1}{2} \ln 4 + 2 - \ln 2$$

$$= \ln 5 - \ln 2 + 2 - \ln 2$$

$$= 2 + \ln 5 - 2 \ln 2$$

$$= 2 + \ln \frac{5}{4}$$

$$\text{답 } 2 + \ln \frac{5}{4}$$

04 해결단계

① 단계	$g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 $f(g(x))=x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하여 식을 세운다.
② 단계	$f'(x)=1+\{f(x)\}^2$ 의 x 대신에 $g(x)$ 를 대입한 후 ①단계에서 세운 식과 연립하여 $g'(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$g(x)=\int g'(x)dx$ 임을 이용하여 함수 $g(x)$ 를 구하고 $g(1)$ 의 값을 구한다.

$g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(g(x)) = x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$f'(x)=1+\{f(x)\}^2$ 에서 x 대신에 $g(x)$ 를 대입하면
 $f'(g(x))=1+\{f(g(x))\}^2$
 $\therefore f'(g(x))=1+x^2$
 즉, ㉠에서

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{1+x^2}$$

$x=\tan \theta$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2 \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int d\theta = \theta + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ 에서 $g(0)=\frac{\pi}{6}$ 이고, $0=\tan \theta$ 에서

$\theta=0$ 이므로 ㉡에 $x=0$, $\theta=0$ 을 대입하면

$$g(0)=0+C=\frac{\pi}{6} \quad \therefore C=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore g(x)=\theta+\frac{\pi}{6} \quad (\text{단, } x=\tan \theta), \quad \text{즉 } g(\tan \theta)=\theta+\frac{\pi}{6}$$

따라서 $1=\tan \theta$ 에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$g(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{12}\pi \quad \text{답 } \frac{5}{12}\pi$$

05 해결단계

① 단계	주어진 식을 변형하여 적분한 후, 극댓값 $\frac{2^{24}}{e^8}$ 을 찾기 위한 자연수 n 의 값을 구하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 함수 $f(x)$ 를 이용하여 함수 $g(x)$ 를 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	도함수 $g'(x)$ 의 그래프의 개형을 추측하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	사잇값 정리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$$f'(x)=f(x)+nx^{n-1}e^x \text{에서}$$

$$f'(x)-f(x)=nx^{n-1}e^x$$

$$-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=nx^{n-1}$$

이때, $\{e^{-x}f(x)\}'=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$ 이므로

$$\int \{e^{-x}f(x)\}' dx = \int nx^{n-1} dx$$

$$e^{-x}f(x)=x^n+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

조건 ㄱ에서 $f(0)=0$ 이므로 이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$e^0 f(0)=0+C \quad \therefore C=0$$

즉, $e^{-x}f(x)=x^n$ 이므로 $f(x)=x^n e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1}e^x + x^n e^x \\ &= x^{n-1}e^x(x+n) \end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=-n$ 또는 $x=0$ ($\because n \geq 2$)

(i) n 이 짝수인 경우

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$-n$	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-n$ 일 때 극댓값을 갖고, $x=0$ 일 때 극솟값을 갖는다.

(ii) n 이 홀수인 경우

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$-n$	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-n$ 일 때 극솟값을 갖는다.

조건 ㄴ에서 함수 $f(x)$ 는 극댓값 $\frac{2^{24}}{e^8}$ 을 가지므로 n 은

$$\text{짝수이고 } f(-n)=\frac{2^{24}}{e^8}$$

$$(-n)^n e^{-n}=\frac{n^n}{e^n}=\frac{2^{24}}{e^8}$$

$$\therefore n=8 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 $f(x)=x^8 e^x$ 이므로

$$g(x)=f(x)-e^x=x^8 e^x-e^x=(x^8-1)e^x$$

$$\therefore g(1)=(1-1)e^1=0 \quad (\text{참})$$

$$\therefore g(x)=(x^8-1)e^x \text{에서}$$

$$g'(x)=8x^7 e^x+(x^8-1)e^x$$

$$=e^x(x^8+8x^7-1)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x^8+8x^7-1=0 \quad (\because e^x>0)$$

$$h(x)=x^8+8x^7-1 \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=8x^7+56x^6=8x^6(x+7)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-7 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-7	$\dots$	0	$\dots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고, 함수

$y=h(x)$ 의 그래프와 x 축의

교점이 존재하므로 방정식

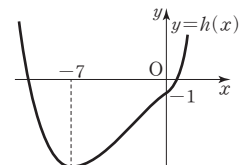
$$g'(x)=0 \text{은 실근을 갖는다.}$$

(참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$h(\alpha)=h(\beta)=0 \text{이므로 } g'(\alpha)=g'(\beta)=0$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	...	a	...	β	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 일 때 극댓값을 갖고,

$$\begin{aligned} g'(-9) &= \{(-9)^8 + 8 \times (-9)^7 - 1\}e^{-9} \\ &= (9^8 - 8 \times 9^7 - 1)e^{-9} \\ &= (9^7 - 1)e^{-9} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(-8) &= \{(-8)^8 + 8 \times (-8)^7 - 1\}e^{-8} \\ &= (8^8 - 8 \times 8^7 - 1)e^{-8} \\ &= -e^{-8} < 0 \end{aligned}$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 열린구간 $(-9, -8)$ 에 존재한다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06 해결단계

① 단계	주어진 식을 적분하여 함수 $g(x)$ 를 $f(x)$ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한 후, 함수 $g(x)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $(x-1)e^{g(x)}$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 모두 구한 후, 그 곱을 구한다.

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 + f(x) - 6 &= \{f(x)+3\}\{f(x)-2\} \text{이므로} \\ \frac{3f(x)-1}{\{f(x)\}^2 + f(x) - 6} &= \frac{p}{f(x)+3} + \frac{q}{f(x)-2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

라 두면

$$\begin{aligned} \frac{p}{f(x)+3} + \frac{q}{f(x)-2} &= \frac{(p+q)f(x) - 2p + 3q}{\{f(x)+3\}\{f(x)-2\}} \\ &= \frac{3f(x)-1}{\{f(x)\}^2 + f(x) - 6} \end{aligned}$$

위의 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$p+q=3, -2p+3q=-1 \quad \therefore p=2, q=1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \frac{3f(x)-1}{\{f(x)\}^2 + f(x) - 6} dx \\ &= \int \left\{ \frac{2}{f(x)+3} + \frac{1}{f(x)-2} \right\} dx \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \int \left(\frac{2}{ax+b+3} + \frac{1}{ax+b-2} \right) dx \\ &\quad (\because f(x)=ax+b) \\ &= \frac{2}{a} \ln |ax+b+3| + \frac{1}{a} \ln |ax+b-2| + C \end{aligned}$$

(단, C 는 적분상수)

곡선 $y=g(x)$ 의 점근선이 $x=-\frac{b+3}{a}, x=-\frac{b-2}{a}$ 이고, 조건 (가)에 의하여 이 두 점근선이 $x=1, x=6$ 이어야 한다.

$$(i) -\frac{b+3}{a}=1, -\frac{b-2}{a}=6 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} b+3 &= -a, b-2 = -6a \text{이므로 이 두 식을 연립하면} \\ a &= 1, b = -4 \end{aligned}$$

$$(ii) -\frac{b+3}{a}=6, -\frac{b-2}{a}=1 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} b+3 &= -6a, b-2 = -a \text{이므로 이 두 식을 연립하면} \\ a &= -1, b = 3 \end{aligned}$$

그런데 $a>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1, b=-4$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 \ln |x-1| + \ln |x-6| + C \\ &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3f(x)-1}{\{f(x)+3\}\{f(x)-2\}} \\ &= \frac{3(x-4)-1}{(x-1)(x-6)} \\ &= \frac{3x-13}{(x-1)(x-6)} \end{aligned}$$

이므로

$$g'(x)=0 \text{에서 } 3x-13=0 \quad \therefore x=\frac{13}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	(1)	...	$\frac{13}{3}$	...	(6)	...
$g'(x)$	-		+	0	-		+
$g(x)$	↘		↗	극대	↘		↗

함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{13}{3}$ 일 때 극댓값

$$g\left(\frac{13}{3}\right) = 2 \ln \frac{10}{3} + \ln \frac{5}{3} + C = \ln \frac{500}{27} + C$$

를 가지므로 조건 (나)에 의하여

$$\ln \frac{500}{27} + C = 3 \ln \frac{10}{3}$$

$$\therefore C = \ln \frac{1000}{27} - \ln \frac{500}{27} = \ln 2$$

즉,

$$\begin{aligned} g(x) &= 2 \ln |x-1| + \ln |x-6| + \ln 2 \\ &= \ln 2(x-1)^2 |x-6| \end{aligned}$$

이므로 $e^{g(x)} = 2(x-1)^2 |x-6|$ ($x \neq 1, x \neq 6$)

$$\begin{aligned} \therefore (x-1)e^{g(x)} &= 2(x-1)^3 |x-6| \\ &= \begin{cases} -2(x-1)^3(x-6) & (x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 6) \\ 2(x-1)^3(x-6) & (x > 6) \end{cases} \end{aligned}$$

$y=2(x-1)^3(x-6)$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= 6(x-1)^2(x-6) + 2(x-1)^3 \\ &= 2(x-1)^2(4x-19) \end{aligned}$$

이므로

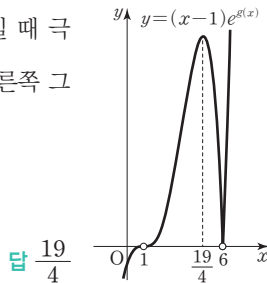
$$\begin{aligned} \{(x-1)e^{g(x)}\}' &= \begin{cases} -2(x-1)^2(4x-19) & (x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 6) \\ 2(x-1)^2(4x-19) & (x > 6) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\{(x-1)e^{g(x)}\}'=0 \text{에서 } x=\frac{19}{4}$$

함수 $(x-1)e^{g(x)}$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	(1)	...	$\frac{19}{4}$	...	(6)	...
$\{(x-1)e^{g(x)}\}'$	+		+	0	-		+
$(x-1)e^{g(x)}$	↗		↗	극대	↘		↗

함수 $(x-1)e^{g(x)}$ 은 $x=\frac{19}{4}$ 일 때 극
댓값을 가지므로 그래프는 오른쪽 그
림과 같다.
 $\therefore a=\frac{19}{4}$



blacklabel 특강 참고

$g(x) = \int \frac{3f(x)-1}{\{f(x)\}^2 + f(x) - 6} dx = \int \frac{3f(x)-1}{\{f(x)+3\}\{f(x)-2\}} dx$
에서 $f(x) \neq -3, f(x) \neq 2$
이때, 두 직선 $x=1, x=6$ 은 곡선 $y=g(x)$ 의 점근선이므로
(i) $f(1)=-3, f(6)=2$ 또는
(ii) $f(1)=2, f(6)=-3$ 이어야 한다.
(i)이면 $a=1, b=-4$ 이고 (ii)이면 $a=-1, b=3$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=1, b=-4$ 이다.
즉, $f(x)=x-4$ 이다.

07 해결단계

① 단계	$f'(x)=\cos^2 f(x)$ 의 양변을 $\cos^2 f(x)$ 로 나눈 후, 양변을 x 에 대하여 적분하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구한 후, 적분을 이용하여 함수 $G(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$G(\frac{\pi}{3})$ 의 값을 구한다.

$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos f(x) \neq 0$ 이므로
 $f'(x)=\cos^2 f(x)$ 의 양변을 $\cos^2 f(x)$ 로 나누면
 $\therefore \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = 1$
 $\therefore f'(x) \sec^2 f(x) = 1$
위의 식의 양변을 각각 x 에 대하여 적분하면
 $\int f'(x) \sec^2 f(x) dx = \int dx \quad \dots\dots ㉑$
이때, $f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이므로
 $\int f'(x) \sec^2 f(x) dx = \int \sec^2 t dt$
 $= \tan t + C_1$
 $= \tan f(x) + C_1$
(단, C_1 은 적분상수)
즉, ㉑에서 $\tan f(x) = x + C_2$ (단, C_2 는 적분상수)
 $f(0)=0$ 이므로 $\tan f(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = 0$
즉, $\tan f(x) = x$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 역함수는
 $g(x) = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ 이다.
 $G(x) = \int \{g(x)\}^3 dx$
 $= \int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx$

$$\begin{aligned} &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \dots\dots ㉒ \end{aligned}$$

이때, $\tan x = p$ 로 놓으면 $\frac{dp}{dx} = \sec^2 x$,

$\cos x = q$ 로 놓으면

$$\frac{dq}{dx} = -\sin x \text{이므로}$$

㉒에서

$$\begin{aligned} G(x) &= \int p dp - \int \frac{-1}{q} dq \\ &= \frac{1}{2} p^2 + \ln |q| + C_3 \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C_3 \text{ (단, } C_3 \text{은 적분상수)} \\ G(0) &= 0 \text{이므로 } C_3 = 0 \\ \text{따라서 } G(x) &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| \text{이므로} \\ G\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \tan^2 \frac{\pi}{3} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{3} \right| \\ &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 + \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \ln 2 \quad \text{답 } \frac{3}{2} - \ln 2 \end{aligned}$$

이것이 수능

p. 78

1 ① 2 ② 3 ⑤ 4 ④

1 해결단계

① 단계	주어진 식의 양변을 적분한다.
② 단계	$T(0)=100, T(3)=60$ 을 이용하여 k 의 값을 구한다.

$T(t)-20=x$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt} = T'(t)$ 이므로
 $\int \frac{T'(t)}{T(t)-20} dt = \int \frac{1}{x} dx$
 $= \ln |x| + C'$
 $= \ln |T(t)-20| + C'$
(단, C' 은 적분상수)
 $\therefore \ln |T(t)-20| = kt + C \quad \dots\dots ㉑$
이때, $T(0)=100$ 이므로 ㉑에 $t=0$ 을 대입하면
 $\ln |T(0)-20| = C$
 $\therefore C = \ln 80 \quad \dots\dots ㉒$
또한, $T(3)=60$ 이므로 ㉑에 $t=3$ 을 대입하면
 $\ln |T(3)-20| = 3k + C$
 $\therefore C = \ln 40 - 3k \quad \dots\dots ㉓$
㉒, ㉓에서
 $\ln 80 = \ln 40 - 3k, 3k = \ln 40 - \ln 80$
 $3k = \ln \frac{1}{2} \quad \therefore k = -\frac{\ln 2}{3} \quad \text{답 } ①$

2 해결단계

① 단계	조건 (가)의 양변을 적분하여 $\{f(x)\}^3$ 을 구한다.
② 단계	$\{f(1)\}^3$ 의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ($x \neq 0$)이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 좌변에서 $f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \{f(x)\}^2 f'(x) dx &= \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 + C_1 \\ &= \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 \end{aligned}$$

(단, C_1 은 적분상수)

①의 우변에서 $x^2+1=s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dx} = 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2+1} dx &= \int \frac{1}{s} ds \\ &= \ln |s| + C_2 \\ &= \ln (x^2+1) + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

①에서

$$\frac{1}{3} \{f(x)\}^3 = \ln (x^2+1) + C_3 \quad (\text{단, } C_3 \text{은 적분상수})$$

조건 (나)에서 $f(0)=0$ 이므로

$$\frac{1}{3} \{f(0)\}^3 = \ln 1 + C_3 \quad \therefore C_3 = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 = \ln (x^2+1) \text{에서}$$

$$\{f(x)\}^3 = 3 \ln (x^2+1) \text{이므로}$$

$$\{f(1)\}^3 = 3 \ln 2$$

답 ②

3 해결단계

① 단계	주어진 식과 역함수의 미분법을 이용하여 $g'(x)$ 를 $g(x)$ 를 사용하여 나타낸 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	①단계에서 구한 식을 변형하여 적분한 후, 함수 $g(x)$ 에 관한 식을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	②단계에서 구한 식과 사잇값 정리를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 $f(1)=2$ 이므로

$$g(2)=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $f(g(x))=x$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x)) g'(x) = 1 \quad \therefore f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$$

$f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$ 에 x 대신에 $g(x)$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} f'(g(x)) &= \frac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2} \\ &= \frac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3} \quad (\because f(g(x))=x) \\ &= \frac{1}{g'(x)} \end{aligned}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ㄱ. ①에 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} g'(2) &= \frac{2^2 \times \{g(2)\}^3}{1-2^3 \times \{g(2)\}^2} \\ &= \frac{4 \times 1}{1-8 \times 1} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -\frac{4}{7} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. ①에서

$$\begin{aligned} g'(x) [1-x^3\{g(x)\}^2] &= x^2\{g(x)\}^3 \\ g'(x) - x^3 g'(x) \{g(x)\}^2 &= x^2\{g(x)\}^3 \\ \therefore g'(x) &= x^3 g'(x) \{g(x)\}^2 + x^2\{g(x)\}^3 \\ &= x^2\{g(x)\}^2 \{x g'(x) + g(x)\} \end{aligned}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\int g'(x) dx = \int x^2\{g(x)\}^2 \{x g'(x) + g(x)\} dx$$

$x g(x)=t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = x g'(x) + g(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int x^2\{g(x)\}^2 \{x g'(x) + g(x)\} dx \\ &= \int t^2 dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

①에서 $g(2)=1$ 이므로

$$1 = \frac{1}{3} \times 2^3 \{g(2)\}^3 + C \text{이므로}$$

$$1 = \frac{8}{3} + C \quad (\because \textcircled{1}) \quad \therefore C = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3} \quad (\text{참})$$

ㄷ. ㄴ에서 $g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$ 이므로

이 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = \frac{1}{3} \{g(1)\}^3 - \frac{5}{3}$$

$$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때, $h(x) = x^3 - 3x - 5$ 라 하면

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $h(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극댓값을 갖고

$$h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 5 = -3 < 0$$

이므로 방정식 $h(x)=0$ 은 $x>1$ 에서 하나의 실근을 갖는다.

이때, ③에서 $h(g(1))=0$ 이므로 $g(1)$ 은 방정식

$h(x)=0$ 의 실근이고 $g(1)>1$ 이다.

또한,

$$h(2)=2^3-3 \times 2-5=-3<0,$$

$$h\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3 \times \frac{5}{2}-5=\frac{25}{8}>0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$ 은 열린구간 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 에서 하나의 실근을 갖는다.

$$\therefore 2 < g(1) < \frac{5}{2} \text{ (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

4 해결단계

① 단계	주어진 식의 양변을 적분하여 $f(x)$, $f(2x+1)$ 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	$x=-\frac{1}{8}$, $x=\frac{3}{4}$, $x=\frac{5}{2}$ 를 차례대로 대입하여 구한 식과 조건 ㄴ을 연립하여 $f(-1)$ 의 값을 구한다.

조건 ㄱ에서

$$2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) \text{ 이므로}$$

$$\int 2\{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) dx$$

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 + C_1 \text{ (단, } C_1 \text{은 적분상수)}$$

이 식에 $x=-1$ 을 대입하면

$$\frac{2}{3}\{f(-1)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(-1)\}^3 + C_1$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}\{f(-1)\}^3$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 + \frac{1}{2}\{f(-1)\}^3 \text{에서}$$

$$\{f(2x+1)\}^3 = 4\{f(x)\}^3 - 3\{f(-1)\}^3 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에 $x=-\frac{1}{8}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 &= 4\left\{f\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}^3 - 3\{f(-1)\}^3 \\ &= 4 - 3\{f(-1)\}^3 \quad (\because f\left(-\frac{1}{8}\right)=1) \end{aligned}$$

㉠에 $x=\frac{3}{4}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 &= 4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 - 3\{f(-1)\}^3 \\ &= 4[4 - 3\{f(-1)\}^3] - 3\{f(-1)\}^3 \\ &= 16 - 15\{f(-1)\}^3 \end{aligned}$$

㉠에 $x=\frac{5}{2}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} \{f(6)\}^3 &= 4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 - 3\{f(-1)\}^3 \\ &= 4[16 - 15\{f(-1)\}^3] - 3\{f(-1)\}^3 \\ &= 64 - 63\{f(-1)\}^3 \end{aligned}$$

이때, 조건 ㄴ에서 $f(6)=2$ 이므로

$$8 = 64 - 63\{f(-1)\}^3$$

$$63\{f(-1)\}^3 = 56, \{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore f(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

답 ④

09 정적분

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 80

01 ②

02 18

03 21

04 ⑤

05 ②

06 ①

07 2

08 ②

01 함수 $y = \frac{x}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ 일 때 } \frac{x}{x+2} \leq 0,$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ 일 때 } \frac{x}{x+2} \geq 0$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \left| \frac{x}{x+2} \right| dx$$

$$= -\int_{-1}^0 \frac{x}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx$$

$$= -\int_{-1}^0 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx + \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$$

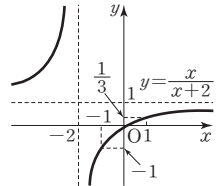
$$= -\left[x - 2 \ln |x+2|\right]_{-1}^0 + \left[x - 2 \ln |x+2|\right]_0^1$$

$$= (2 \ln 2 - 1) + (1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2)$$

$$= 4 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$= \ln \frac{16}{9}$$

답 ②



02 $f(-x)=f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이고, $y=\sin x$,

$y=\tan x$ 가 각각 기함수이므로 $f(x) \times \sin x$,

$f(x) \times \tan x$ 는 각각 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \tan x + 3)f(x) dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) \times \sin x dx}_{=0} - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) \times \tan x dx}_{=0} + 3 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$= 0 - 0 + 2 \times 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \left(\because \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 3 \right)$$

$$= 18$$

답 18

03 함수 $f(x) = \begin{cases} \pi x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ \pi \sin \frac{\pi}{2} x & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 에서

$$f(0)=0, f(2)=\pi \sin \pi=0 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \pi, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이다.

또한, 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키므로 $f(x)$ 는 주기가 2인 함수이다. 즉,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_2^4 f(x) dx = \int_4^6 f(x) dx \\ &= \dots = \int_{18}^{20} f(x) dx\end{aligned}$$

이므로

$$\int_2^{20} f(x) dx = 9 \int_0^2 f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 \pi x^2 dx + \int_1^2 \pi \sin \frac{\pi}{2} x dx \\ &= \left[\frac{\pi}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-2 \cos \frac{\pi}{2} x \right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{3} - 2 \cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{3} + 2\end{aligned}$$

①에서

$$\int_2^{20} f(x) dx = 9 \times \left(\frac{\pi}{3} + 2 \right) = 3\pi + 18$$

따라서 $a=3$, $b=18$ 이므로

$$a+b=3+18=21$$

답 21

04 $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x+x(\ln x)^2} dx$ 에서 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$
 $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2 \ln x}{x+x(\ln x)^2} dx &= \int_0^2 \frac{2 \ln x}{1+(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t^2} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

여기서 $1+t^2=s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$

$t=0$ 일 때 $s=1$, $t=2$ 일 때 $s=5$ 이므로 ①에서

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{2 \ln x}{x+x(\ln x)^2} dx &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \int_1^5 \frac{1}{s} ds = \left[\ln |s| \right]_1^5 \\ &= \ln 5\end{aligned}$$

답 ⑤

05 $\int_0^2 \sqrt{4x-x^2} dx$ 에서
 $\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(2-x)^2}$
 $2-x=2 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$)로 놓으면
 $x=2-2 \cos \theta$ 에서 $\frac{dx}{d\theta}=2 \sin \theta$
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=2$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

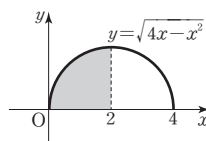
$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4x-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4 \cos^2 \theta} \times 2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \theta \times 2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin^3 \theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= 8 \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8 \left(0 - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\cos^2 \theta)} \times 2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \theta} \times 2 \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 \theta d\theta \quad \left(\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta \geq 0 \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2-2(1-\sin^2 \theta)\} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-2 \cos 2\theta) d\theta \quad \left(\because 1-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta \right) \\ &= \left[2\theta - \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(2 \times \frac{\pi}{2} - \sin \pi \right) - (0 - \sin 0) = \pi\end{aligned}$$

답 ②

blacklabel 특강 풀이첨삭

$y=\sqrt{4x-x^2}$ 에서
 $(x-2)^2+y^2=4$ ($y \geq 0$)
 따라서 함수 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 의 그래프는
 오른쪽 그림과 같이 중심의 좌표가
 (2, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원에
 서 $y \geq 0$ 인 범위의 반원이다.



06 $\int_0^2 e^{-x} f(x) dx$ $\left[\begin{array}{l} u(x)=x, v'(x)=e^{-x} \text{으로 놓으면} \\ u'(x)=1, v(x)=-e^{-x} \end{array} \right]$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^2 (2-x) e^{-x} dx \quad \left[\begin{array}{l} p(x)=2-x, q'(x)=e^{-x} \text{으로 놓으면} \\ p'(x)=-1, q(x)=-e^{-x} \end{array} \right] \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx + \left[(x-2) e^{-x} \right]_1^2 - \int_1^2 e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 + \frac{1}{e} - \left[-e^{-x} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) + \frac{1}{e} - \left(-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

답 ①

07 $f(x)=3x+\int_1^x t(x-2t) \ln t dt$

$$\begin{aligned}&= 3x + x \int_1^x t \ln t dt - 2 \int_1^x t^2 \ln t dt \\ &\text{위의 식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= 3 + \int_1^x t \ln t dt + x^2 \ln x - 2x^2 \ln x \\ &= 3 + \int_1^x t \ln t dt - x^2 \ln x \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f'(1)=3$

또한, ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f''(x) &= x \ln x - 2x \ln x - x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= -x \ln x - x \\ \therefore f''(1) &= -1 \\ \therefore f'(1) + f''(1) &= 3 + (-1) = 2\end{aligned}$$

답 2

08 $\int x e^x dx = G(x)$ 라 하고 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $x e^x = G'(x)$ ㉑
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_{f(1)}^{f(x)} x e^x dx$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_{f(1)}^{f(x)} G'(x) dx$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(f(x)) - G(f(1))}{x^2-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x+1} \times \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right.$
 $\quad \left. \times \frac{G(f(x)) - G(f(1))}{f(x) - f(1)} \right\}$
 $= \frac{1}{2} \times f'(1) \times G'(f(1))$
 $= \frac{1}{2} \times (-1) \times G'(2) \quad (\because f'(1) = -1, f(1) = 2)$
 $= \frac{1}{2} \times (-1) \times 2e^2 \quad (\because \text{㉑})$
 $= -e^2$

답 ②

Step 2		1등급을 위한 최고의 변별력 문제			pp. 81~84
01 4-e	02 ④	03 ⑤	04 $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$	05 $\frac{4(e-e^{-1})}{3}$	
06 8	07 1	08 ③	09 ④	10 ①	
11 8	12 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$	13 17	14 $5\pi+60$	15 ②	
16 288	17 ③	18 18	19 2	20 $2+2\ln 2$	
21 $\frac{\pi}{2}$	22 -e	23 $\frac{1}{2}\ln 5$	24 $\frac{1}{2}e$	25 36	
26 ②	27 ③	28 0.32			

01 함수 $y=e^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 되었다고 하면
 $f(x) = e^{x-a} + b$ (단, a, b 는 상수)
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0, -2), (\ln 3, 0)$ 을 지나므로
 $f(0) = -2$ 에서
 $e^{-a} + b = -2 \quad \therefore b = -2 - e^{-a}$ ㉑
 $f(\ln 3) = 0$ 에서
 $e^{\ln 3 - a} + b = 0, 3e^{-a} + b = 0$
 $\therefore b = -3e^{-a}$ ㉒
 ㉑, ㉒에서 $-2 - e^{-a} = -3e^{-a}$
 $2e^{-a} = 2, e^{-a} = 1 \quad \therefore a = 0$
 이것을 ㉒에 대입하면 $b = -3$
 즉, $f(x) = e^x - 3$ 이므로
 $|f(x)| = |e^x - 3| = \begin{cases} -e^x + 3 & (x < \ln 3) \\ e^x - 3 & (x \geq \ln 3) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 (-e^x + 3) dx \\ &= \left[-e^x + 3x \right]_0^1 \\ &= (-e + 3) - (-1 + 0) \\ &= 4 - e \end{aligned}$$

답 4-e

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 지나는 두 점을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한 경우	50%
(나)	$\int_0^1 f(x) dx$ 의 값을 구한 경우	50%

02 오른쪽 그림에서

$$\angle OAP = \frac{\pi}{2} - \theta$$

점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{OA} \cos(\angle OAP)$$

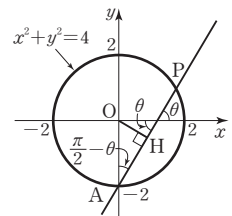
$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2 \sin \theta$$

$\triangle OAP$ 는 $\overline{OA} = \overline{OP}$ 인 이등변삼각형이므로

$$l(\theta) = 2\overline{AH} = 4 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} l(\theta) d\theta &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \theta d\theta = \left[-4 \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - \left(-4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ④



03 $f(n) = \int_n^{n+1} \{e^x - (-e)^n \pi \sin \pi x\} dx$

$$= \left[e^x + (-e)^n \cos \pi x \right]_n^{n+1}$$

$$= \{e^{n+1} + (-e)^n \cos(n+1)\pi\}$$

$$\cos(n\pi + \pi) = \cos(\pi + n\pi) = -\cos n\pi \quad \text{---} \quad \{e^n + (-e)^n \cos n\pi\}$$

$$= \{e^{n+1} - (-e)^n \cos n\pi\} - \{e^n + (-e)^n \cos n\pi\}$$

$$= e^{n+1} - e^n - 2(-e)^n \cos n\pi$$

$$= e^{n+1} - e^n - 2(-e)^n (-1)^n \quad (\because \cos n\pi = (-1)^n)$$

$$= e^{n+1} - e^n - 2e^n$$

$$= e^{n+1} - 3e^n$$

$$= (e-3)e^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e-3)e^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (e-3) \left(\frac{e}{3}\right)^n \\ &= \frac{(e-3)e}{1 - \frac{e}{3}} = \frac{(e-3)e}{\frac{3-e}{3}} \\ &= -e \end{aligned}$$

답 ⑤

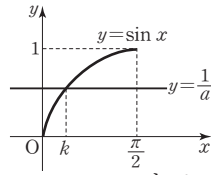
04 해결단계

① 단계	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 방정식 $a \sin x - 1 = 0$ 의 실근이 오직 하나임을 파악한 후, 그 근을 k 라 한다.
② 단계	함수 $f(a)$ 를 k 를 이용하여 나타낸다.
③ 단계	$\sin k = \frac{1}{a}$ 임을 이용하여 $\frac{dk}{da}$, $\cos k$ 를 각각 구한 후, $f'(a)$ 를 구한다.
④ 단계	함수 $f(a)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 a 의 값 p 와 그 최소값 q 를 각각 구한 후, pq 의 값을 구한다.

$a \sin x - 1 = 0$ 에서 $\sin x = \frac{1}{a}$ 이므로 방정식

$a \sin x - 1 = 0$ 의 근은 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{a}$ 의 교점의 x 좌표이다.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{a}$ 이 오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나므로 이 교점의 x 좌표를 k 라 하면 방정식 $a \sin x - 1 = 0$ 의 근도 k 이다.



즉, $a \sin k - 1 = 0$ 이므로 $\sin k = \frac{1}{a}$ ㉠

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \sin x - 1| dx \\
 &= \int_0^k (1 - a \sin x) dx + \int_k^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x - 1) dx \\
 &= \left[x + a \cos x \right]_0^k + \left[-a \cos x - x \right]_k^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= (k + a \cos k - a) + \left(-\frac{\pi}{2} + a \cos k + k \right) \\
 &= 2k + 2a \cos k - a - \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\text{㉡}
 \end{aligned}$$

이때, $a > 1$ 이면 $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이므로 $0 < \sin k < 1$ ($\because$ ㉠)

즉, $0 < k < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos k > 0$

$$\therefore \cos k = \sqrt{1 - \sin^2 k} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \quad (\because a > 1)$$

또한, ㉡의 양변을 a 에 대하여 미분하면

$$\frac{dk}{da} \cos k = -\frac{1}{a^2} \text{에서}$$

$$\frac{dk}{da} = -\frac{1}{a^2 \cos k} = -\frac{1}{a \sqrt{a^2 - 1}}$$

㉡의 양변을 a 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= 2 \frac{dk}{da} + 2 \cos k + 2a \times (-\sin k) \frac{dk}{da} - 1 \\
 &= -\frac{2}{a \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{2 \sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{2}{a \sqrt{a^2 - 1}} - 1 \\
 &= \frac{2 \sqrt{a^2 - 1}}{a} - 1
 \end{aligned}$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } \frac{2 \sqrt{a^2 - 1}}{a} - 1 = 0, \quad 2 \sqrt{a^2 - 1} = a$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4(a^2 - 1) = a^2, \quad 3a^2 = 4$$

$$a^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because a > 1)$$

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(1)	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 에서 극소이자 최소이므로 최소값은 $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 이다.

$$\text{이때, } a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이면 } \sin k = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore k = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < k < \frac{\pi}{2})$$

따라서 함수 $f(a)$ 의 최소값은

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) &= 2 \times \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \cos \frac{\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $q = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$pq = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{9} \pi$

05 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 2}$ 에서

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2 + 2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2 + 2} = -f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 기함수이고, $f(-x) = -f(x)$ 이면

$f'(-x) = f'(x)$ 이므로 $f'(x)$ 는 우함수이다.

즉, $2f'(x)$ 는 우함수이고, $xf'(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-1}^1 f'(x)(2-x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \{2f'(x) - xf'(x)\} dx \\
 &= 4 \int_0^1 f'(x) dx \\
 &= 4 \left[f(x) \right]_0^1 \\
 &= 4 \{f(1) - f(0)\} \\
 &= 4 \times \left(\frac{e - e^{-1}}{3} - \frac{1 - 1}{2} \right) \\
 &= \frac{4(e - e^{-1})}{3}
 \end{aligned}$$

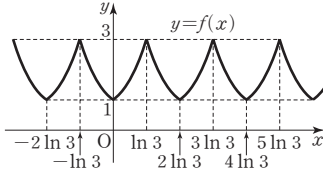
답 $\frac{4(e - e^{-1})}{3}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

$$\begin{aligned}
 f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \quad (\because f(x) \text{는 기함수}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\
 &= f'(x)
 \end{aligned}$$

즉, $f'(-x) = f'(x)$ 이므로 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 기함수이면 $f'(x)$ 는 우함수이다.

- 06** 조건 ㉞에서 모든 실수 x 에 대하여
 $f(\ln 3 + x) = f(\ln 3 - x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \ln 3$ 에 대하여 대칭이다.
 또한, $f(x) = f(-x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
 이때, 조건 ㉝에서 $f(x) = e^x$ ($0 \leq x \leq \ln 3$)이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\ln 81} f(x) dx &= \int_0^{4 \ln 3} f(x) dx \\ &= \int_0^{\ln 3} f(x) dx + \int_{\ln 3}^{2 \ln 3} f(x) dx \\ &\quad + \int_{2 \ln 3}^{3 \ln 3} f(x) dx + \int_{3 \ln 3}^{4 \ln 3} f(x) dx \\ &= 4 \int_0^{\ln 3} f(x) dx = 4 \int_0^{\ln 3} e^x dx \\ &= 4 \left[e^x \right]_0^{\ln 3} \\ &= 4 \times (3 - 1) = 8 \end{aligned}$$

답 8

- 07** $f(x) + f(-x) = \cos x$ 에서
 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) + f(-x)\} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ㉠

그런데 두 함수 $y = f(x)$, $y = f(-x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx \\ \text{즉, ㉠에서 } 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad \leftarrow y = \cos x \text{는 우함수이므로} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

답 1

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx \text{에서 } -x &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -1 \\ x = -\frac{\pi}{2} \text{일 때 } t &= \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} \text{일 때 } t = -\frac{\pi}{2} \text{이므로} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \end{aligned}$$

- 08** (i) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi$ 일 때, $\cos x \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + |\cos x| \\ &= \cos x + \cos x \\ &= 2 \cos x \end{aligned}$$

- (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 일 때, $\cos x < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + |\cos x| \\ &= \cos x - \cos x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

한편, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$ 에서 $2x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = 2$$

$x = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t = \frac{\pi}{6}$, $x = \pi$ 일 때 $t = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11}{6}\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 0 dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2 \cos t dt \\ &= \left[\sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin t \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 ③

- 09** $\int_{-2}^2 \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^2 \frac{1}{1+f(x)} dx$ ㉠

$\int_{-2}^0 \frac{1}{1+f(x)} dx$ 에서 $x = -t$ 로 놓으면 $t = -x$ 에서

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

$x = -2$ 일 때 $t = 2$, $x = 0$ 일 때 $t = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{1}{1+f(x)} dx &= \int_2^0 \frac{-1}{1+f(-t)} dt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+f(-t)} dt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{1+\frac{1}{f(t)}} dt \\ &= \int_0^2 \frac{f(t)}{1+f(t)} dt \end{aligned}$$

$f(t)f(-t) = 1$ 이므로

$$= \int_0^2 \frac{f(t)}{1+f(t)} dt$$

$$= \int_0^2 \frac{f(x)}{1+f(x)} dx$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^2 \frac{f(x)}{1+f(x)} dx + \int_0^2 \frac{1}{1+f(x)} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{f(x)+1}{f(x)+1} dx$$

$$= \int_0^2 dx$$

$$= [x]_0^2 = 2$$

답 ④

10 $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ 에서 $e^x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=e^x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\ln \sqrt{3}$ 일 때 $t=\sqrt{3}$ 이므로

$$\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

여기서 $t=\tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$t=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$, $t=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로 ㉠에서

$$\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

답 ①

11 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(f(x))=x$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$$\therefore g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_4^0 \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \ln g'(f(x)) \right\} dx$$

$$= - \int_0^4 \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \ln \frac{1}{f'(x)} \right\} dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \int_0^4 \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \ln f'(x) \right\} dx$$

이때 $\ln f'(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{f''(x)}{f'(x)}$

$x=0$ 일 때 $t=\ln f'(0)=\ln 1=0$,

$x=4$ 일 때 $t=\ln f'(4)=\ln e^4=4$ 이므로

$$\int_4^0 \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \ln g'(f(x)) \right\} dx$$

$$= \int_0^4 \left\{ \frac{f''(x)}{f'(x)} \ln f'(x) \right\} dx$$

$$= \int_0^4 t dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{2} \times (16-0) = 8$$

답 8

12 주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} 3 & (0 \leq x < 1) \\ 4-x & (1 \leq x < 3) \\ 1 & (3 < x \leq 4) \end{cases}$

$$3x+2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx}=3$$

$x=-\frac{1}{3}$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{1}{3}$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{3x+1} \times f(3x+2) dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{t-1} \times f(t) \times \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^3 \sqrt{t-1} (4-t) dt$$

$$= \frac{4}{3} \int_1^3 \sqrt{t-1} dt - \frac{1}{3} \int_1^3 t \sqrt{t-1} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때,

$$\frac{4}{3} \int_1^3 \sqrt{t-1} dt = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{3} (t-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3$$

$$= \frac{8}{9} \times 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

또한, $\frac{1}{3} \int_1^3 t \sqrt{t-1} dt$ 에서 $\sqrt{t-1}=s$ ($s>0$)로 놓으면

$$t=s^2+1 \text{에서 } \frac{dt}{ds}=2s$$

$t=1$ 일 때 $s=0$, $t=3$ 일 때 $s=\sqrt{2}$ ($\because s>0$)이므로

$$\frac{1}{3} \int_1^3 t \sqrt{t-1} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (s^2+1)s \times 2s ds$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (s^4+s^2) ds$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} s^5 + \frac{1}{3} s^3 \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{44\sqrt{2}}{45}$$

$$\therefore \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{3x+1} \times f(3x+2) dx$$

$$= \frac{4}{3} \int_1^3 \sqrt{t-1} dt - \frac{1}{3} \int_1^3 t \sqrt{t-1} dt \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{9} - \frac{44\sqrt{2}}{45}$$

$$= \frac{36\sqrt{2}}{45} - \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

답 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

$$13 \quad g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

에서 $e^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $x = \ln t$ 이므로

$$g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (0 \leq \ln t < 1) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (1 \leq \ln t \leq 2) \end{cases}$$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} f(\ln t) & (1 \leq t < e) \\ g\left(\frac{t}{e}\right) + 5 & (e \leq t \leq e^2) \end{cases}$$

$$\int_1^{e^2} g(x) dx = 6e^2 + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} g(x) dx &= \int_1^e f(\ln x) dx + \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx \\ &= \int_1^e f(\ln x) dx + \int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right) dx + \int_e^{e^2} 5 dx \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{이때, } \int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right) dx \text{에서 } \frac{x}{e} = s \text{로 놓으면 } \frac{ds}{dx} = \frac{1}{e}$$

$x = e$ 일 때 $s = 1$, $x = e^2$ 일 때 $s = e$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right) dx &= e \int_1^e g(s) ds \\ &= e \int_1^e f(\ln s) ds \end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} g(x) dx &= \int_1^e f(\ln x) dx + \int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right) dx + \int_e^{e^2} 5 dx \\ &= \int_1^e f(\ln x) dx + e \int_1^e f(\ln s) ds + \int_e^{e^2} 5 dx \\ &= \int_1^e f(\ln x) dx + e \int_1^e f(\ln x) dx + \left[5x \right]_e^{e^2} \\ &= ae + b + e(ae + b) + 5(e^2 - e) \\ &= (a+5)e^2 + (a+b-5)e + b = 6e^2 + 4 \\ a+5 &= 6, a+6-5=0, b=4 \text{에서} \\ a &= 1, b=4 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 1^2 + 4^2 = 17 \end{aligned}$$

답 17

$$14 \quad f(x) = f(x-2) + 2 \text{에 } x \text{ 대신에 } x+2 \text{를 대입하면}$$

$$f(x+2) = f(x) + 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x+2 = t_1$ 로 놓으면 $x = t_1 - 2$ 이므로

$$-2 \leq x \leq 0 \text{에서 } 0 \leq t_1 \leq 2$$

즉, $0 \leq t_1 \leq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(t_1) &= f(x+2) \\ &= f(x) + 2 \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \sqrt{4-x^2} + 2 \quad (\because \text{조건 } \textcircled{7}) \\ &= \sqrt{4-(t_1-2)^2} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$t_1 + 2 = t_2$ 로 놓으면 $t_1 = t_2 - 2$ 이므로

$$0 \leq t_1 \leq 2 \text{에서 } 2 \leq t_2 \leq 4$$

즉, $2 \leq t_2 \leq 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(t_2) &= f(t_1+2) \\ &= f(t_1) + 2 \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \sqrt{4-(t_1-2)^2} + 2 + 2 \quad (\because \textcircled{8}) \\ &= \sqrt{4-(t_2-4)^2} + 4 \end{aligned}$$

$\vdots$

같은 방법으로 계속하면

$2k-2 \leq x \leq 2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$f(x) = \sqrt{4-(x-2k)^2} + 2k$$

이때, $x-2k = 2 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

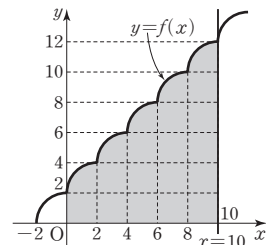
$$x = 2 \sin \theta + 2k \text{에서 } \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$x = 2k-2$ 일 때 $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $x = 2k$ 일 때 $\theta = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{2k-2}^{2k} f(x) dx &= \int_{2k-2}^{2k} \{ \sqrt{4-(x-2k)^2} + 2k \} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 \cos \theta (\sqrt{4-4 \sin^2 \theta} + 2k) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 \cos \theta (2 \cos \theta + 2k) d\theta \quad (\because -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4 \cos^2 \theta + 4k \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \{ 2(2 \cos^2 \theta - 1) + 2 + 4k \cos \theta \} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (2 \cos 2\theta + 4k \cos \theta + 2) d\theta \\ &= \left[\sin 2\theta + 4k \sin \theta + 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= -(-4k - \pi) = 4k + \pi \\ \therefore \int_0^{10} f(x) dx &= \sum_{k=1}^5 \int_{2k-2}^{2k} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^5 (4k + \pi) \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 5\pi = 5\pi + 60 \quad \text{답 } 5\pi + 60 \end{aligned}$$

• 다른풀이 •

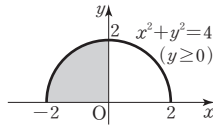
두 조건 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 모두 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\int_0^{10} f(x) dx$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=10$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(x) dx &= 5 \int_{-2}^0 f(x) dx + 2 \times (2+4+6+8+10) \\ &= 5 \int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2} dx + 60 \quad \dots\dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

이때, 함수 $y=\sqrt{4-x^2}$ 의 그래프는
원 $x^2+y^2=4$ ($y\geq 0$)의 일부이므로
오른쪽 그림과 같다.



즉, $\int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2} dx$ 는 오른쪽 그림

의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$$\int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 = \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{10} f(x) dx &= 5 \int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2} dx + 60 \quad (\because \ominus) \\ &= 5\pi + 60 \end{aligned}$$

15 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 3, $x=2$ 에서 극솟값 1을
가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=3, f'(2)=0, f(2)=1$$

또한, $1 < x < 2$ 에서 $f'(x) < 0$, $x > 2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이다.

$f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=3$,

$x=2$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=7$ 이므로

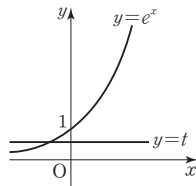
$$\begin{aligned} \int_1^3 |f'(x)| f(x) e^{\frac{1}{2}[f(x)-1]} dx \\ &= -\int_1^2 f'(x) f(x) e^{\frac{1}{2}[f(x)-1]} dx \\ &\quad + \int_2^3 f'(x) f(x) e^{\frac{1}{2}[f(x)-1]} dx \\ &= -\int_3^1 t e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt + \int_1^7 t e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt \\ &= \int_1^3 t e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt + \int_1^7 t e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt \quad \begin{matrix} u(t)=t, v'(t)=e^{\frac{1}{2}(t-1)} \text{로 놓으면} \\ u'(t)=1, v(t)=2e^{\frac{1}{2}(t-1)} \end{matrix} \\ &= \left[2t e^{\frac{1}{2}(t-1)} \right]_1^3 - \int_1^3 2e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt \\ &\quad + \left[2t e^{\frac{1}{2}(t-1)} \right]_1^7 - \int_1^7 2e^{\frac{1}{2}(t-1)} dt \\ &= 6e - 2 - \left[4e^{\frac{1}{2}(t-1)} \right]_1^3 + 14e^3 - 2 - \left[4e^{\frac{1}{2}(t-1)} \right]_1^7 \\ &= 14e^3 + 6e - 4 - (4e - 4) - (4e^3 - 4) \\ &= 10e^3 + 2e + 4 \end{aligned}$$

답 ②

16 (i) $t \leq 1$ 일 때,

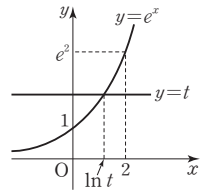
함수 $y=e^x$ 의 그래프와 직선
 $y=t$ 는 오른쪽 그림과 같으므로
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $e^x > t$

$$\begin{aligned} \therefore g(t) &= \int_0^2 |e^x - t| dx \\ &= \int_0^2 (e^x - t) dx \\ &= \left[e^x - tx \right]_0^2 \\ &= e^2 - 2t - 1 \end{aligned}$$



(ii) $1 < t \leq e^2$ 일 때,

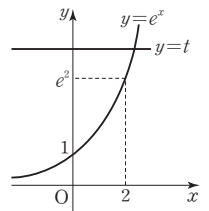
함수 $y=e^x$ 의 그래프와 직선
 $y=t$ 는 오른쪽 그림과 같으므로
교점의 x 좌표는
 $e^x=t$ 에서 $x=\ln t$



$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^2 |e^x - t| dx \\ &= \int_0^{\ln t} (-e^x + t) dx + \int_{\ln t}^2 (e^x - t) dx \\ &= \left[-e^x + tx \right]_0^{\ln t} + \left[e^x - tx \right]_{\ln t}^2 \\ &= (-t + t \ln t) + 1 + (e^2 - 2t) - (t - t \ln t) \\ &= 2t \ln t - 4t + e^2 + 1 \end{aligned}$$

(iii) $t > e^2$ 일 때,

함수 $y=e^x$ 의 그래프와 직선
 $y=t$ 는 오른쪽 그림과 같으므로
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $e^x < t$



$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^2 |e^x - t| dx \\ &= \int_0^2 (-e^x + t) dx \\ &= \left[-e^x + tx \right]_0^2 \\ &= -e^2 + 2t + 1 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(t) = \begin{cases} -2t + e^2 - 1 & (t \leq 1) \\ 2t \ln t - 4t + e^2 + 1 & (1 < t \leq e^2) \\ 2t - e^2 + 1 & (t > e^2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{e^2+1} g(t) dt &= \int_0^1 (-2t + e^2 - 1) dt + \int_1^{e^2} (2t \ln t - 4t + e^2 + 1) dt \\ &\quad + \int_{e^2}^{e^2+1} (2t - e^2 + 1) dt \\ &= \left[-t^2 + (e^2 - 1)t \right]_0^1 + \left[t^2 \ln t \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} t dt \\ &\quad + \left[-2t^2 + (e^2 + 1)t \right]_1^{e^2} + \left[t^2 + (-e^2 + 1)t \right]_{e^2}^{e^2+1} \\ &= -1 + (e^2 - 1) + 2e^4 - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^{e^2} - 2e^4 \\ &\quad + (e^2 + 1)e^2 + 2 - (e^2 + 1) + (e^2 + 1)^2 \\ &\quad + (-e^2 + 1)(e^2 + 1) - e^4 - (-e^2 + 1)e^2 \\ &= \frac{1}{2} e^4 + 2e^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} 72(a+b+c) &= 72 \times \left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} \right) \\ &= 72 \times 4 = 288 \end{aligned}$$

답 288

17 $f(x) - f(-x) = 2x$ 에서 $f(x) = f(-x) + 2x$ 이고,
 $f(x) = g(x) + x$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ &= f(-x) + 2x - x \\ &= f(-x) + x \\ &= g(-x) \quad (\because g(x) = f(x) - x) \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\cos x) dx &= \int_0^\pi x \{g(\cos x) + \cos x\} dx \\ &= \int_0^\pi x g(\cos x) dx + \int_0^\pi x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

이때, $\int_0^\pi x g(\cos x) dx$ 에서

$$\pi - x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -1 \text{이고}$$

$x=0$ 일 때 $t=\pi$, $x=\pi$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x g(\cos x) dx &= -\int_\pi^0 (\pi - t) g(\cos(\pi - t)) dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) g(-\cos t) dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) g(\cos t) dt \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \int_0^\pi \pi g(\cos t) dt - \int_0^\pi t g(\cos t) dt \\ &= \pi \int_0^\pi g(\cos x) dx - \int_0^\pi x g(\cos x) dx \\ &= 4\pi - \int_0^\pi x g(\cos x) dx \quad (\because \int_0^\pi g(\cos x) dx = 4) \end{aligned}$$

에서 $2 \int_0^\pi x g(\cos x) dx = 4\pi$

$$\therefore \int_0^\pi x g(\cos x) dx = 2\pi$$

또한, $\begin{cases} u(x)=x, v'(x)=\cos x \text{로 놓으면} \\ u'(x)=1, v(x)=\sin x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x dx &= \left[x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 0 - \left[-\cos x \right]_0^\pi = -2 \end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{8}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\cos x) dx &= \int_0^\pi x g(\cos x) dx + \int_0^\pi x \cos x dx \\ &= 2\pi - 2 \quad \text{답 } \textcircled{3} \end{aligned}$$

18 조건 (4)에서 방정식 $f(x) - x - 1 = 0$ 이 서로 다른 세 실근 1, 2, 3을 가지므로 위의 방정식에 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$ 을 대입하면 등호가 성립한다. 즉,

$$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (4)에서 $F(x) = f(f(x))$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f'(f(x))f'(x)$$

이것을 조건 (4)에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx &= \int_1^2 \frac{f'(f(x))f'(x)}{x} dx \quad \leftarrow \begin{matrix} u(x)=\frac{1}{x}, v'(x)=f'(f(x))f'(x) \\ \text{로 놓으면} \end{matrix} \\ &= \left[\frac{f(f(x))}{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \left\{ -\frac{f(f(x))}{x^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}f(f(2)) - f(f(1)) + \int_1^2 \frac{f(f(x))}{x^2} dx \\ &= 2 - 3 + \int_1^2 \frac{f(f(x))}{x^2} dx \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= -1 + \int_1^2 \frac{f(f(x))}{x^2} dx = 8 \\ \therefore \int_1^2 \frac{f(f(x))}{x^2} dx &= 9 \end{aligned}$$

여기서 $\frac{1}{2}x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$ 이고,

$x=1$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(f(x))}{x^2} dx &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(f(2t))}{4t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(f(2t))}{t^2} dt = 9 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(f(2t))}{t^2} dt = 18$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(f(2x))}{x^2} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(f(2t))}{t^2} dt \\ &= 18 \end{aligned}$$

답 18

19 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(0)=4, f(2)=6 \text{에서 } g(4)=0, g(6)=2$$

또한, $f(g(x))=x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{g'(x)} = f'(g(x))$$

$$g(x)=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(t)}$$

$x=4$ 일 때 $t=0$, $x=6$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{1}{g'(x)} dx &= \int_4^6 f'(g(x)) dx \\ &= \int_0^2 f'(t)f'(t) dt \end{aligned}$$

조건 (4)의 $f(x) = 2f'(x) + x + 2$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}x - 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{1}{g'(x)} dx &= \int_0^2 f'(t)f'(t) dt \\ &= \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}f(t) - \frac{1}{2}t - 1 \right\} f'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)f'(t) dt - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t + 1 \right) f'(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때, $\int_0^2 f(t)f'(t)dt$ 에서 $f(t)=s$ 로 놓으면

$$\frac{ds}{dt}=f'(t) \text{이고,}$$

$t=0$ 일 때 $s=4$, $t=2$ 일 때 $s=6$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t)f'(t)dt &= \int_4^6 sds \\ &= \left[\frac{1}{2}s^2 \right]_4^6 \\ &= \frac{1}{2} \times (36-16) = 10\end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}t+1 \right) f'(t) dt &\xleftarrow{\substack{u(t)=\frac{1}{2}t+1, v'(t)=f'(t) \text{로 놓으면} \\ u'(t)=\frac{1}{2}, v(t)=f(t)}} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}t+1 \right) f(t) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2} f(t) dt \\ &= 2f(2) - f(0) - \frac{1}{2} \int_0^2 \{ 2f'(t) + t + 2 \} dt \\ &\quad (\because \text{조건 (b)})\end{aligned}$$

$$= 12 - 4 - \frac{1}{2} \left[2f(t) + \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 \quad (\because \text{조건 (a)})$$

$$= 8 - \frac{1}{2} \{ 2f(2) + 2 + 4 - 2f(0) \}$$

$$= 8 - \frac{1}{2} \times (12 + 6 - 8)$$

$$= 8 - 5 = 3$$

따라서 ㉠에서

$$\int_4^6 \frac{1}{g'(x)} dx = \frac{1}{2} \times 10 - 3 = 2$$

답 2

$$\begin{aligned}20 \quad 2xf(x) &= xe^x + x + \int_0^x (x+t)f'(t) dt \\ &= xe^x + x + x \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt \\ &= xe^x + x + x \{ f(x) - f(0) \} + \int_0^x tf'(t) dt \\ &= xe^x + x + x \{ f(x) - 1 \} + \int_0^x tf'(t) dt \\ &\quad (\because f(0)=1) \\ &= xe^x + xf(x) + \int_0^x tf'(t) dt\end{aligned}$$

$$\therefore xf(x) = xe^x + \int_0^x tf'(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = e^x + xe^x + xf'(x)$$

따라서 $f(x) = e^x + xe^x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(\ln 2) &= e^{\ln 2} + \ln 2 \times e^{\ln 2} \\ &= 2 + 2 \ln 2\end{aligned}$$

답 2 + 2 ln 2

$$\begin{aligned}21 \quad f(x) &= \sin x + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(t) \sin 2t dt, \\ g(x) &= \cos 2x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \text{에서}\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(t) \sin 2t dt = A, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = B \quad (A, B \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$f(x) = \sin x + 2A, \quad g(x) = \cos 2x - B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(t) \sin 2t dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 2t - B) \sin 2t dt \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin 2t \cos 2t - B \sin 2t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 4t - B \sin 2t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{8} \cos 4t + \frac{B}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \left(-\frac{1}{8} + \frac{B}{2} \right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{B}{2} \right) \\ &= B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 2A) \sin t dt \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2A \sin t) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \quad (\because \cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t) \\ &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore A = B = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $f(x) = \sin x + \pi$, $g(x) = \cos 2x - \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \pi \right) + \left(\cos \pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (1 + \pi) + \left(-1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(t) \sin 2t dt = A, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = B$ 로 놓고 두 함수 $f(x), g(x)$ 를 A, B 를 이용하여 나타낸 경우	30%
(나)	A, B 의 값을 각각 구한 경우	50%
(다)	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구한 경우	20%

$$\begin{aligned}22 \quad f(x) &= \int_x^{x+1} e^t \cos \pi t dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= e^{x+1} \cos (\pi x + \pi) - e^x \cos \pi x \\ &= -e^{x+1} \cos \pi x - e^x \cos \pi x \\ &= -e^x (e + 1) \cos \pi x\end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -e^x(e+1)\cos \pi x=0$$

$$\cos \pi x=0 \quad (\because e^x>0)$$

$$0<x<2 \text{이므로}$$

$$\pi x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi x=\frac{3\pi}{2} \quad \therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{2}$	...	(2)
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극솟값, $x=\frac{3}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다.

한편,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} e^t \cos \pi t dt &\xleftarrow[u'(t)=-\pi \sin \pi t, v(t)=e^t]{u(t)=\cos \pi t, v'(t)=e^t \text{으로 놓으면}} \\ &= \left[e^t \cos \pi t \right]_x^{x+1} + \pi \int_x^{x+1} e^t \sin \pi t dt \xleftarrow[p'(t)=\pi \cos \pi t, g(t)=e^t]{b(t)=\sin \pi t, g'(t)=e^t \text{으로 놓으면}} \\ &= \left[e^t \cos \pi t \right]_x^{x+1} + \pi \left[e^t \sin \pi t \right]_x^{x+1} \\ &\quad - \pi^2 \int_x^{x+1} e^t \cos \pi t dt \end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned} (\pi^2+1) \int_x^{x+1} e^t \cos \pi t dt &= e^{x+1} \cos (\pi x+\pi) - e^x \cos \pi x \\ &\quad + \pi \{ e^{x+1} \sin (\pi x+\pi) - e^x \sin \pi x \} \\ &= -e^{x+1} \cos \pi x - e^x \cos \pi x - \pi e^{x+1} \sin \pi x \\ &\quad - \pi e^x \sin \pi x \\ &= -e^x(e+1) \cos \pi x - \pi e^x(e+1) \sin \pi x \\ &= -e^x(e+1)(\cos \pi x + \pi \sin \pi x) \\ \therefore f(x) &= \int_x^{x+1} e^t \cos \pi t dt \\ &= -\frac{e^x(e+1)(\cos \pi x + \pi \sin \pi x)}{\pi^2+1} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{3}{2}\right)$, 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned} a=f\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\pi e^{\frac{3}{2}}(e+1)}{\pi^2+1} \\ b=f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{\pi e^{\frac{1}{2}}(e+1)}{\pi^2+1} \\ \therefore \frac{a}{b} &= \frac{\frac{\pi e^{\frac{3}{2}}(e+1)}{\pi^2+1}}{-\frac{\pi e^{\frac{1}{2}}(e+1)}{\pi^2+1}} = -e \end{aligned}$$

답 $-e$

23 $g(x)=\int_0^x \frac{t}{f(t)} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\frac{x}{f(x)}$$

조건 (가)에서 $g'(-x)=-g'(x)$ 이므로

$$\frac{-x}{f(-x)}=-\frac{x}{f(x)} \quad \therefore f(-x)=f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 우함수이다.

또한, $g'(x)=\frac{x}{f(x)}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g''(x)=\frac{f(x)-xf'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

조건 (나)에서 점 $(2, g(2))$ 는 곡선 $y=g(x)$ 의 변곡점이므로 $g''(2)=0$

$$\text{즉, } \frac{f(2)-2f'(2)}{\{f(2)\}^2}=0 \text{이므로}$$

$$f(2)-2f'(2)=0 \quad \therefore f(2)=2f'(2)$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 우함수이므로

$$f(x)=x^2+a \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면 } f'(x)=2x$$

$$f(2)=4+a, f'(2)=4 \text{이므로 } f(2)=2f'(2) \text{에서}$$

$$4+a=8 \quad \therefore a=4$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2+4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g(6)-g(2) &= \int_2^6 \frac{t}{f(t)} dt - \int_0^2 \frac{t}{f(t)} dt \\ &= \int_2^6 \frac{t}{t^2+4} dt - \int_0^2 \frac{t}{t^2+4} dt \\ &= \int_2^6 \frac{t}{t^2+4} dt \quad \left[= -\int_2^0 \frac{t}{t^2+4} dt \right] \end{aligned}$$

$t^2+4=s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=2t$ 이고 $t=2$ 일 때 $s=8$, $t=6$ 일 때 $s=40$ 이므로

$$\begin{aligned} g(6)-g(2) &= \int_8^{40} \frac{1}{s} ds \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |s| \right]_8^{40} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 40 - \ln 8) \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2} \ln 5$

24 $\int_1^x f(t) dt = \int_1^x (x-t)g(t) dt + e^3(x-1)$ 에서

$$\int_1^x f(t) dt = x \int_1^x g(t) dt - \int_1^x t g(t) dt + e^3(x-1)$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x g(t) dt + xg(x) - xg(x) + e^3 \\ &= \int_1^x g(t) dt + e^3 \quad \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

①에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=e^3$

또한, ①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=g(x)$$

이때, 조건 (나)의 $\int_1^x \frac{g(t)}{f(t)} dt = 1 - \tan \frac{\pi}{4} x$ 에서

$$\int_1^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 - \tan \frac{\pi}{4} x \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=e^3$ 이

므로

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int_{e^3}^{f(x)} \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln |t| \right]_{e^3}^{f(x)} \\ &= \ln |f(x)| - \ln |e^3| \\ &= \ln |f(x)| - 3\end{aligned}$$

즉, ㉠에서

$$\ln |f(x)| - 3 = 1 - \tan \frac{\pi}{4} x$$

$$\ln |f(x)| = 4 - \tan \frac{\pi}{4} x$$

$$\therefore |f(x)| = e^{4 - \tan \frac{\pi}{4} x}$$

또한, $\int_1^x \frac{g(t)}{f(t)} dt = 1 - \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{g(x)}{f(x)} = -\frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4} x$$

$$g(x) = -\frac{\pi}{4} f(x) \sec^2 \frac{\pi}{4} x$$

$$\therefore |g(x)| = \frac{\pi}{4} e^{4 - \tan \frac{\pi}{4} x} \sec^2 \frac{\pi}{4} x$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{|g(0)|}{|g(1)|} &= \frac{\frac{\pi}{4} e^{4 - \tan 0} \sec^2 0}{\frac{\pi}{4} e^{4 - \tan \frac{\pi}{4}} \sec^2 \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{e^4}{2e^3} = \frac{1}{2}e\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}e$

25 해결단계

① 단계	$g(x) = \int_0^{\ln x^2} f(e^t) dt$ 를 치환을 이용하여 변형한 후, 미분하여 $g'(x)$ 를 구한다.
② 단계	$\int_1^e g(x) dx$ 를 ①단계에서 구한 식과 조건 ㉡를 이용하여 부분적분법으로 적분한다.
③ 단계	k_1, k_2, k_3, k_4 의 값을 각각 구한 후, $ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 $ 의 값을 구한다.

$g(x) = \int_0^{\ln x^2} f(e^t) dt$ 에서 $e^t = s$ ($s > 0$)로 놓으면

$t = \ln s$ 에서 $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s}$ 이고 $t=0$ 일 때 $s=1$, $t=\ln x^2$ 일 때

$s=x^2$ 이므로

$$g(x) = \int_0^{\ln x^2} f(e^t) dt = \int_1^{x^2} \frac{f(s)}{s} ds \quad \dots\dots ㉠$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \frac{f(x^2)}{x^2} \times 2x = \frac{2f(x^2)}{x} \text{이므로}$$

$$\int_1^e g(x) dx \xleftarrow{\substack{u(x)=g(x), v'(x)=1 \text{로 놓으면} \\ u'(x)=g'(x), v(x)=x}}$$

$$= \left[xg(x) \right]_1^e - \int_1^e xg'(x) dx$$

$$= eg(e) - g(1) - \int_1^e \left\{ x \times \frac{2f(x^2)}{x} \right\} dx$$

$$= e \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^1 \frac{f(x)}{x} dx - 2 \int_1^e f(x^2) dx$$

($\because$ ㉠)

$$= e \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - 0 - 2\{2ef(e) + 4\} \quad (\because \text{조건 ㉡})$$

$$= e \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - 4ef(e) - 8 \quad \dots\dots ㉡$$

한편, 조건 ㉡의 $\int_1^x f(t^2) dt = 2xf(x) + 4$ 에 $x=1$ 을 대

입하면

$$2f(1) + 4 = 0 \quad \therefore f(1) = -2$$

또한, 조건 ㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x^2) = 2f(x) + 2xf'(x) \quad \dots\dots ㉢$$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$ 에서 $\sqrt{x}=p$ 로 놓으면 $x=p^2$ 에서

$\frac{dx}{dp} = 2p$ 이고 $x=1$ 일 때 $p=1$, $x=e^2$ 일 때 $p=e$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &= \int_1^e \frac{f(p^2)}{p^2} \times 2p dp \\ &= 2 \int_1^e \frac{f(p^2)}{p} dp \\ &= 2 \int_1^e \frac{2f(p) + 2pf'(p)}{p} dp \quad (\because ㉢)\end{aligned}$$

$$= 4 \int_1^e \frac{f(p)}{p} dp + 4 \int_1^e f'(p) dp$$

$$= 4 \left(1 + \frac{1}{e^2} - \frac{3}{e^4} \right) + 4 \left[f(p) \right]_1^e$$

($\because$ 조건 ㉡)

$$= 4 + \frac{4}{e^2} - \frac{12}{e^4} + 4f(e) - 4f(1)$$

$$= 12 + \frac{4}{e^2} - \frac{12}{e^4} + 4f(e) \quad (\because f(1) = -2)$$

따라서 ㉡에서

$$\int_1^e g(x) dx$$

$$= e \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx - 4ef(e) - 8$$

$$= e \left\{ 12 + \frac{4}{e^2} - \frac{12}{e^4} + 4f(e) \right\} - 4ef(e) - 8$$

$$= 12e + \frac{4}{e} - \frac{12}{e^3} - 8$$

이므로 $k_1=12$, $k_2=4$, $k_3=-12$, $k_4=-8$

$$\therefore |k_1| + |k_2| + |k_3| + |k_4| = 12 + 4 + 12 + 8 = 36$$

답 36

26 조건 ㉡의 식에 $x=\ln 3$ 을 대입하면

$$0 = e^{3 \ln 3} + ae^{2 \ln 3} + 2e^{\ln 3} + 3$$

$$0 = 27 + 9a + 6 + 3$$

$$9a = -36 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore \int_{\ln 3}^x e^t f(t) dt = e^{3x} - 4e^{2x} + 2e^x + 3$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x f(x) = 3e^{3x} - 8e^{2x} + 2e^x \text{이므로}$$

$$f(x) = 3e^{2x} - 8e^x + 2$$

$$\therefore f'(x) = 6e^{2x} - 8e^x$$

한편, 조건 ④에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f'(t) dt = 8$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = 8 \quad \therefore f'(b) = 8$$

$$\text{즉, } 6e^{2b} - 8e^b = 8 \text{이므로}$$

$$6e^{2b} - 8e^b - 8 = 0, \quad 3e^{2b} - 4e^b - 4 = 0$$

$$(3e^b + 2)(e^b - 2) = 0$$

$$e^b = 2 \quad (\because e^b > 0) \quad \therefore b = \ln 2$$

$$\therefore ab = -4 \ln 2$$

답 ②

27 $\left(1 - \frac{|-t|}{x}\right) \cos(-2t) = \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos 2t$

이므로 t 에 대한 함수 $y = \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos 2t$ 는 우함수이다.

이때, $f(x) = \int_{-x}^x \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos 2t dt$ 라 하면

$$f(x) = \int_{-x}^x \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos 2t dt$$

$$= 2 \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) \cos 2t dt \quad \leftarrow \begin{matrix} u(t) = 1 - \frac{t}{x}, v'(t) = \cos 2t \\ \text{로 놓으면} \end{matrix}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{x}\right) \sin 2t \right]_0^x - 2 \int_0^x \left(-\frac{1}{x}\right) \sin 2t dt$$

$$= 0 + \frac{1}{x} \int_0^x \sin 2t dt$$

$$= \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ -\frac{1}{2} \cos 2x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2x} (1 - \cos 2x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x} \int_{-x}^x \left(1 - \frac{|t|}{x}\right) \cos 2t dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{2x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{2x \tan x (1 + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 2x}{2x \tan x (1 + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 2x}{2x \tan x (1 + \cos 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{2}{1 + \cos 2x} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{2}{1+1} = 1$$

답 ③

28 점 $P(t, \sin t)$ 를 중심으로 하고 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이가 $f(t)$ 이므로

$$f(t) = \frac{|t - \sin t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|t - \sin t|}{\sqrt{2}}$$

이때, $\int f(t) dt = F(t)$ 라 하고 양변을 t 에 대하여 미분

하면 $F'(t) = f(t)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2}}{x-1} \int_1^{2x-1} f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} \{F(2x-1) - F(1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2} \{F(2x-1) - F(1)\}}{(2x-1) - 1}$$

$$= 2\sqrt{2} F'(1) = 2\sqrt{2} f(1)$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{|1 - \sin 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 \times (1 - 0.84) = 0.32$$

답 0.32

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 85

01 $-\frac{\pi}{4}$

02 2

03 $\frac{1}{e-1}$

04 107

05 26

06 $\frac{3}{2}\pi + 2$

07 ②

01 해결단계

① 단계 $(g \circ f)(x) = x$ 임을 이용하여 $g'(f(x))$ 를 구한다.

② 단계 치환을 이용하여 $g'(x)$ 를 구한다.

③ 단계 $x = \sin \theta$ 로 치환하여 정적분 $\int_0^1 \frac{1}{g'(x)} dx$ 의 값을 구한다.

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 서로 역함수 관계이므로

$$(g \circ f)(x) = x$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \therefore g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

이때, $f(x) = \cos x$ 에서 $f'(x) = -\sin x$ 이므로

$$g'(\cos x) = -\frac{1}{\sin x} \quad \dots\dots \ominus$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $t=0$ 일 때 $x = \frac{\pi}{2}$, $t=1$ 일 때 $x=0$ 이

고 $0 \leq t \leq 1$, 즉 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$$\cos x \geq 0, \sin x \geq 0$$

즉, $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ 이므로 $\ominus$ 에서

$$g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{g'(x)} dx = \int_0^1 (-\sqrt{1-x^2}) dx$$

이때, $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^1 (-\sqrt{1-x^2}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{1-\sin^2 \theta} \times \cos \theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 \theta) d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (2 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} \right\} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
 &= -\left[\frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{\pi}{4} \quad \text{답 } -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

02 해결단계

① 단계	$f(x) = Ae^x + B$ 라 하고, $\int_0^1 \frac{f(t)}{e^t+1} dt = B$ 를 이용하여 A, B 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	$A = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt$ 의 값을 구한 후, 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$\frac{f(\ln 5)}{f(\ln 2)}$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt + \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t+1} dt \text{에서} \\
 \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt &= A, \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t+1} dt = B \quad (A, B \text{는 상수})
 \end{aligned}$$

라 하면

$$f(x) = Ae^x + B$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t+1} dt &= \int_0^1 \frac{Ae^t+B}{e^t+1} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{A(e^t+1) - A + B}{e^t+1} dt \\
 &= \int_0^1 \left(A + \frac{B-A}{e^t+1} \right) dt \\
 &= \left[At \right]_0^1 + (B-A) \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt \\
 &= A + (B-A) \times A
 \end{aligned}$$

즉, $B = A + A(B-A)$ 이므로

$$B = A + AB - A^2, AB - B - A^2 + A = 0$$

$$B(A-1) - A(A-1) = 0$$

$$(B-A)(A-1) = 0$$

$$\therefore A=B \text{ 또는 } A=1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

한편, $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt$ 에서 $e^t+1=s$ 로 놓으면

$$\frac{ds}{dt} = e^t = s-1$$

$t=0$ 일 때 $s=2$, $t=1$ 일 때 $s=e+1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt &= \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{s} \times \frac{1}{s-1} \right) ds \\
 &= \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) ds \\
 &= \left[\ln |s-1| - \ln |s| \right]_2^{e+1} \\
 &= \ln e - \ln (e+1) - \ln 1 + \ln 2 \\
 &= \ln \frac{2e}{e+1}
 \end{aligned}$$

즉, $A = \ln \frac{2e}{e+1} \neq 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$B = \ln \frac{2e}{e+1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= e^x \ln \frac{2e}{e+1} + \ln \frac{2e}{e+1} \\
 &= (e^x + 1) \ln \frac{2e}{e+1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(\ln 5)}{f(\ln 2)} = \frac{(e^{\ln 5} + 1) \ln \frac{2e}{e+1}}{(e^{\ln 2} + 1) \ln \frac{2e}{e+1}} = \frac{5+1}{2+1} = 2 \quad \text{답 } 2$$

03 해결단계

① 단계	조건 (나)를 치환적분법을 이용하여 변형한다.
② 단계	①단계에서 구한 식을 미분하여 $f_n'(x)$ 를 구한다.
③ 단계	①, ②단계에서 구한 식을 연립하여 함수 $f_n(x)$ 를 구한다.
④ 단계	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_n(1)}$ 의 값을 구한다.

조건 (나)에서

$$f_n(x) = e^{-x} + \int_0^x ne^{-t} f_n(x-t) dt$$

이때, $\int_0^x ne^{-t} f_n(x-t) dt$ 에서

$$x-t=s \text{로 놓으면 } \frac{ds}{dt} = -1$$

$t=0$ 일 때 $s=x$, $t=x$ 일 때 $s=0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^x ne^{-t} f_n(x-t) dt &= -\int_x^0 ne^{-s} f_n(s) ds \\
 &= ne^{-x} \int_0^x e^s f_n(s) ds
 \end{aligned}$$

$$\therefore f_n(x) = e^{-x} + ne^{-x} \int_0^x e^s f_n(s) ds \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f_n'(x) &= -e^{-x} - ne^{-x} \int_0^x e^s f_n(s) ds + ne^{-x} \times e^x f_n(x) \\
 &= -e^{-x} + n f_n(x) - ne^{-x} \int_0^x e^s f_n(s) ds \quad \dots\dots\textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$f_n(x) + f_n'(x) = n f_n(x)$$

$$(n-1) f_n(x) = f_n'(x)$$

이때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여 조건 (가)에서

$$f_n'(x) > 0 \text{이면 } f_n(x) > 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = n-1$$

$$\int \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} dx = \int (n-1) dx$$

$$\therefore \ln |f_n(x)| = (n-1)x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$\dots\dots\textcircled{3}$

㉠에 $x=0$ 을 대입하면 $f_n(0)=1$ 이므로

㉡에 $x=0$ 을 대입하면

$$\ln |f_n(0)| = 0 + C \quad \therefore C = 0$$

따라서 $\ln |f_n(x)| = (n-1)x$ 이므로

$$f_n(x) = e^{(n-1)x} \quad (\because f_n(x) > 0)$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_n(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{n-1}}$$

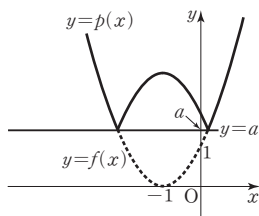
$$= \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1} \quad \text{답 } \frac{1}{e-1}$$

04 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y= f(x)-a +a$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	부등식 $ f(x)-a +a \geq kx$ 를 만족시키기 위한 실수 k 의 조건을 파악한다.
③ 단계	②단계를 만족시키는 k 의 최댓값 $g(a)$ 와 최솟값 $h(a)$ 를 구한다.
④ 단계	$\int_0^{16} \{g(a)+h(a)\} da$ 의 값을 구하여 p, q 의 값을 각각 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

$$p(x) = |f(x)-a|+a = \begin{cases} 2a-f(x) & (f(x) < a) \\ f(x) & (f(x) \geq a) \end{cases}$$

라 하면 곡선 $y=p(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 직선 $y=a$ 에서 접어 올린 것과 같다.



이때, 부등식 $|f(x)-a|+a \geq kx$, 즉 $p(x) \geq kx$ 를 만족시키려면 직선 $y=kx$ 가 곡선 $y=p(x)$ 의 아래쪽에 위치해야 한다.

따라서 직선 $y=kx$ 가 제1사분면에서 곡선 $y=p(x)$ 와 한 점에서 만날 때, 직선 $y=kx$ 의 기울기 k 는 최댓값을 갖고, 직선 $y=kx$ 가 제2사분면 또는 x 축 위에서 곡선 $y=p(x)$ 와 한 점에서 만날 때, 직선 $y=kx$ 의 기울기 k 는 최솟값을 갖는다.㉠

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=a$ 가 $x < -1$ 에서 만나는 점의 x 좌표는

$$(x+1)^2 = a \text{에서}$$

$$x = -1 - \sqrt{a} \text{ 또는 } x = -1 + \sqrt{a} \quad \text{.....㉡}$$

$$\therefore x = -1 - \sqrt{a} \quad (\because x < -1)$$

㉠에서 직선 $y=kx$ 가 점 $(-1-\sqrt{a}, a)$ 를 지날 때, 이 직선의 기울기 k 는 최솟값을 가지므로

$$h(a) = -\frac{a}{1+\sqrt{a}}$$

한편, 원점에서 곡선 $f(x)=(x+1)^2$ 에 그은 접선 중 제1사분면에서 접할 때의 접점의 좌표를

$$(t, (t+1)^2) \quad (t > 0) \text{이라 하면 기울기는 } f'(t) = 2t+2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (t+1)^2 = (2t+2)(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t+1)^2 = -t(2t+2), \quad t^2 - 1 = 0$$

$$(t-1)(t+1) = 0$$

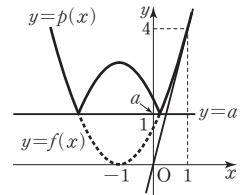
$$\therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 4)$ 이고, 접선의 방정식은 $y=4x$ 이다.

(i) $0 \leq a \leq 4$ 일 때,

㉠에서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=kx$ 가 접점 $(1, 4)$ 를 지날 때, 이 직선의 기울기 k 는 최댓값을 가지므로

$$g(a) = 4$$



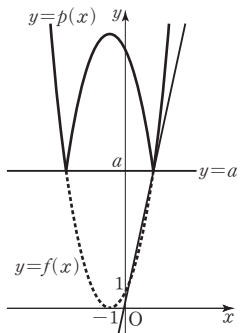
(ii) $a > 4$ 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=a$ 가 $x > 0$ 에서 만나는 점의 x 좌표는

$$x = -1 + \sqrt{a} \quad (\because \text{㉡})$$

㉠에서 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=kx$ 가 점 $(-1+\sqrt{a}, a)$ 를 지날 때, 이 직선의 기울기 k 는 최댓값을 가지므로

$$g(a) = \frac{a}{-1+\sqrt{a}}$$



(i), (ii)에서

$$g(a) = \begin{cases} 4 & (0 \leq a \leq 4) \\ \frac{a}{-1+\sqrt{a}} & (a > 4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{16} \{g(a)+h(a)\} da \\ &= \int_0^{16} g(a) da + \int_0^{16} h(a) da \\ &= \int_0^4 4 da + \int_4^{16} \frac{a}{-1+\sqrt{a}} da - \int_0^{16} \frac{a}{1+\sqrt{a}} da \quad \text{.....㉢} \end{aligned}$$

이때, $\int_4^{16} \frac{a}{-1+\sqrt{a}} da$ 에서 $-1+\sqrt{a}=t$ 로 놓으면

$$\sqrt{a}=t+1, \text{ 즉 } a=(t+1)^2 \text{에서 } \frac{da}{dt}=2(t+1)$$

$$a=4 \text{일 때 } t=1, a=16 \text{일 때 } t=3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_4^{16} \frac{a}{-1+\sqrt{a}} da &= \int_1^3 \frac{2(t+1)^3}{t} dt \\ &= 2 \int_1^3 \left(t^2 + 3t + 3 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 + 3t + \ln |t| \right]_1^3 \\ &= 2 \times \left(\frac{80}{3} + \ln 3 \right) \\ &= \frac{160}{3} + 2 \ln 3\end{aligned}$$

또한, $\int_0^{16} \frac{a}{1+\sqrt{a}} da$ 에서 $1+\sqrt{a}=s$ 로 놓으면
 $\sqrt{a}=s-1$, 즉 $a=(s-1)^2$ 에서 $\frac{da}{ds}=2(s-1)$
 $a=0$ 일 때 $s=1$, $a=16$ 일 때 $s=5$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{16} \frac{a}{1+\sqrt{a}} da &= \int_1^5 \frac{2(s-1)^3}{s} ds \\ &= 2 \int_1^5 \left(s^2 - 3s + 3 - \frac{1}{s} \right) ds \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} s^3 - \frac{3}{2} s^2 + 3s - \ln |s| \right]_1^5 \\ &= 2 \times \left(\frac{52}{3} - \ln 5 \right) \\ &= \frac{104}{3} - 2 \ln 5\end{aligned}$$

따라서 ㉔에서

$$\begin{aligned}\int_0^{16} \{g(a) + h(a)\} da &= 16 + \frac{160}{3} + 2 \ln 3 - \left(\frac{104}{3} - 2 \ln 5 \right) \\ &= \frac{104}{3} + 2 \ln 15\end{aligned}$$

이므로 $p=3$, $q=104$

$$\therefore p+q=3+104=107$$

답 107

05 해결단계

① 단계	조건 ㉑를 이용하여 자연수 n 에 대하여 $g(n)=0$ 임을 파악한다.
② 단계	조건 ㉑를 미분한 후, 그 식과 조건 ㉑를 연립하여 $\int_t^{t+1} f(x) dx$ 를 함수 $g(t)$ 를 이용하여 나타낸다.
③ 단계	$\int_0^1 f(x) dx = \frac{10}{9}e + 4$ 와 ①, ②단계에서 구한 것을 이용하여 $\int_1^{10} f(x) dx$ 의 값을 구한다.

조건 ㉑에 $x=0$ 을 대입하면 $g(1)=0$

또한, 조건 ㉑의

$$g(x+1) - g(x) = -\pi(e+1)e^x \sin(\pi x)$$

$$g(x+1) = g(x) - \pi(e+1)e^x \sin(\pi x)$$

이때, 자연수 n 에 대하여 $\sin n\pi=0$ 이므로

$$g(n+1) = g(n)$$

$\therefore g(n)=0$ (단, n 은 자연수) ($\because g(1)=0$)

한편, 조건 ㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x+1) = f(x+1)e^x - f(x)e^x + g(x)$$

$$\text{에서 } f(x+1)e^x - f(x)e^x = g'(x+1) - g(x)$$

이 식의 양변을 e^x 으로 나누면

$$f(x+1) - f(x) = \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^t \{f(x+1) - f(x)\} dx &= \int_0^t \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x} dx \quad (\text{단, } t \text{는 실수})\end{aligned}$$

.....㉕

이때, ㉕의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\int_0^t \{f(x+1) - f(x)\} dx &\quad \begin{array}{l} x+1=x' \text{으로 놓으면 } \frac{dx'}{dx}=1, \\ x=0 \text{일 때 } x'=1, x=t \text{일 때 } x'=t+1 \end{array} \\ &= \int_0^t f(x+1) dx - \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_1^{t+1} f(x) dx - \int_0^t f(x) dx \\ &= \int_t^{t+1} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{t+1} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_t^{t+1} f(x) dx - \frac{10}{9}e - 4\end{aligned}$$

.....㉖

또한, ㉕의 우변을 정리하면

$$\begin{aligned}\int_0^t \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x} dx &\quad \begin{array}{l} u(x)=e^{-x}, v'(x)=g'(x+1) \\ \text{로 놓으면} \\ v'(x)=-e^{-x}, v(x)=g(x+1) \end{array} \\ &= \int_0^t g'(x+1)e^{-x} dx - \int_0^t g(x)e^{-x} dx \\ &= \left[g(x+1)e^{-x} \right]_0^t - \int_0^t \{-g(x+1)e^{-x}\} dx \\ &\quad - \int_0^t g(x)e^{-x} dx \\ &= g(t+1)e^{-t} - g(1) + \int_0^t g(x+1)e^{-x} dx \\ &\quad - \int_0^t g(x)e^{-x} dx \\ &= g(t+1)e^{-t} + \int_0^t \{g(x+1) - g(x)\}e^{-x} dx \\ &\quad (\because g(1)=0) \\ &= g(t+1)e^{-t} + \int_0^t \{-\pi(e+1)e^x \sin(\pi x)\}e^{-x} dx \\ &\quad (\because \text{조건 ㉑})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= g(t+1)e^{-t} - \pi(e+1) \int_0^t \sin(\pi x) dx \\ &= g(t+1)e^{-t} - \pi(e+1) \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^t \\ &= g(t+1)e^{-t} - \pi(e+1) \left\{ -\frac{1}{\pi} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \right\} \\ &= g(t+1)e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) - (e+1) \quad \dots\dots\dots㉗\end{aligned}$$

㉖=㉗이므로

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1} f(x) dx - \frac{10}{9}e - 4 &= g(t+1)e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) - (e+1)\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+1} f(x) dx \\
 &= g(t+1)e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) + \frac{1}{9}e + 3 \\
 \therefore \int_1^{10} f(x) dx &= \sum_{t=1}^9 \int_t^{t+1} f(x) dx \\
 &= \sum_{t=1}^9 \left\{ g(t+1)e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) + \frac{1}{9}e + 3 \right\} \\
 &= \sum_{t=1}^9 g(t+1)e^{-t} + (e+1) \sum_{t=1}^9 \cos(\pi t) + 9 \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{9}e + 3 \right) \\
 &= 0 + (e+1) \{ (-1) + 1 + (-1) \\
 &\quad + \cdots + (-1) \} + e + 27 \\
 &\quad (\because \text{자연수 } n \text{에 대하여 } g(n)=0) \\
 &= -e - 1 + e + 27 = 26 \quad \text{답 26}
 \end{aligned}$$

06 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 극값을 구하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	$0 \leq t \leq \pi$, $\pi < t \leq \frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$ 로 구간을 나누어 구간 $[t, t+\pi]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 최댓값 $g(t)$ 를 구한다.
③ 단계	$\int_0^{2\pi} g(t) dt$ 의 값을 구한다.

두 함수 $y=\cos 2x$, $y=\cos x$ 는 각각 주기가 π , 2π 이므로 $f(x)$ 는 주기가 2π 인 함수이다.

즉, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 실수 전체 집합에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그릴 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \text{에서} \\
 f'(x) &= -\sin 2x + \sin x \\
 f'(x) &= 0 \text{에서 } -\sin 2x + \sin x = 0 \\
 -2 \sin x \cos x + \sin x &= 0, \quad -\sin x(2 \cos x - 1) = 0 \\
 \sin x &= 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore x=0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	극소	/	

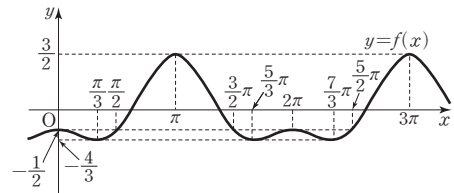
함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{5}{3}\pi$ 에서 극솟값 $-\frac{3}{4}$, $x=\pi$ 에서 극댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

또한, 함수 $f(x)$ 는 주기가 2π 이고 $x=0$, $x=2\pi$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x=0$, $x=2\pi$ 에서 극댓값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x &= -\frac{1}{2}, \quad \cos^2 x - \frac{1}{2} - \cos x = -\frac{1}{2} \\
 \cos^2 x - \cos x &= 0, \quad \cos x(\cos x - 1) = 0 \\
 \cos x &= 0 \text{ 또는 } \cos x = 1 \\
 \therefore x &= 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi \quad (0 \leq x \leq 2\pi)
 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



단한구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 최댓값이 $g(t)$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 주기가 2π 이므로 함수 $g(t)$ 도 주기가 2π 이다.

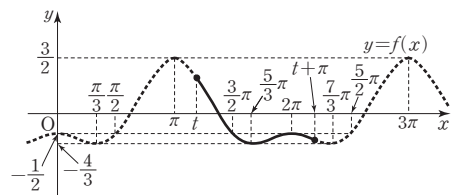
이때, $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(\pi)=\frac{3}{2}$ 이므로 $x=\pi$ 가 구간 $[t, t+\pi]$ 안에 포함되어 있는 경우를 기준으로 함수 $g(t)$ 를 구해 보자.

(i) $0 \leq t \leq \pi$ 일 때,

구간 $[t, t+\pi]$ 안에 $x=\pi$ 가 포함되어 있으므로 이 구간에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(\pi)=\frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore g(t) = \frac{3}{2}$$

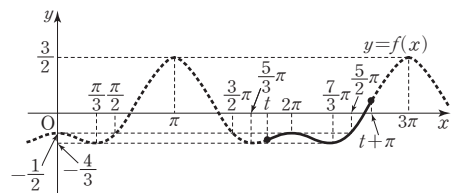
(ii) $\pi < t \leq \frac{3}{2}\pi$ 일 때,



구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 최댓값은 $x=t$ 일 때이다. 즉,

$$g(t) = \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t$$

(iii) $\frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi$ 일 때,



구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의
그림과 같으므로 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 최댓
값은 $x=t+\pi$ 일 때이다. 즉,

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t+\pi) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2t+2\pi) - \cos(t+\pi) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2t + \cos t \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} & (0 \leq t \leq \pi) \\ \frac{1}{2} \cos 2t - \cos t & (\pi < t \leq \frac{3}{2}\pi) \\ \frac{1}{2} \cos 2t + \cos t & (\frac{3}{2}\pi < t \leq 2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{2\pi} g(t) dt &= \int_0^{\pi} \frac{3}{2} dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2} \cos 2t - \cos t \right) dt \\ &\quad + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos 2t + \cos t \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4} \sin 2t - \sin t \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &\quad + \left[\frac{1}{4} \sin 2t + \sin t \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{3}{2}\pi - \sin \frac{3}{2}\pi - \sin \frac{3}{2}\pi \\ &= \frac{3}{2}\pi + 2 \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}\pi + 2$

07 해결단계

① 단계	조건 ④의 식에 $x=1$ 을 대입하고, 조건 ⑦을 이용하여 $\int_0^a f(x) dx + e^2$ 의 값을 구한다.
② 단계	부분적분법을 이용하여 ①의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	조건 ④의 식을 미분하여 함수 $f(x)$ 를 구한 후, 도함수를 이용하여 ②의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	②에서 구한 함수 $f(x)$ 와 ①단계에서 구한 $\int_0^a f(x) dx + e^2$ 의 값을 이용하여 ②의 참, 거짓을 판별한다.

조건 ④의

$$\int_0^x f(t) dt = x^2 e^x + \left\{ \int_0^a f(x) dx + e^2 \right\} (x e^x - e^x + 1)$$

에서 $\int_0^a f(x) dx + e^2 = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t) dt = x^2 e^x + k(x e^x - e^x + 1)$$

조건 ⑦에서 $\int_0^1 f(t) dt = e - 5$ 이므로 위의 식에

$x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= e + k(e - e + 1) \\ &= e + k = e - 5 \end{aligned}$$

$$\therefore k = -5$$

즉, $\int_0^a f(x) dx + e^2 = -5$ 이므로

$$\int_0^x f(t) dt = x^2 e^x - 5(x e^x - e^x + 1) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \int_0^1 x f'(x) dx = \left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$\uparrow$
 $u(x)=x, v'(x)=f'(x) \Rightarrow f(1) - (e-5) \quad (\because \text{조건 ⑦})$
로 놓으면 $u'(x)=1, v(x)=f(x)$ ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x e^x + x^2 e^x - 5(e^x + x e^x - e^x) \\ &= 2x e^x + x^2 e^x - 5x e^x \\ &= (x^2 - 3x) e^x \end{aligned}$$

이므로 $f(1) = -2e$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f'(x) dx &= f(1) - (e - 5) \\ &= -2e - e + 5 = 5 - 3e \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

㉡에서 $f(x) = (x^2 - 3x) e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 3) e^x + (x^2 - 3x) e^x \\ &= (x^2 - x - 3) e^x \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x^2 - x - 3 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{또는} \quad x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ 의 좌우에서 $f'(x)$

의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ 에서

극솟값을 갖는다. (참)

㉡. $\int_0^a f(x) dx = -e^2 - 5$ 이므로 ㉠에 $x=a$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^a f(t) dt &= a^2 e^a - 5(a e^a - e^a + 1) \\ &= a^2 e^a - 5a e^a + 5e^a - 5 \\ &= -e^2 - 5 \end{aligned}$$

에서 $e^a(a^2 - 5a + 5) = -e^2$

방정식 $e^a(a^2 - 5a + 5) = -e^2$ 을 만족시키는 실수 a 의
개수는 함수 $y = e^x(x^2 - 5x + 5)$ 의 그래프와 직선

$y = -e^2$ 의 교점의 개수와 같으므로

$g(x) = e^x(x^2 - 5x + 5)$ 라 하면

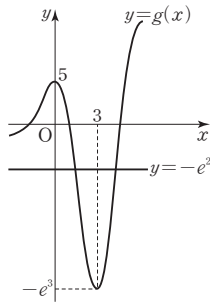
$$g'(x) = e^x(x^2 - 3x)$$

$g'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 3$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
같다.

x	...	0	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 5, $x=3$ 에서 극솟값 $-e^3$ 을 가지므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 오른쪽 그림에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-e^2$ 이 서로 다른 두 점에



서 만나므로 방정식 $e^a(a^2-5a+5)=-e^2$ 을 만족시키는 실수 a 의 개수는 2이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

이것이 수능

p. 86

1 12

2 ⑤

3 ①

4 ③

1 해결단계

① 단계	역함수의 미분법을 이용하여 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$ 임을 파악한 후, $\frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}$ 을 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$f(x)=t$ 로 치환하여 $\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2} dx$ 의 값을 구한다.

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로

$$g(f(x))=x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=1$$

$$\therefore g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x)=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx}=f'(x)$$

$g(2)=1$, $g(5)=5$ 에서 $f(1)=2$, $f(5)=5$ 이므로 $x=1$ 일 때 $t=2$, $x=5$ 일 때 $t=5$

$$\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2} dx$$

$$= \int_1^5 \frac{40f'(x)}{\{f(x)\}^2} dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \int_2^5 \frac{40}{t^2} dt$$

$$= 40 \left[-\frac{1}{t} \right]_2^5$$

$$= 40 \times \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 40 \times \frac{3}{10} = 12$$

답 12

2

해결단계

① 단계	도함수 $f'(x)$ 를 적분하고 $f(x)$ 를 적분상수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	함수 $f(x)$ 가 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 연속이고, $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$ 임을 이용하여 적분상수의 값과 l, m, n 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$ 를 l, m, n 을 이용하여 나타낸 후, 이 값이 최대가 되기 위한 조건을 파악한다.
④ 단계	②단계에서 구한 관계식과 ③단계의 조건을 이용하여 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$ 의 값이 최대가 되는 l, m, n 의 값을 각각 구한 후, $l+2m+3n$ 의 값을 구한다.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $f'(x)=l \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= l \sin x + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수})$$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 $f'(x)=m \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= m \sin x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수})$$

$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $f'(x)=n \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= n \sin x + C_3 \quad (\text{단 } C_3 \text{은 적분상수})$$

이때, $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로

$x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ 에서 연속이고, $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$ 이어야 한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (l \sin x + C_1) = 0 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\therefore f(x) = l \sin x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi-} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi-} (n \sin x + C_3) = 1$$

$$-n + C_3 = 1 \quad \therefore C_3 = n + 1$$

$$\therefore f(x) = n \sin x + n + 1 \quad \left(\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi\right)$$

(iii) $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} l \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} (m \sin x + C_2) = m + C_2$$

$$l = m + C_2$$

$$\therefore C_2 = l - m$$

$$\therefore f(x) = m \sin x + l - m \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right)$$

(iv) $x=\pi$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (m \sin x + l - m) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (n \sin x + n + 1)$$

$$= n + 1$$

$$l - m = n + 1$$

$$\therefore l = n + m + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) ~ (iv)에서

$$f(x) = \begin{cases} l \sin x & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \\ m \sin x + l - m & \left(\frac{\pi}{2} \leq x < \pi\right) \\ n \sin x + n + 1 & \left(\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

따라서

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m \sin x + l - m) dx$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n \sin x + n + 1) dx$$

$$= \left[-l \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-m \cos x + (l - m)x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$+ \left[-n \cos x + (n + 1)x \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= l + m + \pi(l - m) - \frac{\pi}{2}(l - m)$$

$$+ \frac{3}{2}\pi(n + 1) - n - \pi(n + 1)$$

$$= l + m - n + \frac{\pi}{2}(l - m) + \frac{\pi}{2}(n + 1)$$

$$= (n + 1)\pi + 2m + 1 \quad (\because \textcircled{1}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이 값이 최대이어야 하므로 $m > 0, n > 0$

$$|l| + |m| + |n| \leq 10 \text{에서}$$

$$|m + n + 1| + |m| + |n| \leq 10 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$2m + 2n + 1 \leq 10, 2(m + n) \leq 9$$

$$\therefore m + n \leq \frac{9}{2} = 4.5$$

이 부등식을 만족시키는 양의 정수 m, n 의 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

① $m=1, n=3$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 4\pi + 3 \quad (\because \textcircled{2})$$

② $m=2, n=2$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 3\pi + 5 \quad (\because \textcircled{2})$$

③ $m=3, n=1$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 2\pi + 7 \quad (\because \textcircled{2})$$

①, ②, ③에서 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$ 의 값이 최대인 경우는

$m=1, n=3$ 일 때이다.

따라서 $l=5, m=1, n=3$ 이므로

$$l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$$

답 ⑤

3

해결단계

① 단계	조건 ㉞의 식을 미분하여 $g'(x)$ 를 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 식과 조건 ㉞를 이용하여 $\int_1^2 xg(x) dx$ 의 값을 구한다.

조건 ㉞의 식에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = 0$$

조건 ㉞의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \frac{f(x^2+1)}{x}$$

이므로

$$\int_1^2 xg(x) dx \leftarrow \begin{matrix} u(x)=g(x), v'(x)=x \text{로 놓으면} \\ u'(x)=g'(x), v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 g(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 g'(x) dx$$

$$= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \left\{ \frac{1}{2}x^2 \times \frac{f(x^2+1)}{x} \right\} dx$$

$$= 6 - \frac{1}{2} \int_1^2 xf(x^2+1) dx \quad (\because g(1)=0, g(2)=3)$$

$\dots\dots \textcircled{3}$

이때, $x^2+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=2$,

$x=2$ 일 때 $t=5$ 이므로

$$\int_1^2 xf(x^2+1) dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 = 8 \quad (\because \text{조건 ㉞})$$

따라서 ③에서

$$\int_1^2 xg(x) dx = 6 - \frac{1}{2} \int_1^2 xf(x^2+1) dx$$

$$= 6 - \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

답 ①

4

해결단계

① 단계	치환적분법을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 x 대신에 $-x$ 를 대입하여 ㉞의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 임을 이용하여 ㉞의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	함수 $f(x)$ 를 적분한 후, ㉞과 ㉞을 이용하여 ㉞의 참, 거짓을 판별한다.

$t-x=s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=1$ 이고 $t=0$ 일 때 $s=-x, t=x$

일 때 $s=0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^x (t+x) \cos(t-x) dt$$

$$= \int_{-x}^0 (s+2x) \cos s ds \leftarrow \begin{matrix} u(s)=s+2x, v'(s)=\cos s \\ \text{로 놓으면} \\ u'(s)=1, v(s)=\sin s \end{matrix}$$

$$= \left[(s+2x) \sin s \right]_{-x}^0 - \int_{-x}^0 \sin s ds$$

$$= -x \sin(-x) - \left[-\cos s \right]_{-x}^0$$

$$= -x \sin(-x) - \{-1 + \cos(-x)\}$$

$$= x \sin x - \cos x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned} \neg. f(-x) &= -x \sin(-x) - \cos(-x) + 1 \quad (\because \ominus) \\ &= x \sin x - \cos x + 1 \\ &= f(x) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. $\ominus$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x \cos x + \sin x \\ &= x \cos x + 2 \sin x \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ ($0 < a < \pi$)에서 극값을 가지므로

$$f'(a) = 0 \text{에서 } a \cos a + 2 \sin a = 0$$

$$\cos a(a + 2 \tan a) = 0$$

$$\therefore \cos a = 0, \tan a = -\frac{a}{2}$$

$$\text{이때, } \cos a = 0 \text{이면 } a = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < a < \pi)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \times 0 + 2 \times 1 = 2 \neq 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{에서 극값을 갖지 않는다.}$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ ($0 < a < \pi$)에서 극값을 가질 때,

$$\tan a = -\frac{a}{2} \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄷ. } \int_{-a}^a f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^a f(x) dx \quad (\because \neg)$$

$$= 2 \int_0^a (x \sin x - \cos x + 1) dx \quad (\because \ominus)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left\{ \left[-x \cos x \right]_0^a + \int_0^a \cos x dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a (-\cos x + 1) dx \right\} \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\left[-x \cos x \right]_0^a + \left[x \right]_0^a \right)$$

$$= -2a \cos a + 2a \quad \dots\dots \textcircled{ㄴ}$$

$$\text{ㄴ에서 } \tan a = -\frac{a}{2} < 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} < a < \pi \quad \therefore -1 < \cos a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{ㄷ}$$

$$\text{이때, } \frac{1}{\cos^2 a} = \tan^2 a + 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 1 = \frac{a^2 + 4}{4}$$

$$\cos^2 a = \frac{4}{a^2 + 4}$$

$$\therefore \cos a = -\sqrt{\frac{4}{a^2 + 4}} \quad (\because \ominus)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

따라서 $\textcircled{ㄴ}$ 에서

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -2a \cos a + 2a$$

$$= -\frac{4a}{\sqrt{a^2 + 4}} + 2a \quad (\text{거짓})$$

그러므로 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ③

10 정적분의 활용

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 88

01 $\frac{5}{186}$

02 ③

03 ③

04 ②

05 369

06 ④

07 15

08 ②

$$01 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+3+\dots+n)(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)}{(n+1)^4+(n+2)^4+(n+3)^4+\dots+(2n)^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k \times \sum_{k=1}^n k^2}{\sum_{k=1}^n (n+k)^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\right) \times \left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4}$$

$$= \frac{\int_0^1 x dx \times \int_0^1 x^2 dx}{\int_1^2 x^4 dx} = \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \times \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1}{\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{5}{186}$$

답 $\frac{5}{186}$

02 곡선 $y = ae^x + b$ 가 두 점 $(0, 0)$, $(\ln 2, 2)$ 를 지나므로

$$0 = a + b, \quad 2 = 2a + b$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad b = -2$$

$$\therefore y = 2e^x - 2$$

따라서 곡선 $y = 2e^x - 2$ 와 x 축 및 두

직선 $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형

의 넓이는

$$\int_{-1}^1 |2e^x - 2| dx$$

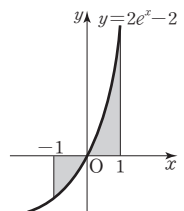
$$= \int_{-1}^0 (-2e^x + 2) dx + \int_0^1 (2e^x - 2) dx$$

$$= \left[-2e^x + 2x\right]_{-1}^0 + \left[2e^x - 2x\right]_0^1$$

$$= \left(-2 + \frac{2}{e} + 2\right) + (2e - 2 - 2)$$

$$= 2e + \frac{2}{e} - 4$$

답 ③



03 곡선 $y = \frac{8}{x}$ ($x > 0$)과 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{8}{x} = 2x \text{에서 } 2x^2 = 8 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

또한, 곡선 $y = \frac{8}{x}$ ($x > 0$)과 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌

표는 $\frac{8}{x} = \frac{1}{2}x$ 에서 $x^2=16$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

따라서 곡선 $y=\frac{8}{x}$ ($x>0$)과 두 직

선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 도형

의 넓이는

$$\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_2^4 \left(\frac{8}{x} - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x dx + \int_2^4 \left(\frac{8}{x} - \frac{1}{2}x\right) dx$$

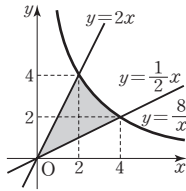
$$= \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^2 + \left[8 \ln |x| - \frac{1}{4}x^2\right]_2^4$$

$$= 3 + (8 \ln 4 - 4) - (8 \ln 2 - 1)$$

$$= 8 \ln 4 - 8 \ln 2$$

$$= 16 \ln 2 - 8 \ln 2 = 8 \ln 2$$

답 ③



04 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$\sqrt{x}=x \text{에서 } x=x^2$$

$$x^2-x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

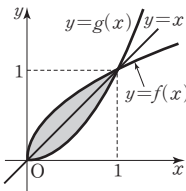
이때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

답 ②



05 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이가 $S(x)=x^2+2x+5$ 이므로 구하는 부피는

$$\int_0^9 S(x) dx = \int_0^9 (x^2+2x+5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_0^9$$

$$= 243 + 81 + 45 = 369$$

답 369

06 $y=\ln x$ ($1 \leq x \leq e$)에서 $x=e^y$ ($0 \leq y \leq 1$)이므로 $\overline{AB}=e^y$ ($0 \leq y \leq 1$)

직각이등변삼각형 ABC의 넓이를 $S(y)$ 라 하면

$$S(y) = \frac{1}{2} \overline{AB}^2 = \frac{1}{2} e^{2y}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1 S(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2y} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$$

답 ④

07 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x=t+1, y=\frac{e^t+e^{-t}}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=\ln 4$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s = \int_0^{\ln 4} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\ln 4} \sqrt{1 + \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\ln 4} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t})} dt$$

$$= \int_0^{\ln 4} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})} dt$$

$$= \int_0^{\ln 4} \sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{\ln 4} \frac{e^t+e^{-t}}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^t - e^{-t} \right]_0^{\ln 4}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}) - (1-1) \}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8}$$

$$\therefore 8s = 8 \times \frac{15}{8} = 15$$

답 15

08 $y=\frac{1}{8}x^2-\ln x$ 에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{4}-\frac{1}{x}$

$1 \leq x \leq \sqrt{e}$ 에서 주어진 곡선의 길이는

$$\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln x \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left(\frac{1}{8}e + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{8} + 0 \right)$$

$$= \frac{1}{8}e + \frac{3}{8}$$

답 ②

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 89~94

01 ④	02 $-\frac{1}{8}$	03 $\frac{16}{3}$	04 6	05 $\frac{3}{4}$
06 30	07 ⑤	08 $\frac{8}{\pi}$	09 ②	10 ③
11 ④	12 ③	13 ①	14 3π	15 ④
16 14	17 $-\frac{4}{\pi^2}$	18 50	19 $8-2\pi$	20 ⑤
21 $\frac{1}{6}$	22 6, 2	23 ④	24 $\frac{1}{3}$	25 ④
26 504	27 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$	28 60	29 ⑤	30 3
31 ①	32 ④	33 $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$	34 6	
35 $\frac{61}{27}$	36 π	37 ④	38 4	39 ⑤
40 ⑤				

01 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n)}}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n)}{n^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+n)}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \frac{n+3}{n} \times \cdots \times \frac{n+n}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n+2}{n} + \ln \frac{n+3}{n} + \cdots + \ln \frac{n+n}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{n+k}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_1^2 \ln x dx \quad \left[\begin{array}{l} u(x) = \ln x, v'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x \end{array} \right]$$

$$= \left[x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= 2 \ln 2 - \left[x \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - 1 \quad \text{답 ④}$$

02 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \times \frac{k}{2n^2 + n - 1}$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \times \frac{2k}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{n^2}{2n^2 + n - 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \times \frac{2k}{n} \times \frac{2}{n} \right\} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + n - 1}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \int_0^2 xf(x+1) dx \right\} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 xf(x+1) dx$$

이때, $\int_0^2 xf(x+1) dx$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서의 함수 $y = xf(x+1)$ 의 정적분이므로 함수 $y = xf(x+1)$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서의 함수 $y = (x-1)f(x)$ 의 정적분과 일치한다.

$$\frac{1}{8} \int_0^2 xf(x+1) dx = \frac{1}{8} \int_1^3 (t-1)f(t) dt$$

$$\text{즉, } \frac{1}{8} \int_1^3 (x-1)f(x) dx = a \int_b^{b+2} (x+c)f(x) dx$$

$$\text{이므로 } a = \frac{1}{8}, b = 1, c = -1$$

$$\therefore abc = \frac{1}{8} \times 1 \times (-1) = -\frac{1}{8} \quad \text{답 } -\frac{1}{8}$$

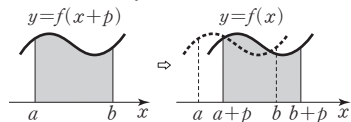
blacklabel 특강 필수 원리

함수의 그래프의 평행이동과 정적분

함수 $y = f(x+p)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 일치한다.

따라서 정적분의 피적분함수가 $f(x+p)$ (p 는 상수) 꼴인 경우에는 함수의 그래프의 평행이동에 의하여

$$\int_a^b f(x+p) dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x) dx$$



한편, $f(x)$ 가 주기가 p 인 주기함수이면 $f(x+p) = f(x)$ 이므로

$$\int_a^b f(x+p) dx = \int_a^b f(x) dx$$

03 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{16k}{n} f'\left(\frac{6k}{n} - 3\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6k}{n} f'\left(\frac{6k}{n} - 3\right) \times \frac{6}{n} \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{4}{9} \int_0^6 xf'(x-3) dx \quad \left[\begin{array}{l} u(x) = x, v'(x) = f'(x-3) \text{로 놓으면} \\ u'(x) = 1, v(x) = f(x-3) \end{array} \right]$$

$$= \frac{4}{9} \left\{ \left[xf(x-3) \right]_0^6 - \int_0^6 f(x-3) dx \right\}$$

$$= \frac{4}{9} \left\{ 6f(3) - \int_0^6 f(x-3) dx \right\} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이때, $x-3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 1$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=-3$, $x=6$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\int_0^6 f(x-3) dx$$

$$= \int_{-3}^3 f(t) dt$$

$$= 2 \int_0^3 f(t) dt \quad (\because \text{조건 ㉠})$$

$$= 2 \left\{ \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt \right\}$$

$$= 2 \times (5+8+11) \quad (\because \text{조건 ㉠}) = 48$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{16k}{n} f'\left(\frac{6k}{n} - 3\right)$$

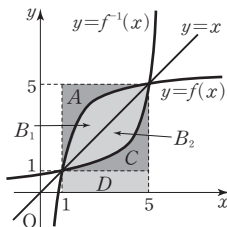
$$= \frac{4}{9} \left\{ 6f(3) - \int_0^6 f(x-3) dx \right\} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \frac{4}{9} \times (6 \times 10 - 48) \quad (\because \text{조건 ㉗})$$

$$= \frac{4}{9} \times 12 = \frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

- 04** 조건 ㉗에서 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값도 증가하고, 조건 ㉔에서 $f^{-1}(1)=1$, $f^{-1}(5)=5$ 이므로 조건을 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 중 하나는 오른쪽 그림과 같다.



$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{4k}{n}\right) + f^{-1}\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{4k}{n}\right) + f^{-1}\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \right\} \frac{4}{n} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \times \frac{4}{n} \right. \\ & \quad \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f^{-1}\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \times \frac{4}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_1^5 f(x) dx + \int_1^5 f^{-1}(x) dx \right\} \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때, 위의 그림에서

$$\int_1^5 f(x) dx = B_1 + B_2 + C + D,$$

$$\int_1^5 f^{-1}(x) dx = C + D \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^5 f(x) dx + \int_1^5 f^{-1}(x) dx \\ &= (B_1 + B_2 + C + D) + (C + D) \\ &= A + B_1 + B_2 + C + D + D \quad (\because A=C) \\ &= 4 \times 5 + 4 \times 1 = 24 \end{aligned}$$

따라서 ㉔에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{4k}{n}\right) + f^{-1}\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \right\} = \frac{1}{4} \times 24 = 6$$

답 6

• 다른풀이 •

조건 ㉗에서 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값도 증가하고, 조건 ㉔에서 $f(1)=1$, $f(5)=5$ 이므로 $f(x)=x$ 도 문제의 조건을 만족시킨다.

즉, $f(x)=x$ 라 하고 풀어도 같은 값이 나와야 한다.

이때, $f^{-1}(x)=x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ f\left(1 + \frac{4k}{n}\right) + f^{-1}\left(1 + \frac{4k}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{4k}{n} + 1 + \frac{4k}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{8}{n}k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ 2n + \frac{8}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{12n^2 + 8n}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 8n}{2n^2} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{05 } f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \{ |nx-1| + |nx-2| + |nx-3| \\ & \quad + \cdots + |nx-n| \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left| x - \frac{1}{n} \right| + \left| x - \frac{2}{n} \right| + \left| x - \frac{3}{n} \right| \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left| x - \frac{n}{n} \right| \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \times \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 |x-t| dt$$

$$= \int_0^x (x-t) dt + \int_x^1 (t-x) dt \quad (\because 0 \leq x \leq 1)$$

$$= \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_0^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_x^1$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 을 가지므로

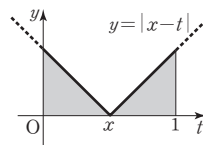
$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p+q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

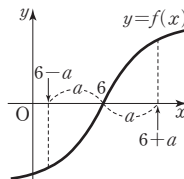
답 $\frac{3}{4}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

$0 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y=|x-t|$ ($0 \leq x \leq 1$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



- 06** $f(6-x)+f(6+x)=0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(6, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 실수 전체의 집합에서 증가하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 중에서 하나는 다음 그림과 같다.



$$\text{또한, 양수 } a \text{에 대하여 } \int_{6-a}^{6+a} f(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{한편, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n f\left(m + \frac{k}{n}x\right) \leq 0 \text{에서}$$

$$\int_m^{m+x} f(t) dt \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

(i) $1 \leq m \leq 6$ 일 때,

㉠의 a 대신에 $6-m$ 을 대입하면

$$\int_m^{12-m} f(x) dx = 0$$

이므로 ㉠을 만족시키려면

$$m+x \leq 12-m$$

$$\therefore x \leq 12-2m$$

위의 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수 $g(m)$ 은

$$g(m) = 12-2m$$

(ii) $m > 6$ 일 때,

$x > 6$ 에서 $f(x) > 0$ 이므로

$$\int_m^{m+x} f(t) dt > 0$$

즉, ㉠을 만족시키는 자연수 x 는 존재하지 않는다.

$$\therefore g(m) = 0$$

(i), (ii)에서

$$\sum_{m=1}^7 g(m) = \sum_{m=1}^6 (12-2m) + g(7)$$

$$= 6 \times 12 - 2 \sum_{m=1}^6 m + 0$$

$$= 72 - 2 \times \frac{6 \times 7}{2}$$

$$= 72 - 42 = 30$$

답 30

blacklabel 특강 풀이참석

$$f(6-x) + f(6+x) = 0 \text{에서 } f(x) = -f(12-x)$$

이때, $12-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$, $x=6$ 일 때 $t=6$, $x=6-a$ 일

때 $t=6+a$ 이므로

$$\int_{6-a}^6 f(x) dx = \int_{6+a}^6 \{-f(12-x)\} dx$$

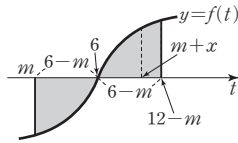
$$= \int_{6+a}^6 f(t) dt$$

$$= -\int_6^{6+a} f(t) dt$$

$$= -\int_6^{6+a} f(x) dx$$

$$\text{즉, } \int_{6-a}^6 f(x) dx + \int_6^{6+a} f(x) dx = 0 \text{이므로}$$

$$\int_{6-a}^{6+a} f(x) dx = 0 \text{이다.}$$



07 $x_k = \frac{k}{n}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)이므로 x_k 는 닫힌구간

$[0, 1]$ 을 n 등분한 각 분점의 x 좌표이다.

$$f(x) = e^{2x} - e^x + ex \text{이므로}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x + e$$

$$= e^x(2e^x - 1) + e$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $1 \leq e^x \leq e$ 이므로

$$f'(x) > 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가한다.

또한, $f(0) = 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

한편, 점 $A_k(x_k, f(x_k))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발이 C_k 이므로

$$\overline{A_k C_k} = f(x_k) \quad (\because f(x_k) \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 A_k 에서의 접선이 x 축과 만나는 점이 B_k 이므로

$$\frac{\overline{A_k C_k}}{\overline{B_k C_k}} = f'(x_k) \quad (\because f'(x_k) > 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{f(x_k)}{\overline{B_k C_k}} = f'(x_k)$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\{f(x_k)\}^4}{\overline{B_k C_k}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'(x_k) \{f(x_k)\}^3$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) \left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^3 \times \frac{1}{n} \quad (\because x_k = \frac{k}{n})$$

$$= \int_0^1 f'(x) \{f(x)\}^3 dx \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{이때, } f(x) = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = f'(x)$$

$f(x) = e^{2x} - e^x + ex$ 에서 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=1$ 일 때

$$t = e^2$$

따라서 ㉢에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\{f(x_k)\}^4}{\overline{B_k C_k}} = \int_0^1 f'(x) \{f(x)\}^3 dx$$

$$= \int_0^{e^2} t^3 dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^{e^2} = \frac{1}{4} e^8$$

답 ⑤

08 반원에 대한 중심각의 크기는 π

이므로 오른쪽 그림과 같이

$$\angle AOP_k = \frac{k\pi}{n}$$

점 P_k 에서 선분 AB 에 내린 수

선의 발을 H_k 라 하면

$$\overline{P_k H_k} = \overline{OP_k} \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \overline{AB} \times \overline{P_k H_k}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$= 4 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} 4 \sin \frac{k\pi}{n} \times \frac{1}{n}$$

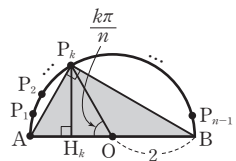
$$= \int_0^1 4 \sin \pi x dx$$

$$= \left[-\frac{4}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{\pi} - \left(-\frac{4}{\pi} \right)$$

$$= \frac{8}{\pi}$$

답 $\frac{8}{\pi}$



09 점 P_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$)의

x 좌표를 x_k 라 하면

$$x_k = \frac{k}{n} \circ \text{이므로}$$

$$P_k\left(\frac{k}{n}, 0\right), Q_k\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$f(x) = ax^2 + b$ ($a > 0, b > 0$)에서

$f(x) > 0$ 이므로

$$l_k = \overline{P_k Q_k} = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= a \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 + b$$

$$= \frac{ak^2 + bn^2}{n^2}$$

$$l_1 + l_n = \frac{5n^2 + 1}{n^2} \circ \text{이므로}$$

$$\frac{a + bn^2}{n^2} + \frac{an^2 + bn^2}{n^2} = \frac{(a + 2b)n^2 + a}{n^2} = \frac{5n^2 + 1}{n^2}$$

$$a + 2b = 5, a = 1 \circ \text{이므로 } a = 1, b = 2$$

$$\therefore l_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2$$

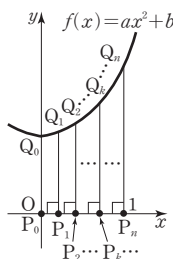
$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{l_k - 2} e^{l_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 - 2} e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2} \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x e^{x^2 + 2} dx \end{aligned}$$

$$\circ \text{이때, } x^2 + 2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=1$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{x^2 + 2} dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_2^3 = \frac{e^3 - e^2}{2} \end{aligned}$$

답 ②



10 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 에서 $x_k = \frac{2k}{n}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)이

므로

$$f(x_k) = \sqrt{2x_k + 1} = \sqrt{\frac{4k}{n} + 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_k &= \frac{1}{2} \times x_k \times f(x_k) = \frac{1}{2} \times \frac{2k}{n} \times \sqrt{\frac{4k}{n} + 1} \\ &= \frac{k}{n} \sqrt{\frac{4k}{n} + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{\frac{4k}{n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sqrt{\frac{4k}{n} + 1} \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x \sqrt{4x+1} dx \end{aligned}$$

$$4x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 4$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=5$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{4x+1} dx &= \int_1^5 \frac{t-1}{4} \times \sqrt{t} \times \frac{1}{4} dt \\ &= \frac{1}{16} \int_1^5 (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \left(\frac{2}{5} \times 25\sqrt{5} - \frac{2}{3} \times 5\sqrt{5} \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{25\sqrt{5} + 1}{60} \end{aligned}$$

답 ③

11 곡선 $y = x \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x \sin x = 0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

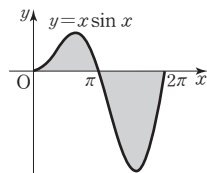
따라서 곡선 $y = x \sin x$

($0 \leq x \leq 2\pi$)와 x 축으로 둘러싸인

도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} |x \sin x| dx \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-x \sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx \\ &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx \\ &\quad - \left[-x \cos x \right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} (-\cos x) dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} + 3\pi + \left[-\sin x \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \pi + 0 + 3\pi + 0 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

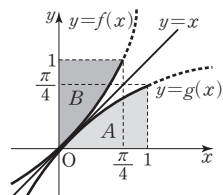
답 ④



12 함수 $f(x) = \tan x$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 즉, 오른쪽 그림에서 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_0^1 g(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \times 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \end{aligned}$$

이때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면



$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \text{이고, } x=0 \text{일 때 } t=1, x=\frac{\pi}{4} \text{일 때}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\ln |t| \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln 1 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

답 ③

$$13 \quad f(x) = \frac{a-x}{x+1} = \frac{a+1-(x+1)}{x+1} = \frac{a+1}{x+1} - 1$$

이때, $a+1 > 0$ ($\because a > 0$)이므로 꼭

선 $f(x) = \frac{a-x}{x+1}$ 와 x 축 및 y 축으로

둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.

이때, 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left(\frac{a+1}{x+1} - 1 \right) dx \\ &= \left[(a+1) \ln |x+1| - x \right]_0^a \\ &= (a+1) \ln (a+1) - a \\ &\text{즉, } (a+1) \ln (a+1) - a = 1 \text{이므로} \\ &(a+1) \ln (a+1) = a+1 \\ &\ln (a+1) = 1 \quad (\because a+1 > 0) \\ &a+1 = e \quad \therefore a = e-1 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = \frac{e-1-x}{x+1}$ 이므로

$$f(1) = \frac{e-2}{2}$$

답 ①

$$14 \quad y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \quad \dots\dots ㉠$$

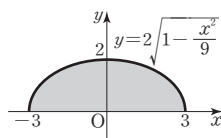
㉠에 $x=0$ 을 대입하면 $y=2$

㉠에 $y=0$ 을 대입하면 $1-\frac{x^2}{9}=0, x^2=9$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

곡선 $y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$ 과 x 축으로

둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



$$2\sqrt{1-\frac{(-x)^2}{9}} = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \text{에서 곡선 } y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \text{은}$$

y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^3 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} dx = 2 \int_0^3 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} dx$$

이때, $x = 3 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta \text{이고, } x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=3 \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2 \int_0^3 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2\sqrt{1-\sin^2 \theta}}_{=\cos \theta} \times 3 \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos^2 \theta d\theta \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{에서} \\ \cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \end{array} \right] \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= 6 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 6 \times \frac{\pi}{2} = 3\pi \end{aligned}$$

답 3π

$$15 \quad (i) A = \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $x = e^t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = e^t$

$x=1$ 일 때 $t=0, x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (x \ln x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (e^t t)^2 e^t dt = \int_0^1 t^2 e^{3t} dt \\ &= \int_0^1 x^2 e^{3x} dx \end{aligned}$$

$$(ii) B = \int_{-1}^0 x^2 e^x dx$$

$-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = -1$

$x=-1$ 일 때 $t=1, x=0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} B &= \int_{-1}^0 x^2 e^x dx \\ &= \int_1^0 t^2 e^{-t} (-dt) = \int_0^1 t^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$(iii) C = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $x^2 e^{3x} \geq 0, x^2 e^{-x} \geq 0, x^2 e^{2x} \geq 0$ 이므로 A, B, C 는 각각 세 곡선 $y = x^2 e^{3x}, y = x^2 e^{-x}, y = x^2 e^{2x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=0, x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

이때, $x > 0$ 에서 $e^x > 1$ 이므로

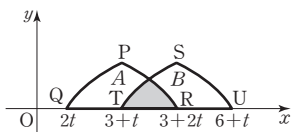
$$e^{3x} > e^{2x} > e^{-x} \quad \therefore x^2 e^{-x} < x^2 e^{2x} < x^2 e^{3x}$$

A, B, C 의 적분구간이 모두 닫힌구간 $[0, 1]$ 로 같으므로 곡선의 그래프가 위쪽에 위치할수록 정적분의 값이 더 크다.

따라서 $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx < \int_0^1 x^2 e^{2x} dx < \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$ 이므로 $B < C < A$

답 ④

- 16 다음 그림과 같이 도형 A 의 꼭짓점을 각각 P, Q, R , 도형 B 의 꼭짓점을 S, T, U 라 하면 도형 A 는 매초 2의 속도로 움직이고, 도형 B 는 매초 1의 속도로 움직이므로 $Q(2t, 0), R(3+2t, 0), T(3+t, 0), U(6+t, 0)$



도형 A 가 더 빠른 속도로 움직이므로 도형 A 와 도형 B 가 같은 위치에 놓일 때의 시각은

$2t=3+t$ 또는 $3+2t=6+t$ 에서 $t=3$

(i) $0 \leq t \leq 3$ 일 때,

두 점 P, R 를 지나는 곡선의 방정식은

$$y = \sqrt{-(x-2t)+3} = \sqrt{-x+3+2t}$$

두 점 S, T 를 지나는 곡선의 방정식은

$$y = \sqrt{(x-t)-3} = \sqrt{x-3-t}$$

이 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{-x+3+2t} = \sqrt{x-3-t} \text{에서}$$

$$-x+3+2t = x-3-t, 2x=6+3t$$

$$\therefore x = 3 + \frac{3}{2}t$$

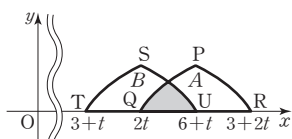
두 도형 A, B 가 합동이고 각각 직선 $x = \frac{3}{2} + 2t$, 직선 $x = \frac{9}{2} + t$ 에 대하여 대칭이므로 두 도형이 겹쳐지는

부분은 직선 $x = 3 + \frac{3}{2}t$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 도형 A, B 가 겹쳐지는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{3+t}^{3+\frac{3}{2}t} \sqrt{x-3-t} dx + \int_{3+\frac{3}{2}t}^{3+2t} \sqrt{-x+3+2t} dx \\ &= 2 \int_{3+t}^{3+\frac{3}{2}t} \sqrt{x-3-t} dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} (x-3-t)^{\frac{3}{2}} \right]_{3+t}^{3+\frac{3}{2}t} \\ &= 2 \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} t^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(ii) $3 < t \leq 5$ 일 때,



같은 방법으로 두 점 P, Q 를 지나는 곡선과 두 점 S, U 를 지나는 곡선의 방정식은 각각

$$y = \sqrt{x-2t}, y = \sqrt{-x+6+t}$$

이 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x-2t} = \sqrt{-x+6+t}$

에서 $x = 3 + \frac{3}{2}t$ 이므로 두 도형 A, B 가 겹쳐지는 부

분은 직선 $x = 3 + \frac{3}{2}t$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 도형 A, B 가 겹쳐지는 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{2t}^{3+\frac{3}{2}t} \sqrt{x-2t} dx + \int_{3+\frac{3}{2}t}^{6+t} \sqrt{-x+6+t} dx \\ &= 2 \int_{2t}^{3+\frac{3}{2}t} \sqrt{x-2t} dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} (x-2t)^{\frac{3}{2}} \right]_{2t}^{3+\frac{3}{2}t} \\ &= \frac{4}{3} \left(3 - \frac{1}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } S(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} & (0 \leq t \leq 3) \\ \frac{4}{3} \left(3 - \frac{1}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} & (3 < t \leq 5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^5 S(t) dt &= \int_0^3 \frac{\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} dt + \int_3^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{1}{2}t \right)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^3 + \left[\frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{5} \right) \left(3 - \frac{1}{2}t \right)^{\frac{5}{2}} \right]_3^5 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{15} \times 9\sqrt{3} - \frac{16}{15} \times \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{6\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{12}{5} \sqrt{6} - \frac{2}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{12}{5}, b = \frac{2}{15}$ 이므로

$$5a + 15b = 5 \times \frac{12}{5} + 15 \times \frac{2}{15} = 14$$

답 14

- 17 점 $(\pi, 0)$ 을 지나는 직선 l 의 기울기를 m ($m < 0$)이라 하면 방정식은

$$y = m(x - \pi)$$

이때, 위의 그림에서 두 영역 A, B 의 넓이가 같으므로

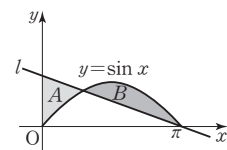
$$\int_0^\pi \{\sin x - m(x - \pi)\} dx = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\int_0^\pi (\sin x - mx + m\pi) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{1}{2}mx^2 + m\pi x \right]_0^\pi$$

$$= 1 - \frac{1}{2}m\pi^2 + m\pi^2 + 1$$

$$= 2 + \frac{1}{2}m\pi^2 = 0$$



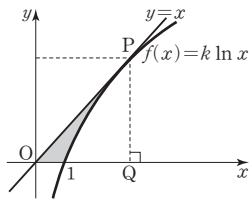
즉, $2 = -\frac{1}{2}m\pi^2$ 이므로

$$m = -\frac{4}{\pi^2}$$

답 $-\frac{4}{\pi^2}$

- 18** $f(x) = k \ln x$ ($k > 0$)라 하고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 접점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



점 P의 x 좌표를 p ($p > 0$)라 하면 점 P는 함수 $f(x) = k \ln x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점이므로 $k \ln p = p$ ㉠

$f(x) = k \ln x$ 에서 $f'(x) = \frac{k}{x}$ 이고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점 P에서의 접선이 직선 $y = x$ 이므로

$$\frac{k}{p} = 1 \quad \dots\dots\text{㉡}$$

㉠에서 $k = p$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$p \ln p = p, \ln p = 1 \quad (\because p > 0)$$

$$\therefore p = k = e$$

$$\therefore f(x) = e \ln x$$

따라서 구하는 넓이는

$$(\text{삼각형 OQP의 넓이}) - \int_1^e f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e e \ln x dx \quad \leftarrow u(x) = \ln x, v'(x) = 1 \text{로 놓으면}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) \quad \leftarrow u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e \left(e - \left[x \right]_1^e \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e \times (e - e + 1) = \frac{1}{2}e^2 - e$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 이므로

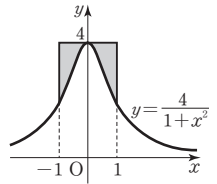
$$100ab = 100 \times \frac{1}{2} \times 1 = 50$$

답 50

- 19** $\frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{1+(-x)^2}$ 이므로 곡선 $y = \frac{4}{1+x^2}$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.

곡선 $y = \frac{4}{1+x^2}$ 와 세 직선 $x = -1, x = 1, y = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= 8 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= 8 \left[x \right]_0^1 - 8 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 8 - 8 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad \dots\dots\text{㉠} \end{aligned}$$



한편, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ 에서 $x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$ 이고, $x = 0$ 일 때 $\theta = 0$, $x = 1$ 일 때

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

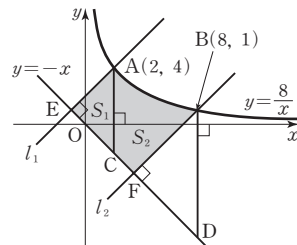
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 ㉠에서

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx &= 8 - 8 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 8 - 8 \times \frac{\pi}{4} \\ &= 8 - 2\pi \end{aligned}$$

답 $8 - 2\pi$

20



위의 그림과 같이 점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선과 직선 $y = -x$ 의 교점을 C, 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선과 직선 $y = -x$ 의 교점을 D라 하고 직선 $y = -x$ 와 두 직선 l_1, l_2 의 교점을 각각 E, F라 하자.

$$\therefore C(2, -2), D(8, -8)$$

구하고자 하는 도형을 두 부분으로 나누어 $\triangle AEC$ 의 넓이를 S_1 , 구하고자 하는 도형에서 $\triangle AEC$ 를 뺀 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $\triangle AEC$ 는 빗변의 길이가 $\overline{AC} = 6$ 인 직각이등변삼각형이므로 그 넓이는

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2 = 9$$

$\triangle BFD$ 는 빗변의 길이가 $\overline{BD} = 9$ 인 직각이등변삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore S_2 &= \int_2^8 \left\{ \frac{8}{x} - (-x) \right\} dx - \frac{81}{4} \\ &= \left[8 \ln |x| + \frac{1}{2} x^2 \right]_2^8 - \frac{81}{4} \\ &= (8 \ln 8 + 32) - (8 \ln 2 + 2) - \frac{81}{4} \\ &= 24 \ln 2 - 8 \ln 2 + \frac{39}{4} \\ &= 16 \ln 2 + \frac{39}{4}\end{aligned}$$

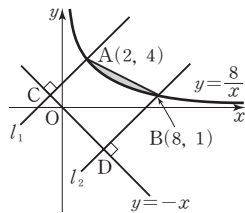
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}S_1 + S_2 &= 9 + \left(16 \ln 2 + \frac{39}{4} \right) \\ &= 16 \ln 2 + \frac{75}{4}\end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른풀이 •

다음 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2 가 직선 $y = -x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하면 곡선 $y = \frac{8}{x}$ 과 직선 $y = -x$ 및 두 직선 l_1, l_2 로 둘러싸인 도형의 넓이는 사다리꼴 ACDB의 넓이에서 다음 그림의 어두운 부분의 넓이를 빼면 된다.



선분 AC의 길이는 점 A(2, 4)와 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{AC} = \frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

선분 BD의 길이는 점 B(8, 1)과 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{BD} = \frac{|8+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

직선 l_1 은 직선 $y = -x$ 와 수직이고 점 A(2, 4)를 지나므로 직선의 방정식은

$$y - 4 = 1(x - 2) \quad \therefore x - y + 2 = 0$$

이때, 선분 CD의 길이는 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리이므로 점 B(8, 1)과 직선 l_1 , 즉 $x - y + 2 = 0$ 사이의 거리와 같다. 즉,

$$\overline{CD} = \frac{|8-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

따라서 사다리꼴 ACDB의 넓이는

$$\begin{aligned}\square ACDB &= \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD}) \times \overline{CD} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(3\sqrt{2} + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{135}{4}\end{aligned}$$

한편, 두 점 A(2, 4), B(8, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 5$$

이므로 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 와 곡선 $y = \frac{8}{x}$ 로 둘러싸인 도

형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_2^8 \left(-\frac{1}{2}x + 5 - \frac{8}{x} \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + 5x - 8 \ln |x| \right]_2^8 \\ &= (-16 + 40 - 8 \ln 8) - (-1 + 10 - 8 \ln 2) \\ &= 15 - 16 \ln 2\end{aligned}$$

그러므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\square ACDB - \int_2^8 \left(-\frac{1}{2}x + 5 - \frac{8}{x} \right) dx \\ = \frac{135}{4} - (15 - 16 \ln 2) = 16 \ln 2 + \frac{75}{4}\end{aligned}$$

21 $y = x^2$ 에서 $y' = 2x$

$$y = 2\sqrt{x-a} \text{에서 } y' = \frac{1}{\sqrt{x-a}}$$

두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = 2\sqrt{x-a}$ 의 교점의 x 좌표를 k 라 하면 $x = k$ 에서의 함숫값과 접선의 기울기가 각각 같으므로

$$k^2 = 2\sqrt{k-a}, \quad 2k = \frac{1}{\sqrt{k-a}}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k = \frac{1}{k^2}, \quad k^3 = 1$$

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0 \quad \therefore k = 1$$

즉, 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = 2\sqrt{x-a}$ 의 교점의 좌표는

(1, 1)이므로 $x = 1, y = 1$ 을 $y = 2\sqrt{x-a}$ 에 대입하면

$$1 = 2\sqrt{1-a}, \quad 1-a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

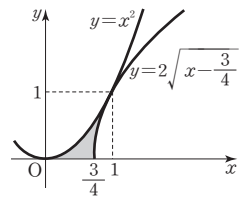
따라서 두 곡선 $y = x^2$ 과

$$y = 2\sqrt{x - \frac{3}{4}} \text{ 및 } x \text{축으로 둘러}$$

싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{3}{4}}^1 2\sqrt{x - \frac{3}{4}} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{3}{4}}^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{6}$



22 $\int_0^1 \{f(4x) - g(4x)\} dx = 1$ 에서

$$4x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 4$$

$x = 0$ 일 때 $t = 0$, $x = 1$ 일 때 $t = 4$ 이므로

$$\int_0^1 \{f(4x) - g(4x)\} dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \{f(t) - g(t)\} dt = 1$$

$$\text{에서 } \int_0^4 \{f(t) - g(t)\} dt = 4$$

즉,

$$\int_0^4 \{f(t) - g(t)\} dt$$

$$= \int_0^3 \{f(t) - g(t)\} dt - \int_3^4 \{g(t) - f(t)\} dt = 4$$

.....㉠

또한, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 8이므로

$$\int_0^4 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_3^4 \{g(x) - f(x)\} dx = 8$$

.....㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\int_0^3 \{f(x) - g(x)\} dx = 6, \int_3^4 \{g(x) - f(x)\} dx = 2$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 두 도형 A, B의 넓이는 각각 6, 2이다. 답 6, 2

- 23** 두 점 P, Q가 원점을 출발한 지 t 초 후의 x 좌표는 각각 t , $2t$ 이므로 t 초 후에 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 과 두 선분 AB, CD로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \int_t^{2t} (e^x - e^{-x}) dx$$

$$= [e^x + e^{-x}]_t^{2t}$$

$$= e^{2t} + e^{-2t} - (e^t + e^{-t}) \quad \text{.....㉠}$$

$$\therefore S'(t) = 2e^{2t} - 2e^{-2t} - (e^t - e^{-t})$$

$$= 2(e^{2t} - e^{-2t}) - (e^t - e^{-t})$$

$$= 2(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) - (e^t - e^{-t})$$

$$= (e^t - e^{-t})\{2(e^t + e^{-t}) - 1\} \quad \text{.....㉡}$$

㉠에서 $S(a) = 4$ 이므로

$$e^{2a} + e^{-2a} - (e^a + e^{-a}) = 4 \quad \text{.....㉢}$$

이때, $e^a + e^{-a} = k$ ($k > 0$)로 놓으면

$$e^{2a} + 2 + e^{-2a} = k^2 \text{이므로}$$

$$e^{2a} + e^{-2a} = k^2 - 2$$

$$\text{즉, ㉢에서 } (k^2 - 2) - k = 4$$

$$k^2 - k - 6 = 0, (k+2)(k-3) = 0$$

이때, $k > 0$ 이므로 $k = 3$

$$\therefore e^a + e^{-a} = 3$$

또한, $(e^a - e^{-a})^2 = (e^a + e^{-a})^2 - 4$ 이므로

$$(e^a - e^{-a})^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\therefore e^a - e^{-a} = \sqrt{5} \quad (\because a > 0)$$

따라서 ㉡에서

$$S'(a) = (e^a - e^{-a})\{2(e^a + e^{-a}) - 1\}$$

$$= \sqrt{5} \times (2 \times 3 - 1)$$

$$= 5\sqrt{5}$$

답 ④

- 24** 곡선 $y = \sqrt{-x+1}$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{-x+1} dx = \left[-\frac{2}{3}(-x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

두 곡선 $y = \sqrt{-x+1}$,

$y = \sqrt{kx}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{-x+1} = \sqrt{kx} \text{에서}$$

$$-x+1 = kx$$

$$\therefore x = \frac{1}{k+1}$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{k+1}$ 에서 두 곡선 $y = \sqrt{-x+1}$, $y = \sqrt{kx}$ 와 y 축

으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{k+1}} (\sqrt{-x+1} - \sqrt{kx}) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(-x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3k}(kx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{k+1}}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}$$

이때, $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \frac{k}{k+1} = \frac{1}{4} \quad (\because k > 0)$$

$$k+1 = 4k, 3k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	곡선 $y = \sqrt{-x+1}$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 경우	30%
(나)	두 곡선 $y = \sqrt{-x+1}$, $y = \sqrt{kx}$ 의 교점의 x 좌표를 k 에 대하여 나타낸 경우	20%
(다)	넓이에 대한 조건을 이용하여 k 의 값을 구한 경우	50%

• 다른풀이 •

곡선 $y = \sqrt{-x+1}$ 과 x 축 및 y 축

으로 둘러싸인 도형의 넓이를

곡선 $y = \sqrt{kx}$ 가 이등분하므로

오른쪽 그림에서 $A = B$ 이다.

$$A = \int_0^{\frac{1}{k+1}} (\sqrt{-x+1} - \sqrt{kx}) dx$$

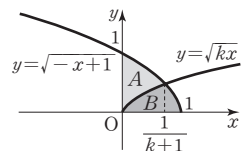
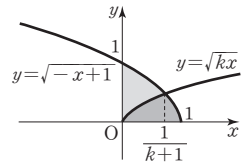
$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}$$

$$B = \int_0^{\frac{1}{k+1}} \sqrt{kx} dx + \int_{\frac{1}{k+1}}^1 \sqrt{-x+1} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3k}(kx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{k+1}} + \left[-\frac{2}{3}(-x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{k+1}}^1$$

$$= \frac{2}{3k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\begin{aligned} \text{즉, } -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} &= \frac{2}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{이므로} \\ \frac{4}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3}, \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\ \frac{k}{k+1} &= \frac{1}{4} \quad \therefore k = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

25 점 P의 x좌표를 t (t>0)라 하면

P(t, f(t)), Q(t, 0)

이때, f(0)=0, g(0)=0,

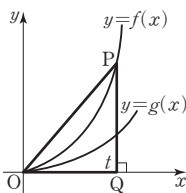
f(x) ≥ g(x)이고, x ≥ 0에서 증가

하는 두 함수 y=f(x), y=g(x)의

그래프가 삼각형 OQP를 삼등분하

므로 두 함수 y=f(x), y=g(x)의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



삼각형 OQP의 넓이는 $\frac{1}{2}tf(t)$ 이고, 곡선 y=f(x)와 x

축 및 직선 x=t로 둘러싸인 도형의 넓이는 삼각형 OQP

의 넓이의 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\int_0^t f(x) dx = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}tf(t) = \frac{1}{3}tf(t)$$

위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$f(t) = \frac{1}{3}f(t) + \frac{1}{3}tf'(t), \quad \frac{2}{3}f(t) = \frac{1}{3}tf'(t)$$

t>0이면 f(t)>0이므로 양변을 $\frac{1}{3}tf'(t)$ 로 나누면

$$\frac{2}{t} = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad \int \frac{2}{t} dt = \int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

ln f(t)=2 ln t+C (단, C는 적분상수)

f(1)=2이므로 ln f(1)=C에서 C=ln 2

즉, ln f(t)=2 ln t+ln 2=ln 2t²이므로

$$f(t) = 2t^2$$

또한, 곡선 y=g(x)와 x축 및 직선 x=t로 둘러싸인 도

형의 넓이는 삼각형 OQP의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\int_0^t g(x) dx = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}tf(t)$$

$$= \frac{1}{3}t^3 \quad (\because f(t) = 2t^2)$$

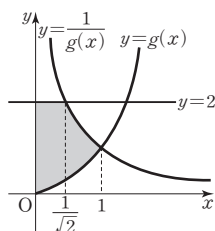
위의 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g(t) = t^2$$

따라서 $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$, g(x)=x²이므로 두 곡선

y= $\frac{1}{g(x)}$ (x>0), y=g(x)와 직선 y=2 및 y축으로

둘러싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



두 곡선 y= $\frac{1}{g(x)}$, y=g(x)의 교점의 x좌표는

$$\frac{1}{x^2} = x^2 \text{에서 } x^4 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

곡선 y= $\frac{1}{g(x)}$ 과 직선 y=2의 교점의 x좌표는

$$\frac{1}{x^2} = 2, \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because x > 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{2 - g(x)\} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left\{ \frac{1}{g(x)} - g(x) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2 - x^2) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - x^2 \right) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \right) + \left(-1 - \frac{1}{3} + \sqrt{2} + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{6\sqrt{2}-4}{3} \end{aligned}$$

답 ④

26 모든 실수 x에 대하여 $-1 \leq \sin \frac{\pi}{8}x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq 2 \sin \frac{\pi}{8}x \leq 2, \quad 3 \leq 2 \sin \frac{\pi}{8}x + 5 \leq 7$$

$$\therefore 3 \leq R(x) \leq 7$$

지면으로부터의 높이가 x인 지점에

서 지면과 평행한 평면으로 자른 파

인애플의 단면의 중심을 O라 하면

파인애플의 단면은 오른쪽 그림과

같다.

이 단면의 넓이를 S(x)라 하면

$$S(x) = \pi \times \{R(x)\}^2 - \pi \times 2^2$$

$$= \pi \left(2 \sin \frac{\pi}{8}x + 5 \right)^2 - 4\pi$$

$$= \pi \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{8}x + 20 \sin \frac{\pi}{8}x + 21 \right)$$

따라서 이 파인애플의 부피는

$$\begin{aligned} &\int_0^8 S(x) dx \\ &= \int_0^8 \pi \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{8}x + 20 \sin \frac{\pi}{8}x + 21 \right) dx \\ &= \pi \int_0^8 \left\{ 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}x \right) + 20 \sin \frac{\pi}{8}x + 21 \right\} dx \\ &= \pi \left[2x - \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{4}x - \frac{160}{\pi} \cos \frac{\pi}{8}x + 21x \right]_0^8 \\ &= \pi \left(16 + \frac{160}{\pi} + 168 + \frac{160}{\pi} \right) \\ &= \pi \left(\frac{320}{\pi} + 184 \right) = 320 + 184\pi \end{aligned}$$

따라서 a=320, b=184이므로

$$a+b = 320 + 184 = 504$$

답 504

27 조건을 만족시키는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로

자를 때, 곡선 y=tan²x (0 ≤ x ≤ $\frac{\pi}{4}$)와 만나는 점을 A,

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하자.

점 A의 x 좌표를 x ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)

라 하면 점 A를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 정사각형의 한 변의 길이는

$$\overline{AB} = \tan^2 x$$

이 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \overline{AB}^2 = \tan^4 x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-2\sec^2 x + 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \times \sec^2 x dx + \left[-2\tan x + x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx - 2 + \frac{\pi}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx$ 에서

$\tan x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx &= \int_0^1 (t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \sec^4 x dx - 2 + \frac{\pi}{4} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{4}{3} - 2 + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

28 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 직선 $y = mx$ 의 교점 중 원점이 아닌 점을 P라 하면 점 P의 x 좌표는 $\sqrt{x} = mx$ 에서 $x = m^2 x^2$

$$x(m^2 x - 1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{m^2} \quad (\because x > 0)$$

조건을 만족시키는 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로

자를 때, 곡선 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{m^2}$)와 만나는 점을 A,

직선 $y = mx$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{m^2}$)와 만나는 점을 B라 하자.

점 A의 x 좌표를 x ($0 \leq x \leq \frac{1}{m^2}$)

라 하면 점 A를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 정삼각형의 한 변의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{x} - mx$$

이 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{x} - mx)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (x - 2mx\sqrt{x} + m^2 x^2) \end{aligned}$$

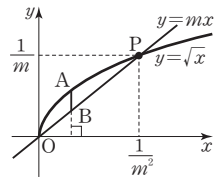
따라서 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{m^2}} S(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{m^2}} \frac{\sqrt{3}}{4} (x - 2mx\sqrt{x} + m^2 x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}mx^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}m^2 x^3 \right]_0^{\frac{1}{m^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2} \right)^2 - \frac{4}{5}m \left(\frac{1}{m^2} \right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}m^2 \left(\frac{1}{m^2} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{m^4} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{m^4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{m^4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{m^4} = \frac{\sqrt{3}}{120m^4} \end{aligned}$$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{120m^4} = 30\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{m^4} = 3600 \quad \therefore \frac{1}{m^2} = 60$$

답 60



29 반구 모양의 그릇의 중심

을 좌표평면의 원점으로 하여 정면에서 바라본 단면을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 삼각형 OPQ에서

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OQ} \sin \theta \\ &= \sin \theta \quad (\because \overline{OQ} = 1) \end{aligned}$$

$$\therefore H(\theta) = 1 - \sin \theta \quad (\text{참})$$

ㄴ. 삼각형 OPQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} \cos \theta = \cos \theta \quad (\because \overline{OQ} = 1)$$

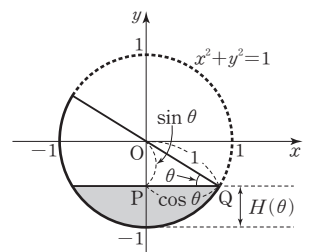
이때, 수면의 넓이 $S(\theta)$ 는 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$ 인 원의 넓이이므로

$$S(\theta) = \pi \times \overline{PQ}^2 = \pi \cos^2 \theta \quad (\text{참})$$

ㄷ. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 물의 높이가 $H\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이

므로 구하는 부피를 V 라 하면

$$V = \pi \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x^2 dy$$



이때, $x = \cos \theta$, $y = -\sin \theta$ 이므로 $\frac{dy}{d\theta} = -\cos \theta$

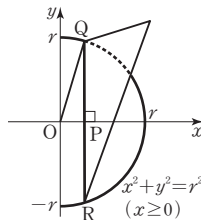
이고, $y = -1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} x^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta \times (-\cos \theta) d\theta \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \cos \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \pi \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \sin \theta = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{d\theta} = \cos \theta \text{이므로} \\ \int_{\sin \frac{\pi}{6}}^{\sin \frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{\sin \frac{\pi}{6}}^{\sin \frac{\pi}{2}} \end{array} \right] \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) \\ &= \frac{5}{24} \pi \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

30 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에서 $x \geq 0$ 인 반원을 밀면으로 하는 입체도형이 A이므로 오른쪽 그림과 같이 입체도형 A를 x 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 x 축과 만나는 점을 P, 반원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($x \geq 0$)과 만나는 두 점을 각각 Q, R라 하자.



점 P의 x 좌표를 x ($0 \leq x \leq r$)라 하면 $\overline{OP} = x$ 이므로 $\triangle OPQ$ 에서 $\overline{PQ} = \sqrt{r^2 - x^2}$
 $\therefore \overline{QR} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$

입체도형 A를 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 밑변과 높이의 길이의 합이 $2r$ 인 삼각형이므로 밑변을 $\overline{QR}$ 라 하면 (높이) $= 2r - 2\sqrt{r^2 - x^2}$

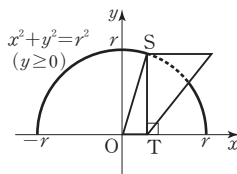
즉, 입체도형 A의 단면의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2\sqrt{r^2 - x^2} (2r - 2\sqrt{r^2 - x^2}) \\ = 2r\sqrt{r^2 - x^2} - 2(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

이므로 입체도형 A의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^r \{2r\sqrt{r^2 - x^2} - 2(r^2 - x^2)\} dx \\ = 2r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx - 2 \int_0^r (r^2 - x^2) dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또한, 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에서 $y \geq 0$ 인 반원을 밀면으로 하는 입체도형이 B이므로 오른쪽 그림과 같이 입체도형 B를 x 축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 x 축과



만나는 점을 T, 반원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($y \geq 0$)과 만나는 점을 S라 하자.

점 T의 x 좌표를 x ($-r \leq x \leq r$)라 하면 $\overline{OT} = |x|$ 이므로 $\triangle OTS$ 에서

$$\overline{ST} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

입체도형 B를 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 밑변과 높이의 길이의 합이 $2r$ 인 삼각형이므로 밑변을 $\overline{ST}$ 라 하면 (높이) $= 2r - \sqrt{r^2 - x^2}$

즉, 입체도형 B의 단면의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{r^2 - x^2} (2r - \sqrt{r^2 - x^2}) \\ = r\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

이므로 입체도형 B의 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \left\{ r\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}(r^2 - x^2) \right\} dx \\ = 2 \int_0^r \left\{ r\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{1}{2}(r^2 - x^2) \right\} dx \\ = 2r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx - \int_0^r (r^2 - x^2) dx \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

한편, $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ 에서 $x = r \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = r \cos \theta$

$x = 0$ 일 때 $\theta = 0$, $x = r$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \times r \cos \theta d\theta \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{에서} \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{array} \right] \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r^2}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r (r^2 - x^2) dx &= \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r \\ &= r^3 - \frac{1}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3 \end{aligned}$$

①에서 입체도형 A의 부피는

$$2r \times \frac{\pi}{4} r^2 - 2 \times \frac{2}{3} r^3 = \frac{\pi}{2} r^3 - \frac{4}{3} r^3$$

②에서 입체도형 B의 부피는

$$2r \times \frac{\pi}{4} r^2 - \frac{2}{3} r^3 = \frac{\pi}{2} r^3 - \frac{2}{3} r^3$$

따라서 두 입체도형 A, B의 부피의 합은

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} r^3 - \frac{4}{3} r^3 \right) + \left(\frac{\pi}{2} r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) &= \pi r^3 - 2r^3 \\ &= r^3 (\pi - 2) \\ &= 27 (\pi - 2) \end{aligned}$$

r 는 양의 유리수이므로 $r^3 = 27$ 에서

$$r = 3$$

답 3

31 해결단계

① 단계	조건 (㉔)를 이용하여 $1 < x < e$ 에서 $f(x)$ 의 함수식을 구한다.
② 단계	조건 (㉔)를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한 후, 입체도형의 부피가 최대가 되기 위한 조건을 찾는다.
③ 단계	$e \leq x \leq e^2$ 에서 $f(x)$ 의 함수식을 구한 후, 입체도형의 부피의 최댓값을 구한다.

점 P의 x 좌표를 x ($1 \leq x \leq e^2$)라 하면 점 $P(x, f(x))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발이 Q이므로

$$\overline{PQ} = f(x)$$

즉, 주어진 입체도형을 점 P를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 반원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}f(x)$ 이므로 반원의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\pi \times \left\{ \frac{1}{2}f(x) \right\}^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \{f(x)\}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

조건 (㉔)의 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ($1 < x < e$)에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x) dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{x} + C_1 \quad (\text{단, } C_1 \text{은 적분상수이고, } 1 < x < e) \end{aligned}$$

이때, 조건 (㉔)에서 $f'(1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = f'(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) = 1 + C_1 = 1$$

$$\therefore C_1 = 0$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} \quad (1 \leq x < e) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또한,

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \ln x + C_2 \quad (\text{단, } C_2 \text{는 적분상수이고, } 1 < x < e)$$

이고 조건 (㉔)에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (\ln x + C_2) = 0 + C_2 = 0$$

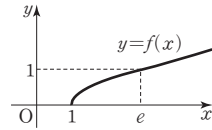
$$\therefore C_2 = 0$$

$$\therefore f(x) = \ln x \quad (1 \leq x < e)$$

한편, 조건 (㉔)에서 $1 < a < b < e^2$ 이면 $f'(a) \geq f'(b)$ 이므로 $1 < x < e^2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하거나 직선이어야 한다.

그런데 ㉑에서 입체도형의 부피가 $\int_1^e \frac{\pi}{8} \{f(x)\}^2 dx$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때, 반원의 넓이도 최대이고, 구하는 입체도형의 부피도 최대이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 $e \leq x \leq e^2$ 에서 직선이어야 한다.



이때, 함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 미분가능하고, ㉑에서

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad (1 \leq x < e) \text{이므로}$$

$$f'(e) = \lim_{x \rightarrow e-} f'(x) = \frac{1}{e}$$

즉, $e \leq x \leq e^2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(e, 1)$

을 지나고 기울기가 $\frac{1}{e}$ 인 직선이므로

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \leq x < e) \\ \frac{1}{e}x & (e \leq x \leq e^2) \end{cases}$$

따라서 ㉑에서 구하는 입체도형의 부피의 최댓값은

$$\begin{aligned} &\int_1^{e^2} S(x) dx \\ &= \int_1^e \frac{\pi}{8} \{f(x)\}^2 dx \quad \begin{array}{l} u(x) = (\ln x)^2, v'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, v(x) = x \end{array} \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ \int_1^e (\ln x)^2 dx + \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{e}x \right)^2 dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{8} \left\{ \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx + \left[\frac{1}{3e^2} x^3 \right]_e^{e^2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(e - 2 \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{3}e^4 - \frac{1}{3}e \right) \quad \begin{array}{l} p(x) = \ln x, q'(x) = 1 \\ \text{로 놓으면} \\ p'(x) = \frac{1}{x}, q(x) = x \end{array} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{3}e^4 + \frac{2}{3}e - 2 \left[x \ln x \right]_1^e + 2 \int_1^e dx \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{3}e^4 + \frac{2}{3}e - 2e + 2 \left[x \right]_1^e \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{1}{3}e^4 + \frac{2}{3}e - 2 \right) \\ &= \frac{\pi}{24} (e^4 + 2e - 6) \end{aligned}$$

답 ①

32 시각 t 에서 선분 OP의 길이는 e^t 이고, 선분 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 t 이므로 점 P의 좌표는 $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ 이다.

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t$$

$$= e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$= e^t (\sin t + \cos t)$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^t dt \\
 &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^{2\pi} \\
 &= \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)
 \end{aligned}$$

답 ④

33 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), y = \ln t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right), \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^e \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^e \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right]^2} dt \\
 &= \int_1^e \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{t}\right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2}\left[\left(e - \frac{1}{e}\right) - (1 - 1)\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

34 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = \cos(2t^3 - 9t^2 + 12t), y = \sin(2t^3 - 9t^2 + 12t) \text{ 이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = -(6t^2 - 18t + 12) \times \sin(2t^3 - 9t^2 + 12t)$$

$$\frac{dy}{dt} = (6t^2 - 18t + 12) \times \cos(2t^3 - 9t^2 + 12t)$$

$t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^2 \sqrt{(6t^2 - 18t + 12)^2} dt \\
 &= \int_0^2 |6t^2 - 18t + 12| dt \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때, $6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$ 이므로

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, $|6t^2 - 18t + 12| = 6t^2 - 18t + 12$

$1 \leq t \leq 2$ 일 때, $|6t^2 - 18t + 12| = -(6t^2 - 18t + 12)$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^1 (6t^2 - 18t + 12) dt - \int_1^2 (6t^2 - 18t + 12) dt \\
 &= \left[2t^3 - 9t^2 + 12t\right]_0^1 - \left[2t^3 - 9t^2 + 12t\right]_1^2 \\
 &= (5 - 0) - (4 - 5) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

답 6

35 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2t^2 - 1, y = t^3 \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ 이므로}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{16t^2 + 9t^4} dt \\
 &= \int_0^1 t\sqrt{16 + 9t^2} dt
 \end{aligned}$$

$$\text{이때, } 9t^2 + 16 = u \text{로 놓으면 } \frac{du}{dt} = 18t$$

$t=0$ 일 때 $u=16$, $t=1$ 일 때 $u=25$ 이므로

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^1 t\sqrt{16 + 9t^2} dt \\
 &= \int_{16}^{25} \frac{1}{18}\sqrt{u} du \\
 &= \left[\frac{1}{27}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{25} \\
 &= \frac{125 - 64}{27} = \frac{61}{27}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{61}{27}$

36 점 P가 점 $(1, 0)$ 을 출발하여

매초 2의 속력으로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이므로

t 초 후 직선 OP가 x 축의

양의 방향과 이루는 각의 크

기를 θ 라 하면 점 P가 움직인

거리는

$$2t = 1 \times \theta \quad \therefore \theta = 2t$$

즉, 시각 t 에서의 점 P의 위치는 $(\cos 2t, \sin 2t)$ 이므로

$H(\cos 2t, 0)$

점 Q는 직선 OP 위에 있고 $\overline{OQ} = \overline{OH} = |\cos 2t|$ 이므로

$Q(|\cos 2t| \cos 2t, |\cos 2t| \sin 2t)$

(i) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$x = \cos^2 2t, y = \cos 2t \sin 2t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= 2 \cos 2t \times (-\sin 2t) \times 2 \\
 &= -4 \sin 2t \cos 2t = -2 \sin 4t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= -2 \sin 2t \times \sin 2t + \cos 2t \times 2 \cos 2t \\
 &= 2(\cos^2 2t - \sin^2 2t) = 2 \cos 4t
 \end{aligned}$$

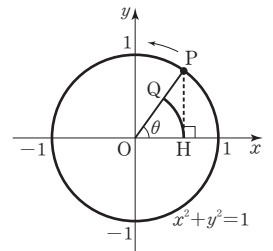
(ii) $\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$$x = -\cos^2 2t, y = -\cos 2t \sin 2t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -2 \cos 2t \times (-\sin 2t) \times 2 \\
 &= 4 \sin 2t \cos 2t = 2 \sin 4t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= 2 \sin 2t \sin 2t - 2 \cos 2t \cos 2t \\
 &= -2(\cos^2 2t - \sin^2 2t) = -2 \cos 4t
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 시각 $t=0$ 에서 시각 $t=\frac{\pi}{2}$ 까지 점 Q가



움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 4t + 4 \cos^2 4t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(\sin^2 4t + \cos^2 4t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt \\ &= \left[2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

답 π

37 $y = \frac{1}{2}f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{2}f(x)$ 의 길이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_{-2}^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_{-2}^2 \\ &= e^2 - e^{-2} \end{aligned}$$

즉, 구하는 곡선의 길이는 $g(2)$ 와 같다.

답 ④

38 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) = tg(t), \quad \frac{dy}{dt} = g'(t) = -tf(t) \quad (\because \text{조건 ④})$$

이므로 $0 \leq t \leq 2$ 일 때 곡선 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{\{tg(t)\}^2 + \{-tf(t)\}^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{t^2\{g(t)\}^2 + t^2\{f(t)\}^2} dt \\ &= \int_0^2 t\sqrt{\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2} dt \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때, $h(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2$ 이라 하면

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) \\ &= 2tf(t)g(t) - 2tf(t)g(t) \quad (\because \text{조건 ④}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

즉, 임의의 실수 t 에 대하여 $h'(t)=0$ 이므로 $h(t)$ 는 상수 함수이다.

이때,

$$\begin{aligned} h(0) &= \{f(0)\}^2 + \{g(0)\}^2 \\ &= 0^2 + 2^2 \quad (\because \text{조건 ⑦}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

이므로 $h(t)=4$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^2 t\sqrt{\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2} dt \\ &= \int_0^2 t\sqrt{h(t)} dt \\ &= \int_0^2 t\sqrt{4} dt \\ &= \int_0^2 2t dt \\ &= \left[t^2 \right]_0^2 = 4 \end{aligned}$$

답 4

39 조건 ④에서

$$\int_{e^2}^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \frac{t^2}{16} + 2 \ln t - \frac{e^4}{16} - 4$$

위의 식의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} = \frac{t}{8} + \frac{2}{t}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$1 + \{f'(t)\}^2 = \frac{t^2}{64} + \frac{1}{2} + \frac{4}{t^2}$$

$$\{f'(t)\}^2 = \frac{t^2}{64} - \frac{1}{2} + \frac{4}{t^2}$$

$$\therefore \{f'(t)\}^2 = \left(\frac{t}{8} - \frac{2}{t}\right)^2$$

그런데 조건 ④에서 $x > 2e$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이어야 하고,

$$t > 2e \text{일 때 } \frac{t}{8} - \frac{2}{t} > 0 \text{이므로}$$

$$f'(t) = \frac{t}{8} - \frac{2}{t} \quad (\text{단, } t > 2e)$$

$$\text{즉, } f'(x) = \frac{x}{8} - \frac{2}{x} \quad (x > 2e) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \left(\frac{x}{8} - \frac{2}{x}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{16} - 2 \ln x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수이고 } x > 2e) \end{aligned}$$

$$\text{조건 ⑦에서 } f(e^2) = \frac{e^4}{16} + 5 \text{이므로}$$

$$\frac{e^4}{16} - 4 + C = \frac{e^4}{16} + 5 \quad \therefore C = 9$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{x^2}{16} - 2 \ln x + 9 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(8) &= \frac{64}{16} - 2 \ln 8 + 9 \\ &= 4 - 6 \ln 2 + 9 \\ &= 13 - 6 \ln 2 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$40 \quad \neg. f(x) = \int_0^x \frac{x-t}{\cos^2 t} dt$$

$$= x \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt - \int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{x}{\cos^2 x} \\ &= \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^x \sec^2 t dt \\ &= \left[\tan t \right]_0^x = \tan x \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. ㄱ에서 $f'(x) = \tan x$ 이므로

$$f''(x) = \sec^2 x$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } f''(x) > 0 \text{이므로 함수 } y=f(x)$$

의 그래프는 아래로 볼록하다.

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} > f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 2f\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{참})$$

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 의 $x=-\frac{\pi}{6}$ 에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 까지의 길이는

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx \quad (\because \text{ㄱ}) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\sec^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \end{aligned}$$

$$\text{이때, } \sin x=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$x=-\frac{\pi}{6} \text{일 때 } t=-\frac{1}{2}, x=\frac{\pi}{6} \text{일 때 } t=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\ln |1-t| + \ln |1+t| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} \right)$$

$$= \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln 3 \quad (\text{참})$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

Step 3

1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 95

01 4

02 $\frac{11}{3}$

03 $12 \ln \frac{3}{2} - \frac{14}{3}$

04 $\frac{108}{5}$

05 15

06 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

01 해결단계

① 단계	함수 $f(x) = \sqrt{[x]+1-(x-[x])^2}$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	정사각형의 넓이를 이용하여 V_n 을 구한다.
③ 단계	$8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V_k$ 의 값을 구한다.

$y = \sqrt{[x]+1-(x-[x])^2} (x \geq 0)$ 이라 하고 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-[x])^2 + y^2 = [x]+1 \quad (\text{단, } x \geq 0, y \geq 0)$$

$$0 \leq x < 1 \text{일 때, } [x]=0 \text{이므로 } x^2 + y^2 = 1$$

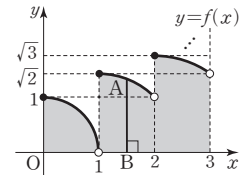
$$1 \leq x < 2 \text{일 때, } [x]=1 \text{이므로 } (x-1)^2 + y^2 = 2$$

$$2 \leq x < 3 \text{일 때, } [x]=2 \text{이므로 } (x-2)^2 + y^2 = 3$$

⋮

$$n-1 \leq x < n \text{일 때, } [x]=n-1 \text{이므로}$$

$$(x-n+1)^2 + y^2 = n \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$



입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자를 때, 곡선

$y=f(x)$ 와 만나는 점을 A, 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하자.

점 A의 x 좌표를 t ($n-1 \leq t < n$)라 하면 점 A를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 정사각형의 한 변의 길이는 $AB=f(t)$ 이므로 정사각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \{f(t)\}^2 = y^2$$

$$= n - (t-n+1)^2 \quad (\because \textcircled{7})$$

따라서 입체도형의 부피는

$$V_n = \int_{n-1}^n S(t) dt$$

$$= \int_{n-1}^n \{n - (t-n+1)^2\} dt$$

$$= \left[nt - \frac{1}{3}(t-n+1)^3 \right]_{n-1}^n$$

$$= \left(n^2 - \frac{1}{3} \right) - n(n-1)$$

$$= n - \frac{1}{3}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3}$$

$$= \frac{3n^2+n}{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V_k &= 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{6n^2} \\ &= 8 \times \frac{3}{6} = 4\end{aligned}$$

답 4

02 해결단계

① 단계	그릇에 담긴 물의 높이가 3일 때와 1일 때의 부피를 각각 구한다.
② 단계	물에 잠긴 구슬의 부피를 구한다.
③ 단계	r 의 값을 구한다.

그릇에 담긴 물의 높이가 x 일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면 수면의 반지름의 길이가 $\sqrt{3x+6}$ 이므로

$$S(x) = \pi(\sqrt{3x+6})^2 = \pi(3x+6)$$

그릇에 물을 가득 채웠을 때의 물의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^3 S(x) dx &= \int_0^3 \pi(3x+6) dx \\ &= \pi \left[\frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_0^3 \\ &= \pi \left(\frac{27}{2} + 18 \right) \\ &= \frac{63}{2}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉑}\end{aligned}$$

구슬을 넣은 그릇에 물을 가득 부은 후 구슬을 꺼냈을 때 그릇에 남은 물의 높이가 1이므로 그때의 남은 물의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(x) dx &= \int_0^1 \pi(3x+6) dx \\ &= \pi \left[\frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{3}{2} + 6 \right) \\ &= \frac{15}{2}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉒}\end{aligned}$$

한편, 오른쪽 그림과 같이 물의 높이가 x 일 때 물에 잠긴 구슬의 단면적의 넓이를 $R(x)$ 라 하면

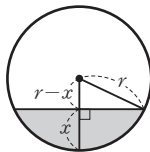
$$\begin{aligned}R(x) &= \pi\{r^2 - (r-x)^2\} \\ &= \pi(2rx - x^2)\end{aligned}$$

구슬을 넣은 그릇에 물을 가득 채웠을 때 물에 잠긴 구슬의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^3 R(x) dx &= \pi \int_0^3 (2rx - x^2) dx \\ &= \pi \left[rx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\ &= 9(r-1)\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉓}\end{aligned}$$

이때, $\textcircled{㉓} = \textcircled{㉑} - \textcircled{㉒}$ 이므로

$$9(r-1)\pi = \frac{63}{2}\pi - \frac{15}{2}\pi$$



$$9(r-1) = 24, \quad r-1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore r = \frac{11}{3}$$

$$\text{답 } \frac{11}{3}$$

03 해결단계

① 단계	조건 ㉑을 만족시키는 점 Q의 좌표를 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 점 Q의 좌표를 이용하여 조건 ㉒를 만족시키는 a, b 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	정적분을 이용하여 주어진 직선과 곡선 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

조건 ㉑에서 점 $P(1, 5)$ 는 직선 $y = -3x + k$ 위에 있으므로

$$5 = -3 + k \quad \therefore k = 8$$

직선 $y = -3x + 8$ 과 원 $x^2 + (y-3)^2 = 5$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 + (-3x+5)^2 = 5, \quad x^2 + 9x^2 - 30x + 25 = 5$$

$$10x^2 - 30x + 20 = 0, \quad 10(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때, 점 P의 x 좌표가 1이므로 점 Q의 x 좌표는 2이다.

$$y = -3x + 8 \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면}$$

$$y = -6 + 8 = 2$$

$$\therefore Q(2, 2)$$

조건 ㉒에서 곡선 $y = \frac{a}{x} + b$ 가 점 Q를 지나므로

$$2 = \frac{a}{2} + b \quad \therefore a + 2b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\text{또한, } f(x) = \frac{a}{x} + b \text{라 하면 } f'(x) = -\frac{a}{x^2}$$

이때, 직선 $y = -3x + 8$ 과 곡선 $y = f(x)$ 는 점 Q에서 접하므로

$$f'(2) = -3 \text{에서 } -\frac{a}{4} = -3$$

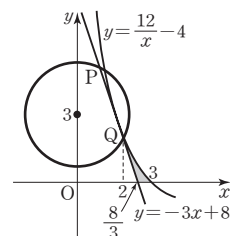
$$\therefore a = 12$$

이것을 ㉔에 대입하여 풀면

$$b = -4$$

$$\therefore f(x) = \frac{12}{x} - 4$$

한편, 직선 $y = -3x + 8$ 과 곡선 $y = \frac{12}{x} - 4$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \left(\frac{12}{x} - 4 \right) dx - \int_2^{\frac{8}{3}} (-3x + 8) dx \\ &= \left[12 \ln x - 4x \right]_2^3 - \left[-\frac{3}{2}x^2 + 8x \right]_2^{\frac{8}{3}} \\ &= (12 \ln 3 - 12 - 12 \ln 2 + 8) - \left(-\frac{32}{3} + \frac{64}{3} + 6 - 16 \right) \\ &= 12 \ln \frac{3}{2} - 4 - \frac{2}{3} \\ &= 12 \ln \frac{3}{2} - \frac{14}{3} \end{aligned}$$

답 $12 \ln \frac{3}{2} - \frac{14}{3}$

04 해결단계

① 단계	공이 레일을 따라 처음 내려온 거리를 구한다.
② 단계	공이 움직인 총 거리를 나타낸다.
③ 단계	등비급수를 이용하여 공이 움직인 총 거리를 구한다.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

공이 레일을 따라 점 $P(\ln 5, \frac{13}{5})$ 에서 점 $(0, 1)$ 까지 처음 내려온 거리를 l_1 이라 하면

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_0^{\ln 5} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 5} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 5} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 5} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_0^{\ln 5} \\ &= \frac{1}{2} \{ (e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}) - (1 - 1) \} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(5 - \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

이때, 공은 굴러 내려온 거리의 $\frac{4}{5}$ 만큼 맞은편으로 굴러 올라가므로 공이 움직인 총 거리를 l 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= l_1 + \frac{4}{5}l_1 + \frac{4}{5}l_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 l_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 l_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 l_1 + \dots \\ &= l_1 + 2 \left\{ \frac{4}{5}l_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 l_1 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 l_1 + \dots \right\} \\ &= l_1 + 2 \times \frac{\frac{4}{5}l_1}{1 - \frac{4}{5}} = 9l_1 \\ &= 9 \times \frac{12}{5} = \frac{108}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{108}{5}$

05 해결단계

① 단계	좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 속도와 가속도를 각각 t 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$t=1$ 에서 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 까지 움직인 거리가 s 임을 이용하여 두 함수 $f'(t), f''(t)$ 를 각각 구한다.
③ 단계	a 의 값을 구한 후, $60a$ 의 값을 구한다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t \geq 1$)에서의 위치 (x, y) 가 $x=2 \ln t, y=f(t)$ 이므로

시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{2}{t}, f'(t) \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

시간 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \left(-\frac{2}{t^2}, f''(t) \right)$$

$t=2$ 일 때, 점 P의 속도와 가속도는 각각 $\left(1, \frac{3}{4} \right)$,

$\left(-\frac{1}{2}, a \right)$ 이므로

$$f'(2) = \frac{3}{4}, f''(2) = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, 점 P가 점 $(0, f(1))$, 즉 $t=1$ 에서

$t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 까지 움직인 거리가 s 이므로

$$\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2} = p \text{로 놓으면 } 2p = s + \sqrt{s^2+4}$$

$$(2p-s)^2 = s^2+4, 4p^2-4ps+s^2=s^2+4$$

$$-4ps = -4p^2+4 \quad \therefore s = \frac{-4p^2+4}{-4p} = p - \frac{1}{p}$$

즉,

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}} \sqrt{\left(\frac{2}{t} \right)^2 + \{f'(t)\}^2} dt \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}} \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

에서

$$p - \frac{1}{p} = \int_1^p \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2} dt$$

위의 식의 양변을 p 에 대하여 미분하면

$$1 + \frac{1}{p^2} = \sqrt{\frac{4}{p^2} + \{f'(p)\}^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{p^2} \right)^2 = \frac{4}{p^2} + \{f'(p)\}^2$$

$$\{f'(p)\}^2 = \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^2$$

$$\therefore f'(p) = 1 - \frac{1}{p^2} \quad (\because \textcircled{2} \text{에서 } f'(2) = \frac{3}{4})$$

위의 식의 양변을 p 에 대하여 미분하면

$$f''(p) = \frac{2}{p^3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f''(2) = a \text{이므로 } a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60a = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

답 15

06 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하여 함수 $f'(x)$ 를 구한다.
② 단계	주어진 급수를 정적분으로 나타내고, 정적분을 계산하여 a 에 대한 식으로 정리한다.
③ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 급수의 최솟값을 구한다.

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)(e^t + e^{-t})}{2} dt$$

$$= x \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt - \int_0^x \frac{t(e^t + e^{-t})}{2} dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt + \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} - \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$= \int_0^x \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

$$= \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(\ln 2)^2}{n^2} + \left\{ \frac{\ln 2}{n} f' \left(\ln a + \frac{k \ln 2}{n} \right) \right\}^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\ln 2}{n} \right)^2 + \left(\frac{\ln 2}{n} \right)^2 \left\{ f' \left(\ln a + \frac{k \ln 2}{n} \right) \right\}^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left\{ f' \left(\ln a + \frac{k \ln 2}{n} \right) \right\}^2} \times \frac{\ln 2}{n}$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln a + \ln 2} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln 2a} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln 2a} \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln 2a} \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln 2a} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_{\ln a}^{\ln 2a}$$

$$= \frac{1}{2} \left(2a - \frac{1}{2a} - a + \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{4a}$$

이때, $a > 0$ 에서 $\frac{a}{2} > 0$, $\frac{1}{4a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{4a} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{2} \times \frac{1}{4a}}$$

(단, 등호는 $\frac{a}{2} = \frac{1}{4a}$ 일 때 성립한다.)

$$= 2 \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(\ln 2)^2}{n^2} + \left\{ \frac{\ln 2}{n} f' \left(\ln a + \frac{k \ln 2}{n} \right) \right\}^2}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{4a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

이것이 수능

p. 96

1 96 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ④

1 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 양변을 미분하여 함수 $f'(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(a)=32$ 임을 이용하여 a 에 대한 관계식을 세운다.
③ 단계	②단계에서 구한 식을 이용하여 곡선 $y=3e^x$ 과 두 직선 $x=a$, $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = (a-x)e^x$$

이때, $f'(x)=0$ 에서 $(a-x)e^x=0$

$$a-x=0 \quad (\because e^x > 0) \quad \therefore x=a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 오른쪽과 같

으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$

에서 극대이자 최대이고,

최댓값은 $f(a)=32$ 이다.

$$f(a) = \int_0^a (a-t)e^t dt \quad \leftarrow u(t)=a-t, v'(t)=e^t \text{으로 놓으면}$$

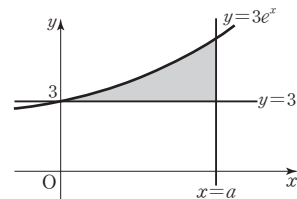
$$= \left[(a-t)e^t \right]_0^a - \int_0^a (-e^t) dt$$

$$= 0 - a - \left[-e^t \right]_0^a$$

$$= -a + e^a - 1$$

$$\text{이므로 } -a + e^a - 1 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 곡선 $y=3e^x$ 과 두 직선 $x=a$, $y=3$ 으로 둘러싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^a (3e^x - 3) dx = \left[3e^x - 3x \right]_0^a$$

$$= 3e^a - 3a - 3$$

$$= 3(e^a - a - 1)$$

$$= 3 \times 32 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 96$$

답 96

2 해결단계

① 단계	원점에서 곡선 $y=e^{4x}$ 에 그은 접선의 방정식을 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 접선과 곡선 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$$y=e^{4x} \text{에서 } y'=4e^{4x}$$

원점에서 곡선 $y=e^{4x}$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, e^{4t}) 라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=4e^{4t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{4t}=4e^{4t}(x-t)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$-e^{4t}=4e^{4t} \times (-t), \quad -1=-4t \quad (\because e^{4t}>0)$$

$$\therefore t=-\frac{1}{4}$$

즉, 원점에서 곡선 $y=e^{4x}$ 에 그은 접선의 방정식은

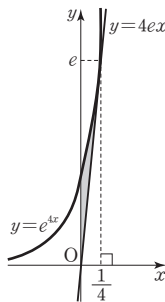
$$y-e=4e\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$\therefore y=4ex$$

이때, 원점에서 곡선 $y=e^{4x}$ 에 그은 접선 $y=4ex$ 와 곡선 $y=e^{4x}$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{4}} (e^{4x}-4ex) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}e^{4x}-2ex^2 \right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{e}{4}-\frac{e}{8}-\frac{1}{4}=\frac{e-2}{8} \end{aligned}$$



답 ⑤

3 해결단계

① 단계	점 P의 시각 t 에서의 속도를 구하고 $t=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	①단계에서 구한 속도를 이용하여 점 P의 시각 t 에서의 속도의 크기를 구한 후, 그 최솟값을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	정적분을 이용하여 점 P가 $t=\pi$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리를 구하고 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($0 \leq t \leq 2\pi$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x=t+2\cos t, \quad y=\sqrt{3}\sin t \text{이므로}$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \text{ 즉 } (1-2\sin t, \sqrt{3}\cos t) \quad \dots\dots ㉠$$

ㄱ. ㉠에 $t=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\left(1-2\sin \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 0) \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉠에서 점 P의 속도의 크기는

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} \\ &= \sqrt{(1-2\sin t)^2 + (\sqrt{3}\cos t)^2} \\ &= \sqrt{1-4\sin t+4\sin^2 t+3\cos^2 t} \\ &= \sqrt{1-4\sin t+4\sin^2 t+3(1-\sin^2 t)} \\ &= \sqrt{\sin^2 t-4\sin t+4} \\ &= \sqrt{(\sin t-2)^2} \\ &= |\sin t-2| \\ &= 2-\sin t \quad (\because -1 \leq \sin t \leq 1) \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin t \leq 1$ 이므로

$$1 \leq 2-\sin t \leq 3$$

즉, 속도의 크기의 최솟값은 1이다. (참)

ㄷ. 점 P가 $t=\pi$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} (2-\sin t) dt \quad (\because ㄴ) \\ &= \left[2t + \cos t \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 4\pi + 1 - 2\pi + 1 \\ &= 2\pi + 2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

4

해결단계

① 단계	조건 ㄴ을 이용하여 $\{f'(x)\}^2$ 을 $f(x)$ 에 대한 식으로 나타낸다.
② 단계	$x=0$ 에서 $x=2$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 길이를 정적분으로 표현한다.
③ 단계	$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 구한다.

조건 ㄴ의 $\{f(x)-f'(x)\}\{f(x)+f'(x)\}=2f(x)$ 에서

$$\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 2f(x)$$

$$\therefore \{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 2f(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$x=0$ 에서 $x=2$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 길이가 6이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1+\{f(x)\}^2-2f(x)} dx \quad (\because ㉠) \\ &= \int_0^2 \sqrt{\{f(x)-1\}^2} dx \\ &= \int_0^2 \{f(x)-1\} dx \quad (\because \text{조건 ㄱ}) \\ &= \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx - \left[x \right]_0^2 \\ &= \int_0^2 f(x) dx - 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \int_0^2 f(x) dx - 2 = 6 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 8$$

답 ④

T o m o r r o w

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo