b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

A등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

Speed Check

Ⅰ 삼각비

01. 삼각비

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 pp.9~10	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.11~15	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.16~17	미리보는 학력평가 p.18
01 ⑤ 02 ② 03 ④ 04 ① 05 ③ 06 30 07 ① 08 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$ 09 ④ 10 ①, ② 11 $\frac{11\sqrt{5}}{15}$ 12 29	01 ② 02 2 03 ④ 04 9 05 ④ 06 $\frac{3}{4}$ 07 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 08 ④ 09 $\sqrt{2}$ 10 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 11 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ 12 $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ 13 ① 14 ⑤ 15 $6-4\sqrt{2}$ 16 ④ 17 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 18 3 19 ① 20 15° 21 ④ 22 ② 23 ③ 24 ③ 25 ⑤ 26 ③ 27 ① 28 6° 29 130 m	01 (1) 47° (2) 0.1705 02 (1) $-1+\sqrt{5}$ (2) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 03 (1) $m=\frac{12}{5}$, $n=\frac{52}{5}$ (2) $\frac{10}{3}$ 04 $\frac{3}{5}$ 05 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 06 $\frac{2\sqrt{6}}{25}$ 07 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 08 15°	1 ① 2 ③ 3 ② 4 ③

02. 삼각비의 활용

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.20	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.21~26	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.27~28	미리보는 학력평가 p.29
01 28 02 ② 03 ⑤ 04 ④ 05 ④ 06 80	01 $2\sqrt{3}$ 02 ④ 03 $\sqrt{3}$ cm 04 ① 05 ④ 06 ④ 07 ② 08 ③ 09 30 10 $2\sqrt{3}$ 11 $\frac{\sqrt{21}}{14}$ 12 ④ 13 $\frac{\sqrt{21}}{14}$ 14 $2\sqrt{13}$ 15 ⑤ 16 $2\sqrt{7}$ 17 ④ 18 $6\sqrt{3}$ 19 ④ 20 ③ 21 ⑤ 22 ⑤ 23 $50\sqrt{2}$ m 24 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 25 ② 26 ② 27 18 cm^2 28 ① 29 $\frac{75}{8}$ 30 $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$ 31 ⑤ 32 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm^2 33 53.17 cm^2 34 30 cm^2 35 ① 36 $(300\pi-300\sqrt{3})cm^2$	01 (1) $8\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{7}$ 02 $\sqrt{35}$ 03 (1) $(3-\sqrt{3})$cm (2) $(2\sqrt{3}-3)cm^2$ 04 17 05 $\frac{\sqrt{30}}{18}$ 06 $8\sqrt{3}$ m 07 21 08 41	1 ③ 2 ⑤ 3 ② 4 200

Ⅱ 원의 성질

03. 원과 직선

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.33	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.34~38	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.39~40	미리보는 학력평가 p.41
01 100π cm 02 110° 03 ③ 04 ④ 05 ③ 06 2 cm 07 ⑤	01 ① 02 ③ 03 24 04 1 05 ③ 06 10π cm 07 $6\sqrt{7}$ 08 ⑤ 09 ① 10 ① 11 ③ 12 16π 13 $2\sqrt{3}$ 14 ① 15 50° 16 ④ 17 ⑤ 18 ② 19 ② 20 4 21 2 22 $30-4\pi$ 23 21 24 $\sqrt{2}-1$ 25 52 26 16 27 ④ 28 ⑤ 29 9 : 4	01 (1) 60° (2) $3\sqrt{3}$ (3) π 02 $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ 03 24 04 6 05 $\sqrt{22}$ cm 06 20 km 07 $3\sqrt{15}$ 08 12 cm	1 ② 2 432 3 ④ 4 ②

04. 원주각

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.43	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.44~47	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.48~49	미리보는 학력평가 p.50
01 ⑤ 02 ② 03 38° 04 ① 05 21° 06 ②	01 ③ 02 16π cm 03 ② 04 $5\sqrt{3}$ 05 ⑤ 06 60° 07 9 08 ⑤ 09 $\sqrt{61}$ 10 ⑤ 11 ④ 12 6 cm 13 ③ 14 ② 15 11 16 ⑤ 17 22° 18 30° 19 60 cm 20 ① 21 50° 22 ① 23 ③	01 (1) $(3\sqrt{3},\ 3)$ (2) $12\pi-9\sqrt{3}$ (3) $(3\sqrt{3}+6,\ 3)$ 02 500 m 03 (1) $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ (2) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ cm 04 14 05 100 06 21 07 3 08 90	1 ⑤ 2 172 3 ①

05. 원주각의 활용

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.52	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.53~56	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.57~58	미리보는 학력평가 p.59
01 ③ 02 ⑤ 03 105° 04 ③ 05 ⑤	01 ③ 02 3 03 ⑤ 04 100° 05 ④ 06 8π 07 ④, ⑤ 08 $16\sqrt{10}$ 09 5 10 ③ 11 50° 12 ④ 13 $13\sqrt{2}$ 14 ①, ③ 15 ⑤ 16 6개 17 ⑤ 18 40° 19 ⑤ 20 80° 21 ② 22 67° 23 ① 24 6	01 (1) 등변사다리꼴 (2) 135 02 125° 03 20° 04 (1) $4\sqrt{6}$ (2) $24\sqrt{2}$ 05 115° 06 131 07 55° 08 $50\pi+50$	1 ③ 2 ⑤ 3 ③ 4 $\frac{9}{4}$

Ⅲ 통계

06. 대푯값과 산포도

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.63	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.64~68	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.69~70	미리보는 학력평가 p.71
01 ② 02 ② 03 3.8 04 ④ 05 평균 : 20, 분산 81, 표준편차 : 9 06 ③	01 ①, ③ 02 ②, ④ 03 ③ 04 60 kg 05 ⑤ 06 11 07 36 08 ⑤ 09 6, 20 10 ① 11 ③ 12 $\sqrt{3}$점 13 ①, ③ 14 8 15 $2\sqrt{11}$ 16 6 17 ④ 18 ⑤ 19 110 20 9.6 21 39 22 $m=4$, $V=5$ 23 $\frac{26}{3}$ 24 ② 25 ⑤ 26 ③ 27 ④ 28 ①	01 (1) 제품 B (2) 제품 B 02 6점, 8점 또는 8점 6점 03 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{20}{3}$ 04 6, 6 05 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$개 06 최댓값 : 87, 최솟값 : 85 07 평균 : 30점, 표준편차 : $5\sqrt{2}$점 08 7	1 124 2 16 3 252 4 168

07. 산점도와 상관관계

Step 1 / 시험에 꼭 나오는 문제 p.73	Step 2 / A등급을 위한 문제 pp.74~76	Step 3 / 종합 사고력 도전 문제 pp.77~78	미리보는 학력평가 p.79
01 12 02 ③ 03 ④ 04 ⑤ 05 ①	01 ⑤ 02 33점 03 ④ 04 550 05 $45<m\le 47.5$ 06 ①, ④ 07 15 cm 08 ⑤ 09 D 10 ②, ④ 11 ① 12 ①	01 (1) 5명 (2) 30 % (3) 음의 상관관계 02 130점 03 (1) 30 % (2) 40 % 04 70개 05 50% 06 5명 07 B, C 08 5가지	1 ③ 2 45 3 ⑤ 4 ㄱ, ㄴ

I 삼각비

01 삼각비

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 pp. 9~10

01 ⑤	02 ②	03 ④	04 ①	05 ③
06 30	07 ①	08 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$	09 ④	
10 ①, ②	11 $\frac{11\sqrt{5}}{15}$	12 29		

01

직각삼각형 ACB에서

$\overline{AC}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$$\therefore \cos A+\sin B-\tan A=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}-\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

| 다른풀이 |

직각삼각형 ACB에서

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$ $\therefore \angle A=30^\circ$ ($\because 0^\circ<\angle A<90^\circ$)

$\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$ $\therefore \angle B=60^\circ$ ($\because 0^\circ<\angle B<90^\circ$)

$$\therefore \cos A+\sin B-\tan A=\cos 30^\circ+\sin 60^\circ-\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

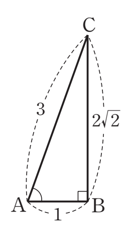
02

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 $\overline{AC}=3$이라 하면 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이다.

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=3^2-(2\sqrt{2})^2=9-8=1$$

$\therefore \overline{AB}=1$ ($\because \overline{AB}>0$)



$\therefore \cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

답 ②

blacklabel 특강 필수개념

한 삼각비의 값을 알 때, 다른 삼각비의 값 구하기

직각삼각형에서 한 삼각비의 값을 알면 다음과 같은 순서로 다른 두 삼각비의 값을 구할 수 있다.

(i) 주어진 삼각비의 값을 갖는 가장 간단한 직각삼각형을 그린다.
(ii) 피타고라스 정리를 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구한다.
(iii) 다른 두 삼각비의 값을 구한다.

03

$\triangle$ABD와 $\triangle$CAD에서

$\angle ADB=\angle CDA=90^\circ$

$\angle BAD=\angle A-\angle CAD=90^\circ-\angle CAD=\angle ACD$

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CAD$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{BD}:\overline{AD}$이므로

$\overline{AD}^2=\overline{BD}\times\overline{CD}=5\times4=20$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because \overline{AD}>0$)

따라서 직각삼각형 ABD에서

$\tan x=\tan(\angle BAD)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 ④

blacklabel 특강 참고

닮은 도형에서 대응각의 크기는 서로 같고 $\triangle ABD \backsim \triangle CAD$ (AA 닮음)이므로 $\triangle$CAD에서 $\tan x$를 구할 수도 있다.

$\therefore \tan x=\tan(\angle ACD)=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

04

정육면체의 한 모서리의 길이를 x ($x>0$)라 하자.

$\overline{EG}$는 정사각형 EFGH의 대각선이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{EG}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2=x^2+x^2=2x^2$$

$\therefore \overline{EG}=\sqrt{2}x$ ($\because \overline{EG}>0$)

또한, $\triangle$AEG는 $\angle AEG=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AG}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2=x^2+(\sqrt{2}x)^2=x^2+2x^2=3x^2$$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{3}x$ ($\because \overline{AG}>0$)

따라서 직각삼각형 AEG에서

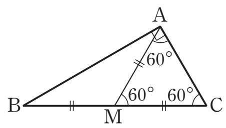
$\cos a^\circ=\frac{\overline{EG}}{\overline{AG}}=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ①

05

점 M은 직각삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로

$\overline{AM}=\overline{CM}$



이때, $\angle AMC=60^\circ$이므로 $\triangle AMC$는 정삼각형이다.

따라서 $\angle ACB=60^\circ$이므로

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 답 ③

| 다른풀이 |

$\triangle AMC$는 정삼각형이므로 $\overline{AC}=a\ (a>0)$라 하면

$\overline{BC}=2a$

이때, 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a\ (\because a>0)$

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$

06

$15<x<60$에서 $0^\circ<(2x-30)^\circ<90^\circ$

이때, $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$이므로 $(2x-30)^\circ=30^\circ$

$2x-30=30 \qquad \therefore x=30$ 답 30

07

$\triangle ABC$에서

$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{3}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore \overline{AB}=6$

$\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BC}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \overline{BC}=3\sqrt{3}$

한편, $\triangle ADB$에서 $\angle ABC$는 $\angle B$의 외각이므로

$15^\circ+\angle DAB=30^\circ \qquad \therefore \angle DAB=15^\circ$

즉, $\angle BDA=\angle DAB=15^\circ$에서 $\triangle ADB$는 $\overline{AB}=\overline{DB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{DB}=\overline{AB}=6$

$\therefore \overline{CD}=\overline{DB}+\overline{BC}=6+3\sqrt{3}$

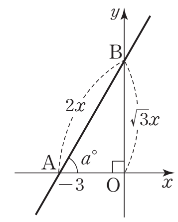
따라서 $\triangle ADC$에서

$\tan 15^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{3}{6+3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ 답 ①

08

점 $(-3,\ 0)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$\overline{AO}=3$



이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 a°에 대하여 $\sin a^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\overline{BO}=\sqrt{3}x$, $\overline{AB}=2x\ (x>0)$라 하면

직각삼각형 AOB에서

$(2x)^2=(\sqrt{3}x)^2+3^2$, $x^2=9$

$\therefore x=3\ (\because x>0) \qquad \therefore B(0,\ 3\sqrt{3})$

따라서 직선의 기울기는 $\dfrac{\overline{BO}}{\overline{AO}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

또한, y절편은 $3\sqrt{3}$이므로 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$ 답 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

| 다른풀이 |

$0<a<90$이므로 $\sin a^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 $a=60$

즉, 구하는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로 이 직선의 기울기는

$\tan a^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

구하는 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+b$ (b는 상수)라 하면 이 직선이 점 $(-3,\ 0)$을 지나므로 $x=-3$, $y=0$을 대입하면

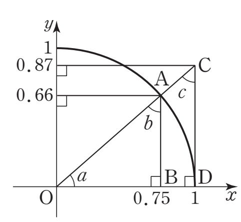
$0=\sqrt{3}\times(-3)+b \qquad \therefore b=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

09

오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 정하면 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 x축에 수직이므로 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$



$\therefore \angle b=\angle c$ ($\because$ 동위각)

① $\cos a=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{0.75}{1}=0.75$

② $\tan a=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{0.87}{1}=0.87$

③ $\sin b=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{0.75}{1}=0.75$

④ $\sin c=\sin b=0.75$

⑤ $\cos c=\cos b=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{0.66}{1}=0.66$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

10

① $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$에서 $\sin 40^\circ>\frac{1}{2}$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$에서 $\cos 70^\circ<\frac{1}{2}$

$\therefore \sin 40^\circ>\cos 70^\circ$

② $\sin 35^\circ=\cos(90^\circ-35^\circ)=\cos 55^\circ$

③ $\tan 45^\circ=1$에서 $\tan 50^\circ>1$

$\cos 0^\circ=1$에서 $\cos 38^\circ<1$

$\therefore \cos 38^\circ<\tan 50^\circ$

④ $\tan 90^\circ$의 값은 정할 수 없다.

⑤ $\sin 60^\circ\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 60^\circ\times\tan 30^\circ\neq\cos 30^\circ$

따라서 옳은 것은 ①, ②이다. 답 ①, ②

11

$\angle x$의 크기가 커질수록 $\sin x$의 값은 증가하고 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,

$\sin 90^\circ=1$이므로 $30^\circ<\angle x<90^\circ$에서

$\frac{1}{2}<\sin x<1$

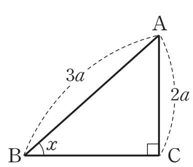
즉, $1-2\sin x<0$, $1+\sin x>0$이므로

$\sqrt{(1-2\sin x)^2}+\sqrt{(1+\sin x)^2}=2$에서

$-(1-2\sin x)+(1+\sin x)=2$

$3\sin x=2 \qquad \therefore \sin x=\frac{2}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$, $\angle ABC=\angle x$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3a$, $\overline{AC}=2a\ (a>0)$라 하면 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{BC}=\sqrt{(3a)^2-(2a)^2}=\sqrt{5}a\ (\because a>0)$

$\therefore \cos x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{5}a}{3a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan x=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{2a}{\sqrt{5}a}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos x+\tan x=\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{15}$ 답 $\frac{11\sqrt{5}}{15}$

blacklabel 특강 필수개념

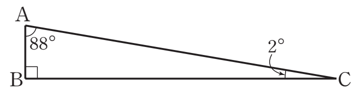
제곱근의 성질

$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

12

다음 그림과 같이 지구, 달, 태양의 중심을 각각 A, B, C라 하면 △ABC에서

$\angle ACB=180^\circ-(90^\circ+88^\circ)=2^\circ$



지구와 태양 사이의 거리는 지구와 달 사이의 거리의 k배이므로

$\overline{AC}=k\overline{AB} \qquad \therefore k=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

이때, $\sin 2^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$이므로

$k=\frac{1}{\sin 2^\circ}=\frac{1}{0.0349}=28.6\times\times\times$

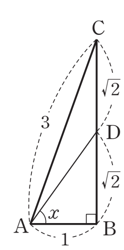
따라서 k의 값을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 구하면 29이다. 답 29

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 11~15

01 ②	02 2	03 ④	04 9	05 ④
06 $\frac{3}{4}$	07 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$	08 ④	09 $\sqrt{2}$	10 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$	12 $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$	13 ①	14 ⑤	15 $6-4\sqrt{2}$
16 ④	17 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	18 3	19 ①	20 15°
21 ④	22 ②	23 ③	24 ③	25 ⑤
26 ③	27 ①	28 6°	29 130 m	

01

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{BC}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

변 BC의 중점이 D이므로

$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

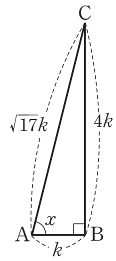
$\overline{AD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \sin x=\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos x=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

02

$\tan x=4$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$, $\angle CAB=\angle x$, $\overline{AB}=k$, $\overline{BC}=4k\ (k>0)$인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{k^2+(4k)^2}=\sqrt{17k^2}=\sqrt{17}k\ (\because k>0)$이므로

$\cos x=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{k}{\sqrt{17}k}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{4k}{\sqrt{17}k}=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$\therefore 2\cos x+3\sin x=2\times\dfrac{1}{\sqrt{17}}+3\times\dfrac{4}{\sqrt{17}}=\dfrac{14}{\sqrt{17}}$,

$2\sin x-\cos x=2\times\dfrac{4}{\sqrt{17}}-\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\dfrac{7}{\sqrt{17}}$

$\therefore \dfrac{2\cos x+3\sin x}{2\sin x-\cos x}=\dfrac{\frac{14}{\sqrt{17}}}{\frac{7}{\sqrt{17}}}=2$

답 2

03

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3^2+4^2=25$

$\therefore \overline{BC}=5\ (\because \overline{BC}>0)$

ㄱ. 직각삼각형 ABC에서

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{1}{2}\times5\times\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{12}{5}$

ㄴ. 직각삼각형 ADH에서 $\tan(\angle ADH)=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=2$이므로

$\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{5}\ (\because ㄱ)$

$=\dfrac{6}{5}$

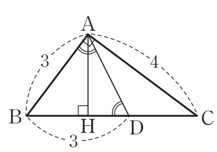
직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}^2=\overline{AB}^2-\overline{AH}^2=3^2-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2=\dfrac{81}{25}$

$\therefore \overline{BH}=\dfrac{9}{5}\ (\because \overline{BH}>0)$

$\therefore \overline{BD}=\overline{BH}+\overline{DH}=\dfrac{9}{5}+\dfrac{6}{5}=3$

ㄷ. $\overline{AB}=\overline{BD}=3$에서 $\triangle ABD$는 이등변삼각형이므로



$\angle BAD=\angle ADB$

$\therefore \tan(\angle BAD)=\tan(\angle ADB)$

$=\tan(\angle ADH)=2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

blacklabel 특강 풀이첨삭

ㄴ에서 삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{BH}$의 길이를 구해도 된다.

$\triangle ABH$, $\triangle CBA$에서

$\angle AHB=\angle CAB=90^\circ$, $\angle ABH=\angle CBA$는 공통

$\therefore \triangle ABH \backsim \triangle CBA$ (AA 닮음)

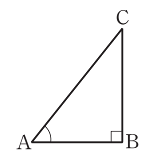
즉, $\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BH}:\overline{BA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{CB}\times\overline{BH}$

$9=5\times\overline{BH}\qquad \therefore \overline{BH}=\dfrac{9}{5}$

04

$0^\circ<A<90^\circ$이므로 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$이고 $\overline{AC}$를 빗변으로 하는 직각삼각형 ABC를 생각하면



$\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\cos A=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

이때, $\sin A:\cos A=5:4$에서

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}:\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=5:4$, 즉 $\overline{BC}:\overline{AB}=5:4$이므로

$4\overline{BC}=5\overline{AB}\qquad \therefore \overline{BC}=\dfrac{5}{4}\overline{AB}$

따라서 $\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{4}$이므로

$\dfrac{\tan A+1}{\tan A-1}=\dfrac{\frac{5}{4}+1}{\frac{5}{4}-1}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}=9$

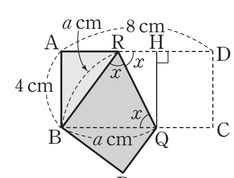
답 9

05

$\overline{BR}=\overline{DR}$, $\angle DRQ=\angle BRQ=\angle x$ ($\because$ 접은 각)

$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle BQR=\angle DRQ=\angle x$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle BQR$는 이등변삼각형이므로



$\overline{BR}=a$ cm라 하면

$\overline{DR}=\overline{BR}=\overline{BQ}=a$ cm,

$\overline{AR}=\overline{PQ}=\overline{CQ}=(8-a)$ cm

직각삼각형 ABR에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2=4^2+(8-a)^2$

$a^2=16+(64-16a+a^2)$

$16a=80\qquad \therefore a=5$

$\therefore \overline{DR}=\overline{BR}=\overline{BQ}=5$ cm, $\overline{AR}=\overline{CQ}=3$ cm

점 Q에서 $\overline{DR}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{RH}=\overline{AH}-\overline{AR}=\overline{BQ}-\overline{AR}=5-3=2$ (cm)

또한, $\overline{HQ}=\overline{AB}=4$ cm이므로 직각삼각형 QHR에서 피타고라스 정리에 의하여

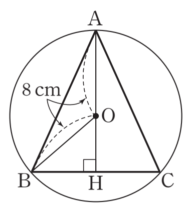
$\overline{RQ}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

따라서 직각삼각형 QHR에서

$\sin x=\dfrac{\overline{HQ}}{\overline{RQ}}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 답 ④

06

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABC는 원에 내접하는 이등변삼각형이므로 $\overline{AH}$는 원의 중심 O를 지난다.



이때, $\overline{AO}=\overline{BO}=8$ cm이므로 △ABO는 이등변삼각형이다.

$\therefore \angle ABO=\angle BAH$

또한, $\angle BAH=\angle CAH$이므로 △ABO에서

$\angle BOH=\angle ABO+\angle BAO=2\angle BAH=\angle A$

한편, $\overline{BH}=\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times12=6\,(\text{cm})$이므로

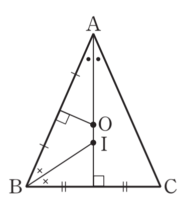
직각삼각형 OBH에서

$\sin A=\sin(\angle BOH)=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{OB}}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$ 답 $\dfrac{3}{4}$

blacklabel 특강 필수개념

이등변삼각형의 외심과 내심의 위치

이등변삼각형 ABC의 외심 O와 내심 I는 꼭지각의 이등분선 위에 있다.



07

직각삼각형 ABC에서 $\sin x=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\overline{AB}=3\overline{BC}=3\times6=18$

즉, 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{18^2-6^2}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서 $\overline{AC}=12\sqrt{2}$, $\overline{CD}=2\overline{BC}=12$이므로 피타고라스 정리에 의하여

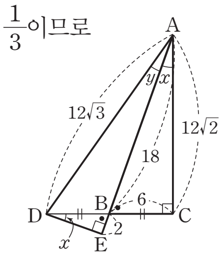
$\overline{AD}=\sqrt{12^2+(12\sqrt{2})^2}=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$

한편, 직각삼각형 DEB에서

$\angle BDE=90^\circ-\angle DBE=90^\circ-\angle ABC$ ($\because$ 맞꼭지각)

$=\angle BAC=\angle x$

즉, 직각삼각형 DEB에서 $\sin x=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{DB}}=\dfrac{1}{3}$이므로



$\overline{BE}=\dfrac{1}{3}\overline{DB}=\dfrac{1}{3}\times6=2$

따라서 직각삼각형 ADE에서

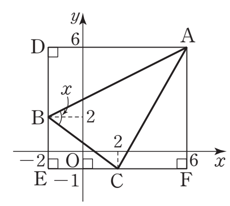
$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=18+2=20$,

$\overline{AD}=12\sqrt{3}$이므로

$\cos y=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{20}{12\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 답 $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

08

△ABC를 내접하고 각 변이 모두 x축 또는 y축에 평행한 직사각형을 그린 후, 꼭짓점을 각각 D, E, F라 하면 오른쪽 그림과 같다.



직각삼각형 ADB에서

$\overline{AD}=6-(-2)=8$, $\overline{DB}=6-2=4$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

직각삼각형 BEC에서

$\overline{BE}=2-(-1)=3$, $\overline{EC}=2-(-2)=4$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

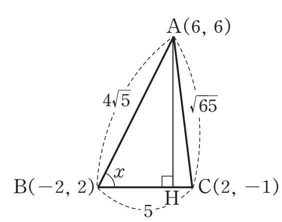
직각삼각형 ACF에서

$\overline{AF}=6-(-1)=7$, $\overline{CF}=6-2=4$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$

오른쪽 그림과 같이 △ABC의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 직각삼각형 ABH, AHC에서 각각 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AH}^2=(4\sqrt{5})^2-\overline{BH}^2$

$=(\sqrt{65})^2-(5-\overline{BH})^2$

$80-\overline{BH}^2=65-(25-10\overline{BH}+\overline{BH}^2)$

$10\overline{BH}=40$ $\quad\therefore \overline{BH}=4$

즉, 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{64}=8$이므로

$\sin x=\dfrac{8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x=\dfrac{4}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin x+\cos x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 ④

09 해결단계

❶단계	피타고라스 정리를 이용하여 각 변의 길이를 구한다.
❷단계	서로 닮음인 삼각형 두 개를 찾는다.
❸단계	$\angle$ABD 또는 $\angle$AEF와 같은 크기의 각을 찾고 $\tan(x+y)$의 값을 구한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(\sqrt{2})^2+4^2=18$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ($\because \overline{AB}>0$)

직각삼각형 ADC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{DC}^2=(\sqrt{2})^2+3^2=11$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{11}$ ($\because \overline{AD}>0$)

직각삼각형 AEC에서 피타고라스 정리에 의하여

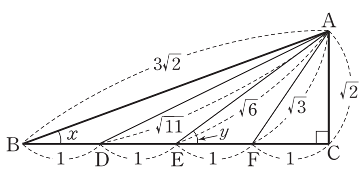
$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2+\overline{EC}^2=(\sqrt{2})^2+2^2=6$

$\therefore \overline{AE}=\sqrt{6}$ ($\because \overline{AE}>0$)

직각삼각형 AFC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{FC}^2=(\sqrt{2})^2+1^2=3$

$\therefore \overline{AF}=\sqrt{3}$ ($\because \overline{AF}>0$)



이때, $\triangle$AEF와 $\triangle$BAF에서

$\overline{AE}:\overline{EF}:\overline{AF}=\overline{AB}:\overline{AF}:\overline{BF}=\sqrt{6}:1:\sqrt{3}$이므로

$\triangle$AEF$\backsim\triangle$BAF (SSS 닮음)

$\therefore \angle EAF=\angle ABF=\angle x$

$\triangle$AEF에서 삼각형의 외각의 성질에 의하여

$\angle AFC=\angle EAF+\angle AEF=\angle x+\angle y$

따라서 직각삼각형 AFC에서

$\tan(x+y)=\tan(\angle AFC)=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{FC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

10

$\triangle$EFG는 $\overline{EF}=\overline{FG}=5$, $\angle EFG=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{EG}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2=5^2+(5\sqrt{2})^2=50$

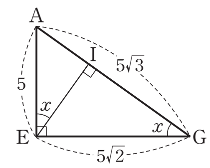
$\therefore \overline{EG}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ ($\because \overline{EG}>0$)

또한, $\triangle$AEG는 $\overline{AE}=5$, $\overline{EG}=5\sqrt{2}$, $\angle AEG=90^\circ$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AG}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2=5^2+(5\sqrt{2})^2=75$

$\therefore \overline{AG}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$ ($\because \overline{AG}>0$)

이때, 오른쪽 그림에서



$\triangle$AEG$\backsim\triangle$AIE (AA 닮음)이므로

$\angle AGE=\angle AEI=\angle x$

따라서 직각삼각형 AEG에서

$\sin x=\sin(\angle AGE)=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AG}}=\dfrac{5}{5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11

원뿔의 밑면의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같다.

원뿔 A의 밑면의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$2\pi\times6\times\dfrac{240}{360}=2\pi\times r_1$

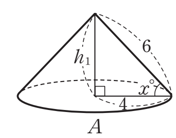
$\therefore r_1=4$

원뿔 B의 밑면의 반지름의 길이를 r_2라 하면

$2\pi\times6\times\dfrac{120}{360}=2\pi\times r_2$

$\therefore r_2=2$

한편, 원뿔 A의 높이를 h_1이라 하면 피타고라스 정리에 의하여

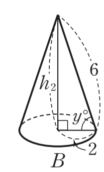


$6^2=h_1^2+4^2$

$h_1^2=36-16=20$

$\therefore h_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because h_1>0$)

원뿔 B의 높이를 h_2라 하면 피타고라스 정리에 의하여



$6^2=h_2^2+2^2$

$h_2^2=36-4=32$

$\therefore h_2=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ($\because h_2>0$)

따라서 $\tan x^\circ=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\tan y^\circ=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{\tan y^\circ}{\tan x^\circ}=2\sqrt{2}\div\dfrac{\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ 답 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

12

정사면체의 모든 면은 정삼각형이므로 $\triangle$ABC에서 $\overline{AM}$은 $\overline{BC}$를 수직이등분한다.

즉, $\angle AMB=90^\circ$인 직각삼각형 ABM에서 피타고라스 정리에 의하여

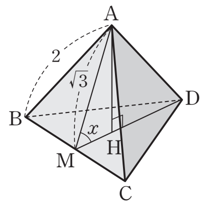
$2^2=1^2+\overline{AM}^2$

$\overline{AM}^2=4-1=3$ $\therefore \overline{AM}=\sqrt{3}$ ($\because \overline{AM}>0$)

같은 방법으로 $\triangle$DBC에서

$\overline{DM}=\sqrt{3}$

한편, 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{\text{MD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AMH에서 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{\text{AH}}^2=(\sqrt{3})^2-\overline{\text{MH}}^2$

또한, 직각삼각형 AHD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{AH}}^2=2^2-(\sqrt{3}-\overline{\text{MH}})^2$

따라서 $(\sqrt{3})^2-\overline{\text{MH}}^2=2^2-(\sqrt{3}-\overline{\text{MH}})^2$에서

$3-\overline{\text{MH}}^2=4-(3-2\sqrt{3}\,\overline{\text{MH}}+\overline{\text{MH}}^2)$

$2\sqrt{3}\,\overline{\text{MH}}=2 \qquad \therefore \overline{\text{MH}}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

따라서 $\sin x=\dfrac{\overline{\text{AH}}}{\overline{\text{AM}}}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\cos x=\dfrac{\overline{\text{MH}}}{\overline{\text{AM}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\sin x+\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}$

답 $\dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}$

blacklabel 특강 오답피하기

세 변의 길이가 주어진 삼각형에서 삼각비를 구할 때, 주어진 삼각형이 직각삼각형이 아니라면 수선의 발을 내려 주어진 삼각형을 두 개의 직각삼각형으로 나누어 삼각비를 구해야 한다. 즉, 문제에서 삼각형 AMD는 직각삼각형이 아니므로 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만든 후 삼각비를 구한다.

13

$\triangle$BFE에서 $\angle\text{EFB}=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$

$\triangle$CDF에서 $\angle\text{DFC}=180^\circ-(90^\circ+45^\circ)=45^\circ$

$\therefore \angle\text{CDF}=45^\circ$

즉, $\triangle$BFE와 $\triangle$CDF는 모두 직각이등변삼각형이다.

$\triangle$CDF에서 $\sin 45^\circ=\dfrac{\overline{\text{CD}}}{\overline{\text{DF}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\dfrac{\overline{\text{CD}}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \overline{\text{CD}}=\overline{\text{CF}}=\sqrt{3}$

$\triangle$DEF에서 $\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{\text{DF}}}{\overline{\text{DE}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

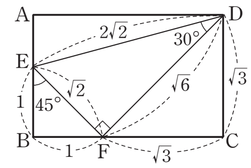
$\dfrac{\sqrt{6}}{\overline{\text{DE}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \overline{\text{DE}}=2\sqrt{2}$

또한, $\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{\text{EF}}}{\overline{\text{DF}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\dfrac{\overline{\text{EF}}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \therefore \overline{\text{EF}}=\sqrt{2}$

$\triangle$BFE에서 $\cos 45^\circ=\dfrac{\overline{\text{BE}}}{\overline{\text{EF}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\dfrac{\overline{\text{BE}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore \overline{\text{BE}}=\overline{\text{BF}}=1$



$\therefore \overline{\text{AD}}=\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BF}}+\overline{\text{CF}}=1+\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\angle\text{ADE}=90^\circ-(30^\circ+45^\circ)=15^\circ$이므로

$\cos 15^\circ=\dfrac{\overline{\text{AD}}}{\overline{\text{DE}}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

답 ①

14

$\angle\text{A} : \angle\text{C}=1 : 2$에서 $\angle\text{C}=2\angle\text{A}$

$\angle\text{B}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle\text{A}+\angle\text{B}+\angle\text{C}=180^\circ$이므로

$\angle\text{A}+90^\circ+2\angle\text{A}=180^\circ$, $3\angle\text{A}=90^\circ$

$\therefore \angle\text{A}=30^\circ$, $\angle\text{C}=60^\circ$

따라서 $\tan C=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로

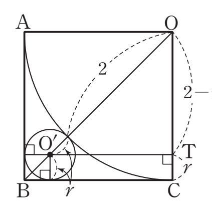
$\dfrac{1}{\tan C-1}+\dfrac{1}{\tan C+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

답 ⑤

15

오른쪽 그림과 같이 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하고 원의 중심 O′에서 $\overline{\text{OC}}$에 내린 수선의 발을 T라 하면



$\overline{\text{OO'}}=2+r$, $\overline{\text{OT}}=2-r$,

$\overline{\text{O'T}}=2-r$이므로 $\triangle$OO′T는

$\overline{\text{OT}}=\overline{\text{O'T}}$, $\angle\text{OTO'}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

즉, $\angle\text{OO'T}=45^\circ$이므로

$\cos 45^\circ=\dfrac{\overline{\text{O'T}}}{\overline{\text{OO'}}}=\dfrac{2-r}{2+r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$4-2r=2\sqrt{2}+\sqrt{2}r$, $(2+\sqrt{2})r=4-2\sqrt{2}$

$\therefore r=\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=6-4\sqrt{2}$

따라서 구하는 원 O′의 반지름의 길이는 $6-4\sqrt{2}$이다.

답 $6-4\sqrt{2}$

| 다른풀이 |

$\overline{\text{OB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\text{O'B}}=\sqrt{2}r$이므로

$\overline{\text{OB}}=2+r+\sqrt{2}r=2\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2})r=2\sqrt{2}-2$

$\therefore r=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{1+\sqrt{2}}=6-4\sqrt{2}$

16

① $\dfrac{2-\cos 45^\circ}{2+\cos 45^\circ}=\dfrac{2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(4-\sqrt{2})^2}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}=\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}$

② $\cos 30^\circ+\sqrt{3}\tan 30^\circ-\sin 60^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=1$

③ $\sin 90^\circ-\sin 45^\circ\times\cos 45^\circ+\tan 45^\circ$

$=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

④ $(\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)(\sin 60^\circ-\cos 60^\circ)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

⑤ $\cos^2 45^\circ-2\tan 30^\circ\times\tan 60^\circ+\sin^2 45^\circ$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}-2+\dfrac{1}{2}=-1$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

17

이차방정식 $3x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{3}=3x$에서

$3x^2-(3+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

$(x-1)(3x-\sqrt{3})=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $0^\circ<A<B<90^\circ$에서 $\tan A<\tan B$이므로

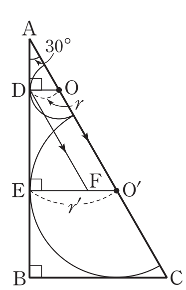
$\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan B=1$

$\therefore A=30^\circ,\ B=45^\circ$

$\therefore \cos 2(B-A)=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

18



오른쪽 그림과 같이 점 D를 지나고 $\overline{AC}$에 평행한 직선이 $\overline{EO'}$과 만나는 점을 F라 하면 △DEF에서

$\angle DEF=90^\circ$,

$\angle EDF=\angle BAC=30^\circ$ (∵ 동위각)이고

$\overline{DF}=\overline{OO'}=r'+r$, $\overline{EF}=r'-r$

따라서 직각삼각형 DEF에서

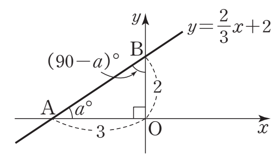
$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DF}}=\dfrac{r'-r}{r'+r}=\dfrac{1}{2}$

$2r'-2r=r'+r$, $r'=3r$

$\therefore \dfrac{r'}{r}=3$

답 3

19



오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\dfrac{2}{3}x+2$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

직선의 y절편이 2이므로

B(0, 2)

$y=\dfrac{2}{3}x+2$에 $y=0$을 대입하면

$x=-3 \qquad \therefore$ A$(-3, 0)$

즉, $\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=2$이므로 직각삼각형 AOB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\therefore \sin a^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos a^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

또한, $\angle ABO=(90-a)^\circ$이므로

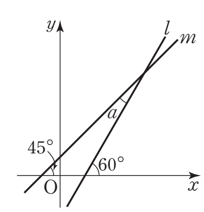
$\tan (90-a)^\circ=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \tan (90-a)^\circ-\sin a^\circ\times\cos a^\circ$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\times\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{27}{26}$

답 ①

20



직선 l의 기울기가 $\sqrt{3}$이고, $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$이므로 직선 l과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 60°이다.
(가)

또한, 직선 m의 기울기가 1이고, $\tan 45^\circ=1$이므로 직선 m과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 45°이다.
(나)

따라서 삼각형의 외각의 성질에 의하여

$45^\circ+\angle a=60^\circ$에서

$\angle a=60^\circ-45^\circ=15^\circ$
(다)

답 15°

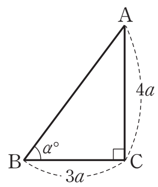
단계	채점 기준	배점
(가)	직선 l과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 구한 경우	40%
(나)	직선 m과 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 구한 경우	40%
(다)	$\angle a$의 크기를 구한 경우	20%

21

직선 $4x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{4}{3}x+1$의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로

$\tan\alpha^\circ=\frac{4}{3}$

즉, 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$, $\angle ABC=\alpha^\circ$, $\overline{BC}=3a$, $\overline{AC}=4a\ (a>0)$인 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.



이때, 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=\sqrt{25a^2}=5a$

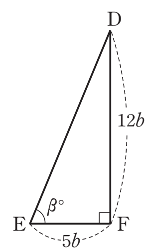
이므로

$\cos\alpha^\circ=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$

직선 $12x-5y+10=0$, 즉 $y=\frac{12}{5}x+2$의 기울기가 $\frac{12}{5}$이므로

$\tan\beta^\circ=\frac{12}{5}$

즉, 오른쪽 그림과 같이 $\angle F=90^\circ$, $\angle DEF=\beta^\circ$, $\overline{DF}=12b$, $\overline{EF}=5b\ (b>0)$인 직각삼각형 DEF를 생각할 수 있다.



이때, 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DE}=\sqrt{(5b)^2+(12b)^2}=\sqrt{169b^2}=13b$

이므로

$\sin\beta^\circ=\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=\frac{12b}{13b}=\frac{12}{13}$

$\therefore \cos\alpha^\circ+\sin\beta^\circ=\frac{3}{5}+\frac{12}{13}=\frac{99}{65}$

답 ④

22

사분원의 반지름의 길이를 a라 하자.

직각삼각형 BQP에서

$\cos x=\frac{\overline{BQ}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{BQ}}{a}$　　$\therefore \overline{BQ}=a\cos x$

$\therefore \overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=a-a\cos x=a(1-\cos x)$

직각삼각형 BCR에서

$\cos x=\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=\frac{a}{\overline{BR}}$　　$\therefore \overline{BR}=\frac{a}{\cos x}$

$\therefore \overline{PR}=\overline{BR}-\overline{BP}=\frac{a}{\cos x}-a$

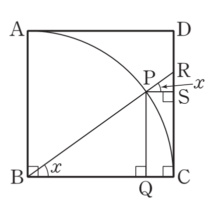
$=\frac{a-a\cos x}{\cos x}=\frac{a(1-\cos x)}{\cos x}$

$\therefore \frac{\overline{QC}}{\overline{PR}}=\frac{a(1-\cos x)}{\frac{a(1-\cos x)}{\cos x}}=\cos x$

답 ②

다른풀이

오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 직선이 변 CD와 만나는 점을 S라 하면



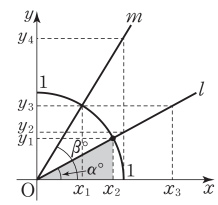
$\angle RPS=\angle x$ (∵ 동위각), $\overline{PS}=\overline{QC}$

따라서 직각삼각형 RPS에서

$\frac{\overline{QC}}{\overline{PR}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{PR}}=\cos x$

23

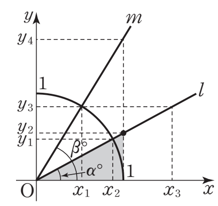
①, ② 직선 l과 사분원의 교점 (x_2, y_1)을 한 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에서



$\sin\alpha^\circ=\frac{y_1}{1}$, $\cos\alpha^\circ=\frac{x_2}{1}$

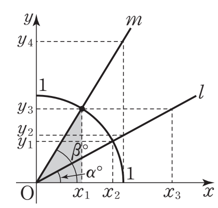
$\therefore y_1=\sin\alpha^\circ$, $x_2=\cos\alpha^\circ$

③ 직선 l 위의 점 $(1, y_2)$를 한 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에서



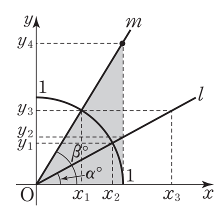
$\tan\alpha^\circ=\frac{y_2}{1}$　　$\therefore y_2=\tan\alpha^\circ$

④ 직선 m과 사분원의 교점 (x_1, y_3)을 한 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에서



$\cos\beta^\circ=\frac{x_1}{1}$　　$\therefore x_1=\cos\beta^\circ$

⑤ 직선 m 위의 점 $(1, y_4)$를 한 꼭짓점으로 하는 직각삼각형에서



$\tan\beta^\circ=\frac{y_4}{1}$　　$\therefore y_4=\tan\beta^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

24

$\overline{CD}\,/\!/\,\overline{EF}\,/\!/\,\overline{GH}$이므로

$\angle BDC=\angle BEF=\angle BGH=\angle x$ (∵ 동위각)

즉, 직각삼각형 BCD에서

$\tan x=\tan(\angle BDC)=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\overline{BC}$

직각삼각형 BFE에서

$\sin x=\sin(\angle BEF)=\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}=\overline{BF}$

$\therefore \tan x-\sin x=\overline{BC}-\overline{BF}=\overline{CF}$

한편, △BFE와 △BCD에서

$\angle EFB=\angle DCB=90^\circ$, ∠B는 공통이므로

△BFE∽△BCD (AA 닮음)

즉, $\overline{BF}:\overline{FC}=\overline{BE}:\overline{DE}$이므로

$\frac{\tan x-\sin x}{\sin x}=\frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}=\overline{DE}$

답 ③

| 다른풀이 |

직각삼각형 BCD에서

$\tan x = \tan(\angle \mathrm{BDC}) = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CD}}} = \overline{\mathrm{BC}}$,

$\sin x = \sin(\angle \mathrm{BDC}) = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$

$$\therefore \frac{\tan x - \sin x}{\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} - 1 = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}} - 1 = \overline{\mathrm{BD}} - \overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{DE}}$$

25

① $0^\circ < x^\circ < 90^\circ$이므로 $0 < \overline{\mathrm{AB}} < 1$

그런데 $\overline{\mathrm{AC}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AC}}$

② 직각삼각형 ABC에서 $\sin x^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{1} = \overline{\mathrm{BC}}$

③ 직각삼각형 ABC에서 $\cos x^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{1} = \overline{\mathrm{AB}}$

④ x°의 크기가 작아질수록 $\cos x^\circ$의 값은 커진다.

⑤ x°의 크기가 커질수록 $\sin x^\circ$의 값은 커진다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

26

$0^\circ < x^\circ < 90^\circ$일 때, x°의 크기가 커질수록

$\sin x^\circ$, $\tan x^\circ$의 값은 커지고, $\cos x^\circ$의 값은 작아진다.

ㄱ. $\cos 0^\circ = 1$

ㄴ. $0^\circ < a^\circ < 45^\circ$에서 $0 < \sin a^\circ < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ㄷ, ㅁ. $45^\circ < b^\circ < d^\circ < 90^\circ$에서 $1 < \tan b^\circ < \tan d^\circ$

ㄹ. $45^\circ < c^\circ < 90^\circ$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin c^\circ < 1$

즉, 주어진 삼각비의 값의 대소 관계는

$\sin a^\circ < \sin c^\circ < \cos 0^\circ < \tan b^\circ < \tan d^\circ$

이므로 주어진 삼각비의 값을 크기가 가장 작은 것부터 크기순으로 바르게 나열하면 ㄴ－ㄹ－ㄱ－ㄷ－ㅁ이다. 답 ③

27

이차방정식 $2x^2 - x - 1 = 0$에서

$(2x+1)(x-1) = 0$

$\therefore x = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

그런데 $0^\circ < B < 90^\circ$에서 $\tan B > 0$이므로

$x = 1 \qquad \therefore \tan B = 1$

즉, $\angle \mathrm{B} = 45^\circ$이므로 $0^\circ < A < 45^\circ$

이때, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$0 < \sin A < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < 1$

따라서 $\cos A - \sin A > 0$, $\cos A + \sin A > 0$이므로

$\sqrt{(\cos A - \sin A)^2} - \sqrt{(\cos A + \sin A)^2}$

$= (\cos A - \sin A) - (\cos A + \sin A)$

$= -2 \sin A$ 답 ①

blacklabel 특강 참고

삼각비의 값의 대소 관계

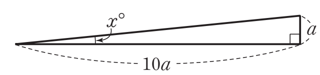
(1) $0^\circ \le x^\circ < 45^\circ$이면 $\sin x^\circ < \cos x^\circ$

(2) $x^\circ = 45^\circ$이면 $\sin x^\circ = \cos x^\circ < \tan x^\circ$

(3) $45^\circ < x^\circ < 90^\circ$이면 $\cos x^\circ < \sin x^\circ < \tan x^\circ$

28

표지판에 의하면 도로의 수평 거리에 대한 수직 거리의 비율이 10 %이므로 수직 거리를 a $(a>0)$라 하면 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이때, 도로가 수평면에 대하여 기울어진 정도를 나타내는 각의 크기를 x°라 하면

$\tan x^\circ = \dfrac{a}{10a} = 0.1$

주어진 삼각비의 표에서 tan의 값이 0.1인 각의 크기는 6°이므로 구하는 각의 크기는 6°이다. 답 6°

29

$\triangle \mathrm{ABH}$에서 $\angle \mathrm{ABH} = 28^\circ$이므로

$\angle \mathrm{BAH} = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ) = 62^\circ$

$\triangle \mathrm{ACH}$에서 $\angle \mathrm{ACH} = 42^\circ$이므로

$\angle \mathrm{CAH} = 180^\circ - (90^\circ + 42^\circ) = 48^\circ$

$\overline{\mathrm{AH}} = h$ m라 하면 직각삼각형 ACH에서

$\tan 48^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$이므로

$1.1106 = \dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{h} \qquad \therefore \overline{\mathrm{CH}} = 1.1106h\,(\mathrm{m})$

또한, 직각삼각형 ABH에서 $\tan 62^\circ = \dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$이므로

$1.8807 = \dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{h} \qquad \therefore \overline{\mathrm{BH}} = 1.8807h\,(\mathrm{m})$

이때, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BH}} - \overline{\mathrm{CH}}$이므로

$100 = 1.8807h - 1.1106h$, $100 = 0.7701h$

$\therefore h = \dfrac{100}{0.7701} = 129.8\times\times\times$

따라서 구하는 $\overline{\mathrm{AH}}$의 길이는 130 m이다. 답 130 m

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 16~17

01 (1) 47° (2) 0.1705 **02** (1) $-1+\sqrt{5}$ (2) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

03 (1) $m=\frac{12}{5}$, $n=\frac{52}{5}$ (2) $\frac{10}{3}$ **04** $\frac{3}{5}$ **05** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

06 $\frac{2\sqrt{6}}{25}$ **07** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **08** 15°

01 해결단계

(1)	❶ 단계	삼각비의 표를 이용하여 $\angle x$의 크기를 구한다.
(2)	❷ 단계	삼각비의 표를 이용하여 $\overline{DE}$의 길이를 구한다.
	❸ 단계	$\triangle BED$의 넓이를 구한다.

(1) $0.7314=\overline{BC}=\frac{\overline{BC}}{1}=\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}=\cos(\angle OBC)$

이때, 주어진 삼각비의 표에서 $0.7314=\cos 43^\circ$이므로

$\angle OBC=43^\circ$

$\therefore \angle x=90^\circ-43^\circ=47^\circ$

(2) 직각삼각형 OED에서 $\tan 47^\circ=\frac{\overline{DE}}{\overline{OE}}=1.0724$이므로

$\overline{DE}=1.0724$

$\therefore \triangle BED=\triangle OED-\triangle OEB$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OE}\times\overline{DE}-\frac{1}{2}\times\overline{OE}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times1\times1.0724-\frac{1}{2}\times1\times0.7314$

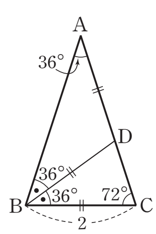
$=0.1705$

답 (1) 47° (2) 0.1705

02 해결단계

(1)	❶ 단계	$\overline{CD}$의 길이를 구한다.
(2)	❷ 단계	점 D에서 $\overline{AB}$에 수선의 발을 내린다.
	❸ 단계	$\cos 36^\circ$의 값을 구한다.
(3)	❹ 단계	점 A에서 $\overline{BC}$에 또는 점 B에서 $\overline{CD}$에 수선의 발을 내린다.
	❺ 단계	$\sin 18^\circ$의 값을 구한다.

(1) $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로



$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$

$\overline{BD}$가 $\angle B$의 이등분선이므로

$\angle DBC=\angle ABD=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$

즉, $\triangle ABD$는 $\overline{DA}=\overline{DB}$인 이등변삼각형이다.

또한, $\triangle ABD$에서

$\angle BDC=36^\circ+36^\circ=72^\circ=\angle DCB$

즉, $\triangle BCD$는 $\overline{DB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{DB}=\overline{DA}=\overline{BC}=2$

$\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$

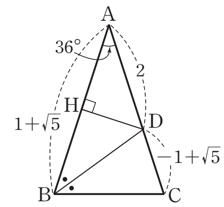
$(2+x):2=2:x$, $x(2+x)=4$

$x^2+2x-4=0$ $\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

이때, $x>0$이므로 $x=-1+\sqrt{5}$

따라서 $\overline{CD}$의 길이는 $-1+\sqrt{5}$이다.

(2) $\overline{AB}=\overline{AC}=2+(-1+\sqrt{5})=1+\sqrt{5}$



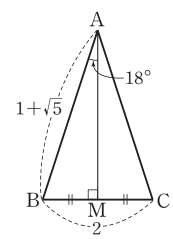
$\triangle ABD$는 $\overline{DA}=\overline{DB}$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 직각삼각형 AHD에서

$\cos 36^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

(3) $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 M이라 하면 $\triangle ABC$가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로



$\overline{AM}\perp\overline{BC}$, $\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1$

따라서 직각삼각형 ABM에서

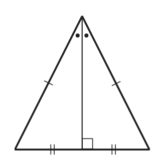
$\sin 18^\circ=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

답 (1) $-1+\sqrt{5}$ (2) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

blacklabel 특강 참고

이등변삼각형에서 다음은 모두 일치한다.

(1) 꼭지각의 이등분선
(2) 밑변의 수직이등분선
(3) 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선
(4) 꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 지나는 직선



03 해결단계

(1)	❶ 단계	m의 값을 구한다.
	❷ 단계	n의 값을 구한다.
(2)	❸ 단계	$\triangle AOH$의 넓이를 구한다.

(1) $\triangle AOB$에서 $\tan(\angle ABO)=\frac{5}{12}$이므로

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{5}{12}$ $\therefore 12\overline{OA}=5\overline{OB}$

즉, $\overline{OA}=5k$, $\overline{OB}=12k$ $(k>0)$라 하면 직선 $y=mx+n$의 기울기는

$m=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{12k}{5k}=\dfrac{12}{5}$

또한, 직각삼각형 AOB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{(5k)^2+(12k)^2}=\sqrt{169k^2}=13k$ ($\because$ $k>0$)

이때, $\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}$에서

$\dfrac{1}{2}\times5k\times12k=\dfrac{1}{2}\times13k\times4$, $30k^2=26k$

$\therefore$ $k=\dfrac{13}{15}$ ($\because$ $k>0$)

따라서 직선 $y=mx+n$의 y절편은

$n=12k=12\times\dfrac{13}{15}=\dfrac{52}{5}$

(2) $\triangle AOH$에서 $\tan(\angle OAH)=\dfrac{12}{5}$이므로

$\dfrac{\overline{OH}}{\overline{AH}}=\dfrac{4}{\overline{AH}}=\dfrac{12}{5}$ $\quad\therefore$ $\overline{AH}=4\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore$ $\triangle AOH=\dfrac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{OH}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{3}\times4=\dfrac{10}{3}$

답 (1) $m=\dfrac{12}{5}$, $n=\dfrac{52}{5}$ (2) $\dfrac{10}{3}$

04 해결단계

❶ 단계	삼각형의 합동과 닮음을 이용하여 $\overline{DE}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\sin x$의 값을 구한다.

$\triangle ABC$와 $\triangle ADC$에서

$\overline{AC}$는 공통, $\angle B=\angle D=90^\circ$, $\angle ACB=\angle ACD$이므로

$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ (RHA합동)

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{BC}=\overline{DC}=12$

또한, $\triangle ABC$와 $\triangle EHC$에서

$\angle B=\angle EHC=90^\circ$, $\angle ACB$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle EHC$ (AA 닮음)

$\therefore$ $\overline{EH}:\overline{HC}=\overline{AB}:\overline{BC}=6:12=1:2$

즉, $\overline{EH}=a$ $(a>0)$라 하면 $\overline{CH}=2a$

또한, $\triangle CDH$에서 $\overline{CE}$가 $\angle C$의 이등분선이므로

$\overline{CD}:\overline{CH}=\overline{DE}:\overline{EH}$

$12:2a=\overline{DE}:a$ $\quad\therefore$ $\overline{DE}=6$

직각삼각형 CDH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{DH}^2+\overline{CH}^2$

$12^2=(6+a)^2+(2a)^2$, $5a^2+12a-108=0$

$(a+6)(5a-18)=0$

$\therefore$ $a=\dfrac{18}{5}$ ($\because$ $a>0$) $\quad\therefore$ $\overline{CH}=2a=\dfrac{36}{5}$

따라서 직각삼각형 CDH에서

$\sin x=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CD}}=\dfrac{\frac{36}{5}}{12}=\dfrac{3}{5}$

답 $\dfrac{3}{5}$

05 해결단계

❶ 단계	$\angle x$를 한 내각으로 하는 직각삼각형을 찾는다.
❷ 단계	$\cos x$의 값이 가장 크거나 가장 작을 조건을 찾는다.
❸ 단계	M, m의 값을 각각 구한다.
❹ 단계	Mm의 값을 구한다.

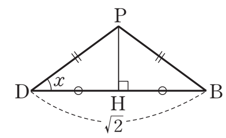
$\triangle VDP$와 $\triangle VBP$에서

$\overline{VP}$는 공통, $\overline{VD}=\overline{VB}=1$, $\angle DVP=\angle BVP=60^\circ$

$\therefore$ $\triangle VDP\equiv\triangle VBP$ (SAS 합동)

즉, $\overline{DP}=\overline{BP}$이므로 $\triangle PDB$는 이등변삼각형이다.

$\triangle PDB$의 꼭짓점 P에서 변 DB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\cos x=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DP}}$ ······㉠

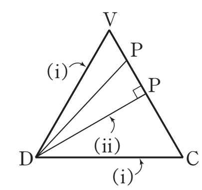
이때, □ABCD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{DB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ······㉡

따라서 ㉠에서 $\overline{DP}$의 길이가 길수록 $\cos x$의 값은 작아지고 $\overline{DP}$의 길이가 짧을수록 $\cos x$의 값은 커진다.

이때, $\triangle VDC$에서 $\overline{DP}$는 꼭짓점 D와 변 VC 위의 한 점 P 사이의 거리이다.



(i) 점 P가 점 V 또는 점 C와 일치할 때, $\overline{DP}$의 길이는 가장 길고 그 길이는 1이므로 ㉠, ㉡에서

$m=\cos x=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DP}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) 점 D에서 변 VC에 내린 수선의 발과 점 P가 일치할 때, $\overline{DP}$의 길이는 가장 짧다.

피타고라스 정리에 의하여 그 길이를 구하면

$\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 ㉠, ㉡에서

$M=\cos x=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{DP}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(i), (ii)에서 $Mm=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

06 해결단계

❶ 단계	직각삼각형의 세 변의 길이를 만든 순서대로 각각 구한다.
❷ 단계	24번째 직각삼각형의 세 변의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\sin x_{24}\times\cos x_{24}$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=\overline{BC}=1$ cm이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(cm),

$\overline{AD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$(cm),

$\overline{AE}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$(cm), ⋯

즉, 1번째 직각삼각형의 세 변의 길이는 1 cm, 1 cm, $\sqrt{2}$ cm

2번째 직각삼각형의 세 변의 길이는 1 cm, $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm

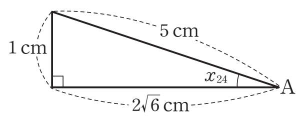
3번째 직각삼각형의 세 변의 길이는 1 cm, $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{4}(=2)$cm

⋮

24번째 직각삼각형의 세 변의 길이는

1 cm, $\sqrt{24}(=2\sqrt{6})$cm, $\sqrt{25}(=5)$cm

따라서 24번째 직각삼각형은 오른쪽 그림과 같으므로



$\sin x_{24}\times\cos x_{24}=\frac{1}{5}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{25}$

답 $\frac{2\sqrt{6}}{25}$

07 해결단계

❶ 단계	합동인 두 삼각형을 찾아 ∠ABE=∠CAD임을 확인한다.
❷ 단계	삼각형의 외각의 성질을 이용하여 ∠α의 크기를 구한다.
❸ 단계	$\sin\alpha$의 값을 구한다.

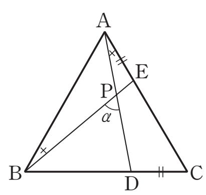
△ABE와 △CAD에서

∠A=∠C=60°, $\overline{AB}=\overline{CA}$,

$\overline{AE}=\overline{CD}$이므로

△ABE≡△CAD (SAS 합동)

∴ ∠ABE=∠CAD



△ABP에서 삼각형의 외각의 성질에 의하여

∠α=∠ABP+∠BAP

=∠EAP+∠BAP=60°

∴ $\sin\alpha=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

08 해결단계

❶ 단계	□AECF가 평행사변형임을 이용하여 $\overline{AE}$와 $\overline{EO}$의 관계를 구한다.
❷ 단계	∠EAO=∠α, ∠AOE=∠β라 하고 관계식을 구한다.
❸ 단계	∠β의 크기에 대한 조건을 이용하여 ∠α의 크기의 최댓값을 구한다.
❹ 단계	∠BAE의 크기의 최솟값을 구한다.

∠BAC=45°이므로 ∠BAE=45°−∠EAO

즉, ∠BAE의 크기가 최소이려면 ∠EAO의 크기가 최대이어야 한다.

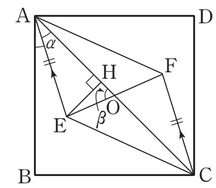
한편, $\overline{AE}$∥$\overline{FC}$, $\overline{AE}=\overline{FC}$이므로 □AECF는 평행사변형이다.

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{EO}=\overline{FO}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{AE}$

점 E에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H,

∠EAO=∠α, ∠AOE=∠β라 하면



직각삼각형 AEH에서

$\sin\alpha=\frac{\overline{EH}}{\overline{AE}}$ ∴ $\overline{EH}=\overline{AE}\sin\alpha$

직각삼각형 EOH에서

$\sin\beta=\frac{\overline{EH}}{\overline{EO}}$ ∴ $\overline{EH}=\overline{EO}\sin\beta$

즉, $\overline{AE}\sin\alpha=\overline{EO}\sin\beta$이므로

$\sin\alpha=\frac{\overline{EO}}{\overline{AE}}\sin\beta=\frac{\frac{1}{2}\overline{AE}}{\overline{AE}}\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\beta$

이때, 0°<∠AOE=β≤90°에서 $\sin\beta$의 값은 β=90°일 때 가장 크고 그 값이 1이므로 $\sin\alpha$의 값 중 가장 큰 값은 $\frac{1}{2}$, 즉

∠α=30°일 때이다.

따라서 ∠BAE의 크기의 최솟값은

45°−30°=15°

답 15°

미리보는 학력평가			p. 18
1 ①	2 ③	3 ②	4 ③

1

삼각형 ABC에서 $\overline{AH}:\overline{HB}=3:2$이므로 $\overline{AH}=3k$, $\overline{HB}=2k$

$(k>0)$라 하면

$\overline{AC}=\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{HB}=5k$

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

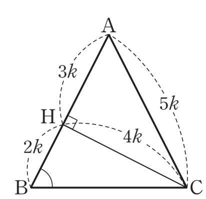
$\overline{HC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}$

$=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}$

$=\sqrt{16k^2}=4k$ ($\because k>0$)

따라서 직각삼각형 BCH에서

$\tan B=\frac{\overline{HC}}{\overline{HB}}=\frac{4k}{2k}=2$

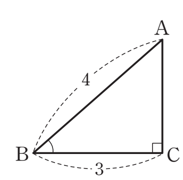


답 ①

2

$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$이고 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$

$=4^2-3^2=16-9=7$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}\ (\because \overline{AC}>0)$

$\therefore \tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ 답 ③

3

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=9+16=25$

$\therefore \overline{BC}=5\ (\because \overline{BC}>0)$

이때, △ABC, △DBA에서

∠CAB=∠ADB=90°, ∠B는 공통이므로

△ABC∽△DBA (AA 닮음)

따라서 ∠BCA=∠BAD=∠x이므로 직각삼각형 ABC에서

$\sin x=\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{3}{5}$ 답 ②

| 다른풀이 |

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

직각삼각형 ABD에서 $\angle ABD=90^\circ-\angle x$

직각삼각형 ABC에서

$\angle ACB=90^\circ-\angle ABD=90^\circ-(90^\circ-\angle x)=\angle x$

$\therefore \sin x=\sin(\angle ACB)=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{3}{5}$

4

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=64+36=100$

$\therefore \overline{BC}=10\ (\because \overline{BC}>0)$

이때, △ABC, △EDC에서

∠BAC=∠DEC=90°, ∠C는 공통이므로

△ABC∽△EDC (AA 닮음)

$\therefore \angle CBA=\angle CDE=x^\circ$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$\sin x^\circ=\sin B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ 답 ③

02 삼각비의 활용

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 20

01 28 **02** ② **03** ⑤ **04** ④ **05** ④
06 80

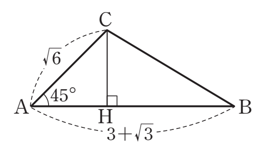
01

$\overline{AB}=20\cos 53^\circ=20\times 0.6=12$

$\overline{AC}=20\sin 53^\circ=20\times 0.8=16$

$\therefore \overline{AB}+\overline{AC}=12+16=28$ 답 28

02



오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin 45^\circ$

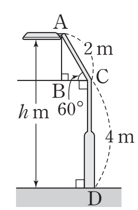
$=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{AH}=\overline{CH}=\sqrt{3}$에서 $\overline{BH}=3$이므로

△BCH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ 답 ②

03



오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 정하면

직각삼각형 ABC에서

$\angle ACB=150^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}\sin 60^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\,(\text{m})$

따라서 가로등의 높이 h는

$h=\overline{CD}+\overline{AB}=4+\sqrt{3}$ 답 ⑤

04

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin C$

$=\dfrac{1}{2}\times 9\sqrt{2}\times 8\sqrt{3}\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times 9\sqrt{2}\times 8\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}$

$=18\sqrt{6}\,(\text{cm}^2)$

이때, 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\triangle ABG=\frac{1}{3}\triangle ABC=\frac{1}{3}\times 18\sqrt{6}$

$=6\sqrt{6}\,(\text{cm}^2)$

답 ④

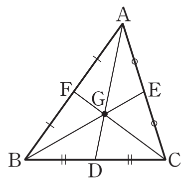
blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 무게중심과 넓이

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

(1) $\triangle GAF=\triangle GBF=\triangle GBD$
$=\triangle GCD=\triangle GCE=\triangle GAE$
$=\frac{1}{6}\triangle ABC$

(2) $\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA=\frac{1}{3}\triangle ABC$



05

평행사변형 ABCD에서 $\angle A+\angle B=180^\circ$이므로

$\angle B=180^\circ-\angle A=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

평행사변형 ABCD의 넓이가 18 cm^2이므로

$\square ABCD=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$=4\times\overline{BC}\times\frac{1}{2}=18\,(\text{cm}^2)$

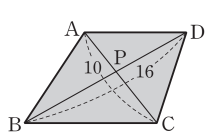
$\therefore\ \overline{BC}=9$ cm

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{BC}=9$ cm

답 ④

06

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점을 P라 할 때, $\angle BPC$와 $\angle CPD$ 중 크기가 크지 않은 쪽을 $\angle x$라 하면



$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin x$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 16\times\sin x$

$=80\sin x$

이때, $0^\circ<\angle x\le 90^\circ$이므로 $0<\sin x\le 1$이다.

즉, $\sin x$의 최댓값은 1이다.

따라서 $\square ABCD$의 넓이의 최댓값은

$80\times 1=80$

답 80

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 21~26

01 $2\sqrt{3}$	02 ④	03 $\sqrt{3}$ cm	04 ①	05 ④
06 ④	07 ②	08 ③	09 30	10 $2\sqrt{3}$
11 $\frac{\sqrt{21}}{14}$	12 ④	13 $\frac{\sqrt{21}}{14}$	14 $2\sqrt{13}$	15 ⑤
16 $2\sqrt{7}$	17 ④	18 $6\sqrt{3}$	19 ④	20 ③
21 ⑤	22 ⑤	23 $50\sqrt{2}$ m	24 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$	25 ②
26 ②	27 18 cm^2	28 ①	29 $\frac{75}{8}$	30 $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$
31 ⑤	32 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm^2		33 53.17 cm^2	
34 30 cm^2	35 ①	36 $(300\pi-300\sqrt{3})$ cm^2		

01

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=16\sin 30^\circ=16\times\frac{1}{2}=8$

$\angle A=60^\circ$이므로 직각삼각형 ADC에서

$\overline{DC}=8\sin 60^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\angle DCB=60^\circ$이므로 직각삼각형 CDE에서

$\overline{CE}=4\sqrt{3}\cos 60^\circ=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

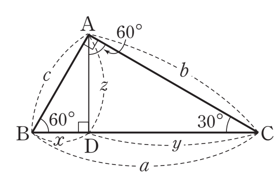
02

ㄱ. 직각삼각형 ABD에서

$\angle ABD=60^\circ$이므로

$z=c\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}c\neq\frac{1}{2}c$



ㄴ. 직각삼각형 ABD에서 $\frac{z}{x}=\tan 60^\circ$

직각삼각형 ADC에서 $\angle CAD=60^\circ$이므로 $\frac{y}{z}=\tan 60^\circ$

$\therefore\ \frac{z}{x}=\frac{y}{z}$

ㄷ. 직각삼각형 ADC에서

$y=b\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}b$, $z=b\sin 30^\circ=\frac{1}{2}b$

$\therefore\ y+z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}b$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

| 다른풀이 |

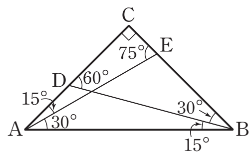
ㄴ. $\triangle ABD\backsim\triangle CAD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BD}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{CD}$

즉, $x:z=z:y$이므로 $\frac{z}{x}=\frac{y}{z}$

03

주어진 각의 크기를 이용하여 나머지 각의 크기를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



직각이등변삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\overline{BC}=x$ cm라 하면

$\overline{CE}=x-3$ (cm)

직각삼각형 AEC에서

$\overline{AC}=\overline{CE}\tan 75^\circ=(x-3)\tan 75^\circ=(x-3)(2+\sqrt{3})$

즉, $x=(x-3)(2+\sqrt{3})$에서

$x=(2+\sqrt{3})x-6-3\sqrt{3}$

$(1+\sqrt{3})x=6+3\sqrt{3}$

$x=\dfrac{6+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})$

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{BC}=\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})$ cm

한편, 직각삼각형 BCD에서

$\overline{CD}=\overline{BC}\tan 30^\circ=\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3})$ (cm)

$\therefore\ \overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}$

$=\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{3})$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}$

$=\sqrt{3}$ (cm)

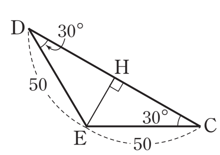
답 $\sqrt{3}$ cm

04

직각삼각형 ABC에서 $\angle C=30^\circ$이므로 $\triangle DEC$는 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{CE}=\overline{DE}=50$

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 DEH에서



$\overline{DH}=\overline{DE}\cos 30^\circ$

$=50\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{CD}=2\overline{DH}=50\sqrt{3}$

$\overline{BE}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\overline{AC}\sin 60^\circ$이므로

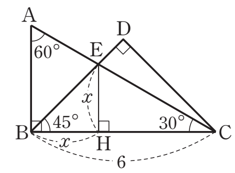
$x+50=(100+50\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}+75$

$\therefore\ x=50\sqrt{3}+25 \qquad \therefore\ \overline{BE}=50\sqrt{3}+25$

답 ①

05

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle BEH=\angle EBH=45^\circ$

즉, $\triangle BHE$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{EH}=\overline{BH}=x$라 하자.

$\triangle EHC$는 $\angle ECH=30^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{CH}=\dfrac{\overline{EH}}{\tan 30^\circ}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$

이때, $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$이므로 $(\sqrt{3}+1)x=6$

$\therefore\ x=\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}=3(\sqrt{3}-1)$

따라서 직각삼각형 EHC에서

$\overline{CE}=\dfrac{\overline{EH}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{x}{\frac{1}{2}}=2x=6(\sqrt{3}-1)$

답 ④

| 다른풀이 |

$\triangle ABC$에서 $\overline{BE}$는 $\angle ABC$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AE}:\overline{CE} \qquad \therefore\ \overline{AE}:\overline{CE}=1:\sqrt{3}$

이때, $\overline{AC}=\dfrac{\overline{BC}}{\cos 30^\circ}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{CE}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\times\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\times 4\sqrt{3}=6(\sqrt{3}-1)$

06

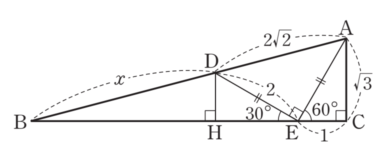
직각삼각형 AEC에서

$\overline{AC}=\overline{EC}\tan 60^\circ=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,

$\overline{AE}=\dfrac{\overline{EC}}{\cos 60^\circ}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\triangle ADE$가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{ED}=\overline{AE}=2$, $\overline{DA}=2\sqrt{2}$



위의 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 DHE에서

$\overline{DH}=\overline{DE}\sin 30^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\triangle ABC\backsim\triangle DBH$ (AA 닮음)이므로 $\overline{BD}=x$라 하면

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DH}$

즉, $(x+2\sqrt{2}):x=\sqrt{3}:1$이므로 $x+2\sqrt{2}=\sqrt{3}x$

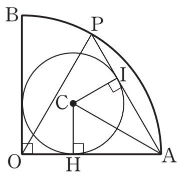
$(\sqrt{3}-1)x=2\sqrt{2} \qquad \therefore\ x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BD}+\overline{AD}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$

답 ④

07

다음 그림과 같이 세 선분 OA, OB, AP에 모두 접하는 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 두 선분 OA, AP에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



점 P는 호 AB를 삼등분한 점 중에서 점 B에 가까운 점이므로

$\angle AOP=60^\circ$

또한, $\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\triangle OAP$는 정삼각형이다.

$\therefore \angle OAP=60^\circ$

이때, $\triangle ACH$와 $\triangle ACI$에서

$\angle CHA=\angle CIA=90^\circ$, $\overline{AC}$는 공통, $\overline{CH}=\overline{CI}$이므로

$\triangle ACH \equiv \triangle ACI$ (RHS 합동)

$\therefore \angle CAH=\angle CAI=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

한편, 원의 반지름의 길이를 x라 하면

$\overline{OH}=\overline{CH}=x$

$\overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=4-x$

직각삼각형 CHA에서 $\tan(\angle CAH)=\frac{x}{4-x}$이므로

$\frac{x}{4-x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

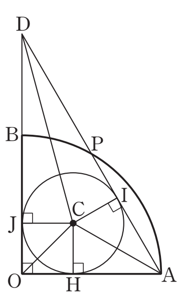
$3x=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x$, $(3+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}-2$이다. 답 ②

| 다른풀이 |

선분 OB의 연장선과 선분 AP의 연장선이 만나는 점을 D라 하면 구하는 원은 삼각형 DOA의 내접원이다.



$\triangle DOA$에서 $\angle OAD=\angle OAP=60^\circ$, $\angle DOA=90^\circ$이므로

$\overline{OD}=\overline{OA}\tan 60^\circ=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$\overline{AD}=\frac{\overline{OA}}{\cos 60^\circ}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

$\therefore \triangle DOA=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

구하는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 x라 하면

$\triangle COA=\frac{1}{2}\times 4\times x=2x$

$\triangle CDO=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times x=2\sqrt{3}x$

$\triangle CAD=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$

이때, $\triangle COA+\triangle CDO+\triangle CAD=\triangle DOA$이므로

$2x+2\sqrt{3}x+4x=8\sqrt{3}$

$(6+2\sqrt{3})x=8\sqrt{3}$, $(3+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$

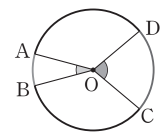
$\therefore x=\frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2$

blacklabel 특강 필수개념

중심각의 크기와 호의 길이

한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\widehat{AB}:\widehat{CD}=\angle AOB:\angle COD$



08

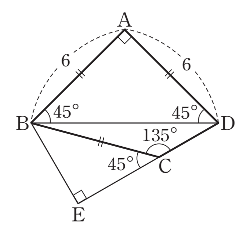
$\triangle ABD$는 직각이등변삼각형이므로

$\angle ABD=\angle ADB=45^\circ$

또한, $\angle CBD+\angle CDB=45^\circ$이므로

$\angle BCD=135^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{CD}$의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하면



$\triangle BEC$에서 $\angle BCE=45^\circ$이고

$\angle BEC=90^\circ$이므로 $\triangle BEC$는

$\overline{BE}=\overline{CE}$인 직각이등변삼각형이다.

직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=6\sqrt{2}$

직각삼각형 BEC에서

$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{BC}\sin 45^\circ=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

한편, 직각삼각형 BED에서

$\cos(\angle DBE)=\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}=\frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

이므로 $\angle DBE=60^\circ$

$\therefore \overline{DE}=\overline{BD}\sin 60^\circ=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

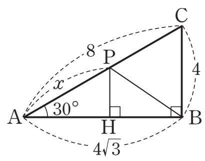
$\therefore \overline{CD}=\overline{DE}-\overline{CE}=3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ 답 ③

09

직각삼각형 ABC에서 $\angle CAB=30^\circ$이므로

$\overline{AB}=\frac{\overline{BC}}{\tan 30^\circ}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=4\sqrt{3}$, $\overline{AC}=\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AP}=x$라 하면 직각삼각형 AHP에서



$\overline{PH}=\overline{AP}\sin 30^\circ=x\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x$

$\overline{AH}=\overline{AP}\cos 30^\circ=x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

즉, $\overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}=4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=\overline{AP}^2+(\overline{PH}^2+\overline{BH}^2)\\&=x^2+\left\{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2\right\}\\&=2x^2-12x+48\\&=2(x-3)^2+30\end{aligned}$$

이때, $(x-3)^2\geq 0$이므로

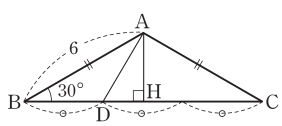
$x=3$, 즉 $\overline{AP}=3$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 30이다. **답** 30

blacklabel 특강 오답피하기

점 P가 꼭짓점 C에 위치할 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최댓값을 가지므로 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최솟값을 가지게 하는 점 P의 위치는 꼭짓점 A 위에 있는 경우로 착각하여 문제를 푸는 경우가 있다. 위와 같은 문제를 풀 때에는 미지수를 사용하여 이차방정식을 세우고 (완전제곱식)$\geq$0임을 이용하여 풀 수 있도록 하자.

10

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서



$\overline{AH}=\overline{AB}\sin 30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

이때, $\overline{BD}=2\overline{DH}$이므로

$\overline{DH}=\frac{1}{3}\overline{BH}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

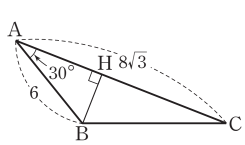
따라서 직각삼각형 ADH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{DH}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ **답** $2\sqrt{3}$

11

$\angle$A는 예각이고, $\sin A=\frac{1}{2}$이므로 $\angle A=30^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서



$\overline{AH}=6\cos 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\overline{BH}=6\sin 30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

$\therefore \overline{CH}=\overline{AC}-\overline{AH}=8\sqrt{3}-3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

직각삼각형 BCH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=(5\sqrt{3})^2+3^2=75+9=84$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{21}$ ($\because \overline{BC}>0$)

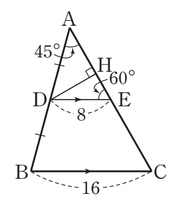
$\therefore \sin C=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$ **답** $\frac{\sqrt{21}}{14}$

12

두 점 D, E는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점이므로 $\overline{DE}/\!/\overline{BC}$이고

$\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 16=8$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 DEH에서



$\overline{DH}=\overline{DE}\sin 60^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

직각삼각형 ADH에서

$\overline{AD}=\frac{\overline{DH}}{\sin 45^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$

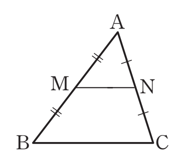
$\therefore \overline{BD}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$ **답** ④

blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{BC}/\!/\overline{MN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



13

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면 점 D는 $\overline{AC}$의 중점이므로 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이고

$\overline{AD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}a$

직각삼각형 BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

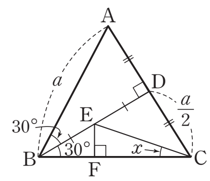
직각삼각형 CDE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{16}a^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$ ($\because$ $a>0$)

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\angle ABD=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 F라 하면 직각삼각형 BFE에서



$\overline{EF}=\overline{BE}\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}a$

따라서 직각삼각형 CEF에서

$\sin x=\frac{\overline{EF}}{\overline{CE}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}a}{\frac{\sqrt{7}}{4}a}=\frac{\sqrt{21}}{14}$ 답 $\frac{\sqrt{21}}{14}$

| 다른풀이 |

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{AD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}a$,

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

직각삼각형 CDE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}=\sqrt{\frac{7}{16}a^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$ ($\because$ $a>0$)

이때, $\triangle BCE=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CE}\times\sin x$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{7}}{4}a\times\sin x$

$\frac{\sqrt{3}}{16}a^2=\frac{\sqrt{7}}{8}a^2\sin x$

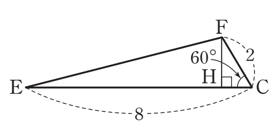
$\therefore \sin x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{16}a^2}{\frac{\sqrt{7}}{8}a^2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

14

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}=1:4$, $\overline{BE}=2$이므로

$\overline{AD}=\overline{CF}=\overline{BE}=2$, $\overline{DB}=\overline{EC}=\overline{FA}=8$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{EC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 CFH에서



$\overline{FH}=\overline{CF}\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{CH}=\overline{CF}\cos 60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

$\therefore$ $\overline{EH}=\overline{EC}-\overline{CH}=8-1=7$

직각삼각형 EHF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{EF}^2=(\sqrt{3})^2+7^2=3+49=52$

$\therefore$ $\overline{EF}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ ($\because$ $\overline{EF}>0$) 답 $2\sqrt{13}$

| 다른풀이 |

$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}=1:4$, $\overline{BE}=2$이므로

$\overline{AD}=\overline{CF}=\overline{BE}=2$, $\overline{DB}=\overline{EC}=\overline{FA}=8$

또한, $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$이므로

$\triangle ADF\equiv\triangle BED\equiv\triangle CFE$ (SAS 합동)

즉, $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD}$이므로 $\triangle DEF$도 정삼각형이다.

$\triangle DEF$의 한 변의 길이를 a라 하면

$\triangle DEF=\triangle ABC-3\triangle ADF$에서

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2-3\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AF}\times\sin 60^\circ\right)$

$=25\sqrt{3}-3\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=25\sqrt{3}-12\sqrt{3}=13\sqrt{3}$

$a^2=52$ $\quad$ $\therefore$ $a=2\sqrt{13}$ ($\because$ $a>0$)

따라서 $\overline{EF}$의 길이는 $2\sqrt{13}$이다.

15

$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OF}=12$, $\overline{OE}:\overline{EC}=2:1$이므로

$\overline{OE}=\frac{2}{3}\times 12=8$, $\overline{CE}=\frac{1}{3}\times 12=4$

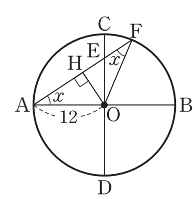
직각삼각형 AOE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}=\sqrt{12^2+8^2}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$

즉, $\angle OAE=\angle x$라 하면 직각삼각형 AOE에서

$\cos x=\frac{\overline{OA}}{\overline{AE}}=\frac{12}{4\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle OAH=\angle OFH=\angle x$이므로

직각삼각형 AOH에서

$\overline{AH}=12\cos x=12\times\frac{3\sqrt{13}}{13}=\frac{36\sqrt{13}}{13}$

$\therefore$ $\overline{AF}=2\overline{AH}=2\times\frac{36\sqrt{13}}{13}=\frac{72\sqrt{13}}{13}$ 답 ⑤

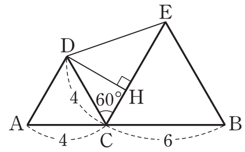
16

$\triangle DAC$, $\triangle ECB$는 정삼각형이므로 $\angle DCA=\angle ECB=60^\circ$

$\therefore$ $\angle DCE=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)$

$=60^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{\mathrm{CE}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



직각삼각형 DCH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{CD}}\cos 60^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CD}}\sin 60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

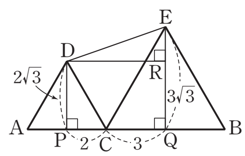
이때, $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{EC}}-\overline{\mathrm{CH}}=6-2=4$이므로

직각삼각형 DHE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

| 다른풀이 |

오른쪽 그림과 같이 두 점 D, E에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 D에서 $\overline{\mathrm{EQ}}$에 내린 수선의 발을 R 라 하면



$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DA}}\sin(\angle\mathrm{DAP})$

$\quad=4\sin 60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{EQ}}=\overline{\mathrm{EB}}\sin(\angle\mathrm{EBC})$

$\quad=6\sin 60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{ER}}=\overline{\mathrm{EQ}}-\overline{\mathrm{DP}}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

또한, $\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{CQ}}=2+3=5$

이므로 직각삼각형 DRE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

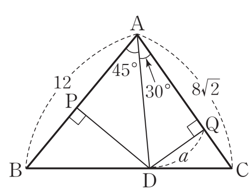
17

삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=\triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ADC}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DC}}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ADC}}$ ……㉠

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 두 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\overline{\mathrm{DQ}}=a$라 하면 직각삼각형 ADQ에서



$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{a}{\frac{1}{2}}=2a$

직각삼각형 APD에서

$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{AD}}\sin 45^\circ=2a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{1}{2}\times12\times\sqrt{2}a=6\sqrt{2}a$

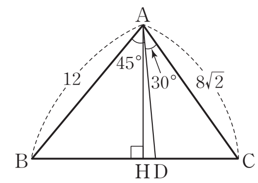
$\therefore\ \triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{DQ}}=\dfrac{1}{2}\times8\sqrt{2}\times a=4\sqrt{2}a$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DC}}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ADC}}=\dfrac{6\sqrt{2}a}{4\sqrt{2}a}=\dfrac{3}{2}$ 답 ④

| 다른풀이 |

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{AH}}=h$라 하면



$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{h}{2}\overline{\mathrm{BD}}$

에서 $\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{2\triangle\mathrm{ABD}}{h}$

$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{h}{2}\overline{\mathrm{DC}}$에서 $\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{2\triangle\mathrm{ADC}}{h}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DC}}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ADC}}$ ……㉠

한편,

$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin 45^\circ$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times12\times\overline{\mathrm{AD}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad=3\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AD}}$

$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin 30^\circ$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times8\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}$

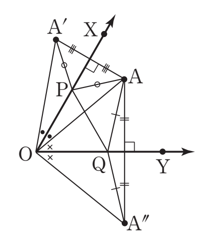
$\quad=2\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AD}}$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DC}}}=\dfrac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{ADC}}=\dfrac{3\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AD}}}{2\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{3}{2}$

18

오른쪽 그림과 같이 점 A와 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$에 대칭인 점을 각각 A′, A″이라 하면



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A''Q}}$

∴ (△APQ의 둘레의 길이)

$\quad=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{AQ}}$

$\quad=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{A''Q}}$

$\quad\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$

즉, $l=\overline{\mathrm{A'A''}}$이다. (가)

이때, $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{A'OP}$, $\angle\mathrm{AOQ}=\angle\mathrm{A''OQ}$이므로

$\angle\mathrm{A'OA''}=\angle\mathrm{A'OP}+\angle\mathrm{AOP}+\angle\mathrm{AOQ}+\angle\mathrm{A''OQ}$

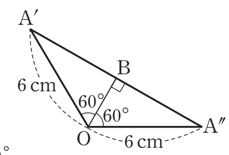
$\quad=2\angle\mathrm{AOP}+2\angle\mathrm{AOQ}$

$\quad=2(\angle\mathrm{AOP}+\angle\mathrm{AOQ})$

$\quad=2\angle\mathrm{XOY}=120^\circ\ (\because\ \angle\mathrm{XOY}=60^\circ)$ (나)

한편, $\overline{OA'}=\overline{OA''}=\overline{OA}=6$ cm이므로 $\triangle A'OA''$은 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle A'OA''$의 꼭짓점 O에서 $\overline{A'A''}$에 내린 수선의 발을 B라 하면



$\angle A'OB=\frac{1}{2}\angle A'OA''=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$

직각삼각형 A′OB에서

$\overline{A'B}=\overline{OA'}\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{A'A''}=2\overline{A'B}=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}\,(\text{cm})$

$\therefore\ l=6\sqrt{3}$

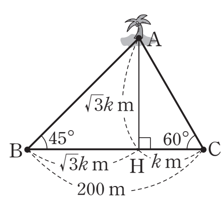
(다)

답 $6\sqrt{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	점 A와 $\overline{OX}$, $\overline{OY}$에 대칭인 점 A′, A″을 이용하여 △APQ의 둘레의 길이가 가장 작을 때를 구하는 방법을 설명한 경우	30%
(나)	∠A′OA″의 크기를 구한 경우	30%
(다)	l의 값을 구한 경우	40%

19

$\overline{CH}=k$ m라 하면 직각삼각형 AHC에서



$\overline{AH}=\overline{CH}\tan 60^\circ=k\times\sqrt{3}=\sqrt{3}k\ (\text{m})$

$\triangle ABH$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{AH}=\sqrt{3}k$ m

이때, $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$에서

$200=\sqrt{3}k+k,\ 200=(\sqrt{3}+1)k$

$\therefore\ k=\frac{200}{\sqrt{3}+1}=100(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{3}k=\sqrt{3}\times 100(\sqrt{3}-1)$

$=100(3-\sqrt{3})\,(\text{m})$

답 ④

| 다른풀이 |

$\overline{CH}=k$ m라 하면 직각삼각형 AHC에서

$\overline{AH}=\overline{CH}\tan 60^\circ=k\times\sqrt{3}=\sqrt{3}k\,(\text{m})$

$\triangle ABH$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{AH}=\sqrt{3}k$ m

$\triangle ABC=\triangle ABH+\triangle AHC$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{AH}+\frac{1}{2}\times\overline{CH}\times\overline{AH}$

즉, $\frac{1}{2}\times 200\times\sqrt{3}k=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}k\times\sqrt{3}k+\frac{1}{2}\times k\times\sqrt{3}k$에서

$200\sqrt{3}k=(3+\sqrt{3})k^2$

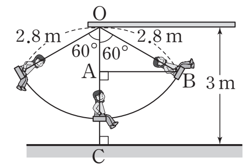
이때, $k>0$이므로

$k=\frac{200\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=100(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{3}k=\sqrt{3}\times 100(\sqrt{3}-1)=100(3-\sqrt{3})\,(\text{m})$

20

다음 그림과 같이 네 점 O, A, B, C를 정하자.



직각삼각형 OAB에서 $\overline{OB}=2.8$ m, $\angle AOB=60^\circ$이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}\cos 60^\circ=2.8\times\frac{1}{2}=1.4\,(\text{m})$

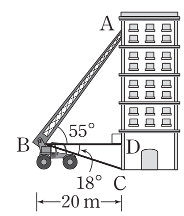
따라서 그네의 앉는 부분이 지면으로부터 가장 높은 곳에 위치할 때, 지면으로부터의 높이는 $\overline{AC}$의 길이와 같으므로

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=3-1.4=1.6\,(\text{m})$

답 ③

21

오른쪽 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 정하면 $\overline{BD}=20$ m



직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\overline{BD}\tan 55^\circ=20\times 1.4281$

$=28.562\,(\text{m})$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{CD}=\overline{BD}\tan 18^\circ=20\times 0.3249$

$=6.498\,(\text{m})$

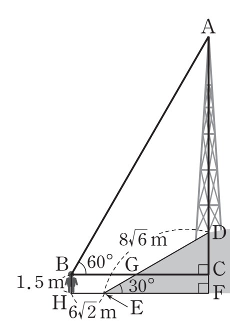
따라서 갇힌 사람이 있는 곳의 지면으로부터의 높이는

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{CD}=28.562+6.498=35.06\,(\text{m})$

답 ⑤

22

오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, ⋯, H를 정하면 안테나탑의 높이는 $\overline{AD}$의 길이이다.



직각삼각형 DEF에서

$\overline{EF}=\overline{DE}\cos 30^\circ$

$=8\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{2}\,(\text{m})$

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{HF}=\overline{HE}+\overline{EF}$

$=6\sqrt{2}+12\sqrt{2}=18\sqrt{2}\,(\text{m})$

즉, 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\overline{BC}\tan 60^\circ=18\sqrt{2}\times\sqrt{3}=18\sqrt{6}\,(\text{m})$

또한, 직각삼각형 DEF에서

$\overline{DF}=\overline{DE}\sin 30^\circ=8\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{6}\,(\text{m})$

$\therefore \overline{CD}=\overline{DF}-\overline{CF}=\overline{DF}-\overline{BH}=4\sqrt{6}-1.5\,(m)$

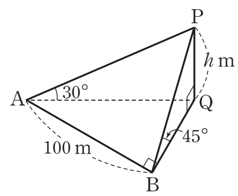
$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=18\sqrt{6}-(4\sqrt{6}-1.5)$

$=14\sqrt{6}+1.5\,(m)$

따라서 안테나탑의 높이는 $(14\sqrt{6}+1.5)$ m이다. 답 ⑤

23

풍선의 지면으로부터의 높이는 $\overline{PQ}$의 길이이다.



$\overline{PQ}=h$ m라 하면 직각삼각형 PAQ에서

$\overline{AQ}=\dfrac{h}{\tan 30^\circ}=\dfrac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}h\,(m)$

직각삼각형 PBQ에서 $\overline{BQ}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=\dfrac{h}{1}=h\,(m)$

직각삼각형 ABQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{BQ}^2=\overline{AQ}^2$

즉, $100^2+h^2=(\sqrt{3}h)^2$, $2h^2=10000$

$h^2=5000$ $\quad\therefore h=50\sqrt{2}\ (\because h>0)$

따라서 풍선의 지면으로부터의 높이는 $50\sqrt{2}$ m이다.

답 $50\sqrt{2}$ m

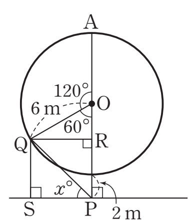
24 해결단계

❶ 단계	4분 동안 관람차가 회전한 각의 크기를 구한다.
❷ 단계	한 내각의 크기가 x°인 직각삼각형을 그려 각 변의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\tan x^\circ$의 값을 구한다.

관람차가 한 바퀴를 도는 데 12분이 걸리므로 4분 동안 회전하는 각의 크기는

$\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$

오른쪽 그림과 같이 관람차의 중심을 O, 점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 R라 하면



$\angle AOQ=120^\circ$이므로

$\angle QOR=60^\circ$

$\overline{OQ}=6$ m이므로 직각삼각형 OQR에서

$\overline{OR}=\overline{OQ}\cos 60^\circ=6\times\dfrac{1}{2}=3\,(m)$

$\overline{QR}=\overline{OQ}\sin 60^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,(m)$

점 Q에서 지면에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{SP}=\overline{QR}=3\sqrt{3}$ m

한편, 관람차가 지면에 가장 가깝게 내려왔을 때의 지면으로부터의 높이가 2 m이고 원 O의 반지름의 길이가 6 m이므로

$\overline{OP}=6+2=8\,(m)$

이때, $\overline{OR}=3$ m이므로

$\overline{QS}=\overline{RP}=8-3=5\,(m)$

따라서 직각삼각형 QSP에서

$\tan x^\circ=\dfrac{\overline{QS}}{\overline{SP}}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 답 $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

25

$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$에서

$\angle ABC=\angle ACD=30^\circ$, $\angle A$는 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$이므로 $6\sqrt{3}:6=6:\overline{AD}$

$6\sqrt{3}\,\overline{AD}=36$ $\quad\therefore \overline{AD}=2\sqrt{3}\,(cm)$

이때, $\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,(cm)$이므로

$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BC}\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times12\times\dfrac{1}{2}=12\sqrt{3}\,(cm^2)$ 답 ②

26

$(A$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}ab\times\sin 30^\circ=\dfrac{1}{4}ab$

$(B$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}ac\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$

$(C$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}bc\times\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{4}bc$

세 삼각형의 넓이가 모두 같으므로

$\dfrac{1}{4}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{\sqrt{2}}{4}bc$

이때, $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$\dfrac{1}{4}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$에서 $b=\sqrt{3}c$

$\dfrac{1}{4}ab=\dfrac{\sqrt{2}}{4}bc$에서 $a=\sqrt{2}c$

$\therefore a:b:c=\sqrt{2}c:\sqrt{3}c:c=\sqrt{2}:\sqrt{3}:1$ 답 ②

27

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin A=25\,(cm^2)$

이때, $\overline{AC}$의 길이를 40 % 줄이고, $\overline{AB}$의 길이는 20 % 늘려 $\triangle AB'C'$을 만들었으므로

$\overline{AC'}=\frac{60}{100}\times\overline{AC}=\frac{3}{5}\overline{AC}$,

$\overline{AB'}=\frac{120}{100}\times\overline{AB}=\frac{6}{5}\overline{AB}$

$\therefore\ \triangle AB'C'=\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{AB'}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\overline{AC}\times\frac{6}{5}\overline{AB}\times\sin A$

$=\frac{18}{25}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin A\right)$

$=\frac{18}{25}\triangle ABC=\frac{18}{25}\times 25$

$=18(\mathrm{cm}^2)$ 답 $18\ \mathrm{cm}^2$

28

$\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=b$, $\angle RPQ=\angle x$라 하면

$S_1=\triangle PDG-\triangle PBF$

$=\frac{1}{2}\times\overline{PG}\times\overline{PD}\times\sin x-\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PB}\times\sin x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}a\times\frac{4}{5}b\times\sin x-\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}a\times\frac{2}{5}b\times\sin x$

$=\frac{3}{10}ab\sin x-\frac{1}{10}ab\sin x$

$=\frac{1}{5}ab\sin x$

$S_2=\triangle PQR-\triangle PDG$

$=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}\times\sin x-\frac{1}{2}\times\overline{PG}\times\overline{PD}\times\sin x$

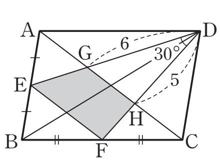
$=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin x-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}a\times\frac{4}{5}b\times\sin x$

$=\frac{1}{2}ab\sin x-\frac{3}{10}ab\sin x$

$=\frac{1}{5}ab\sin x$

따라서 $S_1=S_2$이므로 $S_1:S_2=1:1$이다. 답 ①

29



위의 그림과 같이 대각선 BD를 그으면 점 G는 △ABD의 무게중심이고 점 H는 △BCD의 무게중심이므로

$\overline{DG}:\overline{EG}=6:\overline{EG}=2:1$ $\therefore\ \overline{EG}=3$

$\therefore\ \overline{DE}=\overline{DG}+\overline{EG}=6+3=9$

$\overline{DH}:\overline{FH}=5:\overline{FH}=2:1$ $\therefore\ \overline{FH}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \overline{DF}=\overline{DH}+\overline{FH}=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

$\therefore\ \square EFHG$

$=\triangle DEF-\triangle DGH$

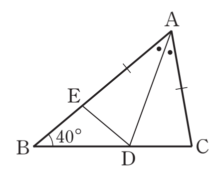
$=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DF}\times\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\times\overline{DG}\times\overline{DH}\times\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 9\times\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 6\times 5\times\frac{1}{2}$

$=\frac{75}{8}$ 답 $\frac{75}{8}$

30 해결단계

❶단계	$\overline{AB}$ 위에 $\overline{AE}=\overline{AC}$인 점 E를 잡고 $\triangle AED\equiv\triangle ACD$임을 보인다.
❷단계	$\angle CAB$의 크기를 구한다.
❸단계	△ABC의 넓이를 a, b를 사용하여 나타낸다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 위에 $\overline{AE}=\overline{AC}$가 되는 점 E를 잡으면 △AED와 △ACD에서

$\angle EAD=\angle CAD$, $\overline{AE}=\overline{AC}$,

$\overline{AD}$는 공통이므로

$\triangle AED\equiv\triangle ACD$(SAS 합동)

$\therefore\ \overline{DE}=\overline{DC}$, $\angle AED=\angle ACD$ ……㉠

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CD}$에서 $\overline{AE}+\overline{BE}=\overline{AC}+\overline{CD}$

$\therefore\ \overline{BE}=\overline{CD}$ ($\because\ \overline{AE}=\overline{AC}$)

즉, △BDE는 이등변삼각형이므로

$\angle BDE=\angle EBD=40^\circ$

$\therefore\ \angle AED=\angle EBD+\angle BDE$

$=40^\circ+40^\circ=80^\circ=\angle ACD$ ($\because$ ㉠)

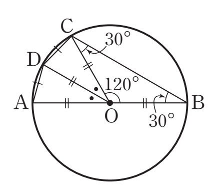
이때, 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle CAB=180^\circ-(40^\circ+80^\circ)=60^\circ$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$

31



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 그으면

△OBC는 이등변삼각형이므로

$\angle OCB=\angle OBC=30^\circ$

즉, $\angle BOC=120^\circ$이므로

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

한편, $\overline{AD}=\overline{DC}$이므로

$\angle COD=\angle DOA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

$\therefore\ \triangle ODA=\triangle OCD=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin30^\circ=\frac{9}{4}$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle OBC+\triangle OCD+\triangle ODA$

$=\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{18+9\sqrt{3}}{4}$ **답** ⑤

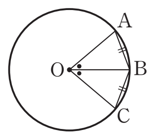
blacklabel 특강 필수개념

중심각의 크기와 현의 길이

한 원 또는 합동인 두 원에서

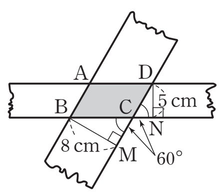
(1) 크기가 같은 중심각에 대한 현의 길이는 같다. 즉, $\angle AOB=\angle COB \Rightarrow \overline{AB}=\overline{BC}$

(2) 길이가 같은 현에 대한 중심각의 크기는 같다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC} \Rightarrow \angle AOB=\angle COB$



32

오른쪽 그림과 같이 겹쳐진 부분을 $\square ABCD$라 하고, 점 B에서 폭이 8 cm인 종이테이프의 변에 내린 수선의 발을 M, 점 D에서 폭이 5 cm인 종이테이프의 변에 내린 수선의 발을 N이라 하면



$\overline{BC}=\frac{\overline{BM}}{\sin60^\circ}=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{16\sqrt{3}}{3}\,(cm)$

$\overline{CD}=\frac{\overline{DN}}{\sin60^\circ}=\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,(cm)$

이때, $\square ABCD$는 평행사변형이므로

$\square ABCD=\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\times\frac{10\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{80\sqrt{3}}{3}\,(cm^2)$ **답** $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm^2

33

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면

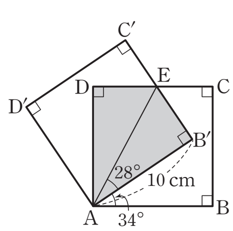
$\triangle AB'E$와 $\triangle ADE$에서

$\angle AB'E=\angle ADE=90^\circ$,

$\overline{AB'}=\overline{AD}=10$ cm,

$\overline{AE}$는 공통이므로

$\triangle AB'E\equiv\triangle ADE$ (RHS 합동)



즉, $\angle DAE=\angle B'AE=\frac{1}{2}\angle DAB'=\frac{90^\circ-34^\circ}{2}=28^\circ$이므로

직각삼각형 $AB'E$에서

$\overline{B'E}=\overline{AB'}\tan28^\circ=10\times0.5317=5.317\,(cm)$

따라서 구하는 넓이는

$\square AB'ED=2\triangle AB'E$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times10\times5.317\right)$

$=53.17\,(cm^2)$ **답** 53.17 cm^2

34

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면

$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로

$\triangle ADC=\triangle AEC$

$\therefore\ \square ABCD$

$=\triangle ABC+\triangle ADC$

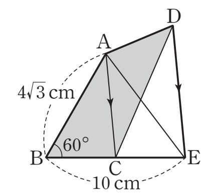
$=\triangle ABC+\triangle AEC$

$=\triangle ABE$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle ABE)$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times10\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\,(cm^2)$ **답** 30 cm^2

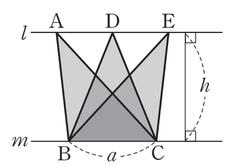


blacklabel 특강 필수개념

평행선과 삼각형의 넓이

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 평행할 때, 세 삼각형 ABC, DBC, EBC는 밑변 BC가 공통이고 높이는 h로 같으므로

$\triangle ABC=\triangle DBC=\triangle EBC=\frac{1}{2}ah$



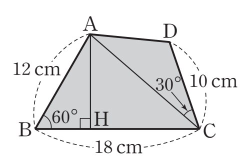
35

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times12\times18\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times12\times18\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=54\sqrt{3}\,(cm^2)$

점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\overline{AB}\sin60^\circ$

$=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\,(cm)$

$\overline{BH}=\overline{AB}\cos60^\circ=12\times\frac{1}{2}=6\,(cm)$

$\therefore\ \overline{CH}=18-6=12\,(cm)$

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+12^2}=\sqrt{252}=6\sqrt{7}\,(cm)$이므로

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times6\sqrt{7}\times10\times\sin30^\circ$

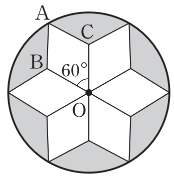
$=15\sqrt{7}\,(cm^2)$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=54\sqrt{3}+15\sqrt{7}\,(cm^2)$ **답** ①

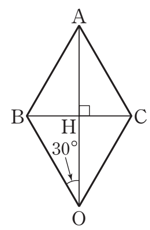
36

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C를 정하면 마름모 ABOC에서



$\angle BOC=\dfrac{360^{\circ}}{6}=60^{\circ}$

이때, 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 마름모 ABOC의 두 대각선의 교점을 H라 하면 오른쪽 그림과 같다.



선분 AO는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{AO}=\dfrac{20\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

즉, $\overline{AH}=\overline{OH}=\dfrac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}(\mathrm{cm})$이고, 직각삼각형 BOH에서

$\overline{OB}=\dfrac{\overline{OH}}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=10(\mathrm{cm})$

마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 평행사변형이므로

$\square ABOC=10\times10\times\sin 60^{\circ}$

$=10\times10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$\pi\times(10\sqrt{3})^2-6\times50\sqrt{3}=300\pi-300\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

답 $(300\pi-300\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$

| 다른풀이 |

$\square ABOC$에서 $\angle BOC=60^{\circ}$이므로 $\square ABOC$는 합동인 두 정삼각형 BOC, ABC로 이루어진 사각형이다.

이때, $\triangle BOC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times10^2=25\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$이므로

$\square ABOC=50\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 27～28

01 (1) $8\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{7}$ **02** $\sqrt{35}$

03 (1) $(3-\sqrt{3})$ cm (2) $(2\sqrt{3}-3)$ cm^2 **04** 17 **05** $\dfrac{\sqrt{30}}{18}$

06 $8\sqrt{3}$ m **07** 21 **08** 41

01 해결단계

(1)	❶ 단계	$\overline{BD}$의 길이를 구한다.
(2)	❷ 단계	$\overline{BG}$의 길이를 구한다.
	❸ 단계	$\triangle BGD$의 넓이를 구한다.

(1) 직각삼각형 DGH에서 $\overline{GH}=12$이므로

$\overline{DG}=\dfrac{\overline{GH}}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{12}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$

이때, $\angle BGF=45^{\circ}$이므로 $\square BFGC$는 정사각형이다. 즉, $\overline{BD}$와 $\overline{DG}$는 각각 합동인 두 직사각형 ABCD, DCGH의 대각선이므로

$\overline{BD}=\overline{DG}=8\sqrt{3}$

(2) 직각삼각형 DGH에서

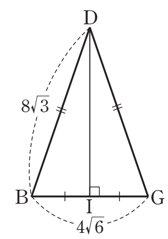
$\overline{DH}=\overline{GH}\tan 30^{\circ}=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BF}=\overline{CG}=\overline{AE}=\overline{DH}=4\sqrt{3}$

즉, 직각삼각형 BFG에서

$\overline{BG}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin 45^{\circ}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6}$

이때, $\triangle DBG$는 $\overline{DB}=\overline{DG}$인 이등변삼각형이고, 점 D에서 $\overline{BG}$에 내린 수선의 발을 I라 하면 이등변삼각형의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발은 밑변을 이등분하므로



$\overline{GI}=\dfrac{1}{2}\overline{BG}=\dfrac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$

직각삼각형 DIG에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DI}^2=\overline{DG}^2-\overline{GI}^2$

$=(8\sqrt{3})^2-(2\sqrt{6})^2$

$=192-24=168$

$\therefore \overline{DI}=\sqrt{168}=2\sqrt{42}\ (\because \overline{DI}>0)$

$\therefore \triangle BGD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BG}\times\overline{DI}$

$=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{6}\times2\sqrt{42}$

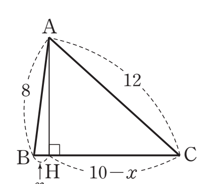
$=24\sqrt{7}$

답 (1) $8\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{7}$

02 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABC$의 높이를 구한다.
❷ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 $\sin C$를 구한다.
❸ 단계	$\overline{DE}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{BH}=x$라 하면

$\overline{CH}=10-x$

두 직각삼각형 ABH, AHC에서 피타고라스정리에 의하여

$\overline{AH}^2=8^2-x^2=12^2-(10-x)^2$

$64-x^2=144-(100-20x+x^2)$

$20x=20 \quad \therefore x=1$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{8^2-1^2}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin C$이므로

$\frac{1}{2}\times 10\times 3\sqrt{7}=\frac{1}{2}\times 10\times 12\times\sin C$

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$

이때, 직각삼각형 EDC에서 $\sin(\angle ECD)=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로

$\overline{CE}=4k$, $\overline{DE}=\sqrt{7}k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{CD}=\sqrt{(4k)^2-(\sqrt{7}k)^2}=\sqrt{9k^2}=3k$

직선 l은 $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하므로

$\triangle EDC=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\triangle ABC$에서

$\frac{1}{2}\times 3k\times\sqrt{7}k=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 10\times 3\sqrt{7}\right)$, $k^2=5$

$\therefore k=\sqrt{5}$ $(\because k>0)$

$\therefore \overline{DE}=\sqrt{7}k=\sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{35}$

답 $\sqrt{35}$

| 다른풀이 |

$\triangle ABC$의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BH}=x$라 하면

$\overline{AH}^2=8^2-x^2=12^2-(10-x)^2$

$\therefore x=1$ $\quad\therefore \overline{BH}=1$, $\overline{CH}=9$, $\overline{AH}=3\sqrt{7}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 10\times 3\sqrt{7}=15\sqrt{7}$

한편, $\overline{AH}/\!/\overline{ED}$이므로 $\triangle AHC\backsim\triangle EDC$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{ED}:\overline{DC}=\overline{AH}:\overline{HC}=3\sqrt{7}:9=\sqrt{7}:3$

즉, $\overline{ED}=\sqrt{7}k$, $\overline{DC}=3k$ $(k>0)$라 하면

$\triangle EDC=\frac{1}{2}\triangle ABC$에서

$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}k\times 3k=\frac{1}{2}\times 15\sqrt{7}$, $k^2=5$

$\therefore k=\sqrt{5}$ $(\because k>0)$

$\therefore \overline{DE}=\sqrt{7}k=\sqrt{35}$

03 해결단계

(1)	❶ 단계	$\overline{AH}$의 길이를 구한다.
(2)	❷ 단계	$\triangle ABF$의 넓이를 구한다.
	❸ 단계	$\triangle BEF$의 넓이를 구한다.

(1) $\overline{AH}=x$ cm라 하면 $\triangle DHF$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{HF}=\overline{DH}=(2-x)$ cm

직각삼각형 AFH에서 $\tan 30^\circ=\frac{\overline{HF}}{\overline{AH}}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2-x}{x}$, $\sqrt{3}x=6-3x$

$(3+\sqrt{3})x=6$ $\quad\therefore x=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AH}=(3-\sqrt{3})$ cm

(2) $\triangle ABF=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times(3-\sqrt{3})=3-\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

$\therefore \triangle BEF=\triangle ABE-\triangle ABF$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-(3-\sqrt{3})$

$=2\sqrt{3}-3\,(\text{cm}^2)$

답 (1) $(3-\sqrt{3})$ cm (2) $(2\sqrt{3}-3)$ cm^2

04 해결단계

❶ 단계	삼각비를 이용하여 선분의 길이를 나타낸다.
❷ 단계	$\overline{OA_1}\times\overline{OA_2}\times\overline{OA_3}\times\cdots\times\overline{OA}$의 값을 구하고 그 값을 5의 거듭제곱으로 나타낸다.
❸ 단계	n의 값을 구한다.

$\triangle OBA_1$에서 $\angle OBA_1=5^\circ$이므로

$\overline{OA_1}=\overline{OB}\tan 5^\circ=5\tan 5^\circ$

$\triangle OBA_2$에서 $\angle OBA_2=10^\circ$이므로

$\overline{OA_2}=\overline{OB}\tan 10^\circ=5\tan 10^\circ$

$\triangle OBA_3$에서 $\angle OBA_3=15^\circ$이므로

$\overline{OA_3}=\overline{OB}\tan 15^\circ=5\tan 15^\circ$

$\vdots$

$\triangle OBA_8$에서 $\angle OBA_8=40^\circ$이므로

$\overline{OA_8}=\overline{OB}\tan 40^\circ=5\tan 40^\circ$

$\triangle OBA_9$에서 $\angle OBA_9=45^\circ$이므로

$\overline{OA_9}=\overline{OB}\tan 45^\circ=5\times 1=5$

$\triangle OBA_{10}$에서 $\angle OBA_{10}=50^\circ$이므로

$\overline{OA_{10}}=\overline{OB}\tan 50^\circ=\frac{\overline{OB}}{\tan 40^\circ}=\frac{5}{\tan 40^\circ}$

$\vdots$

$\triangle OBA_{15}$에서 $\angle OBA_{15}=75^\circ$이므로

$\overline{OA_{15}}=\overline{OB}\tan 75^\circ=\frac{\overline{OB}}{\tan 15^\circ}=\frac{5}{\tan 15^\circ}$

$\triangle OBA_{16}$에서 $\angle OBA_{16}=80^\circ$이므로

$\overline{OA_{16}}=\overline{OB}\tan 80^\circ=\frac{\overline{OB}}{\tan 10^\circ}=\frac{5}{\tan 10^\circ}$

$\triangle OBA$에서 $\angle OBA=85^\circ$이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}\tan 85^\circ=\frac{\overline{OB}}{\tan 5^\circ}=\frac{5}{\tan 5^\circ}$

따라서

$\overline{OA_1}\times\overline{OA_2}\times\overline{OA_3}\times\cdots\times\overline{OA_8}\times\overline{OA_9}\times\overline{OA_{10}}\times\cdots$
$\times\overline{OA_{15}}\times\overline{OA_{16}}\times\overline{OA}$

$=5\tan 5^\circ\times 5\tan 10^\circ\times 5\tan 15^\circ\times\cdots$

$\times 5\tan 40^\circ\times 5\times\frac{5}{\tan 40^\circ}\times\cdots$

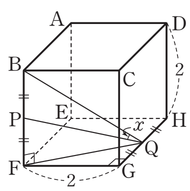
$\times\frac{5}{\tan 15^\circ}\times\frac{5}{\tan 10^\circ}\times\frac{5}{\tan 5^\circ}$

$=5^{2\times8}\times5^1=5^{17}$

이므로 $n=17$ 답 17

05 해결단계

❶ 단계	선분 FQ를 긋고 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{FQ}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BQ}$의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	두 삼각형 BPQ, PFQ의 넓이가 같음을 확인하고 x에 대한 식을 세운다.
❸ 단계	$\sin x$의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{FQ}$를 그으면

$\overline{BP}=\overline{PF}=\overline{GQ}=1$이므로

직각삼각형 FGQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{FQ}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

직각삼각형 PFQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 BFQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BQ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

이때, △BPQ와 △PFQ의 밑변을 각각 $\overline{BP}$, $\overline{PF}$라 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로

△BPQ=△PFQ

즉, $\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{PQ}\times\sin x=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{QF}$이므로

$\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}\times\sin x=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}$

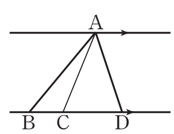
$3\sqrt{6}\sin x=\sqrt{5}$ $\quad\therefore \sin x=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{18}$ 답 $\frac{\sqrt{30}}{18}$

blacklabel 특강 필수개념

높이가 같은 삼각형의 넓이의 비

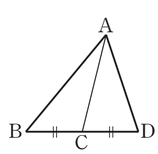
(1) 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

△ABC : △ACD$=\overline{BC}:\overline{CD}$



(2) 오른쪽 그림에서 점 C가 $\overline{BD}$의 중점이면

△ABC=△ACD$=\frac{1}{2}$△ABD



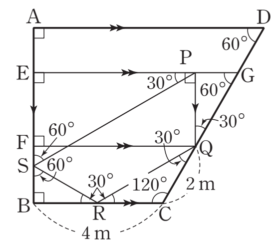
06 해결단계

❶ 단계	주어진 길이와 각의 크기를 이용하여 $\overline{QR}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	주어진 길이와 각의 크기를 이용하여 $\overline{RS}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	주어진 길이와 각의 크기를 이용하여 $\overline{PS}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	주어진 길이와 각의 크기를 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.
❺ 단계	빛의 이동 거리를 구한다.

사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

$\angle C=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ$

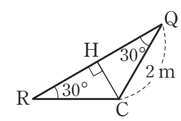
$\overline{AB}$와 수직이고 점 P를 지나는 선분 EG, $\overline{AB}$와 수직이고 점 Q를 지나는 선분 FQ를 그으면 $\overline{AD}/\!/\overline{EG}/\!/\overline{FQ}/\!/\overline{BC}$이다. 이때, 주어진 각의 크기와 빛의 입사각과 반사각의 크기가 같음을 이용하여 나머지 각의 크기를 구하면 다음 그림과 같다.



즉, △CQR는 이등변삼각형이므로

$\overline{CR}=\overline{CQ}=2\text{ m}$ $\quad\therefore \overline{BR}=2\text{ m}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 △CQR의 꼭짓점 C에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{HQ}=\overline{CQ}\cos30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\text{m})$

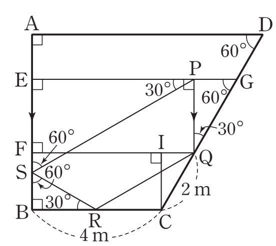
$\therefore \overline{QR}=2\overline{HQ}=2\sqrt{3}(\text{m})$ ……㉠

또한, 직각삼각형 BRS에서

$\overline{RS}=\frac{\overline{BR}}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\text{m})$ ……㉡

$\overline{SB}=\overline{BR}\tan30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\text{m})$

한편, 다음 그림과 같이 점 C에서 $\overline{FQ}$에 내린 수선의 발을 I라 하자.



직각삼각형 CQI에서 $\angle CQI=\angle D=60^\circ$ (∵ 동위각)

이므로

$\overline{CI}=\overline{CQ}\sin60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\text{m})$

$\overline{IQ}=\overline{CQ}\cos60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1(\text{m})$

$\therefore \overline{EP}=\overline{BC}+\overline{IQ}=4+1=5(\text{m})$

직각삼각형 ESP에서

$\overline{PS}=\frac{\overline{EP}}{\sin60^\circ}=\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}(\text{m})$ ……㉢

또한, $\overline{ES}=\frac{\overline{EP}}{\tan60^\circ}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}(\text{m})$이고

$\overline{ES}+\overline{SB}=\overline{PQ}+\overline{CI}$이므로

$\frac{5\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\overline{PQ}+\sqrt{3}$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{7\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$(m) ······㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서 빛의 이동 거리는

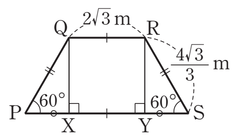
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{PS}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$=8\sqrt{3}$(m)

답 $8\sqrt{3}$ m

| 다른풀이 |

앞의 풀이와 같은 방법으로 $\overline{QR}=2\sqrt{3}$ m, $\overline{RS}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m



사각형 PSRQ에서

$\angle P=\angle S=60^\circ$이므로

□PSRQ는 등변사다리꼴이다.

$\therefore \overline{PQ}=\overline{RS}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ m

또한, 두 꼭짓점 Q, R에서 $\overline{PS}$에 내린 수선의 발을 각각 X, Y라 하면

$\overline{XY}=\overline{QR}=2\sqrt{3}$ m

직각삼각형 RYS에서

$\overline{SY}=\overline{RS}\cos 60^\circ=\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$(m)

$\therefore \overline{PX}=\overline{SY}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m

$\therefore \overline{PS}=\overline{PX}+\overline{XY}+\overline{SY}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$(m)

따라서 빛의 이동 거리는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$=8\sqrt{3}$ (m)

07 해결단계

❶ 단계	□PQRS가 평행사변형임을 설명하고 □PQRS의 이웃한 두 변의 길이를 구한다.
❷ 단계	□PQRS의 이웃한 두 변이 이루는 각의 크기를 구한다.
❸ 단계	□PQRS의 넓이를 구한다.

△ABC에서 두 점 S, R는 각각 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 중점이므로

$\overline{AB}/\!/\overline{SR}$, $\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$

같은 방법으로 △ABD에서

$\overline{AB}/\!/\overline{PQ}$, $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$

즉, $\overline{SR}/\!/\overline{PQ}$, $\overline{SR}=\overline{PQ}$이므로 □PQRS는 평행사변형이다.

또한, △BCD에서도 같은 방법으로

$\overline{QR}/\!/\overline{CD}$, $\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 14=7$

한편, $\overline{AB}/\!/\overline{SR}$에서

$\angle SRC=\angle ABC=70^\circ$ ($\because$ 동위각)

$\overline{CD}/\!/\overline{QR}$에서

$\angle QRB=\angle DCB=80^\circ$ ($\because$ 동위각)

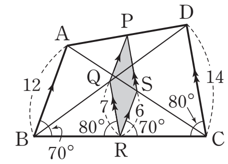
$\therefore \angle QRS=180^\circ-(\angle SRC+\angle QRB)$

$=180^\circ-(70^\circ+80^\circ)=30^\circ$

$\therefore$ □PQRS$=\overline{QR}\times\overline{SR}\times\sin 30^\circ$

$=7\times 6\times\frac{1}{2}$

$=21$



답 21

08 해결단계

❶ 단계	두 정사각형의 한 변의 길이의 합을 구한다.
❷ 단계	두 정사각형의 한 변의 길이의 곱을 구한다.
❸ 단계	두 정사각형의 넓이의 합을 구한다.

$\overline{OC}=x$, $\overline{OD}=y$라 하면 두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 36이므로

$4x+4y=36$ $\therefore x+y=9$ ······㉠

△OCD의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OD}\times\sin 30^\circ=5$

$\frac{1}{2}\times x\times y\times\frac{1}{2}=5$, $\frac{1}{4}xy=5$

$\therefore xy=20$ ······㉡

㉠, ㉡에서

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=81-40=41$

따라서 두 정사각형의 넓이의 합은 41이다.

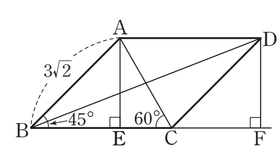
답 41

미리보는 학력평가 p. 29

1 ③	2 ⑤	3 ②	4 200

1

다음 그림과 같이 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E, 꼭짓점 D에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 F라 하자.



$\angle ABC=45^\circ$이므로 직각이등변삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\overline{BE}=3\sqrt{2}\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$ ······㉠

$\angle ACB=60^\circ$이므로 직각삼각형 AEC에서

$\overline{CE}=\dfrac{\overline{AE}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ ($\because$ ㉠)

$=\sqrt{3}$

두 선분 AB와 CD는 서로 평행하므로

$\angle DCF=\angle ABE=45^\circ$ ……㉡

평행사변형에서 대변의 길이는 서로 같으므로

$\overline{AB}=\overline{CD}$ ……㉢

두 직각삼각형 ABE와 DCF에서 ㉡, ㉢에 의하여

$\triangle ABE \equiv \triangle DCF$ (RHA 합동)

즉, $\triangle DCF$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{CF}=\overline{DF}=3$

따라서 직각삼각형 DBF에서 선분 BF의 길이는

$\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{CE}+\overline{CF}$

$=3+\sqrt{3}+3$

$=6+\sqrt{3}$

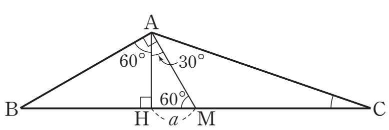
$\therefore \tan(\angle CBD)=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{BF}}$

$=\dfrac{3}{6+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{6-\sqrt{3}}{11}$ 답 ③

2

다음 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{HM}=a$라 하자.



직각삼각형 AHM에서

$\overline{AH}=\overline{HM}\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$

$\angle AMB=60^\circ$이므로

$\angle MAH=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$

$\therefore \angle BAH=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\overline{AH}\tan 60^\circ=\sqrt{3}a\times\sqrt{3}=3a$

$\therefore \overline{BM}=\overline{BH}+\overline{HM}=3a+a=4a$

이때, $\overline{CH}=\overline{HM}+\overline{CM}=\overline{HM}+\overline{BM}=a+4a=5a$이므로

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(5a)^2}$

$=\sqrt{28a^2}=2\sqrt{7}a$ ($\because a>0$)

$\therefore \cos C=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\dfrac{5a}{2\sqrt{7}a}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ 답 ⑤

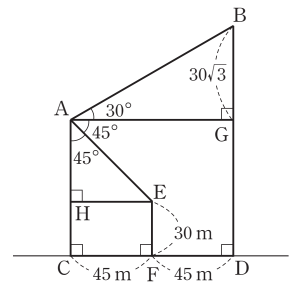
3

직각삼각형 BAG에서

$\overline{AG}=\overline{CD}=\overline{CF}+\overline{FD}=45+45=90\,(\text{m})$

$\therefore \overline{BG}=\overline{AG}\tan 30^\circ=90\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=30\sqrt{3}\,(\text{m})$

다음 그림과 같이 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle EAH=\angle AEH=45^\circ$



즉, $\triangle AHE$는 $\overline{AH}=\overline{HE}$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{HE}=\overline{CF}=45\,\text{m}$

$\therefore \overline{GD}=\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{HC}=\overline{CF}+\overline{EF}$

$=45+30=75\,(\text{m})$

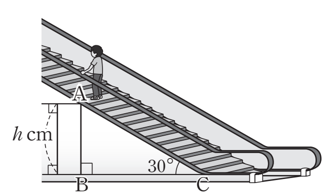
따라서 선분 BD의 길이는

$\overline{BD}=\overline{BG}+\overline{GD}=30\sqrt{3}+75\,(\text{m})$

$\therefore a=75+30\sqrt{3}$ 답 ②

4

다음 그림과 같이 세 점 A, B, C를 정하면 $\triangle ABC$는 직각삼각형이고 $\overline{AC}$는 학생이 에스컬레이터를 타고 10초 동안 이동한 거리이다.



이때, 에스컬레이터는 매초 40 cm씩 이동하므로 학생이 에스컬레이터를 타고 10초 동안 이동한 거리는

$\overline{AC}=40\times10=400\,(\text{cm})$

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle C=30^\circ$이므로

$\overline{AB}=\overline{AC}\sin 30^\circ=400\times\dfrac{1}{2}=200\,(\text{cm})$

$\therefore h=200$ 답 200

Ⅱ 원의 성질

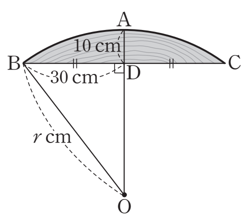
03 원과 직선

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 33

01 100π cm **02** 110° **03** ③ **04** ④ **05** ③
06 2 cm **07** ⑤

01

오른쪽 그림과 같이 통나무의 단면인 원의 중심을 O, 반지름의 길이를 r cm라 하면



$\overline{OB}=\overline{OA}=r$ cm

$\overline{OD}=\overline{OA}-\overline{AD}=r-10$ (cm)

△ODB에서 $\overline{OB}^2=\overline{BD}^2+\overline{OD}^2$이므로

$r^2=30^2+(r-10)^2$, $r^2=900+(r^2-20r+100)$

$20r=1000$ $\quad\therefore r=50$

따라서 통나무의 단면인 원의 반지름의 길이는 50 cm이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times 50=100\pi$ (cm)

답 100π cm

02

$\overline{OP}=\overline{OR}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$

즉, △ABC는 이등변삼각형이므로

$\angle B=\frac{1}{2}\times(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$

□OPBQ에서 $\angle BPO=\angle BQO=90^\circ$이므로

$\angle POQ=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+70^\circ)=110^\circ$

답 110°

03

$\overline{BC}=5$, $\overline{CR}=\overline{CQ}=2$이므로

$\overline{BP}=\overline{BR}=\overline{BC}-\overline{CR}$

$=5-2=3$

$\therefore \overline{AP}=\overline{AB}+\overline{BP}=6+3=9$

즉, $\overline{AQ}=\overline{AP}=9$이므로

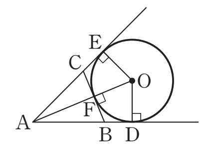
$\overline{AC}=\overline{AQ}-\overline{CQ}=9-2=7$

답 ③

blacklabel 특강 참고

원의 접선의 성질의 활용

오른쪽 그림과 같이 세 직선 AD, AE, CB가 원 O의 접선이고 세 점 D, E, F가 접점일 때



(1) $\overline{AE}=\overline{AD}$, $\overline{BD}=\overline{BF}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$

(2) (△ABC의 둘레의 길이)

$=\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{FC}+\overline{AC}$

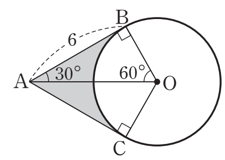
$=(\overline{AB}+\overline{BD})+(\overline{CE}+\overline{AC})$

$=\overline{AD}+\overline{AE}$

$=2\overline{AE}$

04

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$를 그으면



△AOB와 △AOC에서

$\angle B=\angle C=90^\circ$, $\overline{AO}$는 공통,

$\overline{BO}=\overline{CO}$이므로

△AOB≡△AOC (RHS 합동)

이때, $\angle BAO=\angle CAO=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$이고,

$\overline{AB}=6$이므로 직각삼각형 AOB에서

$\overline{OB}=\overline{AB}\tan 30^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

또한, $\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$에서

$\angle BOC=60^\circ+60^\circ=120^\circ$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

□ACOB−(부채꼴 OBC의 넓이)

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}\right)-\pi\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{120}{360}$

$=12\sqrt{3}-4\pi$

$=4(3\sqrt{3}-\pi)$

답 ④

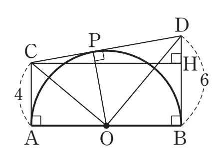
05

① $\overline{CP}=\overline{CA}=4$, $\overline{DP}=\overline{DB}=6$이므로

$\overline{CD}=\overline{CP}+\overline{DP}=4+6=10$

② $\angle CAO=\angle DBO=90^\circ$이므로 $\overline{AC}/\!/\overline{BD}$이다.

③ 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{BH}=\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=6$이므로

$\overline{DH}=6-4=2$

△CHD에서 $\overline{CD}=10$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{DH}^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

즉, 반원 O의 지름의 길이가 $\overline{AB}=\overline{CH}=4\sqrt{6}$이므로 반지름의 길이는 $\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$이다.

④ $\triangle AOC$와 $\triangle POC$에서

$\overline{CA}=\overline{CP}$, $\overline{OC}$는 공통, $\overline{OA}=\overline{OP}$

$\therefore \triangle AOC \equiv \triangle POC$ (SSS 합동)

⑤ $\triangle AOC \equiv \triangle POC$, $\triangle POD \equiv \triangle BOD$이므로

$\angle AOC=\angle POC$, $\angle POD=\angle BOD$

이때, $\angle AOC+\angle POC+\angle POD+\angle BOD=180°$이므로

$2\angle POC+2\angle POD=180°$

즉, $\angle POC+\angle POD=90°$이므로

$\angle COD=90°$

따라서 $\triangle COD$는 $\angle COD=90°$인 직각삼각형이다.

그러므로 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

06

$\overline{AQ}=x$ cm라 하면 $\overline{AP}=\overline{AQ}=x$ cm

$\overline{AB}=11$ cm이므로 $\overline{BR}=\overline{BP}=11-x$ (cm)

$\overline{AC}=7$ cm이므로 $\overline{CR}=\overline{CQ}=7-x$ (cm)

$\overline{BC}=14$ cm이므로 $\overline{BC}=\overline{BR}+\overline{CR}$에서

$14=(11-x)+(7-x)$

$2x=4 \qquad \therefore x=2$

$\therefore \overline{AQ}=2$ cm 답 2 cm

07

원 O가 사각형 ABCD에 내접하므로

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}=8+6=14$ ……㉠

또한, 원 O′이 사각형 CEFD에 내접하므로

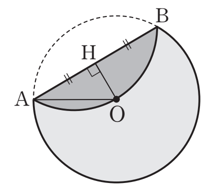
$\overline{CD}+\overline{EF}=\overline{DF}+\overline{CE}=5+12=17$ ……㉡

㉡－㉠을 하면

$\overline{EF}-\overline{AB}=17-14=3$ 답 ⑤

Step 2	A등급을 위한 문제			pp. 34~38
01 ①	02 ③	03 24	04 1	05 ③
06 10π cm	07 $6\sqrt{7}$	08 ⑤	09 ①	10 ①
11 ③	12 16π	13 $2\sqrt{3}$	14 ①	15 $50°$
16 ④	17 ⑤	18 ②	19 ②	20 4
21 2	22 $30-4\pi$	23 21	24 $\sqrt{2}-1$	25 52
26 16	27 ④	28 ⑤	29 9 : 4	

01



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB}=12$ cm이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 12=6$ (cm)

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\overline{OA}=r$ cm, $\overline{OH}=\frac{1}{2}r$ cm이므로 $\triangle OHA$에서

$\overline{OA}^2=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2$

즉, $r^2=6^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2$에서

$\frac{3}{4}r^2=36$, $r^2=48 \qquad \therefore r=4\sqrt{3}$ ($\because r>0$)

한편, 직각삼각형 OHA에서

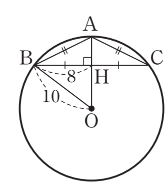
$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$이므로

$\angle AOH=60° \qquad \therefore \angle AOB=2\times 60°=120°$

따라서 $\widehat{AOB}$의 길이는

$2\pi\times 4\sqrt{3}\times\frac{120}{360}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm) 답 ①

02



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$를 긋고 $\overline{BC}$와 $\overline{AO}$의 교점을 H라 하면 $\overline{BC}\perp\overline{AO}$이므로

$\overline{BH}=\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 16=8$

$\overline{OB}$를 그으면 $\triangle OHB$에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$

$\therefore \overline{AH}=\overline{AO}-\overline{OH}=10-6=4$

따라서 $\triangle ABH$에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ 답 ③

03

$\overline{O_1A}=15$, $\overline{O_2A}=20$이고 $\overline{O_1A}\perp\overline{O_2A}$이므로

$\triangle O_1O_2A$에서

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{\overline{O_1A}^2+\overline{O_2A}^2}=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{625}=25$

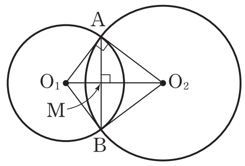
$\triangle AO_1O_2$, $\triangle BO_1O_2$에서

$\overline{O_1A}=\overline{O_1B}$, $\overline{O_2A}=\overline{O_2B}$, $\overline{O_1O_2}$는 공통이므로

$\triangle AO_1O_2\equiv\triangle BO_1O_2$ (SSS 합동)

즉, $\overline{O_1O_2}$는 이등변삼각형 AO_1B의 꼭지각의 이등분선이므로
$\overline{AB}\perp\overline{O_1O_2}$이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{O_1O_2}$와 $\overline{AB}$가 만나는 점을 M이라 하면



$\triangle O_1O_2A$에서

$\overline{O_1A}\times\overline{O_2A}=\overline{O_1O_2}\times\overline{AM}$이므로

$15\times20=25\times\overline{AM}$ $\quad\therefore \overline{AM}=12$

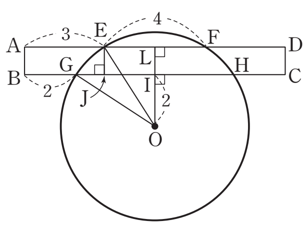
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=2\times12=24$

답 24

04

다음 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{GJ}=\overline{AE}-\overline{BG}=3-2=1$



$\overline{OI}$의 연장선이 $\overline{AD}$와 만나는 점을 L이라 하면

$\overline{JI}=\overline{EL}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\times4=2$

$\therefore \overline{GI}=\overline{GJ}+\overline{JI}=1+2=3$

$\overline{OG}$를 그으면 $\triangle OIG$에서

$\overline{OG}=\sqrt{\overline{GI}^2+\overline{OI}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\overline{AB}=x$라 하면 $\overline{LI}=x$이고

$\overline{OI}=2$, $\overline{OE}=\overline{OG}=\sqrt{13}$이므로

$\triangle OLE$에서 $\overline{OE}^2=\overline{EL}^2+\overline{OL}^2$

$(\sqrt{13})^2=2^2+(x+2)^2$, $x^2+4x-5=0$

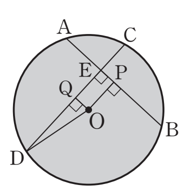
$(x+5)(x-1)=0$ $\quad\therefore x=1\ (\because x>0)$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는 1이다.

답 1

05

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.



$\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}=5+9=14$이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times14=7$

$\overline{EP}=\overline{AP}-\overline{AE}=7-5=2$

$\therefore \overline{OQ}=\overline{EP}=2$

$\overline{CD}=16$이므로

$\overline{DQ}=\overline{CQ}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times16=8$

$\triangle DOQ$에서

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OQ}^2+\overline{DQ}^2}=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

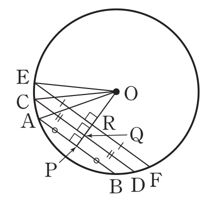
따라서 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{17}$이므로 원의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{17})^2=68\pi$

답 ③

06

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하면



$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times6=3(\text{cm})$

$\overline{CQ}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times8=4(\text{cm})$

$\overline{ER}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{21}=\sqrt{21}(\text{cm})$

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$가 일정한 간격으로 서로 평행하게 있으므로 원 O의 반지름의 길이를 r cm, $\overline{OR}=x$ cm, $\overline{PQ}=\overline{QR}=a$ cm라 하면 $\triangle OER$, $\triangle OCQ$, $\triangle OAP$에서 순서대로

$r^2=x^2+(\sqrt{21})^2$ ……㉠

$r^2=(x+a)^2+4^2$ ……㉡

$r^2=(x+2a)^2+3^2$ ……㉢

㉠=㉡에서 $x^2+21=x^2+2ax+a^2+16$

$\therefore 2ax+a^2=5$ ……㉣

㉠=㉢에서 $x^2+21=x^2+4ax+4a^2+9$

$\therefore 4ax+4a^2=12$ ……㉤

㉤$-2\times$㉣을 하면

$2a^2=2$, $a^2=1$ $\quad\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉣에 대입하면

$2x+1=5$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$r^2=2^2+(\sqrt{21})^2=25$ $\quad\therefore r=5\ (\because r>0)$

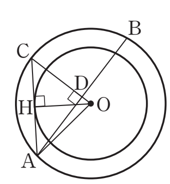
따라서 원 O의 반지름의 길이는 5 cm이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times5=10\pi(\text{cm})$

답 10π cm

07

오른쪽 그림과 같이 작은 원과 $\overline{AC}$의 접점을 H라 하면 $\triangle CHO$에서



$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CO}^2-\overline{OH}^2}$

$\quad=\sqrt{8^2-6^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\overline{AC}$는 큰 원의 현이므로

$\overline{AC}=2\overline{CH}=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

$\overline{AB}$와 $\overline{OC}$의 교점을 D라 하면 $\overline{AB}$는 큰 원의 현이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}$

$\triangle$OCA에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AD}$이므로

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{7}\times6=\frac{1}{2}\times8\times\overline{AD}$

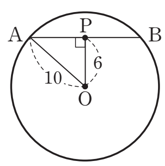
$\therefore\ \overline{AD}=3\sqrt{7}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AD}=2\times3\sqrt{7}=6\sqrt{7}$ 답 $6\sqrt{7}$

08

점 P를 지나는 원 O의 현 중에서 길이가 가장 짧은 현은 중점이 P인 현이다.

오른쪽 그림과 같이 중점이 P인 현의 양 끝 점을 각각 A, B라 하면



$\overline{AP}=\overline{BP}$

직각삼각형 AOP에서

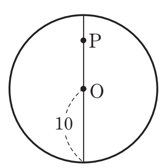
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{PO}^2}=\sqrt{10^2-6^2}$

$=\sqrt{64}=8$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AP}=2\times8=16$

즉, 조건을 만족시키는 가장 짧은 현의 길이는 16이고, 점 P를 지나고 길이가 16인 현은 1개 존재한다.

또한, 점 P를 지나는 원 O의 현 중에서 길이가 가장 긴 현은 오른쪽 그림과 같은 원의 지름이다.



이때, 원의 지름의 길이는 $2\times10=20$이고, 점 P를 지나는 지름은 1개 존재한다.

이상에서 점 P를 지나는 현의 길이를 l이라 하면

$16\le l\le20$

따라서 점 P를 지나고 길이가 정수인 현은

길이가 16인 현이 1개, 길이가 17인 현이 2개,

길이가 18인 현이 2개, 길이가 19인 현이 2개,

길이가 20인 현이 1개

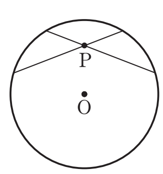
이므로 모두

$1+2+2+2+1=8$(개) 답 ⑤

blacklabel 특강 오답피하기

오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나는 현은 지름과 점 P를 중점으로 하는 현을 제외하면 같은 길이의 현이 모두 두 개씩 존재한다.

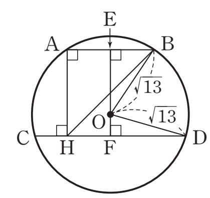
현의 개수를 셀 때, 이것에 주의하여 빠짐없이 셀 수 있도록 한다.



09 해결단계

❶ 단계	원의 중심 O를 지나고 $\overline{AH}$와 평행한 직선 EF를 긋는다.
❷ 단계	$\overline{OE}$, $\overline{OF}$의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	$\overline{BH}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O, 점 O를 지나면서 $\overline{AH}$에 평행한 직선이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 만나는 점을 각각 E, F라 하자.



$\overline{OF}=x$라 하면 $\overline{EF}=\overline{AH}=4$이므로

$\overline{OE}=4-x$

$\overline{AB}:\overline{CD}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{AB}=2a$, $\overline{CD}=2\sqrt{3}a\ (a>0)$라 하면

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=a$, $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\sqrt{3}a$

$\triangle$OBE에서 $\overline{BE}^2+\overline{OE}^2=\overline{OB}^2$이므로

$a^2+(4-x)^2=(\sqrt{13})^2$

$\therefore\ a^2+x^2-8x+3=0$ ……㉠

$\triangle$OFD에서 $\overline{DF}^2+\overline{OF}^2=\overline{OD}^2$이므로

$(\sqrt{3}a)^2+x^2=(\sqrt{13})^2$

$\therefore\ 3a^2+x^2-13=0$ ……㉡

㉠$\times3-$㉡을 하면

$2x^2-24x+22=0$

$x^2-12x+11=0$, $(x-1)(x-11)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=11$

이때, $4-x>0$, $x>0$에서 $x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면

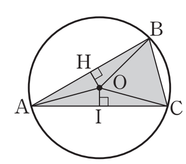
$a^2-4=0$, $a^2=4$ $\quad\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

따라서 $\triangle$AHB에서 $\overline{AB}=2a=2\times2=4$, $\overline{AH}=4$이므로

$\overline{BH}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ 답 ①

10

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면



$\overline{OH}=\overline{OI}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}$

$\therefore\ \angle AOB=\angle AOC$

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}=5:2$에서

$\angle AOB:\angle BOC=5:2$

이때, $\angle AOB=\angle AOC=5k^\circ$, $\angle BOC=2k^\circ\ (k>0)$라 하면

$\angle AOB+\angle BOC+\angle AOC=360^\circ$에서

$5k+2k+5k=360$, $12k=360$

$\therefore\ k=30$

즉, $\angle AOB=\angle AOC=150^\circ$, $\angle BOC=60^\circ$이므로

$\triangle ACB=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin(180°-150°)$

$+\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin 60°$

$+\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OA}\times\sin(180°-150°)$

$=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{1}{2}$

$=4+4\sqrt{3}+4=8+4\sqrt{3}$ 답 ①

blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 넓이

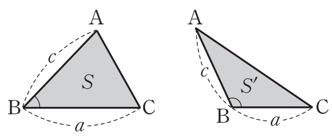
$\triangle ABC$에서 두 변의 길이 a, c와 그 끼인각 $\angle B$의 크기를 알 때, 넓이 S는

(1) $\angle B$가 예각인 경우

$S=\frac{1}{2}ac\sin B$

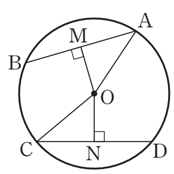
(2) $\angle B$가 둔각인 경우

$S'=\frac{1}{2}ac\sin(180°-B)$



11

오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 두 현 AB와 CD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면



$\overline{AB}=2\boxed{\overline{AM}}$, $\overline{CD}=2\boxed{\overline{CN}}$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로

$\boxed{\overline{AM}}=\boxed{\overline{CN}}$ ……㉠

두 직각삼각형 OAM과 OCN에서

$\overline{OA}=\boxed{\overline{OC}}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\triangle OAM\equiv\boxed{\triangle OCN}$ ($\boxed{\text{RHS}}$ 합동)

$\therefore \overline{OM}=\overline{ON}$

즉, 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

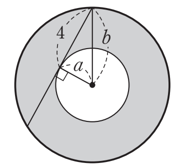
따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

12

현의 길이가 8로 모두 같으므로 현의 중점에서 원의 중심까지의 거리도 모두 같다.

따라서 무한히 많은 현의 중점을 연결하면 그림의 안쪽 원의 테두리가 되므로 내부에 생긴 도형은 원이 된다.

내부에 생긴 작은 원의 반지름의 길이를 a, 처음 큰 원의 반지름의 길이를 b라 하면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심에서 현에 수선을 내려 만든 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여



$b^2=a^2+4^2 \quad \therefore b^2-a^2=16$

현이 지나간 부분의 넓이는 큰 원의 넓이에서 작은 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

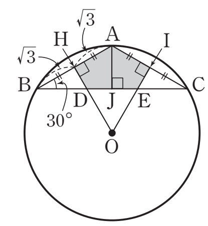
$\pi b^2-\pi a^2=\pi(b^2-a^2)=16\pi$ 답 16π

13

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$이고 $\overline{OH}=\overline{OI}$이므로

$\overline{AC}=2\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\triangle ABJ$는 $\angle ABJ=30°$, $\angle BAJ=60°$인 직각삼각형이므로



$\overline{AJ}=\overline{AB}\sin 30°=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{BJ}=\overline{AB}\cos 30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

이때, $\overline{OH}\perp\overline{AB}$에서 $\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$이고

$\triangle ABJ\backsim\triangle DBH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BJ}:\overline{BH}=\overline{AJ}:\overline{DH}$

즉, $3:\sqrt{3}=\sqrt{3}:\overline{DH}$이므로

$3\overline{DH}=3 \quad \therefore \overline{DH}=1$

$\therefore$ (오각형 AHDEI의 넓이)

$=\triangle ABC-2\triangle DHB$

$=\frac{1}{2}\times(3+3)\times\sqrt{3}-2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\right)$

$=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

14

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$가 원 O의 접선이므로 $\overline{PA}=\overline{PB}$

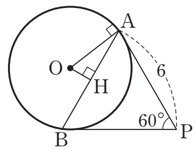
또한, $\angle APB=60°$이므로 $\triangle ABP$는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.

$\therefore \overline{AB}=6$

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6=3$

한편, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면 $\overline{OA}\perp\overline{PA}$, $\angle PAB=60^\circ$이므로 $\triangle AOH$는 $\angle OAH=30^\circ$, $\angle AOH=60^\circ$, $\angle OHA=90^\circ$인 직각삼각형이다.



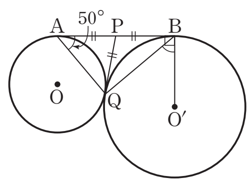
$\therefore\ \overline{OH}=\overline{AH}\times\tan(\angle OAH)$

$=3\tan 30^\circ=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

답 ①

15

$\overline{PA}$, $\overline{PQ}$는 원 O의 두 접선이므로



$\overline{PA}=\overline{PQ}$

즉, $\triangle PAQ$는 이등변삼각형이므로

$\angle APQ=180^\circ-2\times 50^\circ=80^\circ$

$\therefore\ \angle BPQ=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

한편, $\overline{PB}$, $\overline{PQ}$는 원 O′의 두 접선이므로

$\overline{PB}=\overline{PQ}$

즉, $\triangle PQB$도 이등변삼각형이므로

$\angle PBQ=\angle PQB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$

이때, $\overline{PB}$는 점 B에서의 원 O′의 접선이므로

$\overline{PB}\perp\overline{BO'}$

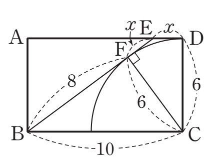
$\therefore\ \angle QBO'=90^\circ-\angle PBQ$

$=90^\circ-40^\circ=50^\circ$

답 50°

16

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$와 사분원이 만나는 점을 F라 하고 $\overline{CF}$를 그으면



$\overline{CF}=\overline{CD}=6$, $\overline{CF}\perp\overline{BF}$

즉, $\triangle BCF$에서

$\overline{BF}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CF}^2}$

$=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$

이때, $\overline{EF}=x$라 하면 $\overline{ED}=\overline{EF}=x$이므로

$\overline{AE}=10-x$

$\triangle ABE$에서 $\overline{BE}^2=\overline{AE}^2+\overline{AB}^2$이므로

$(x+8)^2=(10-x)^2+6^2$

$x^2+16x+64=(100-20x+x^2)+36$

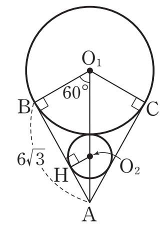
$36x=72\qquad\therefore\ x=2$

$\therefore\ \overline{AE}=10-x=10-2=8$

답 ④

17

오른쪽 그림과 같이 $\overline{O_1A}$를 그으면



$\triangle AO_1B$와 $\triangle AO_1C$에서

$\angle B=\angle C=90^\circ$, $\overline{AO_1}$은 공통, $\overline{BO_1}=\overline{CO_1}$

즉, $\triangle AO_1B\equiv\triangle AO_1C$ (RHS 합동)이므로

$\angle AO_1B=\angle AO_1C=\frac{1}{2}\angle BO_1C$

$=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$

직각삼각형 AO_1B에서 $\overline{AB}=6\sqrt{3}$이므로

$\overline{BO_1}=\frac{\overline{AB}}{\tan 60^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=6$

$\overline{AO_1}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=12$

이때, 원 O_2가 선분 AB와 접하는 접점을 H라 하고, 원 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{AO_2}=\overline{AO_1}-\overline{O_1O_2}=12-(6+r)=6-r$, $\overline{O_2H}=r$

$\triangle AO_2H\backsim\triangle AO_1B$ (AA 닮음)이므로

$\overline{O_2H}:\overline{O_1B}=\overline{AO_2}:\overline{AO_1}$

즉, $r:6=(6-r):12$이므로

$36-6r=12r,\ \ 18r=36\qquad\therefore\ r=2$

따라서 원 O_2의 반지름의 길이는 2이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times 2=4\pi$

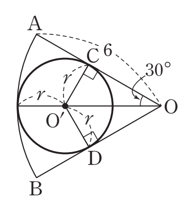
답 ⑤

18

부채꼴 AOB의 넓이가 6π이고 반지름의 길이가 6이므로 중심각의 크기를 x°라 하면

$6\pi=\pi\times 6^2\times\frac{x}{360}\qquad\therefore\ x=60$

오른쪽 그림과 같이 원 O′이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$와 접하는 점을 각각 C, D라 하면



$\triangle O'OC$와 $\triangle O'OD$에서

$\angle OCO'=\angle ODO'=90^\circ$,

$\overline{O'C}=\overline{O'D}$, $\overline{OO'}$은 공통이므로

$\triangle O'OC\equiv\triangle O'OD$ (RHS 합동)

$\therefore\ \angle O'OC=\angle O'OD=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$

이때, 원 O′의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OO'}=6-r$

$\triangle O'OC$에서 $\overline{O'C}=\overline{OO'}\sin(\angle O'OC)$이므로

$r=(6-r)\times\sin 30^\circ$

즉, $r=\frac{1}{2}(6-r)$이므로

$2r=6-r$, $3r=6$ $\therefore r=2$

따라서 원 O′의 반지름의 길이는 2이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$

답 ②

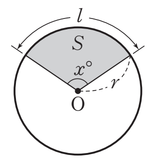
blacklabel 특강 필수개념

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(1) $l=2\pi r\times\dfrac{x}{360}$

(2) $S=\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$



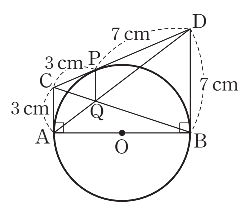
19

오른쪽 그림에서

$\overline{CP}=\overline{CA}=3\text{ cm}$, $\overline{DP}=\overline{DB}=7\text{ cm}$

또한, $\angle CAB=\angle DBA=90°$이므로

$\overline{AC}\,/\!/\,\overline{BD}$



이때, $\triangle AQC$와 $\triangle DQB$에서

$\angle QCA=\angle QBD$ ($\because$ 엇각),

$\angle QAC=\angle QDB$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle AQC\backsim\triangle DQB$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AQ}:\overline{DQ}=\overline{AC}:\overline{DB}=3:7$

또한, $\triangle DCA$와 $\triangle DPQ$에서

$\overline{DC}:\overline{DP}=\overline{DA}:\overline{DQ}=10:7$, $\angle D$는 공통이므로

$\triangle DCA\backsim\triangle DPQ$ (SAS 닮음)

따라서 $\overline{CA}:\overline{PQ}=10:7$이므로

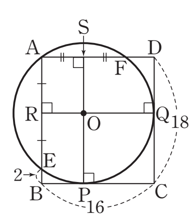
$3:\overline{PQ}=10:7$, $10\overline{PQ}=21$

$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{21}{10}$ (cm)

답 ②

20

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, 직선 OQ가 $\overline{AB}$와 만나는 점을 R, 직선 OP가 $\overline{AD}$와 만나는 점을 S라 하면



$\overline{OR}\perp\overline{AB}$, $\overline{OS}\perp\overline{AD}$

이때, $\overline{EB}=2$이므로

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=18-2=16$

$\overline{AE}\perp\overline{OR}$이므로

$\overline{AR}=\overline{ER}=\dfrac{1}{2}\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\times16=8$

또한, $\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{EB}+\overline{ER}=2+8=10$이므로

$\overline{AS}=\overline{BP}$

$=\overline{BC}-\overline{CP}$

$=16-10=6$

따라서 $\overline{AF}\perp\overline{OS}$에서 $\overline{FS}=\overline{AS}=6$이므로

$\overline{DF}=16-\overline{AF}=16-2\overline{AS}$

$=16-2\times6=4$

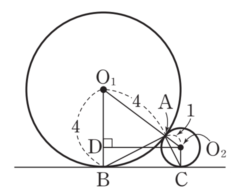
답 4

21

두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 4, 1이므로

$\overline{O_1B}=4$, $\overline{O_2C}=1$, $\overline{O_1O_2}=4+1=5$

오른쪽 그림과 같이 점 O_2에서 $\overline{O_1B}$에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\overline{O_1D}=\overline{O_1B}-\overline{DB}$

$=\overline{O_1B}-\overline{O_2C}$

$=4-1=3$

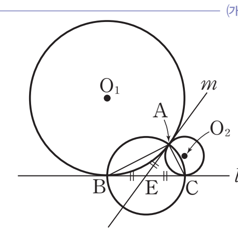
이므로 $\triangle O_1DO_2$에서

$\overline{O_2D}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1D}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

$\therefore \overline{BC}=\overline{O_2D}=4$

(가)

한편, 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 두 원 O_1, O_2의 공통인 접선을 직선 m이라 하고, $\overline{BC}$와 직선 m이 만나는 점을 E라 하면



원 O_1에서 $\overline{EA}=\overline{EB}$

원 O_2에서 $\overline{EA}=\overline{EC}$

$\therefore \overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}$

즉, 점 E는 $\triangle ABC$의 외접원의 중심이다.

(나)

따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times4=2$

(다)

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한 경우	40%
(나)	점 A를 지나는 두 원 O_1, O_2의 공통인 접선을 이용하여 $\triangle ABC$의 외접원의 중심을 찾은 경우	40%
(다)	$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 구한 경우	20%

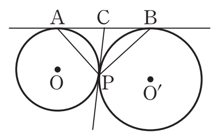
blacklabel 특강 참고

두 원 O, O′이 점 P에서 서로 외접하고, 직선 AB가 두 원의 공통인 접선이고 두 점 A, B가 그 접점일 때

(ⅰ) 직선 CA, CP는 원 O의 접선이므로
$\overline{CA}=\overline{CP}$

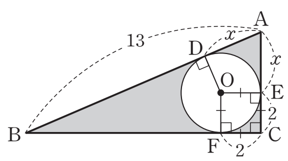
(ⅱ) 직선 CB, CP는 원 O′의 접선이므로
$\overline{CB}=\overline{CP}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\overline{CA}=\overline{CB}=\overline{CP}$



22

다음 그림과 같이 원 O와 △ABC의 접점을 각각 D, E, F라 하면 □OFCE는 한 변의 길이가 2인 정사각형이다.



$\overline{AE}=\overline{AD}=x$라 하면 $\overline{BF}=\overline{BD}=13-x$이므로

$\overline{BC}=(13-x)+2=15-x$

△ABC에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$이므로

$13^2=(x+2)^2+(15-x)^2$

$169=(x^2+4x+4)+(225-30x+x^2)$

$2x^2-26x+60=0,\ x^2-13x+30=0$

$(x-3)(x-10)=0 \qquad \therefore x=3$ 또는 $x=10$

그런데 $\overline{AC}<\overline{BC}$에서 $x+2<15-x$, 즉 $x<\frac{13}{2}$이므로

$x=3$

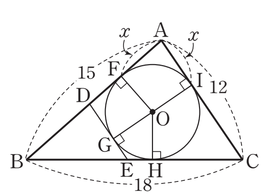
따라서 $\overline{AC}=3+2=5$, $\overline{BC}=15-3=12$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\triangle ABC-(\text{원 O의 넓이})=\frac{1}{2}\times12\times5-\pi\times2^2$

$=30-4\pi$ 답 $30-4\pi$

23

오른쪽 그림과 같이 원 O와 □ADEC의 접점을 각각 F, G, H, I라 하자.



$\overline{AF}=\overline{AI}=x$라 하면

$\overline{BH}=\overline{BF}=15-x$

$\overline{CH}=\overline{CI}=12-x$

이때, $\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{CH}$이므로

$18=(15-x)+(12-x)$

$2x=9 \qquad \therefore x=\frac{9}{2}$

따라서 삼각형 BED의 둘레의 길이는

$\overline{BD}+\overline{DE}+\overline{BE}$

$=\overline{BD}+\overline{DG}+\overline{GE}+\overline{BE}$

$=(\overline{BD}+\overline{DF})+(\overline{EH}+\overline{BE})\ (\because \overline{DG}=\overline{DF},\ \overline{GE}=\overline{EH})$

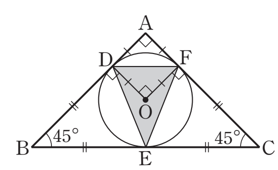
$=\overline{BF}+\overline{BH}$

$=2\overline{BF}\ (\because \overline{BF}=\overline{BH})$

$=2\times\left(15-\frac{9}{2}\right)=21$ 답 21

24

다음 그림과 같이 $\overline{OD}$, $\overline{OF}$를 그으면 $\overline{OD}=\overline{OF}$이고 $\overline{OD}\perp\overline{AB}$, $\overline{OF}\perp\overline{AC}$이므로 □ADOF는 정사각형이다.



원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OD}=\overline{OF}=\overline{AD}=\overline{AF}=r$

$\overline{AB}=\overline{AC}=2$이므로

$\overline{BE}=\overline{BD}=2-r$, $\overline{CE}=\overline{CF}=2-r$

이때, 직각이등변삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$

이므로 $\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{CE}$에서 $2\sqrt{2}=(2-r)+(2-r)$

$2\sqrt{2}=4-2r,\ 2r=4-2\sqrt{2} \qquad \therefore r=2-\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BD}=\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{CE}=2-(2-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle DEF=\triangle ABC-(\triangle ADF+\triangle BED+\triangle CFE)$

$=\triangle ABC-\triangle ADF-2\triangle BED$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}-\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AF}$

$-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BE}\times\sin 45^\circ\right)$

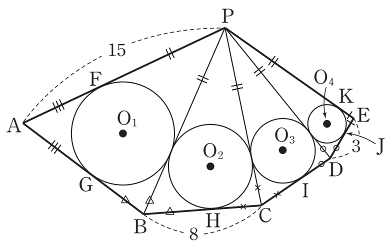
$=\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})^2$

$-2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2-(3-2\sqrt{2})-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$ 답 $\sqrt{2}-1$

25

네 원 O_1, O_2, O_3, O_4와 육각형 PABCDE의 접점을 F, G, H, I, J, K라 하고, 길이가 같은 선분을 표시하면 다음 그림과 같다.



원의 접선의 길이에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PK}$, $\overline{AF}=\overline{AG}$, $\overline{BG}=\overline{BH}$, $\overline{CH}=\overline{CI}$, $\overline{DI}=\overline{DJ}$, $\overline{EJ}=\overline{EK}$

∴ (육각형 PABCDE의 둘레의 길이)

$=2\overline{PF}+2\overline{AF}+2\overline{BH}+2\overline{CH}+2\overline{DJ}+2\overline{EJ}$

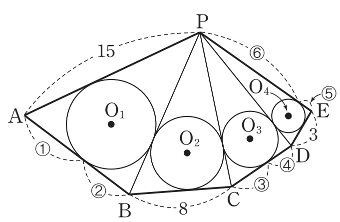
$=2(\overline{PF}+\overline{AF})+2(\overline{BH}+\overline{CH})+2(\overline{DJ}+\overline{EJ})$

$=2(\overline{PA}+\overline{BC}+\overline{DE})$

$=2\times(15+8+3)$

$=52$ **답** 52

blacklabel 특강 풀이첨삭



위의 그림과 같이 각 선분의 길이를 ①~⑥으로 정하고 육각형 PABCDE의 둘레의 길이를 다음과 같이 확인하면서 구할 수 있다.

원의 접선의 길이에 의하여

$\overline{PA}$=①+⑥=15, $\overline{BC}$=②+③=8, $\overline{DE}$=④+⑤=3

∴ (육각형 PABCDE의 둘레의 길이)

$=\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EP}$

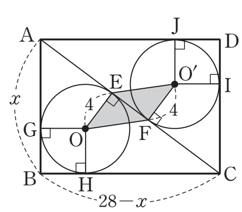
=(①+⑥)+(①+②)+(②+③)+(③+④)+(④+⑤)+(⑤+⑥)

=2×(①+②+③+④+⑤+⑥)

=2×(15+8+3)=52

26

□ABCD의 둘레의 길이가 56이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=x$라 하면 $\overline{BC}=28-x$



이때, $\overline{AG}=\overline{AE}$, $\overline{CE}=\overline{CH}$이므로

$\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$

$=\overline{AG}+\overline{CH}$

$=(\overline{AB}-\overline{BG})+(\overline{BC}-\overline{BH})$

$=(x-4)+(28-x-4)$

$=20$

△ABC에서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로

$x^2+(28-x)^2=20^2$, $2x^2-56x+384=0$

$x^2-28x+192=0$, $(x-12)(x-16)=0$

∴ $x=12$ 또는 $x=16$

그런데 $\overline{AB}<\overline{BC}$이므로

$\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=16$　　∴ $\overline{AG}=\overline{AE}=8$, $\overline{CE}=\overline{CH}=12$

△ACD에서 같은 방법으로 하면 $\overline{CF}=\overline{CI}=8$이므로

$\overline{EF}=\overline{CE}-\overline{CF}=12-8=4$

∴ □EOFO′=2△OFE

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times4\times4\right)=16$ **답** 16

27

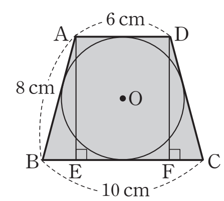
□ABCD는 등변사다리꼴이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$

□ABCD가 원 O에 외접하므로 $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$에서

$16=\overline{AB}+\overline{CD}=2\overline{AB}$

∴ $\overline{AB}=\overline{CD}=8$ cm

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면



$\overline{EF}=\overline{AD}=6$ cm이므로

$\overline{BE}=\overline{CF}=\frac{1}{2}\times(10-6)=2$ (cm)

△ABE에서

$\overline{AE}=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ (cm)

∴ $□ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}$

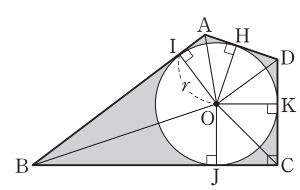
$=\frac{1}{2}\times(6+10)\times2\sqrt{15}$

$=16\sqrt{15}$ (cm²) **답** ④

28

다음 그림과 같이 사각형 ABCD의 각 변과 내접원 O의 접점을 각각 H, I, J, K라 하고 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}=r$



이때, 색칠한 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\square\text{ABCD}-(\text{원 O의 넓이})$

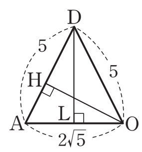
$=(\triangle\text{OAB}+\triangle\text{OBC}+\triangle\text{OCD}+\triangle\text{ODA})-(\text{원 O의 넓이})$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{\text{BC}}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{\text{CD}}\times r$

$+\frac{1}{2}\times\overline{\text{DA}}\times r-\pi r^2$

$=\frac{1}{2}r(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BC}}+\overline{\text{CD}}+\overline{\text{DA}})-\pi r^2$ ……㉠

한편, △ODA는 $\overline{\text{AD}}=\overline{\text{OD}}=5$인 이등변삼각형이므로 점 D에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 L이라 하면



$\overline{\text{LA}}=\overline{\text{LO}}=\frac{1}{2}\overline{\text{OA}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

△DAL에서 $\overline{\text{AD}}^2=\overline{\text{LA}}^2+\overline{\text{LD}}^2$ 이므로

$5^2=(\sqrt{5})^2+\overline{\text{LD}}^2$

$\overline{\text{LD}}^2=20$ $\therefore \overline{\text{LD}}=2\sqrt{5}\ (\because \overline{\text{LD}}>0)$

즉, △ODA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{LD}}=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AD}}\times\overline{\text{OH}}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times5\times r$

$10=\frac{5}{2}r$ $\therefore r=4$

또한, □ABCD는 원 O에 외접하는 사각형이므로

$\overline{\text{AB}}+\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AD}}+\overline{\text{BC}}=5+16=21$

따라서 ㉠에서 색칠한 부분의 넓이는

$S=\frac{1}{2}r(\overline{\text{AB}}+\overline{\text{BC}}+\overline{\text{CD}}+\overline{\text{DA}})-\pi r^2$

$=\frac{1}{2}\times4\times(21+21)-\pi\times4^2$

$=84-16\pi$

답 ⑤

29 해결단계

❶ 단계	두 원의 반지름의 길이와 $\overline{\text{BE}}$, $\overline{\text{EC}}$의 길이를 각각 문자를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	□ABED가 원 O에 외접함을 이용하여 $\overline{\text{DE}}$의 길이를 문자를 사용하여 나타낸다.
❸ 단계	△CDE에서 피타고라스 정리와 직각삼각형의 내접원의 성질을 이용하여 원의 반지름의 길이와 선분의 길이 사이의 관계식을 구한다.
❹ 단계	두 원의 넓이의 비를 구한다.

두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하자.

$\overline{\text{BE}}:\overline{\text{EC}}=1:2$이므로 $\overline{\text{BE}}=a$, $\overline{\text{EC}}=2a\ (a>0)$라 하면

$\overline{\text{AD}}=\overline{\text{BC}}=\overline{\text{BE}}+\overline{\text{EC}}=a+2a=3a$

$\overline{\text{AB}}$는 원 O의 지름의 길이와 같으므로 $\overline{\text{AB}}=2r$

□ABED가 원 O에 외접하므로

$\overline{\text{AD}}+\overline{\text{BE}}=\overline{\text{AB}}+\overline{\text{DE}}$

즉, $3a+a=2r+\overline{\text{DE}}$이므로

$\overline{\text{DE}}=4a-2r$

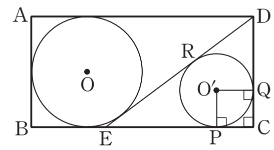
△CDE에서 $\overline{\text{DE}}^2=\overline{\text{CE}}^2+\overline{\text{CD}}^2$이므로

$(4a-2r)^2=(2a)^2+(2r)^2$

$16a^2-16ar+4r^2=4a^2+4r^2$

$16ar=12a^2$ $\therefore r=\frac{3}{4}a\ (\because a>0)$

한편, 오른쪽 그림과 같이 원 O′과 △CDE의 접점을 각각 P, Q, R라 하면 □O′PCQ는 한 변의 길이가 r'인 정사각형이므로



$\overline{\text{DR}}=\overline{\text{DQ}}=\overline{\text{DC}}-\overline{\text{QC}}$

$=2r-r'$

$\overline{\text{ER}}=\overline{\text{EP}}=\overline{\text{EC}}-\overline{\text{PC}}$

$=2a-r'$

이때, $\overline{\text{DE}}=\overline{\text{ER}}+\overline{\text{DR}}$에서

$4a-2r=(2a-r')+(2r-r')$

$2r'=4r-2a$

$\therefore r'=2r-a=2\times\frac{3}{4}a-a=\frac{1}{2}a$

따라서 두 원 O, O′의 넓이의 비는

$\pi r^2:\pi r'^2=\pi\left(\frac{3}{4}a\right)^2:\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=9:4$

답 9 : 4

Step 3	종합 사고력 도전 문제	pp. 39~40

01 (1) $60°$ (2) $3\sqrt{3}$ (3) π	**02** $\frac{6\sqrt{2}}{5}$	**03** 24	**04** 6
05 $\sqrt{22}$ cm	**06** 20 km	**07** $3\sqrt{15}$	**08** 12 cm

01 해결단계

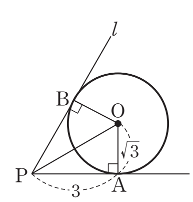
(1)	❶ 단계	원의 접선과 반지름의 관계 및 삼각비를 이용하여 ∠OPA의 크기를 구한다.
	❷ 단계	∠OPA의 크기를 이용하여 ∠BPA의 크기를 구한다.
(2)	❸ 단계	△PAC가 이등변삼각형임을 확인한다.
	❹ 단계	$\overline{\text{AC}}$의 길이를 구한다.
(3)	❺ 단계	∠CPB의 크기를 구한다.
	❻ 단계	접점 B가 접점 C까지 이동하면서 그리는 호의 길이를 구한다.

(1) $\overline{\text{PA}}$, $\overline{\text{PB}}$는 원 O의 접선이므로 $\overline{\text{PA}}\perp\overline{\text{OA}}$, $\overline{\text{PB}}\perp\overline{\text{OB}}$

$\therefore \angle\text{OAP}=\angle\text{OBP}=90°$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{PO}}$를 그으면

직각삼각형 PAO에서



$\tan(\angle\text{OPA})=\frac{\sqrt{3}}{3}$

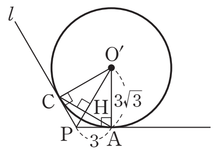
$\therefore \angle\text{OPA}=30°$

이때, $\overline{\text{OA}}=\overline{\text{OB}}=\sqrt{3}$, $\angle\text{OAP}=\angle\text{OBP}=90°$, $\overline{\text{PO}}$는 공통이므로

$\triangle OPA \equiv \triangle OPB$ (RHS 합동)

$\therefore \angle BPA = 2\angle OPA = 2\times 30^\circ = 60^\circ$

(2) 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$이 되도록 늘인 원의 중심을 O′이라 하고 점 P에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{PA} = \overline{PC} = 3$

즉, $\triangle PAC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{CH}$

따라서 $\overline{PH}$는 원 O′의 현 AC를 수직이등분하므로 $\overline{PH}$의 연장선은 원 O′의 중심을 지난다.

직각삼각형 O′PA에서

$\tan(\angle O'PA) = \dfrac{\overline{O'A}}{\overline{PA}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$\therefore \angle O'PA = 60^\circ$

직각삼각형 PAH에서

$\overline{AH} = \overline{PA}\sin(\angle O'PA)$

$\quad = 3\sin 60^\circ = 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{AC} = 2\overline{AH} = 2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

(3) 접점 B가 접점 C까지 이동하면서 그리는 호는 반지름이 $\overline{PB}$ 또는 $\overline{PC}$인 원의 일부분이다.

(2)에서 $\angle O'PA = \angle O'PC = 60^\circ$이므로

$\angle CPA = 2\angle O'PA = 120^\circ$

또한, (1)에서 $\angle BPA = 60^\circ$이므로

$\angle CPB = \angle CPA - \angle BPA = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

따라서 구하는 길이는 반지름의 길이가 3, 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 호의 길이이므로

$2\pi\times 3\times\dfrac{60}{360} = \pi$

답 (1) 60° (2) $3\sqrt{3}$ (3) π

02 해결단계

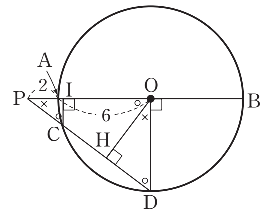
❶ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PD}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	점 C에서 $\overline{PO}$에 내린 수선의 발을 I라 할 때, $\overline{AI}$, $\overline{CI}$의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	직각삼각형 ACI에서 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

직각삼각형 PDO에서

$\overline{PD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OP}^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

$\therefore \overline{PD} = \sqrt{100} = 10$ ($\because \overline{PD} > 0$)

원의 중심 O에서 $\overline{PD}$에 내린 수선의 발을 H, 점 C에서 $\overline{PO}$에 내린 수선의 발을 I라 하고 크기가 같은 각을 표시하면 다음 그림과 같다.



$\triangle OHD \backsim \triangle POD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{OD} : \overline{PD} = \overline{DH} : \overline{DO}$

$6 : 10 = \overline{DH} : 6$

$10\,\overline{DH} = 36 \qquad \therefore \overline{DH} = \dfrac{18}{5}$

이때, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{CH} = \overline{DH}$

$\therefore \overline{CD} = 2\overline{DH} = 2\times\dfrac{18}{5} = \dfrac{36}{5}$

$\therefore \overline{PC} = \overline{PD} - \overline{CD} = 10 - \dfrac{36}{5} = \dfrac{14}{5}$

또한, $\triangle PIC \backsim \triangle POD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{CI} : \overline{DO} = \overline{PI} : \overline{PO} = \overline{PC} : \overline{PD} = \dfrac{14}{5} : 10 = 7 : 25$

즉, $\overline{CI} : 6 = \overline{PI} : 8 = 7 : 25$이므로

$\overline{CI} : 6 = 7 : 25$에서

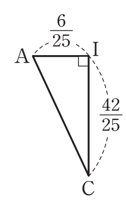
$25\,\overline{CI} = 42 \qquad \therefore \overline{CI} = \dfrac{42}{25}$

$\overline{PI} : 8 = 7 : 25$에서

$25\,\overline{PI} = 56 \qquad \therefore \overline{PI} = \dfrac{56}{25}$

$\therefore \overline{AI} = \overline{PI} - \overline{PA} = \dfrac{56}{25} - 2 = \dfrac{6}{25}$

따라서 직각삼각형 ACI에서



$\overline{AC}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IC}^2$

$\quad = \left(\dfrac{6}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{42}{25}\right)^2$

$\quad = \dfrac{1800}{625} = \dfrac{72}{25}$

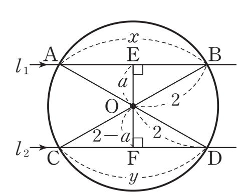
$\therefore \overline{AC} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$ ($\because \overline{AC} > 0$)

답 $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

03 해결단계

❶ 단계	원의 중심 O와 직선 l_1 사이의 거리를 a라 하고 x^2+y^2을 a를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	(완전제곱식)≥ 0임을 이용하여 x^2+y^2의 최댓값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2에 의하여 생긴 두 현을 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$라 하고 원의 중심 O에서 두 현 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{OE}=a\ (0<a<2)$라 하면

$\triangle OBE$에서 $\overline{OB}=2$, $\overline{BE}=\frac{1}{2}x$이므로

$2^2=a^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2$

$4=a^2+\frac{1}{4}x^2$, $\frac{1}{4}x^2=4-a^2$

$\therefore x^2=16-4a^2 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 2이므로

$\overline{OF}=2-a$

$\triangle OFD$에서 $\overline{OD}=2$, $\overline{DF}=\frac{1}{2}y$이므로

$2^2=(2-a)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2$

$4=4-4a+a^2+\frac{1}{4}y^2$, $\frac{1}{4}y^2=4a-a^2$

$\therefore y^2=16a-4a^2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=(16-4a^2)+(16a-4a^2)\\ &=-8a^2+16a+16\\ &=-8(a-1)^2+24 \end{aligned}$$

이때, $0<a<2$에서 $(a-1)^2\geq 0$이므로

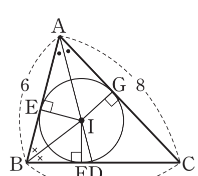
$-8(a-1)^2\leq 0$

$\therefore x^2+y^2=-8(a-1)^2+24\leq 24$

따라서 구하는 최댓값은 24이다. **답** 24

04 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABC$의 내접원의 중심이 $\overline{AD}$ 위에 있음을 확인한다.
❷ 단계	$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 구한다.
❸ 단계	삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{AD}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내접원을 그리고 그 접점을 각각 E, F, G, 내접원의 중심을 I라 하면 점 I는 $\overline{AD}$ 위에 있다.

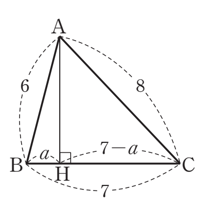
$\overline{AE}=\overline{AG}=x$라 하면

$\overline{BF}=\overline{BE}=6-x$, $\overline{CF}=\overline{CG}=8-x$

$\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}$에서

$(6-x)+(8-x)=7$

$2x=7 \quad \therefore x=\frac{7}{2}$



또한, 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH}=a$라 하면 $\overline{CH}=7-a$이므로 $\triangle ABH$와 $\triangle AHC$에서

$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AC}^2-\overline{CH}^2$

즉, $6^2-a^2=8^2-(7-a)^2$에서

$36-a^2=64-(49-14a+a^2)$

$14a=21 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{AH}=\sqrt{6^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{135}{4}}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

이때, 내접원 I의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$\frac{1}{2}\times 7\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=\frac{1}{2}r(6+7+8)$

$\frac{21}{2}r=\frac{21\sqrt{15}}{4} \quad \therefore r=\frac{\sqrt{15}}{2}$

한편, $\triangle AIG$에서 $\overline{AG}=x=\frac{7}{2}$, $\overline{GI}=r=\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로

$\overline{AI}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{16}=4$

또한, $\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=6:8=3:4$

이때, $\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}=7$이므로

$\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=4$

$\triangle ABD$에서 $\overline{BI}$는 $\angle B$의 이등분선이므로

$\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=6:3=2:1$

$\therefore \overline{ID}=\frac{1}{2}\overline{AI}=\frac{1}{2}\times 4=2$

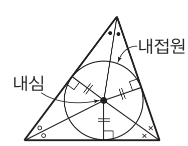
$\therefore \overline{AD}=\overline{AI}+\overline{ID}=4+2=6$ **답** 6

blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 내심

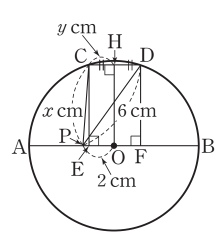
(1) 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.

(2) 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.



05 해결단계

❶ 단계	원의 중심 O에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{CH}=\overline{DH}$임을 확인한다.
❷ 단계	두 점 C, D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, $\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{HO}$임을 이용하여 $\overline{CH}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{PC}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 CD에 내린 수선의 발을 H, 두 점 C, D에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, $\overline{PC}=x$ cm, $\overline{CH}=y$ cm라 하자.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로

$\overline{CH}=\overline{DH}$

이때, $\overline{PE}=(2-y)$ cm, $\overline{PF}=(y+2)$ cm이므로

$\triangle$CPE에서 $\overline{CE}^2=x^2-(2-y)^2$ ······㉠

$\triangle$DPF에서 $\overline{DF}^2=6^2-(y+2)^2$ ······㉡

$\triangle$COH에서 $\overline{HO}^2=5^2-y^2$ ······㉢

이때, $\overline{CE}=\overline{DF}=\overline{HO}$이므로 $\overline{CE}^2=\overline{DF}^2=\overline{HO}^2$

㉡=㉢에서

$6^2-(y+2)^2=5^2-y^2$, $36-(y^2+4y+4)=25-y^2$

$4y=7$ $\quad\therefore y=\frac{7}{4}$ ······㉣

㉠=㉢에서 $x^2-(2-y)^2=5^2-y^2$이므로 이 식에 ㉣을 대입하면

$x^2-\left(2-\frac{7}{4}\right)^2=5^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2$

$x^2=25-\frac{49}{16}+\frac{1}{16}=22$

$\therefore x=\sqrt{22}$ ($\because x>0$)

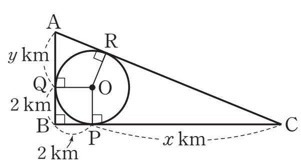
$\therefore \overline{PC}=\sqrt{22}$ cm

답 $\sqrt{22}$ cm

06 해결단계

❶ 단계	$\overline{PC}=x$ km, $\overline{AQ}=y$ km라 하고 현석이가 이동한 거리는 수빈이가 이동한 거리의 2배임을 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	$\triangle$ABC가 직각삼각형임을 이용하여 x, y의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	현석이가 이동한 거리를 구한다.

다음 그림과 같이 점 O에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하고 $\overline{PC}=x$ km, $\overline{AQ}=y$ km라 하자.



□OQBP는 한 변의 길이가 2 km인 정사각형이므로

$\overline{AR}=\overline{AQ}=y$ km, $\overline{CR}=\overline{CP}=x$ km, $\overline{BP}=\overline{BQ}=2$ km

현석이의 이동 속도가 수빈이의 이동 속도의 2배이고, 두 사람은 P지점에서 동시에 출발하여 C지점에 동시에 도착하였으므로 현석이가 이동한 거리는 수빈이가 이동한 거리의 2배이다. 즉,

$2+2+y+y+x=2\times x$

$\therefore x=2y+4$ ······㉠

$\triangle$ABC는 직각삼각형이므로 $\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=(x+y)^2$

$x^2+y^2+4x+4y+8=x^2+y^2+2xy$

즉, $2xy-4x-4y-8=0$에서

$xy-2x-2y-4=0$

㉠을 이 식에 대입하면

$y(2y+4)-2(2y+4)-2y-4=0$

$2y^2-2y-12=0$, $y^2-y-6=0$

$(y+2)(y-3)=0$ $\quad\therefore y=3$ ($\because y>0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$x=2y+4=2\times3+4=10$

따라서 현석이가 이동한 거리는

$2+2+y+y+x=2+2+3+3+10$

$=20$ (km)

답 20 km

07 해결단계

❶ 단계	$\overline{O_1O_2}$와 $\overline{AB}$의 교점을 H라 하고, $\overline{AH}=\overline{BH}$임을 확인한다.
❷ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AH}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{AB}$의 길이를 구한다.

$\triangle AO_1O_2$, $\triangle BO_1O_2$에서

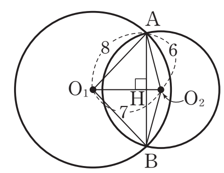
$\overline{AO_1}=\overline{BO_1}$, $\overline{AO_2}=\overline{BO_2}$, $\overline{O_1O_2}$는 공통이므로

$\triangle AO_1O_2\equiv\triangle BO_1O_2$ (SSS 합동)

$\therefore \angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2$

즉, $\overline{O_1O_2}$는 이등변삼각형 O_1BA의 꼭지각의 이등분선이다.

이때, 오른쪽 그림과 같이 공통인 현 AB와 $\overline{O_1O_2}$의 교점을 H라 하면



$\overline{O_1O_2}\perp\overline{AB}$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}$

$\overline{O_1H}=a$라 하면 $\overline{O_2H}=7-a$이므로

$\triangle AO_1H$에서 $\overline{AH}^2=8^2-a^2$ ······㉠

$\triangle AHO_2$에서 $\overline{AH}^2=6^2-(7-a)^2$ ······㉡

㉠=㉡에서 $8^2-a^2=6^2-(7-a)^2$

$64-a^2=36-(49-14a+a^2)$

$14a=77$ $\quad\therefore a=\frac{11}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\overline{AH}^2=8^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{135}{4}$

$\therefore \overline{AH}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$ ($\because \overline{AH}>0$)

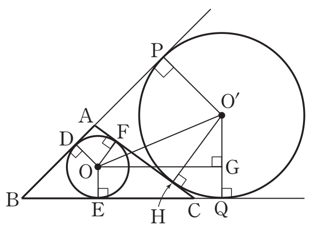
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=3\sqrt{15}$

답 $3\sqrt{15}$

08 해결단계

❶ 단계	두 접점 사이의 거리를 구한다.
❷ 단계	$\overline{DP}$와 $\overline{EQ}$를 각각 $\overline{AF}$, $\overline{FH}$, $\overline{HC}$를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	$\overline{AC}$의 길이를 구한다.

다음 그림과 같이 원 O와 $\triangle$ABC의 접점을 D, E, F라 하자. 또한, 원 O′이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 연장선과 접하는 점을 각각 P, Q라 하고 $\overline{AC}$와 접하는 점을 H라 하자.



점 O에서 $\overline{O'Q}$에 내린 수선의 발을 G라 하면

$\overline{GQ}=\overline{OE}=3\text{ cm}$이므로

$\overline{O'G}=\overline{O'Q}-\overline{GQ}=8-3=5\,(\text{cm})$

$\triangle O'OG$에서 $\overline{OG}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12\,(\text{cm})$

이때, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$이므로

$\overline{DP}=\overline{BP}-\overline{BD}=\overline{BQ}-\overline{BE}=\overline{EQ}$

$\therefore \overline{DP}=\overline{EQ}=\overline{OG}=12\text{ cm}$

한편, $\overline{AD}=\overline{AF}=a\text{ cm}$, $\overline{FH}=b\text{ cm}$, $\overline{CH}=\overline{CQ}=c\text{ cm}$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AH}$, $\overline{DP}=12\text{ cm}$이므로

$\overline{DP}=\overline{AD}+\overline{AP}$

$\quad=\overline{AD}+\overline{AH}$

$\quad=\overline{AD}+\overline{AF}+\overline{FH}$

$\quad=a+a+b=2a+b\,(\text{cm})$

$\therefore 2a+b=12$ ……㉠

또한, $\overline{CF}=\overline{CE}$, $\overline{EQ}=12\text{ cm}$이므로

$\overline{EQ}=\overline{CE}+\overline{CQ}$

$\quad=\overline{CF}+\overline{CQ}$

$\quad=\overline{CH}+\overline{FH}+\overline{CQ}$

$\quad=c+b+c=2c+b\,(\text{cm})$

$\therefore 2c+b=12$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2(a+b+c)=24$

$\therefore a+b+c=12$

$\therefore \overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FH}+\overline{CH}$

$\quad\quad=a+b+c=12\,(\text{cm})$

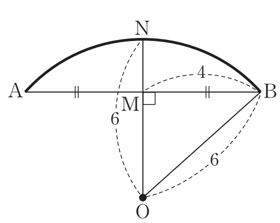
답 12 cm

미리보는 학력평가 p. 41

1 ②	2 432	3 ④	4 ②

1

오른쪽 그림과 같이 호 AB를 포함하는 원의 중심을 O라 하면 $\overline{MN}\perp\overline{AB}$, $\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 $\overline{MN}$의 연장선은 원의 중심 O를 지난다. 즉, $\triangle OBM$은 $\angle BMO=90°$인 직각삼각형이므로



$\overline{OB}^2=\overline{OM}^2+\overline{MB}^2$

$6^2=\overline{OM}^2+4^2$, $\overline{OM}^2=36-16=20$

$\therefore \overline{OM}=2\sqrt{5}\text{ m}\ (\because \overline{OM}>0)$

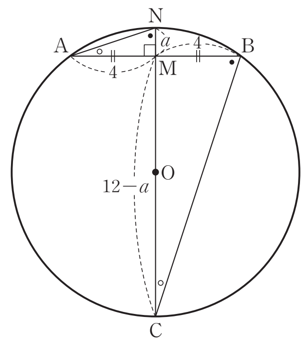
따라서 $\overline{MN}=\overline{ON}-\overline{OM}=6-2\sqrt{5}\,(\text{m})$이므로

$a=6-2\sqrt{5}$

답 ②

| 다른풀이 |

호 AB를 포함하는 원의 중심을 O라 하고, 선분 MN의 연장선과 원의 다른 한 교점을 C라 하면 다음 그림과 같다.



$\triangle AMN$과 $\triangle CMB$에서

호 AC에 대한 원주각이므로 $\angle CNA=\angle CBA$

호 NB에 대한 원주각이므로 $\angle NAB=\angle NCB$

$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle CMB$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AM}:\overline{CM}=\overline{MN}:\overline{MB}$이므로

$\overline{AM}\times\overline{MB}=\overline{MN}\times\overline{CM}$

$4\times4=a(12-a)$

$12a-a^2=16$, $a^2-12a+16=0$

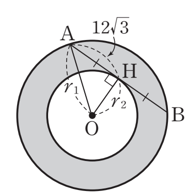
$\therefore a=6\pm2\sqrt{5}$

이때, $a<6$이므로

$a=6-2\sqrt{5}$

2

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 O, 현의 양 끝 점을 A, B, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times24\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

큰 원의 반지름의 길이를 r_1, 작은 원의 반지름의 길이를 r_2라 하면

$\triangle AOH$에서

$r_1^2=(12\sqrt{3})^2+r_2^2$

$\therefore r_1^2-r_2^2=432$

이때, 두 원의 넓이의 차는

$\pi r_1^2-\pi r_2^2=\pi(r_1^2-r_2^2)$

$\quad\quad=432\pi$

따라서 $432\pi=a\pi$이므로 $a=432$

답 432

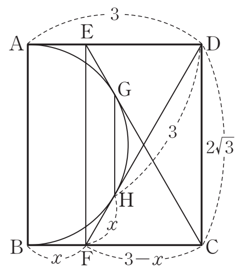
3

$\overline{BF}=x$라 하면 두 점 B, H가 점 F에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로

$\overline{FH}=\overline{BF}=x$

두 점 A, H가 점 D에서 원에 그은 두 접선의 접점과 같으므로

$\overline{DH}=\overline{AD}=3$



직각삼각형 DFC에서

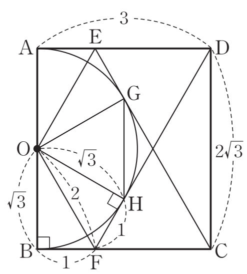
$\overline{DF}^2=\overline{FC}^2+\overline{DC}^2$

$(x+3)^2=(3-x)^2+(2\sqrt{3})^2$

$x^2+6x+9=9-6x+x^2+12$

$12x=12 \qquad \therefore x=1$

$\therefore \overline{FH}=\overline{BF}=1$



한편, 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심을 O라 하면

$\overline{OH}=\overline{OB}=\sqrt{3}$, $\overline{BF}=\overline{FH}=1$이므로

직각삼각형 OBF에서

$\overline{OF}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$\sin(\angle BOF)=\sin(\angle HOF)=\frac{1}{2}$이므로

$\angle BOF=\angle HOF=30^\circ$

$\therefore \angle BOH=30^\circ+30^\circ=60^\circ$

같은 방법으로

$\angle AOE=\angle EOG=30^\circ$

$\therefore \angle AOG=30^\circ+30^\circ=60^\circ$

따라서 $\angle GOH=60^\circ$이고 $\overline{OG}=\overline{OH}=\sqrt{3}$이므로

$\triangle GOH$는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{GH}=\sqrt{3}$ 답 ④

| 다른풀이 |

$\overline{BF}=x$라 하면 $\overline{FH}=\overline{BF}=x$, $\overline{DH}=\overline{AD}=3$

직각삼각형 DFC에서

$\overline{DF}^2=\overline{FC}^2+\overline{DC}^2$

$(x+3)^2=(3-x)^2+(2\sqrt{3})^2 \qquad \therefore x=1$

$\therefore \overline{FH}=\overline{BF}=1$, $\overline{FC}=3-1=2$

같은 방법으로

$\overline{AE}=\overline{EG}=1$, $\overline{ED}=3-1=2$

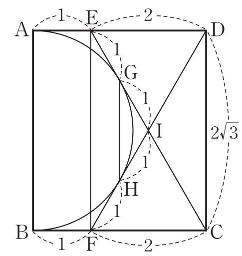
$\therefore \overline{DF}=\overline{DH}+\overline{HF}=3+1=4$,

$\overline{CE}=\overline{CG}+\overline{EG}=3+1=4$

□EFCD의 두 대각선 DF, CE의 교점을 I라 하면 직사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{DF}=\overline{EC}=4$에서 $\overline{EI}=\overline{FI}=2$

$\overline{EG}=\overline{FH}=1$에서 $\overline{IG}=\overline{IH}=1$



$\triangle IGH$와 $\triangle IEF$에서

$\overline{IG}:\overline{IE}=\overline{IH}:\overline{IF}=1:2$, $\angle HIG$는 공통

$\therefore \triangle IGH \backsim \triangle IEF$ (SAS 닮음)

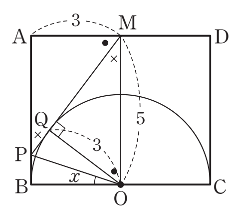
따라서 $\overline{GH}:\overline{EF}=1:2$, 즉 $\overline{GH}:2\sqrt{3}=1:2$이므로

$2\overline{GH}=2\sqrt{3} \qquad \therefore \overline{GH}=\sqrt{3}$

4

점 M에서 반원에 그은 접선이 반원과 접하는 점을 Q라 하면 원의 접선의 성질에 의하여

$\overline{MQ}\perp\overline{OQ}$, $\overline{OQ}=3$



직각삼각형 QOM에서

$\overline{QM}^2=\overline{MO}^2-\overline{QO}^2=5^2-3^2=16$

$\therefore \overline{QM}=4$ ($\because \overline{QM}>0$)

두 직각삼각형 PAM, MQO에서

$\angle APM=\angle QMO$ ($\because$ 엇각),

$\angle PAM=\triangle MQO=90^\circ$,

$\overline{AM}=\overline{QO}=3$이므로

$\triangle PAM\equiv\triangle MQO$ (ASA 합동)

즉, $\overline{AP}=\overline{QM}=4$이므로

$\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=5-4=1$

직각삼각형 PBO에서

$\overline{OP}^2=\overline{PB}^2+\overline{BO}^2$

$=1^2+3^2=10$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{10}$ ($\because \overline{OP}>0$)

$\therefore \sin x=\frac{\overline{PB}}{\overline{OP}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 답 ②

04 원주각

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 43

01 ⑤ **02** ② **03** 38° **04** ① **05** 21°
06 ②

01

$\angle ACB$는 호 AB에 대한 원주각이고 $\angle AOB$는 호 AB에 대한 중심각이므로

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times70^\circ=140^\circ$

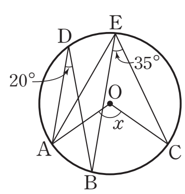
이때, $\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$이므로

$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$

$\therefore\ \angle APB=180^\circ-\angle AOB=180^\circ-140^\circ=40^\circ$

답 ⑤

02



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면 $\angle ADB$, $\angle AEB$는 모두 호 AB에 대한 원주각이므로

$\angle AEB=\angle ADB=20^\circ$

$\therefore\ \angle AEC=\angle AEB+\angle BEC$

$=20^\circ+35^\circ$

$=55^\circ$

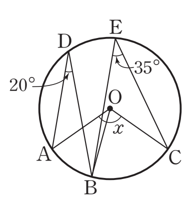
이때, $\angle AEC$는 호 AC에 대한 원주각이고 $\angle AOC$는 호 AC에 대한 중심각이므로

$\angle x=\angle AOC=2\angle AEC$

$=2\times55^\circ=110^\circ$

답 ②

| 다른풀이 |



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$를 그으면 $\angle ADB$는 호 AB에 대한 원주각이고 $\angle AOB$는 호 AB에 대한 중심각이므로

$\angle AOB=2\angle ADB$

$=2\times20^\circ=40^\circ$

또한, $\angle BEC$는 호 BC에 대한 원주각이고 $\angle BOC$는 호 BC에 대한 중심각이므로

$\angle BOC=2\angle BEC$

$=2\times35^\circ=70^\circ$

$\therefore\ \angle x=\angle AOB+\angle BOC$

$=40^\circ+70^\circ=110^\circ$

03

$\overline{AB}$는 원의 지름이고, 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle ADB=90^\circ$

$\triangle ABD$에서

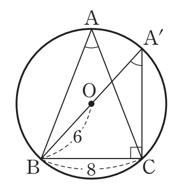
$\angle DAB=180^\circ-(90^\circ+52^\circ)=38^\circ$

또한, $\angle DCB$, $\angle DAB$는 모두 호 DB에 대한 원주각이므로

$\angle DCB=\angle DAB=38^\circ$

답 38°

04



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO}$의 연장선이 원 O와 만나는 점을 A′이라 하면 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로

$\angle A'CB=90^\circ$

$\angle BA'C=\angle BAC$ ($\because$ $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)

직각삼각형 A′BC에서 $\overline{A'B}=12$, $\overline{BC}=8$이므로

$\overline{A'C}=\sqrt{12^2-8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \cos A=\cos A'=\dfrac{4\sqrt{5}}{12}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin A=\sin A'=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \cos A+\sin A=\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}$

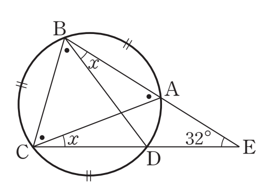
답 ①

05

$\triangle ACE$에서

$\angle BAC=\angle ACE+\angle AEC$

$=\angle x+32^\circ$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면 $\angle ABD$, $\angle ACD$는 모두 호 AD에 대한 원주각이므로

$\angle ABD=\angle ACD=\angle x$

또한, $\overline{BC}$를 그으면 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle ACB=\angle CBD=\angle BAC=\angle x+32^\circ$

$\triangle ABC$에서

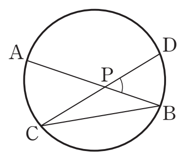
$\angle x+3(\angle x+32^\circ)=180^\circ$

$4\angle x=84^\circ$ $\quad\therefore\ \angle x=21^\circ$

답 21°

06

$\overline{BC}$를 그으면 $\widehat{AC}$의 길이가 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{6}$이므로



$\angle ABC=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

$\widehat{AC}:\widehat{BD}=3:2$이므로 $\angle ABC:\angle BCD=3:2$

$30^\circ:\angle BCD=3:2$ $\quad\therefore\ \angle BCD=20^\circ$

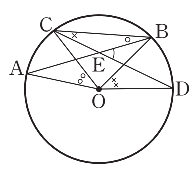
$\triangle PCB$에서

$\angle DPB=\angle PCB+\angle PBC=20^\circ+30^\circ=50^\circ$ **답** ②

Step 2	A등급을 위한 문제			pp. 44~47
01 ③	02 16π cm	03 ②	04 $5\sqrt{3}$	05 ⑤
06 60°	07 9	08 ⑤	09 $\sqrt{61}$	10 ⑤
11 ④	12 6 cm	13 ③	14 ②	15 11
16 ⑤	17 22°	18 30°	19 60 cm	20 ①
21 50°	22 ①	23 ③		

01

$\overline{BC}$를 그으면 $\angle ABC$는 호 AC에 대한 원주각이므로



$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\times40^\circ=20^\circ$

$\angle BCD$는 호 BD에 대한 원주각이므로

$\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times44^\circ=22^\circ$

$\triangle BCE$에서

$\angle BED=\angle BCE+\angle CBE=22^\circ+20^\circ=42^\circ$ **답** ③

02

$\triangle ACP$에서 $\angle CAP+\angle ACP=\angle BPC$이므로

$\angle CAP+20^\circ=65^\circ$ $\quad\therefore\ \angle CAP=45^\circ$

$\angle CAB$는 호 BC에 대한 원주각이므로

$(\widehat{BC}$의 중심각의 크기$)=2\angle CAB=2\times45^\circ=90^\circ$

호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로 원의 둘레의 길이를 x cm라 하면

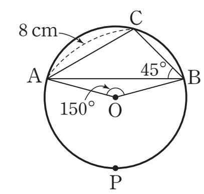
$4\pi:x=90^\circ:360^\circ$, $4\pi:x=1:4$

$\therefore\ x=16\pi$

따라서 원의 둘레의 길이는 16π cm이다. **답** 16π cm

03

오른쪽 그림에서 $\angle ACB$는 호 APB에 대한 원주각이므로



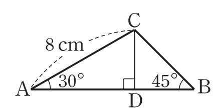
$\angle ACB=\frac{1}{2}\times(360^\circ-150^\circ)=\frac{1}{2}\times210^\circ$

$=105^\circ$

$\triangle ABC$에서

$\angle CAB=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\triangle ADC$에서 $\angle CAD=30^\circ$이므로

$\overline{AD}=\overline{AC}\cos30^\circ=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$,

$\overline{CD}=\overline{AC}\sin30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4\,(\text{cm})$

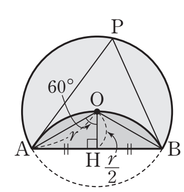
$\triangle BCD$에서 $\angle CBD=45^\circ$이므로

$\overline{BD}=\frac{\overline{CD}}{\tan45^\circ}=\frac{4}{1}=4\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=4\sqrt{3}+4\,(\text{cm})$ **답** ②

04

오른쪽 그림과 같이 원 O의 반지름의 길이를 r, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AO}=r$, $\overline{OH}=\frac{r}{2}$이므로

$\cos(\angle AOH)=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{1}{2}$

$\cos60^\circ=\frac{1}{2}$이므로 $\angle AOH=60^\circ$

$\therefore \angle AOB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\angle APB$는 호 AB에 대한 원주각이므로

$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

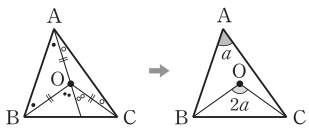
$\therefore \triangle PAB = \frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{PB} \times \sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ 　　답 $5\sqrt{3}$

blacklabel 특강 참고

삼각형의 외심의 응용

점 O가 $\triangle ABC$의 외심일 때, $\angle BOC = 2\angle A$



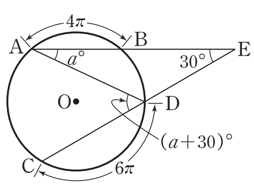
문제에서 원 O는 $\triangle PAB$의 외접원이므로 점 O는 $\triangle PAB$의 외심이다.
따라서 삼각형의 외심의 응용을 이용하여 이 문제를 풀 수도 있다.

05

다음 그림과 같이 선분 AB와 선분 CD의 연장선의 교점을 E라 하자.

$\angle BAD = a^\circ$라 하면 $\triangle ADE$에서

$\angle ADC = (a+30)^\circ$



중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOD = 2\angle BAD = 2a^\circ$

$\angle AOC = 2\angle ADC = (2a+60)^\circ$

이때, 원의 반지름의 길이가 9이므로 둘레의 길이는

$2\pi \times 9 = 18\pi$

$\therefore \widehat{AC} + \widehat{BD} = 18\pi \times \frac{2a+(2a+60)}{360} = \frac{a+15}{5}\pi$ ……㉠

한편, $\widehat{AB} = 4\pi$, $\widehat{CD} = 6\pi$이므로

$\widehat{AC} + \widehat{BD} = 18\pi - (4\pi + 6\pi) = 8\pi$ ……㉡

㉠=㉡에서 $\frac{a+15}{5}\pi = 8\pi$

$\therefore a = 25$

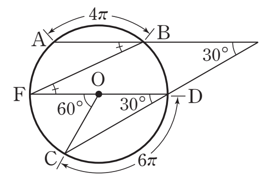
따라서 $\angle AOC = (2 \times 25 + 60)^\circ = 110^\circ$이므로

$\widehat{AC} = 18\pi \times \frac{110}{360} = \frac{11}{2}\pi$ 　　답 ⑤

| 다른풀이 |

다음 그림과 같이 점 D를 지나면서 선분 AB에 평행한 직선과 원 O의 교점을 F라 하면

$\angle FDC = 30^\circ$ ($\because$ 동위각)



중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle FOC = 2\angle FDC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

이때, 원의 반지름의 길이가 9이므로 둘레의 길이는

$2\pi \times 9 = 18\pi$

$\therefore \widehat{FC} = 18\pi \times \frac{60}{360} = 3\pi$

즉, $\widehat{AF} + \widehat{BD} = 18\pi - (4\pi + 6\pi + 3\pi) = 5\pi$

또한, $\overline{AB} /\!/ \overline{FD}$에서

$\angle ABF = \angle BFD$ ($\because$ 엇각)

이므로

$\widehat{AF} = \widehat{BD} = \frac{1}{2} \times 5\pi = \frac{5}{2}\pi$

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AF} + \widehat{FC} = \frac{5}{2}\pi + 3\pi = \frac{11}{2}\pi$

blacklabel 특강 풀이첨삭

다른풀이에서 원의 둘레의 길이가 18π이므로 $\angle COD$의 크기를 구하면

$\angle COD : 360^\circ = 6\pi : 18\pi$ 　　$\therefore \angle COD = 120^\circ$

이때, $\angle FOC = 60^\circ$이므로 $\angle FOD = \angle FOC + \angle COD = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

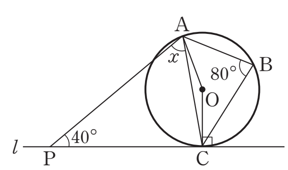
따라서 점 D를 지나면서 선분 AB에 대한 평행한 직선은 원 O의 중심을 지난다.

06

다음 그림과 같이 $\overline{AO}$, $\overline{CO}$를 그으면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle AOC = 2\angle ABC$

$= 2 \times 80^\circ = 160^\circ$



이때, $\overline{AO} = \overline{CO}$에서 $\triangle ACO$는 이등변삼각형이므로

$\angle ACO = \angle CAO = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 160^\circ) = 10^\circ$

$\overline{OC} \perp l$이므로

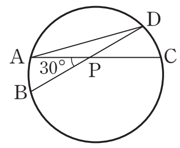
$\angle ACP = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$

$\triangle APC$에서

$\angle x = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$ 　　답 60°

07

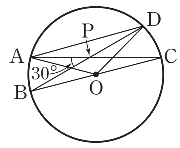
오른쪽 그림과 같이 두 현 AC, BD의 교점을 P라 하고, $\overline{AD}$를 그으면 △APD에서



$\angle PAD+\angle PDA=30^\circ$

(가)

주어진 원의 중심을 O라 하면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로



$\angle AOB=2\angle ADB=2\angle PDA$,

$\angle COD=2\angle CAD=2\angle PAD$

$\therefore \angle AOB+\angle COD=2(\angle PDA+\angle PAD)$

$=2\times 30^\circ=60^\circ$

(나)

주어진 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이므로

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=2\pi r\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{1}{3}\pi r$

이때, $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=3\pi$이므로

$\dfrac{1}{3}\pi r=3\pi \qquad \therefore r=9$

따라서 원의 반지름의 길이는 9이다.

(다)

답 9

단계	채점 기준	배점
(가)	두 현 AC, BD의 교점을 P라 하고 $\angle PAD+\angle PDA$의 값을 구한 경우	30%
(나)	원의 중심을 O라 하고 $\angle AOB+\angle COD$의 값을 구한 경우	40%
(다)	호의 길이가 중심각의 크기에 정비례함을 이용하여 주어진 원의 반지름의 길이를 구한 경우	30%

08

ㄱ. $\overline{EF}$는 원 O의 접선이고 점 B는 그 접점이므로

$\angle ABF=90^\circ$

ㄴ. △AEB에서 $\angle BEC+\angle BAC=90^\circ$이고

$\angle BAC=\angle BDC$ ($\because \overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)이므로

$\angle BEC+\angle BDC=90^\circ$

ㄷ. $\overline{AB}$는 원 O의 지름이므로

$\angle ADB=90^\circ$

ㄱ에서 $\angle ABF=90^\circ$이므로

△ABF∽△ADB (AA 닮음)

$\therefore \angle AFB=\angle ABD$

이때, $\angle ACD=\angle ABD$ ($\because \overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각)이므로

$\angle AFB=\angle ACD$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

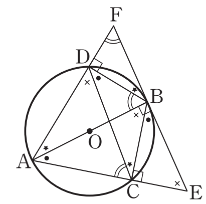
blacklabel 특강 풀이첨삭

$\overline{AB}\perp\overline{EF}$, $\overline{BD}\perp\overline{AF}$, $\overline{BC}\perp\overline{AE}$

임을 이용하여 크기가 같은 각을 표시하면 오른쪽 그림과 같다.

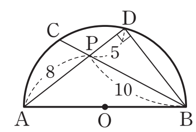
즉, 이 그림에서

●$+\times=90^\circ$, ★$+$⌒$=90^\circ$



09

오른쪽 그림과 같이 $\overline{DB}$를 그으면 $\overline{AB}$는 반원 O의 지름이므로 $\angle ADB=90^\circ$



직각삼각형 PBD에서

$\overline{BD}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$

$=5\sqrt{3}$

또한, 직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=8+5=13$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{13^2+(5\sqrt{3})^2}=\sqrt{244}$

$=2\sqrt{61}$

따라서 반원 O의 반지름의 길이는

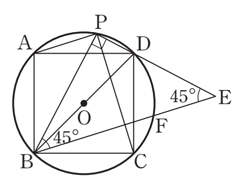
$2\sqrt{61}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{61}$

답 $\sqrt{61}$

10

ㄱ. △ABD에서 $\angle BAD=90^\circ$이므로

$\overline{BD}$는 원의 지름이다.



$\therefore \angle BPD=90^\circ$

이때, $\overline{PB}=\overline{PE}$이므로 △PBE는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \angle PBE=\angle PEB=45^\circ$

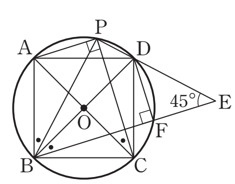
ㄴ. $\angle PBA=45^\circ-\angle PBD=\angle DBF$

ㄷ. ㄴ에서 $\angle PBA=\angle DBF$이고

$\angle ABP=\angle ACP$ ($\because \overset{\frown}{AP}$에 대한 원주각)이므로

$\angle ACP=\angle DBF$

즉, △ACP와 △DBF에서



$\angle ACP=\angle DBF$,

$\overline{AC}=\overline{BD}$,

$\angle APC=\angle DFB=90^\circ$

$\therefore$ △ACP≡△DBF (RHA 합동) ……㉠

또한, $\triangle DEF$에서 $\angle DEF=45°$, $\angle DFE=90°$이므로

$\triangle DEF$는 직각이등변삼각형이다.

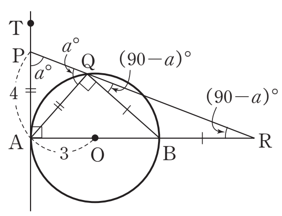
즉, $\overline{DF}=\overline{FE}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PC}=\overline{DF}+\overline{BF}$ (∵ ㉠)

$=\overline{FE}+\overline{BF}=\overline{BE}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

11



$\triangle AQP$는 $\overline{AP}=\overline{AQ}$인 이등변삼각형이므로

$\angle APQ=\angle AQP=a°$

$\overline{BQ}$를 그으면 $\angle AQB=90°$이므로

$\angle RQB=(90-a)°$ ……㉠

$\triangle ARP$에서 $\angle PAR=90°$이므로

$\angle PRA=(90-a)°$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle BRQ$는 $\overline{BQ}=\overline{BR}$인 이등변삼각형이다.

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{AQ}=\overline{AP}=4$, $\overline{AB}=3+3=6$이므로

$\overline{BQ}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

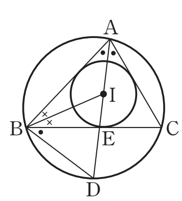
$\therefore \overline{BR}=\overline{BQ}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AR}=\overline{AB}+\overline{BR}=6+2\sqrt{5}$

따라서 직각삼각형 ARP에서

$\tan a°=\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AP}}=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 답 ④

12



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BI}$를 그으면 점 I가

$\triangle ABC$의 내심이므로

$\angle BAI=\angle CAI$, $\angle ABI=\angle CBI$

즉, $\triangle IAB$에서

$\angle BID=\angle IAB+\angle IBA$

또한, $\angle DBC=\angle DAC$ (∵ $\overset{\frown}{CD}$에 대한 원주각)이므로

$\angle DIB=\angle DBI$

따라서 $\triangle DIB$는 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\overline{DI}=6$ cm 답 6 cm

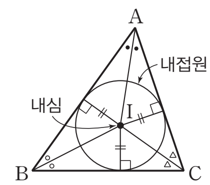
blacklabel 특강 필수개념

삼각형의 내심

원 I가 삼각형의 세 변에 모두 접할 때, 이 원 I는 $\triangle ABC$에 내접한다고 한다.

이때, 원 I를 $\triangle ABC$의 내접원이라 하고, 내접원의 중심 I를 $\triangle ABC$의 내심이라 한다.

$\triangle ABC$의 내심 I는 세 내각의 이등분선의 교점이다.



13

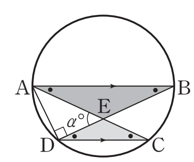
$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로

$\angle BAC=\angle ACD$ (∵ 엇각), $\angle BDC=\angle ABD$ (∵ 엇각)

또한, $\angle ABD=\angle ACD$ (∵ $\overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각)

$\angle BAC=\angle BDC$ (∵ $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)

즉, 크기가 같은 각을 표시하면 오른쪽 그림과 같으므로 $\triangle EBA$, $\triangle EDC$는 이등변삼각형이고 서로 닮음이다.



이때, $\triangle EBA$, $\triangle EDC$의 닮음비는

$\overline{EA}:\overline{ED}$이므로 넓이의 비는

$\triangle EBA:\triangle EDC=\overline{EA}^2:\overline{ED}^2$

즉, $\triangle EBA\times\overline{ED}^2=\triangle EDC\times\overline{EA}^2$이므로

$\triangle EDC=\dfrac{\overline{ED}^2}{\overline{EA}^2}\times\triangle EBA$

$\therefore k=\dfrac{\overline{ED}^2}{\overline{EA}^2}=\left(\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EA}}\right)^2$

한편, $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle ADB=90°$

즉, $\angle ADE=90°$이므로 직각삼각형 ADE에서

$\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EA}}=\cos a°$ $\therefore k=\left(\dfrac{\overline{ED}}{\overline{EA}}\right)^2=\cos^2 a°$ 답 ③

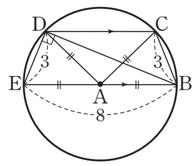
blacklabel 특강 오답피하기

주어진 문제에서 $\triangle EBA \backsim \triangle EDC$ (AA 닮음)이므로 두 삼각형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$임을 이용하여 넓이의 비를 구한다.

이때, 문제에서 선분의 길이에 대한 단서가 전혀 없으므로 닮음비를 직접 구하기보다는 $\triangle EDC=k\triangle EBA$ 꼴로 나타낸 후, 직각삼각형 ADE에서 삼각비를 이용한다.

14

$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4$이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 B, C, D는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점이다.



또한, $\overline{AB}$의 연장선과 원의 교점을 E라 하면 $\overline{EB}$는 원의 지름이므로 $\angle EDB=90^\circ$이다.

이때, $\triangle ACD$는 이등변삼각형이므로

$\angle ACD=\angle ADC$

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로

$\angle ACD=\angle CAB$ ($\because$ 엇각), $\angle ADC=\angle DAE$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \angle DAE=\angle CAB$

즉, $\triangle ADE\equiv\triangle ABC$ (SAS 합동)이므로

$\overline{DE}=\overline{BC}=3$

따라서 직각삼각형 BDE에서

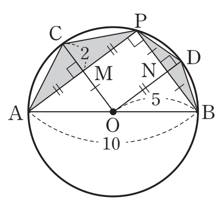
$\overline{DB}=\sqrt{8^2-3^2}=\sqrt{55}$

답 ②

15

$\overline{AM}=\overline{PM}$, $\overline{BN}=\overline{PN}$이므로

$\overline{AP}\perp\overline{OC}$, $\overline{BP}\perp\overline{OD}$



또한, $\overline{AB}$가 원의 지름이므로

$\angle APB=90^\circ$

즉, □ONPM은 직사각형이다.

이때, $\overline{OC}=\frac{10}{2}=5$, $\overline{CM}=2$이므로

$\overline{OM}=5-2=3$

$\therefore \overline{PB}=2\overline{PN}=2\overline{OM}=2\times3=6$

직각삼각형 ABP에서

$\overline{AP}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$

즉, $\overline{ON}=\overline{MP}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{2}\times8=4$이므로

$\overline{DN}=\overline{OD}-\overline{ON}=5-4=1$

$$\therefore \triangle CAP+\triangle DPB=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{CM}+\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{DN}$$
$$=\frac{1}{2}\times8\times2+\frac{1}{2}\times6\times1$$
$$=8+3=11$$

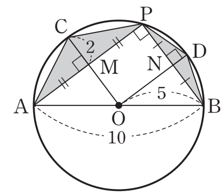
답 11

| 다른풀이 |

$\overline{AB}=10$이므로

$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OB}=\frac{10}{2}=5$

$\overline{AM}=\overline{PM}$이므로 $\overline{AP}\perp\overline{OC}$



이때, $\overline{CM}=2$이므로

$\overline{OM}=5-2=3$

직각삼각형 OMA에서

$\overline{AM}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

$\therefore \overline{PA}=2\overline{AM}=2\times4=8$

또한, $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\angle APB=90^\circ$

즉, 직각삼각형 PAB에서

$\overline{PB}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$

$\therefore \overline{BN}=\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{PB}=\frac{1}{2}\times6=3$

직각삼각형 OBN에서

$\overline{ON}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

$\therefore \overline{DN}=\overline{OD}-\overline{ON}=5-4=1$

$$\therefore \triangle CAP+\triangle DPB=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{CM}+\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{DN}$$
$$=\frac{1}{2}\times8\times2+\frac{1}{2}\times6\times1$$
$$=8+3=11$$

16

$\angle ABC : \angle BCD=\widehat{AC} : \widehat{BD}$이므로

$\angle ABC : \angle BCD=2:7 \qquad \therefore \angle ABC=\frac{2}{7}\angle BCD$

$\triangle BPC$에서

$50^\circ+\frac{2}{7}\angle BCD=\angle BCD$

$\frac{5}{7}\angle BCD=50^\circ \qquad \therefore \angle BCD=70^\circ$

$\therefore \angle ABC=\frac{2}{7}\times70^\circ=20^\circ$

따라서 $\angle BAD=\angle BCD=70^\circ$ ($\because$ $\widehat{BD}$에 대한 원주각)이므로

$\triangle BAQ$에서

$\angle AQB=180^\circ-(20^\circ+70^\circ)=90^\circ$

답 ⑤

17

$\widehat{BC}=2\widehat{AD}$이므로 $\angle BAC=2\angle ABD$

또한, $\angle APB=\angle DPC=114^\circ$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로

$\triangle ABP$에서

$114^\circ+2\angle ABD+\angle ABD=180^\circ$

$3\angle ABD=66^\circ \qquad \therefore \angle ABD=22^\circ$

답 22°

18

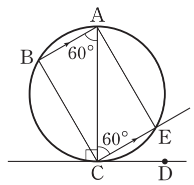
$\angle BCA : \angle CAB : \angle ABC = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA}$이므로

$\angle BCA : \angle CAB : \angle ABC = 1 : 2 : 3$

또한, $\triangle ABC$에서 $\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ$이므로

$\angle CAB = 180^\circ \times \dfrac{2}{1+2+3} = 180^\circ \times \dfrac{1}{3} = 60^\circ$

$\overline{AB} /\!/ \overline{CE}$이므로



$\angle ACE = \angle CAB = 60^\circ$ ($\because$ 엇각)

한편,

$\angle ABC = 180^\circ \times \dfrac{3}{1+2+3}$

$= 180^\circ \times \dfrac{1}{2} = 90^\circ$

이므로 $\overline{AC}$는 원의 지름이다.

또한, 점 C는 직선 CD와 원의 접점이므로

$\angle ACD = 90^\circ$

$\therefore \angle ECD = \angle ACD - \angle ACE$

$= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

답 30°

| 다른풀이 |

$\overline{AB} /\!/ \overline{CE}$이므로 $\angle ACE = \angle CAB$ ($\because$ 엇각)

$\overset{\frown}{CA}$는 원의 둘레의 길이의 $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$이므로 $\overline{CA}$는 원의 지름이다.

또한, 점 C는 직선 CD와 원의 접점이므로

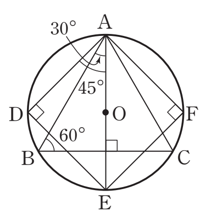
$\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$ $\quad \therefore \angle ECD = \angle ACB$

이때, $\overset{\frown}{AB}$는 원의 둘레의 길이의 $\dfrac{1}{6}$이고, $\angle ACB$는 $\overset{\frown}{AB}$의 원주각이므로

$\angle ACB = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} \times 360^\circ = 30^\circ$ $\quad \therefore \angle ECD = 30^\circ$

19

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$를 그으면



$\angle AFE = 90^\circ$이므로 $\overline{AE}$는 원 O의 지름이다.

$\triangle ADE$가 직각이등변삼각형이므로

$\angle DAE = 45^\circ$

$\angle BAC = 60^\circ$이므로

$\angle BAE = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$

$\therefore \angle DAB = \angle DAE - \angle BAE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

따라서 $\angle ABC = 60^\circ$이고

$\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{AFC} = \angle DAB : \angle ABC$이므로

$15 : \overset{\frown}{AFC} = 15^\circ : 60^\circ$

$\therefore \overset{\frown}{AFC} = 60\,(\text{cm})$

답 60 cm

20

$\overline{AB}$는 원 O의 지름이므로

$\angle APB = 90^\circ$, $\angle AQB = 90^\circ$

직각삼각형 ABP에서 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,(\text{cm})$

직각삼각형 AQB에서 $\overline{QA} = \overline{QB}$이므로

$\angle QAB = \angle QBA = 45^\circ$

$\therefore \overline{QA} = \overline{QB} = \overline{AB}\sin 45^\circ = 2\sqrt{5}\sin 45^\circ$

$= 2\sqrt{5} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}\,(\text{cm})$

이때,

$\square AQBP = \triangle ABP + \triangle AQB$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 9$ ……㉠

한편, $\overline{QA} = \overline{QB}$이므로 $\overset{\frown}{QA} = \overset{\frown}{QB}$

길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle APQ = \angle BPQ$

$= \dfrac{1}{2}\angle APB$

$= \dfrac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

$\overline{PQ} = x$ cm라 하면

$\square AQBP = \triangle PAQ + \triangle PQB$

$= \dfrac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 45^\circ + \dfrac{1}{2} \times x \times 2 \times \sin 45^\circ$

$= \sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}x$ ……㉡

㉠=㉡이므로

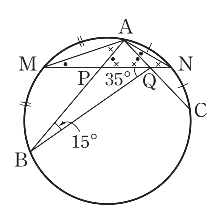
$9 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}x$ $\quad \therefore x = 3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ} = 3\sqrt{2}$ cm

답 ①

21

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$을 그으면



$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$이므로

$\angle ANM = \angle MAB$

또한, $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{CN}$이므로

$\angle AMN = \angle NAC$

$\triangle AMP$, $\triangle NAQ$에서

$\angle APQ = \angle MAP + \angle AMP$

$= \angle ANQ + \angle NAQ$

$= \angle AQP$

이때, $\triangle$BQP에서 $\angle$APQ$=15^\circ+35^\circ=50^\circ$

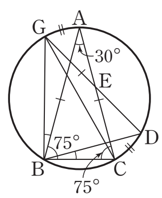
$\therefore$ $\angle$AQP$=\angle$APQ$=50^\circ$ **답** 50°

22

$\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABC=\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BG}$, $\overline{BD}$를 그으면



$\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$\angle GBA=\angle DBC$

$\therefore$ $\angle GBD=\angle GBA+\angle ABD$

$=\angle DBC+\angle ABD$

$=\angle ABC=75^\circ$

또한, $\overline{CG}$를 그으면

$\angle BGC=\angle BAC=30^\circ$ ($\because$ $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)

$\overset{\frown}{CD}$의 길이는 원의 둘레의 길이의 $\dfrac{1}{12}$이고, $\angle$CGD는 $\overset{\frown}{CD}$의 원주각이므로

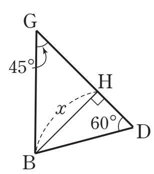
$\angle CGD=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{12}\times360^\circ=15^\circ$

$\therefore$ $\angle BGD=\angle BGC+\angle CGD=30^\circ+15^\circ=45^\circ$

$\triangle$BDG에서

$\angle BDG=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

이때, 점 B에서 $\overline{GD}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BH}=x$라 하면 두 직각삼각형 BHG, BDH에서



$\overline{GH}=\dfrac{\overline{BH}}{\tan 45^\circ}=\dfrac{x}{1}=x$,

$\overline{HD}=\dfrac{\overline{BH}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

$\overline{GH}+\overline{HD}=\overline{DG}=2$이므로

$x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=2$, $(3+\sqrt{3})x=6$

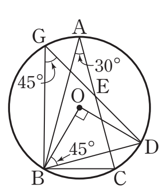
$\therefore$ $x=\dfrac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$

$\therefore$ $\overline{BH}=3-\sqrt{3}$

직각삼각형 BDH에서

$\overline{BD}=\dfrac{\overline{BH}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2(\sqrt{3}-1)$

한편, $\triangle$ABC의 외접원의 중심을 O라 하면



$\angle$BGD$=45^\circ$이므로

$\angle BOD=2\angle BGD=2\times45^\circ=90^\circ$

직각삼각형 OBD에서

$\overline{OD}=\overline{BD}\sin 45^\circ=2(\sqrt{3}-1)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

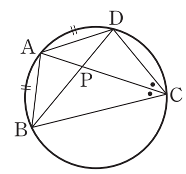
따라서 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$이다.

답 ①

23 해결단계

❶ 단계	원주각의 성질을 이용하여 $\overline{BP}$, $\overline{DP}$의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{BH}$의 길이를 구하여 $\angle$ABD에 대한 삼각비의 값을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 삼각비의 값과 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PC}$의 길이를 구한다.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$이므로 $\angle ACB=\angle ACD$



즉, $\triangle$BCD에서 $\overline{CP}$는 $\angle$BCD의 이등분선이므로

$\overline{BP}:\overline{DP}=\overline{BC}:\overline{CD}$

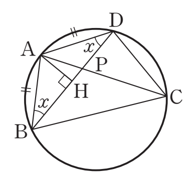
$=\dfrac{3}{2}\overline{CD}:\overline{CD}=3:2$

이때, $\overline{BP}+\overline{DP}=\overline{BD}=5$이므로

$\overline{BP}=\dfrac{3}{5}\overline{BD}=\dfrac{3}{5}\times5=3$ $\cdots\cdots$㉠

$\overline{DP}=\dfrac{2}{5}\overline{BD}=\dfrac{2}{5}\times5=2$ $\cdots\cdots$㉡

한편, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$이므로 $\angle ADB=\angle ABD$



즉, $\triangle$ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로 점 A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H, $\angle ABD=\angle x$라 하면

$\overline{BH}=\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\times5=\dfrac{5}{2}$

즉, 직각삼각형 ABH에서 $\cos x=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{3}=\dfrac{5}{6}$

또한, $\triangle$ABP와 $\triangle$DCP에서

$\angle APB=\angle DPC$ ($\because$ 맞꼭지각),

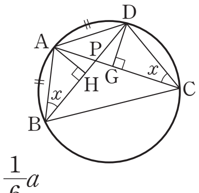
$\angle ABP=\angle DCP$ ($\because$ $\overset{\frown}{AD}$에 대한 원주각)

$\therefore$ $\triangle ABP\backsim\triangle DCP$ (AA 닮음)

이때, ㉠에서 $\triangle$ABP는 $\overline{BA}=\overline{BP}=3$인 이등변삼각형이므로

$\triangle$DPC에서 $\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{CP}=\overline{CD}=a$

점 D에서 $\overline{PC}$에 내린 수선의 발을 G라 하면



직각삼각형 CDG에서

$\overline{CG}=a\cos x=\dfrac{5}{6}a$

$\therefore$ $\overline{PG}=\overline{CP}-\overline{CG}=\overline{CD}-\overline{CG}=a-\dfrac{5}{6}a=\dfrac{1}{6}a$

두 직각삼각형 DPG, GCD에서

$\overline{DG}^2=2^2-\left(\dfrac{1}{6}a\right)^2=a^2-\left(\dfrac{5}{6}a\right)^2$ ($\because$ ㉡)

$4-\dfrac{1}{36}a^2=a^2-\dfrac{25}{36}a^2$, $\dfrac{1}{3}a^2=4$

$a^2=12$ $\quad\therefore$ $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ($\because$ $a>0$)

$\therefore$ $\overline{PC}=2\sqrt{3}$ **답** ③

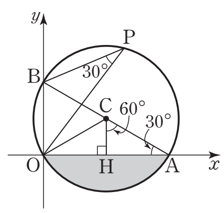
Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 48~49

01 (1) $(3\sqrt{3},\ 3)$ (2) $12\pi-9\sqrt{3}$ (3) $(3\sqrt{3}+6,\ 3)$			02 500 m
03 (1) $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ (2) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ cm		04 14	05 100
06 21	07 3	08 90	

01 해결단계

(1)	❶ 단계	△ABO에서 $\overline{AB}$, $\overline{OA}$의 길이를 각각 구한다.
	❷ 단계	원의 중심의 좌표를 구한다.
(2)	❸ 단계	색칠한 부분의 넓이를 구한다.
(3)	❹ 단계	△BOP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P의 위치를 찾는다.
	❺ 단계	❹단계에서 찾은 점 P의 좌표를 구한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 그으면 $\angle AOB=90^\circ$이므로 $\overline{AB}$는 원의 지름이다.



직각삼각형 △ABO에서

$\overline{OB}=6$이고

$\angle BAO=\angle BPO$

$=30^\circ$ ($\because$ $\widehat{BO}$에 대한 원주각)

이므로 $\overline{AB}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=12$,

$\overline{OA}=\dfrac{\overline{OB}}{\tan 30^\circ}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$

원의 중심을 C라 하면 원의 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\overline{CB}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\times 12=6$

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$\overline{CH}=\overline{AH}\tan 30^\circ=3\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=3$

따라서 점 C, 즉 원의 중심의 좌표는 $(3\sqrt{3},\ 3)$이다.

(2) $\angle OCA=2\angle ACH=2\times 60^\circ=120^\circ$이므로

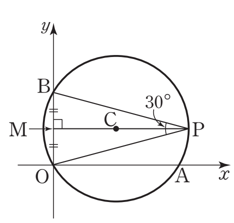
(색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 OCA의 넓이)−△COA

$=\pi\times 6^2\times\dfrac{120}{360}-\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 3$

$=12\pi-9\sqrt{3}$

(3) △BOP의 밑변을 $\overline{BO}$라 하면 높이가 최대일 때 넓이도 최대이므로 높이를 포함한 직선이 원의 중심을 지나야 한다.

즉, △BOP가 오른쪽 그림과 같을 때 넓이가 최대가 된다.



점 P에서 $\overline{BO}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{MP}=\overline{MC}+\overline{CP}=3\sqrt{3}+6$

따라서 점 P의 좌표는 $(3\sqrt{3}+6,\ 3)$이다.

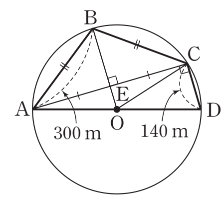
답 (1) $(3\sqrt{3},\ 3)$ (2) $12\pi-9\sqrt{3}$ (3) $(3\sqrt{3}+6,\ 3)$

02 해결단계

❶ 단계	네 점 A, B, C, D가 $\overline{AD}$를 지름으로 하는 원 위의 점임을 이해한다.
❷ 단계	두 선분 AC, BO의 교점을 E라 할 때, $\overline{EO}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\overline{AD}$의 길이를 구한다.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$이므로 네 점 A, B, C, D는 $\overline{AD}$를 지름으로 하는 원 위에 있다.

이때, $\overline{BO}$, $\overline{AC}$의 교점을 E라 하고 $\overline{OC}$를 그으면



△ABO≡△CBO (SSS 합동)

$\therefore\ \angle ABO=\angle CBO$

이때, $\angle BAC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고 $\overline{BE}$는 $\angle ABC$의 이등분선이므로

$\angle BEC=90^\circ$

△ADC에서 $\overline{AE}=\overline{CE}$, $\overline{AO}=\overline{DO}$이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{EO}\,/\!/\,\overline{CD}$,

$\overline{EO}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times 140=70$ (m)

$\overline{AO}=\overline{DO}=\overline{BO}=x$ m라 하면 $\overline{BE}=(x-70)$ m이므로

직각삼각형AEB에서 $\overline{AE}^2=300^2-(x-70)^2$ ……㉠

직각삼각형AOE에서 $\overline{AE}^2=x^2-70^2$ ……㉡

㉠=㉡이므로 $300^2-(x-70)^2=x^2-70^2$

$x^2-70x-45000=0$, $(x-250)(x+180)=0$

$\therefore\ x=250$ ($\because\ x>0$)

$\therefore\ \overline{AD}=2x=2\times 250=500$ (m)

답 500 m

03 해결단계

(1)	❶ 단계	△AOC가 정삼각형임을 확인한다.
	❷ 단계	△AOC의 넓이를 구한다.
(2)	❸ 단계	$\overline{DA}$의 길이를 구한다.
	❹ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한다.
	❺ 단계	삼각형의 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{CE}$의 길이를 구한다.

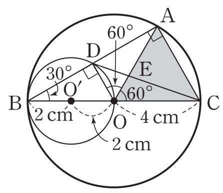
(1) 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle AOC=2\angle ABC=2\times 30^\circ=60^\circ$

이때, $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 △AOC는 한 변의 길이가 4 cm인 정삼각형이다.

$\therefore\ \triangle AOC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$

(2) 두 삼각형 DBO, ABC에서



$\angle BDO = \angle BAC = 90^\circ$,

$\angle ABC$는 공통이므로

$\triangle DBO \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{BO} : \overline{OC} = \overline{BD} : \overline{DA}$

이때, $\overline{BD} = \overline{BO}\cos 30^\circ = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$이므로

$4 : 4 = 2\sqrt{3} : \overline{DA}$ $\qquad \therefore \overline{DA} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$

한편, 직각삼각형 ADC에서 $\overline{AC} = 4\text{ cm}$이므로

$\overline{CD} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,(\text{cm})$

이때, $\angle DOA = 180^\circ - (\angle DOB + \angle AOC)$

$= 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$

이므로

$\overline{OE}$는 $\angle DOC$의 이등분선이다.

$\therefore \overline{DE} : \overline{CE} = \overline{OD} : \overline{OC}$

그런데 $\overline{OD} = \overline{BO}\sin 30^\circ = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2\,(\text{cm})$이므로

$\overline{DE} : \overline{CE} = 2 : 4 = 1 : 2$

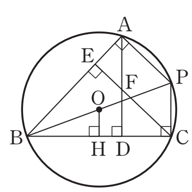
$\therefore \overline{CE} = \dfrac{2}{1+2}\overline{CD} = \dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{7} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}\,(\text{cm})$

답 (1) $4\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (2) $\dfrac{4\sqrt{7}}{3}\text{ cm}$

04 해결단계

❶ 단계	반원에 대한 원주각의 크기가 90°임을 이용하여 크기가 90°인 각을 찾는다.
❷ 단계	$\overline{AF} = \overline{PC}$임을 설명한다.
❸ 단계	$\overline{AF}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO}$의 연장선이 원과 만나는 점을 P라 하면 $\overline{BP}$가 원의 지름이므로



$\angle PAB = \angle PCB = 90^\circ$

이때, $\angle PAB = \angle CEB = 90^\circ$이므로

$\overline{EC} /\!/ \overline{AP}$

또한, $\angle PCB = \angle ADB = 90^\circ$이므로

$\overline{AD} /\!/ \overline{PC}$

즉, □AFCP는 평행사변형이므로 $\overline{AF} = \overline{PC}$

$\triangle BCP$에서 $\overline{BH} = \overline{CH}$, $\overline{OH} /\!/ \overline{PC}$이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{PC} = 2\overline{OH} = 2 \times 7 = 14$

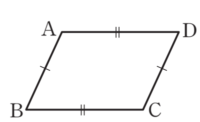
$\therefore \overline{AF} = \overline{PC} = 14$ 답 14

blacklabel 특강 필수개념

평행사변형의 성질

평행사변형에서 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.

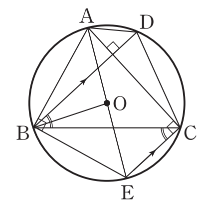
⇨ $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이면
$\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$



05 해결단계

❶ 단계	반원에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 크기가 같은 두 각을 찾는다.
❷ 단계	$\overline{CD}$와 길이가 같은 선분을 찾는다.
❸ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, O를 지나는 직선이 원과 만나는 점을 E라 하고 $\overline{BE}$, $\overline{CE}$를 그으면



$\angle ABE = \angle ACE = 90^\circ$

이때, $\overline{EC} \perp \overline{AC}$, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$이므로

$\overline{BD} /\!/ \overline{EC}$

$\therefore \angle DBC = \angle BCE$ ($\because$ 엇각)

크기가 같은 원주각에 대한 현의 길이는 같으므로

$\overline{CD} = \overline{BE}$ ······㉠

직각삼각형 ABE에서

$\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$ ······㉡

$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$ ($\because$ ㉠)

$= \overline{AE}^2$ ($\because$ ㉡)

$= (5+5)^2 = 100$

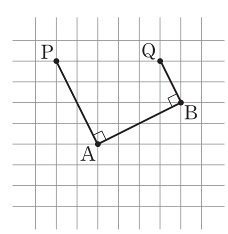
답 100

06 해결단계

❶ 단계	$\angle PAB = 90^\circ$, $\angle QBA = 90^\circ$가 되도록 하는 두 점 P, Q를 잡고 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾는다.
❷ 단계	선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 점의 개수를 구한다.

$\triangle ABC$가 예각삼각형이 되려면 세 내각의 크기가 모두 90°보다 작아야 한다.

[그림 1]과 같이 $\angle PAB = 90^\circ$, $\angle QBA = 90^\circ$가 되도록 두 점 P, Q를 잡자.

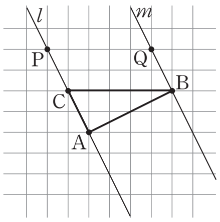


[그림 1]

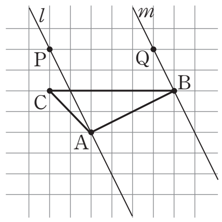
두 점 P, A를 지나는 직선을 l, 두 점 Q, B를 지나는 직선을 m이라 하자.

[그림 2]와 같이 점 C가 직선 l 또는 직선 m 위에 있으면 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.

또한, [그림 3]과 같이 점 C 가 직선 l의 왼쪽 또는 직선 m의 오른쪽에 있으면 $\triangle ABC$는 둔각삼각형이다.



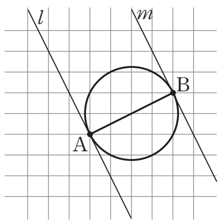
[그림 2]



[그림 3]

따라서 $\triangle ABC$가 예각삼각형이려면 점 C는 두 직선 l, m 사이에 있어야 한다.

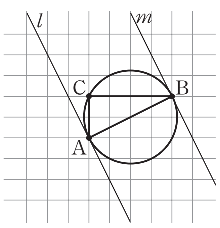
[그림 4]와 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원을 생각해 보자.



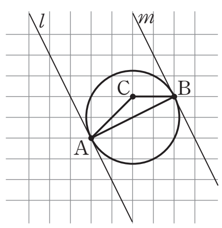
[그림 4]

[그림 5]와 같이 점 C가 원 위에 있으면 반원에 대한 원주각의 크기가 90°이므로 $\angle ACB=90^\circ$, 즉 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.

또한, [그림 6]과 같이 점 C가 원의 내부에 있으면 $\angle ACB$의 크기는 반원에 대한 원주각의 크기보다 크다. 즉, $\angle ACB>90^\circ$이므로 $\triangle ABC$는 둔각삼각형이다.



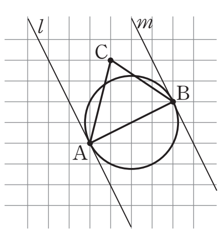
[그림 5]



[그림 6]

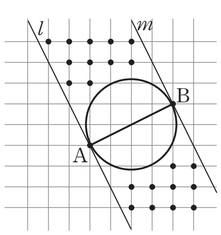
하지만 [그림 7]과 같이 점 C가 원의 외부에 있으면 $\angle ACB$의 크기는 반원에 대한 원주각의 크기보다 작다.

즉, $\angle ACB<90^\circ$이므로 $\triangle ABC$는 예각삼각형이다.



[그림 7]

따라서 조건을 만족시키는 점 C는 [그림 8]과 같으므로 구하는 점 C의 개수는 21이다.

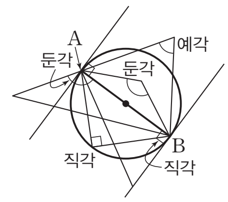


[그림 8]

답 21

blacklabel 특강 오답피하기

선분 AB를 한 변으로 하는 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형을 판단할 때는 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원을 기준으로 나머지 한 꼭짓점 C가 원의 외부에 있는지, 원 위에 있는지, 원의 내부에 있는지로 판단한다. 그런데 여기서 유의할 점은 풀이의 [그림 2], [그림 3]과 같이 $\angle ACB$가 직각 또는 둔각이 되는 경우가 있으므로 오른쪽 그림과 같이 점 A, B에서의 접선을 기준으로 예각과 둔각을 함께 판단해야 한다.



07 해결단계

❶ 단계	□BECD의 넓이를 구하는 식을 선분의 길이를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\overline{EH}+\overline{DC}=\overline{AH}$임을 확인한다.
❸ 단계	□BECD의 넓이를 구한다.

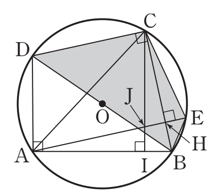
$\overline{BD}$는 원 O의 지름이므로 $\angle BCD=90^\circ$

$\therefore$ □BECD$=\triangle BEC+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DC}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times(\overline{EH}+\overline{DC})$

$\overline{DA}$를 긋고, 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 I, $\overline{AH}$와 $\overline{CI}$가 만나는 점을 J라 하면



$\angle DCH=\angle AHB=90^\circ$이므로

$\overline{CD}\,/\!/\,\overline{JA}$

$\angle DAB=\angle CIB=90^\circ$이므로

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{CJ}$

즉, □DAJC는 평행사변형이므로 $\overline{DC}=\overline{AJ}$ ······㉠

한편, $\triangle AIJ$와 $\triangle CHE$에서

$\angle AIJ=\angle CHE=90^\circ$,

$\angle IAJ=\angle HCE$ ($\because$ $\overset{\frown}{BE}$에 대한 원주각)

즉, $\triangle AIJ\backsim\triangle CHE$ (AA 닮음)이므로

$\angle AJI=\angle CEH$

이때, $\angle AJI=\angle CJH$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로

$\angle CEH=\angle CJH$

즉, $\triangle CJE$는 $\overline{CJ}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{JH}=\overline{EH}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{EH}+\overline{DC}=\overline{JH}+\overline{AJ}=\overline{AH}$

$\therefore$ □BECD$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$

$=\triangle ABC=3$

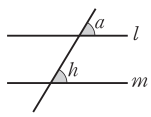
답 3

blacklabel 특강 필수개념

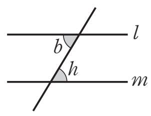
두 직선이 평행할 조건

한 평면 위에서 서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때

(1) 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.
⇨ $\angle a=\angle h$이면 $l /\!/ m$



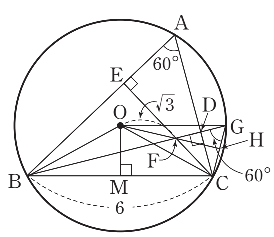
(2) 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.
⇨ $\angle b=\angle h$이면 $l /\!/ m$



08 해결단계

❶ 단계	원의 성질을 이용하여 원 O의 반지름의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{CF}=x$라 하고 이차방정식을 세워 x의 값을 구한다.
❸ 단계	a, b의 값을 각각 구하여 $20(a^2+b^2)$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 BF의 연장선이 원과 만나는 점을 G, 선분 OF의 연장선이 선분 CG와 만나는 점을 H라 하자.



□AEFD에서

$\angle AEF=\angle ADF=90^\circ$,

$\angle EAD=60^\circ$이므로

$\angle EFD=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ$

$\therefore \angle CFD=180^\circ-\angle EFD$

$=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

또한, $\angle BGC=\angle A=60^\circ$ ($\because$ $\overset{\frown}{BC}$에 대한 원주각)이므로

$\triangle CGF$는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{CF}=\overline{FG}$

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC=2\angle A=2\times 60^\circ=120^\circ$

$\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로 변 BC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OBM에서

$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\therefore \overline{OB}=\frac{\overline{BM}}{\sin 60^\circ}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$

즉, 원 O의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

이때, $\triangle OFC$, $\triangle OFG$에서

$\overline{OF}$는 공통, $\overline{FC}=\overline{FG}$, $\overline{OC}=\overline{OG}$이므로

$\triangle OFC\equiv\triangle OFG$ (SSS 합동)

$\therefore \angle COF=\angle GOF$

즉, 선분 OH는 $\angle COG$의 이등분선이고 $\triangle OCG$는 이등변삼각형이므로

$\angle OHC=90^\circ$

$\overline{CF}=x$라 하면 직각삼각형 CHF에서

$\overline{CH}=\overline{CF}\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x$

$\overline{FH}=\overline{CF}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

직각삼각형 OCH에서

$\overline{OC}^2=\overline{CH}^2+\overline{OH}^2$

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$

$12=x^2+3x+3$, $x^2+3x-9=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=90$ **답** 90

| 다른풀이 1 |

중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle BOC=2\angle A=2\times 60^\circ=120^\circ$ ······㉠

$\triangle OBC$는 이등변삼각형이고 $\angle BOC=120^\circ$이므로 $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

한편, □AEFD에서

$\angle AEF=\angle ADF=90^\circ$, $\angle A=60^\circ$이므로

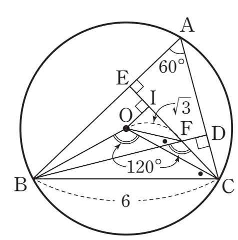
$\angle EFD=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ$

$\therefore \angle BFC=\angle EFD=120^\circ$ ($\because$ 맞꼭지각) ······㉡

㉠, ㉡에서

$\angle BFC=\angle BOC=120^\circ$

이므로 네 점 B, O, F, C는 한 원 위에 있다.



한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$\angle BFO=\angle BCO$

$=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)$

$=30^\circ$

$\therefore \angle OFE=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

점 O에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 OFI에서

$\overline{IF}=\overline{OF}\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

$\overline{OI}=\overline{OF}\sin 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CF}=x$라 하면 직각삼각형 OCI에서

$\overline{OC}^2=\overline{OI}^2+\overline{CI}^2$

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+x\right)^2$

$12=3+3x+x^2$, $x^2+3x-9=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로

$x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

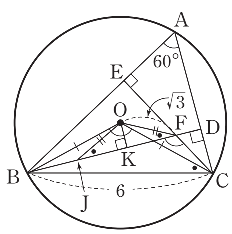
$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=90$

| 다른풀이 2 |

$\triangle$OBC는 이등변삼각형이고 $\angle$BOC$=120^\circ$이므로 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$이다.

또한, $\angle$BFC$=\angle$BOC$=120^\circ$이므로 네 점 B, O, F, C는 한 원 위에 있고

$\angle BFO=\angle BCO=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$



선분 BF 위에 $\overline{OF}=\overline{OJ}=\sqrt{3}$이 되도록 점 J를 잡으면 $\triangle$OJF는 이등변삼각형이므로

$\angle JOF=180^\circ-2\angle BFO$

$=180^\circ-2\times30^\circ=120^\circ$

$\therefore \angle BOJ=\angle BOC-\angle JOC$

$=120^\circ-\angle JOC$

$=\angle JOF-\angle JOC=\angle COF$

또한, $\overline{OB}=\overline{OC}$, $\overline{OJ}=\overline{OF}$이므로

$\triangle OBJ\equiv\triangle OCF$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{BJ}=\overline{CF}$

점 O에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 K라 하면 직각삼각형 OJK에서 $\angle OJK=30^\circ$, $\overline{OJ}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{OK}=\sqrt{3}\sin 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{JK}=\sqrt{3}\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

$\overline{CF}=\overline{BJ}=x$라 하면 직각삼각형 OBK에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OB}^2=\overline{OK}^2+\overline{BK}^2$

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+x\right)^2$

$12=3+3x+x^2$, $x^2+3x-9=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

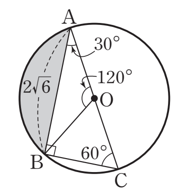
따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로

$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=90$

미리보는 학력평가 p. 50

1 ⑤ **2** 172 **3** ①

1



선분 AC가 원의 지름이므로

$\angle ABC=90^\circ$

선분 AC의 중점을 O라 하면 원의 중심이 O이므로

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times60^\circ=120^\circ$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 OAB의 넓이)$-\triangle$OAB

$=\pi\times\overline{OA}^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\pi\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

답 ⑤

blacklabel 특강 풀이첨삭

삼각비를 이용하지 않고 다음과 같이 $\triangle$OAB의 넓이를 구할 수 있다.

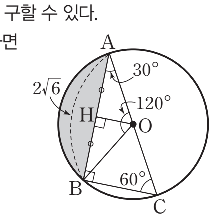
원의 중심 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}=\sqrt{6}$

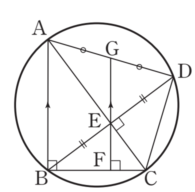
직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\overline{AH}\tan 30^\circ=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=2\sqrt{3}$



2



선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle ABC=90^\circ$

이때, $\angle EFC=90^\circ$이므로 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{GF}$

또한, 선분 AC가 원의 지름이고,

$\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로

$\overline{BE}=\overline{DE}$

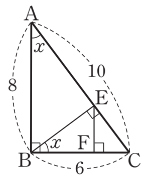
즉, $\triangle$ABD에서 $\overline{BE}=\overline{DE}$, $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{GE}$이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{AG}=\overline{DG}$, $\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8=4$

한편, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$

$\angle BAC = \angle x$라 하면



$\sin x = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

직각삼각형 ABE에서

$\overline{BE} = \overline{AB}\sin x = 8 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{5}$

$\angle EBF = 90^\circ - \angle ABE = \angle x$이므로

직각삼각형 EBF에서

$\overline{EF} = \overline{BE}\sin x = \dfrac{24}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{72}{25}$

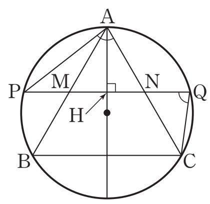
$\therefore\ l = \overline{FG} = \overline{EF} + \overline{GE} = \dfrac{72}{25} + 4 = \dfrac{172}{25}$

$\therefore\ 25l = 25 \times \dfrac{172}{25} = 172$ 답 172

3

두 점 M, N이 각각 두 변 AB, AC의 중점이므로

$\overline{MN} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} = \dfrac{1}{2} \times 6 = \boxed{3}$



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC$가 정삼각형이므로 직선 AH는 원의 중심을 지난다.

즉, 직선 AH는 선분 PQ를 수직이등분하므로

$\overline{PH} = \overline{HQ}$, $\overline{MH} = \overline{HN}$

이때, $\overline{PM} = x$라 하면 $\overline{QN} = \overline{PM} = x$

한편, $\triangle APN$과 $\triangle QCN$에서

$\angle PAC = \angle PQC$ ($\because$ $\overparen{PBC}$에 대한 원주각),

$\angle ANP = \angle QNC$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore\ \triangle APN \backsim \triangle QCN$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AN} : \overline{PN} = \overline{QN} : \overline{CN}$이고,

$\overline{AN} = \overline{CN} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} = \dfrac{1}{2} \times 6 = 3$이므로

$3 : (\boxed{x+3}) = x : 3$

$x(x+3) = 9$, $x^2 + 3x - 9 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x > 0$이므로 $x = \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ \overline{PQ} = 2\overline{PM} + \overline{MN} = 2x + 3$

$= 2 \times \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} + 3 = (-3+3\sqrt{5}) + 3$

$= \boxed{3\sqrt{5}}$

이상에서 (가)에 알맞은 수는 $a=3$, (나)에 알맞은 수는 $b = 3\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$ 답 ①

05 원주각의 활용

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 52

01 ③ 02 ⑤ 03 105° 04 ③ 05 ⑤

01

$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하자.

① $\angle CAD = \angle CBD$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

② $\triangle ABP$에서 $\angle ABP = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$
즉, $\angle ABD = \angle ACD$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

③ $\triangle CDP$에서 $\angle CDP + 60^\circ = 110^\circ$
$\therefore\ \angle CDP = 110^\circ - 60^\circ = 50^\circ$
즉, $\angle BAC \neq \angle CDB$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있지 않다.

④ $\triangle ABC$에서 $\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$
즉, $\angle ACB = \angle ADB$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

⑤ $\triangle BCD$에서 $\angle CBD = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$
즉, $\angle CAD = \angle CBD$이므로 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

따라서 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있지 않은 것은 ③이다.

답 ③

02

□ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, $(45^\circ + \angle x) + 110^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ \angle x = 25^\circ$

$\triangle ABD$에서 $\angle y = 180^\circ - (45^\circ + 25^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$

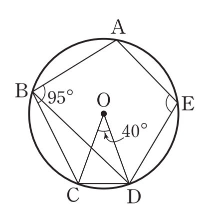
$\angle DBC = \angle DAC = 25^\circ$이고 □ABCD가 원에 내접하므로

$\angle z = \angle ABC = 50^\circ + 25^\circ = 75^\circ$

$\therefore\ \angle x + \angle y + \angle z = 25^\circ + 50^\circ + 75^\circ = 150^\circ$ 답 ⑤

03

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면



$\angle CBD = \dfrac{1}{2}\angle COD$

$= \dfrac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$

이므로 $\angle ABD = 95^\circ - 20^\circ = 75^\circ$

□ABDE가 원 O에 내접하므로 $\angle ABD+\angle AED=180^\circ$에서
$\angle AED=180^\circ-75^\circ=105^\circ$ 답 105°

04

① $\angle ABP=\angle ADC$이면 한 외각의 크기가 그 내대각의 크기와 같으므로 □ABCD는 원에 내접한다.

② $\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$이면 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이므로 □ABCD는 원에 내접한다.

③ $\angle AQB=90^\circ$이면 두 대각선이 직교한다. 이 조건으로는 □ABCD가 원에 내접하는지 알 수 없다.

④ $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이고 $\angle ADC=\angle DCB$이면 □ABCD는 등변사다리꼴이다.
이때, 등변사다리꼴의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로 항상 원에 내접한다.

⑤ $\triangle ACD\backsim\triangle BDC$이면 $\angle CAD=\angle DBC$이므로 □ABCD는 원에 내접한다.

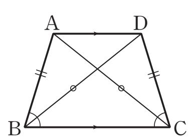
따라서 □ABCD가 원에 내접할 조건이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

blacklabel 특강 참고

등변사다리꼴

(1) 아랫변의 양 끝 각의 크기가 같은 사다리꼴이다.
(2) 등변사다리꼴의 성질
평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이가 같고, 두 대각선의 길이가 같다.
⇨ $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$



05

두 점 A, O를 지나는 지름 AD를 그으면
$\angle DAT=\boxed{\angle DCA}=90^\circ$이므로
$\angle BAT=90^\circ-\angle DAB$ ……㉠
$\angle BCA=90^\circ-\boxed{\angle DCB}$ ……㉡
이때, 호 BD에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로
$\angle DAB=\boxed{\angle DCB}$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $\angle BAT=\angle BCA$
∴ (가) : $\angle DCA$, (나) : $\angle DCB$
따라서 (가), (나)에 알맞은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 53~56

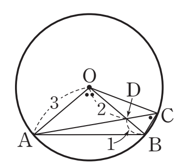
01 ③	02 3	03 ⑤	04 100°	05 ④
06 8π	07 ④, ⑤	08 $16\sqrt{10}$	09 5	10 ③
11 50°	12 ④	13 $13\sqrt{2}$	14 ①, ③	15 ⑤
16 6개	17 ⑤	18 40°	19 ⑤	20 80°
21 ②	22 67°	23 ①	24 6	

01

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로
$\angle DBC=\angle DAC=45^\circ$
$\triangle BCE$에서 $\angle ECB+45^\circ=72^\circ$
∴ $\angle ECB=72^\circ-45^\circ=27^\circ$ 답 ③

02

$\overline{OB}=2+1=3$이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$
즉, 오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 생각할 때, 점 B는 이 원 위의 점이다.



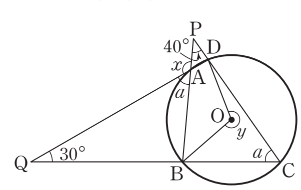
이 원에 대하여
$\angle AOB=2\angle ACB$
이므로 $\angle ACB$는 호 AB에 대한 원주각이다.
즉, 점 C도 이 원 위의 점이므로 $\overline{OC}$는 이 원의 반지름이다.
∴ $\overline{OC}=\overline{OA}=\overline{OB}=3$ 답 3

blacklabel 특강 오답피하기

이 문제에서 $\angle AOB=2\angle ACB$, 즉 $\angle AOB\neq\angle ACB$이므로 네 점 A, B, C, O가 한 원 위에 있지 않다는 것에 주의해야 한다.
$\angle AOB=2\angle ACB$로부터 원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 떠올려 접근하도록 하자.

03

네 점 A, B, C, D가 원 O 위에 있으므로 다음 그림과 같이 $\angle DCB=\angle QAB=\angle a$라 하자.



$\triangle AQB$에서 $\angle ABC=30^\circ+\angle a$
$\triangle PBC$에서 $40^\circ+(30^\circ+\angle a)+\angle a=180^\circ$
$2\angle a=110^\circ$ ∴ $\angle a=55^\circ$

$\therefore\ \angle x=180^\circ-\angle a=180^\circ-55^\circ=125^\circ$

또한, $\angle \mathrm{BAD}=\angle x$ ($\because$ 맞꼭지각)

$=125^\circ$

$\overparen{\mathrm{BCD}}$의 중심각이 $\angle y$, 원주각이 $\angle \mathrm{BAD}$이므로

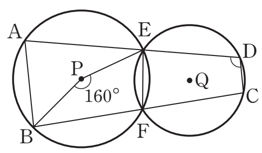
$\angle y=2\angle \mathrm{BAD}=2\times125^\circ=250^\circ$

$\therefore\ \angle y-\angle x=250^\circ-125^\circ=125^\circ$ 답 ⑤

04

원 P에서

$\angle \mathrm{BAE}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BPE}=\frac{1}{2}\times160^\circ=80^\circ$



$\overline{\mathrm{EF}}$를 그으면 □ABFE는 원 P에 내접하므로

$\angle \mathrm{EFC}=\angle \mathrm{BAE}=80^\circ$

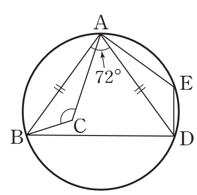
또한, □EFCD는 원 Q에 내접하므로

$\angle \mathrm{EDC}+\angle \mathrm{EFC}=180^\circ$

$\therefore\ \angle \mathrm{EDC}=180^\circ-\angle \mathrm{EFC}$

$=180^\circ-80^\circ=100^\circ$ 답 100°

05



네 점 A, B, D, E가 한 원 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.

$\triangle \mathrm{ABC}\equiv\triangle \mathrm{ADE}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$이므로

$\triangle \mathrm{ABD}$는 이등변삼각형이다.

이때, $\angle \mathrm{BAD}=72^\circ$이므로

$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{ADB}=\frac{1}{2}\times(180^\circ-72^\circ)=54^\circ$

□ABDE가 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{ABD}+\angle \mathrm{AED}=180^\circ$

$\therefore\ \angle \mathrm{AED}=180^\circ-54^\circ=126^\circ$

이때, $\triangle \mathrm{ABC}\equiv\triangle \mathrm{ADE}$이므로

$\angle \mathrm{ACB}=\angle \mathrm{AED}=126^\circ$ 답 ④

06

□ABCD가 원 O에 내접하므로

$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{DCP}=80^\circ$

$\therefore\ \angle \mathrm{BOD}=2\angle \mathrm{BAD}=2\times80^\circ=160^\circ$

$\therefore\ \angle \mathrm{AOB}=360^\circ-(140^\circ+160^\circ)=60^\circ$

이때, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로

$\triangle \mathrm{OAB}$는 정삼각형이다.

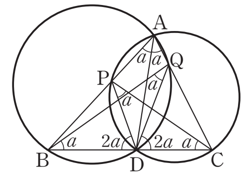
$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{AB}}=9$

$\therefore\ \overparen{\mathrm{BCD}}=2\pi\times9\times\frac{160}{360}=8\pi$ 답 8π

07

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BQ}}$, $\overline{\mathrm{CP}}$, $\overline{\mathrm{PD}}$, $\overline{\mathrm{QD}}$를 긋고

$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{DAC}=\angle a$라 하자.



④ $\triangle \mathrm{BDP}$와 $\triangle \mathrm{QDC}$에서

(ⅰ) $\angle \mathrm{BQD}=\angle \mathrm{BAD}=\angle a$ ($\because$ $\overparen{\mathrm{BD}}$에 대한 원주각)

$\angle \mathrm{DBQ}=\angle \mathrm{DAQ}=\angle a$ ($\because$ $\overparen{\mathrm{DQ}}$에 대한 원주각)

즉, $\triangle \mathrm{BDQ}$는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{QD}}$

(ⅱ) $\angle \mathrm{PCD}=\angle \mathrm{PAD}=\angle a$ ($\because$ $\overparen{\mathrm{PD}}$에 대한 원주각)

$\angle \mathrm{DPC}=\angle \mathrm{DAC}=\angle a$ ($\because$ $\overparen{\mathrm{DC}}$에 대한 원주각)

즉, $\triangle \mathrm{DCP}$는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DC}}$

(ⅲ) □PDCA는 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{BDP}=\angle \mathrm{PAC}=2\angle a$

□ABDQ는 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{QDC}=\angle \mathrm{BAQ}=2\angle a$

$\therefore\ \angle \mathrm{BDP}=\angle \mathrm{QDC}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\triangle \mathrm{BDP}\equiv\triangle \mathrm{QDC}$ (SAS 합동)

⑤ $\triangle \mathrm{ABC}$와 $\triangle \mathrm{DBP}$에서

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{DBP}$, $\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{BDP}=2\angle a$

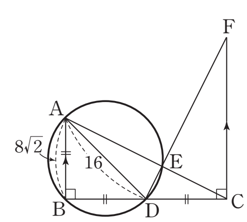
$\therefore\ \triangle \mathrm{ABC}\backsim\triangle \mathrm{DBP}$ (AA 닮음)

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

08

원의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 16π이므로

$2\pi r=16\pi\qquad\therefore\ r=8$



이때, 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}$를 그으면 $\triangle \mathrm{ABD}$는 직각이등변삼각형이므로 빗변 AD는 원의 지름과 같다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}$

$=\overline{\mathrm{AD}}\cos45^\circ$

$=16\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$

$\triangle$ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(8\sqrt{2})^2+(16\sqrt{2})^2}=\sqrt{640}=8\sqrt{10}$

한편, $\triangle$ABC와 $\triangle$DCF에서

$\overline{AB}=\overline{DC}$

$\overline{AB}/\!/\overline{CF}$이므로 $\angle ABC=\angle DCF=90^\circ$

$\square$ABDE가 원에 내접하므로 $\angle BAE=\angle FDC$

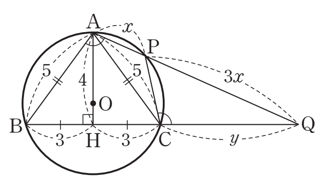
$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle DCF$ (ASA 합동)

따라서 $\overline{AC}=\overline{DF}$이므로

$\overline{AC}+\overline{DF}=2\overline{AC}=2\times8\sqrt{10}=16\sqrt{10}$ 답 $16\sqrt{10}$

09

다음 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6=3$

이므로 $\triangle$ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

네 점 A, B, C, P가 한 원 위에 있으므로

$\angle BAP=\angle PCQ$

$\triangle$BQA와 $\triangle$PQC에서

$\angle BAQ=\angle PCQ$, $\angle Q$는 공통이므로

$\triangle BQA\backsim\triangle PQC$ (AA 닮음)

이때, $\overline{AP}:\overline{PQ}=1:3$이므로 $\overline{AP}=x$, $\overline{PQ}=3x$라 하고,

$\overline{CQ}=y$라 하면

$\overline{BQ}:\overline{PQ}=\overline{AQ}:\overline{CQ}$에서

$(6+y):3x=4x:y$

$12x^2=6y+y^2$ $\quad\therefore x^2=\frac{6y+y^2}{12}$ ······㉠

한편, 직각삼각형 AHQ에서

$(3+y)^2+4^2=(4x)^2$ $\quad\therefore 25+6y+y^2=16x^2$ ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$25+6y+y^2=16\times\frac{6y+y^2}{12}$

$y^2+6y-75=0$ $\quad\therefore y=-3\pm2\sqrt{21}$

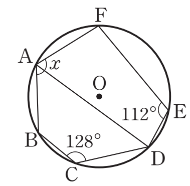
이때, $y>0$이므로 $y=-3+2\sqrt{21}$

따라서 $\overline{BQ}=6+y=6+(-3+2\sqrt{21})=3+2\sqrt{21}$이므로

$a=3$, $b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$ 답 5

10



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$를 그으면 $\square$ABCD는 원 O에 내접하므로

$\angle BAD=180^\circ-128^\circ=52^\circ$

또한, $\square$ADEF도 원 O에 내접하므로

$\angle DAF=180^\circ-112^\circ=68^\circ$

$\therefore$ $\angle x=\angle BAD+\angle DAF=52^\circ+68^\circ=120^\circ$ 답 ③

11

$\square$BCDE가 원 O에 내접하므로

$\angle BED=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

$\overline{BE}$가 원 O의 지름이므로 $\angle BDE=90^\circ$

즉, $\triangle$EBD에서

$\angle EBD=180^\circ-(70^\circ+90^\circ)=20^\circ$

$\therefore$ $\angle ABD=2\angle EBD=2\times20^\circ=40^\circ$

따라서 $\triangle$FBD에서

$\angle x=180^\circ-(40^\circ+90^\circ)=50^\circ$ 답 50°

12

$\widehat{AE}=\widehat{DE}$이므로 $\angle ABE=\angle DAE$ ······㉠

$\square$ABCE가 원 O에 내접하므로

$\angle BAE=180^\circ-\angle BCE$

$\angle BAP+\angle DAE=180^\circ-\angle BCE$

$\therefore$ $\angle BAP=180^\circ-\angle BCE-\angle DAE$

$\triangle$ABP에서 $100^\circ=\angle ABE+(180^\circ-\angle BCE-\angle DAE)$

$\therefore$ $\angle BCE=180^\circ-100^\circ$ ($\because$ ㉠)

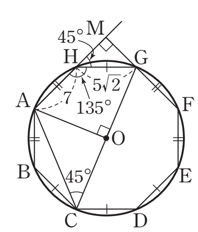
$=80^\circ$ 답 ④

13

$\angle AOB=\angle EOF=\angle FOG=\angle HOA=\angle a$,

$\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle GOH=\angle b$라 하면

$4\angle a+4\angle b=360^\circ$이므로 $\angle a+\angle b=90^\circ$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{CG}$를 그으면

$\angle AOC=\angle a+\angle b=90^\circ$

$\angle AOG=\angle a+\angle b=90^\circ$

즉, $\triangle$ACO, $\triangle$AOG는 직각이등변삼각형이고, $\square$ACGH가 원 O에 내접하므로

$\angle AHG=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

(계)

꼭짓점 G에서 $\overline{AH}$의 연장선에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\angle GHM=180^\circ-135^\circ=45^\circ$

이므로 $\triangle GMH$도 직각이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{HM}=\overline{GM}=\overline{HG}\cos 45^\circ=5\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$

$\therefore\ \overline{AM}=7+5=12$

직각삼각형 AGM에서 $\overline{AG}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$이므로

$\overline{AC}=\overline{AG}=13$

(나)

직각삼각형 ACO에서

$\overline{AO}=\overline{AC}\sin 45^\circ=13\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{13\sqrt{2}}{2}$

따라서 원 O의 지름의 길이는

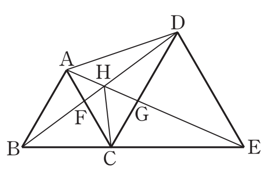
$2\overline{AO}=2\times\dfrac{13\sqrt{2}}{2}=13\sqrt{2}$

(다)

답 $13\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\angle AHG$의 크기를 구한 경우	40%
(나)	$\overline{AC}$의 길이를 구한 경우	40%
(다)	원 O의 지름의 길이를 구한 경우	20%

14



$\triangle BCD$와 $\triangle ACE$에서

$\overline{BC}=\overline{AC}$, $\overline{CD}=\overline{CE}$,

$\angle BCD=60^\circ+\angle ACD$

$=\angle ACE$

$\therefore\ \triangle BCD\equiv\triangle ACE$ (SAS 합동)

① □ABCD에서

$\angle BAC=60^\circ$

$\angle BDC=\angle AEC$ ($\because\ \triangle BCD\equiv\triangle ACE$)

$<\angle CED=60^\circ$

즉, $\angle BAC\neq\angle BDC$이므로 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

② □ABCH에서

$\angle CBH=\angle CAH$ ($\because\ \triangle BCD\equiv\triangle ACE$)

즉, □ABCH는 원에 내접한다.

③ □ACED에서

$\angle CDE=60^\circ$

$\angle CAE=\angle CBD$ ($\because\ \triangle BCD\equiv\triangle ACE$)

$<\angle ABC=60^\circ$

즉, $\angle CDE\neq\angle CAE$이므로 □ACED는 원에 내접하지 않는다.

④ □CEDH에서

$\angle HDC=\angle HEC$ ($\because\ \triangle BCD\equiv\triangle ACE$)

즉, □CEDH는 원에 내접한다.

⑤ $\triangle HBE$에서

$\angle BHE=180^\circ-(\angle HBE+\angle HEC)$

$=180^\circ-(\angle HAC+\angle HEC)$

$=180^\circ-\angle ACB$

$=120^\circ$

즉, □CGHF에서 $\angle FHG+\angle FCG=120^\circ+60^\circ=180^\circ$이므로 □CGHF는 원에 내접한다.

따라서 원에 내접하는 사각형이 아닌 것은 ①, ③이다.

답 ①, ③

15

ㄱ. $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면 $\triangle PAB$와 $\triangle PDC$에서

$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PB}:\overline{PC}=1:2$

$\angle APB=\angle DPC$ ($\because$ 맞꼭지각)

즉, $\triangle PAB\backsim\triangle PDC$ (SAS 닮음)이므로

$\angle PAB=\angle PDC$

즉, 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 □ABCD는 원에 내접한다.

ㄴ. $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면 $\triangle CDP$에서

$\angle CDP=180^\circ-(95^\circ+30^\circ)=55^\circ$

$\therefore\ \angle BAC=\angle BDC$

즉, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있으므로 □ABCD는 원에 내접한다.

ㄷ. $\angle ABC=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

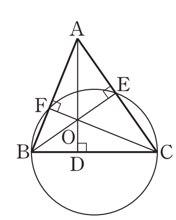
□ABCD에서 $\angle ADC$의 외각의 크기가 그 내대각, 즉 $\angle ABC$의 크기와 같지 않으므로 □ABCD는 원에 내접하지 않는다.

ㄹ. □ABCD에서 $\angle BCD$의 외각의 크기가 그 내대각의 크기와 같으므로 □ABCD는 원에 내접한다.

따라서 사각형 ABCD가 원에 내접하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ⑤

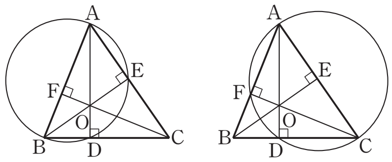
16



(i) 두 점 E, F가 직선 BC에 대하여 같은 쪽에 있고, $\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$이므로 오른쪽 그림과 같이 네 점 B, C, E, F를 지나는 원을 그릴 수 있다.

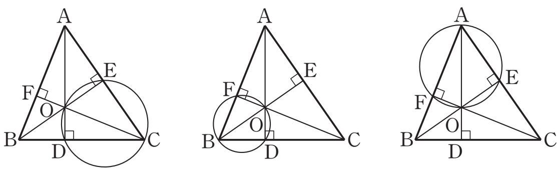
이와 같은 방법으로 다음 그림과 같이 네

점 A, B, D, E를 지나는 원, 네 점 A, F, D, C를 지나는 원을 각각 그릴 수 있다.



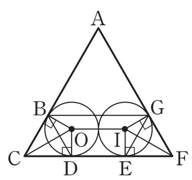
(ii) 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180°이면 그 사각형은 원에 내접한다.

즉, 다음 그림과 같이 네 점 O, D, C, E를 지나는 원, 네 점 F, B, D, O를 지나는 원, 네 점 A, F, O, E를 지나는 원을 각각 그릴 수 있다.



(i), (ii)에서 그릴 수 있는 원은 모두 6개이다. 답 6개

17



$\triangle ACF$가 정삼각형이므로

$\angle A=\angle C=\angle F=60^\circ$

$\overline{AB}=\overline{AG}$, $\overline{CB}=\overline{CD}=\overline{FE}=\overline{FG}$이므로

$\triangle ABG$, $\triangle BCD$, $\triangle EFG$는 모두 정삼각형이다. 즉,

$\angle ABG=\angle AGB=60^\circ$, $\angle CBD=\angle CDB=60^\circ$,

$\angle FEG=\angle FGE=60^\circ$

또한, 네 점 B, D, E, G는 접점이므로

$\angle OBC=\angle ODC=\angle IEF=\angle IGF=90^\circ$

$\therefore \angle GBO=\angle OBD=\angle ODB=30^\circ$,

$\angle BGI=\angle IGE=\angle IEG=30^\circ$

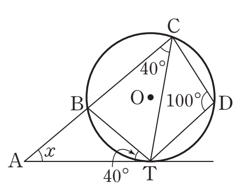
한편, $\overline{OB}=\overline{OD}=\overline{IE}=\overline{IG}$이므로

$\triangle BCO\equiv\triangle DCO\equiv\triangle EFI\equiv\triangle GFI$ (RHS 합동)

$\therefore \angle BCO=\angle DCO=\angle EFI=\angle GFI=30^\circ$

따라서 원에 내접하는 사각형은 □ODEI, □OCFI, □BCDO, □EFGI, □BOIG, □BDEG, □ACEG, □ABDF, □BCFG의 9개이다. 답 ⑤

18



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BT}$를 그으면

$\overleftrightarrow{AT}$는 원 O의 접선이므로

$\angle ATB=\angle BCT=40^\circ$

□BTDC가 원 O에 내접하므로

$\angle CBT+\angle CDT=180^\circ$

$\therefore \angle CBT=180^\circ-100^\circ=80^\circ$

$\triangle ATB$에서 $\angle x+40^\circ=80^\circ$

$\therefore \angle x=40^\circ$ 답 40°

19

$\overleftrightarrow{AT}$는 원 O의 접선이므로

$\angle ABD=\angle DAT=72^\circ$

이때, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로

$2\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$ $\quad\therefore \angle BAD=2\angle ADB$

$\triangle ABD$에서

$72^\circ+\angle ADB+\angle BAD=180^\circ$

$72^\circ+\angle ADB+2\angle ADB=180^\circ$

$3\angle ADB=108^\circ$ $\quad\therefore \angle ADB=36^\circ$

$\therefore \angle BAD=2\angle ADB=2\times 36^\circ=72^\circ$ 답 ⑤

20

$\overleftrightarrow{PQ}$는 두 원의 공통인 접선이므로

$\angle BAT=\angle BTQ$

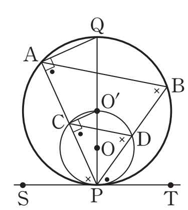
$=\angle DTP$ ($\because$ 맞꼭지각)

$=\angle DCT=65^\circ$

$\triangle ABT$에서

$\angle ATB=180^\circ-(35^\circ+65^\circ)=80^\circ$ 답 80°

21



오른쪽 그림과 같이 점 P에서 그은 두 원의 공통인 접선을 $\overleftrightarrow{ST}$라 하면

$\triangle PDC$와 $\triangle PBA$에서

$\angle PDC=\angle SPA=\angle PBA$,

$\angle PCD=\angle TPB=\angle PAB$

이므로

$\triangle PDC\backsim\triangle PBA$ (AA 닮음)

이때, $\angle SPO=\angle SPO'=90^\circ$이므로 $\overline{PO}$의 연장선이 원 O′과 만나는 점을 Q라 하면 선분 PQ는 원 O′의 지름이다.

즉, $\angle PCO'=\angle PAQ=90^\circ$

또한, $\angle CPO'$은 공통

$\therefore \triangle PCO' \backsim \triangle PAQ$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{PC}:\overline{PA}=\overline{PO'}:\overline{PQ}=6:12=1:2$

따라서 $\triangle PDC$와 $\triangle PBA$의 닮음비가 $1:2$이므로

$\triangle PDC:\triangle PBA=1^2:2^2=1:4$

그러므로 $\triangle PBA=4\triangle PDC$에서

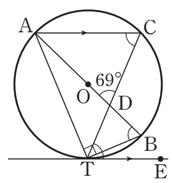
$\triangle PDC:\square ACDB=\triangle PDC:(\triangle PBA-\triangle PDC)$

$=\triangle PDC:3\triangle PDC$

$=1:3$

답 ②

22



오른쪽 그림에서

$\overline{AC} /\!/ \overline{TE}$이므로

$\angle ACT=\angle CTE$ ($\because$ 엇각)

또한, $\angle ACT=\angle ABT$

($\because \widehat{AT}$에 대한 원주각)

이므로 $\angle CTE=\angle ABT$

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle ATB=90^\circ$

직각삼각형 ATB에서

$\angle BAT=90^\circ-\angle ABT$

이때, $\overleftrightarrow{TE}$는 원 O의 접선이므로

$\angle BTE=\angle BAT$

$=90^\circ-\angle ABT$

$\therefore \angle CTB=\angle CTE-\angle BTE$

$=\angle ABT-(90^\circ-\angle ABT)$

$=2\angle ABT-90^\circ$

한편, $\triangle BDT$에서

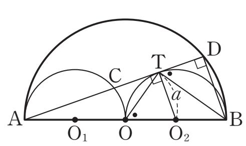
$\angle ABT+(2\angle ABT-90^\circ)+69^\circ=180^\circ$

$3\angle ABT=201^\circ \qquad \therefore \angle ABT=67^\circ$

$\therefore \angle ACD=\angle ABT=67^\circ$

답 67°

23



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$를 그으면

$\triangle AO_2T$와 $\triangle ABD$에서

$\angle TAO_2$는 공통,

$\angle ATO_2=\angle ADB=90^\circ$

$\therefore \triangle AO_2T \backsim \triangle ABD$ (AA 닮음) ……㉠

두 반원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{AO_2}=3a$, $\overline{AB}=4a$

이때, ㉠에서 $\overline{AO_2}:\overline{AB}=\overline{TO_2}:\overline{DB}$이므로

$3a:4a=a:\overline{DB}$

$3a\overline{DB}=4a^2 \qquad \therefore \overline{DB}=\frac{4}{3}a$ ($\because a>0$)

직각삼각형 AO_2T에서

$\overline{AT}=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a$ ($\because a>0$)

또한, ㉠에서 $\overline{AO_2}:\overline{AB}=\overline{AT}:\overline{AD}$이므로

$3a:4a=2\sqrt{2}a:\overline{AD}$

$3a\overline{AD}=8\sqrt{2}a^2 \qquad \therefore \overline{AD}=\frac{8\sqrt{2}}{3}a$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{DT}=\overline{AD}-\overline{AT}$

$=\frac{8\sqrt{2}}{3}a-2\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$

한편, $\overleftrightarrow{AT}$는 반원 O_2의 접선이므로

$\angle BOT=\angle BTD$

$\therefore \frac{\overline{BT}}{\overline{OT}}=\tan(\angle BOT)$

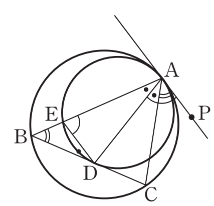
$=\tan(\angle BTD)$

$=\frac{\overline{DB}}{\overline{DT}}=\frac{\frac{4}{3}a}{\frac{2\sqrt{2}}{3}a}=\sqrt{2}$

답 ①

24 해결단계

❶ 단계	점 A에서 두 원의 공통인 접선을 그리고 접선과 현이 이루는 각을 이용하여 크기가 같은 각을 찾는다.
❷ 단계	$\overline{AD}$가 $\angle BAC$의 이등분선임을 확인한다.
❸ 단계	$\overline{BD}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 그은 두 원의 공통인 접선을 $\overleftrightarrow{AP}$라 하고 작은 원과 선분 AB가 만나는 점을 E라 하자.

$\overline{DE}$를 그으면

작은 원에서 $\angle PAD=\angle DEA$

큰 원에서 $\angle PAC=\angle CBA$

$\therefore \angle CAD=\angle PAD-\angle PAC$

$=\angle DEA-\angle CBA$

$=\angle EDB$

이때, $\overline{BD}$는 작은 원의 접선이므로

$\angle EDB=\angle EAD$

$\therefore \angle CAD=\angle EAD$

즉, $\overline{AD}$는 $\angle BAC$의 이등분선이므로 $\overline{BD}=x$라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

$12:8=x:(10-x)$

$8x=12(10-x)$, $8x=120-12x$

$20x=120$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{BD}}=x=6$ **답** 6

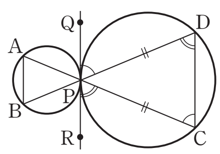
Step 3	종합 사고력 도전 문제	pp. 57~58

01 (1) 등변사다리꼴 (2) 135 **02** $125°$ **03** $20°$
04 (1) $4\sqrt{6}$ (2) $24\sqrt{2}$ **05** $115°$ **06** 131 **07** $55°$
08 $50\pi+50$

01 해결단계

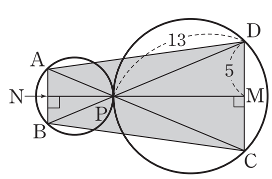
(1)	❶단계	$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$임을 확인한다.
	❷단계	□ABCD가 어떤 사각형인지 판단한다.
(2)	❸단계	□ABCD의 넓이를 구한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나고 두 원에 공통인 접선 위에 두 점 Q, R를 잡으면



$\angle\mathrm{DPQ}=\angle\mathrm{DCP}$,
$\angle\mathrm{CPR}=\angle\mathrm{CDP}$
이때, $\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}$이므로
$\angle\mathrm{DCP}=\angle\mathrm{CDP}$
$\therefore \angle\mathrm{DPQ}=\angle\mathrm{CPR}$
한편, $\angle\mathrm{BPR}=\angle\mathrm{DPQ}$ ($\because$ 맞꼭지각),
$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{CPR}$ ($\because$ 맞꼭지각)이므로
$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{BPR}$
$\therefore \angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{BPR}=\angle\mathrm{BAP}$
$\therefore \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$
즉, $\angle\mathrm{DCP}=\angle\mathrm{BAP}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{DC}}$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로 □ABCD는 등변사다리꼴이다.

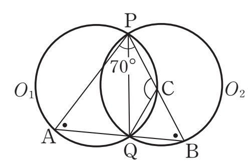
(2) $\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{CD}}$이므로 점 P를 지나고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 또는 $\overline{\mathrm{CD}}$에 수직인 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$와 만나는 점을 각각 N, M이라 하면 다음 그림과 같다.



이때, $\overline{\mathrm{DM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times10=5$이므로 직각삼각형 PMD에서
$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$
또한, $\triangle\mathrm{PAN}\backsim\triangle\mathrm{PCM}$ (AA 닮음)이므로
$\overline{\mathrm{PN}}:\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{AN}}:\overline{\mathrm{CM}}$, $\overline{\mathrm{PN}}:12=\frac{5}{2}:5$
$5\overline{\mathrm{PN}}=30$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{PN}}=6$
따라서 등변사다리꼴 ABCD의 넓이는
$$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\times(5+10)\times(6+12)$$
$$=\frac{1}{2}\times15\times18=135$$
답 (1) 등변사다리꼴 (2) 135

02 해결단계

❶단계	$\triangle\mathrm{PAB}$가 이등변삼각형임을 확인한다.
❷단계	$\angle\mathrm{PAB}$의 크기를 구한다.
❸단계	□PAQC가 원 O_1에 내접하는 사각형임을 이용하여 $\angle\mathrm{PCQ}$의 크기를 구한다.

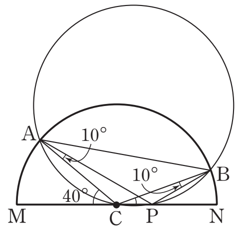


두 원 O_1, O_2는 합동이므로 원 O_1에서 $\widehat{\mathrm{PQ}}$의 길이와 원 O_2에서 $\widehat{\mathrm{PQ}}$의 길이는 같다.
길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로
$\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{PBQ}$
즉, $\triangle\mathrm{PAB}$는 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBA}=\frac{1}{2}\times(180°-70°)=55°$
한편, □PAQC는 원 O_1에 내접하므로
$\angle\mathrm{PAQ}+\angle\mathrm{PCQ}=180°$
$\therefore \angle\mathrm{PCQ}=180°-55°=125°$ **답** $125°$

03 해결단계

❶단계	네 점 A, C, P, B가 한 원 위에 있음을 확인한다.
❷단계	$\overline{\mathrm{AB}}$를 긋고 $\angle\mathrm{ABC}$의 크기를 구한다.
❸단계	$\angle\mathrm{BCP}$의 크기를 구한다.

$\triangle\mathrm{ACP}$에서 $\angle\mathrm{APC}=40°-10°=30°$
이때, $\angle\mathrm{CAP}=\angle\mathrm{CBP}=10°$이므로
네 점 A, C, P, B는 다음 그림과 같이 한 원 위에 있다.



이때, $\overline{AB}$를 그으면 네 점 A, C, P, B를 지나는 원에서

$\angle ABC = \angle APC = 30^\circ$ ($\because$ $\widehat{AC}$에 대한 원주각)

한편, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$는 반원의 반지름이므로 $\overline{CA} = \overline{CB}$

즉, $\triangle ACB$는 이등변삼각형이므로

$\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$

$\therefore$ $\angle ACB = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$

$\therefore$ $\angle BCP = 180^\circ - (\angle MCA + \angle ACB)$

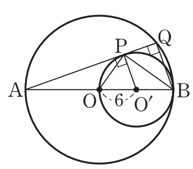
$= 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$

답 20°

04 해결단계

(1)	❶ 단계	삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{QB}$의 길이를 구한다.
	❷ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PB}$의 길이를 구한다.
(2)	❸ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{OP}$의 길이를 구한다.
	❹ 단계	$\triangle OBP$의 넓이를 구한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO'}$, $\overline{QB}$를 그으면



$\triangle PAO'$, $\triangle QAB$에서

$\angle APO' = \angle AQB = 90^\circ$,

$\angle PAO$는 공통이므로

$\triangle PAO' \backsim \triangle QAB$ (AA 닮음)

즉, $\overline{PO'} : \overline{QB} = \overline{AO'} : \overline{AB} = 18 : 24 = 3 : 4$이므로

$6 : \overline{QB} = 3 : 4$, $3\overline{QB} = 24$

$\therefore$ $\overline{QB} = 8$

직각삼각형 PAO′에서

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AO'}^2 - \overline{PO'}^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

또한, $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AO'} : \overline{AB} = 18 : 24 = 3 : 4$이므로

$12\sqrt{2} : \overline{AQ} = 3 : 4$, $3\overline{AQ} = 48\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{AQ} = 16\sqrt{2}$

$\therefore$ $\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = 16\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

즉, 직각삼각형 QPB에서

$\overline{PB} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QB}^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

(2) $\overline{OB}$는 원 O′의 지름이므로 $\angle OPB = 90^\circ$

따라서 직각삼각형 OBP에서

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{PB}^2} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{6})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$ $\triangle OBP = \dfrac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{PB}$

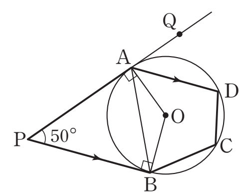
$= \dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{6} = 24\sqrt{2}$

답 (1) $4\sqrt{6}$ (2) $24\sqrt{2}$

05 해결단계

❶ 단계	네 점 A, B, C, D를 지나는 원을 그리고 그 중심 O에 대하여 $\angle AOB$의 크기를 구한다.
❷ 단계	$\angle DAB$의 크기를 구한다.
❸ 단계	원에 내접하는 사각형의 성질을 이용하여 $\angle C$의 크기를 구한다.

다음 그림과 같이 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$에 접하면서 네 점 A, B, C, D를 지나는 원의 중심을 O라 하고, $\overline{PA}$의 연장선 위의 점을 Q라 하자.



□APBO에서

$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$이므로

$\angle AOB = 180^\circ - \angle APB$

$= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

$\triangle OAB$는 $\overline{AO} = \overline{BO}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAB = \dfrac{1}{2} \times (180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$

한편, $\overline{AD} /\!/ \overline{PB}$이므로

$\angle QAD = \angle APB = 50^\circ$ ($\because$ 동위각)

$\therefore$ $\angle DAO = 90^\circ - \angle QAD$

$= 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

따라서 $\angle DAB = \angle OAB + \angle DAO = 25^\circ + 40^\circ = 65^\circ$이고

□ABCD는 원에 내접하므로

$\angle C = 180^\circ - \angle DAB$

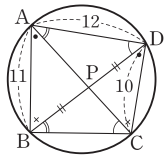
$= 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

답 115°

06 해결단계

❶ 단계	네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있음을 이용하여 크기가 같은 각을 표시한다.
❷ 단계	삼각형의 닮음을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	p, q의 값을 각각 구하고 $p+q$의 값을 구한다.

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 크기가 같은 각을 표시하면 다음 그림과 같다.



$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하면

$\triangle APB \backsim \triangle DPC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{AB} : \overline{DC} = 11 : 10$

$\overline{PA} = 11a$ $(a>0)$라 하면 $\overline{PD} = 10a$

이때, $\overline{PB} = \overline{PD}$이므로 $\overline{PB} = 10a$

또한, $\triangle APD \backsim \triangle BPC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AD} : \overline{BC} = \overline{PA} : \overline{PB} = 11a : 10a = 11 : 10$

즉, $12 : \overline{BC} = 11 : 10$이므로 $11\overline{BC} = 120$

$\therefore \overline{BC} = \dfrac{120}{11}$

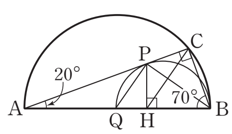
따라서 $p=11$, $q=120$이므로

$p+q=11+120=131$ 답 131

07 해결단계

❶ 단계	∠CPH의 크기를 구한다.
❷ 단계	두 직각삼각형 CBP, HPB가 합동임을 보인다.
❸ 단계	∠CHB의 크기를 구한다.

작은 반원의 지름의 나머지 한 끝 점을 Q라 하고 $\overline{PQ}$, $\overline{PB}$, $\overline{BC}$를 그으면 오른쪽 그림과 같다.



$\triangle ABC$에서 $\angle ACB = 90^\circ$이므로

$\angle ABC = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$

즉, □PHBC에서 $\angle CPH = 360^\circ - (90^\circ + 70^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$

한편, $\angle PBQ = \angle x$라 하면 $\overline{AC}$는 작은 반원의 접선이므로

$\angle APQ = \angle PBQ = \angle x$

이때, $\angle BPQ = 90^\circ$이므로 $\triangle APB$에서

$20^\circ + (\angle x + 90^\circ) + \angle x = 180^\circ$

$2\angle x = 70^\circ$ $\quad \therefore \angle x = 35^\circ$

$\therefore \angle CBP = 70^\circ - \angle x = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$

두 직각삼각형 CPB, HPB에서

$\overline{PB}$는 공통, $\angle CBP = \angle HBP = 35^\circ$이므로

$\triangle CPB \equiv \triangle HPB$ (RHA 합동)

$\therefore \angle CPB = \dfrac{1}{2}\angle CPH = \dfrac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$

이때, $\angle PCB + \angle PHB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$에서

□PHBC가 원에 내접하므로

$\angle CHB = \angle CPB = 55^\circ$ 답 55°

08 해결단계

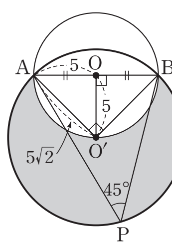
❶ 단계	점 P가 직선 AB의 아래쪽(또는 위쪽)에 있을 때, 점 P가 나타내는 영역을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 영역의 넓이를 구한다.
❸ 단계	점 P가 나타내는 영역의 최대 넓이를 구한다.

$\overline{AB}$의 중점을 O라 하고 직선 AB의 아래쪽에 점 P가 있다고 하자.

$\angle APB = 90^\circ$인 점 P는 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가

$\overline{AO} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2} \times 10 = 5$인 원 위의 점이다.

또한, 다음 그림과 같이 $\angle APB = 45^\circ$인 점 P는 중심각의 크기가 90°인 호 AB를 포함하는 원 O′ 위의 점이므로 직선 AB의 아래쪽에서 점 P가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, $\angle AO'B = 90^\circ$이고 점 O′은 현 AB의 수직이등분선 위에 있으므로 현 AB의 수직이등분선과 원 O의 교점이다.

$\triangle AO'B$는 $\overline{AB}$가 빗변인 직각이등변삼각형이므로 원 O′의 반지름의 길이는

$\overline{AO'} = \overline{BO'} = \dfrac{\overline{AO}}{\cos 45^\circ} = \dfrac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$

(ⅰ) 반지름이 $\overline{AO'}$이고, 중심각의 크기가 270°인 부채꼴의 넓이는

$\pi \times (5\sqrt{2})^2 \times \dfrac{270}{360} = \dfrac{75}{2}\pi$

(ⅱ) 현 O′A와 호 O′A로 이루어진 활꼴과 현 O′B와 호 O′B로 이루어진 활꼴의 넓이의 합은

(반지름의 길이가 5인 반원의 넓이) $- \triangle AO'B$

$= \dfrac{1}{2} \times \pi \times 5^2 - \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5 = \dfrac{25}{2}\pi - 25$

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 AB의 아래쪽에 있는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는

$\dfrac{75}{2}\pi - \left(\dfrac{25}{2}\pi - 25\right) = 25\pi + 25$

점 P가 직선 AB의 위쪽에 있는 경우도 같은 방법으로 구할 수 있으므로 점 P가 나타내는 영역의 최대 넓이는

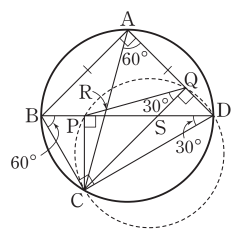
$2(25\pi+25)=50\pi+50$ 답 $50\pi+50$

미리보는 학력평가 p. 59

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 $\frac{9}{4}$

1

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$와 $\overline{CQ}$의 교점을 S라 하자.



□ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BCD=180^\circ-\angle BAD$

$=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

직각삼각형 BCD에서

$\angle BDC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

한편, $\angle CPD=\angle CQD=90^\circ$이므로 □PCDQ는 선분 CD를 지름으로 하는 원에 내접하는 사각형이다.

이때, 새로 그린 원에서

$\angle PQC=\angle PDC=30^\circ$ ($\because$ $\overparen{PC}$에 대한 원주각)이므로

$\angle AQR=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

또한, 처음 원에서

$\angle CAD=\angle CBD=60^\circ$ ($\because$ $\overparen{CD}$에 대한 원주각)

이므로 △ARQ는 정삼각형이다.

한편, △ABD는 직각이등변삼각형이고

$\overline{BD}=4+4=8$이므로

$\overline{AD}=\overline{BD}\cos 45^\circ=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{BC}=\overline{BD}\cos 60^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore \overline{BP}=\overline{BC}\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

새로 그린 원에서

$\angle PCQ=\angle PDQ=45^\circ$ ($\because$ $\overparen{PQ}$에 대한 원주각)

이므로 △PCS와 △SDQ는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{PS}=\overline{PC}=\overline{BC}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{SD}=8-(2+2\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}$

직각삼각형 SDQ에서

$\overline{QD}=\overline{SD}\cos 45^\circ=(6-2\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

△ARQ가 정삼각형이므로

$\overline{QR}=\overline{AQ}$

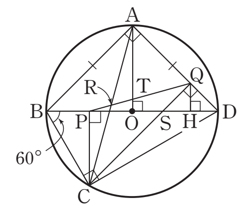
$=\overline{AD}-\overline{QD}$

$=4\sqrt{2}-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ 답 ③

| 다른풀이 |

$\angle A=90^\circ$이므로 $\overline{BD}$는 원의 지름이고 $\angle C=90^\circ$이다.

원의 중심을 O, 점 Q에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BD}$와 $\overline{CQ}$의 교점을 S, $\overline{PQ}$와 $\overline{AO}$의 교점을 T라 하자.



직각삼각형 BCD에서 $\overline{BD}=4+4=8$이므로

$\overline{BC}=\overline{BD}\cos 60^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$

직각삼각형 BCP에서 $\overline{BC}=4$이므로

$\overline{BP}=\overline{BC}\cos 60^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$,

$\overline{PC}=\overline{BC}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

이때, $\overline{PO}=4-\overline{BP}=4-2=2$이고

$\angle PSC=\angle QSD$ ($\because$ 맞꼭지각)

$=90^\circ-\angle QDS$

$=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

즉, △PCS는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PS}=\overline{PC}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{SD}=\overline{BD}-(\overline{BP}+\overline{PS})$

$=8-(2+2\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}$

즉, $\overline{QH}=\overline{SH}=\frac{1}{2}\overline{SD}=\frac{1}{2}(6-2\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$이므로

$\overline{PH}=2\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})=3+\sqrt{3}$

직각삼각형 PHQ에서

$\overline{PQ}^2=\overline{PH}^2+\overline{QH}^2=(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2=24$

$\therefore \overline{PQ}=2\sqrt{6}$ ($\because \overline{PQ}>0$)

한편, △POT∽△PHQ (AA 닮음)이므로

(i) $\overline{PO}:\overline{PH}=\overline{PT}:\overline{PQ}$에서

$2:(3+\sqrt{3})=\overline{PT}:2\sqrt{6}$

$(3+\sqrt{3})\overline{PT}=4\sqrt{6}$

$\therefore \overline{PT}=\frac{4\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

(ii) $\overline{PO}:\overline{PH}=\overline{TO}:\overline{QH}$에서

$2:(3+\sqrt{3})=\overline{TO}:(3-\sqrt{3})$

$(3+\sqrt{3})\overline{TO}=2(3-\sqrt{3})$

$\therefore \overline{TO}=\frac{2(3-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서

$\overline{AT}=\overline{AO}-\overline{TO}=4-(4-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

△CRP, △ART에서

$\overline{CP}=2\sqrt{3}=\overline{AT}$, $\overline{CP}/\!/\overline{AT}$에서

$\angle PCR=\angle TAR$ ($\because$ 엇각), $\angle CRP=\angle ART$ ($\because$ 엇각)

즉, $\triangle CRP\equiv\triangle ART$ (ASA 합동)이므로 $\overline{PR}=\overline{TR}$

$\therefore \overline{PR}=\frac{1}{2}\overline{PT}=\frac{1}{2}(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

$\therefore \overline{QR}=\overline{PQ}-\overline{PR}=2\sqrt{6}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

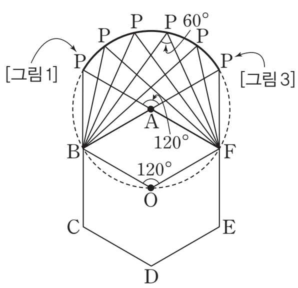
2

정육각형 ABCDEF의 대각선의 교점을 O라 하면

$\angle BOF=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$

이때, $\angle BPF=60^\circ$이므로 □BOFP의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

즉, □BOFP는 중심이 A이고 반지름이 $\overline{AB}$인 원에 내접한다.



이때, [그림 1]의 상태에서 $\angle BAP=60^\circ$이고, [그림 3]의 상태에서 $\angle PAF=60^\circ$이므로 점 P가 움직이면서 그리는 호에 대한 중심각의 크기는 120°이다.

따라서 점 P가 움직인 거리는

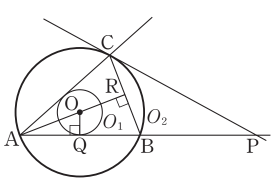
$2\pi\times1\times\frac{120}{360}=\frac{2}{3}\pi$ 답 ⑤

3

ㄱ. 다음 그림과 같이 직선 AB가 원 O_1과 접하는 점을 Q라 하면 직각삼각형 OAQ에서

$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OQ}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$

$=2\sqrt{2}$



원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 점 Q는 현 AB의 중점이다.

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AQ}=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

ㄴ. 점 A에서 현 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AR}$는 원 O_1, O_2의 중심 O를 지난다.

즉, $\overline{AR}$는 $\overline{BC}$를 이등분하므로

$\overline{BR}=\overline{CR}$

$\triangle AQO$와 $\triangle ARB$에서

$\angle OAQ$는 공통, $\angle OQA=\angle BRA=90^\circ$이므로

$\triangle AQO\backsim\triangle ARB$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{AB}:\overline{BR}=\overline{AO}:\overline{OQ}=3:1$

이때, $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{CB}=2\overline{BR}$이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$

한편, $\overleftrightarrow{PC}$가 원의 접선이므로 $\angle CAP=\angle BCP$

따라서 $\triangle ACP$와 $\triangle CBP$에서

$\angle BPC$는 공통, $\angle CAP=\angle BCP$이므로

$\triangle ACP\backsim\triangle CBP$ (AA 닮음)

$\therefore \overline{AP}:\overline{CP}=\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$

ㄷ. $\overline{BP}=x$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}+\overline{BP}=4\sqrt{2}+x$ ($\because$ ㄱ)

이때, $\triangle ACP\backsim\triangle CBP$이므로

$\overline{CP}:\overline{BP}=\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$ ($\because$ ㄴ)

즉, $\overline{CP}:x=3:2$에서 $\overline{CP}=\frac{3}{2}x$

ㄴ에서 $\overline{AP}:\overline{CP}=3:2$이므로

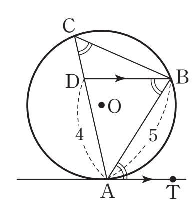
$(4\sqrt{2}+x):\frac{3}{2}x=3:2$

$2(4\sqrt{2}+x)=\frac{9}{2}x$, $\frac{5}{2}x=8\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BP}=x=\frac{16\sqrt{2}}{5}$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

4



$\overleftrightarrow{AT}$가 원 O의 접선이므로

$\angle BCA=\angle BAT$

이때, $\overline{BD}/\!/\overline{AT}$이므로

$\angle BAT=\angle ABD$ ($\because$ 엇각)

$\therefore \angle BCA=\angle ABD$

$\triangle CAB$와 $\triangle BAD$에서

$\angle BAC$는 공통, $\angle ACB=\angle ABD$이므로

$\triangle CAB\backsim\triangle BAD$ (AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AB}$이므로

$5:4=\overline{AC}:5$, $4\overline{AC}=25$ $\quad\therefore \overline{AC}=\frac{25}{4}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{AC}-\overline{AD}=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

III 통계

06 대푯값과 산포도

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 63

01 ② 02 ② 03 3.8 04 ④
05 평균 : 20, 분산 : 81, 표준편차 : 9 06 ③

01

민희네 반 학생 수는 20명이고, 윗몸 일으키기 횟수를 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때 10번째인 값은 37회, 11번째인 값은 38회이다.

즉, (중앙값)$=\frac{37+38}{2}=37.5$(회)이므로

$a=37.5$

한편, 42회를 한 학생이 가장 많으므로 최빈값은 42회이다.

$\therefore b=42$

$\therefore b-a=42-37.5=4.5$ **답** ②

blacklabel 특강 참고

줄기와 잎 그림에서 대푯값 구하기

줄기와 잎 그림은 줄기와 잎을 이용하여 자료를 나타낸 것으로 각 변량을 줄기와 잎으로 나누어 크기가 작은 값부터 순서대로 나열하여 그린다. 이때, 변량이 크기순으로 나열되어 있으므로 중앙값을 찾을 때 편리하다.

02

최빈값이 존재하려면 x의 값이 45, 57, 30, 49, 62, 51 중 하나이어야 하고 최빈값은 x분이므로

$$\frac{45+57+30+49+62+51+x}{7}=x$$

$294+x=7x$, $6x=294$

$\therefore x=49$ **답** ②

| 다른풀이 |

최빈값이 존재하려면 x의 값이 45, 57, 30, 49, 62, 51 중 하나이어야 하고 최빈값, 즉 평균은 x분이다.

따라서 x분을 제외한 나머지 변량의 평균과 자료 전체의 평균은 같다.

즉, x분을 제외한 나머지 변량의 평균을 구하면

$$\frac{45+57+30+49+62+51}{6}=49(\text{분})$$

$\therefore x=49$

03

사과의 전체 개수가 y개이므로

$4+x+8+3=y$ $\therefore x+15=y$ ······㉠

사과의 당도의 평균이 13 Brix이므로

$$\frac{10\times4+12\times x+14\times8+16\times3}{y}=13$$

$\therefore 12x+200=13y$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=20$

따라서 사과의 당도의 분산은

$$\frac{(10-13)^2\times4+(12-13)^2\times5+(14-13)^2\times8+(16-13)^2\times3}{20}$$

$=\frac{76}{20}=3.8$ **답** 3.8

blacklabel 특강 풀이첨삭

표로 주어진 자료의 변량을 나열하면 다음과 같다.

당도(Brix)	개수(개)
10	4
12	5
14	8
16	3
합계	20

⇨

10	10	10	10	12
12	12	12	12	14
14	14	14	14	14
14	14	16	16	16

즉, 위의 자료의 평균을 구하면

$$\frac{10\times4+12\times5+14\times8+16\times3}{20}=\frac{260}{20}=13(\text{Brix})$$

04

남학생 30명과 여학생 20명의 점수의 평균이 85점으로 같으므로 전체 학생 50명의 점수의 평균도 85점이다.

남학생 30명 점수의 편차의 제곱의 합을 A라 하면 표준편차가 5점, 즉 분산이 $5^2=25$이므로

$\frac{A}{30}=25$ $\therefore A=750$

여학생 20명 점수의 편차의 제곱의 합을 B라 하면 표준편차가 $2\sqrt{5}$점, 즉 분산이 $(2\sqrt{5})^2=20$이므로

$\frac{B}{20}=20$ $\therefore B=400$

따라서 전체 학생 50명 점수의 편차의 제곱의 합은

$A+B=750+400=1150$이므로

$(분산)=\dfrac{A+B}{50}=\dfrac{1150}{50}=23$

$\therefore$ (표준편차)$=\sqrt{23}$(점)

답 ④

blacklabel 특강 참고

평균이 같은 두 집단 전체의 표준편차

평균이 같은 두 집단 A, B의 도수가 각각 a, b이고 표준편차가 각각 x, y일 때, A, B 두 집단 전체의 표준편차는 다음과 같다. 즉,

$$\sqrt{\frac{(\text{편차})^2\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}}}=\sqrt{\frac{ax^2+by^2}{a+b}}$$

05

세 변량 x, y, z의 평균이 7이므로

$\dfrac{x+y+z}{3}=7 \quad \therefore x+y+z=21 \quad \cdots\cdots ㉠$

표준편차가 3, 즉 분산이 $3^2=9$이므로

$\dfrac{(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2}{3}=9$

$\therefore (x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=27 \quad \cdots\cdots ㉡$

따라서 세 변량 $3x-1$, $3y-1$, $3z-1$의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하면

$$\begin{aligned}(\text{평균})&=\frac{(3x-1)+(3y-1)+(3z-1)}{3}\\&=\frac{3(x+y+z)-3}{3}\\&=\frac{3\times21-3}{3}\ (\because ㉠)\\&=20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\frac{(3x-21)^2+(3y-21)^2+(3z-21)^2}{3}\\&=\frac{9(x-7)^2+9(y-7)^2+9(z-7)^2}{3}\\&=3\{(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2\}\\&=3\times27\ (\because ㉡)\\&=81\end{aligned}$$

(표준편차)$=\sqrt{81}=9$

답 평균 : 20, 분산 : 81, 표준편차 : 9

06

표준편차가 작을수록 변량이 평균을 중심으로 모여 있으므로 자료의 분포 상태가 고르다고 할 수 있다.

따라서 다섯 학급 중 수학 점수가 가장 고른 학급은 표준편차가 가장 작은 3반이다.

답 ③

Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 64~68

01 ①, ③	**02** ②, ④	**03** ③	**04** 60 kg	**05** ⑤
06 11	**07** 36	**08** ⑤	**09** 6, 20	**10** ①
11 ③	**12** $\sqrt{3}$점	**13** ①, ③	**14** 8	**15** $2\sqrt{11}$
16 6	**17** ④	**18** ⑤	**19** 110	**20** 9.6
21 39	**22** $m=4$, $V=5$	**23** $\frac{26}{3}$	**24** ②	
25 ⑤	**26** ③	**27** ④	**28** ①	

01

① A, B 두 모둠의 학생이 일주일 동안 매점에서 구입한 음료수의 개수의 평균을 각각 m_A개, m_B개라 하면

$$\begin{aligned}m_A&=\frac{0\times3+1\times2+2\times4+3\times5+4\times0+5\times1}{15}\\&=\frac{30}{15}=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_B&=\frac{0\times2+1\times1+2\times2+3\times4+4\times1+5\times0}{10}\\&=\frac{21}{10}=2.1\end{aligned}$$

즉, A모둠의 평균이 B모둠의 평균보다 작다.

② A모둠의 학생이 일주일 동안 매점에서 구입한 음료수의 개수는 3개가 5명으로 가장 많으므로 최빈값은 3개이다.

③ A모둠의 학생이 일주일 동안 매점에서 구입한 음료수의 개수를 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때 8번째인 값은 2개이다. 즉, 중앙값은 2개이다.

④ B모둠의 학생이 일주일 동안 매점에서 구입한 음료수의 개수는 3개가 4명으로 가장 많으므로 최빈값은 3개이다.

⑤ B모둠의 학생이 일주일 동안 매점에서 구입한 음료수의 개수를 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때, 5번째인 값은 2개, 6번째인 값은 3개이다. 즉, 중앙값은 $\dfrac{2+3}{2}=2.5$(개)이다.

따라서 옳은 것은 ①, ③이다.

답 ①, ③

02

① 자료의 개수가 짝수인 경우, 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열한 뒤 가운데에 있는 두 값의 평균을 중앙값으로 하므로 중앙값은 자료의 값 중에 존재하지 않을 수도 있다.

③ 최빈값은 자료에 따라 존재하지 않을 수도 있고 2개 이상일 수도 있다.

⑤ 최빈값은 자료의 개수가 적은 경우에 자료의 중심적인 경향을 잘 반영하지 못할 수도 있다.

따라서 옳은 것은 ②, ④이다.

답 ②, ④

03

ㄱ. 변량 중 20이 3개이고 나머지는 모두 1개씩이다. 즉, 주어진 10개의 변량에 한 개의 변량이 추가되어도 20이 가장 많으므로 최빈값은 20으로 변하지 않는다.

ㄴ. 주어진 변량의 평균은

$$\frac{20+17+10+20+28+20+18+25+14+30}{10}=\frac{202}{10}=20.2$$

이므로 추가되는 한 개의 변량이 20.2이면 평균은 변하지 않지만 20.2가 아니면 평균은 변한다.

ㄷ. 주어진 10개의 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

10, 14, 17, 18, 20, 20, 20, 25, 28, 30

이므로 이들의 중앙값은 $\frac{20+20}{2}=20$이다.

이때, 한 개의 변량이 추가되면 변량의 개수는 11개이고, 11개의 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때 6번째인 값은 추가된 변량의 값에 관계없이 20이므로 중앙값은 변하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

04

A, B, C, D 네 명의 학생의 몸무게를 각각 a kg, b kg, c kg, d kg이라 하자.

A와 B의 몸무게의 평균이 64 kg이므로

$\frac{a+b}{2}=64$ $\quad\therefore a+b=128$ ……㉠

B와 C의 몸무게의 평균이 69 kg이므로

$\frac{b+c}{2}=69$ $\quad\therefore b+c=138$ ……㉡

C와 D의 몸무게의 평균이 65 kg이므로

$\frac{c+d}{2}=65$ $\quad\therefore c+d=130$ ……㉢

㉠+㉢을 하면

$a+b+c+d=258$ ……㉣

㉡을 ㉣에 대입하면

$a+138+d=258$ $\quad\therefore a+d=120$

따라서 A와 D의 몸무게의 평균은

$\frac{a+d}{2}=\frac{120}{2}=60(\text{kg})$ 답 60 kg

05

자료의 개수가 9개이므로 중앙값은 자료를 작은 값 또는 큰 값부터 크기순으로 나열하였을 때 5번째인 값이다.

(ⅰ) $6<a<b$일 때,

a, b가 자연수이므로 $a\geq7$이고 주어진 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

1, 3, 5, 7, 7, 7, a, …

이때, 5번째 값은 7이므로 $x=7$

(ⅱ) $a<b<6$일 때,

a, b가 자연수이므로 $b\leq5$이고 주어진 자료를 큰 값부터 크기순으로 나열하면

10, 7, 7, 7, 5, …, 1

이때, 5번째 값은 5이므로 $y=5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=7$, $y=5$이므로

$x-y=7-5=2$ 답 ⑤

06

평균이 11이므로

$\frac{a+6+10+b+8+16+6+c+14}{9}=11$

$a+b+c+60=99$ $\quad\therefore a+b+c=39$ ……㉠

한편, 주어진 자료 중 6이 2개 있고 최빈값이 14이므로 a, b, c의 값 중 적어도 2개는 14이어야 한다.

그런데 $a=b=c=14$이면 ㉠을 만족시키지 않으므로 a, b, c의 값 중 2개만 14이다.

이때, a, b, c의 값 중 나머지 한 값은 ㉠에서

$39-14-14=11$

주어진 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

6, 6, 8, 10, 11, 14, 14, 14, 16

따라서 중앙값은 5번째인 값이므로 11이다. 답 11

07

5개의 변량 8, 10, 14, 16, x의 평균은

$\frac{8+10+14+16+x}{5}=\frac{48+x}{5}$

(ⅰ) $x\leq10$일 때, 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

x, 8, 10, 14, 16 또는 8, x, 10, 14, 16

즉, 중앙값은 10이므로

$\frac{48+x}{5}=10$, $48+x=50$

$\therefore x=2$

(ⅱ) $10<x<14$일 때, 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

8, 10, x, 14, 16이므로 중앙값은 x이다.

즉, $\frac{48+x}{5}=x$이므로 $48+x=5x$

$4x=48$ $\quad\therefore x=12$

(iii) $x\geq 14$일 때, 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

8, 10, 14, x, 16 또는 8, 10, 14, 16, x

즉, 중앙값은 14이므로

$\frac{48+x}{5}=14$, $48+x=70$

$\therefore x=22$

(i), (ii), (iii)에서 x의 값은 2, 12, 22이므로 그 합은

$2+12+22=36$ 답 36

08

ㄱ. 다섯 번째까지 본 수학 시험 점수의 평균이 84점이므로 그 총점은 $84\times 5=420$(점)이다.

이때, 여섯 번째까지 본 수학 시험 점수의 평균이 86점이므로

$\frac{420+a}{6}=86$, $420+a=516$

$\therefore a=96$

ㄴ. 다섯 번째까지 본 수학 시험 점수의 중앙값은 86점, 최빈값은 87점뿐이므로 다섯 번째까지 본 시험 점수를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

x점, y점, 86점, 87점, 87점 (단, $x<y<86$)과 같이 나타낼 수 있다.

이때, 일곱 번째까지 본 시험 점수의 최빈값이 87점이 아니려면 x점, y점, 86점 중 하나의 점수가 3번 나와야 한다.

즉, $a=b=x$ 또는 $a=b=y$ 또는 $a=b=86$이어야 하므로

$a=b$

ㄷ. 다섯 번째까지 본 수학 시험 점수의 평균이 84점이므로 그 총점은 420점이고 일곱 번째까지 본 시험 점수의 평균이 87점이므로

$\frac{420+a+b}{7}=87$, $420+a+b=609$

$\therefore a+b=189$

이때, 이 시험의 만점이 100점이므로 a, b는 모두 89보다 크거나 같다.

따라서 중앙값은 87점이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

09

주어진 7개의 자료의 평균은

$(\text{평균})=\frac{5+12+a+5+9+5+7}{7}=\frac{43+a}{7}$

a를 제외한 나머지 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, 5, 5, 7, 9, 12

이때, 5가 3개 있으므로 a의 값에 관계없이 최빈값은 항상 5이고, 평균, 중앙값, 최빈값이 모두 다르므로 중앙값은 7 또는 a이다.

(i) 중앙값이 7, 즉 $a\geq 7$일 때,

평균, 중앙값, 최빈값을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, 7, $\frac{43+a}{7}$

가운데 위치한 값은 나머지 두 값의 평균과 같으므로

$\frac{5+\frac{43+a}{7}}{2}=7$

$\frac{43+a}{7}=9$, $43+a=63$ $\quad\therefore a=20$

(ii) 중앙값이 a, 즉 $5<a\leq 7$일 때,

평균, 중앙값, 최빈값을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, a, $\frac{43+a}{7}$

가운데 위치한 값은 나머지 두 값의 평균과 같으므로

$\frac{5+\frac{43+a}{7}}{2}=a$

$\frac{43+a}{7}=2a-5$, $43+a=14a-35$

$13a=78$ $\quad\therefore a=6$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 6, 20이다. 답 6, 20

blacklabel 특강 풀이첨삭

a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a\leq 5$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

a, 5, 5, 5, 7, 9, 12 ⇨ (중앙값)$=5$

그런데 (최빈값)$=5$이므로 평균, 중앙값, 최빈값이 모두 다르다는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $5<a\leq 7$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, 5, 5, a, 7, 9, 12 ⇨ (중앙값)$=a$

(iii) $a\geq 7$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, 5, 5, 7, a, 9, 12 또는 5, 5, 5, 7, 9, a, 12 또는 5, 5, 5, 7, 9, 12, a

⇨ (중앙값)$=7$

한편, (ii)에서 $5<a\leq 7$이면 (평균)$=\frac{43+a}{7}>a$이고

(iii)에서 $a\geq 7$이면 (평균)$=\frac{43+a}{7}>7$이므로

(최빈값)<(중앙값)<(평균)임을 알 수 있다.

10

11명으로 이루어진 농구팀에 한 선수가 전학을 가고, 다른 한 선수가 전학을 온 후 키의 평균이 2 cm 증가하였으므로

(전학 온 선수의 키)−(전학 간 선수의 키)$=2\times 11$

$=22$(cm)

이때, 전학 온 선수의 키가 180 cm이므로
(전학 간 선수의 키) $=180-22=158$ (cm)
즉, 키가 158 cm인 선수가 전학을 가고 키가 180 cm인 선수가 전학을 왔다.
전학을 가기 전 농구팀의 키의 중앙값이 178 cm이었는데 중앙값보다 작은 키의 선수가 빠지고 중앙값보다 큰 키의 선수가 들어왔으므로 새로운 중앙값은 178 cm 이상이다.
또한, 전학 온 선수의 키가 180 cm이므로 m의 값의 범위는
$178 \leq m \leq 180$

답 ①

blacklabel 특강 오답피하기

키가 작은 한 선수가 전학을 가고 키가 큰 한 선수가 전학을 와서 평균이 증가하였음을 알 수 있다. 이때, 평균과 중앙값 모두 자료 전체의 중심적인 경향을 나타내는 대푯값이므로 새로운 중앙값 역시 이전과 같거나 더 큰 값을 갖는다. 이것을 고려하면 선택지의 ③, ④, ⑤는 바로 제외하고 접근할 수 있다.

11 해결단계

❶ 단계	평균이 75점 이하임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	x의 값의 범위를 나누어 중앙값이 74점이 되는 경우를 찾는다.
❸ 단계	자연수 x의 개수를 구한다.

네 번의 쪽지 시험 점수의 평균이 75점 이하이므로
$\frac{77+65+71+x}{4} \leq 75$, $213+x \leq 300$
$\therefore x \leq 87$
(i) $x \leq 65$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면
x, 65, 71, 77
그런데 중앙값이 $\frac{65+71}{2}=68$(점)이므로 중앙값이 74점이라는 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $65 < x \leq 77$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면
65, x, 71, 77 또는 65, 71, x, 77
이때, 중앙값이 74점이므로 $\frac{x+71}{2}=74$
$x+71=148$ $\therefore x=77$
(iii) $77 < x \leq 87$일 때, 자료를 작은 값부터 크기순으로 나열하면
65, 71, 77, x
이때, 중앙값은 $\frac{71+77}{2}=74$(점)
$\therefore x=78, 79, 80, \cdots, 87$
(i), (ii), (iii)에서 자연수 x는 77, 78, 79, ⋯, 87의 11개이다.

답 ③

12

서현이가 이번 달에 치른 3회의 수행평가 점수의 평균은
$\frac{13+15+14}{3}=14$(점)
즉, 최근 3회의 평균이 지난 세 달 동안 치른 7회의 평균과 같으므로 지금까지 치른 10회의 수행평가 점수의 평균도 14점이다.
지난 세 달 동안 치른 7회의 수행평가 점수의 표준편차가 2점, 즉 분산이 4이므로 7회 동안 수행평가 점수의 편차의 제곱의 합을 A라 하면
$\frac{A}{7}=4$ $\therefore A=28$
이번 달에 치른 3회의 수행평가 점수의 편차의 제곱의 합은
$(13-14)^2+(15-14)^2+(14-14)^2=1+1+0=2$
즉, 지금까지 치른 10회의 수행평가 점수의 편차의 제곱의 합은 $28+2=30$이므로 분산은 $\frac{30}{10}=3$이다.
따라서 지금까지 치른 10회의 수행평가 점수의 표준편차는 $\sqrt{3}$점이다.

답 $\sqrt{3}$점

13

② 분산이 클수록 자료는 평균에서 멀리 떨어져 있다.
③ 모든 변량이 평균과 같을 때, 즉 모든 변량의 편차가 0일 때 $(\text{편차})^2=0$이므로 $(\text{편차})^2$의 평균인 분산도 0이다.
④ (편차)=(변량)−(평균)
⑤ 분산이 작을수록 분포 상태가 고르다고 할 수 있다.
따라서 옳은 것은 ①, ③이다.

답 ①, ③

14

한 변의 길이가 5인 정사각형의 이웃한 두 변을 각각 간격이 같게 나누었으므로 크기가 가장 작은 조각의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이이므로 $1^2=1$
크기가 두 번째로 작은 조각의 넓이는 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이에서 크기가 가장 작은 조각의 넓이를 빼면 되므로
$2^2-1=3$
크기가 세 번째로 작은 조각의 넓이는 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이를 빼면 되므로 $3^2-2^2=5$
같은 방법으로 나머지 두 조각의 넓이는 크기순으로
$4^2-3^2=7$, $5^2-4^2=9$
따라서 5개의 조각의 넓이는 1, 3, 5, 7, 9이므로
$(\text{평균})=\frac{1+3+5+7+9}{5}=\frac{25}{5}=5$

$\therefore$ (분산)$=\dfrac{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5}$

$=\dfrac{40}{5}=8$

답 8

15

$a+b+c+d+e=30$이므로 5개의 변량 a, b, c, d, e의 평균은

$\dfrac{30}{5}=6$

또한, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=400$이므로 분산은

$\dfrac{(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(d-6)^2+(e-6)^2}{5}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-12(a+b+c+d+e)+180}{5}$

$=\dfrac{400-12\times30+180}{5}$ $(\because a+b+c+d+e=30)$

$=\dfrac{220}{5}=44$

따라서 구하는 표준편차는

$\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

답 $2\sqrt{11}$

16

주어진 변량 8개의 평균이 4이므로

$\dfrac{1+3+4+x+y+5+6+8}{8}=4$

$x+y+27=32$ $\quad\therefore x+y=5$ $\quad\cdots\cdots$㉠

(가)

또한, 평균이 4이므로 편차는 순서대로

-3, -1, 0, $x-4$, $y-4$, 1, 2, 4

이때, 분산이 4.5이므로

$\dfrac{(-3)^2+(-1)^2+0^2+(x-4)^2+(y-4)^2+1^2+2^2+4^2}{8}=4.5$

$x^2+y^2-8(x+y)+63=36$

$x^2+y^2-8\times5+63=36$ $(\because$ ㉠$)$

$\therefore x^2+y^2=13$ $\quad\cdots\cdots$㉡

(나)

㉠, ㉡을 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에 대입하면

$5^2=13+2xy$, $2xy=12$

$\therefore xy=6$

(다)

답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	평균을 이용하여 $x+y$의 값을 구한 경우	30%
(나)	분산을 이용하여 x^2+y^2의 값을 구한 경우	40%
(다)	곱셈 공식을 이용하여 xy의 값을 구한 경우	30%

17

학생 C의 인터넷 사용 시간을 x시간이라 하면 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E의 일주일 동안의 인터넷 사용 시간은 순서대로 $(x-7)$시간, $(x+1)$시간, x시간, $(x+3)$시간, $(x-2)$시간이다.

이때, 평균은

$\dfrac{(x-7)+(x+1)+x+(x+3)+(x-2)}{5}=\dfrac{5x-5}{5}$

$=x-1$(시간)

따라서 인터넷 사용 시간의 편차는 순서대로 -6, 2, 1, 4, -1이므로 분산은

$\dfrac{(-6)^2+2^2+1^2+4^2+(-1)^2}{5}=\dfrac{58}{5}$

답 ④

18

ㄱ. 변량의 평균을 $f(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{(x+2)+(2x+2)+2+3+(2x+1)}{5}$

$=\dfrac{5x+10}{5}=x+2$

또한, 변량의 분산을 $g(x)$라 하면

$g(x)=\dfrac{0^2+x^2+(-x)^2+(-x+1)^2+(x-1)^2}{5}$

$=\dfrac{4x^2-4x+2}{5}=\dfrac{4}{5}\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{4}{5}\left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}$

이때, x는 자연수이므로 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.

따라서 x의 값이 커지면 변량의 분산도 커진다.

ㄴ. $2x+1\neq2x+2$, $2\neq3$이므로

$m(x)\le3$ $\quad\cdots\cdots$㉠

(ⅰ) $x+2=2x+2$인 경우

$x=0$이므로 자연수 x는 없다.

(ⅱ) $x+2=2x+1$인 경우

$x=1$이므로 $x+2=2x+1=3$

따라서 주어진 변량의 최빈값은 3이고

$m(1)=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $m(x)=3$인 자연수 x의 값이 존재하므로 ㉠에서 $m(x)$의 최댓값은 3이다.

ㄷ. $x=1$일 때, 주어진 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

2, 3, 3, 3, 4

즉, 중앙값은 3이므로 $x=1$일 때 $x+2$는 중앙값이다.

$x>1$일 때, 주어진 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면
2, 3, $x+2$, $2x+1$, $2x+2$
즉, $x>1$일 때 $x+2$는 중앙값이다.
따라서 주어진 변량의 중앙값은 항상 $x+2$이다.
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

19

학생 수는 모두 6명이므로
$1+a+b+1=6$
$\therefore a+b=4$ ……㉠
6명의 학생이 15번의 시합에서 받은 점수의 총합은
$15\times2=30$(점)이므로
$2\times1+4\times a+6\times b+8\times1=30$
$\therefore 2a+3b=10$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=2$
한편, 학생들이 받은 점수의 평균은
$\frac{30}{6}=5$(점)
받은 점수에 대한 편차를 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

받은 점수(점)	학생 수(명)	편차
2	1	-3
4	2	-1
6	2	1
8	1	3
합계	6	0

따라서 분산 V는
$$V=\frac{(-3)^2\times1+(-1)^2\times2+1^2\times2+3^2\times1}{6}=\frac{11}{3}$$
$\therefore 30V=110$ 답 110

20

학생 5명 중 독서 시간을 잘못 계산한 2명의 학생을 제외한 나머지 3명의 독서 시간을 각각 a시간, b시간, c시간이라 하자.
처음 잘못 계산한 독서 시간의 평균이 10시간이므로
$\frac{a+b+c+11+11}{5}=10$, $a+b+c+22=50$
$\therefore a+b+c=28$ ……㉠
처음 잘못 계산한 독서 시간의 분산이 6이므로
$$\frac{(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+1^2+1^2}{5}=6$$
$(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+2=30$
$\therefore (a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2=28$ ……㉡
따라서 학생 5명의 한 달 동안의 실제 독서 시간의 평균은
$$\frac{a+b+c+8+14}{5}=\frac{28+22}{5}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{50}{5}=10(\text{시간})$$
한 달 동안의 실제 독서 시간의 분산은
$$\frac{(a-10)^2+(b-10)^2+(c-10)^2+(-2)^2+4^2}{5}$$
$$=\frac{28+20}{5}\ (\because ㉡)$$
$$=\frac{48}{5}=9.6$$
답 9.6

| 다른풀이 |
독서 시간이 8시간, 14시간인 두 학생의 독서 시간을 모두 11시간으로 $+3$시간, -3시간 잘못 계산하였으므로 5명의 전체 독서 시간의 합은 변하지 않는다.
즉, 5명의 한 달 동안의 실제 독서 시간의 평균은 10시간으로 변하지 않는다.
한편, 독서 시간을 잘못 계산한 두 학생을 제외한 3명의 독서 시간의 편차의 제곱의 합을 A라 하면
$$(\text{분산})=\frac{A+(11-10)^2+(11-10)^2}{5}=6$$
$A+2=30$ $\therefore A=28$
따라서 학생 5명의 한 달 동안의 실제 독서 시간의 분산은
$$\frac{A+(8-10)^2+(14-10)^2}{5}=\frac{28+20}{5}=9.6$$

21

그룹 A의 학생들의 수업 태도 점수의 평균과 분산은
$$(\text{평균})=\frac{a\times2+2a\times3+3a\times2}{7}=2a(\text{점})$$
$$(\text{분산})=\frac{(a-2a)^2\times2+(2a-2a)^2\times3+(3a-2a)^2\times2}{7}$$
$$=\frac{4}{7}a^2$$
그룹 B의 학생들의 수업 태도 점수의 평균과 분산은
$$(\text{평균})=\frac{(-2b)\times1+(-b)\times2+b\times2+2b\times1}{6}=0(\text{점})$$
(분산)
$$=\frac{(-2b-0)^2\times1+(-b-0)^2\times2+(b-0)^2\times2+(2b-0)^2\times1}{6}$$
$$=2b^2$$

그룹 B의 점수의 분산이 그룹 A의 점수의 분산의 14배이므로

$2b^2=14\times\frac{4}{7}a^2$

$b^2=4a^2$ $\quad\therefore b=2a\ (\because a>0,\ b>0)$ $\quad\cdots\cdots㉠$

따라서 전체 학생의 수업 태도 점수를 한꺼번에 나타내면 다음 표와 같다.

점수(점)	$-4a$	$-2a$	a	$2a$	$3a$	$4a$	합계
학생 수(명)	1	2	2	5	2	1	13

즉, 전체 학생들의 수업 태도 점수의 평균은

$$\frac{(-4a)\times1+(-2a)\times2+a\times2+2a\times5+3a\times2+4a\times1}{13}$$

$=\frac{14}{13}a$(점)

따라서 $\frac{14}{13}a=14$이므로 $a=13,\ b=26\ (\because ㉠)$

$\therefore a+b=39$

답 39

22

남학생 3명의 일주일 동안의 과학 실험 시간을 각각 x_1시간, x_2시간, x_3시간이라 하면 평균이 5시간이므로

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=5$ $\quad\therefore x_1+x_2+x_3=15$ $\quad\cdots\cdots㉠$

분산이 3이므로

$\frac{(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-5)^2}{3}=3$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-10(x_1+x_2+x_3)+75=9$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2-10\times15+75=9\ (\because ㉠)$

$\therefore x_1^2+x_2^2+x_3^2=84$ $\quad\cdots\cdots㉡$

또한, 여학생 3명의 일주일 동안의 과학 실험 시간을 각각 y_1시간, y_2시간, y_3시간이라 하면 평균이 3시간이므로

$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=3$ $\quad\therefore y_1+y_2+y_3=9$ $\quad\cdots\cdots㉢$

분산이 5이므로

$\frac{(y_1-3)^2+(y_2-3)^2+(y_3-3)^2}{3}=5$

$y_1^2+y_2^2+y_3^2-6(y_1+y_2+y_3)+27=15$

$y_1^2+y_2^2+y_3^2-6\times9+27=15\ (\because ㉢)$

$\therefore y_1^2+y_2^2+y_3^2=42$ $\quad\cdots\cdots㉣$

따라서 과학 동아리 전체 학생의 일주일 동안의 과학 실험 시간의 평균이 m시간이므로

$m=\frac{x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3}{6}=\frac{15+9}{6}\ (\because ㉠,\ ㉢)$

$=4$

분산이 V이므로

$V=\frac{1}{6}\{(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+(x_3-4)^2+(y_1-4)^2+(y_2-4)^2+(y_3-4)^2\}$

$=\frac{1}{6}\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-8(x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3)+96\}$

$=\frac{1}{6}\{84+42-8\times(15+9)+96\}\ (\because ㉠,\ ㉡,\ ㉢,\ ㉣)$

$=\frac{1}{6}\times30=5$

답 $m=4,\ V=5$

23 해결단계

❶ 단계	학생 D의 점수의 편차를 구한다.
❷ 단계	학생 A, B, C, D의 점수의 평균을 m으로 나타낸다.
❸ 단계	학생 A, B, C, D, E, F의 점수가 모두 한 자리의 자연수임을 이용하여 m의 값을 구한다.
❹ 단계	학생 A, B, C, D, E, F가 얻은 점수의 분산을 구한다.

학생 D의 점수의 편차를 a점이라 하면 편차의 합이 0이므로

$2+(-3)+4+a=0$ $\quad\therefore a=-3$

두 학생 E, F의 점수의 차가 2점이므로 E, F의 점수를 각각 b점, $(b+2)$점 또는 $(b+2)$점, b점으로 놓을 수 있다.

4명의 학생 A, B, C, D의 점수의 평균이 m점이므로 A, B, C, D의 점수는 순서대로

$(m+2)$점, $(m-3)$점, $(m+4)$점, $(m-3)$점

6명의 학생 A, B, C, D, E, F의 점수의 평균이 $0.8m$점이므로

$\frac{4m+b+b+2}{6}=0.8m$

$4m+2b+2=4.8m$

$2b=0.8m-2$ $\quad\therefore b=0.4m-1$

이때, 6명의 학생이 얻은 점수는 모두 한 자리의 자연수이므로

$0.4m-1\geq1$에서 $0.4m\geq2$ $\quad\therefore m\geq5$ $\quad\cdots\cdots㉠$

$m+4\leq9$에서 $m\leq5$ $\quad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $m=5$

즉, 6명의 학생의 점수는 7점, 2점, 9점, 2점, 1점, 3점이고 점수의 평균은 $0.8m=0.8\times5=4$(점)이다.

따라서 6명의 학생이 얻은 점수의 분산은

$\frac{3^2+(-2)^2+5^2+(-2)^2+(-3)^2+(-1)^2}{6}=\frac{52}{6}=\frac{26}{3}$

답 $\frac{26}{3}$

24

n개의 삼각형의 밑변의 길이를 각각 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$, 높이를 각각 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n$이라 하면 삼각형의 밑변의 길이와 높이의 합이 항상 8이므로

$x_1+y_1=8,\ x_2+y_2=8,\ x_3+y_3=8,\ \cdots,\ x_n+y_n=8$

$\therefore y_1=8-x_1,\ y_2=8-x_2,\ y_3=8-x_3,\ \cdots,\ y_n=8-x_n$ $\quad\cdots\cdots㉠$

밑변의 길이의 평균이 6이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또한, 밑변의 길이의 표준편차가 $1.5=\frac{3}{2}$이므로 밑변의 길이의 분산은

$$\frac{(x_1-6)^2+(x_2-6)^2+(x_3-6)^2+\cdots+(x_n-6)^2}{n}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2-12(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)+36\times n}{n}$$

$$=\frac{9}{4}$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}-12\times 6+36=\frac{9}{4} \ (\because ㉡)$$

$$\therefore \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}=\frac{153}{4} \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 n개의 삼각형의 넓이의 평균은

$$\frac{\frac{1}{2}\times x_1\times y_1+\frac{1}{2}\times x_2\times y_2+\frac{1}{2}\times x_3\times y_3+\cdots+\frac{1}{2}\times x_n\times y_n}{n}$$

$$=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\cdots+x_ny_n}{2n}$$

$$=\frac{x_1(8-x_1)+x_2(8-x_2)+x_3(8-x_3)+\cdots+x_n(8-x_n)}{2n}$$

$$(\because ㉠)$$

$$=\frac{4(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)}{n}-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{2n}$$

$$=4\times 6-\frac{1}{2}\times\frac{153}{4} \ (\because ㉡, ㉢)$$

$$=\frac{39}{8}$$

답 ②

(분산)

$$=\frac{1}{n}[\{(ax_1+b)-(am+b)\}^2+\{(ax_2+b)-(am+b)\}^2$$
$$+\{(ax_3+b)-(am+b)\}^2+\cdots+\{(ax_n+b)-(am+b)\}^2]$$

$$=\frac{1}{n}\{(ax_1-am)^2+(ax_2-am)^2+(ax_3-am)^2+\cdots$$
$$+(ax_n-am)^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-m)^2+a^2(x_2-m)^2+a^2(x_3-m)^2+\cdots$$
$$+a^2(x_n-m)^2\}$$

$$=\frac{a^2}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}$$

$$=\frac{a^2}{n}\times ns^2 \ (\because ㉡)$$

$$=a^2s^2$$

(표준편차)$=\sqrt{a^2s^2}=as$ ($\because a>0$)

n개의 변량 ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, $\cdots$, ax_n+b의 평균과 표준편차가 각각 0, 1이어야 하므로

$am+b=0$, $as=1$

$\therefore a=\frac{1}{s}$, $b=-\frac{m}{s}$

답 ⑤

blacklabel 특강 참고

변화된 변량의 평균과 표준편차

세 변량 a, b, c의 평균이 m, 표준편차가 s일 때 (단, p, q는 상수)

(1) pa, pb, pc의 평균은 pm, 표준편차는 $|p|s$

(2) $a+q$, $b+q$, $c+q$의 평균은 $m+q$, 표준편차는 s

(3) $pa+q$, $pb+q$, $pc+q$의 평균은 $pm+q$, 표준편차는 $|p|s$

25

n개의 변량 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n의 평균이 m이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}=m$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=mn \quad \cdots\cdots ㉠$$

표준편차가 s이면 분산은 s^2이므로

$$\frac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}=s^2$$

$$\therefore (x_1-m)^2+(x_2-m)^2+(x_3-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2=ns^2$$
$$\cdots\cdots ㉡$$

이때, n개의 변량 ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, $\cdots$, ax_n+b의 평균과 분산, 표준편차를 각각 구하면

$$(\text{평균})=\frac{(ax_1+b)+(ax_2+b)+(ax_3+b)+\cdots+(ax_n+b)}{n}$$

$$=\frac{a(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)+bn}{n}$$

$$=\frac{amn+bn}{n} \ (\because ㉠)$$

$$=am+b$$

26

자료 A의 표준편차가 a이고, 자료 B는

$1+100$, $2+100$, $3+100$, $\cdots$, $100+100$

이므로 자료 B의 표준편차 b는 자료 A의 표준편차와 같다.

$\therefore a=b$

또한, 자료 C는 2×1, 2×2, 2×3, $\cdots$, 2×100이므로 자료 C의 표준편차 c는 자료 A의 표준편차의 2배와 같다.

$\therefore c=2a$

이때, $a>0$이므로 $a=b<c$

답 ③

| 다른풀이 |

세 자료 A, B, C의 평균을 각각 m_A, m_B, m_C라 하면

$$m_A=\frac{1+2+3+\cdots+100}{100}=\frac{5050}{100}=50.5$$

$$m_B=\frac{101+102+103+\cdots+200}{100}=\frac{15050}{100}=150.5$$

$$m_C=\frac{2+4+6+\cdots+200}{100}=\frac{2(1+2+3+\cdots+100)}{100}$$
$$=2\times 50.5=101$$

$\therefore\ a^2=\dfrac{(-49.5)^2+(-48.5)^2+\cdots+48.5^2+49.5^2}{100}$

$b^2=\dfrac{(-49.5)^2+(-48.5)^2+\cdots+48.5^2+49.5^2}{100}=a^2$

$c^2=\dfrac{(-99)^2+(-97)^2+\cdots+97^2+99^2}{100}$

$=\dfrac{4\{(-49.5)^2+(-48.5)^2+\cdots+48.5^2+49.5^2\}}{100}=4a^2$

따라서 $b=a$, $c=2a$이므로 $a=b<c$

27

주어진 막대그래프를 표로 나타내면 다음과 같다.

A반		B반		C반	
공책의 권수(권)	학생 수 (명)	공책의 권수(권)	학생 수 (명)	공책의 권수(권)	학생 수 (명)
3	2	3	3	3	1
4	2	4	1	4	2
5	2	5	2	5	4
6	2	6	1	6	2
7	2	7	3	7	1
합계	10	합계	10	합계	10

$(\text{A반의 평균})=\dfrac{3\times2+4\times2+5\times2+6\times2+7\times2}{10}$

$=\dfrac{50}{10}=5(\text{권})$

(A반의 분산)

$=\dfrac{(-2)^2\times2+(-1)^2\times2+0^2\times2+1^2\times2+2^2\times2}{10}$

$=\dfrac{20}{10}=2$

$(\text{B반의 평균})=\dfrac{3\times3+4\times1+5\times2+6\times1+7\times3}{10}$

$=\dfrac{50}{10}=5(\text{권})$

(B반의 분산)

$=\dfrac{(-2)^2\times3+(-1)^2\times1+0^2\times2+1^2\times1+2^2\times3}{10}$

$=\dfrac{26}{10}=2.6$

$(\text{C반의 평균})=\dfrac{3\times1+4\times2+5\times4+6\times2+7\times1}{10}$

$=\dfrac{50}{10}=5(\text{권})$

(C반의 분산)

$=\dfrac{(-2)^2\times1+(-1)^2\times2+0^2\times4+1^2\times2+2^2\times1}{10}$

$=\dfrac{12}{10}=1.2$

①, ② A, B, C 세 반의 평균은 모두 같다.

③, ④, ⑤ (C반의 분산)<(A반의 분산)<(B반의 분산)이므로 (C반의 표준편차)<(A반의 표준편차)<(B반의 표준편차)

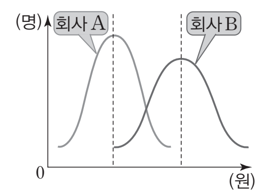
따라서 옳은 것은 ④이다. **답** ④

blacklabel 특강 참고

자료의 분산 또는 표준편차가 작을수록 각 자료의 값이 평균 가까이에 모여 있다. 문제의 주어진 막대그래프에서 C반의 자료의 값이 평균 5에 모여 있으므로 C반의 분산이 가장 작고, B반의 자료의 값이 평균 5를 중심으로 좌우로 넓게 흩어져 있으므로 B반의 분산이 가장 크다.

28

두 회사 A, B의 직원들의 연봉 분포에 대한 그래프가 대략적으로 대칭을 이루는 선을 각각 그리면 다음 그림의 점선과 같다.



이때, 각 그래프의 점선과 x축이 만나는 점의 x좌표는 각 회사의 평균 연봉을 나타낸다.

ㄱ. 회사 A의 그래프의 점선이 회사 B의 그래프의 점선보다 왼쪽에 있으므로 회사 A가 회사 B보다 직원들의 평균 연봉이 작다.

ㄴ. 회사 B의 그래프가 회사 A의 그래프보다 높이가 낮고 옆으로 퍼진 모양이므로 회사 A가 회사 B보다 직원들의 연봉 분포가 더 고르다고 할 수 있다.
즉, 회사 B가 회사 A보다 직원들의 연봉 격차가 더 크다.

ㄷ. ㄱ에서 두 회사 A, B의 직원들의 평균 연봉은 서로 다르고, ㄴ에서 회사 A가 회사 B보다 직원들의 연봉 분포가 더 고르므로 회사 A가 회사 B보다 직원들의 연봉의 분산이 더 작다.
따라서 A, B 두 회사 직원들의 연봉의 평균과 분산은 각각 서로 다르다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 69~70

01 (1) 제품 B (2) 제품 B **02** 6점, 8점 또는 8점, 6점

03 (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{20}{3}$ **04** 6, 6 **05** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$개

06 최댓값 : 87, 최솟값 : 85

07 평균 : 30점, 표준편차 : $5\sqrt{2}$점 **08** 7

01 해결단계

(1)	❶단계	두 제품 A, B의 평점의 평균과 중앙값을 각각 구한다.
	❷단계	두 제품 A, B 중에서 평점의 평균과 중앙값이 서로 같은 제품을 구한다.
(2)	❸단계	두 제품 A, B의 평점의 분산을 각각 구한다.
	❹단계	두 제품 A, B 중에서 평점이 평균을 중심으로 흩어진 정도가 더 작은 제품을 구한다.

(1) 제품 A의 평점의 평균은

$$\frac{5\times1+6\times4+7\times6+8\times4+9\times3+10\times2}{20}=\frac{150}{20}$$
$$=7.5(\text{점})$$

제품 A의 평점을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10

즉, 제품 A의 평점의 중앙값은

$$\frac{7+7}{2}=\frac{14}{2}=7(\text{점})$$

즉, 제품 A의 평점의 평균과 중앙값은 서로 다르다.

한편, 제품 B의 평점의 평균은

$$\frac{6\times1+7\times7+8\times8+9\times7+10\times1}{24}=\frac{192}{24}=8(\text{점})$$

제품 B의 평점을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10

즉, 제품 B의 평점의 중앙값은

$$\frac{8+8}{2}=\frac{16}{2}=8(\text{점})$$

즉, 제품 B의 평점의 평균과 중앙값은 모두 8점으로 같다.

따라서 평점의 평균과 중앙값이 서로 같은 제품은 제품 B이다.

(2) (1)에서 제품 A의 평점의 평균이 $7.5=\frac{15}{2}$(점)이므로 제품 A의 평점의 분산은

$$\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2\times1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\times4+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times6+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times4+\left(\frac{3}{2}\right)^2\times3+\left(\frac{5}{2}\right)^2\times2}{20}$$

$$=\frac{\frac{25}{4}+\frac{36}{4}+\frac{6}{4}+\frac{4}{4}+\frac{27}{4}+\frac{50}{4}}{20}=\frac{37}{20}$$

(1)에서 제품 B의 평점의 평균이 8점이므로 제품 B의 평점의 분산은

$$\frac{(-2)^2\times1+(-1)^2\times7+0^2\times8+1^2\times7+2^2\times1}{24}$$

$$=\frac{4+7+0+7+4}{24}$$

$$=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$$

이때, $\frac{37}{20}>\frac{11}{12}$이므로 제품 B의 평점의 분산이 더 작다.

따라서 제품 B의 평점이 제품 A의 평점보다 평균을 중심으로 흩어진 정도가 더 작다.

답 (1) 제품 B (2) 제품 B

02 해결단계

❶단계	평균을 이용하여 4회, 5회의 점수 사이의 관계식을 세운다.
❷단계	분산을 이용하여 4회, 5회의 점수 사이의 관계식을 세운다.
❸단계	4회와 5회의 점수를 각각 구한다.

종선이가 4회, 5회에 받은 점수를 각각 a점, b점이라 하자.

총 5회에 걸쳐 받은 미술 실기 점수의 평균이 6점이므로

$$\frac{7+5+4+a+b}{5}=6,\ 16+a+b=30$$

$\therefore b=14-a$ ……㉠

즉, 4회, 5회의 점수는 각각 a점, $(14-a)$점이고 분산이 2이므로

$$\frac{1^2+(-1)^2+(-2)^2+(a-6)^2+(14-a-6)^2}{5}=2$$

$6+(a-6)^2+(8-a)^2=10$

$6+a^2-12a+36+a^2-16a+64=10$

$2a^2-28a+96=0$

$a^2-14a+48=0,\ (a-6)(a-8)=0$

$\therefore a=6$ 또는 $a=8$

따라서 $a=6$, $b=8$ 또는 $a=8$, $b=6$ ($\because$ ㉠)이므로 4회와 5회에 받은 점수로 가능한 것은 6점, 8점 또는 8점, 6점이다.

답 6점, 8점 또는 8점, 6점

03 해결단계

(1)	❶단계	시험을 치른 전체 학생의 점수의 평균을 이용하여 우등반과 일반반 학생 수 사이의 관계식을 구한다.
	❷단계	❶단계에서 구한 식을 이용하여 전체 학생 중에서 한 학생을 뽑았을 때, 그 학생이 우등반 학생이었을 확률을 구한다.
(2)	❸단계	우등반 학생 수와 일반반 학생 수를 각각 구한다.
	❹단계	평균과 분산을 이용하여 전체 학생의 시험 점수의 분산을 구한다.

(1) 두 자연수 a, b에 대하여 우등반 학생 수를 a명, 일반반 학생 수를 b명이라 하자.

전체 학생의 시험 점수의 평균이 6점이므로

$$\frac{7\times a+4\times b}{a+b}=6$$

$7a+4b=6(a+b)$ $\therefore a=2b$ ……㉠

시험을 치른 전체 학생 중에서 한 학생을 뽑았을 때, 그 학생이 우등반이었을 확률은 $\frac{a}{a+b}$이므로 ㉠을 대입하면

$$\frac{2b}{2b+b}=\frac{2b}{3b}=\frac{2}{3}$$

(2) 시험을 치른 학생이 총 30명이므로 (1)에서 우등반 학생 수는 $30\times\frac{2}{3}=20$(명), 일반반 학생 수는 $30-20=10$(명)이다.

우등반 학생들의 시험 점수를 각각 x_1점, x_2점, x_3점, …, x_{20}점이라 하면 점수의 평균이 7점이므로

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{20}}{20}=7$$

$\therefore x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{20}=7\times20=140$ ……㉡

이들의 분산이 4이므로

$$\frac{(x_1-7)^2+(x_2-7)^2+(x_3-7)^2+\cdots+(x_{20}-7)^2}{20}=4$$

$$(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_{20}{}^2)-14(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{20})+980=80$$

$(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_{20}{}^2)-14\times140+980=80$ ($\because$ ㉡)

$\therefore x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_{20}{}^2=1060$ ……㉢

또한, 일반반 학생들의 점수를 각각 y_1점, y_2점, y_3점, $\cdots$, y_{10}점이라 하면 점수의 평균이 4점이므로

$$\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{10}}{10}=7$$

$\therefore y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{10}=4\times10=40$ ……㉣

이들의 분산이 6이므로

$$\frac{(y_1-4)^2+(y_2-4)^2+(y_3-4)^2+\cdots+(y_{10}-4)^2}{10}=6$$

$$(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)-8(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{10})+160=60$$

$(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)-8\times40+160=60$ ($\because$ ㉣)

$\therefore y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\cdots+y_{10}{}^2=220$ ……㉤

따라서 전체 학생의 시험 점수의 평균이 6점이므로 전체 학생의 시험 점수의 분산은

$$\begin{aligned}&\frac{1}{30}\{(x_1-6)^2+(x_2-6)^2+(x_3-6)^2+\cdots+(x_{20}-6)^2\\&\qquad+(y_1-6)^2+(y_2-6)^2+(y_3-6)^2+\cdots+(y_{10}-6)^2\}\\&=\frac{1}{30}\{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_{20}{}^2)\\&\qquad+(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2+\cdots+y_{10}{}^2)\\&\qquad-12(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{20})\\&\qquad-12(y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{10})\\&\qquad+36\times30\}\\&=\frac{1}{30}(1060+220-12\times140-12\times40+36\times30)\\&\qquad\qquad(\because ㉡, ㉢, ㉣, ㉤)\\&=\frac{200}{30}=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{20}{3}$

04 해결단계

❶ 단계	자른 종이의 두 넓이를 미지수를 사용하여 나타낸다.
❷ 단계	5장의 종이의 넓이의 평균을 구하고, ❶단계에서 사용한 미지수를 이용하여 분산을 나타낸다.
❸ 단계	5장의 종이의 넓이의 표준편차를 가능한 한 작게 하기 위해 자른 종이 각각의 넓이를 구한다.

자른 종이의 넓이가 x, $12-x$가 되도록 두 조각으로 잘랐다고 하면 5장의 종이의 넓이 5, 5, 8, x, $12-x$의 평균은

$$\frac{5+5+8+x+(12-x)}{5}=\frac{30}{5}=6$$

이때, x, $12-x$와 평균 6의 차가 작을수록 표준편차가 작다.

즉, 표준편차는 $x=12-x=6$일 때 최소이다.

따라서 넓이가 12인 종이를 넓이가 각각 6, 6인 종이 2장으로 잘라야 한다.

답 6, 6

| 다른풀이 |

표준편차를 $f(x)$라 하면

$$\begin{aligned}&\{f(x)\}^2\\&=\frac{1}{5}\{(5-6)^2+(5-6)^2+(8-6)^2+(x-6)^2+(12-x-6)^2\}\\&=\frac{1}{5}\{2(x-6)^2+6\}\end{aligned}$$

$(x-6)^2\ge0$이므로 $f(x)$는 $x=6$일 때 최소이다. 따라서 넓이가 12인 종이를 넓이가 6, 6인 종이 2장으로 잘라야 한다.

05 해결단계

❶ 단계	편차의 성질을 이용하여 C, D의 값을 구한다.
❷ 단계	미진, 희연, 대섭, 진수가 일주일 동안 받은 문자 메시지의 개수의 분산을 구한다.
❸ 단계	미진, 희연, 대섭, 진수가 일주일 동안 받은 문자 메시지의 개수의 표준편차를 구한다.

편차의 총합은 항상 0이므로

$(-7)+C+3+D=0$ $\quad\therefore C+D=4$ ……㉠

희연이와 진수가 일주일 동안 받은 문자 메시지 개수의 차가 $60-52=8$(개)이므로 편차의 차도 8개이다.

$\therefore C-D=8$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C=6$, $D=-2$

즉, (분산)$=\frac{(-7)^2+6^2+3^2+(-2)^2}{4}=\frac{98}{4}=\frac{49}{2}$이므로

(표준편차)$=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$(개)

답 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$개

blacklabel 특강 풀이첨삭

네 명이 일주일 동안 받은 문자 메시지의 개수의 평균을 m개라 하면 희연이와 진수가 받은 문자 메시지의 개수가 각각 60개, 52개이므로

$60-m=a$ ……㉠

$52-m=b$ ……㉡

㉠$-$㉡을 하면 $8=a-b$

즉, 편차의 차는 변량의 차와 같다.

06 해결단계

❶단계	7명의 영어 점수를 가장 낮은 것부터 순서대로 나열한 값을 각각 a점, b점, c점, d점, e점, f점, g점으로 나타낸다.
❷단계	조건 ㈎, ㈏를 이용하여 a, d의 값을 구한다.
❸단계	조건 ㈐, ㈑를 이용하여 e, f, g의 경우를 나눈다.
❹단계	g, 즉 A의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.

7명의 영어 점수를 가장 작은 값부터 크기순으로 나열하면 a점, b점, c점, d점, e점, f점, g점이라 하자.

조건 ㈎에서 가장 낮은 점수는 73점이므로 $a=73$

조건 ㈏에서 중앙값은 77점이므로 $d=77$

조건 ㈑에서 평균이 78점이므로

$\dfrac{a+b+c+d+e+f+g}{7}=78$

$\therefore a+b+c+d+e+f+g=546$

이때, $a=73$, $d=77$이므로

$b+c+e+f+g=396$ ……㉠

또한, 조건 ㈐에서 최빈값이 80점이므로 e, f, g 중 적어도 2개는 80이어야 한다.

(i) $e=f=g=80$일 때,

㉠에서 $b+c+80+80+80=396$ $\therefore b+c=156$ ……㉡

이때, 조건 ㈐에서 최빈값이 80점뿐이므로

$a\le b\le c\le d$, 즉 $73\le b\le c\le 77$

(단, $a=b=c=73$, $b=c=d=7$인 경우 제외)

$\therefore 146<b+c<154$

즉, ㉡을 만족시키는 b, c는 존재하지 않는다.

(ii) $e=f=80$, $g>80$일 때,

㉠에서 $b+c+80+80+g=396$

$\therefore b+c+g=236$ ……㉢

이때, 조건 ㈐에서 최빈값이 80점뿐이므로 73점, 77점의 개수 및 그 사이의 점수의 개수는 모두 1개이어야 한다.

즉, $73<b<c<77$이므로

$b=74$, $c=75$일 때 $b+c$의 최솟값은 149

$b=75$, $c=76$일 때 $b+c$의 최댓값은 151

㉢에서 $85\le g\le 87$

(iii) $77<e<80$, $f=g=80$일 때,

㉠에서 $b+c+e+80+80=396$

$\therefore b+c+e=236$ ……㉣

이때, 조건 ㈐에서 최빈값이 80점뿐이므로

$73<b<c<77<e<80$

$b=75$, $c=76$, $e=79$일 때 $b+c+e$의 최댓값은

$75+76+79=230$

즉, ㉣을 만족시키는 b, c, e는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 g의 최댓값은 87, 최솟값은 85이다.

즉, A의 최댓값은 87, 최솟값은 85이다.

답 최댓값 : 87, 최솟값 : 85

07 해결단계

❶단계	5명의 학생 A, B, C, D, E가 맞힌 문항 수의 합을 구한다.
❷단계	5명의 학생 A, B, C, D, E가 맞힌 문항 수의 제곱의 합을 구한다.
❸단계	5명의 학생 A, B, C, D, E가 얻은 점수의 평균과 표준편차를 구한다.

5명의 학생 A, B, C, D, E가 맞힌 문항 수를 각각 a개, b개, c개, d개, e개라 하자.

맞힌 문항 수의 평균이 14개이므로

$\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=14$

$\therefore a+b+c+d+e=70$ ……㉠

맞힌 문항 수의 분산이 2이므로

$\dfrac{(a-14)^2+(b-14)^2+(c-14)^2+(d-14)^2+(e-14)^2}{5}=2$

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-28(a+b+c+d+e)+14^2\times5=2\times5$

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-28\times70+980=10$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=990$ ……㉡

한편, 총 20문항이므로 한 학생이 맞힌 문항 수를 x개라 하면 틀린 문항 수는 $(20-x)$개이다.

$\therefore$ (점수)$=3x-2(20-x)=5x-40$(점)

즉, 5명의 학생 A, B, C, D, E의 점수는 각각 $(5a-40)$점, $(5b-40)$점, $(5c-40)$점, $(5d-40)$점, $(5e-40)$점이므로

$$\begin{aligned}(\text{평균})&=\frac{1}{5}\{(5a-40)+(5b-40)+(5c-40)\\&\qquad+(5d-40)+(5e-40)\}\\&=\frac{1}{5}\{5(a+b+c+d+e)-200\}\\&=\frac{1}{5}(5\times70-200)\ (\because ㉠)\\&=\frac{1}{5}\times150=30(\text{점})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{분산})&=\frac{1}{5}\{(5a-70)^2+(5b-70)^2+(5c-70)^2\\&\qquad+(5d-70)^2+(5e-70)^2\}\\&=\frac{1}{5}\{25(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\\&\qquad-700(a+b+c+d+e)+5\times70^2\}\\&=\frac{1}{5}(25\times990-700\times70+24500)\ (\because ㉠, ㉡)\\&=\frac{1}{5}\times250=50\end{aligned}$$

(표준편차)$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$(점)

따라서 5명의 학생 A, B, C, D, E가 얻은 점수의 평균은 30점, 표준편차는 $5\sqrt{2}$점이다. 답 평균 : 30점, 표준편차 : $5\sqrt{2}$점

| 다른풀이 |

5명의 학생 A, B, C, D, E가 맞힌 문항 수를 각각 a개, b개, c개, d개, e개라 하면 5명이 얻은 점수는 각각 $(5a-40)$점, $(5b-40)$점, $(5c-40)$점, $(5d-40)$점, $(5e-40)$점이다.

이때, 맞힌 문항 수의 평균이 14개이므로 얻은 점수의 평균은

(평균)$=5\times14-40=70-40=30$(점)

또한, 맞힌 문항 수의 분산이 2, 즉 표준편차가 $\sqrt{2}$개이므로 얻은 점수의 표준편차는

(표준편차)$=|5|\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$(점)

따라서 5명이 얻은 점수의 평균은 30점, 표준편차는 $5\sqrt{2}$점이다.

08 해결단계

❶ 단계	중앙값이 8점임을 이용하여 a, b의 조건을 구한다.
❷ 단계	경우를 나누어 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

한국 양궁 선수가 얻은 점수의 중앙값이 8점이고 활을 5발 쏘았으므로

$a=8$, $b=8$ 또는 $a=8$, $b\le7$ 또는 $a\le7$, $b=8$

(i) $a=8$, $b=8$인 경우

한국과 미국의 양궁 선수가 얻은 점수를 합한 전체 점수를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

6점, 7점, 7점, 8점, 8점, 8점, 8점, 9점, 9점, 10점

그런데 중앙값이 $\frac{8+8}{2}=8$(점)이므로 전체의 중앙값이 7.5점이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=8$, $b\le7$인 경우

한국과 미국의 양궁 선수가 얻은 점수를 합한 전체 점수를 큰 값부터 크기순으로 나열하면

10점, 9점, 9점, 8점, 8점, 7점, …

중앙값은 $\frac{8+7}{2}=7.5$(점)이므로 $a=8$, $b\le7$인 모든 경우에 대하여 성립한다.

이때, b는 1부터 7까지의 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 $(8, 7)$, $(8, 6)$, $(8, 5)$, $(8, 4)$, $(8, 3)$, $(8, 2)$, $(8, 1)$의 7개이다.

(iii) $a\le7$, $b=8$인 경우

한국과 미국의 양궁 선수가 얻은 점수를 합한 전체 점수를 큰 값부터 크기순으로 나열하면

10점, 9점, 9점, 8점, 8점, 8점, 7점, …

그런데 중앙값이 $\frac{8+8}{2}=8$(점)이므로 전체의 중앙값이 7.5점이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 7이다.

답 7

미리보는 학력평가 p. 71

1 124	2 16	3 252	4 168

1

자료는 각 자율 동아리의 회원 수로 구성되어 있으므로 주어진 자료는 6개의 자연수로 이루어져 있다.

자료를 작은 값부터 크기순으로 나열했을 때,

a, b, c, d, e, f (단, $a, b, c, \cdots, f$는 $a\le b\le c\le\cdots\le f$인 자연수)라 하면 조건 ㈎에서

$a=8$, $f=13$

자료의 개수가 짝수이므로 c와 d의 평균이 중앙값이다.

조건 ㈏에서 중앙값은 10이므로

$\frac{c+d}{2}=10$에서 $c+d=20$

또한, 조건 ㈏에서 최빈값은 9이므로 자료 중 9의 개수는 2개 이상이어야 한다.

이때, $c=8$, $d=12$ 또는 $c=10$, $d=10$이면 최빈값이 9가 될 수 없으므로

$b=c=9$, $d=11$

한편, $e=11$ 또는 $e=13$이면 조건 ㈏에서 최빈값이 9뿐이라는 조건에 맞지 않으므로

$e=12$

따라서 자료의 평균 m은

$m=\frac{8+9+9+11+12+13}{6}=\frac{62}{6}=\frac{31}{3}$

$\therefore 12m=12\times\frac{31}{3}=124$

답 124

2

7개의 변량의 평균이 7 이상 8 이하이므로

$7\le\frac{6+6+8+8+10+a+b}{7}\le8$

$49\le a+b+38\le56$

$\therefore 11\le a+b\le18$ ……㉠

또한, 자료의 최빈값이 유일하게 존재하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 최빈값이 6일 때,

a, b 중 적어도 하나는 6이어야 하므로 $a=6$이라 하면

$5\le b\le12$ ($\because$ ㉠)

b를 제외한 나머지 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

6, 6, 6, 8, 8, 10

이때, $b\ge7$이면 중앙값이 6이 되지 않으므로 b의 값으로 가능한 것은 5 또는 6이다.

같은 방법으로 $b=6$인 경우도 구해보면 순서쌍 (a, b)는 $(6, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 6)$의 3개이다.

(ii) 최빈값이 8일 때,

a, b 중 적어도 하나는 8이어야 하므로 $a=8$이라 하면

$3\le b\le10$ ($\because$ ㉠)

b를 제외한 나머지 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열하면

6, 6, 8, 8, 8, 10

이때, $3\le b\le 10$를 만족시키는 모든 자연수 b에 대하여 중앙값은 8이다.

그런데 $b=6$이면 최빈값은 6, 8로 유일하지 않으므로 b의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10이다.

같은 방법으로 $b=8$인 경우도 구해보면 순서쌍 (a, b)는

$(8, 3)$, $(3, 8)$, $(8, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 5)$, $(5, 8)$, $(8, 7)$, $(7, 8)$, $(8, 8)$, $(8, 9)$, $(9, 8)$, $(8, 10)$, $(10, 8)$의 13개이다.

(iii) 최빈값이 10일 때,

$a=b=10$이어야 하는데 이는 ㉠을 만족시키지 않으므로 순서쌍 (a, b)는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3+13=16$이다. 답 16

3

한 개의 주사위를 9번 던져 나온 눈의 수를 작은 값부터 크기순으로 나열했을 때,

$a, b, c, d, e, f, g, h, i$ (단, $a, b, c, \cdots, i$는 $a\le b\le c\le\cdots\le i$이고 1 이상 6 이하의 자연수)라 하자.

조건 (가)에서 주사위의 모든 눈이 적어도 한 번씩 나왔으므로

$a=1$, $i=6$

조건 (나)에서 중앙값이 4이므로 $e=4$

또한, 최빈값은 6뿐이므로 6은 적어도 3번 이상 나와야 한다.

즉, $g=h=6$이므로 $f=5$

또한, $a=1$, $e=4$이고, 모든 눈이 적어도 한 번씩은 나왔으므로 a, b, c, d, e에서 1, 2, 3, 4가 한 번씩 나오고 1, 2, 3, 4 중에서 하나의 숫자가 중복된다.

이때, 중복되는 눈의 수를 x라 하면 조건 (나)에서 평균이 4이므로

$$\frac{1+2+3+4+x+5+6+6+6}{9}=4$$

$33+x=36$ $\quad\therefore x=3$

따라서 한 개의 주사위를 9번 던져 나온 눈의 수를 작은 값부터 크기순으로 나열하면

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6

평균이 4이므로 편차는 순서대로

-3, -2, -1, -1, 0, 1, 2, 2, 2

그러므로 분산 V는

$$V=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+2^2+2^2}{9}$$

$$=\frac{28}{9}$$

$\therefore 81V=81\times\frac{28}{9}=252$ 답 252

| 다른풀이 |

조건 (가)에서 주사위를 던졌을 때 모든 눈이 적어도 한 번씩 나왔으므로 9번 던져서 나온 눈의 수를

1, 2, 3, 4, 5, 6, p, q, r (단, $p\le q\le r$)

라 하자.

조건 (나)에서 중앙값이 4이므로 눈의 수를 작은 값부터 크기순으로 나열했을 때, 다섯 번째 수는 4이어야 한다. 즉, $p\le 4$이므로 1, 2, 3, 4 중 하나의 수는 두 번 이상 나와야 한다.

이때, 최빈값이 6뿐이므로 6은 적어도 3번 이상 나와야 한다.

$\therefore q=6$, $r=6$

또한, 평균이 4이므로 자료의 편차는

-3, -2, -1, 0, 1, 2, $p-4$, 2, 2

이고, 편차의 합은 0이므로

$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+(p-4)+2+2=0$

$\therefore p=3$

즉, 편차는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, -1, 2, 2이므로 분산 V는

$$V=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+(-1)^2+2^2+2^2}{9}$$

$$=\frac{28}{9}$$

$\therefore 81V=81\times\frac{28}{9}=252$

4

조건 (가)에서 가장 작은 수는 7, 가장 큰 수는 14이므로 5개의 자연수를 작은 값부터 크기순으로 7, a, b, c, 14라 하자.

조건 (나)에서 최빈값이 8이므로 a, b, c 중 2개 이상은 8이어야 한다.

(i) $a=b=8$, $c\ne 8$인 경우

5개의 자연수는 7, 8, 8, c, 14이고 평균이 10이므로

$$\frac{7+8+8+c+14}{5}=10,\ 37+c=50$$

$\therefore c=13$

(ii) $a=b=c=8$인 경우

5개의 자연수는 7, 8, 8, 8, 14이고, 평균은

$$\frac{7+8+8+8+14}{5}=\frac{45}{5}=9$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 5개의 자연수는 7, 8, 8, 13, 14이고, 평균이 10이므로 각 변량의 편차는 -3, -2, -2, 3, 4이다.

따라서 분산 d는

$$d=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-2)^2+3^2+4^2}{5}=\frac{42}{5}$$

$\therefore 20d=20\times\frac{42}{5}=168$ 답 168

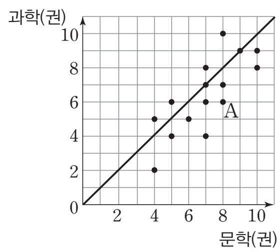
07 산점도와 상관관계

Step 1 시험에 꼭 나오는 문제 p. 73

01 12　02 ③　03 ④　04 ⑤　05 ①

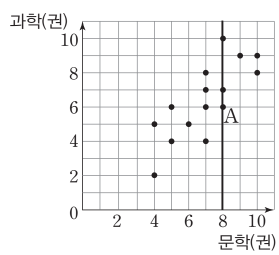
01

다음 그림과 같이 읽은 문학 책의 수와 과학 책의 수가 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 과학 책보다 문학 책을 더 많이 읽은 학생 수는 대각선의 아래쪽에 있는 점의 개수와 같다.



$\therefore a=9$

또한, 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 문학 책의 수를 나타내는 축에 수직인 직선을 그으면 A 학생보다 문학 책을 더 많이 읽은 학생 수는 이 직선의 오른쪽에 있는 점의 개수와 같다.



$\therefore b=3$

$\therefore a+b=9+3=12$　　　　답 12

blacklabel 특강 풀이첨삭

산점도 읽기

산점도에서 '높은', '낮은', '같은' 등의 비교의 말이 나오면 먼저 직선을 긋는다. 이 직선을 기준으로 하여 좌표평면에서 문제의 뜻에 맞는 영역을 찾는다.

02

ㄱ. 축구 동아리 회원 20명 중에서 팔굽혀 펴기를 12회 한 회원이 5명으로 가장 많으므로 팔굽혀 펴기 횟수의 최빈값은 12회이다.

ㄴ. 팔굽혀 펴기 횟수를 가장 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때, 10번째 값은 10회, 11번째 값도 10회이므로 팔굽혀 펴기 횟수의 중앙값은

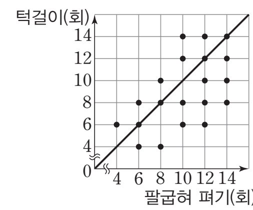
$\dfrac{10+10}{2}=10$(회)

턱걸이 횟수를 가장 작은 값부터 크기순으로 나열하였을 때, 10번째 값은 8회, 11번째 값도 8회이므로 턱걸이 횟수의 중앙값은

$\dfrac{8+8}{2}=8$(회)

즉, 팔굽혀 펴기 횟수와 턱걸이 횟수의 중앙값은 서로 다르다.

ㄷ. 다음 그림과 같이 팔굽혀 펴기 횟수와 턱걸이 횟수가 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 팔굽혀 펴기 횟수보다 턱걸이 횟수가 큰 회원 수는 대각선 위쪽에 있는 점의 개수와 같고, 턱걸이 횟수보다 팔굽혀 펴기 횟수가 큰 회원 수는 대각선의 아래쪽에 있는 점의 개수와 같다.



즉, 팔굽혀 펴기 횟수보다 턱걸이 횟수가 큰 회원은 6명이고, 턱걸이 횟수보다 팔굽혀 펴기 횟수가 큰 회원은 10명이므로 팔굽혀 펴기 횟수보다 턱걸이 횟수가 큰 회원 수가 턱걸이 횟수보다 팔굽혀 펴기 횟수가 큰 회원 수보다 작다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.　　　　답 ③

03

주어진 산점도는 음의 상관관계를 나타낸다.

① 키가 클수록 대체로 몸무게가 무겁다. 즉, 두 변량 사이에는 양의 상관관계가 있다.

② 통화 시간이 길어질수록 대체로 통화 요금이 올라간다. 즉, 두 변량 사이에는 양의 상관관계가 있다.

③ 몸무게가 많이 나갈수록 청력이 좋아지는지 또는 나빠지는지는 알 수 없다. 즉, 두 변량 사이에는 상관관계가 없다.

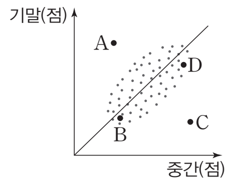
④ 겨울철 기온이 높아질수록 대체로 난방비는 적게 나온다. 즉, 두 변량 사이에는 음의 상관관계가 있다.

⑤ 지능 지수가 높아질수록 머리카락의 굵기가 굵어지는지 또는 얇아지는지는 알 수 없다. 즉, 두 변량 사이에는 상관관계가 없다.

따라서 주어진 산점도와 같은 상관관계, 즉 음의 상관관계를 갖는 두 변량은 ④이다.　　　　답 ④

04

주어진 산점도에서 중간고사 성적과 기말고사 성적이 같은 점을 이어서 대각선을 그으면 다음 그림과 같다.

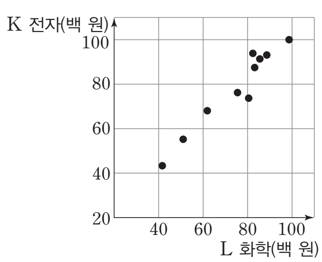


① 기말고사 성적이 중간고사 성적보다 높은 학생은 대각선의 위쪽에 있는 점을 나타낸다. 즉, A는 성적이 향상되었다.
② 점 C는 대각선에서 비교적 멀리 떨어져 있다. 즉, C는 중간고사 성적과 기밀고사 성적의 차가 큰 편이다.
③ 중간고사 성적이 높을수록 대체적으로 기말고사 성적도 높다. 즉, 중간고사 성적과 기말고사 성적 사이에는 양의 상관관계가 있다.
④ 점 D는 대각선에 가까이 있으면서 원점에서 비교적 멀리 떨어져 있으므로 D는 중간고사, 기말고사 성적이 모두 높은 편이다.
⑤ 점 B는 점 A보다 대각선에 가까이 있다. 즉, B는 A보다 성적의 변화가 적다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

05

주어진 표로 산점도를 만들면 다음 그림과 같으므로 L 화학과 K 전자의 주식 시세 사이에는 양의 상관관계가 있다.



① 양의 상관관계
② 음의 상관관계
③, ④, ⑤ 상관관계가 없다.

따라서 구하는 산점도는 ①이다. **답** ①

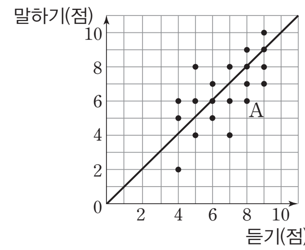
Step 2 A등급을 위한 문제 pp. 74~76

01 ⑤	02 33점	03 ④	04 550	
05 $45<m\le 47.5$		06 ①, ④	07 15 cm	08 ⑤
09 D	10 ②, ④	11 ①	12 ①	

01

ㄱ. 주어진 산점도에서 듣기 점수가 높을수록 대체로 말하기 점수도 높으므로 듣기 점수가 높은 학생은 대체로 말하기 점수도 높다고 할 수 있다.

ㄴ. 듣기 점수와 말하기 점수가 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 다음 그림과 같다.



대각선 위의 점이 3개이므로 듣기 점수와 말하기 점수가 같은 학생은 3명이다.

ㄷ. A 학생을 나타내는 점의 순서쌍 (듣기 점수, 말하기 점수)는 (8, 6)이다. 즉, 평균은

$\frac{8+6}{2}=\frac{14}{2}=7$(점)

ㄹ. 주어진 산점도에서 듣기 점수의 평균을 구하면

$\frac{4\times3+5\times3+6\times3+7\times3+8\times4+9\times4}{20}=\frac{134}{20}$(점)

또한, 말하기 점수의 평균을 구하면

$\frac{2+4\times2+5\times2+6\times5+7\times3+8\times4+9\times2+10}{20}$

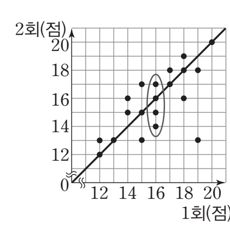
$=\frac{131}{20}$(점)

즉, $\frac{134}{20}>\frac{131}{20}$이므로 듣기 점수의 평균이 말하기 점수의 평균보다 높다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. **답** ⑤

02

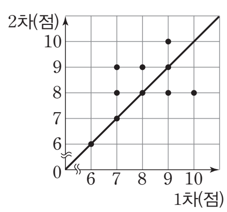
1회 수학 경시 대회에서
20점을 받은 학생이 1명, 19점을 받은 학생이 2명,
18점을 받은 학생이 3명, 17점을 받은 학생이 2명,
16점을 받은 학생이 4명이므로
1회 시험에서 9등인 학생은 16점을 받은 학생이다.
즉, 은비를 나타내는 점은 다음 그림의 타원 안에 있는 4개의 점 중 하나이다.



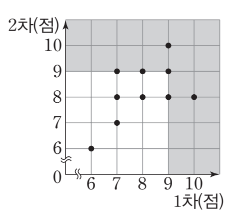
또한, 위의 그림과 같이 1회와 2회 점수가 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 2회 점수가 1회보다 더 높은 학생을 나타내는 점은 대각선의 위쪽에 있는 점이다.
따라서 은비를 나타내는 점은 그림의 타원 안의 점 중에서 가장 위에 있는 점이고, 은비의 1회 점수는 16점, 2회 점수는 17점이므로 그 합은
$16+17=33$(점) **답** 33점

03

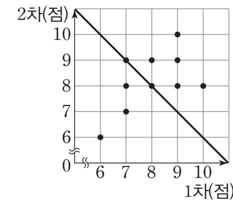
① 주어진 산점도에서 1차 점수가 높을수록 대체로 2차 점수도 높다.
② 다음 그림과 같이 1차와 2차에서 얻은 점수가 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 1차보다 2차에서 높은 점수를 얻은 선수를 나타내는 점은 대각선의 위쪽에 있는 점이다.



즉, 1차보다 2차에서 높은 점수를 얻은 선수는 4명이다.
③ 1차와 2차 점수 중 적어도 하나는 9점 이상인 선수를 나타내는 점은 다음 그림에서 어두운 부분(경계선 포함)에 있는 점이다.



즉, 1차와 2차 점수 중 적어도 하나는 9점 이상인 선수는 6명이다.
④ 10명의 선수들이 1차에서 얻은 점수의 평균은
$\frac{6+7+7+7+8+8+9+9+9+10}{10}=\frac{80}{10}=8$(점)
⑤ 다음 그림과 같이 1차와 2차에서 얻은 점수의 합이 16점인 점들을 이어서 대각선을 그으면 1차와 2차 점수의 평균이 8점 이상인 선수를 나타내는 점은 대각선 위의 점 또는 대각선의 위쪽에 있는 점이다.



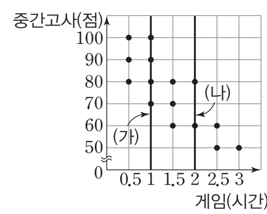
즉, 1차와 2차 점수의 평균이 8점 이상인 선수는 7명이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. **답** ④

blacklabel 특강 풀이첨삭

1차 점수를 x점, 2차 점수를 y점이라 하면 두 점수의 평균이 8점이므로
$\frac{x+y}{2}=8$, $x+y=16$ $\quad\therefore y=-x+16$
즉, 일차함수 $y=-x+16$의 그래프를 산점도에 나타내면 그래프 위에 있는 점은 모두 1차와 2차 점수의 평균이 8점인 선수를 나타낸다.
또한, 산점도에서 일차함수 $y=-x+16$의 그래프의 위쪽에 있는 점은 1차와 2차 점수의 평균이 8점보다 높은 선수를, 일차함수 $y=-x+16$의 그래프의 아래쪽에 있는 점은 1차와 2차 점수의 평균이 8점보다 낮은 선수를 나타낸다.

04

다음 그림과 같이 게임 시간을 나타내는 축에 수직인 두 직선 (가), (나)를 그어 보자.



위의 산점도에서 게임 시간이 1시간 이하인 학생을 나타내는 점은 직선 (가) 위의 점 또는 직선 (가)의 왼쪽에 있는 점이다.
즉, 게임 시간이 1시간 이하인 학생의 중간고사 점수의 평균은
$\frac{100+100+90+90+80+80+70}{7}=\frac{610}{7}$(점)
이므로 $a=\frac{610}{7}$ (가)

또한, 위의 산점도에서 게임 시간이 2시간 이상인 학생을 나타내는 점은 직선 (나) 위의 점 또는 직선 (나)의 오른쪽에 있는 점이다.
즉, 게임 시간이 2시간 이상인 학생의 중간고사 점수의 평균은
$\frac{80+60+60+50+50}{5}=\frac{300}{5}=60$(점)
이므로 $b=60$ (나)

$\therefore 7a-b=610-60=550$ (다)

답 550

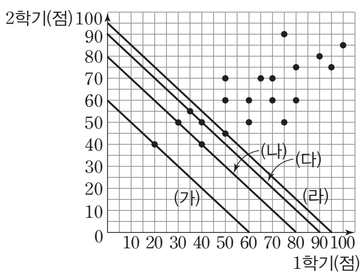
단계	채점 기준	배점
(가)	산점도에서 게임 시간이 1시간 이하인 학생을 나타내는 점을 찾고 a의 값을 구한다.	40%
(나)	산점도에서 게임 시간이 2시간 이상인 학생을 나타내는 점을 찾고 b의 값을 구한다.	40%
(다)	$7a-b$의 값을 구한다.	20%

05 해결단계

❶단계	민우를 제외한 20명 중 하위 5등을 찾고 그 학생들의 1학기 점수와 2학기 점수의 평균을 구한다.
❷단계	민우를 제외한 20명 중 하위 6등을 찾고 그 학생의 1학기와 2학기 점수의 평균을 구한다.
❸단계	m의 값의 범위를 구한다.

민우의 점수를 자료에 추가하여 민우의 등수가 하위 6등이 되려면 민우의 점수의 평균은 민우를 제외한 20명의 학생 중 하위 5등의 점수의 평균보다는 커야 하고, 하위 6등의 점수의 평균보다는 크지 않아야 한다.

다음 그림과 같이 1학기 점수와 2학기의 점수의 합이
60점인 직선 ㈎, 80점인 직선 ㈏,
90점인 직선 ㈐, 95점인 직선 ㈑를 그으면
직선 ㈎ 위의 한 점은 하위 1등인 학생 1명을,
직선 ㈏ 위의 두 점은 하위 2등인 학생 2명을,
직선 ㈐ 위의 두 점은 하위 4등인 학생 2명을,
직선 ㈑ 위의 한 점은 하위 6등인 학생 1명을 나타낸다.



즉, 하위 5등의 점수의 평균은 직선 ㈐ 위의 두 점 (35, 55), (40, 50)이 나타내는 학생의 평균이므로

$\frac{35+55}{2}=\frac{40+50}{2}=45$(점)

또한, 하위 6등의 점수의 평균은 직선 ㈑ 위의 점 (50, 45)가 나타내는 학생의 평균이므로

$\frac{50+45}{2}=47.5$(점)

따라서 민우의 등수가 하위 6등이 되도록 하는 m의 값의 범위는
$45<m\le 47.5$

답 $45<m\le 47.5$

06

각 산점도가 나타내는 상관관계와 동일한 상관관계를 나타내는 문장을 연결하면 다음과 같다.

ㄱ. 양의 상관관계 : ①, ②, ③
ㄴ. 음의 상관관계 : ④, ⑤
ㄷ, ㄹ. 상관관계가 없다.

따라서 문장의 두 변량에 대한 산점도를 찾아 바르게 연결한 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

07

주어진 산점도에서 키가 작고 몸무게도 대체로 가벼운 학생을 나타내는 점은 원점에 가장 가까운 점이다.
즉, 키가 작고 몸무게도 대체로 가벼운 학생은 A이다.
또한, 주어진 산점도에서 키에 비하여 몸무게가 대체로 가벼운 학생을 나타내는 점은 가장 우측 하단에 있는 점이다.
즉, 키에 비하여 몸무게가 대체로 가벼운 학생은 D이다.
학생 A의 키는 150 cm, 학생 D의 키는 165 cm이므로 두 학생의 키의 차는
$165-150=15$ (cm)

답 15 cm

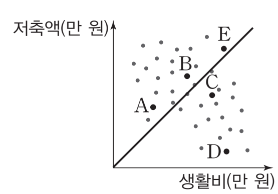
08

'열심히 노력하여 자신의 능력보다 더 좋은 성과를 낸 학생'은 낮은 지능 지수에 비하여 높은 성적을 거둔 학생을 의미한다.
따라서 주어진 산점도에서 가장 우측 하단에 있는 점이 나타내는 학생이므로 E이다.

답 ⑤

09

다음 그림과 같이 생활비와 저축액이 같은 점을 이어서 대각선을 그으면 두 변량의 차가 가장 큰 점은 대각선에서 가장 멀리 떨어진 점 D이다.



따라서 생활비과 저축액의 차이가 가장 큰 사람은 D이다.

답 D

10

각 산점도가 나타내는 상관관계는 다음과 같다.

ㄱ, ㅁ. 양의 상관관계

ㄴ, ㄷ. 상관관계가 없다.

ㄹ. 음의 상관관계

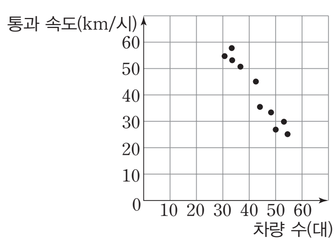
② ㄷ에서 y의 값의 범위에 비해 x의 값의 범위가 좁다. 즉, ㄷ의 산점도는 y의 값의 변화에도 x의 값은 대체로 일정함을 나타낸다.
이때, x의 값의 변화에도 y의 값은 대체로 일정함을 보여주는 산점도는 ㄴ이다.

④ ㅁ보다 ㄱ에서 점들이 한 직선에 더 가까이 분포되어 있으므로 ㅁ보다 ㄱ이 더 강한 상관관계를 나타낸다.

따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다. **답** ②, ④

11

주어진 표로 산점도를 만들면 다음 그림과 같으므로 차량 수와 통과 속도 사이에는 음의 상관관계가 있다.



① 주행 거리가 길수록 대체로 택시 요금도 많이 나오므로 양의 상관관계가 있다.

② 대류권에서 지면으로부터의 높이가 높아질수록 대체로 기온은 낮아지므로 음의 상관관계가 있다.

③ 직사각형의 둘레의 길이가 일정하면 가로의 길이가 길어질수록 세로의 길이는 짧아지므로 음의 상관관계가 있다.

④ 자동차의 속력이 올라갈수록 대체로 소요 시간은 짧아지므로 음의 상관관계가 있다.

⑤ 석유의 생산량이 늘어날수록 대체로 석유 가격은 내려가므로 음의 상관관계가 있다.

따라서 차량 수와 통과 속도 사이의 상관관계와 동일한 상관관계를 갖지 않는 것은 ①이다. **답** ①

12

ㄱ. 주어진 산점도에서 4개의 점 A, B, C, D 중 점 A가 가장 오른쪽에 있으므로 키가 가장 큰 학생은 A이다.

ㄴ. 주어진 산점도에서 4개의 점 A, B, C, D 중 점 D가 가장 아래쪽에 있으므로 발이 가장 작은 학생은 D이다.

ㄷ. 주어진 산점도에서 키에 비해 발이 큰 학생을 나타내는 점은 대각선의 위쪽에 있는 점이다. 4개의 점 A, B, C, D 중 대각선의 위쪽에 있는 점은 C이므로 키에 비해 발이 큰 학생은 C이다.

ㄹ. 주어진 산점도에서 키가 클수록 대체로 발의 크기도 크므로 키와 발의 크기 사이에는 양의 상관관계가 있다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ①

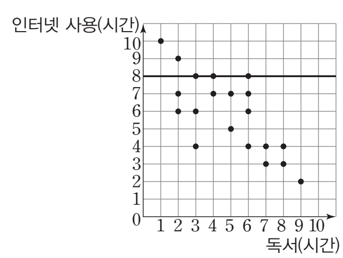
Step 3 종합 사고력 도전 문제 pp. 77~78

01 (1) 5명 (2) 30 % (3) 음의 상관관계 **02** 130점
03 (1) 30 % (2) 40 % **04** 70개 **05** 50 % **06** 5명
07 B, C **08** 5가지

01 해결단계

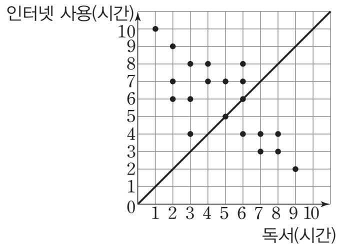
(1)	❶ 단계	산점도 위에 1주일 동안 인터넷 사용 시간이 8시간임을 나타내는 직선을 긋는다.
	❷ 단계	1주일 동안 인터넷을 8시간 이상 사용한 학생은 몇 명인지 구한다.
(2)	❸ 단계	산점도 위에 독서 시간과 인터넷 사용 시간이 같음을 나타내는 대각선을 긋는다.
	❹ 단계	독서 시간이 인터넷 사용 시간보다 더 많은 학생이 몇 명인지 구하고 해당 학생이 전체의 몇 %인지 구한다.
(3)	❺ 단계	독서 시간과 인터넷 사용 시간 사이에는 어떤 상관관계가 있는지 구한다.

(1) 다음 그림과 같이 인터넷 사용 시간이 8시간인 점들을 연결한 직선을 그으면 인터넷을 8시간 이상 사용한 학생을 나타내는 점은 이 직선 위의 점 또는 이 직선의 위쪽에 있는 점이다.



따라서 1주일 동안 인터넷을 8시간 이상 사용한 학생은 5명이다.

(2) 독서 시간과 인터넷 사용 시간이 같은 점들을 이어서 대각선을 그으면 독서 시간이 인터넷 사용 시간보다 더 많은 학생을 나타내는 점은 대각선의 아래쪽에 있는 점이다.



따라서 독서 시간이 인터넷 사용 시간보다 더 많은 학생은 6명이므로 이들이 전체에서 차지하는 비율은

$\frac{6}{20}\times100=30\,(\%)$

(3) 주어진 산점도에서 독서 시간이 늘어나면 대체로 인터넷 사용 시간이 줄어듦을 알 수 있다.
따라서 독서 시간과 인터넷 사용 시간 사이에는 음의 상관관계가 있다.

답 (1) 5명 (2) 30 % (3) 음의 상관관계

02 해결단계

❶ 단계	학생 10명의 수학 점수의 평균이 74점임을 이용하여 중복된 점에 해당하는 학생의 수학 점수를 구한다.
❷ 단계	학생 10명의 과학 점수의 평균이 72점임을 이용하여 중복된 점에 해당하는 학생의 과학 점수를 구한다.
❸ 단계	중복된 점에 해당하는 학생의 수학 점수와 과학 점수의 합을 구한다.

두 학생을 중복하여 나타내는 점의 순서쌍 (수학 점수, 과학 점수)를 (x, y) (x, y는 100 이하의 자연수)라 하자.
학생 10명의 수학 점수의 평균이 74점이므로

$\frac{60\times3+70\times2+80+90\times2+100+x}{10}=74$

$680+x=740$

$\therefore x=60$

또한, 학생 10명의 과학 점수의 평균이 72점이므로

$\frac{50\times2+70\times3+80\times3+100+y}{10}=72$

$650+y=720$

$\therefore y=70$

따라서 중복된 점에 해당하는 학생의 수학 점수는 60점, 과학 점수는 70점이므로 그 합은

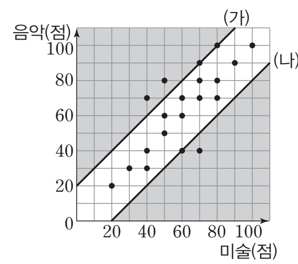
$60+70=130$(점)

답 130점

03 해결단계

(1)	❶ 단계	산점도 위에 두 과목의 점수의 차가 20점인 직선을 나타낸다.
	❷ 단계	주어진 조건을 만족시키는 점의 개수를 구하고 두 과목의 점수의 차가 20점 이상인 학생이 전체의 몇 %인지 구한다.
(2)	❸ 단계	산점도 위에 두 과목의 점수의 합이 140점인 직선을 나타낸다.
	❹ 단계	주어진 조건을 만족시키는 점의 개수를 구하고 두 과목의 점수의 합이 140점 이상인 학생이 전체의 몇 %인지 구한다.

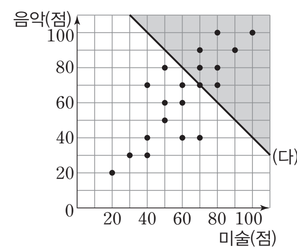
(1) 다음 그림과 같이 음악 점수가 미술 점수보다 20점 높은 점들을 연결한 직선 (가), 미술 점수가 음악 점수보다 20점 높은 점들을 연결한 직선 (나)를 그으면 두 과목의 점수의 차가 20점 이상인 학생을 나타내는 점은 두 직선 (가), (나) 위의 점 또는 어두운 부분에 있는 점이다.



따라서 두 과목의 점수의 차가 20점 이상인 학생은 $4+2=6$(명)이므로 이들이 전체에서 차지하는 비율은

$\frac{6}{20}\times100=30(\%)$

(2) 다음 그림과 같이 음악 점수와 미술 점수의 합이 140점인 점들을 연결한 직선 (다)를 그으면 두 과목의 점수의 합이 140점 이상인 학생을 나타내는 점은 직선 (다) 위의 점 또는 어두운 부분에 있는 점이다.



따라서 두 과목의 점수의 합이 140점 이상인 학생은 8명이므로 이들이 전체에서 차지하는 비율은

$\frac{8}{20}\times100=40(\%)$

답 (1) 30 % (2) 40 %

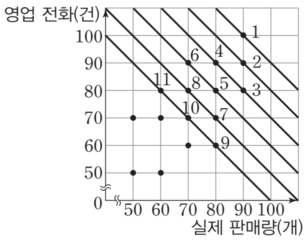
blacklabel 특강 풀이첨삭

산점도에서 미술 점수를 x점, 음악 점수를 y점이라 하면 (1)에서 두 점수의 차가 20점이므로
$|x-y|=20$, 즉 $x-y=20$ 또는 $-(x-y)=20$이므로
$y=x-20$ 또는 $y=x+20$
이 두 일차함수의 그래프를 산점도에 나타내면 순서대로 직선 (나), 직선 (가)가 된다.
같은 방법으로 (2)에서 두 점수의 합이 140점이므로
$x+y=140$ $\quad\therefore y=-x+140$
이 일차함수의 그래프를 산점도에 나타내면 직선 (다)가 된다.

04 해결단계

❶단계	산점도 위에 영업 전화 성공 건수와 실제 판매량의 합이 같은 점들을 연결한 직선을 그린다.
❷단계	산점도 위의 점들이 나타내는 직원의 등수를 구한다.
❸단계	10등인 직원을 나타내는 점을 찾아 해당 직원의 1년간 실제 판매량을 구한다.

영업 전화 성공 건수와 실제 판매량의 합이 같은 점들을 연결한 직선을 그으면 다음 그림과 같고 오른쪽 위에 있는 직선일수록 합이 높음을 나타낸다.



합이 같은 점이 여러 개인 경우에는 실제 판매량이 많은 직원이 등수가 더 높으므로 한 직선 위에 점이 여러 개일 때에는 오른쪽에 있는 점일수록 높은 등수의 직원을 나타낸다.
이와 같은 규칙에 따라 등수가 높은 직원을 나타내는 점부터 순서대로 1, 2, 3, ⋯, 10을 적으면 위의 그림과 같으므로 10등인 직원의 실제 판매량은 70개이다. **답** 70개

05 해결단계

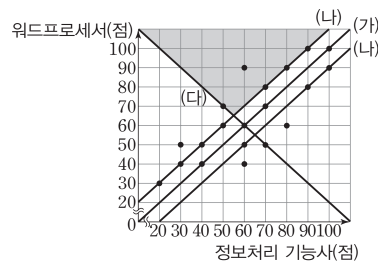
❶단계	각 선수의 순서쌍 (2점 슛의 개수, 3점 슛의 개수)를 구한다.
❷단계	❶단계에서 구한 순서쌍을 이용하여 순서쌍 (a, b)를 차례대로 구한다.
❸단계	$\frac{b}{a} \geq 1$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.
❹단계	조건을 만족시키는 선수들은 전체의 몇 %인지 구한다.

각 선수의 순서쌍 (2점 슛의 개수, 3점 슛의 개수)를 구하면
$(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$
$a=2\times$(2점 슛의 개수), $b=3\times$(3점 슛의 개수)이므로 위의 순서쌍을 이용하여 순서쌍 (a, b)를 차례대로 구하면
$(2, 0)$, $(4, 3)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$, $(8, 3)$, $(8, 6)$, $(8, 9)$, $(10, 12)$, $(10, 15)$, $(12, 12)$
$\frac{b}{a} \geq 1$, 즉 $b \geq a$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(6, 6)$, $(8, 9)$, $(10, 12)$, $(10, 15)$, $(12, 12)$
의 5개이다.
따라서 조건을 만족시키는 선수는 5명이므로 이들이 전체에서 차지하는 비율은
$\frac{5}{10}\times 100=50(\%)$ **답** 50 %

06 해결단계

❶단계	조건 ㈎를 만족시키는 부분을 확인한다.
❷단계	조건 ㈏를 만족시키는 부분을 확인한다.
❸단계	조건 ㈐를 만족시키는 부분을 확인한다.
❹단계	세 조건을 모두 만족시키는 부분을 확인하고 그 부분에 해당되는 학생 수를 구한다.

정보처리 기능사 시험 점수와 워드 프로세서 시험 점수가 같은 점들을 연결한 직선 ㈎, 두 시험 점수의 차가 10점인 점들을 연결한 두 직선 ㈏, 두 시험 점수의 합이 120점인 점들을 연결한 직선 ㈐를 그으면 다음 그림과 같다.

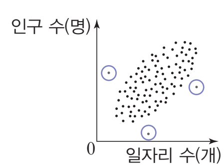


따라서 세 조건 ㈎, ㈏, ㈐를 모두 만족시키는 학생을 나타내는 점은 위의 그림의 어두운 부분 또는 그 경계선 위에 있는 점이므로 구하는 학생은 5명이다. **답** 5명

07 해결단계

❶단계	주어진 산점도의 점의 개수가 뜻하는 것을 확인한다.
❷단계	산점도에서 변량 사이의 상관관계를 확인한다.
❸단계	바르게 말한 학생을 모두 구한다.

A : 주어진 산점도에서 중복되는 점은 없으므로 점의 개수를 구하면 조사한 도시의 수를 알 수 있다. 즉, 학생 A의 말은 옳지 않다.
B : 일자리 수가 많은 도시는 대체로 인구 수가 많은 경향을 보이는 산점도인데 다음 그림의 표시한 점의 경우는 이 경향성에서 벗어나 있다.

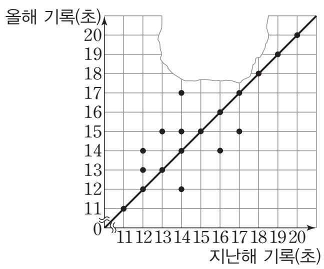


즉, 상관관계를 왜곡시키는 특이점으로 나타나는 도시가 존재함을 알 수 있으므로 학생 B의 말은 옳다.
C : 주어진 산점도에서 교통량이 많은 도시는 대체로 인구 수가 많은 경향을 보인다. 즉, 학생 C의 말은 옳다.
D : 교통량에 비해 일자리 수와 인구 수 사이에 더 강한 양의 상관관계를 나타내므로 교통량과 일자리 수 중 어느 하나만으로 인구 수를 예측한다고 하면 일자리 수를 택하는 것이 더 정확하다. 즉, 학생 D의 말은 옳지 않다.
따라서 바르게 말한 학생은 B, C이다. **답** B, C

08 해결단계

❶단계	산점도에서 찢어진 부분의 자료는 몇 개인지 확인하고 지난해 달리기 기록보다 올해 달리기 기록이 나빠진 선수가 나타내는 점을 찾는다.
❷단계	❶단계에서 찾은 자료에서 지난해 달리기 기록의 평균을 이용하여 찢어진 부분의 지난해 달리기 기록이 될 수 있는 경우를 구한다.
❸단계	❶단계에서 찾은 자료에서 올해 달리기 기록의 평균을 이용하여 찢어진 부분의 올해 달리기 기록이 될 수 있는 경우를 구한다.
❹단계	주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

우선, 산점도에서 나타난 자료의 개수가 18개이므로 2개의 자료를 구하면 된다.
지난해 기록과 올해 기록이 같은 점들을 연결한 대각선을 그으면 다음 그림과 같고, 올해 달리기 기록이 지난해보다 나빠진 학생을 나타내는 점은 대각선의 위쪽에 있는 점이다.



(i) 지난해 기록

찢어진 부분에 있는 두 명의 지난해 달리기 기록을 각각 a초, b초 ($a \le b$)라 하면 지난해 달리기 기록보다 올해 달리기 기록이 나빠진 선수들의 지난해 달리기 기록의 평균이 14초이므로

$$\frac{12+12+13+14+14+a+b}{7}=\frac{a+b+65}{7}=14$$

$a+b+65=98$ $\qquad \therefore a+b=33$

그런데 찢어진 부분의 지난해 기록은 13초 이상 18초 이하이므로 가능한 a, b의 값은

$a=15$, $b=18$ 또는 $a=16$, $b=17$

(ii) 올해 기록

찢어진 부분에 있는 두 명의 올해 달리기 기록을 각각 x초, y초 ($x \le y$)라 하면 지난해 달리기 기록보다 올해 달리기 기록이 나빠진 선수들의 올해 달리기 기록의 평균이 16초이므로

$$\frac{13+14+15+15+17+x+y}{7}=\frac{x+y+74}{7}=16$$

$x+y+74=112$ $\qquad \therefore x+y=38$

그런데 찢어진 부분의 올해 기록은 18초 이상 20초 이하이므로 가능한 x, y의 값은

$x=18$, $y=20$ 또는 $x=19$, $y=19$

$a=15$, $b=18$일 때, 찢어진 부분에 있는 두 명의 순서쌍 (지난해 기록, 올해 기록)은 다음 ①, ②, ③과 같이 3가지가 존재한다.

① (15, 18), (18 ,20)
② (15, 20), (18, 18)
③ (15, 19), (18, 19)

그런데 ②에서 기록이 (18, 18)인 학생은 기록이 나빠진 학생으로 볼 수 없고, 기록이 (18, 18)인 학생이 이미 산점도에 존재하므로 이 경우는 조건에 맞지 않다.
즉, $a=15$, $b=18$일 때 가능한 경우는 모두 2가지이다.
또한, $a=16$, $b=17$일 때, 찢어진 부분에 있는 두 명의 순서쌍 (지난해 기록, 올해 기록)은 다음 ④, ⑤, ⑥과 같이 3가지가 존재한다.

④ (16, 18), (17, 20)
⑤ (16, 20), (17, 18)
⑥ (16, 19), (17, 19)

따라서 구하는 가짓수는 $2+3=5$이다. **답** 5가지

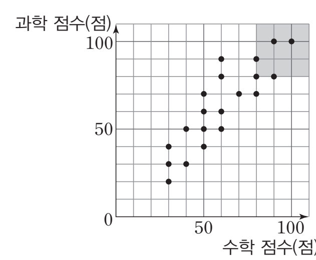
미리보는 학력평가 p. 79

1 ③	2 45	3 ⑤	4 ㄱ, ㄴ

1

ㄱ. 수학 점수가 높을수록 대체로 과학 점수도 높다. 즉, 수학 점수와 과학 점수 사이에는 양의 상관관계가 있다.

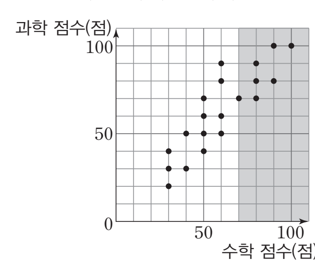
ㄴ. 수학 점수와 과학 점수가 모두 80점 이상인 학생을 나타내는 점은 다음 그림의 어두운 부분 또는 경계선 위의 점이다.



즉, 수학 점수와 과학 점수가 모두 80점 이상인 학생은 모두 5명이므로 이들의 상대도수는

$\frac{5}{20}=0.25$

ㄷ. 수학 점수가 70점 이상인 학생을 나타내는 점은 다음 그림의 어두운 부분 또는 경계선 위의 점이다.



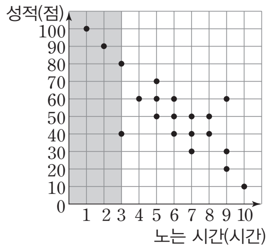
즉, 수학 점수가 70점 이상인 학생들의 과학 점수의 평균은

$\dfrac{70+70+80+80+90+100+100}{7}=\dfrac{590}{7}\neq 85$(점)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

2

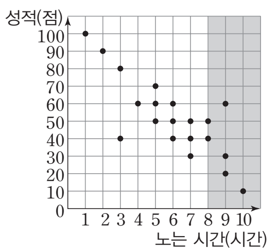
3시간 이하로 노는 학생을 나타내는 점은 다음 그림의 어두운 부분 또는 경계선 위의 점이다.



3시간 이하로 노는 학생들의 성적의 평균을 a점이라 하면

$a=\dfrac{100+90+80+40}{4}=\dfrac{155}{2}$

또한, 8시간 이상 노는 학생을 나타내는 점은 다음 그림의 어두운 부분 또는 경계선 위의 점이다.



8시간 이상 노는 학생들의 성적의 평균을 b점이라 하면

$b=\dfrac{50+40+60+30+20+10}{6}=35$

이때, a가 b의 $\dfrac{q}{p}$배이므로 $a=\dfrac{q}{p}\times b$

$\therefore \dfrac{q}{p}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{155}{2}\div 35=\dfrac{155}{2}\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{31}{14}$

따라서 $p=14$, $q=31$이므로 $p+q=45$ **답** 45

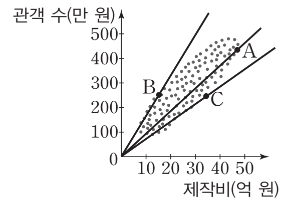
3

ㄱ. 산점도에서 점 A는 점 C보다 위에 있으므로 영화 A는 영화 C보다 관객 수가 많다.

ㄴ. 제작비가 많을수록 대체적으로 관객 수도 많아지는 경향을 보이므로 제작비와 관객 수 사이에는 양의 상관관계가 있다.

ㄷ. $\dfrac{(\text{관객 수})}{(\text{제작비})}$의 값은 세 점 A, B, C와 원점 O를 각각 연결한 직선의 기울기를 의미한다.

각 직선을 산점도 위에 그려 보면 다음 그림과 같다.



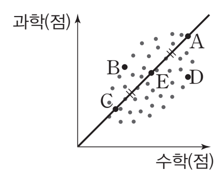
즉, 기울기가 가장 큰 직선은 점 B를 지나는 직선이므로 세 영화 A, B, C 중에서 $\dfrac{(\text{관객 수})}{(\text{제작비})}$의 값이 가장 큰 영화는 B이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

4

ㄱ. 주어진 산점도에서 수학 점수가 높으면 대체로 과학 점수도 높은 경향을 보이므로 양의 상관관계가 있다.

ㄴ. 다음 그림과 같이 선분 AC의 중점을 E라 하면 A와 C의 수학 점수의 평균은 점 E의 x좌표와 같다.



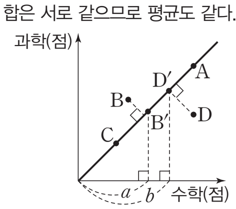
이때, 점 E보다 점 D가 더 오른쪽에 있으므로 A와 C의 수학 점수의 평균은 D의 수학 점수보다 낮다.

ㄷ. 두 점 B, D의 높이는 비슷하므로 B와 D의 과학 점수는 비슷하다. 하지만 점 B는 점 D의 왼쪽에 있으므로 B는 D보다 수학 점수가 낮다. 즉, D의 수학 점수와 과학 점수의 평균이 B보다 높다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ㄱ, ㄴ

blacklabel 특강 참고

두 과목의 점수가 같은 점을 이은 대각선에 수직인 직선 위에 있는 두 점이 나타내는 수학 점수와 과학 점수의 합은 서로 같으므로 평균도 같다.



따라서 위의 그림과 같이 주어진 산점도의 두 점 B, D에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 B′, D′이라 할 때, 두 점 B, D에서의 수학 점수와 과학 점수의 평균은 각각 B′, D′에서의 수학 점수와 과학 점수의 평균과 같다. 이때, 두 점 B′, D′은 두 과목의 점수가 같은 점을 이은 대각선 AC 위에 있으므로 평균은 각 과목의 점수와도 같다. 이를 각각 a점, b점이라 하면 점 B에서의 수학 점수와 과학 점수의 평균은 a점, 점 D에서의 수학 점수와 과학 점수의 평균은 b점이고 $a<b$이므로 학생 B는 학생 D보다 수학 점수와 과학 점수의 평균이 낮다.