b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

A등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

Speed Check

Ⅰ 삼각형의 성질

01. 삼각형의 성질

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.9	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.10~12	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.13~14	미리보는 학력평가 p.15
01 ① 02 ③ 03 ② 04 ④ 05 82 cm^2 06 18 cm^2	01 ④ 02 35° 03 ④ 04 220° 05 ③ 06 ④ 07 36° 08 ④ 09 32 cm 10 88 11 ② 12 166° 13 85° 14 6 cm^2 15 ① 16 ② 17 $\frac{26}{3}$ cm 18 ②	01 (1) $\frac{180}{7}$° (2) 14 02 5 03 (1) 2 cm (2) 18 cm^2 04 16 cm^2 05 54 cm^2 06 3 cm 07 9 cm 08 30°	1 68 2 ② 3 ① 4 24

02. 삼각형의 외심과 내심

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.17	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.18~21	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.22~23	미리보는 학력평가 p.24
01 30 cm 02 ④ 03 ④ 04 14 cm 05 (2, 2) 06 ⑤ 07 ④ 08 ①	01 ⑤ 02 ② 03 ② 04 30° 05 ③ 06 30° 07 156° 08 ③ 09 15 : 22 : 29 10 63° 11 ② 12 70° 13 56° 14 $\frac{3}{2}\pi$ cm^2 15 20 cm 16 ③ 17 ④ 18 60° 19 64° 20 ④ 21 ④ 22 ③ 23 ③ 24 1	01 (1) 90° (2) 풀이 참조 (3) 75° 02 2500π m^2 03 (1) 50° (2) 50° 04 155° 05 $\frac{8}{3}$ cm 06 6 07 20° 08 $\frac{12}{13}$	1 ⑤ 2 ⑤ 3 14 4 ①

Ⅱ 사각형의 성질

03. 평행사변형

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.27	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.28~30	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.31~32	미리보는 학력평가 p.33
01 ③ 02 62° 03 6 04 ⑤ 05 ④ 06 ③	01 ⑤ 02 ④ 03 16 cm 04 142° 05 36° 06 ⑤ 07 ③ 08 75° 09 ② 10 ③ 11 42° 12 ③ 13 ④ 14 120 15 ① 16 158 cm^2 17 ② 18 81 cm^2	01 (1) 평행사변형, 이유는 풀이 참조 (2) 256 cm^2 02 32 03 (1) 6, 9 (2) $\frac{15}{2}$ 04 1 : 4 05 72° 06 평행사변형, 76 cm^2 07 2 : 5 08 59°	1 ④ 2 (-4, 3), (0, -3), (4, 1) 3 ③ 4 8

04. 여러 가지 사각형

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.35	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.36~39	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.40~41	미리보는 학력평가 p.42
01 ⑤ 02 60° 03 ⑤ 04 9 cm 05 ④ 06 ④ 07 ①	01 ② 02 ① 03 46° 04 ⑤ 05 18° 06 15 cm^2 07 ③ 08 ③ 09 34° 10 8 11 ③ 12 ② 13 36 14 ③ 15 $\frac{a-b+c}{2}$ 16 ④ 17 ③ 18 5 19 ④ 20 28 21 ① 22 ④ 23 $\frac{21}{2}$ 24 600 cm^2	01 112 02 풀이 참조 03 (1) 6 (2) 18 04 6 cm 05 40 06 $\frac{1}{3}$ 07 4 08 (1) 2 cm (2) 8 cm^2	1 ③ 2 ④ 3 ②

Ⅲ 도형의 닮음

05. 도형의 닮음

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.45

01 ③ 02 ④ 03 $54\pi\ \text{cm}^2$
04 8, SAS 닮음 05 ② 06 ①

Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.46~49

01 ④ 02 ③ 03 4분 30초 04 ③ 05 ⑤ 06 ⑤
07 $300\ \text{m}^2$ 08 ④ 09 $\frac{376}{243}$ 10 ③ 11 ⑤ 12 9 cm
13 3 : 5 14 ④ 15 19 16 10 17 $64\ \text{cm}^2$ 18 ⑤
19 $\frac{15}{8}$ cm 20 ② 21 ④ 22 $\frac{9}{2}$ cm 23 4 cm
24 243 : 32

Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.50~51

01 풀이 참조 02 1 : 2
03 (1) 7 cm (2) 14 cm (3) 1 : 3
04 (1) $\frac{4}{3}h$ m (2) 10 m 05 81 : 8
06 6 07 2 08 16 : 15

미리보는 학력평가 p.52

1 ⑤ 2 ③
3 ④

06. 닮음의 활용

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.54

01 ① 02 ② 03 $\frac{16}{7}$ cm 04 ⑤
05 ③ 06 $45\ \text{cm}^2$

Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.55~57

01 ③ 02 28 : 16 : 33 03 22 04 ③
05 $\overline{\text{CF}}=16$ cm, $\overline{\text{DG}}=25$ cm 06 ③ 07 ① 08 3 : 8
09 2 10 ① 11 $81\ \text{cm}^2$ 12 ④ 13 ② 14 $\frac{2}{3}$ cm
15 ③ 16 5 : 2 17 ④ 18 3

Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.58~59

01 (1) 63 : 35 : 15 (2) 42 : 28 : 20 : 15
02 5 : 12
03 (1) 1 : 3 (2) 2 : 3 (3) 4 : 15
04 16 05 15 06 (1) $45°$ (2) $\frac{9}{2}\ \text{cm}^2$
07 $\frac{20}{3}$ 08 $\frac{34}{3}$

미리보는 학력평가 p.60

1 ① 2 ⑤
3 ⑤ 4 $\frac{56}{3}$ cm

Ⅳ 피타고라스 정리

07. 피타고라스 정리

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.63

01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ②, ⑤
05 ④ 06 $\frac{12}{5}$ 07 $\frac{17}{2}\pi$

Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.64~67

01 ③ 02 12 03 ③ 04 ④ 05 $\frac{20}{3}$ 06 360
07 $\frac{240}{13}$ 08 ③ 09 ③ 10 ① 11 $80\ \text{cm}^2$ 12 24
13 29통 14 ④ 15 ⑤ 16 $144\ \text{cm}^2$ 17 ③ 18 ④
19 $\frac{24}{5}$ 20 ⑤ 21 136 22 28 23 ① 24 $2(S_1+S_2)$

Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.68~69

01 (1) 17 (2) $\frac{45}{8}$ 02 65
03 (1) 176π (2) 84 : 125 04 12개
05 30 cm 06 6 07 오전 10시 24분
08 180

미리보는 학력평가 p.70

1 ① 2 60
3 ① 4 720

Ⅴ 확률

08. 경우의 수

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.73

01 ④ 02 ② 03 13 04 6 05 ④
06 10 07 ③ 08 35

Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.74~77

01 ① 02 ③ 03 5 04 10 05 10 06 ③ 07 9
08 ② 09 18 10 ② 11 ② 12 54 13 ⑤ 14 ④
15 1300 16 72 17 10 18 ④ 19 ③ 20 ⑤ 21 ①
22 ① 23 46 24 34

Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.78~79

01 (1) 6 (2) 풀이 참조 02 6
03 (1) 120 (2) 96 (3) 60 04 21
05 120 06 43 07 24 08 125

미리보는 학력평가 p.80

1 6 2 33
3 ⑤ 4 ②

09. 확률

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.82

01 $\frac{2}{21}$ 02 ① 03 $\frac{2}{3}$ 04 ③ 05 ④
06 ② 07 ④

Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.83~85

01 ③ 02 $\frac{1}{5}$ 03 $\frac{13}{18}$ 04 ① 05 ③ 06 $\frac{31}{36}$ 07 ③
08 ② 09 $\frac{5}{18}$ 10 $\frac{32}{81}$ 11 $\frac{2}{9}$ 12 ④ 13 ③ 14 $\frac{5}{9}$
15 ① 16 $\frac{3}{8}$ 17 $\frac{2}{5}$ 18 4 19 ③

Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.86~87

01 (1) $\frac{8}{33}$ (2) $\frac{16}{33}$ 02 41
03 (1) 2 (2) $\frac{3}{8}$ 04 $\frac{31}{54}$ 05 214
06 $\frac{13}{35}$ 07 $\frac{1}{4}$ 08 $\frac{1}{25}$

미리보는 학력평가 p.88

1 ② 2 ③
3 101 4 ④

I 삼각형의 성질

01 삼각형의 성질

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 9

01 ① 02 ③ 03 ② 04 ④ 05 82 cm^2
06 18 cm^2

01

△DBC에서 $\overline{BC}=\overline{DC}$이므로

$\angle CBD=\angle BDC=25^\circ$

즉, $\angle DCE=25^\circ+25^\circ=50^\circ$이고, $\angle ACD=\angle DCE$이므로

$\angle ACE=2\times50^\circ=100^\circ$

따라서 $\angle ABC=\angle ACB=180^\circ-100^\circ=80^\circ$이므로

$\angle A=180^\circ-2\times80^\circ=20^\circ$ 답 ①

02

△ABC에서 $\overline{AD}$는 ∠A의 이등분선이므로

$\angle ADB=90^\circ$, $\overline{BD}=\overline{DC}$

이때, $\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AD}$에서

$\frac{1}{2}\times10\times\frac{24}{5}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times8$

$\therefore\ \overline{BD}=6\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{BC}=2\overline{BD}=2\times6=12\,(\text{cm})$ 답 ③

03

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고, $\angle A=36^\circ$이므로

$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$ (③)

$\therefore\ \angle ABD=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$

즉, △ABD는 $\overline{AD}=\overline{BD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{AD}=10$ cm (①),

$\angle ADB=180^\circ-2\times36^\circ=108^\circ$ (⑤)

이때, $\angle BDC=180^\circ-\angle ADB=180^\circ-108^\circ=72^\circ=\angle C$이므로 △BCD는 $\overline{BD}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{BD}=10$ cm (④)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

04

△ABD와 △CAE에서

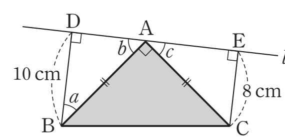
$\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{CA}$,

$\angle ABD=90^\circ-\angle BAD=\angle CAE$

∴ △ABD≡△CAE (RHA 합동)

따라서 △ABD≡△CAE임을 설명할 때, 사용하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

05



오른쪽 그림에서

$\angle a+\angle b=90^\circ$,

$\angle b+\angle c=90^\circ$이므로

$\angle a=\angle c$

즉, △ABD와 △CAE에서

$\angle ADB=\angle CEA=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{CA}$,

$\angle ABD=\angle CAE$

∴ △ABD≡△CAE (RHA 합동)

즉, $\overline{DA}=\overline{EC}=8$ cm, $\overline{AE}=\overline{BD}=10$ cm이므로

$\overline{DE}=\overline{DA}+\overline{AE}=8+10=18\,(\text{cm})$

이때, 사각형 DBCE는 사다리꼴이므로

(사다리꼴 DBCE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(\overline{BD}+\overline{CE})\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}\times(10+8)\times18=162\,(\text{cm}^2)$

∴ △ABC=(사다리꼴 DBCE의 넓이)−(△ABD+△CAE)

=(사다리꼴 DBCE의 넓이)−2△ABD

$=162-2\times\frac{1}{2}\times10\times8$

$=82\,(\text{cm}^2)$ 답 82 cm^2

06

△ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle ABC=45^\circ$

이때, $\triangle$AED에서 $\angle EDA=90^\circ-45^\circ=45^\circ$이므로 $\triangle$AED는 $\overline{EA}=\overline{ED}$인 직각이등변삼각형이다.

한편, $\triangle$DEB와 $\triangle$DCB에서

$\angle DEB=\angle DCB=90^\circ$, $\overline{BD}$는 공통, $\angle EBD=\angle CBD$

$\therefore \triangle DEB\equiv\triangle DCB$ (RHA 합동)

즉, $\overline{DE}=\overline{DC}=6$ cm이므로 $\overline{EA}=\overline{ED}=6$ cm

$\therefore \triangle AED=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{ED}$

$=\frac{1}{2}\times6\times6=18(\text{cm}^2)$ 답 18 cm^2

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 10~12

01 ④	02 35°	03 ④	04 220°	05 ③
06 ④	07 36°	08 ④	09 32 cm	10 88
11 ②	12 166°	13 85°	14 6 cm^2	15 ①
16 ②	17 $\frac{26}{3}$ cm	18 ②		

01

$\triangle$BDF와 $\triangle$CED에서

$\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle FBD=\angle DCE=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$,

$\overline{BF}=\overline{CD}$, $\overline{BD}=\overline{CE}$

$\therefore \triangle BDF\equiv\triangle CED$ (SAS 합동)

즉, $\angle BDF=\angle CED$

이때, $\angle EDB=\angle x+\angle BDF$이고

$\triangle$CED에서 $\angle EDB=\angle C+\angle CED$이므로

$\angle x=\angle C=70^\circ$ 답 ④

02

$\angle$CAE의 외각의 크기는 110°이므로

$\angle CAD=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

이때, $\triangle$CAD는 $\overline{CA}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle CDE=\angle CAE=70^\circ$

즉, $\angle ACD=180^\circ-2\times70^\circ=40^\circ$

$\therefore \angle DCE=\frac{1}{2}\times40^\circ=20^\circ$

이등변삼각형 CAD에서 꼭지각 C의 이등분선은 밑변 AD를 수직이등분하므로

$\angle CED=90^\circ$

따라서 $\triangle$CEB에서 $35^\circ+90^\circ+\angle BCE=180^\circ$

$\therefore \angle BCE=55^\circ$

$\therefore \angle BCD=55^\circ-20^\circ=35^\circ$ 답 35°

| 다른풀이 |

$\triangle$CAD는 $\overline{CA}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle CDA=\angle CAD=180^\circ-110^\circ$

$=70^\circ$

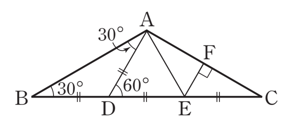
$\angle BCD+\angle DBC=\angle CDA=70^\circ$

$\therefore \angle BCD=35^\circ$

03

$\triangle$ABD에서 $\overline{DA}=\overline{DB}$이므로 $\angle DAB=\angle DBA=30^\circ$

$\therefore \angle ADE=30^\circ+30^\circ=60^\circ$



또한, $\triangle$ADE에서 $\overline{DA}=\overline{DE}$이므로 $\triangle$ADE는 정삼각형이다.

즉, $\overline{AE}=\overline{EC}$이므로 $\triangle$AEC는 이등변삼각형이다.

이때, 이등변삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선은 밑변의 수직이등분선이므로 $\overline{AF}=\overline{FC}$

$\therefore \triangle AEC=2\triangle ECF$ ······㉠

한편, 세 삼각형 ABD, ADE, AEC는 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로 넓이가 모두 같다.

즉, $\triangle ABC=3\triangle AEC$

$\therefore \triangle ABC=6\triangle ECF$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는 $\triangle$ECF의 넓이의 6배이다. 답 ④

04

$\angle BAD=\angle a$, $\angle DAE=\angle b$, $\angle EAC=\angle c$라 하자.

$\angle BAC=100^\circ$이므로

$\angle a+\angle b+\angle c=100^\circ$ ······㉠

$\overline{BA}=\overline{BE}$이므로 $\angle AED=\angle BAE=\angle a+\angle b$

$\overline{CA}=\overline{CD}$이므로 $\angle ADC=\angle CAD=\angle b+\angle c$

이때, $\triangle$ADE에서 $\angle DAE+\angle ADE+\angle AED=180^\circ$

$\angle b+(\angle b+\angle c)+(\angle a+\angle b)=180^\circ$

$\therefore \angle a+3\angle b+\angle c=180^\circ$ ······㉡

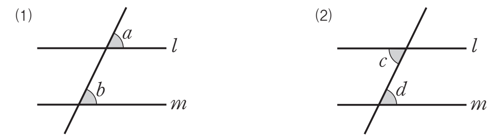
㉡$-$㉠을 하면 $2\angle b=80^\circ$

$\therefore \angle b=40^\circ$ ······㉢

$\therefore \angle ADB + \angle AEC = (180^\circ - \angle ADE) + (180^\circ - \angle AED)$
$= 180^\circ - (\angle b + \angle c) + 180^\circ - (\angle a + \angle b)$
$= 360^\circ - (\angle a + 2\angle b + \angle c)$
$= 360^\circ - 140^\circ$ ($\because$ ㉠, ㉢)
$= 220^\circ$ 답 220°

blacklabel 특강 필수개념

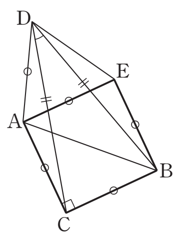
평행선의 성질



(1) $l /\!/ m$이면 $\angle a = \angle b$ (동위각)

(2) $l /\!/ m$이면 $\angle c = \angle d$ (엇각)

05



오른쪽 그림과 같이 사각형 ACBE가 정사각형이 되도록 점 E를 정하자.
△DAC와 △DEB에서
$\overline{AC} = \overline{EB}$, $\overline{DC} = \overline{DB}$,
$\angle ACD = 90^\circ - \angle DCB$
$= 90^\circ - \angle DBC = \angle EBD$
$\therefore$ △DAC≡△DEB (SAS 합동)
즉, $\overline{AD} = \overline{ED}$이고, $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{AE}$이므로 △DAE는 정삼각형이다.
또한, △ADC에서 $\angle DAC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$이고
$\overline{AD} = \overline{AC}$이므로
$\angle ADC = \angle ACD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$
$\therefore \angle BDC = 60^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$ 답 ③

06

ㄱ. $\angle FEC = \angle PEF$ ($\because$ 접은 각), $\angle FEC = \angle PFE$ ($\because$ 엇각)
이므로 $\angle PEF = \angle PFE$
즉, △PEF는 이등변삼각형이므로
$\overline{PF} = \overline{PE} = 6$ cm

ㄴ. $\angle PEB = 180^\circ - (\angle PEF + \angle FEC)$
$= 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$

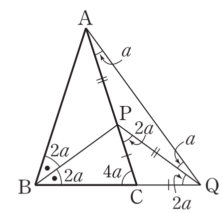
ㄷ. $\triangle PEF = \frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{AB}$이고 $\overline{PF} = 6$ cm, $\overline{AB} = 5$ cm
이므로 $\triangle PEF = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15(\text{cm}^2)$

ㄹ. $\angle PFE = \angle FEC = 65^\circ$, $\angle PEB = 50^\circ$ ($\because$ ㄴ)이므로
$\angle PFE \neq \angle PEB$

ㅁ. $\angle APH = \angle PEB$ ($\because$ 동위각)
이므로 $\angle APH = \angle PEB = 50^\circ$ ($\because$ ㄴ)

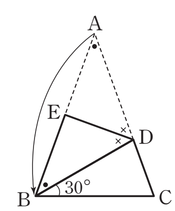
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

07



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AQ}$를 긋자.
△APQ에서 $\overline{PA} = \overline{PQ}$이므로
$\angle PAQ = \angle PQA = \angle a$라 하면
$\angle QPC = \angle a + \angle a = 2\angle a$
△PCQ에서 $\overline{CP} = \overline{CQ}$이므로
$\angle CQP = \angle CPQ = 2\angle a$
$\angle ACB = 2\angle a + 2\angle a = 4\angle a$
△ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이므로
$\angle ABC = \angle ACB = 4\angle a$
이때, $\overline{BP}$는 ∠B의 이등분선이므로
$\angle ABP = \angle PBC = 2\angle a$
즉, $\angle PBC = \angle PQC$이므로 $\overline{PB} = \overline{PQ} = \overline{PA}$이고,
△PAB는 $\overline{PA} = \overline{PB}$인 이등변삼각형이므로
$\angle BAP = \angle ABP = 2\angle a$
이때, △ABC에서 $2\angle a + 4\angle a + 4\angle a = 180^\circ$
$10\angle a = 180^\circ$ $\therefore \angle a = 18^\circ$
$\therefore \angle QPC = 2\angle a = 2 \times 18^\circ = 36^\circ$ 답 36°

08



오른쪽 그림에서 $\angle DAE = \angle DBE$이고
△ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이므로
$\angle ABC = \angle ACB = \angle DAE + 30^\circ$
즉, △ABC에서 $3\angle DAE + 2 \times 30^\circ = 180^\circ$
$3\angle DAE = 120^\circ$ $\therefore \angle DAE = 40^\circ$
한편, △ABD는 $\overline{AD} = \overline{BD}$인 이등변삼각형이고 ∠D의 이등분선은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로
$\angle DEA = \angle DEB = 90^\circ$, $\angle DBE = \angle DAE = 40^\circ$
따라서 △BDE에서
$\angle BDE = 180^\circ - (\angle DEB + \angle DBE)$
$= 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$ 답 ④

09

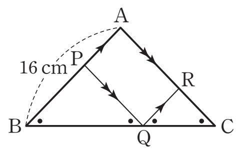
$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle B=\angle C$

이때, $\overline{AB}/\!/\overline{QR}$이므로 $\angle B=\angle CQR$ ($\because$ 동위각)

또한, $\overline{AC}/\!/\overline{PQ}$이므로 $\angle C=\angle BQP$ ($\because$ 동위각)

크기가 같은 각을 표시하면 다음 그림과 같다.



(가)

즉, $\angle B=\angle BQP$이므로 $\triangle PBQ$는 $\overline{BP}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이고, $\angle C=\angle CQR$이므로 $\triangle CRQ$는 $\overline{QR}=\overline{CR}$인 이등변삼각형이다.

(나)

따라서 사각형 APQR의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{AR}&=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{AR}\\&=\overline{AB}+\overline{AC}\\&=16+16=32\,(\text{cm})\end{aligned}$$

(다)

답 32 cm

단계	채점 기준	배점
(가)	평행선의 성질을 이용하여 $\angle B=\angle CQR$ $\angle C=\angle BQP$를 보인 경우	40%
(나)	두 삼각형 PBQ, CRQ가 이등변삼각형임을 보인 경우	30%
(다)	사각형 APQR의 둘레의 길이를 구한 경우	30%

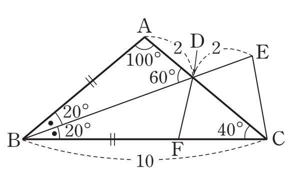
10

$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$

$\therefore\ \angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$

$\triangle ABD$에서 $\angle ADB=180^\circ-(100^\circ+20^\circ)=60^\circ$



위의 그림과 같이 $\overline{BC}$ 위에 $\overline{AB}=\overline{BF}$가 되는 점 F를 잡으면

$\triangle ABD$와 $\triangle FBD$에서

$\overline{BA}=\overline{BF}$, $\overline{BD}$는 공통, $\angle DBA=\angle DBF$

즉, $\triangle ABD\equiv\triangle FBD$ (SAS 합동)이므로

$\overline{DF}=\overline{DA}=2$, $\angle DFB=\angle DAB=100^\circ$,

$\angle FDB=\angle ADB=60^\circ$

이때, $\angle DFC=20^\circ+60^\circ=80^\circ$이므로

$\angle FDC=180^\circ-(80^\circ+40^\circ)=60^\circ$

또한, $\angle EDC=\angle ADB=60^\circ$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\triangle DFC$와 $\triangle DEC$에서

$\overline{DF}=\overline{DE}=2$, $\angle FDC=\angle EDC=60^\circ$,

$\overline{DC}$는 공통

즉, $\triangle DFC\equiv\triangle DEC$ (SAS 합동)에서

$\angle ECD=\angle FCD=40^\circ$, $\angle DEC=\angle DFC=80^\circ$이므로

$\angle BEC=80^\circ\qquad\therefore\ a=80$

$\triangle BCE$에서 $\angle BCE=\angle BEC=80^\circ$이므로 $\triangle BCE$는 이등변삼각형이다.

즉, $\overline{BE}=\overline{BC}=10$이므로

$b=\overline{BD}=\overline{BE}-\overline{DE}=10-2=8$

$\therefore\ a+b=80+8=88$

답 88

11

$\triangle QBP$와 $\triangle SPB$에서

$\angle BQP=\angle PSB=90^\circ$ ……㉠

$\overline{BP}$는 공통 ……㉡

또한, $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\angle QBP=\angle C$이고

$\overline{SP}/\!/\overline{AC}$이므로 $\angle SPB=\angle C$ ($\because$ 동위각)

$\therefore\ \angle QBP=\angle SPB$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\triangle QBP\equiv\triangle SPB$ (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{BS}$ ……㉣

한편, 사각형 SPRD는 직사각형이므로

$\overline{PR}=\overline{SD}$ ……㉤

㉣, ㉤에서

$$\begin{aligned}\overline{BD}&=\overline{BS}+\overline{SD}=\overline{PQ}+\overline{PR}\\&=6+10=16\,(\text{cm})\end{aligned}$$

답 ②

12

$\triangle ABC$와 $\triangle DBE$에서

$\angle ABC=\angle DBE=90^\circ$,

$\overline{AC}=\overline{DE}$, $\overline{BC}=\overline{BE}$

$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle DBE$ (RHS 합동)

이때, $\angle A=38^\circ$이므로

$\angle DEB=\angle ACB=180^\circ-(90^\circ+38^\circ)=52^\circ$

따라서 사각형 EBCF에서

$\angle CFE=360^\circ-(52^\circ+90^\circ+52^\circ)=166^\circ$

답 166°

13

$\triangle ABE$와 $\triangle ADG$에서

$\angle ABE=\angle ADG=90^\circ$,

$\overline{AE}=\overline{AG}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$

즉, $\triangle ABE\equiv\triangle ADG$ (RHS 합동)이므로

$\angle BAE=\angle DAG=180^\circ-(90^\circ+50^\circ)=40^\circ$

또한, $\angle DAG+\angle BAG=90^\circ$이므로

$\angle BAG=90^\circ-40^\circ=50^\circ$

즉, $\angle EAG=40^\circ+50^\circ=90^\circ$이고, $\overline{AE}=\overline{AG}$이므로 $\triangle AEG$는 직각이등변삼각형이다.

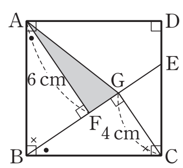
$\therefore \angle AEG=\frac{1}{2}\times(180^\circ-90^\circ)=45^\circ$

$\therefore \angle x=\angle BAE+\angle AEG$

$=40^\circ+45^\circ=85^\circ$ 답 85°

14

오른쪽 그림과 같이



$\triangle ABF$와 $\triangle BCG$에서

$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\angle AFB=\angle BGC=90^\circ$,

$\angle ABF=\angle BCG$

즉, $\triangle ABF\equiv\triangle BCG$ (RHA 합동)이므로

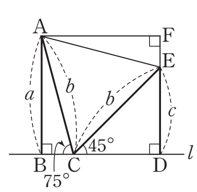
$\overline{BG}=\overline{AF}=6$ cm, $\overline{BF}=\overline{CG}=4$ cm

이때, $\overline{FG}=\overline{BG}-\overline{BF}=6-4=2$ (cm)이므로

$\triangle AFG=\frac{1}{2}\times\overline{FG}\times\overline{AF}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$ (cm^2) 답 6 cm^2

15

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{DE}$의 연장선 위에 내린 수선의 발을 F라 하자.



$\angle ACE=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$이고

$\overline{AC}=\overline{CE}$이므로 $\triangle ACE$는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{AE}=b$, $\angle CAE=60^\circ$

$\triangle ABC$에서 $\angle BAC=180^\circ-(90^\circ+75^\circ)=15^\circ$이므로

$\angle EAF=90^\circ-(15^\circ+60^\circ)=15^\circ$

이때, $\triangle ABC$와 $\triangle AFE$에서

$\overline{AC}=\overline{AE}$, $\angle ABC=\angle AFE=90^\circ$,

$\angle BAC=\angle FAE=15^\circ$

즉, $\triangle ABC\equiv\triangle AFE$ (RHA 합동)이므로

$\overline{AF}=\overline{AB}=a$

따라서 사각형 ABDF는 한 변의 길이가 a인 정사각형이므로

$\overline{BD}=\overline{AF}=a$ 답 ①

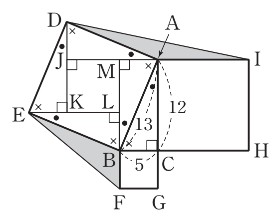
blacklabel 특강 오답피하기

(1) $\angle ACE=60^\circ$이므로 $\triangle ACE$는 정삼각형이다.
$\therefore \overline{AE}=6$
이때, $\overline{BD}>\overline{AE}=6$이므로 보기에서 ②는 $\overline{BD}$의 길이가 될 수 없다.

(2) $\angle ECD=45^\circ$이므로 $\triangle CDE$는 $\overline{CD}=\overline{DE}$인 직각이등변삼각형이다.
$\therefore \overline{CD}=c$
이때, $\overline{BD}>\overline{CD}=c$이므로 보기에서 ③은 $\overline{BD}$의 길이가 될 수 없다.

16 해결단계

❶ 단계	직각삼각형의 합동을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	직각삼각형의 합동을 이용하여 b의 값을 구한다.
❸ 단계	$a+b$의 값을 구한다.



위의 그림과 같이 네 점 J, K, L, M을 정하면

$\triangle ABC\equiv\triangle BAM\equiv\triangle ADJ\equiv\triangle DEK\equiv\triangle EBL$ (RHA 합동)

이때, $\overline{DJ}=\overline{BC}=5$이므로

$a=\triangle AID=\frac{1}{2}\times\overline{AI}\times\overline{DJ}=\frac{1}{2}\times12\times5=30$

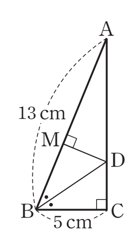
$\overline{EL}=\overline{AC}=12$이므로

$b=\triangle BEF=\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{EL}=\frac{1}{2}\times5\times12=30$

$\therefore a+b=30+30=60$ 답 ②

17

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



$\triangle BCD$와 $\triangle BMD$에서

$\angle BCD=\angle BMD=90^\circ$, $\angle MBD=\angle CBD$,

$\overline{BD}$는 공통

즉, $\triangle BCD\equiv\triangle BMD$ (RHA 합동)이므로

$\overline{CD}=\overline{MD}$, $\overline{BM}=\overline{BC}=5$ cm

이때, $\overline{CD}=\overline{MD}=h$ cm라 하면 $\triangle ABC=30$ cm^{2}이므로

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle BCD=30$에서

$\frac{1}{2}\times13\times h+\frac{1}{2}\times5\times h=30$

$9h=30$ $\therefore h=\frac{10}{3}$

즉, $\overline{CD}=\frac{10}{3}$ cm

또한, $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times5\times\overline{AC}=30$에서 $\overline{AC}=12$ cm

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=12-\frac{10}{3}=\frac{26}{3}$(cm) 답 $\frac{26}{3}$ cm

18

$\triangle PDA$와 $\triangle PEA$에서

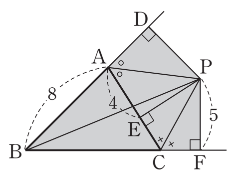
$\angle PDA=\angle PEA=90^\circ$, $\overline{PA}$는 공통, $\angle DAP=\angle EAP$

$\therefore\ \triangle PDA\equiv\triangle PEA$ (RHA 합동)

같은 방법으로 $\triangle PEC\equiv\triangle PFC$ (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{DA}=\overline{EA}=4$, $\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}=5$

또한, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$를 그으면



$\triangle PDB$와 $\triangle PFB$에서

$\angle PDB=\angle PFB=90^\circ$, $\overline{BP}$는 공통, $\overline{PD}=\overline{PF}$

$\therefore\ \triangle PDB\equiv\triangle PFB$ (RHS 합동)

따라서 $\triangle PDB=\triangle PFB=\frac{1}{2}\times(8+4)\times5=30$이므로

(사각형 PDBF의 넓이)$=2\triangle PDB=2\times30=60$ 답 ②

blacklabel 특강 풀이첨삭

각의 이등분선의 성질을 문제에 적용해 보자. 각의 이등분선 위의 한 점에서 그 각을 이루는 두 변까지의 길이가 같음을 이용하여 $\overline{PF}=\overline{PE}=\overline{PD}$임을 알 수 있다.
또한, 각을 이루는 두 변에서 같은 거리에 있는 점은 그 각의 이등분선 위에 있음을 이용하여 $\angle PBD=\angle PBF$임을 알 수 있다.

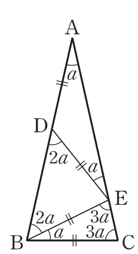
Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 13~14

01 (1) $\frac{180^\circ}{7}$ (2) 14		**02** 5	**03** (1) 2 cm (2) 18 cm²	
04 16 cm²	**05** 54 cm²	**06** 3 cm	**07** 9 cm	**08** 30°

01 해결단계

(1)	❶ 단계	$\angle BAC=\angle a$라 하고 그림에서 각 각을 $\angle a$를 사용하여 나타낸다.
	❷ 단계	$\angle BAC$의 크기를 구한다.
(2)	❸ 단계	조건을 만족시키는 n의 값을 구한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서



$\angle BAC=\angle a$라 하면

$\angle AED=\angle BAC=\angle a$,

$\angle EDB=\angle EBD=2\angle a$

$\therefore\ \angle BCE=\angle BEC=\angle BAC+\angle EBD$
$=\angle a+2\angle a=3\angle a$

이때, $\triangle ABC$에서

$\angle a+3\angle a+3\angle a=180^\circ$

$7\angle a=180^\circ$ $\therefore\ \angle a=\frac{180^\circ}{7}$

$\therefore\ \angle BAC=\frac{180^\circ}{7}$

(2) 꼭짓점 A를 중심으로 하여 정다각형을 만들려면 꼭지각의 크기의 합이 360°가 되어야 하므로

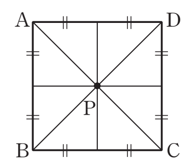
$\frac{180^\circ}{7}\times n=360^\circ$ $\therefore\ n=14$

답 (1) $\frac{180^\circ}{7}$ (2) 14

02 해결단계

❶ 단계	$\triangle PAB$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$가 모두 점 P를 꼭짓점으로 하는 이등변삼각형일 때의 점 P의 위치를 구한다.
❷ 단계	$\triangle PAB$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$, $\triangle PBC$ 중에서 하나가 정삼각형이 되도록 하는 점 P에서 주어진 조건을 만족시킴을 확인하고 그 위치의 개수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 점 P의 개수를 더한다.

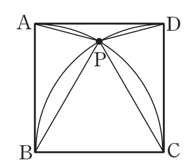
(i) 두 변 AB, CD의 중점을 잇는 선분과 두 변 BC, DA의 중점을 잇는 선분의 교점에 점 P가 위치할 때,



$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{DP}$이므로

$\triangle PAB$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$는 모두 이등변삼각형이다.

(ii) 점 B와 점 C를 각각 중심으로 하고, 정사각형의 한 변을 반지름으로 하는 두 원의 교점에 점 P가 위치할 때,



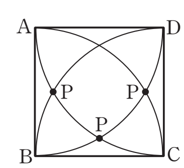
$\overline{BC}=\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\triangle BCP$는 정삼각형이므로

$\angle ABP=\angle DCP$ $\therefore\ \overline{AP}=\overline{DP}$

즉, $\triangle PDA$는 이등변삼각형이다.

또한, $\overline{BA}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{CD}$이므로 $\triangle PAB$, $\triangle PCD$는 이등변삼각형이다.

같은 방법으로 점 C와 점 D, 점 A와 점 D, 점 A와 점 B를 각각 중심으로 하고 정사각형의 한 변을 반지름으로 하는 원의 교점에 점 P가 위치할 때,



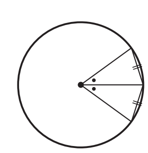
$\triangle PAB$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$는 모두 이등변삼각형이다.

(i), (ii)에서 구하는 점 P의 개수는 $1+4=5$이다. 답 5

blacklabel 특강 필수개념

중심각의 크기와 호, 현의 길이

한 원에서
(1) 같은 크기의 중심각에 대한 현의 길이는 같다.
(2) 같은 길이의 현에 대한 중심각의 크기는 같다.
(3) 현의 길이는 중심각의 크기에 정비례하지 않는다.



03 해결단계

(1)	❶ 단계	각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{DB}=\overline{DC}$임을 보인다.
	❷ 단계	$\triangle BDE\equiv\triangle CDF$임을 보인다.
	❸ 단계	$\overline{CF}$의 길이를 구한다.
(2)	❹ 단계	❸ 단계에서 구한 값을 이용하여 $\triangle ADC$의 넓이를 구한다.

(1) $\triangle AED$와 $\triangle AFD$에서

$\angle AED=\angle AFD=90^\circ$, $\overline{AD}$는 공통, $\angle DAE=\angle DAF$

즉, $\triangle AED\equiv\triangle AFD$ (RHA 합동)이므로

$\overline{DE}=\overline{DF}$ ……㉠

$\triangle DBH$와 $\triangle DCH$에서

$\angle BHD=\angle CHD=90^\circ$, $\overline{HD}$는 공통, $\overline{BH}=\overline{CH}$

즉, $\triangle DBH\equiv\triangle DCH$ (SAS 합동)이므로

$\overline{DB}=\overline{DC}$ ……㉡

한편, $\angle BED=\angle CFD=90^\circ$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\triangle BDE\equiv\triangle CDF$ (RHS 합동)

$\therefore\ \overline{CF}=\overline{BE}=\overline{AB}-\overline{AE}$

$=\overline{AB}-\overline{AF}=10-8=2\,(\text{cm})$

(2) $\overline{AC}=\overline{AF}-\overline{CF}=8-2=6\,(\text{cm})$이고,

$\overline{DF}=\overline{DE}=6$ cm이므로

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{DF}=\frac{1}{2}\times6\times6=18\,(\text{cm}^2)$

답 (1) 2 cm (2) 18 cm^2

04 해결단계

❶ 단계	점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\triangle DEH\equiv\triangle EFC$임을 보인다.
❷ 단계	$\overline{CE}$, $\overline{CF}$의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	$\triangle CFE$의 넓이를 구한다.

점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

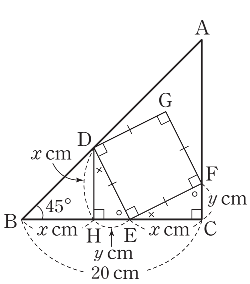
$\triangle DEH$와 $\triangle EFC$에서

$\angle DHE=\angle ECF=90^\circ$, $\overline{DE}=\overline{EF}$,

$\angle DEH=180^\circ-(90^\circ+\angle CEF)$

$=90^\circ-\angle CEF=\angle EFC$

즉, $\triangle DEH\equiv\triangle EFC$ (RHA 합동)



이때, 위의 그림과 같이 $\overline{DH}=\overline{EC}=x$ cm, $\overline{EH}=\overline{CF}=y$ cm라 하면

$\triangle BHD$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=\overline{DH}$

즉, $\overline{BE}=12$ cm에서 $x+y=12$ ……㉠

또한, $\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BC}=\overline{AC}$

즉, $\overline{BC}=20$ cm에서 $2x+y=20$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=8$, $y=4$

$\therefore\ \triangle CFE=\frac{1}{2}\times8\times4=16\,(\text{cm}^2)$

답 16 cm^2

05 해결단계

❶ 단계	$\triangle BEM\equiv\triangle CDM$임을 보인다.
❷ 단계	$\overline{EM}$과 $\overline{BE}$의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	$\triangle ABM$의 넓이를 구한다.

$\triangle BEM$과 $\triangle CDM$에서

$\angle BEM=\angle CDM=90^\circ$, $\overline{BM}=\overline{CM}$,

$\angle BME=\angle CMD$ ($\because$ 맞꼭지각)

즉, $\triangle BEM\equiv\triangle CDM$ (RHA 합동)이므로

$\overline{EM}=\overline{DM}=6$ cm, $\overline{BE}=\overline{CD}=9$ cm

$\therefore\ \triangle ABM=\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{BE}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AE}-\overline{EM})\times\overline{BE}$

$=\frac{1}{2}\times(18-6)\times9$

$=54\,(\text{cm}^2)$

답 54 cm^2

06 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABD$, $\triangle DB'E$가 이등변삼각형임을 보인다.
❷ 단계	$\overline{BE}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{CE}$의 길이를 구한다.

$\angle B=\angle B'$이고, $\overline{AB}/\!/\overline{B'C'}$이므로 $\angle BAD=\angle B'$ ($\because$ 엇각)

$\therefore\ \angle B=\angle BAD$

즉, $\triangle ABD$는 $\overline{DA}=\overline{DB}$인 이등변삼각형이다.

또한, $\angle B=\angle BEB'$ ($\because$ 엇각)이므로

$\angle B'=\angle B'ED$

즉, $\triangle DB'E$는 $\overline{DB'}=\overline{DE}$인 이등변삼각형이므로

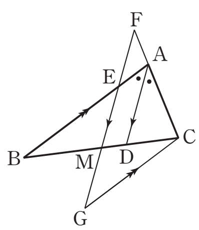
$\overline{BE}=\overline{BD}+\overline{DE}=\overline{AD}+\overline{DB'}$

$\quad=\overline{AB'}=\overline{AB}=10\text{ cm}$

$\therefore\ \overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=13-10=3(\text{cm})$ 답 3 cm

07 해결단계

❶ 단계	적당한 보조선을 그어 합동인 삼각형을 찾는다.
❷ 단계	평행선의 성질을 이용하여 크기가 같은 각, 길이가 같은 변을 찾는다.
❸ 단계	세 변 AB, AC, BE의 길이 사이의 관계를 이용하여 $\overline{BE}$의 길이를 구한다.



위의 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 평행한 선을 그어 $\overline{FM}$의 연장선과 만나는 점을 G라 하자.

$\triangle BME$와 $\triangle CMG$에서

$\overline{BM}=\overline{CM}$, $\angle BME=\angle CMG$ ($\because$ 맞꼭지각),

$\angle EBM=\angle GCM$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle BME\equiv\triangle CMG$ (ASA 합동)이므로

$\overline{BE}=\overline{CG}$ ……㉠

이때, $\angle AEF=\angle EAD=\angle CAD=\angle AFE$이므로

$\overline{AE}=\overline{AF}$

$\overline{AB}/\!/\overline{CG}$에서 $\angle CGM=\angle AEF=\angle AFE$이므로

$\overline{CG}=\overline{CF}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BE}=\overline{CF}$이므로

$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BE}+\overline{AE}+\overline{CF}-\overline{AF}$

$\quad=\overline{BE}+\overline{CF}=2\overline{BE}$

$\therefore\ \overline{BE}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$

$\quad=\frac{1}{2}\times(12+6)=9(\text{cm})$ 답 9 cm

08 해결단계

❶ 단계	선분 AC를 한 변으로 하는 정삼각형을 그린다.
❷ 단계	$\triangle DAP\equiv\triangle ABC$임을 보인다.
❸ 단계	$\angle PCA$의 크기를 구한다.
❹ 단계	$\angle BPC$의 크기를 구한다.

$\angle BAC=\angle a$라 하면

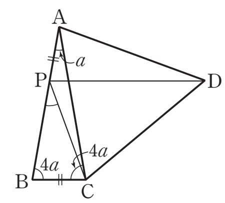
$\angle B=\angle ACB=4\angle BAC=4\angle a$

$\triangle ABC$에서 $\angle a+4\angle a+4\angle a=180^\circ$이므로

$9\angle a=180^\circ \qquad \therefore\ \angle a=20^\circ$

$\therefore\ \angle B=\angle ACB=4\times20^\circ=80^\circ$

이때, $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정삼각형 ACD를 그린 후, $\overline{DP}$를 그으면 다음 그림과 같다.



$\triangle DAP$와 $\triangle ABC$에서

$\overline{AD}=\overline{BA}$, $\overline{AP}=\overline{BC}$,

$\angle DAP=\angle ABC=80^\circ$

즉, $\triangle DAP\equiv\triangle ABC$ (SAS 합동)이므로

$\angle ADP=\angle BAC=20^\circ$

$\therefore\ \angle PDC=60^\circ-\angle ADP=60^\circ-20^\circ=40^\circ$

또한, $\overline{DA}=\overline{DP}=\overline{DC}$이므로

$\angle DPC=\angle DCP=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$

$\therefore\ \angle PCA=\angle DCP-\angle DCA=70^\circ-60^\circ=10^\circ$

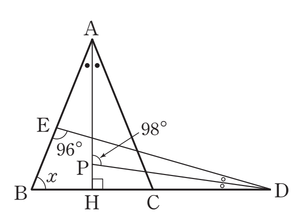
따라서 $\triangle APC$에서

$\angle BPC=\angle PAC+\angle PCA=20^\circ+10^\circ=30$ 답 30°

미리보는 학력평가 p. 15

1 68	2 ②	3 ①	4 24

1



위의 그림과 같이 $\overline{AP}$가 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선이므로 그 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 H라 하면

$\overline{AH}\perp\overline{BC}$

$\triangle PHD$에서 $\angle HDP=98^\circ-90^\circ=8^\circ$이므로

$\angle BDE=2\angle HDP=2\times 8^\circ=16^\circ$

따라서 $\triangle BDE$에서

$\angle EBD=180^\circ-(96^\circ+16^\circ)=68^\circ$ $\therefore\ \angle ABC=68^\circ$

$\therefore\ x=68$ 답 68

2

$\overline{AD}$가 이등변삼각형 ABC의 꼭지각의 이등분선이므로

$\overline{BD}=\overline{CD}$, $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$

$\triangle PBD$와 $\triangle PCD$에서

$\overline{BD}=\overline{CD}$, $\angle BDP=\angle CDP=90^\circ$, $\overline{PD}$는 공통

$\therefore\ \triangle PBD\equiv\triangle PCD$ (SAS 합동)

즉, $\triangle PBC$는 $\angle BPC=90^\circ$, $\overline{PB}=\overline{PC}$인 직각이등변삼각형이므로 $\angle PBC=\angle PCB=45^\circ$

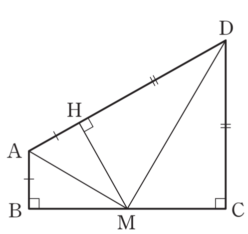
또한, $\triangle PBD$와 $\triangle PCD$에서

$\angle BPD=\angle CPD=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$이므로

$\overline{BD}=\overline{PD}=\overline{CD}=5\text{ cm}$

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}=5+5=10(\text{cm})$ 답 ②

3



위의 그림과 같이 $\overline{AM}$, $\overline{DM}$을 긋자.

$\triangle ABM$과 $\triangle AHM$에서

$\angle ABM=\angle AHM=90^\circ$, $\overline{AM}$은 공통, $\overline{BM}=\overline{HM}$

$\therefore\ \triangle ABM\equiv\triangle AHM$ (RHS 합동)

$\triangle MCD$와 $\triangle MHD$에서

$\angle MCD=\angle MHD=90^\circ$, $\overline{DM}$은 공통, $\overline{CM}=\overline{HM}$

$\therefore\ \triangle MCD\equiv\triangle MHD$ (RHS 합동)

따라서

(사각형 ABCD의 넓이)$=2\triangle AMH+2\triangle MDH$

이므로

$\triangle AMH=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{AH}=2\overline{AH}$,

$\triangle MDH=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{HD}=2\overline{HD}$에서

(사각형 ABCD의 넓이)$=2\times 2\overline{AH}+2\times 2\overline{HD}$

$=4(\overline{AH}+\overline{HD})$

$=4\overline{AD}$

$=36$

$\therefore\ \overline{AD}=9$ 답 ①

4

$\triangle BAD$와 $\triangle BHD$에서

$\angle BAD=\angle BHD=90^\circ$, $\overline{BD}$는 공통, $\overline{AD}=\overline{HD}$

$\therefore\ \triangle BAD\equiv\triangle BHD$ (RHS 합동)

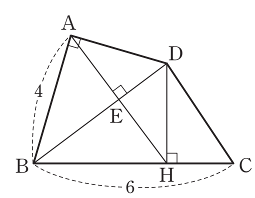
$\overline{AD}=\overline{HD}=h$라 하면

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\times 4\times h+\frac{1}{2}\times 6\times h$

$=2h+3h=5h=15$

$\therefore\ h=3$



이때, 위의 그림과 같이 사각형 ABHD의 두 대각선의 교점을 E라 하면 $\triangle ABE$와 $\triangle HBE$에서

$\overline{BE}$는 공통, $\overline{AB}=\overline{HB}$, $\angle ABE=\angle HBE$

즉, $\triangle ABE\equiv\triangle HBE$ (SAS 합동)이므로

$\angle AEB=\angle HEB=90^\circ$, $\overline{AE}=\overline{HE}$

한편, $\triangle DHC$에서 $\overline{HC}=2$, $\overline{DH}=3$이므로

$\triangle DHC=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

따라서 사각형 ABHD의 넓이는 $15-3=12$이므로

(사각형 ABHD의 넓이)$=2\times\triangle ABD$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AE}$

$=\overline{AE}\times\overline{BD}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BD}=12$

$\therefore\ \overline{AH}\times\overline{BD}=24$ 답 24

02 삼각형의 외심과 내심

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 17

01 30 cm	02 ④	03 ④	04 14 cm	05 (2, 2)
06 ⑤	07 ④	08 ①		

01

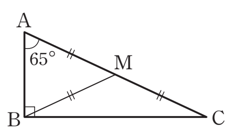
삼각형의 세 변의 수직이등분선이 만나는 점이 외심이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}=5\text{ cm}$, $\overline{BE}=\overline{EC}=6\text{ cm}$, $\overline{AF}=\overline{CF}=4\text{ cm}$

따라서 $\triangle ABC$의 둘레의 길이는

$2(\overline{BD}+\overline{EC}+\overline{CF})=2\times(5+6+4)=30(\text{cm})$ 답 30 cm

02



직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

따라서 $\triangle ABM$은 $\overline{MA}=\overline{MB}$인

이등변삼각형이므로

$\angle MAB=\angle MBA=65^\circ$

$\therefore \angle BMC=\angle MAB+\angle MBA=65^\circ+65^\circ=130^\circ$ 답 ④

03

점 I가 $\triangle ABC$의 내심이고, $\angle A=80^\circ$이므로

$\angle DIE=\angle BIC$ ($\because$ 맞꼭지각)

$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$

$=90^\circ+\frac{1}{2}\times 80^\circ$

$=130^\circ$

이때, 사각형 ADIE의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

$80^\circ+\angle x+130^\circ+(180^\circ-\angle y)=360^\circ$

$390^\circ+\angle x-\angle y=360^\circ$

$\therefore \angle y-\angle x=390^\circ-360^\circ=30^\circ$ 답 ④

04

$\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle IBC=\angle DIB$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle DBI$에서 $\angle DBI=\angle DIB$이므로 $\triangle DBI$는 $\overline{DB}=\overline{DI}$인 이등변삼각형이다.

또한, $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle ICB=\angle EIC$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle EIC$에서 $\angle EIC=\angle ECI$이므로 $\triangle EIC$는 $\overline{EI}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다.

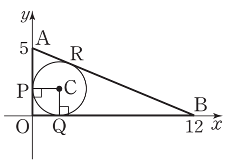
따라서 $\overline{DE}=\overline{DI}+\overline{IE}=\overline{DB}+\overline{EC}$이므로 $\triangle ADE$의 둘레의 길이는

$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{EC}+\overline{AE}$

$=\overline{AB}+\overline{AC}$

$=8+6=14(\text{cm})$ 답 14 cm

05



오른쪽 그림과 같이 주어진 조건을 만족시키는 삼각형 AOB를 좌표평면 위에 놓고, $\triangle AOB$의 내접원과 세 변 AO, OB, BA의 접점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OP}=a$라 하면 $\overline{OQ}=\overline{OP}=a$

$\overline{AR}=\overline{AP}=5-a$, $\overline{BR}=\overline{BQ}=12-a$

이때, $\overline{AR}+\overline{BR}=\overline{AB}=13$이므로

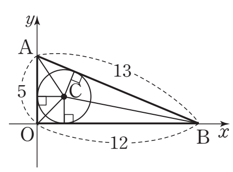
$(5-a)+(12-a)=13$

$2a=4 \qquad \therefore a=2$

따라서 $\overline{OQ}=2$, $\overline{OP}=2$이므로 점 C의 좌표는 (2, 2)이다.

답 (2, 2)

| 다른풀이 |



오른쪽 그림과 같이 주어진 조건을 만족시키는 삼각형 AOB를 좌표평면 위에 놓고 내접원의 중심을 C, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $C(r, r)$이다.

이때,

$\triangle OAB=\triangle CAO+\triangle CBO+\triangle CAB$이므로

$\frac{1}{2}\times5\times12=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times12\times r+\frac{1}{2}\times13\times r$

$30=15r \qquad \therefore r=2$

따라서 내접원의 중심 C의 좌표는 (2, 2)이다.

06

$\triangle ABC$의 내접원의 넓이가 16π이므로 내접원의 반지름의 길이는 4이다.

$\therefore \triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$

$=\frac{1}{2}\times4\times(13+15+14)$

$=84$ 답 ⑤

07

$\angle A=180^\circ-(36^\circ+64^\circ)=80^\circ$

점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle BAI=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$

또한, 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}$, $\angle AOB=2\angle C=2\times 64^\circ=128^\circ$

이때, $\triangle OAB$에서 $\angle OAB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-128^\circ)=26^\circ$이므로

$\angle OAI=\angle BAI-\angle OAB=40^\circ-26^\circ=14^\circ$

같은 방법으로 $\angle IBC=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times 36^\circ=18^\circ$

$\angle BOC=2\angle A=2\times 80^\circ=160^\circ$이므로

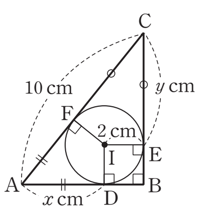
$\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-160^\circ)=10^\circ$

$\therefore \angle IBO=\angle IBC-\angle OBC=18^\circ-10^\circ=8^\circ$

$\therefore \angle IBO+\angle OAI=8^\circ+14^\circ=22^\circ$

답 ④

08



직각삼각형의 내접원과 외접원의 넓이가 각각 $4\pi\text{ cm}^2$, $25\pi\text{ cm}^2$이므로 반지름의 길이는 각각 2 cm, 5 cm이고, 외심은 빗변 AC의 중점이므로 오른쪽 그림에서

$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=2$ cm,

$\overline{AC}=2\times 5=10$ (cm)

이때, $\overline{AD}=x$ cm, $\overline{CE}=y$ cm라 하면

$\overline{AF}=\overline{AD}=x$ cm, $\overline{CF}=\overline{CE}=y$ cm이므로

$\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}$에서 $x+y=10$ ······㉠

$\therefore \triangle ABC=\triangle ICA+\triangle IAB+\triangle IBC$

$=\frac{1}{2}\times\{10\times 2+2(x+2)+2(y+2)\}$

$=\frac{1}{2}\times\{2(x+y)+28\}$

$=\frac{1}{2}\times(2\times 10+28)$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{2}\times 48=24(\text{cm}^2)$

답 ①

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 18~21

01 ⑤	02 ②	03 ②	04 30°	05 ③
06 30°	07 156°	08 ③	09 15 : 22 : 29	
10 63°	11 ②	12 70°	13 56°	14 $\frac{3}{2}\pi\text{ cm}^2$
15 20 cm	16 ③	17 ④	18 60°	19 64°
20 ④	21 ④	22 ③	23 ③	24 1

01

⑤ $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$는 점 O가 $\triangle ABC$의 내심일 때 성립한다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

02

$\triangle ABC$의 외심이 $\overline{BC}$ 위에 있으므로 $\triangle ABC$는 $\angle BAC=90^\circ$인 직각삼각형이고, 점 O′이 $\triangle ABO$의 외심이므로 $\triangle O'BO$는 $\overline{O'B}=\overline{O'O}$인 이등변삼각형이다.

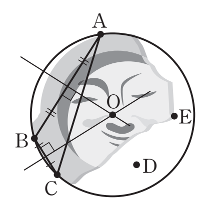
$\therefore \angle BO'O=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)=100^\circ$

이때, $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BO'O=\frac{1}{2}\times 100^\circ=50^\circ$이므로

$\angle OAC=\angle BAC-\angle BAO=90^\circ-50^\circ=40^\circ$

답 ②

03



복원하기 위해 $\triangle ABC$의 외심을 찾으면 된다.

이때, 삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선의 교점이므로 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 수직이등분선의 교점을 찾아 외심을 찾는다.

따라서 중심을 찾는 방법으로 옳은 것은 ②이다.

답 ②

blacklabel 특강 교과 외 지식

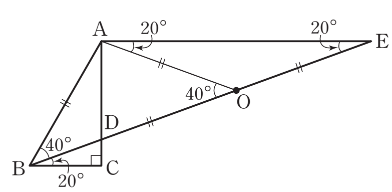
얼굴무늬 수막새(인면문원와당)

신라의 미소로 유명한 신라 시대의 기와 유물로, 인면문 수막새라고도 부른다. 이는 경상북도 경주시 탑정동 영묘사지에서 출토되었다. 대개 수막새는 연꽃무늬로 장식하는데 이 수막새는 사람의 얼굴 표정이 있는 것으로 드문 예이다. 진품은 국립경주박물관에 있다.

04

다음 그림과 같이 $\overline{DE}$의 중점을 O라 하면 점 O는 직각삼각형 ADE의 외심이므로

$\angle AOD=40^\circ$, $\overline{AO}=\overline{DO}=\overline{EO}$



이때, $\overline{DE}=2\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AO}$

즉, $\triangle ABO$는 $\overline{AB}=\overline{AO}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABO=\angle AOB=40^\circ$

한편, $\overline{AE}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle AED=\angle DBC$ ($\because$ 엇각)

$=20^\circ$

$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=40^\circ+20^\circ=60^\circ$

따라서 $\triangle ABC$에서

$\angle BAC=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$ 답 30°

05

점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\angle OAB=\angle OBA=\angle a$,

$\angle OAC=\angle OCA=\angle b$라 하자.

$\triangle PBQ$에서 $\overline{PB}=\overline{PQ}$이므로 $\angle PQB=\angle PBQ=\angle a$

$\triangle QPC$에서 $\overline{QP}=\overline{QC}$이므로 $\angle QPC=\angle QCP=\angle b$

한편, $\angle POQ=\angle BOC=2\angle A=2(\angle a+\angle b)$

이때, $\triangle POQ$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle a+\angle b+2(\angle a+\angle b)=180^\circ$

$3(\angle a+\angle b)=180^\circ$ $\therefore \angle a+\angle b=60^\circ$

$\therefore \angle A=\angle a+\angle b=60^\circ$ 답 ③

06

$\angle A : \angle B : \angle C=7:3:2$이므로

$\angle A=\frac{7}{12}\times180^\circ=105^\circ$, $\angle B=\frac{3}{12}\times180^\circ=45^\circ$,

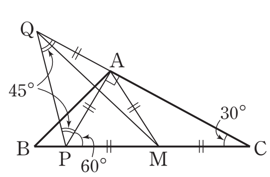
$\angle C=\frac{2}{12}\times180^\circ=30^\circ$

이때, $7\angle BAP=\angle A$이므로

$\angle BAP=\frac{1}{7}\angle A=\frac{1}{7}\times105^\circ=15^\circ$

$\therefore \angle PAC=105^\circ-15^\circ=90^\circ$

점 M은 직각삼각형 APC의 빗변의 중점이므로 $\triangle APC$의 외심이다.



$\therefore \overline{PM}=\overline{AM}=\overline{CM}$

또한, $\triangle ABP$에서

$\angle APM=\angle ABP+\angle BAP=45^\circ+15^\circ=60^\circ$이므로

$\triangle APM$은 정삼각형이다.

한편, $\triangle AQP$에서 $\angle PAQ=90^\circ$, $\angle APQ=45^\circ$이므로

$\angle AQP=45^\circ$

즉, $\triangle AQP$는 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{AM}=\overline{AP}=\overline{AQ}$이므로 $\triangle AQM$은 이등변삼각형이다.

이때, $\angle QAM=\angle QAP+\angle PAM=90^\circ+60^\circ=150^\circ$이므로

$\angle AQM+\angle AMQ=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

$\therefore \angle AQM=\angle AMQ=\frac{1}{2}\times30^\circ=15^\circ$

$\therefore \angle PQM=\angle PQA-\angle AQM$

$=45^\circ-15^\circ=30^\circ$ 답 30°

07 해결단계

❶ 단계	$\angle OMN=\angle x$라 하고 $\angle A$, $\angle MOC$, $\angle NOC$의 크기를 $\angle x$를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\triangle OMN$의 세 내각의 크기의 합이 180°임을 이용하여 $\angle x$의 크기를 구한다.
❸ 단계	$\angle MON$의 크기를 구한다.

$\angle OMN=\angle x$라 하면 $\angle B=4\angle x$, $\angle C=6\angle x$이므로

$\triangle ABC$에서

$\angle A=180^\circ-(4\angle x+6\angle x)=180^\circ-10\angle x$

점 O가 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\triangle OBN\equiv\triangle OCN$

즉, $\angle NOC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A$

또한, $\angle MOC=\angle AOC=2\angle B=8\angle x$

$\therefore \angle MON=\angle MOC+\angle NOC$

$=\angle MOC+\angle A$

$=8\angle x+(180^\circ-10\angle x)$

$=180^\circ-2\angle x$

이때, $\triangle ONM$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle MON+\angle ONM+\angle OMN=180^\circ$

$(180^\circ-2\angle x)+12^\circ+\angle x=180^\circ$

$\therefore \angle x=12^\circ$

$\therefore \angle MON=180^\circ-2\times12^\circ=156^\circ$ 답 156°

08

③ $\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$이므로

$\overline{BE}=\frac{1}{2}(\overline{BD}+\overline{BE})=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{AC})$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

09

점 E는 $\triangle BCD$의 내심이고, $\angle BDC=110^\circ$이므로

$\angle BEC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}\times110^\circ=145^\circ$

이때, $\angle EBC=\angle a$, $\angle ECB=\angle b$라 하면

$\triangle EBC$에서 $\angle a+\angle b=180^\circ-145^\circ=35^\circ$

$\therefore\ \angle BAC=180^\circ-3(\angle a+\angle b)$

$=180^\circ-3\times 35^\circ=75^\circ$

$\therefore\ \angle BAC:\angle BDC:\angle BEC=75^\circ:110^\circ:145^\circ$

$=15:22:29$

답 15 : 22 : 29

| 다른풀이 |

$\triangle DBC$에서 $\angle BDC=110^\circ$이므로

$\angle DBC+\angle DCB=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

즉, $\angle EBC+\angle ECB=\frac{1}{2}\times 70=35^\circ$이고,

$\angle ABC+\angle ACB=\frac{3}{2}\times 70^\circ=105^\circ$이므로

$\angle BEC=180^\circ-35^\circ=145^\circ$,

$\angle BAC=180^\circ-105^\circ=75^\circ$

$\therefore\ \angle BAC:\angle BDC:\angle BEC=75^\circ:110^\circ:145^\circ$

$=15:22:29$

10

$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고, $\angle A=36^\circ$이므로

$\angle B=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ$

또한, $\triangle DCE$는 $\overline{CD}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이고,

$\angle CED=54^\circ$이므로

$\angle CDE=\angle CED=54^\circ$,

$\angle DCE=180^\circ-(54^\circ+54^\circ)=72^\circ$

이때, 점 I′은 $\triangle CDE$의 내심이므로

$\angle CDI'=\frac{1}{2}\angle CDE=\frac{1}{2}\times 54^\circ=27^\circ$

$\triangle DBC$에서 $\angle DCE=\angle DBC+\angle CDB$이므로

$72^\circ=36^\circ+\angle CDB \qquad \therefore\ \angle CDB=36^\circ$

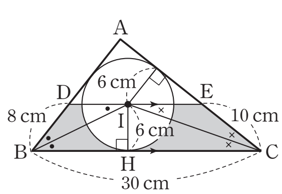
$\therefore\ \angle IDI'=\angle CDB+\angle CDI'$

$=36^\circ+27^\circ=63^\circ$

답 63°

11

오른쪽 그림과 같이 점 I에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 내접원과 $\overline{BC}$의 접점이다. $\overline{BI}$, $\overline{CI}$를 그으면



$\angle DBI=\angle HBI=\angle DIB$,

$\angle ECI=\angle HCI=\angle EIC$이므로

$\overline{DB}=\overline{DI}$, $\overline{EC}=\overline{EI}$

$\therefore\ \overline{DE}=\overline{DI}+\overline{EI}=\overline{DB}+\overline{EC}$

$=8+10=18(cm)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(사다리꼴 DBCE의 넓이)$-$(반원의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times(18+30)\times 6-\frac{1}{2}\times\pi\times 6^2$

$=144-18\pi(cm^2)$

답 ②

12

$\triangle ABC$에서 $\angle A=180^\circ-(40^\circ+80^\circ)=60^\circ$

점 I가 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle CAI=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

$\triangle AHC$에서 $\angle CAH=180^\circ-(90^\circ+80^\circ)=10^\circ$

$\therefore\ \angle x=30^\circ-10^\circ=20^\circ$

$\angle BAI=\frac{1}{2}\angle A=30^\circ$이고

$\angle ABI=\frac{1}{2}\angle B=20^\circ$

$\triangle ABI$에서 $\angle y=\angle ABI+\angle BAI$이므로

$\angle y=30^\circ+20^\circ=50^\circ$

$\therefore\ \angle x+\angle y=20^\circ+50^\circ=70^\circ$

답 70°

13

두 점 I, J가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$의 내심이므로

$\angle ABI=\angle IBD$, $\angle DBJ=\angle JBC$

$\therefore\ \angle ABC=2\angle IBJ=2\times 44^\circ=88^\circ$

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle BAD=180^\circ-88^\circ=92^\circ$

$\angle BAI=\angle IAD$이므로

$\angle IAD=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times 92^\circ=46^\circ$ (가)

$\triangle ABD$는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AE}\perp\overline{BD}$

$\therefore\ \angle ADB=\angle ABD=180^\circ-(90^\circ+46^\circ)=44^\circ$

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle DBC=\angle ADB=44^\circ$

$\overline{BD}=\overline{BC}$이므로

$\angle BDC=\angle BCD=\frac{1}{2}\times(180^\circ-44^\circ)=68^\circ$

$\therefore\ \angle BDJ=\angle JDC=\frac{1}{2}\angle BDC=\frac{1}{2}\times 68^\circ=34^\circ$ (나)

$\triangle$AED에서 $\angle \mathrm{EAD}=46^\circ$이고

$\angle \mathrm{EDA}=\angle \mathrm{ADB}+\angle \mathrm{BDJ}=44^\circ+34^\circ=78^\circ$이므로

$\angle \mathrm{AED}=180^\circ-(46^\circ+78^\circ)=56^\circ$ ㈐

답 56°

단계	채점 기준	배점
㈎	$\angle$IAD의 크기를 구한 경우	40%
㈏	$\angle$BDJ의 크기를 구한 경우	40%
㈐	$\angle$AED의 크기를 구한 경우	20%

14

내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{IAB}+\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}$에서

$\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}r(8+10+6)$

$24=12r \qquad \therefore r=2$

또한, 점 I가 $\triangle$ABC의 내심이므로

$\angle \mathrm{BIC}=90^\circ+\frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

$\qquad =90^\circ+\frac{1}{2}\times 90^\circ=135^\circ$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\pi\times 2^2\times\frac{135}{360}=\frac{3}{2}\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

답 $\frac{3}{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$

15

내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

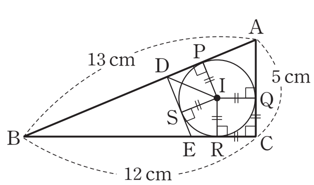
$\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{CQ}}=r$ cm이므로

$\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BP}}=(12-r)$ cm, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AP}}=(5-r)$ cm

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BR}}+\overline{\mathrm{AQ}}$에서

$(12-r)+(5-r)=13,\ 2r=4 \qquad \therefore r=2$

즉, $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BP}}=10$ cm, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AP}}=3$ cm



$\triangle$DPI와 $\triangle$DSI에서

$\angle \mathrm{DPI}=\angle \mathrm{DSI}=90^\circ$, $\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{SI}}$, $\overline{\mathrm{DI}}$는 공통

$\therefore\ \triangle \mathrm{DPI}\equiv\triangle \mathrm{DSI}$ (RHS 합동)

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DS}}$

같은 방법으로 $\overline{\mathrm{ES}}=\overline{\mathrm{ER}}$

따라서 $\triangle$DBE의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DS}}+\overline{\mathrm{SE}}+\overline{\mathrm{BE}}$

$\qquad =\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{DP}}+\overline{\mathrm{ER}}+\overline{\mathrm{BE}}$

$\qquad =\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{BR}}$

$\qquad =10+10=20(\mathrm{cm})$

답 20 cm

16

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BE}}=a$ cm라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AF}}=(5-a)$ cm, $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{FC}}=(8-a)$ cm

이때, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FC}}=7$ cm이므로

$(5-a)+(8-a)=7$

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

$\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{IAB}+\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}$에서

$S=\frac{1}{2}r(5+8+7)=10r \qquad \therefore r=\frac{1}{10}S$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle \mathrm{IBD}+\triangle \mathrm{IBE}=2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1}{10}S\right)$

$\qquad =\frac{3}{10}S(\mathrm{cm}^2)$

답 ③

17

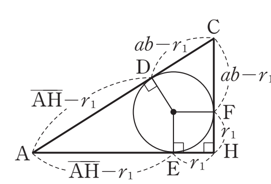
$\triangle$ACH의 내접원의 반지름의 길이를 r_1, $\triangle$CHB의 내접원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{CB}}$이므로

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}ab \qquad \therefore \overline{\mathrm{CH}}=ab$

다음 그림과 같이 $\triangle$ACH와 내접원의 세 접점을 D, E, F라 하면

$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{HF}}=r_1$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AH}}-r_1$, $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CF}}=ab-r_1$



$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DC}}$에서 $(\overline{\mathrm{AH}}-r_1)+(ab-r_1)=b$이므로

$2r_1=\overline{\mathrm{AH}}+ab-b \qquad \cdots\cdots ㉠$

같은 방법으로 $\triangle$CHB에서

$(\overline{\mathrm{HB}}-r_2)+(ab-r_2)=a$이므로

$2r_2=\overline{\mathrm{HB}}+ab-a \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$2(r_1+r_2)=\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{HB}}+2ab-a-b$

이때, $\overline{AH}+\overline{HB}=\overline{AB}=1$이므로

$2(r_1+r_2)=1+2ab-a-b$

$\therefore r_1+r_2=\frac{1+2ab-a-b}{2}$ 답 ④

18

점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\angle BAE=\angle CAE=35°$

$\therefore \angle A=2\times35°=70°$

점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, $\angle BOC=2\angle A=2\times70°=140°$

$\triangle OAB$에서 $\angle ABO=\angle BAO=20°$

$\triangle OBC$에서 $\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180°-140°)=20°$

따라서 $\angle B=\angle ABO+\angle OBD=20°+20°=40°$이므로

$\triangle ABD$에서

$\angle ADE=\angle BAO+\angle B=20°+40°=60°$ 답 $60°$

19

외심과 내심이 꼭짓점 A와 밑변의 중점을 지나는 직선 위에 있으므로 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180°-76°)=52°$

이때, 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle DCI=\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\times52°=26°$

또한, 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로 $\overline{OD}$는 $\overline{AC}$의 수직이등분선이다.

$\therefore \angle CDO=90°$

따라서 $\triangle DEC$에서

$\angle DEC=180°-(90°+26°)=64°$ 답 $64°$

20

점 O가 $\triangle EBC$의 외심이므로

$\angle OCB=\angle OBC=30°$

$\therefore \angle ECB=24°+30°=54°$

이때, 두 직선 l, m이 평행하므로

$\angle EAD=\angle ECB=54°$ ($\because$ 엇각)

이때, 점 I는 $\triangle AED$의 내심이므로

$\angle IAE=\frac{1}{2}\angle EAD=\frac{1}{2}\times54°=27°$

한편, $\triangle OBC$는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle BOC=180°-2\times30°=120°$

$\therefore \angle BEC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times120°=60°$

이때, $\angle AED=\angle BEC=60°$ ($\because$ 맞꼭지각)이고,

$\angle AEI=\frac{1}{2}\angle AED=\frac{1}{2}\times60°=30°$

따라서 삼각형 IAE에서

$\angle AIE=180°-(27°+30°)=123°$ 답 ④

| 다른풀이 |

$\angle OBE=\angle a$라 하면 점 O가 $\triangle EBC$의 외심이므로

$2\angle a+2\times24°+2\times30°=180°$

$2\angle a=72°$ $\therefore \angle a=36°$

$\therefore \angle EBC=36°+30°=66°$

이때, 두 직선 l, m이 평행하므로

$\angle EDA=\angle EBC=66°$ ($\because$ 엇각)

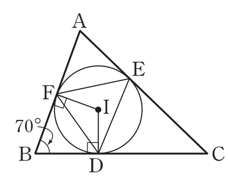
점 I가 $\triangle AED$의 내심이므로

$\angle AIE=90°+\frac{1}{2}\angle EDA=90°+\frac{1}{2}\times66°=123°$

blacklabel 특강 오답피하기

세 점 I, E, O가 한 직선 위에 있다고 오해하지 않도록 한다. 세 점이 한 직선 위에 있으려면 두 삼각형 AED, EBC가 각각 $\angle AED$, $\angle BEC$를 꼭지각으로 하는 이등변삼각형이어야 한다.

21



오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내접원의 중심을 I라 하면

$\angle IFB=\angle IDB=90°$

이므로 사각형 FBDI에서

$\angle FID=180°-70°=110°$

이때, 점 I는 $\triangle DEF$의 외접원의 중심, 즉 외심이므로

$\angle FED=\frac{1}{2}\angle FID=\frac{1}{2}\times110°=55°$

$\therefore \angle AEF+\angle CED=180°-\angle FED$

$=180°-55°=125°$ 답 ④

22

점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로 $\angle BAI=\angle CAI$

이때, $\angle CAI=\angle CBD$이므로

$\angle BAI=\angle CBD$

또한, $\angle ABI=\angle IBC$이므로

$\angle IBD=\angle IBC+\angle CBD$

$=\angle ABI+\angle BAI$

$=\angle BID$ ($\because$ 외각)

따라서 $\triangle BDI$는 $\overline{DB}=\overline{DI}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{DI}=\overline{OD}-\overline{OI}=6-2=4$ 답 ③

23

$\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{IE}=\overline{IF}=\overline{EC}=\overline{FC}=a$

또한, $\overline{BE}=\overline{BD}=b$, $\overline{AD}=\overline{AF}=c$라 하면

$\overline{AB}=b+c=20$, $\overline{BC}+\overline{AC}=2a+b+c=28$이므로

$2a=8 \quad \therefore a=4$

$\triangle ABC$에서 $\angle A=180^\circ-(90^\circ+40^\circ)=50^\circ$이고,

사각형 ADIF에서

$\angle DIF=360^\circ-(50^\circ+90^\circ+90^\circ)=130^\circ$

즉, 부채꼴 DIF의 중심각의 크기는 130°이고, 반지름의 길이는 4이므로

$$\widehat{DF}=2\pi\times4\times\frac{130}{360}=\frac{26}{9}\pi$$

한편, $\overline{AB}$가 $\triangle ABC$의 외접원의 지름이므로 외접원의 반지름의 길이는 10이다. 또한, $\angle B=40^\circ$이므로

$\angle AOC=2\angle B=2\times40^\circ=80^\circ$

즉, 부채꼴 AOC의 중심각의 크기는 80°이고, 반지름의 길이는 10이므로

$$\widehat{AC}=2\pi\times10\times\frac{80}{360}=\frac{40}{9}\pi$$

$$\therefore \widehat{AC}-\widehat{DF}=\frac{40}{9}\pi-\frac{26}{9}\pi=\frac{14}{9}\pi$$

답 ③

blacklabel 특강 필수개념

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 x°인 부채꼴에서

(호의 길이)$=2\pi r\times\frac{x}{360}$, (넓이)$=\pi r^2\times\frac{x}{360}$

24 해결단계

❶ 단계	점 M이 삼각형 ABC의 외심임을 확인한다.
❷ 단계	$\overline{MI}$, $\overline{ME}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{IE}$의 길이를 구한다.

직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중점 M은 $\triangle ABC$의 외심이고, $\overline{AB}=10$이므로

$$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{10}{2}=5$$

이때, $\triangle MBC$는 $\overline{MB}=\overline{MC}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{BG}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times8=4$$

$\therefore \overline{MI}=\overline{MG}=\overline{BM}-\overline{BG}=5-4=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, $\triangle AMC$는 $\overline{AM}=\overline{CM}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AD}=\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6=3$$

$\therefore \overline{ME}=\overline{MD}=\overline{AM}-\overline{AD}=5-3=2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$\overline{IE}=\overline{ME}-\overline{MI}=2-1=1$

답 1

| 다른풀이 |

점 M이 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중점이므로 M은 삼각형 ABC의 외심이다.

$$\therefore \overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=5$$

삼각형 AMC에서 $\overline{MD}=\overline{ME}=x$라 하면

$\overline{AF}=\overline{AD}=\overline{AM}-\overline{MD}=5-x$, $\overline{CF}=\overline{CE}=\overline{CM}-\overline{ME}=5-x$

이때, $\overline{AF}+\overline{CF}=\overline{AC}$이므로

$(5-x)+(5-x)=6$, $2x=4 \quad \therefore x=\overline{ME}=2$

또한, 삼각형 BMC에서 $\overline{MG}=\overline{MI}=y$라 하면

$\overline{BH}=\overline{BG}=\overline{BM}-\overline{MG}=5-y$, $\overline{CH}=\overline{CI}=\overline{CM}-\overline{MI}=5-y$

이때, $\overline{BH}+\overline{CH}=\overline{BC}$이므로

$(5-y)+(5-y)=8$, $2y=2 \quad \therefore y=\overline{MI}=1$

$\therefore \overline{IE}=\overline{ME}-\overline{MI}=2-1=1$

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 22~23

01 (1) 90° (2) 풀이 참조 (3) 75° **02** 2500π m^2

03 (1) 50° (2) 50° **04** 155° **05** $\frac{8}{3}$ cm **06** 6

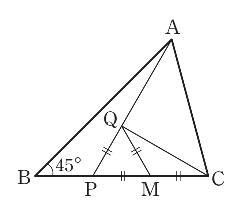
07 20° **08** $\frac{12}{13}$

01 해결단계

(1)	❶ 단계	점 M이 삼각형 QPC의 외심임을 이용하여 $\angle AQC$의 크기를 구한다.
(2)	❷ 단계	$\angle BAP$의 크기를 구한다.
	❸ 단계	$\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$임을 확인하고 점 Q가 삼각형 ABC의 외심임을 설명한다.
(3)	❹ 단계	$\angle ACB$의 크기를 구한다.

(1) $\triangle QPM$은 정삼각형이고 $\overline{PM}=\overline{CM}$이므로

$\overline{PM}=\overline{QM}=\overline{MC}$



즉, 점 M은 삼각형 QPC의 외심이고, 외심이 변 PC의 중점이므로 $\triangle QPC$는 $\angle PQC=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\therefore \angle AQC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

(2) $\triangle QPM$은 정삼각형이고 $\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{PC}$, $\overline{PM}=\overline{CM}$이므로

$\triangle PQB$와 $\triangle MQC$에서 $\overline{BP}=\overline{CM}$, $\overline{PQ}=\overline{MQ}$이고

$\angle QPB=\angle QMC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

$\triangle PQB\equiv\triangle MQC$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{BQ}=\overline{CQ}$

또한, $\angle QBP=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

$\therefore \angle QBA=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

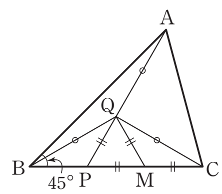
이때, $\triangle BQA$에서 $\angle BQP=\angle BAP+\angle QBA$이므로

$30^\circ=\angle BAP+15^\circ \qquad \therefore \angle BAP=15^\circ$

$\therefore \angle BAP=\angle QBA$

즉, $\triangle QAB$는 $\overline{QB}=\overline{QA}$인 이등변 삼각형이다.

따라서 $\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$이므로 점 Q는 삼각형 ABC의 외심이다.



(3) $\triangle QAB$에서

$\angle AQB=180^\circ-2\times15^\circ=150^\circ$이므로

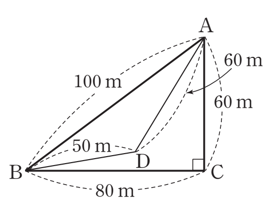
$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AQB=\frac{1}{2}\times150^\circ=75^\circ$

답 (1) 90° (2) 풀이 참조 (3) 75°

02 해결단계

❶ 단계	점 D가 삼각형 ABC의 내부에 있음을 확인한다.
❷ 단계	물을 줄 수 있는 부분의 넓이가 최소가 되는 스프링클러의 위치를 구한다.
❸ 단계	스프링클러로 물을 줄 수 있는 부분의 넓이의 최솟값을 구한다.

4개의 화분 A, B, C, D의 위치와 두 화분 사이의 거리를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $\overline{AB}<\overline{BD}+\overline{DA}<\overline{BC}+\overline{AC}$이므로 점 D는 $\triangle ABC$의 내부에 있다.

360° 회전하는 스프링클러 한 대를 설치하여 화분 4개에 모두 물을 줄 때, 물을 줄 수 있는 부분의 넓이를 최소가 되게 하려면 스프링클러는 $\triangle ABC$의 외접원의 중심인 외심에 설치해야 한다.

이때, $\triangle ABC$는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\triangle ABC$의 외심은 $\overline{AB}$의 중점이다.

따라서 스프링클러로 물을 줄 수 있는 부분의 넓이의 최솟값은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 넓이와 같으므로

$\pi\times\left(\frac{100}{2}\right)^2=2500\pi\,(\mathrm{m}^2)$

답 $2500\pi\ \mathrm{m}^2$

03 해결단계

(1)	❶ 단계	점 I가 $\triangle ABC$의 내심임을 이용하여 $\angle FDH$의 크기를 구한다.
(2)	❷ 단계	점 I가 $\triangle DHF$의 외심임을 확인한다.
	❸ 단계	$\angle AHF$의 크기를 구한다.

(1) 점 I는 $\angle B$, $\angle C$의 이등분선의 교점이므로 $\triangle ABC$의 내심이다.

$\therefore \angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=90^\circ+\frac{1}{2}\times80^\circ=130^\circ$

사각형 IEDG에서

$\angle EDG=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+130^\circ)=50^\circ$

$\therefore \angle FDH=50^\circ$

(2) $\triangle FBE\equiv\triangle DBE$ (ASA 합동)에서 $\overline{FE}=\overline{DE}$

$\triangle DCG\equiv\triangle HCG$ (ASA 합동)에서 $\overline{DG}=\overline{HG}$

이때, 점 I는 $\overline{FD}$, $\overline{HD}$의 수직이등분선의 교점이므로 $\triangle DHF$의 외심이다.

또한, $\angle FID=180^\circ-\angle B$이므로

$\angle FHD=\frac{1}{2}\angle FID=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$

$\angle DHC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-\angle C)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle C$

$\therefore \angle AHF=180^\circ-(\angle FHD+\angle DHC)$

$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

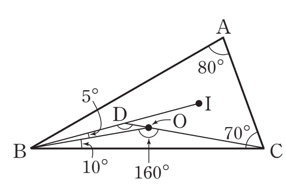
$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-80^\circ)$

$=50^\circ$

답 (1) 50° (2) 50°

04 해결단계

❶ 단계	외심의 성질을 이용하여 $\angle BOC$, $\angle OBC$의 크기를 각각 구한다.
❷ 단계	내심의 성질을 이용하여 $\angle DBO$의 크기를 구한다.
❸ 단계	$\angle BDO$의 크기를 구한다.



점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로

$\angle BOC=2\angle A=2\times80^\circ=160^\circ$

$\therefore \angle DOB=180^\circ-160^\circ=20^\circ$

$\triangle OBC$에서 $\overline{OB}=\overline{OC}$이므로

$\angle OBC=\frac{1}{2}\times(180^\circ-160^\circ)=10^\circ$

$\triangle ABC$에서 $\angle B=180^\circ-(80^\circ+70^\circ)=30^\circ$

또한, 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times30^\circ=15^\circ$

$\therefore \angle DBO = \angle DBC - \angle OBC = 15° - 10° = 5°$

따라서 $\triangle DBO$의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle BDO = 180° - (5° + 20°) = 155°$ 답 155°

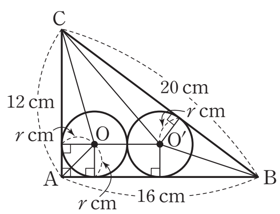
05 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 구한다.
❷ 단계	두 원의 반지름의 길이를 r cm라 하고 삼각형 ABC의 넓이를 r를 사용하여 나타낸다.
❸ 단계	원의 반지름의 길이를 구한다.

$\triangle ABC$는 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96(cm^2)$

이때, 다음 그림과 같이 두 원의 반지름의 길이를 r cm라 하자.



$\triangle ABC = \triangle ACO + \triangle COO' + \triangle BCO'$
$+ (사각형\ ABO'O의\ 넓이)$

이므로

$96 = \frac{1}{2} \times \{12r + 2r(12-r) + 20r + (2r+16)r\}$

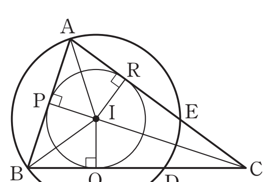
$96 = 36r \qquad \therefore r = \frac{8}{3}(cm)$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\frac{8}{3}$ cm이다. 답 $\frac{8}{3}$ cm

06 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC의 내접원을 그리고 합동인 삼각형을 찾아 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	주어진 원이 삼각형 ABE의 외접원임을 확인하고 $\overline{AE}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{EC}$의 길이를 구한다.

다음 그림과 같이 삼각형 ABC의 내접원을 그리고 점 I에서 $\triangle ABC$의 각 변에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하자.



이때, 두 선분 AI, BI는 큰 원의 반지름이고, 세 선분 PI, QI, RI는 작은 원의 반지름이다.

즉, $\overline{AI} = \overline{BI}$이고, $\overline{PI} = \overline{QI} = \overline{RI}$이므로

$\triangle ARI \equiv \triangle API \equiv \triangle BPI \equiv \triangle BQI$ (RHS 합동)

또한, 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이므로

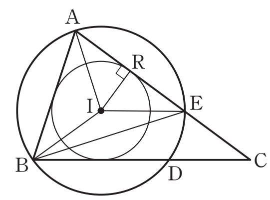
$\overline{CR} = \overline{CQ}$

이때, $\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$이므로

$\overline{BQ} = \overline{AR} = 5$, $\overline{CR} = \overline{CQ} = 16 - 5 = 11$

$\therefore \overline{AC} = 5 + 11 = 16$

한편, 다음 그림과 같이 선분 BE를 그으면 큰 원은 $\triangle ABE$의 외접원이다.



$\overline{IR} \perp \overline{AE}$, $\overline{AR} = \overline{ER} = 5$이므로 $\overline{AE} = 5 + 5 = 10$

$\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 16 - 10 = 6$ 답 6

07 해결단계

❶ 단계	점 O가 $\triangle ABC$의 외심임을 이용하여 $\angle BOC$의 크기를 구한다.
❷ 단계	$\triangle OAC$가 직각이등변삼각형임을 확인한다.
❸ 단계	점 M이 $\triangle AHC$와 $\triangle AOC$의 외심임을 이용하여 $\triangle MOC$가 직각이등변삼각형임을 보인다.
❹ 단계	$\angle HMO$의 크기를 구한다.

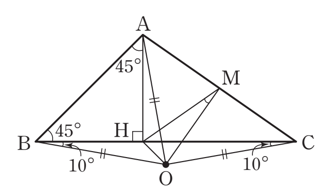
$\triangle ABH$에서 $\angle H = 90°$, $\angle BAH = 45°$이므로

$\angle ABH = 45°$

즉, $\triangle ABH$는 $\angle H = 90°$인 직각이등변삼각형이다.

이때, 점 O는 $\triangle ABC$의 외심이므로

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$



즉, $\triangle OBC$는 $\overline{OB} = \overline{OC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OBC = \angle OCB = 10°$

$\therefore \angle BOC = 180° - (10° + 10°) = 160°$

또한, $\triangle OAB$는 $\overline{OA} = \overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAB = \angle OBA = 45° + 10° = 55°$

즉, $\angle AOB = 180° - (55° + 55°) = 70°$이므로

$\angle AOC = \angle BOC - \angle AOB = 160° - 70° = 90°$

따라서 $\triangle OAC$는 $\angle AOC = 90°$이고 $\overline{OA} = \overline{OC}$인 직각이등변삼각형이다.

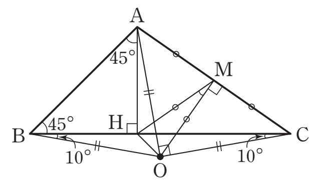
$\triangle OBH$와 $\triangle OAH$에서

$\overline{AH} = \overline{BH}$, $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OH}$는 공통이므로

$\triangle OBH \equiv \triangle OAH$ (SSS 합동)

$\therefore \angle BOH = \angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$

한편, 점 M은 선분 AC의 중점이므로 점 M은 직각삼각형 AHC의 외심인 동시에 직각삼각형 AOC의 외심이다.



$\therefore \overline{MA}=\overline{MH}=\overline{MO}=\overline{MC}$

즉, $\triangle MOC$는 $\angle CMO=90^\circ$, $\overline{MO}=\overline{MC}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle MOC=\angle MCO=45^\circ \qquad \therefore \angle MOA=45^\circ$

$\angle MOH=\angle MOA+\angle AOH$

$=45^\circ+35^\circ=80^\circ$

$\triangle MOH$는 $\overline{MH}=\overline{MO}$인 이등변삼각형이므로

$\angle MHO=\angle MOH=80^\circ$

$\therefore \angle HMO=180^\circ-(80^\circ+80^\circ)=20^\circ$ 답 20°

08 해결단계

❶ 단계	세 원 O, P, Q에 대하여 △ABC의 넓이를 △ABC의 세 변의 길이를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계의 세 식의 양변을 각각 더하여 △ABC의 넓이를 나타낸다.
❸ 단계	△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 구한다.

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면 다음 그림에서

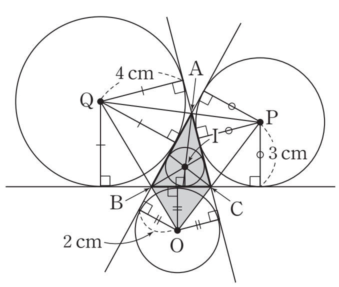
$\triangle ABC=$(사각형 ABOC의 넓이)$-\triangle OBC$

$=\triangle ABO+\triangle ACO-\triangle OBC$

이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times c+\frac{1}{2}\times2\times b-\frac{1}{2}\times2\times a$

$=c+b-a\,(\text{cm}^2)$ ……㉠



같은 방법으로

$\triangle ABC=\triangle ACQ+\triangle BCQ-\triangle QAB$

$=\frac{1}{2}\times4\times b+\frac{1}{2}\times4\times a-\frac{1}{2}\times4\times c$

$=2(b+a-c)\,(\text{cm}^2)$ ……㉡

또한,

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle BCP-\triangle PAC$

$=\frac{1}{2}\times3\times c+\frac{1}{2}\times3\times a-\frac{1}{2}\times3\times b$

$=\frac{3}{2}(c+a-b)\,(\text{cm}^2)$ ……㉢

㉠$+\frac{1}{2}\times$㉡$+\frac{2}{3}\times$㉢을 하면

$\frac{13}{6}\triangle ABC=a+b+c$

$\therefore \triangle ABC=\frac{6}{13}(a+b+c)\,(\text{cm}^2)$

한편, $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

이므로

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{6}{13}(a+b+c)$

$\frac{r}{2}=\frac{6}{13} \qquad \therefore r=\frac{6}{13}\times2=\frac{12}{13}$ 답 $\frac{12}{13}$

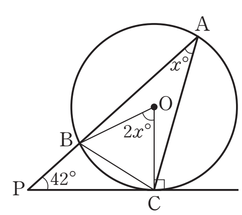
미리보는 학력평가			p. 24
1 ⑤	2 ⑤	3 14	4 ①

1

$\triangle ABC$의 외접원의 중심을 O라 하면 점 O는 삼각형 ABC의 외심이다.

즉, 다음 그림과 같이 $\angle BAC=x^\circ$라 하면

$\angle BOC=2x^\circ$



$\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로

$\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-2x^\circ)=90^\circ-x^\circ$

원의 접선은 그 접점을 한 끝 점으로 하는 반지름에 수직이므로

$\overline{PC}\perp\overline{OC}$

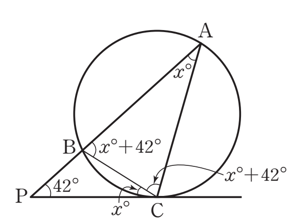
$\therefore \angle BCP=90^\circ-\angle OCB=90^\circ-(90^\circ-x^\circ)=x^\circ$

$\triangle BPC$에서

$\angle ABC=\angle BPC+\angle BCP=x^\circ+42^\circ$

또한, $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ACB=\angle ABC=x^\circ+42^\circ$



삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$x°+x°+42°+x°+42°=180°$

$3x°=96°\qquad\therefore x=32°$

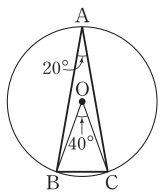
답 ⑤

2

$\angle A=\angle a$라 하면 $\angle B=\angle C=4\angle A=4\angle a$이고, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$9\angle a=180°\qquad\therefore \angle a=20°$

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 외심을 O라 하면



$\angle BOC=2\angle A=2\times20°=40°$

따라서 원 O에 내접하고, $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정n각형은 $40°\times n=360°$를 만족시키므로

$n=9$

답 ⑤

3

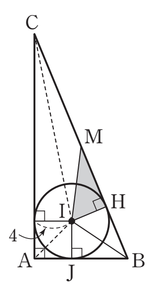
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$\frac{1}{2}\times10\times24=\frac{1}{2}r(10+26+24)$

$120=30r\qquad\therefore r=4$

오른쪽 그림과 같이 점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 J라 하면 △BIH와 △BIJ에서



$\overline{IH}=\overline{IJ}$, $\overline{BI}$는 공통, $\angle IHB=\angle IJB=90°$

즉, △BIH≡△BIJ (RHS 합동)이므로

$\overline{BH}=\overline{BJ}=\overline{AB}-\overline{AJ}=10-4=6$

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times26=13$

$\therefore \overline{MH}=\overline{BM}-\overline{BH}=13-6=7$

따라서 삼각형 IHM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times7\times4=14$

답 14

| 다른풀이 1 |

$r=4$이고 △BIH≡△BIJ이므로

$\overline{JB}=\overline{AB}-\overline{AJ}=10-4=6$

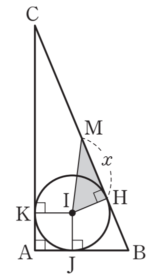
즉, △BIJ, △BIH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times4=12$

이때, $\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=13$이므로 삼각형 IHM의 넓이는

$\triangle BIM-\triangle BIH=\frac{1}{2}\times13\times4-12=14$

| 다른풀이 2 |

점 I에서 변 AB, 변 AC에 내린 수선의 발을 각각 J, K라 하고 $\overline{HM}=x$라 하면



$\overline{AJ}=\overline{AK}=4$이므로

$\overline{CK}=20$, $\overline{CH}=13+x$

이때, $\overline{CK}=\overline{CH}$이므로

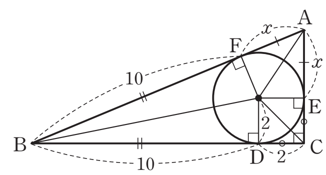
$20=13+x\qquad\therefore x=7$

따라서 삼각형 IHM의 넓이는

$\frac{1}{2}\times7\times4=14$

4

다음 그림과 같이 내접원의 중심에서 삼각형 ABC의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



$\overline{AE}=x$라 하면 내접원의 성질에 의하여

$\overline{CD}=\overline{CE}=2$

$\overline{BF}=\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=12-2=10$

$\overline{AF}=\overline{AE}=x$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 2이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times2\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$\qquad=\frac{1}{2}\times2\times\{(x+10)+12+(2+x)\}$

$\qquad=2x+24\qquad\cdots\cdots㉠$

또한,

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}$

$\qquad=\frac{1}{2}\times12\times(x+2)$

$\qquad=6x+12\qquad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$2x+24=6x+12$, $4x=12\qquad\therefore x=3$

즉, 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 길이는

$10+3=13$

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이므로 빗변 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다.

따라서 직각삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{13}{2}=13\pi$

답 ①

II 사각형의 성질

03 평행사변형

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 27

01 ③ 02 62° 03 6 04 ⑤ 05 ④
06 ③

01

$\triangle$AGD와 $\triangle$HGC에서

$\overline{DG}=\overline{CG}$, $\angle ADG=\angle HCG$ ($\because$ 엇각),

$\angle DGA=\angle CGH$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore$ $\triangle AGD\equiv\triangle HGC$ (ASA 합동)

$\therefore$ $\overline{CH}=\overline{AD}=8$

또한, $\overline{BC}=\overline{AD}=8$이므로

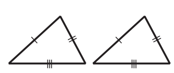
$\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}=8+8=16$ 답 ③

blacklabel 특강 필수개념

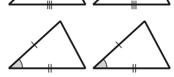
삼각형의 합동 조건

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.

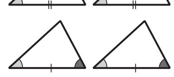
(1) 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)



(2) 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)



(3) 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)



02

평행사변형의 대각의 크기는 서로 같으므로

$\angle D=\angle B=56^\circ$

$\overline{DE}$는 $\angle D$의 이등분선이므로

$\angle ADF=\frac{1}{2}\angle D=\frac{1}{2}\times 56^\circ=28^\circ$

$\triangle$AFD에서

$\angle DAF=180^\circ-(90^\circ+28^\circ)=62^\circ$

평행사변형의 이웃하는 두 내각의 크기의 합이 180°이므로

$(\angle BAF+62^\circ)+56^\circ=180^\circ$

$\therefore$ $\angle BAF=180^\circ-118^\circ=62^\circ$ 답 62°

03

$\triangle$APO와 $\triangle$CQO에서

$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\angle AOP=\angle COQ$ ($\because$ 맞꼭지각),

$\angle PAO=\angle QCO$ ($\because$ 엇각)

$\therefore$ $\triangle APO\equiv\triangle CQO$ (ASA 합동)

이때, $\overline{QO}=\overline{PO}=4$ cm, $\overline{CQ}=\overline{AP}=2$ cm이므로

$x=4$, $y=2$

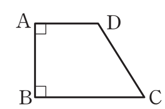
$\therefore$ $x+y=4+2=6$ 답 6

04

① 오른쪽 그림의 □ABCD는

$\angle A=\angle B=90^\circ$

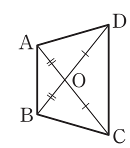
이지만 평행사변형이라 할 수 없다.



② 오른쪽 그림의 □ABCD는

$\overline{AO}=\overline{BO}$, $\overline{CO}=\overline{DO}$

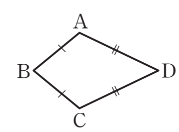
이지만 평행사변형이라 할 수 없다.



③ 오른쪽 그림의 □ABCD는

$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AD}=\overline{CD}$

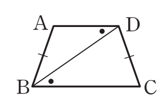
이지만 평행사변형이라 할 수 없다.



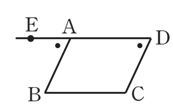
④ 오른쪽 그림의 □ABCD는

$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\angle ADB=\angle CBD$

이지만 평행사변형이라 할 수 없다.



⑤ 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$의 연장선 위에 점 E를 잡으면 $\angle A+\angle D=180^\circ$이므로



$\angle EAB=\angle D$

즉, 동위각의 크기가 같으므로

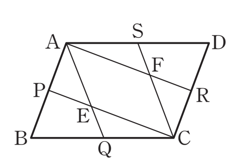
$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

이때, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 □ABCD는 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.

따라서 □ABCD는 평행사변형이다.

그러므로 □ABCD가 평행사변형이 되는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

05



□AQCS에서 $\overline{AS}=\boxed{\overline{QC}}$, $\overline{AS}/\!/\boxed{\overline{QC}}$이므로 한 쌍의 대변이 $\boxed{\text{평행}}$하고, 그 길이가 같다.

따라서 $\boxed{\square\mathrm{AQCS}}$는 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}/\!/\overline{\mathrm{SC}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AE}}/\!/\overline{\mathrm{FC}}$ ······㉠

$\boxed{\square\mathrm{APCR}}$에서 같은 방법으로 하면

$\boxed{\overline{\mathrm{AF}}}/\!/\overline{\mathrm{EC}}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\square\mathrm{AECF}$는 평행사변형이다.

따라서 ㈎~㈒에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

06

평행사변형 ABCD의 넓이는

$9\times6=54$

평행사변형 ABCD의 내부의 한 점 P에 대하여

$\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}=\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PDA}$이므로

$\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}=\frac{1}{2}\square\mathrm{ABCD}=\frac{1}{2}\times54=27$

이때, $\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PCD}=2:1$이므로

$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{2}{3}\times27=18$

답 ③

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 28~30

01 ⑤	02 ④	03 16 cm	04 142°	05 36°
06 ⑤	07 ③	08 75°	09 ②	10 ③
11 42°	12 ③	13 ④	14 120	15 ①
16 158 cm²	17 ②	18 81 cm²		

01

$\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\angle\mathrm{ADF}=\angle\mathrm{DFC}$ ($\because$ 엇각)

즉, $\angle\mathrm{CDF}=\angle\mathrm{DFC}$이므로 $\triangle\mathrm{CDF}$는 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CF}}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CD}}=4$

한편, $\angle\mathrm{ADF}=\angle a$라 하면 $\angle\mathrm{EAD}=90^\circ-\angle a$ ······㉠

$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{CDA}=180^\circ$이므로

$\angle\mathrm{BAE}+(90^\circ-\angle a)+2\angle a=180^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{BAE}=90^\circ-\angle a$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{EAD}$

또한, $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{BEA}$ ($\because$ 엇각)

즉, $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BEA}$이므로 $\triangle\mathrm{ABE}$는 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BE}}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AB}}=4$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{CF}}-\overline{\mathrm{EF}}$이므로

$5=4+4-\overline{\mathrm{EF}}$ $\therefore \overline{\mathrm{EF}}=3$

답 ⑤

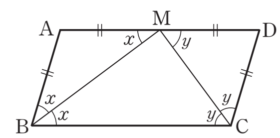
02

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AM}}$이므로 $\angle\mathrm{ABM}=\angle\mathrm{AMB}$

$\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{DC}}$이므로 $\angle\mathrm{DMC}=\angle\mathrm{DCM}$

또한, $\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\angle\mathrm{AMB}=\angle\mathrm{MBC}$, $\angle\mathrm{DMC}=\angle\mathrm{MCB}$ ($\because$ 엇각)



위의 그림과 같이 $\angle\mathrm{AMB}=\angle x$, $\angle\mathrm{DMC}=\angle y$라 하면

$\square\mathrm{ABCD}$에서

$\angle\mathrm{A}+2\angle x+2\angle y+\angle\mathrm{D}=360^\circ$

이때, $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{D}=180^\circ$이므로

$2\angle x+2\angle y=180^\circ$ $\therefore \angle x+\angle y=90^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{BMC}=180^\circ-(\angle x+\angle y)$

$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

답 ④

03

$\square\mathrm{ABEO}$는 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{BE}}$

이때, $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BE}}$ ······㉠

또한, $\overline{\mathrm{AO}}/\!/\overline{\mathrm{BE}}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}/\!/\overline{\mathrm{BE}}$

$\therefore \angle\mathrm{COF}=\angle\mathrm{BEF}$ ($\because$ 엇각) ······㉡

$\angle\mathrm{FCO}=\angle\mathrm{FBE}$ ($\because$ 엇각) ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\triangle\mathrm{BEF}\equiv\triangle\mathrm{COF}$ (ASA 합동)이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{FC}}=5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{OF}}=3\,\mathrm{cm}$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BF}}=2\times5=10(\mathrm{cm})$,

$\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{EF}}=2\times3=6(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DC}}=10+6=16(\mathrm{cm})$

답 16 cm

04

$\angle\mathrm{DCF}=\angle\mathrm{AHF}=52^\circ$ ($\because$ 엇각)이므로

$\angle\mathrm{BCD}=2\angle\mathrm{DCF}=2\times52^\circ=104^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{BCD}=104^\circ$

$\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=180^\circ$이므로 $\angle\mathrm{B}=180^\circ-104^\circ=76^\circ$

$\therefore \angle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{B}=\frac{1}{2}\times76^\circ=38^\circ$

$\triangle\mathrm{ABE}$에서

$\angle\mathrm{GED}=\angle\mathrm{ABE}+\angle\mathrm{BAD}$

$=38^\circ+104^\circ=142^\circ$

답 142°

05

정오각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$ ······ (가)

즉, $\angle ABE=108^\circ$이고 $\square ABCD$는 평행사변형이므로

$\angle BCD=180^\circ-\angle ABE=180^\circ-108^\circ=72^\circ$

$\therefore\ \angle BAD=\angle BCD=72^\circ$

이때, $\angle GAE=\angle BCD=72^\circ$이므로

$\angle GAB=\angle GAE+\angle BAD-\angle x$에서

$108^\circ=72^\circ+72^\circ-\angle x$ ······ (나)

$\therefore\ \angle x=144^\circ-108^\circ=36^\circ$ ······ (다)

답 36°

단계	채점 기준	배점
(가)	정오각형의 한 내각의 크기를 구한 경우	30%
(나)	$\angle x$에 대한 식을 세운 경우	50%
(다)	$\angle x$의 크기를 구한 경우	20%

blacklabel 특강 필수개념

정n각형의 한 내각의 크기

정n각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$이다.

06

$\angle DAQ=\angle PQA$ ($\because$ 엇각)이고, $\angle PAQ=\angle DAQ$이므로

$\angle PQA=\angle PAQ$ $\qquad\therefore\ \overline{PA}=\overline{PQ}$

(i) 점 P가 점 B에 위치한 경우

$\triangle APQ$는 이등변삼각형이므로 $\overline{PQ}=\overline{AB}=5$

(ii) 점 P가 점 C에 위치한 경우

$\triangle APQ$는 이등변삼각형이므로 $\overline{PQ}=\overline{AC}=11$

(i), (ii)에서 점 Q가 움직인 거리는

$(8-5)+11=3+11=14$

답 ⑤

07

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle BEF=\angle DCF$ ($\because$ 엇각)이고,

$\angle BFE=\angle DFC$ ($\because$ 맞꼭지각)이다.

이때, $\triangle BFE$가 이등변삼각형이므로

$\angle BFE=\angle BEF$

$\therefore\ \angle DFC=\angle DCF$

즉, $\triangle DFC$는 $\overline{DF}=\overline{DC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{DF}=\overline{DC}=\overline{AB}=10$

이때, $\overline{BF}=\overline{BE}=6$이므로

평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 길이는

$\overline{BD}=\overline{BF}+\overline{DF}=6+10=16$

평행사변형의 두 대각선의 교점은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times16=8$

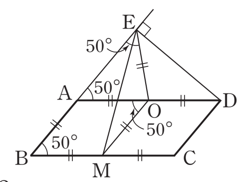
$\therefore\ \overline{OF}=\overline{OB}-\overline{BF}=8-6=2$

답 ③

08 해결단계

❶ 단계	점 M을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{AD}$와 만나는 점 O를 찾는다.
❷ 단계	이등변삼각형의 성질을 이용하여 $\angle EMO$의 크기를 구한다.
❸ 단계	$\angle EMC$의 크기를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 M을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선이 $\overline{AD}$와 만나는 점을 O라 하자.



점 O는 직각삼각형 ADE의 빗변의 중점이므로 외심이고, $\overline{AB}:\overline{AD}=1:2$이므로 $\overline{OE}=\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OM}$

이때, 이등변삼각형 AOE에서 $\angle OAE=\angle B=50^\circ$ ($\because$ 동위각)이므로

$\angle AOE=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$

$\square ABMO$는 평행사변형이므로 $\angle AOM=\angle B=50^\circ$

이등변삼각형 OEM에서

$\angle EMO=\frac{1}{2}\times\{180^\circ-(80^\circ+50^\circ)\}=25^\circ$

또한, $\overline{AB}/\!/\overline{OM}$이므로 $\angle OMC=\angle B=50^\circ$ ($\because$ 동위각)

$\therefore\ \angle EMC=\angle EMO+\angle OMC=25^\circ+50^\circ=75^\circ$

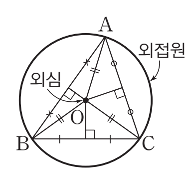
답 75°

blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 외심

삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심) O에서 만나고, 이 점에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같다.

특히, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 일치한다.



09

평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{OB}=\overline{OD}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$

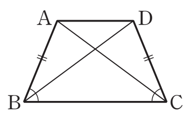
이때, $\overline{BE}=\overline{DF}$이므로 $\overline{OE}=\overline{OF}$

즉, $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OE}=\overline{OF}$이므로

$\square AECF$는 평행사변형이다.

따라서 옳은 것은 ② $\overline{AE}=\overline{CF}$이다. 답 ②

10



③ $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 □ABCD는 한 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이고, 오른쪽 그림과 같이 이것만으로는 평행사변형이 되는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 평행사변형 ABCD가 되는 조건이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

blacklabel 특강 오답피하기

①의 $\triangle ABO\equiv\triangle CDO$에서 $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$이므로 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다. 즉, □ABCD는 평행사변형이다.
②의 $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$에서 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{AD}$이므로 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다. 즉, □ABCD는 평행사변형이다.
④의 $\angle ABO=\angle CDO$에서 두 직선이 평행할 조건에 의하여 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이다. 이때, $\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같다. 즉, □ABCD는 평행사변형이다.
⑤의 $\angle ABC+\angle BAD=180^\circ$에서 사각형의 네 내각의 합이 360°이므로
$\angle BCD+\angle CDA=180^\circ$
이때, $\angle BAD=\angle BCD$이므로 $\angle ABC=\angle CDA$
즉, 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같으므로 □ABCD는 평행사변형이다.

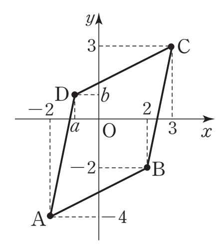
11

$\triangle ABP$와 $\triangle CDQ$에서
$\overline{AB}=\overline{CD}$, $\angle APB=\angle CQD=90^\circ$,
$\angle BAP=\angle DCQ$ ($\because$ 엇각)
$\therefore$ $\triangle ABP\equiv\triangle CDQ$ (RHA 합동)
$\therefore$ $\overline{BP}=\overline{DQ}$ ……㉠
한편, $\triangle APD$와 $\triangle CQB$에서
$\overline{AD}=\overline{CB}$, $\angle DAP=\angle BCQ$ ($\because$ 엇각)
$\overline{AP}=\overline{CQ}$ ($\because$ $\triangle ABP\equiv\triangle CDQ$)
$\therefore$ $\triangle APD\equiv\triangle CQB$ (SAS 합동)
$\therefore$ $\overline{DP}=\overline{BQ}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 □PBQD는 평행사변형이므로
$\angle x=180^\circ-\angle BPD=180^\circ-(90^\circ+48^\circ)=42^\circ$ 답 42°

12

$\angle A=\angle C$이므로 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C=\angle ECF$
이때, $\angle AEB=\angle EAF$ ($\because$ 엇각)이므로
$\angle AEB=\angle FCE$ $\therefore$ $\overline{AE}/\!/\overline{CF}$
또한, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$에서 $\overline{AF}/\!/\overline{CE}$
즉, 두 쌍의 대변이 각각 서로 평행하므로 □AECF는 평행사변형이다.
이때, $\angle A+\angle B=180^\circ$이므로 $\angle A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$
$\therefore$ $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$
즉, $\triangle ABE$는 정삼각형이므로
$\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{BE}=3$ cm
또한, $\overline{BC}=\overline{AD}=8$ cm이므로
$\overline{EC}=\overline{BC}-\overline{BE}=8-3=5$(cm)
$\therefore$ (□AECF의 둘레의 길이)$=2(\overline{AE}+\overline{EC})=2\times(3+5)$
$=16$(cm) 답 ③

13



□ABCD가 평행사변형이 되려면
$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$에서 $\frac{b-3}{a-3}=\frac{-2+4}{2+2}=\frac{1}{2}$
즉, $a-3=2(b-3)$이므로
$a-2b=-3$ ……㉠
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$에서 $\frac{b+4}{a+2}=\frac{3+2}{3-2}=5$
즉, $5(a+2)=b+4$이므로 $5a-b=-6$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$
$\therefore$ $a+b=-1+1=0$ 답 ④

blacklabel 특강 필수개념

연립일차방정식의 풀이
(1) 대입법 : 연립방정식의 한 방정식을 $x=(y$에 대한 식$)$ 또는 $y=(x$에 대한 식$)$ 꼴로 정리하고 이를 다른 한 방정식에 대입하여 한 미지수를 없앤 후 해를 구한다.
(2) 가감법 : 두 방정식을 변끼리 더하거나 빼어서 한 미지수를 없앤 후 해를 구한다.

14

$\overline{AQ}/\!/\overline{PC}$가 되려면 $\overline{AP}=\overline{CQ}$이어야 한다.
점 P가 점 A에서 출발한 지 x $(x>5)$초 후의 $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$의 길이는 각각 $\overline{AP}=2x$, $\overline{CQ}=3(x-5)$이므로
$2x=3(x-5)$, $2x=3x-15$ $\therefore$ $x=15$
즉, $\overline{AP}=\overline{CQ}=2x=2\times15=30$
이때, □ABCD$=200$, $\overline{AD}=50$이므로
□AQCP$=\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}\times$□ABCD$=\frac{30}{50}\times200=120$ 답 120

15

$\triangle APO$와 $\triangle CQO$에서

$\overline{AO}=\overline{CO}$, $\angle PAO=\angle QCO$ ($\because$ 엇각),

$\angle AOP=\angle COQ$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore$ $\triangle APO\equiv\triangle CQO$ (ASA 합동)

이때, $\triangle APO$의 넓이가 5 cm^2이므로

$\triangle CQO=\triangle APO=5\text{ cm}^2$

한편, $\triangle DOC=\frac{1}{4}\square ABCD=\frac{1}{4}\times 64=16(\text{cm}^2)$이므로

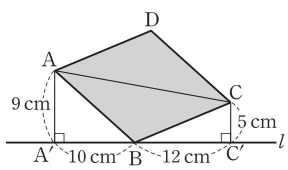
$\triangle DOQ=\triangle DOC-\triangle CQO$

$=16-5=11(\text{cm}^2)$

답 ①

16

오른쪽 그림과 같이 $\square ABCD$의 대각선 AC를 그으면



$\square ABCD=2\triangle ABC$ ……㉠

$\triangle ABC$의 넓이를 S라 하면

$S=\square AA'C'C-\triangle AA'B-\triangle CBC'$

$=\frac{1}{2}\times(9+5)\times(10+12)-\frac{1}{2}\times 9\times 10-\frac{1}{2}\times 12\times 5$

$=154-45-30=79(\text{cm}^2)$

㉠에서

$\square ABCD=2S=2\times 79=158(\text{cm}^2)$

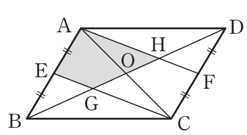
답 158 cm^2

17

$\square ABCD$가 평행사변형이므로 $\overline{AE}/\!/\overline{CF}$이고

$\overline{AB}=\overline{CD}$에서 $\overline{AE}=\overline{CF}$이므로

$\square AECF$는 평행사변형이다.



한편, 위의 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 O라 하면

$\triangle AOH$와 $\triangle COG$에서

$\overline{OA}=\overline{OC}$, $\angle OAH=\angle OCG$ ($\because$ 엇각),

$\angle AOH=\angle COG$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로

$\triangle AOH\equiv\triangle COG$ (ASA 합동)

$\therefore$ $\triangle AOH=\triangle COG$

$\therefore$ $\square AEGH=\square AEGO+\triangle AOH$

$=\square AEGO+\triangle COG$

$=\triangle AEC=\frac{1}{4}\square ABCD$

$=\frac{1}{4}\times 72=18$

답 ②

18

$\triangle ABG$와 $\triangle DFG$에서

$\angle BAG=\angle FDG$ ($\because$ 엇각), $\overline{AB}=\overline{DF}$,

$\angle ABG=\angle DFG$ ($\because$ 엇각)

$\therefore$ $\triangle ABG\equiv\triangle DFG$ (ASA 합동)

즉, $\triangle DFG=\triangle ABG=\triangle ABH=18\text{ cm}^2$

또한, $\triangle ABH$와 $\triangle ECH$에서

$\angle BAH=\angle CEH$ ($\because$ 엇각), $\overline{AB}=\overline{EC}$,

$\angle ABH=\angle ECH$ ($\because$ 엇각)

$\therefore$ $\triangle ABH\equiv\triangle ECH$ (ASA 합동)

즉, $\triangle ECH=\triangle ABH=18\text{ cm}^2$ ㈎

이때, $\square GHCD$

$=\square ABHG=2\triangle ABH$

$=2\times 18=36(\text{cm}^2)$

$\triangle PHG=\frac{1}{4}\square ABHG=\frac{1}{4}\times 36=9(\text{cm}^2)$ ㈏

$\therefore$ $\triangle EFP=\triangle PHG+\square GHCD+\triangle ECH+\triangle DFG$

$=9+36+18+18=81(\text{cm}^2)$ ㈐

답 81 cm^2

단계	채점 기준	배점
㈎	$\triangle DFG$와 $\triangle ECH$의 넓이를 각각 구한 경우	40%
㈏	$\square GHCD$와 $\triangle PHG$의 넓이를 각각 구한 경우	40%
㈐	$\triangle EFP$의 넓이를 구한 경우	20%

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 31~32

01 (1) 평행사변형, 이유는 풀이 참조 (2) 256 cm^2 **02** 32

03 (1) 6, 9 (2) $\frac{15}{2}$ **04** 1 : 4 **05** $72°$

06 평행사변형, 76 cm^2 **07** 2 : 5 **08** $59°$

01 해결단계

(1)	❶ 단계	$\square A_2B_2C_2D_2$가 어떤 사각형인지 말하고, 그 이유를 설명한다.
(2)	❷ 단계	$\square A_2B_2C_2D_2$의 넓이가 $\square A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 몇 배인지 구한다.
	❸ 단계	$\square A_9B_9C_9D_9$의 넓이가 $\square A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 몇 배인지 구한다.
	❹ 단계	$\square A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 구한다.

(1) $\triangle A_1B_2A_2$와 $\triangle C_1D_2C_2$에서

$\angle A_1=\angle C_1$, $\overline{A_1A_2}=\overline{C_1C_2}$, $\overline{A_1B_2}=\overline{C_1D_2}$

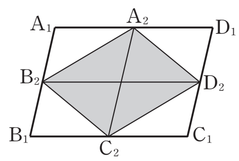
$\therefore$ $\triangle A_1B_2A_2\equiv\triangle C_1D_2C_2$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\overline{A_2B_2}=\overline{C_2D_2}$

같은 방법으로 $\overline{A_2D_2}=\overline{C_2B_2}$

즉, $\square A_2B_2C_2D_2$에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 서로 같으므로 $\square A_2B_2C_2D_2$는 평행사변형이다.

(2) 오른쪽 그림과 같이 $\square A_1B_1C_1D_1$에 $\overline{A_2C_2}$, $\overline{B_2D_2}$를 그으면 합동인 평행사변형 4개가 생기고, 각 평행사변형의 대각선은 그 넓이를 이등분하므로 $\square A_1B_1C_1D_1$의 각 변의 중점을 연결하여 만든 $\square A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 $\square A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.



$\therefore \square A_2B_2C_2D_2=\frac{1}{2}\square A_1B_1C_1D_1$

같은 방법으로

$\square A_3B_3C_3D_3=\frac{1}{2}\square A_2B_2C_2D_2=\frac{1}{2^2}\square A_1B_1C_1D_1$

$\square A_4B_4C_4D_4=\frac{1}{2^3}\square A_1B_1C_1D_1$

$\vdots$

$\square A_9B_9C_9D_9=\frac{1}{2^8}\square A_1B_1C_1D_1$

$\therefore \square A_1B_1C_1D_1=2^8\square A_9B_9C_9D_9$

$=2^8\times1=256(\text{cm}^2)$

답 (1) 평행사변형, 이유는 풀이 참조

(2) 256 cm^2

02 해결단계

❶ 단계	두 삼각형 ACD와 DEA가 합동임을 보인다.
❷ 단계	두 삼각형 AEF와 DCF가 합동임을 보인다.
❸ 단계	삼각형 DFC의 둘레의 길이를 구한다.

$\triangle ACD$와 $\triangle DEA$에서

$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AB}=\overline{AE}$이므로 $\overline{DC}=\overline{AE}$,

$\angle CDA=\angle B$, $\angle EAD=\angle AEB=\angle B$이므로

$\angle CDA=\angle EAD$,

$\overline{AD}$는 공통

$\therefore \triangle ACD\equiv\triangle DEA$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{DE}=\overline{AC}=20$

$\triangle AEF$와 $\triangle DCF$에서

$\angle DEC=\angle ACE$이므로 $\overline{FE}=\overline{FC}$

이때, $\overline{AC}=\overline{DE}$이므로 $\overline{AF}=\overline{DF}$

$\angle AFE=\angle DFC$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore \triangle AEF\equiv\triangle DCF$ (SAS 합동)

$\therefore$ (삼각형 DFC의 둘레의 길이)

$=\overline{DF}+\overline{FC}+\overline{DC}$

$=\overline{DF}+\overline{FE}+\overline{AB}$

$=\overline{DE}+\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{AB}$

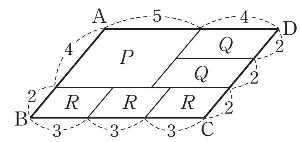
$=20+12=32$

답 32

03 해결단계

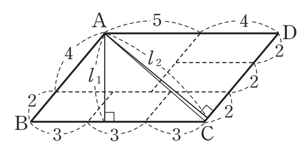
(1)	❶ 단계	주어진 평행사변형을 빈틈없이 붙여 평행사변형 ABCD를 만든다.
	❷ 단계	❶ 단계에서 만든 평행사변형 ABCD의 이웃하는 두 변의 길이를 구한다.
(2)	❸ 단계	l_1, l_2의 값을 각각 구한다.
	❹ 단계	l_1+l_2의 값을 구한다.

(1) 6개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 만든 평행사변형 ABCD는 다음 그림과 같다.



따라서 평행사변형 ABCD의 이웃하는 두 변의 길이는 6, 9이다.

(2) l_1과 l_2를 나타내면 다음 그림과 같다.



평행사변형 ABCD의 넓이가 27이므로

$\triangle ABC=\triangle ACD=\frac{1}{2}\square ABCD=\frac{1}{2}\times27=\frac{27}{2}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times9\times l_1=\frac{27}{2}$이므로 $l_1=3$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times6\times l_2=\frac{27}{2}$이므로 $l_2=\frac{9}{2}$

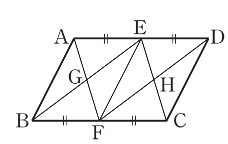
$\therefore l_1+l_2=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$

답 (1) 6, 9 (2) $\frac{15}{2}$

04 해결단계

❶ 단계	$\overline{EF}$를 그어 $\square ABFE$와 $\square EFCD$가 합동인 평행사변형임을 보인다.
❷ 단계	$\square ABCD$의 넓이가 $\square GFHE$의 넓이의 몇 배인지 구한다.
❸ 단계	$\square GFHE$의 넓이와 $\square ABCD$의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

$\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{BF}=\overline{FC}$이고, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{EF}$를 그으면 $\square ABFE$와 $\square EFCD$는 합동인 평행사변형이다.



이때, $\square ABFE=4\triangle GFE$, $\square EFCD=4\triangle HEF$이므로

$\square ABCD=\square ABFE+\square EFCD$

$=4(\triangle GFE+\triangle HEF)$

$=4\square GFHE$

$\therefore \square GFHE : \square ABCD=\square GFHE : 4\square GFHE$

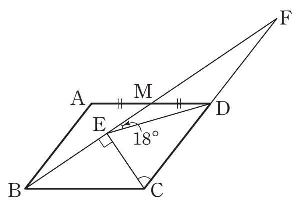
$=1 : 4$

답 1 : 4

05 해결단계

❶ 단계	$\overline{BM}$의 연장선과 $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 나타낸다.
❷ 단계	합동인 삼각형을 찾아 점 D가 직각삼각형 CFE의 외심임을 확인한다.
❸ 단계	$\angle DCE$의 크기를 구한다.

다음 그림과 같이 $\overline{BM}$의 연장선과 $\overline{CD}$의 연장선의 교점을 F라 하자.



이때, $\overline{AB} /\!/ \overline{CF}$이므로 $\angle BAM = \angle FDM$ ($\because$ 엇각)

또한, $\overline{AM}=\overline{DM}$, $\angle AMB = \angle DMF$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore \triangle ABM \equiv \triangle DFM$ (ASA 합동)

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DF}$

이때, $\angle CEF = 90^\circ$이므로 점 D는 직각삼각형 CFE의 빗변의 중점이므로 외심이다.

$\therefore \overline{DC}=\overline{DE}=\overline{DF}$

따라서 $\triangle DEC$는 $\overline{DE}=\overline{DC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle DCE = \angle DEC = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$　　　답 72°

06 해결단계

❶ 단계	□ABCD가 어떤 사각형인지 말하고, 그 이유를 설명한다.
❷ 단계	□ABCD의 넓이를 구한다.

$\overline{OA}=\overline{OC}$ (큰 원의 반지름), $\overline{OB}=\overline{OD}$ (작은 원의 반지름)이므로 □ABCD의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

따라서 □ABCD는 평행사변형이다.

$\triangle BFO$와 $\triangle DEO$에서

$\angle BOF = \angle DOE$ ($\because$ 맞꼭지각), $\overline{OB}=\overline{OD}$,

$\angle OBF = \angle ODE$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \triangle BFO \equiv \triangle DEO$ (ASA 합동)

$\therefore \triangle BFO = \triangle DEO$

따라서 $\triangle AOD = \triangle AOE + \triangle DEO$

$= \triangle AOE + \triangle BFO$

$= 12 + 7 = 19(\mathrm{cm}^2)$

이므로

$\square ABCD = 4\triangle AOD = 4 \times 19 = 76(\mathrm{cm}^2)$

답 평행사변형, $76\ \mathrm{cm}^2$

07 해결단계

❶ 단계	$\triangle BEC$가 □ABCD의 몇 배인지 구한다.
❷ 단계	$\triangle BCG$가 □ABCD의 몇 배인지 구한다.
❸ 단계	□ABCD의 넓이와 □BEFG의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

$\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\square ABCD \equiv \square CEFG$이므로 $\angle DCE = 120^\circ$

$\therefore \angle BCE = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ$

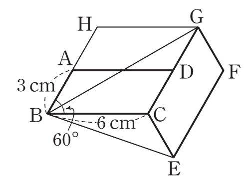
즉, $\triangle BCD$와 $\triangle BCE$에서

$\overline{BC}$는 공통, $\angle BCD = \angle BCE$, $\overline{CD}=\overline{CE}$이므로

$\triangle BCD \equiv \triangle BCE$ (SAS 합동)

$\therefore \triangle BEC = \triangle BCD = \frac{1}{2}\square ABCD$

한편, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$의 연장선과 점 G를 지나면서 $\overline{AD}$와 평행한 직선의 교점을 H라 하면 □BCGH는 평행사변형이므로



$\triangle BCG = \frac{1}{2}\square BCGH = \square ABCD$

$\therefore \square BEFG = \triangle BCG + \square CEFG + \triangle BEC$

$= \square ABCD + \square ABCD + \frac{1}{2}\square ABCD$

$= \frac{5}{2}\square ABCD$

$\therefore \square ABCD : \square BEFG = 1 : \frac{5}{2} = 2 : 5$　　　답 $2 : 5$

08 해결단계

❶ 단계	□ABEC가 어떤 사각형인지 말하고, 그 이유를 설명한다.
❷ 단계	$\triangle COE$, $\triangle ABO$가 이등변삼각형임을 확인한다.
❸ 단계	$\angle ABD$의 크기를 구한다.

□ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$

$\therefore \overline{AB} /\!/ \overline{CE}$, $\overline{AB}=\overline{CE}$

즉, □ABEC는 평행사변형이다.

$\angle BEC = \angle BEO + \angle OED = 31^\circ + 31^\circ = 62^\circ$이므로

$\angle OCE = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

$\triangle COE$에서 $\angle COE = 180^\circ - (118^\circ + 31^\circ) = 31^\circ$

즉, $\triangle COE$는 $\overline{OC}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이다.

또한, □ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{OC}=\overline{OA}$이고

$\overline{OC}=\overline{CE}$에서 $\overline{OC}=\overline{AB}$이므로 $\overline{AB}=\overline{OA}$

즉, $\triangle ABO$는 이등변삼각형이다.

이때, $\angle OAB = \angle BEC = 62^\circ$이므로

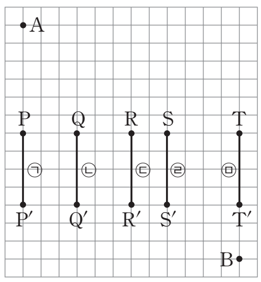
$\angle ABD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 62^\circ) = 59^\circ$　　　답 59°

미리보는 학력평가 p. 33

1 ④ 2 $(-4, 3)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$ 3 ③
4 8

1

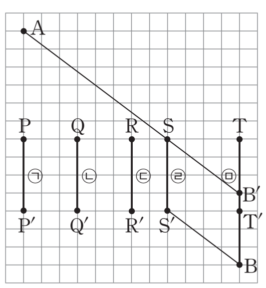
다음 그림과 같이 평균대의 양 끝에 10개의 점 P, P′, Q, Q′, R, R′, S, S′, T, T′을 정하자.



지나는 평균대에 따른 이동 거리는 다음과 같다.

평균대 ㉠ : $\overline{AP}+\overline{P'B}+$(평균대의 길이)
평균대 ㉡ : $\overline{AQ}+\overline{Q'B}+$(평균대의 길이)
평균대 ㉢ : $\overline{AR}+\overline{R'B}+$(평균대의 길이)
평균대 ㉣ : $\overline{AS}+\overline{S'B}+$(평균대의 길이)
평균대 ㉤ : $\overline{AT}+\overline{T'B}+$(평균대의 길이)

이때, 평균대의 길이는 모두 같으므로 평균대의 길이를 뺀 나머지 이동 거리가 가장 짧은 평균대를 지나야 한다.
평균대의 길이가 모눈 한 칸의 한 변의 길이의 4배와 같으므로 다음 그림과 같이 점 B를 위로 4칸 평행이동한 점을 B′이라 하자.



□SS′BB′은 평행사변형이므로 $\overline{SS'}=\overline{BB'}$, $\overline{SB'}=\overline{S'B}$
즉, 이동 거리는 A 지점에서 B′ 지점까지 이동한 후 B′ 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다.
따라서 이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'}+\overline{B'B}$이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝 점이 있는 평균대 ㉣을 지나야 한다. 답 ④

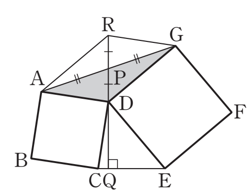
2

$A(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$이므로
□ACBD가 평행사변형인 경우 : $D(-4, 3)$
□ACDB가 평행사변형인 경우 : $D(4, 1)$
□ADCB가 평행사변형인 경우 : $D(0, -3)$
따라서 구하는 점 D의 좌표는 $(-4, 3)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$이다.
답 $(-4, 3)$, $(0, -3)$, $(4, 1)$

3

ㄱ. △DBE와 △ABC에서
$\angle DBE=60^\circ-\angle EBA=\angle ABC$
ㄴ. △DBE와 △ABC에서
$\overline{DB}=\overline{AB}$, $\overline{BE}=\overline{BC}$, $\angle DBE=\angle ABC$
∴ △DBE≡△ABC (SAS 합동) ……㉠
또한, △ABC와 △FEC에서
$\overline{BC}=\overline{EC}$, $\overline{AC}=\overline{FC}$,
$\angle ACB=60^\circ-\angle ECA=\angle FCE$
∴ △ABC≡△FEC (SAS 합동) ……㉡
㉠, ㉡에서 △DBE≡△FEC이므로 $\overline{DB}=\overline{EF}$
ㄷ. △DBE≡△ABC≡△FEC이므로
$\overline{DB}=\overline{DA}=\overline{EF}$, $\overline{DE}=\overline{AC}=\overline{AF}$
즉, □AFED는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 평행사변형이다.
이때, $\angle BAC=150^\circ$이면
$\angle DAF=360^\circ-(150^\circ+60^\circ+60^\circ)=90^\circ$
즉, □AFED는 직사각형이므로 $\overline{AD}=\overline{AF}$가 항상 성립하는 것은 아니다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

4



오른쪽 그림과 같이 $\overline{DP}$의 연장선 위에 $\overline{DP}=\overline{PR}$가 되는 점 R를 정하면 □ADGR는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형이다.
△CDE와 △RGD에서
$\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{RG}$, $\overline{DE}=\overline{GD}$
$\angle ADC=\angle GDE=90^\circ$이므로
$\angle CDE=180^\circ-(\angle ADP+\angle PDG)$
$=180^\circ-(\angle PRG+\angle PDG)=\angle RGD$
따라서 △CDE≡△RGD (SAS 합동)이므로
△CDE=△RGD
이때, $\overline{RD}=\overline{CE}=4$, $\overline{PD}=\frac{1}{2}\overline{RD}=2$이므로
$\overline{DQ}=\overline{PQ}-\overline{PD}=6-2=4$
∴ △ADG=△RGD=△CDE
$=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{DQ}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$ 답 8

04 여러 가지 사각형

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 35

01 ⑤	02 60°	03 ⑤	04 9 cm	05 ④
06 ④	07 ①			

01

□ABCD는 평행사변형이므로

$\angle A+\angle B=180^\circ$, $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ$

△ABE에서 $\angle AEB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$이므로

$\angle FEH=90^\circ$

같은 방법으로 $\angle BHC=\angle FGH=\angle AFD=90^\circ$

즉, □EFGH는 네 내각의 크기가 모두 같으므로 직사각형이다.

이때, ①, ②, ③, ④는 직사각형의 성질이고, ⑤는 마름모의 성질이므로 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

02

□ABCD는 마름모이므로

△ABP와 △ADQ에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle ABP=\angle ADQ$,

$\angle APB=\angle AQD=90^\circ$

∴ △ABP≡△ADQ (RHA 합동)

∴ $\angle BAP=\angle DAQ=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$

이때, $\angle BAD=180^\circ-\angle B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로

$\angle PAQ=120^\circ-(30^\circ+30^\circ)=60^\circ$ 답 60°

03

□ABCD는 정사각형이고 △EBC는 정삼각형이므로

$\overline{EC}=\overline{CD}$

즉, △ECD는 이등변삼각형이다.

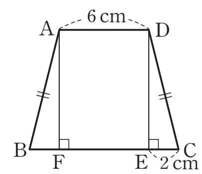
이때, $\angle DCE=90^\circ-\angle ECB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

$\angle CDE=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$

한편, $\overline{BD}$는 정사각형의 대각선이므로 $\angle CDB=45^\circ$

∴ $\angle EDB=\angle CDE-\angle CDB=75^\circ-45^\circ=30^\circ$ 답 ⑤

04



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 F라 하면

△ABF와 △DCE에서

$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\angle ABF=\angle DCE$,

$\angle AFB=\angle DEC=90^\circ$이므로

△ABF≡△DCE (RHA 합동)

∴ $\overline{BF}=\overline{CE}=2$ cm

이때, $\overline{FE}=\overline{AD}=6$ cm이므로

$\overline{BC}=2+6+2=10$(cm)

따라서 $\square ABCD=\frac{1}{2}\times(6+10)\times\overline{DE}=72$이므로

$8\overline{DE}=72$ ∴ $\overline{DE}=9$ cm 답 9 cm

05

④ (다) : $\overline{AC}=\overline{BD}$ 또는 $\angle A=\angle B$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

06

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 두 삼각형 ABE, BED는 밑변 BE가 공통이고 높이가 같다.

∴ △ABE=△BED (①=③)

또한, $\overline{BD}/\!/\overline{EF}$이므로 두 삼각형 BED, BDF는 밑변 BD가 공통이고 높이가 같다.

∴ △BED=△BDF (③=⑤)

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 두 삼각형 BDF, ADF는 밑변 DF가 공통이고 높이가 같다.

∴ △BDF=△ADF (⑤=②)

따라서 넓이가 나머지 넷과 다른 삼각형은 ④ △BEF이다.

답 ④

blacklabel 특강 풀이첨삭

△BED와 △BEF는 밑면 BE가 공통이지만 높이가 다르다. 즉, 두 삼각형의 넓이가 다르다.

07

점 D는 $\overline{BC}$의 중점이므로

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\triangle ABC=\frac{1}{2}\times20=10$

또한, 점 P는 $\overline{AD}$의 중점이므로

$\triangle PDC=\frac{1}{2}\triangle ADC=\frac{1}{2}\times10=5$ 답 ①

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 36～39

01 ②	02 ①	03 46°	04 ⑤	05 18°
06 15 cm^2	07 ③	08 ③	09 34°	10 8
11 ③	12 ②	13 36	14 ③	15 $\frac{a-b+c}{2}$
16 ④	17 ③	18 5	19 ④	20 28
21 ①	22 ④	23 $\frac{21}{2}$	24 600 cm^2	

01

$\triangle$ABE와 $\triangle$AFE에서

$\angle ABE=\angle AFE=90^\circ$, $\overline{AE}$는 공통,

$\angle BAE=\angle FAE=\frac{1}{2}\times(90^\circ-30^\circ)=30^\circ$

$\therefore$ $\triangle ABE\equiv\triangle AFE$ (RHA 합동)

또한, $\triangle$AEF와 $\triangle$CEF에서

$\overline{EF}$는 공통, $\angle AFE=\angle CFE=90^\circ$,

$\angle AEB=\angle AEF=\angle CEF=60^\circ$

$\therefore$ $\triangle AEF\equiv\triangle CEF$ (ASA 합동)

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{CF}$ (①), $\angle EAF=\angle ECF$ (④)

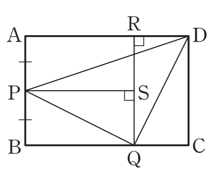
이때, $\overline{AF}=\overline{CF}$에서 점 F는 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로 $\overline{CF}=\overline{DF}$ (③)

또한, $\triangle$AFD는 $\overline{AF}=\overline{FD}$인 이등변삼각형이므로

$\angle FAD=\angle FDA$ (⑤)

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

02



위의 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 R, 점 P에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{AD}/\!/\overline{PS}$에서 $\angle ADP=\angle DPS$ ($\because$ 엇각),

$\overline{PS}/\!/\overline{BC}$에서 $\angle BQP=\angle QPS$ ($\because$ 엇각)이므로

$\angle ADP+\angle BQP=\angle DPS+\angle QPS=\angle DPQ$ ……㉠

한편, $\triangle$PBQ와 $\triangle$QCD에서

$\overline{PB}=\overline{QC}$, $\overline{BQ}=\overline{CD}$, $\angle PBQ=\angle QCD=90^\circ$이므로

$\triangle PBQ\equiv\triangle QCD$ (SAS 합동)

$\therefore$ $\overline{PQ}=\overline{QD}$, $\angle BQP=\angle CDQ$

이때, $\angle BQP+\angle BPQ=\angle BQP+\angle CQD=90^\circ$이므로

$\angle PQS+\angle DQS=\angle DQP=90^\circ$

따라서 $\triangle$QPD는 $\overline{PQ}=\overline{QD}$, $\angle PQD=90^\circ$인 직각이등삼각형이다.

$\therefore$ $\angle DPQ=45^\circ$ $\therefore$ $\angle ADP+\angle BQP=45^\circ$ ($\because$ ㉠) 답 ①

03

□ABCD는 직사각형이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$

즉, $\triangle$OAD는 $\overline{OA}=\overline{OD}$인 이등변삼각형이다.

이때, $\angle FAD=\angle x$라 하면 $\angle OAD=\angle ODA=2\angle x$이므로

$\triangle$AFD에서 $\angle x+2\angle x+111^\circ=180^\circ$

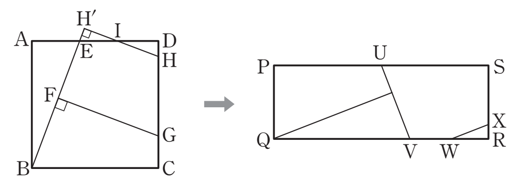
$3\angle x=69^\circ$ $\therefore$ $\angle x=23^\circ$

한편, $\angle DAE=\angle OEB=90^\circ$이므로 $\overline{AD}/\!/\overline{EO}$

$\therefore$ $\angle AOE=\angle OAD$ ($\because$ 엇각)

$=2\angle x=2\times23^\circ=46^\circ$ 답 46°

04



위의 그림과 같이 점 I에 대한 점 H의 대칭점을 점 H′이라 하면

$\triangle IEH'\equiv\triangle IHD$ (ASA 합동)이므로

□FGHH′과 □SUVR는 합동이다.

따라서 $\overline{RS}=\overline{PQ}=\overline{BF}=\overline{FH'}$이므로

$\overline{RS}=\frac{1}{2}\overline{BH'}=\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{EH'})=\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{DH})$ 답 ⑤

05

$\triangle$ABP는 정삼각형이므로 $\angle PBC=84^\circ-60^\circ=24^\circ$

$\overline{BP}=\overline{BA}=\overline{BC}$이므로 $\triangle$BCP는 이등변삼각형이다.

$\therefore$ $\angle BCP=\frac{1}{2}\times(180^\circ-24^\circ)=78^\circ$

이때, $\angle BCD=180^\circ-84^\circ=96^\circ$이므로

$\angle PCD=96^\circ-78^\circ=18^\circ$ 답 18°

06

□ABCD는 마름모이고, 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times10=5(\text{cm})$

$\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times8=4(\text{cm})$

(계)

이때, $\angle DOC=90^\circ$이므로 마름모 EOCF는 한 변의 길이가 5 cm인 정사각형이다.
(나)

$\therefore$ □DCFE=□EOCF−△DOC

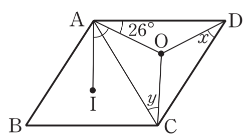
$=5\times5-\frac{1}{2}\times5\times4=15(cm^2)$
(다)

답 15 cm^2

단계	채점 기준	배점
(가)	$\overline{OC}$, $\overline{OD}$의 길이를 각각 구한 경우	20%
(나)	□EOCF가 정사각형임을 설명한 경우	40%
(다)	□DCFE의 넓이를 구한 경우	40%

07

오른쪽 그림과 같이 두 선분 CO, OD를 그으면 점 O가 △ACD의 외심이므로



$\angle ODA=\angle OAD=26^\circ$

이때, $\angle ODC=\angle OCD=\angle x$, $\angle OCA=\angle OAC=\angle y$라 하면

$\angle x+\angle y+26^\circ=90^\circ$ $\quad\therefore \angle x+\angle y=64^\circ$

또한, $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로

$\angle BAC=\angle DCA=\angle x+\angle y=64^\circ$

마름모의 성질에 의하여 $\angle BAC=\angle CAD$이므로

$64^\circ=\angle y+26^\circ$ $\quad\therefore \angle y=38^\circ$

점 I가 △ABC의 내심이므로

$\angle IAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times64^\circ=32^\circ$

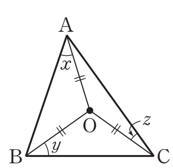
$\therefore$ $\angle IAO=\angle IAC+\angle OAC=32^\circ+38^\circ=70^\circ$ 답 ③

blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 외심의 응용

점 O가 △ABC의 외심일 때

$\angle x+\angle y+\angle z=90^\circ$



08

□NQOP는 직사각형이므로 $\overline{PQ}=\overline{NO}$이다.

이때, $\overline{NO}$의 길이가 가장 짧아지는 때는 점 N이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발일 때이다.

□ABCD는 마름모이므로

$\overline{AB}=\overline{AD}=10$, $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times12=6$,

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times16=8$, $\angle AOB=90^\circ$

△AOB에서 $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{AB}\times\overline{ON}$이므로

$6\times8=10\times\overline{ON}$ $\quad\therefore \overline{ON}=\frac{24}{5}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{24}{5}$이다. 답 ③

09

$\angle EPB=22^\circ$이므로

$\angle BPD=180^\circ-22^\circ=158^\circ$

이때, △BPC와 △DPC에서

$\overline{CB}=\overline{CD}$, $\overline{PC}$는 공통, $\angle BCP=\angle DCP=45^\circ$이므로

$\triangle BPC\equiv\triangle DPC$ (SAS 합동)

즉, $\angle BPC=\angle DPC$이므로

$\angle DPC=\frac{1}{2}\angle BPD=\frac{1}{2}\times158^\circ=79^\circ$

따라서 △APD에서 $\angle ADP+45^\circ=79^\circ$이므로

$\angle ADP=34^\circ$ 답 34°

10

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하자.

$\overline{BD}=r$이고 정사각형의 두 대각선의 길이는 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{AC}=\overline{BD}=r$

이때, □ABCD$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$에서

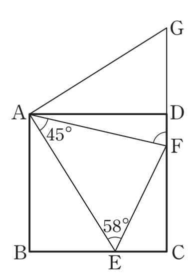
$\frac{1}{2}\times r\times r=32$이므로

$r^2=64$ $\quad\therefore r=8$ ($\because r>0$)

따라서 주어진 부채꼴의 반지름의 길이는 8이다. 답 8

11

다음 그림과 같이 $\overline{BE}=\overline{DG}$가 되도록 $\overline{CD}$의 연장선 위에 점 G를 잡고, $\overline{AG}$를 긋자.



$\triangle ABE$와 $\triangle ADG$에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle B=\angle ADG=90^\circ$, $\overline{BE}=\overline{DG}$

$\therefore \triangle ABE \equiv \triangle ADG$ (SAS 합동)

이때, $\angle BAE+\angle FAD=90^\circ-45^\circ=45^\circ$이고

$\angle BAE=\angle DAG$이므로

$\angle FAG=\angle FAD+\angle DAG=45^\circ$

$\triangle AEF$와 $\triangle AGF$에서

$\angle EAF=\angle GAF$, $\overline{AE}=\overline{AG}$, $\overline{AF}$는 공통

$\therefore \triangle AEF \equiv \triangle AGF$ (SAS 합동)

$\therefore \angle AFD=\angle AFE=180^\circ-(45^\circ+58^\circ)=77^\circ$ 　답 ③

12

$\triangle AEO$와 $\triangle DFO$에서

$\angle OAE=\angle ODF=45^\circ$, $\overline{OA}=\overline{OD}$,

$\angle AOE=90^\circ-\angle AOF=\angle DOF$

$\therefore \triangle AEO \equiv \triangle DFO$ (ASA 합동)

$\therefore \overline{AE}=\overline{DF}=8-5=3$

한편,

$\square AEOF=\triangle AEO+\triangle AOF$

$=\triangle DFO+\triangle AOF$

$=\triangle AOD=\frac{1}{4}\square ABCD=\frac{1}{4}\times 8\times 8=16$

$\therefore \triangle EOF=\square AEOF-\triangle AEF$

$=16-\frac{1}{2}\times 5\times 3=\frac{17}{2}$ 　답 ②

13

등변사다리꼴의 성질에 의하여

$\angle ADC=\angle DAB=120^\circ$,

$\angle ABC=\angle DCB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

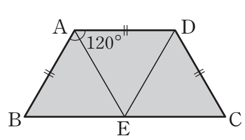
$\overline{AB}/\!/\overline{DE}$에서 $\square ABED$는 평행사변형이므로

$\angle DEC=\angle ABE=60^\circ$ ($\because$ 동위각)

즉, $\triangle DEC$는 정삼각형이다.

한편, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면 $\overline{AD}/\!/\overline{EC}$, $\overline{AD}=\overline{EC}$이므로

$\square AECD$는 평행사변형이다.



$\therefore \triangle ABE=\triangle AED=\triangle DEC$

$=\frac{1}{2}\square ABED=\frac{1}{2}\times 24=12$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABE+\triangle AED+\triangle DEC$

$=12+12+12=36$ 　답 36

14

점 D의 좌표가 $(5, 8)$이므로

$\overline{AD}=5$, $\overline{AO}=8$

$\triangle AED$의 넓이가 $\frac{15}{2}$이므로

$\triangle AED=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}$

$=\frac{1}{2}\times 5\times\overline{AE}=\frac{15}{2}$

$\overline{AE}=3$ 　$\therefore E(0, 2)$

$\triangle AEC$의 넓이가 12이므로

$\triangle AEC=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{OC}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times\overline{OC}=12$

$\overline{OC}=8$ 　$\therefore C(8, 0)$

한편, $\overline{OB}=\overline{OC}-\overline{AD}=8-5=3$ 　$\therefore B(-3, 0)$

따라서 두 점 B, D를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\frac{8-0}{5-(-3)}=\frac{8}{8}=1$ 　답 ③

blacklabel 특강 필수개념

일차함수의 그래프의 기울기

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기 a는

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ (단, $x_1\neq x_2$)

15 해결단계

❶ 단계	$\triangle OAB\equiv\triangle ODC$임을 확인한다.
❷ 단계	$\triangle ABO$의 외심이 점 E임을 확인한다.
❸ 단계	$\overline{EO}+\overline{BF}$의 값을 구한다.

$\triangle OAB$와 $\triangle ODC$에서 $\angle AOB=\angle DOC=90^\circ$

$\square ABCD$는 등변사다리꼴이므로

$\overline{AB}=\overline{DC}$, $\angle ABO=\angle DCO$

$\therefore \triangle OAB\equiv\triangle ODC$ (RHA 합동)

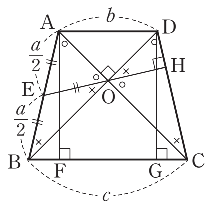
$\angle OAB=\angle ODC=90^\circ-\angle DCO=\angle COH=\angle EOA$이므로

$\overline{EA}=\overline{EO}$

$\angle OBA = \angle OCD = 90° - \angle ODH = \angle DOH = \angle EOB$이므로

$\overline{EB} = \overline{EO}$

즉, 직각삼각형 ABO에서 점 E는 빗변 AB의 중점이므로 외심이고, $\overline{EA} = \overline{EO} = \overline{EB} = \frac{1}{2} \times a = \frac{a}{2}$이다.



한편, 등변사다리꼴 ABCD의 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\overline{FG} = \overline{AD} = b$, $\overline{BF} = \overline{CG} = \frac{1}{2} \times (c-b) = \frac{c-b}{2}$

$\therefore \overline{EO} + \overline{BF} = \frac{a}{2} + \frac{c-b}{2} = \frac{a-b+c}{2}$ **답** $\frac{a-b+c}{2}$

16

① 두 대각선의 길이가 같은 직사각형은 직사각형도 될 수 있다.
② 두 대각선의 길이가 같은 사각형은 등변사다리꼴도 될 수 있다.
③ 두 대각선이 서로 직교하는 사각형은 마름모도 될 수 있다.
④ 한 내각의 크기가 90°인 마름모는 정사각형이다.
⑤ 두 대각선이 서로 수직인 평행사변형은 마름모이다.

따라서 옳은 것은 ④이다. **답** ④

blacklabel 특강 필수개념

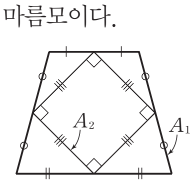
평행사변형의 성질에 직사각형의 성질, 마름모의 성질이 모두 추가되면 평행사변형은 정사각형이 된다. 즉, 정사각형은 직사각형과 마름모의 성질을 모두 만족시킨다.

17

ㄱ. 평행사변형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 평행사변형이므로 사각형 A_1이 평행사변형이면 A_n $(n=2, 3, 4, \cdots)$도 평행사변형이다.

ㄴ. A_1이 직사각형이면 A_2는 마름모, A_3은 직사각형, A_4는 마름모, …이므로 A_{2n} $(n=1, 2, 3, \cdots)$은 마름모이다.

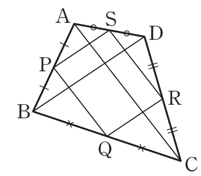
ㄷ. 오른쪽 그림에서 A_2는 정사각형이지만 A_1은 등변사다리꼴이다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

blacklabel 특강 참고

사각형 A_1이 일반적인 사각형일 경우도 생각해보자. 사각형 ABCD의 각 변의 중점을 차례대로 연결하여 사각형을 만들면 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분과 나머지 한 변 사이의 관계에 의하여 $\overline{PS} /\!/ \overline{BD} /\!/ \overline{QR}$, $\overline{PQ} /\!/ \overline{AC} /\!/ \overline{SR}$이므로 □PQRS는 평행사변형이다.



따라서 사각형 A_1에 대하여 A_n $(n=2, 3, 4, \cdots)$은 평행사변형이다.

18

(ⅰ) 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 것은
평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 4개이다.
$\therefore a=4$

(ⅱ) 두 대각선의 길이가 같은 것은
직사각형, 등변사다리꼴, 정사각형의 3개이다.
$\therefore b=3$

(ⅲ) 두 대각선이 서로 수직인 것은 마름모, 정사각형의 2개이다.
$\therefore c=2$

(ⅳ) 네 내각의 크기가 모두 같은 것은
직사각형, 정사각형의 2개이다. $\therefore d=2$

(ⅴ) 이웃하는 두 내각의 크기의 합이 항상 180°인 것은
평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 4개이다.
$\therefore e=4$

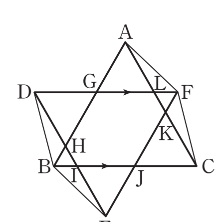
(ⅰ)~(ⅴ)에서

$a-b+c-d+e=4-3+2-2+4=5$ **답** 5

blacklabel 특강 오답피하기

사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이고, 등변사다리꼴은 사다리꼴 중에서 밑변의 양 끝 각의 크기가 같은 사각형이다. 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 항상 같으나, 사다리꼴의 두 대각선의 길이는 항상 같다고 할 수 없다.

19



$\overline{BC} /\!/ \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{DF}$이므로 □BCFD는 평행사변형이다.

이때, $\angle GBI=\angle DGH=60^\circ$ ($\because$ 엇각)이므로 네 삼각형 DHG, HBI, JCK, KFL은 모두 정삼각형이다.
또한, □ABEF도 평행사변형이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{FE}$이다.
따라서 $\overline{BC}/\!/\overline{DF}$, $\overline{AB}/\!/\overline{FE}$이므로 □GBJF는 평행사변형이다.
ㄱ. $\overline{GB}=\overline{FJ}$이므로 $\overline{AG}=\overline{JE}$이다. 즉, $\triangle AGL\equiv\triangle EJI$이다.
ㄴ. $\overline{GH}/\!/\overline{KJ}$, $\overline{GH}=\overline{KJ}$이므로 □GHJK는 평행사변형이다.
ㄷ. □GBJF는 평행사변형이다.
ㄹ. $\overline{GL}/\!/\overline{BC}$, $\overline{GB}=\overline{LC}$이므로 □GBCL은 등변사다리꼴이다.
ㅁ. □DECA는 평행사변형이다.
즉, $\overline{ED}/\!/\overline{CA}$이므로 □KIEC는 사다리꼴이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

20

$\triangle EBF:\triangle EFD=\overline{BF}:\overline{DF}$이므로
$8:\triangle EFD=2:5$, $2\triangle EFD=40$ $\quad\therefore \triangle EFD=20$
또한, $\overline{EC}/\!/\overline{AD}$이므로 $\triangle AEC=\triangle DEC$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC&=\triangle EBC+\triangle AEC\\&=\triangle EBC+\triangle DEC\\&=\triangle EBD\\&=\triangle EBF+\triangle EFD\\&=8+20=28\end{aligned}$$

답 28

21

$\overline{AF}:\overline{FB}=1:3$, $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$, $\overline{CE}:\overline{EA}=1:4$이므로

$$\begin{aligned}\triangle AFE&=\frac{1}{4}\triangle ABE=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\triangle ABC\\&=\frac{1}{5}\triangle ABC=\frac{1}{5}\times60=12(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle BDF&=\frac{1}{3}\triangle BCF=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\triangle ABC\\&=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{1}{4}\times60=15(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

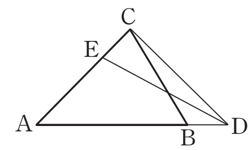
$$\begin{aligned}\triangle CED&=\frac{1}{5}\triangle ADC=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\triangle ABC\\&=\frac{2}{15}\triangle ABC=\frac{2}{15}\times60=8(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle DEF&=\triangle ABC-(\triangle AFE+\triangle BDF+\triangle CED)\\&=60-(12+15+8)=25(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

답 ①

22

$\overline{AE}:\overline{EC}=7:3$, $\overline{AB}:\overline{BD}=5:1$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$를 그으면



$\triangle ADE=\dfrac{7}{10}\triangle ADC$

$\triangle ABC=\dfrac{5}{6}\triangle ADC$

즉, $\triangle ADE:\triangle ABC=\dfrac{7}{10}\triangle ADC:\dfrac{5}{6}\triangle ADC=21:25$이므로

$\triangle ADE=\dfrac{21}{25}\triangle ABC=\dfrac{84}{100}\triangle ABC$

따라서 $\triangle ADE$의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 84 %이다. 답 ④

23

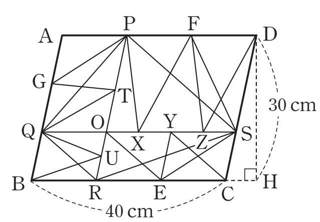
$\overline{AE}/\!/\overline{BD}$이므로 $\triangle EAD=\triangle EAB$
또한, $\overline{AB}/\!/\overline{CE}$이므로 $\triangle EAB=\triangle CAB$

$\therefore \triangle EAD=\triangle CAB=\dfrac{1}{2}\times7\times3=\dfrac{21}{2}$ 답 $\dfrac{21}{2}$

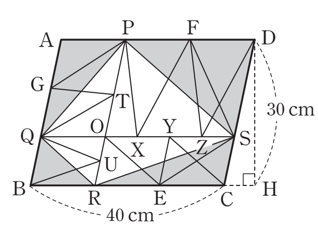
24 해결단계

❶ 단계	평행사변형의 성질을 이용하여 넓이가 같은 삼각형을 모두 찾는다.
❷ 단계	색칠한 부분과 같은 넓이를 갖는 도형을 나타낸다.
❸ 단계	색칠한 부분의 넓이를 구한다.

다음 그림과 같이 각 점을 정하자.



$\overline{PR}/\!/\overline{AB}$이므로 $\triangle TGQ=\triangle PGQ$, $\triangle UQB=\triangle RQB$
$\overline{QS}/\!/\overline{PD}$이므로 $\triangle XFP=\triangle SFP$, $\triangle ZDF=\triangle SDF$
$\overline{QS}/\!/\overline{RC}$이므로 $\triangle ORE=\triangle SRE$, $\triangle YEC=\triangle SEC$
따라서 구하는 넓이는 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



$\therefore$ △AQP＋△BRQ＋△CSR＋△DPS

$=\frac{1}{2}$□AQOP＋$\frac{1}{2}$□BROQ＋$\frac{1}{2}$□CSOR＋$\frac{1}{2}$□DPOS

$=\frac{1}{2}$(□AQOP＋□BROQ＋□CSOR＋□DPOS)

$=\frac{1}{2}$□ABCD$=\frac{1}{2}\times 40\times 30=600(\mathrm{cm}^2)$　　　답 $600\ \mathrm{cm}^2$

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 40~41

01 112	**02** 풀이 참조		**03** (1) 6 (2) 18
04 6 cm	**05** 40	**06** $\frac{1}{3}$	**07** 4
08 (1) 2 cm (2) 8 cm^2			

01 해결단계

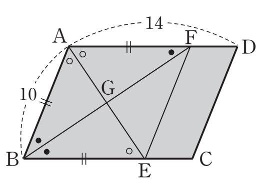
❶ 단계	△ABF와 △BEA가 이등변삼각형임을 보인다.
❷ 단계	□ABEF가 마름모임을 보인다.
❸ 단계	□ABCD의 넓이를 구한다.

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

∠AFB＝∠FBE (∵ 엇각),

∠AEB＝∠FAE (∵ 엇각)

즉, △ABF와 △BEA는 이등변삼각형이다.



이때, $\overline{AB}=\overline{BE}=\overline{AF}=10$이므로 □ABEF는 마름모이다.

즉, △GBE＝△GAB＝20이므로

△ABE＝△GAB＋△GBE＝20＋20＝40

한편, $\overline{BE}:\overline{EC}=10:4=5:2$이므로

△ABE : △AEC＝5 : 2

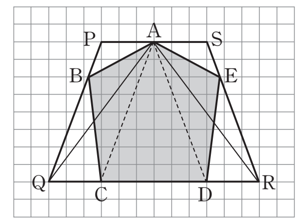
40 : △AEC＝5 : 2, 5△AEC＝80　　$\therefore$ △AEC＝16

따라서 △ABC＝△ABE＋△AEC＝40＋16＝56이므로

□ABCD＝2△ABC＝2×56＝112　　　답 112

02 해결단계

❶ 단계	보조선을 그어 넓이가 같은 삼각형을 모두 찾는다.
❷ 단계	오각형 ABCDE와 넓이가 같은 삼각형을 그린다.
❸ 단계	오각형 ABCDE의 넓이를 구한다.



위의 그림과 같이 사다리꼴의 각 꼭짓점을 P, Q, R, S라 하자.

이때, $\overline{AC}/\!/\overline{PQ}$, $\overline{AD}/\!/\overline{SR}$이므로

△ABC＝△AQC, △ADE＝△ADR

따라서 오각형 ABCDE와 넓이가 같은 삼각형은 △AQR이고

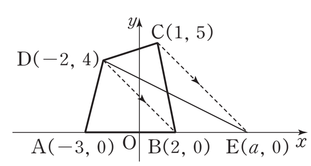
(오각형 ABCDE의 넓이)＝(△AQR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times 12\times 8=48$　　　답 풀이 참조

03 해결단계

(1)	❶ 단계	□ABCD＝△AED가 되려면 $\overline{BD}/\!/\overline{CE}$이어야 함을 보인다.
(2)	❷ 단계	$\overline{BD}/\!/\overline{CE}$를 만족시키는 a의 값을 구한다.
	❸ 단계	□ABCD의 넓이를 구한다.

(1)



점 E가 선분 AB의 연장선 위에 있으므로

□ABCD＝△ABD＋△BCD

△AED＝△ABD＋△BED

이때, □ABCD＝△AED가 되려면 △BCD＝△BED이어야 한다.

즉, $\overline{BD}/\!/\overline{CE}$이므로 두 점 B, D를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기와 두 점 C, E를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기가 같다.

$\frac{0-5}{a-1}=\frac{0-4}{2-(-2)}$, $\frac{-5}{a-1}=-1$

$a-1=5$　　$\therefore a=6$

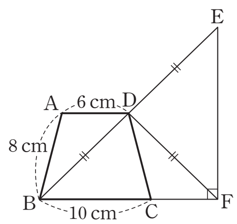
(2) □ABCD＝△AED

$=\frac{1}{2}\times(3+6)\times 4=18$

답 (1) 6 (2) 18

04 해결단계

❶ 단계	점 D가 삼각형 BFE의 외심임을 확인한다.
❷ 단계	$\triangle$ABD와 $\triangle$CDF가 합동임을 보인다.
❸ 단계	$\overline{CF}$의 길이를 구한다.



점 D가 직각삼각형 BFE에서 빗변 BE의 중점이므로 $\triangle$BFE의 외심이다.

즉, $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{DF}$

이때, $\triangle$ABD와 $\triangle$CDF에서

$\overline{AD}/\!/\overline{BF}$이므로 $\angle ADB=\angle DBC$ ($\because$ 엇각)이고,

$\angle DBC=\angle DFB$

즉, $\angle ADB=\angle CFD$

또한, $\angle A=\angle DCF$이므로 $\angle ABD=\angle CDF$

따라서 $\triangle ABD\equiv\triangle CDF$ (ASA 합동)이므로

$\overline{CF}=\overline{AD}=6$ cm　　　　답 6 cm

05 해결단계

❶ 단계	$\triangle$DFC가 이등변삼각형임을 이용하여 $\overline{DF}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	마름모의 성질을 이용하여 $\overline{OF}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	선분의 길이의 비를 이용하여 $\triangle$BCF의 넓이를 구한다.
❹ 단계	선분의 길이의 비를 이용하여 $\triangle$CAE의 넓이를 구한다.

$\overline{BE}=\overline{BF}$이므로 $\angle BEF=\angle BFE$　　……㉠

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 $\angle BEF=\angle FCD$ ($\because$ 엇각)　　……㉡

$\angle BFE=\angle DFC$ ($\because$ 맞꼭지각)　　……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\angle DFC=\angle DCF$이므로 $\triangle$DFC는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{DF}=\overline{DC}=15$

이때, $\overline{BD}=\overline{BF}+\overline{DF}=10+15=25$이므로

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times25=\frac{25}{2}$

$\therefore \overline{OF}=\overline{OB}-\overline{BF}=\frac{25}{2}-10=\frac{5}{2}$

$\triangle OFC:\triangle BCF=\overline{OF}:\overline{BF}=\frac{5}{2}:10=1:4$이므로

$12:\triangle BCF=1:4$　　$\therefore \triangle BCF=48$

$\triangle OBC=\triangle BCF+\triangle OFC=48+12=60$이므로

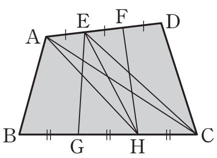
$\triangle ABC=2\triangle OBC=2\times60=120$

$\triangle CAE:\triangle BEC=\overline{AE}:\overline{BE}=5:10=1:2$이므로

$\triangle CAE=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\times120=40$　　　　답 40

06 해결단계

❶ 단계	보조선을 그어 □ABCD가 □AHCE의 몇 배인지 구한다.
❷ 단계	□AHCE와 □EGHF의 넓이가 같음을 확인한다.
❸ 단계	상수 k의 값을 구한다.



위의 그림과 같이 $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{EH}$, $\overline{EC}$를 그으면

$\triangle ABC=3\triangle AHC$, $\triangle CDA=3\triangle CEA$

$\therefore$ □ABCD$=\triangle ABC+\triangle CDA$

$=3\triangle AHC+3\triangle CEA$

$=3(\triangle AHC+\triangle CEA)$

$=3$□AHCE　　……㉠

이때, $\triangle EHC=\triangle EGH$, $\triangle HEA=\triangle HFE$이므로

□AHCE$=\triangle EHC+\triangle HEA$

$=\triangle EGH+\triangle HFE$

$=$□EGHF　　……㉡

㉠, ㉡에서 □ABCD$=3$□EGHF이므로

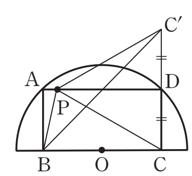
□EGHF$=\frac{1}{3}$□ABCD　　$\therefore k=\frac{1}{3}$　　　　답 $\frac{1}{3}$

07 해결단계

❶ 단계	주어진 반원의 반지름의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{BP}+\overline{PC}$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 위치를 구한다.
❸ 단계	$\overline{BP}+\overline{PC}$의 최솟값을 구한다.

반원의 넓이가 2π이므로 반지름의 길이는 2이다.

다음 그림과 같이 점 C를 $\overline{AD}$에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하자.



이때, $\overline{BP}+\overline{PC}=\overline{BP}+\overline{PC'}\geq\overline{BC'}$이므로 $\overline{BP}+\overline{PC}$의 최솟값은 $\overline{BC'}$의 길이와 같다.

$\overline{BC'}$과 $\overline{AD}$의 교점에 점 P가 위치할 때 $\overline{BP}=\overline{PC'}$이고,

□ABOP는 직사각형이므로

$\overline{BP}=\overline{AO}=2$

따라서 $\overline{BP}+\overline{PC}$의 최솟값은 $2+2=4$　　　　답 4

08 해결단계

(1)	❶ 단계	$\overline{BF}$의 길이를 구한다.
(2)	❷ 단계	□ABCD와 □EFGH가 완전히 포개어질 때를 제외하고 □BHDF는 직사각형임을 보인다.
	❸ 단계	□BHDF의 넓이의 최댓값을 구한다.

(1) □EFGH는 □ABCD를 시계 방향으로 60°만큼 회전시킨 것이므로

$\overline{OB}=\overline{OF}$, $\angle BOF=60^\circ$

따라서 △BOF는 정삼각형이므로

$\overline{BF}=\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 4=2(\mathrm{cm})$

(2) $\overline{BD}=\overline{FH}$, $\overline{OB}=\overline{OD}=\overline{OF}=\overline{OH}$이므로 □ABCD와 □EFGH가 완전히 포개어질 때를 제외하고 □BHDF는 직사각형이다.

이때, △FBD에서 $\overline{BD}$의 길이는 일정하므로 점 F와 $\overline{BD}$ 사이의 거리가 최대일 때, △FBD의 넓이는 최대가 된다.

즉, $\angle BOF=90^\circ$일 때, △FBD의 넓이가 최대가 되므로 △FBD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4(\mathrm{cm}^2)$

따라서 □BHDF의 넓이의 최댓값은

$2\triangle FBD=2\times 4=8(\mathrm{cm}^2)$

답 (1) 2 cm (2) 8 cm^2

미리보는 학력평가 p. 42

1 ③ 2 ④ 3 ②

1

사각형 ACED는 평행사변형이므로 $\overline{AD}=\overline{CE}$

$\therefore \overline{AD}+\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BC}=\boxed{\overline{BE}}$ ……㉠

△DBE가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=\overline{DH}=\overline{HE}$

$\therefore \overline{BE}=\boxed{2\overline{DH}}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

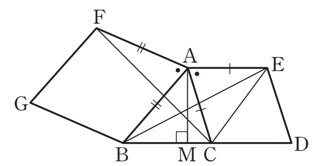
$$\square ABCD=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{DH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{DH}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2\overline{DH}\times\overline{DH}$$
$$=\boxed{\overline{DH}^2}$$

∴ (가) : $\overline{BE}$, (나) : $2\overline{DH}$, (다) : $\overline{DH}^2$

답 ③

2

ㄱ.



점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AM}$

$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AM}$

그런데 $\overline{AC}\neq\overline{BC}$이므로 △ABC≠△ABE

ㄴ. □ACDE는 마름모이므로 $\overline{AE}/\!/\overline{BC}$

∴ △ABE=△ACE

ㄷ. △ABE와 △AFC에서

□AFGB는 마름모이므로 $\overline{AB}=\overline{AF}$ ……㉠

□ACDE는 마름모이므로 $\overline{AE}=\overline{AC}$ ……㉡

$\angle BAE=\angle BAC+\angle CAE$

$=\angle BAC+\angle BAF$

$=\angle FAC$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

△ABE≡△AFC (SAS 합동)

∴ △ABE=△AFC

따라서 삼각형 ABE와 넓이가 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

3

① $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 △ABC=△EBC

$\overline{EB}/\!/\overline{GF}$이므로 △EBC=△EBF

∴ △ABC=△EBF

③ □ABCD=2△ABC, □EBFG=2△EBF

이때, △ABC=△EBF이므로 □ABCD=□EBFG

④ $\triangle BFC+\triangle ECG=\triangle BFG=\triangle EBF=\frac{1}{2}\square ABCD$

⑤ $\triangle ABC+\triangle BFG=\frac{1}{2}\square ABCD+\frac{1}{2}\square EBFG$

$=\frac{1}{2}\square ABCD+\frac{1}{2}\square ABCD$

$=\square ABCD$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

III 도형의 닮음

05 도형의 닮음

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 45

01 ③	02 ④	03 54π cm^2	04 8, SAS 닮음
05 ②	06 ①		

01

□ABCD∽□HGFE이므로

$\angle A=\angle H$, $\angle B=\angle G$, $\angle C=\angle F$, $\angle D=\angle E$

$\overline{AB}:\overline{HG}=\overline{BC}:\overline{GF}=\overline{CD}:\overline{FE}=\overline{DA}:\overline{EH}$

① $\angle C=\angle F=120^\circ$

② $\angle B=360^\circ-(\angle A+\angle C+\angle D)$

$=360^\circ-(75^\circ+120^\circ+60^\circ)=105^\circ$

③ $\overline{AB}:\overline{HG}=\overline{BC}:\overline{GF}=8:12=2:3$

④ $\overline{CD}:\overline{FE}=2:3$이므로 $2\overline{FE}=3\overline{CD}$

$\therefore \overline{CD}=\frac{2}{3}\overline{FE}=\frac{2}{3}\times15=10$

⑤ $\overline{AD}:\overline{HE}=2:3$이므로 $2\overline{HE}=3\overline{AD}$

$\therefore \overline{HE}=\frac{3}{2}\overline{AD}=\frac{3}{2}\times12=18$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

02

원뿔 B의 밑면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 두 원뿔 A, B가 서로 닮은 도형이므로

(원뿔 A, B의 닮음비)$=15:20=9:r$

$15r=180$ $\quad\therefore r=12$ (cm)

원뿔 B의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기가 a°이므로

$2\pi\times12=2\pi\times20\times\frac{a}{360}$ $\quad\therefore a=216$

원뿔 B의 옆면인 부채꼴의 넓이는

$\pi\times20^2\times\frac{216}{360}=240\pi$ (cm^2) $\quad\therefore b=240$

$\therefore a+b=216+240=456$ 답 ④

| 다른풀이 |

두 원뿔 A, B가 서로 닮은 도형이므로 두 원뿔의 전개도도 서로 닮은 도형이다.

즉, 원뿔 A의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기와 원뿔 B의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 중심각의 크기는 a°로 같으므로

$2\pi\times9=2\pi\times15\times\frac{a}{360}$ $\quad\therefore a=216$

blacklabel 특강 필수개념

닮은 두 원뿔

(닮은 두 원뿔의 닮음비)=(밑면의 반지름의 길이의 비)

=(모선의 길이의 비)

=(높이의 비)

=(밑면의 둘레의 길이의 비)

03

서로 닮은 두 원기둥 A, B의 높이가 각각 4 cm, 6 cm이므로 두 원기둥의 닮음비는 $2:3$이다.

즉, 두 원기둥의 부피의 비는

$2^3:3^3=8:27$

이때, 원기둥 A의 부피가 96π cm^{3}이므로 원기둥 B의 부피를 x cm^{3}라 하면

$96\pi:x=8:27$에서 $8x=27\times96\pi$

$\therefore x=324\pi$ (cm^3)

따라서 원기둥 B의 부피는 324π cm^{3}이고, 높이가 6 cm이므로 밑넓이는

$324\pi\div6=54\pi$ (cm^2) 답 54π cm^2

| 다른풀이 |

원기둥 A의 부피가 96π cm^{3}이므로 원기둥 A의 밑넓이를 구하면

$96\pi\div4=24\pi$ (cm^2)

이때, 서로 닮은 두 원기둥 A, B의 높이가 각각 4 cm, 6 cm이므로 두 원기둥의 닮음비는 $2:3$이다.

즉, 두 원기둥의 밑넓이의 비는

$2^2:3^2=4:9$

원기둥 B의 밑넓이를 x cm^{2}라 하면

$24\pi:x=4:9$에서 $4x=216\pi$

$\therefore x=54\pi$ (cm^2)

04

△ABC와 △DBA에서

$\overline{AB}:\overline{DB}=12:9=4:3$ ……㉠

$\overline{BC}:\overline{BA}=(9+7):12=16:12=4:3$ ……㉡

∠B는 공통 ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ (SAS 닮음)

따라서 $\overline{AC} : \overline{DA} = 4 : 3$, 즉 $\overline{AC} : 6 = 4 : 3$이므로

$3\overline{AC} = 24$ $\quad\therefore \overline{AC} = 8$ 답 8, SAS 닮음

05

$\overline{AB} = 14 + 16 = 30\,(\text{cm})$이므로 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 30 cm이다.

이때, $\overline{BE} : \overline{EC} = 1 : 2$이므로

$\overline{BE} = 30 \times \frac{1}{3} = 10\,(\text{cm})$, $\overline{EC} = 30 \times \frac{2}{3} = 20\,(\text{cm})$

한편, $\triangle DBE$와 $\triangle ECF$에서

$\angle DBE = \angle ECF = 60^\circ$,

$\angle BED = 180^\circ - 60^\circ - \angle FEC = \angle CFE$

$\therefore \triangle DBE \backsim \triangle ECF$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{BD} : \overline{CE} = \overline{DE} : \overline{EF}$이므로 $16 : 20 = 14 : \overline{EF}$

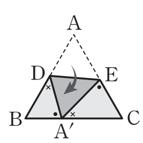
$16\overline{EF} = 280$ $\quad\therefore \overline{EF} = \frac{35}{2}$ cm 답 ②

blacklabel 특강 참고

종이 접기에서의 닮은 도형

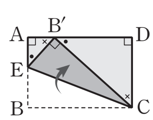
(1) 정삼각형 모양의 종이 접기

⇨ $\triangle BA'D \backsim \triangle CEA'$ (AA 닮음)



(2) 직사각형 모양의 종이 접기

⇨ $\triangle AEB' \backsim \triangle DB'C$ (AA 닮음)



06

$\triangle ABC \backsim \triangle HAC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{CB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CH}$

즉, $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$이므로

$20^2 = 16 \times \overline{CB}$ $\quad\therefore \overline{CB} = 25$ cm

$\therefore \overline{BH} = 25 - 16 = 9\,(\text{cm})$

또한, $\triangle ABC \backsim \triangle HBA$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB} : \overline{BH} = \overline{BC} : \overline{AB}$

즉, $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$이므로 $\overline{AB}^2 = 9 \times 25 = 225$

$\therefore \overline{AB} = 15$ cm ($\because \overline{AB} > 0$) 답 ①

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 46~49

01 ④	02 ③	03 4분 30초	04 ③	05 ⑤
06 ⑤	07 300 m^2	08 ④	09 $\frac{376}{243}$	10 ③
11 ⑤	12 9 cm	13 3 : 5	14 ④	15 19
16 10	17 64 cm^2	18 ⑤	19 $\frac{15}{8}$ cm	20 ②
21 ④	22 $\frac{9}{2}$ cm	23 4 cm	24 243 : 32	

01

$\square ABCD$는 직사각형이므로 $\overline{AB} = \overline{FE} = \overline{CD} = 8$ cm

$\square ABCD \backsim \square FCDE$이므로

$\overline{AB} : \overline{FC} = \overline{AD} : \overline{FE}$

$8 : 5 = \overline{AD} : 8$, $5\overline{AD} = 64$

즉, $\overline{AD} = \frac{64}{5}$ cm이므로

$\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{ED} = \frac{64}{5} - 5 = \frac{39}{5}\,(\text{cm})$

또한, $\square ABCD \backsim \square AGHE$이므로

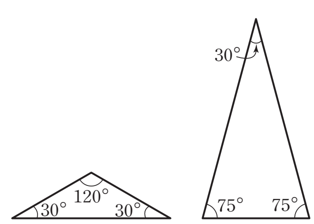
$\overline{AB} : \overline{AG} = \overline{AD} : \overline{AE}$

$8 : \overline{AG} = \frac{64}{5} : \frac{39}{5}$, $\frac{64}{5}\overline{AG} = \frac{312}{5}$

$\therefore \overline{AG} = \frac{312}{5} \times \frac{5}{64} = \frac{39}{8}\,(\text{cm})$ 답 ④

02

ㄱ. 다음 그림의 두 이등변삼각형은 한 내각의 크기가 30°로 같지만 서로 닮음이 아니다.



ㄴ. 모든 정팔면체는 항상 닮음인 입체도형이다.

ㄷ. 두 원의 닮음비는 두 원의 반지름, 지름, 둘레의 길이의 비와 같으므로 둘레의 길이로 닮음비를 알 수 있다.

ㄹ. 닮음비가 1 : 1인 두 도형은 합동이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

blacklabel 특강 참고

정다면체의 닮음

정다각형은 모든 변의 길이가 같고 모든 내각의 크기가 같은 다각형이므로 변의 개수가 같은 두 정다각형은 서로 닮음이다. 이때, 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형이므로 모든 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체는 각각 서로 닮음이다.

03

축척이 1 : 3000이고, 지도에서 학교와 도서관 사이의 거리가 15 cm이므로 실제 거리는

$15\times3000=45000\ (\mathrm{cm})=450\ (\mathrm{m})$

소영이는 분속 100 m로 걸으므로 학교에서 도서관까지 걸어갈 때 걸리는 시간은 $\frac{450}{100}=4.5$ (분), 즉 4분 30초이다.

답 4분 30초

blacklabel 특강 오답피하기

단위가 있는 수량을 구할 때에는 반드시 단위를 하나로 통일하여 계산하고, 그 결과에 단위를 쓰는 것에 유의한다.

04

$\triangle FBA\backsim\triangle EDC$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{FA}:\overline{EC}$에서

$9:6=\overline{FA}:5$

$6\overline{FA}=45 \qquad \therefore \overline{FA}=\frac{15}{2}\ \mathrm{cm}$

$\triangle ABC\backsim\triangle EDC$이므로

$\overline{AC}:\overline{EC}=\overline{CB}:\overline{CD}$에서

$15:5=\overline{CB}:6$

$5\overline{CB}=90 \qquad \therefore \overline{CB}=18\ \mathrm{cm}$

$\overline{CB}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{ED}$에서

$18:6=9:\overline{ED}$

$18\overline{ED}=54 \qquad \therefore \overline{ED}=3\ \mathrm{cm}$

또한, $\triangle ABC\backsim\triangle FBA$이므로

$\overline{AB}:\overline{FB}=\overline{CB}:\overline{AB}$에서

$9:\overline{FB}=18:9$

$18\overline{FB}=81 \qquad \therefore \overline{FB}=\frac{9}{2}\ \mathrm{cm}$

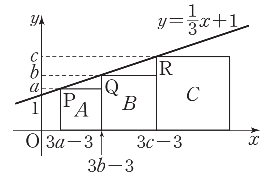
$\therefore \overline{EF}=\overline{CB}-(\overline{FB}+\overline{CE})=18-\left(\frac{9}{2}+5\right)=\frac{17}{2}\ (\mathrm{cm})$

따라서 사각형 AFED의 둘레의 길이는

$\overline{AF}+\overline{FE}+\overline{ED}+\overline{DA}=\frac{15}{2}+\frac{17}{2}+3+9=28\ (\mathrm{cm})$ 답 ③

05

다음 그림과 같이 세 점 P, Q, R의 y좌표를 각각 a, b, c라 하면 x좌표는 각각 $3a-3$, $3b-3$, $3c-3$이다.



정사각형 A의 한 변의 길이는 $(3b-3)-(3a-3)=a$

$4a=3b \qquad \therefore a=\frac{3}{4}b$

정사각형 B의 한 변의 길이는 $(3c-3)-(3b-3)=b$

$3c=4b \qquad \therefore c=\frac{4}{3}b$

따라서 세 정사각형 A, B, C의 닮음비는

$a:b:c=\frac{3}{4}b:b:\frac{4}{3}b=9:12:16$ 답 ⑤

06

원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 잘라서 만든 원뿔은 처음 원뿔과 닮음이다.

이때, $\overline{QA}:\overline{AP}:\overline{PB}=3:2:1$에서

$\overline{QA}:\overline{QP}:\overline{QB}=3:5:6$이므로 $\overline{QA}$, $\overline{QP}$, $\overline{QB}$를 각각 모선으로 하는 원뿔의 부피의 비는

$3^3:5^3:6^3=27:125:216$

따라서 두 원뿔대 F와 F'의 부피의 비는

$(125-27):(216-125)=98:91=14:13$ 답 ⑤

07

40 m는 4000 cm이므로 지도의 축척은

$8:4000=1:500$

즉, 지도에서의 거리와 실제 거리의 비는 1 : 500이므로 넓이의 비는

$1^2:500^2=1:250000$

따라서 지도에서 넓이가 12 cm^2인 땅의 실제 넓이는

$12\times250000=3000000\ (\mathrm{cm}^2)=300\ (\mathrm{m}^2)$ 답 300 m^2

08

닮은 두 원기둥 모양의 물통 A, B의 겉면을 페인트로 칠하는 데 A는 20 g, B는 45 g의 페인트가 사용되므로 두 물통의 겉넓이의 비는

$20:45=4:9=2^2:3^2$

즉, 두 물통의 닮음비는 $2:3$이므로 부피의 비는

$2^3:3^3=8:27$

따라서 물통 A에 가득 담겨 있는 물을 높이가 27 cm인 물통 B에 전부 부으면 물의 높이가 8 cm 올라간다.

이때, 높이가 27 cm인 물통에 이미 5 cm의 높이의 물이 담겨 있으므로 물통 B에서 물의 높이는

$5+8=13\,(\text{cm})$ 답 ④

09

[그림 1]의 정삼각형과 [그림 2]에 새로 그린 작은 정삼각형 1개의 한 변의 길이의 비는 $3:1$이므로 두 삼각형의 넓이의 비는

$3^2:1^2=9:1$

즉, [그림 1]의 정삼각형의 넓이가 A이므로 [그림 2]에 새로 그린 작은 정삼각형 1개의 넓이는 $\frac{1}{9}A$이다.

이때, [그림 2]에서 작은 정삼각형이 모두 3개 생기므로 [그림 2]의 도형의 넓이는

$A+3\times\frac{1}{9}A=\frac{4}{3}A$

같은 방법으로 [그림 3]에 새로 그린 작은 정삼각형 1개의 넓이는 $\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}A=\frac{1}{81}A$이고, [그림 3]에서 작은 정삼각형이 모두 12개 생기므로 [그림 3]의 도형의 넓이는

$\frac{4}{3}A+12\times\frac{1}{81}A=\frac{40}{27}A$

[그림 4]에 새로 그린 작은 정삼각형 1개의 넓이는

$\frac{1}{9}\times\frac{1}{81}A=\frac{1}{729}A$이고, [그림 4]에서 작은 정삼각형이 모두 48개 생기므로 [그림 4]의 도형의 넓이는

$\frac{40}{27}A+48\times\frac{1}{729}A=\frac{376}{243}A$

$\therefore k=\frac{376}{243}$ 답 $\frac{376}{243}$

10

$\triangle ABD$와 $\triangle DBC$에서

$\overline{BD}$가 $\angle B$의 이등분선이므로

$\angle ABD=\angle DBC$

또한, $\angle BDA=\angle BCD$

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle DBC$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{CB}$에서

$\overline{DB}^2=\overline{AB}\times\overline{CB}=4\times9=36$

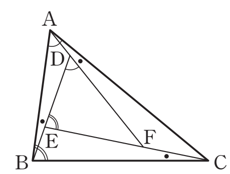
$\therefore \overline{DB}=6$ ($\because \overline{DB}>0$)

또한, $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AD}:\overline{DC}$에서

$4:6=3:\overline{DC}$

$4\overline{DC}=18 \qquad \therefore \overline{DC}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$ 답 ③

11



$\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서

$\angle EDF=\angle BAD+\angle ABD$

$=\angle BAD+\angle CAF$

$=\angle BAC$

$\angle DEF=\angle CBE+\angle BCE$

$=\angle CBE+\angle ABD$

$=\angle ABC$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$ (AA 닮음)

이때, $\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}=\overline{AC}:\overline{DF}=14:8=7:4$이므로

$9:\overline{DE}=7:4,\ 7\overline{DE}=36 \qquad \therefore \overline{DE}=\frac{36}{7}$ cm

$12:\overline{EF}=7:4,\ 7\overline{EF}=48 \qquad \therefore \overline{EF}=\frac{48}{7}$ cm

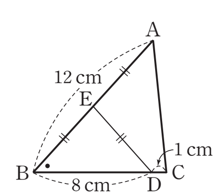
따라서 $\triangle DEF$의 둘레의 길이는

$\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{DF}=\frac{36}{7}+\frac{48}{7}+8=20\,(\text{cm})$ 답 ⑤

blacklabel 특강 참고

닮은 두 평면도형의 둘레의 길이의 비는 닮음비와 같음을 이용해도 된다.
두 삼각형 ABC, DEF의 닮음비가 $7:4$이므로 두 삼각형의 둘레의 길이의 비도 $7:4$이다.
이때, 두 삼각형 ABC, DEF의 둘레의 길이를 각각 l_1 cm, l_2 cm라 하면
$l_1=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=9+12+14=35\,(\text{cm})$이므로
$35:l_2=7:4 \qquad \therefore l_2=20$ cm

12



$\triangle ABC$와 $\triangle DBE$에서

$\overline{AB}:\overline{DB}=12:8=3:2$,

$\overline{BC}:\overline{BE}=(8+1):6=3:2$,

$\angle B$는 공통

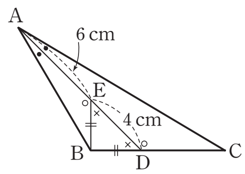
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBE$ (SAS 닮음)

이때, $\overline{AC} : \overline{DE} = 3 : 2$이므로

$\overline{AC} : 6 = 3 : 2$, $2\overline{AC} = 18$

$\therefore \overline{AC} = 9\text{ cm}$ **답** 9 cm

13



$\triangle BDE$에서 $\overline{BD} = \overline{BE}$이므로

$\angle BED = \angle BDE$

$\triangle ABE$와 $\triangle ACD$에서

$\angle BAE = \angle CAD$

$\angle AEB = 180° - \angle BED$

$\quad = 180° - \angle BDE = \angle ADC$

따라서 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{BE} : \overline{CD} = \overline{AE} : \overline{AD} = 6 : 10 = 3 : 5$ **답** 3 : 5

14

두 삼각형 ABC와 ECD가 닮음이므로

$\overline{AC} : \overline{ED} = \overline{BC} : \overline{CD}$

$\overline{AC} : 8 = 6 : 4$, $4\overline{AC} = 48$ $\quad \therefore \overline{AC} = 12$

또한, $\angle ABC = \angle ECD$이므로 $\overline{AB} /\!/ \overline{EC}$

즉, $\triangle ABF$와 $\triangle CEF$에서

$\angle ABF = \angle CEF$ ($\because$ 엇각),

$\angle AFB = \angle CFE$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CEF$ (AA 닮음)

$\overline{AF} : \overline{CF} = \overline{AB} : \overline{CE} = \overline{BC} : \overline{CD} = 6 : 4 = 3 : 2$이므로

$3\overline{CF} = 2\overline{AF}$ $\quad \therefore \overline{AF} = \frac{3}{2}\overline{CF}$

이때, $\overline{AC} = \overline{CF} + \overline{AF}$에서

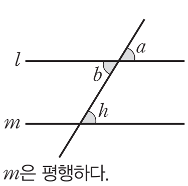
$12 = \overline{CF} + \frac{3}{2}\overline{CF} = \frac{5}{2}\overline{CF}$

$\therefore \overline{CF} = 12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ **답** ④

blacklabel 특강 필수개념

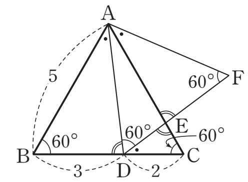
평행선의 성질과 두 직선이 평행할 조건

(1) 평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기와 엇각의 크기는 각각 같다.
즉, $l /\!/ m$이면
$\angle a = \angle h$ ($\because$ 동위각), $\angle b = \angle h$ ($\because$ 엇각)



(2) 서로 다른 두 직선 l, m이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기와 엇각의 크기가 각각 같으면 두 직선 l, m은 평행하다.

15



$\triangle ADF$가 정삼각형이 되도록 점 F를 정하고 크기가 같은 각끼리 표시하면 오른쪽 그림과 같다.

$\triangle ABD \backsim \triangle DCE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB} : \overline{DC} = \overline{BD} : \overline{CE}$에서

$5 : 2 = 3 : \overline{CE}$, $5\overline{CE} = 6$ $\quad \therefore \overline{CE} = \frac{6}{5}$

$\therefore \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = 5 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}$ ㈎

또한, $\triangle ADE \backsim \triangle ACD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AC}$에서

$\frac{19}{5} : \overline{AD} = \overline{AD} : 5$

$\therefore \overline{AD}^2 = 5 \times \frac{19}{5} = 19$ ㈏

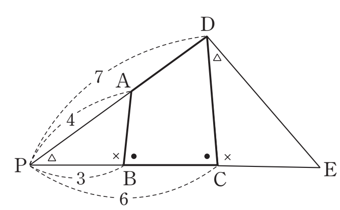
답 19

단계	채점 기준	배점
㈎	$\overline{AE}$의 길이를 구한 경우	60%
㈏	$\overline{AD}^2$의 값을 구한 경우	40%

16 해결단계

❶ 단계	$\overline{PC}$의 연장선을 그어 $\triangle PAB$와 닮은 삼각형 DEC를 만든다.
❷ 단계	$\overline{AB} \times \overline{CD}$의 값을 $\overline{CE}$를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	$\overline{CE}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overline{AB} \times \overline{CD}$의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 $\angle CDE = \angle P$가 되도록 $\overline{PC}$의 연장선 위에 점 E를 정하자.



$\triangle APB$와 $\triangle EDC$에서

$\angle APB = \angle EDC$,

$\angle ABP = 180° - \angle ABC$

$\quad = 180° - \angle DCB = \angle ECD$

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle EDC$ (AA 닮음)

즉, $\overline{PB} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{EC}$에서

$3 : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{CE}$

$\therefore \overline{AB} \times \overline{CD} = 3\overline{CE}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, $\triangle APB$와 $\triangle EPD$에서

$\angle P$는 공통, $\angle PAB = \angle PED$ ($\because \triangle APB \backsim \triangle EDC$)

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle EPD$ (AA 닮음)

즉, $\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{PB}:\overline{PD}$에서

$4:\overline{PE}=3:7$

$3\overline{PE}=28 \qquad \therefore \overline{PE}=\frac{28}{3}$

이때, $\overline{PE}=\overline{PC}+\overline{CE}$이므로

$\frac{28}{3}=6+\overline{CE} \qquad \therefore \overline{CE}=\frac{28}{3}-6=\frac{10}{3}$

따라서 ㉠에서

$\overline{AB}\times\overline{CD}=3\overline{CE}=3\times\frac{10}{3}=10$ 답 10

17

$\triangle HBA \backsim \triangle HAC$ (AA 닮음)에서

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{BH}:\overline{AH}$이므로

$\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{CH}=16\times4=64$

$\therefore \overline{AH}=8$ cm ($\because \overline{AH}>0$)

따라서 직각삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times16\times8=64\,(\text{cm}^2)$ 답 64 cm^2

18

ㄱ. $\overline{AP}/\!/\overline{XY}$이므로 $\triangle APQ \backsim \triangle XYQ$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{AP}:\overline{XY}=\overline{PQ}:\overline{YQ}$

ㄴ. ㄱ에서 $\overline{AP}:\overline{XY}=\overline{PQ}:\overline{YQ}$이므로

$\overline{AP}\times\overline{YQ}=\overline{XY}\times\overline{PQ} \qquad \therefore \overline{AP}=\frac{\overline{XY}\times\overline{PQ}}{\overline{YQ}}$

또한, $\overline{XY}/\!/\overline{BQ}$이므로 $\triangle XPY \backsim \triangle BPQ$ (AA 닮음)

즉, $\overline{XY}:\overline{BQ}=\overline{PY}:\overline{PQ}$이므로

$\overline{BQ}\times\overline{PY}=\overline{XY}\times\overline{PQ} \qquad \therefore \overline{BQ}=\frac{\overline{XY}\times\overline{PQ}}{\overline{PY}}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BQ}=\frac{\overline{XY}\times\overline{PQ}}{\overline{YQ}}:\frac{\overline{XY}\times\overline{PQ}}{\overline{PY}}$

$=\frac{1}{\overline{YQ}}:\frac{1}{\overline{PY}}$

$=\overline{PY}:\overline{YQ}$

ㄷ. $\triangle APY$와 $\triangle BQY$에서

$\overline{AP}:\overline{BQ}=\overline{PY}:\overline{YQ}$ ($\because$ ㄴ), $\angle APY=\angle BQY=90^\circ$

$\therefore \triangle APY \backsim \triangle BQY$ (SAS 닮음)

닮은 두 도형의 대응각의 크기는 같으므로

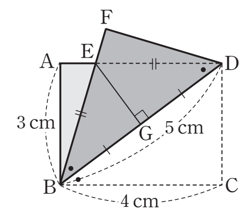
$\angle AYP=\angle BYQ$

$\therefore \angle AYX=90^\circ-\angle AYP$

$=90^\circ-\angle BYQ=\angle BYX$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

19



오른쪽 그림에서

$\angle EDB=\angle DBC$ ($\because$ 엇각),

$\angle EBD=\angle DBC$ ($\because$ 접은 각)

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$

즉, $\triangle EBD$는 $\overline{EB}=\overline{ED}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BG}=\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{5}{2}$ (cm)

$\triangle EBG$와 $\triangle DBC$에서

$\angle EBG=\angle DBC$, $\angle BGE=\angle C=90^\circ$

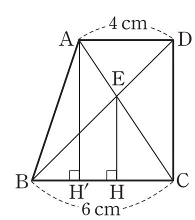
$\therefore \triangle EBG \backsim \triangle DBC$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{EG}:\overline{DC}=\overline{BG}:\overline{BC}$이므로

$\overline{EG}:3=\frac{5}{2}:4$, $4\overline{EG}=\frac{15}{2}$

$\therefore \overline{EG}=\frac{15}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{8}$ (cm) 답 $\frac{15}{8}$ cm

20



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(4+6)\times\overline{AH'}$

$=40$

$\therefore \overline{AH'}=8$ cm

이때, $\triangle EAD$와 $\triangle ECB$에서

$\angle EAD=\angle ECB$, $\angle EDA=\angle EBC$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \triangle EAD \backsim \triangle ECB$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AE}:\overline{CE}=\overline{AD}:\overline{CB}=4:6=2:3$이므로

$\overline{CE}:\overline{CA}=3:5$

또한, $\triangle CEH$와 $\triangle CAH'$에서

$\overline{EH}/\!/\overline{AH'}$이므로 $\angle CEH=\angle CAH'$ ($\because$ 동위각),

$\angle EHC=\angle AH'C=90^\circ$

$\therefore \triangle CEH \backsim \triangle CAH'$ (AA 닮음)

즉, $\overline{CE}:\overline{CA}=\overline{EH}:\overline{AH'}$이므로

$3:5=\overline{EH}:8$, $5\overline{EH}=24 \qquad \therefore \overline{EH}=\frac{24}{5}$ cm 답 ②

21

$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{AB}$

즉, $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$이므로

$30^2 = \overline{BD} \times 50 \quad \therefore \overline{BD} = 18\text{ cm}$

이때, $\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 50 = 25\,(\text{cm})$이므로

$\overline{DM} = \overline{BM} - \overline{BD} = 25 - 18 = 7\,(\text{cm})$

또한, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$이므로

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{BC}$

$30 \times 40 = \overline{AD} \times 50$

$\therefore \overline{AD} = 24\text{ cm}$

한편, $\triangle ABC$에서 점 M은 직각삼각형의 빗변의 중심이므로 $\triangle ABC$의 외심이다.

$\therefore \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 25\text{ cm}$

따라서 $\triangle DMA = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{DM} = \frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{DE}$이므로

$24 \times 7 = 25 \times \overline{DE}$

$\therefore \overline{DE} = \frac{168}{25}\text{ cm}$ 　　답 ④

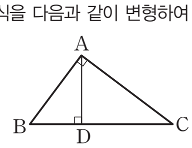
blacklabel 특강 참고

직각삼각형의 넓이의 활용

직각삼각형에서는 닮음의 응용과 함께 삼각형의 넓이 공식을 다음과 같이 변형하여 자주 이용한다.

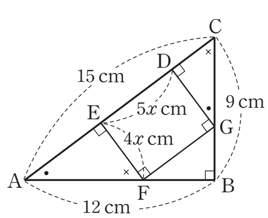
$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}$

⇨ $\overline{BC} \times \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{AC}$



22

$\overline{DE} : \overline{EF} = 5 : 4$이므로 $\overline{DE} = 5x\text{ cm}$, $\overline{EF} = 4x\text{ cm}$라 하자.



$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AE} : \overline{AB} = \overline{EF} : \overline{BC}$에서

$\overline{AE} : 12 = 4x : 9$

$9\overline{AE} = 48x \quad \therefore \overline{AE} = \frac{16}{3}x\text{ cm}$

또한, $\triangle GDC \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{CD} : \overline{CB} = \overline{DG} : \overline{BA}$에서

$\overline{CD} : 9 = 4x : 12$

$12\overline{CD} = 36x \quad \therefore \overline{CD} = 3x\text{ cm}$

이때, $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{CD} = 15\text{ cm}$이므로

$\frac{16}{3}x + 5x + 3x = 15, \ \frac{40}{3}x = 15$

$\therefore x = 15 \times \frac{3}{40} = \frac{9}{8}$

$\therefore \overline{EF} = 4x$

$= 4 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{2}\,(\text{cm})$ 　　답 $\frac{9}{2}$ cm

23

$\overline{GH} = x\text{ cm}$, $\overline{AD} = y\text{ cm}$라 하자.

$\triangle AED$와 $\triangle HFD$에서

$\angle ADE = \angle ADB - \angle EDB = 45^\circ - \angle EDB$

$= \angle EDF - \angle EDB = \angle HDF$

$\angle EAD = \angle FHD = 90^\circ$

즉, $\triangle AED \backsim \triangle HFD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{DE} : \overline{DF} = \overline{AD} : \overline{HD} = y : 6$ ……㉠

또한, $\triangle DEG$와 $\triangle DFC$에서

$\angle EDG = \angle EDF - \angle HDF = 45^\circ - \angle HDF$

$= \angle BDC - \angle HDF = \angle FDC$

$\angle EGD = \angle FCD = 90^\circ$

즉, $\triangle DEG \backsim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{DE} : \overline{DF} = \overline{DG} : \overline{DC} = (6+x) : y$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $y : 6 = (6+x) : y$

$\therefore y^2 = 36 + 6x$

이때, 정사각형의 넓이가 60 cm^2이므로 $y^2 = 60$

즉, $60 = 36 + 6x$이므로 $6x = 24 \quad \therefore x = 4$

$\therefore \overline{GH} = 4\text{ cm}$ 　　답 4 cm

24 해결단계

❶ 단계	주어진 직각삼각형이 모두 닮음임을 확인한다.
❷ 단계	수선을 반복해서 내릴 때 생기는 삼각형의 닮음비가 일정함을 확인한다.
❸ 단계	$\triangle ABC$와 $\triangle A_1AC$의 닮음비를 구한다.
❹ 단계	$\overline{AA_1} : \overline{A_3B_3}$을 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

$\angle$C를 한 내각으로 하는 직각삼각형은 모두 닮음이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle B_1A_1C$ (AA 닮음)

이때, $\triangle$ABC와 $\triangle B_1A_1C$의 닮음비는

$\overline{AB} : \overline{B_1A_1} = 9 : 4$ ······㉠

$\triangle$ABC와 $\triangle A_1AC$의 닮음비를 $m : n$ (m, n은 서로소)이라 하면

$\overline{AB} : \overline{A_1A} = m : n$

$n\overline{AB} = m\overline{A_1A}$ $\quad \therefore \overline{AB} = \dfrac{m}{n}\overline{A_1A}$

직각삼각형의 꼭짓점에서 빗변에 수선을 내리는 것을 반복할 때 생기는 삼각형의 닮음비는 일정하므로 $\triangle A_1AC$와 $\triangle B_1A_1C$의 닮음비도 $m : n$이다.

즉, $\overline{A_1A} : \overline{B_1A_1} = m : n$

$n\overline{A_1A} = m\overline{B_1A_1}$ $\quad \therefore \overline{B_1A_1} = \dfrac{n}{m}\overline{A_1A}$

이때, ㉠에서

$\dfrac{m}{n}\overline{A_1A} : \dfrac{n}{m}\overline{A_1A} = 9 : 4$

$m^2 : n^2 = 9 : 4$ $\quad \therefore m=3,\ n=2$

$\therefore \overline{AB} : \overline{A_1A} = \overline{A_1A} : \overline{B_1A_1} = \overline{B_1A_1} : \overline{A_2B_1}$

$= \overline{A_2B_1} : \overline{B_2A_2} = \overline{B_2A_2} : \overline{A_3B_2}$

$= \overline{A_3B_2} : \overline{B_3A_3} = 3 : 2$

$\therefore \overline{AA_1} : \overline{A_3B_3} = 3^5 : 2^5 = 243 : 32$

답 243 : 32

blacklabel 특강 풀이첨삭

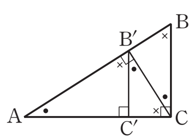
직각삼각형에서 닮음비의 보존

오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle ACB'$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{CB'} = \overline{AC} : \overline{AB'} = m : n$이라

하면 $\triangle ACB' \backsim \triangle AB'C'$ (AA 닮음)에서

$\overline{AB'} : \overline{AC'} = \overline{B'C} : \overline{C'B'} = \overline{AC} : \overline{AB'} = m : n$



Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 50~51

01 풀이 참조 02 1 : 2 03 (1) 7 cm (2) 14 cm (3) 1 : 3

04 (1) $\frac{4}{3}h$ m (2) 10 m 05 81 : 8 06 6 07 2

08 16 : 15

01 해결단계

(1)	❶ 단계	삼각형 ABE와 닮음인 삼각형을 찾는다.
	❷ 단계	❶ 단계에서 찾은 닮음 조건을 확인하고 그 이유를 설명한다.
(2)	❸ 단계	삼각형 ABC와 닮음인 삼각형을 찾는다.
	❹ 단계	❸ 단계에서 찾은 닮음 조건을 확인하고 그 이유를 설명한다.
(3)	❺ 단계	삼각형 AFD와 닮음인 삼각형을 찾는다.
	❻ 단계	❺ 단계에서 찾은 닮음 조건을 확인하고 그 이유를 설명한다.

(1) $\triangle$ABE와 $\triangle$ACD에서

$\angle BAE = \angle CAD$, $\angle ABE = \angle ACD$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD$ (AA 닮음)

(2) $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$에서

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AE} : \overline{AD}$ ······㉠

또한, $\triangle$ABC와 $\triangle$AED에서

$\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE$

$= \angle CAD + \angle CAE = \angle EAD$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle ABC \backsim \triangle AED$ (SAS 닮음)

(3) $\triangle ABC \backsim \triangle AED$이므로

$\angle ACB = \angle ADE$ ······㉢

또한, $\triangle$AFD와 $\triangle$EFC에서

$\angle AFD = \angle EFC$ ($\because$ 맞꼭지각) ······㉣

㉢, ㉣에서 $\triangle AFD \backsim \triangle EFC$ (AA 닮음)

답 풀이 참조

02 해결단계

❶ 단계	[그림 1]의 정사면체와 [그림 2]의 정사면체의 부피의 비를 구한다.
❷ 단계	[그림 1]의 정사면체의 부피를 a라 할 때, 정팔면체의 부피를 a를 사용하여 나타낸다.
❸ 단계	[그림 1]의 정팔면체와 [그림 2]의 정사면체의 부피의 비를 구한다.

[그림 2]의 정사면체의 한 모서리의 길이는 [그림 1]의 정사면체의 한 모서리의 길이의 2배이다.

이때, 모든 정사면체는 닮은 도형이므로 [그림 1], [그림 2]의 정사면체의 부피의 비는

$1^3 : 2^3 = 1 : 8$

즉, [그림 1]의 정사면체 1개의 부피를 a라 하면 [그림 2]의 정사면체의 부피는 $8a$이므로 [그림 1]의 정팔면체의 부피는

$8a - 4a = 4a$

따라서 [그림 1]의 정팔면체와 [그림 2]의 정사면체의 부피의 비는

$4a : 8a = 1 : 2$

답 1 : 2

03 해결단계

(1)	❶ 단계	$\overline{BE}$와 $\overline{EC}$의 길이를 각각 구한다.
	❷ 단계	$\overline{BF}$와 $\overline{AF}$의 길이를 각각 구한다.
(2)	❸ 단계	$\overline{AH}$의 길이를 구한다.
(3)	❹ 단계	$\overline{BG} : \overline{DG}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

(1) $\overline{BE}:\overline{EC}=5:3$이므로

$\overline{BE}=16\times\frac{5}{8}=10\,(cm)$, $\overline{EC}=16\times\frac{3}{8}=6\,(cm)$

$\triangle BEF$와 $\triangle CDE$에서

$\angle EBF=\angle DCE=90^\circ$, $\angle BEF=90^\circ-\angle DEC=\angle CDE$

$\therefore$ $\triangle BEF \backsim \triangle CDE$ (AA 닮음)

즉, $\overline{BF}:\overline{CE}=\overline{BE}:\overline{CD}$에서 $\overline{BF}:6=10:12$

$12\overline{BF}=60$ $\quad\therefore$ $\overline{BF}=5$ cm

$\therefore$ $\overline{AF}=\overline{AB}-\overline{BF}=12-5=7\,(cm)$

(2) $\triangle AHF$와 $\triangle BEF$에서

$\angle HAF=\angle EBF=90^\circ$, $\angle AHF=\angle BEF$ ($\because$ 엇각)

$\therefore$ $\triangle AHF \backsim \triangle BEF$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AH}:\overline{BE}=\overline{AF}:\overline{BF}$에서 $\overline{AH}:10=7:5$

$5\overline{AH}=70$ $\quad\therefore$ $\overline{AH}=14$ cm

(3) $\triangle EBG$와 $\triangle HDG$에서

$\angle BGE=\angle DGH$ ($\because$ 맞꼭지각),

$\angle BEG=\angle DHG$ ($\because$ 엇각)

따라서 $\triangle EBG \backsim \triangle HDG$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BG}:\overline{DG}=\overline{BE}:\overline{DH}$

$=\overline{BE}:(\overline{AH}+\overline{AD})$

$=10:(14+16)$

$=10:30=1:3$

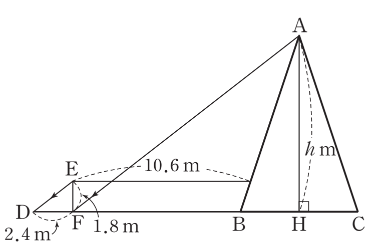
답 (1) 7 cm (2) 14 cm (3) 1 : 3

04 해결단계

(1)	❶ 단계	빛이 평행함을 이용하여 평행선을 긋고 닮음인 삼각형을 찾는다.
	❷ 단계	점 H로부터 학생이 서 있는 곳까지의 거리를 h를 사용하여 나타낸다.
(2)	❸ 단계	피라미드를 바라보는 학생의 시선이 바닥과 평행함을 이용하여 평행선을 긋고 닮음인 삼각형을 찾는다.
	❹ 단계	피라미드의 높이를 구한다.

(1) 다음 그림과 같이 학생의 그림자의 끝을 D, 학생의 눈높이를 E, 학생이 서 있는 곳을 F라 하면 빛은 평행하므로

$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AF}$



$\triangle DEF$와 $\triangle FAH$에서

$\angle EDF=\angle AFH$ ($\because$ 동위각), $\angle EFD=\angle AHF=90^\circ$

$\therefore$ $\triangle DEF \backsim \triangle FAH$ (AA 닮음)

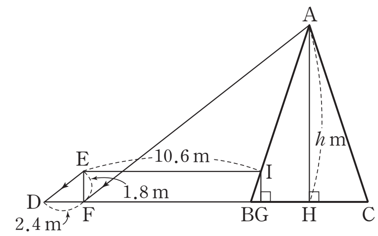
즉, $\overline{DF}:\overline{FH}=\overline{EF}:\overline{AH}$이므로

$2.4:\overline{FH}=1.8:h$, $1.8\overline{FH}=2.4h$

$\therefore$ $\overline{FH}=\frac{4}{3}h$ m

즉, 점 H로부터 학생이 서 있는 곳까지의 거리는 $\frac{4}{3}h$ m이다.

(2) 다음 그림과 같이 학생의 시선이 피라미드와 만나는 점을 I라 하고, 점 I에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 G라 하자.



$\overline{AH}:\overline{BC}=3:2$이므로 $h:\overline{BC}=3:2$

$\therefore$ $\overline{BC}=\frac{2}{3}h$ m

이때, $\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}h=\frac{1}{3}h$ (m)이므로

$\overline{FB}=\overline{FH}-\overline{BH}=\frac{4}{3}h-\frac{1}{3}h=h$ (m)

$\overline{IG}\,/\!/\,\overline{AH}$이므로 $\triangle IBG \backsim \triangle ABH$ (AA 닮음)

이때, $\overline{AH}:\overline{BH}=3:1$이므로 $\overline{IG}:\overline{BG}=3:1$

즉, $1.8:(10.6-h)=3:1$이므로

$3(10.6-h)=1.8$ $\quad\therefore$ $h=10$

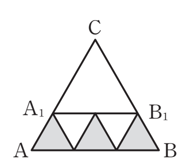
따라서 피라미드의 높이는 10 m이다.

답 (1) $\frac{4}{3}h$ m (2) 10 m

05 해결단계

❶ 단계	[1단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이를 구한다.
❷ 단계	[2단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이를 구한다.
❸ 단계	[3단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이를 구한다.
❹ 단계	[4단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이를 구한다.
❺ 단계	처음 정삼각형과 [4단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 닮음비를 구한다.

[1단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이는

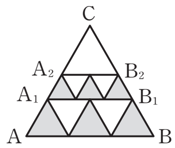


$\overline{AA_1}=\frac{1}{3}\overline{AB}$

$\therefore \overline{A_1B_1}=2\overline{AA_1}$

$=\frac{2}{3}\overline{AB}$

[2단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이는



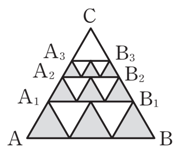
$\overline{A_1A_2}=\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\overline{AB}$

$=\frac{2}{9}\overline{AB}$

$\therefore \overline{A_2B_2}=2\overline{A_1A_2}$

$=\frac{4}{9}\overline{AB}$

[3단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이는



$\overline{A_2A_3}=\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\overline{AB}$

$=\frac{4}{27}\overline{AB}$

$\therefore \overline{A_3B_3}=2\overline{A_2A_3}$

$=\frac{8}{27}\overline{AB}$

즉, [4단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이는

$\overline{A_3A_4}=\frac{1}{3}\overline{A_3B_3}=\frac{1}{3}\times\frac{8}{27}\overline{AB}$

$=\frac{8}{81}\overline{AB}$

따라서 처음 정삼각형의 한 변의 길이는 $\overline{AB}$이고, [4단계]에서 새로 색칠되는 정삼각형 하나의 한 변의 길이는 $\frac{8}{81}\overline{AB}$이므로 구하는 닮음비는

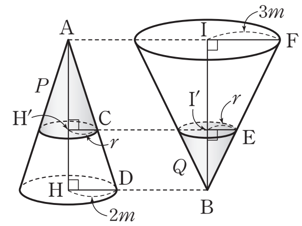
$\overline{AB}:\frac{8}{81}\overline{AB}=81:8$ 답 81 : 8

06 해결단계

❶ 단계	각 원뿔의 꼭짓점에서 밑면에 수선을 내리고 삼각형의 닮음을 이용하여 처음 원뿔과 새로 생긴 원뿔의 닮음비를 구한다.
❷ 단계	원뿔 A를 잘라 생기는 원뿔대의 높이와 원뿔 B를 잘라 생기는 원뿔의 높이가 같음을 이용하여 새로 만든 원뿔의 높이를 처음 원뿔의 높이로 나타낸다.
❸ 단계	$V_1=9$임을 이용하여 V_2의 값을 구한다.

두 원뿔 A, B의 밑면의 반지름의 길이의 비가 2 : 3이므로 각 원뿔의 반지름의 길이를 $2m$, $3m$ $(m>0)$이라 하고, 두 원뿔 A, B를 평면으로 잘라 생기는 원뿔을 각각 P, Q라 하자.

두 원뿔 A, B의 꼭짓점을 각각 A, B, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 수선이 두 원뿔 P, Q의 밑면과 만나는 점을 각각 H′, I′, 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 다음 그림과 같다.



$\triangle AHD \backsim \triangle AH'C$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AH}:\overline{AH'}=\overline{HD}:\overline{H'C}=2m:r$

즉, $r\times\overline{AH}=2m\times\overline{AH'}$이므로

$\overline{AH'}=\frac{r}{2m}\times\overline{AH}$

$\therefore \overline{HH'}=\overline{AH}-\frac{r}{2m}\times\overline{AH}$ ……㉠

또한, $\triangle BIF \backsim \triangle BI'E$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BI}:\overline{BI'}=\overline{IF}:\overline{I'E}=3m:r$

즉, $r\times\overline{BI}=3m\times\overline{BI'}$이므로

$\overline{BI'}=\frac{r}{3m}\times\overline{BI}$ ……㉡

이때, $\overline{HH'}=\overline{BI'}$이므로

㉠, ㉡에서

$\overline{AH}-\frac{r}{2m}\times\overline{AH}=\frac{r}{3m}\times\overline{AH}$ $\quad\therefore r=\frac{6}{5}m$

$\therefore \overline{AH'}=\frac{r}{2m}\times\overline{AH}=\frac{3}{5}\overline{AH}$, $\overline{BI'}=\frac{r}{3m}\overline{BI}=\frac{2}{5}\overline{BI}$

한편, 원뿔 P의 부피가 $V_1=9$이므로

$\frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times\frac{3}{5}\overline{AH}=9$ $\quad\therefore \overline{AH}=\frac{45}{\pi r^2}$

따라서 원뿔 Q의 부피는

$V_2=\frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times\frac{2}{5}\overline{BI}$

$=\frac{2}{15}\pi r^2\times\overline{AH}$ ($\because \overline{BI}=\overline{AH}$)

$=\frac{2}{15}\pi r^2\times\frac{45}{\pi r^2}=6$ 답 6

07 해결단계

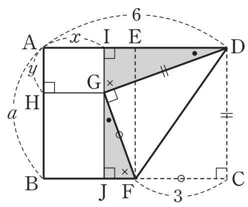
❶ 단계	$\overline{AB}^2$의 값을 구한다.
❷ 단계	$\triangle IGD$와 닮음인 삼각형을 찾는다.
❸ 단계	$\overline{AB}$, $\overline{AI}$, $\overline{AH}$의 길이 사이의 관계식을 세운다.
❹ 단계	$\overline{AI}$의 길이를 구한다.

$\overline{AB}=a$라 하면 □ABCD∽□AEFB이므로

$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AD}:\overline{AB}$

$a:3=6:a \qquad \therefore a^2=18$ ······㉠

다음 그림과 같이 $\overline{AI}=x$, $\overline{AH}=y$라 하고, 점 G에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 J라 하자.



△IGD와 △JFG에서 ∠DGF=∠DCF=90°이므로

∠DGI=90°−∠FGJ=∠GFJ,

∠GID=∠FJG=90°

∴ △IGD∽△JFG (AA 닮음)

즉, $\overline{IG}:\overline{JF}=\overline{GD}:\overline{FG}$에서

$y:(3-x)=a:3 \qquad \therefore y=a-\dfrac{a}{3}x$ ······㉡

또한, $\overline{ID}:\overline{JG}=\overline{GD}:\overline{FG}$에서

$(6-x):(a-y)=a:3 \qquad \therefore 18-3x=a^2-ay$ ······㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$18-3x=a^2-a\left(a-\dfrac{a}{3}x\right)$, $18-3x=\dfrac{a^2}{3}x$

$18-3x=6x$ (∵ ㉠)

$9x=18 \qquad \therefore x=2$

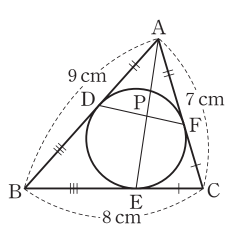
$\therefore \overline{AI}=2$ **답** 2

08 해결단계

❶ 단계	내접원과 각 변의 접점을 이용하여 $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{FC}$, $\overline{EC}$, $\overline{BE}$, $\overline{BD}$의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	점 A를 지나고 선분 BC와 평행한 직선, 직선 DF, 선분 BC의 연장선을 각각 긋는다.
❸ 단계	닮음인 삼각형을 찾는다.
❹ 단계	$\overline{AP}:\overline{PE}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

세 점 D, E, F가 △ABC의 각 변과 내접원의 접점이므로

$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{FC}=\overline{EC}$, $\overline{DB}=\overline{EB}$



이때, $\overline{EC}=\overline{CF}=a$ cm라 하면

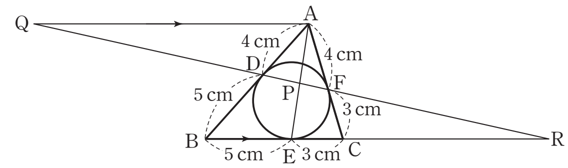
$\overline{AD}=\overline{AF}=7-a$ (cm), $\overline{BD}=\overline{BE}=8-a$ (cm)

$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}$이므로

$(7-a)+(8-a)=9$, $2a=6 \qquad \therefore a=3$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AF}=4$ cm, $\overline{FC}=\overline{EC}=3$ cm, $\overline{DB}=\overline{EB}=5$ cm

세 점 D, P, F를 지나는 직선이 $\overline{BC}$에 평행하면서 점 A를 지나는 직선과 만나는 점을 Q, 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 R라 하면 다음 그림과 같다.



△QFA와 △RFC에서

∠AQF=∠CRF (∵ 엇각), ∠AFQ=∠CFR (∵ 맞꼭지각)

∴ △QFA∽△RFC (AA 닮음)

즉, $\overline{AQ}:\overline{CR}=\overline{AF}:\overline{CF}=4:3$이므로

$\overline{AQ}=4k$, $\overline{CR}=3k$ $(k>0)$라 하자.

또한, △QDA와 △RDB에서

∠DQA=∠DRB (∵ 엇각), ∠ADQ=∠BDR (∵ 맞꼭지각)

∴ △QDA∽△RDB (AA 닮음)

즉, $\overline{AQ}:\overline{BR}=\overline{AD}:\overline{BD}=4:5$에서

$4k:(8+3k)=4:5$

$32+12k=20k$, $8k=32 \qquad \therefore k=4$

$\therefore \overline{AQ}=16$ cm, $\overline{CR}=12$ cm

이때, △APQ와 △EPR에서

∠AQP=∠ERP (∵ 엇각), ∠APQ=∠EPR (∵ 맞꼭지각)

따라서 △APQ∽△EPR (AA 닮음)이므로

$\overline{AP}:\overline{PE}=\overline{AQ}:\overline{ER}$

$=16:(3+12)=16:15$ **답** 16 : 15

미리보는 학력평가 p. 52

1 ⑤ 2 ③ 3 ④

1

구 모양의 두 구슬 A, B의 지름의 길이가 각각 8 cm, 12 cm이므로 닮음비는

$8:12=2:3$

즉, 두 구슬 A, B의 부피의 비는

$2^3:3^3=8:27$

한편, 두 구슬 A, B의 가격은 구슬의 부피에 비례하므로

$a:b=8:27 \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{27}{8}$ 답 ⑤

| 다른풀이 |

지름의 길이가 8 cm, 12 cm인 구 모양의 두 구슬 A, B의 반지름의 길이는 각각 4 cm, 6 cm이다.

즉, 구슬 A의 부피는

$\frac{4}{3}\times\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi\ (\text{cm}^3)$

또한, 구슬 B의 부피는

$\frac{4}{3}\times\pi\times6^3=288\pi\ (\text{cm}^3)$

두 구슬 A, B의 가격은 구슬의 부피에 비례하므로

$a=\frac{256}{3}\pi k,\ b=288\pi k\ (k>0)$

$\therefore \frac{b}{a}=288\pi k\div\frac{256}{3}\pi k=\frac{27}{8}$

blacklabel 특강 필수개념

원과 구의 닮음

임의의 두 원과 임의의 두 구는 각각 항상 닮음이다.
또한, 원과 구의 닮음비는 반지름의 길이 또는 지름의 길이의 비와 같다.

2

두 삼각형 ABC와 DCE를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전시킨 입체도형의 부피를 각각 V_1, V_2라 하자.

삼각형 ABC를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전시킨 입체도형은 밑면의 반지름의 길이가 2로 같고 높이의 합이 3인 두 원뿔의 밑면을 붙여 놓은 모양이므로

$V_1=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times3=4\pi$

이때, 닮은 두 삼각형 ABC와 DCE의 닮음비가

$\overline{BC}:\overline{CE}=3:6=1:2$

이므로 $V_1:V_2=1^3:2^3=1:8$

따라서 $V_2=8V_1=32\pi$이므로 구하는 부피는

$V_1+V_2=4\pi+32\pi=36\pi$ 답 ③

| 다른풀이 |

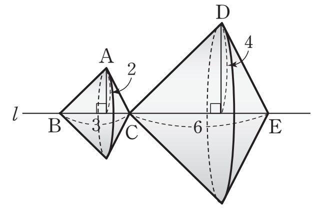
닮은 두 삼각형 ABC와 DCE의 닮음비가

$\overline{BC}:\overline{CE}=3:6=1:2$

이므로 점 D에서 직선 l까지의 거리를 x라 하면

$2:x=1:2 \qquad \therefore x=4$

두 삼각형 ABC와 DCE를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전시킨 입체도형은 다음 그림과 같다.



즉, 밑면의 반지름의 길이가 2로 같고 높이의 합이 3인 두 원뿔의 밑면을 붙여 놓은 입체도형과 밑면의 반지름의 길이가 4로 같고 높이의 합이 6인 두 원뿔의 밑면을 붙여 놓은 입체도형으로 이루어져 있으므로 구하는 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times3+\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times6=4\pi+32\pi=36\pi$

3

$\overline{AB}/\!/\overline{DF}$이므로 $\angle DFA=\angle BAF$ ($\because$ 엇각)

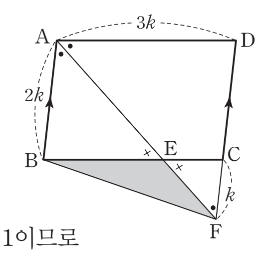
그러므로 삼각형 DAF는 $\overline{DA}=\overline{DF}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{AB}:\overline{AD}=2:3$이므로

$\overline{AB}=2k$, $\overline{AD}=3k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{CF}=\overline{DF}-\overline{DC}=\overline{DA}-\overline{AB}=k$

$=\boxed{\frac{1}{2}}\times\overline{AB}$



$\triangle$ABE와 $\triangle$FCE에서

$\angle BAE=\angle CFE$ ($\because$ 엇각),

$\angle AEB=\angle FEC$ ($\because$ 맞꼭지각)

이므로

$\triangle ABE \backsim \triangle FCE$ (AA 닮음)

두 삼각형의 닮음비가 $\overline{AB}:\overline{FC}=2:1$이므로

$\overline{AE}:\overline{FE}=2:1$

즉, $\overline{AF}:\overline{EF}=3:1$이므로 $\overline{EF}=\boxed{\frac{1}{3}}\times\overline{AF}$

한편, $\triangle$ABF와 $\triangle$ABD에서 밑변 AB는 공통이고 선분 AB와 DF는 평행하므로 높이가 같다.

즉, $\triangle$ABF와 $\triangle$ABD의 넓이는 같으므로

$\triangle ABF=\triangle ABD=\frac{1}{2}\square ABCD=\frac{1}{2}\times30=15$

또한, $\overline{EF}=\frac{1}{3}\overline{AF}$이므로

$\triangle BFE=\frac{1}{3}\triangle ABF=\frac{1}{3}\times15=\boxed{5}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=5$이므로

$abc=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times5=\frac{5}{6}$ 답 ④

06 닮음의 활용

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 54

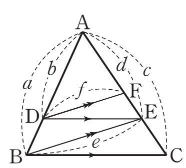
01 ① 02 ② 03 $\frac{16}{7}$ cm 04 ⑤ 05 ③
06 45 cm^2

01

$\triangle$AFG에서 $\overline{AD}:\overline{DF}=\overline{AE}:\overline{EG}$이므로
$\overline{AE}:\overline{EG}=3:2$
$\triangle$AHG에서 $\overline{AF}:\overline{FH}=\overline{AE}:\overline{EG}$이므로
$5:\overline{FH}=3:2$, $3\overline{FH}=10$
$\therefore \overline{FH}=\frac{10}{3}$, $\overline{AH}=5+\frac{10}{3}=\frac{25}{3}$
또한, $\triangle$AHC에서 $\overline{AF}:\overline{FH}=\overline{AG}:\overline{GC}$이므로
$\overline{AG}:\overline{GC}=3:2$
$\triangle$ABC에서 $\overline{AH}:\overline{HB}=\overline{AG}:\overline{GC}$이므로
$\frac{25}{3}:\overline{HB}=3:2$, $3\overline{HB}=\frac{50}{3}$ $\quad\therefore \overline{HB}=\frac{50}{9}$
$\therefore \frac{\overline{HB}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{50}{9}}{3}=\frac{50}{27}$ 답 ①

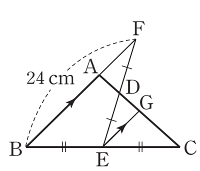
blacklabel 특강 필수개념

삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비의 응용
오른쪽 그림과 같은 $\triangle$ABC에서
$\overline{BC}/\!/\overline{DE}$, $\overline{BE}/\!/\overline{DF}$일 때,
$a:b=c:d=e:f$



02

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BF}/\!/\overline{EG}$가 되도록 $\overline{AC}$ 위에 점 G를 잡으면 $\triangle$ABC에서
$\overline{BE}=\overline{EC}$, $\overline{BA}/\!/\overline{EG}$이므로
$\overline{AG}=\overline{GC}$, $\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$



$\triangle$DFA와 $\triangle$DEG에서
$\overline{AF}/\!/\overline{EG}$이므로 $\angle$AFD$=\angle$GED ($\because$ 엇각),
$\overline{DF}=\overline{DE}$, $\angle$ADF$=\angle$GDE ($\because$ 맞꼭지각)
$\therefore \triangle$DFA$\equiv\triangle$DEG (ASA 합동)
이때, $\overline{AF}=\overline{GE}$이므로
$\overline{AB}=\overline{BF}-\overline{AF}=\overline{BF}-\overline{GE}$
$=\overline{BF}-\frac{1}{2}\overline{AB}=24-\frac{1}{2}\overline{AB}$
$\frac{3}{2}\overline{AB}=24$ $\quad\therefore \overline{AB}=16$ cm 답 ②

03

$\overline{AD}$가 $\angle$A의 이등분선이므로
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$
$8:\overline{AC}=4:2$, $4\overline{AC}=16$ $\quad\therefore \overline{AC}=4$ cm
$\overline{BE}$가 $\angle$B의 이등분선이므로
$\overline{AE}:\overline{CE}=\overline{BA}:\overline{BC}$에서
$\overline{AE}:\overline{CE}=8:6=4:3$
$\therefore \overline{AE}=\frac{4}{7}\overline{AC}=\frac{4}{7}\times4=\frac{16}{7}$ (cm) 답 $\frac{16}{7}$ cm

04

$\triangle$ABC에서 $\overline{EN}/\!/\overline{BC}$이므로
$\overline{AE}:\overline{AB}=\overline{EN}:\overline{BC}$
이때, $\overline{AE}=2\overline{EB}$이므로 $\overline{AE}:\overline{EB}=2:1$
$\therefore \overline{AE}:\overline{AB}=2:3$
즉, $2:3=\overline{EN}:15$이므로 $3\overline{EN}=30$
$\therefore \overline{EN}=10$ cm
또한, $\triangle$ABD에서 $\overline{EM}/\!/\overline{AD}$이므로
$\overline{AD}:\overline{EM}=3:1$, $9:\overline{EM}=3:1$
$3\overline{EM}=9$ $\quad\therefore \overline{EM}=3$ (cm)
$\therefore \overline{MN}=\overline{EN}-\overline{EM}=10-3=7$ (cm) 답 ⑤

| 다른풀이 |
$\overline{AE}:\overline{EB}=2:1$이므로
$\overline{EF}=\frac{9\times1+15\times2}{2+1}=\frac{39}{3}=13$ (cm)
$\triangle$ABD에서 $\overline{EM}/\!/\overline{AD}$이므로
$\overline{AD}:\overline{EM}=\overline{AB}:\overline{EB}=3:1$, $9:\overline{EM}=3:1$
$3\overline{EM}=9$ $\quad\therefore \overline{EM}=3$ cm
또한, 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AD}/\!/\overline{EF}/\!/\overline{BC}$이므로
$\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{DF}:\overline{FC}=2:1$
$\triangle$ACD에서 $\overline{NF}/\!/\overline{AD}$이므로
같은 방법으로 $\overline{NF}=3$ cm
따라서 $\overline{MN}$의 길이는
$\overline{MN}=13-3-3=7$ (cm)

05

점 G가 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times 18=6\,(\text{cm})$

$\overline{BD}/\!/\overline{EF}$이므로 $\overline{BG}:\overline{GF}=\overline{GD}:\overline{EG}$에서

$2:1=6:\overline{EG}$

$2\overline{EG}=6 \qquad \therefore\ \overline{EG}=3\text{ cm}$ **답** ③

06

점 G가 △ADC의 무게중심이므로

$\square FDEG=\frac{1}{3}\triangle ADC$

$\therefore\ \triangle ADC=3\square FDEG=3\times 10=30\,(\text{cm}^2)$

이때, $\triangle ABC:\triangle ADC=\overline{BC}:\overline{DC}$이므로

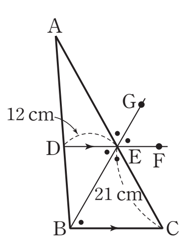
$\triangle ABC:30=3:2,\ 2\triangle ABC=90$

$\therefore\ \triangle ABC=45\text{ cm}^2$ **답** 45 cm^2

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 55~57

01 ③	**02** $28:16:33$		**03** 22	**04** ③
05 $\overline{CF}=16\text{ cm},\ \overline{DG}=25\text{ cm}$			**06** ③	**07** ①
08 $3:8$	**09** 2	**10** ①	**11** 81 cm^2	**12** ④
13 ②	**14** $\frac{2}{3}\text{ cm}$	**15** ③	**16** $5:2$	**17** ④
18 3				

01



오른쪽 그림에서

$\angle GEF=\angle DEB$ (∵ 맞꼭지각),

$\angle AEG=\angle CEB$ (∵ 맞꼭지각)

$\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이므로

$\angle DEB=\angle EBC$ (∵ 엇각)

$\therefore\ \angle CEB=\angle EBC$

즉, △CEB는 $\overline{CB}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=\overline{EC}=21\text{ cm}$

△ABC에서 $\overline{DE}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{AC}$이므로

$12:21=\overline{AE}:\overline{AC}$

$4:7=\overline{AE}:(\overline{AE}+21),\ 7\overline{AE}=4(\overline{AE}+21)$

$3\overline{AE}=84 \qquad \therefore\ \overline{AE}=28\text{ cm}$ **답** ③

02

$\overline{CE}:\overline{DE}=3:4$이고 $\overline{AB}/\!/\overline{DE}$이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AF}:\overline{FE}=7:4$

또한, $\overline{AB}/\!/\overline{CE}$이므로 △ABG에서

$\overline{EG}:\overline{GA}=\overline{CE}:\overline{AB}=3:7$

이때, $\overline{EG}=a$라 하면 $\overline{GA}=\frac{7}{3}a$이고

$\overline{GA}=\overline{AE}+\overline{EG}$이므로

$\overline{AE}=\overline{GA}-\overline{EG}=\frac{7}{3}a-a=\frac{4}{3}a$

$\therefore\ \overline{AF}=\frac{7}{7+4}\overline{AE}=\frac{7}{11}\times\frac{4}{3}a=\frac{28}{33}a,$

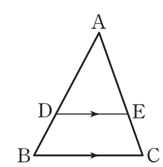
$\overline{FE}=\frac{4}{7+4}\overline{AE}=\frac{4}{11}\times\frac{4}{3}a=\frac{16}{33}a$

$\therefore\ \overline{AF}:\overline{FE}:\overline{EG}=\frac{28}{33}a:\frac{16}{33}a:a$

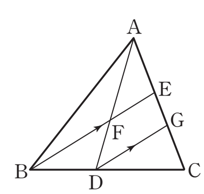
$=28:16:33$ **답** $28:16:33$

blacklabel 특강 오답피하기

삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비에서
$\overline{AD}:\overline{DB}\neq\overline{DE}:\overline{BC}$임에 주의하여 문제를 푼다.



03



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}/\!/\overline{DG}$가 되도록

$\overline{AC}$ 위에 점 G를 잡으면 △BCE에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=3:4$이므로

$\overline{EG}:\overline{CG}=3:4$

이때, $\overline{AE}:\overline{CE}=5:7$이므로

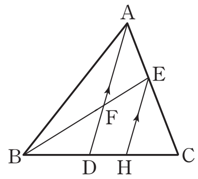
$\overline{AE}:\overline{EG}=5:3$

즉, $\triangle ADG$에서 $\overline{AF}:\overline{FD}=\overline{AE}:\overline{EG}=5:3$이므로

$a=5$, $b=3$

(가)

같은 방법으로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}/\!/\overline{EH}$가 되도록 $\overline{BC}$ 위에 점 H를 잡으면 $\triangle ACD$에서



$\overline{AE}:\overline{EC}=5:7$이므로 $\overline{DH}:\overline{HC}=5:7$

이때, $\overline{BD}:\overline{CD}=3:4$이므로

$\overline{BD}:\overline{DH}=3:\left(\frac{5}{12}\times4\right)=9:5$

즉, $\triangle BHE$에서 $\overline{BF}:\overline{FE}=\overline{BD}:\overline{DH}=9:5$이므로

$c=9$, $d=5$

(나)

따라서 $a=5$, $b=3$, $c=9$, $d=5$이므로

$a+b+c+d=22$

(다)

답 22

단계	채점 기준	배점
(가)	$\overline{BE}$와 평행한 보조선을 그어 a, b의 값을 구한 경우	40%
(나)	$\overline{AD}$와 평행한 보조선을 그어 c, d의 값을 구한 경우	40%
(다)	$a+b+c+d$의 값을 구한 경우	20%

04

$\triangle AFE$에서 $\overline{AG}=\overline{GF}$이고 $\overline{AD}=\overline{DE}$이므로

$\overline{DG}/\!/\overline{EF}$, $\overline{DG}=\frac{1}{2}\overline{EF}$

$\triangle BCD$에서 $\overline{DB}/\!/\overline{EF}$이고 $\overline{DE}=\overline{EC}$이므로

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{DB}$ $\quad\therefore\ \overline{DB}=2\overline{EF}$

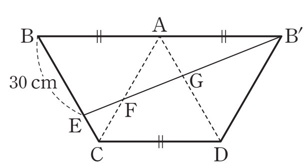
이때, $\overline{DB}=\overline{BG}+\overline{DG}$이므로 $2\overline{EF}=9+\frac{1}{2}\overline{EF}$

$\frac{3}{2}\overline{EF}=9$ $\quad\therefore\ \overline{EF}=6\text{ cm}$

답 ③

05

정사면체 A−BCD의 전개도의 일부를 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overline{BC}=40\text{ cm}$이고, $\overline{BE}=30\text{ cm}$이므로 $\overline{EC}=10\text{ cm}$

$\triangle BEB'$에서 $\overline{BA}=\overline{AB'}$, $\overline{BE}/\!/\overline{AG}$이므로

$\overline{AG}=\frac{1}{2}\overline{BE}=\frac{1}{2}\times30=15\text{ (cm)}$

$\therefore\ \overline{DG}=\overline{AD}-\overline{AG}=40-15=25\text{ (cm)}$

또한, $\overline{CE}:\overline{AG}=\overline{CF}:\overline{AF}$이므로

$\overline{CF}:\overline{AF}=10:15=2:3$

$\therefore\ \overline{CF}=\frac{2}{2+3}\overline{AC}=\frac{2}{5}\times40=16\text{ (cm)}$

답 $\overline{CF}=16\text{ cm}$, $\overline{DG}=25\text{ cm}$

06

$\triangle AEC$에서 $\overline{AB}=\overline{BE}$, $\overline{AO}=\overline{OC}$이므로 $\overline{BO}/\!/\overline{EC}$

이때, $\angle BOE=\angle OEC$ ($\because$ 엇각)이므로 $\triangle BEO$는 $\overline{BE}=\overline{BO}$인 이등변삼각형이다.

즉, $\overline{BE}=\overline{BO}=\overline{BA}$에서 점 B는 $\triangle AEO$의 외심이므로

$\angle AOE=90^\circ$

$\therefore\ \angle EAO+\angle AEO=90^\circ$ ……㉠

한편, $\angle BOE=\angle x$라 하면 $\angle AEO=\angle x$이고,

$\angle AEO:\angle EAO=2:7$이므로 $2\angle EAO=7\angle AEO$

$\therefore\ \angle EAO=\frac{7}{2}\angle AEO=\frac{7}{2}\angle x$

㉠에서

$\frac{7}{2}\angle x+\angle x=90^\circ$, $\frac{9}{2}\angle x=90^\circ$ $\quad\therefore\ \angle x=20^\circ$

즉, $\angle BOE=20^\circ$

답 ③

07

$\overline{AE}$가 $\angle BAC$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{CE}=8:6=4:3$

즉, $\triangle ABE:\triangle ACE=\overline{BE}:\overline{CE}=4:3$

$\triangle ACE=21\text{ cm}^2$이므로

$\triangle ABE:21=4:3$

$3\triangle ABE=84$ $\quad\therefore\ \triangle ABE=28\text{ cm}^2$

한편, $\overline{AD}$가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=8:6=4:3$

즉, $\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{DC}=4:3$

$\triangle ABC=\triangle ABE-\triangle ACE=28-21=7\text{ (cm}^2\text{)}$이므로

$\triangle ADC=\frac{3}{7}\times7=3\text{ (cm}^2\text{)}$

따라서 $\triangle ADE=\triangle ADC+\triangle ACE$이므로

$\triangle ADE=3+21=24\,(\text{cm}^2)$ 답 ①

08

$\overline{AD}$가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=8:12=2:3$

이때, $\overline{BC}=15$이므로

$\overline{BD}=\frac{2}{5}\times 15=6$, $\overline{DC}=\frac{3}{5}\times 15=9$

삼각형 ACD에서

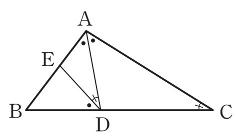
$\angle ADB=\angle CAD+\angle ACD$

$=\angle CAD+\angle ADE$ ($\because$ $\angle ACD=\angle ADE$)

$=\angle DAE+\angle ADE$

에서 $\angle ADB-\angle ADE=\angle DAE$이므로

$\angle EDB=\angle DAE$



$\triangle ABD$와 $\triangle DBE$에서

$\angle DAB=\angle EDB$, $\angle B$는 공통이므로 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 서로 같다.

$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle DBE$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BD}:\overline{BE}$에서 $8:6=6:\overline{BE}$

$8\overline{BE}=36$ $\quad\therefore$ $\overline{BE}=\frac{9}{2}$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$\overline{BD}:\overline{CD}=2:3$이므로

$\triangle ACD=\frac{3}{5}S$이고,

$\overline{AE}:\overline{BE}=(\overline{AB}-\overline{BE}):\overline{BE}$

$=\left(8-\frac{9}{2}\right):\frac{9}{2}=7:9$

$\therefore$ $\triangle BDE=\frac{9}{16}\times\left(S-\frac{3}{5}S\right)=\frac{9}{40}S$

따라서 $\triangle BDE:\triangle ACD=\frac{9}{40}S:\frac{3}{5}S=3:8$ 답 3 : 8

09

삼각형 ACF에서

$\angle CFD=\angle CAF+\angle ACF$

또한, 삼각형 ABD에서

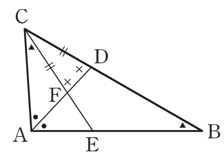
$\angle CDF=\angle BAD+\angle ABD$

이때, 삼각형 CDF는 이등변삼각형이므로

$\angle CFD=\angle CDF$

즉, $\angle CAF+\angle ACF=\angle BAD+\angle ABD$이므로

$\angle ACF=\angle ABD$ ($\because$ $\angle CAF=\angle BAD$)



$\triangle ACF$와 $\triangle ABD$에서

$\angle CAF=\angle BAD$, $\angle ACF=\angle ABD$이므로 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 서로 같다.

$\therefore$ $\triangle ACF \backsim \triangle ABD$ (AA 닮음)

$\overline{AF}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서

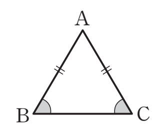
$\overline{AF}:5=6:10$, $10\overline{AF}=30$ $\quad\therefore$ $\overline{AF}=3$

$\therefore$ $\overline{FD}=\overline{AD}-\overline{AF}=5-3=2$ 답 2

blacklabel 특강 필수개념

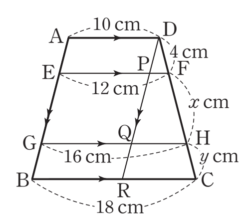
이등변삼각형의 성질 — 두 밑각의 크기

이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.
즉, 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이면 $\angle B=\angle C$가 성립한다.



10

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$와 평행한 선분을 그었을 때 $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.



$\triangle DQH$에서 $\overline{PF}/\!/\overline{QH}$이므로

$\overline{PF}:\overline{QH}=\overline{DF}:\overline{DH}$

$2:6=4:(4+x)$, $8+2x=24$

$2x=16$ $\quad\therefore$ $x=8$

$\triangle DRC$에서 $\overline{PF}/\!/\overline{RC}$이므로

$\overline{PF}:\overline{RC}=\overline{DF}:\overline{DC}$

$2:8=4:(12+y)$, $24+2y=32$

$2y=8$ $\quad\therefore$ $y=4$

$\therefore$ $2x-3y=16-12=4$ 답 ①

11

$\triangle ABE$와 $\triangle CDE$에서

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$가 모두 $\overline{BC}$에 수직이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

즉, $\angle BAC=\angle ACD$ ($\because$ 엇각),

$\angle AEB=\angle CED$ ($\because$ 맞꼭지각)

따라서 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 서로 같다.

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle CDE$ (AA 닮음)

이때, $\overline{AB}:\overline{CD}=12:36=1:3$이므로

두 삼각형 ABE, CDE의 닮음비는 $1:3$이다.

즉, $\overline{BF}:\overline{FC}=1:3$이므로

$\overline{BF}:\overline{BC}=\overline{EF}:\overline{CD}$에서

$1:4=\overline{EF}:36 \qquad \therefore \overline{EF}=9\text{ cm}$

이때, $\overline{BF}=\dfrac{1}{1+3}\times24=6\,(\text{cm})$이므로

$\triangle BFE=\dfrac{1}{2}\times6\times9=27\,(\text{cm}^2)$

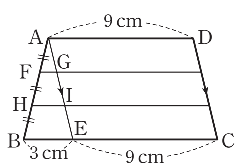
$\triangle AED=\triangle ABD-\triangle ABE$

$\qquad=\dfrac{1}{2}\times12\times24-\dfrac{1}{2}\times12\times6=108\,(\text{cm}^2)$

따라서 $\triangle BFE$와 $\triangle AED$의 넓이의 차는

$108-27=81\,(\text{cm}^2)$ 답 81 cm^2

12



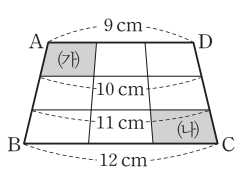
□ABCD는 등변사다리꼴이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나고 $\overline{CD}$에 평행한 직선을 그어 교점을 나타내면 $\overline{AF}=\overline{FH}=\overline{HB}$이고

$\overline{FG}/\!/\overline{HI}/\!/\overline{BE}$이므로

$\overline{AF}:\overline{AH}:\overline{AB}=\overline{FG}:\overline{HI}:\overline{BE}$

$\overline{FG}:\overline{HI}:3=1:2:3$

$\therefore \overline{FG}=1\text{ cm},\ \overline{HI}=2\text{ cm}$



또한, 오른쪽 그림에서 9개의 부분은 모두 높이가 같은 사다리꼴이므로 높이를 h cm라 하면

(가)의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times h\times\left(3+\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{19}{6}h\,(\text{cm}^2)$

(나)의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times h\times\left(\dfrac{11}{3}+4\right)=\dfrac{23}{6}h\,(\text{cm}^2)$

즉, (가) 부분과 (나) 부분의 넓이의 비는 $\dfrac{19}{6}h:\dfrac{23}{6}h=19:23$

따라서 $a=19,\ b=23$이므로

$a+b=42$ 답 ④

13

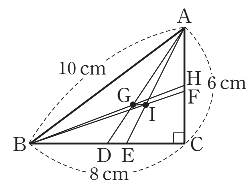
② $\triangle PCP'$과 $\triangle GCG'$에서

$\overline{CG}:\overline{CP}=\overline{CG'}:\overline{CP'}=1:3$, $\angle PCP'$은 공통이므로

$\triangle PCP' \backsim \triangle GCG'$ (SAS 닮음)

$\therefore \overline{GG'}:\overline{PP'}=1:3$ 답 ②

14



오른쪽 그림에서 $\overline{AE}$가 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BE}:\overline{EC}$

즉, $\overline{BE}:\overline{EC}=10:6=5:3$이므로

$\overline{BE}=\dfrac{5}{8}\overline{BC}=\dfrac{5}{8}\times8=5\,(\text{cm})$,

$\overline{EC}=\dfrac{3}{8}\overline{BC}=\dfrac{3}{8}\times8=3\,(\text{cm})$

(가)

또한, $\triangle ABE$에서 $\overline{BI}$가 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{BA}:\overline{BE}=\overline{AI}:\overline{EI}$

$\therefore \overline{AI}:\overline{EI}=10:5=2:1$ ……㉠

(나)

한편, 점 G는 무게중심이므로 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$ ……㉡

(다)

㉠, ㉡에서 $\overline{AI}:\overline{EI}=\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$

즉, $\triangle ADE$에서

$\overline{GI}/\!/\overline{DE}$, $\overline{GI}:\overline{DE}=2:3$

$\therefore \overline{DE}=\overline{BE}-\overline{BD}=5-4=1\,(\text{cm})$

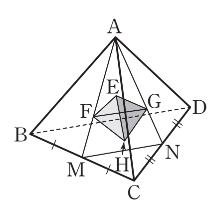
$\therefore \overline{GI}=\dfrac{2}{3}\overline{DE}=\dfrac{2}{3}\times1=\dfrac{2}{3}\,(\text{cm})$

(라)

답 $\dfrac{2}{3}$ cm

단계	채점 기준	배점
(가)	$\overline{BE}$와 $\overline{EC}$의 길이를 각각 구한 경우	20%
(나)	삼각형에서 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{AI}:\overline{EI}$를 구한 경우	30%
(다)	삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{AG}:\overline{GD}$를 구한 경우	20%
(라)	$\overline{GI}$의 길이를 구한 경우	30%

15



오른쪽 그림에서 두 직선 AF와 AG가 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$와 만나는 점을 각각 M, N이라 하자.

$\triangle AMN$에서

$\overline{AF}:\overline{AM}=\overline{AG}:\overline{AN}=2:3$이므로

$\overline{FG}:\overline{MN}=2:3 \qquad \therefore \overline{FG}=\dfrac{2}{3}\overline{MN}$

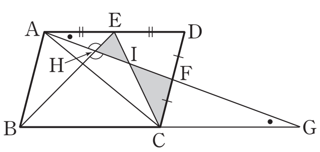
또한, $\triangle CBD$에서 $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$이므로

$\overline{FG}=\dfrac{2}{3}\overline{MN}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}$

즉, 정사면체 E$-$FGH와 정사면체 A$-$BCD의 한 모서리의 길이의 비가 $1:3$이므로 닮음비는 $1:3$이고, 부피의 비는
$1^3:3^3=1:27$이다.
따라서 정사면체 A$-$BCD의 부피가 1080 cm^3이므로 정사면체 E$-$FGH의 부피는

$1080\times\frac{1}{27}=40\,(\text{cm}^3)$ 답 ③

16



위의 그림에서 점 I는 $\triangle$ACD의 무게중심이므로
$\triangle\text{AEI}=\triangle\text{ICF}$ ……㉠
$\overline{\text{AF}}$의 연장선과 $\overline{\text{BC}}$의 연장선의 교점을 G라 하면
$\triangle\text{AFD}\equiv\triangle\text{GFC}$ (ASA 합동)이므로
$\overline{\text{AD}}=\overline{\text{GC}}$
또한, $\triangle\text{AHE}\backsim\triangle\text{GHB}$ (AA 닮음)이므로
$\overline{\text{AE}}:\overline{\text{GB}}=\overline{\text{AH}}:\overline{\text{GH}}$에서
$1:4=\overline{\text{AH}}:\overline{\text{GH}}$ $\quad\therefore\ \overline{\text{GH}}=4\overline{\text{AH}}$
$\overline{\text{AH}}+\overline{\text{GH}}=2\overline{\text{AF}}$이므로 $\overline{\text{AH}}+4\overline{\text{AH}}=2\overline{\text{AF}}$

$5\overline{\text{AH}}=2\overline{\text{AF}}$ $\quad\therefore\ \overline{\text{AH}}=\frac{2}{5}\overline{\text{AF}}$

한편, $\overline{\text{AI}}:\overline{\text{AF}}=2:3$이므로

$\overline{\text{AF}}=\frac{3}{2}\overline{\text{AI}}$

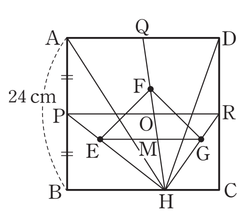
$\therefore\ \overline{\text{AH}}=\frac{2}{5}\overline{\text{AF}}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{2}\overline{\text{AI}}=\frac{3}{5}\overline{\text{AI}}$

즉, $\triangle\text{EHI}=\frac{2}{5}\triangle\text{AEI}=\frac{2}{5}\triangle\text{ICF}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \triangle\text{ICF}:\triangle\text{EHI}=\triangle\text{ICF}:\frac{2}{5}\triangle\text{ICF}=5:2$ 답 $5:2$

17

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{HQ}}$와 $\overline{\text{PR}}$가 만나는 점을 O, $\overline{\text{HQ}}$와 $\overline{\text{EG}}$가 만나는 점을 M이라 하면



$\overline{\text{HE}}:\overline{\text{EP}}=\overline{\text{HF}}:\overline{\text{FQ}}=\overline{\text{HG}}:\overline{\text{GR}}$
$=2:1$
이므로 $\triangle$PHR에서
$\overline{\text{EG}}/\!/\overline{\text{PR}}$, $\overline{\text{HM}}:\overline{\text{MO}}=2:1$
이때, $\overline{\text{HO}}=\overline{\text{OQ}}$이므로
$\overline{\text{HM}}:\overline{\text{MO}}:\overline{\text{OF}}:\overline{\text{FQ}}=2:1:1:2$
즉, $\overline{\text{HM}}=\overline{\text{FM}}$이므로 $\triangle\text{EFG}=\triangle\text{EHG}$
한편, $\triangle$EHG와 $\triangle$PHR의 닮음비는 $2:3$이고, 넓이의 비는
$2^2:3^2=4:9$이므로

$\triangle\text{EHG}=\frac{4}{9}\triangle\text{PHR}$

또한, $\triangle\text{PHR}=\frac{1}{2}\square\text{BCRP}=\frac{1}{4}\square\text{ABCD}$이므로

$\triangle\text{EHG}=\frac{4}{9}\times\frac{1}{4}\square\text{ABCD}=\frac{1}{9}\square\text{ABCD}$

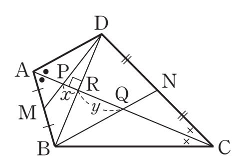
$\therefore\ \triangle\text{EFG}=\triangle\text{EHG}=\frac{1}{9}\square\text{ABCD}$

$=\frac{1}{9}\times24\times24=64\,(\text{cm}^2)$ 답 ④

18 해결단계

❶ 단계	$\overline{\text{BD}}$를 긋고 $\triangle\text{ADC}\equiv\triangle\text{ABC}$임을 이용하여 $\angle\text{BAC}=\angle\text{DAC}$, $\angle\text{ACB}=\angle\text{ACD}$임을 보인다.
❷ 단계	두 점 P, Q가 각각 $\triangle$ABD와 $\triangle$BCD의 무게중심임을 보인다.
❸ 단계	$\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PQ}}}$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{BD}}$를 그어 $\overline{\text{AC}}$와의 교점을 R라 하자.



$\triangle$ADC와 $\triangle$ABC에서
$\overline{\text{AC}}$는 공통, $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{AB}}$, $\overline{\text{DC}}=\overline{\text{BC}}$
$\therefore\ \triangle\text{ADC}\equiv\triangle\text{ABC}$ (SSS 합동)
즉, $\angle\text{BAC}=\angle\text{DAC}$, $\angle\text{ACB}=\angle\text{ACD}$
이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로
$\overline{\text{BD}}\perp\overline{\text{AR}}$, $\overline{\text{BR}}=\overline{\text{DR}}$
즉, 두 점 P, Q는 각각 $\triangle$ABD, $\triangle$BCD의 무게중심이므로
$\overline{\text{AP}}:\overline{\text{PR}}=\overline{\text{CQ}}:\overline{\text{QR}}=2:1$
이때, $\overline{\text{PR}}=x$, $\overline{\text{QR}}=y$, $\overline{\text{AC}}=a$라 하면
$\overline{\text{AR}}+\overline{\text{RC}}=\overline{\text{AC}}$에서

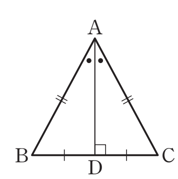
$3x+3y=a$, $x+y=\frac{1}{3}a$ $\quad\therefore\ \overline{\text{PQ}}=\frac{1}{3}a$

$\therefore\ \frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{PQ}}}=\frac{a}{\frac{1}{3}a}=3$ ($\because$ $a\neq0$) 답 3

blacklabel 특강 필수개념

이등변삼각형의 성질 – 꼭지각의 이등분선

이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.
즉, $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AC}}$인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{\text{AD}}$가 $\angle$A의 이등분선이면
$\overline{\text{AD}}\perp\overline{\text{BC}}$, $\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DC}}$



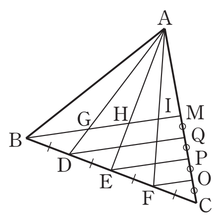
Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 58~59

01 (1) $63:35:15$ (2) $42:28:20:15$ **02** $5:12$
03 (1) $1:3$ (2) $2:3$ (3) $4:15$ **04** 16 **05** 15
06 (1) $45°$ (2) $\frac{9}{2}\ \text{cm}^2$ **07** $\frac{20}{3}$ **08** $\frac{34}{3}$

01 해결단계

(1)	❶단계	$\overline{FO}=a$라 하고 $\overline{GM}$, $\overline{HM}$, $\overline{IM}$을 a를 사용하여 나타낸다.
	❷단계	$\overline{GM}:\overline{HM}:\overline{IM}$을 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.
(2)	❸단계	$\overline{BG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$를 a를 사용하여 나타낸다.
	❹단계	$\overline{BG}:\overline{GH}:\overline{HI}:\overline{IM}$을 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 선분 BM에 평행하고 세 점 D, E, F를 지나는 세 선분을 그으면 각 선분이 AC와 만나는 세 점 Q, P, O는 선분 CM을 사등분한다.



이때, $\overline{FO}=a$라 하면
$\overline{EP}=2a$, $\overline{DQ}=3a$, $\overline{BM}=4a$
$\triangle$ADQ에서 $\overline{AM}:\overline{AQ}=\overline{GM}:\overline{DQ}$이므로
$4:5=\overline{GM}:3a$, $5\overline{GM}=12a$ $\quad\therefore \overline{GM}=\frac{12}{5}a$
$\triangle$AEP에서 $\overline{AM}:\overline{AP}=\overline{HM}:\overline{EP}$이므로
$4:6=\overline{HM}:2a$, $6\overline{HM}=8a$ $\quad\therefore \overline{HM}=\frac{4}{3}a$
$\triangle$AFO에서 $\overline{AM}:\overline{AO}=\overline{IM}:\overline{FO}$이므로
$4:7=\overline{IM}:a$, $7\overline{IM}=4a$ $\quad\therefore \overline{IM}=\frac{4}{7}a$
$\therefore \overline{GM}:\overline{HM}:\overline{IM}=\frac{12}{5}a:\frac{4}{3}a:\frac{4}{7}a=63:35:15$

(2) $\overline{BG}=\overline{BM}-\overline{GM}=4a-\frac{12}{5}a=\frac{8}{5}a$
$\overline{GH}=\overline{GM}-\overline{HM}=\frac{12}{5}a-\frac{4}{3}a=\frac{16}{15}a$
$\overline{HI}=\overline{HM}-\overline{IM}=\frac{4}{3}a-\frac{4}{7}a=\frac{16}{21}a$
$\therefore \overline{BG}:\overline{GH}:\overline{HI}:\overline{IM}=\frac{8}{5}a:\frac{16}{15}a:\frac{16}{21}a:\frac{4}{7}a$
$=42:28:20:15$

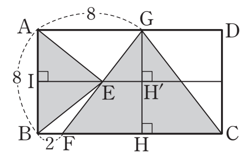
답 (1) $63:35:15$ (2) $42:28:20:15$

| 다른풀이 |
(2) (1)에서
$\overline{BM}:\overline{GM}:\overline{HM}:\overline{IM}=4a:\frac{12}{5}a:\frac{4}{3}a:\frac{4}{7}a$
$=105:63:35:15$
이므로
$\overline{BG}:\overline{GH}:\overline{HI}:\overline{IM}$
$=(\overline{BM}-\overline{GM}):(\overline{GM}-\overline{HM}):(\overline{HM}-\overline{IM}):\overline{IM}$
$=(105-63):(63-35):(35-15):15$
$=42:28:20:15$

02 해결단계

❶단계	점 E가 $\overline{GF}$의 중점임을 보인다.
❷단계	$\triangle$ABE와 $\triangle$GFC의 넓이를 각각 구한다.
❸단계	$\triangle$ABE와 $\triangle$GFC의 넓이의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 G에서 변 FC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{FH}=8-2=6$
이등변삼각형 EAB의 점 E에서 변 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면
$\overline{AI}=\overline{BI}$, $\overline{AG}/\!/\overline{IE}/\!/\overline{BF}$이므로 사다리꼴 ABFG에서
$\overline{GE}=\overline{EF}$
반직선 IE와 선분 GH의 교점을 H′이라 하면
$\triangle$GFH에서 $\overline{GE}=\overline{EF}$, $\overline{EH'}/\!/\overline{FH}$이므로
$\overline{EH'}=\frac{1}{2}\overline{FH}=\frac{1}{2}\times6=3$
즉, $\overline{IE}=\overline{IH'}-\overline{EH'}=8-3=5$이므로
$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times8\times5=20$,
$\triangle GFC=2\times\left(\frac{1}{2}\times6\times8\right)=48$
따라서 $\triangle$ABE와 $\triangle$GFC의 넓이의 비는
$\triangle ABE:\triangle GFC=20:48=5:12$ 답 $5:12$

03 해결단계

(1)	❶단계	$\triangle$BEF와 $\triangle$AED가 닮은 도형임을 보인다.
	❷단계	$\overline{BF}:\overline{AD}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.
(2)	❸단계	❷ 단계에서 구한 비를 이용하여 $\overline{FC}$의 길이를 구한다.
	❹단계	$\overline{FG}:\overline{GD}$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.
(3)	❺단계	삼각형 GFC의 넓이를 a라 하고 $\triangle$GDA, $\triangle$GCD의 넓이를 a를 사용하여 나타낸다.
	❻단계	$\triangle GFC:\triangle ACD$를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

(1) $\triangle$BEF와 $\triangle$AED에서
$\angle$E는 공통,
$\overline{BF}/\!/\overline{AD}$이므로 $\angle EFB=\angle EDA$ ($\because$ 동위각)
$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle AED$ (AA 닮음)
이때, $\overline{AB}=2$, $\overline{BE}=1$이므로
$\overline{BF}:\overline{AD}=\overline{EB}:\overline{EA}=\overline{EB}:(\overline{EB}+\overline{BA})=1:3$

(2) (1)에서 $\overline{BF}:\overline{AD}=1:3$이고, $\overline{AD}=2$이므로
$\overline{BF}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$\triangle CDF$에서 $\overline{CG}$는 $\angle FCD$의 이등분선이므로

$\overline{FG}:\overline{GD}=\overline{FC}:\overline{CD}=\frac{4}{3}:2=2:3$

(3) $\triangle GFC$와 $\triangle GDA$에서

$\overline{FC}/\!/\overline{AD}$이므로

$\angle FCG=\angle DAG$ ($\because$ 엇각), $\angle CFG=\angle ADG$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \triangle GFC \backsim \triangle GDA$ (AA 닮음)

(2)에서 $\overline{FG}:\overline{DG}=2:3$이므로

$\triangle GFC:\triangle GDA=2^2:3^2=4:9$

이때, $\triangle GFC=a$라 하면

$\triangle GDA=\frac{9}{4}a$ ……㉠

한편, 두 삼각형 GFC, GCD의 밑변을 각각 $\overline{FG}$, $\overline{GD}$라 하면 두 삼각형의 높이가 서로 같으므로

$\triangle GFC:\triangle GCD=\overline{FG}:\overline{GD}=2:3$

$\therefore \triangle GCD=\frac{3}{2}a$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\triangle ACD=\triangle GDA+\triangle GCD$

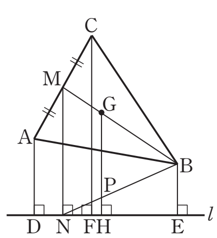
$=\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}a=\frac{15}{4}a$

$\therefore \triangle GFC:\triangle ACD=a:\frac{15}{4}a=4:15$

답 (1) 1 : 3 (2) 2 : 3 (3) 4 : 15

04 해결단계

❶ 단계	두 점 M, N을 정하고 $\overline{MN}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	점 P를 정하고 $\overline{PH}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{GP}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overline{GH}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 M이라 하자.

점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 N이라 하면 사다리꼴 ADFC에서

$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CF})$

$=\frac{1}{2}\times(12+28)=20$

점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 사다리꼴 BMNE에서

$\overline{NH}:\overline{HE}=\overline{MG}:\overline{GB}=1:2$

이때, $\overline{BN}$과 $\overline{GH}$의 교점을 P라 하면

$\triangle NEB$에서 $\overline{NH}:\overline{NE}=\overline{PH}:\overline{BE}$이므로

$1:3=\overline{PH}:8$, $3\overline{PH}=8$ $\therefore \overline{PH}=\frac{8}{3}$

또한, $\triangle BMN$에서 $\overline{BG}:\overline{BM}=\overline{GP}:\overline{MN}$이므로

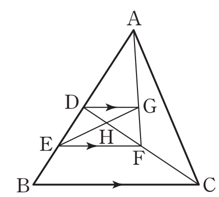
$2:3=\overline{GP}:20$, $3\overline{GP}=40$ $\therefore \overline{GP}=\frac{40}{3}$

$\therefore \overline{GH}=\overline{GP}+\overline{PH}=\frac{40}{3}+\frac{8}{3}=\frac{48}{3}=16$

답 16

05 해결단계

❶ 단계	선분 EF를 그리고 $\overline{DG}/\!/\overline{EF}/\!/\overline{BC}$임을 보인다.
❷ 단계	$\triangle DBC$의 넓이가 $\triangle DEF$의 넓이의 몇 배인지 구한다.
❸ 단계	$\triangle DEF$의 넓이가 $\triangle DHG$의 넓이의 몇 배인지 구한다.
❹ 단계	❷ 단계, ❸ 단계에서 구한 값을 이용하여 k의 값을 구한다.



위의 그림에서 두 점 E, F가 각각 선분 BD, CD의 중점이므로

$\overline{EF}/\!/\overline{BC}$ ……㉠

이때, $\overline{DG}/\!/\overline{BC}$이고 ㉠이 성립하므로

$\overline{EF}/\!/\overline{DG}$

$\triangle DBC$와 $\triangle DEF$에서

$\angle DBC=\angle DEF$ ($\because$ 동위각), $\angle DCB=\angle DFE$ ($\because$ 동위각)

이므로 $\triangle DBC \backsim \triangle DEF$ (AA 닮음)

$\overline{DB}:\overline{DE}=2:1$이므로

$\triangle DBC$와 $\triangle DEF$의 닮음비는 $2:1$이고,

넓이의 비는 $2^2:1^2=4:1$이다.

즉, $\triangle DBC=4\triangle DEF$ ……㉡

$\triangle ADG$와 $\triangle AEF$에서

$\angle ADG=\angle AEF$ ($\because$ 동위각), $\angle AGD=\angle AFE$ ($\because$ 동위각)

이므로 $\triangle ADG \backsim \triangle AEF$ (AA 닮음)

$\overline{DG}:\overline{EF}=\overline{AD}:\overline{AE}=2:3$

$\triangle DHG$와 $\triangle FHE$에서

$\angle HDG=\angle HFE$ ($\because$ 엇각), $\angle HGD=\angle HEF$ ($\because$ 엇각)

이므로 $\triangle DHG \backsim \triangle FHE$ (AA 닮음)

$\overline{GH}:\overline{EH}=\overline{DG}:\overline{FE}=2:3$이므로

$\triangle DHG:\triangle FHE=2^2:3^2=4:9$, $\triangle DEH:\triangle DHG=3:2$

즉, $\triangle FHE=\frac{9}{4}\triangle DHG$, $\triangle DEH=\frac{3}{2}\triangle DHG$

$\therefore \triangle DEF=\triangle DEH+\triangle FHE$

$=\frac{3}{2}\triangle DHG+\frac{9}{4}\triangle DHG$

$=\frac{15}{4}\triangle DHG$ ……㉢

㉡, ㉢에서

$\triangle DBC = 4 \times \frac{15}{4} \triangle DHG = 15 \triangle DHG$

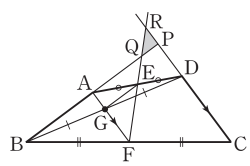
따라서 삼각형 DBC의 넓이는 삼각형 DHG의 넓이의 15배이므로

$k=15$ 답 15

06 해결단계

(1)	❶ 단계	∠GEF의 크기를 구한다.
(2)	❷ 단계	△AQF와 △PQR가 직각이등변삼각형임을 보인다.
	❸ 단계	△PQR의 넓이를 구한다.

(1) 오른쪽 그림의 △ABD에서 점 E는 $\overline{AD}$의 중점이고, 점 G는 $\overline{BD}$의 중점이므로 $\overline{AB} /\!/ \overline{EG}$



∴ $\angle ABD = \angle EGD$ (∵ 동위각) ……㉠

마찬가지로 △BCD에서 $\overline{GF} /\!/ \overline{CD}$이므로

$\angle BDC = \angle BGF$ (∵ 동위각) ……㉡

그런데 $\angle BDC - \angle ABD = 90°$이므로 ㉠, ㉡에서

$\angle BGF - \angle EGD = 90°$

이때, $\angle BGF + \angle EGF - \angle EGD = 180°$에서

$\angle EGF + 90° = 180°$ ∴ $\angle EGF = 90°$

또한, $\overline{EG} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{GF} = \frac{1}{2}\overline{CD}$이고 $\overline{AB} = \overline{CD}$이므로

$\overline{EG} = \overline{GF}$

따라서 △GEF는 직각이등변삼각형이므로 $\angle GEF = 45°$이다.

(2) $\overline{AG} /\!/ \overline{RC}$이므로 세 점 A, G, F는 한 직선 위에 있다.

△GEF와 △AQF에서 ∠F는 공통

$\overline{GE} /\!/ \overline{AB}$에서 $\overline{GE} /\!/ \overline{AQ}$이므로

$\angle FEG = \angle FQA$ (∵ 동위각)

∴ △GEF∽△AQF (AA 닮음)

△AQF와 △PQR에서

$\angle AQF = \angle PQR$ (∵ 맞꼭지각)

$\overline{AG} /\!/ \overline{RC}$에서 $\angle AFQ = \angle PRQ$ (∵ 엇각)

∴ △AQF∽△PQR (AA 닮음)

이때, (1)에서 △GEF는 직각이등변삼각형이므로 △AQF와 △PQR는 직각이등변삼각형이다.

∴ $\overline{AQ} = \overline{AF}$, $\overline{PQ} = \overline{PR}$

△BCP에서 $\overline{BF} = \overline{FC}$, $\overline{AF} /\!/ \overline{PC}$이므로

$\overline{AP} = \overline{AB} = 12$ cm,

$\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{PC} = \frac{1}{2} \times 18 = 9$ (cm)

따라서 $\overline{PQ} = \overline{AP} - \overline{AQ} = \overline{AP} - \overline{AF}$

$= 12 - 9 = 3$ (cm)

이므로 $\triangle PQR = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ (cm^2)

답 (1) 45° (2) $\frac{9}{2}$ cm^2

07 해결단계

❶ 단계	점 F가 삼각형 ABC의 무게중심임을 보인다.
❷ 단계	△ADI와 △CAI가 닮음임을 보이고 이를 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	△AHE와 △CHF가 합동임을 보이고 이를 이용하여 b의 값을 구한 후, ab의 값을 구한다.

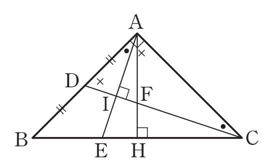
삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 점 H는 변 BC의 중점이다. 삼각형 ABC에서 두 중선 AH와 CD가 만나는 점이 F이므로 점 F는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

즉, $\overline{DF} : \overline{FC} = 1 : 2$이다.

△ADI에서 $\angle ADI + \angle DAI = 90°$이고,

△ACD에서 $\angle ADI + \angle ACD = 90°$이므로

$\angle DAI = \angle ACD$이고, $\angle ADI = \angle CAI$이다.



△ADI와 △CAI에서

$\angle DAI = \angle ACI$, $\angle ADI = \angle CAI$이므로

△ADI∽△CAI (AA 닮음)

$\overline{DI} : \overline{AI} = \overline{AD} : \overline{CA} = \overline{AI} : \overline{CI}$에서

$\overline{DI} : \overline{AI} = \frac{1}{2}\overline{AC} : \overline{CA} = \overline{AI} : \overline{CI}$이므로

$\overline{DI} : \overline{AI} = 1 : 2 = \overline{AI} : \overline{CI}$

∴ $\overline{DI} = \frac{1}{2}\overline{AI}$, $\overline{CI} = 2\overline{AI}$

∴ $\overline{CD} = \overline{DI} + \overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{AI} + 2\overline{AI} = \frac{5}{2}\overline{AI}$

즉, $\overline{FC} = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2}\overline{AI} = \frac{5}{3}\overline{AI}$이므로

$\overline{DI} : \overline{FC} = \frac{1}{2}\overline{AI} : \frac{5}{3}\overline{AI} = 3 : 10 = 1 : \frac{10}{3}$

∴ $a = \frac{10}{3}$

한편, $\angle AFI = \angle CFH$ (∵ 맞꼭지각)이고,

$\angle AIF = \angle CHF = 90°$이므로 $\angle EAH = \angle FCH$이다.

△AHE와 △CHF에서

$\overline{AH} = \overline{CH}$, $\angle EAH = \angle FCH$, $\angle AHE = \angle CHF = 90°$이므로

△AHE≡△CHF (ASA 합동)

점 F는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{AH}:\overline{FH}=3:1$

이때, $\overline{AH}=\overline{CH}=\overline{BH}$이고, $\overline{FH}=\overline{EH}$이므로

$\overline{BE}=\overline{BH}-\overline{EH}=3\overline{EH}-\overline{EH}=2\overline{EH}$에서

$\overline{BE}:\overline{EH}=2\overline{EH}:\overline{EH}=2:1$이므로 $b=2$

$\therefore ab=\frac{10}{3}\times 2=\frac{20}{3}$ 답 $\frac{20}{3}$

08 해결단계

❶ 단계	△AMO의 넓이를 구한다.
❷ 단계	△CRS의 넓이를 구한다.
❸ 단계	△AMO와 △CRS의 넓이의 합을 구한다.

평행사변형 ABCD에서 $\overline{AO}=\overline{CO}$이므로

$\triangle AMO=\frac{1}{2}\triangle AMC=\frac{1}{4}\triangle ABC$

$=\frac{1}{8}\square ABCD=\frac{1}{8}\times 48=6$

또한, △ACD에서 두 점 O, N은 각각 변 AC, DC의 중점이므로 $\overline{AN}$, $\overline{DO}$의 교점 Q는 무게중심이다.

$\overline{AC}/\!/\overline{RS}$이므로

$\overline{DR}:\overline{RA}=\overline{DS}:\overline{SC}=\overline{DQ}:\overline{QO}=2:1$

이때, △CRS=△ARS이므로

$\triangle ARS=\frac{1}{3}\triangle ADS=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\triangle ACD=\frac{2}{9}\times\frac{1}{2}\square ABCD$

$=\frac{1}{9}\square ABCD=\frac{1}{9}\times 48=\frac{16}{3}$

$\therefore \triangle CRS=\triangle ARS=\frac{16}{3}$

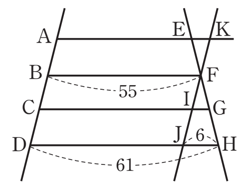
$\therefore \triangle AMO+\triangle CRS=6+\frac{16}{3}=\frac{34}{3}$ 답 $\frac{34}{3}$

미리보는 학력평가 p. 60

1 ①	2 ⑤	3 ⑤	4 $\frac{56}{3}$ cm

1

오른쪽 그림과 같이 사다리의 발판 양 끝 점을 각각 A, B, C, D, E, F, G, H라 하자.



점 F를 지나고 $\overline{AD}$에 평행한 직선이 $\overline{CG}$, $\overline{DH}$와 만나는 점을 각각 I, J라 하면 $\overline{CI}=\overline{DJ}=\overline{BF}=55$이므로

$\overline{JH}=\overline{DH}-\overline{DJ}=61-55=6$

△FJH에서 점 G가 선분 FH의 중점이고 $\overline{IG}/\!/\overline{JH}$이므로

$\overline{IG}=\frac{1}{2}\overline{JH}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\therefore \overline{CG}=\overline{CI}+\overline{IG}=55+3=58$ ······㉠

$\overline{AE}$의 연장선과 $\overline{JF}$의 연장선의 교점을 K라 하면

△FIG와 △FKE에서

$\overline{FG}=\overline{FE}$, ∠IGF=∠KEF (∵ 엇각),

∠GFI=∠EFK (∵ 맞꼭지각)

이므로 △FIG≡△FKE (ASA 합동)

$\therefore \overline{EK}=\overline{GI}=3$

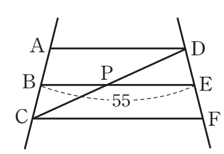
즉, $\overline{AE}=\overline{AK}-\overline{EK}=55-3=52$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{CG}+\overline{AE}=58+52=110$

따라서 구하는 두 발판의 길이의 합은 110이다. 답 ①

| 다른풀이 |

다음 그림과 같이 사다리의 발판 양 끝 점을 각각 A, B, C, D, E, F, 두 선분 CD, BE의 교점을 P라 하자.



△ACD에서 $\overline{CB}=\overline{BA}$, $\overline{BP}/\!/\overline{AD}$이므로

$\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{AD}$

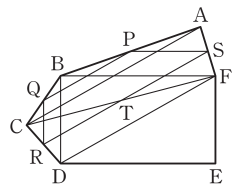
△DCF에서 $\overline{DE}=\overline{EF}$, $\overline{PE}/\!/\overline{CF}$이므로

$\overline{PE}=\frac{1}{2}\overline{CF}$

이때, $\overline{BE}=\overline{BP}+\overline{PE}=\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CF})$이므로

$\overline{AD}+\overline{CF}=2\overline{BE}=2\times 55=110$

2



$\overline{CF}$와 $\overline{RS}$의 교점을 T라 하면

$\overline{RT}/\!/\overline{DF}$이므로 $\triangle CRT \backsim \triangle CDF$ (AA 닮음)

$\overline{CR} : \overline{CD}=1 : 2$이므로

$\overline{RT} : \overline{DF}=1 : 2$

$\overline{RT}=\frac{1}{2}\overline{DF}$

$\overline{TS}/\!/\overline{CA}$이므로 $\triangle FST \backsim \triangle FAC$ (AA 닮음)

$\overline{FS} : \overline{FA}=1 : 2$이므로 $\overline{TS} : \overline{CA}=1 : 2$

$\overline{TS}=\frac{1}{2}\overline{CA}$이므로

$\overline{RS}=\overline{RT}+\overline{TS}$

$=\frac{1}{2}\overline{DF}+\frac{1}{2}\overline{CA}$

$=\frac{1}{2}(\overline{DF}+\overline{CA})$

$=\frac{1}{2}\times(32+38)=35$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=38$이므로

$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}=19$

$\overline{BD}=a$, $\overline{BF}=b$라 하면

직사각형 BDEF의 둘레의 길이는 $2(a+b)=88$이므로

$a+b=44$

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}a$

$\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{BF}=\frac{1}{2}b$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{PS}$

$=19+\frac{1}{2}a+35+\frac{1}{2}b$

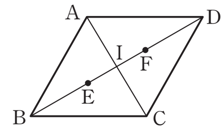
$=54+\frac{1}{2}(a+b)$

$=54+22=76$

답 ⑤

3

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 I라 하자.



점 E는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{EI}=\frac{1}{3}\overline{BI}$

점 F는 삼각형 CDA의 무게중심이므로

$\overline{FI}=\frac{1}{3}\overline{DI}$

따라서 선분 EF의 길이는

$\overline{EF}=\overline{EI}+\overline{FI}=\frac{1}{3}\overline{BI}+\frac{1}{3}\overline{DI}$

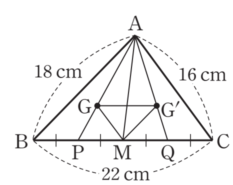
$=\frac{1}{3}(\overline{BI}+\overline{DI})$

$=\frac{1}{3}\overline{BD}$

$=\frac{1}{3}\times 24=8$

답 ⑤

4



오른쪽 그림에서

$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 22=11\,(\text{cm})$

$\overline{AG} : \overline{AP}=\overline{AG'} : \overline{AQ}=2 : 3$이므로

$\overline{GG'} : \overline{PQ}=2 : 3$

$\therefore \overline{GG'}=\frac{2}{3}\overline{PQ}=\frac{2}{3}\times 11=\frac{22}{3}\,(\text{cm})$

$\triangle QAB$에서 $\overline{QG'} : \overline{QA}=\overline{QM} : \overline{QB}=1 : 3$이므로

$\overline{G'M} : \overline{AB}=1 : 3$에서

$\overline{G'M} : 18=1 : 3$

$\therefore \overline{G'M}=6\text{ cm}$

$\triangle PAC$에서 $\overline{PG} : \overline{PA}=\overline{PM} : \overline{PC}=1 : 3$이므로

$\overline{GM} : \overline{AC}=1 : 3$에서

$\overline{GM} : 16=1 : 3$

$\therefore \overline{GM}=\frac{16}{3}\text{ cm}$

따라서 $\triangle GG'M$의 둘레의 길이는

$\overline{GG'}+\overline{G'M}+\overline{GM}=\frac{22}{3}+6+\frac{16}{3}$

$=\frac{56}{3}\,(\text{cm})$

답 $\frac{56}{3}$ cm

Ⅳ 피타고라스 정리

07 피타고라스 정리

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 63

01 ④ 02 ③ 03 ② 04 ②, ⑤ 05 ④
06 $\frac{12}{5}$ 07 $\frac{17}{2}\pi$

01

$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}=x\ (x>0)$라 하면

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}^2=x^2+x^2=2x^2$

$\triangle BDC$에서 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+x^2=2x^2+x^2=3x^2$

$\triangle BED$에서 $\overline{BE}^2=\overline{BD}^2+x^2=3x^2+x^2=4x^2$

이때, $\overline{BE}=14$이므로 $\overline{BE}^2=196$에서

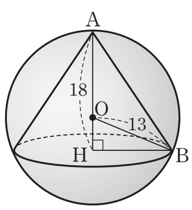
$4x^2=196 \quad \therefore x^2=49$

그런데 $49=7^2$이고 $x>0$이므로

$x=7$ 답 ④

02

다음 그림과 같이 세 점 A, B, H를 정하면



$\overline{OA}$는 구의 반지름이므로

$\overline{OA}=13$

$\triangle OBH$에서 $\overline{OH}=18-13=5$이므로

$\overline{BH}^2=13^2-5^2=144$

그런데 $144=12^2$이고 $\overline{BH}>0$이므로

$\overline{BH}=12$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times12^2\times18=864\pi$ 답 ③

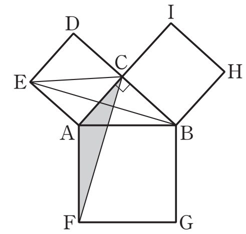
03

$\square AFGB=45\text{ cm}^2$, $\square CBHI=25\text{ cm}^2$이므로

$\square ACDE=\square AFGB-\square CBHI$

$=45-25=20\ (\text{cm}^2)$

다음 그림과 같이 $\overline{BE}$, $\overline{CE}$를 그으면



$\triangle ABE$와 $\triangle AFC$에서

$\overline{AE}=\overline{AC}$, $\overline{AB}=\overline{AF}$,

$\angle EAB=90^\circ+\angle CAB=\angle CAF$이므로

$\triangle ABE\equiv\triangle AFC$ (SAS 합동)

$\therefore \triangle AFC=\triangle ABE$

$=\triangle ACE$

$=\frac{1}{2}\square ACDE$

$=\frac{1}{2}\times20=10\ (\text{cm}^2)$ 답 ②

04

① $2^2+3^2=13\neq4^2$

② $3^2+4^2=25=5^2$

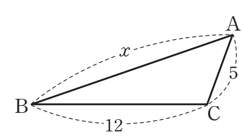
③ $4^2+7^2=65\neq8^2$

④ $6^2+7^2=85\neq9^2$

⑤ $5^2+12^2=169=13^2$

따라서 직각삼각형인 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

05



$12-5<x<12+5$에서

$7<x<17$ ……㉠

$\angle C>90^\circ$이므로

$x^2>5^2+12^2$, $x^2>169$

이때, $169=13^2$이고 $x>0$이므로

$x>13$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$13<x<17$ 답 ④

blacklabel 특강 참고

삼각형이 되기 위한 조건

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때

$|b-c|<a<b+c$

$|a-c|<b<a+c$

$|a-b|<c<a+b$

⇨ (나머지 두 변의 길이의 차)<(한 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

06

$\triangle$ABC에서 $z^2=10^2-8^2=36$

그런데 $36=6^2$이고 $z>0$이므로 $z=6$

$\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{BC}$이므로

$6^2=10x,\ 10x=36 \qquad \therefore x=\frac{18}{5}$

$\triangle$AHC에서 $y^2=6^2-\left(\frac{18}{5}\right)^2=\frac{576}{25}$

그런데 $\frac{576}{25}=\left(\frac{24}{5}\right)^2$이고 $y>0$이므로 $y=\frac{24}{5}$

$\therefore x+y-z=\frac{18}{5}+\frac{24}{5}-6=\frac{12}{5}$ **답** $\frac{12}{5}$

07

$\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times3^2=\frac{9}{2}\pi$

이때, $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이는 4π이므로 $\overline{AC}$를 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\frac{9}{2}\pi+4\pi=\frac{17}{2}\pi$ **답** $\frac{17}{2}\pi$

| 다른풀이 |

$\overline{BC}=a$라 하면 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이는 $\frac{a}{2}$

이때, 이 반원의 넓이가 4π이므로

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=4\pi$에서 $\frac{a^2}{8}\pi=4\pi \qquad \therefore a^2=32$

$\triangle$ABC에서 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$이므로

$\overline{AC}^2=6^2+a^2=36+32=68$ ……㉠

구하는 반원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AC}$이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2=\frac{\pi}{8}\overline{AC}^2=\frac{\pi}{8}\times68$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{17}{2}\pi$

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 64~67

01 ③	02 12	03 ③	04 ④	05 $\frac{20}{3}$
06 360	07 $\frac{240}{13}$	08 ③	09 ③	10 ①
11 80 cm^2	12 24	13 29통	14 ④	15 ⑤
16 144 cm^2	17 ③	18 ④	19 $\frac{24}{5}$	20 ⑤
21 136	22 28	23 ①	24 $2(S_1+S_2)$	

01

$\triangle BC_1D_1$에서 $\overline{BD_1}^2=2^2+2^2=8$

$\therefore \overline{BC_2}^2=8$

$\triangle BC_2D_2$에서 $\overline{BD_2}^2=\overline{BC_2}^2+2^2=8+4=12$

$\therefore \overline{BC_3}^2=12$

$\triangle BC_3D_3$에서 $\overline{BD_3}^2=\overline{BC_3}^2+2^2=12+4=16$

$\therefore \overline{BC_4}^2=16$

$\triangle BC_4D_4$에서 $\overline{BD_4}^2=\overline{BC_4}^2+2^2=16+4=20$

$\therefore \overline{BC_5}^2=20$

$\triangle BC_5D_5$에서 $\overline{BD_5}^2=\overline{BC_5}^2+2^2=20+4=24$

$\therefore \overline{BC_6}^2=24$

$\triangle BC_6D_6$에서 $\overline{BD_6}^2=\overline{BC_6}^2+2^2=24+4=28$

$\therefore \overline{BC_7}^2=28$

$\triangle BC_7D_7$에서 $\overline{BD_7}^2=\overline{BC_7}^2+2^2=28+4=32$

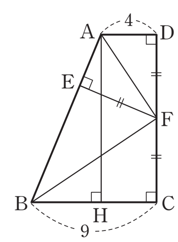
$\therefore \overline{BC_8}^2=32$

$\triangle BC_8D_8$에서 $\overline{BD_8}^2=\overline{BC_8}^2+2^2=32+4=36$

그런데 $36=6^2$이고 $\overline{BD_8}>0$이므로

$\overline{BD_8}=6$ **답** ③

02



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AF}$를 그으면

$\triangle$AFD와 $\triangle$AFE에서

$\angle ADF=\angle AEF=90^\circ$,

$\overline{AF}$는 공통, $\overline{DF}=\overline{EF}$

$\therefore$ $\triangle AFD\equiv\triangle AFE$ (RHS 합동)

$\therefore \overline{AE}=\overline{AD}=4$ ……㉠

같은 방법으로 $\overline{BF}$를 그으면

$\triangle BFE\equiv\triangle BFC$ (RHS 합동)

$\therefore \overline{BE}=\overline{BC}=9$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BE}=4+9=13$

이때, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{HC}=\overline{AD}=4$이므로

$\overline{BH}=9-4=5$

$\triangle$ABH에서

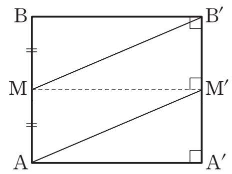
$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2$

$=13^2-5^2=144$

그런데 $144=12^2$이고 $\overline{AH}>0$이므로 $\overline{AH}=12$

$\therefore \overline{CD}=\overline{AH}=12$ **답** 12

03



원기둥의 모선 AB의 중점을 M이라 하면 실을 두 바퀴 감았으므로 실이 지나간 경로는 오른쪽 그림의 $\overline{AM'}$과 $\overline{MB'}$이다.
실의 길이가 26 cm이고, $\overline{AB}=10$ cm 이므로

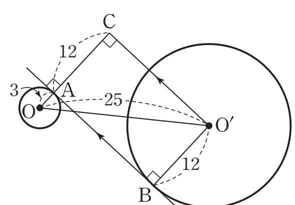
$\overline{AM'}=\frac{1}{2}\times26=13\,(\text{cm})$, $\overline{A'M'}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times10=5(\text{cm})$

즉, 직각삼각형 AA′M′에서 $\overline{AA'}^2=13^2-5^2=144$
그런데 $144=12^2$이고 $\overline{AA'}>0$이므로
$\overline{AA'}=12\,(\text{cm})$
따라서 원기둥의 밑면의 둘레의 길이는 $\overline{AA'}$의 길이와 같으므로 12 cm이다.

답 ③

04

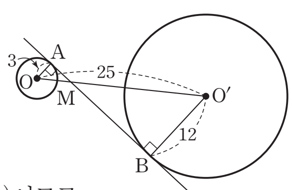
다음 그림과 같이 점 O′을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 선과 $\overline{OA}$의 연장선의 교점을 C라 하자.



$\triangle OO'C$에서 $\overline{O'C}^2=\overline{OO'}^2-\overline{OC}^2=25^2-15^2=400$
그런데 $400=20^2$이고 $\overline{O'C}>0$이므로
$\overline{O'C}=20$
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{O'C}=20$

답 ④

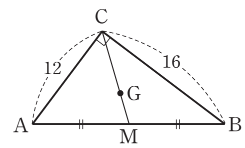
| 다른풀이 |



오른쪽 그림과 같이 직선 AB와 선분 OO′의 교점을 M이라 하면
$\triangle AOM$과 $\triangle BO'M$에서
$\angle OAM=\angle O'BM=90^\circ$,
$\angle AMO=\angle BMO'$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로
$\triangle AOM \backsim \triangle BO'M$ (AA 닮음)
즉, $\overline{OM}:\overline{O'M}=\overline{AO}:\overline{BO'}=3:12=1:4$이고,
$\overline{OO'}=25$이므로 $\overline{OM}=5$, $\overline{O'M}=20$
$\triangle OAM$에서 $\overline{AM}^2=\overline{OM}^2-\overline{OA}^2=5^2-3^2=16$
그런데 $16=4^2$이고 $\overline{AM}>0$이므로
$\overline{AM}=4$
$\triangle O'BM$에서 $\overline{BM}^2=\overline{O'M}^2-\overline{O'B}^2=20^2-12^2=256$
그런데 $256=16^2$이고 $\overline{BM}>0$이므로
$\overline{BM}=16$
$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AM}+\overline{BM}=4+16=20$

05

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2=12^2+16^2=400$
그런데 $400=20^2$이고 $\overline{AB}>0$이므로
$\overline{AB}=20$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{CG}$의 연장선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 M이라 하면 무게중심 G는 삼각형의 세 중선의 교점이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$, 즉 점 M은 $\triangle ABC$의 외심이다.

$\overline{CM}=\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times20=10$

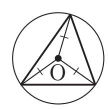
$\therefore\ \overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{2}{3}\times10=\frac{20}{3}$

답 $\frac{20}{3}$

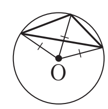
blacklabel 특강 참고

삼각형의 외심의 위치

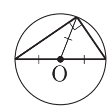
(1) 예각삼각형
⇨ 삼각형의 내부



(2) 둔각삼각형
⇨ 삼각형의 외부



(3) 직각삼각형
⇨ 빗변의 중점



06

$\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}=x$라 하면

$\overline{CM}=\overline{MF}=\frac{x}{2}$

$\triangle ABE$에서 $\overline{AE}^2=6^2+x^2$

$\triangle ACM$에서 $\overline{AM}^2=12^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\triangle AEM$은 정삼각형이므로
$\overline{AE}=\overline{AM}$, 즉 $\overline{AE}^2=\overline{AM}^2$에서

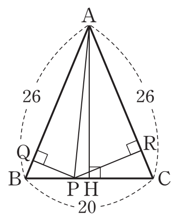
$6^2+x^2=12^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$, $\frac{3x^2}{4}=108$

$\therefore\ x^2=144$
이때, $144=12^2$이고 $x>0$이므로
$x=12$
$\overline{BC}=\overline{EF}=y$라 하면
$\triangle EMF$에서 $\overline{ME}^2=6^2+y^2$
$\triangle ACM$에서 $\overline{AM}^2=12^2+6^2$
$\triangle AEM$은 정삼각형이므로
$\overline{ME}=\overline{AM}$, 즉 $\overline{ME}^2=\overline{AM}^2$에서
$6^2+y^2=12^2+6^2$, $y^2=12^2$
$\therefore\ y=12$ ($\because\ y>0$)
따라서 삼각기둥의 옆넓이는
$(6+12+12)\times12=360$

답 360

07

$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}=26$, $\overline{BC}=20$인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 20=10$

즉, $\triangle AHC$에서

$\overline{AH}^2=26^2-10^2=576$

그런데 $576=24^2$이고 $\overline{AH}>0$이므로

$\overline{AH}=24$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 20\times 24=240$

이때, $\overline{AP}$를 그으면 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$에서

$240=\frac{1}{2}\times 26\times\overline{PQ}+\frac{1}{2}\times 26\times\overline{PR}$

$240=13(\overline{PQ}+\overline{PR})$

$\therefore \overline{PQ}+\overline{PR}=\frac{240}{13}$ **답** $\frac{240}{13}$

08

$\overline{BE}=3$이므로 $\overline{EC}=8-3=5$

이때, $\overline{EC}=\overline{DE}$이므로 $\overline{DE}=5$

$\triangle DBE$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로

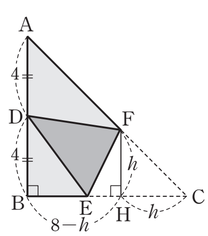
$\overline{BD}^2=\overline{DE}^2-\overline{BE}^2=5^2-3^2=16$

그런데 $16=4^2$이고 $\overline{BD}>0$이므로

$\overline{BD}=4$

또한, $\overline{AB}=8$이므로 $\overline{AD}=8-4=4$

한편, 오른쪽 그림과 같이 $\triangle FEC$의 꼭짓점 F에서 $\overline{EC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\triangle ABC$와 $\triangle FHC$에서

$\angle ABC=\angle FHC=90$, $\angle C$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle FHC$ (AA 닮음)

즉, $\triangle FHC$는 직각이등변삼각형이다.

이때, $\overline{HC}=\overline{FH}=h$라 하면

$\overline{BH}=8-h$

$\triangle ABC=\triangle ADF+\triangle DBE+2\triangle FEC$에서

$\frac{1}{2}\times 8\times 8=\frac{1}{2}\times 4\times(8-h)+\frac{1}{2}\times 4\times 3+2\times\left(\frac{1}{2}\times 5\times h\right)$

$32=16-2h+6+5h$, $3h=10$

$\therefore h=\frac{10}{3}$

$\therefore \triangle DEF=\triangle FEC=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{10}{3}=\frac{25}{3}$ **답** ③

09 해결단계

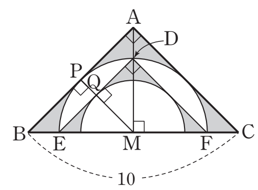
❶단계	$\overline{AB}^2$의 값을 구한다.
❷단계	$\triangle ABC$에 내접하는 반원의 반지름의 길이를 $\overline{AB}$를 사용하여 나타낸다.
❸단계	$\triangle DEM$에서 $\overline{DE}$의 길이를 구한다.
❹단계	$\triangle DEF$에 내접하는 반원의 반지름의 길이를 구한다.
❺단계	색칠한 부분의 넓이를 구한다.

$\overline{AB}=\overline{AC}=x$라 하면

$\triangle ABC$에서 $x^2+x^2=100$

$2x^2=100$ $\quad\therefore x^2=50$ ……㉠

이때, 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 $\overline{BC}$의 중점이면서 $\triangle ABC$의 외심이므로



$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

$=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 10=5$

$\overline{AB}$와 $\triangle ABC$에 내접하는 반원의 접점을 P라 하면

$\overline{MP}\perp\overline{AB}$이므로 $\triangle ABM$에서

$\overline{AB}\times\overline{MP}=\overline{AM}\times\overline{BM}$, $x\times\overline{MP}=5\times 5$

$\therefore \overline{MP}=\frac{25}{x}$

즉, $\triangle ABC$에 내접하는 반원의 반지름의 길이는 $\frac{25}{x}$이므로

$\overline{DM}=\overline{EM}=\frac{25}{x}$

$\triangle DEM$에서

$\overline{DE}^2=\overline{ME}^2+\overline{MD}^2=2\overline{MP}^2$

$=2\times\frac{25^2}{x^2}=2\times\frac{25^2}{50}=25$ ($\because$ ㉠)

그런데 $25=5^2$이고 $\overline{DE}>0$이므로

$\overline{DE}=5$

$\overline{DE}$와 $\triangle DEF$에 내접하는 반원의 접점을 Q라 하면

$\overline{MQ}\perp\overline{DE}$이므로 $\triangle DEM$에서

$\overline{DE}\times\overline{MQ}=\overline{EM}\times\overline{DM}$, $5\times\overline{MQ}=\frac{25}{x}\times\frac{25}{x}$

$\therefore \overline{MQ}=\frac{5}{2}$ ($\because$ ㉠)

즉, $\triangle DEF$에 내접하는 반원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=\{\triangle ABC-(\triangle ABC$에 내접하는 반원의 넓이$)\}$
$\quad+\{\triangle DEF-(\triangle DEF$에 내접하는 반원의 넓이$)\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times x\times x-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{25}{x}\right)^2\right\}$
$\quad+\left\{\frac{1}{2}\times 5\times 5-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}$

$=\frac{75}{2}-\frac{75}{8}\pi$ ($\because$ ㉠) **답** ③

10

① $\triangle AGC \equiv \triangle HBC$ (SAS 합동)이므로 $\overline{AG}=\overline{BH}$

② $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$, $\triangle AEB=\frac{1}{2}\overline{AB}^2$이므로

$\triangle ABC$와 $\triangle AEB$의 넓이는 같지 않다.

③ $\overline{AC} /\!/ \overline{EB}$이므로

$\triangle AEC=\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$\triangle AGC \equiv \triangle HBC$ (SAS 합동)이고, $\overline{AB} /\!/ \overline{CH}$이므로

$\triangle AGC=\triangle HBC=\triangle ACH=\frac{1}{2}\overline{AC}^2$

즉, $\triangle AEC$와 $\triangle AGC$의 넓이는 같지 않다.

④ $\square ADEB=\overline{AB}^2$

$\square AEBC=\triangle AEB+\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}^2+\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

즉, $\square ADEB$와 $\square AEBC$의 넓이는 같지 않다.

⑤ $\triangle EBA=\triangle EBC=\triangle ABF=\triangle BFJ$이므로

$\square ADEB=\square BFKJ$

같은 방법으로 $\square ACHI=\square JKGC$이므로

$\square ADEB+\square ACHI=\square BFGC$

따라서 항상 옳은 것은 ①이다. **답** ①

11

정사각형 ABCD의 한 변의 길이는

$\frac{1}{4}\times 48=12$ (cm)이므로 $\overline{AH}=x$ cm라 하면

$\overline{HD}=12-x$ (cm)

이때, 점 A가 A′, 점 D가 D′에 오도록 접었으므로

$\overline{AH}=\overline{A'H}$, $\overline{HD}=\overline{HD'}$

즉, $\overline{A'D'}=\overline{AH}-\overline{HD}$에서

$\overline{A'D'}=x-(12-x)=2x-12$ (cm)

정사각형 A′B′C′D′의 넓이가 16 cm^2이므로 한 변의 길이는 4 cm이다.

즉, $2x-12=4$ $\quad\therefore x=8$

$\therefore \overline{AH}=8$ cm, $\overline{HD}=4$ cm

$\triangle AEH$에서 $\overline{EH}^2=8^2+4^2=80$

이때, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$,

$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}$, $\overline{AH}=\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DG}$이므로

$\triangle AEH \equiv \triangle BFE \equiv \triangle CGF \equiv \triangle DHG$ (SAS 합동)

즉, $\angle HEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90^\circ$,

$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$이므로

$\square EFGH$는 정사각형이다.

$\therefore \square EFGH=\overline{EH}^2=80$ (cm^2) **답** 80 cm^2

| 다른풀이 |

정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{1}{4}\times 48=12$ (cm)이므로

$\square ABCD=12^2=144$ (cm^2)

한편, 정사각형 모양의 종이 ABCD에서 네 점 A, B, C, D가 각각 A′, B′, C′, D′에 오도록 접었으므로

$\triangle AEH \equiv \triangle A'EH \equiv \triangle BFE \equiv \triangle B'FE \equiv \triangle CGF \equiv \triangle C'GF$

$\equiv \triangle DHG \equiv \triangle D'HG$

즉, $\square ABCD=8\triangle AEH+\square A'B'C'D'$

$144=8\triangle AEH+16$ $\quad\therefore \triangle AEH=16$ (cm^2)

이때, $\square EFGH=4\triangle AEH+\square A'B'C'D'$이므로

정사각형 EFGH의 넓이는

$4\times 16+16=80$ (cm^2)

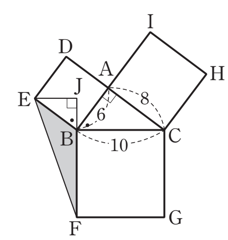
12

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}^2=10^2-6^2=64$

그런데 $64=8^2$이고 $\overline{AC}>0$이므로

$\overline{AC}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BF}$의 연장선에 내린 수선의 발을 J라 하면



$\triangle ABC$와 $\triangle JBE$에서

$\angle BAC=\angle BJE=90^\circ$,

$\angle ABC=90^\circ-\angle JBA=\angle JBE$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle JBE$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AC}:\overline{JE}=\overline{BC}:\overline{BE}$에서 $8:\overline{JE}=10:6$

$10\overline{JE}=48$ $\quad\therefore \overline{JE}=\frac{24}{5}$

$\therefore \triangle BEF=\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{JE}$

$=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{24}{5}=24$ **답** 24

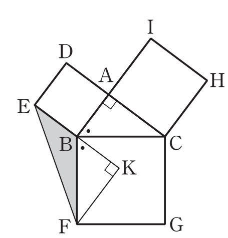
| 다른풀이 |

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}^2=10^2-6^2=64$

그런데 $64=8^2$이고 $\overline{AC}>0$이므로

$\overline{AC}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{EB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 K라 하면



$\triangle ABC$와 $\triangle KBF$에서

$\angle BAC=\angle BKF=90^\circ$, $\overline{BC}=\overline{BF}$,

$\angle ABC=90^\circ-\angle KBC=\angle KBF$

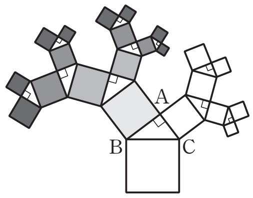
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle KBF$ (RHA 합동)

즉, $\overline{KF}=\overline{AC}=8$이므로

$\triangle BEF=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{KF}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$

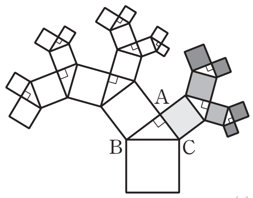
13

오른쪽 그림에서 같은 색으로 칠한 정사각형의 넓이의 합은 각각 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.



(가)

또한, 오른쪽 그림에서 같은 색으로 칠한 정사각형의 넓이의 합은 각각 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다.



(나)

즉, $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $4^2=16\,(\mathrm{m}^2)$

$\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $3^2=9\,(\mathrm{m}^2)$

$\triangle$ABC에서 $\overline{BC}^2=3^2+4^2=25$

그런데 $25=5^2$이고 $\overline{BC}>0$이므로

$\overline{BC}=5\,(\mathrm{m})$

$\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$5^2=25\,(\mathrm{m}^2)$

따라서 페인트로 칠해야 하는 부분의 넓이는

$16\times4+9\times3+25=116\,(\mathrm{m}^2)$

(다)

이때, 페인트 한 통으로는 4 m^2를 칠할 수 있으므로 최소 $116\div4=29$(통)의 페인트가 필요하다.

(라)

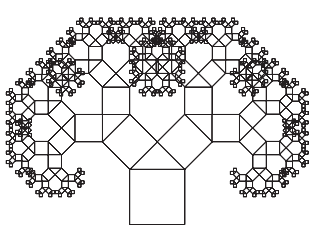
답 29통

단계	채점 기준	배점
(가)	$\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형과 넓이가 같은 부분을 찾은 경우	30%
(나)	$\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형과 넓이가 같은 부분을 찾은 경우	30%
(다)	페인트로 칠해야 하는 부분의 넓이를 구한 경우	30%
(라)	필요한 페인트가 최소 몇 통인지 구한 경우	10%

blacklabel 특강 교과 외 지식

피타고라스의 나무

피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형과 정사각형을 계속 이어 붙여 그리면 오른쪽 그림과 같은 나무 모양의 그림을 얻을 수 있다. 이것을 피타고라스의 나무라 한다.



14

주어진 수를 각각 제곱하여 차례대로 나열하면

81, 169, 289, 1600, 1681이다.

이때, $81+1600=1681$이므로 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있는 서로 다른 세 수는 9, 40, 41이다.

세 수 중에서 가장 큰 수인 41은 빗변의 길이이므로 이 직각삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times9\times40=180$

답 ④

15

삼각형이 되기 위한 조건에 의하여

$6-4<x<4+6 \qquad \therefore 2<x<10$

이를 만족시키는 정수 x의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.

세 변의 길이가 4, 6, x인 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

(i) x가 가장 긴 변의 길이일 때,

$x^2>4^2+6^2$에서 $x^2>52$이므로

가능한 정수 x의 값은 8, 9이다.

(ii) 6이 가장 긴 변의 길이일 때,

$6^2>x^2+4^2$에서 $x^2<20$이므로

가능한 정수 x의 값은 3, 4이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 x의 값은 3, 4, 8, 9

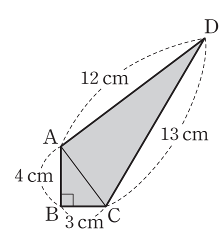
따라서 구하는 합은

$3+4+8+9=24$

답 ⑤

16

□ABCD에서 선분 AC를 그으면 다음 그림과 같다.



$\triangle$ABC에서 $\overline{AC}^2=4^2+3^2=25$

그런데 $25=5^2$이고 $\overline{AC}>0$이므로

$\overline{AC}=5\,(\mathrm{cm})$

$\triangle$ACD에서 $5^2+12^2=13^2$

즉, $\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$\triangle$ACD는 $\angle CAD=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$4\square ABCD=4\times\left(\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times5\times12\right)$

$=4\times36=144\,(\mathrm{cm}^2)$

답 144 cm^2

17

② $S_3>S_1+S_2$이면 ∠B는 둔각이므로 ∠A, ∠C는 예각이다.

③ $S_2<S_1+S_3$이면 ∠A는 예각이지만 ∠B와 ∠C의 크기는 알 수 없으므로 삼각형의 모양을 알 수 없다. 답 ③

blacklabel 특강 오답피하기

삼각형의 세 각 중 한 각이 둔각이면 나머지 두 각은 모두 예각이다.
또한, 사각형의 네 각 중 두 각이 둔각이면 나머지 두 각은 모두 예각이다.

18

3개의 공에 적힌 수를 세 변의 길이로 하는 삼각형은
(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)의 7개이므로

$a=7$

이때, 각 삼각형이 직각삼각형인지 확인하면

(i) (2, 3, 4)에서 $2^2+3^2=13\neq4^2$

(ii) (2, 4, 5)에서 $2^2+4^2=20\neq5^2$

(iii) (2, 5, 6)에서 $2^2+5^2=29\neq6^2$

(iv) (3, 4, 5)에서 $3^2+4^2=25=5^2$ ⇨ 직각삼각형이다.

(v) (3, 4, 6)에서 $3^2+4^2=25\neq6^2$

(vi) (3, 5, 6)에서 $3^2+5^2=34\neq6^2$

(vii) (4, 5, 6)에서 $4^2+5^2=41\neq6^2$

(i)~(vii)에서 $b=1$

$\therefore a+b=7+1=8$ 답 ④

19

□ABCD=36에서 $36=6^2$이므로

$\overline{AB}=6$ ($\because \overline{AB}>0$)

□CEFG=4에서 $4=2^2$이므로

$\overline{CE}=2$ ($\because \overline{CE}>0$)

△ABE에서

$\overline{AE}^2=6^2+8^2=100$

그런데 $100=10^2$이고 $\overline{AE}>0$이므로

$\overline{AE}=10$

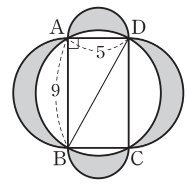
$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{AE}\times\overline{BH}$이므로

$6\times8=10\times\overline{BH}$

$\therefore \overline{BH}=\frac{24}{5}$ 답 $\frac{24}{5}$

20

직사각형의 각 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고 선분 BD를 그으면 다음 그림과 같다.



△ABD에서 $\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2$이므로

$\pi\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{\overline{AD}}{2}\right)^2$ ……㉠

(색칠한 부분의 넓이)

$=\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{\overline{AD}}{2}\right)^2+$□ABCD$-\pi\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2$

=□ABCD (∵ ㉠)

=2×△ABD

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times5\times9\right)=45$ 답 ⑤

21

△ADC에서 $\overline{EF}/\!/\overline{CD}$이므로

$\overline{AF}:\overline{FD}=\overline{AE}:\overline{EC}$ $\therefore \overline{AE}:\overline{EC}=3:2$

△ABC에서

$\overline{AE}:\overline{EC}=3:2$이므로 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$이고

$\overline{DE}:\overline{BC}=3:(3+2)=3:5$이다.

$\overline{BC}=10$이므로 $\overline{DE}:10=3:5$ $\therefore \overline{DE}=6$

∠A=90°인 직각삼각형 ABC에서

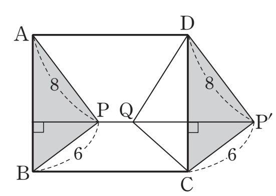
$\overline{BE}^2+\overline{CD}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$

$=6^2+10^2=136$ 답 136

22

다음 그림과 같이 △ABP의 $\overline{AB}$가 $\overline{DC}$와 겹치도록 △ABP를 이동시킨 도형을 △DCP′이라 하면

$\overline{QP'}\perp\overline{DC}$



이때, □DQCP′에서

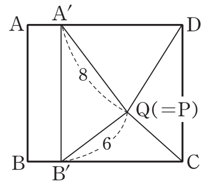
$\overline{DQ}^2+\overline{CP'}^2=\overline{DP'}^2+\overline{CQ}^2$이므로

$\overline{DQ}^2+6^2=8^2+\overline{CQ}^2$

$\therefore \overline{DQ}^2-\overline{CQ}^2=8^2-6^2=28$ 답 28

| 다른풀이 |

오른쪽 그림과 같이 $\triangle$ABP의 점 P가 $\triangle$DQC의 점 Q와 만나도록 $\triangle$ABP를 이동시킨 도형을 $\triangle$A′B′Q라 하면 □A′B′CD에서



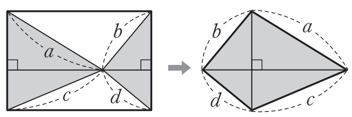
$\overline{\text{A}'\text{Q}}^2+\overline{\text{CQ}}^2=\overline{\text{B}'\text{Q}}^2+\overline{\text{DQ}}^2$이므로

$8^2+\overline{\text{CQ}}^2=6^2+\overline{\text{DQ}}^2$

$\therefore\ \overline{\text{DQ}}^2-\overline{\text{CQ}}^2=28$

blacklabel 특강 해결실마리

직사각형 내부에 있는 임의의 점에 대한 문제의 경우 다음 그림과 같이 두 대각선이 직교하는 사각형으로 변형하여 해결할 수 있다.



$a^2+d^2=c^2+b^2$

23

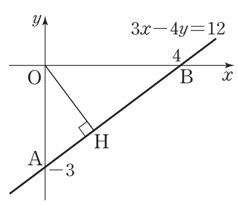
일차방정식 $3x-4y=12$에

$y=0$을 대입하면 $3x=12$ $\qquad\therefore\ x=4$

$x=0$을 대입하면 $-4y=12$ $\qquad\therefore\ y=-3$

즉, 일차방정식 $3x-4y=12$의 그래프의 x절편은 4, y절편은 -3이다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 그래프가 y축, x축과 만나는 점을 각각 A$(0,\ -3)$, B$(4,\ 0)$이라 하면



$\triangle$OAB에서 $\overline{\text{OA}}=3$, $\overline{\text{OB}}=4$이므로

$\overline{\text{AB}}^2=3^2+4^2=25$

그런데 $25=5^2$이고 $\overline{\text{AB}}>0$이므로

$\overline{\text{AB}}=5$

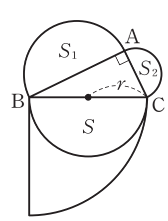
$\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{OB}}=\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{OH}}$이므로

$3\times4=5\times\overline{\text{OH}}$ $\qquad\therefore\ \overline{\text{OH}}=\dfrac{12}{5}$

답 ①

24

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\text{BC}}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 S라 하면 직각삼각형의 세 반원 사이의 관계에 의하여 $S=S_1+S_2$이다.



반원 S의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\pi\times r^2=\dfrac{1}{2}r^2\pi$, 즉 $S_1+S_2=\dfrac{1}{2}r^2\pi$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

이때, $\overline{\text{BC}}=2r$이므로 주어진 사분원의 반지름의 길이는 $2r$

따라서 그 넓이는

$\dfrac{1}{4}\times\pi\times(2r)^2=\pi r^2$

$\qquad=2(S_1+S_2)$ ($\because$ ㉠)

답 $2(S_1+S_2)$

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 68~69

01 (1) 17 (2) $\dfrac{45}{8}$ **02** 65 **03** (1) 176π (2) 84 : 125

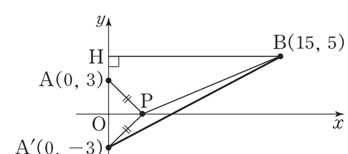
04 12개 **05** 30 cm **06** 6 **07** 오전 10시 24분

08 180

01 해결단계

(1)	❶ 단계	점 A와 x축에 대하여 대칭인 점 A′을 좌표평면 위에 나타낸다.
	❷ 단계	$\overline{\text{A}'\text{B}}$의 길이를 구하여 $\overline{\text{PA}}+\overline{\text{PB}}$의 최솟값을 구한다.
(2)	❸ 단계	두 점 A′, B를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 구한다.
	❹ 단계	❸ 단계에서 구한 그래프의 x절편이 점 P의 x좌표임을 확인하고 그 값을 구한다.

(1) 다음 그림과 같이 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 A′$(0,\ -3)$



이때, $\triangle$PA′B에서 $\overline{\text{PA}'}+\overline{\text{PB}}\ge\overline{\text{A}'\text{B}}$이므로

$\overline{\text{PA}}+\overline{\text{PB}}=\overline{\text{PA}'}+\overline{\text{PB}}$

$\qquad\ge\overline{\text{A}'\text{B}}$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{BH}}=15$, $\overline{\text{A}'\text{H}}=8$이므로 $\triangle$BHA′에서

$\overline{\text{A}'\text{B}}^2=15^2+8^2=289$

그런데 $289=17^2$이고 $\overline{\text{A}'\text{B}}>0$이므로

$\overline{\text{A}'\text{B}}=17$

㉠에서 $\overline{\text{PA}}+\overline{\text{PB}}$의 최솟값은 17이다.

(2) 두 점 A′, B를 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는

$\dfrac{5-(-3)}{15-0}=\dfrac{8}{15}$

이므로 이 일차함수의 식은 $y=\dfrac{8}{15}x-3$ $\qquad\cdots\cdots$㉡

일차함수 ㉡의 그래프와 x축의 교점이 P일 때, $\overline{\text{PA}}+\overline{\text{PB}}$의 값이 최소가 되므로 ㉡에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{8}{15}x-3,\ \frac{8}{15}x=3 \qquad \therefore\ x=\frac{45}{8}$

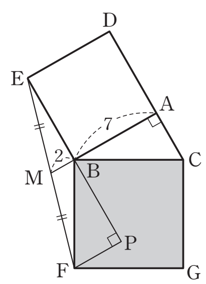
따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{45}{8}$이다.

답 (1) 17 (2) $\frac{45}{8}$

02 해결단계

❶ 단계	점 F에서 $\overline{\mathrm{EB}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 나타낸다.
❷ 단계	삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 이용하여 $\overline{\mathrm{FP}}$와 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{\mathrm{BF}}^2$의 값을 이용하여 사각형 BFGC의 넓이를 구한다.

다음 그림과 같이 점 F에서 $\overline{\mathrm{EB}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\triangle$EFP에서 $\overline{\mathrm{EM}}=\overline{\mathrm{FM}},\ \overline{\mathrm{MB}}/\!/\overline{\mathrm{FP}}$이므로

$\overline{\mathrm{FP}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\times2=4$

또한, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{EB}}=7$이므로

$\triangle$PBF에서

$\overline{\mathrm{BF}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{FP}}^2$

$=7^2+4^2=65$

따라서 사각형 BFGC의 넓이는

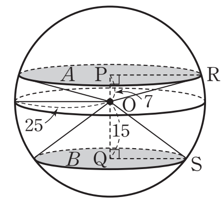
$\overline{\mathrm{BF}}^2=65$

답 65

03 해결단계

(1)	❶ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 두 단면 A, B의 넓이를 각각 구한다.
	❷ 단계	❶ 단계에서 구한 두 단면의 넓이의 차를 구한다.
(2)	❸ 단계	점 O를 꼭짓점으로 하고 단면 A, B를 밑면으로 하는 원뿔의 부피를 각각 구한다.
	❹ 단계	❸ 단계에서 구한 부피의 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타낸다.

(1) 다음 그림과 같이 구의 중심 O에서 두 단면 A, B에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 단면 A가 구와 만나는 점을 R, 단면 B가 구와 만나는 점을 S라 하면



두 단면 A, B가 평행하고, 두 선분 OP, OQ가 두 단면 A, B와 수직이므로 $\triangle$OPR, $\triangle$OQS는 모두 직각삼각형이다.

$\triangle$OPR에서

$\overline{\mathrm{PR}}^2=25^2-7^2=576$

$\therefore$ (단면 A의 넓이)$=\pi\times\overline{\mathrm{PR}}^2=576\pi$

같은 방법으로 $\triangle$OQS에서

$\overline{\mathrm{QS}}^2=25^2-15^2=400$

$\therefore$ (단면 B의 넓이)$=\pi\times\overline{\mathrm{QS}}^2=400\pi$

따라서 두 단면의 넓이의 차는

$576\pi-400\pi=176\pi$

(2) (1)에서 구한 단면 A의 넓이가 576π이므로 점 O를 꼭짓점으로 하고 단면 A를 밑면으로 하는 원뿔의 부피를 구하면

$\frac{1}{3}\times576\pi\times7=1344\pi$

또한, (1)에서 구한 단면 B의 넓이가 400π이므로 점 O를 꼭짓점으로 하고 단면 B를 밑면으로 하는 원뿔의 부피를 구하면

$\frac{1}{3}\times400\pi\times15=2000\pi$

$\therefore\ 1344\pi : 2000\pi=84 : 125$

답 (1) 176π (2) 84 : 125

04 해결단계

❶ 단계	$\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}, \overline{\mathrm{OC}}, \cdots, \overline{\mathrm{OI}}$를 제곱한 값을 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 값을 이용하여 직각삼각형이 될 수 있는 선분을 택한다.
❸ 단계	구하는 직각삼각형의 개수를 구한다.

$\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}, \overline{\mathrm{OC}}, \cdots, \overline{\mathrm{OI}}$의 길이를 각각 $a, b, c, \cdots, i$라 하면

$a^2=1+1=2$

$b^2=a^2+1=2+1=3$

$c^2=b^2+1=3+1=4$

$d^2=c^2+1=4+1=5$

$\vdots$

$i^2=h^2+1=9+1=10$

이 9개의 길이의 선분 중 3개를 택할 때, 세 선분을 변으로 하는 직각삼각형의 개수는

(ⅰ) $\overline{\mathrm{OA}}$가 가장 짧은 변일 때,

$2+3=5$에서 $a^2+b^2=d^2 \qquad \therefore\ (a, b, d)$

$2+4=6$에서 $a^2+c^2=e^2 \qquad \therefore\ (a, c, e)$

$2+5=7$에서 $a^2+d^2=f^2 \qquad \therefore\ (a, d, f)$

$2+6=8$에서 $a^2+e^2=g^2$ $\quad\therefore (a,\ e,\ g)$

$2+7=9$에서 $a^2+f^2=h^2$ $\quad\therefore (a,\ f,\ h)$

$2+8=10$에서 $a^2+g^2=i^2$ $\quad\therefore (a,\ g,\ i)$

즉, $\overline{\mathrm{OA}}$가 가장 짧은 변인 직각삼각형은 6개이다.

(ii) $\overline{\mathrm{OB}}$가 가장 짧은 변일 때,

$3+4=7$에서 $b^2+c^2=f^2$ $\quad\therefore (b,\ c,\ f)$

$3+5=8$에서 $b^2+d^2=g^2$ $\quad\therefore (b,\ d,\ g)$

$3+6=9$에서 $b^2+e^2=h^2$ $\quad\therefore (b,\ e,\ h)$

$3+7=10$에서 $b^2+f^2=i^2$ $\quad\therefore (b,\ f,\ i)$

즉, $\overline{\mathrm{OB}}$가 가장 짧은 변인 직각삼각형은 4개이다.

(iii) $\overline{\mathrm{OC}}$가 가장 짧은 변일 때,

$4+5=9$에서 $c^2+d^2=h^2$ $\quad\therefore (c,\ d,\ h)$

$4+6=10$에서 $c^2+e^2=i^2$ $\quad\therefore (c,\ e,\ i)$

즉, $\overline{\mathrm{OC}}$가 가장 짧은 변인 직각삼각형은 2개이다.

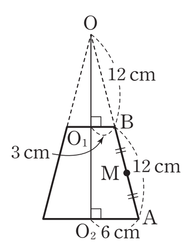
(i), (ii), (iii)에서 구하는 직각삼각형은

$6+4+2=12$(개) **답** 12개

05 해결단계

❶ 단계	$\overline{\mathrm{OB}}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	원뿔대의 옆면의 전개도에서 나타나는 부채꼴의 중심각의 크기를 구한다.
❸ 단계	점 A에서 점 M까지 겉면을 따라 팽팽하게 감은 실의 길이를 구한다.

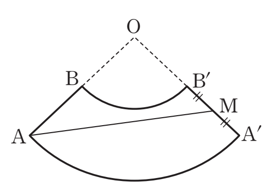
오른쪽 그림과 같이 원뿔대의 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면에서 작은 밑면인 원의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 큰 밑면인 원의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하면 $\triangle\mathrm{OO_1B} \backsim \triangle\mathrm{OO_2A}$이므로



$\overline{\mathrm{OB}} : \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{O_1B}} : \overline{\mathrm{O_2A}} = 3 : 6 = 1 : 2$

$\therefore \overline{\mathrm{OB}} = 12$ cm

이때, 다음 그림과 같이 원뿔대의 옆면의 전개도 위에 실이 지나간 경로를 나타내면 $\overline{\mathrm{AM}}$과 같다.



작은 밑면인 원의 둘레의 길이를 구하면

$2\pi \times 3 = 6\pi$ (cm)이므로 $\overset{\frown}{\mathrm{BB'}} = 6\pi$ cm

이때, $\overline{\mathrm{OB}} = 12$ cm이므로

$\angle\mathrm{BOB'} = x^\circ$라 하면

$2\pi \times 12 \times \dfrac{x}{360} = 6\pi \qquad \therefore x = 90$

이때, 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\triangle\mathrm{OAM}$에서 $\overline{\mathrm{AM}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OM}}^2$

$\overline{\mathrm{AM}}^2 = 24^2 + 18^2 = 900$

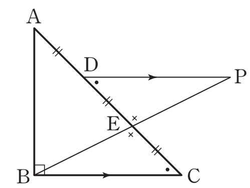
그런데 $900 = 30^2$이고 $\overline{\mathrm{AM}} > 0$이므로

$\overline{\mathrm{AM}} = 30$ (cm)

따라서 실의 길이는 30 cm이다. **답** 30 cm

06 해결단계

❶ 단계	$\triangle$DEP와 $\triangle$CEB가 합동임을 확인한다.
❷ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 구한다.



$\triangle$DEP와 $\triangle$CEB에서

$\overline{\mathrm{DP}} /\!/ \overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\angle\mathrm{EDP} = \angle\mathrm{ECB}$ ($\because$ 엇각),

$\angle\mathrm{DEP} = \angle\mathrm{CEB}$ ($\because$ 맞꼭지각), $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{CE}}$이므로

$\triangle\mathrm{DEP} \equiv \triangle\mathrm{CEB}$ (ASA 합동)

$\therefore \triangle\mathrm{CEB} = \triangle\mathrm{DEP} = 3$

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{EC}}$이므로

$\triangle\mathrm{ABC} = 3\triangle\mathrm{CEB} = 9$

이때, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = a$라 하면

$\dfrac{1}{2}a^2 = 9 \qquad \therefore a^2 = 18$

$\triangle$ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2$

$\quad = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\quad = 2 \times 18 = 36$

그런데 $36 = 6^2$이고 $\overline{\mathrm{AC}} > 0$이므로

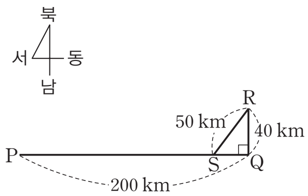
$\overline{\mathrm{AC}} = 6$ **답** 6

07 해결단계

❶ 단계	A 섬과 구조선, 실종 선박의 위치를 그림으로 나타낸다.
❷ 단계	구조선이 실종 신고를 접수한 지점부터 실종 선박을 최초로 탐지한 지점까지의 거리를 구한다.
❸ 단계	구조선이 실종 선박을 최초로 탐지한 시각을 구한다.

오전 7시의 구조선의 위치를 P, A 섬의 위치를 Q, 구조선이 실종 선박을 최초로 탐지한 지점을 S, 그때의 실종 선박의 위치를 R라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}} = 200$ km, $\overline{\mathrm{RQ}} = 40$ km, $\overline{\mathrm{RS}} = 50$ km이므로 각 지점의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



$\triangle$RSQ에서 $\overline{SQ}^2=50^2-40^2=900$

그런데 $900=30^2$이고 $\overline{SQ}>0$이므로

$\overline{SQ}=30\,(\mathrm{km})$

$\therefore\ \overline{PS}=\overline{PQ}-\overline{SQ}=200-30=170\,(\mathrm{km})$

즉, 구조선이 오전 7시에 실종 신고를 접수한 뒤 실종 선박을 최초로 탐지하기까지 이동한 거리는 170 km이고, 시속 50 km의 일정한 속력으로 이동하였으므로 걸린 시간은

$\frac{170}{50}=\frac{17}{5}$ (시간)

따라서 구조선이 실종 선박을 최초로 탐지하기까지 3시간 24분이 걸렸으므로 구하는 시각은 오전 10시 24분이다.

답 오전 10시 24분

08 해결단계

❶ 단계	피타고라스 정리를 만족시키는 세 자연수의 쌍을 찾는다.
❷ 단계	❶ 단계에서 찾은 세 자연수의 쌍 중에서 12를 포함하는 것을 찾는다.
❸ 단계	세 직각삼각형의 넓이의 합의 최솟값을 구한다.

직각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고 피타고라스 정리를 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍을 나열하면

$(3,\ 4,\ 5)$, $(5,\ 12,\ 13)$, $(6,\ 8,\ 10)$, $(7,\ 24,\ 25)$, $\cdots$

이때, 세 직각삼각형의 빗변이 아닌 한 변의 길이는 12이므로 가장 큰 수를 제외한 두 수 중 하나가 12이어야 하므로

$(5,\ 12,\ 13)$, $(9,\ 12,\ 15)$, $(12,\ 16,\ 20)$, $(12,\ 35,\ 37)$

이 중 세 직각삼각형의 넓이의 합이 최소가 되어야 하므로

$(5,\ 12,\ 13)$, $(9,\ 12,\ 15)$, $(12,\ 16,\ 20)$이다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times12+\frac{1}{2}\times9\times12+\frac{1}{2}\times12\times16$

$=30+54+96=180$

답 180

blacklabel 특강 교과 외 지식

피타고라스의 수에 대한 여러 가지 공식

피타고라스의 수는 무수히 많다. 조건을 만족시키는 피타고라스의 수를 찾을 때에는 다음과 같은 공식을 이용할 수 있다.

피타고라스의 수를 a, b, c라 할 때

(1) 피타고라스의 공식 (단, n은 자연수)
$a=2n+1$, $b=2n^2+2n$, $c=2n^2+2n+1$

(2) 플라톤의 공식 (단, n은 2 이상의 자연수)
$a=2n$, $b=n^2-1$, $c=n^2+1$

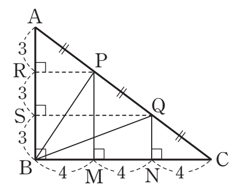
(3) 디오판토스의 공식 (단, m, n은 자연수, $m>n$)
$a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$

(4) 피보나치의 공식 (단, n은 자연수)
$a=4n$, $b=4n^2-1$, $c=4n^2+1$

미리보는 학력평가 p. 70

1 ①	2 60	3 ①	4 720

1



오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$이므로

$\overline{BM}=\overline{MN}=\overline{NC}=\frac{1}{3}\times12=4$

같은 방법으로

$\overline{AR}=\overline{RS}=\overline{SB}=\frac{1}{3}\times9=3$

$\triangle$BMP에서 $\overline{BP}^2=4^2+6^2=52$

$\triangle$BNQ에서 $\overline{BQ}^2=8^2+3^2=73$

$\therefore\ \overline{BP}^2+\overline{BQ}^2=52+73=125$

답 ①

2

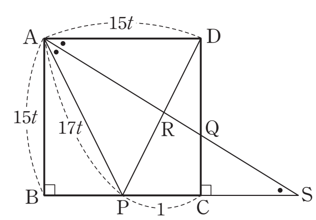
$\overline{AR}$는 $\angle$DAP의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PR}:\overline{RD}=17:15$

다음 그림과 같이 두 반직선 AQ, BC의 교점을 S라 하고

$\overline{AP}=17t$, $\overline{AD}=15t$ $(t>0)$라 하면

$\overline{AB}=\overline{AD}=15t$



$\triangle$ABP에서

$\overline{BP}^2=\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=(17t)^2-(15t)^2=64t^2$

그런데 $64t^2=(8t)^2$이고 $\overline{BP}>0$이므로

$\overline{BP}=8t$

이때, $\overline{PC}=1$이므로

$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=15t-8t=7t=1$

$\therefore\ t=\frac{1}{7}$

$\overline{AD}/\!/\overline{PS}$에서 $\angle DAS=\angle PSA$ ($\because$ 엇각)이므로

$\angle PAS=\angle PSA$

즉, $\triangle$APS는 이등변삼각형이므로

$\overline{PS}=\overline{PA}=17t=17\times\frac{1}{7}=\frac{17}{7}$

$\overline{CS}=\overline{PS}-\overline{PC}=\dfrac{17}{7}-1=\dfrac{10}{7}$이므로

$\overline{BS}=\overline{BC}+\overline{CS}=\dfrac{15}{7}+\dfrac{10}{7}=\dfrac{25}{7}$

$\triangle ABS$와 $\triangle QCS$에서

$\angle ABS=\angle QCS=90^\circ$, $\angle S$는 공통이므로

$\triangle ABS \backsim \triangle QCS$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{QC}=\overline{BS}:\overline{CS}$이므로

$\dfrac{15}{7}:l=\dfrac{25}{7}:\dfrac{10}{7}$

$\dfrac{25}{7}l=\dfrac{150}{49}$ $\quad\therefore l=\dfrac{6}{7}$

$\therefore 70l=70\times\dfrac{6}{7}=60$ **답** 60

| 다른풀이 |

$\overline{AR}$는 $\angle DAP$의 이등분선이므로

$\overline{AP}:\overline{AD}=\overline{PR}:\overline{RD}=17:15$

$\overline{AP}=17t$, $\overline{AD}=15t$ $(t>0)$라 하면

$\overline{AB}=\overline{AD}=15t$

$\triangle ABP$에서

$\overline{BP}^2=\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=(17t)^2-(15t)^2=64t^2$

그런데 $64t^2=(8t)^2$이고 $\overline{BP}>0$이므로

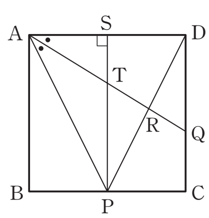
$\overline{BP}=8t$

이때, $\overline{PC}=1$이므로

$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=15t-8t=7t=1$

$\therefore t=\dfrac{1}{7}$

다음 그림과 같이 점 P에서 변 AD에 내린 수선의 발을 S, 두 선분 SP, AQ가 만나는 점을 T라 하면



$\overline{AS}=\overline{BP}=8t=8\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{8}{7}$, $\overline{AP}=17t=17\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{17}{7}$

$\triangle APS$에서 $\overline{AT}$는 $\angle SAP$의 이등분선이므로

$\overline{ST}:\overline{TP}=\overline{AS}:\overline{AP}=8:17$

$\therefore \overline{ST}=\dfrac{8}{25}\times\overline{SP}=\dfrac{8}{25}\times\dfrac{15}{7}=\dfrac{24}{35}$

또한, $\overline{ST}/\!/\overline{DQ}$이므로

$\triangle AST$와 $\triangle ADQ$에서

$\angle AST=\angle ADQ=90^\circ$,

$\angle SAT=\angle DAQ$ (공통)이므로

$\triangle AST \backsim \triangle ADQ$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AS}:\overline{AD}=\overline{ST}:\overline{DQ}$이므로

$\dfrac{8}{7}:\dfrac{15}{7}=\dfrac{24}{35}:\overline{DQ}$

$\dfrac{8}{7}\overline{DQ}=\dfrac{72}{49}$ $\quad\therefore \overline{DQ}=\dfrac{9}{7}$

따라서 $l=\overline{DC}-\overline{DQ}=\dfrac{15}{7}-\dfrac{9}{7}=\dfrac{6}{7}$이므로

$70l=70\times\dfrac{6}{7}=60$

3

꼭짓점 C가 점 E에 오도록 접었으므로

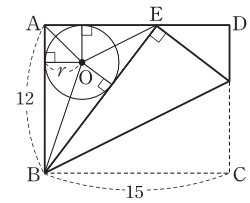
$\overline{BE}=\overline{BC}=15$

$\triangle ABE$에서 $\overline{AE}^2=\overline{BE}^2-\overline{AB}^2=15^2-12^2=81$

그런데 $81=9^2$이고 $\overline{AE}>0$이므로

$\overline{AE}=9$

다음 그림과 같이 내접원의 중심을 O라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle OAB+\triangle OBE+\triangle OEA=\triangle ABE$에서

$\dfrac{1}{2}\times12\times r+\dfrac{1}{2}\times15\times r+\dfrac{1}{2}\times9\times r=\dfrac{1}{2}\times12\times9$

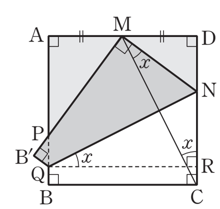
$18r=54$ $\quad\therefore r=3$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times3^2=9\pi$ **답** ①

4

$\overline{MN}=\overline{NC}$이므로 오른쪽 그림과 같이



$\angle NCM=\angle NMC=\angle x$라 하면

$\angle MND=\angle NCM+\angle NMC$

$\quad=\angle x+\angle x=2\angle x$

또한, $\angle CNQ=\angle MNQ=\dfrac{180^\circ-2\angle x}{2}$

$\quad=90^\circ-\angle x$

$\triangle NQR$에서

$\angle NQR=180^\circ-\angle RNQ-\angle NRQ$

$\quad=180^\circ-(90^\circ-\angle x)-90^\circ$

$\quad=\angle x$

$\triangle NQR$와 $\triangle MCD$에서

$\overline{QR}=\overline{CD}$, $\angle NQR=\angle MCD=\angle x$,

$\angle QRN=\angle CDM=90^\circ$이므로

$\triangle NQR\equiv\triangle MCD$ (ASA 합동)

$\therefore l^2=\overline{CM}^2=\overline{DM}^2+\overline{CD}^2=12^2+24^2=720$ **답** 720

V 확률

08 경우의 수

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 73

01 ④	02 ②	03 13	04 6	05 ④
06 10	07 ③	08 35		

01

① 소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지
② 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지
③ 4 이하의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 4의 4가지
④ 3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6의 2가지
⑤ 6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6의 4가지
따라서 한 개의 주사위를 던질 때, 일어나는 경우의 수가 가장 작은 사건은 ④이다. 답 ④

02

2장의 카드에 적힌 두 수를 나타내면
두 수의 합이 5인 경우는
$(1, 4)$, $(2, 3)$의 2가지
두 수의 합이 8인 경우는
$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$의 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$2+3=5$ 답 ②

blacklabel 특강 오답피하기

카드에 적힌 두 수를 나타낼 때, 카드 8장 중에서 2장을 동시에 뽑으므로 $(1, 4)$를 뽑는 경우와 $(4, 1)$을 뽑는 경우는 같은 경우이다. 이를 구분하여 다른 경우로 생각하지 않도록 주의한다.

03

A 지점에서 B 지점까지 가는 경로를 선택하는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $A \to B$인 경우 : 3가지
(ⅱ) $A \to C \to B$인 경우
$A \to C$인 경우가 2가지, $C \to B$인 경우가 2가지이므로
$2\times2=4$(가지)
(ⅲ) $A \to D \to C \to B$인 경우
$A \to D$인 경우가 1가지, $D \to C$인 경우가 3가지, $C \to B$인 경우가 2가지이므로
$1\times3\times2=6$(가지)
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$3+4+6=13$ 답 13

blacklabel 특강 풀이첨삭

두 지점 B와 D를 잇는 도로는 없으므로
$A \to D \to B$, $A \to C \to D \to B$
인 경로는 생각하지 않는다.

04

A는 셋째 날에 식사 당번을 해야 하므로 나머지 3일 동안의 B, C, D의 식사 당번 순서를 정하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 3명을 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로
$3\times2\times1=6$ 답 6

| 다른풀이 |
A는 셋째 날에 식사 당번을 해야 하므로 식사 당번을 정하는 순서를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

B < C — A — D
B < D — A — C
C < B — A — D
C < D — A — B
D < B — A — C
D < C — A — B

따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

blacklabel 특강 필수개념

나뭇가지 모양의 그림(수형도)을 이용하여 풀기
순서가 있는 경우의 수를 구할 때, 나뭇가지 모양의 그림을 그려서 나타내면 모든 경우를 빠뜨리지 않고 구할 수 있다.
(ⅰ) 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 그린다.
(ⅱ) 가짓수를 세어 답을 구한다.

05

(부모님)과 (자녀 3명)을 각각 한 묶음으로 생각하여 두 묶음을 한 줄로 세우는 경우의 수는
$2\times1=2$

이때, 부모님은 부모님끼리, 자녀는 자녀끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각

$2\times1=2,\ 3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times6=24$ 답 ④

06

짝수인 두 자리의 자연수의 개수는 일의 자리의 숫자에 따라 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

십의 자리의 숫자는 나머지 4개의 숫자 중 하나이므로 개수는 4

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

십의 자리의 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 나머지 3개의 숫자 중 하나이므로 개수는

$2\times3=6$

(i), (ii)에서 구하는 짝수인 두 자리의 자연수의 개수는

$4+6=10$ 답 10

| 다른풀이 |

짝수인 두 자리의 자연수의 개수는 십의 자리의 숫자에 따라 다음과 같이 나누어 생각한다.

(iii) 십의 자리의 숫자가 짝수인 경우

십의 자리의 숫자가 2 또는 4이면 일의 자리의 숫자는 십의 자리의 숫자를 제외한 나머지 다른 하나의 짝수 또는 0이 올 수 있으므로 개수는

$2\times2=4$

(iv) 십의 자리의 숫자가 홀수인 경우

십의 자리의 숫자가 1 또는 3이면 일의 자리의 숫자는 0 또는 2 또는 4가 올 수 있으므로 개수는

$2\times3=6$

(iii), (iv)에서 구하는 짝수인 두 자리의 자연수의 개수는

$4+6=10$

07

6명의 학생 A, B, C, D, E, F 중에서 A는 포함되고 F는 포함되지 않으므로 A와 F를 제외한 B, C, D, E 중에서 대표 2명을 뽑으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 4명 중에서 자격이 같은 2명의 대표를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$ 답 ③

08

원 위의 6개의 점 A, B, C, D, E, F 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 a는 6개의 점 중에서 순서를 생각하지 않고 2개의 점을 뽑는 경우의 수와 같다. 즉,

$a=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

또한, b는 6개의 점 중에서 순서를 생각하지 않고 3개의 점을 뽑는 경우의 수와 같다. 즉,

$b=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

$\therefore\ a+b=15+20=35$ 답 35

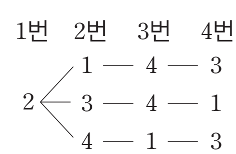
Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 74~77

01 ①	02 ③	03 5	04 10	05 10
06 ③	07 9	08 ②	09 18	10 ②
11 ②	12 54	13 ⑤	14 ④	15 1300
16 72	17 10	18 ④	19 ③	20 ⑤
21 ①	22 ①	23 46	24 34	

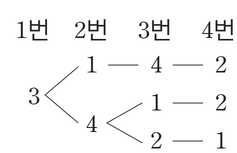
01

번호가 적혀 있는 네 개의 상자에 1, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적혀 있는 조건을 만족시키도록 공을 넣는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

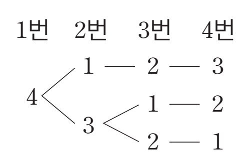
(i) 1번 상자에 2가 적힌 공을 넣는 경우



(ii) 1번 상자에 3이 적힌 공을 넣는 경우



(iii) 1번 상자에 4가 적힌 공을 넣는 경우



(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$3+3+3=9$ 답 ①

02

50원, 100원, 200원짜리 우표를 각각 한 장 이상 구입하여 금액이 1000원이 되어야 하므로 200원짜리 우표의 개수를 기준으로 하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) 200원짜리 우표를 1장 살 때,

50원, 100원짜리 우표를 각각 한 장 이상 구입하여 금액이 800원이 되어야 하므로 구입할 수 있는 우표의 개수는 다음 표와 같다.

100원 짜리 우표(개)	1	2	3	4	5	6	7
50원 짜리 우표(개)	14	12	10	8	6	4	2

(ii) 200원짜리 우표를 2장 살 때,

50원, 100원짜리 우표를 각각 한 장 이상 구입하여 금액이 600원이 되어야 하므로 구입할 수 있는 우표의 개수는 다음 표와 같다.

100원 짜리 우표(개)	1	2	3	4	5
50원 짜리 우표(개)	10	8	6	4	2

(iii) 200원짜리 우표를 3장 살 때,

50원, 100원짜리 우표를 각각 한 장 이상 구입하여 금액이 400원이 되어야 하므로 구입할 수 있는 우표의 개수는 다음 표와 같다.

100원 짜리 우표(개)	1	2	3
50원 짜리 우표(개)	6	4	2

(iv) 200원짜리 우표를 4장 살 때,

50원, 100원짜리 우표를 각각 한 장 이상 구입하여 금액이 200원이 되어야 하므로 구입할 수 있는 우표의 개수는 오른쪽 표와 같다.

100원 짜리 우표(개)	1
50원 짜리 우표(개)	2

(i)~(iv)에서 세 종류의 우표를 각각 한 장 이상 구입하는 방법의 수는

$7+5+3+1=16$ 답 ③

03

동전을 5번 던져 앞면이 x번, 뒷면이 y번 나왔다고 하면

$x+y=5$ ……㉠

또한, 처음에 4점을 가지고 시작하여 앞면이 나오면 1점을 얻고 뒷면이 나오면 2점을 잃으며 점수를 모두 잃으면 게임이 끝나므로

$4+x-2y=0$ $\therefore x-2y=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

즉, 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나와야 한다.

그런데 동전을 5번 던진 후에 게임이 끝나야 하므로 5번째에 던진 동전은 반드시 뒷면이 나와야 하고 중간에 점수가 0점이 되지 않아야 한다.

이에 따라 동전을 5번 던진 후에 게임이 끝나는 경우를 찾으면 다음과 같다.

(i) 1회에 앞면, 5회에 뒷면이 나오는 경우

① 앞 → 앞 → 뒤 → 뒤 → 뒤

점수의 변화는 5점 → 6점 → 4점 → 2점 → 0점

② 앞 → 뒤 → 앞 → 뒤 → 뒤

점수의 변화는 5점 → 3점 → 4점 → 2점 → 0점

③ 앞 → 뒤 → 뒤 → 앞 → 뒤

점수의 변화는 5점 → 3점 → 1점 → 2점 → 0점

(ii) 1회에 뒷면, 5회에 뒷면이 나오는 경우

④ 뒤 → 앞 → 앞 → 뒤 → 뒤

점수의 변화는 2점 → 3점 → 4점 → 2점 → 0점

⑤ 뒤 → 앞 → 뒤 → 앞 → 뒤

점수의 변화는 2점 → 3점 → 1점 → 2점 → 0점

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 5이다. 답 5

blacklabel 특강 오답피하기

앞면이 2번, 뒷면이 3번 나오면서 5회에 0점이 되는 경우 중에는

앞 → 뒤 → 뒤 → 뒤 → 앞

과 같은 경우도 존재한다. 그러나 이 경우 점수의 변화는

5점 → 3점 → 1점 → (-1)점 → 0점

으로, 4회를 던진 후 -1점이 나오게 되므로 이미 점수를 모두 잃고 더 이상 동전을 던질 수 없는 상황이 된다.

또한, 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나오면서 5회에 0점이 되는 경우 중에는

뒤 → 뒤 → 앞 → 앞 → 뒤

와 같은 경우도 존재한다. 그러나 이 경우 점수의 변화는

2점 → 0점 → 1점 → 2점 → 0점

으로 2회를 던진 후 이미 점수를 모두 잃고 더 이상 동전을 던질 수 없는 상황이 된다.

따라서 이와 같은 경우는 제외하도록 주의한다.

04

일차방정식 $(a-4)(3-b)x+y+2a-2=0$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

$y=k$ ($k\neq0$인 상수) 꼴이어야 한다.

즉, x의 계수가 0이어야 하므로

$a-4=0$ 또는 $3-b=0$

$\therefore a=4$ 또는 $b=3$ ……㉠

또한, $y\neq0$이므로

$2a-2\neq0$ $\therefore a\neq1$ ……㉡

(가)

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)$의 10개이다.

(나)

따라서 주어진 그래프가 x축과 만나지 않는 경우의 수는 10이다.

(다)

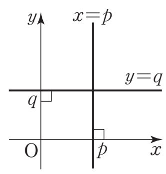
답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 a, b의 조건을 구한 경우	40%
(나)	조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 구한 경우	40%
(다)	주어진 그래프가 x축과 만나지 않는 경우의 수를 구한 경우	20%

blacklabel 특강 필수개념

일차방정식 $x=p$, $y=q$의 그래프

(1) 일차방정식 $x=p$의 그래프는 점 $(p, 0)$을 지나고, y축에 평행한 (x축에 수직인) 직선이다.
(2) 일차방정식 $y=q$의 그래프는 점 $(0, q)$를 지나고, x축에 평행한 (y축에 수직인) 직선이다.



05

(i) $\frac{y}{x}$가 정수인 경우

2, 3, 5, 7은 모두 소수이므로 이 수 중에서 어느 수도 다른 수의 배수가 아니다.

즉, $x=y$일 때에만 $\frac{y}{x}$의 값이 1로 정수가 되므로 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(7, 7)$의 4개이다.

(ii) $\frac{y}{x}$가 유한소수로 나타내어지는 경우

$\frac{y}{x}$가 유한소수가 되려면 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2나 5뿐이어야 한다.

이때, 2, 3, 5, 7은 모두 소수이므로 $x=2$ 또는 $x=5$일 때 $\frac{y}{x}$는 유한소수로 나타내어진다.

즉, $\frac{y}{x}$가 정수가 아니면서 유한소수로 나타내어지는 순서쌍 (x, y)는

$(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 7)$의 6개이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+6=10$ **답** 10

blacklabel 특강 필수개념

유한소수로 나타낼 수 있는 분수

분수를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2나 5뿐이면 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

예 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{2\times5}$, $\frac{3}{2\times3\times5}$, …

06

(i) $n=2$인 경우

타순	1	2	3	4	5
기록	×	×	×	○	○
	○	×	×	×	○
	○	○	×	×	×
	×	×	○	×	×
	×	×	×	○	×
	×	○	×	×	×

(ii) $n=4$인 경우

타순	1	2	3	4	5
기록	×	×	×	×	×

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+1=7$ **답** ③

07

(i) 점 (x, y)가 $y=3x-1$의 그래프 위에 있는 경우

$(1, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 8)$, $(4, 11)$의 4개이다.

(ii) 점 (x, y)가 $y=\frac{24}{x}$의 그래프 위에 있는 경우

$(2, 12)$, $(3, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 3)$, $(12, 2)$의 6개이다.

(iii) 점 (x, y)가 $y=3x-1$의 그래프 위에 있는 점인 동시에 $y=\frac{24}{x}$의 그래프 위에 있는 경우

$(3, 8)$의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$4+6-1=9$ **답** 9

08

한 번 지난 등산로는 다시 지나지 않으므로 입구에서 출발하여 정상에 올라갔다가 다시 입구로 내려오는 경우의 수는 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) 입구 → 정상 → 입구로 이동하는 경우

입구와 정상을 잇는 두 등산로 m, n 중 하나로 올라가고 남은 등산로로 내려와야 하므로 이 경우의 수는

$2\times1=2$

(ii) 입구 → 정상 → 약수터 → 입구로 이동하는 경우

입구와 정상을 잇는 두 등산로 m, n 중 하나로 올라가고 정상과 약수터를 잇는 세 등산로 p, q, r 중 하나, 약수터와 입구를 잇는 네 등산로 a, b, c, d 중 하나로 내려와야 하므로 이 경우의 수는

$2\times(3\times4)=24$

(iii) 입구 → 약수터 → 정상 → 입구로 이동하는 경우

입구와 약수터를 잇는 네 등산로 a, b, c, d 중 하나, 약수터와 정상을 잇는 세 등산로 p, q, r 중 하나로 올라가고 정상과 입구를 잇는 두 등산로 m, n 중 하나로 내려와야 하므로 이 경우의 수는

$4\times3\times2=24$

(iv) 입구 → 약수터 → 정상 → 약수터 → 입구로 이동하는 경우

입구와 약수터를 잇는 네 등산로 a, b, c, d 중 하나, 약수터와 정상을 잇는 세 등산로 p, q, r 중 하나로 올라가고 p, q, r에서 올라간 등산로를 제외하고 남은 두 등산로 중 하나, a, b, c, d에서 올라간 등산로를 제외하고 남은 두 등산로 중 하나로 내려와야 하므로 이 경우의 수는

$4\times3\times(3-1)\times(4-1)=72$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$2+24+24+72=122$

답 ②

09

100원짜리 동전 2개를 던져서 서로 같은 면이 나오는 경우는 (앞면, 앞면), (뒷면, 뒷면)의 2가지이다.

그 각 경우에 대하여, 크기가 서로 다른 주사위 2개를 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하고 눈의 수가 홀수인 경우는 1, 3, 5의 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$2\times3\times3=18$

답 18

blacklabel 특강 해결실마리

홀수, 짝수의 곱셈

(1) (홀수)×(홀수)=(홀수)

(2) (홀수)×(짝수)=(짝수), (짝수)×(홀수)=(짝수)

(3) (짝수)×(짝수)=(짝수)

즉, 어떤 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수와 같다.

10

하나의 깃발을 들거나 내리는 2가지 방법으로 신호를 만들 수 있고 깃발을 하나도 들지 않는 경우는 신호를 나타내지 않으므로 서로 다른 깃발 3개로 만들 수 있는 신호의 개수는

$2\times2\times2-1=2^3-1=7$

$\therefore x=7$

서로 다른 y개의 깃발로 255개의 신호를 만들었으므로

$2^y-1=255$, $2^y=256=2^8$

$\therefore y=8$

$\therefore x+y=7+8=15$

답 ②

11

$a+b$의 값이 3의 배수인 경우는 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) $a=3k$, $b=3k'$ (k, k'은 자연수) 꼴인 경우

$1\le a\le20$, $1\le b\le10$이므로

가능한 a는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6개이고

가능한 b는 3, 6, 9의 3개이다.

즉, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times3=18$

(ii) $a=3k-1$, $b=3k'-2$ (k, k'은 자연수) 꼴인 경우

$1\le a\le20$, $1\le b\le10$이므로

가능한 a는 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20의 7개이고

가능한 b는 1, 4, 7, 10의 4개이다.

즉, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$7\times4=28$

(iii) $a=3k-2$, $b=3k'-1$ (k, k'은 자연수) 꼴인 경우

$1\le a\le20$, $1\le b\le10$이므로

가능한 a는 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19의 7개이고

가능한 b는 2, 5, 8의 3개이다.

즉, 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$7\times3=21$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$18+28+21=67$

답 ②

| 다른풀이 |

모든 경우의 순서쌍을 빠짐없이 구해 보면 다음과 같다.

① $a+b=3$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

② $a+b=6$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5개

③ $a+b=9$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $\cdots$, $(8, 1)$의 8개

④ $a+b=12$인 경우의 순서쌍 (a, b)는

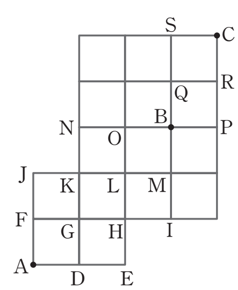
$(2, 10)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $\cdots$, $(11, 1)$의 10개

⑤ $a+b=15$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(5,\ 10),\ (6,\ 9),\ (7,\ 8),\ \cdots,\ (14,\ 1)$의 10개
⑥ $a+b=18$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(8,\ 10),\ (9,\ 9),\ (10,\ 8),\ \cdots,\ (17,\ 1)$의 10개
⑦ $a+b=21$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(11,\ 10),\ (12,\ 9),\ (13,\ 8),\ \cdots,\ (20,\ 1)$의 10개
⑧ $a+b=24$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(14,\ 10),\ (15,\ 9),\ (16,\ 8),\ \cdots,\ (19,\ 5),\ (20,\ 4)$의 7개
⑨ $a+b=27$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(17,\ 10),\ (18,\ 9),\ (19,\ 8),\ (20,\ 7)$의 4개
⑩ $a+b=30$인 경우의 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(20,\ 10)$의 1개
①~⑩에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$2+5+8+10+10+10+10+7+4+1=67$(개)

12 해결단계

❶ 단계	집에서 서점까지 가장 짧은 거리로 가는 경우에 꼭 지나야 하는 지점을 확인한다.
❷ 단계	집에서 서점까지 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	서점에서 학교까지 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	집에서 출발하여 서점을 들러 학교까지 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 집의 위치를 A, 서점의 위치를 B, 학교의 위치를 C라 하면 A에서 B까지 갈 때는 반드시 K 또는 H를 지나야 한다. 즉, A에서 B까지 가장 짧은 거리로 가는 경우는 다음과 같이 구할 수 있다.



(i) A → K, K → B를 가장 짧은 거리로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

A – F – J – K
A – F – G – K
A – D – G – K

K – N – O – B
K – L – O – B
K – L – M – B

따라서 A → K → B를 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수는
$3\times3=9$

(ii) A → H, H → B를 가장 짧은 거리로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

A – F – G – H
A – D – G – H
A – D – E – H

H – L – O – B
H – L – M – B
H – I – M – B

따라서 A → H → B를 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수는
$3\times3=9$

(i), (ii)에서 A에서 B까지 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수는
$9+9=18$
또한, B에서 C까지 가장 짧은 거리로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

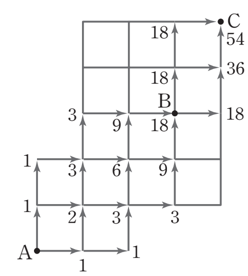
B – Q – S – C
B – Q – R – C
B – P – R – C

즉, B에서 C까지 가장 짧은 거리로 가는 경우의 수는 3
따라서 구하는 경우의 수는
$18\times3=54$

답 54

blacklabel 특강 참고

가장 짧은 거리로 가는 경우의 수는 오른쪽 그림과 같이 진행 방향의 수끼리의 합으로도 구할 수 있다.



13

영역 A에 칠할 수 있는 색은 5가지
영역 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
영역 C에 칠할 수 있는 색은 두 영역 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지
이때, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있으므로 두 영역 D와 E에 색을 칠하는 경우는 다음과 같이 나누어 구한다.

(i) 영역 D에 영역 B와 같은 색을 칠하는 경우
영역 D에는 영역 B와 같은 색을 칠하므로 영역 D에 칠할 수 있는 색은 1가지
영역 E에 칠할 수 있는 색은 두 영역 A, B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지
$\therefore\ 1\times3=3$(가지)

(ii) 영역 D에 영역 B와 다른 색을 칠하는 경우
영역 D에 칠할 수 있는 색은 세 영역 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
영역 E에 칠할 수 있는 색은 세 영역 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지
$\therefore\ 2\times2=4$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 영역 D, E에 색을 칠하는 경우의 수는

$3+4=7$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times4\times3\times7=420$ 답 ⑤

blacklabel 특강 참고

영역에 색을 칠하는 방법의 수

이웃하는 영역이 가장 많은 영역부터 칠할 색을 정한 후 나머지 영역에 순서대로 칠할 색을 정한다.
이때, 이미 사용한 색을 다시 사용할 수 있는지 반드시 확인하고, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있을 때는 이웃하지 않은 영역을 같은 색, 다른 색으로 칠하는 경우를 각각 따진다.

14

여학생 3명을 먼저 한 줄로 세우는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$

이때, 남학생 3명 중 1명을 맨 앞에 세우는 경우의 수는

3

나머지 2명의 남학생을 다음 그림과 같이 ∨로 표시된 자리 중 두 자리에 세우는 경우의 수는

$3\times2=6$

남 여 ∨ 여 ∨ 여 ∨

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3\times6=108$ 답 ④

15

A와 C, B와 D에는 같은 색을 칠해도 되고, E에는 나머지 영역에 칠한 색에 관계없이 어느 색을 칠해도 되므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(ⅰ) A와 C에는 같은 색, B와 D에는 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색, B에 칠한 색을 제외한 3가지
E에 칠할 수 있는 색은 5가지
즉, 이 경우에 색을 칠하는 경우의 수는
$5\times4\times1\times3\times5=300$

(ⅱ) A와 C에는 다른 색, B와 D에는 같은 색을 칠하는 경우
(ⅰ)과 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는
$5\times4\times3\times1\times5=300$

(ⅲ) A와 C에는 같은 색, B와 D에도 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같으므로 1가지
E에 칠할 수 있는 색은 5가지
즉, 이 경우에 색을 칠하는 경우의 수는
$5\times4\times1\times1\times5=100$

(ⅳ) A, B, C, D 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는
$5\times4\times3\times2\times5=600$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$300+300+100+600=1300$ 답 1300

16

두 학생 D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는

$2\times1=2$

○ D ○ E ○

이웃하는 두 학생이 A, B일 때, 두 학생 A, B를 한 묶음 X로 생각하여 X, C를 두 학생 D, E의 양 끝과 사이의 세 자리인 ○로 표시된 자리 중 두 자리에 세우는 경우의 수는

$3\times2=6$

그 각 경우에 대하여 묶음 X 안에서 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2

즉, 두 학생 A, B가 이웃하고 C는 이웃하지 않는 경우의 수는

$2\times6\times2=24$

이때, 이웃하는 2명이 B, C인 경우의 수도 24, 이웃하는 2명이 A, C인 경우의 수도 24이므로 구하는 경우의 수는

$24+24+24=72$ 답 72

| 다른풀이 |

3명의 학생 A, B, C 중에서 2명은 이웃하지만 A, B, C 세 명이 모두 이웃해서는 안 되므로 2명이 이웃하는 모든 경우에서 A, B, C가 모두 이웃하는 경우를 빼어 구할 수 있다.

이때, 3명의 학생 중에서 A, B가 이웃하고 C는 이들과 이웃하지 않는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) A, B가 이웃하는 경우
이웃하는 A, B를 한 묶음 X로 생각하면 X, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$
묶음 X 안에서 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2
$\therefore\ 24\times2=48$

(ⅱ) A, B가 이웃하고 C가 이들과 이웃하는 경우
X, C, D, E에서 X와 C를 한 묶음 Y로 생각하면 Y, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$

묶음 Y 안에서 X와 C가 서로 자리를 바꾸고, 묶음 X 안에서 다시 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2\times2=4$
$\therefore 6\times4=24$
(i), (ii)에서 A, B는 서로 이웃하고 C는 이들과 이웃하지 않는 경우의 수는
$48-24=24$ ……㉠
이때, A, B, C 중 이웃하는 2명이 B, C 또는 C, A가 될 수 있고, 각 경우의 수는 ㉠과 같으므로 구하는 경우의 수는
$24+24+24=72$

17

짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.
(i) $\square\square\boxed{0}$ 꼴의 짝수
백의 자리, 십의 자리에 1, 2, 3, 4 중 두 수를 선택하여 나열하면 되므로 그 개수는
$4\times3=12$
(ii) $\square\square\boxed{2}$ 꼴의 짝수
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 3, 4의 3가지이고, 십의 자리에는 백의 자리에 사용한 숫자와 2를 제외한 나머지 3가지 숫자가 올 수 있다. 즉, 그 개수는
$3\times3=9$
(iii) $\square\square\boxed{4}$ 꼴의 짝수
(ii)와 같은 방법으로 그 개수는 $3\times3=9$
(i), (ii), (iii)에서 짝수의 개수는
$x=12+9+9=30$
한편, 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.
(iv) 각 자리의 숫자가 0, 1, 2인 세 자리의 자연수
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2의 2가지이고, 십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 사용한 숫자를 제외한 나머지 2가지 숫자를 나열하면 되므로 그 개수는
$2\times2\times1=4$
(v) 각 자리의 숫자가 0, 2, 4인 세 자리의 자연수
(iv)와 같은 방법으로 그 개수는 $2\times2\times1=4$
(vi) 각 자리의 숫자가 1, 2, 3인 세 자리의 자연수
1, 2, 3을 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하면 되므로 그 개수는
$3\times2\times1=6$
(vii) 각 자리의 숫자가 2, 3, 4인 세 자리의 자연수
(vi)과 같은 방법으로 그 개수는 $3\times2\times1=6$
(iv)~(vii)에서 3의 배수의 개수는
$y=4+4+6+6=20$
$\therefore x-y=30-20=10$

답 10

blacklabel 특강 필수개념

배수판별법
(1) 2의 배수 : 일의 자리의 숫자가 0 또는 2의 배수인 수
(2) 3의 배수 : 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 수
(3) 4의 배수 : 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수인 수
(4) 5의 배수 : 일의 자리의 숫자가 0 또는 5인 수
(5) 9의 배수 : 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수인 수

18

10보다 크고 1000보다 작은 대칭수는 두 자리의 자연수이거나 세 자리의 자연수이다.
(i) 두 자리의 대칭수, 즉 △△ 꼴의 자연수
△가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 9이므로 9
(ii) 세 자리의 대칭수, 즉 △□△ 꼴의 자연수
△가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 9의 9개이고, □가 될 수 있는 수는 0, 1, 2, …, 9의 10개이므로
$9\times10=90$
(i), (ii)에서 구하는 대칭수의 개수는
$9+90=99$

답 ④

19

(i) $\boxed{1}\square\square$ 꼴의 홀수
$\boxed{1}\square\boxed{3}$에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 5의 3가지
$\boxed{1}\square\boxed{5}$에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 3, 4의 3가지
즉, $\boxed{1}\square\square$ 꼴의 홀수는 6개이다.
(ii) $\boxed{2}\square\square$ 꼴의 홀수
$\boxed{2}\square\boxed{1}$에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 3, 4, 5의 3가지
$\boxed{2}\square\boxed{3}$에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 4, 5의 3가지
$\boxed{2}\square\boxed{5}$에서 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 4의 3가지
즉, $\boxed{2}\square\square$ 꼴의 홀수는 9개이다.
(i), (ii)에서 $\boxed{1}\square\square$ 꼴, $\boxed{2}\square\square$ 꼴의 홀수의 개수는
$6+9=15$
즉, 작은 것부터 크기순으로 나열하였을 때 19번째에 올 수 있는 수는 $\boxed{3}\square\square$ 꼴의 홀수 중 네 번째 수이다.

이때, 십의 자리의 수를 기준으로 세 자리의 홀수를 구하면

$\boxed{3}\boxed{1}\boxed{}$ 꼴의 홀수 : $\boxed{3}\boxed{1}\boxed{5}$

$\boxed{3}\boxed{2}\boxed{}$ 꼴의 홀수 : $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$, $\boxed{3}\boxed{2}\boxed{5}$

$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{}$ 꼴의 홀수 : $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{1}$, $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

⋮

따라서 구하는 홀수는 341이다.

답 ③

20

적어도 세 문제 이상을 맞히는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 모두 틀리거나 한 문제 또는 두 문제만 맞히는 경우의 수를 제외하면 된다.

이때, 모든 경우의 수는 $2^6=64$

6문제를 모두 틀리는 경우의 수는 1

한 문제만 맞히는 경우의 수는 6

두 문제만 맞히는 경우의 수는

$\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$64-1-6-15=42$

답 ⑤

21

구하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 숫자의 크기와 상관없이 3장의 카드를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

답 ①

blacklabel 특강 해결실마리

만약 뽑은 세 장의 카드에 적혀 있는 숫자가 1, 3, 5라면 $a=1$, $b=3$, $c=5$로 정해지므로 이 경우의 수는 1이다. 즉, 뽑은 카드에 적힌 숫자가 (1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)인 경우는 한 가지 경우로 생각해야 한다.

22

수험 번호가 각각 a, b, c, d, e인 5명의 수험생 중에서 2명만 자신의 수험 번호와 같은 알파벳이 적힌 의자에 앉아야 하므로 5명의 수험생 중에서 자신의 수험 번호와 같은 알파벳이 적힌 의자에 앉는 2명의 수험생을 순서와 상관없이 뽑는 경우의 수는

$\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

이때, 수험 번호가 a, b인 두 수험생이 같은 알파벳이 적힌 의자에 앉고 나머지 3명의 수험생이 다른 알파벳이 적힌 의자에 앉는 경우는 오른쪽 표와 같으므로 경우의 수는 2이다.

의자	C	D	E
수험생	d	e	c
	e	c	d

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2=20$

답 ①

23

8개의 점 중 세 점을 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 순서를 생각하지 않고 3개의 점을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

(가)

이때, 지름 위의 5개의 점 A, B, C, D, E 중 세 개의 점을 뽑으면 삼각형을 만들 수 없다.

즉, 삼각형을 만들 수 없는 경우의 수는 5개의 점 중에서 순서를 생각하지 않고 3개의 점을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

(나)

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$56-10=46$

(다)

답 46

단계	채점 기준	배점
(가)	8개의 점 중 3개의 점을 뽑는 경우의 수를 구한 경우	40%
(나)	삼각형을 만들 수 없는 3개의 점을 뽑는 경우의 수를 구한 경우	40%
(다)	만들 수 있는 삼각형의 개수를 구한 경우	20%

24

6개의 팀으로 이루어진 한 조에서 이루어지는 경기의 수는 6개의 팀 중에서 자격이 같은 2개의 팀을 뽑는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

같은 방법으로 나머지 한 조에서 이루어지는 경기의 수는

$\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

한편, 각 조의 1위와 2위인 총 네 팀이 두 팀씩 경기를 하므로 이때 이루어지는 경기의 수는 2

이 결과로부터 이긴 팀끼리의 경기의 수가 1, 진 팀끼리의 경기의 수가 1이다.

따라서 이 시합에서 열린 모든 경기의 수는

$15+15+2+1+1=34$

답 34

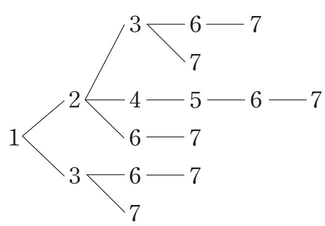
Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 78~79

01 (1) 6 (2) 풀이 참조		**02** 6	**03** (1) 120 (2) 96 (3) 60	
04 21	**05** 120	**06** 43	**07** 24	**08** 125

01 해결단계

(1)	❶단계	주어진 방법대로 관람할 때, 관람하는 전시실의 번호의 순서를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸다.
	❷단계	❶단계에 구한 그림의 방법의 수를 구한다.
(2)	❸단계	주어진 방법대로 관람할 때, 관람하는 전시실의 번호의 순서를 구한다.

(1) 주어진 방법대로 관람할 때, 관람하는 전시실의 번호를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

(2) 출발은 $1 \to 2$ 또는 $1 \to 3$이어야 하고

도착은 $3 \to 7$ 또는 $6 \to 7$이어야 하므로

$1\to2\to4\to5\to6\to3\to7$ 또는 $1\to3\to2\to4\to5\to6\to7$로 관람하면 한번 이용한 통로를 이용하지 않고 모든 전시실을 관람할 수 있다.

답 (1) 6 (2) 풀이 참조

02 해결단계

❶단계	점 P가 점 $(3, 2)$에 도착하는 상황을 파악한다.
❷단계	❶단계의 각 상황에 따른 경우의 수를 구한다.
❸단계	점 P가 점 $(3, 2)$에 도착하는 경우의 수를 구한다.

원점 $(0, 0)$에서 출발한 점 P가 점 $(3, 2)$에 도착하려면 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동해야 한다.

x축의 방향으로 평행이동하려면 주사위를 던져 홀수의 눈이 나와야 하므로 주사위를 한 번 던져 3의 눈이 나오거나 주사위를 세 번 던져 세 번 모두 1의 눈이 나와야 한다.

또한, y축의 방향으로 평행이동하려면 주사위를 던져 짝수의 눈이 나와야 하므로 주사위를 한 번 던져 2의 눈이 나와야 한다.

즉, 점 P가 점 $(3, 2)$에 도착하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 주사위를 두 번 던져 2와 3이 한 번씩 나오는 경우

2, 3 또는 3, 2의 눈이 나올 때이므로 경우의 수는 2

(ii) 주사위를 네 번 던져 1이 세 번, 2가 한 번 나오는 경우

1, 1, 1, 2 또는 1, 1, 2, 1 또는 1, 2, 1, 1 또는 2, 1, 1, 1의 눈이 나올 때이므로 경우의 수는 4

(i), (ii)에서 점 P가 점 $(3, 2)$에 도착하는 경우의 수는

$2+4=6$

답 6

03 해결단계

(1)	❶단계	다섯 학생의 이어달리기의 순서를 정하는 모든 경우의 수를 구한다.
(2)	❷단계	❶단계에서 구한 수를 이용하여 A가 마지막 주자로 달리지 않는 경우의 수를 구한다.
(3)	❸단계	C가 B보다 먼저 달릴 경우, 둘의 순서만 바꾸면 B가 C보다 먼저 달리게 됨을 이용한다.
	❹단계	구하는 경우의 수는 전체 경우의 수의 $\frac{1}{2}$배임을 이용하여 값을 구한다.

(1) 이어달리기의 순서를 정하는 모든 경우의 수는 5명의 학생 A, B, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(2) A가 마지막 주자로 달리는 경우의 수는 B, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로

$4\times3\times2\times1=24$

이때, (1)에서 이어달리기의 순서를 정하는 경우의 수가 120이므로 A가 마지막 주자로 달리지 않는 경우의 수는

$120-24=96$

(3) 5명의 학생 A, B, C, D, E의 이어달리기 순서 중 C가 B보다 앞으로 정해진 경우, 예를 들어

A−C−B−D−E ⇨ A−B−C−D−E

C−A−D−E−B ⇨ B−A−D−E−C

와 같이 두 학생 B, C의 순서끼리 바꾸어 주면 항상 B가 C보다 먼저 달리게 된다.

이와 같이 생각하면 이어달리기 순서 중에서

A−C−B−D−E와 A−B−C−D−E는 서로 같은 경우이고

C−A−D−E−B도 B−A−D−E−C와 서로 같은 경우를 나타낸다.

따라서 5명의 학생 A, B, C, D, E의 이어달리기 순서 중 같은 것이 2개씩 존재한다. 즉, B가 C보다 먼저 달리는 경우의 수는 전체 경우의 수의 $\frac{1}{2}$배이므로

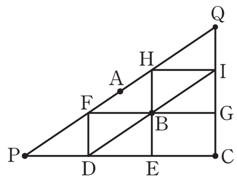
$\frac{120}{2}=60$

답 (1) 120 (2) 96 (3) 60

04 해결단계

❶ 단계	점 P에서 출발하여 점 Q까지 경로를 따라 갈 때 반드시 지나야 하는 점을 구하여 경우를 나눈다.
❷ 단계	❶ 단계의 각 점을 지나는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	점 P에서 점 Q까지 가는 방법의 수를 구한다.

점 P에서 점 Q까지 가려면 오른쪽 그림의 세 점 A, B, C 중에서 어느 한 점을 반드시 지나야 한다.



(i) 점 A를 지나는 경우

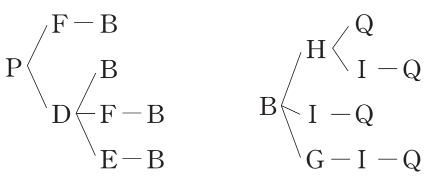
P → A, A → Q로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

즉, P → A → Q로 가는 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) 점 B를 지나는 경우

P → B, B → Q로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉, P → B → Q로 가는 경우의 수는

$4\times4=16$

(iii) 점 C를 지나는 경우

P → C, C → Q로 가는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

P − D − E − C　　C − G − I − Q

즉, P → C → Q로 가는 경우의 수는

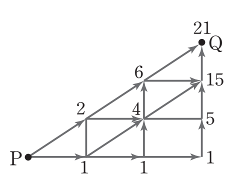
$1\times1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$4+16+1=21$ **답** 21

| 다른풀이 |

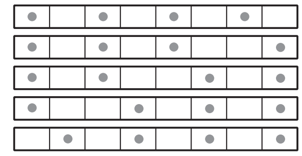
오른쪽 그림과 같이 경로의 수를 세는 방법에 의하여 구하는 방법의 수는 21이다.



05 해결단계

❶ 단계	어느 두 명도 이웃하지 않도록 앉을 의자를 고르는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계의 각 경우에 대하여 4명의 학생이 앉는 방법의 수를 구한다.
❸ 단계	주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

앉을 의자를 ●라 하고 4명의 학생 중 어느 두 명도 이웃하지 않도록 앉을 의자를 고르는 경우는 다음 그림과 같이 5가지이다.



각 경우에 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 4명을 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로

$4\times3\times2\times1=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$5\times24=120$ **답** 120

06 해결단계

❶ 단계	점 P가 점 E에 놓일 수 있는 눈의 수의 합을 구한다.
❷ 단계	눈의 수의 합에 따라 경우를 나눈 후, 각 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	점 P가 점 E에 놓이게 되는 경우의 수를 구한다.

세 개의 주사위의 눈의 수의 합이 4 또는 9 또는 14일 때, 점 A에서 출발한 점 P가 점 E에 놓인다.

세 개의 주사위의 눈의 수를 각각 x, y, z라 하고 순서쌍 (x, y, z)로 나타낼 때, 각 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 세 눈의 수의 합이 4인 경우

$2+1+1=4$, 즉 세 눈의 수가 2, 1, 1인 경우에는

$(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$의 3가지이다.

(ii) 세 눈의 수의 합이 9인 경우

$6+2+1=9$, 즉 세 눈의 수가 6, 2, 1인 경우에는

$(1, 2, 6)$, $(1, 6, 2)$, $(2, 1, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(6, 1, 2)$, $(6, 2, 1)$의 6가지이다.

이와 같은 방법으로

$5+3+1=9$, 즉 세 눈의 수가 5, 3, 1인 경우의 수는 6

$5+2+2=9$, 즉 세 눈의 수가 5, 2, 2인 경우의 수는 3

$4+4+1=9$, 즉 세 눈의 수가 4, 4, 1인 경우의 수는 3

$4+3+2=9$, 즉 세 눈의 수가 4, 3, 2인 경우의 수는 6

$3+3+3=9$, 즉 세 눈의 수가 3, 3, 3인 경우의 수는 1

따라서 세 눈의 수의 합이 9인 경우의 수는

$6+6+3+3+6+1=25$

(iii) 세 눈의 수의 합이 14인 경우

$6+6+2=14$, 즉 세 눈의 수가 6, 6, 2인 경우에는

$(2, 6, 6)$, $(6, 2, 6)$, $(6, 6, 2)$의 3가지이다.

이와 같은 방법으로

$6+5+3=14$, 즉 세 눈의 수가 6, 5, 3인 경우의 수는 6

$6+4+4=14$, 즉 세 눈의 수가 6, 4, 4인 경우의 수는 3
$5+5+4=14$, 즉 세 눈의 수가 5, 5, 4인 경우의 수는 3
따라서 세 눈의 수의 합이 14인 경우의 수는
$3+6+3+3=15$
(i), (ii), (iii)에서 점 P가 점 E에 놓이게 되는 경우의 수는
$3+25+15=43$ 답 43

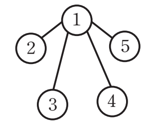
07 해결단계

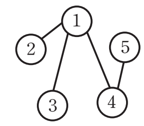
❶단계	주어진 조건을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.
❷단계	a, b, c가 자연수임을 이용하여 가능한 a의 값에 따른 경우의 수를 구한다.
❸단계	❷단계에서 구한 경우의 수를 모두 합하여 삼각형 ABC의 개수를 구한다.

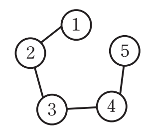
조건 (가)에서 세 자연수 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이고 가장 긴 변의 길이가 a이므로
$b+c>a$
그런데 조건 (나)에서 $a+b+c=30$이므로
$2a=a+a<a+b+c=30 \quad \therefore a<15$ ……㉠
또한, $a>b$, $a>c$이므로
$3a>a+b+c=30 \quad \therefore a>10$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $10<a<15$
이때, a는 자연수이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.
(i) $a=11$일 때, 즉 $b+c=19$ $(b<11,\ c<11)$인 경우
합이 19인 두 수는 $(10,\ 9)$의 1가지이고, b, c를 정하는 경우의 수는 $2\times1=2$이므로 삼각형의 개수는 2이다.
(ii) $a=12$일 때, 즉 $b+c=18$ $(b<12,\ c<12)$인 경우
합이 18인 두 수는 $(11,\ 7)$, $(10,\ 8)$의 2가지이고, 각 경우에 b, c를 정하는 경우의 수는 $2\times1=2$이므로 삼각형의 개수는
$2\times2=4$
(iii) $a=13$일 때, $b+c=17$ $(b<13,\ c<13)$인 경우
합이 17인 두 수는 $(12,\ 5)$, $(11,\ 6)$, $(10,\ 7)$, $(9,\ 8)$의 4가지이고, 각 경우에 b, c를 정하는 경우의 수는 $2\times1=2$이므로 삼각형의 개수는 $4\times2=8$
(iv) $a=14$일 때, $b+c=16$ $(b<14,\ c<14)$인 경우
합이 16인 두 수는 $(13,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(11,\ 5)$, $(10,\ 6)$, $(9,\ 7)$의 5가지이고, 각 경우에 b, c를 정하는 경우의 수는 $2\times1=2$이므로 삼각형의 개수는
$5\times2=10$
(i)~(iv)에서 구하는 삼각형 ABC의 개수는
$2+4+8+10=24$ 답 24

08 해결단계

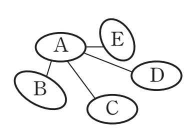
❶단계	섬이 연결된 모양에 따른 경우를 나누어 본다.
❷단계	❶단계의 각 경우의 수를 구한다.
❸단계	다리를 이용하여 섬들을 연결하는 방법의 수를 구한다.

섬이 연결된 모양에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.
(i) 하나의 섬에 연결된 다리가 4개인 경우


다섯 개의 섬 A, B, C, D, E 중에서 1번 섬이 될 1개의 섬을 택하는 경우의 수는 5이고 2번, 3번, 4번, 5번 섬은 순서에 관계없이 어떤 섬이 들어가도 된다.
즉, 하나의 섬에 연결된 다리가 4개인 경우의 수는 5
(ii) 하나의 섬에 연결된 다리가 3개인 경우


다섯 개의 섬 A, B, C, D, E 중에서 1번 섬이 될 1개의 섬을 택하는 경우의 수는 5
남은 네 개의 섬에서 다른 하나의 섬, 즉 5번 섬과 연결될 4번 섬을 택하는 경우의 수는 4
남은 3개의 섬에서 5번 섬을 택하는 경우의 수는 3이고, 2번, 3번 섬은 순서에 관계없이 어떤 섬이 들어가도 된다.
즉, 하나의 섬에 연결된 다리가 3개인 경우의 수는
$5\times4\times3=60$
(iii) 다섯 개의 섬이 한 줄로 연결된 경우


다섯 개의 섬 A, B, C, D, E를 한 줄로 나열하면 된다. 그런데 이때 순서가
A$-$B$-$C$-$D$-$E인 경우와
E$-$D$-$C$-$B$-$A인 경우는 서로 같은 경우이므로 2개씩 같은 배열이 존재한다.
즉, 구하는 경우의 수는
$\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{2}=60$
(i), (ii), (iii)에서 다리를 이용하여 섬들을 연결하는 방법의 수는
$5+60+60=125$ 답 125

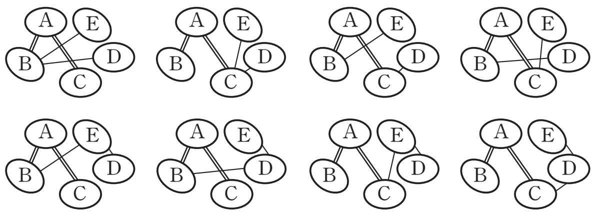
| 다른풀이 1 |
섬 A에 연결된 다리의 개수에 따라 경우를 나누어 구할 수도 있다.
(i) 섬 A에 연결된 다리가 4개인 경우


오른쪽 그림과 같은 한 가지뿐이므로 이 경우의 수는 1이다.
(ii) 섬 A에 연결된 다리가 3개인 경우
네 섬 B, C, D, E 중 섬 A와 다리로 연결되는 섬 3개를 정하는 경우의 수는 연결되지 않는 섬 1개를 정하는 경우의 수와 같으므로 4가지이다.
이때, 세 섬 B, C, D가 섬 A와 연결된다고 가정하면 나머지 섬 E는 세 섬 B, C, D 중 어느 하나와 연결되어야 하므로 이 경우의 수는 3이다.
즉, 섬 A에 연결된 다리가 3개인 경우의 수는 $4\times3=12$

(iii) 섬 A에 연결된 다리가 2개인 경우

네 섬 B, C, D, E 중 섬 A와 다리로 연결되는 섬 2개를 정하는 경우의 수는 4개의 섬 중에서 순서를 생각하지 않고 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4\times3}{2\times1}=6$

이때, 두 섬 B, C가 섬 A와 연결되는 한 가지 경우에 대하여 나머지 섬 D, E가 두 섬 B, C와 연결되는 경우는 다음 그림과 같이 8가지이다.



즉, 섬 A에 연결된 다리가 2개인 경우의 수는

$6\times8=48$

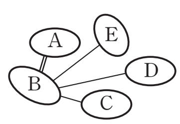
(iv) 섬 A에 연결된 다리가 1개인 경우

네 섬 B, C, D, E 중 섬 A와 다리로 연결되는 섬 1개를 정하는 경우의 수는 4

이때, 섬 B가 섬 A와 연결된다고 가정하면 나머지 섬 C, D, E가 섬 B와 연결되는 경우의 수는 다음과 같다.

① 섬 B에 연결된 다리가 3개인 경우

오른쪽 그림과 같이 1가지이다.



② 섬 B에 연결된 다리가 2개인 경우

세 섬 C, D, E 중 섬 B와 다리로 연결되는 섬 2개를 정하는 경우의 수는 3

그 각각에 대하여 나머지 한 섬은 섬 B에 연결된 두 섬과 다리로 연결할 수 있으므로 섬 B에 연결된 다리가 2개인 경우의 수는

$3\times2=6$

③ 섬 B에 연결된 다리가 1개인 경우

세 섬 C, D, E 중 섬 B와 다리로 연결되는 섬 1개를 정하는 경우의 수는 3

그 각각에 대하여 나머지 두 섬을 연결하는 경우의 수는 3이므로 섬 B에 연결된 다리가 1개인 경우의 수는

$3\times3=9$

①, ②, ③에서 섬 A에 연결된 다리가 1개인 경우의 수는

$4\times(1+6+9)=64$

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$1+12+48+64=125$

다른풀이 2

다섯 개의 섬에 놓을 수 있는 총다리 수는 서로 다른 다섯 개의 섬 중에서 순서와 상관없이 2개의 섬을 택하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5\times4}{2\times1}=10$(개)

이때, 구한 10개의 다리에서 4개의 다리를 선택하는 방법의 수는

$\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$

그런데 모든 섬이 연결되게 하는 방법의 수를 구해야 하므로 위에서 구한 경우의 수에서 네 개의 다리를 놓았지만 모든 섬이 연결되지는 않는 경우의 수를 제외해야 한다. 모든 섬이 연결되지 않는 경우를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) 한 개의 섬에는 다리가 연결되지 않는 경우

다리를 연결하지 않을 섬을 택하는 방법의 수는

5

한 개의 섬을 제외하고 네 개의 섬에 놓을 수 있는 총 다리 수는 서로 다른 네 개의 섬 중에서 순서와 상관없이 2개의 섬을 택하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{4\times3}{2\times1}=6$(개)

이때, 6개의 다리에서 4개의 다리를 선택하는 방법의 수는

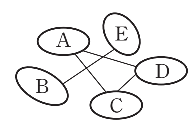
$\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}=15$

따라서 한 개의 섬에는 다리가 연결되지 않는 경우의 수는

$5\times15=75$

(ii) 모든 섬에 다리가 연결되지만 모든 섬이 연결되지는 않는 경우의 수

오른쪽 그림과 같은 모양으로 다리가 놓이는 경우이다. 그림의 B, E처럼 나머지 세 섬에 연결되지 않는 두 섬을 택하는 방법의 수는 다섯 개의 섬에서 순서와 상관없이 2개의 섬을 택하는 경우의 수와 같으므로



$\frac{5\times4}{2\times1}=10$

(i), (ii)에서 네 개의 다리를 놓았지만 다섯 개의 섬이 모두 연결되지 않는 경우의 수는

$75+10=85$

따라서 네 개의 다리를 이용하여 모든 섬이 연결되는 경우의 수는

$210-85=125$

미리보는 학력평가 p. 80

1 6　　2 33　　3 ⑤　　4 ②

1

$a<b$인 경우는

(ⅰ) $a=2$일 때,

$b=3$, $b=5$, $b=8$의 3가지

(ⅱ) $a=4$일 때,

$b=5$, $b=8$의 2가지

(ⅲ) $a=7$일 때,

$b=8$의 1가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$3+2+1=6$ **답** 6

2

일차함수 $y=\frac{b}{a}x$의 그래프는 원점을 지나므로 일차함수 $y=\frac{b}{a}x$의 그래프의 기울기는 그래프가 점 B를 지날 때 최대이고, 점 A를 지날 때 최소이다.

일차함수 $y=\frac{b}{a}x$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(4, 6)$을 지날 때,

$6=\frac{b}{a}\times 4 \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

일차함수 $y=\frac{b}{a}x$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(6, 3)$을 지날 때,

$3=\frac{b}{a}\times 6 \qquad \therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$

즉, 일차함수 $y=\frac{b}{a}x$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나려면

$\frac{1}{2}\le\frac{b}{a}\le\frac{3}{2}$이어야 한다.

$a=1$일 때, $\frac{1}{2}\le b\le\frac{3}{2}$이므로 b는 1의 1가지이다.

$a=2$일 때, $1\le b\le 3$이므로 b는 1, 2, 3의 3가지이다.

$a=3$일 때, $\frac{3}{2}\le b\le\frac{9}{2}$이므로 b는 2, 3, 4의 3가지이다.

$a=4$일 때, $2\le b\le 6$이므로 b는 2, 3, 4, 5, 6의 5가지이다.

$a=5$일 때, $\frac{5}{2}\le b\le\frac{15}{2}$이므로 b는 3, 4, 5, 6, 7의 5가지이다.

$a=6$일 때, $3\le b\le 9$이므로 b는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6가지이다.

$a=7$일 때, $\frac{7}{2}\le b\le\frac{21}{2}$이므로 b는 4, 5, 6, 7, 8의 5가지이다.

$a=8$일 때, $4\le b\le 12$이므로 b는 4, 5, 6, 7, 8의 5가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$1+3+3+5+5+6+5+5=33$ **답** 33

3

갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 큰 수가 되는 경우를 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 갑이 2가 적힌 카드를 꺼내는 경우

병이 가진 카드에 적힌 숫자가 모두 2보다 크므로 갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 큰 수가 되는 경우의 수는 0

(ⅱ) 갑이 5가 적힌 카드를 꺼내는 경우

을이 1이 적힌 카드, 병이 3 또는 4가 적힌 카드를 꺼내야 하므로 갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 큰 수가 되는 경우의 수는 $1\times 2=2$

(ⅲ) 갑이 9가 적힌 카드를 꺼내는 경우

을과 병이 가지고 있는 카드에 적힌 숫자가 모두 9보다 작으므로 을과 병이 어떠한 카드를 꺼내도 갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 크다.

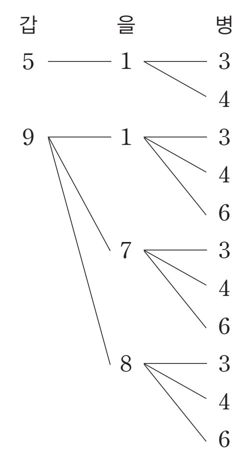
즉, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 큰 수가 되는 경우의 수는 $3\times 3=9$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$0+2+9=11$ **답** ⑤

| 다른풀이 |

갑이 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 가장 큰 수가 되는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 11이다.

4

한 교시에는 1개 강좌만 수강할 수 있으므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(ⅰ) 1교시와 2교시 강좌를 선택하는 경우의 수는

$2\times 3=6$

(ⅱ) 1교시와 3교시 강좌를 선택하는 경우의 수는

$2\times 4=8$

(ⅲ) 2교시와 3교시 강좌를 선택하는 경우의 수는

$3\times 4=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 2개 강좌를 선택하여 수강하는 모든 방법의 수는

$6+8+12=26$ **답** ②

09 확률

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 82

01 $\frac{2}{21}$	02 ①	03 $\frac{2}{3}$	04 ③	05 ④
06 ②	07 ④			

01

9장의 카드에서 3장의 카드를 뽑는 모든 경우의 수는

$\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

이때, 카드에 적힌 숫자의 합이 16이 되는 경우는

(1, 6, 9), (1, 7, 8), (2, 5, 9), (2, 6, 8), (3, 4, 9), (3, 5, 8), (3, 6, 7), (4, 5, 7)의 8가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$ 답 $\frac{2}{21}$

02

ㄷ. $0\leq q\leq 1$

ㄹ. $p=1-q$

ㅁ. $q=1$이면 $p=0$이므로 사건 A는 절대로 일어나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

03

6명의 학생이 한 명씩 면접을 보는 순서를 정하는 방법은 6명의 학생을 한 줄로 세우는 방법과 같으므로 남학생 4명과 여학생 2명이 면접을 보는 순서를 정하는 모든 경우의 수는

$6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

이때, 두 여학생을 한 사람으로 생각하여 5명을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

두 여학생이 자리를 바꾸는 방법의 수는 2이므로

두 여학생이 연속하여 면접을 보는 경우의 수는

$120\times2=240$

즉, 두 여학생이 연속하여 면접을 볼 확률은

$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$

따라서 두 여학생이 연속하여 면접을 보지 않을 확률은

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

04

9월의 총 날의 수는

$2+7+10+8+3=30$

9월 중 전기 사용량이 6 kWh 미만인 날의 수는 2

즉, 9월 중 임의로 선택한 날의 전기 사용량이 6 kWh 미만일 확률은 $\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

한편, 9월 중 전기 사용량이 8 kWh 이상인 날의 수는

$8+3=11$

즉, 9월 중 임의로 선택한 날의 전기 사용량이 8 kWh 이상일 확률은 $\frac{11}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{15}+\frac{11}{30}=\frac{13}{30}$ 답 ③

| 다른풀이 |

9월의 총 날의 수는

$2+7+10+8+3=30$

9월 중 전기 사용량이 6 kWh 미만이거나 8 kWh 이상인 날의 수는

$2+8+3=13$

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{30}$

05

오전 7시에 도착 예정인 전철이 이 전철역에 정각에 도착할 확률은 $\frac{1}{2}$, 일찍 도착할 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 이 전철이 늦게 도착할 확률은

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 오전 7시에 도착 예정인 전철이 이 전철역에 이틀 연속 늦게 도착할 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ 답 ④

06

갑과 을이 같은 색의 구슬을 꺼내는 경우는 두 사람이 모두 흰 구슬을 꺼내거나 모두 검은 구슬을 꺼낼 때이다.

이때, 갑이 꺼낸 구슬을 다시 넣지 않고 을이 구슬을 꺼내므로 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 갑, 을이 모두 흰 구슬을 꺼낼 확률

갑이 흰 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}$

을은 흰 구슬 2개, 검은 구슬 5개 중에서 한 개를 꺼내므로

을이 흰 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{7}$

즉, 두 사람이 모두 흰 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

(ii) 갑, 을이 모두 검은 구슬을 꺼낼 확률

갑이 검은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{8}$

을은 흰 구슬 3개, 검은 구슬 4개 중에서 한 개를 꺼내므로

을이 검은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{7}$

즉, 두 사람이 모두 검은 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

(i), (ii)에서 갑과 을이 같은 색의 구슬을 꺼낼 확률은

$\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$

답 ②

blacklabel 특강 필수개념

연속하여 꺼내는 경우

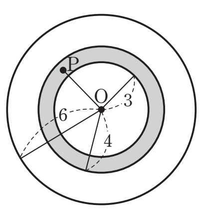
(1) 꺼낸 것을 다시 넣을 때
(나중에 꺼낼 때의 전체 개수)=(처음에 꺼낼 때의 전체 개수)

(2) 꺼낸 것을 다시 넣지 않을 때
(나중에 꺼낼 때의 전체 개수)=(처음에 꺼낼 때의 전체 개수)−(꺼낸 개수)

07

반지름의 길이가 6인 원의 넓이는 36π이고, 반지름의 길이가 3, 4인 원의 넓이는 각각 9π, 16π이다.

이때, $3\leq\overline{OP}\leq4$이려면 점 P가 오른쪽 그림의 어두운 부분에 있어야 하므로 구하는 확률은



$\frac{16\pi-9\pi}{36\pi}=\frac{7\pi}{36\pi}=\frac{7}{36}$

답 ④

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 83~85

01 ③	02 $\frac{1}{5}$	03 $\frac{13}{18}$	04 ①	05 ③
06 $\frac{31}{36}$	07 ③	08 ②	09 $\frac{5}{18}$	10 $\frac{32}{81}$
11 $\frac{2}{9}$	12 ④	13 ③	14 $\frac{5}{9}$	15 ①
16 $\frac{3}{8}$	17 $\frac{2}{5}$	18 4	19 ③	

01

뽑은 카드는 다시 넣는다고 할 때, 1부터 5까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드 중에서 1장의 카드를 4번 뽑는 경우의 수는 $5^4=625$

같은 방법으로 2부터 5까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 4장의 카드 중에서 1장의 카드를 4번 뽑는 경우의 수는 4^4

3부터 5까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드 중에서 1장의 카드를 4번 뽑는 경우의 수는 3^4

이때, 뽑은 카드에 적힌 숫자 중 가장 작은 것이 2가 되는 경우의 수는 2부터 5까지의 숫자가 적힌 카드 중에서 1장의 카드를 4번 뽑는 경우의 수에서 3부터 5까지의 숫자가 적힌 카드 중에서 1장의 카드를 4번 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$4^4-3^4=256-81=175$

따라서 구하는 확률은 $\frac{175}{625}=\frac{7}{25}$

답 ③

02

5개의 막대 중 3개를 선택하는 경우의 수는

$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

한편, 선택한 3개의 막대로 삼각형을 만들려면 가장 긴 막대의 길이가 나머지 두 막대의 길이의 합보다 작아야 한다.

즉, 삼각형이 되는 경우는 길이가 2 cm, 3 cm, 4 cm인 막대를 고르는 경우, 길이가 3 cm, 4 cm, 6 cm인 막대를 고르는 경우의 2가지이다.

따라서 삼각형이 만들어질 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

blacklabel 특강 필수개념

삼각형이 될 조건

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c이고 이 중 가장 긴 변의 길이가 c일 때, $c<a+b$가 성립해야 한다.

03

서로 다른 장미 4송이, 서로 다른 백합 5송이 중에서 두 송이를 골라 두 친구에게 한 송이씩 주는 경우의 수는

$9\times8=72$

두 친구 모두에게 장미를 주지 않는 경우는 두 친구 모두에게 백합을 주는 경우이므로 이 경우의 수는

$5\times4=20$

두 친구 모두에게 장미를 주지 않을 확률은

$\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$

따라서 장미를 적어도 한 송이 주게 될 확률은

$1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$ 답 $\frac{13}{18}$

04

A, B 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

한편, 연립방정식 $\begin{cases}2x+y=3\\ax+by=5\end{cases}$의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}\neq\frac{3}{5}$이어야 한다.

$\therefore a=2b$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(4, 2)$, $(6, 3)$의 3가지이므로 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 ①

blacklabel 특강 필수개념

특수한 해를 갖는 연립방정식

a, b, c, a', b', c'이 모두 0이 아닐 때, 연립방정식 $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$에서

(1) 해가 무수히 많을 조건은

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

(2) 해가 존재하지 않을 조건은

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

05

책상에 카드를 놓는 모든 경우의 수는

$4\times3\times2\times1=24$

한편, 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 크고, 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 큰 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같이 6가지이다.

A C B D
- 1 — 2 — 3 — 4
- 1 — 3 — 2 — 4
- 1 — 4 — 2 — 3
- 2 — 3 — 1 — 4
- 2 — 4 — 1 — 3
- 3 — 4 — 1 — 2

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ 답 ③

| 다른풀이 |

1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드를 네 개의 책상에 임의로 놓는 것이므로 어느 두 장에 대하여 각 카드에 적힌 숫자 중 하나는 나머지 하나보다 반드시 크다.

즉, 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

같은 방법으로 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 클 확률도 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

네 책상 A, B, C, D에 카드를 놓는 모든 경우의 수도 다음과 같이 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내어 구할 수 있다.

A B C D
- 1 — 2 — 3 — 4
- 1 — 2 — 4 — 3
- 1 — 3 — 2 — 4
- 1 — 3 — 4 — 2
- 1 — 4 — 2 — 3
- 1 — 4 — 3 — 2

A B C D
- 3 — 1 — 2 — 4
- 3 — 1 — 4 — 2
- 3 — 2 — 1 — 4
- 3 — 2 — 4 — 1
- 3 — 4 — 1 — 2
- 3 — 4 — 2 — 1

- 2 — 1 — 3 — 4
- 2 — 1 — 4 — 3
- 2 — 3 — 1 — 4
- 2 — 3 — 4 — 1
- 2 — 4 — 1 — 3
- 2 — 4 — 3 — 1

- 4 — 1 — 2 — 3
- 4 — 1 — 3 — 2
- 4 — 2 — 1 — 3
- 4 — 2 — 3 — 1
- 4 — 3 — 1 — 2
- 4 — 3 — 2 — 1

06

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(가)

한편, 두 일차함수 $y=2x+5$, $y=ax+b$의 그래프가 만나지 않으려면 평행해야 하므로

$a=2$, $b\neq5$ ……㉠

이때, ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$

의 5가지이므로 두 그래프가 만나지 않을 확률은 $\frac{5}{36}$

(나)

따라서 두 그래프가 만날 확률은

$1-\frac{5}{36}=\frac{31}{36}$

(다)

답 $\frac{31}{36}$

단계	채점 기준	배점
(가)	모든 경우의 수를 구한 경우	20%
(나)	두 그래프가 만나지 않을 확률을 구한 경우	40%
(다)	두 그래프가 만날 확률을 구한 경우	40%

blackLabel 특강 필수개념

두 직선의 위치 관계

(1) 평행하다. (두 직선이 만나지 않는다.) ⇨ 기울기가 같고, y절편이 다르다.
(2) 일치한다. ⇨ 기울기가 같고, y절편도 같다.
(3) 한 점에서 만난다. ⇨ 기울기가 다르다.

07

다섯 명의 학생을 한 줄로 세우는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$

(ⅰ) A가 맨 앞에 올 확률

맨 앞의 자리를 제외한 나머지 네 자리에 B, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4\times3\times2\times1=24$이므로 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) B가 맨 앞에서 두 번째에 올 확률

맨 앞에서 두 번째의 자리를 제외한 나머지 네 자리에 A, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는 $4\times3\times2\times1=24$이므로 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

(ⅲ) A가 맨 앞에 오고 B가 맨 앞에서 두 번째에 올 확률

맨 앞의 자리, 맨 앞에서 두 번째의 자리를 제외한 나머지 세 자리에 C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$이므로 확률은 $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 A가 맨 앞에 오거나 B가 맨 앞에서 두 번째에 올 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$ 답 ③

blackLabel 특강 풀이첨삭

A가 맨 앞에 오는 경우의 수가 24, B가 맨 앞에서 두 번째에 오는 경우의 수가 24, A가 맨 앞에 오고 B가 맨 앞에서 두 번째에 오는 경우의 수가 6이므로 A가 맨 앞에 오거나 B가 맨 앞에서 두 번째에 오는 경우의 수는

$24+24-6=42$

따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{120}=\frac{7}{20}$이다.

08

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

한편, 세 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, abc의 값이 40의 배수가 되려면 $abc=40$ 또는 $abc=80$ 또는 $abc=120$이어야 하므로 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) $abc=40$, 즉 a, b, c가 2, 4, 5일 확률

2, 4, 5를 a, b, c의 각 값으로 정하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$이므로 확률은 $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

(ⅱ) $abc=80$, 즉 a, b, c가 4, 4, 5일 확률

4, 4, 5를 a, b, c의 각 값으로 정하는 경우의 수는 3이므로 확률은 $\frac{3}{216}=\frac{1}{72}$

(ⅲ) $abc=120$, 즉 a, b, c가 4, 5, 6일 확률

4, 5, 6을 a, b, c의 각 값으로 정하는 경우의 수는

$3\times2\times1=6$이므로 확률은 $\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 세 눈의 수의 곱이 40의 배수일 확률은

$\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{36}=\frac{5}{72}$ 답 ②

blackLabel 특강 해결실마리

40을 소인수분해하면 $2^3\times5$이므로 세 눈의 수 a, b, c 중에서 하나는 5임을 알 수 있다. 이를 이용하여 세 수의 곱이 40의 배수가 되는 경우의 수를 찾으면 편리하다.

09

정육면체 모양의 주사위를 두 번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

주사위를 두 번 던질 때, 두 눈의 수의 합이 가장 작은 값은 -2, 가장 큰 값은 8이다.

즉, 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 주사위를 두 번 던져 이동한 후, 꼭짓점 D에 놓이려면 두 눈의 수의 합이 -1 또는 3 또는 7이어야 한다.

두 눈의 수를 각각 a, b라 하고, 이를 순서쌍 (a, b)로 나타낼 때

(ⅰ) 두 눈의 수의 합이 -1인 경우

$(-1, 0)$, $(0, -1)$의 2가지이므로 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 3인 경우

$(-1, 4)$, $(4, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 6가지이므로 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ⅲ) 두 눈의 수의 합이 7인 경우

$(3, 4)$, $(4, 3)$의 2가지이므로 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 점 P가 꼭짓점 D에 놓일 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}$ 답 $\frac{5}{18}$

10

평평한 면이 위로 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 둥근 면이 위로 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

(i) 도가 나오는 경우

평평한 면 1개, 둥근 면 3개가 나오는 경우는 모두 4가지이므로 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 4=\frac{8}{81}$

(ii) 개가 나오는 경우

평평한 면 2개, 둥근 면 2개가 나오는 경우는 모두 6가지이므로 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times 6=\frac{8}{27}$

(i), (ii)에서 지수가 이기게 될 확률은

$\frac{8}{81}+\frac{8}{27}=\frac{32}{81}$ 답 $\frac{32}{81}$

11

갑, 을, 병 세 사람이 가위바위보를 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

이므로 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때

$(\text{비길 확률})=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

$(\text{승부가 결정될 확률})=1-(\text{비길 확률})=\frac{2}{3}$

따라서 가위바위보를 두 번 할 때, 첫 번째에는 비기고 두 번째에 승부가 결정될 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

세 사람이 가위바위보를 할 때, 비기는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 사람이 모두 같은 것을 내는 경우, 즉
(가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위), (보, 보, 보)
의 3가지이다.

(ii) 세 사람이 모두 다른 것을 내는 경우, 즉
(가위, 바위, 보), (바위, 보, 가위), (보, 가위, 바위), (가위, 보, 바위), (바위, 가위, 보), (보, 바위, 가위)
의 6가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $3+6=9$

12

두 주머니 A, B 중 한 개의 주머니를 택할 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) A 주머니를 택하고 흰 공을 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

(ii) B 주머니를 택하고 흰 공을 꺼낼 확률은

$\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$ 답 ④

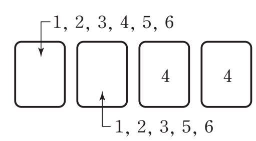
blacklabel 특강 오답피하기

(1) 두 주머니 A, B에 들어 있는 공을 모두 합하면 흰 공이 3개, 검은 공이 3개이므로 흰 공을 꺼낼 확률을 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$로 잘못 생각하지 않도록 주의한다.

(2) A 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률이 $\frac{1}{4}$, B 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률이 1이므로 구하는 확률을 $\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$로 잘못 생각하지 않도록 주의한다.

13

주사위를 4번 던진 후, 던지는 것이 중지되려면 세 번째, 네 번째에는 4의 눈이 연속해서 나오고, 두 번째에는 4가 아닌 눈이 나와야 한다.



이때, 첫 번째에는 어떤 눈이 나와도 상관없다.

주사위를 한 번 던져 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

4가 아닌 눈이 나올 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

따라서 주사위를 4번 던진 후, 던지는 것이 중지될 확률은

$1\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6^3}$ 답 ③

14

A 팀이 5회 이내에 이길 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다. 이때, 승부차기 성공 여부가 승패를 결정짓지 않는 경우에는 빈칸으로 둔다.

(i)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	성공	
B 팀	성공	실패	실패	실패	

$(\text{확률})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	성공	성공
B 팀	성공	실패	실패	성공	

(확률)$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

(iii)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	성공	실패
B 팀	성공	실패	실패	성공	실패

(확률)$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$

(iv)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	실패	성공
B 팀	성공	실패	실패	실패	

(확률)$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(v)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	실패	성공
B 팀	성공	실패	실패	성공	실패

(확률)$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$

(vi)

팀 \ 회차	1회	2회	3회	4회	5회
A 팀	성공	실패	성공	실패	실패
B 팀	성공	실패	실패	실패	실패

(확률)$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$

(i)~(vi)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ 답 $\frac{5}{9}$

15

주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 6의 약수, 즉 1, 2, 3, 6일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이다.

꺼낸 공이 모두 빨간 공일 확률은 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) A 주머니를 택하고 빨간 공을 두 번 꺼낼 확률

A 주머니를 택할 확률은 $\frac{2}{3}$

A 주머니에는 파란 공 3개, 빨간 공 2개가 들어 있으므로 두 번 모두 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

즉, A 주머니를 택하고 두 번 모두 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$

(ii) B 주머니를 택하고 빨간 공을 두 번 꺼낼 확률

B 주머니를 택할 확률은 $\frac{1}{3}$

B 주머니에는 파란 공 2개, 빨간 공 3개가 들어 있으므로 두 번 모두 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

즉, B 주머니를 택하고 두 번 모두 빨간 공을 꺼낼 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$ 답 ①

16

검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 5개가 들어 있는 상자에서 바둑돌을 한 개 꺼낼 때, 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}$, 흰 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{8}$이다.

나중에 꺼낸 바둑돌이 검은 바둑돌일 확률은 처음 꺼낸 바둑돌의 색에 따라 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) 처음에 검은 바둑돌, 나중에도 검은 바둑돌을 꺼낼 확률

처음에 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}$

꺼낸 바둑돌과 색이 같은 바둑돌 한 개를 상자에 더 넣으면 상자 안에는 검은 바둑돌 4개, 흰 바둑돌 5개가 들어 있게 된다.

이 상자에서 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{9}$

즉, 처음에 검은 바둑돌, 나중에도 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{6}$

(ii) 처음에 흰 바둑돌, 나중에 검은 바둑돌을 꺼낼 확률

처음에 흰 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{8}$

꺼낸 바둑돌과 색이 같은 바둑돌 한 개를 상자에 더 넣으면 상자 안에는 검은 바둑돌 3개, 흰 바둑돌 6개가 들어 있게 된다.

이 상자에서 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

즉, 처음에 흰 바둑돌, 나중에 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은

$\frac{5}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{24}$

(i), (ii)에서 나중에 꺼낸 바둑돌이 검은 바둑돌일 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{3}{8}$ 답 $\frac{3}{8}$

17 해결단계

❶ 단계	주머니 속에 꽝인 제비가 a개, 당첨 제비가 b개 있다고 하고, a, b에 대한 연립방정식을 세운다.
❷ 단계	꽝인 제비와 당첨 제비의 개수를 각각 구한다.
❸ 단계	수영이가 이길 확률을 구한다.

주머니 속에 꽝인 제비가 a개, 당첨 제비가 b개 들어 있다고 하자.

이 주머니에 꽝인 제비 4개를 더 넣으면 전체 제비의 $\frac{6}{7}$이 꽝인 제비가 되므로

$\frac{a+4}{a+b+4}=\frac{6}{7}$ $\quad\therefore a-6b=-4$ $\quad\cdots\cdots$㉠

이 주머니에 당첨 제비 2개를 더 넣으면 전체 제비의 $\frac{1}{3}$이 당첨 제비가 되므로

$\frac{b+2}{a+b+2}=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore a-2b=4$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $b=2$

이때, 수영이가 이길 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) 수영이가 바로 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 수영, 민지, 지혁이가 순서대로 꽝인 제비를 뽑고 난 후, 수영이가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{15}$

(ⅲ) 수영, 민지, 지혁이가 순서대로 꽝인 제비를 연속해서 두 번 뽑고 난 후, 수영이가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 수영이가 이길 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

꽝인 제비는 8개이므로 수영, 민지, 지혁이가 이 순서대로 제비를 뽑다보면 수영이가 네 번째 제비를 뽑기 전에 당첨 제비가 나올 수 밖에 없다. 즉, 수영이가 네 번째 제비를 뽑을 때 당첨 제비를 뽑을 확률은 0이므로 수영이가 네 번째 이상의 시행에서 당첨 제비를 뽑는 경우는 생각하지 않는다.

18

과녁 전체의 넓이는 $\pi\times20^2=400\pi$

5점을 얻을 확률이 $\frac{16}{25}$이므로

$\frac{400\pi-\pi r_1^{\,2}}{400\pi}=\frac{16}{25}$, $r_1^{\,2}=144$ $\quad\therefore r_1=12$ $(\because r_1>0)$

15점을 얻을 확률이 $\frac{4}{25}$이므로

$\frac{\pi r_2^{\,2}}{400\pi}=\frac{4}{25}$, $r_2^{\,2}=64$ $\quad\therefore r_2=8$ $(\because r_2>0)$

$\therefore r_1-r_2=12-8=4$ 답 4

19

원판 A에서 홀수는 1, 3, 7, 9이고, 짝수는 4, 6이므로 a가 홀수일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 짝수일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

같은 방법으로 하면 b, c가 홀수일 확률은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$이고, 짝수일 확률은 각각 $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$이다.

$a(b+c)$가 홀수이려면 a, $b+c$ 모두 홀수이어야 하므로 $a(b+c)$가 홀수일 확률은 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) a는 홀수, b는 홀수, c는 짝수일 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

(ⅱ) a는 홀수, b는 짝수, c는 홀수일 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{27}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{27}+\frac{10}{27}=\frac{11}{27}$ 답 ③

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 86~87

01 (1) $\frac{8}{33}$ (2) $\frac{16}{33}$	**02** 41	**03** (1) 2 (2) $\frac{3}{8}$		
04 $\frac{31}{54}$	**05** 214	**06** $\frac{13}{35}$	**07** $\frac{1}{4}$	**08** $\frac{1}{25}$

01 해결단계

(1)	❶ 단계	처음에 숫자 카드가 나올 확률과 꺼낸 카드를 다시 넣지 않고 카드를 뽑을 때 문자 카드가 나올 확률을 구한다.
	❷ 단계	확률의 곱셈을 이용하여 확률을 구한다.
(2)	❸ 단계	숫자 카드 한 장과 문자 카드 한 장이 나올 확률을 구한다.

(1) 12장의 카드 중에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 숫자 카드가 나올 확률은

$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

숫자 카드가 한 장 빠진 11장의 카드 중에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 문자 카드가 나올 확률은 $\frac{8}{11}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{8}{11}=\frac{8}{33}$

(2) 12장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

$\frac{12\times11}{2}=66$

4장의 숫자 카드 중에서 한 장, 8장의 문자 카드 중에서 한 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$4\times8=32$

따라서 구하는 확률은

$\frac{32}{66}=\frac{16}{33}$

답 (1) $\frac{8}{33}$ (2) $\frac{16}{33}$

02 해결단계

❶ 단계	4명의 친구가 4개의 우산을 가져가는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	모두 자신의 우산을 가져가지 못할 확률을 구한다.
❸ 단계	한 사람만 자신의 우산을 가져갈 확률을 구한다.
❹ 단계	❷, ❸ 단계의 확률을 이용하여 p, q의 값을 각각 구하고 그 합을 구한다.

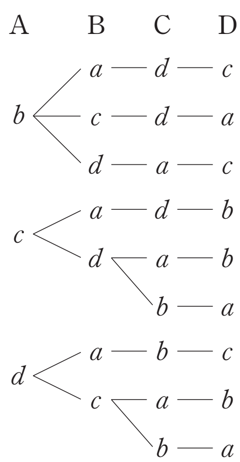
4명의 친구가 4개의 우산을 가져가는 경우의 수는 4명의 친구를 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로

$4\times3\times2\times1=24$

모임에 참석한 4명의 친구를 각각 A, B, C, D라 하고 각각의 우산을 a, b, c, d라 하면

(i) 모두 자신의 우산을 가져가지 못한 경우

모두 자신의 우산을 가져가지 못한 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.

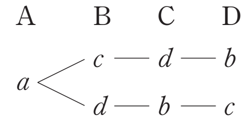


즉, 모두 자신의 우산을 가져가지 못하는 경우의 수는 9

따라서 모두 자신의 우산을 가져가지 못할 확률은 $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

(ii) 한 명만 자신의 우산을 가져간 경우

A만 자신의 우산을 가져간 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉, A만 자신의 우산을 가져가는 경우는 2가지이고, 같은 방법으로 하면 B, C, D만 자신의 우산을 가져가는 경우도 각각 2가지이므로 한 명만 자신의 우산을 가져가는 경우의 수는

$2\times4=8$

따라서 한 명만 자신의 우산을 가져갈 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{8}+\frac{1}{3}=\frac{17}{24}$

따라서 $p=24$, $q=17$이므로

$p+q=41$

답 41

03 해결단계

(1)	❶ 단계	동전의 앞면, 뒷면이 나오는 횟수를 각각 구한다.
	❷ 단계	a의 값을 구한다.
(2)	❸ 단계	앞면이 두 번, 뒷면이 두 번 나오는 경우의 수를 구한다.
	❹ 단계	점 P가 점 $(-1, 3)$의 위치에 놓일 확률을 구한다.

(1) 동전의 앞면이 p번, 뒷면이 q번 나온다고 하자.

동전을 4번 던지므로

$p+q=4$ ……㉠

점 $(1, 1)$에 놓여 있던 점 P가 점 $(-1, 3)$으로 옮겨지므로 점 P의 y좌표는

$1+2p-q=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2$, $q=2$

즉, 동전을 4번 던진 후, 점 P가 점 $(-1, 3)$의 위치에 놓이려면 동전의 앞면이 두 번, 뒷면이 두 번 나와야 한다.

이때, 점 P의 x좌표는 $1+p-aq=-1$이므로

$1+2-2a=-1$, $2a=4$ $\therefore a=2$

(2) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 앞면이 두 번, 뒷면이 두 번 나오는 경우는

(H, H, T, T), (H, T, H, T), (H, T, T, H),
(T, T, H, H), (T, H, T, H), (T, H, H, T)

의 6가지이다.

동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올

확률이 $\frac{1}{2}$이고 위의 6가지 경우의 각각에 대하여 확률이 모두 같으므로 점 P가 점 $(-1, 3)$의 위치에 놓일 확률은

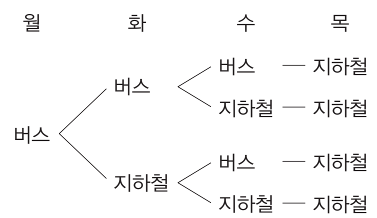
$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 6=\frac{3}{8}$

답 (1) 2 (2) $\frac{3}{8}$

04 해결단계

❶ 단계	월요일에 버스를 타고 목요일에 지하철을 타는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸다.
❷ 단계	각 경우에 따른 확률을 구한다.
❸ 단계	확률의 덧셈을 이용하여 확률을 구한다.

월요일에 버스를 타고 목요일에 지하철을 타는 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타내면 다음과 같다.



각 경우에 따라 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) 버스, 버스, 버스, 지하철 순으로 탈 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

(ii) 버스, 버스, 지하철, 지하철 순으로 탈 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$

(iii) 버스, 지하철, 버스, 지하철 순으로 탈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

(iv) 버스, 지하철, 지하철, 지하철 순으로 탈 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{27}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{31}{54}$

답 $\frac{31}{54}$

05 해결단계

❶ 단계	적어도 한 면이 색칠된 정육면체의 개수를 구한다.
❷ 단계	$\frac{q}{p}$의 값을 구한다.
❸ 단계	$p+q$의 값을 구한다.

한 모서리의 길이가 1인 정육면체 중에서 어떤 면도 색칠되지 않은 정육면체의 개수는

$3\times3\times4=36$

적어도 한 면이 색칠된 정육면체의 개수는

$125-36=89$

따라서 선택한 정육면체가 적어도 한 면이 색칠된 정육면체일 확률은

$\frac{q}{p}=\frac{89}{125}$

이때, 89와 125는 서로소이므로

$p+q=125+89=214$

답 214

06 해결단계

❶ 단계	7개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	꺼낸 공에 적힌 네 개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 합이 다른 두 수의 합과 같을 때, 그 합의 최솟값과 최댓값을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 최솟값과 최댓값을 이용하여 경우를 나누고 각 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	꺼낸 공에 적힌 네 개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 합이 나머지 두 수의 합과 같을 확률을 구한다.

7개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$

이때, 꺼낸 공에 적힌 네 개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 합이 가장 작은 경우는 $(1, 2, 3, 4)$, 즉 그 합이 5일 때이고 합이 가장 큰 경우는 $(4, 5, 6, 7)$, 즉 그 합이 11일 때이므로 꺼낸 공에 적힌 네 개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 합이 다른 두 수의 합과 같은 경우는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) 그 합이 5인 경우

합이 5인 두 수는 $(1, 4)$, $(2, 3)$의 2쌍이므로

구하는 경우는 $(1, 2, 3, 4)$의 1가지

(ii) 그 합이 6인 경우

합이 6인 두 수는 $(1, 5)$, $(2, 4)$의 2쌍이므로

구하는 경우는 $(1, 2, 4, 5)$의 1가지

(iii) 그 합이 7인 경우

합이 7인 두 수는 $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$의 3쌍이므로 3쌍 중에서 순서와 상관없이 2쌍을 뽑는 경우의 수는

$\frac{3\times2}{2\times1}=3$

(iv) 그 합이 8인 경우

합이 8인 두 수는 $(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$의 3쌍이므로 같은 방법으로

$\frac{3\times2}{2\times1}=3$

(v) 그 합이 9인 경우

합이 9인 두 수는 $(2,\ 7)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$의 3쌍이므로 같은 방법으로

$\frac{3\times2}{2\times1}=3$

(vi) 그 합이 10인 경우

합이 10인 두 수는 $(3,\ 7)$, $(4,\ 6)$의 2쌍이므로

구하는 경우는 $(3,\ 4,\ 6,\ 7)$의 1가지

(vii) 그 합이 11인 경우

합이 11인 두 수는 $(4,\ 7)$, $(5,\ 6)$의 2쌍이므로

구하는 경우는 $(4,\ 5,\ 6,\ 7)$의 1가지

(i)~(vii)에서 꺼낸 공에 적힌 네 개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 합이 다른 두 수의 합과 같은 경우의 수는

$1+1+3+3+3+1+1=13$

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{35}$ 답 $\frac{13}{35}$

07 해결단계

❶ 단계	부전승으로 결승에 올라가는 사람을 기준으로 경우를 나눈다.
❷ 단계	❶ 단계의 각 경우에 대하여 을이 최종 우승할 확률을 구한다.
❸ 단계	이 시합에서 을이 최종 우승할 확률을 이용하여 p의 값을 구한다.

갑이 을을 이길 확률이 p이므로 을이 갑을 이길 확률은 $1-p$,

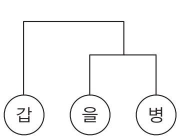
을이 병을 이길 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 병이 을을 이길 확률은 $\frac{1}{3}$,

병이 갑을 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 갑이 병을 이길 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

부전승으로 결승에 올라가는 사람을 기준으로 각 경우에 을이 최종 우승할 확률은 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) 부전승으로 갑이 올라가고 을이 최종 우승할 확률

부전승으로 갑이 올라갈 확률은 $\frac{1}{3}$



이때, 을과 병의 시합에서 을이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$

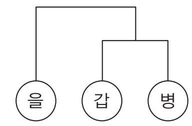
결승, 즉 갑과 을의 시합에서 을이 이길 확률은 $1-p$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(1-p)=\frac{2}{9}(1-p)$

(ii) 부전승으로 을이 올라가고 을이 최종 우승할 확률

부전승으로 을이 올라갈 확률은 $\frac{1}{3}$



이때, 갑과 병의 시합에서 갑이 이길 확률은 $\frac{2}{5}$

결승, 즉 을과 갑의 시합에서 을이 이길 확률은 $1-p$

또한, 갑과 병의 시합에서 병이 이길 확률은 $\frac{3}{5}$

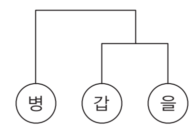
결승, 즉 을과 병의 시합에서 을이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\times\left\{\frac{2}{5}\times(1-p)+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{15}(2-p)$

(iii) 부전승으로 병이 올라가고 을이 최종 우승할 확률

부전승으로 병이 올라갈 확률은 $\frac{1}{3}$



갑과 을의 시합에서 을이 이길 확률은 $1-p$

결승, 즉 병과 을의 시합에서 을이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\times(1-p)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}(1-p)$

(i), (ii), (iii)에서 을이 최종 우승할 확률은

$\frac{2}{9}(1-p)+\frac{2}{15}(2-p)+\frac{2}{9}(1-p)=\frac{17}{30}$

위의 식의 양변에 90을 곱하면

$20(1-p)+12(2-p)+20(1-p)=51$

$64-52p=51,\ 52p=13$

$\therefore\ p=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

08 해결단계

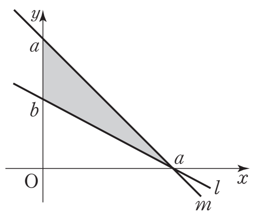
❶ 단계	$a,\ b$ 사이의 관계식을 세운다.
❷ 단계	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.
❸ 단계	확률을 구한다.

원판을 회전시킨 후 화살을 2번 쏠 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는

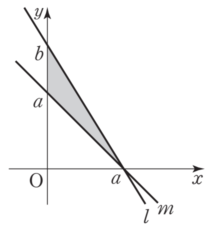
$10\times10=100$

두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

(i) $a>b$인 경우



(ii) $a<b$인 경우



(i), (ii)에서 구한 도형은 밑변의 길이가 $|a-b|$, 높이가 a인 삼각형이고, 그 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}a|a-b|=8 \qquad \therefore a|a-b|=16$

그런데 a, $|a-b|$는 모두 자연수이므로 16의 양의 약수이다.
또한, a, b는 10 이하인 자연수이므로 $a|a-b|=16$을 만족시키는 a, $|a-b|$, b의 값은 다음 표와 같다.

a	2	4	8
$\|a-b\|$	8	4	2
b	10	8	6, 10

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(2, 10)$, $(4, 8)$, $(8, 6)$, $(8, 10)$의 4가지이다.
따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$ 답 $\frac{1}{25}$

미리보는 학력평가 p. 88

1 ② 2 ③ 3 101 4 ④

1

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 합이 8보다 큰 경우는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.
(i) 두 눈의 수의 합이 9인 경우
$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 3가지
(iii) 두 눈의 수의 합이 11인 경우
$(5, 6)$, $(6, 5)$의 2가지
(iv) 두 눈의 수의 합이 12인 경우
$(6, 6)$의 1가지

(i)~(iv)에서 두 눈의 수의 합이 8보다 큰 경우의 수는
$4+3+2+1=10$
따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ 답 ②

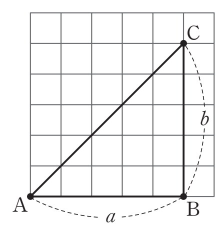
blacklabel 특강 참고

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하고 이것을 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음 표와 같다.

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

2

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
이때, 한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하면 삼각형 ABC는 밑변의 길이가 a, 높이가 b인 직각삼각형이므로 넓이는



$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}ab$

직각삼각형 ABC의 넓이가 15 이상이 되기 위해서는 ab의 값이 30 이상이어야 한다.
(i) $a=1$, 2, 3, 4일 때,
ab의 값이 30 이상이 되는 b의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $a=5$일 때,
$b=6$이면 $ab=30$이므로 가능한 경우의 수는 1
(iii) $a=6$일 때,
$b=5$이면 $ab=30$, $b=6$이면 $ab=36$이므로 가능한 경우의 수는 2
(i), (ii), (iii)에서 ab의 값이 30 이상인 경우의 수는
$1+2=3$
따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ 답 ③

blacklabel 특강 참고

한 개의 주사위를 두 번 던져 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 할 때, 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음 표와 같다.

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

3

주머니 A에 들어 있는 8개의 공 중 흰 공이 3개이므로 주머니 A에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{3}{8}$

주머니 B에 들어 있는 10개의 공 중 흰 공이 7개이므로 주머니 B에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{7}{10}$

따라서 두 주머니 A, B에서 각각 한 개씩 꺼낸 두 공이 모두 흰 공일 확률은

$\frac{q}{p}=\frac{3}{8}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{80}$

즉, $p=80$, $q=21$이므로

$p+q=101$ 답 101

4

빨간 공 1개, 파란 공 5개가 들어 있는 주머니에서 공을 1개 꺼낼 때, 빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{6}$, 파란 공을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{6}$이다.

이때, 두 사람 모두 파란 공을 꺼낼 확률은

$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

따라서 두 사람 중 적어도 한 사람이 빨간 공을 꺼낼 확률은

$1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$ 답 ④

T o m o r r o w

better than today

memo

Tomorrow

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo