

b l a c k l a b e l
A n s w e r

정답과 해설

1등급을 위한 명품 수학

블랙라벨
1

Speed Check

I 함수의 극한과 연속

01. 함수의 극한

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	p.9	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.10~13	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.14	이것이 수능	p.15
01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ④ 05 9 06 13 07 ③ 08 4		01 1 02 16 03 4 04 48 05 ④ 06 ④ 07 ④ 08 ③ 09 5 10 13 11 4 12 ② 13 ⑤ 14 $-\frac{1}{4}$ 15 49 16 ③ 17 2 18 2 19 ④ 20 3 21 ③ 22 10 23 35 24 $\frac{13}{3}$ 25 1 26 2 27 ② 28 2 29 $\sqrt{2}$		01 60 02 $-\frac{1}{2}$ 03 3 04 50 05 10 06 $\frac{3}{4}$ 07 54		1 ② 2 10 3 ⑤ 4 208	

02. 함수의 연속

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.17~18	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.19~23	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.24	이것이 수능	p.25
01 ② 02 ① 03 2 04 ③ 05 ④ 06 21 07 ④ 08 ② 09 ② 10 ② 11 ② 12 최댓값 : 2, 최솟값 : -2 13 ④ 14 ②		1 ① 02 $-4\sqrt{7}$ 03 36 04 3 05 ④ 06 ⑤ 07 -6 08 ④ 09 -108 10 ⑤ 11 12 12 ③ 13 ③ 14 $\frac{7}{4}$ 15 ② 16 28 17 ③ 18 ① 19 ① 20 25 21 25 22 ③ 23 19 24 26 25 ② 26 ③ 27 9 28 ① 29 ③ 30 9		01 ① 02 -72 03 $\frac{3}{2}$ 04 ③ 05 14 06 5		1 ① 2 24 3 56 4 ③	

II 미분

03. 미분계수와 도함수

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.39~40	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.41~45	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.46	이것이 수능	p.47
01 51 02 ② 03 ② 04 ⑤ 05 -13 06 $\frac{5}{2}$ 07 ④ 08 ⑤ 09 5 10 15 11 ③ 12 ③ 13 ③ 14 ④ 15 -60 16 ⑤		01 ⑤ 02 ② 03 ③ 04 ⑤ 05 ⑤ 06 $\frac{13}{5}$ 07 $\frac{1}{3}$ 08 ③ 09 ② 10 ⑤ 11 ② 12 ② 13 ③ 14 ③ 15 2 16 -2 17 90 18 550 19 ① 20 13 21 6 22 19 23 19 24 9 25 ③ 26 ① 27 16 28 $-\frac{2}{5}$ 29 ① 30 5 31 24 32 7 33 -11 34 ⑤ 35 104		01 54 02 $\frac{1}{2}$ 03 24 04 110 05 ⑤ 06 6 07 8		1 ⑤ 2 ② 3 ④ 4 5	

04. 도함수의 활용(1)

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.39~40	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.41~45	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.46	이것이 수능	p.47
01 5 02 ③ 03 ② 04 ⑤ 05 ⑤ 06 ③ 07 ⑤ 08 8 09 ② 10 ① 11 ⑤ 12 ④ 13 21 14 1 15 ③		01 45 02 $y = -3x - 1$ 03 ③ 04 $y = 2x - \frac{9}{4}$ 05 $\frac{\sqrt{30}}{3}$ 06 ④ 07 ① 08 ⑤ 09 ④ 10 ③ 11 26 12 $0 < a < 3$ 13 ③ 14 ④ 15 $-\frac{5}{4}$ 16 ② 17 $\frac{9}{4}$ 18 ④ 19 ② 20 ④ 21 ④ 22 225 23 8 24 ④ 25 10 26 $-\frac{3}{5}$ 27 ② 28 ⑤ 29 ⑤ 30 16 31 18 32 11 33 82 34 ⑤ 35 6		01 11 02 32 03 ⑤ 04 $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$ 05 18 06 36		1 97 2 ⑤ 3 147 4 ⑤	

05. 도함수의 활용(2)

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.49~50	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.51~55	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.56	이것이 수능	p.57
01 ⑤ 02 ③ 03 6 04 ③ 05 ④ 06 ③ 07 ② 08 5 09 ① 10 ④ 11 $a < 1$ 12 ① 13 ④ 14 18 15 $8\pi \text{ cm}^3/\text{s}$		01 ⑤ 02 ⑤ 03 2 04 ① 05 15 06 ② 07 ② 08 $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ 09 16 10 $-1 \leq a < 0$ 11 ③ 12 ⑤ 13 ③ 14 122 15 ⑤ 16 ③ 17 ⑤ 18 -12 19 1 20 ④ 21 ① 22 16 23 ③ 24 90 25 ⑤ 26 13 27 111 28 15 29 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 30 $150 \text{ cm}^3/\text{s}$ 31 $48 \text{ cm}^2/\text{s}$ 32 6 33 3 34 $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$		01 $\frac{5-\sqrt{2}}{4}$ 02 ⑤ 03 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 04 ① 05 ③ 06 -3 07 65 08 $384 \text{ cm}^3/\text{s}$		1 ① 2 ② 3 ② 4 ⑤	

Ⅲ 적분

06. 정적분

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	pp.61~62	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.63~67	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.68	이것이 수능	p.69
01 ⑤ 02 6 03 ③ 04 ④ 05 1 06 ⑤ 07 ⑤ 08 ① 09 20 10 70 11 ② 12 49 13 ② 14 8 15 ③ 16 ③		01 -10 02 ⑤ 03 ② 04 ① 05 ④ 06 ⑤ 07 ③ 08 ⑤ 09 $\frac{17}{3}$ 10 3 11 14 12 ⑤ 13 $\frac{3}{2}$ 14 ④ 15 19 16 167 17 5 18 ④ 19 3 20 2 21 ⑤ 22 72 23 ① 24 70 25 ③ 26 50 27 -4 28 8 29 -23 30 $\frac{17}{27}$ 31 2 32 ⑤ 33 ⑤		01 77 02 35 03 ④ 04 4 05 2 06 -16		1 ① 2 137 3 ② 4 ②	

07. 정적분의 활용

Step 1 / 우수 기술 대표 문제	p.71	Step 2 / 최고의 변별력 문제	pp.72~76	Step 3 / 종합 사고력 문제	p.77	이것이 수능	p.78
01 2 02 ② 03 ② 04 ① 05 ③ 06 ③ 07 80 m 08 4		01 6 02 80 03 40 04 2 05 $\frac{8}{3}$ 06 ④ 07 ⑤ 08 ③ 09 $\frac{9}{4}$ 10 6 11 243 12 ② 13 ④ 14 16 15 ③ 16 $\frac{64}{3}$ 17 ⑤ 18 13 19 ⑤ 20 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$ 21 16 22 16 23 85 24 ⑤ 25 ③ 26 9 27 90 m 28 ⑤ 29 ④ 30 4 31 ⑤ 32 ③		01 3 02 12 03 $\frac{3}{5}$ 04 1 05 $\frac{117}{2}$ 06 10		1 200 2 ①	

I

함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 9

01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ④ 05 9
06 13 07 ③ 08 4

01 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 7$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-3x^2 + a) \\ = -3 + a = -3$$

$$\therefore a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - bx + 2b) \\ = 1 - b + 2b \\ = b + 1 = 7$$

$$\therefore b = 6$$

$$\therefore a + b = 6$$

답 ④

02 $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ([x]^2 - a[x]) \\ = 1^2 - a \times 1 = 1 - a$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ([x]^2 - a[x]) \\ = 2^2 - a \times 2 = 4 - 2a$$

이때, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$1 - a = 4 - 2a \quad \therefore a = 3$$

답 ③

blacklabel 특강 필수 원리

$x = n + a$ (n 은 정수, $0 \leq a < 1$)일 때, $[x] = n$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$, $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$ 이다.

03 주어진 그래프에서 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

한편, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x)$ 에서 $-x = t$ 로 놓으면

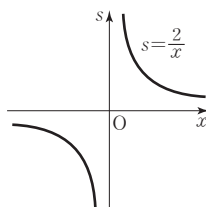
$x \rightarrow -1 +$ 일 때 $t \rightarrow 1 -$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 1$$

또한, $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{x}\right)$ 에서 $\frac{2}{x} = s$ 로

놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때

$s \rightarrow 0 +$ 이므로



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x) + \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{x}\right) \\ = -1 + 1 + 0 = 0$$

답 ②

04 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}{3x + 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(3x + 2)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 + 2x - x^2)}{(3x + 2)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(3x + 2)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(3 + \frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{3(1+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+4)(x-1)}{-(x-1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \{-(x+4)\} \\ = -5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}{3x + 2} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x - 1|} \\ = \frac{1}{3} - 5 = -\frac{14}{3}$$

답 ④

05 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x^2 - x - 6} = b$ 에서 $b \neq 0$ 이고, $x \rightarrow a$ 일 때

(분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - x - 6) = 0$ 이므로

$$a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -2$ 일 때,

$$b = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x^2 - x - 6} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-3)} \\ = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x-3} = -\frac{1}{5}$$

그런데 $b > 0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 3$ 일 때,

$$b = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x^2 - x - 6} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

(i), (ii)에서 $a = 3$, $b = \frac{6}{5}$ 이므로

$$a + 5b = 3 + 5 \times \frac{6}{5} = 9$$

답 9

06 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 일 때 (분모) $\rightarrow \infty$ 이고, 극한값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

한편, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = 4$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$f(x) = (x-1)(x-a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a)}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a}{2x+1} \\ = \frac{1-a}{3} = 4$$

$$1-a=12 \quad \therefore a=-11$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x+11)$ 이므로

$$f(2)=13$$

답 13

07 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ 이므로

부등식 $-2(x-3) < \frac{f(x)}{x-2} < \frac{6}{x+1}$ 의 각 변을

x^2+2x+4 로 나누면

$$-\frac{2(x-3)}{x^2+2x+4} < \frac{f(x)}{x^3-8} < \frac{6}{(x+1)(x^2+2x+4)}$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \left\{ -\frac{2(x-3)}{x^2+2x+4} \right\} = -\frac{2 \times (-1)}{12} = \frac{1}{6},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{6}{(x+1)(x^2+2x+4)} = \frac{6}{3 \times 12} = \frac{1}{6}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{x^3-8} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{12f(x)}{x^3-8} = 12 \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{x^3-8} \\ = 12 \times \frac{1}{6} = 2$$

답 ③

• 다른풀이 •

$$-2(x-3) < \frac{f(x)}{x-2} < \frac{6}{x+1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{-2(x-3)\} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{6}{x+1} = 2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{x-2} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{12f(x)}{x^3-8} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{12f(x)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\ = 12 \times \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x^2+2x+4} \\ = 12 \times 2 \times \frac{1}{12} = 2$$

08 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=x$ 의 그래프의 교점이 A이므로 $\sqrt{x}=x$ 에서 $x^2=x \quad \therefore x=1, y=1$ ($\because x \neq 0$)

점 A(1, 1)을 지나고 직선 $y=x$ 와 수직인 직선의 방정식은 $y-1=-(x-1)$, 즉 $y=-x+2$ 이므로 점 B의 좌표는 (2, 0)이다.

한편, P(t, t)이고 직선 $x=t$ 가 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점이 Q이므로 $Q(t, \sqrt{t})$

또한, 점 R는 y좌표가 t이면서 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$$R(-t+2, t)$$

$$\text{즉, } \overline{QP} = \sqrt{t} - t, \overline{PR} = -2t + 2 \text{이므로}$$

$$S(t) = \triangle OAQ = \triangle OPQ + \triangle APQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \{t + (1-t)\} \times (\sqrt{t} - t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t} - t)$$

$$T(t) = \triangle PBR = \frac{1}{2} \times t \times (-2t + 2) = t - t^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{T(t)}{S(t)} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{t - t^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{t} - t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(t - t^2)(\sqrt{t} + t)}{\frac{1}{2}(\sqrt{t} - t)(\sqrt{t} + t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(t - t^2)(\sqrt{t} + t)}{\frac{1}{2}(t - t^2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} 2(\sqrt{t} + t)$$

$$= 2(1+1) = 4$$

답 4

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 10~13

01 1	02 16	03 4	04 48	05 ④
06 ④	07 ④	08 ③	09 5	10 13
11 4	12 ②	13 ⑤	14 $-\frac{1}{4}$	15 49
16 ③	17 2	18 2	19 ④	20 3
21 ③	22 10	23 35	24 $\frac{13}{3}$	25 1
26 2	27 ②	28 2	29 $\sqrt{2}$	

01 (i) $-1 < x < 1$ 일 때, $\min(x, 1) = x$ 이므로

$$f(x) = x - \frac{x}{1+x} = \frac{x(1+x) - x}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\min(x, 1) = \min(1, 1) = 1$ 이므로

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(iii) $x > 1$ 일 때, $\min(x, 1) = 1$ 이므로

$$f(x) = 1 - \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-x}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2}}{x - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - (1+x)}{2(1+x)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{2(1+x)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(2x+1)}{2(1+x)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{2(1+x)} = \frac{3}{4} \\
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - (1+x)}{2(1+x)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{2(1+x)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 $\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$ 답 1

단계	채점 기준	배점
(가)	x 의 값의 범위를 나누어 $f(x)$ 를 정리한 경우	30%
(나)	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ 의 값을 구한 경우	30%
(다)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ 의 값을 구한 경우	30%
(라)	답을 구한 경우	10%

02 (i) $7 < x < 8$ 일 때,
 x 보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이
 므로 $f(x) = 4$

이때, $2f(x) = 2 \times 4 = 8 > x$ 이므로

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{4}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 8^-} g(x) = \frac{1}{4}$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{4}$

(ii) $8 < x < 9$ 일 때,
 x 보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이
 므로 $f(x) = 4$

이때, $2f(x) = 2 \times 4 = 8 < x$ 이므로

$$g(x) = f(x) = 4$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 8^+} g(x) = 4$ 이므로 $\beta = 4$

(i), (ii)에서 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$ 답 16

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

함수의 극한값을 구하는 문제는 함수의 극한값의 존재에 대한 정의를 정확하게 알아야 쉽게 해결할 수 있다. 특히, 좌극한은 그래프의 왼쪽에서 오른쪽으로, 우극한은 그래프의 오른쪽에서 왼쪽으로 다가간다는 것을 의미로 기억하는 것이 좋다.

예를 들어, 이 문제에서는 $\lim_{x \rightarrow 8^-} g(x)$ 의 경우 $x = 7.9$, $\lim_{x \rightarrow 8^+} g(x)$ 의 경우 $x = 8.1$ 을 생각하면 α, β 의 값을 쉽게 구할 수 있다.

03 $f(x) = \begin{cases} x & (-2 \leq x \leq -1) \\ -2x-1 & (-1 < x < 0) \\ \frac{1}{2}x+1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 에서

(i) $-2 \leq x \leq -1$ 일 때,

$f(x) = x$ 이므로 $f^{-1}(x) = x$ ($-2 \leq x \leq -1$)

(ii) $-1 < x < 0$ 일 때,

$y = -2x-1$ 로 놓으면

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \quad (-1 < y < 1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (-1 < x < 1)$$

(iii) $0 \leq x \leq 2$ 일 때,

$y = \frac{1}{2}x+1$ 로 놓으면

$$x = 2y-2 \quad (1 \leq y \leq 2)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 2x-2 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 2x-2 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 의 역함수는

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & (-2 \leq x \leq -1) \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & (-1 < x < 1) \\ 2x-2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

한편, $\left| \lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) \right| = 1$ 이므로

① $-2 < a < -1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} x + \lim_{x \rightarrow a^+} x = 2a$$

즉, $|2a| = 1$ 이므로 $2a = -1$ 또는 $2a = 1$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

그런데 $-2 < a < -1$ 이므로 조건을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

② $a = -1$ 일 때,

$$\left| \lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f^{-1}(x) \right|$$

$$= \left| \lim_{x \rightarrow -1^-} x + \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$= |-1+0| = 1$$

즉, $a = -1$ 이면 조건을 만족시킨다.

③ $-1 < a < 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow a^+} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -a-1$$

즉, $|-a-1| = 1$ 에서

$$-a-1 = 1 \text{ 또는 } -a-1 = -1$$

$$\therefore a = 0 \quad (\because -1 < a < 1)$$

④ $a=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) \right| \\ &= |-1 + 0| = 1 \end{aligned}$$

즉, $a=1$ 이면 조건을 만족시킨다.

⑤ $1 < a < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} (2x - 2) + \lim_{x \rightarrow a^+} (2x - 2) \\ &= 4a - 4 \end{aligned}$$

즉, $|4a - 4| = 1$ 이므로

$$4a - 4 = 1 \text{ 또는 } 4a - 4 = -1$$

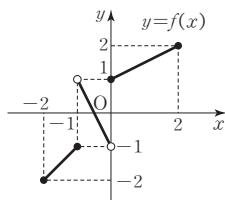
$$4a = 5 \text{ 또는 } 4a = 3$$

$$\therefore a = \frac{5}{4} \quad (\because 1 < a < 2)$$

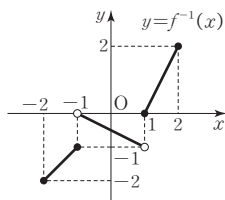
①~⑤에서 조건을 만족시키는 실수 a 는 $-1, 0, 1, \frac{5}{4}$ 의 4개이다. 답 4

• 다른풀이 •

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



$\left| \lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x) \right| = 1$ 이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x)$ 인 경우

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에서 좌극한과 우극한이 다른 경우는 $a=-1, a=1$ 일 때이다.

$a=-1$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f^{-1}(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow -1^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f^{-1}(x) \right| = 1$$

$a=1$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) \right| = 1$$

즉, $a=-1, a=1$ 이면 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f^{-1}(x)$ 인 경우

$$\left| 2 \lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) \right| = 1 \text{ 에서 } \lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}$$

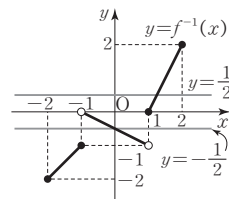
$$\therefore f^{-1}(a) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } f^{-1}(a) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와

두 직선 $y=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$ 의

교점은 오른쪽 그림과 같이

$x=0, x=\frac{5}{4}$ 일 때 존재함



로 $a=0, a=\frac{5}{4}$ 이면 $\textcircled{7}$ 을 만족시킨다.

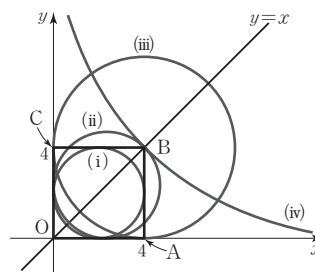
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 는 $-1, 0, 1, \frac{5}{4}$ 의 4개이다.

04 해결단계

① 단계	원 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 은 반지름의 길이가 a 이고 x 축과 y 축에 모두 접하는 원임을 파악한다.
② 단계	주어진 원이 정사각형 OABC에 내접하거나 꼭짓점을 지나는 경우의 a 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 a 의 값을 이용하여 함수 $f(a)$ 를 구한다.
④ 단계	$\lim_{a \rightarrow t^-} f(a) \neq \lim_{a \rightarrow t^+} f(a)$ 를 만족시키는 t 의 값과 개수를 각각 구하여 nt_n 의 값을 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

원 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 은 중심의 좌표가 (a, a) 로 직선 $y=x$ 위에 있고 반지름의 길이가 a 이므로 x 축과 y 축에 모두 접하는 원이다.

원이 정사각형 OABC에 내접하거나 꼭짓점을 지나는 경우는 다음 그림과 같다.



(i) 원이 정사각형 OABC에 내접하는 경우

원의 중심이 $(2, 2)$, 반지름의 길이가 2이므로 $a=2$

(ii) 원이 점 B(4, 4)를 지나면서 $0 < a < 4$ 인 경우

$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ 에 $x=4, y=4$ 를 대입하여 정리하면

$$(4-a)^2 + (4-a)^2 = a^2$$

$$2a^2 - 16a + 32 = a^2, \quad a^2 - 16a + 32 = 0$$

$$\therefore a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 32}}{1}$$

$$= 8 \pm \sqrt{32} = 8 \pm 4\sqrt{2}$$

이때, $a < 4$ 이므로 $a = 8 - 4\sqrt{2}$

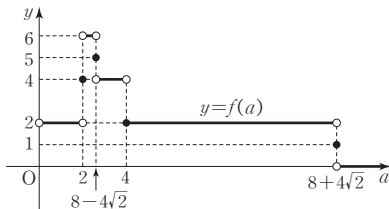
(iii) 원이 두 점 A(4, 0), C(0, 4)를 지나는 경우
원의 중심이 (4, 4), 반지름의 길이가 4이므로
 $a=4$

(iv) 원이 점 B(4, 4)를 지나면서 $a>4$ 인 경우
(ii)와 같은 방법으로 $a=8+4\sqrt{2}$

(i)~(iv)에서 원 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 이 정사각형 OABC의 둘레와 만나는 점의 개수 $f(a)$ 는

$$f(a) = \begin{cases} 2 & (0 < a < 2) \\ 4 & (a = 2) \\ 6 & (2 < a < 8-4\sqrt{2}) \\ 5 & (a = 8-4\sqrt{2}) \\ 4 & (8-4\sqrt{2} < a < 4) \\ 2 & (4 \leq a < 8+4\sqrt{2}) \\ 1 & (a = 8+4\sqrt{2}) \\ 0 & (a > 8+4\sqrt{2}) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$a>0$ 일 때, 위의 그래프에서 $\lim_{a \rightarrow t-} f(a) \neq \lim_{a \rightarrow t+} f(a)$,

즉 $a=t$ 에서의 좌극한과 우극한이 다른 t 의 값은 2,

$8-4\sqrt{2}$, 4, $8+4\sqrt{2}$ 이므로

$n=4$, $t_n=8+4\sqrt{2}$

$\therefore nt_n=4(8+4\sqrt{2})=32+16\sqrt{2}$

따라서 $p=32$, $q=16$ 이므로

$p+q=32+16=48$

답 48

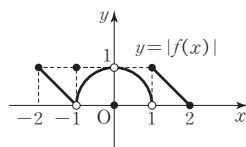
05 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(-x)$ 의 그래

프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같으므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(-x) = 0$ (참)

ㄷ. 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 $y \geq 0$ 인 부분은 남기고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서만 극한값을 갖지 않으므로 $-2 < a < k$ 인 모든 실수 a 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ 의 값이 존재하는 k 의 최댓값은 1이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

• 다른풀이 •

ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1} f(t) = 0$ (참)

06 $f(x) = \left(\frac{2x+|x|}{x}\right)^2 - (a+1) \times \frac{2x+|x|}{x}$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2x-x}{x}\right)^2 - (a+1) \times \frac{2x-x}{x} \\ &= \left(\frac{x}{x}\right)^2 - (a+1) \times \frac{x}{x} \\ &= 1 - (a+1) = -a \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-a) = -a$$

(ii) $x > 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2x+x}{x}\right)^2 - (a+1) \times \frac{2x+x}{x} \\ &= \left(\frac{3x}{x}\right)^2 - (a+1) \times \frac{3x}{x} \\ &= 9 - 3(a+1) = 6 - 3a \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (6-3a) = 6-3a$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 이어야 하므로

$$-a = 6 - 3a, 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

답 ④

07 주어진 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$$

또한, 함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대

하여 대칭이동한 것과 같으므로 오른쪽

쪽 그림에서

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(-x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\} = -1 + 1 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) - f(-x)\} = 1 - (-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) - f(-x)\} = -1 - 1 = -2$$

즉,

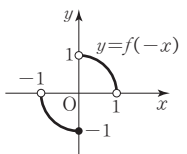
$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) - f(-x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) - f(-x)\}$$

이므로

$x=0$ 에서의 극한값은 존재하지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(-x) \{f(x) - f(-x)\}$$

$$= -1 \times \{1 - (-1)\} = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x) \{f(x) - f(-x)\} = 1 \times (-1 - 1) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(-x) \{f(x) - f(-x)\} = -2$$

따라서 $x=0$ 에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

blacklabel 특강 **참고**

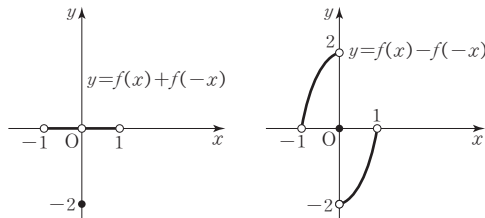
치환이나 그래프를 이용할 수도 있다.

(1) 치환: $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0^-$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$,
 $x \rightarrow 0^+$ 일 때 $t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 1$$

(2) 그래프: 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$ 의 그래프를 이용하여 두 함수 $y=f(x)+f(-x)$, $y=f(x)-f(-x)$ 의 그래프를 각각 그리면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)+f(-x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x)+f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)+f(-x)\} = 0$$

즉, (좌극한)=(우극한)이므로 $x=0$ 에서 극한값이 존재한다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)-f(-x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x)-f(-x)\} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)-f(-x)\} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \{f(x)-f(-x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \{f(x)-f(-x)\}$$

즉, (좌극한)≠(우극한)이므로 $x=0$ 에서 극한값이 존재하지 않는다.

08 자연수 n 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \frac{(n-1)^2 + 2n}{n-1} = \frac{n^2 + 1}{n-1}$$

또한, $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \frac{n^2 + 2n}{n} = \frac{n(n+2)}{n} = n+2$$

이때, $\lim_{x \rightarrow n} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]}$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{n^2 + 1}{n-1} = n+2, \quad n^2 + 1 = (n+2)(n-1) \quad (\text{단, } n \neq 1)$$

분모는 0이 아니어야 하므로

$$n^2 + 1 = n^2 + n - 2 \quad \therefore n = 3$$

답 ③

09 $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2x-4}{x-1}\right)$ 에서 $\frac{2x-4}{x-1} = t$ 로 놓으면

$$t = \frac{2(x-1)-2}{x-1} = 2 - \frac{2}{x-1}$$

함수 $t = 2 - \frac{2}{x-1}$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같으므로

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 2^-$

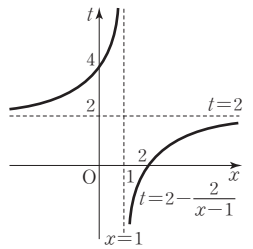
$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2x-4}{x-1}\right) = \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = 3$$

또한, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(g(x))$ 에서 $g(x)=s$ 로 놓으면

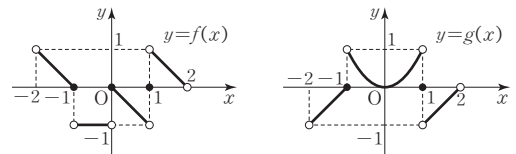
$x \rightarrow 2^+$ 일 때 $s \rightarrow 1^+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{2x-4}{x-1}\right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(g(x)) = 3 + 2 = 5 \quad \text{답 5}$$



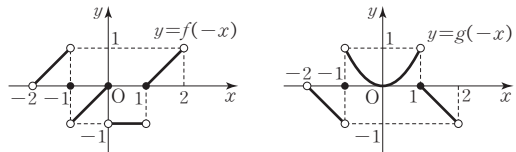
10 $-2 < x < 2$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

또한, 함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로

$-2 < x < 2$ 에서 두 함수 $y=f(-x)$, $y=g(-x)$ 의 그래프는 다음 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

(i) $a = -1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(-x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x)g(-x) = -1 \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(g(x)) \text{에서 } g(x)=t \text{로 놓으면}$$

$x \rightarrow -1^-$ 일 때 $t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1^+} f(-x)g(-x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(g(x))$$

(ii) $a = 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(-x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x)g(-x) = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) \text{에서 } g(x)=t \text{로 놓으면}$$

$x \rightarrow 0^-$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x)g(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x))$$

(iii) $a = 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)=0, \lim_{x \rightarrow 1+} g(-x)=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)g(-x)=0 \times 0=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) \text{에서 } g(x)=t \text{로 놓으면}$$

$$x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x))=\lim_{t \rightarrow 1-} f(t)=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x)g(-x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x))$$

(i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < 2$ 일 때 조건을 만족시키는 a 의 값은 $-1, 0$ 이다.

이때, 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 모두 3이므로

$-10 < a < 10$ 일 때 조건을 만족시키는 a 는

$-9, -7, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9$

의 13개이다.

답 13

blacklabel 특강 풀이첨삭

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 모두 3이고 $a=-1$ 일 때 주어진 등식이 성립하므로 -1 에 3의 배수를 더하거나 뺀 수가 a 일 때에도 주어진 등식은 성립한다. 즉, $-10 < a < 10$ 에서 주어진 등식이 성립하는 경우는

$$a=-1+3=2, a=-1+6=5, a=-1+9=8,$$

$$a=-1-3=-4, a=-1-6=-7$$

같은 방법으로 $a=0$ 일 때 주어진 등식이 성립하므로 $-10 < a < 10$ 에서 주어진 등식이 성립하는 경우는

$$a=0+3=3, a=0+6=6, a=0+9=9,$$

$$a=0-3=-3, a=0-6=-6, a=0-9=-9$$

따라서 주어진 등식이 성립하는 a 는

$$-9, -7, -6, -4, -3, -1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9$$

의 13개이다.

$$11 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-2g(x)\}=a \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2g(x)}{f(x)}=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{1-2 \times \frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+2g(x)+1}{2f(x)-3g(x)-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2 \times \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)}}{2-3 \times \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{2}{f(x)}}$$

$$= \frac{1+2 \times \frac{1}{2} + 0}{2-3 \times \frac{1}{2} - 0}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

답 4

• 다른풀이 •

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x)-2g(x)\}=a \text{에서 } h(x)=f(x)-2g(x) \text{라}$$

$$\text{하면 } g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2} \text{이고 } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)=a \text{이다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+2g(x)+1}{2f(x)-3g(x)-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+f(x)-h(x)+1}{2f(x)-\frac{3}{2}f(x)+\frac{3}{2}h(x)-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)-h(x)+1}{\frac{1}{2}f(x)+\frac{3}{2}h(x)-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{h(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \times \frac{h(x)}{f(x)}-\frac{2}{f(x)}}$$

$$= \frac{2-0+0}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \times 0-0}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$12 \quad \neg. (\text{반례}) f(x)=0, g(x)=[x] \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} 0=0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} 0=0 \text{으}$$

로 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$ 의 값이 각각 존재한다.

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} [x]=-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} [x]=0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{의 값은}$$

존재하지 않는다. (거짓)

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} g(x)=a, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}=\beta \quad (a, \beta \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\lim_{x \rightarrow a} \left\{g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= a\beta \text{ (참)}$$

$$\neg. (\text{반례}) f(x)=[x], g(x)=x, a \text{는 정수라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)=\lim_{x \rightarrow a} x=a \text{로 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{의 값이 존재한다.}$$

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow a} f(g(x))=\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\lim_{x \rightarrow a} [x] \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \text{의 값은 존재하지 않는다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

blacklabel 특강 참고

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \text{의 값이 각각 존재하고}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{의 값이 존재한다.}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} g(x)=a \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{의 값이 존재할 때,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \text{의 값이 존재한다.}$$

$$13 \quad \text{조건 (가)에서 } x+f(x)=xg(x)-f(x)g(x) \text{이므로}$$

$$f(x)\{1+g(x)\}=x\{g(x)-1\}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)-1}{1+g(x)} \quad (\text{단, } x \neq 0, g(x) \neq -1)$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{1+g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)-1}{1+\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}$$

$$= \frac{3-1}{1+3} \quad (\because (\text{나}) \lim_{x \rightarrow 0} g(x)=3)$$

$$= \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ x \times \frac{f(x)}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{의 값이 각각 존재하므로} \right) \\ &= 0 \times \frac{1}{2} (\because \neg) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{\frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{0 + \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}} (\because \neg) \\ &= -1 \end{aligned}$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ⑤**

14 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$
 이때, $4x^2 + x = [4x^2 + x] + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면
 $[4x^2 + x] = 4x^2 + x - \alpha = 4t^2 - t - \alpha$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{[4x^2 + x]})$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 - t - \alpha} - 2t)$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 - t - \alpha} - 2t)(\sqrt{4t^2 - t - \alpha} + 2t)}{\sqrt{4t^2 - t - \alpha} + 2t}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t - \alpha}{\sqrt{4t^2 - t - \alpha} + 2t}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{\alpha}{t}}{\sqrt{4 - \frac{1}{t} - \frac{\alpha}{t^2}} + 2}$
 $= \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} = -\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

15 다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 몫이 $g(x)$ 이므로 나머지를 a (a 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x-3)g(x) + a$
 이것을 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3x}{x-3} = 4$ 에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) + a - 3x}{x-3} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{(x-3)g(x) + a - 3x\} = 0$ 이므로
 $a - 9 = 0 \quad \therefore a = 9$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) + 9 - 3x}{x-3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) - 3(x-3)}{x-3}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)\{g(x)-3\}}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)-3\} = 4 \\ \therefore g(3) &= 7 \\ \text{또한, } f(x) &= (x-3)g(x) + 9 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-9}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)g(x) \times g(x)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)\}^2 \\ &= \{g(3)\}^2 = 49 \end{aligned}$$

답 49

16 $f(x) = \begin{cases} x-1 & ([x]=0) \\ \left[\frac{1}{[x]}\right] - x & ([x] \neq 0) \end{cases}$ 이므로

(i) $[x]=1$, 즉 $1 \leq x < 2$ 일 때,

$$f(x) = \left[\frac{1}{[x]}\right] - x = [1] - x = -x + 1$$

(ii) $[x]=p$ (p 는 2 이상의 자연수), 즉 $x \geq 2$ 일 때,

$$f(x) = \left[\frac{1}{[x]}\right] - x = \left[\frac{1}{p}\right] - x = -x$$

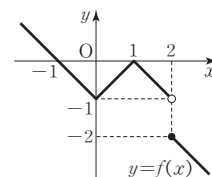
(iii) $[x]=-q$ (q 는 자연수), 즉 $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \left[\frac{1}{[x]}\right] - x = \left[\frac{1}{-q}\right] - x = -x - 1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & (x < 0) \\ x-1 & (0 \leq x < 1) \\ -x+1 & (1 \leq x < 2) \\ -x & (x \geq 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=0$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 $\lim_{x \rightarrow n} f(x)$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 정수 n 은 2의 1개이다. (거짓)

ㄷ. $x < 0$ 에서 $f(x) = -x - 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{x+1} = -1 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

blacklabel 특강 해결실마리

$$[x]=1 \text{이면 } \frac{1}{[x]}=1 \text{ 이므로 } \left[\frac{1}{[x]}\right]=1$$

$$[x]=2, 3, 4, \dots \text{이면 } 0 < \frac{1}{[x]} < 1 \text{ 이므로 } \left[\frac{1}{[x]}\right]=0$$

$$[x]=-1, -2, -3, \dots \text{ 이면 } -1 \leq \frac{1}{[x]} < 0 \text{ 이므로 } \left[\frac{1}{[x]}\right]=-1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 식을 정리할 때는 두 자연수 p, q 에 대하여

$$[x]=1, [x]=p \ (p \geq 2), [x]=-q \ (q \geq 1)$$

일 때로 나누어 생각해야 한다.

17 $f^{-1}(2x)=y$ 라 하면 $f(y)=2x$ 이므로

$$y^3+y^2+y=2x$$

$$\therefore x = \frac{y^3+y^2+y}{2}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 $y \rightarrow f^{-1}(0)$, 즉 $x \rightarrow 0$ 일 때 $y \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(2x)}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{y^3+y^2+y}{2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{y^3+y^2+y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{y(y^2+y+1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{y^2+y+1} = 2 \end{aligned}$$

답 2

18 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} = b$ 에서

(i) $a > 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-(x^2-a^2)-(a^2-16)}{x^2-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-x^2+16}{x^2-16} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{-(x^2-a^2)-(a^2-16)}{x^2-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{-x^2+16}{x^2-16} = -1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= -1 \end{aligned}$$

(ii) $a = 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{|x^2-16|}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-(x^2-16)}{x^2-16} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{|x^2-16|}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{x^2-16}{x^2-16} = 1 \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &\text{의 값은 존재하지 않는다.} \end{aligned}$$

(iii) $a < 4$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{(x^2-a^2)+(a^2-16)}{x^2-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{x^2-16}{x^2-16} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x^2-a^2)+(a^2-16)}{x^2-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{x^2-16}{x^2-16} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2-a^2|-|a^2-16|}{x^2-16} = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 식의 극한값이 자연수이려면

$$a < 4, b = 1$$

따라서 두 자연수 a, b 에 대하여 $a=3, b=1$ 일 때

$a-b$ 의 값은 최대이고 최댓값은 2이다.

답 2

19 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = 1 \neq \frac{3}{5}$ 이므로
모순이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{이므로 } f(a) = 0$$

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$$

이때, $\alpha = \beta$ 이면 $f(x) = (x-\alpha)^2$ 이고 $a = \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2-(x-a)}{(x-a)^2+(x-a)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a-1}{x-a+1} \\ &= -1 \neq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

즉, $\alpha \neq \beta$ 이다.

$a = \alpha$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-\beta)-(x-a)}{(x-a)(x-\beta)+(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1} \\ &= \frac{(a-\beta)-1}{(a-\beta)+1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

즉, $5(a-\beta)-5=3(a-\beta)+3$ 이므로

$$2(a-\beta)=8 \quad \therefore |a-\beta|=4$$

답 ④

20 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+a^2x-3a}{3x^2+a^2x-4a}$ 의 값이 존재하지 않으려면 $x \rightarrow 1$ 일

때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 (분자) $\rightarrow a$ ($a \neq 0$)이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2+a^2x-4a) = 0 \text{에서}$$

$$a^2-4a+3=0, (a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+a^2x-3a) \neq 0 \text{에서}$$

$$a^2-3a+2 \neq 0, (a-1)(a-2) \neq 0$$

$$\therefore a \neq 1 \text{이고 } a \neq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②을 동시에 만족시켜야 하므로 $a=3$

답 3

21 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2}$ 의 값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x-2) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} \text{의 값이 존재하므로 같은 방법으로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{에서 } f(3) = 0$$

따라서 다항식 $f(x)$ 는 $x, x-3$ 을 인수로 가지므로
 $f(x)=x(x-3)Q(x)$ (단, $Q(x)$ 는 다항식)
 라 할 수 있다.

한편, 다항식 $f(x)$ 의 최고차항을

ax^n (단, $a \neq 0, n$ 는 자연수)

이라 하면 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x)-3x^2}{f(x)+x^3}=3$ 에서 $n \geq 3$ 이다.

(i) $n=3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x)-3x^2}{f(x)+x^3} = \frac{4a}{a+1} = 3$$

$$4a=3a+3 \quad \therefore a=3$$

$\therefore f(x)=3x(x-3)(x-p)$ (단, p 는 상수)

(ii) $n > 3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x)-3x^2}{f(x)+x^3} = \frac{4a}{a} = 4 \neq 3$$

(i), (ii)에서

$f(x)=3x(x-3)(x-p)$ (단, p 는 상수)

따라서 다항식 $f(x)$ 로 가능한 것은

③ $f(x)=3x(x-3)^2$ 이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 22 \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{m\{f(x)\}^2 + n\{g(x)\}^2}{\{f(x)-2g(x)\}(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m\left\{\frac{f(x)}{x-a}\right\}^2 + n\left\{\frac{g(x)}{x-a}\right\}^2}{\frac{f(x)}{x-a} - 2 \times \frac{g(x)}{x-a}} = 8 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

이때, ①에서 극한값이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 2$,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = 1$ 에 의하여 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} \left[m\left\{\frac{f(x)}{x-a}\right\}^2 + n\left\{\frac{g(x)}{x-a}\right\}^2 \right] = 0$ 이므로

$$m \times \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} \right]^2 + n \times \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} \right]^2 = 0$$

$$4m + n = 0 \quad \therefore n = -4m \quad \dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{m\left\{\frac{f(x)}{x-a}\right\}^2 + n\left\{\frac{g(x)}{x-a}\right\}^2}{\frac{f(x)}{x-a} - 2 \times \frac{g(x)}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m\left\{\frac{f(x)}{x-a}\right\}^2 - 4m\left\{\frac{g(x)}{x-a}\right\}^2}{\frac{f(x)}{x-a} - 2 \times \frac{g(x)}{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{m\left\{\frac{f(x)}{x-a} - 2 \times \frac{g(x)}{x-a}\right\} \left\{\frac{f(x)}{x-a} + 2 \times \frac{g(x)}{x-a}\right\}}{\frac{f(x)}{x-a} - 2 \times \frac{g(x)}{x-a}} \\ &= m \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{x-a} + 2 \times \frac{g(x)}{x-a} \right\} \\ &= m \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} + 2m \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} \\ &= 4m = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore m=2, n=-8 \quad (\because ②)$$

$$\therefore m-n=2-(-8)=10$$

답 10

23 이차식 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^2}{x^2+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 0$ 을 만족시키므로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$ 의 값이 존재한다.

이때, $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$f(x) = a(x-1)(x-b)$ (단, $a \neq 0, b$ 는 상수)

라 할 수 있다.

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지가 3이므로

$$f(2) = a(2-b) = 3$$

$$\therefore 2a - ab = 3 \quad \dots\dots ①$$

또한, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^2}{x^2+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x-1)(x-b)-2x^2}{x^2+1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x-b)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)-2}{1+\frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-b)}{x+1}$$

$$= a - 2 + \frac{a(1-b)}{2} = 0$$

즉, $2a - 4 + a - ab = 0$ 이므로

$$3a - ab = 4 \quad \dots\dots ②$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x+1)$ 이므로

$$f(6) = 5 \times 7 = 35$$

답 35

$$\begin{aligned} 24 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-x^n - \sqrt{a^2-x^4}}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-x^n - \sqrt{a^2-x^4})(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})}{x^4(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - 2ax^n + x^{2n} - (a^2 - x^4)}{x^4(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n} + x^4 - 2ax^n}{x^4(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

(i) $n < 4$ 일 때,

①에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n} + x^4 - 2ax^n}{x^4(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n + x^{4-n} - 2a}{x^{4-n}(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})}$$

분모, 분자를 각각 x^n 으로 나눈다.

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$, (분자) $\rightarrow -2a$ 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

(ii) $n=4$ 일 때,

①에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n} + x^4 - 2ax^n}{x^4(a-x^n + \sqrt{a^2-x^4})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8 + x^4 - 2ax^4}{x^4(a - x^4 + \sqrt{a^2 - x^4})} \quad \left(\begin{array}{l} \text{분모 분자를 각각 } x^4 \text{으로} \\ \text{나눈다.} \end{array} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1 - 2a}{a - x^4 + \sqrt{a^2 - x^4}} \\
 &= \frac{1 - 2a}{2a} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$2a = 2 - 4a, 6a = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a + n = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}$$

(iii) $n > 4$ 일 때,

㉠에서

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n} + x^4 - 2ax^n}{x^4(a - x^n + \sqrt{a^2 - x^4})} \quad \left(\begin{array}{l} \text{분모 분자를 각각 } x^4 \text{으로} \\ \text{나눈다.} \end{array} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n-4} + 1 - 2ax^{n-4}}{a - x^n + \sqrt{a^2 - x^4}} \\
 &= \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

n 은 자연수이므로 $n = 5$ 일 때 $a + n$ 이 최소이고 최소값은 $a + n = 1 + 5 = 6$

(i), (ii), (iii)에서 $a + n$ 의 최솟값은 $\frac{13}{3}$ 이다. 답 $\frac{13}{3}$

25 정사각형 ABCD의 꼭짓점 B는 직선 $x = a$ 와 x 축의 교점이므로 $B(a, 0)$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 $l(a)$ 이므로

$$\overline{AB} = l(a) \quad \therefore A(a - l(a), 0)$$

꼭짓점 D는 곡선 $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$ 위의 점 중 x 좌표가 $a - l(a)$

인 점이므로 $D\left(a - l(a), \sqrt{\frac{a - l(a)}{a}}\right)$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 $l(a)$ 이므로

$$\overline{AD} = l(a) \quad \therefore l(a) = \sqrt{\frac{a - l(a)}{a}}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\{l(a)\}^2 = \frac{a - l(a)}{a}$$

$$a\{l(a)\}^2 + l(a) - a = 0$$

$$\therefore l(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2a} \quad (\because l(a) > 0)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} l(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2a} \\
 &= \frac{\sqrt{4}}{2} = 1
 \end{aligned}$$

답 1

26 직선 l 의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 점 $A(-2, 0)$ 을 지나므로 방정식은

$$y - 0 = m(x + 2) \quad \therefore l: y = mx + 2m$$

점 P는 직선 l 이 y 축과 만나는 점이므로 $P(0, 2m)$

$$\therefore \overline{OP} = 2m$$

직선 CQ와 직선 l 이 수직이므로 직선 CQ는 기울기가

$-\frac{1}{m}$ 이고 점 $C(r, 0)$ 을 지난다.

즉, 직선 CQ의 방정식은

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x - r) \quad \therefore y = -\frac{1}{m}x + \frac{r}{m}$$

이 직선이 y 축과 만나는 점이 R이므로 $R\left(0, \frac{r}{m}\right)$

$$\therefore \overline{OR} = \frac{r}{m}$$

한편, 직선 l 은 원 C 의 접선이므로 직선 $y = mx + 2m$, 즉 $mx - y + 2m = 0$ 과 중심 $C(r, 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이인 r 와 같다. 즉,

$$\frac{|mr + 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r, \quad |mr + 2m| = r\sqrt{m^2 + 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$r^2 m^2 + 4rm^2 + 4m^2 = r^2 m^2 + r^2$$

$$4m^2(r + 1) = r^2 \quad \therefore m^2 = \frac{r^2}{4(r + 1)} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{r}{m}}{2m} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2m^2}$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2 \times \frac{r^2}{4(r + 1)}} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2r(r + 1)}{r^2}$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} 2\left(1 + \frac{1}{r}\right) = 2$$

답 2

• 다른풀이 •

$\angle QAC = \theta$ 라 하면

$\triangle AQC$ 에서 $\overline{AC} = 2 + r$, $\overline{QC} = r$ 이므로

$$\overline{AQ} = \sqrt{(2 + r)^2 - r^2} = \sqrt{4r + 4}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{QC}}{\overline{AQ}} = \frac{r}{\sqrt{4r + 4}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\triangle PAO$ 에서 $\overline{OA} = 2$ 이므로

$$\overline{OP} = \overline{OA} \tan \theta = \frac{2r}{\sqrt{4r + 4}} \quad (\because \textcircled{8})$$

$\triangle ROC$ 에서 $\angle RCO = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\overline{OC} = r$ 이므로

$$\overline{OR} = \overline{OC} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{r}{\tan \theta} = \sqrt{4r + 4} \quad (\because \textcircled{8})$$

$$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4r + 4}}{\frac{2r}{\sqrt{4r + 4}}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4r + 4}{2r} = 2$$

27 점 P의 좌표가 (t, t^2) 이고, $\triangle POQ$ 가 $\overline{PO} = \overline{PQ}$ 인 이등변삼각형이므로 점 Q의 좌표는 $(2t, 0)$

즉, 삼각형 POQ의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2t \times t^2 = t^3$$

$\triangle PRO$ 가 $\overline{RO} = \overline{RP}$ 인 이등변삼각형이므로 선분 OP의 수직이등분선이 y 축과 만나는 점이 R이다.

선분 OP의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$

직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t}=t$ 이므로 직선 MR의 기울기는

$$-\frac{1}{t}$$

즉, 직선 MR의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right) \quad \therefore y = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore R\left(0, \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

따라서 삼각형 PRO의 넓이 $T(t)$ 는

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times t = \frac{1}{4}(t^3 + t)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - S(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4}(t^3 + t) - t^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ②

• 다른풀이 •

$R(0, a)$ (a 는 상수)라 하면 삼각형 PRO에서 $\overline{RO} = \overline{RP}$ 이므로

$$\overline{RO}^2 = \overline{RP}^2$$

$$a^2 = t^2 + (t^2 - a)^2$$

$$a^2 = t^2 + t^4 - 2at^2 + a^2$$

$$2at^2 = t^4 + t^2, \quad 2a = t^2 + 1 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$$

$$\therefore R\left(0, \frac{1}{2}(t^2 + 1)\right)$$

28 주어진 도형을 점 O가 원점, 선분 OA가 x 축, 선분 OB가 y 축 위에 있도록 좌표평면에 놓으면 호 AB는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 일부이다.

$$\overline{OQ} = t \text{에서 } \overline{QA} = 1 - t$$

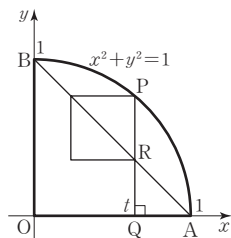
또한, $Q(t, 0)$ 이므로 점 P의 x 좌표가 t 이고,

$$t^2 + y^2 = 1, \quad y^2 = 1 - t^2$$

$$\therefore y = \pm \sqrt{1 - t^2}$$

이때, 점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$$y = \sqrt{1 - t^2} \quad \therefore P(t, \sqrt{1 - t^2})$$



정사각형의 대각선이 선분 AB 위에 있으려면 정사각형의 각 변이 x 축 또는 y 축에 평행해야 하고, 직선 AB의 방정식이 $y = -x + 1$ 이므로 선분 PQ와 선분 AB가 만나는 점을 R라 하면

$$R(t, 1 - t)$$

즉, $\overline{PR} = \sqrt{1 - t^2} - (1 - t)$ 이므로

$$f(t) = \overline{PR}^2$$

$$= \{\sqrt{1 - t^2} - (1 - t)\}^2$$

$$= 1 - t^2 - 2(1 - t)\sqrt{1 - t^2} + 1 - 2t + t^2$$

$$= 2 - 2t - 2(1 - t)\sqrt{1 - t^2}$$

$$= 2(1 - t)(1 - \sqrt{1 - t^2})$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{f(t)}{\overline{QA}} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{2(1 - t)(1 - \sqrt{1 - t^2})}{1 - t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1-} 2(1 - \sqrt{1 - t^2})$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

답 2

• 다른풀이 •

$$\overline{OQ} = t \text{이므로 } \overline{QA} = 1 - t$$

선분 AB와 선분 PQ가 만나는 점을 R라 하면 $\triangle ARQ$ 가 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{RQ} = \overline{QA} = 1 - t$$

$\overline{PR} = a$ 라 하고 선분 OP를 그으면

$\triangle OQP$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$$

$$1 = t^2 + (a + 1 - t)^2$$

$$1 = t^2 + a^2 + 1 + t^2 + 2a - 2t - 2at$$

$$a^2 + 2(1 - t)a + 2t^2 - 2t = 0$$

$$\therefore a = \frac{-(1 - t) \pm \sqrt{(1 - t)^2 - (2t^2 - 2t)}}{1}$$

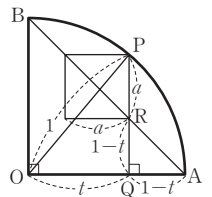
$$= -(1 - t) \pm \sqrt{1 - t^2}$$

그런데 $0 < t < 1$, $a > 0$ 이므로

$$a = -(1 - t) + \sqrt{1 - t^2}$$

$$\therefore f(t) = a^2 = \{\sqrt{1 - t^2} - (1 - t)\}^2$$

$$= 2(1 - t)(1 - \sqrt{1 - t^2})$$



29 반지름의 길이가 2이고, $\overline{AB} = 4$ 이므로 선분 AB는 지름이고 이 원의 중심을 지난다.

원의 중심을 O, $\angle ABC = \theta$ 라 하면 한 원에서 한 호에 대한 중심각의 크기는 그 호에 대한 원주각의 크기의 2배이므로

$$\angle AOC = 2\theta$$

선분 OD를 그으면 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로

$$\angle AOD = \angle DOC = \theta$$

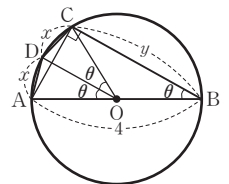
$\triangle ABC$ 는 $\angle ACB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle OAD$ 에서 $\overline{AD} = x$, $\overline{OA} = \overline{OD} = 2$ 이므로 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 2^2 - x^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{8 - x^2}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이므로



$$\begin{aligned} \frac{y}{4} &= \frac{8-x^2}{8} \quad \therefore y = \frac{8-x^2}{2} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{y-3}{\sqrt{2}-x} &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{\frac{8-x^2}{2}-3}{\sqrt{2}-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2-x^2}{2(\sqrt{2}-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{2(\sqrt{2}-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{\sqrt{2}+x}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $\sqrt{2}$

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 14

01 60 02 $-\frac{1}{2}$ 03 3 04 50 05 10
06 $\frac{3}{4}$ 07 54

01 해결단계

① 단계	조건 ㉞를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 미정계수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$\alpha\beta=0$ 임을 이용하여 경우를 나누고, $f(2)=8$ 임을 이용하여 각 경우에 따라 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	조건 ㉞의 의미를 파악하여 함수 $f(x)$ 를 구한 후, $f(3)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

같은 방법으로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \beta$ 에서 $f(1) = 0$

즉, $f(x) = x(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 할 수 있다.

이때, $\alpha\beta=0$ 이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\alpha=0, \beta \neq 0$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x^2+ax+b)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x^2+ax+b)$

$= -b = 0$

즉, $b=0$ 이므로

$f(x) = x(x-1)(x^2+ax)$
 $= x^2(x-1)(x+a)$

이때, $f(2)=8$ 이므로 $4 \times 1 \times (2+a) = 8$

$2+a=2 \quad \therefore a=0$

$\therefore f(x) = x^3(x-1)$

(ii) $\alpha \neq 0, \beta=0$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x^2+ax+b)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x^2+ax+b)$
 $= 1+a+b=0$

즉, $b = -a-1$ 이므로

$f(x) = x(x-1)(x^2+ax-a-1)$
 $= x(x-1)^2(x+a+1)$

이때, $f(2)=8$ 이므로 $2 \times 1^2 \times (3+a) = 8$

$3+a=4 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x) = x(x-1)^2(x+2)$

(iii) $\alpha=0, \beta=0$ 인 경우

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$ 이므로 (i), (ii)에서

$b=0, a = -b-1 = -1$

$\therefore f(x) = x(x-1)(x^2-x) = x^2(x-1)^2$

그런데 $f(2)=8$ 이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$f(x) = x^3(x-1)$ 또는 $f(x) = x(x-1)^2(x+2)$

이때, 조건 ㉞에서 0과 1이 아닌 어떤 실수 p 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{f(x)}$ 의 값이 존재하지 않으므로 0과 1이 아닌 어떤 실수 p 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(x) = x(x-1)^2(x+2)$ 이므로

$f(3) = 3 \times 2^2 \times 5 = 60$

답 60

02 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	직선 $y=g(x)$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 접하거나 x 축에 대하여 대칭이동하여 생기는 뾰족한 점을 지나는 경우에 대하여 t 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 t 의 값을 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구한다.
④ 단계	$\lim_{t \rightarrow k+} h(t) > h(k)$ 를 만족시키는 k 의 값을 모두 구한 후, 그 합을 구한다.

$f(x) = \left| \frac{5-2x}{x-2} \right| = \left| \frac{-2(x-2)+1}{x-2} \right|$

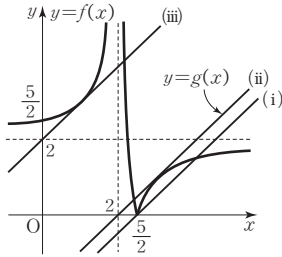
$= \left| \frac{1}{x-2} - 2 \right|$

이때, 함수 $y = \frac{1}{x-2} - 2$ 의 그래프의 두 점근선의 방정

식은 $x=2, y=-2$ 이고, 함수 $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} - 2 \right|$ 의 그

래프는 함수 $y = \frac{1}{x-2} - 2$ 의 그래프를 $y \geq 0$ 인 부분은 그

대로 남기고 $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=g(x)$ 가 점 $(\frac{5}{2}, 0)$ 을 지나는 경우

$$y=x+t \text{에서 } 0=\frac{5}{2}+t \quad \therefore t=-\frac{5}{2}$$

(ii) 직선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 $x>\frac{5}{2}$ 에서 접하는 경우

$$x>\frac{5}{2} \text{에서 } f(x)=\frac{2x-5}{x-2} \text{이므로}$$

$$\frac{2x-5}{x-2}=x+t, \quad 2x-5=x^2+(t-2)x-2t$$

$$\therefore x^2+(t-4)x-2t+5=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=(t-4)^2-4(-2t+5)=0$$

$$t^2-4=0, \quad (t-2)(t+2)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=-2$$

그런데 직선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 $x>\frac{5}{2}$ 에서 접하려면 직선 $y=g(t)$ 의 y 절편인 t 가 음수이어야 하므로

$$t=-2$$

(iii) 직선 $y=g(x)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 $x<2$ 에서 접하는 경우

$$x<2 \text{에서 } f(x)=\frac{2x-5}{x-2} \text{이고, 직선 } y=g(x) \text{가 곡}$$

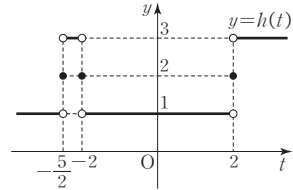
선 $y=f(x)$ 와 $x<2$ 에서 접하려면 y 절편인 t 가 양수이어야 한다.

$$\text{즉, (ii)에서 } t=2$$

(i), (ii), (iii)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 교점의 개수 $h(t)$ 는

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-\frac{5}{2}) \\ 2 & (t=-\frac{5}{2}) \\ 3 & (-\frac{5}{2}<t<-2) \\ 2 & (t=-2) \\ 1 & (-2<t<2) \\ 2 & (t=2) \\ 3 & (t>2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\lim_{t \rightarrow k+} h(t) > h(k)$ 를 만족시키는 k 의 값은

$-\frac{5}{2}, 2$ 이므로 그 합은

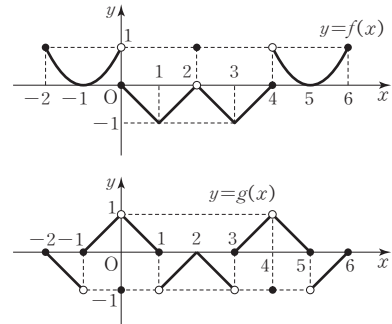
$$-\frac{5}{2}+2=-\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

03 해결단계

① 단계	두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 주기와 대칭성을 파악한다.
② 단계	정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$ 이므로 등식의 성립여부를 따져 보아야 할 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 임을 파악한다.
③ 단계	$\lim_{x \rightarrow a+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a-} g(f(x))$ 를 만족시키는 a 의 값을 모두 구한 후, 개수를 구한다.

$f(2-x)=f(2+x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, $g(x-2)=g(x+2)$ 에서 $g(x)=g(x+4)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 주기가 4인 함수이다.

즉, $-2 \leq x \leq 6$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 두 함수의 정의역이 모두 $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a-} g(f(x))$$

의 성립 여부를 따져 보아야 할 정수 a 의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 이다.

(i) $a=-1$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x))$$

(ii) $a=0$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $s \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1-} g(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$$

(iii) $a=1$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 0$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1+} g(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

(iv) $a=2$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 1$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0-} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x))$$

(v) $a=3$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3-$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1+} g(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3-} g(f(x))$$

(vi) $a=4$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 4+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 4-$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0-} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 4-} g(f(x))$$

(vii) $a=5$ 일 때,

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 5+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 5+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 0$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 5-$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 5-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 5-} g(f(x))$$

(i)~(vii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

blacklabel 특강 참고

$a=2, 3, 4, 5$ 일 때, 그래프를 확장하지 않고 $f(2-x)=f(2+x)$, $g(x-2)=g(x+2)$ 를 이용하여 구할 수도 있다.

예 $a=4$ 일 때,

$g(x-2)=g(x+2)$ 에서 $g(x)=g(x+4)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$f(2-x)=f(2+x)$ 에서 $f(x)=f(4-x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0-} g(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 4-} g(f(x))$$

04 해결단계

① 단계	주어진 극한값이 존재하도록 하는 a, b 의 조건을 파악한다.
② 단계	①단계의 조건에 따라 경우를 나누고 b, c 가 자연수임을 이용하여 b^2+c^2 의 값을 구한다.
③ 단계	b^2+c^2 의 최댓값과 최솟값을 구한 후, 그 합을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2-2x-4}{(x-a)(x-b)} = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 $x \rightarrow 2$ 일 때의 극한값이 존재해야 하므로 $a=2$ 또는 $b=2$ 일 때에 대하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a=2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} c^2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2-2x-4}{(x-a)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-2x-4}{(x-2)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^2-x-2)}{(x-2)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)}{x-b} \end{aligned}$$

이때, 극한값이 존재하려면 $b \neq 2$ 이어야 하고,

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2(x+1) = 6 \text{이므로 } c \text{가 자연수이려면}$$

$$2-b=6, c^2=1 \quad \therefore b=-4, c=1$$

그런데 b 가 자연수라는 조건에 모순이다.

(ii) $b=2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} c^2 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2-2x-4}{(x-a)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2-2x-4}{(x-a)(x-2)} \end{aligned}$$

이때, 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2-2x-4) = 0 \text{에서}$$

$$4a-8=0 \quad \therefore a=2$$

$a=2, b=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$c^2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-2x-4}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)}{x-2}$$

이므로 극한값이 존재한다는 조건에 모순이다.

(iii) $a \neq 2, b \neq 2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2-2x-4}{(x-a)(x-b)} &= \frac{4a-8}{(2-a)(2-b)} \\ &= \frac{-4(2-a)}{(2-a)(2-b)} \\ &= \frac{-4}{2-b} = c^2 \end{aligned}$$

이때, c 가 자연수이려면

$$2-b=-4, c^2=1 \text{ 또는 } 2-b=-1, c^2=4$$

즉, $b=6, c=1$ 또는 $b=3, c=2$ 이므로

$$b^2+c^2=36+1=37 \text{ 또는 } b^2+c^2=9+4=13$$

(i), (ii), (iii)에서 b^2+c^2 의 최댓값은 37, 최솟값은 13이므로 그 합은

$$37+13=50$$

답 50

05 해결단계

① 단계	$(n+1)^2 \leq x < (n+2)^2$ 을 변형하여 n 의 값의 범위를 x 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	①단계의 부등식으로부터 $\frac{10f(x)}{\sqrt{x+3}}$ 의 범위를 구한다.
③ 단계	함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10f(x)}{\sqrt{x+3}}$ 의 값을 구한다.

$(n+1)^2 \leq x < (n+2)^2$ 에서

$$n+1 \leq \sqrt{x} < n+2 \quad (\because x > 0)$$

$$n+1 \leq \sqrt{x} \text{에서 } n \leq \sqrt{x}-1$$

$$\sqrt{x} < n+2 \text{에서 } \sqrt{x}-2 < n$$

$$\therefore \sqrt{x}-2 < n \leq \sqrt{x}-1$$

이때, $f(x) = n$ 이므로

$$\sqrt{x}-2 < f(x) \leq \sqrt{x}-1$$

$\frac{10}{\sqrt{x+3}} > 0$ 이므로 위의 부등식의 각 변에 $\frac{10}{\sqrt{x+3}}$ 을 곱하면

$$\frac{10(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x+3}} < \frac{10f(x)}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{10(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x+3}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = 10,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = 10$$

이므로 ①에서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10f(x)}{\sqrt{x+3}} = 10$$

답 10

• 다른풀이 •

$$(n+1)^2 \leq x < (n+2)^2 \text{이므로}$$

$$(n+1)^2 + 3 \leq x + 3 < (n+2)^2 + 3$$

$$\sqrt{(n+1)^2 + 3} \leq \sqrt{x+3} < \sqrt{(n+2)^2 + 3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+2)^2 + 3}} < \frac{1}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}}$$

이때, $f(x) = n > 0$ 이므로 위의 부등식의 각 변에

$f(x) = n$ 을 곱하면

$$\frac{n}{\sqrt{(n+2)^2 + 3}} < \frac{f(x)}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$(n+1)^2 \leq x < (n+2)^2$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $n \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(n+2)^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{3}{n^2}}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{3}{n^2}}} = 1$$

즉, ②에서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x+3}} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10f(x)}{\sqrt{x+3}} = 10 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x+3}} = 10$$

06 해결단계

① 단계	직선 AB의 방정식을 구한 후, $f(a)$ 를 a, b 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$\overline{AB} = \sqrt{2}$ 임을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.
③ 단계	$a+b=u, a-b=v$ 로 치환하고 ②단계에서 구한 식을 이용하여 $f(a)$ 를 u 에 대한 식으로 나타낸다.
④ 단계	$a \rightarrow 0$ 일 때 $u \rightarrow 1$ 임을 파악한 후, $\lim_{a \rightarrow 0} f(a)$ 의 값을 구한다.

두 점 $A(a, a^2), B(b, b^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$$

$$y = (b+a)(x-a) + a^2$$

$$\therefore y = (a+b)x - ab$$

위의 직선과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$(a+b)x - ab = x, (a+b-1)x = ab$$

$$x = \frac{ab}{a+b-1} \quad \therefore f(a) = \frac{ab}{a+b-1}$$

한편, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 에서 $\overline{AB}^2 = 2$ 이므로

$$(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2$$

$$(b-a)^2 + (b-a)^2(b+a)^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$a+b=u, a-b=v \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

로 놓으면

$$v^2 + v^2 u^2 = 2, v^2(1+u^2) = 2$$

$$\therefore v^2 = \frac{2}{1+u^2} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

또한, $u^2 = a^2 + 2ab + b^2, v^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 이므로

$$u^2 - v^2 = 4ab$$

$$\therefore ab = \frac{u^2 - v^2}{4}$$

$$= \frac{u^2 - \frac{2}{1+u^2}}{4} \quad (\because \textcircled{5})$$

$$= \frac{u^2(1+u^2) - 2}{4(1+u^2)}$$

$$= \frac{u^4 + u^2 - 2}{4(1+u^2)} \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

①에 $a=0$ 을 대입하면

$$b^2 + b^4 = 2, b^4 + b^2 - 2 = 0$$

$$(b^2 + 2)(b^2 - 1) = 0, b^2 = 1 \quad (\because b^2 > 0)$$

$$\therefore b = 1 \quad (\because a < b)$$

즉, $a \rightarrow 0$ 이면 $b \rightarrow 1$ 이므로 $u \rightarrow 1$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0} f(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ab}{a+b-1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\frac{u^4 + u^2 - 2}{4(1+u^2)}}{u-1} \quad (\because \textcircled{6}, \textcircled{5})$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^4 + u^2 - 2}{4(u-1)(u^2+1)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u-1)(u^3 + u^2 + 2u + 2)}{4(u-1)(u^2+1)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^3 + u^2 + 2u + 2}{4(u^2+1)}$$

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

07 해결단계

① 단계	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 조건을 파악하여 함수 $f(x-1)g(x)$ 의 식을 세운다.
② 단계	$f(x)$ 가 일차항의 계수가 2인 일차함수임을 이용하여 경우를 나누고, 극한값이 존재하지 않는 실수 a 의 값이 $-1, 0, 1$ 인 경우를 찾는다.
③ 단계	$f(x), g(x)$ 를 각각 구한 후, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x-1)g(x)=0, \lim_{x \rightarrow a} g(x+1) \neq 0$ 일 때 $\textcircled{1}$ 의 극한값이 존재하지 않는다.

이때, $\textcircled{1}$ 의 극한값은 $a=-1, 0, 1$ 일 때만 존재하지 않으므로

$f(x-1)g(x)=2x(x+1)(x-1)(x-k)$ (k 는 상수)라 할 수 있다.

(i) $f(x-1)=2(x+1)$ 일 때,

$$g(x)=x(x-1)(x-k) \text{이므로}$$

$$g(x+1)=x(x+1)(x+1-k)$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x+1)(x+1-k)}{2x(x+1)(x-1)(x-k)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+1-k)}{2(x-1)(x-k)} \end{aligned}$$

의 극한값은 a 의 값이 $1, k$ 일 때 존재하지 않을 수 있다.

(ii) $f(x-1)=2x$ 일 때,

$$g(x)=(x+1)(x-1)(x-k) \text{이므로}$$

$$g(x+1)=x(x+2)(x+1-k)$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x+2)(x+1-k)}{2x(x+1)(x-1)(x-k)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)(x+1-k)}{2(x+1)(x-1)(x-k)} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이므로 극한값은 a 의 값이 $-1, 1, k$ 일 때 존재하지 않을 수 있고, 주어진 조건을 만족시키려면 $k=0$ 이어야 한다.

그런데 $k=0$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)(x+1)}{2x(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)}{2x(x-1)} \end{aligned}$$

즉, 극한값이 존재하지 않는 실수 a 의 값은 $0, 1$ 이다.

(iii) $f(x-1)=2(x-1)$ 일 때,

$$g(x)=x(x+1)(x-k) \text{이므로}$$

$$g(x+1)=(x+1)(x+2)(x+1-k)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+1)(x+2)(x+1-k)}{2x(x+1)(x-1)(x-k)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)(x+1-k)}{2x(x-1)(x-k)} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이므로 극한값은 a 의 값이 $0, 1, k$ 일 때 존재하지 않을 수 있고, 주어진 조건을 만족시키려면 $k=-1$ 이어야 한다.

$\textcircled{3}$ 에 $k=-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)(x+2)}{2x(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)^2}{2x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

즉, 극한값이 존재하지 않는 실수 a 의 값은 $-1, 0, 1$ 뿐이다.

(iv) $f(x-1)=2(x-k)$ 일 때,

$$g(x)=x(x+1)(x-1) \text{이므로}$$

$$g(x+1)=x(x+1)(x+2)$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x+1)}{f(x-1)g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(x+1)(x+2)}{2x(x+1)(x-1)(x-k)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+2)}{2(x-1)(x-k)} \end{aligned}$$

이므로 극한값은 a 의 값이 $1, k$ 일 때 존재하지 않을 수 있다.

(i) ~ (iv)에서

$$f(x-1)=2(x-1),$$

$$g(x)=x(x+1)(x-k)=x(x+1)^2 (\because k=-1)$$

이므로

$$\begin{aligned} f(3)+g(3) &= 2 \times 3 + 3 \times 4^2 \\ &= 6 + 48 = 54 \end{aligned}$$

답 54

이것이 수능

p. 15

1 ②

2 10

3 ⑤

4 208

1

해결단계

① 단계	조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 최고차항을 구한다.
② 단계	조건 (나)를 이용하여 $f(x)$ 의 계수를 모두 구하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$f(1)$ 의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = -1$ 이므로 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 -1 인 이차함수이다.

$f(x) = -x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-3}{x^2} = -1 \text{로 극한값이 존재하고 } x \rightarrow 0 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 3\} = 0$ 에서 $f(0) = 3$ 이므로

$$b = 3$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + ax + 3$$

또한,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + ax}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + a}{x} = -1 \end{aligned}$$

에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (-x + a) = 0 \text{에서 } a = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(1) = -1 + 3 = 2$$

답 ②

2 해결단계

① 단계	$x \rightarrow \infty$ 일 때의 극한을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 최고차항을 구한다.
② 단계	①단계의 $f(x)$ 를 $x \rightarrow 1$ 일 때의 극한에 대입하여 $f(x)$ 의 계수를 모두 구하고 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $f(x)$ 를 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 에 대입하여 극한값을 구한다.

$f(x)$ 가 다항함수이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11$ 에서

$f(x) - x^3 = -11x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 할 수 있으므로

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{에서 } f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - 11 + a + b = 0 \quad \therefore b = 10 - a$$

위의 식을 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 11x^2 + ax + 10 - a \\ &= (x-1)(x^2 - 10x + a - 10) \end{aligned}$$

위의 식을 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 10x + a - 10)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 10x + a - 10) \\ &= a - 19 = -9 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 10, b = 10 - 10 = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 11x^2 + 10x$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 에서 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때

$t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3 - 11t^2 + 10t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (t^2 - 11t + 10) \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 10

3 해결단계

① 단계	함수 $f(x) = x^2 - 2$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구한 후, 직선 $x = t$ 와 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 의 교점 P, Q의 좌표를 각각 구한다.
② 단계	$h(t)$ 를 구한 후, $\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{h(t)}{t-2}$ 의 값을 구한다.

직선 $x = t$ 와 곡선 $f(x) = x^2 - 2$ 가 만나는 점이 P이므로 $P(t, t^2 - 2)$

함수 $g(x)$ 는 $f(x) = x^2 - 2$ 의 역함수이므로

$$y = x^2 - 2 \text{라 하면}$$

$$x^2 = y + 2, x = \sqrt{y + 2} \quad (\because x \geq 0)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \sqrt{x + 2}$$

직선 $x = t$ 와 곡선 $g(x) = \sqrt{x + 2}$ 가 만나는 점이 Q이므로 $Q(t, \sqrt{t + 2})$

따라서 선분 PQ의 길이 $h(t)$ 는

$$h(t) = t^2 - 2 - \sqrt{t + 2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{h(t)}{t-2} &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^2 - 2 - \sqrt{t + 2}}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t^2 - 2 - \sqrt{t + 2})(t^2 - 2 + \sqrt{t + 2})}{(t-2)(t^2 - 2 + \sqrt{t + 2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^4 - 4t^2 + 4 - (t + 2)}{(t-2)(t^2 - 2 + \sqrt{t + 2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^4 - 4t^2 - t + 2}{(t-2)(t^2 - 2 + \sqrt{t + 2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t-2)(t^3 + 2t^2 - 1)}{(t-2)(t^2 - 2 + \sqrt{t + 2})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^3 + 2t^2 - 1}{t^2 - 2 + \sqrt{t + 2}} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{h(t)}{t-2} &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t^2 - 2 - \sqrt{t + 2}}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t^2 - 4) + (2 - \sqrt{t + 2})}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \left\{ (t+2) + \frac{2 - \sqrt{t + 2}}{t-2} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \left\{ (t+2) + \frac{(2 - \sqrt{t + 2})(2 + \sqrt{t + 2})}{(t-2)(2 + \sqrt{t + 2})} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \left\{ (t+2) + \frac{2-t}{(t-2)(2 + \sqrt{t + 2})} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2+} \left\{ (t+2) - \frac{1}{2 + \sqrt{t + 2}} \right\} \\ &= 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

4 해결단계

① 단계	$\overline{CI} = t$ 로 두고 네 선분 BI, AI, CH, HI의 길이를 각각 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 선분의 길이를 이용하여 삼각형 IQC의 둘레의 길이 L , 넓이 S 를 구한다.
③ 단계	점 P가 점 B로 가까워질 때의 $\frac{L^2}{S}$ 의 극한값을 구하여 a, b 를 구한 후, $a^2 + b^2$ 의 값을 구한다.

$$\therefore a=2\sqrt{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$b=2\sqrt{2} \times \sqrt{2}=4$$

$$\therefore a+b=2\sqrt{2}+4$$

답 ①

03 $f(x)=a[x^2]-2[x-2]+x$ 에서

(i) $1.9 \leq x < 2$ 일 때,

$$3.61 \leq x^2 < 4, -0.1 \leq x-2 < 0 \text{이므로}$$

$$[x^2]=3, [x-2]=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 3a - 2 \times (-1) + 2 = 3a + 4$$

(ii) $2 \leq x < 2.1$ 일 때,

$$4 \leq x^2 < 4.41, 0 \leq x-2 < 0.1 \text{이므로}$$

$$[x^2]=4, [x-2]=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 4a - 2 \times 0 + 2 = 4a + 2$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = f(2) \text{이어야 하므로}$$

$$3a+4=4a+2 \quad \therefore a=2$$

답 2

04 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (ax+1) = \lim_{x \rightarrow 0+} (3x^2+2ax+b) = b$$

$$\therefore b=1$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{이어야 하고,}$$

$$f(x+2)=f(x) \text{이므로 } f(1)=f(-1)$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} (3x^2+2ax+1) = -a+1 \text{이므로}$$

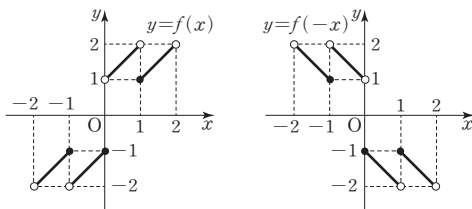
$$3+2a+1=-a+1, 3a=-3$$

$$\therefore a=-1$$

$$\therefore a+b=-1+1=0$$

답 ③

05 함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\} = -1 + 1 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$$

즉,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + f(-x)\} \text{의 값이 존재한다. (참)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + f(-x)\} = 2 + (-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} f(-x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

$$\text{또한, } f(1) + f(-1) = 1 + (-1) = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\} = f(1) + f(-1) \text{이므로}$$

함수 $f(x) + f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

• 다른풀이 •

ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 1 + (-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + f(-x)\} = 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이고,

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 2 + (-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 1 + (-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

또한, $f(1) + f(-1) = 1 + (-1) = 0$ 이므로

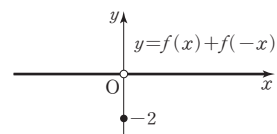
$$f(1) + f(-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\}$$

따라서 함수 $f(x) + f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(참)

blacklabel 특강 참고

두 함수 $y=f(x)$, $y=f(-x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)+f(-x)$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄴ. 위의 그림에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + f(-x)\}$ 의 값이 존재한다. (참)

ㄷ. 위의 그림에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + f(-x)\} = 0$.

$f(1) + f(-1) = 0$ 이므로 함수 $f(x) + f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

06 $f(x) = \begin{cases} x+3 & (x \leq a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases}, g(x) = x - (2a+7)$ 이므로

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (x+3)\{x-(2a+7)\} & (x \leq a) \\ (x^2-x)\{x-(2a+7)\} & (x > a) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = f(a)g(a) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x+3)\{x-(2a+7)\} \\ = (a+3)(-a-7),$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-x)\{x-(2a+7)\} \\ = (a^2-a)(-a-7),$$

$$f(a)g(a) = (a+3)(-a-7) \text{에서} \\ (a+3)(-a-7) = (a^2-a)(-a-7) \\ (a^2-2a-3)(-a-7) = 0 \\ (a+1)(a-3)(a+7) = 0$$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-7 \times (-1) \times 3 = 21$$

답 21

•다른풀이•

함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 곱 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이거나 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속일 때 $x=a$ 에서의 함수 $g(x)$ 의 함숫값이 0이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x+3) = a+3,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-x) = a^2-a,$$

$$f(a) = a+3$$

이므로

$$a+3 = a^2-a, a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속일 때

(i)에 의하여 $a \neq -1$ 이고 $a \neq 3$

이때, 위의 a 의 값의 범위에서 $g(a)=0$ 이므로

$$g(a) = a - (2a+7) = -a-7=0$$

$$\therefore a = -7$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 3 \times (-7) = 21$$

07 $x < 2$ 일 때, $f(x) = x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4 > 0$ 이고,
 $x \geq 2$ 일 때, $f(x) = 2 > 0$ 이므로
 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이다.

그런데 $f(x)$ 는 $x \neq 2$ 에서 연속이고 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{ax+2}{x^2-8x+20} = \frac{2a+2}{8} = \frac{a+1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax+2}{2} = \frac{2a+2}{2} = a+1,$$

$$\frac{g(2)}{f(2)} = \frac{2a+2}{2} = a+1$$

$$\text{에서 } \frac{a+1}{4} = a+1$$

$$a+1 = 4a+4, 3a = -3$$

$$\therefore a = -1$$

답 ④

08 $\neg, f(0)=0$ 이므로 $g(f(0))=g(0)=0$ (참)

$\neg, f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이고,

$x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$$

이때, $\neg$ 에서 $g(f(0))=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0))$$

따라서 합성함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(참)

$\neg, g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$$

그런데 $f(g(0))=f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$$

따라서 합성함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

(거짓)

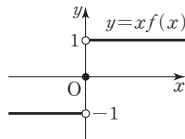
그러므로 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ②

09 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$xf(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=xf(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 함수
 $xf(x)$ 는 $x=0$ 을 제외한 모든 실수
에서 연속이다. 즉, 불연속이 되는
점의 개수는 1이다.



답 ②

10

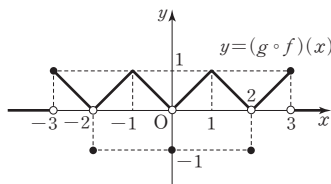
$$g(x) = \begin{cases} |x| & (0 < |x| \leq 1) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ -x & (-1 \leq x < 0) \\ -1 & (x=0) \\ x & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

에서

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & (f(x) < -1) \\ -f(x) & (-1 \leq f(x) < 0) \\ -1 & (f(x)=0) \\ f(x) & (0 < f(x) \leq 1) \\ 0 & (f(x) > 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & (x < -3) \\ -x-2 & (-3 \leq x < -2) \\ -1 & (x=-2) \\ x+2 & (-2 < x < -1) \\ -x & (-1 \leq x < 0) \\ -1 & (x=0) \\ x & (0 < x < 1) \\ -x+2 & (1 \leq x < 2) \\ -1 & (x=2) \\ x-2 & (2 < x \leq 3) \\ 0 & (x > 3) \end{cases}$$

함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=-3, -2, 0, 2, 3$ 에서
불연속이므로 불연속인 점은 5개이다.

답 ②

11

두 함수 $f(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \{f(a)\}^2$$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다. (참)

ㄴ. 두 함수 $\{f(x)\}^2, \frac{f(x)}{g(x)}$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \left\{ f(x) - \frac{1}{g(x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \{f(x)\}^2 - \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \{f(a)\}^2 - \frac{f(a)}{g(a)}$$

즉, 함수 $f(x) \left\{ f(x) - \frac{1}{g(x)} \right\}$ 은 $x=a$ 에서 연속이
다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} -1 & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이라 하면

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

이므로 두 함수 $f(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 각각
 $x=1$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연
속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

12

$g(x)=\sqrt{x}-1$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 9$ 에서

$0 \leq \sqrt{x}-1 \leq 2$ 이므로 $0 \leq t \leq 2$ 이고,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(t) \\ &= -t^2 + 4t - 2 \\ &= -(t-2)^2 + 2 \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq 2) \end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 9]$ 에서 연속이고, 함수 $f(x)$
는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이므로 연속함수의 성질에
의하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 9]$ 에서 연
속이다.

따라서 최대·최소 정리에 의하여 합성함수 $(f \circ g)(x)$
는 닫힌구간 $[1, 9]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때, 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 함수

$f(t)$ 는 $t=2$, 즉 $x=9$ 일 때 최댓

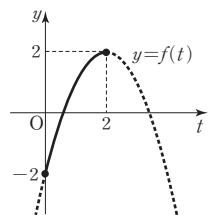
값 2를 갖고, $t=0$, 즉 $x=1$ 일 때

최솟값 -2 를 갖는다.

즉, 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 닫힌

구간 $[1, 9]$ 에서 최댓값 2, 최솟값 -2 를 갖는다.

답 최댓값 : 2, 최솟값 : -2



13

$f(x)=x^3-2x^2+x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 실수 전
체의 집합에서 연속이고,

$$f(-2) = -8 - 8 - 2 - 1 = -19 < 0,$$

$$f(-1) = -1 - 2 - 1 - 1 = -5 < 0,$$

$$f(0) = -1 < 0,$$

$$f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 8 - 8 + 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$f(3) = 27 - 18 + 3 - 1 = 11 > 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3-2x^2+x-1=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나의 실근을 갖는다. **답 ④**

• 다른풀이 •

$$f(x)=x^3-2x^2+x-1 \text{이라 하면}$$

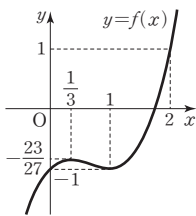
$$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{23}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x>1$ 에서 근의 존재 여부를 조사하면 된다.
이때, $f(2)=1>0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다.



14 $f(x)=2x$, 즉 $f(x)-2x=0$ 에서 $g(x)=f(x)-2x$ 라 하면 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $g(x)$ 도 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 연속이다.

$$\text{이때, } g(1)=f(1)-2 \times 1=5-2=3>0,$$

$$g(2)=f(2)-2 \times 2=2-4=-2<0,$$

$$g(3)=f(3)-2 \times 3=-3-6=-9<0,$$

$$g(4)=f(4)-2 \times 4=10-8=2>0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=2x$ 는 열린구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 가진다.

따라서 방정식 $f(x)=2x$ 는 열린구간 $(1, 4)$ 에서 적어도 2개의 실근을 가지므로 n 의 최댓값은 2이다. **답 ②**

01 함수 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ 이 $x=0$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=1$ 이어야 한다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{1+1}=1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x}+1)=1+1=2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x]}{x}=\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{[x]}{x}=\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{0}{x}=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$ 는 $\neg$ 뿐이다. **답 ①**

02 $(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3})f(x)=x^2+ax+8$ 에서 $x=2$ 일 때, $0 \times f(2)=4+2a+8$

$$2a+12=0 \quad \therefore a=-6$$

$$x \neq 2 \text{일 때, } f(x)=\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2)=\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-6x+8)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3})}{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3})}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3})}{x-2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+3})$$

$$=-2 \times 2\sqrt{7}=-4\sqrt{7} \quad \text{답 } -4\sqrt{7}$$

03 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4x}{x^2-1}=a, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-4x}{x^2-1}=a \quad \dots\dots ㉠$$

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

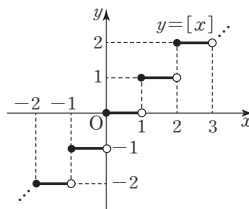
pp. 19~23

01 ①	02 $-4\sqrt{7}$	03 36	04 3	05 ④
06 ⑤	07 -6	08 ④	09 -108	10 ⑤
11 12	12 ③	13 ③	14 $\frac{7}{4}$	15 ②
16 28	17 ③	18 ①	19 ①	20 25
21 25	22 ③	23 19	24 26	25 ②
26 ③	27 9	28 ①	29 ③	30 9

이때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4x}{x^2-1} = a$ 에서 극한값이 존재하고
 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-4x\} = 0$ 에서 $f(1)-4=0$
 $\therefore f(1)=4$
 같은 방법으로 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-4x}{x^2-1} = a$ 에서
 $f(-1)+4=0$, 즉 $f(-1)=-4$
 또한, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x}{x^2-1} = 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.
 따라서 $f(x)=3x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면
 $f(1)=3+p+q=4$ 에서 $p+q=1$ ㉔
 $f(-1)=3-p+q=-4$ 에서 $-p+q=-7$ ㉕
 ㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $p=4, q=-3$
 $\therefore f(x)=3x^2+4x-3$
 한편, ㉔에서
 $a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{x^2-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} = 3$
 $\therefore f(a) = f(3) = 27+12-3=36$

답 36

04 함수 $y=[x]$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=[x]$ 는 x 가 정수일 때 불연속이고 나머지 구간에서는 연속이다.



따라서 주어진 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 임의의 정수 n 에 대하여 $x=n$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = f(n) \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

이어야 한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow n^-} \{[x]^2 + (ax+b)[x]\} \\ &= (n-1)^2 + (an+b)(n-1) \\ &= (a+1)n^2 + (-a+b-2)n - b + 1 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow n^+} \{[x]^2 + (ax+b)[x]\} \\ &= n^2 + (an+b)n = (a+1)n^2 + bn \end{aligned}$$

(iii) $f(n) = n^2 + (an+b)n = (a+1)n^2 + bn$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} (a+1)n^2 + bn &= (a+1)n^2 + (-a+b-2)n - b + 1 \\ (-a-2)n - b + 1 &= 0 \end{aligned}$$

위의 등식은 정수 n 에 대한 항등식이므로

$$-a-2=0, -b+1=0 \quad \therefore a=-2, b=1$$

$$\therefore a^2-b^2 = (-2)^2 - 1^2 = 3$$

답 3

05 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = -1 \times 1 = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = 2 \times (-2) = -4$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -1 \quad (\text{참})$$

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x)+g(x)\} = -1+1=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x)+g(x)\} = 2+(-2)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} = 0$$

이때, $f(1)+g(1)=0+0=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} = f(1)+g(1) \text{이다.}$$

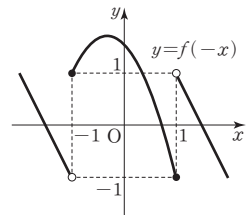
따라서 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(참)

그러므로 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

06 함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 오른쪽 그림과 같다.



$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)f(-x) \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)f(-x) \\ &= -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \quad (\text{거짓})$$

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x)+f(-x)\}$
 $= 1+(-1)=0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x)+f(-x)\} \\ &= -1+1=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$$

또한, $h(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

$\neg$. 함수 $f(x)$ 가 $x=-1, x=1$ 에서 불연속이므로 두 함수 $g(x), h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1, x=1$ 에서 각각 연속이어야 한다.

$$\neg \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \text{이고,}$$

$$g(-1) = f(-1)f(1) = -1 \times 1 = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

이때, $g(x)=f(x)f(-x)$ 에서

$$g(-x)=f(-x)f(x)=g(x)$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서도 연속이다.

또한, $\cup$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고,

$$h(-x)=f(-x)+f(x)=h(x)$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=-1$ 에서도 연속이다.

따라서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 각각 연속이므로 함수 $g(x)+h(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

그러므로 옳은 것은 $\cup$, $\cap$ 이다

답 ⑤

• 다른풀이 •

ㄱ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이고,

$x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$g(x)=f(x)f(-x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)f(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) \\ &= 1 \times (-1) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)f(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) \\ &= -1 \times 1 = -1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이고,

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$h(x)=f(x)+f(-x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+f(-x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) \\ &= 1 + (-1) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+f(-x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \\ &= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$$

$$\text{또한, } h(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)=h(1)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

07 두 함수 $f(x)$, $f(x)+k$ 는 $x=0$ 에서만 불연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)+k\}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)\{f(x)+k\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)\{f(x)+k\} \\ &= f(0)\{f(0)+k\}\end{aligned}$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)\{f(x)+k\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \sqrt{4-x}(\sqrt{4-x}+k) \\ &= 2(2+k) \\ &= 4+2k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)\{f(x)+k\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x-6}{x+2} \left(\frac{2x-6}{x+2} + k \right) \\ &= -3(-3+k) \\ &= 9-3k,\end{aligned}$$

$$f(0)\{f(0)+k\}=a(a+k)=a^2+ak$$

이므로

$$4+2k=9-3k=a^2+ak$$

$$4+2k=9-3k \text{에서 } 5k=5 \quad \therefore k=1$$

$$4+2k=a^2+ak \text{에서 } a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-3 \times 2 = -6$$

답 -6

08 이차방정식 $x^2-2ax+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-a=a(a-1)$$

(i) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $0<a<1$ 일 때,

실근이 존재하지 않으므로 $f(a)=0$

(ii) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $a=0$ 또는 $a=1$ 일 때,

중근을 가지므로 $f(0)=f(1)=1$

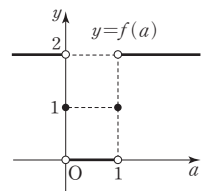
(iii) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $a<0$ 또는 $a>1$ 일 때,

서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(a)=2$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(a)=\begin{cases} 0 & (0<a<1) \\ 1 & (a=0 \text{ 또는 } a=1) \\ 2 & (a<0 \text{ 또는 } a>1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 그래프에서 $\lim_{a \rightarrow 1+} f(a)=2$

$a-1=t$ 로 놓으면 $a \rightarrow 1+$ 일 때

$t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow 1+} f(a-1) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 1+} \{f(a)+f(a-1)\} = 2+0=2 \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 함수 $g(a)$ 가 연속이므로

$$\lim_{a \rightarrow 1-} g(a) = \lim_{a \rightarrow 1+} g(a) = g(1)$$

함수 $f(a)g(a)$ 가 $a=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{a \rightarrow 1-} f(a)g(a) = \lim_{a \rightarrow 1+} f(a)g(a) = f(1)g(1)$$

이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 1-} f(a)g(a) &= \lim_{a \rightarrow 1-} f(a) \cdot \lim_{a \rightarrow 1-} g(a) \\ &= 0 \times g(1) = 0\end{aligned}$$

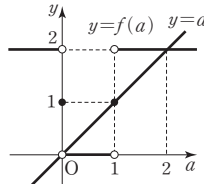
$$\lim_{a \rightarrow 1+} f(a)g(a) = \lim_{a \rightarrow 1+} f(a) \cdot \lim_{a \rightarrow 1+} g(a) = 2g(1)$$

$$f(1)g(1)=1 \times g(1)=g(1)$$

따라서 $2g(1)=0=g(1)$ 이므로
 $g(1)=0$ (참)

- ㄷ. 방정식 $f(a)-a=0$, 즉 $f(a)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=f(a)$, $y=a$ 의 그래프의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

두 함수 $y=f(a)$, $y=a$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)



그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

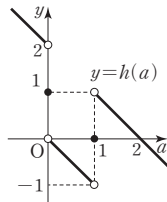
• 다른풀이 •

- ㄷ. $h(a)=f(a)-a$ 라 하면

$$h(a)=\begin{cases} -a & (0 < a < 1) \\ 1-a & (a=0 \text{ 또는 } a=1) \\ 2-a & (a < 0 \text{ 또는 } a > 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 방정식 $h(a)=0$ 의 서로 다른 실근은 $y=h(a)$ 의 그래프와 a 축의 교점의 a 좌표와 같으므로 방정식 $h(a)=0$, 즉 $f(a)-a=0$ 의 서로 다른 실근은 1, 2의 2개이다. (참)



blacklabel 특강 참고

$x=a$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 불연속인 함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이 되려면, 즉 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = f(a)g(a)$ 가 성립하려면 $f(a)=0$ 이어야 한다.

09 자연수 n 에 대하여

- (i) $x=2^n$ 일 때,

$$g(x)=[\log_2 x]+[\log_{\frac{1}{2}} x]$$

$$=[\log_2 2^n]+[\log_{\frac{1}{2}} 2^n]=n+(-n)=0$$

- (ii) $2^n < x < 2^{n+1}$ 일 때,

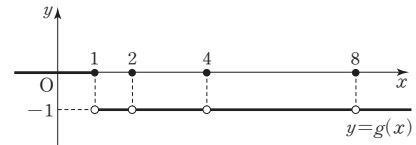
$$n < \log_2 x < n+1, -n-1 < \log_{\frac{1}{2}} x < -n \text{ 이므로}$$

$$g(x)=[\log_2 x]+[\log_{\frac{1}{2}} x]$$

$$=n+(-n-1)=-1$$

$$\text{즉, } g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ -1 & (1 < x < 2) \\ 0 & (x=2) \\ -1 & (2 < x < 4) \\ 0 & (x=4) \\ -1 & (4 < x < 8) \\ 0 & (x=8) \\ -1 & (x > 8) \end{cases} \text{ 이므로}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4+x-1}=3$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 사차함수이다.

또한, 함수 $g(x)$ 가 $x=1, x=2, x=4, x=8$ 에서 불연속이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1, x=2, x=4, x=8$ 에서 각각 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1) \text{에서}$$

$$f(1) \times 0 = f(1) \times (-1) = f(1) \times 0$$

$$\therefore f(1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = f(2)g(2) \text{에서}$$

$$f(2) \times (-1) = f(2) \times (-1) = f(2) \times 0$$

$$\therefore f(2)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} f(x)g(x) = f(4)g(4) \text{에서}$$

$$f(4) \times (-1) = f(4) \times (-1) = f(4) \times 0$$

$$\therefore f(4)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 8-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 8+} f(x)g(x) = f(8)g(8) \text{에서}$$

$$f(8) \times (-1) = f(8) \times (-1) = f(8) \times 0$$

$$\therefore f(8)=0$$

따라서 $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ 이므로

$$f(5)=3 \times 4 \times 3 \times 1 \times (-3) = -108 \quad \text{답 } -108$$

10 ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$f(x)+g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

이때, $a+b=1$ 이므로 $g(x)=x^2+ax+b$ 에서

$$g(1)=1+a+b=2 \text{ 이고 } b=1-a$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2+1-a & (x < 1) \\ 2-ax & (x \geq 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{x^2+1-a+g(x)\}$$

$$=2-a+2=4-a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} \{2-ax+g(x)\}$$

$$=2-a+2=4-a$$

$$f(1)+g(1)=2-a+2=4-a$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\}$$

$$=f(1)+g(1)$$

이므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)+g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. ㄱ과 마찬가지로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$a+b=-1 \text{이므로 } g(1)=1+a+b=0$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+b)g(x) \\ = (1+b)g(1)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2-ax)g(x) \\ = (2-a)g(1)=0,$$

$$f(1)g(1)=0$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) \text{에서} \\ 1+b=2-a=2-a \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 이 허근을 가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4b<0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑에서 $b=1-a$ 를 ㉒에 대입하여 풀면

$$a^2-4(1-a)<0, a^2+4a-4<0$$

$$\therefore -2-2\sqrt{2}<a<-2+2\sqrt{2}$$

그런데 $2<2\sqrt{2}<3$ 이므로

$$-5<-2-2\sqrt{2}<-4, 0<-2+2\sqrt{2}<1$$

따라서 구하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 의 5개이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

11 함수 $f(x)$ 는 $x \neq 0$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x-a)$ 는 $x \neq a$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이다. 이때, 함수 $f(x)f(x-a)$ 는 $x \neq 0, x \neq a$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0, x=a$ 에서 각각 연속이어야 한다.

(i) $a < 0$ 일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x-a) \\ = f(0)f(-a)$$

$$\text{즉, } 2 \times f(-a) = -2 \times f(-a) \text{에서}$$

$$f(-a)=0$$

이때, $-a > 0$ 이므로

$$f(-a) = \frac{1}{4}(-a-1)(-a-2)(-a-4)=0 \text{에서}$$

$$a=-1 \text{ 또는 } a=-2 \text{ 또는 } a=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) \\ = f(a)f(0)$$

$$\text{즉, } f(a) \times 2 = f(a) \times (-2) \text{에서 } f(a)=0$$

이때, $a < 0$ 이므로

$$f(a)=a+2=0 \text{에서 } a=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉑, ㉒에서 $a=-2$

(ii) $a=0$ 일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$, 즉 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 = (-2)^2 = 4,$$

$$\{f(0)\}^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 = \{f(0)\}^2 \text{이므로}$$

함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $a=0$ 은 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a > 0$ 일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x-a) \\ = f(0)f(-a)$$

$$\text{즉, } 2 \times f(-a) = -2 \times f(-a) \text{에서}$$

$$f(-a)=0$$

이때, $-a < 0$ 이므로

$$f(-a) = -a+2=0 \text{에서 } a=2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)f(x-a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)f(x-a) \\ = f(a)f(0)$$

$$\text{즉, } f(a) \times 2 = f(a) \times (-2) \text{에서}$$

$$f(a)=0$$

이때, $a > 0$ 이므로

$$f(a) = \frac{1}{4}(a-1)(a-2)(a-4)=0 \text{에서}$$

$$a=1 \text{ 또는 } a=2 \text{ 또는 } a=4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

㉑, ㉒에서 $a=2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a 의 값은

$$a=-2 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=2$$

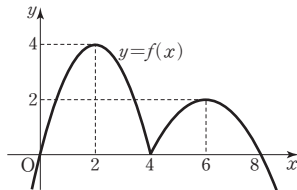
따라서 $a_1=-2, a_2=0, a_3=2$ 이고 $n=3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n n|a_k| = \sum_{k=1}^3 3|a_k| = 3(|a_1| + |a_2| + |a_3|)$$

$$= 3(2+0+2) = 12$$

답 12

- 12 함수 $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+4 & (x < 4) \\ -\frac{1}{2}(x-6)^2+2 & (x \geq 4) \end{cases}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



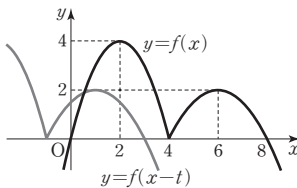
함수 $g(x)$ 는 $x \neq a$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x-t) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ 이므로 $f(a-t) = f(a)$

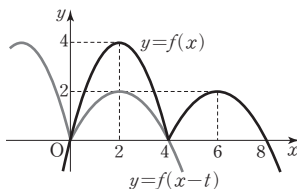
이때, $h(t)$ 는 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의 개수이므로 $h(t)$ 는 방정식 $f(a-t) = f(a)$ 를 만족시키는 실수 a 의 개수와 같다.

즉, 두 함수 $y=f(x-t)$, $y=f(x)$ 의 교점의 개수와 같고, 함수 $y=f(x-t)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것과 같으므로 t 의 값의 범위에 따라 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

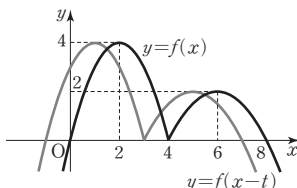
(i) $t < -4$ 일 때,



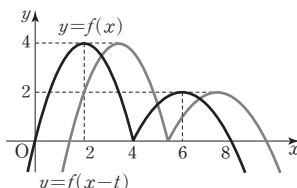
(ii) $t = -4$ 일 때,



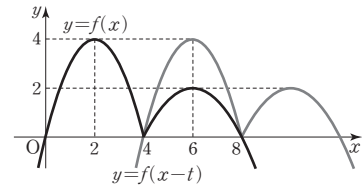
(iii) $-4 < t < 0$ 일 때,



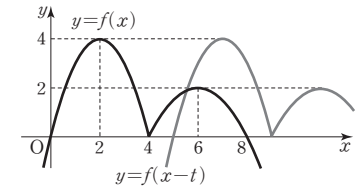
(iv) $0 < t < 4$ 일 때,



(v) $t = 4$ 일 때,



(vi) $t > 4$ 일 때,



$$(i) \sim (vi) \text{에서 } h(t) = \begin{cases} 1 & (t < -4) \\ 2 & (t = -4) \\ 3 & (-4 < t < 0) \\ 3 & (0 < t < 4) \\ 2 & (t = 4) \\ 1 & (t > 4) \end{cases} \text{이므로 } h(t) \geq 3 \text{인}$$

정수 t 는 $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

답 ③

13 $\neg$. $g(x)=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1^-$ 일 때 $t \rightarrow 1^-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 0$$

$x \rightarrow 1^+$ 일 때 $t = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) = f(-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0 \text{ (참)}$$

$\neg$. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 1$ 이고,

$\neg$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(1)$$

따라서 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

$\neg$. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서만 불연속이므로 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속인지 조사하면 된다.

$g(x)=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow -1^-$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(g(x)) = f(1) = 0$$

$x \rightarrow -1^+$ 일 때 $t \rightarrow -1^+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(g(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^+} f(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x) = 0$$

이때, $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(-1)$$

따라서 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로 $x < 1$ 에서 연속이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

• 다른풀이 •

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ -x+1 & (x > 0) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq -1) \\ x & (-1 < x < 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -1 & (x > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

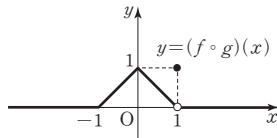
$x \leq -1$ 일 때, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 0$

$-1 < x < 1$ 일 때, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x)$

$x = 1$ 일 때, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 1$

$x > 1$ 일 때, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-1) = 0$

즉, 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그래프에서

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = 0$ 이고, $(f \circ g)(0) = 1$ 이

므로 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

(거짓)

ㄷ. 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x < 1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(1)$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} |x+1-2a| \\ &= |1+1-2a| = |2-2a|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(x^2+2x+2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} |x^2+2x+2-2a| \\ &= |1+2+2-2a| = |5-2a|, \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = |5-2a|$$

$$\text{이므로 } |2-2a| = |5-2a|$$

$$2-2a = -(5-2a), 4a = 7$$

$$\therefore a = \frac{7}{4}$$

답 $\frac{7}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 조건을 구한 경우	30%
(나)	$x = 1$ 에서 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 좌극한과 우극한 및 함수값을 이용하여 a 에 대한 식을 구한 경우	40%
(다)	(나)의 식을 이용하여 a 의 값을 구한 경우	30%

15 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서만 불연속이므로 주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x = 0$ 에서 연속이어야 한다.

ㄱ. $p(x) = f(x^2) + \{g(x)\}^2$ 이라 하자.

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $x^2 \rightarrow 0+$ 이고, $x \rightarrow 0+$ 일 때 $x^2 \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} p(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} [f(x^2) + \{g(x)\}^2] \\ &= 0 + (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} p(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} [f(x^2) + \{g(x)\}^2] \\ &= 0 + 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} p(x) = 1$$

또한, $p(0) = f(0) + \{g(0)\}^2 = 1 + 0^2 = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = p(0)$$

따라서 함수 $p(x) = f(x^2) + \{g(x)\}^2$ 은 $x = 0$ 에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $q(x) = f(x)g(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) \\ &= 0 \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} q(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) \\ &= 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 0$$

또한, $q(0) = f(0)g(0) = 1 \times 0 = 0$ 이므로

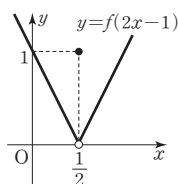
$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = q(0)$$

따라서 함수 $q(x) = f(x)g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. (반례) $f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$ 라 하면

$$f(2x-1) = \begin{cases} -2x+1 & \left(x < \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(x = \frac{1}{2}\right) \\ 2x-1 & \left(x > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

이때, 함수 $y=f(2x-1)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=\frac{1}{2}$ 에서 불연속이다.



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ②**

16 함수 $y=f(x)$ 가 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=1$, $x=2$ 에서 각각 연속이어야 한다.

(i) $x=0$ 에서 연속일 때,

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = g(2),\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0)$$

에서 $g(0) = g(2)$

(ii) $x=1$ 에서 연속일 때,

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = g(-1),\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0)$$

에서 $g(-1) = g(0)$

(iii) $x=2$ 에서 연속일 때,

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이고,

$x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = g(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0),\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1)$$

에서 $g(1) = g(0)$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(-1) = g(0) = g(1) = g(2) = 4 \quad (\because g(0) = 4)$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$$g(x) = x(x+1)(x-1)(x-2) + 4$$

$$\therefore g(3) = 3 \times 4 \times 2 \times 1 + 4 = 28$$

답 28

17 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 1) \\ x & (x > 1) \end{cases}$, $g(x) = |x-a| + |x-b|$

.....㉠

ㄱ. ㉠에서

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (x+1)(|x-a| + |x-b|) & (x \leq 1) \\ x(|x-a| + |x-b|) & (x > 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1)(|x-a| + |x-b|) \\ &= 2(|1-a| + |1-b|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} x(|x-a| + |x-b|) \\ &= |1-a| + |1-b|,\end{aligned}$$

$$f(1)g(1) = 2(|1-a| + |1-b|)$$

$$\text{에서 } 2(|1-a| + |1-b|) = |1-a| + |1-b|$$

$$|1-a| + |1-b| = 0$$

$$1-a=0, 1-b=0 \quad \therefore a=b=1$$

그런데 $a < b$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b 는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $a=2, b=3$ 이면 $g(x) = |x-2| + |x-3|$

이때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x+1) \\ &= g(2) = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= g(1) = 3\end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 합성

함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서

$$g(x) = |x-a| + |x-b| = \begin{cases} -2x+a+b & (x < a) \\ b-a & (a \leq x \leq b) \\ 2x-a-b & (x > b) \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+1 & (g(x) \leq 1) \\ g(x) & (g(x) > 1) \end{cases} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이때, $a < b$ 이고 a, b 는 모두 정수이므로

$$b-a \geq 1$$

(i) $b-a=1$ 일 때,

$$\begin{aligned}x < a \text{에서 } g(x) &= -2x+a+b \\ &= -2(x-a)+b-a \\ &= -2(x-a)+1 > 1,\end{aligned}$$

$$a \leq x \leq b \text{에서 } g(x) = 1,$$

$$\begin{aligned}x > b \text{에서 } g(x) &= 2x-a-b \\ &= 2(x-b)+b-a \\ &= 2(x-b)+1 > 1\end{aligned}$$

이므로 ㉠에 의하여

$$f(g(x)) = \begin{cases} -2(x-a)+1 & (x < a) \\ 2 & (a \leq x \leq b) \\ 2(x-b)+1 & (x > b) \end{cases}$$

그런데 위의 함수 $f(g(x))$ 는 $x=a$, $x=b$ 에서 각각 불연속이다.

(ii) $b-a=n$ ($n \geq 2$ 인 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} x < a \text{에서 } g(x) &= -2x+a+b \\ &= -2(x-a)+b-a \\ &= -2(x-a)+n > n, \end{aligned}$$

$a \leq x \leq b$ 에서 $g(x)=n$,

$$\begin{aligned} x > b \text{에서 } g(x) &= 2x-a-b \\ &= 2(x-b)+b-a \\ &= 2(x-b)+n > n \end{aligned}$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 2$ 이다.

즉, ㉠에 의하여 $f(g(x))=g(x)$ 이고 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$(f \circ g)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(i), (ii)에서 $b-a=n$ ($n \geq 2$ 인 자연수)일 때, 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b 는 무수히 많다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

•다른풀이•

ㄴ. $b-a=1$ 에서 $b=a+1$ 이므로

$$g(x) = |x-a| + |x-a-1| \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 불연속이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) = g(f(1))$$

이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(x+1) = g(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} (g \circ f)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = g(1), \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2)$$

에서 $g(1)=g(2)$

$$\textcircled{B} \text{에서 } |1-a| + |-a| = |2-a| + |1-a|$$

$$|-a| = |2-a|, -a = -2+a$$

$$\therefore a=1$$

즉, $a=1$, $b=2$ 일 때만 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. (거짓)

18 ㄱ. (반례) $f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ -1 & (x \geq 0) \end{cases}$

이라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 각각 $x=0$ 에서 불

연속이지만 $f(x)+g(x)=0$ 이므로 함수

$f(x)+g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

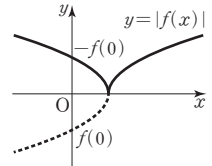
(거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

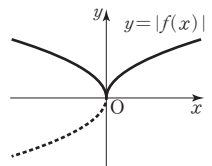
(i) $f(0) < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 0} \{-f(x)\} \\ &= -f(0) = |f(0)| \end{aligned}$$



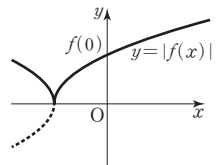
(ii) $f(0) = 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| \\ &= f(0) = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| &= |f(0)| \end{aligned}$$



(iii) $f(0) > 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= f(0) = |f(0)| \end{aligned}$$



(i), (ii), (iii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = |f(0)|$ 이므로 함수 $|f(x)|$ 도 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이면 $|f(x)| = 1$ 이므로

로 함수 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 로 극한값이 존재하고, $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\text{이때, } f(0) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄱ. $h(x) = f(x) + g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = f(0) + g(0) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) \text{이므로 함수 } h(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속이다.}$$

두 함수 $h(x)$, $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 함수 $g(x) = h(x) - f(x)$ 도 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

ㄴ. (반례) $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면

$$f(x)g(x) = \begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0,$$

$$f(0)g(0)=0 \times (-1)=0$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$ 이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이 아니다. (거짓)

$$ㄷ. (\text{반례}) f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}, g(x)=x+1 \text{이면}$$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 각각 $x=0$ 에서 연속이지만 $(f \circ g)(x)=f(g(x))$

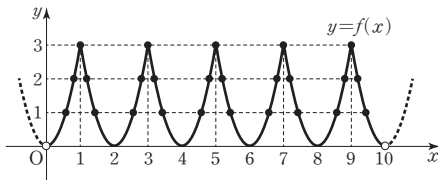
$$=\begin{cases} 0 & (g(x) \leq 1) \\ 1 & (g(x) > 1) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

에서 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

20 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 조건 ㄴ에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$ 이므로 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이고, 조건 ㄷ에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 이므로 y 축에 대하여 대칭이다. 또한, 조건 ㄱ에서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x)=3x^2$ 이므로 $0 < x < 10$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



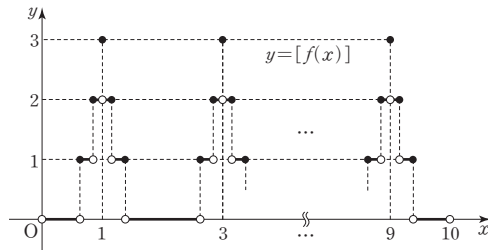
이때, 함수 $y=[f(x)]$ 는 $f(x)$ 의 값이 정수일 때 불연속이고 나머지 구간에서는 연속이므로 $f(x)=1, 2, 3$ 일 때 불연속이다.

따라서 구하는 불연속인 점의 개수는 25이다.

답 25

blacklabel 특강 풀이첨삭

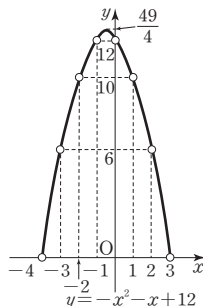
함수 $y=[f(x)]$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned} 21 \quad y &= -x^2 - x + 12 \\ &= -\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{49}{4} \\ &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} \end{aligned}$$

이므로 닫힌구간 $[-4, 3]$ 에서 x 가 정수가 아닐 때 함수

$y=-x^2-x+12$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-x+12 & (x \text{가 정수가 아닐 때}) \\ x+k & (x \text{가 정수일 때}) \end{cases}$$

에 대하여 닫힌구간 $[-4, 3]$ 에서 불연속인 x 의 개수가 6이 되어야 하므로 직선 $y=x+k$ 가 위의 그림의 불연속 점 8개 중에서 2개의 점을 지나야 한다.

(i) 직선 $y=x+k$ 가 두 점 $(-2, 10), (0, 12)$ 를 지나는 경우

$$10 = -2 + k \text{에서 } k=12$$

(ii) 직선 $y=x+k$ 가 두 점 $(-3, 6), (1, 10)$ 을 지나는 경우

$$6 = -3 + k \text{에서 } k=9$$

(iii) 직선 $y=x+k$ 가 두 점 $(-4, 0), (2, 6)$ 을 지나는 경우

$$0 = -4 + k \text{에서 } k=4$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 k 의 값은 4, 9, 12이므로 그 합은

$$4+9+12=25$$

답 25

22 ㄱ. $g(0)$ 은 함수 $\{f(x)\}^2$ 의 불연속인 점의 개수이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=-1, x=1$ 에서만 불연속이므로 함수 $x=-1, x=1$ 에서만 함수 $\{f(x)\}^2$ 의 연속성을 조사하면 된다.

(i) $x=-1$ 에서의 연속성

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1)^2 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2-x)^2 \\ &= 1^2 = 1, \end{aligned}$$

$$\{f(-1)\}^2 = (-1)^2 = 1$$

에서 $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)\}^2 = \{f(-1)\}^2$ 이므로 함수

$\{f(x)\}^2$ 은 $x=-1$ 에서 연속이다.

(ii) $x=1$ 에서의 연속성

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^2 \\ &= 1^2 = 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^2 = 1,$$

$$\{f(1)\}^2 = (-1)^2 = 1$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)\}^2 = \{f(1)\}^2$ 이므로 함수

$\{f(x)\}^2$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=-1, x=1$ 에서도 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 불연속인 점은 없으므로

$$g(0)=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $g(1)$ 은 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 의 불연속인 점의 개수이다.

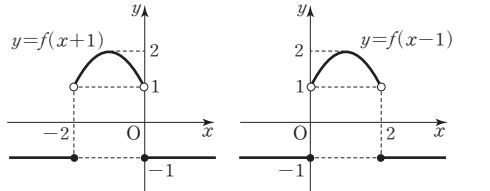
함수

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & (|x| < 1) \\ -1 & (|x| \geq 1) \end{cases} \text{의}$$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, 두 함수 $y=f(x+1)$,

$y=f(x-1)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 각각 -1 만큼, 1 만큼 평행이동한 것
이므로 다음 그림과 같다.



한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$, $x=1$ 에서만 불연속이므로 $x+1=-1$, $x+1=1$, $x-1=-1$, $x-1=1$, 즉 $x=-2$, $x=0$, $x=2$ 에서만 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 의 연속성을 조사하면 된다.

(i) $x=-2$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x+1)f(x-1) = -1 \times (-1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x+1)f(x-1) = 1 \times (-1) = -1$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x+1)f(x-1)$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow -2+} f(x+1)f(x-1)$$

이므로 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 은 $x=-2$ 에서 불연속이다.

(ii) $x=0$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1)f(x-1) = 1 \times (-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1)f(x-1) = -1 \times 1 = -1$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1)f(x-1) = -1$$

그런데 $f(1)f(-1) = -1 \times (-1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1)f(x-1) \neq f(1)f(-1)$$

따라서 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

(iii) $x=2$ 에서의 연속성

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x+1)f(x-1) = -1 \times 1 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x+1)f(x-1) = -1 \times (-1) = 1$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x+1)f(x-1)$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow 2+} f(x+1)f(x-1)$$

이므로 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 은 $x=2$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x+1)f(x-1)$ 은 $x=-2$, $x=0$, $x=2$ 에서 불연속이므로

$$g(1) = 3 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } y = f(x+a)f(x-a)$$

$$= f(x-a)f(x+a)$$

$$= f(x+(-a))f(x-(-a))$$

이므로 $g(a) = g(-a)$ 이다.

즉, 함수 $y=g(a)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 $a>0$ 에서의 연속성만 조사하면 된다.

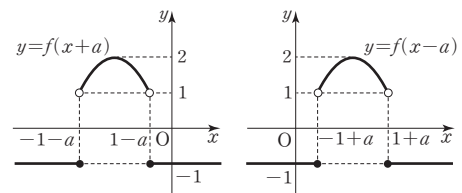
이때, 함수 $y=f(x+a)f(x-a)$ 는

$x+a=-1$, $x+a=1$, $x-a=-1$, $x-a=1$, 즉 $x=-1-a$, $x=1-a$, $x=-1+a$, $x=1+a$

에서 불연속일 수 있고, 두 함수 $y=f(x+a)$,

$y=f(x-a)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 각각 $-a$ 만큼, a 만큼 평행이동한 것
이므로 $a>1$ 일 때와 $0<a<1$ 일 때로 나누어 그래프를 그리면 각각 [그림 1], [그림 2]와 같다.

(i) $a>1$ 일 때,



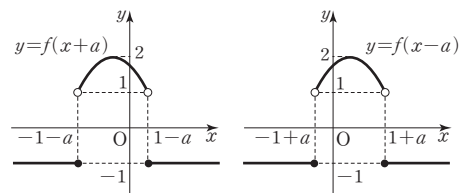
[그림 1]

$x=-1-a$, $x=1-a$ 일 때, 함수 $f(x+a)$ 는 불연속이고, 함수 $f(x-a)$ 는 연속이면서 함숫값이 0이 아니므로 함수 $f(x+a)f(x-a)$ 는

$x=-1-a$, $x=1-a$ 에서 연속이 아니다.
 $x=-1+a$, $x=1+a$ 일 때, 함수 $f(x+a)$ 는 연속이면서 함숫값이 0이 아니고, 함수 $f(x-a)$ 는 불연속이므로 함수 $f(x+a)f(x-a)$ 는

$x=-1+a$, $x=1+a$ 에서 연속이 아니다.
즉, $a>1$ 일 때 함수 $f(x+a)f(x-a)$ 의 불연속인 점의 개수는 4이므로 $g(a)=4$ 이다.

(ii) $0<a<1$ 일 때,



[그림 2]

(i)과 같은 방법으로 함수 $f(x+a)f(x-a)$ 는 $x=-1-a$, $x=1-a$, $x=-1+a$, $x=1+a$ 에서 모두 연속이 아니다.

즉, $0<a<1$ 일 때 함수 $f(x+a)f(x-a)$ 의 불연속인 점의 개수는 4이므로 $g(a)=4$ 이다.

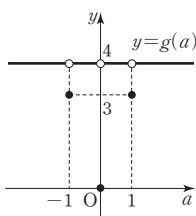
(i), (ii)와 ㄱ, ㄴ에서 $a \geq 0$ 일 때,

$$g(a) = \begin{cases} 0 & (a=0) \\ 4 & (0<a<1) \\ 3 & (a=1) \\ 4 & (a>1) \end{cases}$$

이고 함수 $y=g(a)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $g(a)$ 의 불연속인 점은 $a=-1, a=0, a=1$ 의 3개이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



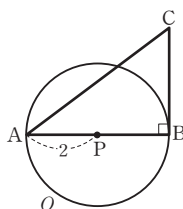
답 ③

- 23 (i) $0 < x < 2$ 일 때, 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이므로

$$f(x)=2 \quad (0 < x < 2)$$

- (ii) $x=2$ 일 때, 오른쪽 그림과 같이 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이므로

$$f(2)=3$$



한편, 오른쪽 그림과 같이 원 O 가 선분 AC 에 접할 때, 그 접점을 H 라 하면 삼각형 AHP 와 삼각형 ABC 는 AA 닮음이므로

$$\frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{AP}{AB} : \frac{HP}{AB} \text{에서}$$

$$5 : 3 = x : 2 \quad \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$3x=10 \quad \therefore x=\frac{10}{3}$$

- (iii) $2 < x < \frac{10}{3}$ 일 때, 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이므로

$$f(x)=4 \quad \left(2 < x < \frac{10}{3}\right)$$

- (iv) $x=\frac{10}{3}$ 일 때, 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이므로 $f\left(\frac{10}{3}\right)=3$

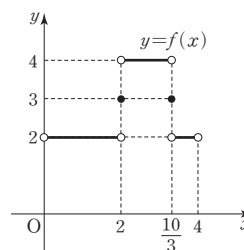
- (v) $\frac{10}{3} < x < 4$ 일 때, 원 O 가 삼각형 ABC 와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이므로

$$f(x)=2 \quad \left(\frac{10}{3} < x < 4\right)$$

(i)~(v)에서

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (0 < x < 2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & \left(2 < x < \frac{10}{3}\right) \\ 3 & \left(x=\frac{10}{3}\right) \\ 2 & \left(\frac{10}{3} < x < 4\right) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$ 가 $x=2, x=\frac{10}{3}$ 에서 불연속이므로 모든 실

$$수 a의 값의 합은 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$$

따라서 $p=3, q=16$ 이므로

$$p+q=19$$

답 19

24 해결단계

① 단계	두 집합 A, B 가 나타내는 도형을 파악한 후, 위치 관계를 이용하여 함수 $f(k)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $f(x)g(x)$ 의 불연속인 점이 1개이기 위한 조건을 구한 후, 경우에 따른 이차함수 $g(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$g(3)$ 의 최댓값을 구한다.

집합 $A = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 = 2a + 4b - 4\}$ 에서

$$a^2 + b^2 = 2a + 4b - 4$$

$$\therefore (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$$

즉, 좌표평면에서 집합 A 가 나타내는 도형은 중심이 $(1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

또한, 좌표평면에서 집합 $B = \{(a, b) \mid 3a - 4b = k\}$ 가 나타내는 도형은 직선 $3a - 4b = k$ 이다.

$f(k)$ 는 원 $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ 과 직선 $3a - 4b = k$ 의 교점의 개수이므로 원 $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$ 의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $3a - 4b = k$, 즉 $3a - 4b - k = 0$ 사이의 거리를 d 라 할 때

- (i) $d < 1$ 이면 원과 직선이 두 점에서 만난다.

$$\frac{|3-8-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} < 1 \text{에서 } \frac{|-5-k|}{5} < 1$$

$$|5+k| < 5, -5 < 5+k < 5$$

$$\therefore -10 < k < 0$$

즉, $-10 < k < 0$ 일 때, $f(k)=2$

- (ii) $d=1$ 이면 원과 직선이 접한다. (한 점에서 만난다.)

$$\frac{|3-8-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 1 \text{에서 } |5+k| = 5$$

$$\therefore k = -10 \text{ 또는 } k = 0$$

즉, $k = -10$ 또는 $k = 0$ 일 때, $f(k)=1$

- (iii) $d > 1$ 이면 원과 직선이 만나지 않는다.

$$\frac{|3-8-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} > 1 \text{에서 } |5+k| > 5$$

$$\therefore k < -10 \text{ 또는 } k > 0$$

즉, $k < -10$ 또는 $k > 0$ 일 때, $f(k)=0$

- (i), (ii), (iii)에서

$$f(k) = \begin{cases} 0 & (k < -10) \\ 1 & (k = -10) \\ 2 & (-10 < k < 0) \\ 1 & (k = 0) \\ 0 & (k > 0) \end{cases}$$

함수 $f(k)$ 가 $k = -10, k = 0$ 일 때 불연속이고, 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 의 불연속인 점의 개수가 1이므로

$$g(-10) = 0 \text{ 또는 } g(0) = 0$$

이어야 한다.

① $g(-10) = 0$ 인 경우

조건 ㉔에서 $g(1) = 0$ 이고 조건 ㉕에서 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x-1)(x+10)$$

$$\therefore g(3) = 2 \times 13 = 26$$

② $g(0) = 0$ 인 경우

조건 ㉔에서 $g(1) = 0$ 이고 조건 ㉕에서 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = x(x-1)$$

$$\therefore g(3) = 3 \times 2 = 6$$

①, ②에서 $g(3)$ 의 최댓값은 26이다.

답 26

25 ㄱ. 방정식 $f(x+1) - f(x) = 0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(x) = f(x+1)$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재한다. (거짓)

ㄴ. $h(x) = f(x+1) - f(x)$ 라 하면 주어진 조건에 의하여 방정식 $h(x) = 0$ 은 $-1 < x < 1$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때, $h(x)$ 는 일차함수이므로

$$h(-1) < 0, h(1) > 0 \text{ 또는 } h(-1) > 0, h(1) < 0$$

즉, $h(-1)h(1) < 0$ 이므로

$$\{f(0) - f(-1)\} \{f(2) - f(1)\} < 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(0) > 0, f(-1) < 0$ 이면 ㄴ에서

$$f(0) - f(-1) > 0 \text{ 이므로 } f(2) - f(1) < 0 \text{ 이다.}$$

그런데 $f(2) < 0, f(1) < 0$ 이고, $|f(2)| > |f(1)|$

이면 $f(2) - f(1) < 0$ 이지만 $f(2)f(1) > 0$ 이다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 $1 < x < 2$ 에서 실근을 갖지 않을 수도 있다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

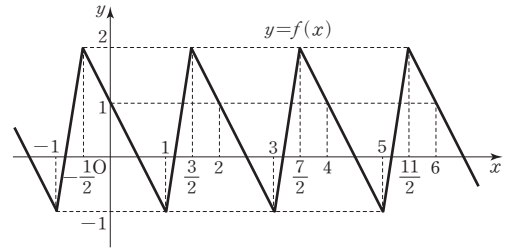
답 ②

26 ㄱ. 조건 ㉔에서 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 6x-7 & (1 \leq x < \frac{3}{2}) \\ -2x+5 & (\frac{3}{2} \leq x < 3) \end{cases}, f(x) = f(x+2)$$

를 만족시키면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 두 조건 ㉕, ㉔을 만족시킨다.



그런데 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 2를 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 정수 k 에 대하여 두 닫힌구간

$[2k, 2k+1], [2k+1, 2k+2]$ 에서 각각 연속이고,

$$f(2k) = 1, f(2k+1) = -1, f(2k+2) = 1 \text{ 이므로}$$

$$f(2k)f(2k+1) < 0, f(2k+1)f(2k+2) < 0$$

즉, 사잇값 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 을 만족시키는 c 가 두 열린구간 $(2k, 2k+1), (2k+1, 2k+2)$ 에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 $2m$ 개의 열린구간

$(0, 1), (1, 2), \dots, (2m-1, 2m)$ 에서 각각 적어도 하나씩의 실근을 가지므로 열린구간 $(0, 2m)$ 에서 적어도 $2m$ 개의 실근을 갖는다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

27 조건 ㉕에서 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하거나 감소해야 한다.㉑

$$f(x) + f(-x) = 4x^2 + 5 \text{ 에 } x=1 \text{ 을 대입하면}$$

$$f(1) + f(-1) = 9$$

$$\therefore f(-1) = 9 - f(1) \text{㉒}$$

이때, ㉑에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(1) < 0$ 이어야 한다.

위의 부등식에 ㉒을 대입하면

$$\{9 - f(1)\} \times f(1) < 0$$

$k > 0$ 이므로 $f(1) > 0$ 이고, 위의 부등식의 양변을 $f(1)$ 로 나누면

$$9 - f(1) < 0 \quad \therefore f(1) > 9$$

$f(1) > k$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$$k \geq 9$$

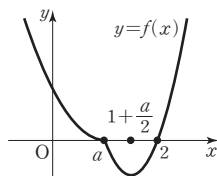
따라서 양수 k 의 최솟값은 9이다.

답 9

28 a 의 값의 범위에 따른 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $0 < a < 2$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[0, 1+\frac{a}{2}\right]$ 에서 연속이고 $f(0) > 0$,



$f\left(1+\frac{a}{2}\right) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 0과

$1+\frac{a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$ 인 c 가 적어도 하나 존재한다.

한편, 조건 (나)에서 점 $(2, f(2)), (a, f(a)),$

$\left(1+\frac{a}{2}, f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓

이가 $\frac{1}{8}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (2-a) \times \left\{ -\left(1+\frac{a}{2}-2\right)\left(1+\frac{a}{2}-a\right) \right\} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{(2-a)^3}{8} = \frac{1}{8}, (2-a)^3 = 1$$

$$2-a=1 \quad \therefore a=1$$

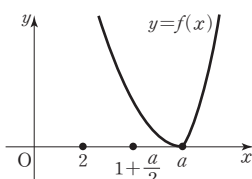
(ii) $a > 2$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그런데 조건 (나)에서 0과

$1+\frac{a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$ 인

c 가 적어도 하나 존재해야 하므로 조건을 만족시키지 않는다. 두 점 $(2, 0), (a, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 x좌표



$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \leq 1) \\ (x-2)(x-1) & (x > 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(3a)=f(3)=1 \times 2=2$$

답 ①

29 $\neg$. $g(x)=f(x)-ax$ 라 하면 $f(a)=b^2, f(b)=a^2$ 에서

$$g(a)=f(a)-a^2=b^2-a^2,$$

$$g(b)=f(b)-ab=a^2-ab$$

이므로

$$g(a)g(b)=(b^2-a^2)(a^2-ab)$$

$$=-a(a+b)(a-b)^2 < 0 \quad (\because b > a > 0)$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=ax$ 는 열린구간 (a, b) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. (반례) $g(x)=f(x)-x, a=3, b=4$ 라 하면

$$f(3)=4^2=16, f(4)=3^2=9$$

$$g(a)=g(3)=f(3)-3=16-3=13$$

$$g(b)=g(4)=f(4)-4=9-4=5$$

$g(a) > 0, g(b) > 0$ 에서 $g(a)g(b) > 0$ 이므로 방정식

$g(x)=0$, 즉 $f(x)=x$ 는 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖지 않을 수도 있다.

ㄷ. $g(x)=f(x)-\frac{a+b}{2}x$ 라 하면 $f(a)=b^2, f(b)=a^2$ 에서

$$g(a)=f(a)-\frac{a+b}{2} \times a = b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab$$

$$g(b)=f(b)-\frac{a+b}{2} \times b = a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab$$

$$g(a)g(b)=\left(b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab\right)\left(a^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2b^2-ab-a^2)(2a^2-ab-b^2)$$

$$=\frac{1}{4}(2b+a)(b-a)(2a+b)(a-b)$$

$$=-\frac{1}{4}(b-a)^2(2a+b)(2b+a) < 0$$

($\because b > a > 0$)

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉

$f(x)=\frac{a+b}{2}x$ 는 열린구간 (a, b) 에서 적어도 하나

의 실근을 갖는다.

그러므로 적어도 하나의 실근을 갖는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

• 다른풀이 •

ㄷ. $g(x)=f(x)-\frac{a+b}{2}x$ 라 하자.

$0 < a < b$ 에서 $a^2 < b^2, a^2 < ab, ab < b^2$ 이므로

$$g(a)=f(a)-\frac{a+b}{2} \times a = b^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2) + \frac{1}{2}(b^2-ab) > 0$$

$$a^2 < b^2 \text{에서 } b^2 - a^2 > 0 \quad ab < b^2 \text{에서 } b^2 - ab > 0$$

$$g(b)=f(b)-\frac{a+b}{2} \times b = a^2 - \frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-ab) + \frac{1}{2}(a^2-b^2) < 0$$

$$a^2 < ab \text{에서 } a^2 - ab < 0 \quad a^2 < b^2 \text{에서 } a^2 - b^2 < 0$$

$$\therefore g(a)g(b) < 0$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉

$f(x)=\frac{a+b}{2}x$ 는 열린구간 (a, b) 에서 적어도 하나

의 실근을 갖는다.

30 조건 (가)에서 $f(-2)=f(4)$ 이므로

$$4a-2b+c+a=16a+4b+c+a$$

$$6b=-12a \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots ㉑$$

$$\text{즉, } f(x)=a(x-1)^2+c=ax^2-2ax+c+a$$

조건 (나)에서 $c+2a > b$ 이므로

$$c+2a > -2a \quad (\because ㉑) \quad \therefore c+4a > 0 \quad \dots\dots ㉒$$

조건 (다)에서 열린구간 $(2, 3)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가지므로

$$f(2)f(3) < 0 \text{에서}$$

$$(a+c)(4a+c) < 0 \quad (\because ㉑)$$

$$\text{㉒에서 } c+4a > 0 \text{이므로 } a+c < 0$$

$$\therefore -4a < c < -a \quad \dots\dots ㉓$$

이때, $a > 0$ 이어야 정수 c 가 존재한다.

$$a+b+c=a+(-2a)+c=c-a \text{이고}$$

$$-5a < c-a < -2a \quad (\because ㉓)$$

$$\therefore -5a < a+b+c < -2a$$

a, b, c 가 정수이므로 최댓값은 $a=1$ 일 때

$$M = -3$$

$$\therefore M^2 = 9$$

답 9

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

p. 24

01 ①

02 -72

03 $\frac{3}{2}$

04 ③

05 14

06 5

01 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	①단계에서 그린 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프를 이용하여 $\neg$, $\perp$, $\subset$ 의 참, 거짓을 판별한다.

(i) $x \neq 0$ 일 때, $f(x) \leq 0$ 이므로

$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} = \frac{f(x) - f(x)}{2} = 0$$

$$h(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

(ii) $x=0$ 일 때, $f(0)=1$ 이므로

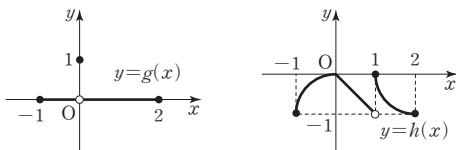
$$g(0) = \frac{f(0) + |f(0)|}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$h(0) = \frac{f(0) - |f(0)|}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

(i), (ii)에서

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}, h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+} h(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

$\perp$. 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에 속하는 임의의 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (h \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) = h(0) = 0$$

$$\text{이때, } g(a) = \begin{cases} 0 & (a \neq 0) \\ 1 & (a = 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$(h \circ g)(a) = h(g(a)) = \begin{cases} h(0) & (a \neq 0) \\ h(1) & (a = 0) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } (h \circ g)(a) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} (h \circ g)(x) = (h \circ g)(a)$$

따라서 함수 $(h \circ g)(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이다. (참)

$\subset$. $h(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ h)(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} g(h(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = 0 \end{aligned}$$

그런데 $(g \circ h)(0) = g(h(0)) = g(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ h)(x) \neq (g \circ h)(0) \text{ (거짓)}$$

그러므로 옳은 것은 $\perp$ 뿐이다.

답 ①

02 해결단계

① 단계	주어진 삼차방정식을 인수분해한다.
② 단계	삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3, 2, 1일 때의 t 의 값 또는 범위를 각각 구한다.
③ 단계	함수 $f(t)$ 를 구한 후, 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속일 조건을 구한다.
④ 단계	함수 $g(x)$ 를 구한 후, $f(2)g(2)$ 의 값을 구한다.

$$x^3 + (8-t)x^2 + (t^2-8t)x - t^3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{에서 } (x-t)(x^2+8x+t^2)=0$$

$$\therefore x=t \text{ 또는 } x^2+8x+t^2=0$$

(i) 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - t^2 > 0 \text{에서 } t^2 - 16 < 0$$

$$(t-4)(t+4) < 0 \quad \therefore -4 < t < 4$$

또한, $x=t$ 는 이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$2t^2+8t \neq 0, 2t(t+4) \neq 0$$

$$\therefore t \neq 0 \text{이고 } t \neq -4$$

따라서 $-4 < t < 0$ 또는 $0 < t < 4$ 일 때, $f(t)=3$

(ii) 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 $x \neq t$ 인 중근을 갖거나 $x=t$ 와 $x \neq t$ 인 근을 가지면 된다.

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 $x \neq t$ 인 중근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = 16 - t^2 = 0 \text{에서 } t=4 \text{ 또는 } t=-4$$

그런데 $t=-4$ 이면 $x^2+8x+16=0$ 에서 $x=-4$ 를 중근으로 가지므로 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 $x=-4$ 를 삼중근으로 갖는다.

즉, $t=4$

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 $x=t$ 와 $x \neq t$ 인 근을 가지려면

$$2t^2+8t=0, 2t(t+4)=0$$

$$\therefore t=0 \quad (\because t \neq -4)$$

따라서 $t=0$ 또는 $t=4$ 일 때, $f(t)=2$

(iii) 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 이 하나의 실근을 가질 때,

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 허근을 갖거나 $x=t$ 인 중근을 가지면 된다.

이차방정식 $x^2+8x+t^2=0$ 이 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=16-t^2<0 \text{에서 } t^2-16>0$$

$$(t+4)(t-4)>0 \quad \therefore t<-4 \text{ 또는 } t>4$$

또한, $t=-4$ 이면 삼차방정식 ㉠이 $x=-4$ 의 삼중근을 갖는다.

따라서 $t \leq -4$ 또는 $t > 4$ 일 때, $f(t)=1$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (t \leq -4) \\ 3 & (-4 < t < 0) \\ 2 & (t=0) \\ 3 & (0 < t < 4) \\ 2 & (t=4) \\ 1 & (t > 4) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-4$, $x=0$, $x=4$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이려면 $g(-4)=g(0)=g(4)=0$ 이어야 한다.

그런데 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$g(x)=x(x-4)(x+4)$$

$$\therefore f(2)g(2)=3 \times (-24)=-72$$

답 -72

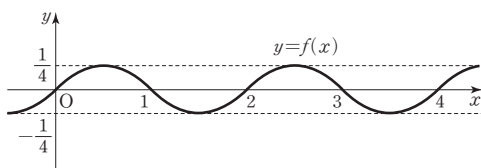
03 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	함수 $(f \circ g)(x)$ 가 연속 또는 불연속이 될 조건을 구한 후, 각 조건에 따라 방정식 $(f \circ g)(x)=0$ 이 열린구간 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+a)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖기 위한 a 의 값 또는 범위를 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 것을 이용하여 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구한 후, k 의 값을 구한다.

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1) & (-1 < x \leq 0) \\ x(1-x) & (0 < x \leq 1) \end{cases} \text{이고, 조건 ㉠의}$$

$f(x+1)=f(x-1)$ 에서 $f(x)=f(x+2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 주기가 2이다.

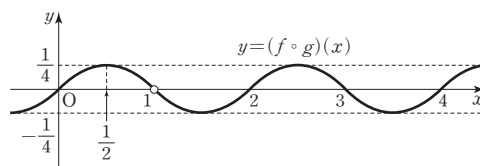
즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\text{이때, } g(x)=\begin{cases} x & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} f(x) & (x \neq 1) \\ f(a) & (x=1) \end{cases} \text{이므로}$$

$x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $(f \circ g)(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 연속이려면 $f(g(1))=0$, 즉 $f(a)=0$ 이어야 한다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 좌표가 정수인 점에서 x 축과 만나므로

a 가 정수일 때, $f(a)=0$

a 가 정수가 아닐 때, $f(a) \neq 0$

(i) $f(a)=0$ 일 때,

함수 $(f \circ g)(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속이므로 방정식 $(f \circ g)(x)=0$ 이 열린구간 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+a)$

에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $\frac{1}{2}+a>1$, 즉

$a>\frac{1}{2}$ 이어야 한다.

그런데 a 는 $a>1$ 인 정수이어야 하므로 조건을 만족시키는 a 의 값은

$$a=2, 3, 4, \dots$$

(ii) $f(a) \neq 0$ 일 때,

함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이고

$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=f(0)=0$ 이므로 방정식 $(f \circ g)(x)=0$ 이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $\frac{1}{2}+a>2$, 즉 $a>\frac{3}{2}$ 이어야 한다.

이때, a 는 정수가 아니므로 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$\frac{3}{2}<a<2 \text{ 또는 } 2<a<3 \text{ 또는 } \dots$$

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는 $a>\frac{3}{2}$ 이므로

$$k=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

04 해결단계

① 단계	주어진 극한값을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x)=x^2Q(x)$ ($Q(x)$ 는 다항함수) 꼴로 나타낸다.
② 단계	①단계에서 구한 함수 $f(x)$ 를 이용하여 $\neg$, $\leq$, $\geq$ 의 참거짓을 판별한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2-x}=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$ 이고, 다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(0)=0$

$$f(x)=xQ_1(x) \quad (\text{단, } Q_1(x) \text{는 다항함수})$$

라 하고 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xQ_1(x)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_1(x)}{x-1} = 0$$

이때, 극한값이 0으로 존재하고 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow -1$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} Q_1(x) = 0$ 이므로 $Q_1(0) = 0$

이때, $Q_1(x)$ 는 다항함수이므로

$Q_1(x) = xQ(x)$ (단, $Q(x)$ 는 다항함수)

라 하면

$$f(x) = x^2Q(x)$$

ㄱ. $f(0) = 0^2 \times Q(0) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, 0)$ 을 지난다. (참)

ㄴ. (반례) $f(x) = x^2$ 이라 하자.

$x^2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$, $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0-} [x^2] = \lim_{t \rightarrow 0+} [t] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0+} [x^2] = \lim_{t \rightarrow 0+} [t] = 0$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = 0$

또한, $[f(0)] = [0] = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [f(0)]$$

따라서 함수 $[f(x)]$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (거짓)

ㄷ. $g(x) = [|f(x)|]$ 라 하면

$$f(0) = 0 \text{이므로 } g(0) = [|f(0)|] = [0] = 0$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x) \text{ (단, } Q(x) \text{는 다항함수)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} Q(x)$$

$$= 0 \times Q(0) = 0$$

이고, 모든 실수 x 에 대하여 $|f(x)| \geq 0$ 이므로

$|f(x)| = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [|f(x)|] = \lim_{t \rightarrow 0+} [t] = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ 이므로 함수 $g(x)$, 즉

$[|f(x)|]$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

05 해결단계

① 단계	주어진 극한값으로부터 함수 $f(x)$ 의 인수를 구한 후, 함수 $f(x)$ 를 인수와 임의의 다항함수 $Q(x)$ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	①단계에서 구한 $f(x)$ 를 주어진 식에 대입하여 $x=1, 2, 3, \dots, 10$ 일 때의 $Q(x)$ 의 값의 부호를 구한다.
③ 단계	①단계에서 구한 함수 $f(x)$ 의 인수와 ②단계에서 구한 $Q(x)$ 의 값의 부호를 이용하여 방정식 $f(x)=0$ 이 닫힌구간 $[1, 10]$ 에서 적어도 m 개의 서로 다른 실근을 가질 때, m 의 최댓값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{(x-n)^n} = n \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{에서 극한값이 존재하고}$$

$x \rightarrow n$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow n} f(x) = 0$ 에서 $f(n) = 0$ ($\because f(x)$ 는 다항함수)

이므로 $f(x) = (x-n)f_1(x)$ ($f_1(x)$ 는 다항함수)라 하고

이 식을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{(x-n)^n} = \lim_{x \rightarrow n} \frac{(x-n)f_1(x)}{(x-n)^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow n} \frac{f_1(x)}{(x-n)^{n-1}} = n$$

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{f_1(x)}{(x-n)^{n-1}} = n \text{에서 극한값이 존재하고 } x \rightarrow n$$

일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow n} f_1(x) = 0$ 에서 $f_1(n) = 0$ ($\because f_1(x)$ 는 다항함수)

이므로 $f_1(x) = (x-n)f_2(x)$ ($f_2(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$f(x) = (x-n)^2f_2(x)$$

이와 같은 과정을 반복하면

$$f(x) = (x-n)^nf_n(x) \text{ (단, } f_n(x) \text{는 다항함수)}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 $n=1, 2, 3, \dots, 10$ 에 대하여 각각 성립하므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x) \quad (\text{단, } Q(x) \text{는 다항함수})$$

라 할 수 있고, $f(x)=0$ 에서

$$x=1, 2, 3, \dots, 10 \text{ 또는 } Q(x)=0$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)^2 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)^2(x-3)^3 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)$$

$$= (-1)^2 \times (-2)^3 \times (-3)^4 \times \dots \times (-9)^{10}Q(1) = 1$$

이때, $\frac{(-1)^2 \times (-2)^3 \times (-3)^4 \times \dots \times (-9)^{10}}{\text{양수 5개, 음수 4개의 곱}} > 0$ 이므로

$$Q(1) > 0$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)^2 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(x-3)^3 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)$$

$$= 1 \times (-1)^3 \times (-2)^4 \times \dots \times (-8)^{10}Q(2) = 2$$

이때, $\frac{1 \times (-1)^3 \times (-2)^4 \times \dots \times (-8)^{10}}{\text{양수 5개, 음수 4개의 곱}} > 0$ 이므로

$$Q(2) > 0$$

(iii) $n=3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{(x-3)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)}{(x-3)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(x-2)^2(x-4)^4 \times \dots \times (x-10)^{10}Q(x)$$

$$= 2 \times 1^2 \times (-1)^4 \times \dots \times (-7)^{10}Q(3) = 3$$

이때, $\frac{2 \times 1^2 \times (-1)^4 \times \dots \times (-7)^{10}}{\text{양수 6개, 음수 3개의 곱}} < 0$ 이므로

$$Q(3) < 0$$

(iv) $n=4$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{(x-4)^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-2)^2 \times \cdots \times (x-10)^{10} Q(x)}{(x-4)^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \{ (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \times (x-5)^5 \times \cdots \times (x-10)^{10} Q(x) \}$$

$$= 3 \times 2^2 \times 1^3 \times (-1)^5 \times \cdots \times (-6)^{10} Q(4) = 4$$

$$\text{이때, } 3 \times 2^2 \times 1^3 \times (-1)^5 \times \cdots \times (-6)^{10} < 0 \text{ 이므로}$$

$$Q(4) < 0 \quad \text{양수 6개, 음수 3개의 곱}$$

∴

(v) $n=10$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{f(x)}{(x-10)^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-1)(x-2)^2 \times \cdots \times (x-10)^{10} Q(x)}{(x-10)^{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 10} (x-1)(x-2)^2 \times \cdots \times (x-9)^9 Q(x)$$

$$= 9 \times 8^2 \times 7^3 \times \cdots \times 1^9 Q(10) = 10$$

$$\text{이때, } 9 \times 8^2 \times 7^3 \times \cdots \times 1^9 > 0 \text{ 이므로 } Q(10) > 0$$

(i) ~ (v)에서

$$Q(1) > 0, Q(2) > 0, Q(3) < 0, Q(4) < 0, Q(5) > 0,$$

$$Q(6) > 0, Q(7) < 0, Q(8) < 0, Q(9) > 0, Q(10) > 0$$

.....㉔

$Q(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이고, ㉔

에서 $Q(2)Q(3) < 0, Q(4)Q(5) < 0, Q(6)Q(7) < 0,$

$Q(8)Q(9) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$Q(x)=0$ 은 네 열린구간 $(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)$

에서 각각 적어도 하나씩의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[1, 10]$ 에서 적어도

$10+4=14$ (개)의 서로 다른 실근을 가지므로 m 의 값은

14이다. ▶ 14

06 해결단계

① 단계	원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선 $y=x+1$ 의 위치 관계를 기준으로 경우를 나누어 원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선 $y=x+1$ 로 이루어진 도형과 직선 $x+y=t$ 의 교점의 개수인 $f(t)$ 의 불연속인 점의 개수를 각각 구한다.
② 단계	함수 $f(t)$ 의 불연속인 점의 개수가 3인 경우를 찾아 이때의 함수 $f(t)$ 를 구한다.
③ 단계	함수 $f(t)$ $\{f(t)-k\}$ 의 불연속인 점의 개수가 최소가 되도록 하는 실수 k 의 값을 구한다.

좌표평면에서 세 집합 A, B, C 는 각각 직선 $y=x+1$, 원 $x^2+y^2=r^2$, 직선 $x+y=t$ 를 나타내는 도형이므로 집합 $(A \cup B) \cap C$ 의 원소의 개수인 $f(t)$ 는 직선 $y=x+1$ 과 원 $x^2+y^2=r^2$ 으로 이루어진 도형과 직선 $x+y=t$, 즉 $y=-x+t$ 의 교점의 개수이다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x+1$, 즉

$x-y+1=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때, 원 $x^2+y^2=r^2$ 의 반지름의 길이 r 와 d 의 대소 관계에 따라 원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선 $y=x+1$ 의 교점의 개수가

달라지므로 다음과 같이 경우를 나누어 $f(t)$ 의 연속성을 살펴보자.

(i) $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선

$y=x+1$ 이 만나지 않으

므로 오른쪽 그림과 같이

직선 $y=-x+t$ 가 원

$x^2+y^2=r^2$ 과 접할 때, 즉

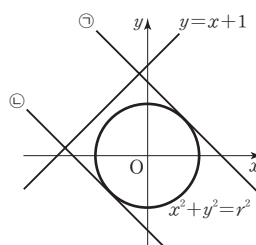
직선 ㉑ 또는 ㉒이 되도록

하는 t 의 값에서 함수

$f(t)$ 는 불연속이다.

그런데 함수 $f(t)$ 는 세 점에서 불연속이어야 하므로

모순이다.



(ii) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

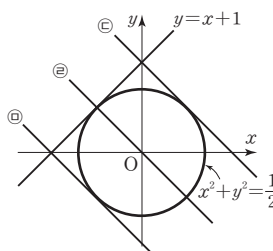
원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 과 직선

$y=x+1$ 이 한 점에서

만나므로 오른쪽 그림과

같이 직선 $y=-x+t$ 가

원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 과 접할



때와 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 과 직선 $y=x+1$ 의 접점을 지날

때, 즉 직선 ㉑ 또는 ㉒ 또는 ㉓이 되도록 하는 t 의 값

에서 함수 $f(t)$ 는 불연속이다.

(iii) $r > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선

$y=x+1$ 이 서로 다른

두 점에서 만나므로 오

른쪽 그림과 같이 직선

$y=-x+t$ 가

원 $x^2+y^2=r^2$ 과 접할

때와 원 $x^2+y^2=r^2$ 과

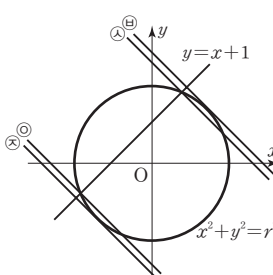
직선 $y=x+1$ 의 교점을 지날 때, 즉 직선 ㉑ 또는 ㉒

또는 ㉓ 또는 ㉔이 되도록 하는 t 의 값에서 함수 $f(t)$

는 불연속이다.

그런데 함수 $f(t)$ 는 세 점에서 불연속이어야 하므로

모순이다.



(i), (ii), (iii)에서 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 이때의 함수 $f(t)$ 를 구해 보자.

직선 $x+y=t$, 즉 $x+y-t=0$ 이 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 과 접하

면(㉑ 또는 ㉒) 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가

반지름의 길이인 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이어야 하므로

$$\frac{|-t|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

또한, 직선 $y=x+1$ 과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 의 접점을 구하면

$$x^2+(x+1)^2=\frac{1}{2} \text{에서 } 2x^2+2x+\frac{1}{2}=0$$

$$4x^2+4x+1=0, (2x+1)^2=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

즉, 직선 $x+y=t$ 가 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나면(㉔)

$$t=0$$

$$\therefore f(t)=\begin{cases} 1 & (t < -1) \\ 2 & (t = -1) \\ 3 & (-1 < t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 3 & (0 < t < 1) \\ 2 & (t = 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$$

함수 $f(t)$ 가 $t=-1, t=0, t=1$ 에서만 불연속이므로
 $t=-1, t=0, t=1$ 에서 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 의 연속성을 조사하면 된다.

① $t=-1$ 에서 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 가 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} f(t)\{f(t)-k\}=1-k,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} f(t)\{f(t)-k\}=3(3-k)=9-3k,$$

$$f(-1)\{f(-1)-k\}=2(2-k)=4-2k$$

$$\text{에서 } 1-k=9-3k=4-2k$$

$$1-k=9-3k \text{에서 } 2k=8$$

$$\therefore k=4$$

$$1-k=4-2k \text{에서 } k=3$$

즉, 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않으므로

함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 는 $t=-1$ 에서 불연속이다.

② $t=0$ 에서 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 가 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)\{f(t)-k\}=3(3-k)=9-3k,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)\{f(t)-k\}=3(3-k)=9-3k,$$

$$f(0)\{f(0)-k\}=2(2-k)=4-2k$$

$$\text{에서 } 9-3k=4-2k$$

$$\therefore k=5$$

즉, $k=5$ 이면 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 는 $t=0$ 에서 연속이다.

③ $t=1$ 에서 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 가 연속이려면

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)\{f(t)-k\}=3(3-k)=9-3k,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)\{f(t)-k\}=1-k,$$

$$f(1)\{f(1)-k\}=2(2-k)=4-2k$$

$$\text{에서 } 9-3k=1-k=4-2k$$

①과 마찬가지로 k 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 는 $t=1$ 에서 불연속이다.

①, ②, ③에서 함수 $f(t)\{f(t)-k\}$ 가 불연속인 점의 개수가 최소가 되려면 $k=5$ 이어야 한다. **답 5**

blacklabel 특강 참고

두 도형이 만나는 점의 개수 또는 방정식의 실근의 개수와 같이 자연수를 치역으로 하는 함수에서 연속성을 파악할 때는 도형이나 그래프를 움직이면서 연속 또는 불연속인 경우를 추측해야 한다. 두 도형 또는 그래프의 위치 관계가 바뀔 때 교점 또는 실근의 개수가 바뀌고, 개수는 1, 2, 3의 자연수이므로 이때 함수가 불연속이다. 따라서 한 도형 또는 그래프가 다른 도형 또는 그래프의 꼭짓점을 지나거나 접할 때를 기준으로 불연속인 점을 생각하면 접근이 쉬워진다.

이 문제에서도 두 도형 $y=x+1, x^2+y^2=r^2$ 으로 이루어진 도형과 직선 $x+y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 정의하였는데 r 의 값의 범위에 따라 그래프의 개형이 달라지므로 각각의 경우에 대하여 불연속인 점의 개수를 따져야 한다. 즉, 위와 같은 방법으로 불연속인 경우를 추측해 보면 직선 $x+y=t$ 가 ① 원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선 $y=x+1$ 의 교점을 지날 때 또는 ② 원 $x^2+y^2=r^2$ 과 접할 때이고, 실제로 구해 보면 ①, ②의 두 가지 경우에서 함수 $f(t)$ 가 불연속임을 알 수 있다.

이것이 수능

p. 25

1 ①

2 24

3 56

4 ③

1 해결단계

① 단계	연속의 정의를 이용하여 식을 세운 후, 극한의 성질을 이용하여 a 를 c 에 대한 식으로 나타낸다.
② 단계	①단계에서 구한 식과 a, c 사이의 관계식을 이용하여 b 를 c 에 대한 식으로 나타낸다.
③ 단계	$a+b+c$ 를 c 에 대한 식으로 나타낸 후, 최솟값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=c$ 에서 연속이 되려면 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)=f(c)$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2-a}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}}=4c \quad \dots\dots ㉠$$

이때, ㉠에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow c$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow c} (x^2-a)=0$ 에서 $a=c^2$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2-c^2}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}}$$

$$=\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^2-c^2)(\sqrt{x^2+b}+\sqrt{c^2+b})}{(\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b})(\sqrt{x^2+b}+\sqrt{c^2+b})}$$

$$=\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^2-c^2)(\sqrt{x^2+b}+\sqrt{c^2+b})}{x^2-c^2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow c} (\sqrt{x^2+b}+\sqrt{c^2+b})$$

$$=2\sqrt{c^2+b}=4c$$

$\sqrt{c^2+b} \geq 0$ 이므로 $c \geq 0$ 이고, 위의 식의 양변을 제곱하면

$$4c^2+4b=16c^2, 12c^2=4b \quad \therefore b=3c^2$$

따라서

$$a+b+c=4c^2+c \quad (\because a=c^2, b=3c^2)$$

이고 $c \geq 0$ 에서 $4c^2+c \geq 0$

즉, $a+b+c$ 는 $c=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다. **답 ①**

2 해결단계

① 단계	조건 (가)를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 미정계를 이용하여 나타낸다.
② 단계	조건 (나)를 이용하여 미정계수의 값을 구한 후, 함수 $f(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$f(4)$ 의 값을 구한다.

조건 (가)에서 함수 $\frac{x}{f(x)}$ 가 $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이고,

$f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x)=a(x-1)(x-2) \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

라 할 수 있다.

위의 식을 조건 (나)에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} a(x-1) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a=4$$

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$ 이므로

$$f(4)=4 \times 3 \times 2=24$$

답 24

3 해결단계

① 단계	조건 (가)를 이용하여 실수 a 의 값의 범위를 구한다.
② 단계	조건 (나)의 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속임을 이용하여 조건에 맞는 a 의 값을 모두 구한 후, 그 곱을 구한다.

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$$f(0)f(2)<0 \text{에서 } a(a-12)<0$$

$$\therefore 0 < a < 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-8x+a)f(x+4) \\ &= (a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\} \\ &= a(a-7)(a^2+a-16), \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-8x+a)(2x+5a) \\ &= (a^2-8a+a)(2a+5a) \\ &= 7a^2(a-7), \end{aligned}$$

$$f(a)g(a)=(a^2-7a) \times 7a=7a^2(a-7)$$

이므로

$$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$$

$$a(a-7)(a^2-6a-16)=0$$

$$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$$

$$\therefore a=7 \text{ 또는 } a=8 \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$7 \times 8=56$$

답 56

4 해결단계

① 단계	$k=1$, $k=-1$, $k \neq 1$ 이고 $k \neq -1$ 인 경우로 나누어 함수 $f(x)f(kx)$ 의 $x=2$ 에서의 연속성을 파악하고, $x=2$ 에서 연속이기 위한 k 의 조건을 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 조건에 따라 k 의 값을 모두 구한 후, 그 곱을 구한다.

(i) $k=1$ 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x)=-2 \times (-2)=4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x)=-6 \times (-6)=36$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(ii) $k=-1$ 인 경우

$-x=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow -2+$,

$x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow -2-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(-x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) \\ &= -2 \times (-2)=4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(-x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \cdot \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) \\ &= -6 \times (-6)=36 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(-x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $k \neq -1$, $k \neq 1$ 인 경우

함수 $f(kx)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 함수

$f(x)f(kx)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(kx) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(kx) \\ &= f(2)f(2k) \end{aligned}$$

$$-2f(2k)=-6f(2k)=-2f(2k)$$

$$\therefore f(2k)=0$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)f(kx)$ 가 $x=2$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 k 는 $f(2k)=0$ 을 만족시킨다.

이때, $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$\frac{1}{2}x^2-8=0 \text{에서 } x^2=16$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=4$$

$$-x^2+2=0 \text{에서 } x^2=2$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

따라서 $f(2k)=0$ 을 만족시키는 k 의 값은

$$-2, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 그 곱은

$$-2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

답 ③

II

미분

03 미분계수와 도함수

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp. 29~30

01 51	02 ②	03 ②	04 ⑤	05 -13
06 $\frac{5}{2}$	07 ④	08 ⑤	09 5	10 15
11 ③	12 ③	13 ③	14 ④	15 -60
16 ⑤				

01 자연수 n 에 대하여 구간 $[n, n+1]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 평균변화율이 $n+1$ 이므로

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=n+1$$

$$\therefore f(n+1)-f(n)=n+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 구간 $[1, 100]$ 에서의 평균변화율은

$$\frac{f(100)-f(1)}{100-1}=\frac{\{f(100)-f(99)\}+\{f(99)-f(98)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{99}$$

$$=\frac{100+99+\cdots+2}{99}=\frac{99(2+100)}{2}$$

$$=\frac{102}{2}=51$$

답 51

02 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율이 $2a^2+3a$ 이므로

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=2a^2+3a, f(a)-f(0)=2a^3+3a^2$$

$$f(a)=2a^3+3a^2+f(0)$$

이때, $f(0)$ 은 상수이므로 $f(x)=2x^3+3x^2+f(0)$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x$ 이므로

$$f'(1)=6+6=12$$

답 ②

03 $f(a+h)-f(a)<f'(a)\times h$ 에서

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<f'(a) (\because h>0)$$

이므로 함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+h$ 까지 변할 때의 평균변화율이 $x=a$ 에서의 미분계수인 $f'(a)$ 보다 작아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $(a, f(a)),$

$(a+h, f(a+h))$ 를 지나는 직

선의 기울기가 점 $(a, f(a))$ 에

서의 접선의 기울기보다 작아야

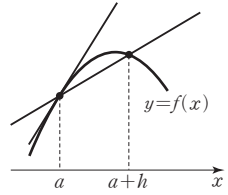
하므로 오른쪽 그림과 같이 $x>0$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

위로 볼록해야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ② $f(x)=\sqrt{x}$ 이다.

답 ②



04 두 함수 $f(x)=x^5+x^3+x, g(x)=x^6+x^4+x^2$ 에 대하여 $f(1)=g(1)=3$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)-g(1-h)+g(1)}{3h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times \frac{2}{3} - \frac{g(1-h)-g(1)}{-h} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$=\frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} + \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$$

$$=\frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1)$$

이때, $f'(x)=5x^4+3x^2+1, g'(x)=6x^5+4x^3+2x$ 이므로

$$f'(1)=5+3+1=9, g'(1)=6+4+2=12$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{2}{3} \times 9 + \frac{1}{3} \times 12 = 10$$

답 ⑤

05 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27f(x^2)-x^3f(9)}{x-3}$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27f(x^2)-27f(9)-x^3f(9)+27f(9)}{x-3}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27\{f(x^2)-f(9)\}-f(9)(x^3-27)}{x-3}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{27\{f(x^2)-f(9)\}}{x-3} - f(9)(x^2+3x+9) \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x^2)-f(9)}{x^2-9} \times 27(x+3) - f(9)(x^2+3x+9) \right\}$$

$$=162f'(9)-27f(9)$$

$$=162 \times (-2) - 27f(9) = 27$$

$$-12-f(9)=1$$

$$\therefore f(9)=-13$$

답 -13

blacklabel 특강 필수 원리

미분계수의 정의에 의하여 $f'(a)=\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이므로 주어진 식을 $\lim_{\triangle \rightarrow a} \frac{f(\triangle)-f(a)}{\triangle-a}$ 꼴로 변형하여 해결한다.

06 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(2 + \frac{1}{3n}\right) - f(2) \right\}$ 에서 $\frac{1}{3n} = h$ 로 놓으면
 $n = \frac{1}{3h}$ 이고, $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(2 + \frac{1}{3n}\right) - f(2) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{6h} \{f(2+h) - f(2)\}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1}{6} f'(2)$$

 한편, $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 3$ 이므로
 $f'(2) = 3 \times 2^2 + 3 = 15$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left\{ f\left(2 + \frac{1}{3n}\right) - f(2) \right\} = \frac{1}{6} f'(2)$$

$$= \frac{1}{6} \times 15 = \frac{5}{2} \quad \text{답 } \frac{5}{2}$$

07 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(3, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로
 $f(3) = -1, f'(3) = 4$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{3h} \times 3$$

$$= 3f'(3)$$

$$= 3 \times 4 = 12 \quad \text{답 } ④$$

08 $\neg. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$ 에서 $f'(1) = 0$
 즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이다. (참)
 $\cup. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$ 에서 $f'(1) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \frac{1}{2} \times \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} f'(1) + \frac{1}{2} f'(1)$$

$$= f'(1) = 0 \text{ (참)}$$

 $\cap. f(x) = |x-1|$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1+h-1| - |1-h-1|}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0 \text{ (}\because |h| = |-h|\text{) (참)}$$

 따라서 $\neg, \cup, \cap$ 모두 옳다. 답 ⑤

09 (i) 함수 $y=f(x)$ 는 $x=2, x=3$ 에서 불연속이므로
 $m=2$
 (ii) 불연속인 점과 뾰족한 점에서 미분가능하지 않다.
 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2, x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 $n=3$
 (i), (ii)에서
 $m+n=2+3=5$ 답 5

10 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x^3 + 3x^2 + bx) = \lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2 + 2bx + 3) = a + 2b + 3$$

$$1 + 3 + b = a + 2b + 3$$

$$\therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

 또한, $x=1$ 에서의 미분계수가 존재해야 한다.
 즉, $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x + b & (x < 1) \\ 2ax + 2b & (x > 1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x)$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (3x^2 + 6x + b) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2ax + 2b)$$

$$3 + 6 + b = 2a + 2b, 2a + b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면
 $a=8, b=-7$

$$\therefore a-b=8-(-7)=15$$
 답 15

• 다른풀이 •

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

 에서 $a+b=1$ ①
 또한, $x=1$ 에서 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^3 + 3x^2 + bx) - (a + 2b + 3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^3 + 3x^2 + bx) - (b + 4)}{x-1} \text{ (}\because \textcircled{1}\text{)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x^2 + 4x + b + 4)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + 4x + b + 4) = b + 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax^2 + 2bx + 3) - (a + 2b + 3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(ax + a + 2b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (ax + a + 2b) = 2a + 2b \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $2a + 2b = b + 9$, 즉 $2a + b = 9$
 위의 식과 $\textcircled{1}$ 을 연립하여 풀면
 $a=8, b=-7 \quad \therefore a-b=8-(-7)=15$

11 $\frac{1}{n}=t$ 로 놓으면 $n=\frac{1}{t}$ 이고 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x - \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x) - f(x-t) + f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \frac{f(x) - f(x-t)}{-t} \right\} \\ &= f'(x) + f'(x) \quad (\because f(x) \text{는 다항함수}) \\ &= 2f'(x) = 2x + 4 \\ &\text{따라서 } f'(x) = x + 2 \text{이므로} \\ &f'(1) = 3 \end{aligned}$$

답 ③

12 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$ ㉠

㉠에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

㉠에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1+y) = f(1) + f(y) + 2y - 1$$

$$\therefore f(1+y) - f(1) = f(y) + 2y - 1$$

이때, $f'(1) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1+y) - f(1)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + 2y - 1}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + 2y - f(0)}{y} \quad (\because f(0) = 1) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(y) - f(0)}{y} + 2 \right\} \\ &= f'(0) + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = -1$$

답 ③

• 다른풀이 •

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1 \quad \text{.....㉡}$$

$f'(1) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h - 1 - f(1)}{h} \quad (\because \text{㉡}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - 1}{h} + 2 \right\} = 1 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} &= 1 - 2 = -1 \quad \text{.....㉢} \\ \therefore f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) - 1 - f(0)}{h} \quad (\because \text{㉡}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = -1 \quad (\because \text{㉢}) \end{aligned}$$

13 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면 도함수 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

조건 ㉠의 $2f(x) = xf'(x) - 4$ 에서 좌변과 우변은 모두

n 차식이므로 최고차항의 계수를 비교하면

$$2a = an, \quad a(n-2) = 0$$

$$\therefore n = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

즉, $f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

이것을 $2f(x) = xf'(x) - 4$ 에 대입하면

$$2ax^2 + 2bx + 2c = 2ax^2 + bx - 4$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2b = b, \quad 2c = -4$$

$$\therefore b = 0, \quad c = -2$$

또한, 조건 ㉡에서 $f(1) = 1$ 이므로

$$f(1) = a + b + c = 1$$

$$a + 0 + (-2) = 1 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 2$$

$$\therefore f(5) = 3 \times 25 - 2 = 73$$

답 ③

14 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 6)$ 에서 원점을 지나는 직선에 접하므로 두 점 $(0, 0), (2, 6)$ 을 지나는 직선이 점 $(2, 6)$ 에서의 접선과 같다.

$$f(2) = 6, \quad f'(2) = \frac{6-0}{2-0} = 3$$

$$g(x) = x^3 f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(2) &= 12f(2) + 8f'(2) \\ &= 12 \times 6 + 8 \times 3 = 96 \end{aligned}$$

답 ④

15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = 5$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 3$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 2\} = 0 \text{이므로 } f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 5 \text{이므로}$$

$$f'(3) = 5$$

$$\text{한편, } f(x) = f(-x) \text{이므로 } f(-3) = f(3) = 2$$

또한,

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \quad (\because f(x) = f(-x)) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ &= -f'(x) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(-3) = -f'(3) = -5$$

따라서 $g(x) = \{f(x)\}^3$ 에서

$$g'(x) = 3\{f(x)\}^2 \times f'(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(-3) &= 3\{f(-3)\}^2 \times f'(-3) \\ &= 3 \times 2^2 \times (-5) = -60 \end{aligned}$$

답 -60

16 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-a}{x-2}=1$ 에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-a\}=0$ 이므로 $f(2)=a$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-a}{x-2}=1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=1$

$\therefore f'(2)=1$

이때, 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가

$bx+3$ 이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ (단, $Q(x)$ 는 다항식)

.....㉠

㉠에 $x=2$ 를 대입하면

$f(2)=2b+3=a$

.....㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

위의 식에 $x=2$ 를 대입하면

$f'(2)=b=1$

$b=1$ 을 ㉡에 대입하면

$a=2 \times 1 + 3 = 5$

$\therefore ab=5 \times 1 = 5$

답 ⑤

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 31~35

01 ⑤	02 ②	03 ③	04 ⑤	05 ⑤
06 $\frac{13}{5}$	07 $\frac{1}{3}$	08 ③	09 ②	10 ⑤
11 ②	12 ②	13 ③	14 ③	15 2
16 -2	17 90	18 550	19 ①	20 13
21 6	22 19	23 19	24 9	25 ③
26 ①	27 16	28 $-\frac{2}{5}$	29 ①	30 5
31 24	32 7	33 -11	34 ⑤	35 104

01 함수 $f(x)=x^2+2x$ 에 대하여

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(b^2+2b)-(a^2+2a)}{b-a} \\ &= \frac{b^2-a^2+2b-2a}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)+2(b-a)}{b-a} \\ &= a+b+2 \end{aligned}$$

이때, $a+b=2c$ 이므로 $m=2c+2$ ㉠

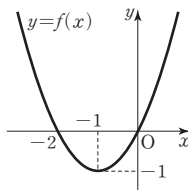
ㄱ. $m=0$ 이면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ 에서

$f(a)=f(b)$

이때, 함수 $f(x)=x^2+2x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

$a < b$ 이므로

$a < -1, b > -1$ (참)



ㄴ. $c > -1$ 이면

$$2c > -2, 2c+2 > 0$$

$\therefore m > 0$ ($\because$ ㉠) (참)

ㄷ. $f(x)=x^2+2x$ 에서 $f'(x)=2x+2$

$$\therefore f'(c)=2c+2$$

이때, ㉠에서 $m=2c+2$ 이므로 $f'(c)=m$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

02 함수 $f(x)=x^3-x+1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(-1)}{a+1} &= \frac{a^3-a+1-1}{a+1} = \frac{a(a^2-1)}{a+1} \\ &= \frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} = a(a-1) \end{aligned}$$

$f'(x)=3x^2-1$ 이므로 $f'(a)=3a^2-1$

이때, $\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(a)$ 에서

$$a(a-1)=3a^2-1, 2a^2+a-1=0$$

$(a+1)(2a-1)=0$ 평균변화율이 존재하려면 $a \neq -1$ 이어야 한다.

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \neq -1) \quad \therefore A = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

따라서 조건을 만족시키는 집합 A 의 원소의 개수는 1이다.

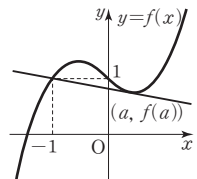
답 ②

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 -1 에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}$ 이다. 그런데 $\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(a)$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 점 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.

이때, 점 $(-1, 1)$ 을 지나면서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선은 하나밖에 없으므로 집합 A 의 원소의 개수는 1임을 알 수 있다.



03 ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로 $f(3+x)=f(3-x)$ 이다.

이때, $x=4$ 이면 $f(7)=f(-1)$ 이므로

$$(\text{평균변화율}) = \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)} = 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로

$f(x)=p(x-3)^2+q$ (단, p, q 는 상수, $p \neq 0$)

.....㉠

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=2p(x-3)$ 이고 $a+b=6$ 에서 $b=6-a$ 이므로

$$f'(a)=2p(a-3),$$

$$f'(b)=f'(6-a)=-2p(a-3)$$

$$\therefore f'(a)+f'(b)=2p(a-3)-2p(a-3)=0 \quad (\text{참})$$

ㄷ, ㄴ에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} f'(k-3) &= \sum_{k=1}^{15} 2p(k-6) = 2p \sum_{k=1}^{15} (k-6) \\ &= 2p \left(\frac{15 \times 16}{2} - 6 \times 15 \right) \\ &= 60p \neq 0 \quad (\because p \neq 0) \quad (\text{거짓})\end{aligned}$$

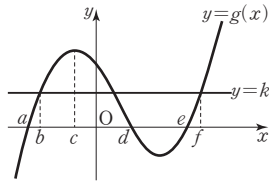
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

•다른풀이•

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } f(-1) &= p(-1-3)^2 + q = 16p + q \\ f(7) &= p(7-3)^2 + q = 16p + q \\ \text{즉, } f(-1) &= f(7) \text{이므로} \\ (\text{평균변화율}) &= \frac{f(7) - f(-1)}{7 - (-1)} = 0 \quad (\text{참})\end{aligned}$$

- 04** 다음 그림에서 x 좌표가 a, b, c, d, e, f 인 점에서의 접선의 기울기를 살펴보면 $0 < g'(b) < g'(a)$, $g'(c) = 0$, $g'(d) < 0$, $0 < g'(e) < g'(f)$ 이다.



- ① $g'(a) > g'(d)$ (거짓)
- ② $g'(b) > g'(c)$ (거짓)
- ③ 두 점 $(a, g(a))$, $(f, g(f))$ 를 지나는 직선의 기울기는 양수이므로 $\frac{g(f) - g(a)}{f - a} > 0 > g'(d)$ (거짓)
- ④ 두 점 $(d, g(d))$, $(f, g(f))$ 를 지나는 직선의 기울기는 점 $(f, g(f))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\frac{g(f) - g(d)}{f - d} < g'(f)$ (거짓)
- ⑤ 두 점 $(b, g(b))$, $(e, g(e))$ 를 지나는 직선의 기울기는 음수이므로 $\frac{g(e) - g(b)}{e - b} < 0 < g'(b)$ (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

- 05** ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 (b, b) 에서의 접선의 기울기는 두 점 $(0, 0)$, (b, b) 를 지나는 직선의 기울기보다 크므로 $f'(b) > 1$ (참)
- ㄴ. $0 < a < b$ 이고, 주어진 그래프에서 $0 < f'(a) < f'(b)$ 이므로 $af'(a) < bf'(b)$
 $\therefore \frac{f'(a)}{b} < \frac{f'(b)}{a}$ (참)

ㄷ. $0 < a < b$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$$

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변하는 동안 접선의 기울기는 점점 커지므로

$$f'(\sqrt{ab}) < f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

- 06** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 7x}{2f(x) - 4x} = \frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 7x}{2f(x) - 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} + 7}{2 \times \frac{f(x)}{x} - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + 7}{2 \times \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 4} \\ &= \frac{f'(0) + 7}{2f'(0) - 4} = 8\end{aligned}$$

$$8\{2f'(0) - 4\} = f'(0) + 7, \quad 15f'(0) = 39$$

$$\therefore f'(0) = \frac{13}{5}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = \frac{13}{5}$ 이다.

답 $\frac{13}{5}$

- 07** $f(0) = \frac{0}{g(0) + 4} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{g(h) + 4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(h) + 4}\end{aligned}$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = g(0)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(h) + 4} = \frac{1}{g(0) + 4} \\ &= \frac{1}{-1 + 4} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

- 08** $F(x) = \{f(x)\}^m$, $G(x) = \{g(x)\}^n$ 이라 하면 $F(1) = \{f(1)\}^m = 1$, $G(1) = \{g(1)\}^n = 1$ 이고 $F'(x) = m\{f(x)\}^{m-1} \times f'(x)$, $G'(x) = n\{g(x)\}^{n-1} \times g'(x)$
 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^m - \{g(x)\}^n}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - G(x)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(x) - G(1)}{x-1} \\
 &= F'(1) - G'(1) \\
 &= m\{f(1)\}^{m-1} \times f'(1) - n\{g(1)\}^{n-1} \times g'(1) \\
 &= 2m - 3n = 50 \quad (\because \text{조건 } \textcircled{7}) \quad \dots\dots\textcircled{7} \\
 &\text{이때, } m+n=100 \text{이므로 } \textcircled{7} \text{과 연립하여 풀면} \\
 &m=70, n=30 \\
 &\therefore \frac{n}{m} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

답 ③

09 $f(x) = x^{2n+1}$, $g(x) = x^{2n-1}$ 이라 하면
 $f(3) = 3^{2n+1}$, $g(3) = 3^{2n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^{2n+1} - 3^{2n+1}}{x^{2n-1} - 3^{2n-1}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{g(x) - g(3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{f(x) - f(3)}{x-3}}{\frac{g(x) - g(3)}{x-3}} \\
 &= \frac{f'(3)}{g'(3)} = 11 \\
 f(x) &= x^{2n+1}, g(x) = x^{2n-1} \text{에서} \\
 f'(x) &= (2n+1)x^{2n}, g'(x) = (2n-1)x^{2n-2} \text{이므로} \\
 f'(3) &= (2n+1)3^{2n}, g'(3) = (2n-1)3^{2n-2} \\
 \frac{f'(3)}{g'(3)} &= 11 \text{에서 } \frac{(2n+1)3^{2n}}{(2n-1)3^{2n-2}} = 11 \\
 \frac{9(2n+1)}{2n-1} &= 11, 9(2n+1) = 11(2n-1) \\
 18n+9 &= 22n-11, 4n=20 \quad \therefore n=5
 \end{aligned}$$

답 ②

10 $\neg$. $f(-x) = -f(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $f(0) = -f(0) \quad \therefore f(0) = 0$
 $f(-x) = -f(x)$ 에서 $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} &= \frac{2f(2)}{4} = \frac{f(2)}{2} \\
 &= \frac{f(2) - f(0)}{2-0}
 \end{aligned}$$
즉, 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -2 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율과 0 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은 같다. (참)
 $\neg$. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x) = g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-x-h) - g(-x)}{-h} \\
 &= -g'(-x)
 \end{aligned}$$
이때, $a+b=0$ 에서 $a=-b$ 이므로
 $g'(a) = g'(-b) = -g'(b)$
 $\therefore g'(a) + g'(b) = 0$ (참)

$$\begin{aligned}
 \neg. F(-x) &= f(-x)g(-x) \\
 &= -f(x)g(x) = -F(x) \\
 \text{이므로} \\
 F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-F(-x-h) + F(-x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-x-h) - F(-x)}{-h} \\
 &= F'(-x) \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

따라서 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 모두 옳다.

답 ⑤

• 다른풀이 •

$\neg$. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(-x-h) + f(-x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} \\
 &= f'(-x) \\
 \neg \text{에서 } g'(x) &= -g'(-x) \text{이므로} \\
 g'(-x) &= -g'(x) \\
 \text{이때, } F(x) &= f(x)g(x) \text{에서} \\
 F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로} \\
 F'(-x) &= f'(-x)g(-x) + f(-x)g'(-x) \\
 &= f'(x)g(x) - f(x) \times \{-g'(x)\} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 &= F'(x) \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

11 $\neg$. $F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 f(h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} h f(h) = 0
 \end{aligned}$$
따라서 함수 $F(x) = x^2 f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 $\neg$. $G'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(0+h) - G(0)}{h}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h^{2020} f(h)} - \frac{1}{-1}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^{2020} f(h)}{h^{2020} f(h) - 1}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2020} f(h)}{h \{h^{2020} f(h) - 1\}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2019} f(h)}{h^{2020} f(h) - 1} = 0
 \end{aligned}$$
따라서 함수 $G(x) = \frac{1}{x^{2020} f(x) - 1}$ 은 $x=0$ 에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases} \text{라 하면}$$

$$H(x) = \begin{cases} -x|x-1| & (x < 0) \\ x|x-1| & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{H(0+h) - H(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h|h-1|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (-|h-1|) = -1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{H(0+h) - H(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h|h-1|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} |h-1| = 1$$

따라서 $H(x) = |x-1|f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ이다. **답 ②**

12 $f(x) = x^2 - x$ 이므로 함수

$g(x) = |f(x)| = |x^2 - x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $g(1) = f(1) = 0$ 이고

$g(x) = |f(x)|$

$$= \begin{cases} f(x) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ -f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h-1) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h+1) = 1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h)}{h}$$

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}$ 의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $h^2 = k$ 로 놓으면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $k \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h^2) - g(1)}{h^2}$$

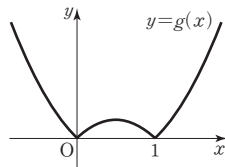
$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{g(1+k) - g(1)}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = f'(1) \text{ (참)}$$

ㄷ. $f'(x) = 2x - 1$ 에서 $2f'(1) = 2 \times 1 = 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(1+h) - f(1-h)}{h}$$



$$= - \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= -f'(1) + f'(1) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) + f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= f'(1) - f'(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} \neq 2f'(1) \text{이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답 ②**

• 다른풀이 •

ㄴ. $f(x) = x^2 - x$ 에서 $f'(x) = 2x - 1$

$$\therefore f'(1) = 1$$

$g(x) = |f(x)| = |x^2 - x|$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h^2) - g(1)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(1+h^2)^2 - (1+h^2)|}{h^2} \quad (\because g(1) = 0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^4 + h^2|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2|1+h^2|}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} |1+h^2| = 1$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h^2) - g(1)}{h^2} = f'(1) \text{ (참)}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|(1+h)^2 - (1+h)| - |(1-h)^2 - (1-h)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h^2 + h| - |h^2 - h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + h) - (h^2 - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2h) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|(1+h)^2 - (1+h)| - |(1-h)^2 - (1-h)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h^2 + h| - |h^2 - h|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + h + (h^2 - h)}{h}$$

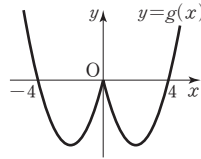
$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2h = 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 0$$

그런데 $2f'(1) = 2$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} \neq 2f'(1) \text{ (거짓)}$$

13 $f(x)=x^2-4x$ 에 대하여
 $g(x)=f(|x|)$ 이므로
 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽



그림과 같다.
 ㄱ. 함수 $y=g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이므로 임의의
 실수 t 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow t} g(x) = g(t)$ (참)

ㄴ. (반례) $t=0$ 이면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 4|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} (h + 4) = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 4|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - 4) = -4 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ 의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. $g(x)=x^2-4|x|$ 이므로 $t \neq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여
 함수 $g(t)$ 는 미분가능하다.

$t=0$ 이면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(h) - g(-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 4|h| - (h^2 - 4|-h|)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4|h| + 4|-h|}{2h} = 0 \quad (\because |h| = |-h|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h) - g(-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 4|h| - (h^2 - 4|-h|)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-4|h| + 4|-h|}{2h} = 0 \quad (\because |h| = |-h|) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(-h)}{2h} = 0$$

따라서 임의의 실수 t 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t-h)}{2h} \text{의 값이 존재한다. (참)}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

14 ㄱ. $h_1(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\text{또한, } h_1(2) = \frac{g(2)}{f(2)} = \frac{0}{2} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h_1(x) = h_1(2)$$

따라서 함수 $h_1(x)$, 즉 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

(참)

ㄴ. $h_2(x) = (g \circ f)(x)$ 라 하고 $f(x)=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow 1^-$ 일 때 $t=0$ 이고 $x \rightarrow 1^+$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(f(x)) = g(0) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = g(1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} h_2(x) = -1$$

또한, $h_2(1) = (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = -1$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} h_2(x) = h_2(1)$$

따라서 함수 $h_2(x)$, 즉 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

ㄷ. $h_3(x) = f(x)g(x)$ 라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가
 각각 $x=4$ 에서 연속이므로 함수 $h_3(x)$ 도 $x=4$ 에서
 연속이다.

$3 < x < 4$ 에서 $f(x) = x-3$, $g(x) = -x+4$

$4 \leq x < 5$ 에서 $f(x) = x-3$, $g(x) = x-4$

$$\text{즉, } h_3(x) = \begin{cases} (x-3)(-x+4) & (3 < x < 4) \\ (x-3)(x-4) & (4 \leq x < 5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{h_3(x) - h_3(4)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-3)(-x+4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x-3)(x-4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \{-(x-3)\} = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{h_3(x) - h_3(4)}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (x-3) = 1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $h_3(x)$, 즉 $f(x)g(x)$ 는 $x=4$ 에서 미분
 계수가 존재하지 않으므로 $x=4$ 에서 미분가능하지 않
 다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15 $g(x) = (x^n + k)f(x)$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} (x^n + k)(x^2 - 2) & (x < 0) \\ (x^n + k)(x + 5) & (x \geq 0) \end{cases}$$

(i) 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \text{이어야 한다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^n + k)(x^2 - 2) = -2k,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^n + k)(x + 5) = 5k,$$

$$g(0) = 5k \text{에서 } -2k = 5k \quad \therefore k = 0$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} x^n(x^2 - 2) & (x < 0) \\ x^n(x + 5) & (x \geq 0) \end{cases}$$

(ii) $x=0$ 에서의 미분계수가 존재해야 하므로

① $n=1$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} x(x^2 - 2) & (x < 0) \\ x(x + 5) & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & (x < 0) \\ 2x + 5 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 2) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+5) = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) \text{의 값이 존재하지 않는다.}$$

② $n \geq 2$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} x^n(x^2-2) & (x < 0) \\ x^n(x+5) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^{n+2}-2x^n & (x < 0) \\ x^{n+1}+5x^n & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$g'(x) = \begin{cases} (n+2)x^{n+1}-2nx^{n-1} & (x < 0) \\ (n+1)x^n+5nx^{n-1} & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \{(n+2)x^{n+1}-2nx^{n-1}\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \{(n+1)x^n+5nx^{n-1}\} = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x)$ 이므로 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재한다.

①, ②에서 $n \geq 2$ 이면 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재한다.

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최솟값은 2이다. 답 2

16 $f(x)=[x](x^2+ax+b)$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ x^2+ax+b & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+ax+b) = 1+a+b$$

$$0 = 1+a+b \quad \therefore a+b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하려면 $f'(1)$ 이 존재해야 한다.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ 2x+a & (1 < x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \text{에서}$$

$$0 = 2+a \quad \therefore a = -2$$

이것을 ①에 대입하면

$$-2+b = -1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore ab = (-2) \times 1 = -2$$

답 -2

17 조건 ④에서 $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$f(-1)=f(-1+4)=f(3)$$

이때, 조건 ⑦에서

$$f(x)=ax^3+bx^2-3x+1 \quad (-1 \leq x \leq 3) \text{이므로}$$

$$-a+b+4=27a+9b-8$$

$$\therefore 7a+2b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하고

$$f'(x)=3ax^2+2bx-3 \text{이므로}$$

$$f'(-1)=f'(3) \text{에서}$$

$$3a-2b-3=27a+6b-3$$

$$\therefore 3a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, b=-9$

$$\therefore a^2+b^2=3^2+(-9)^2=9+81=90$$

답 90

18 $g(x)=|f(x)-4x-5|+f(x)+4x+5$ 이므로

$$f(x) < 4x+5 \text{이면 } g(x)=8x+10,$$

$$f(x) \geq 4x+5 \text{이면 } g(x)=2f(x)$$

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 함수

$g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

두 함수 $y=2f(x)$ 와 $y=8x+10$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하면 $x=k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이고 미분계수 $g'(k)$ 가 존재한다.

(i) $x=k$ 에서 연속일 때,

$$8k+10=2(2k^3+ak+5)$$

$$\therefore 4k^3+2(a-4)k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $g'(k)$ 가 존재할 때,

$$f(x) < 4x+5 \text{이면 } g'(x)=8,$$

$$f(x) > 4x+5 \text{이면 } g'(x)=2f'(x)=2(6x^2+a)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} g'(x) \text{에서}$$

$$8=2(6k^2+a), \quad 4=6k^2+a$$

$$\therefore a=4-6k^2$$

이것을 ①에 대입하면

$$4k^3+2(-6k^2)k=0, \quad k^3=0$$

$$\therefore k=0, a=4$$

(i), (ii)에서 $f(x)=2x^3+4x+5$ 이므로

$$g(x)=|f(x)-4x-5|+f(x)+4x+5$$

$$=|2x^3|+2x^3+8x+10$$

$$\therefore g(5)=|2 \times 5^3|+2 \times 5^3+8 \times 5+10$$

$$=250+250+50=550$$

답 550

• 다른풀이 •

$g(x)=|f(x)-4x-5|+f(x)+4x+5$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하려면 함수 $y=|f(x)-4x-5|$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능해야 한다.

$$h(x)=|f(x)-4x-5|=|2x^3+(a-4)x| \text{라 하면}$$

$$h(x)=0 \text{에서 } 2x^3+(a-4)x=0$$

$$x(2x^2+a-4)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a < 4$ 일 때,

방정식 ①은 서로 다른 세 실

근을 가지므로 함수 $y=h(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같

고 모든 실수에서 미분가능하

지 않다.

(ii) $a \geq 4$ 일 때,

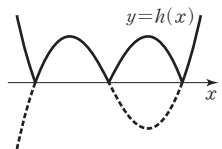
방정식 ①의 근은 $x=0$ 뿐이므로 함수 $y=h(x)$ 는

$x \neq 0$ 인 모든 실수에서 미분가능하다.

$x=0$ 에서 미분가능해야 하므로

$$h(x) = \begin{cases} -2x^3-(a-4)x & (x < 0) \\ 2x^3+(a-4)x & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서



$$h'(x) = \begin{cases} -6x^2 - a + 4 & (x < 0) \\ 6x^2 + a - 4 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-6x^2 - a + 4) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (6x^2 + a - 4)$$

$$-a + 4 = a - 4 \quad \therefore a = 4$$

(i), (ii)에서 $a=4$ 이므로 $f(x)=2x^3+4x+5$

19 $|x^2-2x|=0$ 에서

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$ 에서 최댓값이 1이므로 직선 $y=1$ 과 함수 $y=x^2-2x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-2x=1 \quad \therefore x=1-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1+\sqrt{2}$$

즉, 함수 $y=|x^2-2x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 함수 $y=|x^2-2x|$ 의 최댓값이 $g(t)$

이고, 구간의 길이가 2이므로

$$t \leq 1-\sqrt{2} \text{ 일 때, } g(t)=t^2-2t$$

$$1-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}-1 \text{ 일 때, } g(t)=1$$

$$t \geq \sqrt{2}-1 \text{ 일 때, } g(t)=(t+2)^2-2(t+2)=t^2+2t$$

ㄱ. 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y 축에 대하여 대칭이다.

즉, $g(-t)=g(t)$ 이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 $t=1-\sqrt{2}$, $t=\sqrt{2}-1$ 에서 미분가능하지 않으므로 k 의 개수는 2이다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } g'(t) = \begin{cases} 2t-2 & (t < 1-\sqrt{2}) \\ 0 & (1-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}-1) \text{ 이므로} \\ 2t+2 & (t > \sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$$|g'(t)|=2 \text{ 에서 } |2t-2|=2 \text{ 또는 } |2t+2|=2$$

$$|2t-2|=2 \text{ 에서 } 2t-2=\pm 2$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

그런데 $t < 1-\sqrt{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$|2t+2|=2 \text{ 에서 } 2t+2=\pm 2$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=-2$$

그런데 $t > \sqrt{2}-1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $|g'(t)|=2$ 를 만족시키는 t 는 존재하지 않는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

20 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면

$f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

조건 ㉔의 $(f \circ f)(x)=f(x)f'(x)+5$ 에서 좌변과 우변의 최고차항의 차수가 같으므로

$$n^2=n+(n-1), \quad n^2-2n+1=0$$

$$(n-1)^2=0 \quad \therefore n=1$$

즉, $f(x)$ 는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=a$$

이것을 $(f \circ f)(x)=f(x)f'(x)+5$ 에 대입하면

$$a(ax+b)+b=a(ax+b)+5$$

$$a^2x+ab+b=a^2x+ab+5$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$b=5$$

이때, 조건 ㉔에서 $f(1)=9$ 이므로

$$a+b=a+5=9 \quad \therefore a=4$$

따라서 $f(x)=4x+5$ 이므로

$$f(2)=4 \times 2 + 5 = 13$$

답 13

21 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

$$(x^k-2)f'(x)=f(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) ㉑의 좌변과 우변의 최고차항의 차수가 같으므로

$$k+n-1=n \quad \therefore k=1$$

(ii) ㉑의 좌변과 우변의 최고차항의 계수가 같으므로

$$an=a, \quad a(n-1)=0$$

$$\therefore n=1 \quad (\because a \neq 0)$$

즉, $f(x)$ 는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=a$$

(i), (ii)에서 $f(x)=a(x-2)$ ($\because \textcircled{1}$)

$$\text{이때, } f(4)=3 \text{ 이므로 } 2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{3}{2}(x-2) \text{ 이므로}$$

$$f(6)=\frac{3}{2} \times 4 = 6$$

답 6

22 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0, a \neq 1$)이라 하자.

$$\text{조건 ㉔에서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4 \text{ 로 극한값이 존재}$$

하므로 분자와 분모의 차수가 같아야 한다.

$$\text{즉, } 2n=n+3 \text{ 이므로 } n=3$$

또한, 분자와 분모의 최고차항의 계수의 비가 4이어야 하므로

$$\frac{a^2-a}{a}=4, \quad a-1=4 \quad (\because a \neq 0)$$

$$\therefore a=5$$

즉, $f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$ (b, c, d 는 상수)라 하면

$$f'(x)=15x^2+2bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{조건 ㉔에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2+2bx+c}{x} = 4$$

위의 식에서 극한값이 존재하고, $x \rightarrow 0$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (15x^2 + 2bx + c) = 0$ 이어야 하므로 $c = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2 + 2bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (15x + 2b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(15x + 2b)}{x} \\ = 2b = 4$$

$$\therefore b = 2$$

따라서 $f'(x) = 15x^2 + 4x$ ($\because$ ㉠)이므로

$$f'(1) = 15 + 4 = 19$$

답 19

23 조건 (4)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 5g(x)}{x^3 + 1} = 5$ 로 극한값이 존재하므로 분자와 분모의 차수가 같아야 한다.

즉, 함수 $f(x) + 5g(x)$ 는 최고차항의 계수가 5인 삼차함수이다.

이때, 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 $f(x)$ 는 이차 이하의 함수이고, $g(x)$ 는 삼차함수이다.

(i) $f(x)$ 가 상수함수일 때,

$$f(x) = 1 \text{ 이므로 } f'(x) = 0$$

그런데 $f'(1) = 7$ 이어야 하므로 모순이다.

즉, $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

(ii) $f(x)$ 가 일차함수일 때,

$$f(x) = x + a \text{ (} a \text{는 상수)라 하면 } f'(x) = 1$$

그런데 $f'(1) = 7$ 이어야 하므로 모순이다.

즉, $f(x)$ 는 일차함수가 아니다.

(iii) $f(x)$ 가 이차함수일 때,

$$f(x) = x^2 + bx + c \text{ (} b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = 2x + b \quad \therefore f'(1) = 2 + b$$

$$\text{이때, } f'(1) = 7 \text{ 이므로 } 2 + b = 7 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 5x + c$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x) = x^2 + 5x + c$ 이므로

조건 (7)의 $f(x) + g(x) = x^3 + 4x^2 - 7$ 에서

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - 7 - f(x)$$

$$= x^3 + 4x^2 - 7 - (x^2 + 5x + c)$$

$$= x^3 + 3x^2 - 5x - 7 - c$$

따라서 $g'(x) = 3x^2 + 6x - 5$ 이므로

$$g'(2) = 3 \times 2^2 + 6 \times 2 - 5 = 19$$

답 19

24 모든 실수 x 에 대하여 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 각각 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 를 만족시키므로 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 x 의 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수이다.

두 홀수 m, n 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 최고차항을 각각 x^m , x^n 이라 하면, $f'(x)$, $g'(x)$ 의 최고차항은 각각 mx^{m-1} , nx^{n-1} 이다.

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 g'(x)} = 3$ 으로 극한값이 존재하므로 분자와 분모의 차수가 같다.

$$\text{즉, } m - 1 = n + 1 \text{ 이므로 } m = n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 분자와 분모의 최고차항의 계수의 비가 3이므로

$$\frac{m}{n} = 3 \text{ 에서 } m = 3n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } m = 3, n = 1$$

따라서 $f(x)$ 는 삼차함수이고, $g(x)$ 는 일차함수이다.

$$f(x) = x^3 + ax \text{ (} a \text{는 상수)}, g(x) = x \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 + ax)}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) = a$$

$$\text{즉, } a = -1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = x^3 - x, g(x) = x$$

$$\therefore f(2) + g(3) = 2^3 - 2 + 3 = 9$$

답 9

blacklabel 특강 **참고**

우함수와 기함수

- (1) $f(-x) = f(x)$: 함수 $f(x)$ 는 우함수로, $f(x)$ 가 다항함수이면 함수 $f(x)$ 는 x 의 짝수 차수의 항으로만 이루어진 함수이다.
- (2) $f(-x) = -f(x)$: 함수 $f(x)$ 는 기함수로, $f(x)$ 가 다항함수이면 함수 $f(x)$ 는 x 의 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수이다.

25 ㄱ. 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq -1$, $a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

$f(x)f'(x) = 2f(x) + f'(x) + 2x^3 + x^2 - x - 2$ 에서 좌변의 최고차항의 차수는 $n + (n - 1) = 2n - 1$ 이고, 우변의 최고차항의 차수는 n 또는 3이다.

그런데 우변의 최고차항의 차수가 n ($n \geq 3$)이면

$$2n - 1 = n \text{ 에서 } n = 1 \text{ 이므로 모순이다.}$$

따라서 우변의 최고차항의 차수는 3이므로

$$2n - 1 = 3 \quad \therefore n = 2$$

즉, $f(x)$ 는 이차함수이다. (참)

ㄴ. $f(x)f'(x) = 2f(x) + f'(x) + 2x^3 + x^2 - x - 2$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1)f'(-1)$$

$$= 2f(-1) + f'(-1) - 2 + 1 + 1 - 2$$

$$f(-1)f'(-1) - 2f(-1) - f'(-1) + 2 = 0$$

$$f(-1)\{f'(-1) - 2\} - \{f'(-1) - 2\} = 0$$

$$\therefore \{f(-1) - 1\}\{f'(-1) - 2\} = 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄱ에서 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq -1$, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b \text{ 이므로}$$

$$f(x)f'(x)$$

$$= (ax^2 + bx + c)(2ax + b)$$

$$= 2a^2x^3 + 3abx^2 + (b^2 + 2ac)x + bc \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2f(x) + f'(x) + 2x^3 + x^2 - x - 2$$

$$= 2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b) + 2x^3 + x^2 - x - 2$$

$$= 2x^3 + (2a + 1)x^2 + (2a + 2b - 1)x + b + 2c - 2$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 은 x 에 대한 항등식이므로

$$2a^2 = 2, 3ab = 2a + 1, b^2 + 2ac = 2a + 2b - 1,$$

$$bc=b+2c-2$$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=1, c=1$

$$\therefore f(x)=x^2+x+1$$

$$\therefore f(2)=2^2+2+1=7 \text{ (거짓)}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned} \neg. f(x)f'(x) &= 2f(x) + f'(x) + 2x^3 + x^2 - x - 2 \text{에서} \\ f(x)f'(x) - 2f(x) - f'(x) + 2 &= 2x^3 + x^2 - x \\ \{f(x)-1\}\{f'(x)-2\} &= x(x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

.....㉠

이때, $f(x)$ 를 n 차다항식이라 하면 $f(x)-1$ 은 n 차,
 $f'(x)-2$ 는 $(n-1)$ 차다항식이므로

$$n+(n-1)=3, 2n=4 \quad \therefore n=2$$

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이다. (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$\{f(-1)-1\}\{f'(-1)-2\}=0 \text{ (참)}$$

26 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy \quad \dots\dots\dots\textcircled{1}$

ㄱ. ㉠에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0+0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

㉠에 $y=-x$ 를 대입하면

$$f(x-x)=f(x)+f(-x)+4x(-x)$$

$$f(0)=f(x)+f(-x)-4x^2$$

$$\therefore f(x)+f(-x)=4x^2 \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \neg. f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+4xh-f(x)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h} + 4x \right\} \\ &= f'(0) + 4x \end{aligned}$$

$$f'(0)=2 \text{이므로 } f'(x)=2+4x \text{ (거짓)}$$

ㄴ. ㄴ에서 $f'(x)=4x+2$ 이므로 이 식에 x 대신 $-x$ 를
대입하면 $f'(-x)=-4x+2$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x)+f'(-x) &= 4x+2+(-4x+2) \\ &= 4 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

27 조건 ㉠에서 $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$ 의
양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)-f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

조건 ㉡에서 $f'(0)=8$ 이므로

$$f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}=8 \quad \dots\dots\dots\textcircled{1}$$

$f'(a)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(-h)+a \times (-h) \times (a+h)-f(a)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-h)}{-h} - a^2 - ah \right\} = 8 - a^2 \quad (\because \textcircled{1})$$

조건 ㉡에서 $f'(a)=0$ 이므로

$$8 - a^2 = 0 \quad \therefore a^2 = 8$$

같은 방법으로 $f'(b)=0$ 이므로 $b^2=8$

$$\therefore a^2+b^2=8+8=16$$

답 16

단계	채점 기준	배점
(㉠)	조건 ㉠에서 주어진 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하여 $f(0)$ 의 값을 구한 경우	30%
(㉡)	미분계수의 정의에 따라 $f'(a)$ (또는 $f'(b)$)를 구한 경우	50%
(㉢)	$f'(a)=f'(b)=0$ 을 이용하여 a^2+b^2 의 값을 구한 경우	20%

28 $g(x+y)=g(x)+g(y)+2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을
대입하면

$$g(0)=g(0)+g(0)+0 \quad \therefore g(0)=0$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)+g(h)+2xh-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)+2xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(h)-g(0)}{h-0} + 2x \right\} \\ &= g'(0) + 2x \end{aligned}$$

$$g'(3)=\frac{21}{5} \text{이므로 } g'(0)+6=\frac{21}{5}$$

$$\therefore g'(0)=-\frac{9}{5}$$

$$\text{즉, } g'(x)=2x-\frac{9}{5}$$

한편, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2kx}{x-1}=5k+3$$

위의 식에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2kx\}=0 \text{이므로}$$

$$g(1)=2k$$

또한,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2kx}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2kx+2k-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)-2k(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} - 2k \right\} \\ &= g'(1) - 2k = 5k + 3 \end{aligned}$$

$$\text{이때, } g'(x)=2x-\frac{9}{5} \text{에서 } g'(1)=\frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{5} - 2k = 5k + 3, 7k = -\frac{14}{5} \quad \therefore k = -\frac{2}{5} \quad \text{답 } -\frac{2}{5}$$

29 $x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$ 의 양변에 $y=h$ 를 대입하면
 $x\{f(x+h)-f(x-h)\}=4h\{f(x)+g(h)\}$
 $\therefore x \times \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=2\{f(x)+g(h)\}$
 $\dots\dots\textcircled{1}$

이때, 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이면서 미분가능하므로 $\textcircled{1}$ 의 좌변에서

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ x \times \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ x \times \frac{f(x+h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{2h} \right\} \\ &= \frac{x}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \right\} \\ &= \frac{x}{2} \times 2f'(x) = xf'(x) \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 의 우변에서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} 2\{f(x)+g(h)\} &= 2\{f(x)+g(0)\} \\ &= 2\{f(x)+1\} \quad (\because g(0)=1) \end{aligned}$$

$$\therefore xf'(x)=2\{f(x)+1\} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이때, 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이므로 $xf'(x)$ 의 최고차항의 계수는 an 이고, $2\{f(x)+1\}$ 의 최고차항의 계수는 $2a$ 이다.

$$\text{즉, } an=2a \text{이므로 } a(n-2)=0$$

$$\therefore n=2 \quad (\because a \neq 0)$$

즉, $f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$$

$$\text{라 하면 } f'(x)=2ax+b$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x(2ax+b)=2(ax^2+bx+c+1)$$

$$2ax^2+bx=2ax^2+2bx+2c+2$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$b=2b, 0=2c+2 \quad \therefore b=0, c=-1$$

$$\text{또한, } f(1)=4 \text{이므로 } a+b+c=4 \quad \therefore a=5$$

$$\text{따라서 } f(x)=5x^2-1 \text{이므로 } f'(x)=10x$$

$$\therefore f'(2)=10 \times 2=20$$

답 ①

• 다른풀이 •

$$x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\} \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$4y\{f(0)+g(y)\}=0$$

위의 식이 모든 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로

$$g(y)=-f(0)$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 상수함수이므로

$$g(x)=1 \quad (\because g(0)=1)$$

$$\therefore f(0)=-g(y)=-1$$

$\textcircled{3}$ 의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(2)-f(0)=4\{f(1)+g(1)\}$$

$$f(2)-(-1)=4(4+1)$$

$$\therefore f(2)=19$$

한편, $y \neq 0$ 이라 하고 $\textcircled{3}$ 의 양변을 y 로 나누면

$$\frac{x\{f(x+y)-f(x-y)\}}{y}=4\{f(x)+g(y)\}$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\frac{2\{f(2+y)-f(2-y)\}}{y}=4\{f(2)+g(y)\}$$

$$\frac{f(2+y)-f(2-y)}{y}=2\{f(2)+g(y)\}$$

위의 식의 양변에 $\lim_{y \rightarrow 0}$ 을 취하면

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(2+y)-f(2-y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 2\{f(2)+g(y)\}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+y)-f(2)}{y} + \frac{f(2-y)-f(2)}{-y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} 2\{f(2)+g(y)\}$$

$$2f'(2)=2\{f(2)+g(0)\}$$

$$\therefore f'(2)=f(2)+g(0)=19+1=20$$

30 해결단계

① 단계	주어진 식에 $y=0$ 을 대입한 결과와 $f(0) \geq 1$ 을 이용하여 $f(0)$ 의 값을 구한다.
② 단계	주어진 식과 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.
③ 단계	$f'(2)$ 의 값을 구한다.

$$f(x+y) \geq f(x)+f(y)-(xy-1)^2 \text{에서}$$

$$f(x+y)-f(x) \geq f(y)-(xy-1)^2 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

위의 식의 양변에 $y=0$ 을 대입하면

$$f(x)-f(x) \geq f(0)-(-1)^2 \quad \therefore f(0) \leq 1$$

그런데 $f(0) \geq 1$ 이므로 $f(0)=1$

$\textcircled{1}$ 에서 $f(x+y)-f(x) \geq f(y)-x^2y^2+2xy-1$ 이므로

(i) $h < 0$ 일 때, $y=h$ 를 대입하고 양변을 h 로 나누면

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(h)-1}{h} + 2x - x^2h \text{에서}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(h)-f(0)}{h-0} + 2x - x^2h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0-} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h-0} + 2x - x^2h \right\}$$

함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 $f'(x) \leq f'(0)+2x$

$$\therefore f'(x) \leq 2x+1 \quad (\because f'(0)=1)$$

(ii) $h > 0$ 일 때, $y=h$ 를 대입하고 양변을 h 로 나누면

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq \frac{f(h)-1}{h} + 2x - x^2h \text{에서}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq \frac{f(h)-f(0)}{h-0} + 2x - x^2h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\geq \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h-0} + 2x - x^2h \right\}$$

함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 $f'(x) \geq f'(0)+2x$

$$\therefore f'(x) \geq 2x+1 \quad (\because f'(0)=1)$$

(i), (ii)에서 $f'(x)=2x+1$

$$\therefore f'(2)=2 \times 2 + 1 = 5$$

답 5

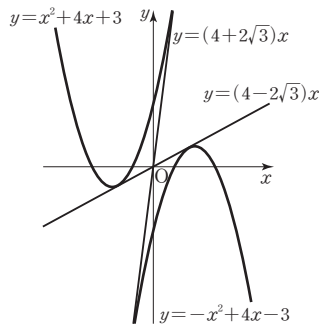
31 $F(x)=f(x)g(x)$ 라 하자.
 조건 ㉞에서 $F(0)=f(0)g(0)=1 \times 4=4$
 조건 ㉝에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=0$
 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로
 $F'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
 $=(-6) \times 4 + 1 \times g'(0)$
 $=-24+g'(0)=0$
 $\therefore g'(0)=24$ 답 24

32 $f(x)=(x-n)(x-2n)(x-4n)$ 이므로
 $f'(x)=(x-2n)(x-4n)+(x-n)(x-4n)$
 $+ (x-n)(x-2n)$
 $\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}$
 $\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}<\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}$ 에서
 $\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}<\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}$
 $<\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}$
 $\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}<\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}$ 에서
 $0<\frac{1}{x-n}, x-n>0 \quad \therefore x>n$ ㉞
 $\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}+\frac{1}{x-4n}<\frac{1}{x-n}+\frac{1}{x-2n}$ 에서
 $\frac{1}{x-4n}<0, x-4n<0 \quad \therefore x<4n$ ㉟
 또한, 부등식에서 분모는 0이 될 수 없으므로
 $x \neq n$ 이고 $x \neq 2n$ 이고 $x \neq 4n$ ㉡
 ㉞, ㉟, ㉡에서
 $n < x < 2n$ 또는 $2n < x < 4n$
 위의 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 개수가 19이므로
 $(2n-n-1)+(4n-2n-1)=19, 3n=21$
 $\therefore n=7$ 답 7

33 다항식 $ax^{n+1}+bx^n+1$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $ax^{n+1}+bx^n+1=(x-1)^2Q(x)$ ㉞
 ㉞의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $a(n+1)x^n+bnx^{n-1}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$ ㉟
 ㉞, ㉟의 양변에 각각 $x=1$ 을 대입하면
 $a+b+1=0$ ㉡
 $a(n+1)+bn=0$ ㉢
 ㉡에서 $a=-b-1$ 이므로 이것을 ㉢에 대입하면
 $(-b-1)(n+1)+bn=0, -b-n-1=0$
 $\therefore b=-n-1$
 따라서 $f(n)=-n-1$ 이므로
 $f(10)=-11$ 답 -11

34 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m}=1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최고차항은 x^m 이므로
 함수 $f'(x)$ 의 최고차항은 mx^{m-1} 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$ 에서 $m=a$ ㉞
 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}=b$ 에서 다항함수 $g(x)$ 에 대하여
 $f(x)=x^n g(x)$ 라 할 수 있으므로 $m \geq n$ (참)
 $\neg$. ㉞에서 $f(x)=x^n g(x)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n g(x)}{x^n}$
 $=\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
 $=g(0)=b$ ㉟
 또한, $f'(x)=nx^{n-1}g(x)+x^n g'(x)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}g(x)+x^n g'(x)}{x^{n-1}}$
 $=\lim_{x \rightarrow 0} \{ng(x)+xg'(x)\}$
 $=ng(0)=9$
 $\therefore g(0)=\frac{9}{n}$ ㉡
 ㉟, ㉡에서 $\frac{9}{n}=b$ ㉢
 이때, ㉞의 $m \geq n$ 에서 $\frac{m}{n} \geq 1$ 이므로
 $ab=m \times \frac{9}{n}$ ($\because$ ㉞, ㉢)
 $=9 \times \frac{m}{n} \geq 9$ (참)
 $\neg$. $f(x)$ 가 삼차함수이면
 $a=m=3$ 이므로 $am=9$
 ㉢에서 $bn=9$
 $\therefore am=bn$ (참)
 따라서 ㉞, ㉟, ㉡ 모두 옳다. 답 ㉞

35 조건 ㉝의 $-x^2-3 \leq f(x)-4x \leq x^2+3$ 에서
 $-x^2+4x-3 \leq f(x) \leq x^2+4x+3$ ㉞
 이므로 $f(x)$ 는 이차 이하의 다항함수이다.
 조건 ㉞의 $f(-x)=-f(x)$ 에서 다항함수 $f(x)$ 는 홀수 차수의 항으로만 이루어진 함수이므로
 $f(x)=ax$ (단, $a \neq 0$)
 라 할 수 있다.
 ㉞에서 직선 $f(x)=ax$ 는 두 함수 $y=-x^2+4x-3$,
 $y=x^2+4x+3$ 의 그래프 사이에 위치해야 하므로
 $x^2+4x+3=ax$ 에서 $x^2+(4-a)x+3=0$
 위의 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(4-a)^2-12=0, (a-4)^2=12$
 $\therefore a=4 \pm 2\sqrt{3}$
 이때, 두 함수 $y=-x^2+4x-3, y=x^2+4x+3$ 의 그래프가 서로 원점에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이
 두 직선 $y=(4+2\sqrt{3})x, y=(4-2\sqrt{3})x$ 는 두 이차함수의 공통인 접선이다.



$$\therefore 4 - 2\sqrt{3} \leq a \leq 4 + 2\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉑$$

한편, $f(x) = ax$ 에 대하여

$$g(x) = (2x - 3)^3 f(x) = ax(2x - 3)^3$$

이므로

$$g'(x) = a(2x - 3)^3 + ax \times 3(2x - 3)^2 \times 2$$

$$\therefore g'(2) = a + 12a = 13a$$

㉑의 각 변에 13을 곱하면

$$52 - 26\sqrt{3} \leq 13a \leq 52 + 26\sqrt{3}$$

따라서 $g'(2)$ 의 최댓값은 $M = 52 + 26\sqrt{3}$, 최솟값은

$$m = 52 - 26\sqrt{3}$$
이므로 $M + m = 104$ 답 104

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 36

- 01 54 02 $\frac{1}{2}$ 03 24 04 110 05 ⑤
06 6 07 8

01 해결단계

① 단계	주어진 식에서 좌변과 우변의 최고차항을 비교하여 함수 $f(x)$ 의 최고차항을 구한다.
② 단계	$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하고 $g(x), h(x)$ 를 각각 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 식을 주어진 식에 대입하여 $f(x)$ 를 구하고, $f(-1)$ 의 값을 구한다.

$g(x)$ 는 $f(x)$ 의 도함수, $h(x)$ 는 $g(x)$ 의 도함수이므로
 $g(x) = f'(x)$, $h(x) = g'(x)$
 $f(x) + h(x) = 2g(x) + x^4 + 1$ 에서 좌변 $f(x) + h(x)$ 의 최고차항은 $f(x)$ 의 최고차항과 같고 $g(x)$ 의 차수는 $f(x)$ 보다 작으므로 우변 $2g(x) + x^4 + 1$ 의 최고차항은 x^4 이다.

따라서 $f(x)$ 는 최고차항이 x^4 인 사차함수이므로
 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수)라 하면

$$g(x) = f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$h(x) = g'(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$f(x) + h(x) = x^4 + ax^3 + (b + 12)x^2 + (6a + c)x + 2b + d \quad \dots\dots ㉑$$

$$2g(x) + x^4 + 1 = x^4 + 8x^3 + 6ax^2 + 4bx + 2c + 1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑=㉒은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 8, b + 12 = 6a, 6a + c = 4b, 2b + d = 2c + 1$$

$$\therefore a = 8, b = 36, c = 96, d = 121$$

따라서 $f(x) = x^4 + 8x^3 + 36x^2 + 96x + 121$ 이므로

$$f(-1) = 1 - 8 + 36 - 96 + 121 = 54 \quad \text{답 54}$$

02 해결단계

① 단계	조건 (㉑)를 이용하여 $f_1'(0)$ 과 $f_2'(0)$ 사이의 관계를 구한다.
② 단계	미분계수의 정의를 이용하여 조건 (㉑)의 등식의 우변을 미분계수로 표현한다.
③ 단계	②단계에서 구한 식을 정리한 후, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 k 의 값을 구한다.

$$\text{조건 (㉑)에서 } f_1'(0) \times f_2'(0) = -1 \quad \dots\dots ㉑$$

조건 (㉑)에서

$$\begin{aligned} f_i'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x) + 2kx}{f_i(x) + kx} \quad (i=1, 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f_i(x)}{x} + 2k}{\frac{f_i(x)}{x} + k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f_i(x) - f_i(0)}{x} + 2k}{\frac{f_i(x) - f_i(0)}{x} + k} \quad (\because \text{조건 (㉑)}) \\ &= \frac{f_i'(0) + 2k}{f_i'(0) + k} \end{aligned}$$

즉, $f_i'(0) \{f_i'(0) + k\} = f_i'(0) + 2k$ 이므로

$$\{f_i'(0)\}^2 + (k - 1)f_i'(0) - 2k = 0 \quad \dots\dots ㉒$$

이때, ㉒은 $f_1'(0), f_2'(0)$ 을 두 근으로 갖는 이차방정식
 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$f_1'(0) \times f_2'(0) = -2k = -1 \quad (\because ㉑)$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

03 해결단계

① 단계	$0 < t \leq 1, 1 < t \leq 2, 2 < t \leq 3$ 으로 나누어 주어진 도형과 정사각형이 서로 겹치는 부분의 넓이 $f(t)$ 를 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 함수 $f(t)$ 를 이용하여 $f'(t)$ 를 구한 후, $\sum_{k=1}^6 2f'(\frac{2k-1}{4})$ 의 값을 구한다.

(i) $0 < t \leq 1$ 일 때,

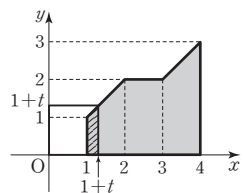
$f(t)$ 는 사다리꼴의 넓이이

므로

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 + 1 + t) \times t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\therefore f'(t) = t + 1 \quad (0 < t < 1)$$



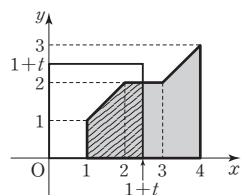
(ii) $1 < t \leq 2$ 일 때,

$f(t)$ 는 오각형의 넓이

이므로

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 + 2) \times 1$$

$$+ (1 + t - 2) \times 2$$

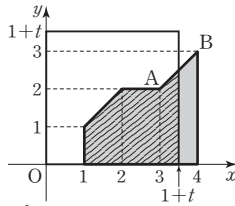


$$=2t-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f'(t)=2 \quad (1 < t < 2)$$

(iii) $2 < t \leq 3$ 일 때,

$f(t)$ 는 육각형의 넓이이고,
오른쪽 그림에서 두 점 A,
B를 지나는 직선의 방정식
은 $y=x-1$ 이므로



$$f(t)=\frac{1}{2}(1+2) \times 1+1 \times 2+\frac{1}{2}(2+t)(1+t-3)$$

$$=\frac{3}{2}+2+\frac{1}{2}(t+2)(t-2)$$

$$=\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}$$

$$\therefore f'(t)=t \quad (2 < t < 3)$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f'(t)=\begin{cases} t+1 & (0 < t < 1) \\ 2 & (1 < t < 2) \\ t & (2 < t < 3) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 2f'\left(\frac{2k-1}{4}\right)$$

$$=2\left\{f'\left(\frac{1}{4}\right)+f'\left(\frac{3}{4}\right)+f'\left(\frac{5}{4}\right)+f'\left(\frac{7}{4}\right)+f'\left(\frac{9}{4}\right)+f'\left(\frac{11}{4}\right)\right\}$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{4}+1\right)+\left(\frac{3}{4}+1\right)+2+2+\frac{9}{4}+\frac{11}{4}\right\}$$

$$=2(3+4+5)=24$$

답 24

04 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 미분불가능한 점을 찾아 경우를 나누어 각 경우에 따라 함수 $g(x)$ 를 구한다.
② 단계	$\sum_{k=0}^{10} g(k)$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=|x^2-5x+6|=|(x-2)(x-3)|$$

$$=\begin{cases} x^2-5x+6 & (x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ -x^2+5x-6 & (2 < x < 3) \end{cases}$$

(i) $x \neq 2, x \neq 3$ 일 때,

함수 $f(x)$ 는 미분가능하므로

$$g(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)-f(x-h)+f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \right\}$$

$$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$$

(ii) $x=2$ 일 때,

$$g(2)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h(-1+h)|-|-h(-1-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|(1-h)-|h|(1+h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h|h|}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} (-2|h|)=0$$

(iii) $x=3$ 일 때,

$$g(3)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(1+h)h|-|(1-h)(-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|(1+h)-|h|(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h|h|}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} 2|h|=0$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(x)=\begin{cases} 4x-10 & (x < 2 \text{ 또는 } x > 3) \\ -4x+10 & (2 < x < 3) \\ 0 & (x=2 \text{ 또는 } x=3) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{10} g(k)$$

$$=g(0)+g(1)+g(2)+g(3)+\sum_{k=4}^{10} (4k-10)$$

$$=(-10)+(-6)+0+0+\frac{7(6+30)}{2}$$

$$=-16+126=110$$

답 110

05 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)에서 주어진 식의 양변에 $x=0, h=0$ 을 대입하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	조건 (가)에서 주어진 식과 미분계수의 정의를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	조건 (나)에서 주어진 식과 도함수의 정의를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 조건 (가)의 $f(x) \geq x+1$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

조건 (나)의 $f(x+h) \geq f(x)f(h)$ 의 양변에 $x=0, h=0$ 을 대입하면

$$f(0) \geq \{f(0)\}^2, f(0)\{f(0)-1\} \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq f(0) \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

ㄱ, ㄴ에서 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. 조건 (가)의 $f(x) \geq x+1$ 의 양변에 $x=h$ 를 대입하면

$$f(h) \geq h+1$$

ㄱ에서 $f(0)=1$ 이므로

$$f(h)-f(0) \geq h$$

(i) $h < 0$ 일 때,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} \leq 1 \text{이므로 } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \leq 1$$

(ii) $h > 0$ 일 때,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} \geq 1 \text{이므로 } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \geq 1$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능

하므로 $f'(0)=1$ (참)

ㄷ. 조건 ㄴ의 $f(x+h) \geq f(x)f(h)$ 에서

$$f(x+h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x)$$

$$\therefore f(x+h) - f(x) \geq f(x)\{f(h) - 1\}$$

(i) $h < 0$ 일 때,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x) \times \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \left\{ f(x) \times \frac{f(h) - 1}{h} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\leq f(x)f'(0) \\ &= f(x) \times 1 (\because \text{ㄷ}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(ii) $h > 0$ 일 때,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq f(x) \times \frac{f(h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ f(x) \times \frac{f(h) - 1}{h} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\geq f(x)f'(0) \\ &= f(x) \times 1 (\because \text{ㄷ}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f'(x) = f(x)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

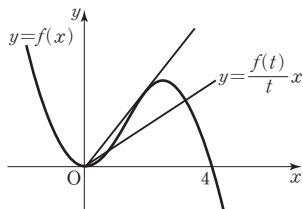
06 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 를 이용하여 함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한다.
② 단계	함수 $g(x)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 양수 t 의 값을 모두 구한 후, 그 합을 구한다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq t) \\ \frac{f(t)}{t}x & (0 < x < t) \end{cases} \quad \text{에서 원점 } O \text{와 점}$$

$P(t, f(t))$ 에 대하여 $\frac{f(t)}{t}$ 는 직선 OP의 기울기이므로

$y = \frac{f(t)}{t}x$ 는 직선 OP의 방정식이다.



즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x \leq 0$ 또는 $x \geq t$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프이고, $0 < x < t$ 에서는 선분 OP이다.

이때, 함수 $g(x)$ 가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않으므로 $x=0$ 또는 $x=t$ 둘 중 한 점에서만 미분가능하지

않아야 한다.

(i) $x=0$ 에서 미분가능하지 않을 때,

$x=t$ 에서 미분가능하므로 직선 OP는 점 P에서의 함수 $y=f(x)$ 의 접선과 같아야 한다.

즉, $f'(t) = \frac{f(t)}{t}$ 이어야 하므로

$$-3t^2 + 8t = \frac{-t^3 + 4t^2}{t} \quad \begin{matrix} f(x) = -x^3 + 4x^2 \text{에서} \\ f'(x) = -3x^2 + 8x \end{matrix}$$

$$-3t^2 + 8t = -t^2 + 4t \quad (\because t \neq 0)$$

$$2t^2 - 4t = 0, \quad 2t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

이때, 직선 OP의 방정식은 $y=4x$ 이고 $f'(0)=0$ 이므로 $t=2$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=t$ 에서 미분가능하지 않을 때,

$x=0$ 에서 미분가능하므로 직선 OP는 원점 O에서의 함수 $y=f(x)$ 의 접선과 같아야 한다.

즉, $f'(0) = \frac{f(t)}{t}$ 이어야 하고 $f'(x) = -3x^2 + 8x$ 에서 $f'(0)=0$ 이므로

$$0 = \frac{-t^3 + 4t^2}{t}, \quad -t^2 + 4t = 0 \quad (\because t \neq 0)$$

$$-t(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

이때, 직선 OP의 방정식은 $y=0$ 이고 $f'(4) = -16$ 이므로 $t=4$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 t 의 값의 합은

$$2 + 4 = 6$$

답 6

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} f(x) & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq t) \\ \frac{f(t)}{t}x & (0 < x < t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x^3 + 4x^2 & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq t) \\ (-t^2 + 4t)x & (0 < x < t) \end{cases} \end{aligned}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 8x & (x < 0 \text{ 또는 } x > t) \\ -t^2 + 4t & (0 < x < t) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=t$ 둘 중 한 점에서만 미분가능하지 않아야 한다.

(i) $x=0$ 에서 미분가능하지 않을 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \text{이어야 하므로}$$

$$-t^2 + 4t \neq 0, \quad -t(t-4) \neq 0$$

$$\therefore t \neq 0 \text{이고 } t \neq 4$$

$$\lim_{x \rightarrow t^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} g'(x) \text{이어야 하므로}$$

$$-t^2 + 4t = -3t^2 + 8t, \quad 2t^2 - 4t = 0$$

$$2t(t-2) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 $t=2$ 이다.

(ii) $x=t$ 에서 미분가능하지 않을 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \text{이어야 하므로}$$

$$-t^2+4t=0, -t(t-4)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

$\lim_{x \rightarrow t-} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow t+} g'(x)$ 이어야 하므로

$$-t^2+4t \neq 3t^2+8t, 2t^2-4t \neq 0$$

$$2t(t-2) \neq 0 \quad \therefore t \neq 0 \text{ 이고 } t \neq 2$$

따라서 $t=4$ 이다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 t 의 값의 합은

$$2+4=6$$

07 해결단계

① 단계	주어진 $f(x)$ 를 이용하여 $\frac{f(p)-f(-2)}{p+2}=f'(c)$ 를 c 에 대한 식으로 정리한다.
② 단계	① 단계에서 구한 식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 p 의 값의 범위를 구한다.
③ 단계	m, n 의 값을 구한 후, $m+n$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=4x^3-8x^2+7x-3 \text{ 에서}$$

$$f'(x)=12x^2-16x+7$$

$$\frac{f(p)-f(-2)}{p+2}$$

$$= \frac{(4p^3-8p^2+7p-3)-(-32-32-14-3)}{p+2}$$

$$= \frac{4p^3-8p^2+7p+78}{p+2}$$

$$= \frac{(p+2)(4p^2-16p+39)}{p+2}$$

$$=4p^2-16p+39$$

이므로

$$\frac{f(p)-f(-2)}{p+2}=f'(c) \text{ 에서}$$

$$4p^2-16p+39=12c^2-16c+7$$

$$12c^2-16c-(4p^2-16p+32)=0$$

$$g(c)=12c^2-16c-(4p^2-16p+32) \text{ 라 하면}$$

$$\frac{f(p)-f(-2)}{p+2}=f'(c) \text{ 를 만족시키는 상수 } c \text{ 의 값이 서로 다른 2개만 존재해야 하므로 방정식 } g(c)=0 \text{ 이}$$

$-2 < c < p$ 에서 2개의 실근을 가지면 된다.

$$g(c)=12c^2-16c-(4p^2-16p+32)$$

$$=12\left(c-\frac{2}{3}\right)^2-4p^2+16p-\frac{112}{3}$$

이므로

(i) $p \leq \frac{2}{3}$ 일 때,

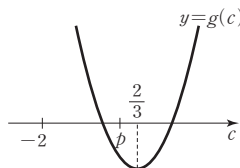
함수 $y=g(c)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같으므로

$-2 < c < p$ 에서 방정식

$g(c)=0$ 은 서로 다른 두

근을 가질 수 없다.



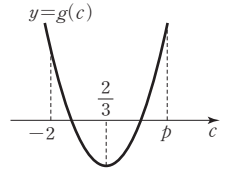
(ii) $p > \frac{2}{3}$ 일 때,

방정식 $g(c)=0$ 이 서로 다른

두 실근을 가지려면 함수

$y=g(c)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 하므로



$$g(-2) > 0, g\left(\frac{2}{3}\right) < 0, g(p) > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$g(-2) > 0 \text{ 에서}$$

$$g(-2)=48+32-(4p^2-16p+32)$$

$$=-4p^2+16p+48 > 0$$

$$p^2-4p-12 < 0, (p-6)(p+2) < 0$$

$$\therefore -2 < p < 6$$

.....㉑

$$g\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \text{ 에서}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=-4p^2+16p-\frac{112}{3} < 0$$

$$4p^2-16p+\frac{112}{3}=4(p-2)^2+\frac{64}{3} > 0$$

$$\text{이므로 항상 } g\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \text{ 을 만족시킨다.} \quad \text{.....㉒}$$

$$g(p) > 0 \text{ 에서}$$

$$g(p)=8p^2-32 > 0, (p+2)(p-2) > 0$$

$$\therefore p < -2 \text{ 또는 } p > 2$$

.....㉓

$$\text{㉑, ㉒, ㉓에서 } 2 < p < 6$$

(i), (ii)에서 $2 < p < 6$ 이므로

$$m=2, n=6$$

$$\therefore m+n=8$$

답 8

blacklabel 특강 참고

$$\frac{f(p)-f(-2)}{p+2}=f'(c) \quad (-2 < c < p) \text{ 는 두 점 } (p, f(p)),$$

$(-2, f(-2))$ 를 잇는 직선과 점 $(c, f(c))$ 에서의 접선이 평행함을 의미한다. 즉, 주어진 문제는 두 점 $(p, f(p)), (-2, f(-2))$ 를 잇는 직선과 평행한 접선을 갖는 점이 2개만 존재하도록 하는 p 의 값의 범위를 구하는 문제이다.

이때, 두 점 $(p, f(p)), (-2, f(-2))$ 를 잇는 직선은

(i) 점 $(-2, f(-2))$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선

(ii) 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선

두 직선 (i), (ii) 사이에 존재해야 하므로 p 의 값은 점 $(-2, f(-2))$

에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 x 좌표보다 크고

점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표보다 작다.

이것이 수능

p. 37

1 ⑤

2 ②

3 ④

4 5

1 해결단계

① 단계	$g(x)=x^n+3x-4$ 라 하고 함수 $f(n)$ 을 함수 $g(x)$ 의 미분계수를 이용하여 구한다.
② 단계	$\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값을 구한다.

$g(x) = x^n + 3x - 4$ 라 하면

$g(1) = 0$ 이므로

$$f(n) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$$

$g'(x) = nx^{n-1} + 3$ 이므로

$g'(1) = n + 3$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} (n + 3) = \frac{10 \times 11}{2} + 30 = 85 \quad \text{답 ⑤}$$

2 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ 가 성립함을 이용한다.
② 단계	$f'(a)$ 의 값이 존재하지 않아도 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 가 존재할 수 있음에 유의한다.

$\neg$, $\cup$, $\cap$ 의 각 조건을 순서대로 p , q , r 라 하고

조건 s 를 '함수 $f(x)$ 가 미분가능하다.'라 하자.

$\neg$. $[p \rightarrow s]$ (반례) $f(x) = |x - a|$ 일 때,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^2|}{h^2} = 1$$

이므로 극한값이 존재하지만 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = a$ 에서 뾰족하므로 미분가능하지 않다. (거짓)

$[s \rightarrow p]$ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \quad (\text{참})$$

$h^2 = t$ 로 놓으면
 $h \rightarrow 0$ 일 때
 $t \rightarrow 0+$

따라서 $s \Rightarrow p$ 이므로 p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

$\cup$. $[q \rightarrow s]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \quad (\text{참})$$

$h^3 = t$ 로 놓으면
 $h \rightarrow 0$ 일 때
 $t \rightarrow 0$

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재하면

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \text{의 값이 존재한다. (참)}$$

$[s \rightarrow q]$ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a) \quad (\text{참})$$

따라서 $q \Leftrightarrow s$ 이므로 q 는 s 이기 위한 필요충분조건이다.

$\cap$. $[r \rightarrow s]$ (반례) $f(x) = |x - a|$ 일 때,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

이므로 극한값이 존재하지만 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x = a$ 에서 뾰족하므로 미분가능하지 않다. (거짓)

$[s \rightarrow r]$ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ f'(a) + f'(a) \} = f'(a) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 $s \Rightarrow r$ 이므로 r 는 s 이기 위한 필요조건이다.

그러므로 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것은 $\cup$ 뿐이다. 답 ②

3

해결단계

① 단계	극한의 성질을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 미정계수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	①단계에서 구한 $f(x)$ 를 주어진 극한에 대입하여 미정계수의 값을 구한 후, $f(3)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4} \text{에서 극한값이 존재하고}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{에서 } f(2) = 0$$

$f(x) = (x-1)(x-2)(x+a)$ (a 는 상수)라 할 수 있으므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x+a) + (x-1)(x+a) \\ &\quad + (x-1)(x-2) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2} \\ &= \frac{2+a}{\{f'(2)\}^2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $f'(2) = a + 2$ 이므로 $a = -2$ 이면 주어진 극한값이 존재하지 않는다.

$$\frac{a+2}{(a+2)^2} = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4} \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$ 이므로

$$f(3) = 2 \times 1 \times 5 = 10 \quad \text{답 ④}$$

4

해결단계

① 단계	인수정리를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	$f'(x)$ 를 구한 후, $f'(2) = -4$ 를 이용하여 a 의 값을 구한다.
③ 단계	$f'(a)$ 의 값을 구한다.

조건 ㉞에서 $f(a) = f(2) = f(6) = k$ (k 는 상수)라 하면
 $f(a) - k = f(2) - k = f(6) - k = 0$

이때, $g(x) = f(x) - k$ 라 하면 삼차함수 $f(x)$ 의 x^3 의 계수가 1이고 $g(a) = g(2) = g(6) = 0$ 이므로

$$g(x) = (x-a)(x-2)(x-6)$$

$$\therefore f(x) = (x-a)(x-2)(x-6) + k$$

$$f'(x)$$

$$= (x-2)(x-6) + (x-a)(x-6) + (x-a)(x-2)$$

조건 ㉞에서 $f'(2) = -4$ 이므로

$$-4(2-a) = -4, \quad 2-a = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore f'(a) = (a-2)(a-6)$$

$$= (-1) \times (-5) = 5 \quad \text{답 5}$$

04 도함수의 활용(1)

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp. 39~40

01 5	02 ③	03 ②	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ⑤	08 8	09 ②	10 ①
11 ⑤	12 ④	13 21	14 1	15 ③

- 01 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ 에서 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 8$
 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 4이므로
 $f'(a) = 4$ 에서 $6a^2 + 6a - 8 = 4$
 $6a^2 + 6a - 12 = 0, a^2 + a - 2 = 0$
 $(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$
 $b = f(1) = 2 + 3 - 8 + 1 = -2$
 $\therefore a^2 + b^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$ 답 5

- 02 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 5 = -3(x-1)^2 + 8$
 이므로 $f'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 8을 갖는다.
 즉, 접선의 기울기의 최댓값은 8이고, 이때의 접점의 좌표
 는 $(1, 3)$ 이다.
 위의 점에서의 접선의 방정식은
 $y - 3 = 8(x - 1) \quad \therefore y = 8x - 5$
 $\therefore g(x) = 8x - 5$
 $\therefore g(1) = 8 - 5 = 3$ 답 ③

- 03 $f(x) = x^3 - 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기
 울기는 $f'(t) = 3t^2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - 2) = 3t^2(x - t) \quad \therefore y = 3t^2x - 2t^3 - 2$
 위의 직선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로
 $-4 = -2t^3 - 2, 2t^3 - 2 = 0$
 $2(t-1)(t^2+t+1) = 0$
 $\therefore t = 1 (\because t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0)$
 즉, 접선의 방정식은 $y = 3x - 4$ 이고, 접선이 점 $(a, 0)$ 을
 지나므로 $0 = 3a - 4, 3a = 4 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$ 답 ②

- 04 $f(x) = 2x^3 + ax, g(x) = bx^2 + c$ 라 하면
 $f'(x) = 6x^2 + a, g'(x) = 2bx$
 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로
 $f(-1) = 0$ 에서
 $-2 - a = 0 \quad \therefore a = -2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $g(-1) = 0$ 에서
 $b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 또한, 점 $(-1, 0)$ 에서 두 곡선이 공통인 접선을 가지므
 로 $f'(-1) = g'(-1)$ 에서

$$6 + a = -2b \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = -2, c = 2$$

$$\therefore a - b + c = -2 - (-2) + 2 = 2$$

답 ⑤

- 05 곡선 $y = x^2 - \frac{1}{2}x$ 와 직선 $y = mx$ 의 두 교점이 A, B이므로

$$x^2 - \frac{1}{2}x = mx \text{에서 } x^2 - \left(\frac{1}{2} + m\right)x = 0$$

$$x\left\{x - \left(\frac{1}{2} + m\right)\right\} = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} + m$$

A(0, 0)이라 하면 $y = x^2 - \frac{1}{2}x$ 에서 $y' = 2x - \frac{1}{2}$ 이므로

점 A에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이고 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \text{이다.}$$

즉, 점 B에서의 접선의 기울기는 2이므로

$$2x - \frac{1}{2} = 2 \text{에서 } 2x = \frac{5}{2} \quad \therefore x = \frac{5}{4}$$

즉, B($\frac{5}{4}, \frac{15}{16}$)이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{15}{16} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right) \quad \therefore y = 2x - \frac{25}{16}$$

이때, 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x, y = 2x - \frac{25}{16}$ 의 교점이 C이므

로 x좌표는

$$-\frac{1}{2}x = 2x - \frac{25}{16}, \frac{5}{2}x = \frac{25}{16} \quad \therefore x = \frac{5}{8}$$

$$\therefore C\left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{16}\right)$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{5}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{256}} = \frac{5\sqrt{5}}{16}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{15}{16} + \frac{5}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{500}{256}} = \frac{5\sqrt{5}}{8}$$

$\triangle ABC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{5}}{16} \times \frac{5\sqrt{5}}{8} = \frac{125}{256}$$

답 ⑤

- 06 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ 이 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, a]$
 에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$ 에서 미분가능하다.

이때, 롤의 정리가 성립하려면

$$f(0) = f(a) \text{이어야 하므로}$$

$$a^3 - 4a^2 + 7 = 7 \text{에서 } a^3 - 4a^2 = 0$$

$$a^2(a - 4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a \neq 0)$$

즉, $f(0) = f(4)$ 이므로 롤의 정리에 의하여 열린구간

$(0, 4)$ 에 $f'(c) = 0$ 을 만족시키는 c 가 존재한다.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 7 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 8x \text{이므로}$$

$$3c^2 - 8c = 0, 3c\left(c - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$\therefore c = \frac{8}{3} (\because 0 < c < 4)$$

따라서 옳은 설명은 한 사람은 A, D이다.

답 ③

함수 $f(x)=2x^2$ 이 닫힌구간 $[a, a+h]$ 에서 연속이고 열린구간 $(a, a+h)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$ ($a < a+\theta h < a+h$)인 θ 가 존재한다.

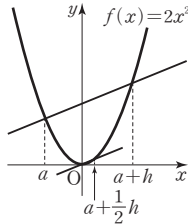
07 $f(x)=2x^2$ 에서 $f'(x)=4x$ 이므로
 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$ 에서
 $2(a+h)^2-2a^2=h \times 4(a+\theta h)$
 $4ah+2h^2=4ah+4\theta h^2, 4\theta h^2=2h^2$
 $4\theta=2 \quad \therefore \theta=\frac{1}{2}$

답 ⑤

blacklabel 특강 참고

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\frac{1}{2}h)$ 의 기하적 의미

열린구간 $(a, a+h)$ 에서
 두 점 $(a, f(a)), (a+h, f(a+h))$ 를
 지나는 직선과 기울기가 같은 접선이 존
 재하고 접점의 x 좌표는 $a+\frac{1}{2}h$ 이다.



08 $f(x)=x^3+3x^2-9x+3$ 에서
 $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$
 $=3(x+3)(x-1)$
 함수 $f(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 감소하므로 $f'(x) \leq 0$ 의
 해는 $a \leq x \leq b$ 이다.
 $3(x+3)(x-1) \leq 0$ 에서 $-3 \leq x \leq 1$
 따라서 $a=-3, b=1$ 이므로
 $a^2-b^2=(-3)^2-1=8$

답 8

09 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$ 는 일대일
 대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소
 해야 한다.
 이때, 주어진 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로
 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하고
 $f(x)=x^3+2x^2+kx+3$ 에서 $f'(x)=3x^2+4x+k$ 이므로
 이차방정식 $3x^2+4x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=4-3k \leq 0$ 에서 $3k \geq 4 \quad \therefore k \geq \frac{4}{3}$
 따라서 구하는 정수 k 의 최솟값은 2이다.

답 ②

blacklabel 특강 참고

삼차함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가(감소)한다.
 $\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이다.
 $\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재한다.
 $\Leftrightarrow$ 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 모든 실수 x 에서
 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$)이다.

10 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax-\frac{1}{3}$ 에서
 $f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=1$
 $a < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극솟값 -1 을 가지므로
 $f(1)=-1$ 에서

$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(a+1)+a-\frac{1}{3}=-1, \frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}$
 $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 극댓값은

$f(a)=f(-1)=-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

답 ①

11 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+9$
 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 0을 가지므로
 $f(1)=0, f'(1)=0$
 $f(1)=0$ 에서 $1+a+9+b=0$
 $\therefore a+b=-10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $f'(1)=0$ 에서 $3+2a+9=0 \quad \therefore a=-6$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-6+b=-10 \quad \therefore b=-4$
 $\therefore ab=-6 \times (-4)=24$

답 ⑤

12 $f(x)=x^4+4x^3+2ax^2$ 에서
 $f'(x)=4x^3+12x^2+4ax=4x(x^2+3x+a)$
 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이
 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
 즉, 이차방정식 $x^2+3x+a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두
 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $D=9-4a > 0$ 이고, $a \neq 0$ 이므로
 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{4}$ ($4a < 9$ 에서 $a < \frac{9}{4}$)

답 ④

blacklabel 특강 필수 원리

사차함수 $f(x)$ 의 극값

사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 삼차함수이므로 삼차방정식
 $f'(x)=0$ 이

- (1) 서로 다른 세 실근을 가지면 사차함수 $f(x)$ 는 3개의 극값
- (2) 중근과 다른 한 실근을 가지면 사차함수 $f(x)$ 는 1개의 극값
- (3) 삼중근을 가지면 사차함수 $f(x)$ 는 1개의 극값
- (4) 한 실근과 두 허근을 가지면 사차함수 $f(x)$ 는 1개의 극값을 갖는다.

13 $f(x)=x^3-6x^2+ax-1$ 에서 $f'(x)=3x^2-12x+a$
 함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 3$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두
 가지려면 이 구간에서 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉

$3x^2 - 12x + a = 0$ 이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

(i) $\frac{D}{4} = 36 - 3a > 0$ 에서

$3a < 36 \quad \therefore a < 12$

(ii) $f'(-2) = 12 + 24 + a > 0$

$\therefore a > -36$

(iii) $f'(3) = 27 - 36 + a > 0$

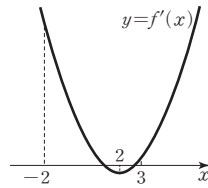
$\therefore a > 9$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 상수 a 의 값의 범위는 $9 < a < 12$

따라서 $m=9, n=12$ 이므로

$m+n=9+12=21$

답 21



blacklabel 특강 참고

절댓값 기호를 포함한 함수에서의 극대, 극소

함수에서 극대, 극소는

(1) 미분계수가 0이고 그 좌우에서 미분계수의 부호가 바뀌는 점

(2) 뾰족한 점

에서 존재한다.

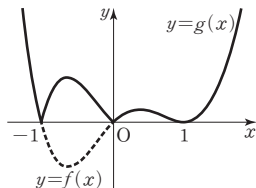
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 $y \geq 0$ 인 부분은 남기고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동하여 그리므로 함수의 그래프와 x 축이 만나는 점에서 위의 (1), (2)를 만족시키는 경우가 생길 수 있다.

따라서 함수 $|f(x)|$ 에서 극대인 점과 극소인 점을 찾을 때는 함수 $f(x)$ 의 극대인 점과 극소인 점 또는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점에서 확인한다.

- 14 주어진 도함수 $y=g'(x)$ 의 그래프에서
 $g'(0)=0, g'(b)=0, g'(d)=0, g'(f)=0$
 (i) $x=0, x=f$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0, x=f$ 에서 극댓값을 갖는다.
 (ii) $x=b$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=b$ 에서 극솟값을 갖는다.
 (iii) $x=d$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호는 양(+)에서 양(+), 즉 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 $m=2, n=1$ 이므로
 $m-n=2-1=1$

답 1

- 15 $g(1)=g'(1)$ 이고 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로
 $g(1)=g'(1)=0$
 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하고 $g(x)=|f(x)|$ 이므로 $f(1)=f'(1)=0$
 이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(x)=x(x+1)(x-1)^2$ 이므로

$g(x)=|x(x+1)(x-1)^2|$

$\therefore g(2)=|2 \times 3 \times 1|=6$

답 ③

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 41~45

01 45	02 $y=-3x-1$	03 ③		
04 $y=2x-\frac{9}{4}$		05 $\frac{\sqrt{30}}{3}$	06 ④	07 ①
08 ⑤	09 ④	10 ③	11 26	12 $0 < a < 3$
13 ③	14 ④	15 $-\frac{5}{4}$	16 ②	17 $\frac{9}{4}$
18 ④	19 ②	20 ④	21 ④	22 225
23 8	24 ④	25 10	26 $-\frac{3}{5}$	27 ②
28 ⑤	29 ⑤	30 16	31 18	32 11
33 82	34 ⑤	35 6		

- 01 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ 에서 $f'(x)=3x^2-6x+3$
 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선과 곡선 $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+3t) 라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+3$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3-3t^2+3t)=(3t^2-6t+3)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-6t+3)x-2t^3+3t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 위의 직선이 원점을 지나므로
 $-2t^3+3t^2=0, t^2(2t-3)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$
 이것을 각각 ①에 대입하여 정리하면 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 두 직선의 방정식은
 $y=3x$ 또는 $y=\frac{3}{4}x$
 위의 두 직선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표는
 (i) 직선 $y=3x$ 일 때,
 $x^3-3x^2+3x=3x$ 에서 $x^3-3x^2=0$
 $x^2(x-3)=0 \quad \therefore x=3 (\because x \neq 0)$
 (ii) 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 일 때,
 $x^3-3x^2+3x=\frac{3}{4}x$ 에서 $4x^3-12x^2+9x=0$
 $x(2x-3)^2=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2} (\because x \neq 0)$

$$(i), (ii) \text{에서 } S = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore 10S = 10 \times \frac{9}{2} = 45$$

답 45

02 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 6x$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2)$ 이라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2 + 6t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^3 + 3t^2) = (3t^2 + 6t)(x - t)$
 $\therefore y = (3t^2 + 6t)x - 2t^3 - 3t^2 \quad \dots\dots ㉠$
 위의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표는
 $x^3 + 3x^2 = (3t^2 + 6t)x - 2t^3 - 3t^2$ 에서
 $x^3 + 3x^2 - (3t^2 + 6t)x + 2t^3 + 3t^2 = 0$
 $(x - t)\{x^2 + (3 + t)x + (-2t^2 - 3t)\} = 0$
 $(x - t)^2(x + 2t + 3) = 0$
 $\therefore x = t$ 또는 $x = -2t - 3$
 그런데 접점 이외의 다른 교점이 존재하지 않으므로
 $t = -2t - 3, 3t = -3 \quad \therefore t = -1$
 이것을 ㉠에 대입하여 정리하면
 $y = -3x - 1$

단계	채점 기준	배점
(가)	접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2)$ 이라 하고 접선의 방정식을 t 를 이용하여 나타낸 경우	40%
(나)	주어진 곡선과 접선의 교점의 x 좌표를 구한 경우	30%
(다)	접점 이외의 다른 교점이 존재하지 않기 위한 t 의 값을 구한 후, 접선의 방정식을 구한 경우	30%

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

해당 문제에서 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이라 하고 이 곡선의 접선을
 $g(x) = mx + n$ 이라 하면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접점 이외의 다른 교점을 갖지 않으므로 방정식 $f(x) = g(x)$ 는 삼중근을 가져야 한다. 이 삼중근을 t 라 하면 방정식 $f(x) = g(x)$, 즉
 $x^3 + 3x^2 - mx - n = 0$ 의 실근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -3 이므로 $3t = -3$ 에서 $t = -1$ 이다. 따라서 문제에서 조건을 만족시키는 접선은 함수 $f(x)$ 의 그래프의 $x = -1$ 에서의 접선이다.

03 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
 접선의 기울기가 m 이므로 $f'(x) = m$ 에서
 $3x^2 - 6x + 2 = m$
 $\therefore 3x^2 - 6x + 2 - m = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 ㄱ. 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -\frac{-6}{3} = 2$ (참)
 ㄴ. ㄱ에서 α, β 가 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 ㉠의 판별식을 D_1 라 하면
 $\frac{D_1}{4} = 9 - 3(2 - m) > 0$ 에서
 $3 + 3m > 0, 3m > -3 \quad \therefore m > -1$ (참)
 ㄷ. 기울기가 m 으로 같은 두 접선은 평행하므로 두 접선

사이의 거리와 $\overline{PQ}$ 가 같아지려면 두 접점
 $P(\alpha, \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha), Q(\beta, \beta^3 - 3\beta^2 + 2\beta)$ 를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다.
 즉, 기울기의 곱은 -1 이어야 하므로
 $m \times \frac{(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha) - (\beta^3 - 3\beta^2 + 2\beta)}{\alpha - \beta} = -1$
 $m \times \frac{(\alpha^3 - \beta^3) - 3(\alpha^2 - \beta^2) + 2(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} = -1$
 $m\{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3(\alpha + \beta) + 2\} = -1$
 $m\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 2\} = -1 \quad \dots\dots ㉡$
 한편, α, β 는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{2 - m}{3}$
 이것을 ㉡에 각각 대입하면
 $m\left(4 - \frac{2 - m}{3} - 6 + 2\right) = -1$
 $m(m - 2) = -3, m^2 - 2m + 3 = 0$
 위의 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4} = 1^2 - 3 = -2 < 0$ 이므로 위의 이차방정식을 만족시키는 실수 m 이 존재하지 않는다.
 즉, 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$ 가 같아지는 실수 m 은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

• 다른풀이 •

ㄴ. 접선의 기울기가 m 이므로
 $y' = 3x^2 - 6x + 2$
 $= 3(x^2 - 2x + 1) - 1$
 $= 3(x - 1)^2 - 1$
 이때, 두 점 P, Q는 서로 다른 점이므로 x 좌표가 같을 수 없다.
 $\therefore m > -1$ (참)

04 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ 라 하면 $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$
 접점의 좌표를 $(t, t^4 - 3t^2 + 2t)$ 라 하면 접선의 기울기는
 $f'(t) = 4t^3 - 6t + 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - (t^4 - 3t^2 + 2t) = (4t^3 - 6t + 2)(x - t)$
 $\therefore y = (4t^3 - 6t + 2)x - 3t^4 + 3t^2 \quad \dots\dots ㉠$
 위의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표는
 $x^4 - 3x^2 + 2x = (4t^3 - 6t + 2)x - 3t^4 + 3t^2$ 에서
 $x^4 - 3x^2 - (4t^3 - 6t)x + 3t^4 - 3t^2 = 0$
 $(x - t)\{x^3 + tx^2 + (t^2 - 3)x - 3t^3 + 3t\} = 0$
 $(x - t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 3) = 0$
 이때, 직선 ㉠과 곡선 $y = f(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 접하려면 위의 방정식이 서로 다른 두 중근을 가져야 한다.
 즉, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2tx + 3t^2 - 3 = 0$ 이 $x \neq t$ 인 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = t^2 - (3t^2 - 3) = 0 \text{에서}$$

$$t^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore t = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y = 2x - \frac{9}{4} \quad \text{답 } y = 2x - \frac{9}{4}$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ 라 하고 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 두 점에
서 접하는 직선의 방정식을 $g(x) = mx + n$, 서로 다른 두 접점의 x
좌표를 α, β 라 하자.

방정식 $f(x) = g(x)$, 즉 $x^4 - 3x^2 + (2-m)x - n = 0$ 은 두 개의 중
근 α, β 를 갖고, 사차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 실근의 합
은 0이므로 $2(\alpha + \beta) = 0$ 이다.

즉, $\beta = -\alpha$ 이고 두 접점 $(\alpha, f(\alpha)), (-\alpha, f(-\alpha))$ 에서의 접선이
같으려면 기울기도 같아야 하므로 $f'(\alpha) = f'(-\alpha)$ 이다.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \text{에서 } f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \text{이므로}$$

$$4\alpha^3 - 6\alpha + 2 = -4\alpha^3 + 6\alpha + 2$$

$$8\alpha^3 - 12\alpha = 0, 4\alpha(2\alpha^2 - 3) = 0$$

$$\therefore \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

그런데 $\alpha = 0$ 이면 접선 $y = g(x)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 의 서로 다른 두 점
에서 접하지 않으므로 $\alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

05 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$ 에서 $f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}$

점 P의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면 점 P에서의 접선 l 의
기울기는 └ 점 P는 제4사분면 위에 있으므로

$$f'(t) = t^2 - \frac{4}{3}$$

또한, 접선 m 과 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 접점을 Q
라 하고, 점 Q의 좌표를 $(\alpha, \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}\alpha)$ 라 하면 접선 m

의 기울기는 $f'(\alpha) = \alpha^2 - \frac{4}{3}$ 이므로 접선 m 의 방정식은

$$y - \left(\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{4}{3}\alpha\right) = \left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)(x - \alpha)$$

$$\therefore y = \left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)x - \frac{2}{3}\alpha^3$$

위의 직선은 점 $P\left(t, \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t\right)$ 를 지나므로

$$\frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t = \left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right)t - \frac{2}{3}\alpha^3$$

$$t^3 - 3\alpha^2t + 2\alpha^3 = 0, (t - \alpha)^2(t + 2\alpha) = 0$$

$$\therefore t = -2\alpha \quad (\because t \neq \alpha) \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

한편, 두 직선 l, m 은 서로 수직이므로

$$f'(t) \times f'(\alpha) = -1 \text{에서 } \left(t^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\alpha^2 - \frac{4}{3}\right) = -1$$

$$\text{㉠에서 } \alpha = -\frac{1}{2}t \text{이므로}$$

$$\left(t^2 - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{4}{3}\right) = -1$$

$$\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{25}{9} = 0, \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{3}\right)^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{10}{3} \quad \therefore t = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad (\because t > 0)$$

따라서 구하는 점 P의 x 좌표는 $\frac{\sqrt{30}}{3}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{30}}{3}$

• 다른풀이 •

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x \text{에서 } f'(x) = x^2 - \frac{4}{3}$$

$$P\left(t, \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t\right) \quad (t > 0) \text{라 하면 점 P에서의 접선의 기울}$$

기는 $f'(t) = t^2 - \frac{4}{3}$ 이므로 접선 l 과 수직인 직선 m 의 기

울기를 m' 이라 하면

$$m' \times \left(t^2 - \frac{4}{3}\right) = -1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이고 직선 m 의 방정식은

$$y - \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t\right) = m'(x - t)$$

$$\therefore y = m'x - m't + \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t$$

직선 m 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 P가 아닌 점에
서 접하므로

$$m'x - m't + \frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{3}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$$

$$x^3 - (3m' + 4)x - t^3 + 4t + 3m't = 0$$

$$(x - t)(x^2 + tx + t^2 - 4 - 3m') = 0$$

이차방정식 $x^2 + tx + t^2 - 4 - 3m' = 0$ 이 $x \neq t$ 인 중근을
가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = t^2 - 4(t^2 - 4 - 3m') = 0$$

$$-3t^2 + 16 + 12m' = 0$$

$$\therefore m' = \frac{1}{4}t^2 - \frac{4}{3}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{4}{3}\right)\left(t^2 - \frac{4}{3}\right) = -1$$

$$\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{16}{9} = -1, \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{25}{9} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{3}\right)^2 = 0, t^2 = \frac{10}{3} \quad \therefore t = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad (\because t > 0)$$

06 곡선 $y = x(x-1)(x+2)$, 즉 $y = x^3 + x^2 - 2x$ 에서
 $y' = 3x^2 + 2x - 2$

이 곡선 위의 점 $P_n(x_n, x_n^3 + x_n^2 - 2x_n)$ 에서의 접선의
기울기는 $3x_n^2 + 2x_n - 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (x_n^3 + x_n^2 - 2x_n) = (3x_n^2 + 2x_n - 2)(x - x_n)$$

$$\therefore y = (3x_n^2 + 2x_n - 2)x - 2x_n^3 - x_n^2$$

이 접선과 곡선 $y = x^3 + x^2 - 2x$ 가 만나는 P_n 이 아닌 점
이 P_{n+1} 이므로

$$x^3 + x^2 - 2x = (3x_n^2 + 2x_n - 2)x - 2x_n^3 - x_n^2$$

$$x^3 + x^2 - (3x_n^2 + 2x_n)x + 2x_n^3 + x_n^2 = 0$$

$$(x - x_n)^2(x + 2x_n + 1) = 0$$

$$\therefore x = x_n \text{ 또는 } x = -2x_n - 1$$

$$\therefore x_{n+1} = -2x_n - 1 \quad \dots\dots ㉑$$

㉑. $P_1(1, 0)$ 이므로 $x_1 = 1$

$$x_2 = -2x_1 - 1 = -3$$

$$\therefore x_3 = -2x_2 - 1 = -2 \times (-3) - 1 = 5 \text{ (참)}$$

㉒. ㉑에 $n=99$ 를 대입하면

$$x_{100} = -2x_{99} - 1$$

$$\therefore 2x_{99} + x_{100} = -1 \text{ (거짓)}$$

㉓. $x_{n+1} = -2x_n - 1$ 에서

$$x_{n+1} + \frac{1}{3} = -2\left(x_n + \frac{1}{3}\right)$$

수열 $\left\{x_n + \frac{1}{3}\right\}$ 은 첫째항이 $x_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 이고 공비가 -2 인 등비수열이므로

$$x_n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times (-2)^{n-1}$$

$$\therefore x_n = \frac{4}{3} \times (-2)^{n-1} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore x_{99} &= \frac{4}{3} \times (-2)^{98} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{4 \times 2^{98} - 1}{3} = \frac{2^{100} - 1}{3} \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉑, ㉓이다.

답 ④

07 $f(x) = x^2 + 2$ 라 하면 $f'(x) = 2x$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(0, a)$ ($0 < a < 2$), 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면

$$a + r = 2 \quad \dots\dots ㉑$$

또한, 원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^2 + 2)$ 라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^2 + 2) = 2t(x - t)$$

$$\therefore y = 2tx - t^2 + 2 \quad \dots\dots ㉒$$

직선 ㉒이 원점을 지나므로

$$0 = -t^2 + 2, t^2 = 2 \quad \therefore t = \pm\sqrt{2}$$

이것을 ㉒에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = \pm 2\sqrt{2}x \quad \dots\dots ㉓$$

이때, 원이 직선 ㉓에 접하므로 원의 중심 C 와 직선 ㉓ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 r 와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|-a|}{\sqrt{(\pm 2\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = r, \frac{|a|}{3} = r$$

$$\therefore a = 3r \text{ (}\because a > 0, r > 0\text{)} \quad \dots\dots ㉔$$

㉑, ㉔을 연립하여 풀면

$$r = \frac{1}{2}, a = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

답 ①

08 $f(x) = x^3 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$

점 $A(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = x + 1 \quad \therefore y = x + 2$$

위의 직선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 2x = x + 2 \text{에서 } x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore B(2, 4)$$

한편, 점 $C(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 1 = x - 1 \quad \therefore y = x - 2$$

위의 직선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 2x = x - 2 \text{에서 } x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore D(-2, -4)$$

이때, 오른쪽 그림과 같이

두 점 A, C 가 원점에 대하여 대칭이고 두 점 B, D 도 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OB} = \overline{OD}$

즉, 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로

$\square ADCB$ 는 평행사변형이다.

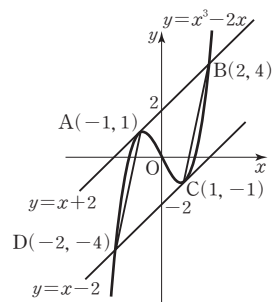
따라서 $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 이고, 원점 O 와 직선

$y = x + 2$, 즉 $x - y + 2 = 0$ 사이의 거리가

$$\frac{|2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \text{이므로 사각형 } ADCB \text{의 넓이는}$$

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

답 ⑤



09 $y = x^3$ 에서 $y' = 3x^2$

점 $A(-1, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 접선의 방정식은

$$y - (-1) = 3\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = 3x + 2$$

위의 직선이 곡선 $y = x^3$ 과 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점이 B 이므로

$$x^3 = 3x + 2, x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore B(2, 8)$$

선분 AB 를 지름으로 하는 원의 넓이가 S_1 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{8 - (-1)\}^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\therefore S_1 = \pi \times \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}\pi$$

이때, S_1 의 값이 변하지 않으므로 $S_1 - S_2$ 의 값이 최소이려면 S_2 의 값이 최대이어야 한다.

즉, S_2 의 값이 최대가 되도록 하는 점 P는 원 C의 내부에 있는 곡선 $y=x^3$ 위의 점 중에서 직선 AB와 가장 멀리 떨어져 있으므로 점 P에서의 접선은 직선 AB와 평행해야 한다.

$$3x^2=3 \text{에서 } x^2=1 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

이때, 점 P가 원 C의 내부에 있으려면 $-1 < x < 2$ 이어야 하므로 P(1, 1)

점 P와 선분 AB 사이의 거리를 지름으로 하는 원을 C_2 라 하자.

원 C_2 의 지름의 길이는 점 P(1, 1)과 직선 $y=3x+2$, 즉 $3x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로 원 C_2 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$2r = \frac{|3-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore r = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

따라서 S_2 의 최댓값은 $\pi \times \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{2}{5}\pi$ 이므로

$S_1 - S_2$ 의 최솟값은

$$\frac{45}{2}\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{225-4}{10}\pi = \frac{221}{10}\pi$$

답 ④

• 다른풀이 •

$$y=x^3 \text{에서 } y'=3x^2$$

점 A(-1, -1)에서의 접선의 기울기가 3이므로 접선의 방정식은

$$y - (-1) = 3\{x - (-1)\} \quad \therefore y = 3x + 2$$

이 직선이 곡선 $y=x^3$ 과 만나는 점 중 점 A가 아닌 점이 B이므로

$$x^3 = 3x + 2, \quad x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x+1)^2(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, B(2, 8)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{8 - (-1)\}^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore S_1 = \pi \times \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}\pi$$

점 P는 원 C의 내부에서 곡선 $y=x^3$ 위를 움직이므로 P(a, a^3) ($-1 < a < 2$)이라 하면 점 P와 직선 $y=3x+2$, 즉 $3x-y+2=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3a - a^3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-a^3 + 3a + 2|}{\sqrt{10}}$$

d 를 지름으로 하는 원의 넓이가 S_2 이고 $S_1 - S_2$, 즉

$$\frac{45}{2}\pi - S_2 \text{의 값이 최소이려면 } S_2 \text{의 값이 최대이어야 한다.}$$

즉, d 의 값이 최대이어야 하므로

$$f(a) = -a^3 + 3a + 2 \text{라 하면 } f'(a) = -3a^2 + 3$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } -3a^2 + 3 = 0$$

$$-3(a+1)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 \quad (\because -1 < a < 2)$$

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		/	극대	\	

함수 $f(a)$ 는 $a=1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$

즉, d 의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{10}}$ 이므로 d 를 지름으로 하는 원의

넓이 S_2 의 최댓값은

$$\pi \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{2}{5}\pi$$

따라서 $S_1 - S_2$ 의 최솟값은

$$\frac{45}{2}\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{221}{10}\pi$$

10 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

점 P(2a, $4a^2$)에서의 접선의 기울기는 $f'(2a)=4a$ 이므로

로 접선 l 의 방정식은

$$y - 4a^2 = 4a(x - 2a) \quad \therefore y = 4ax - 4a^2$$

접선 l 이 x 축과 만나는 점 A의 x 좌표는

$$4ax - 4a^2 = 0 \quad \therefore x = a \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore A(a, 0)$$

한편, 점 A를 지나고 접선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4a}(x - a) \quad \therefore y = -\frac{1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

위의 직선의 y 절편은 $\frac{1}{4}$ 이므로 B(0, $\frac{1}{4}$)

이때, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이가 $r(a)$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB}) \times r(a) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left\{ a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4} \right\} \times r(a)$$

$$\therefore r(a) = \frac{a}{4\left(a + \frac{1}{4} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}}\right)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} r(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{4\left(a + \frac{1}{4} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}}\right)} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4\left(1 + \frac{1}{4a} + \sqrt{1 + \frac{1}{16a^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 ③

11 (다각형 OABPC의 넓이)

= (사다리꼴 OABC의 넓이) - (삼각형 BCP의 넓이)

.....㉠

이고

$$(\text{사다리꼴 OABC의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (5+9) \times 4 = 28$$

.....㉡

이므로 삼각형 BCP의 넓이가 최소일 때 다각형

OABPC의 넓이는 최대이다.

이때, 선분 BC를 삼각형 BCP의 밑변으로 생각하면 직선 BC와 점 P 사이의 거리가 높이이므로 점 P에서의 접선이 직선 BC와 평행할 때 삼각형 BCP의 넓이가 최소이다.

$$y = -\frac{1}{4}x^3 + 4x \text{에서 } y' = -\frac{3}{4}x^2 + 4 \text{이므로 점 P의 } x \text{좌표}$$

를 a ($0 \leq a \leq 4$)라 하면 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}a^2 + 4$

직선 BC의 기울기는 $\frac{9-5}{4-0} = 1$ 이므로

$$-\frac{3}{4}a^2 + 4 = 1, \frac{3}{4}a^2 = 3$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because 0 \leq a \leq 4)$$

즉, P(2, 6)이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - 6 = 1(x - 2) \quad \therefore y = x + 4$$

접선 $y = x + 4$, 즉 $x - y + 4 = 0$ 과 점 C(0, 5) 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|0 - 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 $\triangle BCP$ 는 밑변의 길이가

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (9-5)^2} = 4\sqrt{2} \text{이고 높이가 } d = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{인 삼각형}$$

이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 다각형 OABPC의 넓이의 최댓값은

$$28 - 2 = 26 \quad \text{답 26}$$

• 다른풀이 •

$P(a, -\frac{1}{4}a^3 + 4a)$ ($0 \leq a \leq 4$)라 하고, 점 P에서 x 축에

내린 수선의 발을 H라 하면

(다각형 OABPC의 넓이)

$$= \square OHPC + \square ABPH$$

$$= \frac{1}{2} \left(5 - \frac{1}{4}a^3 + 4a \right) \times a + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}a^3 + 4a + 9 \right) (4 - a)$$

$$= \frac{1}{2} (-a^3 + 12a + 36) = -\frac{1}{2}a^3 + 6a + 18$$

$$f(a) = -\frac{1}{2}a^3 + 6a + 18 \text{이라 하면}$$

$$f'(a) = -\frac{3}{2}a^2 + 6$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } -\frac{3}{2}a^2 + 6 = 0$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because 0 \leq a \leq 4)$$

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	4
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	18	/	극대	\	10

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 다각형 OABPC의 넓이의 최댓값은

$$f(2) = -4 + 12 + 18 = 26$$

12 함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ 이 실수 전체의 집합에서 연속

이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $2 \leq x_1 < c < x_2 \leq 3$ 이므로 $2 < c < 3$

한편, $f'(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ 에서

$$f'(c) = (c-1)^2 - 1$$

$$2 < c < 3 \text{이므로 } 0 < f'(c) < 3$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

답 $0 < a < 3$

13 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서

연속이고, 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능한 함수이다.

이때, $g(0) = f(0) = 1$, $g(3) = 10f(3) = 10$ 이므로 평균값 정리에 의하여

$$g'(c) = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 1}{3} = 3$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 답 ③

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 평균값 정리를 이용하는 문제로 $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ 를 보고 곱의 미분법을 생각하여 $g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x)$ 를 이용하는 문제로 오해하기 쉽다. 그러나 이 문제는 $g(0)$, $g(3)$ 의 값을 알면 풀기 쉬운 문제이다.

14 다항함수는 모든 실수 x 에서 연속이고 미분가능한 함수이므로 다항함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(3, 5)$ 에서 미분가능하다.

즉, 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(3, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 ㉠에서 $|f'(x)| \leq \frac{3}{2}$ 이므로

$$\left| \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} \right| \leq \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{1 - a}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \quad (\because \text{조건 ㉠})$$

$$|1 - a| \leq 3, -3 \leq a - 1 \leq 3$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 4$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 의 최댓값은 4이다.

답 ④

15 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 의 도함수

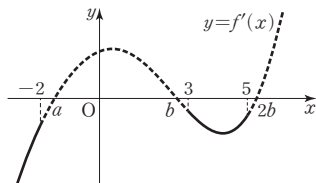
$f'(x)$ 는 삼차함수이고, 이 함수가 세 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$,

$(2b, 0)$ 을 지나므로

$$f'(x) = k(x-a)(x-b)(x-2b) \quad (\text{단, } k > 0)$$

라 할 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 $x \leq -2$ 와 $3 \leq x \leq 5$ 에서 각각 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $-2 \leq a < 0$ 이고 $b \leq 3$, $5 \leq 2b$ 이므로

$$0 < -a \leq 2, \quad \frac{5}{2} \leq b \leq 3$$

이때, $\frac{b}{a}$ 의 값이 최대하려면 $-\frac{b}{a}$, 즉 $\frac{b}{-a}$ 의 값이 최소이어야 하므로 $-a$ 가 최대, b 가 최소이어야 한다.

따라서 $\frac{b}{a}$ 의 최댓값은 $-a=2$, $b=\frac{5}{2}$, 즉 $a=-2$,

$b=\frac{5}{2}$ 일 때이므로

$$\frac{\frac{5}{2}}{-2} = -\frac{5}{4}$$

답 $-\frac{5}{4}$

16 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15|x-2a| + 3$ 에서

(i) $x < 2a$ 일 때,

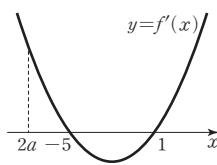
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15(x-2a) + 3 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$$

이때, 함수 $f(x)$ 가 $x < 2a$ 에서 증가하려면 $x < 2a$ 에서

$$f'(x) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$2a \leq -5 \quad \therefore a \leq -\frac{5}{2}$$



(ii) $x \geq 2a$ 일 때,

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15(x-2a) + 3 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x+2)^2 + 3 > 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 2a$ 에서 증가한다.

(i), (ii)에서 $a \leq -\frac{5}{2}$

답 ②

17 다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에서 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 4$ 이므로

$$f'(c) \leq 4$$

함수 $f(x)$ 가 2차 이상의 다항함수이면 $f'(x)$ 는 일차 이상의 다항함수이므로 $f'(x) > 4$ 또는 $f'(x) < 0$ 이 되는 x 의 값이 존재한다.

또한, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 증가하므로 상수함수일 수 없다.

즉, $f(x)$ 는 일차함수이므로

$$f(x) = mx + k \quad (0 < m \leq 4, m, k \text{는 상수})$$

이때, 곡선 $y=x^2$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 만나므로 이차방정식 $x^2=mx+k$, 즉 $x^2-mx-k=0$ 이 증근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 + 4k = 0 \quad \therefore k = -\frac{m^2}{4}$$

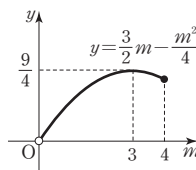
$$f(x) = mx - \frac{m^2}{4} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}m - \frac{m^2}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(m-3)^2 + \frac{9}{4} \quad (0 < m \leq 4)$$

따라서 함수 $y = \frac{3}{2}m - \frac{m^2}{4}$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 최댓값은 $m=3$ 일 때 $\frac{9}{4}$ 이다.



답 $\frac{9}{4}$

18 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \{t^3 - (a+2)t^2 + at\} = \{3t^2 - 2(a+2)t + a\}(x-t)$$

위의 접선이 y 축과 만나는 점의 좌표가 $(0, g(t))$ 이므로

$$g(t) - t^3 + (a+2)t^2 - at = -3t^3 + 2(a+2)t^2 - at$$

$$\therefore g(t) = -2t^3 + (a+2)t^2$$

이때, 함수 $g(t)$ 가 구간 $[0, 5]$ 에서 증가하므로 이 구간에서 $g'(t) \geq 0$ 이어야 한다.

$$g'(t) = -6t^2 + 2(a+2)t = -2t\{3t - (a+2)\}$$

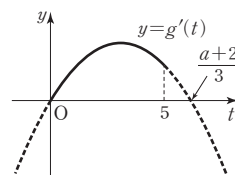
에서 함수 $y=g'(t)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\frac{a+2}{3} \geq 5$$

$$a+2 \geq 15 \quad \therefore a \geq 13$$

따라서 구하는 a 의 최솟값은 13이다.



답 ④

19 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + (a^2 - 2a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 2ax + (a^2 - 2a) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 2a) > 0 \text{에서 } 2a^2 - 6a < 0$$

$$a(a-3) < 0 \quad \therefore 0 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

한편, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (5a-4)x + 2$ 에서

$$g'(x) = x^2 + 2ax + (5a - 4)$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $g'(x) = 0$ 이
중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식

$$x^2 + 2ax + (5a - 4) = 0 \text{의 판별식을 } D' \text{이라 하면}$$

$$\frac{D'}{4} = a^2 - (5a - 4) \leq 0 \text{에서 } a^2 - 5a + 4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는
 $1 \leq a < 3$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 a 의 값의 합은
 $1 + 2 = 3$

답 ②

20 삼차함수 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프
가 x 좌표가 a ($a \neq 0$)인 점에서 x 축에 접한다고 하면 이
그래프는 원점을 지나므로

$$f(x) = x(x-a)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

이라 할 수 있다.

$$f'(x) = (x-a)^2 + 2x(x-a) = (x-a)(3x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = a \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -4
이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의
개형은 오른쪽 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{a}{3}$ 일 때 극솟값
 -4 를 가지므로

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a}{3} \left(\frac{a}{3} - a\right)^2 = \frac{4}{27}a^3$$

$$= -4$$

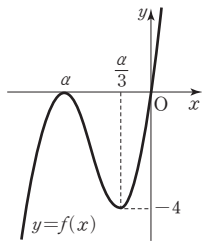
$$a^3 = -27 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a \text{는 실수})$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$\therefore p = 6, q = 9 \quad \therefore p + q = 15$$

답 ④



21 $f(x) = x^3 + 6ax^2 - 12x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 12ax - 12$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 극대가 되는 점과 극소가 되는
점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 방정식 $f'(x) = 0$
의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -4a, \alpha\beta = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$

이때, 두 점 P, Q의 x 좌표는 극대가 되는 점과 극소가 되
는 점을 이은 선분을 각각 1 : 2, 2 : 1로 내분하는 점의 x
좌표와 같으므로 $\frac{2\alpha + \beta}{3}, \frac{\alpha + 2\beta}{3}$ 이다.

선분 PQ가 y 축과 만나려면 두 점 P, Q의 x 좌표의 부호
가 서로 다르거나 두 점 P, Q의 x 좌표 중에서 하나가 0
이어야 하므로

$$\frac{2\alpha + \beta}{3} \times \frac{\alpha + 2\beta}{3} \leq 0 \text{에서 } 2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2 \leq 0$$

$$2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \leq 0$$

㉠을 위의 부등식에 대입하면

$$32a^2 - 4 \leq 0, a^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ④

22 $f(x) = (4x^2 - 1)(2x - 1)^n$
 $= (2x + 1)(2x - 1)(2x - 1)^n$
 $= (2x + 1)(2x - 1)^{n+1}$

에서

$$f'(x) = 2(2x - 1)^{n+1} + 2(2x + 1)(n + 1)(2x - 1)^n$$

$$= 2(2x - 1)^n \{2x - 1 + (n + 1)(2x + 1)\}$$

$$= 2(2x - 1)^n \{(2n + 4)x + n\}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = -\frac{n}{2n + 4}$$

이때, 자연수 n 에 대하여 $-\frac{n}{2n + 4} < 0$ 이고 함수 $f(x)$
의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) n 이 홀수일 때,

x	$\cdots$	$-\frac{n}{2n+4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

(ii) n 이 짝수일 때,

x	$\cdots$	$-\frac{n}{2n+4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극소이라면 n 이 홀
수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n 의 값의 합은 30 이하의 홀수의
합이므로

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 29 = \frac{15(1 + 29)}{2} = 225$$

답 225

23 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + 2x$ 에서

$$f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극값을 가지므로 $f'(-2) = 0$
이고, $f'(c) = 0$ ($c \neq -2$)이면 $x = c$ 에서 극값을 갖지 않
으므로 $x = c$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야
한다.

즉, $f'(x)$ 는 $(x - c)^2$ 을 인수로 가져야 하므로

$$f'(x) = (x + 2)(x - c)^2$$

$$= x^3 + (2 - 2c)x^2 + (c^2 - 4c)x + 2c^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

이라 할 수 있다.

㉠ = ㉡이므로

$$a = 2 - 2c, b = c^2 - 4c, 2 = 2c^2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a = 2 - 2c$ 에서

$$2 - 2c \neq 0 \quad \therefore c \neq 1$$

$$\therefore a=4, b=5, c=-1$$

$$\therefore a+b+c=4+5+(-1)=8$$

답 8

blacklabel 특강 필수 개념

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $(x-c)^n$ (n 은 짝수)의 인수를 가지면 $f'(c)=0$ 이지만 $x=c$ 에서는 극값을 갖지 않는다.

24
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & (0\leq x\leq 1) \\ -ax^2+dx+e & (1< x\leq 2) \end{cases}$$

$$f(0)=0\text{이므로 } c=0$$

$$f(2)=4\text{이므로 } -4a+2d+e=4 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하려면 연속이어야 하므로

$$a+b=-a+d+e\text{에서 } b=-2a+d+e \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

또한, $x=1$ 에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & (0< x< 1) \\ -2ax+d & (1< x< 2) \end{cases}\text{에서}$$

$$2a+b=-2a+d\text{에서 } b=-4a+d \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}=\textcircled{3}\text{이므로 } -2a+d+e=-4a+d$$

$$2a+e=0 \quad \therefore e=-2a$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-6a+2d=4\text{에서 } d=3a+2$$

$$e=-2a, d=3a+2\text{를 } \textcircled{2}\text{에 대입하면}$$

$$b=-2a+3a+2-2a=2-a$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} ax^2+(2-a)x & (0\leq x\leq 1) \\ -ax^2+(3a+2)x-2a & (1< x\leq 2) \end{cases}$$

한편, $a<0$ 이므로 극댓값은 함수 $f(x)=ax^2+(2-a)x$ 에서 갖는다.

$$f'(x)=2ax+2-a\text{이므로}$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=\frac{a-2}{2a}$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 존재하므로

$$0<\frac{a-2}{2a}<1\text{이고 } f\left(\frac{a-2}{2a}\right)=\frac{9}{4}\text{이어야 한다.}$$

$$a<0\text{이므로 } 0<\frac{a-2}{2a}<1\text{의 각 변에 } 2a\text{를 곱하면}$$

$$0>a-2>2a \quad \therefore a<-2$$

$$\text{또한, } f\left(\frac{a-2}{2a}\right)=\frac{9}{4}\text{에서}$$

$$a\times\left(\frac{a-2}{2a}\right)^2+(2-a)\left(\frac{a-2}{2a}\right)=\frac{9}{4}$$

$$\frac{(a-2)^2}{4a}-\frac{(a-2)^2}{2a}=\frac{9}{4}$$

$a\neq 0$ 이므로 위의 식의 양변에 $4a$ 를 곱하면

$$(a-2)^2-2(a-2)^2=9a$$

$$-a^2+4a-4=9a, a^2+5a+4=0$$

$$(a+1)(a+4)=0 \quad \therefore a=-4 (\because a<-2) \quad \text{답 ④}$$

25 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모두 삼차함수이고

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

이때, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이고 $f(x)g(x)$ 의 최

고차항의 계수는 1이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{3}$ 이다.

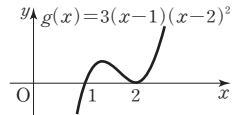
또한, $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는다.

즉, $g(x)=3(x-2)^2(x-a)$ 라 하면 $a=1$ 또는 $a=3$ 이다.

(i) $a=1$ 일 때,

$$\text{함수 } g(x)=3(x-1)(x-2)^2$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

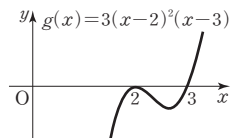


이때, 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$ 일 때,

$$\text{함수 } g(x)=3(x-2)^2(x-3)$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{3}\times 2(x-1)\times (x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)(3x-7)$$

$$\text{따라서 } f'(0)=\frac{1}{3}\times (-1)\times (-7)=\frac{7}{3}\text{이므로}$$

$$p=3, q=7 \quad \therefore p+q=10$$

답 10

blacklabel 특강 풀이첨삭

다항함수 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ 을 인수로 가지면 $f(x)=(x-a)^2g(x)$ (단, $g(x)$ 는 다항식)로 나타낼 수 있다. 이때,

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x) \\ = (x-a)\{2g(x)+(x-a)g'(x)\}$$

이므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 $x=a$ 를 갖는다.

즉, $f'(a)=0$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극값을 갖는다.

26 해결단계

① 단계	조건 ④에서 함수 $g(t)$ 가 $t=0$ 에서 미분가능하지 않음을 파악한다.
② 단계	조건 ⑦을 이용하여 사차함수 $f(x)$ 가 세 개의 극값을 가짐을 파악하고 $f(-2)$ 와 $f(2)$ 의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.
③ 단계	②단계의 각 경우에 대하여 함수 $g(t)$ 가 한 점에서 미분가능하지 않은 경우를 찾고 이때의 함수 $f(x)$ 의 방정식을 구한다.
④ 단계	$\frac{f'(-3)}{f'(3)}$ 의 값을 구한다.

조건 ④에서 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 에서 미분가능하지 않고, 조건 ⑦에서 사차함수 $f(x)$ 가 $x=-2, x=2$ 에서 극댓값을 가지려면 $-2<x<2$ 에서 극솟값을 가져야 한다.

이때, $x\leq t$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $g(t)$ 이므로 $f(-2)$ 와 $f(2)$ 의 대소 관계에 따라 다음과 같이 경우를

나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(-2) > f(2)$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같으므로

$t \leq -2$ 에서 $g(t)=f(t)$

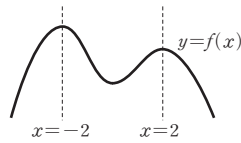
$t > -2$ 에서 $g(t)=f(-2)$

이때,

$t < -2$ 에서 $g'(t)=f'(t)$,

$t > -2$ 에서 $g'(t)=0$

이고, $f'(-2)=0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 모든 실수 t 에 대하여 미분가능하다.



(ii) $f(-2)=f(2)$ 인 경우

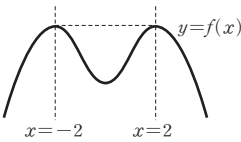
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같으므로

$t \leq -2$ 에서 $g(t)=f(t)$

$t > -2$ 에서 $g(t)=f(-2)$

따라서 (i)과 마찬가지로 함수 $g(t)$ 는 모든 실수 t 에 대하여 미분가능하다.



(iii) $f(-2) < f(2)$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같으므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(-2)$ 의

교점 중에서 $-2 < x < 2$ 인 점의 x 좌표를 t_1 이라 하면

$t \leq -2$ 에서 $g(t)=f(t)$

$-2 < t \leq t_1$ 에서 $g(t)=f(-2)$

$t_1 < t \leq 2$ 에서 $g(t)=f(t)$

$t > 2$ 에서 $g(t)=f(2)$

이때,

$t < -2$ 에서 $g'(t)=f'(t)$,

$-2 < t < t_1$ 에서 $g'(t)=0$,

$t_1 < t < 2$ 에서 $g'(t)=f'(t)$,

$t > 2$ 에서 $g'(t)=0$

이고, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는

$t=t_1$ 에서만 미분가능하지 않다.

$\therefore t_1=0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(-2)$ 의 교점 중에서 x 좌표가 -2 와 0 이 아닌 나머지 점의 x 좌표를 t_2 라 하면

$f(x)-f(-2)=ax(x+2)^2(x-t_2)$ (단, $a < 0$)

$\therefore f(x)=ax(x+2)^2(x-t_2)+f(-2)$

$f'(x)=a(x+2)^2(x-t_2)+2ax(x+2)(x-t_2)+ax(x+2)^2$

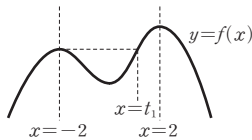
$=a(x+2)\{4x^2+(4-3t_2)x-2t_2\}$

사차함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로

$f'(2)=0$ 에서 $4a(16+8-6t_2-2t_2)=0$

$24-8t_2=0 \quad \therefore t_2=3$

$\therefore f'(x)=a(x+2)(4x^2-5x-6)$



(i), (ii), (iii)에서

$$\frac{f'(-3)}{f'(3)} = \frac{a \times (-1) \times 45}{a \times 5 \times 15} = -\frac{3}{5}$$

답 $-\frac{3}{5}$

27 주어진 사차함수 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 의 그래프에서 $a > 0$ 이고 y 절편이 양수이므로 $e > 0$ 이다.

또한, $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ 에서 방정식

$f'(x)=0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖는다.

이때, 주어진 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 α , β , γ 는

모두 양수이므로 방정식 $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$ 에서

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{3b}{4a}>0 \quad \therefore b<0 \quad (\because a>0)$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{2a}>0 \quad \therefore c>0 \quad (\because a>0)$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{4a}>0 \quad \therefore d<0 \quad (\because a>0)$$

ㄱ. $a > 0$, $b < 0$ 이므로 $ab < 0$ (참)

ㄴ. $b < 0$, $c > 0$ 이므로 $bc < 0$ (거짓)

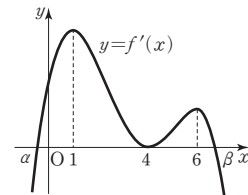
ㄷ. $c > 0$, $d < 0$ 이므로 $cd < 0$ (참)

ㄹ. $d < 0$, $e > 0$ 이므로 $de < 0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

28 ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 α , 4 , β ($\alpha < 4 < \beta$)라 하자.



$x=\alpha$, $x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호는 각각 한 차례씩 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $4 < x < 6$ 에서 $f'(x)$ 의 값이 증가하므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 $4 < x_1 < x_2 < 6$ 인 임의의 두 실수 x_1 , x_2 에 대

하여 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 이다. (참)

ㄷ. $f(0)=0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프

의 개형은 오른쪽 그림과

같으므로 함수 $y=f(x)$

의 그래프와 직선

$y=a$ ($a > 0$)가 서로 다

른 두 점에서 만나면 함

수 $f(x)$ 의 극댓값은 a 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29 ㄱ. (반례) $f(x) = -x^2$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖지만 $|f(x)| = x^2$ 이므로 함수 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(|0+h|) - f(|0|)}{h} < 0 \quad (\because \textcircled{1})$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(|0+h|) - f(|0|)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0-h) - f(0)}{h}$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0- \text{일때 } t \rightarrow 0+}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(0+t) - f(0)}{-t}$$

$$> 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, 함수 $f(|x|)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x) = f(x) - x^2|x|$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + x^3 & (x < 0) \\ f(x) - x^3 & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) + 3x^2 & (x < 0) \\ f'(x) - 3x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) > 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) < 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) < 0$$

즉, 함수 $g(x) = f(x) - x^2|x|$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

30 $f(x) = x^3 + 6x^2$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -4$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

삼차함수 $f(x)$ 는 $x = -4$ 일 때 극댓값 $f(-4) = -64 + 96 = 32$, $x = 0$ 일 때 극솟값 $f(0) = 0$ 을 가지므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면 두 점 P, Q에서의 접선이 서로 평행하므로

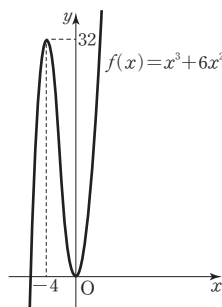
$$f'(p) = f'(q), \text{ 즉 } 3p^2 + 12p = 3q^2 + 12q$$

$$p^2 - q^2 + 4(p - q) = 0, (p - q)(p + q + 4) = 0$$

$$\therefore p + q = -4 \quad (\because p \neq q)$$

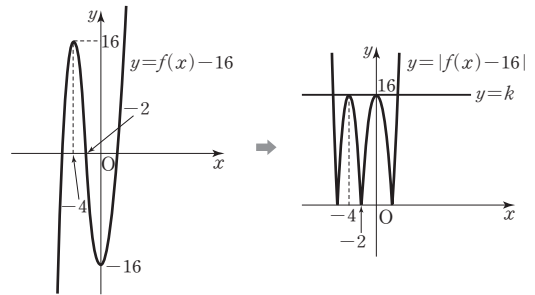
이때, 선분 PQ의 중점 M의 x좌표는

$$\frac{p+q}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{이므로 } y \text{좌표 } a \text{는}$$



$$a = f(-2) = -8 + 24 = 16$$

즉, 함수 $y = |f(x) - 16|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x) - 16|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나려면 $k = 16$ 이어야 한다. 답 16

단계	채점 기준	배점
(가)	두 점 P, Q에서의 접선이 서로 평행함을 이용하여 두 점 P, Q의 x좌표 사이의 관계식을 구한 경우	30%
(나)	선분 PQ의 중점 M의 좌표를 구한 경우	20%
(다)	함수 $y = f(x) - a $ 의 그래프를 그린 후 직선 $y = k$ 와 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구한 경우	50%

31 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

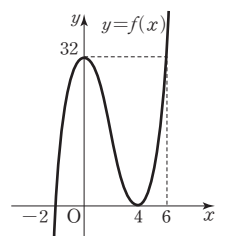
함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 일 때 극댓값

$$f(0) = 32, x = 4 \text{일 때 극솟값}$$

$$f(4) = 64 - 96 + 32 = 0 \text{을 가지므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $h(x) = |f(x) - f(k)|$ 라 하면



$$h(x) = \begin{cases} f(x) - f(k) & (f(x) \geq f(k)) \\ f(k) - f(x) & (f(x) < f(k)) \end{cases}$$

(i) $k = 1, 2, 3, 5$ 일 때,

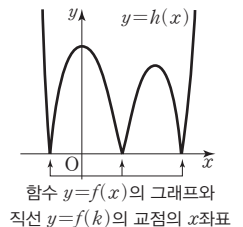
$$0 < f(k) < 32 \text{이므로 함수}$$

$$y = h(x) \text{의 그래프의 개형은}$$

오른쪽 그림과 같다.

이때, 뾰족한 점에서 미분가

능하지 않으므로 $g(k) = 3$



(ii) $k = 4$ 일 때,

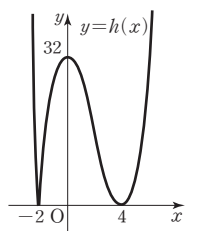
$$f(4) = 0 \text{이므로 함수 } y = h(x) \text{의}$$

그래프의 개형은 오른쪽 그림과

같다.

이때, 뾰족한 점에서 미분가능하

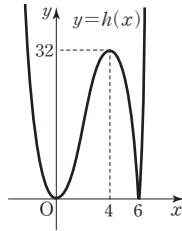
지 않으므로 $g(4) = 1$



(iii) $k=6$ 일 때,

$f(6)=32$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

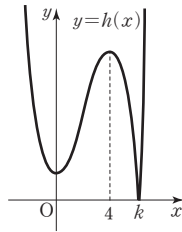
이때, 뾰족한 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(6)=1$



(iv) $k>6$ 일 때,

$f(k)>32$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때, 뾰족한 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(k)=1$



(i)~(iv)에서

$$\sum_{k=1}^{10} g(k) = 3 \times 4 + 1 \times 6 = 18$$

답 18

32

$f(x)=|x^3-3ax^2+4|$ 에서

$g(x)=x^3-3ax^2+4$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2a$$

이때, $a=0$ 이면 $g'(x)=3x^2$ 으로 극값이 존재하지 않으므로 $a \neq 0$ 이다.

(i) $a>0$ 일 때,

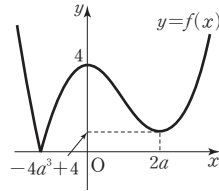
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$2a$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극댓값 $g(0)=4$, $x=2a$ 일 때 극솟값 $g(2a)=-4a^3+4$ 를 갖는다.

이때, 함수 $f(x)=|g(x)|$ 가 한 개의 극댓값과 두 개의 극솟값을 가지므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그런데 극댓값이 $x=0$ 일 때 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$ 일 때,

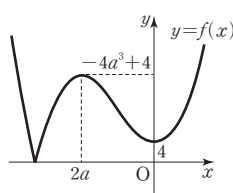
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$2a$	...	0	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=2a$ 일 때 극댓값 $g(2a)=-4a^3+4$, $x=0$ 일 때 극솟값 $g(0)=4$ 를 갖는다.

이때, 함수 $f(x)=|g(x)|$

가 한 개의 극댓값과 두 개의 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



극댓값이 36이므로

$$-4a^3+4=36 \text{에서 } 4a^3=-32$$

$$a^3=-8 \quad \therefore a=-2 (\because a \text{는 실수})$$

(i), (ii)에서 $f(x)=|x^3+6x^2+4|$ 이므로

$$f(1)=|1+6+4|=11$$

답 11

33

$f(x)=x^3+3x^2-24x+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

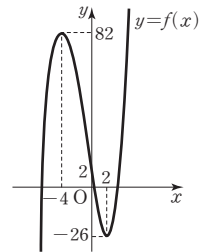
x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-4$ 일 때 극댓값

$$f(-4)=82, x=2 \text{일 때 극솟값}$$

$$f(2)=-26 \text{을 가지므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편, 함수 $g(x)=f(|x|-a)$ 의

그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 후, $x \geq 0$ 인 부분만 남기고 이 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때, 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능해야 하므로 $a=4$ 또는 $a=-2$ 이어야 한다.

(i) $a=4$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 4만큼 평행이동한 후,

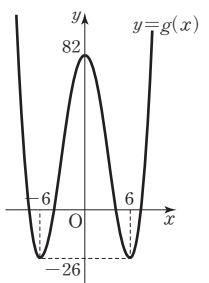
$x \geq 0$ 인 부분만 남기고 이 부분

을 y 축에 대하여 대칭이동한 것

이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 극댓값

$$g(0)=f(-4)=82 \text{를 갖는다.}$$



(ii) $a=-2$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 -2만큼 평행이동한 후, $x \geq 0$

인 부분만 남기고 이 부분을 y 축에

대하여 대칭이동한 것이므로 오른

쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 극댓값을 갖지

않는다.

그런데 조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 극댓값을 가지므로 (i), (ii)에서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 82이다.

답 82

34 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 함수 $g(x)=f(x)-f(1)$ 도 최고차항의 계수가 1이고 x 축과 $x=1$ 에서 만나는 사차함수이다.

이때, 함수 $|g(x)|$ 가 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않으려면 함수 $y=|g(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $g(x)=(x-1)^3(x-3)$ 이라 할 수 있으므로

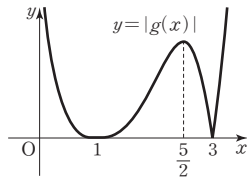
$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(x-1)^2(x-3) + (x-1)^3 \\ &= (x-1)^2(4x-10) \\ &= 2(x-1)^2(2x-5) \end{aligned}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	$\frac{5}{2}$	...
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$				극소	

따라서 함수 $y=|g(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그림에서 함수 $|g(x)|$ 는 $x=\frac{5}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. 방정식 $g(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 개수는 방정식 $|g(x)|=0$ 을 만족시키는 x 의 개수와 같으므로 1, 3의 2개이다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x)-f(1)$ 에서 $f(x)=g(x)+f(1)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $f(1)$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 증가, 감소가 같고,

함수 $g(x)$ 는 $x \leq \frac{5}{2}$ 에서 감소하므로

함수 $f(x)$ 도 $x \leq \frac{5}{2}$ 에서 감소한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

35 $g(x)=f(x)-|f'(x)|$ 이고 조건 ㄴ에서 $f(a)=g(a)=0$ 이므로 $g(a)=f(a)-|f'(a)|$, $|f'(a)|=0$
 $\therefore f'(a)=0$ (단, $a>1$)

즉, $f(x)=(x-a)^2(x-k)$ (k 는 상수)라 할 수 있으므로 $f'(x)=2(x-a)(x-k)+(x-a)^2$
 $= (x-a)(3x-2k-a)$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=\frac{2k+a}{3}$$

(i) $a < \frac{2k+a}{3}$ 일 때,

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	$\frac{2k+a}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		극대		극소	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 극댓값 $f(a)=0$ 을 갖는다. 그런데 조건 ㄴ에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이므로 모순이다.

(ii) $a = \frac{2k+a}{3}$ 일 때,

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로 극댓값을 갖지 않는다.

(iii) $a > \frac{2k+a}{3}$ 일 때,

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{2k+a}{3}$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		극대		극소	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{2k+a}{3}$ 일 때 극댓값 $f(\frac{2k+a}{3})=4$ 를 가지므로

$$\left(\frac{2k+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{2k+a}{3}-k\right)=4$$

$$\left(\frac{2k-2a}{3}\right)^2 \times \frac{a-k}{3}=4, \frac{4(a-k)^3}{27}=4$$

$$(a-k)^3=27, a-k=3$$

$$\therefore k=a-3$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x)=(x-a)^2(x-a+3) \text{이고,}$$

$$f'(x)=3(x-a)(x-a+2)$$

$$\text{조건 ㄴ에서 } g(1)=4 \text{이므로}$$

$$f(1)-|f'(1)|$$

$$= (1-a)^2(4-a) - |3(1-a)(3-a)|$$

$$= \begin{cases} (1-a)^2(4-a) + 3(1-a)(3-a) & (1 < a < 3) \\ (1-a)^2(4-a) - 3(1-a)(3-a) & (a \geq 3) \end{cases}$$

$$= 4$$

- ① $1 < a < 3$ 일 때,
 $(1-a)^2(4-a) + 3(1-a)(3-a) = 4$ 에서
 $a^3 - 9a^2 + 21a - 9 = 0$
 $(a-3)(a^2 - 6a + 3) = 0$
 $\therefore a = 3$ 또는 $a = 3 + \sqrt{6}$ 또는 $a = 3 - \sqrt{6}$
 그런데 $1 < a < 3$ 을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.
- ② $a \geq 3$ 일 때,
 $(1-a)^2(4-a) - 3(1-a)(3-a) = 4$ 에서
 $a^3 - 3a^2 - 3a + 9 = 0$
 $(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3})(a - 3) = 0$
 $\therefore a = 3$ ($\because a \geq 3$)
- ①, ②에서 $a = 3$ 이므로
 $f(x) = x(x-3)^2$
 $\therefore af(2) = 3f(2) = 3 \times 2 \times (2-3)^2 = 6$

답 6

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 46

- 01 11 02 32 03 ⑤
 04 $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$ 05 18 06 36

01 해결단계

① 단계	$a^2 + ab + b^2 - 3(a+b)$ 를 $\frac{b^3 - 3b^2 - (a^3 - 3a^2)}{b-a}$ 으로 변형한다.
② 단계	$f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라 하고 $m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 임을 구한다.
③ 단계	평균값 정리를 이용하여 집합 S의 원소 중 정수의 개수를 구한다.

$$\begin{aligned}
 m &= a^2 + ab + b^2 - 3(a+b) \\
 &= \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2) - 3(b-a)(a+b)}{b-a} \\
 &= \frac{b^3 - a^3 - 3(b^2 - a^2)}{b-a} \\
 &= \frac{(b^3 - 3b^2) - (a^3 - 3a^2)}{b-a}
 \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라 하면 위의 식에서

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

이때, 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 은 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \dots\dots ⑦$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이때, $1 \leq a < c < b \leq 3$ 이므로 $1 < c < 3$

$$\begin{aligned}
 \text{한편, } f'(x) &= 3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3 \text{에서} \\
 f'(c) &= 3(c-1)^2 - 3
 \end{aligned}$$

$$1 < c < 3 \text{이므로 } -3 < f'(c) < 9$$

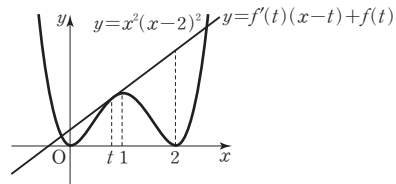
$$\therefore -3 < m < 9 \quad (\because ⑦)$$

따라서 집합 S의 원소 중 정수는 $-2, -1, 0, \dots, 8$ 의 11개이다.

답 11

02 해결단계

① 단계	주어진 부등식을 만족시키려면 접선이 곡선 위에 놓여야 함을 이해한다.
② 단계	$0 < t \leq 1$ 에서 접선의 y 절편이 0 이상이 되는 t 의 값의 범위를 구한다.
③ 단계	함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t 의 값의 범위를 구하여 $36pq$ 의 값을 구한다.



직선 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이므로 $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$ 를 만족시키려면 위의 그림과 같이 $0 \leq x \leq 2$ 에서 접선이 곡선 $y = f(x)$ 의 위쪽에 놓여야 한다.

즉, 접점은 곡선의 위로 볼록한 부분의 점이다.

또한, $f(0) = 0$ 이므로 $0 < t \leq 1$ 에서 접선의 y 절편은 0 이상이어야 한다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2(x-2)^2 \text{에서} \\
 f'(x) &= 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) \\
 &= 4x(x-1)(x-2)
 \end{aligned}$$

점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 4t(t-1)(t-2) \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - t^2(t-2)^2 = 4t(t-1)(t-2)(x-t)$$

$$\therefore y = 4t(t-1)(t-2)x + t^2(t-2)(-3t+2)$$

위의 접선의 y 절편이 0 이상이어야 하므로

$$t^2(t-2)(-3t+2) \geq 0 \text{에서 } \frac{2}{3} \leq t \leq 2$$

$$\text{그런데 } 0 < t \leq 1 \text{이므로 } \frac{2}{3} \leq t \leq 1$$

이때, 곡선 $f(x) = x^2(x-2)^2$ 은 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭

이므로 $1 \leq t \leq \frac{4}{3}$ 에서도 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t 의 값의 범위는

$$\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3} \quad \therefore p = \frac{2}{3}, q = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 36pq = 36 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 32$$

답 32

03 해결단계

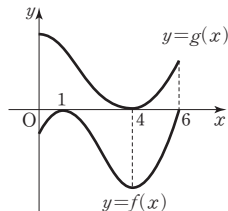
① 단계	두 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ 의 그래프를 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 각각 그린다.
② 단계	ㄱ은 도함수의 기하적인 의미를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	ㄴ, ㄷ은 ①단계에서 구한 그래프를 이용하여 함수값의 대소 관계를 구한 후, 참, 거짓을 판별한다.

주어진 두 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ 의 그래프에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근은 1, 4이고 방정식 $g'(x)=0$ 의 실근은 4이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 증가와 감소를 각각 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

x	...	4	...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

$f(1)=f(6)=0$, $g(4)=0$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $3 < x < 4$ 에서 $f'(x) < g'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 함수 $g(x)$ 보다 더 크게 감소한다.

$$\therefore f(a) - f(b) > g(a) - g(b) \quad (\text{참})$$

ㄴ. $0 < x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $y < 0$ 이면서 증가하므로

$$f(a) < f(b) < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $g(x)$ 는 $y > 0$ 이면서 감소하므로

$$0 < g(b) < g(a)$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 0 < -f(b) < -f(a) \text{이므로}$$

$$0 < -f(b)g(b) < -f(a)g(a)$$

$$\therefore f(a)g(a) < f(b)g(b) \quad (\text{참})$$

ㄷ. $1 < x < 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $y < 0$ 이면서 감소하므로

$$f(b) < f(a) < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

함수 $g(x)$ 는 $y > 0$ 이면서 감소하므로

$$0 < g(b) < g(a)$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 0 < -f(a) < -f(b) \text{이므로}$$

$$0 < -f(a)g(b) < -f(b)g(a)$$

$$\therefore f(a)g(b) > f(b)g(a) \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㉠

04 해결단계

① 단계	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$)라 하고, 두 조건 ㉠, ㉡를 이용하여 a, b, c, d 사이의 관계식을 구한다.
② 단계	a, β 가 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근임을 알고, 근과 계수의 관계를 이용하여 $a+\beta, a\beta$ 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	$ f(a)-f(\beta) = a-\beta $ 를 간단히 정리한다.
④ 단계	함수 $f(x)$ 의 각 항의 계수를 구한 후, 함수 $f(x)$ 를 구한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0, a, b, c, d$ 는 상수)라 하면 조건 ㉠에서 $f(0)=1$ 이므로 $d=1$

또한, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이고, 조건 ㉡에서

$$f'(0)=-3, f'(1)=-3 \text{이므로}$$

$$c=-3, 3a+2b=0$$

$$\therefore c=-3, b=-\frac{3}{2}a \quad \dots\dots ㉢$$

조건 ㉡에서 a, β 는 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=-\frac{2b}{3a}=1, a\beta=\frac{c}{3a}=-\frac{1}{a} \quad (\because ㉢) \quad \dots\dots ㉣$$

$$|f(a)-f(\beta)|$$

$$= \left| a(a^3-\beta^3) - \frac{3}{2}a(a^2-\beta^2) - 3(a-\beta) \right| \quad (\because ㉢)$$

$$= |a-\beta| \left| a(a^2+a\beta+\beta^2) - \frac{3}{2}a(a+\beta) - 3 \right|$$

$$= |a-\beta|$$

이때, $|a-\beta| \neq 0$ 이므로

$$\left| a(a^2+a\beta+\beta^2) - \frac{3}{2}a(a+\beta) - 3 \right| = 1$$

$$\left| a\{(a+\beta)^2-a\beta\} - \frac{3}{2}a(a+\beta) - 3 \right| = 1$$

㉣을 위의 식에 대입하면

$$\left| a\left(1+\frac{1}{a}\right) - \frac{3}{2}a - 3 \right| = 1$$

$$\left| -\frac{1}{2}a - 2 \right| = 1, -\frac{1}{2}a - 2 = \pm 1$$

$$\frac{1}{2}a = -3 \text{ 또는 } \frac{1}{2}a = -1$$

$$\therefore a = -6 \text{ 또는 } a = -2 \quad \dots\dots ㉤$$

한편, 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식 $3ax^2+2bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b^2 - 3ac > 0 \text{에서}$$

$$\left(-\frac{3}{2}a\right)^2 + 9a > 0 \quad (\because ㉢)$$

$$\frac{9}{4}a^2 + 9a > 0, a(a+4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0 \quad \dots\dots ㉥$$

$$\textcircled{㉤}, \textcircled{㉥} \text{에서 } a = -6$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$b = -\frac{3}{2} \times (-6) = 9$$

$$\therefore f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$$

$$\text{답 } f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 3x + 1$$

05 해결단계

① 단계	주어진 그래프를 이용하여 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$, $g'(x)=bx(x-2)$ 로 나타낸다.
② 단계	함수 $f(x)+g(x)$ 가 극솟값을 갖고, 극댓값을 갖지 않음을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 관계식을 이용하여 두 함수 $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 의 극소인 점의 x 좌표 α, β 를 각각 구한 후, $24(\beta-\alpha)^2$ 의 값을 구한다.

주어진 그래프에서 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 아래로 볼록한 이차함수이고 $f'(-1)=f'(1)=0$ 이므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a>0$)이라 할 수 있다. 삼차함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 위로 볼록한 이차함수이고 $g'(0)=g'(2)=0$ 이므로 $g'(x)=bx(x-2)$ ($b<0$)라 할 수 있다.

이때, 함수 $f(x)+g(x)$ 가 삼차 이하의 함수이므로 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않으려면 함수 $f(x)+g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} f'(x)+g'(x) &= a(x+1)(x-1)+bx(x-2) \\ &= ax^2-a+bx^2-2bx \\ &= (a+b)x^2-2bx-a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

에서 $a+b=0, -2b>0$

$$\therefore b=-a, b<0$$

위의 식을 ①에 대입하면

$$f'(x)+g'(x)=2ax-a=a(2x-1)$$

$$f'(x)+g'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1}{2} (\because a \neq 0) \text{이므로 함수}$$

$f(x)+g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)+g'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)+g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 가지므로

$$a=\frac{1}{2}$$

한편,

$$\begin{aligned} f'(x)-g'(x) &= a(x+1)(x-1)+ax(x-2) \\ &= ax^2-a+ax^2-2ax \\ &= 2ax^2-2ax-a \\ &= a(2x^2-2x-1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x)-g'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} (\because a \neq 0)$$

함수 $f(x)-g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)-g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 에서 극솟값을 가지

$$\text{므로 } \beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore 24(\beta-\alpha)^2 &= 24\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 24 \times \frac{3}{4} = 18 \end{aligned}$$

답 18

06 해결단계

① 단계	두 함수 $y=f(x), g(x)= f(x)-a $ 의 그래프 사이의 관계를 파악한다.
② 단계	①단계의 관계를 이용하여 두 함수 $y=f(x), y= g(x)-b $ 의 그래프 사이의 관계를 파악한다.
③ 단계	②단계의 관계를 이용하여 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 a, b 의 경우를 구한다.
④ 단계	$a+b$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+4 \text{에서}$$

$$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

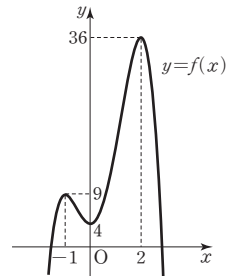
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=2$ 일 때 각각 극댓값

$$f(-1)=9, f(2)=36 \text{을 갖고 } x=0 \text{일 때 극솟값}$$

$f(0)=4$ 를 가지므로 그 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)=|f(x)-a|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=a$ 에서 접어 올린 다음 직선 $y=a$ 를 x 축으로 본 그래프와 같다.

이때, 직선 $y=a$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점이 함수 $y=f(x)$ 의 극점이 아니면 접힌 점은 모두 꺾이게 되어 미분가능하지 않다.

마찬가지로 함수 $y=|g(x)-b|$ 의 그래프는 함수

$y=g(x)$ 의 그래프를 직선 $y=b$ 에서 접어 올린 다음 직선 $y=b$ 를 x 축으로 본 그래프이다.

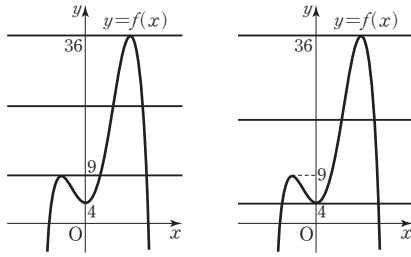
즉, 함수 $y=|g(x)-b|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 세 직선 $y=a, y=a+b, y=a-b$ 에서 모두 접은 것과 같다.

조건 (가)에 의하여 두 직선 $y=a+b, y=a-b$ 와 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 교점이 4개이고, 조건 (나)에 의하여 세 직선 $y=a, y=a+b, y=a-b$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점 중 네 점에서는 꺾어져서 미분가능하지 않은 점이어야 하고, 나머지 점은 함수 $y=f(x)$ 의 극점이어야 한다.

따라서 위의 조건을 모두 만족시키는 세 직선 $y=a,$

$y=a+b, y=a-b$ 의 위치는 다음 두 그림과 같아야 한다.

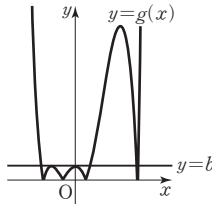


세 직선은 위에서 부터 차례대로 $y=a+b$, $y=a$, $y=a-b$ 이므로 구하는 $a+b$ 의 값은 36이다. **답 36**

• 다른풀이 •

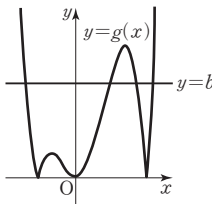
$a \leq 35$ 인 자연수 a 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x) - a|$ 는 두 개 또는 네 개의 점에서 미분가능하지 않는다. 이때, 함수 $g(x)$ 가 네 개의 점에서 미분가능하지 않다면 함수 $|g(x) - b|$ 의 미분가능하지 않은 네 점이 모두 함수 $g(x)$ 의 미분가능하지 않은 점이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 의 교점에서 함수 $|g(x) - b|$ 는 모두 미분가능해야 한다.

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 의 교점에서 함수 $g(x)$ 의 미분계수가 0이어야 하는데 오른쪽 그림과 같이 교점 중에서 미분계수가 0이 아닌 점이 반드시 존재한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 두 개의 점에서 미분가능하지 않아야 한다.



(i) $1 \leq a \leq 4$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 가 서로 다른 네 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하고, 함수 $|g(x) - b|$ 는 6개의 점에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $9 \leq a \leq 35$ 일 때,

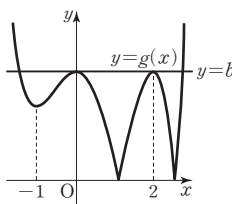
함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 가 서로 다른 네 점에서 만나면서 함수 $|g(x) - b|$ 가 네 점에서 미분가능하지 않으려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ 가 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.

즉, $g(0) = g(2) = b$ 또는 $g(-1) = g(2) = b$ 에서 $a=20$, $b=16$ 또는

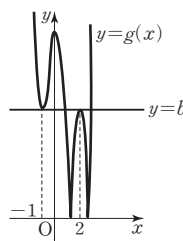
$$a = \frac{45}{2}, b = \frac{27}{2}$$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=20$, $b=16$

(i), (ii)에서 $a+b=20+16=36$



[그림 1]



[그림 2]

이것이 수능

p. 47

1 97

2 ⑤

3 147

4 ⑤

1

해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 $f(2)$ 와 $g(2)$, $f'(2)$ 와 $g'(2)$ 사이의 관계식을 각각 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 식을 연립하여 $g(2)$, $g'(2)$ 의 값을 구하고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 에서의 접선의 방정식을 구한다.
③ 단계	a , b 의 값을 각각 구한 후, a^2+b^2 의 값을 구한다.

조건 (나)에서 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0 \text{에서 } f(2) = g(2)$$

조건 (가)에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(2) = 8f(2) - 7 \text{에서}$$

$$g(2) = 8g(2) - 7 \quad (\because f(2) = g(2))$$

$$-7g(2) = -7 \quad \therefore g(2) = f(2) = 1$$

또한, 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x) - f(2)\} - \{g(x) - g(2)\}}{x - 2}$$

$$= f'(2) - g'(2) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)의 양변을 미분하면

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$$

위의 식에 $x=2$ 를 대입하면

$$g'(2) = 12f(2) + 8f'(2)$$

$$g'(2) = 12 \times 1 + 8\{g'(2) + 2\}$$

$$(\because \textcircled{1} \text{에서 } f'(2) = g'(2) + 2)$$

$$= 8g'(2) + 28$$

$$-7g'(2) = 28 \quad \therefore g'(2) = -4$$

구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = -4(x - 2) \quad \therefore y = -4x + 9$$

따라서 $a = -4$, $b = 9$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-4)^2 + 9^2 = 97$$

답 97

2

해결단계

① 단계	도함수의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $g(x)$ 가 $x \leq k$ 에서 점 $(k, f(k))$ 를 지나고 기울기가 1인 직선임을 이용하여 k 의 값을 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 k 의 값에 따라 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수인 $h(k)$ 의 값을 구한다.
④ 단계	③단계에서 구한 $h(k)$ 의 값을 이용하여 자연수 k 의 값에 따른 $h(k)$ 의 값을 구한 후, $\sum_{k=1}^7 h(k)$ 의 값을 구한다.

$f(0)=0$ 이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ ($a \neq 0$, a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

이때, 위의 도함수가 x 축과 $x=1, x=3$ 에서 만나므로

$$f'(x)=3a(x-1)(x-3)$$

또한, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$9a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{9}$$

$$\text{즉, } f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+1 \text{이므로}$$

$$b=-\frac{2}{3}, c=1$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+x$$

$x \leq k$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 기울기가 1인 직선의 일부이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 기울기가 1이 되는 k 의 값을 구하면

$$\frac{1}{3}(k-1)(k-3)=1, \quad \frac{1}{3}k^2-\frac{4}{3}k=0$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

(i) $k=0$ 일 때,

$f(0)=0$ 이므로

$$x \leq 0 \text{에서 } g(x)=x+f(0)=x$$

$g'(x)=1$ 이고 $f'(0)=1$ 이므로 $x=0$ 에서 직선

$g(x)=x$ 가 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.

$$\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+x=x, \quad x^3-6x^2=0$$

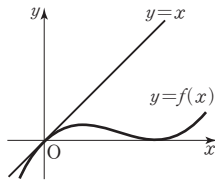
$$x^2(x-6)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $x \leq 0$ 에서 두 함수

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

두 그래프가 만나는 서로 다른

점의 개수는 $h(0)=1$ 이다.



(ii) $k=4$ 일 때,

$$x \leq 4 \text{에서 } g(x)=(x-4)+f(4)$$

$g'(x)=1$ 이고 $f'(4)=1$ 이므로 $x=4$ 에서 직선

$$g(x)=(x-4)+f(4), \text{ 즉 } y=x-\frac{32}{9} \text{가 곡선}$$

$y=f(x)$ 에 접한다.

$$\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+x=x-\frac{32}{9}, \quad x^3-6x^2+32=0$$

$$(x+2)(x-4)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

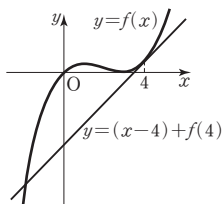
따라서 $x \leq 4$ 에서 두 함수

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

두 그래프가 만나는 서로

다른 점의 개수는 $h(4)=2$

이다.



(iii) $k=6$ 일 때,

①에서 $f(6)=6$ 이므로 $x \leq 6$ 에서

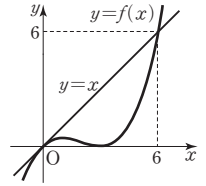
$$g(x)=(x-6)+f(6)=x$$

따라서 $x \leq 6$ 에서 두 함수

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 두 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개

수는 $h(6)=2$ 이다.



(i), (ii), (iii)에서

$$0 < k \leq 4 \text{일 때, } h(k)=2$$

$$4 < k < 6 \text{일 때, } h(k)=3$$

$$k=6 \text{일 때, } h(k)=2$$

$$k > 6 \text{일 때, } h(k)=1$$

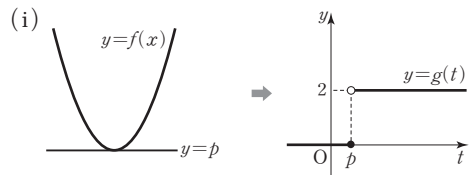
$$\therefore \sum_{k=1}^7 h(k)=2 \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 14 \quad \text{답 ⑤}$$

3

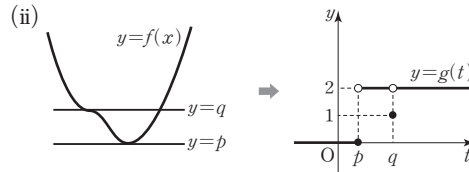
해결단계

① 단계	함수 $g(t)$ 의 불연속인 점이 2개가 되도록 하는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 찾는다.
② 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한 후 $f(-2)$ 의 값을 구한다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때의 함수 $y=g(t)$ 의 그래프를 그려 불연속인 점의 개수를 찾아보자.

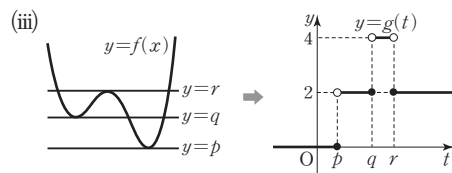


즉, 함수 $g(t)$ 의 불연속인 점은 한 개이다.

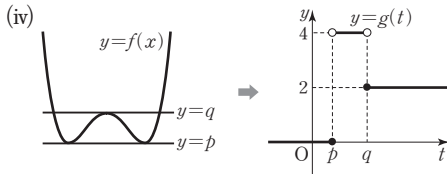


즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=p, t=q$ 에서 불연속이므로 불연속인 점이 두 개이다.

그런데 $p=3, q=19$ 일 때 $f(0)=3$ 이면 $f'(3)>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

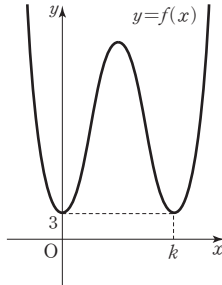


즉, 함수 $g(t)$ 의 불연속인 점은 세 개이다.



즉, 함수 $g(t)$ 는 $t=p$, $t=q$ 에서 불연속이므로 불연속인 점이 두 개이고, $f(0)=3$ 일 때 $f'(3)<0$ 을 만족시키는 경우가 존재한다.

이때, $p=3$, $q=19$ 이므로 (iv)의 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 3, 극댓값이 19이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= x^2(x-k)^2 + 3 \\ f'(x) &= 2x(x-k)^2 + 2x^2(x-k) \\ &= 2x(x-k)(2x-k)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{k}{2}$ 또는 $x=k$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x=\frac{k}{2}$ 에서 극댓값 19를 갖는다.

$$f\left(\frac{k}{2}\right)=19 \text{에서 } \frac{k^2}{4} \times \frac{k^2}{4} + 3 = 19$$

$$k^4=256 \quad \therefore k=4$$

따라서 $f(x)=x^2(x-4)^2+3$ 이므로

$$f(-2)=(-2)^2 \times (-2-4)^2 + 3 = 147 \quad \text{답 147}$$

4 해결단계

① 단계	두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 식을 미지수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	미지수의 값의 범위를 이용하여 $\frac{f'(0)}{f(0)}$ 의 최솟값 m 과 최댓값 M 을 각각 구한 후, Mm 의 값을 구한다.

조건 (가)에 의하여 $f(-1)=0$

또한, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 x 축과 만나야 하고, 조건 (가)에서 $x=-1$ 에서만 함수 $|f(x)|$ 가 미분가능하지 않으므로 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 접해야 한다.

즉, $f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2$ ($k \neq 0$, $3 \leq \alpha \leq 5$)이라 할 수 있으므로

$$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$

이때, $3 \leq \alpha \leq 5$ 이므로 $\frac{f'(0)}{f(0)}$ 은 $\alpha=3$ 일 때 최솟값

$$m=\frac{1}{3}, \alpha=5 \text{일 때 최댓값 } M=\frac{3}{5} \text{을 갖는다.}$$

$$\therefore Mm=\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{5} \quad \text{답 ⑤}$$

05 도함수의 활용(2)

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

pp. 49~50

01 ⑤	02 ③	03 6	04 ③	05 ④
06 ③	07 ②	08 5	09 ①	10 ④
11 $a < 1$	12 ①	13 ④	14 18	15 $8\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

01 $f(x)=-x^3+3x^2$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-16

닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, 2일 때 최댓값 $M=4$, $x=4$ 일 때 최솟값 $m=-16$ 을 갖는다.

$$\therefore M-m=4-(-16)=20 \quad \text{답 ⑤}$$

02 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가

$-2, 0, 2$ 이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0)$ 이다. 답 ③

03 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 에서

$$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ (} \because a>0, -1 \leq x \leq 2 \text{)}$$

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-16a+b$

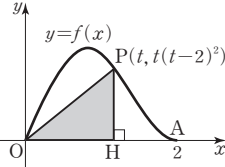
이때, a, b 는 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 b , $x=2$ 일 때 최솟값 $-16a+b$ 를 갖는다.

즉, $b=3$, $-16a+b=-29$ 이므로

$$a=2, b=3$$

$$\therefore ab=2 \times 3=6 \quad \text{답 6}$$

- 04** 점 P의 좌표를 $(t, t(t-2)^2)$
 $(0 < t < 2)$ 이라 하면
 $\overline{OH} = t, \overline{PH} = t(t-2)^2$
삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$ 라
하면



$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times t(t-2)^2 = \frac{1}{2} t^2 (t-2)^2$$

$$S'(t) = t(t-2)^2 + t^2(t-2) = 2t(t-1)(t-2)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } t=1 \text{ (} \because 0 < t < 2 \text{)}$$

$0 < t < 2$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

t	(0)	...	1	...	(2)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	극대	↘	

$0 < t < 2$ 에서 함수 $S(t)$ 는 $t=1$ 일 때 극대이면서 최대이
므로 구하는 최댓값은

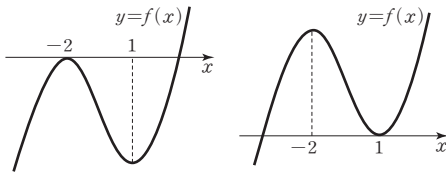
$$S(1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ③

- 05** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + a$ 라 하면
 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 1$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 극댓값, $x = 1$ 일 때 극솟값을
가지므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근만을
가지려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 다음 그림과
같아야 한다.



즉, $f(-2) = 0$ 또는 $f(1) = 0$ 이어야 하므로

(i) $f(-2) = 0$ 인 경우

$$-16 + 12 + 24 + a = 0, a + 20 = 0$$

$$\therefore a = -20$$

(ii) $f(1) = 0$ 인 경우

$$2 + 3 - 12 + a = 0, a - 7 = 0$$

$$\therefore a = 7$$

(i), (ii)에서 $a = 7$ ($\because a > 0$)

답 ④

• 다른풀이 •

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근만을 가지려면
한 실근과 중근을 가져야 하므로

$$f(-2)f(1) = 0 \text{에서 } (a+20)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -20 \text{ 또는 } a = 7$$

이때, $a > 0$ 이므로 $a = 7$ 이다.

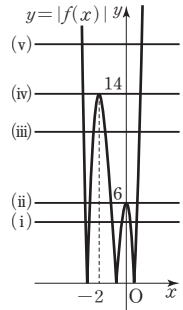
- 06** $f(x) = 5x^3 + 15x^2 - 6$ 에서
 $f'(x) = 15x^2 + 30x = 15x(x+2)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 극댓값 $f(-2) = 14$, $x = 0$
일 때 극솟값 $f(0) = -6$ 을 갖는다.

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그
림과 같고 방정식 $|f(x)| = n$ 의 서로
다른 실근의 개수는 함수 $y = |f(x)|$
의 그래프와 직선 $y = n$ 의 교점의 개수
와 같으므로



(i) $1 \leq n \leq 5$ 일 때, $a_n = 6$

(ii) $n = 6$ 일 때, $a_n = 5$

(iii) $7 \leq n \leq 13$ 일 때, $a_n = 4$

(iv) $n = 14$ 일 때, $a_n = 3$

(v) $n \geq 15$ 일 때, $a_n = 2$

(i) ~ (v)에서 $m \geq 15$ 일 때

$$\sum_{n=1}^m a_n = 6 \times 5 + 5 \times 1 + 4 \times 7 + 3 \times 1 + 2(m-14)$$

$$= 66 + 2(m-14)$$

$$= 2m + 38 = 100$$

$$2m = 62 \quad \therefore m = 31$$

답 ③

- 07** $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 - k = 0$ 에서

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = k$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

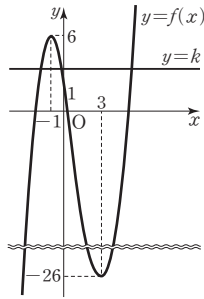
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 를 $x = -1$ 일 때 극댓값 $f(-1) = 6$, $x = 3$ 일
때 극솟값 $f(3) = -26$ 을 갖는다.

주어진 방정식이 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되어야 하므로



$1 < k < 6$

따라서 구하는 정수 k 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

답 ②

08 $f(x)=x^3+x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+1$ 점점의 좌표를 (a, a^3+a+1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2+1$ 이므로 접선의 방정식은 $y-(a^3+a+1)=(3a^2+1)(x-a)$

$$\therefore y=(3a^2+1)x-2a^3+1$$

위의 직선이 점 $(1, k)$ 를 지나므로

$$-2a^3+3a^2+2=k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(1, k)$ 에서 곡선 $y=x^3+x+1$ 에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으므로 삼차방정식 ①은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$$g(a)=-2a^3+3a^2+2 \text{라 하면}$$

$$g'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

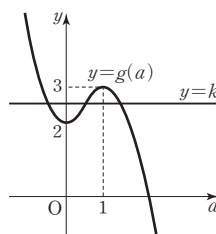
$$g'(a)=0 \text{에서 } a=0 \text{ 또는 } a=1$$

함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	0	...	1	...
$g'(a)$	-	0	+	0	-
$g(a)$	\	극소	/	극대	\

함수 $g(a)$ 는 $a=0$ 일 때 극솟값 $g(0)=2$, $a=1$ 일 때 극댓값 $g(1)=3$ 을 갖는다.

삼차방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(a)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$2 < k < 3$

따라서 $m=2, n=3$ 이므로

$$m+n=5$$

답 5

09 $3x^4+4x^3-12x^2-k=0$ 에서

$$3x^4+4x^3-12x^2=k$$

$$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극솟값 $f(-2)=-32$,

$x=0$ 일 때 극댓값 $f(0)=0$, $x=1$ 일 때 극솟값

$f(1)=-5$ 를 갖는다.

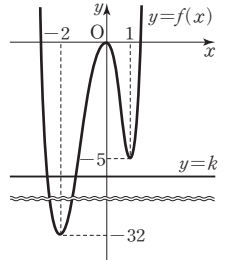
이때, 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근만을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 두 개이고, 이 두 교점의 x 좌표가 모두 음수이어야 한다.

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-32 < k < -5$$

답 ①



10 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+a$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(1)=2+3-12+a=a-7$$

이때, $x \geq 0$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이려면 $a-7 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 7$

따라서 실수 a 의 최솟값은 7이다.

답 ④

11 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=(x^3-2x^2-x+3)-(-2x^2+2x+a)$$

$$=x^3-3x+3-a$$

$$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because 0 < x < 2)$$

열린구간 $(0, 2)$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	(2)
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		\	극소	/	

열린구간 $(0, 2)$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(1)=1-a$

열린구간 $(0, 2)$ 에서 $f(x) > g(x)$, 즉 $h(x) > 0$ 이려면 $1-a > 0$ 이어야 하므로

$$a < 1$$

답 a < 1

- 12** 두 점 P, Q의 시각 t 일 때의 위치가 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$ 이므로 두 점 P, Q의 시각 t 일 때의 속도는 각각 $f'(t)=4t-2$, $g'(t)=2t-8$ 이다.
 이때, 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$ 이어야 하므로
 $(4t-2)(2t-8)<0$, $(2t-1)(t-4)<0$
 $\therefore \frac{1}{2}<t<4$ 답 ①

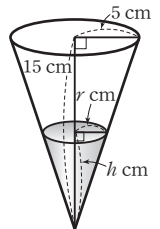
- 13** ㄱ. 점 P는 원점을 출발한 후 2초까지 수직선의 양의 방향으로 움직이므로 $t=2$ 일 때, 점 P의 위치는 원점이 아니다. (거짓)
 ㄴ. $0<t<2$, $5<t<6$ 일 때 $v(t)>0$ 이므로 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직이고, $2<t<5$ 일 때 $v(t)<0$ 이므로 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.
 따라서 $1<t<3$ 에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)
 ㄷ. $t=2$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌고, $t=5$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P는 출발한 후 6초 동안 움직이는 방향을 2번 바꾼다. (참)
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

- 14** 정사각형 ABCD에서 점 P는 A를 출발하여 B를 향해 매초 2씩, 점 Q는 B를 출발하여 C를 향해 매초 3씩 움직이므로 t 초 후의 두 선분 AP, CQ의 길이는 각각 $\overline{AP}=2t$, $\overline{CQ}=20-3t$
 두 삼각형 APD, QCD의 넓이는 각각
 $\triangle APD=\frac{1}{2} \times 20 \times 2t=20t$,
 $\triangle QCD=\frac{1}{2} \times 20 \times (20-3t)=200-30t$
 $\therefore \square DPBQ=\square ABCD-(\triangle APD+\triangle QCD)$
 $=20^2-(20t+200-30t)$
 $=200+10t$
 사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$ 이 되는 순간은
 $200+10t=\frac{11}{20} \times 400$ 에서
 $200+10t=220$, $10t=20 \quad \therefore t=2$ (초)
 삼각형 PBQ에서 $\overline{PB}=20-2t$, $\overline{BQ}=3t$ 이므로 t 초 후의 삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$ 라 하면
 $S(t)=\frac{1}{2} \times (20-2t) \times 3t=30t-3t^2$
 $S'(t)=30-6t$
 따라서 $t=2$ 일 때의 삼각형 PBQ의 넓이의 순간변화율은 $S'(2)=30-6 \times 2=18$ 답 18

• 다른풀이 •

사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$ 이 되는 순간에 두 삼각형 APD, QCD의 넓이의 합은 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{9}{20}$ 가 되므로
 $20t+200-30t=\frac{9}{20} \times 400$
 $200-10t=180 \quad \therefore t=2$ (초)

- 15** 컵에 담긴 물의 수면의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 수면의 높이가 매초 2 cm씩 높아지므로 t 초 후의 수면의 높이는 $h=2t$ (cm)
 $5:r=15:h$ 에서 $r=\frac{h}{3}$ 이므로
 $r=\frac{2}{3}t$ (cm)



t 초 후의 물의 부피를 $V(t)$ cm^3 라 하면
 $V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{2}{3}t\right)^2 \times 2t=\frac{8}{27}\pi t^3(\text{cm}^3)$
 $V'(t)=\frac{8}{9}\pi t^2$
 $h=6$ 일 때 $t=3$ 이므로 구하는 부피의 변화율은
 $V'(3)=\frac{8}{9}\pi \times 3^2=8\pi(\text{cm}^3/\text{s})$ 답 $8\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

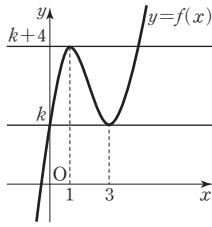
pp. 51~55

01 ⑤	02 ⑤	03 2	04 ①	05 15
06 ②	07 ②	08 $\frac{75\sqrt{3}}{4}$	09 16	
10 $-1 \leq a < 0$		11 ③	12 ⑤	13 ③
14 122	15 ⑤	16 ③	17 ⑤	18 -12
19 1	20 ④	21 ①	22 16	23 ③
24 90	25 ⑤	26 13	27 111	28 15
29 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$	30 $150 \text{ cm}^3/\text{s}$		31 $48 \text{ cm}^2/\text{s}$	
32 6	33 3	34 $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$		

- 01** $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$ 에서
 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극댓값 $f(1)=k+4$, $x=3$ 일 때 극솟값 $f(3)=k$ 를 갖는다.



이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=3$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 위의 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 극댓값 또는 극솟값이 3이어야 하므로

$$k+4=3 \text{ 또는 } k=3 \quad \therefore k=-1 \text{ 또는 } k=3$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=3$

한편, 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4이고, $0 \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 3이므로 최댓값은 7이어야 한다.

$$f(x)=7 \text{에서 } x^3-6x^2+9x+3=7$$

$$x^3-6x^2+9x-4=0, (x-1)^2(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4$$

따라서 $k+a$ 의 최댓값은 a 가 최대일 때, 즉 $a=4$ 일 때이므로

$$k+a=3+4=7$$

답 ⑤

02 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2ax^2+(a^3+a^2+4)x$ 에서

$$f'(x)=x^2+4ax+a^3+a^2+4 \\ = (x+2a)^2+a^3-3a^2+4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 이고, $f'(x)$ 는 $x=-2a$ 일 때 최솟값

a^3-3a^2+4 를 가지므로

$$g(a)=a^3-3a^2+4$$

$$g'(a)=3a^2-6a=3a(a-2)$$

$$g'(a)=0 \text{에서 } a=0 \text{ 또는 } a=2$$

$0 \leq a \leq 3$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	3
$g'(a)$	0	-	0	+	
$g(a)$	4	\	0	/	4

$0 \leq a \leq 3$ 에서 함수 $g(a)$ 는 $a=0$, 3일 때 최댓값 4,

$a=2$ 일 때 최솟값 0을 가지므로

$$M=4, m=0 \quad \therefore M+m=4+0=4$$

답 ⑤

03 $g(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 이므로 $g(x)=t$ 로 놓으면 임의의 실수 x 에 대하여 $t \geq -1$

이때, $f(x)=x^3-3x+4$ 에서

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$$

$$=t^3-3t+4$$

$$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

$t \geq -1$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	1	...
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$		\	극소	/

$t \geq -1$ 에서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(t)$ 의 최솟값은 $=f(g(x))$

$$f(1)=1-3+4=2$$

즉, 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $g(x)$ 의 식을 정리하여 $g(x)=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위를 구한 경우	30%
(나)	$(f \circ g)(x)$ 를 t 에 대한 함수로 나타내어 이 함수의 도함수를 구한 경우	30%
(다)	함수 $f(t)$, 즉 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값을 구한 경우	40%

04 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 도함수를 구하여 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 찾아 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.
② 단계	$0 < a < 1$, $a \geq 1$ 로 나누어 $g(t)$ 를 구한 후, $g'(t)$ 를 구하여 미분가능성을 살펴보고, a 의 최댓값을 구한다.

$$f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2 \ (a>0) \text{에서}$$

$$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$$

$$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$$

$$=-12x(x+1)(x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	$2a+1$	\	0	/	a^4+2a^3	\

이때,

$$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$$

이므로

$$0 < a < 1 \text{이면 } f(a)-f(-1) < 0 \text{에서 } f(a) < f(-1)$$

$$a \geq 1 \text{이면 } f(a)-f(-1) \geq 0 \text{에서 } f(a) \geq f(-1)$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$t < -1 \text{이면}$$

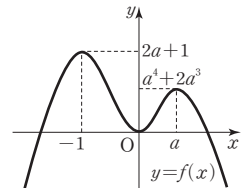
$$g(t)=f(t)$$

$$=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$$

$$t \geq -1 \text{이면}$$

$$g(t)=f(-1)=2a+1$$

$$\therefore g'(t)=\begin{cases} -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t < -1) \\ 0 & (t \geq -1) \end{cases}$$

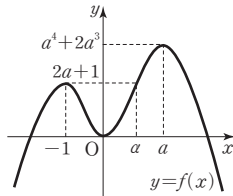


이때, $\lim_{t \rightarrow -1-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = 0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t = -1$ 에서 미분가능하다.
따라서 $0 < a < 1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ii) $a \geq 1$ 일 때,

$$f(-1) = f(a) \quad (0 < a \leq 1)$$

라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$t < -1$ 이면

$$g(t) = f(t) = -3t^4 + 4(a-1)t^3 + 6at^2$$

$-1 \leq t < a$ 이면

$$g(t) = f(-1) = 2a + 1$$

$a \leq t < a$ 이면

$$g(t) = f(t) = -3t^4 + 4(a-1)t^3 + 6at^2$$

$t \geq a$ 이면

$$g(t) = f(a) = a^4 + 2a^3$$

$$\therefore g'(t) = \begin{cases} -12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at & (t < -1) \\ 0 & (-1 < t < a) \\ -12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at & (a < t < a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$$

이때, $\lim_{t \rightarrow -1-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = 0$ 이므로 함수

$g(t)$ 는 $t = -1$ 에서 미분가능하고,

$\lim_{t \rightarrow a-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow a+} g'(t) = 0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는

$t = a$ 에서 미분가능하다.

또한, 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t = a$ 에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{t \rightarrow a-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow a+} g'(t)$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow a-} 0 = \lim_{t \rightarrow a+} \{-12t^3 + 12(a-1)t^2 + 12at\}$$

$$-12a^3 + 12(a-1)a^2 + 12aa = 0$$

$$-12a\{a^2 - (a-1)a - a\} = 0$$

$$-12a(a+1)(a-a) = 0$$

$$\therefore a = a \quad (\because 0 < a \leq 1)$$

따라서 $f(a) = f(-1)$ 이고 $f(-1) = f(a)$ 이므로

$f(a) = f(-1)$ 이다. 즉,

$$a^4 + 2a^3 = 2a + 1 \text{에서 } a^4 + 2a^3 - 2a - 1 = 0$$

$$(a+1)^3(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a \geq 1)$$

$$\therefore a = a = 1$$

$$\therefore g'(t) = \begin{cases} -12t^3 + 12t & (t < -1) \\ 0 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$

$g'(-1) = 0, g'(1) = 0$ 이므로 $a = 1$ 일 때 함수 $g(t)$

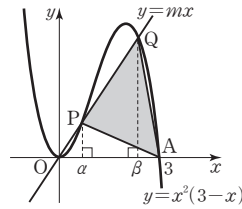
는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 1$

따라서 구하는 실수 a 의 최댓값은 1이다.

답 ①

05



삼차함수 $y = x^2(3-x)$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2(3-x) = mx, x(x^2 - 3x + m) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x^2 - 3x + m = 0$$

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β ($0 < \alpha < \beta$)라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 - 3x + m = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = m$$

이차방정식 $x^2 - 3x + m = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 위의 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 - 4m > 0 \quad \therefore 0 < m < \frac{9}{4}$$

삼각형 PAQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \triangle OAQ - \triangle OAP$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times m\beta - \frac{1}{2} \times 3 \times m\alpha$$

$$= \frac{3}{2} m(\beta - \alpha)$$

이때, $\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{9 - 4m}$ 이므로

$$S = \frac{3}{2} m\sqrt{9 - 4m} = \frac{3}{2} \sqrt{-4m^3 + 9m^2}$$

$f(m) = -4m^3 + 9m^2$ 이라 하면

$$f'(m) = -12m^2 + 18m = -6m(2m - 3)$$

$$f'(m) = 0 \text{에서 } m = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < m < \frac{9}{4})$$

$0 < m < \frac{9}{4}$ 에서 함수 $f(m)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	(0)	...	$\frac{3}{2}$	...	$(\frac{9}{4})$
$f'(m)$		+	0	-	
$f(m)$		↗	극대	↘	

$0 < m < \frac{9}{4}$ 에서 함수 $f(m)$ 은 $m = \frac{3}{2}$ 일 때 극대이면서

최대이므로 삼각형 PAQ의 넓이도 $m = \frac{3}{2}$ 일 때 최대가 된다.

$$\therefore 10m = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

답 15

06

$\overline{AP} = x$ ($0 \leq x \leq 1$)라 하면 $\overline{DP} = 1 - x$ 이므로

$$\overline{BP} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{CD}^2}$$

$$= \sqrt{(1-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$\therefore \overline{BP} \times \overline{CP} = \sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)}$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x(x^2 - 2x + 2) + (x^2 + 1)(2x - 2)$$

$$= 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$$

$$= 2(2x - 1)(x^2 - x + 1)$$

이때, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	\	극소	/	2

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 극소이면서 최소

이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1 + 2\right) = \frac{25}{16}$$

따라서 구하는 $\overline{BP} \times \overline{CP}$ 의 최솟값은

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

답 ②

07 원뿔의 반지름의 길이를 r 라 하자. 오른쪽 그림과 같이 구의 중심 O 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\triangle OBH$ 는 직각삼각형이므로

$$r = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{h^2}{4}}$$

$$\therefore V = 2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 \times \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi h \left(25 - \frac{h^2}{4}\right) = -\frac{\pi}{12} (h^3 - 100h)$$

위의 식의 양변을 h 에 대하여 미분하면

$$\frac{dV}{dh} = -\frac{\pi}{12} (3h^2 - 100)$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \text{에서 } 3h^2 - 100 = 0$$

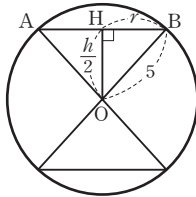
$$h^2 = \frac{100}{3} \quad \therefore h = \frac{10\sqrt{3}}{3} (\because h > 0)$$

$h > 0$ 에서 함수 V 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	...	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$	...
$\frac{dV}{dh}$		+	0	-
V		/	극대	\

$h > 0$ 에서 함수 V 는 $h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 두 원뿔의 부피의 합 V 가 최대일 때의 높이의 합 h 의 값은 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답 ②



08 오른쪽 그림과 같이 두 점 B, C

에서 선분 AD에 내린 수선의

발을 각각 E, F라 하고

$\overline{AE} = a$ ($a > 0$)라 하면

$\overline{DF} = a$ ($0 < a < 5$)이므로 $\overline{BE} = \overline{CF} = \sqrt{25 - a^2}$

$\overline{EF} = 5$ 이므로 하수도관의 단면인 등변사다리꼴

ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} (2a + 5 + 5) \sqrt{25 - a^2}$$

$$= (a + 5) \sqrt{25 - a^2} = \sqrt{(a + 5)^2 (25 - a^2)}$$

$$= \sqrt{-(a + 5)^3 (a - 5)} \quad (0 < a < 5)$$

$f(a) = -(a + 5)^3 (a - 5)$ ($a > 0$)라 하면

$$f'(a) = -3(a + 5)^2 (a - 5) - (a + 5)^3$$

$$= -(a + 5)^2 (4a - 10)$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } a = \frac{5}{2} (\because a > 0)$$

$a > 0$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\frac{5}{2}$	...	(5)
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		/	극대	\	

함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{5}{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 함수

$f(a)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{15}{2}\right)^3 \left(-\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 3$$

$$= 3 \times \left(\frac{75}{4}\right)^2$$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$$\sqrt{3 \times \left(\frac{75}{4}\right)^2} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{75\sqrt{3}}{4}$

09 용기에서 넘친 물의 부피가 최대이러

면 오른쪽 그림과 같이 물체의 밑면인

정사각형이 용기의 단면인 원에 내접

해야 한다.

정육면체 모양의 물체의 한 모서리의

길이를 x m라 하면 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}x$ m

이고, 이 길이가 원의 지름의 길이와 같으므로 원의 반지

름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ m이다.

또한, 오른쪽 그림과 같이 물체

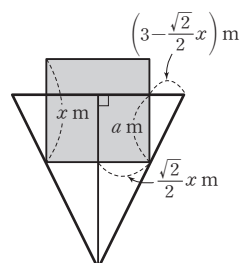
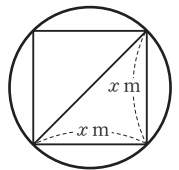
가 용기에 잠긴 부분의 높이를

a m라 하면

$$\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) : 3 = a : 6$$

$$3a = 6\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$\therefore a = 6 - \sqrt{2}x \text{ (m)}$$



넘친 물의 부피는 물체가 잠긴 부분의 부피와 같으므로
넘친 물의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2(6 - \sqrt{2}x) = -\sqrt{2}x^3 + 6x^2 (\text{m}^3)$$

$$V'(x) = -3\sqrt{2}x^2 + 12x = -3x(\sqrt{2}x - 4)$$

$$V'(x) = 0 \text{에서 } x = 2\sqrt{2} (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$2\sqrt{2}$	...
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$		↗	극대	↘

함수 $V(x)$ 는 $x = 2\sqrt{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 부피의 최댓값은

$$V(2\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \times (2\sqrt{2})^3 + 6 \times (2\sqrt{2})^2 \\ = -32 + 48 = 16 (\text{m}^3)$$

$$\therefore p = 16$$

답 16

10 두 점 $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ 을 지나는 직선 AB 의 방정

$$\text{식은 } y - 1 = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)}(x - 1) \text{에서 } y = x \text{이므로 곡선}$$

$y = 2x^3 + 3x^2 + x + a$ 와 선분 AB 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 삼차방정식

$$2x^3 + 3x^2 + x + a = x, \text{ 즉 } -2x^3 - 3x^2 = a \text{가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	-1	↗	극대	↘	-5

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 일 때 극댓값

$$f(0) = 0 \text{을 갖는다.}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 삼차방정식

$$-2x^3 - 3x^2 = a \text{가 서로 다른 두}$$

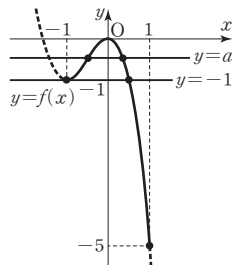
실근을 가지려면 오른쪽 그림과

같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에

서 만나야 하므로

$$-1 \leq a < 0$$



답 $-1 \leq a < 0$

11 삼차방정식 $x^3 - 3x = t - 2$ 의 실근의 개수는 곡선

$$y = x^3 - 3x + 2 \text{와 직선 } y = t \text{의 교점의 개수와 같다.}$$

$$g(x) = x^3 - 3x + 2 \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극댓값 $f(-1) = 4$, $x = 1$ 일 때 극솟값 $f(1) = 0$ 을 갖는다.

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선

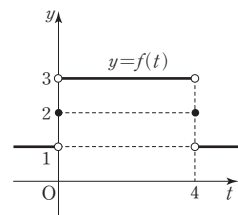
$y = t$ 의 교점은

$t < 0$ 또는 $t > 4$ 일 때 1개,

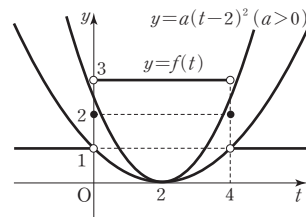
$0 < t < 4$ 일 때 3개,

$t = 0$ 또는 $t = 4$ 일 때 2개이다.

즉, 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 방정식 $f(t) = a(t-2)^2$ 이 실근을 갖지 않으려면 다음 그림과 같이 두 함수 $y = f(t)$, $y = a(t-2)^2$ 의 그래프가 만나지 않아야 하므로 함수 $y = a(t-2)^2$ ($a > 0$)의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지날 때 a 의 값은 최소가 된다.



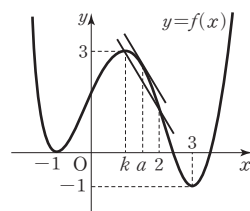
$$\text{즉, } 1 = a(0-2)^2 \text{에서 } a = \frac{1}{4}$$

따라서 조건을 만족시키는 a 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다. 답 ③

12 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(-1) = 0$, $f'(k) = 0$, $f'(3) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	k	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극솟값 0, $x = k$ 일 때 극댓값 3, $x = 3$ 일 때 극솟값 -1을 가지므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



- ㄱ. 위의 그래프에서 $\frac{f(k)-f(2)}{k-2}=f'(a)$ 인 a 가 열린 구간 $(k, 2)$ 에 하나 존재하므로 열린구간 (k, a) 에 속하는 임의의 실수 c 에 대하여 $\frac{f(k)-f(2)}{k-2} < f'(c)$ 가 성립함을 알 수 있다. (참)
- ㄴ. 위의 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 이다. (참)
- ㄷ. 위의 그래프에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)
- 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ⑤**

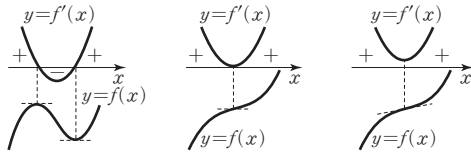
blacklabel 특강 필수 원리

도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프로부터 $y=f(x)$ 의 그래프의 모양 알기

(1) 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 근에 따라 다음과 같다.

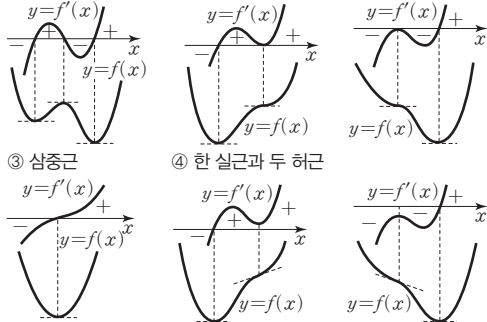
① 서로 다른 두 실근 ② 중근 ③ 두 허근



(2) 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프

삼차방정식 $f'(x)=0$ 의 근에 따라 다음과 같다.

① 서로 다른 세 실근 ② 서로 다른 두 실근(중근과 다른 한 실근)



13 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 양의 실근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 하면

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ($a>0$)라 할 수 있다.

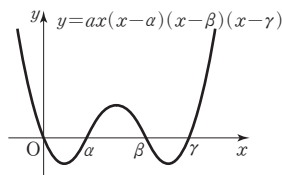
ㄱ. $a>0$ 이고 α, β, γ 모두 양수이므로

$$g(0)=f(0)=-a\alpha\beta\gamma < 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $g(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$

$$=\{ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\}' \quad \dots\dots ①$$

함수 $y=ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 방정식 $g(x)=0$ 의 세 근은 ①에서 함수 $y=ax(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 의 그래프의 극대 또는 극소인 점의 x 좌표와 같다.



즉, 방정식 $g(x)=0$ 의 근은 0과 α, α 와 β, β 와 γ 사이에 각각 하나씩 존재하므로 서로 다른 세 양의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 방정식 $g(x)=0$ 은 0과 α, α 와 β, β 와 γ 사이에 각각 하나씩 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=0$ 의 근은 α, β, γ 이므로 두 방정식의 공통근은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

• 다른풀이 •

삼차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 양의 실근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 하면

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad (a>0)$$

$$f'(x)=a(x-\beta)(x-\gamma)+a(x-\alpha)(x-\gamma) + a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\therefore g(x)=a\{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+x(x-\alpha)(x-\beta) + x(x-\beta)(x-\gamma)+x(x-\alpha)(x-\gamma)\}$$

$$\therefore g(0)=-a\alpha\beta\gamma < 0 \text{ (참)}$$

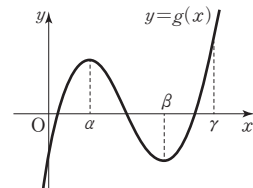
ㄴ. ㄱ에서 $g(0)<0$ 이고,

$$g(\alpha)=a\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) > 0,$$

$$g(\beta)=a\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) < 0,$$

$$g(\gamma)=a\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) > 0 \quad (\because 0 < \alpha < \beta < \gamma)$$

이므로 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $g(x)=0$ 의 실근은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표와 같으므로 서로 다른 세 양의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 의 세 실근은 α, β, γ 이고, ㄴ에서 $g(\alpha)>0, g(\beta)<0, g(\gamma)>0$ 이므로 두 방정식 $f(x)=0, g(x)=0$ 의 공통근은 존재하지 않는다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 의 그래프를 그린 후, y 축의 방향으로 평행이동하여 방정식 $f(x)+b=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 b 의 값을 구한다.
② 단계	①단계에서 구한 경우에 따라 함수 $y=f(x)+b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하여 방정식 $f(x-a)+b=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖도록 하는 a 의 값의 범위를 구한다.
③ 단계	$b-a$ 의 최댓값을 구한다.

$h(x)=f(x)+b$ 라 하면 방정식 $h(x)=0$ 의 근은 방정식 $f(x)=-b$ 의 근과 같다.

$$f(x)=2x^3-3x^2-36x-46 \text{에서}$$

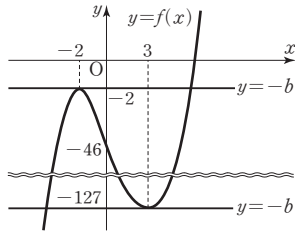
$$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x+2)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극댓값 $f(-2)=-2$, $x=3$ 일 때 극솟값 $f(3)=-127$ 을 가지므로 그래프는 다음 그림과 같다.

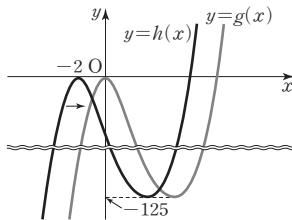


이때, 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)=-b$ 가 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$-b=-2 \text{ 또는 } -b=-127$$

$$\therefore b=2 \text{ 또는 } b=127$$

(i) $b=2$ 일 때,



함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근만을 가지려면 위의 그림과 같이 $a>2$ 이어야 한다.

따라서 두 정수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 최댓값은

$$a=3, b=2 \text{ 일 때,}$$

$$b-a=2-3=-1$$

(ii) $b=127$ 일 때,

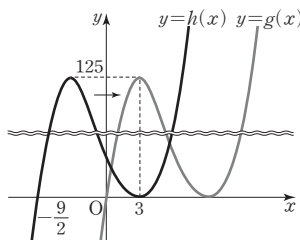
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-b$, 즉

$y=-127$ 의 교점의 x 좌표는 $f(x)=-127$ 에서

$$2x^3-3x^2-36x-46=-127$$

$$2x^3-3x^2-36x+81=0, (x-3)^2(2x+9)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=-\frac{9}{2}$$



함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근만을 가지려면 위의 그림과 같

이 $a>\frac{9}{2}$ 이어야 한다.

따라서 두 정수 a, b 에 대하여 $b-a$ 의 최댓값은

$$a=5, b=127 \text{ 일 때,}$$

$$b-a=127-5=122$$

(i), (ii)에서 구하는 $b-a$ 의 최댓값은 122이다. **답** 122

• 다른풀이 •

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$ 이므로

$$g(x)=f(x-a)+b$$

$$=2(x-a)^3-3(x-a)^2-36(x-a)-46+b$$

$$g'(x)=6(x-a)^2-6(x-a)-36$$

$$=6\{(x-a)^2-(x-a)-6\}$$

$$=6(x-a+2)(x-a-3)$$

$$g'(x)=0 \text{ 에서 } x=a-2 \text{ 또는 } x=a+3$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-2$	...	$a+3$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=a-2$ 일 때 극댓값을 갖고 $x=a+3$ 일 때 극솟값을 가지므로 삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근만을 가지려면 함수 $g(x)$ 의 극댓값 또는 극솟값이 0이 되어야 한다.

(i) (극댓값)=0인 경우

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$a-2>0, g(a-2)=0$$

$$g(a-2)$$

$$=-16-12+72-46+b$$

$$=b-2=0$$

$$\therefore a>2, b=2$$

따라서 $b-a$ 의 최댓값은 $a=3, b=2$ 일 때, -1 이다.

(ii) (극솟값)=0인 경우

오른쪽 그림과 같이 함수

$y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과

만나서 생기는 점의 x 좌표

중에서 $a+3$ 이 아닌 것을 t_1

이라 하면

$$t_1>0, g(a+3)=0$$

$$g(a+3)=54-27-108-46+b$$

$$=-127+b=0$$

$$\therefore b=127$$

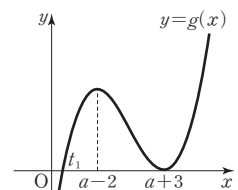
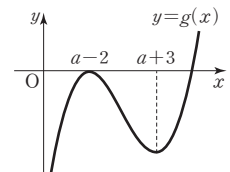
$$\text{즉, } g(x)=2(x-a)^3-3(x-a)^2-36(x-a)+81$$

이므로

$$2(x-a)^3-3(x-a)^2-36(x-a)+81$$

$$=2(x-t_1)(x-a-3)^2$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로 $x=a$ 를 대입하면



$$81=2(a-t_1) \times 9, a-t_1=\frac{9}{2}$$

$$\therefore t_1=a-\frac{9}{2}$$

$$t_1>0 \text{이므로 } a>\frac{9}{2}$$

따라서 $b-a$ 의 최댓값은 $a=5, b=127$ 일 때, 122이다.

(i), (ii)에서 구하는 $b-a$ 의 최댓값은 122이다.

15 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 근은 $x=0$ 또는 $x=2$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극댓값을 갖고 $x=2$ 일 때 극솟값을 갖는다.

ㄱ. $f(0)<0$ 이므로 함수

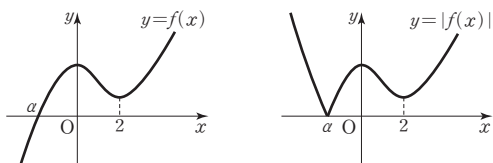
$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(2)<f(0)<0$ 이므로 $|f(0)|<|f(2)|$ (참)

ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$ 을 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$,

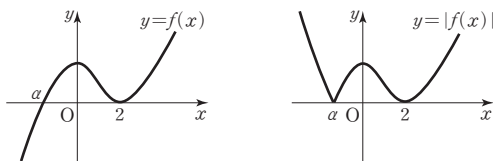
$y=|f(x)|$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

(i) $f(0)>0, f(2)>0$ 일 때,



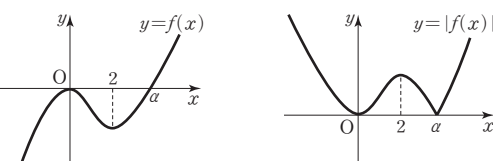
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a, x=2$ 에서 극소이므로 a 의 값의 개수는 2이다.

(ii) $f(2)=0$ 일 때,



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 중 $(2, 0)$ 이 아닌 점의 x 좌표를 a 라 하면 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a, x=2$ 에서 극소이므로 a 의 값의 개수는 2이다.

(iii) $f(0)=0$ 일 때,

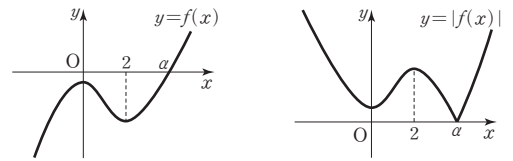


함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 중 원

점이 아닌 점의 x 좌표를 a 라 하면 함수

$|f(x)|$ 는 $x=0, x=a$ 에서 극소이므로 a 의 값의 개수는 2이다.

(iv) $f(0)<0, f(2)<0$ 일 때,



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 a 라 하면 함수 $|f(x)|$ 는 $x=0, x=a$ 에서 극소이므로 a 의 값의 개수는 2이다.

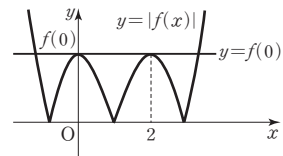
(i)~(iv)에서 극소인 a 의 값의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 에서

$f(2)=-f(0)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으

므로 방정식 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (참)



그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

16 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x+t$ 의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=-x+t$, 즉 $f(x)+x=t$ 의 실근의 개수와 같으므로 곡선 $y=f(x)+x$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같다.

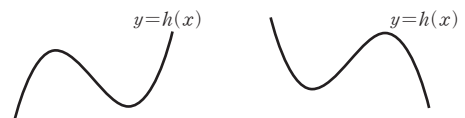
이때, $h(x)=f(x)+x$ 라 하면 $h(x)$ 도 삼차함수이다.

ㄱ. $h(x)=x^3+x$ 에서 $h'(x)=3x^2+1>0$ 이므로 $h(x)$ 는 증가함수이다.

즉, 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 항상 1이므로 함수 $g(t)=1$ 로 상수함수이다. (참)

ㄴ. $g(1)=2$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 는 증가함수가 아니다.

즉, 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $g(t)=3$ 인 경우가 존재한다. (참)



ㄷ. (반례) $f(x)=x^3-x$ 라 하면 $h(x)=x^3$ 은 증가함수이므로 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=1$ 이다.

그런데 $f'(x)=3x^2-1$ 이고, $f'(x)=0$ 에서

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 극값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

- 17** 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 세 실근이 α, β, γ 이므로 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ (단, $a>0$)라 하고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=\beta$ 일 때 극댓값을 갖고, $x=\alpha, x=\gamma$ 일 때 극솟값을 갖는다.

이때, $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)<0$ 이라면 $f(\alpha), f(\gamma)$ 중에서 작은 값은 반드시 음수이어야 한다.

- ㄱ. (반례) $f(\alpha)=-1, f(\beta)=1, f(\gamma)=-1$ 이면
 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=-1<0$ 이지만 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (거짓)

- ㄴ. $f(\alpha)>0$ 이므로 $f(\beta)>0, f(\gamma)<0$
 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 β 보다 큰 실근을 갖는다. (참)

- ㄷ. $f(\beta)>0$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림의 세 경우 중에 하나이다.
 $x>\alpha$ 에서 함수 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점이 항상 존재하므로 방정식 $f(x)=0$ 은 α 보다 큰 실근을 적어도 한 개 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 18** $f(x)=x^4+x^2-6x$ 에서
 $f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3)$
 이때, $2x^2+2x+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(1)=1+1-6=-4$$

한편, $g(x)=-2x^2-8x+a=-2(x+2)^2+8+a$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최댓값 $8+a$ 를 가지므로 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 이라면 ($f(x)$ 의 최솟값) $\geq$ ($g(x)$ 의 최댓값)이어야 한다.

$$\text{즉, } -4\geq 8+a \text{에서 } a\leq -12$$

따라서 구하는 실수 a 의 최댓값은 -12 이다. **답 -12**

단계	채점 기준	배점
(가)	$f(x)$ 에서 $f'(x)$ 를 구한 후, 방정식 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한 경우	20%
(나)	함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구한 경우	30%
(다)	함수 $g(x)$ 의 최댓값을 구한 경우	20%
(라)	임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 이라면 ($f(x)$ 의 최솟값) $\geq$ ($g(x)$ 의 최댓값)임을 파악한 후, 실수 a 의 최댓값을 구한 경우	30%

- 19** 함수 $y=x^{n+1}-n(n-3)$ 의 그래프가 직선 $y=(n+1)x$ 보다 항상 위부분에 있어야 하므로 $x>0$ 에서 부등식 $x^{n+1}-n(n-3)>(n+1)x$ 를 만족시켜야 한다.
 $x^{n+1}-(n+1)x-n(n-3)>0$ 에서
 $f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-3)$ 이라 하면
 $f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)=(n+1)(x^n-1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x>0$)
 $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(1)=1-(n+1)-n(n-3)=-n^2+2n$$

$x>0$ 일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $x>0$ 에서 ($f(x)$ 의 최솟값) >0 이어야 하므로

$$-n^2+2n>0, n(n-2)<0$$

$$\therefore 0<n<2$$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은 1이다. **답 1**

- 20** $f(x)=-x^3-2x$ 이므로
 $f(f(x))=-\{f(x)\}^3-2f(x)$
 $f(-3x^2-11x+2)\leq-\{f(x)\}^3-2f(x)$ 에서
 $f(-3x^2-11x+2)\leq f(f(x)) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이때, $f'(x)=-3x^2-2<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소함

수이므로 ㉠에서 $-3x^2-11x+2 \geq f(x)$

$$-3x^2-11x+2 \geq -x^3-2x$$

$$x^3-3x^2-9x+2 \geq 0$$

$g(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극댓값

$$g(-1)=7 \text{을 갖고, } x=3 \text{일 때 극솟값}$$

$$g(3)=-25 \text{를 가지므로 함수}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

정수 k 에 대하여 $x \geq k$ 에서 부등식

$$g(x) \geq 0 \text{이 성립해야 하므로}$$

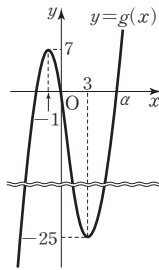
$x > 3$ 에서 함수 $y=g(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 a 라 하면 $a \leq k$ 이어야 한다.

$$\text{이때, } g(4)=64-48-36+2=-18 < 0,$$

$$g(5)=125-75-45+2=7 > 0 \text{이므로}$$

$$4 < a < 5$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다.



21 부등식 $x^3-2 \geq 3k(x^2-2)$, 즉 $x^3-3kx^2+6k-2 \geq 0$ 에서

$$f(x)=x^3-3kx^2+6k-2 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6kx=3x(x-2k)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

(i) $k \leq 0$ 일 때,

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	$6k-2$	↗

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최솟이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(0)=6k-2$$

$x \geq 0$ 일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $x \geq 0$ 에서 $(f(x) \text{의 최솟값}) \geq 0$ 이어야 하므로

$$6k-2 \geq 0 \quad \therefore k \geq \frac{1}{3}$$

그런데 $k \leq 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $k > 0$ 일 때,

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2k$	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$6k-2$	↘	극소	↗

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2k$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(2k)=8k^3-12k^3+6k-2=-4k^3+6k-2$$

$x \geq 0$ 일 때, 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $x \geq 0$ 에서 $(f(x) \text{의 최솟값}) \geq 0$ 이어야 하므로

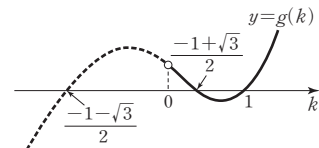
$$-4k^3+6k-2 \geq 0 \quad \therefore 2k^3-3k+1 \leq 0$$

$$g(k)=2k^3-3k+1$$

$$=(k-1)(2k^2+2k-1)$$

$$=2(k-1)\left\{k-\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{k-\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

이라 하면 $k > 0$ 에서 함수 $y=g(k)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $g(k) \leq 0$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1 \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 는 1의 1개이다.

답 ①

22 $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-24x+3a}$ 에서 함수 $y=2x+1$ 은 실수 전체

의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-24x+3a}$ 이

구간 $[0, \infty)$ 에서 연속이려면 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $y=x^3-24x+3a$ 가 연속이고 0이 아니어야 한다.

이때, 다항함수 $y=x^3-24x+3a$ 는 항상 연속이므로 구간 $[0, \infty)$ 에서 항상 $x^3-24x+3a > 0$ 또는

$$x^3-24x+3a < 0 \text{이어야 한다.}$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3-24x+3a) = \infty$ 이므로 구간 $[0, \infty)$ 에서 $x^3-24x+3a > 0$ 이어야 한다.

$$g(x)=x^3-24x+3a \text{라 하면}$$

$$g'(x)=3x^2-24=3(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=2\sqrt{2} (\because x \geq 0)$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2\sqrt{2}$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$3a$	↘	극소	↗

구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=2\sqrt{2}$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 최솟값은

$$g(2\sqrt{2})=16\sqrt{2}-48\sqrt{2}+3a=3a-32\sqrt{2}$$

이때, 구간 $[0, \infty)$ 에서 부등식 $x^3-24x+3a > 0$, 즉

$g(x) > 0$ 이 항상 성립하려면 $(g(x) \text{의 최솟값}) > 0$ 이어

야 하므로

$$3a - 32\sqrt{2} > 0, 3a > 32\sqrt{2}$$

$$\therefore a > \frac{32\sqrt{2}}{3} \approx 15.555$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 16이다.

답 16

23 ㄱ. $t=3$ 일 때, $v(3)=-2$ 이므로

$$(\text{속력}) = |(\text{속도})| = |-2| = 2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $0 < t < 6$ 일 때, $t=2$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌고, $t=4$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P는 $0 < t < 6$ 일 때, 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. 주어진 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 시각 t 에서의 접선의 기울기 $v'(t)$ 가 시각 t 에서의 가속도이다.

$$t = \frac{3}{2} \text{일 때의 접선의 기울기는 } v'\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \text{이고, } t=4$$

일 때의 접선의 기울기는 $v'(4) > 0$ 이므로 $t = \frac{3}{2}$ 일 때의 점 P의 가속도는 $t=4$ 일 때의 점 P의 가속도보다 작다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

거리, 속력, 속도, 가속도에 대한 문제는 학교시험, 수능, 모의평가에서 자주 출제된다. 이와 같은 문제는

- (1) (거리) = (속력) $\times$ (시간)
- (2) (방향성을 가진 속력) = (속도)
- (3) 거리 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 속도 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 가속도

임을 이용하면 쉽게 해결할 수 있다. 주어진 문제의 그래프에서

ㄱ. $t=3$ 일 때, 속도는 -2 이므로 방향성을 생각하지 않으면 속력은 2이다.

ㄴ. 속도 $v(t)$ 는 방향성을 가지고 있고 $t=2, t=4$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 운동 방향을 두 번 바꾼다.

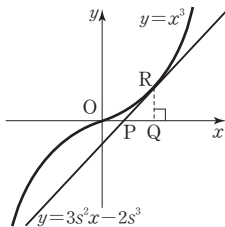
ㄷ. 속도를 미분하면 가속도이므로 $(t = \frac{3}{2} \text{일 때의 가속도}) < 0 < (t=4 \text{일 때의 가속도})$

24 $f(x)=x^3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 P에서 곡선 $y=x^3$ 에 그른 접선의 접점을

$R(s, s^3)$ ($s \neq 0$)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(s)=3s^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - s^3 = 3s^2(x - s) \quad \therefore y = 3s^2x - 2s^3$$



점 P의 좌표를 $(x, 0)$ 이라 하면 위의 직선이 점 $P(x, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3s^2x - 2s^3 \quad \therefore s = \frac{3}{2}x \quad (\because s \neq 0)$$

그런데 시각 t 에서 점 P의 x 좌표가 $2t^3 + t^2$ 이므로

$$s = \frac{3}{2}(2t^3 + t^2) = 3t^3 + \frac{3}{2}t^2$$

이때, x 축 위의 점 Q의 x 좌표, 즉 점 Q의 위치가 s 이므로 시각 t 에서의 점 Q의 속도는

$$\frac{ds}{dt} = 9t^2 + 3t$$

따라서 $t=3$ 일 때 점 Q의 속도는

$$9 \times 3^2 + 3 \times 3 = 90$$

답 90

25 ㄱ. $x(t)$ 는 점 P의 시각 t 에서의 위치이므로 $x'(t)$, 즉 접선의 기울기의 부호가 바뀌는 지점에서 운동 방향을 바꾼다.

$t=20$ 의 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌고, $40 < t < 50$ 의 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 P는 움직이는 동안 운동 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄴ. $0 < t < 20$ 에서 점 P는 x 축의 양의 방향으로 움직이므로 출발 후 20초까지 움직인 거리는

$$x(20) - x(0) = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

한편, $50 < t < 60$ 에서 점 P는 일정한 속도로 움직이므로 이때의 함수 $y=x(t)$ 의 그래프는 직선이다.

두 점 $(60, 0), (50, -40)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{0 - (-40)}{60 - 50}(x - 60) \quad \therefore y = 4(x - 60)$$

또한, $50 < t < 60$ 에서 점 P는 x 축의 음의 방향으로 움직이므로 50초부터 55초까지 움직인 거리는

$$x(55) - x(50) = 4 \times (-5) - 4 \times (-10) = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 출발 후 20초까지 움직인 거리와 50초부터 55초까지 움직인 거리는 같다. (참)

ㄷ. $40 < t < 50$ 일 때 점 P는 정지한 상태이므로 속력은 0이다.

$t=30$ 일 때의 속력은 $|x'(30)|$ 이므로 $x'(30) \neq 0$

따라서 $t=30$ 일 때의 속력은 $40 < t < 50$ 일 때의 속력보다 크다. (참)

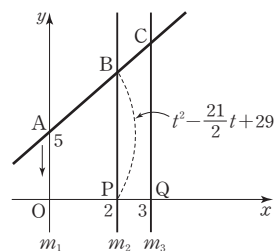
그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

26 주어진 조건을 만족시키는 세 직선 m_1, m_2, m_3 을

$$m_1: x=0, m_2: x=2, m_3: x=3$$

이라 하고, 세 직선 m_1, m_2, m_3 과 x 축의 교점을 각각 O, P, Q라 하면 다음 그림과 같다.



점 A는 x 축으로부터 5만큼 떨어진 곳에서 출발하여 x 축을 향해 매초 $\frac{1}{2}$ 의 속도로 직선 m_1 을 따라 움직이므로

t 초 후 점 A의 좌표는 $(0, 5 - \frac{1}{2}t)$ 이고 $\overline{AO} = 5 - \frac{1}{2}t$

점 A가 점 B보다 x 축으로부터 멀리 떨어져 있어야 하므로

$$\overline{AO} > \overline{BP} \text{에서 } 5 - \frac{1}{2}t > t^2 - \frac{21}{2}t + 29$$

$$t^2 - 10t + 24 < 0, (t-4)(t-6) < 0$$

$$\therefore 4 < t < 6 \quad \therefore a=4, b=6$$

한편, 두 점 $A(0, 5 - \frac{1}{2}t), B(2, t^2 - \frac{21}{2}t + 29)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - (5 - \frac{1}{2}t) = \frac{t^2 - \frac{21}{2}t + 29 - (5 - \frac{1}{2}t)}{2}x$$

$$\therefore y = (\frac{1}{2}t^2 - 5t + 12)x + 5 - \frac{1}{2}t$$

이 직선이 직선 $m_3: x=3$ 과 만나는 점이 C이므로

$$C(3, \frac{3}{2}t^2 - \frac{31}{2}t + 41)$$

즉, $\overline{CQ} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{31}{2}t + 41$ 이므로 t 초 후의 점 C의 속도와 가속도를 각각 $v(t), a(t)$ 라 하면

$$v(t) = 3t - \frac{31}{2}, a(t) = 3$$

즉, $k=3$

$$\therefore a+b+k=4+6+3=13$$

답 13

27 $x(t) = 2t^3 - 24t^2 + 90t$ 라 하면 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$x'(t) = 6t^2 - 48t + 90 = 6(t-3)(t-5)$$

운동 방향이 바뀔 때의 속도가 0이므로

$$x'(t) = 0 \text{에서 } t=3 \text{ 또는 } t=5$$

$t=3$ 의 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 처음으로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$ 이고 이때의 위치는

$$x(3) = 54 - 216 + 270 = 108$$

$$\therefore a=108$$

$t>3$ 에서 다시 점 P가 $x=108$ 의 위치로 돌아오는 시각은

$$x(t) = 108 \text{에서 } 2t^3 - 24t^2 + 90t = 108$$

$$t^3 - 12t^2 + 45t - 54 = 0$$

$$(t-3)^2(t-6) = 0 \quad \therefore t=6 (\because t>3)$$

다시 돌아오기까지 걸린 시간은

$$b=6-3=3$$

$$\therefore a+b=108+3=111$$

답 111

28 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 $P(t), Q(t)$ 라 하면 $P(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2, Q(t) = mt$

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도는 각각

$$P'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t, Q'(t) = m$$

이때, 두 점 P, Q의 속도가 같게 되는 때가 3회 있으려면 삼차방정식 $4t^3 - 24t^2 + 36t = m$ 이 0 이상의 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	0	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극댓값 $f(1)=16$, $x=3$ 일 때 극솟값 $f(3)=0$ 을 갖는다.

삼차방정식 $4t^3 - 24t^2 + 36t = m$ 이

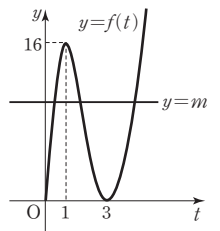
0 이상의 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=f(t)$ 와 직선 $y=m$ 이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$0 < m < 16$$

따라서 구하는 정수 m 은 1, 2, 3, ..., 15의 15개이다.

답 15



29 점 P는 x 축의 양의 방향으로 매초 2의 속력으로, 점 Q는 y 축의 양의 방향으로 매초 1의 속력으로 움직이므로 t 초 후 두 점 P, Q는 각각

$$P(2t, 0), Q(0, t)$$

이때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2t} + \frac{y}{t} = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 R은 직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점이므로 점 R의 x 좌표는 $-\frac{1}{2}x + t = 2x$ 에서

$$\frac{5}{2}x = t \quad \therefore x = \frac{2}{5}t$$

$$\therefore R(\frac{2}{5}t, \frac{4}{5}t)$$

$\overline{OR} = l$ 이라 하면

$$l = \sqrt{(\frac{2}{5}t)^2 + (\frac{4}{5}t)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}t^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다. **답** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

30 정육면체의 한 모서리의 길이를 l , 한 면의 넓이를 S , 부피를 V 라 하면 길이가 1 cm인 모서리의 길이가 매초 2 cm씩 증가하므로 t 초 후의 한 모서리의 길이를 l 은

$$l = 1 + 2t \text{ (cm)}$$

$$\therefore S = (1+2t)^2 \text{ (cm}^2\text{)}, V = (1+2t)^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

이때, 정육면체의 한 면의 넓이가 25 cm^2 가 되는 시각은 $(1+2t)^2=25$ 에서
 $1+2t=5 \quad \therefore t=2$
 한편, $\frac{dV}{dt}=3(1+2t)^2 \times 2=6(1+2t)^2$ 이므로 $t=2$ 일 때 구하는 부피의 변화율은
 $6(1+2 \times 2)^2=150 (\text{cm}^3/\text{s})$ ▶ **답** $150 \text{ cm}^3/\text{s}$

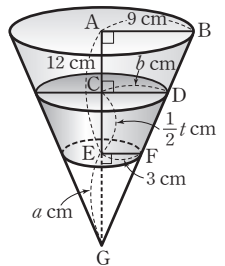
31 점 P가 점 A를 출발한 지 t 초 후의 두 선분 AP, PB의 길이는 각각 $\overline{AP}=2t(\text{cm}), \overline{PB}=20-2t(\text{cm})$ ($0 \leq t \leq 10$)
 이때, 두 선분 AP, PB를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $4t^2(\text{cm}^2), (20-2t)^2(\text{cm}^2)$
 이므로 두 정사각형의 넓이의 합 S 는 $S=4t^2+(20-2t)^2=8t^2-80t+400(\text{cm}^2)$
 $\therefore \frac{dS}{dt}=16t-80$
 따라서 점 P가 점 A를 출발한 후 8초가 되는 순간의 넓이 S 의 변화율은
 $16 \times 8 - 80 = 48 (\text{cm}^2/\text{s})$ ▶ **답** $48 \text{ cm}^2/\text{s}$

32 주어진 원기둥의 t 초 후의 밑면의 반지름의 길이와 높이는 각각 $5+t(\text{cm}), 25-2t(\text{cm})$ ($0 \leq t < \frac{25}{2}$)
 따라서 원기둥의 부피를 V 라 하면 $V=\pi(5+t)^2(25-2t)(\text{cm}^3)$
 $\therefore \frac{dV}{dt}=2\pi(5+t)(25-2t)-2\pi(5+t)^2$
 $=2\pi(5+t)(20-3t)$
 원기둥의 부피가 감소하려면 부피의 증가율이 음수이어야 하므로 $\frac{dV}{dt} \leq 0$ 에서 $2\pi(5+t)(20-3t) \leq 0$
 이때, $t \geq 0$ 에서 $5+t > 0$ 이므로 $20-3t \leq 0, 3t \geq 20 \quad \therefore t \geq \frac{20}{3}$
 즉, 처음으로 감소하는 시각은 $\frac{20}{3}$ 초이므로 자연수 k 의 값은 6이다. ▶ **답** 6

33 두 점 P, Q가 출발한 지 t 초 후의 두 선분 BP, BQ의 길이는 각각 $\overline{BP}=2t, \overline{BQ}=4-t$ ($0 \leq t \leq 2$)
 삼각형 PBQ의 넓이를 $f(t)$ 라 하면 $f(t)=\frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{BQ} \times \sin 60^\circ$
 $=\frac{1}{2} \times 2t \times (4-t) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}t(t-4)$

이때, 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PBQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{3}{8}$ 이 될 때의 t 의 값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}t(t-4)=\frac{3}{8} \times 4\sqrt{3}$ 에서 $t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$
 $\therefore t=1$ ($\because 0 \leq t \leq 2$)
 한편, $f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t$ 에서 $f'(t)=-\sqrt{3}t+2\sqrt{3}$
 따라서 $t=1$ 일 때 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은 $a=f'(1)=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3}$
 $\therefore a^2=(\sqrt{3})^2=3$ ▶ **답** 3

34 원뿔대 모양의 그릇에 담긴 물의 수면의 높이가 매초 $\frac{1}{2} \text{ cm}$ 씩 증가하도록 물을 부었으므로 수면의 높이를 h 라 하면 $h=\frac{1}{2}t \text{ cm}$
 수면의 높이가 그릇의 높이 12 cm 의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 순간의 시각은 $\frac{1}{2}t=\frac{1}{2} \times 12 \quad \therefore t=12$
 한편, 오른쪽 그림과 같이 원뿔대를 만들면 $\overline{AB}=9 \text{ cm}, \overline{EF}=3 \text{ cm}, \overline{AE}=12 \text{ cm}, \overline{CE}=\frac{1}{2}t \text{ cm}$
 $\overline{EG}=a \text{ cm}$ 라 하면 $\triangle AGB \sim \triangle EGF$ 이므로 $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{AG} : \overline{EG}, 9 : 3 = (12+a) : a$
 $3(12+a)=9a, 6a=36 \quad \therefore a=6(\text{cm})$
 또한, $\overline{CD}=b \text{ cm}$ 라 하면 $\triangle CGD \sim \triangle EGF$ 이므로 $\overline{CD} : \overline{EF} = \overline{CG} : \overline{EG}, b : 3 = \left(\frac{1}{2}t+6\right) : 6$
 $3\left(\frac{1}{2}t+6\right)=6b \quad \therefore b=\frac{1}{4}t+3(\text{cm})$



용기에 담긴 물의 부피를 V 라 하면 $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\left(\frac{1}{2}t+6\right)-\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6$
 $=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\left(\frac{1}{2}t+6\right)-18\pi$
 $\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t+3\right)\left(\frac{1}{2}t+6\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t+3\right)^2\right\}$
 따라서 $t=12$ 일 때 부피의 변화율은 $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 12 + \frac{1}{2} \times 6^2\right)=\frac{\pi}{3} \times 54=18\pi(\text{cm}^3/\text{s})$

▶ **답** $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 56

- 01 $\frac{5-\sqrt{2}}{4}$ 02 ⑤ 03 $-\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 04 ① 05 ③
06 -3 07 65 08 $384 \text{ cm}^3/\text{s}$

01 해결단계

① 단계	$x+y=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ 을 연립하여 x 에 대한 이차방정식을 만든 후 실근을 가질 조건을 구한다.
② 단계	주어진 식을 이용하여 $x^3+y^3+z^3$ 을 z 에 대한 함수로 나타낸다.
③ 단계	함수 $f(z)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한 후, 그 합을 구한다.

$$x+y=1 \text{에서 } y=1-x$$

이것을 $x^2+y^2+z^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+(1-x)^2+z^2=1, 2x^2-2x+z^2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 에 대한 이차방정식 ①이 실근을 가지므로 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2z^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$2z^2 \leq 1 \quad \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, $x^2+y^2+z^2=1$ 에서

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (x+y)^2+z^2-2xy \\ &= 1+z^2-2xy \quad (\because x+y=1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$z^2-2xy=0 \quad \therefore xy=\frac{z^2}{2}$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3 \\ &= 1-\frac{3}{2}z^2+z^3 \quad (\because x+y=1) \end{aligned}$$

$f(z)=z^3-\frac{3}{2}z^2+1$ 이라 하면

$$f'(z)=3z^2-3z=3z(z-1)$$

$$f'(z)=0 \text{에서 } z=0 \left(\because -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 함수 $f(z)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

z	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(z)$		+	0	-	
$f(z)$	$\frac{1-\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 함수 $f(z)$ 는 $z=0$ 일 때 극대이면서

최대이므로 최댓값 $f(0)=1$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최솟값

$$\frac{1-\sqrt{2}}{4} \text{를 갖는다.}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$1+\frac{1-\sqrt{2}}{4}=\frac{5-\sqrt{2}}{4} \quad \text{답} \quad \frac{5-\sqrt{2}}{4}$$

02 해결단계

① 단계	곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점과 점 $P(t, 0)$ 사이의 거리를 구한다.
② 단계	두 점 P, Q 사이의 거리가 최소임을 이용하여 t 와 s 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	$t \rightarrow 0$ 이면 $s \rightarrow 0$ 임을 파악한 후, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{s}$ 의 값을 구한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점을 $R(x, f(x))$ 라 하고 두 점 $P(t, 0)$, R 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\sqrt{(x-t)^2+\{f(x)\}^2}$$

$g(x)=(x-t)^2+\{f(x)\}^2$ 이라 하면 $g(x)$ 가 최소일 때 d 의 값도 최소이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 점 P에 가장 가까운 거리에 있는 점이 $Q(s, f(s))$ 이므로 $x=s$ 일 때 함수 $g(x)$ 가 최소이다.

이때, 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 차수가 짝수이므로 극솟값이 가장 작은 극소인 점에서 최솟값을 갖는다.

즉, $x=s$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극소이므로 $g'(s)=0$

$$g'(x)=2(x-t)+2f(x)f'(x) \text{이므로}$$

$$2(s-t)+2f(s)f'(s)=0$$

$$2t=2s+2f(s)f'(s) \quad \therefore t=s+f(s)f'(s)$$

한편, $f(0)=0$ 이므로 $t \rightarrow 0$ 일 때, 점 $P(t, 0)$ 에 가장 가까운 곡선 $y=f(x)$ 위의 점은 $(0, 0)$ 이므로 $s \rightarrow 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+f(s)f'(s)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{f(s)}{s} \times f'(s) \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{f(s)-f(0)}{s-0} \times f'(s) \right\} \\ &= 1 + \{f'(0)\}^2 \\ &= 1 + a^2 \quad (\because f'(0)=a) \end{aligned}$$

답 ⑤

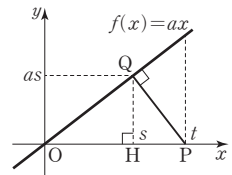
서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

$h \rightarrow 0$ 일 때, 구간 $[a-h, a+h]$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 접선으로 생각할 수 있다.

이 문제에서 $t \rightarrow 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 를 $x=0$ 에서의 접선인 $y=ax$ 로 생각하면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중 점 P와 가장 가까운 점이므로 오른쪽 그림과 같다.

점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle OQP$ 가 직각삼각형이므로 $OQ^2=OH \times OP$ 에서

$$s^2+a^2s^2=st \quad \therefore \frac{t}{s}=1+a^2 \quad (\because s \neq 0, t \neq 0)$$



03 해결단계

① 단계	a 의 값의 범위를 나누어 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타낸 후, $f(x)$ 의 최댓값 $g(a)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내어 $g(a)$ 의 최솟값을 구한다.

$$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}ax^2-a \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+3ax=-3x(x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

(i) $a < 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1
$f'(x)$	0	-	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$\frac{a}{2}-1$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$g(a) = f(0) = -a$$

(ii) $a=0$ 일 때,

$$f(x) = -x^3$$

즉, $f(x)$ 는 감소함수이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최대이고, 최댓값은

$$g(a) = f(0) = 0$$

(iii) $0 < a < 1$ 일 때,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	1
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$-a$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	$\frac{a}{2}-1$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 극대이면서 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$g(a) = f(a) = -a^3 + \frac{3}{2}a^3 - a = \frac{a^3}{2} - a$$

(iv) $a \geq 1$ 일 때,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$-a$	$\nearrow$	$\frac{a}{2}-1$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$g(a) = f(1) = \frac{a}{2} - 1$$

(i) ~ (iv)에서

$$g(a) = \begin{cases} -a & (a \leq 0) \\ \frac{a^3}{2} - a & (0 < a < 1) \\ \frac{a}{2} - 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

$$g(a) = \frac{a^3}{2} - a \text{에서}$$

$$g'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 1$$

$$g'(a) = 0 \text{에서 } a = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	(1)
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

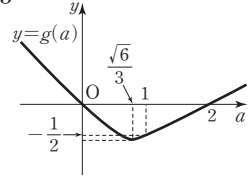
$0 < a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 극솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y = g(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

함수 $g(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때 최소이고 최솟값은

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

$$\text{답 } -\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

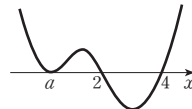


04 해결단계

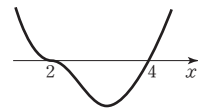
① 단계	a 의 값의 범위에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.
② 단계	$a \neq 2, a \neq 4$ 일 때의 그래프에서 접선의 기울기를 이용하여 $\neg$ 의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	$\neg$, $\subset$ 은 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 a 의 값의 범위에 따라 다음과 같이 5가지의 경우로 나눌 수 있다.

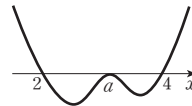
(i) $a < 2$ 일 때,



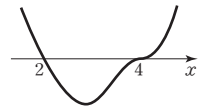
(ii) $a=2$ 일 때,



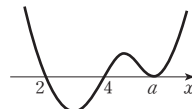
(iii) $2 < a < 4$ 일 때,



(iv) $a=4$ 일 때,



(v) $a > 4$ 일 때,



$\neg$. $a \neq 2, a \neq 4$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의

(i), (iii), (v) 중 하나와 같다.

이때, 세 가지 경우 모두 $f'(2) < 0, f'(4) > 0$ 이므로 $f'(4) - f'(2) > 0$ (참)

$\neg$. (반례) $a=0$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 (i)와 같으므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 0을 포함한 서로 다른 세 실근을 갖는다.

즉, 방정식 $x^3 f'(x)=0$ 도 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그런데 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$ 이다. (거짓)

$\subset$. (반례) $a=2$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 (ii)와 같으므로

$$f(x) = (x-2)^3(x-4)$$

$$f'(x) = 3(x-2)^2(x-4) + (x-2)^3$$

$$= (x-2)^2(4x-14)$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 방
정식 $f'(x)=1$ 은 오직 한
개의 실근을 갖는다.

그런데 $f'(x)=0$ 에서

$$x=2 \text{ 또는 } x=\frac{7}{2} \text{ 이고,}$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{27}{16} < -1 \text{ 이므로}$$

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래
프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 방정식 $|f(x)|=1$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는
다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

•다른풀이•

$$f(x) = (x-2)(x-4)(x-a)^2$$

$$f'(x) = (x-4)(x-a)^2 + (x-2)(x-a)^2$$

$$+ 2(x-2)(x-4)(x-a) \quad \dots\dots ㉠$$

ㄱ. ㉠에서

$$f'(4) = (4-2)(4-a)^2 = 2(a^2-8a+16)$$

$$= 2a^2-16a+32$$

$$f'(2) = (2-4)(2-a)^2 = -2(a^2-4a+4)$$

$$= -2a^2+8a-8$$

$$f'(4)-f'(2) = (2a^2-16a+32) - (-2a^2+8a-8)$$

$$= 4a^2-24a+40$$

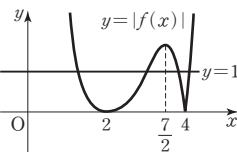
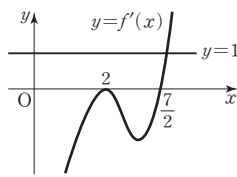
$$= 4(a^2-6a+9)+4$$

$$= 4(a-3)^2+4 > 0$$

$$\therefore f'(4)-f'(2) > 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 방정식 $x^3f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로
방정식 $f'(x)=0$ 은 0을 포함한 서로 다른 세 실근을
갖거나 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때, 방정식 $f'(x)=0$ 이 0을 포함한 서로 다른 세
실근을 가지면 $f'(0)=0$ 이다. (거짓)



$x \leq t$ 에서 주어진 부등식이 성립하려면, 즉 $h(x) \leq 0$ 이러
면 함수 $h(x)$ 의 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

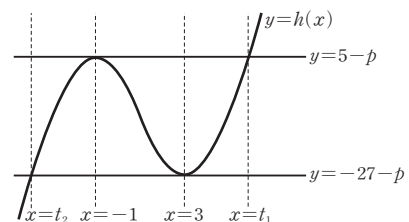
x	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극댓값 $h(-1)=5-p$,

$x=3$ 일 때 극솟값 $h(3)=-27-p$ 를 갖는다.

다음 그림과 같이 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선

$y=5-p$ 의 교점의 x 좌표 중 -1 이 아닌 것을 t_1 , 직선
 $y=-27-p$ 의 교점의 x 좌표 중 3 이 아닌 것을 t_2 라 하자.



$$h(x)=5-p \text{에서 } x^3-3x^2-9x-p=5-p$$

$$x^3-3x^2-9x-5=0, (x+1)^2(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

즉, $t_1=5$ 이다.

$$h(x)=-27-p \text{에서 } x^3-3x^2-9x-p=-27-p$$

$$x^3-3x^2-9x+27=0, (x-3)^2(x+3)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

즉, $t_2=-3$ 이다.

$x \leq t$ 에서 (함수 $h(x)$ 의 최댓값) ≤ 0 을 만족시키는 p 의
최솟값이 $f(t)$ 이므로 t 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i) $t \leq -1$ 일 때,

$x \leq t$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $h(t)$ 이므로

$$h(t) \leq 0 \text{에서 } t^3-3t^2-9t-p \leq 0$$

$$p \geq t^3-3t^2-9t \quad \therefore f(t) = t^3-3t^2-9t$$

(ii) $-1 < t \leq 5$ 일 때,

$x \leq t$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $h(-1)$ 이므로

$$h(-1) \leq 0 \text{에서 } 5-p \leq 0$$

$$p \geq 5 \quad \therefore f(t) = 5$$

(iii) $t > 5$ 일 때,

$x \leq t$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $h(t)$ 이므로

$$h(t) \leq 0 \text{에서 } t^3-3t^2-9t-p \leq 0$$

$$p \geq t^3-3t^2-9t \quad \therefore f(t) = t^3-3t^2-9t$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(t) = \begin{cases} t^3-3t^2-9t & (t \leq -1) \\ 5 & (-1 < t \leq 5) \\ t^3-3t^2-9t & (t > 5) \end{cases}$$

$$\therefore f'(t) = \begin{cases} 3t^2-6t-9 & (t < -1) \\ 0 & (-1 < t < 5) \text{에서} \\ 3t^2-6t-9 & (t > 5) \end{cases}$$

05 해결단계

① 단계	주어진 부등식을 $h(x) \leq 0$ 꼴로 변형한 후, 함수 $h(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	$x \leq t$ 에서 부등식 $h(x) \leq 0$ 을 만족시키려면 함수 $h(x)$ 의 최댓값이 0보다 작거나 같아야 함을 파악한 후, 함수 $f(t)$ 를 구한다.
③ 단계	②단계에서 그린 함수 $y=f(t)$ 의 그래프를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참 거짓을 판별한다.

$$x^3-3x^2-9x \leq p \text{에서 } x^3-3x^2-9x-p \leq 0$$

$$h(x) = x^3-3x^2-9x-p \text{라 하자.}$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 3(t^2 - 2t - 3) \\ = 3(t-3)(t+1)$$

이므로 함수 $y=3x^2-6x-9$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때, $t < -1$ 에서 $f'(t) > 0$
 $-1 < t < 0$ 에서 $f'(t) = 0$ 이다. 또한,

$$\lim_{t \rightarrow -1-} f'(t) \\ = \lim_{t \rightarrow -1-} (3t^2 - 6t - 9) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow -1+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} 0 = 0$$

이므로

$$f'(-1) = 0$$

즉, $t < 0$ 에서 $f'(t) \geq 0$ 이다. (참)

ㄴ. ㄱ의 $f'(t)$ 에서

$$\lim_{t \rightarrow 5-} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 5-} 0 = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 5+} f'(t) = \lim_{t \rightarrow 5+} (3t^2 - 6t - 9) = 36$$

에서 $\lim_{t \rightarrow 5-} f'(t) \neq \lim_{t \rightarrow 5+} f'(t)$ 이므로 $t=5$ 에서의 미분 계수가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=5$ 에서 미분가능하지 않다.

(거짓)

ㄷ. $f(t) - mt + m + 1 = 0$ 에서 $f(t) = mt - m - 1$

$$\therefore f(t) = m(t-1) - 1$$

함수 $y = mt - m - 1$ 의 그래프는 실수 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선이다.

함수 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 의 그래프는 함수 $y = h(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 그래프이므로 $x = -1$ 일 때 극댓값 5, $x = 3$ 일 때 극솟값 -27 을 갖는다.

두 함수 $y = f(x)$,

$y = mx - m - 1$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 방정식

$$f(t) = m(t-1) - 1$$

실근을 가지려면 직선

$$y = mx - m - 1$$

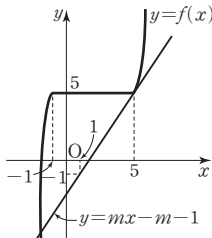
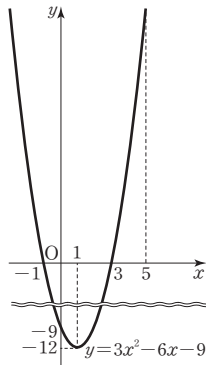
점 $(5, 5)$ 를 지날 때보다 커야한다.

$$\frac{5 - (-1)}{5 - 1} = \frac{3}{2} \text{이므로 } m > \frac{3}{2}$$

따라서 정수 m 의 최솟값은 2이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③



$$g(x) = x^3 - 3x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극댓값 $g(-1) = 2$, $x = 1$ 일 때 극솟값 $g(1) = -2$ 를 가지므로 다음과 같이 p 의 값의 범위를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $p = -2$, $p = 2$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = p$ 는 서로 다른 두 점에서

만나므로 삼차방정식

$$x^3 - 3x = p$$

는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

위의 삼차방정식의 근은 $p = -2$ 일 때 $x = -2$ 또는

$x = 1$ 이고, $p = 2$ 일 때 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로

$$f(p) = -2$$

(ii) $|p| > 2$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = p$ 는 한 점에서 만나므로

삼차방정식 $x^3 - 3x = p$ 는 실

근 α 를 갖고, $|\alpha| > 2$ 이다.

이때, 실근이 한 개이면 그 근

의 제곱이 $f(p)$ 이므로

$$f(p) = \alpha^2 > 4$$

(iii) $|p| < 2$ 일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수

$y = g(x)$ 의 그래프와 직선

$y = p$ 는 서로 다른 세 점에서

만난다.

삼차방정식 $x^3 - 3x = p$ 의 서

로 다른 세 실근을 α, β, γ

($\alpha < \beta < \gamma$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에

의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

이때, 실근 중에서 최대인 것과 최소인 것의 곱이

$$f(p) \text{이므로}$$

$$f(p) = \alpha\gamma$$

$$= -3 - \alpha\beta - \beta\gamma \quad (\because ㉠)$$

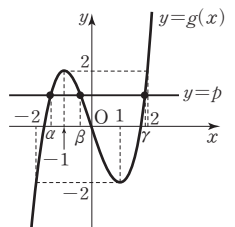
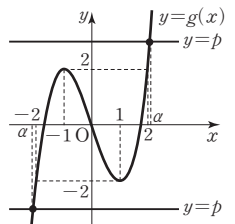
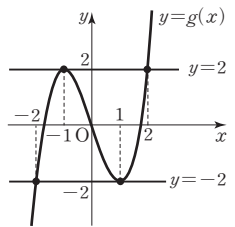
$$= -3 - \beta(\alpha + \gamma)$$

$$= -3 - \beta(-\beta) \quad (\because ㉡)$$

$$= \beta^2 - 3 \geq -3 \quad (\because \beta^2 \geq 0)$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(p)$ 의 최솟값은 -3 이다.

답 -3



06 해결단계

① 단계	삼차방정식 $x^3 - 3x - p = 0$ 의 실근은 곡선 $y = x^3 - 3x$ 와 직선 $y = p$ 의 교점의 x 좌표임을 이해한다.
② 단계	p 의 값의 범위를 나누어 그래프를 통해 주어진 방정식의 실근을 구하고 $f(p)$ 를 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 $f(p)$ 를 비교하여 $f(p)$ 의 최솟값을 찾는다.

삼차방정식 $x^3 - 3x - p = 0$, 즉 $x^3 - 3x = p$ 에서

07 해결단계

① 단계	주어진 방정식을 $g(x)$ 를 이용하여 정리한 후, 인수분해하여 $g(x)$ 에 대한 방정식을 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이면 $f(g(x))=x$ 임을 이용하여 ①단계에서 구한 방정식을 $f(x)$ 에 대한 방정식으로 변형한다.
③ 단계	②단계에서 구한 방정식이 $0 \leq x \leq 1$ 에서 실근을 갖기 위한 k 의 값의 범위를 구하여 m, M 의 값을 구한 후, m^2+M^2 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 3x^2 + 6x + k \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \\
 4f'(x) + 12x - 18 &= (f' \circ g)(x) \text{에서} \\
 4f'(g(x)) + 12g(x) - 18 &= f'(g(x)) \\
 4(3x^2 - 6x + 6) + 12x - 18 &= 3\{g(x)\}^2 - 6g(x) + 6 \\
 12x^2 - 12x + 6 &= 3\{g(x)\}^2 - 6g(x) + 6 \\
 \{g(x)\}^2 - 2g(x) &= 4x^2 - 4x \\
 \{g(x)\}^2 - 4x^2 - 2g(x) + 4x &= 0 \\
 \{g(x) - 2x\}\{g(x) + 2x\} - 2\{g(x) - 2x\} &= 0 \\
 \{g(x) - 2x\}\{g(x) + 2x - 2\} &= 0 \\
 \therefore g(x) - 2x = 0 \text{ 또는 } g(x) + 2x - 2 = 0
 \end{aligned}$$

(i) $g(x) - 2x = 0$, 즉 $g(x) = 2x$ 일 때

$$\begin{aligned}
 f(2x) &= x \text{이므로} \\
 8x^3 - 12x^2 + 12x + k &= x \\
 k &= -8x^3 + 12x^2 - 11x \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 h_1(x) &= -8x^3 + 12x^2 - 11x \text{라 하면} \\
 h_1'(x) &= -24x^2 + 24x - 11 = -24\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 5 < 0
 \end{aligned}$$

이므로 함수 $h_1(x)$ 는 감소함수이다.

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수

$y = h_1(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 ①이 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 실근을 가지려면

$$-7 \leq k \leq 0$$

(ii) $g(x) + 2x - 2 = 0$, 즉

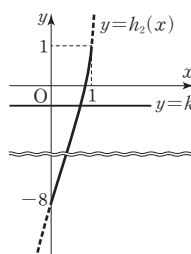
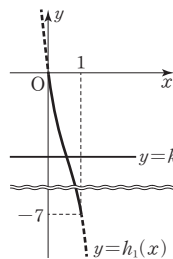
$$\begin{aligned}
 g(x) &= -2x + 2 \text{일 때} \\
 f(-2x + 2) &= x \text{이므로} \\
 (-2x + 2)^3 - 3(-2x + 2)^2 + 6(-2x + 2) + k &= x \\
 -8x^3 + 12x^2 - 13x + 8 + k &= 0 \\
 k &= 8x^3 - 12x^2 + 13x - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
 h_2(x) &= 8x^3 - 12x^2 + 13x - 8 \text{이라 하면} \\
 h_2'(x) &= 24x^2 - 24x + 13 = 24\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 7 > 0
 \end{aligned}$$

이므로 함수 $h_2(x)$ 는 증가함수이다.

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수

$y = h_2(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 ②이 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 실근을 가지려면

$$-8 \leq k \leq 1$$



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-8 \leq k \leq 1 \text{이므로}$$

$$m = -8, M = 1$$

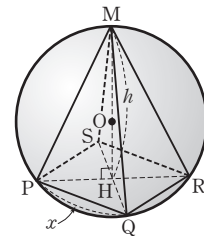
$$\therefore m^2 + M^2 = (-8)^2 + 1^2 = 65$$

답 65

08 해결단계

① 단계	구에 내접하는 사각뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 관계식을 구한다.
② 단계	구의 반지름의 길이가 매초 2 cm의 비율로 증가함을 이용하여 반지름의 길이를 t 로 나타낸 후, ①단계에서 구한 식과 연립하여 사각뿔의 밑면의 한 변의 길이와 높이를 모두 t 로 나타낸다.
③ 단계	구의 반지름의 길이가 9 cm가 될 때의 사각뿔을 구한 후, 이 시각에서의 사각뿔의 부피의 변화율을 구한다.

다음 그림과 같이 구의 중심을 O, 사각뿔의 꼭짓점을 M, 밑면의 네 꼭짓점을 P, Q, R, S, 밑면의 중심을 H라 하고 사각뿔의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 h 라 하자.



사각뿔의 밑면은 한 변의 길이가 x 인 정사각형이므로

$$\overline{PR} = \sqrt{2}x$$

구의 반지름의 길이를 r 라 하면

오른쪽 그림의 $\triangle OPH$ 에서

$$\overline{OP} = r, \overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{이므로}$$

$$\overline{OH} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\overline{OH} + \overline{OM} = \overline{MH} \text{에서}$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}x^2} + r = h$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}x^2} = h - r, r^2 - \frac{1}{2}x^2 = h^2 - 2hr + r^2$$

$$\therefore x^2 = 2(2hr - h^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

사각뿔의 부피를 V 라 하면

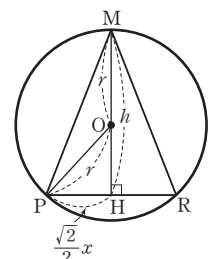
$$V = \frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3} \times 2(2hr - h^2)h$$

$$= \frac{2}{3}(-h^3 + 2rh^2)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{2}{3}(-3h^2 + 4rh)$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \text{에서 } -3h^2 + 4rh = 0$$

$$-3h\left(h - \frac{4}{3}r\right) = 0 \quad \therefore h = \frac{4}{3}r \quad (\because h > 0)$$



함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음 그림과 같다.

h	(0)	...	$\frac{4}{3}r$	...
$\frac{dV}{dh}$		+	0	-
V		↗	극대	↘

부피 V 는 $h=\frac{4}{3}r$ 일 때 극대이면서 최대이므로 사각뿔의

부피가 최대가 되려면 $h=\frac{4}{3}r$

$$x^2 = 2 \left\{ 2r \times \frac{4}{3}r - \left(\frac{4}{3}r \right)^2 \right\} (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{16}{9}r^2$$

에서 $x=\frac{4}{3}r$

한편, 구의 반지름의 길이 r 는 매초 2 cm의 비율로 증가하므로

$$r = 3 + 2t \text{ (cm)}$$

구의 반지름의 길이가 9 cm가 되는 시각은

$$3 + 2t = 9, 2t = 6 \quad \therefore t = 3$$

또한, $h=\frac{4}{3}(3+2t)$ (cm), $x=\frac{4}{3}(3+2t)$ (cm)이므로 사각뿔의 부피는

$$V = \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{4}{3}(3+2t) \right\}^2 \times \frac{4}{3}(3+2t) = \frac{64}{81}(3+2t)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{64}{81} \times 3(3+2t)^2 \times 2 = \frac{128}{27}(3+2t)^2$$

따라서 $t=3$ 일 때의 사각뿔의 부피의 변화율은

$$\frac{128}{27} \times 9^2 = 384 \text{ (cm}^3/\text{s)} \quad \text{답 } 384 \text{ cm}^3/\text{s}$$

이것이 수능

p. 57

1 ① 2 ② 3 ② 4 ⑤

1 해결단계

① 단계	두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이를 t 에 대한 함수로 나타낸다.
② 단계	① 단계에서 구한 함수를 미분하여 극값을 조사한다.
③ 단계	증감표를 이용하여 넓이의 최댓값을 구한다.

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 곡선 $y=x^2$ 위에 있으므로 두 대각선의 교점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면

$$E\left(t - \frac{1}{2}, t^2 + \frac{1}{2}\right)$$

또한, 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가

$(0, 1)$ 이므로 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

두 정사각형 내부의 공통부분의 가로, 세로의 길이는 각각

$$\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right) = 1 - t, \quad t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = t^2$$

이므로 공통부분의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (1-t) \times t^2 = -t^3 + t^2$$

$$S'(t) = -3t^2 + 2t = -t(3t-2)$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=\frac{2}{3}$$

$t \geq 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...
$S'(t)$	0	+	0	-
$S(t)$	0	↗	극대	↘

$t \geq 0$ 에서 함수 $S(t)$ 는 $t=\frac{2}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 공통부분의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

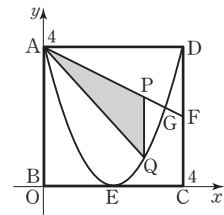
답 ①

2

해결단계

① 단계	주어진 정사각형을 좌표평면 위에 놓고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.
② 단계	직선 AF와 점 E를 꼭짓점으로 하고 두 점 A, D를 지나는 포물선의 방정식을 각각 구한 후, 교점 G의 좌표를 구한다.
③ 단계	두 점 P와 Q의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낸 후, 삼각형 AQP의 넓이를 구한다.
④ 단계	삼각형 AQP의 넓이의 최댓값을 구한다.

주어진 그림을 꼭짓점 B를 원점으로, 직선 BC를 x 축, 직선 BA를 y 축으로 하는 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



정사각형의 한 변의 길이가 4이고 선분 BC와 CD의 중점이 E, F이므로

$A(0, 4), C(4, 0), D(4, 4), E(2, 0), F(4, 2)$

직선 AF의 방정식은

$$y = \frac{2-4}{4-0}x + 4 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

점 E를 꼭짓점으로 하고 두 점 A, D를 지나는 포물선의 방정식은

$$y = a(x-2)^2 \text{ (단, } a > 0)$$

이 곡선이 점 $A(0, 4)$ 를 지나므로 $4 = 4a \quad \therefore a = 1$

즉, 포물선 $y = (x-2)^2$ 과 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 가 만나는

점의 x 좌표는

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{2}x + 4, \quad x^2 - \frac{7}{2}x = 0$$

$$x\left(x - \frac{7}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{7}{2}$$

즉, 점 G의 x 좌표는 $\frac{7}{2}$ 이다.

점 P의 x좌표를 t ($0 < t < \frac{7}{2}$)라 하면

$P(t, -\frac{1}{2}t+4)$, $Q(t, (t-2)^2)$ 이고, 삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times \left\{ \left(-\frac{1}{2}t+4 \right) - (t-2)^2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{4}(2t^3 - 7t^2)$$

$$S'(t) = -\frac{1}{4}(6t^2 - 14t) = -\frac{1}{2}t(3t-7)$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=\frac{7}{3} \quad (\because t>0)$$

함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	$\frac{7}{3}$	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗	극대	↘

함수 $S(t)$ 는 $t=\frac{7}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{1}{4} \left\{ 2 \times \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 7 \times \left(\frac{7}{3}\right)^2 \right\} = \frac{343}{108} \quad \text{답 ②}$$

3 해결단계

① 단계	조건 ㉞을 만족시키는 사차함수의 방정식을 경우를 나누어 미지수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	①단계에서 구한 각 경우에 따라 조건 ㉞을 만족시키는 미지수의 값의 범위를 구한 후, $f(1)$ 의 최댓값을 각각 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 $f(1)$ 의 값 중 최댓값을 찾는다.

조건 ㉞에서 음수 a 에 대하여

$$f(x) = ax^2(x-2)(x-3) \text{ 또는}$$

$$f(x) = ax(x-2)^2(x-3) \text{ 또는}$$

$$f(x) = ax(x-2)(x-3)^2 \text{이라 하면}$$

$$f(1) = 2a \text{ 또는 } f(1) = -2a \text{ 또는 } f(1) = -4a$$

(i) $f(x) = ax^2(x-2)(x-3)$ 인 경우

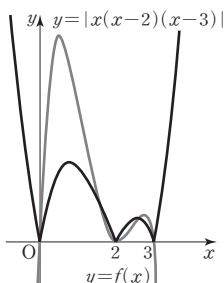
$$a < 0 \text{이므로 } f(1) = 2a < 0$$

(ii) $f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ 인 경우

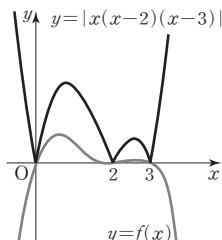
$$x < 0 \text{ 또는 } x > 3 \text{에서 } f(x) < |x(x-2)(x-3)| \text{이므로}$$

$$g(x) = f(x)$$

이때, 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 [그림 1]과 같으면 x좌표가 2인 점을 제외한 두 그래프의 교점에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 미분가능하지 않으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉, $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \leq |x(x-2)(x-3)|$ 이어야 한다.

① $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$f(x) \leq |x(x-2)(x-3)| \text{에서}$$

$$f(x) \leq x(x-2)(x-3)$$

$$ax(x-2)^2(x-3) \leq x(x-2)(x-3)$$

$$x(x-2)(x-3)\{a(x-2)-1\} \leq 0$$

$$a(x-2)-1 \leq 0, ax-2a-1 \leq 0$$

$$\therefore ax \leq 2a+1$$

$0 \leq x < 2$ 에서 위의 부등식이 항상 성립하려면 ax 의 값이 최대일 때 부등식이 성립하면 된다.

$a < 0$ 에서 ax 는 $x=0$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$0 \leq 2a+1 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{2}$$

② $2 < x \leq 3$ 일 때,

$$f(x) \leq |x(x-2)(x-3)| \text{에서}$$

$$f(x) \leq -x(x-2)(x-3)$$

$$ax(x-2)^2(x-3) \leq -x(x-2)(x-3)$$

$$x(x-2)(x-3)\{a(x-2)+1\} \leq 0$$

$$a(x-2)+1 \geq 0, ax-2a+1 \geq 0$$

$$\therefore ax \geq 2a-1$$

$2 < x \leq 3$ 에서 위의 부등식이 항상 성립하려면 ax 의 값이 최소일 때 부등식이 성립하면 된다.

$a < 0$ 에서 ax 는 $x=3$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$3a \geq 2a-1 \quad \therefore a \geq -1$$

$$\text{①, ②에서 } -\frac{1}{2} \leq a$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{이므로 } -\frac{1}{2} \leq a < 0$$

$$f(1) = -2a \text{이므로 } 0 < f(1) \leq 1$$

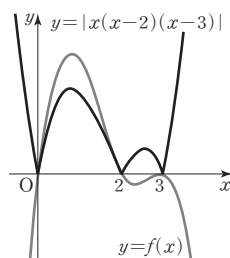
따라서 $f(1)$ 의 최댓값은 1이다.

(iii) $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2$ 인 경우

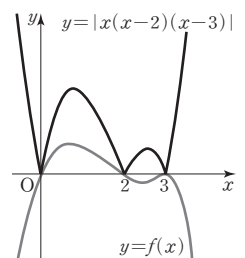
$x < 0$ 또는 $x > 2$ 에서 $f(x) \leq |x(x-2)(x-3)|$ 이므로

$$g(x) = f(x)$$

이때, 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 [그림 3]과 같으면 x좌표가 2와 3인 점을 제외한 두 그래프의 교점에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 미분가능하지 않으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 4]와 같아야 한다.



[그림 3]



[그림 4]

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } f(x) \leq |x(x-2)(x-3)|,$$

즉 $f(x) \leq x(x-2)(x-3)$ 이어야 한다.

$$ax(x-2)(x-3)^2 \leq x(x-2)(x-3)$$

$$x(x-2)(x-3)\{a(x-3)-1\} \leq 0$$

$$a(x-3)-1 \leq 0, ax-3a-1 \leq 0$$

$$\therefore ax \leq 3a+1$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 위의 부등식이 항상 성립하려면 ax 의 값이 최대일 때 부등식이 성립하면 된다.

$a < 0$ 에서 ax 는 $x=0$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$0 \leq 3a+1 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

$$\text{그런데 } a < 0 \text{이므로 } -\frac{1}{3} \leq a < 0$$

$$f(1) = -4a \text{이므로 } 0 < -4a \leq \frac{4}{3}$$

따라서 $f(1)$ 의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$ 의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다. 답 ②

4 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 삼차함수 $f(x)$ 를 미지수를 이용하여 나타낸다.
② 단계	$g(x) = f(x) - f'(x)$ 로 놓은 후, $x \geq -1$ 에서 부등식 $g(x) \geq 0$ 이기 위한 조건을 찾는다.
③ 단계	$f(2)$ 의 최솟값을 구한다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고, 조건 (나)에서 $f(0) = f'(0)$ 이므로

$$c = b$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + bx + b$$

조건 (다)에서 $x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f'(x), \text{ 즉 } f(x) - f'(x) \geq 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = f(x) - f'(x) \text{라 하면}$$

$$g(x) = (x^3 + ax^2 + bx + b) - (3x^2 + 2ax + b) \\ = x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2(a-3)x + (b-2a)$$

이때, $g(0) = 0$ 이므로 조건 (다)를 만족시키기 위해서는 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극솟값을 가져야 한다.

즉, $g'(0) = 0$ 이어야 하므로

$$g'(0) = b - 2a = 0 \quad \therefore b = 2a$$

$$\therefore g(x) = x^3 + (a-3)x^2$$

또한, $g(-1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$g(-1) = -1 + a - 3 \\ = a - 4 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 4$$

따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 2a$ ($a \geq 4$)이므로

$$f(2) = 8 + 4a + 4a + 2a \\ = 10a + 8$$

$$\geq 10 \times 4 + 8 = 48$$

즉, 구하는 최솟값은 48이다. 답 ⑤

III 적분

06 정적분

Step 1

출제율 100% 우수 기출 대표 문제

pp. 61~62

01 ⑤

02 6

03 ③

04 ④

05 1

06 ⑤

07 ⑤

08 ①

09 20

10 70

11 ②

12 49

13 ②

14 8

15 ③

16 ③

01 $f(x) = \int xg(x)dx$ 에서 $f'(x) = xg(x)$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 4x^3 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\therefore xg(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x \quad \dots\dots ⑦$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로 $g(x) = 4x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g'(x) = 8x + a \text{이므로 } ⑦ \text{에서}$$

$$x(4x^2 + ax + b) - (8x + a) = 4x^3 + 2x$$

$$4x^3 + ax^2 + (b-8)x - a = 4x^3 + 2x$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 0, b - 8 = 2 \text{에서 } a = 0, b = 10$$

따라서 $g(x) = 4x^2 + 10$ 이므로

$$g(1) = 4 + 10 = 14$$

답 ⑤

02 $f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(8x - x^2) \right\} dx$

$$= 8x - x^2 + C$$

$$= -(x^2 - 8x + 16) + 16 + C$$

$$= -(x-4)^2 + 16 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 10이므로

$$16 + C = 10 \text{에서 } C = -6$$

따라서 $f(x) = -x^2 + 8x - 6$ 이므로

$$f(2) = -4 + 16 - 6 = 6$$

답 6

03 $f(x) = \int f'(x)dx$ 이므로 $f'(x) = \begin{cases} 4x & (x < 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + C_1 & (x < 1) \\ x + C_2 & (x \geq 1) \end{cases} \quad (\text{단, } C_1, C_2 \text{는 적분상수})$$

이때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$f(0) = C_1 = 1$$

또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + C_2) = 1 + C_2$$

$$1 + C_2 = 3 \quad \therefore C_2 = 2$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & (x < 1) \\ x + 2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-2) = 8 + 1 = 9, f(2) = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore f(-2) + f(2) = 9 + 4 = 13$$

답 ③

- 04** 조건 ④에서 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$ 이므로 이 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
- $$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots ①$$
- 한편, 조건 ④에서 $f'(0) = 1$ 이므로

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) + 0 - f(0)}{h} \quad (\because \text{조건 ④})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1 \quad \dots\dots ②$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 3xh - f(x)}{h} \quad (\because \text{조건 ④})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 3xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ 3x + \frac{f(h)}{h} \right\}$$

$$= 3x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 3x + 1 \quad (\because ②)$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x + 1) dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

①에서 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$$

$$\therefore f(4) = 24 + 4 = 28$$

답 ④

- 05** 주어진 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 x 축과의 교점의 x 좌표가 $-3, 1$ 이고, 아래로 볼록한 포물선이므로 이차함수 $f'(x)$ 를
- $$f'(x) = a(x+3)(x-1) = a(x^2 + 2x - 3) \quad (\text{단, } a > 0)$$
- 이라 할 수 있다.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \frac{1}{3}ax^3 + ax^2 - 3ax + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 5 를 갖고, $x = 1$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$f(-3) = -9a + 9a + 9a + C = 5 \text{에서}$$

$$9a + C = 5 \quad \dots\dots ⑦$$

$$f(1) = \frac{1}{3}a + a - 3a + C = -3 \text{에서}$$

$$-\frac{5}{3}a + C = -3 \quad \dots\dots ⑧$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{4}, C = -\frac{7}{4}$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{7}{4}$$

$$\therefore f(-1) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = 1$$

답 1

06 $f(n) = \int_0^1 \frac{1}{n} x^n dx = \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{100} f(n) = \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

답 ⑤

07 $\int_2^4 \frac{x^2(x^2 + 2x + 4)}{x+2} dx + \int_4^2 \frac{4(y^2 + 2y + 4)}{y+2} dy$

$$= \int_2^4 \frac{x^2(x^2 + 2x + 4)}{x+2} dx - \int_2^4 \frac{4(x^2 + 2x + 4)}{x+2} dx$$

$$= \int_2^4 \left\{ \frac{x^2(x^2 + 2x + 4)}{x+2} - \frac{4(x^2 + 2x + 4)}{x+2} \right\} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x + 4)}{x+2} dx$$

$$= \int_2^4 \frac{(x+2)(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x+2} dx$$

$$= \int_2^4 (x-2)(x^2 + 2x + 4) dx$$

$$= \int_2^4 (x^3 - 8) dx$$

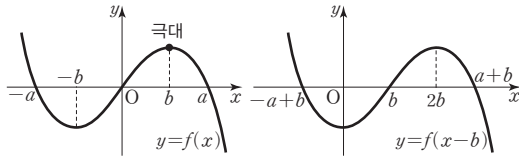
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 8x \right]_2^4$$

$$= (64 - 32) - (4 - 16)$$

$$= 32 - (-12) = 44$$

답 ⑤

- 08** $f(x) = -x(x+a)(x-a) \quad (a > 0)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-a, 0, a$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 극대이므로 $0 < b < a$ 이다.
- 이때, 함수 $y = f(x-b)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y = f(x), y = f(x-b)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-b}^a f(x) dx, \\
 B &= \int_b^{a+b} f(x-b) dx = \int_0^a f(x) dx \text{ 이므로} \\
 A-B &= \int_{-b}^a f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = \int_{-b}^0 f(x) dx \\
 \therefore \int_{-b}^a |f(x)| dx &= \int_{-b}^0 \{-f(x)\} dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= -\int_{-b}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= -(A-B) + B \\
 &= -A + 2B
 \end{aligned}$$

답 ①

09 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이고, $xf(x)$ 는 우함수, $x^2f(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
 \text{즉, } \int_{-1}^1 xf(x) dx &= 2 \int_0^1 xf(x) dx, \\
 \int_{-1}^1 x^2f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \text{ 이다.} \\
 \therefore \int_{-1}^1 (x-1)(x+2)f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (x^2+x-2)f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 x^2f(x) dx + \int_{-1}^1 xf(x) dx - 2 \int_{-1}^1 f(x) dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^1 xf(x) dx - 0 \\
 &= 2 \times 10 \quad (\because \text{조건 (나)}) \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

답 20

blacklabel 특강 필수 원리

기함수와 우함수의 곱

(기함수) $\times$ (기함수) = (우함수)
 (우함수) $\times$ (기함수) = (기함수)
 (우함수) $\times$ (우함수) = (우함수)

10 조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(2-x) = f(2+x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}
 \text{이때, 조건 (나)에서 } \int_2^3 f(x) dx &= 5 \text{ 이므로} \\
 \int_2^3 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx = 5 \\
 \therefore \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 10 \\
 \text{한편, 조건 (나)에서 모든 실수 } x \text{에 대하여} \\
 f(x+2) &= f(x) \text{ 이므로 } f(x) \text{는 주기가 2인 주기함수이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-3}^{-1} f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx \\
 &= \dots = \int_9^{11} f(x) dx = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-3}^{11} f(x) dx \\
 &= \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \dots + \int_9^{11} f(x) dx \\
 &= 7 \int_1^3 f(x) dx = 7 \times 10 = 70
 \end{aligned}$$

답 70

11 $\int_0^1 f(t) dt = k$ (단, k 는 상수) ㉠

로 놓으면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2 - 4x + 2 \int_0^1 f(t) dt \\
 &= 3x^2 - 4x + 2k
 \end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (3t^2 - 4t + 2k) dt \\
 &= \left[t^3 - 2t^2 + 2kt \right]_0^1 \\
 &= 1 - 2 + 2k \\
 &= 2k - 1 = k
 \end{aligned}$$

$$\therefore k = 1$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $3x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 ②

12 $\int_1^x f(t) dt = x^4 - 2x + a$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - 2 + a \quad \therefore a = 1$$

$\int_1^x f(t) dt = x^4 - 2x + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4x^3 - 2$$

따라서 $f'(x) = 12x^2$ 이므로

$$f'(2) + a = 12 \times 4 + 1 = 48 + 1 = 49$$

답 49

13 주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과의 교점의 x 좌표는 1, 5이고, 위로 볼록한 포물선이므로 이차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = a(x-1)(x-5)$ ($a < 0$)라 할 수 있다.

$g(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f(x+2) - f(x) \\
 &= a(x+1)(x-3) - a(x-1)(x-5) \\
 &= a\{(x^2 - 2x - 3) - (x^2 - 6x + 5)\} \\
 &= a(4x - 8) = 4a(x - 2)
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x = 2$$

$a < 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $g(2)$ 이다. **답 ②**

• 다른풀이 •

$\int_x^{x+2} f(t) dt$ 의 값은 $f(t) \geq 0$ 이면 양수(+), $f(t) < 0$ 이면 음수(-)이고, 그 절댓값은 함수 $y=f(t)$ 의 그래프와 두 직선 $t=x$, $t=x+2$ 및 t 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

따라서 함수 $g(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt$ 가 최대하려면

$f(t) \geq 0$ 이면서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프와 두 직선 $t=x$, $t=x+2$ 및 t 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최대이어야 한다.

이때, 주어진 그래프에서 함수 $y=f(t)$ 는 $t=3$ 에 대하여 대칭인 이차함수이므로 $t=3$ 일 때 최댓값을 갖고 $1 \leq t \leq 5$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이다.

즉, 두 직선 $t=x$, $t=x+2$ 가 직선 $t=3$ 에 대하여 대칭이면 구하는 넓이가 최대가 되므로

$$\frac{x+x+2}{2} = 3 \text{에서 } x=2$$

그러므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값은 $g(2)$ 이다.

14 $\int_0^x |t-2| dt = 2x$ 에서

(i) $x < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \int_0^x |t-2| dt &= \int_0^x (-t+2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x = 2x \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \therefore x=0$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \int_0^x |t-2| dt &= \int_0^2 (-t+2) dt + \int_2^x (t-2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_2^x \\ &= (-2+4) + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) - (2-4) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = 2x \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0, \quad x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\therefore x = 4 + 2\sqrt{2} \quad (\because x \geq 2)$$

(i), (ii)에서 양수인 실근은 $x = 4 + 2\sqrt{2}$ 이므로 $m=4$, $n=2$

$$\therefore mn = 4 \times 2 = 8$$

답 8

blacklabel 특강 오답피하기

주어진 등식 $\int_0^x |t-2| dt = 2x$ 는 방정식이므로 양변을 x 에 대하여 미분하여 $|x-2| = 2$ 로 풀면 안 된다.
이때, 양변을 x 에 대하여 미분하여 풀려면 주어진 등식이 항등식이어야 함에 주의하자.

15 $\int_2^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ 에서

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 6x^2 - 6x - 12$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x - 6$$

$$\therefore f(2) = 24 - 6 = 18$$

답 ③

16 $F'(x) = f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \left[F(t) \right]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} (12+6-2) \\ &= \frac{1}{4} \times 16 = 4 \end{aligned}$$

답 ③

Step 2

1등급을 위한 최고의 변별력 문제

pp. 63~67

01 -10	02 ⑤	03 ②	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 ③	08 ⑤	09 $\frac{17}{3}$	10 3
11 14	12 ⑤	13 $\frac{3}{2}$	14 ④	15 19
16 167	17 5	18 ④	19 3	20 2
21 ⑤	22 72	23 ①	24 70	25 ③
26 50	27 -4	28 8	29 -23	30 $\frac{17}{27}$
31 2	32 ⑤	33 ⑤		

01 $F'(x) = f(x)$ 이므로 $F(x) = xf(x) - 4x^2(x+1)$ 의

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 8x(x+1) - 4x^2$$

$$xf'(x) = 12x^2 + 8x \quad \therefore f'(x) = 12x + 8$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x + 8) dx$$

$$= 6x^2 + 8x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $f(1)=6$ 이므로

$$6+8+C=6 \quad \therefore C=-8$$

따라서 $f(x)=6x^2+8x-8$ 이므로

$$f(-1)=6-8-8=-10$$

답 -10

02 $\int \{f(x)-2g(x)\} dx = f(x) + g(x)$ 에서

$$f(x)-2g(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$2g(x)+g'(x)=f(x)-f'(x)$$

$f(x)=2x^2+4x+3$ 에서 $f'(x)=4x+4$ 이므로

$$2g(x)+g'(x)=2x^2-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, $g(x)$ 는 x^2 의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g'(x)=2x+a$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$2x^2+(2a+2)x+2b+a=2x^2-1$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2a+2=0, 2b+a=-1$$

$$\therefore a=-1, b=0$$

따라서 $g(x)=x^2-x$ 이므로

$$g(4)=16-4=12$$

답 ⑤

•다른풀이•

$$\int \{f(x)-2g(x)\} dx = f(x) + g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

다항함수 $g(x)$ 의 차수를 n 이라 하자.

$n > 2$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 좌변의 차수는 $n+1$, 우변의 차수는 n 이 되어 모순이고,

$n < 2$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 좌변의 차수는 3, 우변의 차수는 2가 되어 모순이다.

즉, $n=2$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x)-2g(x)$ 는 일차식이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)이다.

$$\int \{f(x)-2g(x)\} dx = \int \{(4-2a)x + (3-2b)\} dx$$

$$= (2-a)x^2 + (3-2b)x + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$f(x)+g(x)=3x^2+(a+4)x+(b+3)$$

이고 $\textcircled{1}$ 은 x 에 대한 항등식이므로

$$2-a=3, 3-2b=a+4, C=b+3$$

$$\therefore a=-1, b=0, C=3$$

따라서 $g(x)=x^2-x$ 이므로

$$g(4)=16-4=12$$

03 $f(x)$ 가 이차함수이고 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$ 이므로 $g(x)$ 도 이차함수이다.

이때, $g(x)=\int \{x^2+f(x)\} dx$ 이므로 $x^2+f(x)$ 는

일차함수이다.

즉, $x^2+f(x)=ax+b$ ($a \neq 0, a, b$ 는 상수) $\cdots \cdots \textcircled{1}$

라 하면

$$g(x)=\int \{x^2+f(x)\} dx$$

$$=\int (ax+b) dx$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

또한, $\textcircled{1}$ 에서 $f(x)=-x^2+ax+b$ 이므로

$$f(x)g(x)=(-x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$$

$$=-\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}-b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab-C\right)x^2$$

$$+(aC+b^2)x+bC$$

그런데 $f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$ 이므로

$$-\frac{a}{2}=-2, \frac{a^2}{2}-b=8, \frac{3}{2}ab-C=0,$$

$$aC+b^2=0, bC=0$$

$$\therefore a=4, b=0, C=0$$

따라서 $g(x)=2x^2$ 이므로 $g(1)=2$

답 ②

04 $f(x)=x(x+6)^5=\{(x+6)-6\}(x+6)^5$ $= (x+6)^6-6(x+6)^5$

$$\therefore F(x)=\int f(x) dx$$

$$=\int \{(x+6)^6-6(x+6)^5\} dx$$

$$=\int (x+6)^6 dx - \int 6(x+6)^5 dx$$

$$=\frac{1}{7}(x+6)^7-(x+6)^6+C$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $F(-7)=-1$ 이므로

$$-\frac{1}{7}-1+C=-1 \quad \therefore C=\frac{1}{7}$$

따라서 $F(x)=\frac{1}{7}(x+6)^7-(x+6)^6+\frac{1}{7}$ 이므로

$$F(-5)=\frac{1}{7}-1+\frac{1}{7}=-\frac{5}{7}$$

답 ①

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 학교시험, 수능, 모의평가에서 보기 어려웠던 새로운 유형의 문제로 새로운 관점에서 풀어 볼 수 있다.

이 문제에서 $(x+6)^5$ 은 전개하기 어렵지만 함수 $f(x)$ 가 6차식이므로 함수 $F(x)$ 는 7차식, 즉

$F(x)=(x+6)^6(ax+b)+c$ (a, b, c 는 상수)라 할 수 있다.

이때, $F'(x)=f(x)$ 에서 $(x+6)^5\{7ax+6(a+b)\}=x(x+6)^5$ 이

므로 $a=\frac{1}{7}, b=-\frac{1}{7}$ 이고, $F(-7)=-1$ 에서 $c=\frac{1}{7}$ 이다.

따라서 $F(x)=\frac{1}{7}(x+6)^6(x-1)+\frac{1}{7}$ 이므로

$$F(-5)=-\frac{5}{7}$$

05 조건 (가)에서 모든 실수 x, y 에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 이므로 이 식의 양변에

$x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - 1 - f(x)}{h} \quad (\because \text{조건 } \textcircled{a}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1 + 2xh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - 1}{h} + 2x \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} + 2x \right\} \quad (\because f(0) = 1) \\
 &= f'(0) + 2x \\
 \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int \{2x + f'(0)\} dx = x^2 + f'(0)x + C \\
 &\quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

이때, $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

즉, $f(x) = x^2 + f'(0)x + 1$, $f'(x) = 2x + f'(0)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{x^2 + f'(0)x + 1\} - \{2x + f'(0)\}}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \{f'(0) - 2\}x + 1 - f'(0)}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{x + f'(0) - 1\}}{(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + f'(0) - 1}{x + 1} \\
 &= \frac{f'(0)}{2} = 9 \quad (\because \text{조건 } \textcircled{b}) \\
 \therefore f'(0) &= 9 \times 2 = 18
 \end{aligned}$$

답 ④

06 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy \quad \dots\dots \textcircled{1}$

①의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 4xh - f(x)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4xh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 4x \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + 4x \right\} \quad (\because f(0) = 0) \\
 &= 4x + f'(0) \\
 f'(0) &= k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면 } f'(x) = 4x + k \text{이므로} \\
 F(x) &= \int (x-2)f'(x) dx \\
 &= \int (x-2)(4x+k) dx
 \end{aligned}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = (x-2)(4x+k) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때, 함수 $F(x)$ 의 극값이 존재하지 않으므로 이차방정식 $F'(x) = 0$ 은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

그런데 ②에서 방정식 $F'(x) = 0$ 의 한 근이 2이므로 방정식 $4x+k=0$ 의 근도 2이어야 한다.

$$\therefore k = -8 = f'(0)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x-8) dx \\
 &= 2x^2 - 8x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

이때, $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 8x$ 이므로

$$f(5) = 50 - 40 = 10$$

답 ⑤

07 $f(x)$ 가 삼차함수이므로 $f'(x)$ 는 이차함수이다.

도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 x 축과의 교점의 x 좌표가

$-2, 2$ 이고, 위로 볼록한 포물선이므로

$$f'(x) = a(x+2)(x-2) \quad (\text{단, } a < 0)$$

라 할 수 있다.

이때, 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$f'(0) = 3 \text{에서 } -4a = 3 \quad \therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } f'(x) = -\frac{3}{4}(x+2)(x-2) = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3 \right) dx \\
 &= -\frac{1}{4}x^3 + 3x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$$

$$\text{방정식 } f(x) = kx \text{에서 } -\frac{1}{4}x^3 + 3x = kx$$

$$x^3 + 4(k-3)x = 0, \quad x\{x^2 + 4(k-3)\} = 0$$

위의 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 이차 방정식 $x^2 + 4(k-3) = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = -16(k-3) > 0, \quad 4(k-3) \neq 0$$

$$\therefore k < 3$$

답 ③

08 $f(0) = 0, f(a) = 0, f'(a) = 0$ 이므로

$$f(x) = x(x-a)^2$$

조건 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f(x) + xf'(x) = \{xf(x)\}' \\
 &= \{x^2(x-a)^2\}' \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore g(x) &= \int g'(x) dx = \int \{x^2(x-a)^2\}' dx \\
 &= x^2(x-a)^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

또한, ㉠에서

$$g'(x) = 2x(x-a)^2 + 2x^2(x-a) \\ = 2x(x-a)(2x-a)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{2} \text{ 또는 } x=a$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{a}{2}$	...	a	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=0, a$ 일 때 극솟값을 갖고, $x=\frac{a}{2}$ 일 때 극댓값을 가지므로 조건 ㉠에 의하여

$$g(0) = g(a) = 0 \text{에서 } C=0$$

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = 81 \text{에서 } \frac{a^4}{16} = 81, a^4 = 6^4$$

$$\therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2(x-6)^2 \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = g(2) = 2^2 \times (-4)^2 = 64$$

답 ⑤

•다른풀이•

$$f(x) = x(x-a)^2 \text{이므로}$$

$$f'(x) = (x-a)^2 + 2x(x-a)$$

$$\therefore g'(x) = f(x) + xf'(x) \\ = x(x-a)^2 + x(x-a)^2 + 2x^2(x-a) \\ = 2x(x-a)(2x-a) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{2} \text{ 또는 } x=a$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=0, x=a$ 일 때 극솟값 0을 갖고, $x=\frac{a}{2}$ 일 때 극댓값 81을 갖는다.

$$\therefore g\left(\frac{a}{2}\right) = 81, g(0) = g(a) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

한편, ㉡에서 $g'(x) = 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x$ 이므로

$$g(x) = x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\therefore C=0, a=6 \quad (\because \textcircled{B})$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2(x-6)^2 \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = g(2) = 64$$

09 $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 8x = 4x(x+1)(x-2)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

즉, 사차함수 $f(x)$ 는 $x=-1, 2$ 일 때 극솟값을 갖고, $x=0$ 일 때 극댓값을 갖는다.

이때,

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (4x^3 - 4x^2 - 8x) dx$$

$$= x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(-1) = -\frac{5}{3} + C, f(0) = C, f(2) = -\frac{32}{3} + C$$

$$\therefore f(2) < f(-1) < f(0)$$

한편, 함수 $g(x)$ 가 두 조건 ㉢, ㉣를 모두 만족시키면서 세 점 $A(a, g(a)), B(\beta, g(\beta)), C(\gamma, g(\gamma))$ 가 한 직선 위에 있으려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.

$$(i) f(-1) < 2 < f(0), \text{ 즉 } 2 < C < \frac{11}{3} \text{일 때,}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$g(-1) < g(0) < g(2) \text{이어야}$$

하므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이

때, 세 점 $A\left(-1, \frac{11}{3}-C\right),$

$$B(0, -2+C), C\left(2, \frac{38}{3}-C\right) \text{에 대하여}$$

(직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기)이므로

$$\frac{(-2+C) - \left(\frac{11}{3}-C\right)}{0 - (-1)} = \frac{\left(\frac{38}{3}-C\right) - (-2+C)}{2-0}$$

$$2\left(2C - \frac{17}{3}\right) = \frac{44}{3} - 2C$$

$$4C - \frac{34}{3} = \frac{44}{3} - 2C, 6C = 26 \quad \therefore C = \frac{13}{3}$$

그런데 $2 < C < \frac{11}{3}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) f(2) < 2 < f(-1), \text{ 즉 } \frac{11}{3} < C < \frac{38}{3} \text{일 때,}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$g(-1) < g(0) < g(2) \text{이어}$$

야 하므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이때,

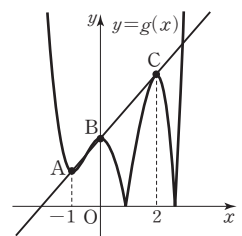
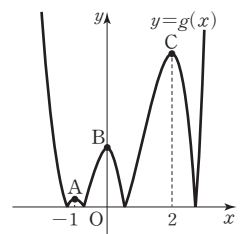
세 점 $A\left(-1, -\frac{11}{3}+C\right), B(0, -2+C),$

$$C\left(2, \frac{38}{3}-C\right) \text{에 대하여}$$

(직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기)이므로

$$\frac{(-2+C) - \left(-\frac{11}{3}+C\right)}{0 - (-1)} = \frac{\left(\frac{38}{3}-C\right) - (-2+C)}{2-0}$$

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{44}{3} - 2C, 2C = \frac{34}{3} \quad \therefore C = \frac{17}{3}$$



(i), (ii)에서 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{17}{3}$ 이므로

$$f(0) = \frac{17}{3}$$

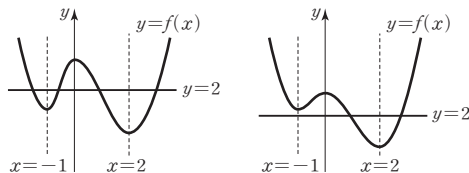
답 $\frac{17}{3}$

blacklabel 특강 참고

절댓값 기호를 포함한 함수 $|f(x)|$ 의 극대 또는 극소인 점은 함수 $f(x)$ 의 극대 또는 극소인 점과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점에서 존재할 수 있고, x 축과 만나는 점에서 극값을 갖는 경우 뾰족한 점이 된다.

그런데 함수 $g(x) = |f(x) - 2|$ 가 조건 ㉞에서 $x=a, \beta, \gamma$ 에서 극값을 갖고 조건 ㉝에서 $g(a) \neq 0, g(\beta) \neq 0, g(\gamma) \neq 0$ 이므로 $x=a, \beta, \gamma$ 인 점에서 함수 $g(x)$ 는 뾰족한 점이 아닌 극대 또는 극소인 점을 갖는다. 즉, 이 점에서 함수 $f(x)$ 도 극값을 가져야 하고 방정식 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1, 0, 2$ 이므로 $a=-1, \beta=0, \gamma=2$ 이다.

한편, 함수 $g(x) = |f(x) - 2|$ 의 그래프 위의 세 극점 $A(-1, g(-1)), B(0, g(0)), C(2, g(2))$ 가 한 직선 위에 있으므로 $g(-1) < g(0) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(0) < g(-1)$ 이어야 한다. 즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 위치 관계는 다음 그림의 두 가지 경우 중 하나이다.



10 조건 ㉞에서 $\int_0^4 |f(x)| dx = \int_0^4 f(x) dx$ 이므로

$$\text{단한구간 } [0, 4] \text{에서 } f(x) \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, 조건 ㉝에서 } \int_4^6 |f(x)| dx = -\int_4^6 f(x) dx$$

$$\text{이므로 단한구간 } [4, 6] \text{에서 } f(x) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

함수 $f(x)$ 가 연속이므로 ㉠, ㉡에서 $f(4)=0$

한편, $f(x)$ 는 $f(0)=0$ 인 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하면 $f(4)=0$ 에서 $16a+4b=0$

$$\therefore b = -4a$$

$$\therefore f(x) = ax^2 - 4ax$$

$$\text{또한, 조건 ㉝에서 } \int_4^6 f(x) dx = -8 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_4^6 f(x) dx &= \int_4^6 (ax^2 - 4ax) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 \right]_4^6 \\ &= (72a - 72a) - \left(\frac{64}{3}a - 32a \right) \\ &= \frac{32}{3}a = -8 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \text{이므로}$$

$$f(2) = -3 + 6 = 3$$

답 3

$$\mathbf{11} \quad \int 2xf(x) dx + \int x^2 f'(x) dx$$

$$= \int \{2xf(x) + x^2 f'(x)\} dx$$

$$= \int \{x^2 f(x)\}' dx$$

$$= x^2 f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이므로 주어진 등식은

$$x^2 f(x) + C = x^4 - ax^3 + 4x^2$$

이때, $f(x)$ 가 다항함수이므로 $C=0$

$$x^2 f(x) = x^4 - ax^3 + 4x^2$$

$$\therefore f(x) = x^2 - ax + 4$$

$$\int_0^4 (x^2 - ax + 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + 4x \right]_0^4$$

$$= \frac{64}{3} - 8a + 16$$

$$= \frac{112}{3} - 8a = 0$$

$$8a = \frac{112}{3} \quad \therefore a = \frac{14}{3}$$

$$\therefore 3a = 3 \times \frac{14}{3} = 14$$

답 14

• 다른풀이 •

주어진 등식

$$\int 2xf(x) dx + \int x^2 f'(x) dx = x^4 - ax^3 + 4x^2$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 8x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $f(x)$ 는 다항함수이므로 이차함수이고

$f(x) = bx^2 + cx + d$ (b, c, d 는 상수, $b \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2bx + c \text{이므로}$$

$$2x(bx^2 + cx + d) + x^2(2bx + c) = 4x^3 - 3ax^2 + 8x$$

$$4bx^3 + 3cx^2 + 2dx = 4x^3 - 3ax^2 + 8x$$

위의 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$4b = 4, 3c = -3a, 2d = 8$$

$$\therefore b = 1, c = -a, d = 4$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - ax + 4 \text{이므로 } \int_0^4 f(x) dx = 0 \text{에}$$

대입하면

$$\int_0^4 (x^2 - ax + 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + 4x \right]_0^4$$

$$= \frac{112}{3} - 8a = 0$$

$$\therefore a = \frac{14}{3} \quad \therefore 3a = 14$$

12 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 의하여 단한구간

$[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

x	0	...	1	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	$-\frac{28}{27}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

$$\begin{aligned}
 |f'(x)| &= \begin{cases} f'(x) & (0 \leq x < 1) \\ -f'(x) & (1 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_0^4 |f'(x)| dx &= \int_0^1 f'(x) dx + \int_1^4 \{-f'(x)\} dx \\
 &= \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^4 f'(x) dx \\
 &= [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^4 \\
 &= \{f(1) - f(0)\} - \{f(4) - f(1)\} \\
 &= 2f(1) - f(0) - f(4) \\
 \text{이때, } f(0) &= -\frac{28}{27}, \text{ } f(1) = 1, \text{ } f(4) = -4 \text{이므로} \\
 27 \int_0^4 |f'(x)| dx &= 27 \{2f(1) - f(0) - f(4)\} \\
 &= 27 \left\{ 2 \times 1 - \left(-\frac{28}{27} \right) - (-4) \right\} \\
 &= 190 \quad \text{답 ⑤}
 \end{aligned}$$

• 다른풀이 •

$f(x)$ 가 삼차함수이므로 도함수 $f'(x)$ 는 이차함수이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값, $x=4$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(x) = a(x-1)(x-4) = a(x^2 - 5x + 4) \quad (\text{단, } a > 0)$$

라 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int a(x^2 - 5x + 4) dx \\
 &= a \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})
 \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f(0) = -\frac{28}{27} \text{이므로 } C = -\frac{28}{27} \text{이고, } f(1) = 1 \text{이므로}$$

$$a \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) - \frac{28}{27} = 1, \quad \frac{11}{6}a = \frac{55}{27}$$

$$\therefore a = \frac{55}{27} \times \frac{6}{11} = \frac{10}{9}$$

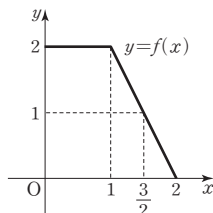
$$\therefore f'(x) = \frac{10}{9}(x^2 - 5x + 4)$$

따라서 $0 \leq x < 1$ 에서 $f'(x) > 0$, $1 \leq x \leq 4$ 에서

$f'(x) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 27 \int_0^4 |f'(x)| dx &= 27 \times \frac{10}{9} \left\{ \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx - \int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx \right\} \\
 &= 30 \left(\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \right) \\
 &= 30 \left\{ 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) - \left(\frac{64}{3} - 40 + 16 \right) \right\} \\
 &= 190
 \end{aligned}$$

13



위의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 1) \\ -2x + 4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(f(x)) &= \begin{cases} 2 & (0 \leq f(x) < 1) \\ -2f(x) + 4 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -2 \times 2 + 4 & (0 \leq x < 1) \\ -2(-2x + 4) + 4 & (1 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ 2 & (\frac{3}{2} < x \leq 2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 4x - 4 & (1 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ 2 & (\frac{3}{2} < x \leq 2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

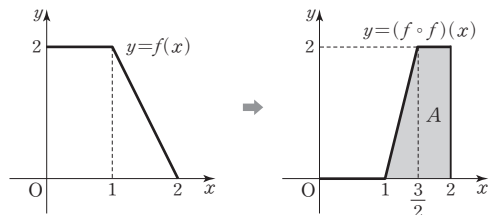
$$\therefore \int_0^2 f(f(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 0 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (4x - 4) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 2 dx \\
 &= \left[2x^2 - 4x \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[2x \right]_{\frac{3}{2}}^2 \\
 &= \left\{ -\frac{3}{2} - (-2) \right\} + (4 - 3) \\
 &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

함수의 합성으로 생기는 새로운 함수의 그래프를 직관적으로 이해하는 것도 수능, 모의평가 문제를 푸는 데 중요하다. x 의 값의 움직임에 따른 함수값 $f(x)$ 의 움직임을 다시 x 의 값의 움직임에 대입하면 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 값의 움직임을 얻을 수 있다.

한편, 정적분은 함수의 그래프에서 영역의 넓이와 관계가 있음을 항상 기억하고 있어야 한다. 실제로 정적분 $\int_0^2 f(f(x)) dx$ 의 값은 함수 $y=(f \circ f)(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이다. 따라서 구하는 값은 A 의 넓이인 $\frac{3}{2}$ 이다.



14 (i) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^2 |t-x| dt \\
 &= \int_0^x (x-t) dt + \int_x^2 (t-x) dt \\
 &= \left[xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_x^2 \\
 &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) + (2-2x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 \right) \\
 &= x^2 - 2x + 2
 \end{aligned}$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^2 |t-x| dt \\ &= \int_0^2 (x-t) dt \\ &= \left[xt - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 2x - 2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_2^4 (2x - 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[x^2 - 2x \right]_2^4 \\ &= \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

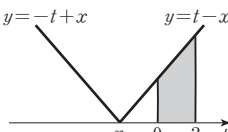
답 ④

• 다른풀이 •

$g(t) = |t-x|$ 라 하면 $f(x)$ 는 함수 $y=g(t)$ 의 그래프와 두 직선 $t=0$, $t=2$ 및 t 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

(i) $x < 0$ 일 때,

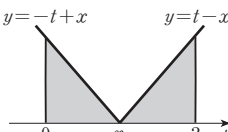
$f(x)$ 는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(-x+2-x) \times 2 \\ &= -2x+2 \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

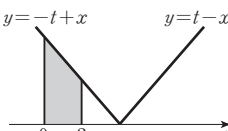
$f(x)$ 는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times x \times x \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (2-x)^2 \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$f(x)$ 는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times (x-2+x) \times 2 \\ &= 2x-2 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_2^4 (2x - 2) dx \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

15 $f(x) = x^2 - 2|x-t|$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} x^2 + 2x - 2t & (x < t) \\ x^2 - 2x + 2t & (x \geq t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x+1)^2 - 2t - 1 & (x < t) \\ (x-1)^2 + 2t - 1 & (x \geq t) \end{cases} \end{aligned}$$

t 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 의 최댓값 $g(t)$ 를 구하면 다음과 같다.

(i) $t < -1$ 일 때,

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$ 일 때 최댓값을 갖는다. 즉,

$$g(t) = f(-1) = 2t + 3$$

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ 일 때,

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=t$ 일 때 최댓값을 갖는다. 즉,

$$g(t) = f(t) = t^2$$

(iii) $t > 1$ 일 때,

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$ 일 때 최댓값을 갖는다. 즉,

$$g(t) = f(1) = -2t + 3$$

(i), (ii), (iii)에서

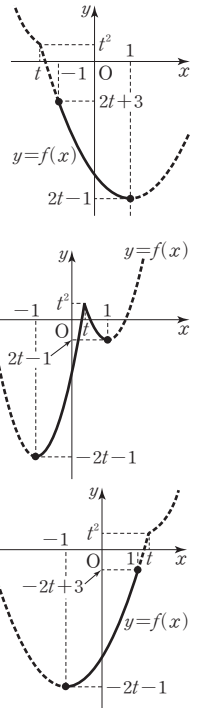
$$g(t) = \begin{cases} 2t+3 & (t < -1) \\ t^2 & (-1 \leq t \leq 1) \\ -2t+3 & (t > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} g(t) dt &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^{\frac{3}{2}} (-2t+3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 + \left[-t^2 + 3t \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} + \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) - (-1+3) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

따라서 $p=12$, $q=7$ 이므로

$$p+q=12+7=19$$

답 19



16 조건 (나)에서 $n=0$, $n=1$ 일 때, $3 \leq x \leq 6$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 지나가는 점의 좌표는

$(3, 7)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$, $(6, 13)$

이때, 두 점 $(3, 7)$, $(4, 8)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{8-7}{4-3} = 1 \text{이고, 조건 (가)에서 } f'(x) \geq 1 \text{이므로 } 3 < t < 4 \text{를}$$

만족시키는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(t, f(t))$ 에 대해 평균값 정리에 의하여

(i) $\frac{f(t)-f(3)}{t-3} \geq 1$ 에서 $f(t)-f(3) \geq t-3$

$$f(t) \geq t-3+f(3)$$

$$\therefore f(t) \geq t+4 \quad (\because f(3)=7)$$

(ii) $\frac{f(4)-f(t)}{4-t} \geq 1$ 에서 $f(4)-f(t) \geq 4-t$

$$f(t) \leq t+f(4)-4$$

$$\therefore f(t) \leq t+4 \quad (\because f(4)=8)$$

(i), (ii)에서 $f(t)=t+4$ (단, $3<t<4$)

마찬가지로 두 점 (5, 10), (6, 13)을 지나는 직선의 기

울기는 $\frac{13-10}{6-5}=3$ 이고, 조건 (가)에서 $f'(3)\leq 3$ 이므로

$5<t<6$ 을 만족시키는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의

점 $(t, f(t))$ 에 대해 평균값 정리에 의하여

$$(iii) \frac{f(t)-f(5)}{t-5} \leq 3 \text{에서 } f(t)-f(5) \leq 3(t-5)$$

$$f(t) \leq 3(t-5) + f(5)$$

$$\therefore f(t) \leq 3t-5 \quad (\because f(5)=10)$$

$$(iv) \frac{f(6)-f(t)}{6-t} \leq 3 \text{에서 } f(6)-f(t) \leq 3(6-t)$$

$$f(t) \geq 3(6-t) + f(6)$$

$$\therefore f(t) \geq 3t-5 \quad (\because f(6)=13)$$

(iii), (iv)에서 $f(t)=3t-5$ (단, $5<t<6$)

한편, 조건 (다)에서 $k=2$ 일 때, 닫힌구간 $[4, 5]$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 이차함수의 그래프의 일부이므로

$g(x)=px^2+qx+r$ ($4\leq x\leq 5$) (p, q, r 는 상수, $p\neq 0$)

라 하면

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & (3\leq x<4) \\ g(x) & (4\leq x\leq 5) \\ 3x-5 & (5< x\leq 6) \end{cases}$$

라 할 수 있다. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하므로

$$g(4)=8, g(5)=10, g'(4)=1, g'(5)=3$$

$$g(x)=px^2+qx+r \text{에서 } g'(x)=2px+q \text{이므로}$$

$$g'(4)=1 \text{에서 } 8p+q=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$g'(5)=3 \text{에서 } 10p+q=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$p=1, q=-7$$

$$\text{즉, } g(x)=x^2-7x+r \text{이고, } g(4)=8 \text{이므로}$$

$$16-28+r=8 \quad \therefore r=20$$

$$\therefore g(x)=x^2-7x+20 \quad (\text{단, } 4\leq x\leq 5)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+4 & (3\leq x<4) \\ x^2-7x+20 & (4\leq x\leq 5) \\ 3x-5 & (5< x\leq 6) \end{cases}$$

$$a = \int_3^6 f(x) dx$$

$$= \int_3^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx + \int_5^6 f(x) dx$$

$$= \int_3^4 (x+4) dx + \int_4^5 (x^2-7x+20) dx + \int_5^6 (3x-5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_3^4 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 20x \right]_4^5 + \left[\frac{3}{2}x^2 - 5x \right]_5^6$$

$$= \left(12 - \frac{9}{2} \right) + \left(\frac{61}{3} - \frac{63}{2} + 20 \right) + \left(49 - \frac{75}{2} \right)$$

$$= 81 + \frac{61}{3} - \frac{147}{2}$$

$$= \frac{167}{6}$$

$$\therefore 6a = 6 \times \frac{167}{6} = 167$$

답 167

blacklabel 특강

해결심리

조건 (다)에 의하여 닫힌구간 $[0, 1], [2, 3], [4, 5], \dots$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 이차함수의 그래프의 일부임을 알았지만 열린구간 $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots$ 에서의 그래프의 개형을 구하지 못해 틀린 학생들이 많았다. 해당 문항에서는 조건 (가)와 '함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.'를 활용하여 그래프의 개형을 찾아야 한다.

두 점 (3, 7), (4, 8)을 잇는 직선의 기울기는 1이고, 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $3<t<4$ 에서 $f'(t)=1$ 인 $x=t$ 가 존재한다. 이때, $3<x<4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 곡선이면 $x=t$ 의 좌 또는 우에서 $f'(x)<1$ 인 x 가 존재하여 조건 (가)를 만족시키지 못하므로 직선이어야 한다. 마찬가지로 $5<x<6$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형도 두 점 (5, 10), (6, 13)을 잇는 직선이어야 한다.

마지막으로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이면서 $x=4$ 와 $x=5$ 에서의 미분계수가 존재해야 한다. 즉, 닫힌구간 $[4, 5]$ 에서의 $f(x)$ 는 $f(4)=8, f(5)=10, f'(4)=1, f'(5)=3$ 을 만족시키는 이차함수이다.

17 $h(x)=f(x)g(x)$ 로 놓으면

$$h(-x)=f(-x)g(-x)$$

$$=f(x)\{-g(x)\} \quad (\because \text{조건 (가)})$$

$$=-f(x)g(x)=-h(x)$$

즉, $h(-x)=-h(x)$ 이므로 $h(x)$ 는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

$$h(x+4)=f(x+4)g(x+4)$$

$$=f(x)g(x+2) \quad (\because \text{조건 (다)})$$

$$=f(x)g(x) \quad (\because \text{조건 (나)})$$

$$=h(x)$$

즉, $h(x+4)=h(x)$ 이므로 $h(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^2 h(x) dx = \int_2^6 h(x) dx = \int_6^{10} h(x) dx = 0$$

$$\text{한편, } \int_0^2 f(x)g(x) dx = 5 \text{에서 } \int_0^2 h(x) dx = 5 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_4^6 h(x) dx = \int_8^{10} h(x) dx = 5$$

$$\therefore \int_{-4}^{10} f(x)g(x) dx = \int_{-4}^{10} h(x) dx$$

$$= \int_{-4}^4 h(x) dx + \int_4^{10} h(x) dx$$

$$= 0 + \int_4^{10} h(x) dx$$

$$= \int_4^6 h(x) dx + \int_6^{10} h(x) dx$$

$$= 5 + 0 = 5$$

답 5

서울대 선배들의 강추문제

1등급 비법 노하우

조건 (가), (나)에서 $f(x)$ 는 주기가 4인 우함수, $g(x)$ 는 주기가 2인 기함수임을 알 수 있다. 이때, 이 두 함수가 곱해진 새로운 함수

$$h(x)=f(x)g(x) \text{는 주기가 4인 기함수이므로 } \int_{-2}^2 h(x) dx = 0 \text{이다.}$$

정적분에 대한 문제에서 우함수, 기함수, 주기함수에 대한 성질을 이용하는 경우가 종종 있기 때문에 각각을 잘 기억해 두고 있는 것이 좋다.

18 $f(-x) = -f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이므로 $f'(x)$ 는 우함수, $xf'(x)$ 는 기함수이다.

한편, $f(-x) = -f(x)$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(-3) = -f(3) = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 f'(x)(2-x) dx \\ &= 2 \int_{-3}^3 f'(x) dx - \int_{-3}^3 xf'(x) dx \\ &= 2 \left[f(x) \right]_{-3}^3 \\ &= 2 \{ f(3) - f(-3) \} \\ &= 2 \times \{ 2 - (-2) \} = 8 \end{aligned}$$

답 ④

• 다른풀이 •

함수 $f(x)$ 가 기함수이므로 $f'(x)$ 는 우함수, $xf'(x)$ 는 기함수이다.

한편, $f(-x) = -f(x)$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0), 2f(0) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 f'(x)(2-x) dx \\ &= 2 \int_{-3}^3 f'(x) dx - \int_{-3}^3 xf'(x) dx \\ &= 2 \times 2 \int_0^3 f'(x) dx - 0 \\ &= 4 \int_0^3 f'(x) dx \\ &= 4 \left[f(x) \right]_0^3 \\ &= 4 \{ f(3) - f(0) \} \\ &= 4(2-0) = 8 \end{aligned}$$

19 조건 ㉞에서 $f'(-a) = f'(a)$ 이므로 $f'(x)$ 는 우함수이다. 즉, $f'(x)$ 는 차수가 짝수인 항과 상수항의 합으로 이루어진 다항함수이고,

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이므로 $f(x)$ 는 차수가 홀수인 항과 상수항의 합으로 이루어진 다항함수이다.

이때, 함수 $f(x)$ 에서 차수가 홀수인 항으로 이루어진 다항함수를 $g(x)$, 상수항을 k 라 하면

$$f(x) = g(x) + k$$

조건 ㉞에서

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a \{ g(x) + k \} dx \\ &= \int_{-a}^a g(x) dx + \int_{-a}^a k dx \\ &= 0 + 2 \int_0^a k dx \\ &= 2 \left[kx \right]_0^a = 2ka \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2ka = 6a$$

위의 식은 a 에 대한 항등식이므로

$$2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore f(x) = g(x) + 3$$

한편, $g(x)$ 는 기함수이므로 $g(-x) = -g(x)$ 이고, 이 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0) = -g(0), 2g(0) = 0$$

$$\therefore g(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = g(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

답 3

20 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f(2-x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(2-x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4 - f(2-x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 \{ 3x^2 - 6x + 4 - f(2-x) \} dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 6x + 4) dx - \int_0^2 f(2-x) dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 6x + 4) dx - \int_0^2 f(x) dx \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$2 \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 6x + 4) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x + 4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^3 - 3x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (8 - 12 + 8) = 2 \end{aligned}$$

답 2

21 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + f(k-x) = k \quad (k \text{는 자연수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

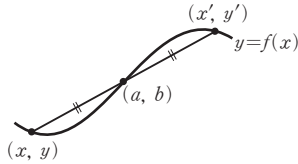
를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ 를 지나고, 이 점에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^k f(x) dx &= \int_0^k f(k-x) dx \\ \int_0^k 2f(x) dx &= \int_0^k f(x) dx + \int_0^k f(x) dx \\ &= \int_0^k f(x) dx + \int_0^k f(k-x) dx \\ &= \int_0^k \{ f(x) + f(k-x) \} dx \\ &= \int_0^k k dx \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \left[kx \right]_0^k = k^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \int_0^k 2f(x) dx = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \quad \text{답 ⑤}$$

blacklabel 특강 필수 원리

- (1) 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 에 대하여 대칭이면
 $\frac{f(2a-x)+f(x)}{2}=b$
 $\therefore f(2a-x)+f(x)=2b$ 또는 $f(a-x)+f(a+x)=2b$
 [증명]



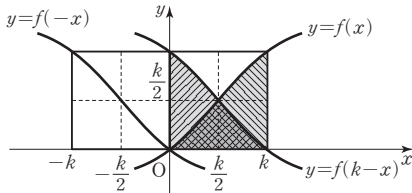
$$\frac{x+x'}{2}=a \text{에서 } x'=2a-x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{y+y'}{2}=b \text{에서 } \frac{f(x)+f(x')}{2}=b \text{이므로 이 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{f(x)+f(2a-x)}{2}=b$$

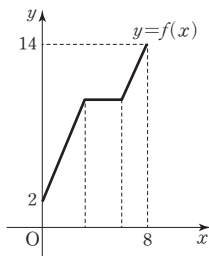
$$\therefore f(x)+f(2a-x)=2b, \text{ 즉 } f(a+x)+f(a-x)=2b$$

- (2) 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ ($k>0$)에 대하여 대칭이면
 $\int_0^k f(x) dx = \int_0^k f(k-x) dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 [증명]

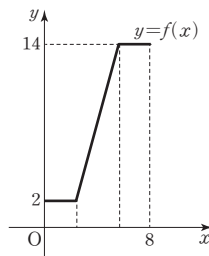


함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 k ($k>0$)만큼 평행이동하면 함수 $y=f(-(x-k))$, 즉 $y=f(k-x)$ 의 그래피므로 $\textcircled{2}$ 이 성립한다.

- 22** 조건 (나)에 의하여 $k < t \leq k+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 $f(k+t)=f(k)$ 이면 상수함수이고
 $f(k+t)=2t+f(k)$ 이면 기울기가 2인 직선이다.
 이때, 조건 (타)에서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, 8)$ 에서 미분가능하지 않은 x 의 개수가 2이므로
 $x < a$ 일 때 상수함수, $x > a$ 일 때 기울기가 2인 직선 또는
 $x < a$ 일 때 기울기가 2인 직선, $x > a$ 일 때 상수함수를 만족시키는 a ($0 < a < 8$)의 개수가 2이어야 한다.
 또한, 조건 (가)에서 $f(0)=2$, $f(8)=14$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

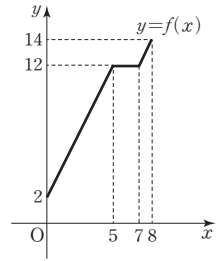
- (i) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 [그림 1]과 같은 경우

$\int_0^8 f(x) dx$ 의 값이 최대이려면
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 즉,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (0 \leq x < 5) \\ 12 & (5 \leq x < 7) \\ 2x-2 & (7 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x) dx &= \int_0^5 (2x+2) dx + \int_5^7 12 dx + \int_7^8 (2x-2) dx \\ &= \left[x^2 + 2x \right]_0^5 + \left[12x \right]_5^7 + \left[x^2 - 2x \right]_7^8 \\ &= 35 + 12(7-5) + (48-35) \\ &= 35 + 24 + 13 = 72 \end{aligned}$$



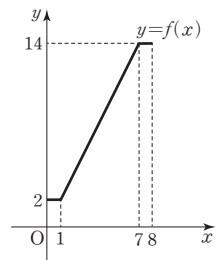
- (ii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 [그림 2]와 같은 경우

$\int_0^8 f(x) dx$ 의 값이 최대이려면
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 즉,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x & (1 \leq x < 7) \\ 14 & (7 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x) dx &= \int_0^1 2 dx + \int_1^7 2x dx + \int_7^8 14 dx \\ &= \left[2x \right]_0^1 + \left[x^2 \right]_1^7 + \left[14x \right]_7^8 \\ &= 2 + (49-1) + 14(8-7) \\ &= 2 + 48 + 14 = 64 \end{aligned}$$



- (i), (ii)에서 구하는 최댓값은 72이다.

답 72

23 $f(x) = x^2 - ax + \int_2^x g(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = 4 - 2a \left(\because \int_2^2 g(t) dt = 0 \right)$$

이때, 다항식 $f(x)$ 가 $(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $f(2)=0$

$$\text{즉, } 4 - 2a = 0 \text{이므로 } 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = x^2 - 2x + \int_2^x g(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)^2 Q(x)$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x)$$

위의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2) = 0 \quad \dots\dots \ominus$$

한편, $\ominus$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2x - 2 + g(x)$$

$$\therefore g(x) = f'(x) - 2x + 2$$

따라서 다항식 $g(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} g(2) &= f'(2) - 4 + 2 \\ &= 0 - 2 \quad (\because \ominus) \\ &= -2 \end{aligned}$$

답 ①

24 $\int_0^1 f(x) dx = A, \int_0^1 g(x) dx = B$ (A, B 는 상수)

$\dots\dots \ominus$ 라 하면

$$f(x) = 20x + x \int_0^1 g(x) dx = 20x + Bx$$

$$g(x) = 30x^2 + \int_0^1 f(x) dx = 30x^2 + A$$

위의 두 식을 $\ominus$ 에 각각 대입하면

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (20x + Bx) dx \\ &= \left[10x^2 + \frac{B}{2}x^2 \right]_0^1 = 10 + \frac{B}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (30x^2 + A) dx \\ &= \left[10x^3 + Ax \right]_0^1 = 10 + A \end{aligned}$$

즉, $A = 10 + \frac{B}{2}, B = 10 + A$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$A = 30, B = 40$$

$$\therefore \int_0^1 \{f(x) + g(x)\} dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

$$= A + B = 30 + 40 = 70$$

답 70

단계	채점 기준	배점
(가)	$\int_0^1 f(x) dx = A, \int_0^1 g(x) dx = B$ 로 치환하여 두 함수 $f(x), g(x)$ 를 A, B 를 이용하여 나타낸 경우	30%
(나)	(가)에서 나타낸 $f(x), g(x)$ 를 $\int_0^1 f(x) dx = A, \int_0^1 g(x) dx = B$ 에 대입하여 A, B 에 대한 식을 세운 경우	50%
(다)	A, B 에 대한 연립방정식을 풀어 A, B 의 값을 각각 구한 후, $\int_0^1 \{f(x) + g(x)\} dx$ 의 값을 구한 경우	20%

25 $f(x) = x^8 + 6x + 1$ 에서 $f'(x) = 8x^7 + 6$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2x} \int_0^x (x-t-1)f'(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2x} \left\{ \int_0^x x f'(t) dt - \int_0^x (t+1)f'(t) dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+2)} \left\{ x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x (t+1)f'(t) dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f'(t) dt \times \frac{1}{x+2}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t+1)f'(t) dt \times \frac{1}{x+2} \quad \dots\dots \ominus$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} [f(t)]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - f(0)\} = 0$$

$F'(x) = (x+1)f'(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (t+1)f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [F(t)]_0^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

$$= F'(0) = f'(0)$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 0 \times \frac{1}{2} - f'(0) \times \frac{1}{2} \quad (\because \ominus)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 6$$

$$(\because f'(x) = 8x^7 + 6 \text{에서 } f'(0) = 6)$$

$$= -3$$

답 ③

• 다른풀이 •

$$f(x) = x^8 + 6x + 1 \text{에서 } f'(x) = 8x^7 + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2x} \int_0^x (x-t-1)f'(t) dt \text{에서}$$

$$\int_0^x (x-t-1)f'(t) dt = T(x) \quad \dots\dots \ominus$$

라 하면 $T(0) = 0$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2x} \int_0^x (x-t-1)f'(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T(x) - T(0)}{x - 0} \times \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{2} T'(0)$$

$\dots\dots \ominus$

$\ominus$ 에서

$$T(x) = \int_0^x x f'(t) dt - \int_0^x (t+1)f'(t) dt$$

$$= x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x (t+1)f'(t) dt$$

이므로

$$T'(x) = \int_0^x f'(t) dt + x f'(x) - (x+1)f'(x)$$

$$= \int_0^x f'(t) dt - f'(x)$$

$$\therefore T'(0) = -f'(0) = -6$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} T'(0) \quad (\because \ominus)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-6) = -3$$

26 조건 (다)에서

$$f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y)\} \quad \dots\dots \ominus$$

$\ominus$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)+f(0)=2\{f(0)+f(0)\}, 2f(0)=4f(0) \\ 2f(0)=0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

㉠의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(2)+f(0)=2\{f(1)+f(1)\} \\ \therefore f(2)=4f(1) \quad (\because \textcircled{A})$$

조건 ㉡에서 $f(1)=25$ 이므로

$$f(2)=4 \times 25=100 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

한편, 조건 ㉢에서

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_x^{x+1} f(t) dt - \frac{1}{2}\int_x^{x-1} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{f(x+1)-f(x)\}-\frac{1}{2}\{f(x-1)-f(x)\} \\ =\frac{1}{2}\{f(x+1)-f(x-1)\}$$

위의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)=\frac{1}{2}\{f(2)-f(0)\} \\ =\frac{1}{2}(100-0) \quad (\because \textcircled{B}, \textcircled{C}) \\ =50$$

답 50

27 $\int_2^x (3t+2)f(t) dt = 2\int_2^x (x+2)f(t) dt$ 에서

$$\int_2^x (3t+2)f(t) dt = 2x\int_2^x f(t) dt + 4\int_2^x f(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(3x+2)f(x)=2\int_2^x f(t) dt + 2xf(x) + 4f(x)$$

$$\therefore (x-2)f(x)=2\int_2^x f(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+(x-2)f'(x)=2f(x) \\ \therefore f(x)=(x-2)f'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

이때, 다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$ 인 상수)이라 하면 도함수 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이므로 ㉠에서 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$$a=an, a(n-1)=0 \quad \therefore n=1 \quad (\because a \neq 0)$$

즉, $f(x)$ 는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$ (b 는 상수)라 하자.

$$f(0)=4 \text{이므로 } b=4$$

$$\therefore f(x)=ax+4, f'(x)=a$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$ax+4=(x-2) \times a$$

$$-2a=4 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore f(x)=-2x+4, f'(x)=-2$$

$$\therefore f(5)-f'(5)=(-10+4)-(-2) \\ =-6+2=-4$$

답 -4

28 $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$ 에서

$$g(x)=x\int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) \\ =\int_0^x f(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

㉠, ㉢에 각각 $x=0$ 을 대입하면 $g(0)=0, g'(0)=0$

이때, $g(x)$ 가 삼차함수이므로

$g(x)=x^2(ax+b)=ax^3+bx^2$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$g'(x)=3ax^2+2bx \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

위의 식을 ㉢에 대입하면

$$\int_0^x f(t) dt = 3ax^2 + 2bx$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=6ax+2b$$

$$f(1)=0, g'(1)=6 \text{이므로}$$

$$6a+2b=0, 3a+2b=6 \quad (\because \textcircled{C})$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=6$$

따라서 $g(x)=-2x^3+6x^2$ 이므로

$$g(2)=-16+24=8$$

답 8

• 다른풀이 •

$$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t) dt \text{에서}$$

$$g(x)=x\int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) \\ =\int_0^x f(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

이때, $g(x)$ 가 삼차함수이므로 $f(x)$ 는 일차함수이어야 한다.

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)=a(x-1)$ ($a \neq 0$)이라 하고 이것을 ㉢에 대입하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t) dt = \int_0^x a(t-1) dt \\ =a\left[\frac{1}{2}t^2-t\right]_0^x = a\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)$$

$$g'(1)=6 \text{이므로 } -\frac{1}{2}a=6 \quad \therefore a=-12$$

$$\therefore g'(x)=-12\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)=-6x^2+12x \text{이므로}$$

$$g(x)=-2x^3+6x^2+C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

이때, $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t) dt$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0)=0 \text{이므로}$$

$$C=0$$

따라서 $g(x)=-2x^3+6x^2$ 이므로

$$g(2)=-16+24=8$$

29 $g(x) = \int_{-x}^x \{f(t) - |f(t)|\} dt$ 에서

$f(t) \leq 0$ 이면

$$g(x) = \int_{-x}^x \{f(t) + f(t)\} dt = \int_{-x}^x 2f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$f(t) > 0$ 이면

$$g(x) = \int_{-x}^x \{f(t) - f(t)\} dt = 0$$

이때, 조건 ㉑, ㉒에 의하여 $0 \leq x < 1$ 또는 $x > 5$ 에서 $g(x)$ 가 상수함수이므로 이 구간에서 $f(t) > 0$ 이어야 한다.

$\dots\dots \textcircled{㉓}$

한편, 함수 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 는 $f(-x) = f(x)$ 이므로 그 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 우함수이고, ㉑에서 함수 $2f(x)$ 가 우함수이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^x 2f(t) dt \\ &= 2 \int_0^x 2f(t) dt \\ &= 4 \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

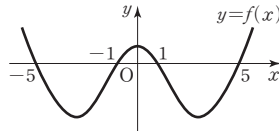
위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 4f(x)$$

조건 ㉒에 의하여 $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $g(x)$ 가 감소하므로 이 구간에서 $g'(x) \leq 0$, 즉 $4f(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$\dots\dots \textcircled{㉔}$

따라서 ㉑, ㉔에 의하여 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(5, 0)$ 을 지나므로

$$f(1) = 0 \text{에서 } 1 + a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$f(5) = 0 \text{에서 } 625 + 25a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

㉕, ㉖을 연립하여 풀면

$$a = -26, b = 25$$

따라서 $f(x) = x^4 - 26x^2 + 25$ 이므로

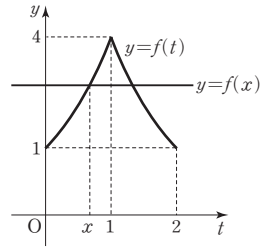
$$f(\sqrt{2}) = 4 - 26 \times 2 + 25 = -23 \quad \text{답 } -23$$

(i) $0 < x \leq 1$ 일 때,

함수 $y = f(t)$ 의 그래프

와 직선 $y = f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(t) \\ g(x) &= \int_0^x |f(x) - f(t)| dt \\ &= \int_0^x \{f(x) - f(t)\} dt \\ &= \int_0^x \{(x+1)^2 - (t+1)^2\} dt \\ &= \left[(x+1)^2 t - \frac{1}{3}(t+1)^3 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}(x+1)^2(2x-1) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

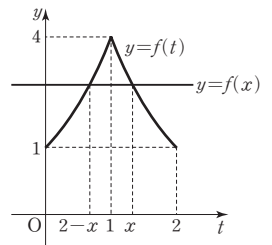


(ii) $1 < x < 2$ 일 때,

함수 $y = f(t)$ 의 그래프

와 직선 $y = f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} 0 < t < 2-x \text{일 때,} & f(x) \geq f(t) \\ 2-x \leq t < x \text{일 때,} & f(x) \leq f(t) \\ g(x) &= \int_0^x |f(x) - f(t)| dt \\ &= \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt + \int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt \\ \text{이때, (i)에 의하여} & \int_0^{2-x} \{f(x) - f(t)\} dt = \left[(3-x)^2 t - \frac{1}{3}(t+1)^3 \right]_0^{2-x} \\ &= \frac{1}{3}(3-x)^2(3-2x) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$



한편, 함수 $y = (x-3)^2$ 의 그래프는 함수 $y = (x+1)^2$ 의 그래프와 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} &\int_{2-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt \\ &= 2 \int_1^x \{f(t) - f(x)\} dt \\ &= 2 \int_1^x \{(t-3)^2 - (x-3)^2\} dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}(t-3)^3 - (x-3)^2 t \right]_1^x \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{3}(x-3)^3 - x(x-3)^2 \right\} - 2 \left\{ -\frac{8}{3} - (x-3)^2 \right\} \\ &= -\frac{4}{3}x(x-3)^2 + \frac{16}{3} \\ \therefore g(x) &= \frac{1}{3}(3-x)^2(3-2x) + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x(x-3)^2 + \frac{16}{3} \\ &= -(x-3)^2(2x-1) + \frac{17}{3} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

30 해결단계

① 단계	$0 < x \leq 1, 1 < x < 2$ 로 나누어 함수 $g(x)$ 의 식을 각각 구한다.
② 단계	함수 $g(x)$ 를 미분하여 $g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.
③ 단계	함수 $g(x)$ 의 그래프의 개형을 그려 최댓값을 구한다.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1)^2(2x-1) + \frac{1}{3} & (0 < x \leq 1) \\ -(x-3)^2(2x-1) + \frac{17}{3} & (1 < x < 2) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x(x+1) & (0 < x < 1) \\ -2(x-3)(3x-4) & (1 < x < 2) \end{cases}$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{4}{3}$$

열린구간 (0, 2)에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	$\frac{4}{3}$	...	(2)
$g'(x)$		+		-	0	+	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $g(x)$ 는

$$x=1 \text{일 때 극댓값 } g(1) = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$x=\frac{4}{3} \text{일 때 극솟값 } g\left(\frac{4}{3}\right) = -\left(-\frac{5}{3}\right)^2 \times \frac{5}{3} + \frac{17}{3} = \frac{28}{27}$$

을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$\frac{5}{3} - \frac{28}{27} = \frac{17}{27}$$

답 $\frac{17}{27}$

31 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ -2x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

한편, $g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = f(x)$$

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 교점의 x 좌표가 -2, 1이므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $g'(x)=0$ 의 근은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극솟값을 갖고 $x=1$ 일 때 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합은

$$g(-2) + g(1)$$

$$= \int_{-1}^{-2} f(t) dt + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^{-2} (t+2) dt + \int_{-1}^0 (t+2) dt + \int_0^1 (-2t+2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_{-1}^{-2} + \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_{-1}^0 + \left[-t^2 + 2t \right]_0^1$$

$$= (2-4) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + (-1+2)$$

$$= 2$$

답 2

• 다른풀이 •

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < 0) \\ -2x+2 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (t+2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_{-1}^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^0 (t+2) dt + \int_0^x (-2t+2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_{-1}^0 + \left[-t^2 + 2t \right]_0^x$$

$$= -x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + \frac{3}{2} & (x \geq 0) \end{cases}$$

이때, $g'(x) = f(x)$ 이므로

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $g(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극솟값을 갖고, $x=1$ 일 때 극댓값을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은

$$g(-2) + g(1) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

32 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 a, b, c 이므로

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

두 함수 $y=g(x), y=h(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 a, b, c 이고 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로

$$g(x) - h(x) = 3(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\therefore g(x) - h(x) = 3f(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore \int_a^c \{g(x) - h(x)\} dx = \int_a^c 3f(x) dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 3 \int_a^c f(x) dx \quad (\text{참})$$

$$\therefore T(x) = \int_a^x \{g(t) - h(t)\} dt \text{라 하면}$$

$$T(a)=0 \text{이고, } T'(x) = g(x) - h(x)$$

$$T'(x)=0, \text{ 즉 } g(x)=h(x) \text{에서}$$

$$x=a \text{ 또는 } x=b \text{ 또는 } x=c$$

함수 $T(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

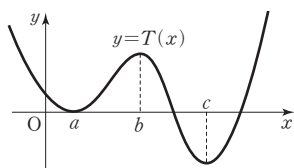
x	...	a	...	b	...	c	...
$T'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$T(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $T(x)$ 는 $x=a, x=c$ 일 때 극솟값을 갖고, $x=b$ 일 때 극댓값을 갖는다.

이때, $\int_a^c f(x)dx < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} T(c) &= \int_a^c \{g(t) - h(t)\} dt \\ &= 3 \int_a^c f(t) dt (\because \textcircled{1}) < 0 \end{aligned}$$

함수 $y=T(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $T(x)=0$, 즉

$\int_a^x \{g(t) - h(t)\} dt = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $S(x) = \int_a^x \{f(t) - g(t) + h(t)\} dt$ 라 하면

$S(a)=0$ 이고,

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_a^x \{f(t) - 3f(t)\} dt (\because \textcircled{1}) \\ &= -2 \int_a^x f(t) dt \quad \dots\dots\textcircled{2} \end{aligned}$$

$S'(x) = -2f(x)$ 이므로

$S'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$

함수 $S(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...
$S'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$S(x)$	/	극대	\	극소	/	극대	\

함수 $S(x)$ 는 $x=a, x=c$ 일 때 극댓값을 갖고, $x=b$ 일 때 극솟값을 갖는다.

이때, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 의 x 대신

$2b-x$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} f(2b-x) &= (2b-x-a)(2b-x-b)(2b-x-c) \\ &= -(x+a-2b)(x-b)(x+c-2b) \\ &= -(x-c)(x-b)(x-a) \\ &\quad (\because 2b=a+c) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) + f(2b-x) = 0$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(b, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

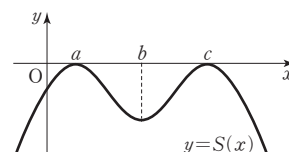
$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^c f(x)dx \text{에서 } \int_a^c f(x)dx = 0$$

$$\therefore S(c)=0 (\because \textcircled{2})$$

따라서 함수 $y=S(x)$

의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 함수



$S(x)$, 즉 $\int_a^x \{f(t) - g(t) + h(t)\} dt$ 의 최댓값은 0이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

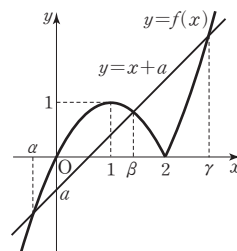
33 $F(x) = \int_1^x \{f(t) - t - a\} dt$ 에서 $F(1)=0$ 이고

$$F'(x) = f(x) - x - a$$

$$F'(x)=0 \text{에서 } f(x)=x+a$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=x+a$ 의 그래프가 다음 그림과 같으므로 세 교점의 x 좌표를 각각 α , β , γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 하면

$$\alpha < 0, 1 < \beta < 2, \gamma > 2$$

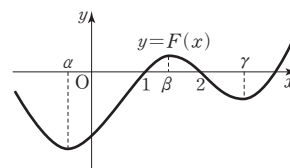


즉, $F'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$ 이므로 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...	γ	...
$F'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$F(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $F(x)$ 는 $x=\alpha$, $x=\gamma$ 일 때 극솟값을 갖고, $x=\beta$ 일 때 극댓값을 갖는다.

이때, $F(2)=0$ 이므로 함수 $y=F(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 $F(0) < 0$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 함수 $F(x)$ 는 $x=\alpha$, $x=\gamma$ 일 때 극솟값을 갖고, $F(\alpha) < 0$, $F(\gamma) < 0$ 이다. (참)

ㄷ. $1 < c < 2$ 인 c 에 대하여 $F'(c)=0$ 이므로 $c=\beta$

(i) $0 < k < 1$ 이면 $k \leq x \leq 1$ 에서 $F(x) \leq 0$

즉, $-F(x) \geq 0$ 이므로

$$\int_1^k F(x)dx = \int_k^1 \{-F(x)\}dx \geq 0$$

(ii) $1 \leq k < \beta$ 이면 $1 \leq x \leq k$ 에서 $F(x) \geq 0$

$$\therefore \int_1^k F(x)dx \geq 0$$

(i), (ii)에서 $0 < k < \beta$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_1^k F(x) dx \geq 0 \text{이다. (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 68

01 77 02 35 03 ④ 04 4 05 2
06 -16

01 해결단계

① 단계	주어진 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 $f'(x)$ 의 식을 구한 후, 부정적분을 이용하여 $f(x)$ 의 식을 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값 및 $f'(x)$ 의 부호를 이용하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 함수 $y= f(x) $ 의 그래프를 그린다.
③ 단계	함수 $y= f(x) $ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 위치 관계를 이용하여 방정식 $ f(x) =k$ 가 서로 다른 5개의 실근을 갖도록 하는 k 의 값을 구하고, $p+q$ 의 값을 구한다.

주어진 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 x 축과의 교점의 x 좌표는 -2, 2, 3이고, 왼쪽 위에서 시작하여 오른쪽 아래로 향하는 곡선이므로

$$f'(x)=a(x+2)(x-2)(x-3)$$

$$=a(x^3-3x^2-4x+12) \quad (\text{단, } a < 0)$$

라 할 수 있다.

$$\therefore f(x)=\int f'(x) dx$$

$$=\int a(x^3-3x^2-4x+12) dx$$

$$=a\left(\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2+12x\right)+C$$

(단, C 는 적분상수)

이때, $f(-2)=4$, $f(2)=-4$ 이므로

$$f(-2)=a\{4-(-8)-8-24\}+C$$

$$=-20a+C=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=a\{4-8-8+24\}+C$$

$$=12a+C=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{1}{4}, C=-1$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2+12x\right)-1$$

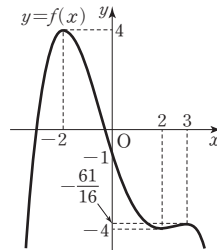
$$=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x-1$$

한편, 주어진 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

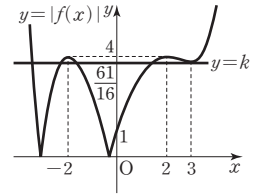
x	...	-2	...	2	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 극댓값 $f(-2)=4$, $x=2$ 일 때 극솟값 $f(2)=-4$, $x=3$ 일 때 극댓값

$f(3)=-\frac{81}{16}+\frac{27}{4}+\frac{9}{2}-9-1=-\frac{61}{16}$ 을 가지므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프를 그리면 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

방정식 $|f(x)|=k$ 의 실근은 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표이므로 방정식 $|f(x)|=k$ 가 서로 다른 5개의 실근을 갖도록 하는 k 의 값은 $\frac{61}{16}$ 이다.

따라서 $p=61$, $q=16$ 이므로

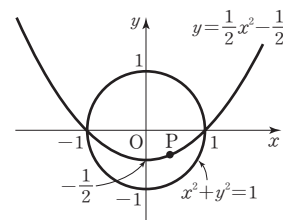
$$p+q=61+16=77$$

답 77

02 해결단계

① 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 원 $x^2+y^2=1$ 을 이용하여 두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 를 각각 구한다.
② 단계	함수 $p(t)$ 를 구한 후, $\int_0^2 p(t) dt$ 의 값을 구한다.
③ 단계	p , q 의 값을 각각 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 의 그래프와 원 $x^2+y^2=1$ 을 좌표 평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$P\left(t, \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+1)$$

점 P가 원 $x^2+y^2=1$ 의 내부에 있을 때,

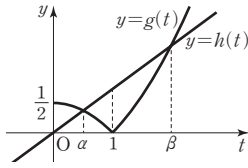
$$g(t)=1-\overline{OP}=1-\frac{1}{2}(t^2+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$$

점 P가 원 $x^2+y^2=1$ 의 외부에 있을 때,

$$g(t)=\overline{OP}-1=\frac{1}{2}(t^2+1)-1=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(t)=\begin{cases} -\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} & (t > 1) \end{cases}$$

한편, 점 P와 y축 사이의 거리가 $h(t)$ 이므로 $h(t)=t$
 두 함수 $y=g(t)$, $y=h(t)$ 의
 그래프가 오른쪽 그림과 같으
 므로 두 함수의 그래프의 교점
 의 x좌표를 각각



α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} = t \text{에서 } t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \sqrt{2} - 1 \quad (\because t \geq 0) \quad \therefore \alpha = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} = t \text{에서 } t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \sqrt{2} + 1 \quad (\because t > 1) \quad \therefore \beta = \sqrt{2} + 1$$

$$\text{즉, } p(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < \sqrt{2} - 1) \\ -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} & (\sqrt{2} - 1 \leq t < 1) \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} & (1 \leq t < \sqrt{2} + 1) \\ t & (t \geq \sqrt{2} + 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 p(t) dt &= \int_0^{\sqrt{2}-1} t dt + \int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right) dt \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}+1} \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\sqrt{2}-1} + \left[-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t\right]_{\sqrt{2}-1}^1 + \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t\right]_1^{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{1}{2}(3-2\sqrt{2}) + \frac{1}{3} - \left\{-\frac{1}{6}(5\sqrt{2}-7) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{11}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{11}{6}$, $q = -\frac{2}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} 30(p+q) &= 30\left(\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\right) \\ &= 55 - 20 = 35 \end{aligned}$$

답 35

03 해결단계

① 단계	함수 $g(x)$ 의 도함수 $f(x)$ 를 이용하여 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 파악한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	도함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그린 후, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$g(x) = \int f(x) dx$ 에서 함수 $f(x)$ 의 부정적분이

$g(x)$ 이므로

$$\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a) = 0$$

$$\therefore g(a) = g(b) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄴ. 주어진 그래프에서 $b \leq x \leq c$ 일 때 $f(x) < 0$ 이므로
 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소한다.

$$\therefore g(b) > g(c) \quad (\text{참})$$

ㄴ. $g(a)=0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $g(b)=0$

또한, $g(x) = \int f(x) dx$ 에서 $g'(x) = f(x)$ 이고

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x축과 서로 다른 세
 점에서 만나므로 x좌표를 각각 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라
 하면 방정식 $g'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$ 에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
 같다.

x	$\dots$	α	$\dots$	β	$\dots$	γ	$\dots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

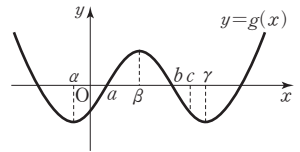
함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha, \gamma$

일 때 극솟값을 갖고,

$x=\beta$ 일 때 극댓값을

가지므로 $y=g(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 의 부정적분을 $G(x)$ 라 하면 $b \leq x \leq c$ 에서
 $g(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 함수 $G(x)$ 는 감소한다.

즉, $G(b) - G(c) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\int_a^c g(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^c g(x) dx + \int_b^a g(x) dx$$

$$= \int_b^c g(x) dx$$

$$= [G(x)]_b^c$$

$$= G(c) - G(b) < 0 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore \int_a^c g(x) dx < \int_a^b g(x) dx \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(x)$ 는 $x=\beta$ 일 때 극댓값을 가지므로
 $M = g(\beta)$

$$\therefore \int_a^c |f(x)| dx$$

$$= \int_a^\beta f(x) dx + \int_\beta^c \{-f(x)\} dx$$

$$= [g(x)]_a^\beta + [-g(x)]_\beta^c$$

$$= g(\beta) - g(a) - g(c) + g(\beta)$$

$$= 2g(\beta) - g(a) - g(c)$$

$$= 2M - g(b) - g(c) \quad (\because \textcircled{1}) \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

04 해결단계

① 단계	$a < 1, a \geq 1$ 의 경우로 나누어 함수 $f(x)$ 를 구한다.
② 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건을 구한다.
③ 단계	모든 실수 a 의 값의 합을 구한다.

$$f(x) = \int_a^x (|t-1| - 1) dt \text{에서}$$

(i) $a < 1$ 일 때,

① $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \int_a^x (-t) dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 \right]_a^x \\ = -\frac{1}{2}(x^2 - a^2)$$

② $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = \int_a^1 (-t) dt + \int_1^x (t-2) dt \\ = \left[-\frac{1}{2}t^2 \right]_a^1 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_1^x \\ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}a^2 + 1 \\ = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}a^2 - 1$$

①, ②에서 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

방정식 $f(x) = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가

지려면 극값이 0이어야

한다. 즉, $f(0) = 0$ 또는 $f(2) = 0$

$f(0) = 0$ 에서

$$\frac{1}{2}a^2 = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$f(2) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = -\sqrt{2} \quad (\because a < 1)$$

(ii) $a \geq 1$ 일 때,

③ $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \int_a^1 (t-2) dt + \int_1^x (-t) dt \\ = \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_a^1 + \left[-\frac{1}{2}t^2 \right]_1^x \\ = \left(\frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2}a^2 - 2a \right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \\ = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 + 2a - 1$$

④ $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = \int_a^x (t-2) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_a^x \\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}a^2 + 2a \\ = \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{2}a^2 + 2a - 2$$

③, ④에서 함수

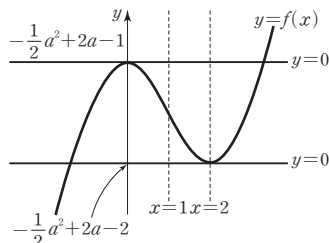
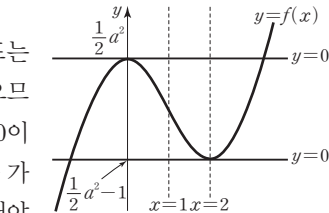
$y = f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림

과 같으므로 방정

식 $f(x) = 0$ 이 서

로 다른 두 실근을



가지려면 극값이 0이어야 한다.

즉, $f(0) = 0$ 또는 $f(2) = 0$

$$f(0) = 0 \text{에서 } -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$a^2 - 4a + 2 = 0 \quad \therefore a = 2 + \sqrt{2} \quad (\because a \geq 1)$$

$$f(2) = 0 \text{에서 } -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은

$0, -\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2$ 이므로 그 합은

$$0 + (-\sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) + 2 = 4$$

답 4

05 해결단계

① 단계	k 의 값의 부호에 따라 함수 $f(x)$ 의 증감표를 그린 후, 함수 $y = f(x)$ 의 극값을 모두 구한다.
② 단계	극값의 합이 p 가 되도록 하는 k 의 조건을 구한 후, 함수 $f_5(x), f_{12}(x)$ 를 각각 구한다.
③ 단계	$\int_{-1}^0 f_5(x) dx + \int_0^1 f_{12}(x) dx$ 의 값을 구한다.

$$f(x) = \begin{cases} 4k(x-2) & (x \leq 0) \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8k & (x > 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4k & (x < 0) \\ 6x^2 - 18x + 12 & (x > 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4k & (x < 0) \\ 6(x-1)(x-2) & (x > 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 k 의 부호에 따라 표로 나타

내면 다음과 같다.

(i) $k < 0$ 일 때,

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-		+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 극

솟값 $f(0) = -8k$, $x=1$ 일

때 극댓값 $f(1) = 5-8k$,

$x=2$ 일 때 극솟값

$f(2) = 4-8k$ 를 가지므로

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

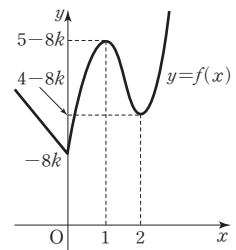
모든 극값의 합이 p 가 되어야 하므로

$$-8k + 5 - 8k + 4 - 8k = p$$

$$9 - 24k = p \quad \therefore k = \frac{9-p}{24}$$

(ii) $k > 0$ 일 때,

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+		+	0	-	0	+
$f(x)$	/		/	극대	\	극소	/



함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때

극댓값 $f(1)=5-8k$,

$x=2$ 일 때 극솟값

$f(2)=4-8k$ 를 가지므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같다.

모든 극값의 합이 p 가 되어야 하므로

$$5-8k+4-8k=p, \quad 9-16k=p$$

$$\therefore k=\frac{9-p}{16}$$

(i), (ii)에서

$$\frac{9-p}{24}<0, \text{ 즉 } p>9\text{일 때, } k=\frac{9-p}{24}$$

$$\frac{9-p}{16}>0, \text{ 즉 } p<9\text{일 때, } k=\frac{9-p}{16}$$

함수 $f_5(x)$ 는 $p=5$ 일 때이므로

$$k=\frac{9-5}{16}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore f_5(x)=\begin{cases} x-2 & (x\leq 0) \\ 2x^3-9x^2+12x-2 & (x>0) \end{cases}$$

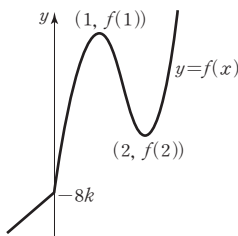
함수 $f_{12}(x)$ 는 $p=12$ 일 때이므로

$$k=\frac{9-12}{24}=-\frac{1}{8}$$

$$\therefore f_{12}(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2) & (x\leq 0) \\ 2x^3-9x^2+12x+1 & (x>0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^0 f_5(x) dx + \int_0^1 f_{12}(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x-2) dx + \int_0^1 (2x^3-9x^2+12x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2-2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2+x \right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{2}+2\right) + \left(\frac{1}{2}-3+6+1\right) = 2 \end{aligned}$$

답 2



06 해결단계

① 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 $x\geq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 가 위치할 수 있는 영역을 구하고, $\int_0^t f(x) dx = t^2$ 을 만족시키는 t 의 값이 존재함을 이용하여 $0\leq x\leq t$ ($0<t<4$)에서 $f(x)=2x$ 임을 구한다.
② 단계	$x=0$ 에서 미분가능함을 이용하여 a 의 값과 $x<0$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.
③ 단계	조건 (다)를 이용하여 $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 구하고 $0<t<2$ 임을 파악한 후, $t<x<2$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.
④ 단계	$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 이용하여 구하고자 하는 실수 t 의 최댓값을 구한다.
⑤ 단계	p, q 의 값을 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

조건 (가)에서 $x<0$ 일 때, $f(x)=ax^2+2ax$ 이므로

$$f(0) = \lim_{x\rightarrow 0^-} (ax^2+2ax) = 0$$

조건 (나)에서 $x_2-x_1>0$ 이므로 각 변을 x_2-x_1 로 나누면

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 2$$

$0\leq x_1<x_2$ 인 임의의 두 점 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 를

지나는 직선의 기울기는 항상 $\frac{1}{2}$ 이상 2 이하이어야 한다.

즉, $x\geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고

$$\frac{1}{2}x \leq f(x) \leq 2x \quad (\because f(0)=0) \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이때, $\int_0^t 2x dx = \left[x^2 \right]_0^t = t^2$ 이고 $\int_0^t f(x) dx = t^2$ 인 실수 t ($0<t<4$)가 존재하므로 $0\leq x\leq t$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=2x$ 이다.

또한, $\lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2$ 이고, 함수

$f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2\text{이어야 한다.}$$

그런데 $x<0$ 일 때, $f(x)=ax^2+2ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\rightarrow 0^-} \frac{ax^2+2ax}{x} \\ &= \lim_{x\rightarrow 0^-} (ax+2a) \\ &= 2a=2 \end{aligned}$$

$$\therefore a=1, f(x)=x^2+2x \quad (x<0)$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= -\left(-\frac{8}{3}+4\right) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

이므로 조건 (다)에 의하여

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= -\frac{4}{3} + \int_0^2 f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

한편, $\int_0^2 2x dx = \left[x^2 \right]_0^2 = 4 > \frac{4}{3}$ 이므로

$\int_0^t f(x) dx = t^2$ 을 만족시키는 양수 t 의 최댓값을 k 라 하면 $0<k<2$

$k\leq x\leq 2$ 에서의 함수 $f(x)$ 를 $g(x)$ 라 하면 양수 t 의 최댓값 k 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_k^2 g(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx - \int_0^k f(x) dx \\ &= \frac{4}{3} - k^2 \end{aligned}$$

이므로 $\int_k^2 g(x) dx$ 의 값은 최소이어야 한다.

즉, $\textcircled{7}$ 에 의하여 함수 $g(x)$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(k, 2k)$ 를 지나는 직선이어야 한다.

$$y-2k = \frac{1}{2}(x-k) \text{에서 } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}k$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}k \quad (k \leq x \leq 2)$$

따라서 $x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & (x < 0) \\ 2x & (0 \leq x < k) \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}k & (k \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^k 2x dx + \int_k^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}k \right) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^k + \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}kx \right]_k^2 \\ &= k^2 + (1+3k) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{2}k^2 \right) \\ &= -\frac{3}{4}k^2 + 3k + 1 = \frac{4}{3} \quad (\because \text{㉔}) \end{aligned}$$

$$9k^2 - 36k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 2 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 2)$$

그러므로 $p=2$, $q=-\frac{4}{3}$ 이므로

$$6pq = 6 \times 2 \times \left(-\frac{4}{3} \right) = -16 \quad \text{답} -16$$

이것이 수능

p. 69

1 ① 2 137 3 ② 4 ②

1 해결단계

① 단계	주어진 조건을 이용하여 함수 $h(x)$ 가 기함수, 즉 원점에 대하여 대칭임을 파악한다.
② 단계	기함수 $h(x)$ 에 대하여 $h'(x)$ 는 우함수, $xh'(x)$ 는 기함수임을 파악한다.
③ 단계	$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x) dx = 10$ 을 이용하여 $h(3)$ 의 값을 구한다.

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x) \text{이므로}$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{에서}$$

$$h(-x) = f(-x)g(-x)$$

$$= -f(x)g(x)$$

$$= -h(x)$$

즉, $h(x)$ 는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이므로

$h(0)=0$ 이고, $h'(x)$ 는 우함수, $xh'(x)$ 는 기함수이다.

이때, $\int_{-3}^3 (x+5)h'(x) dx = 10$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \{xh'(x) + 5h'(x)\} dx &= \int_{-3}^3 5h'(x) dx \\ &= 2 \int_0^3 5h'(x) dx \\ &= 10 \int_0^3 h'(x) dx \\ &= 10 \left[h(x) \right]_0^3 \\ &= 10 \{h(3) - h(0)\} \\ &= 10h(3) \quad (\because h(0)=0) \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore h(3) = 1$$

답 ①

2

해결단계

① 단계	주어진 조건에 따라 함수 $g(x)$ 의 식을 $f(x)$ 를 이용하여 나타낸다.
② 단계	함수 $g(x)$ 가 열린구간 $(-1, 5)$ 에서 미분가능함을 이용하여 $f(0)$, $f'(0)$ 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	②단계에서 구한 것과 조건 ㉔를 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구한다.
④ 단계	$\int_0^4 g(x) dx$ 의 값을 구하여 p , q 의 값을 구한 후, $p+q$ 의 값을 구한다.

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) - 1 & (-1 \leq x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x < 1) \\ f(x-1) + 1 & (1 \leq x < 2) \\ f(x-2) + 2 & (2 \leq x < 3) \\ f(x-3) + 3 & (3 \leq x < 4) \\ f(x-4) + 4 & (4 \leq x < 5) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x-1) + 1\} = f(0) + 1$$

$$f(0) + 1 = f(1) = 1 \quad (\because \text{조건 ㉔})$$

$$\therefore f(0) = 0, \quad g(1) = f(0) + 1 = 1 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

또한, 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서의 미분계수가 존재한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1) = 1 \quad (\because \text{조건 ㉔}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x-1) + 1 - g(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x-1)}{x-1} \quad (\because g(1)=1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

$$\text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \text{이므로}$$

$$f'(0) = 1 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

조건 ㉔에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수)라 하면

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}에서 c=1, d=0$$

또한, 조건 $\textcircled{㉢}$ 에서

$$f(1)=1+a+b+1=1 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$f'(1)=4+3a+2b+1=1 \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$

$$\therefore f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$$

$$\int_0^4 g(x) dx$$

$$=\int_0^1 g(x) dx + \int_1^2 g(x) dx + \int_2^3 g(x) dx$$

$$+ \int_3^4 g(x) dx$$

$$=\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 \{f(x-1)+1\} dx$$

$$+ \int_2^3 \{f(x-2)+2\} dx + \int_3^4 \{f(x-3)+3\} dx$$

$$=4\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 3dx$$

$$=4\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[x\right]_1^2 + \left[2x\right]_2^3 + \left[3x\right]_3^4$$

$$=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+1+2+3$$

$$=\frac{32}{15}+6=\frac{122}{15}$$

따라서 $p=15, q=122$ 이므로

$$p+q=15+122=137$$

답 137

3

해결단계

① 단계	미분을 이용하여 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.
② 단계	$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) \geq 0$ 을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위를 구한다.
③ 단계	②단계의 결과를 이용하여 양수 a 의 최솟값을 구한다.

$$F(x)=\int_0^x f(t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$F'(x)=f(x)=x^3-3x+a$$

이때, $F(x)$ 는 사차함수이고, 사차함수 $F(x)$ 가 오직 하나의 극값을 갖기 위해서는 함수 $F(x)$ 의 도함수인 삼차함수 $f(x)$ 의 부호가 오직 한 번만 바뀌어야 한다. 즉, 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나거나 접해야 한다.

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 에 대하여 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) \geq 0$ 이어야 하고,

$$f(-1)=a+2, f(1)=a-2 \text{이므로}$$

$$f(-1)f(1) \geq 0 \text{에서 } (a+2)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a 의 최솟값은 2이다.

답 ②

4

해결단계

① 단계	함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값을 가지면 $f'(\frac{1}{2})=0$ 임을 이용하여 a 또는 b 의 값을 구한다.
② 단계	함수 $f(x)$ 를 조건 $\textcircled{㉢}$ 의 식에 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
③ 단계	①, ②단계에서 구한 식을 연립하여 조건을 만족시키는 a, b 의 값을 각각 구한 후, $a+b$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=\int_0^x (t-a)(t-b) dt \text{에서}$$

$$f'(x)=(x-a)(x-b)$$

조건 $\textcircled{㉢}$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(\frac{1}{2})=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } b=\frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

또한, 조건 $\textcircled{㉢}$ 에서

$$f(a)-f(b)$$

$$=\int_0^a (t-a)(t-b) dt - \int_0^b (t-a)(t-b) dt$$

$$=\int_0^a (t-a)(t-b) dt + \int_b^0 (t-a)(t-b) dt$$

$$=\int_b^a (t-a)(t-b) dt$$

$$=\int_b^a \{t^2-(a+b)t+ab\} dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a+b}{2}t^2+abt\right]_b^a$$

$$=\frac{1}{3}(a^3-b^3)-\frac{a+b}{2}(a^2-b^2)+ab(a-b)$$

$$=\frac{a-b}{6}\{2(b^2+ab+a^2)-3(a+b)^2+6ab\}$$

$$=\frac{(b-a)^3}{6}=\frac{1}{6}$$

$$(b-a)^3=1, b-a=1 \quad \therefore b=a+1$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2} \text{ 또는 } a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} (\because \textcircled{㉠})$$

그런데 a, b 는 모두 양수이므로 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$

$$\therefore a+b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

답 ②

07 정적분의 활용

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제

p. 71

01 2 02 ② 03 ② 04 ① 05 ③
06 ③ 07 80 m 08 4

01 곡선 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3-(a+1)x^2+ax=0$ 에서 $x\{x^2-(a+1)x+a\}=0$, $x(x-1)(x-a)=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=a$

이때, $a>1$ 이므로 곡선

$y=f(x)$ 는 오른쪽 그림과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로 $\int_0^a f(x)dx=0$, 즉

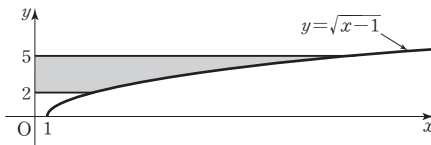
$$\begin{aligned} \int_0^a \{x^3-(a+1)x^2+ax\} dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+1)x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}(a+1)a^3 + \frac{1}{2}a^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{6}a^3 = 0, a^4 - 2a^3 = 0$$

$$a^3(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a>1)$$

답 2

02



$y=\sqrt{x-1}$ 의 양변을 제곱하면

$$y^2=x-1 \quad \therefore x=y^2+1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_2^5 (y^2+1) dy &= \left[\frac{1}{3}y^3 + y \right]_2^5 \\ &= \left(\frac{125}{3} + 5 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 \right) \\ &= 39 + 3 = 42 \end{aligned}$$

답 ②

03

곡선 $y=x^2-3$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-3=2x \text{에서}$$

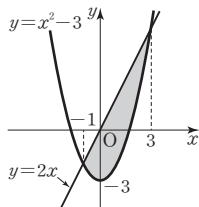
$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^3 \{2x - (x^2-3)\} dx = \int_{-1}^3 (-x^2+2x+3) dx$$



04

두 곡선 $y=3x^2-6x-4$, $y=-x^2+2x+8$ 의 교점의 x 좌표는 $3x^2-6x-4=-x^2+2x+8$ 에서 $4x^2-8x-12=0$, $x^2-2x-3=0$
 $(x+1)(x-3)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
 따라서 두 곡선 $y=3x^2-6x-4$, $y=-x^2+2x+8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \{(-x^2+2x+8) - (3x^2-6x-4)\} dx \\ = \int_{-1}^3 (-4x^2+8x+12) dx = -4 \int_{-1}^3 (x^2-2x-3) dx \\ = -4 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 \\ = -4 \left\{ (9-9-9) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) \right\} \\ = -4 \times \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{128}{3} \\ \therefore p=3, q=128 \\ \therefore p+q=3+128=131 \end{aligned}$$

답 ①

• 다른풀이 •

두 곡선 $y=3x^2-6x-4$, $y=-x^2+2x+8$ 의 교점의 x 좌표가 $x=-1$ 또는 $x=3$ 이므로 두 곡선 $y=3x^2-6x-4$, $y=-x^2+2x+8$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \{(-x^2+2x+8) - (3x^2-6x-4)\} dx \\ = \int_{-1}^3 (-4x^2+8x+12) dx \\ = \frac{-4}{6} \{3 - (-1)\}^3 = \frac{128}{3} \\ \therefore p=3, q=128 \quad \therefore p+q=3+128=131 \end{aligned}$$

05

$$y=x^3-x^2-x+2 \text{에서 } y'=3x^2-2x-1$$

곡선 $y=x^3-x^2-x+2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기

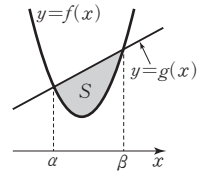
$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= (-9+9+9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \\ &= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

답 ②

blacklabel 특강 필수 공식

곡선 $f(x)=ax^2+bx+c$ 와 직선 $g(x)=mx+n$ 의 교점의 x 좌표가 α , β ($\alpha<\beta$)일 때, 곡선 $f(x)=ax^2+bx+c$ 와 직선 $g(x)=mx+n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$



을기는

$$y'_{x=1} = 3 - 2 - 1 = 0$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = 0(x - 1) \quad \therefore y = 1$$

이때, 곡선 $y = x^3 - x^2 - x + 2$

와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표

는 $x^3 - x^2 - x + 2 = 1$ 에서

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0, (x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{(x^3 - x^2 - x + 2) - 1\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ③

06 $g(1) = a$ 라 하면 $f(a) = 1$ 이므로

$$a^3 + a - 1 = 1, a^3 + a - 2 = 0$$

$$(a - 1)(a^2 + a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \left(\because a^2 + a + 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right)$$

또한, $g(9) = b$ 라 하면 $f(b) = 9$ 이므로

$$b^3 + b - 1 = 9, b^3 + b - 10 = 0$$

$$(b - 2)(b^2 + 2b + 5) = 0$$

$$\therefore b = 2 \left(\because b^2 + 2b + 5 = (b + 1)^2 + 4 > 0 \right)$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 함

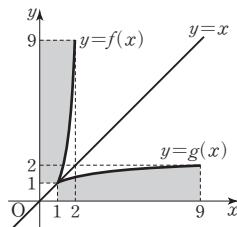
수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 의 그래프

를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이

동한 것과 같으므로 오른쪽 그

림과 같고 어두운 부분의 넓이

는 서로 같다.



$$\begin{aligned} \therefore \int_1^9 g(x) dx &= 18 - 1 - \int_1^2 f(x) dx \\ &= 18 - 1 - \int_1^2 (x^3 + x - 1) dx \\ &= 17 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= 17 - \frac{17}{4} = \frac{51}{4} \end{aligned}$$

답 ③

07 속도가 $v(t) = 30 - 10t$ (m/s)인 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서 } 30 - 10t = 0$$

$$10t = 30 \quad \therefore t = 3$$

이때, 지상 35 m 높이에서 로켓을 쏘아 올렸으므로 구하는 최고 높이는

$$\begin{aligned} 35 + \int_0^3 (30 - 10t) dt &= 35 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 \\ &= 35 + (90 - 45) \end{aligned}$$

$$= 80 \text{ (m)}$$

답 80 m

08 주어진 그래프에서

$$v(t) = \begin{cases} \frac{2k}{3}t & (0 \leq t < 3) \\ -\frac{2k}{3}t + 4k & (3 \leq t < 6) \\ -\frac{k}{2}t + 3k & (6 \leq t \leq 8) \end{cases}$$

점 P의 8초에서의 위치가 $\frac{20}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^8 v(t) dt &= \frac{20}{7} \text{에서} \\ \int_0^3 \frac{2k}{3}t dt + \int_3^6 \left(-\frac{2k}{3}t + 4k\right) dt + \int_6^8 \left(-\frac{k}{2}t + 3k\right) dt \\ &= \left[\frac{k}{3}t^2\right]_0^3 + \left[-\frac{k}{3}t^2 + 4kt\right]_3^6 + \left[-\frac{k}{4}t^2 + 3kt\right]_6^8 \\ &= 3k + (12k - 9k) + (8k - 9k) \\ &= 5k = \frac{20}{7} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{4}{7}$$

따라서 출발 후 8초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^8 |v(t)| dt &= \int_0^3 \frac{2k}{3}t dt + \int_3^6 \left(-\frac{2k}{3}t + 4k\right) dt + \int_6^8 \left(\frac{k}{2}t - 3k\right) dt \\ &= \left[\frac{k}{3}t^2\right]_0^3 + \left[-\frac{k}{3}t^2 + 4kt\right]_3^6 + \left[\frac{k}{4}t^2 - 3kt\right]_6^8 \\ &= 3k + (12k - 9k) + (-8k + 9k) \\ &= 7k = 7 \times \frac{4}{7} = 4 \end{aligned}$$

답 4

• 다른풀이 •

직선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $x = a$, $x = b$ 및 x 축으로 둘러

싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)| dx$

$$f(x) \geq 0 \text{일 때, } \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) < 0 \text{일 때, } \int_a^b |f(x)| dx = -\int_a^b f(x) dx$$

점 P의 8초에서의 위치가 $\frac{20}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^8 v(t) dt &= \frac{20}{7} \text{에서} \\ \int_0^6 v(t) dt + \int_6^8 v(t) dt &= \frac{20}{7} \\ \frac{1}{2} \times 6 \times 2k - \frac{1}{2} \times 2 \times k &= 5k = \frac{20}{7} \\ \therefore k &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

따라서 출발 후 8초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^8 |v(t)| dt &= \int_0^6 v(t) dt - \int_6^8 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 2k + \frac{1}{2} \times 2 \times k \\ &= 7k = 7 \times \frac{4}{7} = 4 \end{aligned}$$

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 72~76

01 6	02 80	03 40	04 2	05 $\frac{8}{3}$
06 ④	07 ⑤	08 ③	09 $\frac{9}{4}$	10 6
11 243	12 ②	13 ④	14 16	15 ③
16 $\frac{64}{3}$	17 ⑤	18 13	19 ⑤	20 $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$
21 16	22 16	23 85	24 ⑤	25 ③
26 9	27 90 m	28 ⑤	29 ④	30 4
31 ⑤	32 ③			

01 $f(x) = x^2 - 6x + a = (x-3)^2 + a - 9$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore S_A = \int_0^{\alpha} f(x) dx,$$

$$S_B = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = 2 \int_{\alpha}^3 |f(x)| dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -2 \int_{\alpha}^3 f(x) dx \quad (\because \alpha < x < 3 \text{에서 } f(x) < 0)$$

이때, $S_A : S_B = 1 : 2$ 에서 $2S_A = S_B$, 즉 $S_A = \frac{1}{2}S_B$ 이므로

$$\int_0^{\alpha} f(x) dx = - \int_{\alpha}^3 f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^3 f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^3 (x^2 - 6x + a) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + ax \right]_0^3$$

$$= 9 - 27 + 3a = 0$$

$$3a = 18 \quad \therefore a = 6$$

답 6

02 주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \leq 9) \\ -2x + 36 & (x > 9) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 9$ 에서 $0 \leq g(x) \leq 9$ 이므로

$$0 \leq x \leq 9 \text{에서 } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 닫힌구간 $[0, 9]$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 40이므로

$$\int_0^9 g(x) dx = 40$$

$$\therefore \int_0^9 (f \circ g)(x) dx = \int_0^9 2g(x) dx \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 2 \int_0^9 g(x) dx$$

$$= 2 \times 40 = 80$$

답 80

03 $\int_0^{2013} f(x) dx = \int_3^{2013} f(x) dx$ 에서

$$\int_0^3 f(x) dx + \int_3^{2013} f(x) dx = \int_3^{2013} f(x) dx$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = 0$$

이때, 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고,

$f(3) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-3)(x-a)$ (a 는 상수)라 할 수 있고

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x-3)(x-a) dx$$

$$= \int_0^3 \{x^2 - (a+3)x + 3a\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax \right]_0^3$$

$$= 9 - \frac{9}{2}(a+3) + 9a$$

$$= \frac{9}{2}a - \frac{9}{2} = 0$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로

둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$$

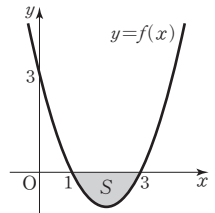
$$= - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= - \left\{ (9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right\} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 30S = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

답 40



04 두 도형 A, B 에 대하여 (A 의 넓이) $<$ (B 의 넓이)이므로 오른쪽 그림과 같이

(A 의 넓이) = (B_1 의 넓이)가

성립하도록 도형 B 를 두 도형

B_1, B_2 로 나누는 직선을

$x = a$ ($1 < a < 3$)라 하면

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_1^a |f(x)| dx$$

$$\text{즉, } \int_0^1 f(x) dx = - \int_1^a f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^a f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^a f(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $x \geq 3$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형을 C 라 하고, (B_2 의 넓이) = (C_1 의 넓이)가 성립하도록

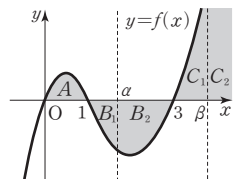
도형 C 를 두 도형 C_1, C_2 로 나누는 직선을

$x = \beta$ ($\beta > 3$)라 하면

$$\int_a^{\beta} |f(x)| dx = \int_3^{\beta} |f(x)| dx$$

$$\text{즉, } - \int_a^{\beta} f(x) dx = \int_3^{\beta} f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_a^{\beta} f(x) dx + \int_3^{\beta} f(x) dx = 0$$



$$\therefore \int_a^\beta f(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

⑦, ①을 변끼리 더하면

$$\int_0^a f(x) dx + \int_a^\beta f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^\beta f(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{E}$$

한편, $t > \beta$ 인 모든 t 에 대하여 $f(t) > 0$ 이므로

$$\int_\beta^t f(x) dx > 0 \quad \therefore \int_0^t f(x) dx > 0$$

$$\underbrace{\int_0^t f(x) dx}_{= \int_0^\beta f(x) dx + \int_\beta^t f(x) dx}$$

따라서 $\int_0^x f(t) dt = 0$ 을 만족시키는 x 는 ⑦, ①에 의하여

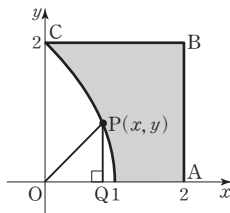
α, β 의 2개이다.

답 2

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

피분함수의 그래프를 보고 적분함수의 그래프의 개형을 유추하는 문제는 수능 및 대학별고사에서 자주 출제되므로 반드시 기억해 두도록 한다. $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 할 때, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 함수 $F(x)$ 는 증가하고, 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 함수 $F(x)$ 는 감소한다. 이때, $(A$ 의 넓이) $<(B$ 의 넓이)이므로 $a \in (1, 3)$ 이고 $\int_0^a f(x) dx = 0$ 인 a 가 존재한다. 구간 $[3, \infty)$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로 함수 $F(x)$ 는 증가하고 $\beta \in (3, \infty)$ 이고 $\int_0^\beta f(x) dx = 0$ 인 β 가 존재한다.

05 정사각형 OABC를 점 O가 원점, 변 OA가 x 축, 변 OC가 y 축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면 A(2, 0), B(2, 2), C(0, 2)이다.



점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 이고 점 Q의 좌표는 $(x, 0)$ 이므로

$\overline{OP} + \overline{OQ} = 2$ 에서

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 2 \quad \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x$$

위의 등식의 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4, 4x = -y^2 + 4$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4}y^2 + 1 \quad (\text{단, } 0 \leq y \leq 2)$$

이때, 점 P가 그리는 곡선에 의하여 나누어지는 정사각형 OABC의 두 도형 중에서 작은 도형은 $0 \leq y \leq 2$ 에서

곡선 $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형이

므로 그 넓이는

$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}y^2 + 1\right) dy = \left[-\frac{1}{12}y^3 + y\right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

따라서 구하는 큰 도형의 넓이를 S라 하면

$S = (\text{정사각형 OABC의 넓이}) - (\text{작은 도형의 넓이})$

$$= 2^2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

함수의 식이 직접 주어지지 않는 문제에서는 함수의 식을 구할 수 있어야 한다. 이때, 움직이는 점의 좌표를 (x, y) 라 하고, 주어진 조건들을 이용하여 x 와 y 의 관계를 찾아내는 것이 중요하다.

이 문제에서는 점 O를 원점으로 잡고, P(x, y), Q(x, 0)으로 두면 $\overline{OP} = 2 - x$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 \text{에서 } (2-x)^2 = x^2 + y^2$$

따라서 $y = 2\sqrt{1-x}$ ($0 < x < 1$)이므로 정적분하여 넓이를 구할 수 있다.

06 $f(x) = \int_0^1 t|t-x| dt$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때,

$0 < t < 1$ 에서 $t-x > 0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^1 t|t-x| dt$$

$$= \int_0^1 t(t-x) dt = \int_0^1 (t^2 - xt) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{x}{2}t^2 \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$0 < t < x$ 에서 $t-x < 0, x < t < 1$ 에서 $t-x > 0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^1 t|t-x| dt$$

$$= \int_0^x (-t^2 + xt) dt + \int_x^1 (t^2 - xt) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{x}{2}t^2 \right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{x}{2}t^2 \right]_x^1$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$0 < t < 1$ 에서 $t-x < 0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^1 t|t-x| dt$$

$$= \int_0^1 (-t^2 + xt) dt$$

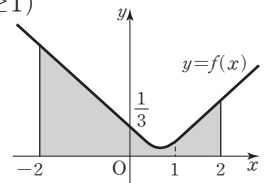
$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{x}{2}t^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} & (x < 0) \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-2, x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) dx \\
 & \quad + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_0^1 \\
 & \quad + \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x\right]_1^2 \\
 &= -\left(-1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\
 & \quad - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \\
 &= \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

답 ④

07 $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{k-1}{k}x + 1}$
 $= 2 - \sqrt{\frac{k-1}{k}\left(x + \frac{k}{k-1}\right)}$

이므로 무리함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y = 2 - \sqrt{\frac{k-1}{k}x + 1}$ 에서

$y - 2 = -\sqrt{\frac{k-1}{k}x + 1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = \frac{k-1}{k}x + 1$

$\therefore x = \frac{k}{k-1}(y^2 - 4y + 3)$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $g(k)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g(k) &= \int_0^1 \frac{k}{k-1}(y^2 - 4y + 3) dy \\
 &= \frac{k}{k-1} \left[\frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y \right]_0^1 \\
 &= \frac{k}{k-1} \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) = \frac{4k}{3(k-1)}
 \end{aligned}$$

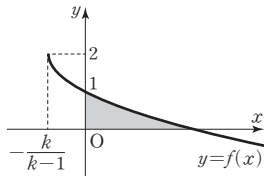
ㄱ. $g(2) = \frac{8}{3}$ (참)

ㄴ. $k > 1$ 이므로 $\frac{k}{k-1} > 0$

즉, $\frac{3k}{2(k-1)} > \frac{4k}{3(k-1)} \left(\because \frac{3}{2} > \frac{4}{3} \right)$ 이므로

$g(k) < \frac{3k}{2k-2}$ (참)

ㄷ. 곡선 $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{k-1}{k}x + 1}$ 과 y 축의 교점은 점 $(0, 1)$ 이고, 이 점에서의 접선 l 은 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x) = \frac{k}{k-1}(x^2 - 4x + 3)$ ($x \leq 2$)의 그래프



위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선 l' 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$y = \frac{k}{k-1}(x^2 - 4x + 3)$ 에서 $y' = \frac{k}{k-1}(2x - 4)$ 이므로 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2k}{k-1}$ 이고 접선 l' 의 방정식은

$y = -\frac{2k}{k-1}(x-1)$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선 l 은

$x = -\frac{2k}{k-1}(y-1)$, 즉

$y = -\frac{k-1}{2k}x + 1$ 이므로

오른쪽 그림과 같고 접선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{2k}{k-1} \times 1 = \frac{k}{k-1}$

$g(k) = \frac{4}{3} \times \frac{k}{k-1}$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{3}{4}g(k)$ 이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

• 다른풀이 •

ㄴ. $k > 1$ 이므로 무리함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록하다.

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축, y 축과 만나는 점

이 각각 $\left(\frac{3k}{k-1}, 0\right)$, $(0, 1)$ 이고, 이 두 점을 지나는

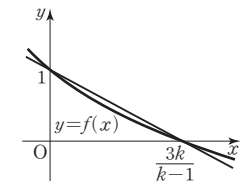
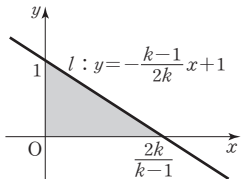
직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{3k}{k-1} \times 1 = \frac{3k}{2k-2}$

위의 그래프에서 두 점 $\left(\frac{3k}{k-1}, 0\right)$, $(0, 1)$ 을 지나는

직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이보다 크므로

$g(k) < \frac{3k}{2k-2}$ (참)



08 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2=ax$ 에서 $x^2-ax=0$

$x(x-a)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=a$

$S = \int_0^a (ax - x^2) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a$

$= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{6}a^3$

$$\begin{aligned} T &= \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$S+T=f(a)$ 라 하면

$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2} = 0 \text{에서 } a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	(1)
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		\	극소	/	

함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(a)$,

즉 $S+T$ 가 최소가 되도록 하는 실수 a 의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

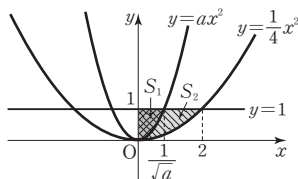
답 ③

09 $x \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=ax^2$ ($a > \frac{1}{2}$)과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^2=1 \text{에서 } x^2=\frac{1}{a} \quad \therefore x=\frac{1}{\sqrt{a}} \quad (\because x \geq 0)$$

또한, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2=1 \text{에서 } x^2=4 \quad \therefore x=2 \quad (\because x \geq 0)$$



이때, 두 곡선 $y=ax^2$ ($a > \frac{1}{2}$), $y=\frac{1}{4}x^2$ 은 각각 y 축에 대하여 대칭이므로 위의 그림과 같이 곡선

$y=ax^2$ ($a > \frac{1}{2}$)과 y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $3S_1=S_2$ 이다. 즉,

$$3 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1 - ax^2) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

$$3 \left[x - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \left[x - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^2$$

$$3 \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{3\sqrt{a}} \right) = 2 - \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

• 다른풀이 •

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1

이라 하면 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2=1 \text{에서 } x^2=4 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

즉, 두 교점의 좌표는 $(-2, 1)$, $(2, 1)$ 이므로

$$T_1 = \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{12}x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{24} \times 64 = \frac{8}{3}$$

또한, 곡선 $y=ax^2$ ($a > \frac{1}{2}$)과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도

형의 넓이를 T_2 라 하면 교점의 x 좌표는

$$ax^2=1 \text{에서 } x^2=\frac{1}{a} \quad \therefore x=-\frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 또는 } x=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

즉, 두 교점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 1\right)$ 이므로

$$T_2 = \int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1 - ax^2) dx$$

$$= \left[x - \frac{a}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{2}{3\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a}{6} \times \frac{8}{a\sqrt{a}} \quad (\because a > \frac{1}{2})$$

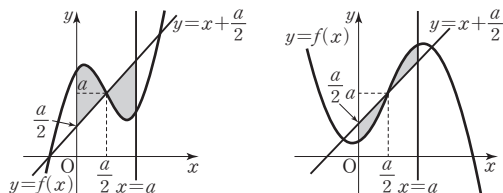
$$= \frac{4}{3\sqrt{a}}$$

이때, $T_1=3T_2$ 이므로 $\frac{8}{3}=3 \times \frac{4}{3\sqrt{a}}$

$$2\sqrt{a}=3, \quad 4a=9 \quad \therefore a=\frac{9}{4}$$

10 $f(x)+f(a-x)=2a$ 에서 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{a}{2}, a\right)$ 에 대하여 대칭이다.

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x+\frac{a}{2}$ 가 서로 다른 세 점에서 만나므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 다음 그림과 같다.



이때, 위의 그래프에서 어두운 부분의 넓이가 각각 같으

므로 $\int_0^a f(x) dx$ 의 값은 두 직선 $y=x+\frac{a}{2}$ 와

$x=a$ 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이와 같다.

$$\therefore \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a \right) \times a = a^2$$

$$\int_0^a \{f(x) - x\} dx = 18 \text{이므로}$$

$$\int_0^a f(x) dx - \int_0^a x dx = a^2 - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^a$$

$$= a^2 - \frac{1}{2}a^2$$

$$= \frac{1}{2}a^2 = 18$$

즉, $a^2=36$ 에서 $a=6$ ($\because a>0$)

답 6

11 두 점 $P(t, t^2)$, $Q(g(t), \{g(t)\}^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - t^2 = \frac{\{g(t)\}^2 - t^2}{g(t) - t} (x - t)$$

$$y = \{g(t) + t\}(x - t) + t^2$$

$$\therefore y = \{g(t) + t\}x - t g(t)$$

선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 36이므로

$$\int_t^{g(t)} [\{g(t) + t\}x - t g(t) - x^2] dx$$

$$= \left[\frac{g(t)+t}{2} x^2 - t g(t) x - \frac{1}{3} x^3 \right]_t^{g(t)}$$

$$= \frac{g(t)+t}{2} [\{g(t)\}^2 - t^2] - t g(t) \{g(t) - t\} - \frac{1}{3} [\{g(t)\}^3 - t^3]$$

$$= \frac{g(t)-t}{6} [\{g(t)\}^2 - 2t g(t) + t^2]$$

$$= \frac{\{g(t)-t\}^3}{6} = 36$$

$$\{g(t)-t\}^3 = 6^3, g(t)-t = 6 \quad (\because t < g(t))$$

$$\therefore g(t) = t + 6$$

따라서 $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(t+6) = (t+6)^2$ 이므로

$$\int_{-6}^3 (f \circ g)(t) dt = \int_{-6}^3 (t+6)^2 dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}(t+6)^3 \right]_{-6}^3$$

$$= \frac{1}{3} \times 9^3 = 243$$

답 243

12 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이고, 이 직선과 곡선 $y = ax^2$ ($a > 0$)의 교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$-\frac{3}{2}p + 3 = ap^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore S_1 = \int_0^p \left\{ \left(-\frac{3}{2}x + 3 \right) - ax^2 \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{3}ax^3 \right]_0^p$$

$$= -\frac{3}{4}p^2 + 3p - \frac{1}{3}ap^3$$

$$= -\frac{3}{4}p^2 + 3p - \frac{1}{3}p \left(-\frac{3}{2}p + 3 \right) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -\frac{1}{4}p^2 + 2p \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, $S_1 + S_2 = \triangle BOA = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ 이고,

$S_1 : S_2 = 13 : 3$ 이므로

$$S_1 = \triangle BOA \times \frac{13}{16} = 3 \times \frac{13}{16} = \frac{39}{16} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $-\frac{1}{4}p^2 + 2p = \frac{39}{16}$ 이므로

$$4p^2 - 32p + 39 = 0, (2p-3)(2p-13) = 0$$

$$\therefore p = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < p < 2)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{4}a = -\frac{9}{4} + 3 = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

답 ②

13 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 2$

점점의 좌표를 $(a, a^2 - 2a + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 2a - 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^2 - 2a + 3) = (2a - 2)(x - a)$$

$$\therefore y = (2a - 2)x - a^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = 2a - 2 - a^2 + 3$

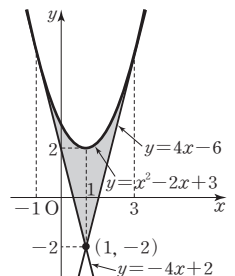
$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

이것을 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 두 접선의 방정식은

$$y = -4x + 2, y = 4x - 6$$

위의 두 접선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는 각각 점점의 x 좌표이므로 $-1, 3$ 이고, 두 접선의 교점의 x 좌표는 1 이므로 주어진 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는



$$S = \int_{-1}^1 \{(x^2 - 2x + 3) - (-4x + 2)\} dx$$

$$+ \int_1^3 \{(x^2 - 2x + 3) - (4x - 6)\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_1^3$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} + 1 \right) + \left\{ (9 - 27 + 27) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 \right) \right\}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\therefore 12S = 12 \times \frac{16}{3} = 64$$

답 ④

blacklabel 특강 **참고**

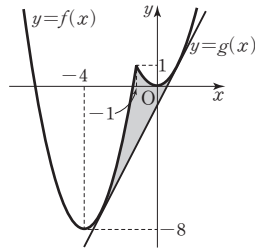
이차함수 $y=x^2-2x+3$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이고, 곡선 밖의 한 점 $(1, -2)$ 는 직선 $x=1$ 위의 점이다.
즉, 점 $(1, -2)$ 에서 곡선 $y=x^2-2x+3$ 에 그은 접선이 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=x^2-2x+3$ 과 두 접선으로 둘러싸인 도형도 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

$$\therefore S=2\int_{-1}^1 \{(x^2-2x+3)-(-4x+2)\} dx$$

14 $f(x)=(x+2)^2-|4x+4|$

$$= \begin{cases} x^2+8x+8 & (x < -1) \\ x^2 & (x \geq -1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 점에서 접하는 직선 $y=g(x)$ 는 오른쪽 그림과 같다.



$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 접점의 좌표를 (a, a^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2a$ 이고 접선의 방정식은

$$y-a^2=2a(x-a)$$

$$\therefore y=2ax-a^2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

$y=x^2+8x+8$ 에서 $y'=2x+8$ 이므로 접점의 좌표를 (b, b^2+8b+8) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $2b+8$ 이고 접선의 방정식은

$$y-(b^2+8b+8)=(2b+8)(x-b)$$

$$y=(2b+8)x-b^2+8 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 은 같은 직선이므로

$$2a=2b+8, a^2=b^2-8$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-3$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $g(x)=2x-1$

$$\therefore m=2, n=-1$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} \{(x^2+8x+8)-(2x-1)\} dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 \{x^2-(2x-1)\} dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (x^2+6x+9) dx + \int_{-1}^1 (x^2-2x+1) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (x^2+6x+9) dx + 2 \int_0^1 (x^2+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x \right]_{-3}^{-1} + 2 \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \\ \therefore (m-n)S &= \{2-(-1)\} \times \frac{16}{3} = 16 \end{aligned}$$

답 16

• 다른풀이 •

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2 - |4x+4| \\ &= \begin{cases} x^2+8x+8 & (x < -1) \\ x^2 & (x \geq -1) \end{cases} \end{aligned}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $g(x)=mx+n$ 이 두 점에서 접하므로 직선 $y=g(x)$ 는 곡선

$y=x^2+8x+8$, $y=x^2$ 과 각각 한 점에서 접해야 한다.

$$x^2+8x+8=mx+n \text{에서}$$

$$x^2+(8-m)x+8-n=0 \quad \dots\dots\textcircled{9}$$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=(8-m)^2-4(8-n)=0$$

$$\therefore m^2-16m+4n+32=0 \quad \dots\dots\textcircled{10}$$

$$x^2=mx+n \text{에서 } x^2-mx-n=0 \quad \dots\dots\textcircled{11}$$

이 이차방정식도 중근을 가지므로 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=(-m)^2+4n=0 \quad \therefore 4n=-m^2$$

위의 식을 $\textcircled{10}$ 에 대입하여 정리하면

$$-16m+32=0 \quad \therefore m=2, n=-1$$

위의 값을 $\textcircled{9}$, $\textcircled{11}$ 에 대입하여 접점의 좌표를 구하면

$$x^2+6x+9=0 \text{에서 } x=-3, y=f(-3)=-7$$

$$x^2-2x+1=0 \text{에서 } x=1, y=f(1)=1$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-3, -7)$, $(1, 1)$ 이고

$g(x)=2x-1$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (x^2+6x+9) dx + \int_{-1}^1 (x^2-2x+1) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (x+3)^2 dx + \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+3)^3 \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore (m-n)S = 3 \times \frac{16}{3} = 16$$

15 $a>0$ 이라 하자. (곡선 $y=x^3$ 은 원점에 대하여 대칭이므로 $a<0$ 일 때도 곡선 $y=x^3$ 과 접선 사이의 넓이는 같다.)

$$f(x)=x^3 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, a^3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-a^3=3a^2(x-a) \quad \therefore y=3a^2x-2a^3 \quad \dots\dots\textcircled{12}$$

위의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3=3a^2x-2a^3 \text{에서 } x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$(x+2a)(x-a)^2=0 \quad \therefore x=-2a \text{ 또는 } x=a$$

$$\therefore B(-2a, -8a^3)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점

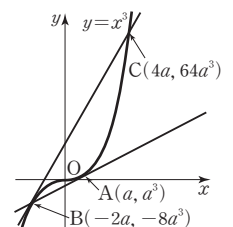
$B(-2a, -8a^3)$ 에서의 접선의

기울기는 $f'(-2a)=12a^2$ 이므로

접선의 방정식은

$$y+8a^3=12a^2(x+2a)$$

$$\therefore y=12a^2x+16a^3 \quad \dots\dots\textcircled{13}$$



위의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3=12a^2x+16a^3, x^3-12a^2x-16a^3=0$$

$$(x+2a)^2(x-4a)=0 \quad \therefore x=-2a \text{ 또는 } x=4a$$

$$\therefore C(4a, 64a^3)$$

이때, 직선 BC의 방정식은 ㉠이므로 선분 BC와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2a}^{4a} (12a^2x+16a^3-x^3) dx \\ &= \left[6a^2x^2+16a^3x-\frac{1}{4}x^4 \right]_{-2a}^{4a} \\ &= (96a^4+64a^4-64a^4)-(24a^4-32a^4-4a^4) \\ &= 108a^4 \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

직선 AB의 방정식은 ㉡이므로 선분 AB와 곡선

$y=f(x)$ 사이의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2a}^a (x^3-3a^2x+2a^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x \right]_{-2a}^a \\ &= \left(\frac{1}{4}a^4-\frac{3}{2}a^4+2a^4 \right) - (4a^4-6a^4-4a^4) \\ &= \frac{27}{4}a^4 \quad \dots\dots \text{㉢} \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{\text{㉡}}{\text{㉢}} = \frac{108a^4}{\frac{27}{4}a^4} = 108 \times \frac{4}{27} = 16 \quad \text{답 ㉢}$$

16 $f(x)=x^3-4x$, $g(x)=2x^2+ax+b$ 에서

$$f'(x)=3x^2-4, g'(x)=4x+a$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=2$ 인 점에서 접하므로 이 점에서의 함숫값이 같고, 접선의 기울기가 같다.

$$\therefore f(2)=g(2), f'(2)=g'(2)$$

$$f(2)=g(2) \text{에서}$$

$$8-8=8+2a+b \quad \therefore 2a+b=-8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(2)=g'(2) \text{에서}$$

$$12-4=8+a \quad \therefore a=0, b=-8 (\because \text{㉠})$$

$$\therefore g(x)=2x^2-8$$

한편, 두 곡선 $f(x)=x^3-4x$, $g(x)=2x^2-8$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-4x=2x^2-8$ 에서 $x^3-2x^2-4x+8=0$

$$(x+2)(x-2)^2=0$$

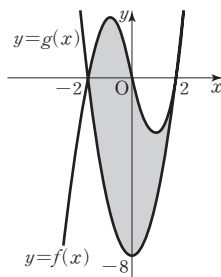
$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의

넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= \int_{-2}^2 \{(x^3-4x)-(2x^2-8)\} dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^3-2x^2-4x+8) dx \\ &= 2 \int_0^2 (-2x^2+8) dx \end{aligned}$$



$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3+8x \right]_0^2$$

$$= 2 \left(-\frac{16}{3}+16 \right)$$

$$= 2 \times \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=2$ 인 점에서 접하므로 $f(2)=g(2)$, $f'(2)=g'(2)$ 임을 이용하여 함수 $g(x)$ 의 식을 구한 경우	50%
(나)	두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구한 경우	20%
(다)	두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 경우	30%

17 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=8kx^3$,

$$y=-\frac{1}{2k}x^3 \text{의 교점은 } (0, 0) \text{이고,}$$

$$x \geq 0 \text{에서 } k > 0 \text{일 때 곡선 } y=8kx^3$$

$$\text{이 곡선 } y=-\frac{1}{2k}x^3 \text{보다 위쪽에 있}$$

$$\text{으므로 두 곡선 } y=8kx^3,$$

$$y=-\frac{1}{2k}x^3 \text{과 직선 } x=1 \text{로 둘러싸}$$

인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ 8kx^3 - \left(-\frac{1}{2k}x^3 \right) \right\} dx &= \left(8k + \frac{1}{2k} \right) \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left(8k + \frac{1}{2k} \right) \times \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(8k + \frac{1}{2k} \right) \\ &= 2k + \frac{1}{8k} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때, $k > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2k + \frac{1}{8k} \geq 2\sqrt{2k \times \frac{1}{8k}} \quad (\text{단, 등호는 } 2k = \frac{1}{8k} \text{일 때 성립})$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

따라서 ㉠은 $2k = \frac{1}{8k}$, 즉 $k = \frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

$$\therefore p = \frac{1}{4}, q = 1 \quad \therefore 16p + q = 4 + 1 = 5 \quad \text{답 ㉤}$$

18 $\triangle OAB$ 가 직각삼각형이므로 선분

OB는 원의 지름이고, 직선 OB

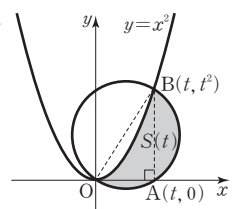
의 방정식은 $y=tx$ 이다.

이때, $\overline{OB} = \sqrt{t^2+t^4}$ 이므로 원의

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{t^2+t^4}}{2}$ 이다.

한편, $S(t)$ 는 반원의 넓이에서 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{\sqrt{t^2+t^4}}{2} \right)^2 - \int_0^t (tx-x^2) dx \\ &= \frac{(t^2+t^4)\pi}{8} - \left[\frac{t}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{8}t^4 + \frac{\pi}{8}t^2 - \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3}\right) \\
 &= \frac{\pi}{8}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{\pi}{8}t^2 \\
 S'(t) &= \frac{\pi}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{\pi}{4}t \\
 \therefore S'(1) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi-2}{4} \\
 \text{따라서 } p &= 3, q = -2 \text{이므로} \\
 p^2 + q^2 &= 9 + 4 = 13
 \end{aligned}$$

답 13

- 19 이차함수 $y=3(x-1)^2$ 의 그래프와 이 그래프를 x 축, y 축 및 원점에 대하여 각각 대칭이동한 세 곡선으로 둘러싸인 도형 S 는 x 축, y 축에 대하여 각각 대칭이므로 그 넓이는

$$\begin{aligned}
 (\text{도형 } S \text{의 넓이}) &= 4 \int_0^1 3(x-1)^2 dx \\
 &= 4 \left[(x-1)^3 \right]_0^1 \\
 &= 4\{0 - (-1)\} = 4
 \end{aligned}$$

이차함수 $y=3(x-1)^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하였으므로

$$y - k = 3(x + 1 - 1)^2$$

$$\therefore y = 3x^2 + k$$

곡선 $y=3x^2+k$ 가 도형 S 의 넓이를 이등분하므로 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이가 2이어야 한다.

두 곡선 $y=3(x-1)^2$,

$y=3x^2+k$ 의 교점의 x 좌표는

$$3(x-1)^2 = 3x^2 + k,$$

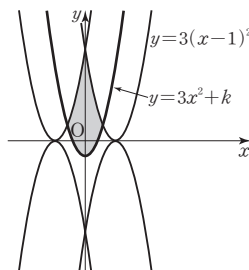
$$-6x + 3 = k$$

$$\therefore x = \frac{3-k}{6}$$

이때, 도형 S 와 곡선 $y=3x^2+k$ 가 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 어두운 부분도 y 축에 대하여 대칭이다.

즉, 두 곡선 $y=3(x-1)^2$, $y=3x^2+k$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 한다.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{3-k}{6}} \{3(x-1)^2 - (3x^2+k)\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{3-k}{6}} (-6x+3-k) dx \\
 &= \left[-3x^2 + (3-k)x \right]_0^{\frac{3-k}{6}} \\
 &= -3\left(\frac{3-k}{6}\right)^2 + \frac{(3-k)^2}{6} \\
 &= \frac{(3-k)^2}{12} = 1
 \end{aligned}$$



$$(3-k)^2 = 12, 3-k = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore k = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

그런데 곡선 $y=3x^2+k$ 가 도형 S 의 넓이를 이등분하려면 $-3 < k < 3$ 이어야 하므로

$$k = 3 - 2\sqrt{3}$$

답 ⑤

- 20 원의 중심이 y 축 위에 있으므로 원의 중심 C 의 좌표를 $(0, a)$ ($a > 0$)라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y-a)^2 = 1$$

$y=x^2$ 을 위의 식에 대입하면

$$y + (y-a)^2 = 1$$

$$y^2 - (2a-1)y + a^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

원이 곡선에 접하므로 위의 y 에 대한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0 \text{에서}$$

$$-4a+5=0, 4a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

즉, 원의 방정식은 $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$ 이다.

이때, 원과 곡선의 접점의 y 좌표는 ⑦에서

$$y^2 - \left(2 \times \frac{5}{4} - 1\right)y + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = 0$$

$$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = 0, \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}$$

이것을 $y=x^2$ 에 대입하면

$$x^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라 하면

$$\overline{CA} = 1,$$

$$\overline{CI} = \overline{CO} - \overline{IO}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

직각삼각형 CIA 에서

$$\overline{CA} : \overline{CI} : \overline{IA} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

$$\text{이므로 } \angle ACI = \frac{\pi}{3}$$

이때, 원과 곡선 $y=x^2$ 은 y 축, 즉 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 원의 호 APB 와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

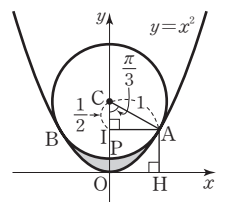
$$S = 2 \left\{ (\text{사다리꼴 } OHAC \text{의 넓이}) \right.$$

$$\left. - (\text{부채꼴 } CPA \text{의 넓이}) - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$



• 다른풀이 •

$A(a, a^2)$ ($a > 0$), $C(0, k)$ ($k > 0$)라 하자.
 $y = x^2$ 에서 $y' = 2x$ 이므로 점 A에서의 접선의 기울기는
 $y'_{x=a} = 2a$ 이고, 두 점 A, C를 지나는 직선은 점 A에서
 의 접선과 수직이므로 기울기는 $-\frac{1}{2a}$ 이다.

$$\frac{a^2 - k}{a} = -\frac{1}{2a} \quad \therefore a^2 - k = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또한, 두 점 A, C 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 1
 과 같으므로

$$a^2 + (a^2 - k)^2 = 1$$

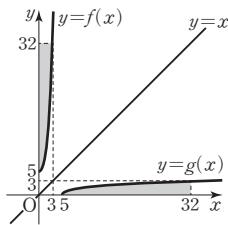
㉠을 위의 식에 대입하면

$$a^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1, a^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because a > 0)$$

$$a^2 - k = -\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{3}{4} - k = -\frac{1}{2} \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

$$\text{즉, } A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right), C\left(0, \frac{5}{4}\right)$$

- 21 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역
 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선
 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $g(5) = 0, g(32) = 3$ 에서
 $f(0) = 5, f(3) = 32$
 이때,



$$2 \int_{g(5)}^{g(32)} f(x) dx + \int_{f(0)}^{f(3)} g(x) dx = 112$$

이므로

$$\begin{aligned} & 2 \int_{g(5)}^{g(32)} f(x) dx + \int_{f(0)}^{f(3)} g(x) dx \\ &= 2 \int_0^3 f(x) dx + \int_5^{32} g(x) dx \\ &= 2 \int_0^3 f(x) dx + \left\{ 3 \times 32 - \int_0^3 f(x) dx \right\} \\ &= \int_0^3 f(x) dx + 96 = 112 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = 112 - 96 = 16$$

$$\therefore \int_{g(5)}^{g(32)} f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = 16$$

답 16

- 22 조건 ㉠에서 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여
 대칭이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 할
 수 있다.

이때, $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$$a > 0, f'(x) \geq 0$$

$$\text{즉, } f'(x) = 3ax^2 + b \geq 0 \text{이므로}$$

$$b \geq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

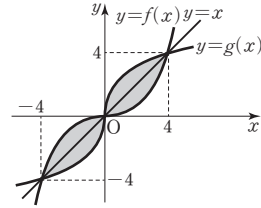
조건 ㉡에서 $f(4) = g(4) = 4$ 이므로

$$f(4) = 64a + 4b = 4$$

$$\therefore b = -16a + 1$$

$$\text{㉠에서 } -16a + 1 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{16} \quad \dots\dots ㉢$$

조건 ㉠, ㉡에서 $f(0) = 0, f(4) = 4, f(-4) = -4$ 이므로
 모든 실수에서 증가하는 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프
 와 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는
 곡선 $y = f(x)$ 과 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2
 배이고, 곡선 $y = f(x)$ 과 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의
 넓이는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 과 직선 $y = x$
 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^4 \{x - (ax^3 + bx)\} dx \\ &= 4 \left[-\frac{a}{4}x^4 + \frac{1}{2}(1-b)x^2 \right]_0^4 \\ &= 4 \{-64a + 8(1-b)\} \\ &= 4(-64a + 8 \times 16a) \quad (\because b = -16a + 1) \\ &= 256a \end{aligned}$$

㉢에서 $256a \leq 16$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 16이
 다.

답 16

- 23 $f(x) = x^3 + \frac{n}{2}x^2 + 2x - 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + nx + 2$$

삼차함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 $f'(x) \geq 0$ 이어야
 하므로

이차방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $3x^2 + nx + 2 = 0$ 이 중근이나
 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = n^2 - 4 \times 3 \times 2 \leq 0, n^2 - 24 \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{6} \leq n \leq 2\sqrt{6}$$

이때, n 이 자연수이므로 n 의 최댓값은 4이다.

$$n = 4 \text{이면 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 4$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = x, x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 3x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \left(\because x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right)$$

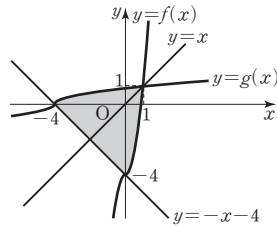
또한, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x - 4$ 의 교
 점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = -x - 4$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x = 0, x(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad (\because x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0)$$

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 과 직선 $y = -x - 4$ 로 둘러
 싸인 도형은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=x$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 같다.

$$\begin{aligned}\therefore (\text{구하는 넓이}) &= 2 \int_0^1 \{x - f(x)\} dx + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \\ &= 2 \int_0^1 (-x^3 - 2x^2 - x + 4) dx + 8 \\ &= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_0^1 + 8 \\ &= 2 \times \frac{31}{12} + 8 = \frac{79}{6}\end{aligned}$$

따라서 $p=6$, $q=79$ 이므로

$$p+q=6+79=85$$

답 85

24 움직이기 시작한 점의 4초 후의 위치는

$$\begin{aligned}a &= \int_0^4 v(t) dt \\ &= \int_0^4 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{3} - 32 + 12 = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

4초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned}b &= \int_0^4 |v(t)| dt = \int_0^1 |t^2 - 4t + 3| dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt - \int_1^3 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &\quad + \int_3^4 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_1^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_3^4 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 2(9 - 18 + 9) + \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ \therefore 6a + 3b &= 6 \times \frac{4}{3} + 3 \times 4 \\ &= 8 + 12 = 20\end{aligned}$$

답 ⑤

25 속도가 $v(t)=a-10t$ (m/s)인 물 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } a-10t=0 \quad \therefore t=\frac{1}{10}a$$

최고 높이에 도달할 때까지 물 로켓이 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{10}a} |v(t)| dt &= \int_0^{\frac{1}{10}a} |a-10t| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{10}a} (a-10t) dt \\ &= \left[at - 5t^2 \right]_0^{\frac{1}{10}a} \\ &= \frac{1}{10}a^2 - \frac{1}{20}a^2 \\ &= \frac{1}{20}a^2 \text{ (m)}\end{aligned}$$

이때, 최고 높이가 20 m 이상이 되어야 하므로

$$\frac{1}{20}a^2 \geq 20 \text{에서 } a^2 \geq 20^2 \quad \therefore a \geq 20 \quad (\because a > 0)$$

따라서 최고 높이가 20 m 이상이 되도록 하는 a 의 최솟값은 20이다.

답 ③

26 점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x_P(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}x_P(t) &= 0 + \int_0^t (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^t \\ &= \frac{1}{3}t^3 - t^2\end{aligned}$$

점 Q의 시각 t 에서의 위치를 $x_Q(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}x_Q(t) &= 0 + \int_0^t (-x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2\end{aligned}$$

$$x_P(t) = x_Q(t) \text{에서 } \frac{1}{3}t^3 - t^2 = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2$$

$$\frac{2}{3}t^3 - 3t^2 = 0, \quad \frac{2}{3}t^2 \left(t - \frac{9}{2} \right) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=\frac{9}{2}$$

즉, 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 다시 만나는 시각은

$$t=\frac{9}{2} \text{이다.}$$

$0 < t < \frac{9}{2}$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned}|x_P(t) - x_Q(t)| &= \left| \frac{1}{3}t^3 - t^2 - \left(-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 \right) \right| \\ &= \left| \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 \right|\end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 \text{이라 하면}$$

$$h'(t) = 2t^2 - 6t$$

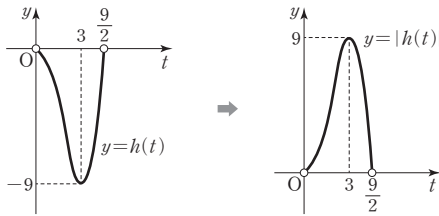
$$h'(t)=0 \text{에서 } 2t(t-3)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=3$$

함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	3	...	$\left(\frac{9}{2}\right)$
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		\	극소	/	

함수 $h(t)$ 는 $t=3$ 에서 극솟값 $h(3)=18-27=-9$ 를 가지므로 $0 < t < \frac{9}{2}$ 에서 함수 $y=h(t)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y=|h(t)|$ 의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $0 < t < \frac{9}{2}$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $t=3$ 일 때 9이다. 답 9

27 자동차가 출발하여 처음 36m까지 달리는 데 걸리는 시간을 a 초라 하자. 이 자동차의 속도가 $v(t)=-2t^2+12t$

$$\text{이므로 } \int_0^a |v(t)| dt = \int_0^a |-2t^2+12t| dt = 36$$

이때,

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^6 (-2t^2+12t) dt \\ &= \left[-\frac{2}{3}t^3+6t^2 \right]_0^6 = 72 \end{aligned}$$

에서 이 자동차는 출발 후 6초 동안 72m를 달렸으므로 $0 < a < 6$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \int_0^a (-2t^2+12t) dt &= \left[-\frac{2}{3}t^3+6t^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{2}{3}a^3+6a^2=36 \end{aligned}$$

$$a^3-9a^2+54=0, (a-3)(a^2-6a-18)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a^2-6a-18=0$$

$$a^2-6a-18=0 \text{에서 } a=3 \pm 3\sqrt{3}$$

그런데 $0 < a < 6$ 이므로 $a=3$

$v(3)=-2 \times 3^2+12 \times 3=18(\text{m/s})$ 이고 시각 $t=3$ 부터 일정한 속도로 감소하다가 속도가 0이 되면 정지하므로 이 자동차가 출발할 때부터 정지할 때까지의 속도를 $f(t)$

라 하면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$\begin{aligned} v(t) &= -2t^2+12t \\ &= -2(t-3)^2+18 \end{aligned}$$

에서 함수 $v(t)$ 는 시각 $t=0$ 부터 $t=3$ 까지 증가한다.

오른쪽 그림에서 자동차가 정지할

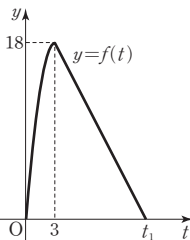
때의 시각을 $t=t_1$ 이라 하면 이 자동차의 속도가 증가하는 시간과 감소하는 시간의 비가 1:2이므로

$$3:(t_1-3)=1:2, t_1-3=6 \quad \therefore t_1=9$$

따라서 시각 $t=3$ 부터 $t=9$ 까지의 속도는

$$y=\frac{0-18}{9-3}(t-9) \quad \therefore y=-3t+27$$

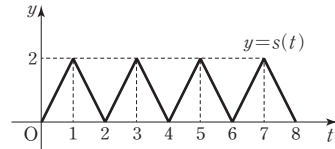
$$\text{즉, } f(t)=\begin{cases} -2t^2+12t & (0 \leq t \leq 3) \\ -3t+27 & (3 < t \leq 9) \end{cases}$$



그러므로 이 자동차가 출발 후 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &36 + \int_3^9 (-3t+27) dt \\ &= 36 + \frac{1}{2} \times (9-3) \times 18 = 90(\text{m}) \end{aligned} \quad \text{답 90 m}$$

28 조건 (가)에서 $s(t)=\begin{cases} 2t & (0 \leq t < 1) \\ 4-2t & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$ 이고, 조건 (나)에서 $s(t)=s(t+2)$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속력 $y=s(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

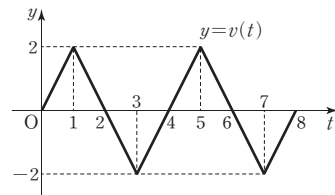


이때, 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면 함수 $v(t)$ 는 연속이고, 출발 후 적어도 한 번 운동 방향을 바꾸어야 하므로 구간 $[0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8]$ 중 $v(t)=-s(t)$ 인 구간과 $v(t)=s(t)$ 인 구간이 적어도 하나씩 존재해야 한다.㉠

ㄱ. 점 P가 시각 $t=0$ 부터 $t=8$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^8 |v(t)| dt &= \int_0^8 s(t) dt \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄴ. 점 P가 출발 직후 x 축의 양의 방향으로 움직인다고 가정하면 점 P가 운동 방향을 세 번 바꾸었으므로 함수 $y=v(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



점 P의 시각 $t=8$ 에서의 위치는

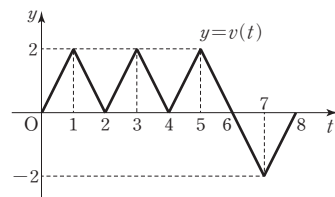
$$\begin{aligned} &0 + \int_0^8 v(t) dt \\ &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt + \int_4^6 v(t) dt + \int_6^8 v(t) dt \\ &= 2 + (-2) + 2 + (-2) = 0 \text{ (참)} \end{aligned}$$

ㄷ. 점 P의 시각 $t=a$ 에서의 위치는

$$0 + \int_0^a v(t) dt$$

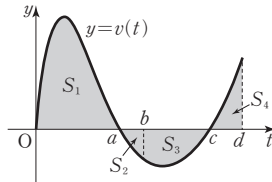
$0 \leq a \leq 8$ 인 실수 a 에 대하여 $\int_0^a v(t) dt = 6$ 이면서

㉠을 만족시키려면 함수 $y=v(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 점 P는 운동 방향을 한 번만 바꾸어야 한다. (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

29 오른쪽 그림과 같이 각각의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4 라 하면



$$\int_0^a |v(t)| dt = \int_a^d |v(t)| dt$$

이므로 $S_1 = S_2 + S_3 + S_4$ ㉠

ㄱ. $S_1 > S_2 + S_3$ 이므로 점 P는 출발하고 나서 다시 원점을 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^c v(t) dt = S_1 - S_2 - S_3,$

$$\int_c^d v(t) dt = S_4 = S_1 - S_2 - S_3 (\because \text{㉠})$$

$$\therefore \int_0^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt \text{ (참)}$$

ㄷ. $\int_0^b v(t) dt = S_1 - S_2, \int_b^d |v(t)| dt = S_3 + S_4$

그런데 ㉠에서 $S_1 - S_2 = S_3 + S_4$ 이므로

$$\int_0^b v(t) dt = \int_b^d |v(t)| dt \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

두 점 (1, 0), (2, 2)를 지나는 직선 두 점 (2, 2), (6, 0)을 지나는 직선

30 주어진 그래프에서 $f(t) = 2t - 2, g(t) = -\frac{1}{2}t + 3$

두 점 P, Q가 $t=a$ 일 때 처음으로 다시 만나므로

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a g(t) dt, \text{ 즉}$$

$$\int_0^a (2t-2) dt = \int_0^a \left(-\frac{1}{2}t+3\right) dt$$

$$\left[t^2 - 2t\right]_0^a = \left[-\frac{1}{4}t^2 + 3t\right]_0^a$$

$$a^2 - 2a = -\frac{1}{4}a^2 + 3a, \frac{5}{4}a^2 - 5a = 0$$

$$5a\left(\frac{1}{4}a - 1\right) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

답 4

31 ㄱ. $\int_0^c v(t) dt$ 는 $t=0$ 부터 $t=c$ 까지 위치의 변화량이고 $s(0)=1, s(c)=1$ 이므로

$$\int_0^c v(t) dt = s(c) - s(0) = 1 - 1 = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\int_0^b v(t) dt$ 는 $t=0$ 부터 $t=b$ 까지 위치의 변화량이고 $s(0)=1, s(b)=0$ 이므로

$$\int_0^b v(t) dt = s(b) - s(0) = 0 - 1 = -1$$

$$\int_0^b v(t) dt = \int_0^a v(t) dt + \int_a^b v(t) dt \text{ 이므로}$$

$$\int_0^a v(t) dt + \int_a^b v(t) dt = -1$$

$$\therefore \int_a^b v(t) dt = -\int_0^a v(t) dt - 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $s(t)$ 는 점 P의 시각 t 에서의 위치이므로

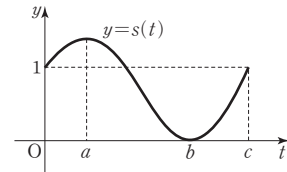
$$s'(t) = v(t)$$

$$v(t)=0 \text{에서 } t=a \text{ 또는 } t=b$$

함수 $s(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	a	...	b	...	c
$v(t)$		+	0	-	0	+	
$s(t)$	1	↗	극대	↘	극소	↗	1

함수 $s(t)$ 는 $t=a$ 일 때 극댓값을 갖고, $t=b$ 일 때 극솟값 0을 가지므로 그래프는 다음 그림과 같다.



$0 < t < c$ 에서 함수 $y=s(t)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 오직 한 점에서 만나므로 $s(t)=1$ 을 만족시키는 t 가 열린구간 $(0, c)$ 에 오직 하나만 존재한다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

32 해결단계

① 단계	$\int_0^6 f(x) dx = \int_6^{10} f(x) dx$ 와 시각 $t=3$ 에서 두 점 A, B가 같은 위치에 있음을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
② 단계	두 점 A, B 사이의 거리를 함수 $h(t)$ 라 하고, 함수 $y=h(t)$ 의 그래프를 그려 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

주어진 그래프에서

$0 \leq t \leq 6$ 에서 $f(t) \leq 0, 6 \leq t \leq 10$ 에서 $f(t) \geq 0$ 이고,

$$\int_0^6 |f(t)| dt = \int_6^{10} |f(t)| dt \text{ 이므로}$$

$$\int_0^6 \{-f(t)\} dt = \int_6^{10} f(t) dt$$

$$\int_0^6 f(t) dt + \int_6^{10} f(t) dt = 0$$

$$\therefore \int_0^{10} f(t) dt = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

ㄱ. 시각 $t=30$ 에서 두 점 A, B는 같은 점에 위치하므로

$$\int_0^{30} f(t) dt = \int_0^{30} g(t) dt$$

$$\int_0^{10} f(t) dt + \int_{10}^{30} f(t) dt = \int_0^{30} g(t) dt$$

$$\therefore \int_{10}^{30} f(t) dt = \int_0^{30} g(t) dt (\because \text{㉠}) \text{ (참)}$$

ㄴ. 두 점 A, B의 시각 t 에서의 위치를 각각 $x_A(t),$

$x_B(t)$ 라 하고 $h(t) = x_B(t) - x_A(t)$ 라 하면

$$h'(t) = \{x_B(t)\}' - \{x_A(t)\}' = g(t) - f(t)$$

$$h'(t) = 0, \text{ 즉 } g(t) = f(t) \text{에서}$$

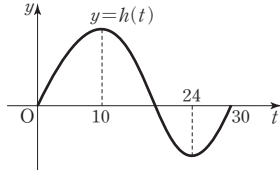
$t=10$ 또는 $t=24$

또한, 시각 $t=0$ 과 $t=30$ 에서 두 점 A, B는 같은 위치에 있으므로 $h(0)=h(30)=0$

함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	10	...	24	...	30
$h'(t)$		+	0	-	0	+	
$h(t)$	0	↗	극대	↘	극소	↗	0

함수 $h(t)$ 는 $t=10$ 에서 극댓값, $t=24$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

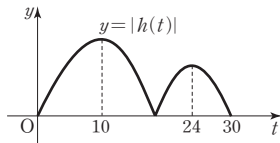


$10 < t < 24$ 에서 함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 x 축과 한 번 만나고 이 점에서 $h(t)=x_B(t)-x_A(t)=0$, 즉 $x_B(t)=x_A(t)$ 이다.

따라서 $10 < t < 24$ 에서 두 점 A, B는 한 번 만난다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 두 점 A, B 사이의 거리는 $|h(t)|$ 이다.

이때, $|h(10)| > |h(24)|$ 이면 함수 $y=|h(t)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 두 점 A, B 사이의 거리는 $t=10$ 일 때 최대이다. (거짓)



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 77

01 3 02 12 03 $\frac{3}{5}$ 04 1 05 $\frac{117}{2}$
06 10

01 해결단계

① 단계	두 점 P, Q가 t 초 동안 이동한 거리를 t 에 대한 식으로 나타낸다.
② 단계	첫 번째 만나기 위해서는 두 점의 이동 거리의 합이 30이어야 하고, 그 후 다시 만나기 위해서는 두 점의 이동 거리의 합이 정사각형 ABCD의 둘레의 길이인 12의 배수가 되어야 함을 이용하여 네 번째로 만나는 데 걸리는 시간을 구한다.

두 점 P, Q의 t 초 후의 속력이 각각 $6t$, $2t+1$ 이므로 두 점 P, Q가 각각 두 점 A, B를 출발한 후 t 초 동안 이동한 거리를 각각 x_P , x_Q 라 하면

$$x_P = \int_0^t 6t \, dt = 3t^2, \quad x_Q = \int_0^t (2t+1) \, dt = t^2 + t$$

한편, 두 점 P, Q가 첫 번째로 만나는 점은 변 AB 위에 있으므로 두 점 P, Q의 이동 거리의 합은 30이고, 그 후 두 번째로 만나기 위해서는 두 점 P, Q의 이동 거리의 합이 정사각형 ABCD의 둘레의 길이인 12이어야 한다.

따라서 두 점 P, Q가 네 번째로 만나는 것은 두 점 P, Q의 이동 거리의 합이 $3+12+12+12=39$ 일 때이므로

$$x_P + x_Q = 39 \text{에서 } 3t^2 + (t^2 + t) = 39$$

$$4t^2 + t - 39 = 0, \quad (4t+13)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

즉, 두 점 P, Q가 동시에 출발하여 네 번째로 만나는 것은 출발한 후 3초가 지났을 때이다.

$$\therefore a = 3$$

답 3

02 해결단계

① 단계	조건 ㉓, ㉔를 이용하여 함수 $f(x)$ 가 $f(2)=0$ 인 증가함수임을 파악한다.
② 단계	$\int_{-2}^5 f(x) \, dx$ 의 값이 최대가 되기 위한 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 최댓값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 미분가능하고

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0 \quad \dots\dots ㉑$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가함수이다. $\dots\dots ㉒$

이때,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) \, dx &= \int_{-2}^2 f(x) \, dx + \int_2^5 f(x) \, dx \\ &= 20 + \int_{-2}^2 f(x) \, dx \quad (\because \int_2^5 f(x) \, dx = 20) \end{aligned}$$

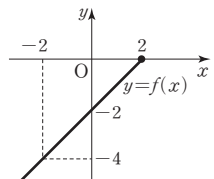
이므로 $\int_{-2}^5 f(x) \, dx$ 의 값이 최대이려면 $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$ 의 값이 최대이어야 한다.

그런데 ㉑, ㉒에 의하여 $x \leq 2$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) \, dx < 0$$

따라서 $\int_{-2}^2 f(x) \, dx$ 의 값이 최대

가 되려면 함수 $f(x)$ 의 그래프는 기울기가 1인 직선이어야 하므로 $x \leq 2$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \int_{-2}^5 f(x) \, dx = 20 + \int_{-2}^2 f(x) \, dx$$

$$= 20 + \int_{-2}^2 (x-2) \, dx$$

$$= 20 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^2$$

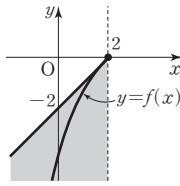
$$= 20 + (-2-6)$$

$$= 20 - 8 = 12$$

답 12

blacklabel 특강 풀이첨삭

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 1$ 이고, $f(2)=0$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x-2$ 의 아래쪽에 위치해야 한다. 그런데 $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 의 값은 항상 음수이고, 그 절댓값은 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=-2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 이 도형의 넓이가 최소일 때, $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 의 값이 최대이다.



따라서 $\int_{-2}^2 f(x)dx$ 의 값이 최대인 경우는 함수 $f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선일 때이다.

03 해결단계

① 단계	곡선 $y=x^4$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 구한다.
② 단계	S_1, S_3 을 정적분으로 나타내어 S_1-S_3 을 구하고, S_1-S_3 을 이용하여 S_2-S_4 의 값을 구한다.
③ 단계	$ S_1-S_3 + S_2-S_4 $ 를 k 에 대하여 나타낸 후, $ S_1-S_3 + S_2-S_4 $ 의 최솟값을 구한다.

곡선 $y=x^4$ 과 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $x^4=k$ 에서 $x=k^{\frac{1}{4}}$

즉, $S_1 = \int_0^{k^{\frac{1}{4}}} (k-x^4)dx$, $S_3 = \int_{k^{\frac{1}{4}}}^1 (x^4-k)dx$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1-S_3 &= \int_0^{k^{\frac{1}{4}}} (k-x^4)dx - \int_{k^{\frac{1}{4}}}^1 (x^4-k)dx \\ &= \int_0^{k^{\frac{1}{4}}} (k-x^4)dx + \int_{k^{\frac{1}{4}}}^1 (k-x^4)dx \\ &= \int_0^1 (k-x^4)dx = \left[kx - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= k - \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또한, $S_2=1 \times k - S_1$, $S_4=1 \times (1-k) - S_3$ 이므로

$$\begin{aligned} S_2-S_4 &= k - S_1 - (1-k - S_3) \\ &= 2k - 1 - (S_1 - S_3) \\ &= 2k - 1 - \left(k - \frac{1}{5}\right) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= k - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore |S_1-S_3| + |S_2-S_4|$$

$$\begin{aligned} &= \left| k - \frac{1}{5} \right| + \left| k - \frac{4}{5} \right| \\ &= \begin{cases} -k + \frac{1}{5} - \left(k - \frac{4}{5}\right) & \left(0 < k < \frac{1}{5}\right) \\ k - \frac{1}{5} - \left(k - \frac{4}{5}\right) & \left(\frac{1}{5} \leq k < \frac{4}{5}\right) \\ k - \frac{1}{5} + k - \frac{4}{5} & \left(\frac{4}{5} \leq k < 1\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2k + 1 & \left(0 < k < \frac{1}{5}\right) \\ \frac{3}{5} & \left(\frac{1}{5} \leq k < \frac{4}{5}\right) \\ 2k - 1 & \left(\frac{4}{5} \leq k < 1\right) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 $|S_1-S_3| + |S_2-S_4|$ 는

$\frac{1}{5} \leq k < \frac{4}{5}$ 에서 최솟값 $\frac{3}{5}$ 을 갖는다.

답 $\frac{3}{5}$

04 해결단계

① 단계	점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 구한다.
② 단계	이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 점 P 에서의 접선 및 x 축 또는 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.
③ 단계	도형의 넓이의 최솟값 S 를 구하여 $27S$ 의 값을 구한다.

$f(x)=(x-1)^2$ 에서

$$f'(x)=2(x-1)$$

점 $P(a, f(a))$ ($0 \leq a < 1$)에

서의 접선의 기울기는 $= (a-1)^2$

$$f'(a)=2(a-1)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (a-1)^2 = 2(a-1)(x-a)$$

$$\therefore y = 2(a-1)x - 2a(a-1) + (a-1)^2$$

$$= 2(a-1)x - a^2 + 1$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면 $0=2(a-1)x - a^2 + 1$ 에서

$$x = \frac{a^2-1}{2(a-1)} = \frac{a+1}{2} \text{이므로 } x\text{절편은 } \frac{a+1}{2} \text{이고, } x=0$$

을 대입하면 $y = -a^2 + 1$ 에서 y 절편은 $-a^2 + 1$ 이므로 이
이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 점 P 에서의 접선 및 x 축 또는 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x-1)^2 dx - \frac{1}{2} \times \frac{a+1}{2} \times (-a^2+1) \\ &= \int_0^1 (x^2-2x+1) dx - \frac{1}{4}(-a^3-a^2+a+1) \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 + \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) + \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$g(a) = \frac{1}{4}a^3 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{12} \text{이라 하면}$$

$$g'(a) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3a^2+2a-1)$$

$$= \frac{1}{4}(3a-1)(a+1)$$

$$g'(a)=0 \text{에서 } a=-1 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

$0 \leq a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{1}{3}$	...	(1)
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$0 \leq a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 는 $a=\frac{1}{3}$ 일 때 극소이면서 최소

이므로 최솟값은

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{27} = \frac{1}{27}$$

즉, $S = \frac{1}{27}$ 이므로 $27S = 27 \times \frac{1}{27} = 1$

답 1

05 해결단계

① 단계	함수 $h(x)$ 의 극댓값, 극솟값과 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 임을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형을 그린다.
② 단계	함수 $h(x)$ 의 극댓값과 극솟값이 그래프에서 갖는 의미를 파악한 후, $\int_0^{12} g(t) dt$ 의 값이 어떤 도형의 넓이인지 찾는다.
③ 단계	정적분의 성질을 이용하여 $\int_0^{12} g(t) dt$ 의 값을 구한다.

$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$ ($x \geq 0$)의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $h'(x) = f(x) - g(x)$ 이고, 함수 $h(x)$ 가 $x=8$ 일 때 극댓값 32, $x=12$ 일 때 극솟값 27을 가지므로 두 열린구간 $(0, 8)$, $(12, \infty)$ 에서

$$h'(x) > 0, \text{ 즉 } f(x) > g(x),$$

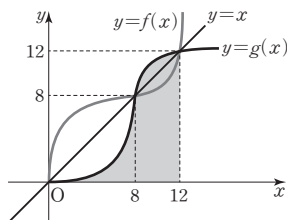
$$\text{열린구간 } (8, 12) \text{에서 } h'(x) < 0, \text{ 즉 } f(x) < g(x) \text{이고,}$$

$$h'(8) = h'(12) = 0 \text{이므로}$$

$$f(8) = g(8), f(12) = g(12) \text{이다.}$$

또한, 삼차함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 을 만족시키므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에서 증가하고, 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같고, $\int_0^{12} g(t) dt$ 의 값은 어두운 부분의 넓이와 같다.



$$h(8) = \int_0^8 \{f(t) - g(t)\} dt = 32 \text{이므로 위의 그림에서}$$

닫힌구간 $[0, 8]$ 에서의 어두운 부분의 넓이는

$$\int_0^8 g(t) dt = \frac{1}{2} \times 8^2 - \frac{1}{2} \times 32 = 32 - 16 = 16 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{또한, } h(12) = \int_0^{12} \{f(t) - g(t)\} dt = 27 \text{이고,}$$

$$\int_0^{12} \{f(t) - g(t)\} dt$$

$$= \int_0^8 \{f(t) - g(t)\} dt + \int_8^{12} \{f(t) - g(t)\} dt$$

$$\text{이므로 } 27 = 32 + \int_8^{12} \{f(t) - g(t)\} dt$$

$$\therefore \int_8^{12} \{f(t) - g(t)\} dt = -5$$

즉, 닫힌구간 $[8, 12]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_8^{12} |f(t) - g(t)| dt = -(-5) = 5$$

위의 그림에서 닫힌구간 $[8, 12]$ 에서의 어두운 부분의 넓이는 사다리꼴 모양의 넓이와 두 함수 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 을 합한 값과 같으므로

$$\int_8^{12} g(t) dt = \frac{1}{2} \times (8+12) \times (12-8) + \frac{1}{2} \times 5$$

$$= \frac{85}{2} \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서

$$\int_0^{12} g(t) dt = \int_0^8 g(t) dt + \int_8^{12} g(t) dt$$

$$= 16 + \frac{85}{2} = \frac{117}{2}$$

$$\text{답 } \frac{117}{2}$$

06 해결단계

① 단계	함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 a, β 라 하면 함수 $f(x)$ 는 각각 $x=a, \beta$ 에서 극댓값과 극솟값을 가짐을 파악한다.
② 단계	두 조건 (가), (나)를 이용하여 $f(a), f(b)$ 의 값을 각각 구한다.
③ 단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린 후, $a \leq x \leq b$ 에서 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근이 2개이기 위한 모든 정수 k 의 개수를 구한다.

$$\text{조건 (가)에서 } \int_a^b f'(x) dx = 3 \text{이므로}$$

$$\int_a^b f'(x) dx = \left[f(x) \right]_a^b = f(b) - f(a) = 3$$

$$\therefore f(b) = f(a) + 3 \quad \dots\dots ①$$

오른쪽 그림과 같이 이차함수

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 a, β ($a < \beta$)라 하자.

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=\beta$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	β	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 극댓값 6을 갖고 $x=\beta$ 일 때 극솟값 -9를 가지므로

$$f(a) = 6, f(\beta) = -9$$

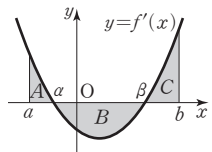
한편, 조건 (나)에서 $A : B = 1 : 3$ 이고,

$$A = \int_a^a f'(x) dx = \left[f(x) \right]_a^a$$

$$= f(a) - f(a) = 6 - f(a),$$

$$B = \int_a^\beta \{-f'(x)\} dx = \left[-f(x) \right]_a^\beta$$

$$= -f(\beta) + f(a) = 15$$



이므로

$$\{6-f(a)\} : 15 = 1 : 3, 3\{6-f(a)\} = 15$$

$$\therefore f(a)=1, f(b)=4 (\because \textcircled{㉠})$$

$a \leq x \leq b$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른

실근의 개수는 함수 $y=f(x)$ 의

그래프와 직선 $y=k$ 의 서로 다

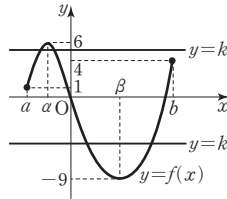
른 교점의 개수와 같으므로 방정

식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이기 위한 정수

k 는

$$-8, -7, \dots, -1, 0, 5$$

의 10개이다.



답 10

이것이 수능

p. 78

1 200

2 ㉠

1 해결단계

① 단계	주어진 함수 $f(x)$ 를 이용하여 함수 $h(x)$ 의 식을 구하고 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	$0 \leq h(x) \leq g(x)$ 일 때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\} dx$ 의 값의 의미를 파악한 후, 이 값의 최소가 되기 위한 조건을 찾는다.
③ 단계	②단계를 만족시키는 k, a, b 의 값을 각각 구한 후, $60(k+a+b)$ 의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$ 에 대하여 세 함수

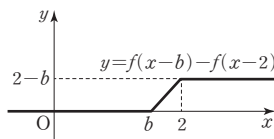
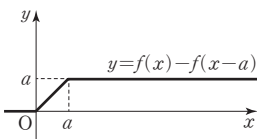
$y=f(x-a), y=f(x-b), y=f(x-2)$ 의 그래프는

$y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 각각 $a, b, 2$ 만큼

평행이동한 것이고 $0 < a < b < 2$ 이므로

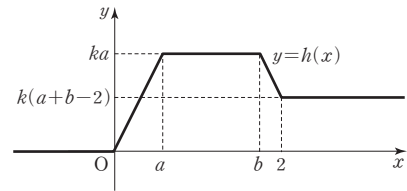
$$y=f(x)-f(x-a)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq a) \\ a & (x > a) \end{cases}$$

$$y=f(x-b)-f(x-2)=\begin{cases} 0 & (x \leq b) \\ x-b & (b < x \leq 2) \\ 2-b & (x > 2) \end{cases}$$



$$\therefore h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\} \\ =k\{[f(x)-f(x-a)]-[f(x-b)-f(x-2)]\}$$

$$= \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ kx & (0 < x \leq a) \\ ka & (a < x \leq b) \\ k(-x+a+b) & (b < x \leq 2) \\ k(-2+a+b) & (x > 2) \end{cases}$$



그런데 함수 $g(x)=\begin{cases} x(2-x) & (|x-1| \leq 1) \\ 0 & (|x-1| > 1) \end{cases}$ 과 모든

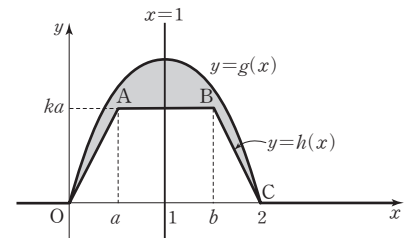
실수 x 에 대하여 $0 \leq h(x) \leq g(x)$ 이므로

$$0 \leq h(2) \leq g(2)=0 \text{에서}$$

$$h(2)=k(-2+a+b)=0$$

$$\therefore a+b=2 (\because k > 0) \dots\dots \textcircled{㉠}$$

따라서 두 함수 $y=g(x), y=h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $\int_0^2 \{g(x)-h(x)\} dx$ 의 값, 즉 어두운 부분의 넓

이가 최소가 되려면 사다리꼴 AOCB의 넓이가 최대가 되어야 하므로 두 점 A, B는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이어야 한다.

$A(a, a(2-a)), B(b, a(2-a))$ 라 하고, 이때의 사다리꼴 AOCB의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2} \times \{2+(b-a)\} \times a(2-a) \\ =\frac{a(2-a)}{2} \times \{2+(2-a-a)\} (\because \textcircled{㉠}) \\ =a(a-2)^2=a^3-4a^2+4a$$

$$S'(a)=3a^2-8a+4=(3a-2)(a-2)$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a=\frac{2}{3} (\because a < 2)$$

a	(0)	...	$\frac{2}{3}$	...	(2)
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$ 는 $a=\frac{2}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이고

$\int_0^2 \{g(x)-h(x)\} dx$ 의 값은 최소가 된다.

$$\text{이때, } ka=a(2-a) \text{이므로 } k=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore 60(k+a+b)=60\left(\frac{4}{3}+2\right) (\because \textcircled{㉠})$$

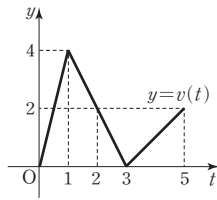
$$=200$$

답 200

2 해결단계

① 단계	주어진 조건을 이용하여 속도 $y=v(t)$ 의 그래프를 그린다.
② 단계	$x=1$ 일 때의 움직인 거리를 구하여 $f(1)$ 의 값을 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
③ 단계	$x=2$ 일 때의 움직인 거리를 구하여 $f(2)$ 의 값을 구하고, $\int_1^2 v(t)dt$ 의 값과 비교하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
④ 단계	$1 < x < 1+h$, $1-h < x \leq 1$ 에서의 $f(x)$ 를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

속도 $y=v(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리를 l_1 , 시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리를 l_2 , 시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리를 l_3 이라 하자.



ㄱ. $x=1$ 일 때,

시각 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 움직인 거리는

$$l_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$$

시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$l_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

시각 $t=3$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리는

$$l_3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

이때, l_1, l_2, l_3 의 값 중에서 최솟값은 2이므로 $f(1)=2$ (참)

ㄴ. $x=2$ 일 때,

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 움직인 거리는

$$l_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times (4+2) \times 1 = 5$$

시각 $t=2$ 에서 $t=4$ 까지 움직인 거리는

$$l_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}$$

시각 $t=4$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리는

$$l_3 = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 = \frac{3}{2}$$

이때, l_1, l_2, l_3 의 값 중에서 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$f(2) = \frac{3}{2}$$

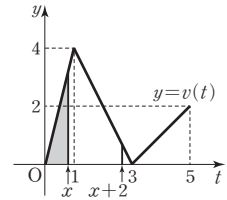
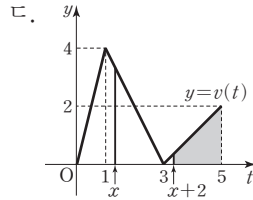
$$\therefore f(2) - f(1) = \frac{3}{2} - 2 \quad (\because \text{ㄱ})$$

$$= -\frac{1}{2}$$

그런데

$$\begin{aligned} \int_1^2 v(t) dt &= \int_1^2 (-2t+6) dt = \left[-t^2 + 6t \right]_1^2 \\ &= (-4+12) - (-1+6) = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) - f(1) \neq \int_1^2 v(t) dt \quad (\text{거짓})$$



h 가 충분히 작은 양수일 때

(i) $1-h < x < 1$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{2} \times x \times 4x = 2x^2 \text{이므로 } f'(x) = 4x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4x = 4$$

(ii) $1 < x \leq 1+h$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \{ (x+2) - 3 \}^2$$

$$= 2 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

$$\text{이므로 } f'(x) = -x + 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 1) = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

T o m o r r o w

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo