b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

1등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

Speed Check

Ⅰ 경우의 수

01. 순열과 조합

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 pp.9~10	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.11~16	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.17	이것이 수능 pp.18~19
01 84 02 ② 03 5 04 ④ 05 ② 06 ④ 07 ① 08 ② 09 96 10 ③ 11 ③ 12 800 13 ④ 14 ② 15 330	01 288 02 3 03 1680 04 10 05 ④ 06 72 07 300 08 ④ 09 ④ 10 ② 11 714 12 1680 13 ② 14 420 15 52 16 ④ 17 725 18 35 19 ⑤ 20 296 21 45 22 10 23 ④ 24 83 25 49 26 92 27 ① 28 276 29 ③ 30 6 31 70 32 ① 33 ① 34 495 35 $\frac{135}{2}$ 36 ② 37 ② 38 ⑤ 39 450 40 ⑤ 41 ⑤ 42 256 43 ③ 44 ④	01 ① 02 12 03 900 04 -252 05 546 06 69 07 372	1 ② 2 48 3 180 4 6 5 32 6 45 7 455 8 25

Ⅱ 확률

02. 확률의 뜻과 활용

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.23	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.24~28	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.29	이것이 수능 p.30
01 ③ 02 $\frac{10}{27}$ 03 ③ 04 ② 05 $\frac{\pi}{8}$ 06 ① 07 ④ 08 ④	01 ① 02 ④ 03 38 04 $\frac{1}{6}$ 05 ② 06 $\frac{1}{85}$ 07 ① 08 53 09 $\frac{21}{64}$ 10 ④ 11 ③ 12 10 13 ③ 14 80 15 10 16 ④ 17 ⑤ 18 ⑤ 19 $\frac{1}{2}$ 20 ② 21 65 22 73 23 $\frac{8}{27}$ 24 ④ 25 13 26 ① 27 $\frac{115}{729}$ 28 ① 29 ③ 30 ⑤ 31 $\frac{2}{3}$ 32 $\frac{1061}{1250}$ 33 19 34 ③ 35 ⑤	01 1 02 $\frac{13}{128}$ 03 $\frac{7}{25}$ 04 $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$ 05 $\frac{25}{648}$ 06 $\frac{3}{70}$ 07 11	1 ④ 2 ② 3 11 4 19

03. 조건부확률

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.32	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.33~37	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.38	이것이 수능 pp.39~40
01 ① 02 $\frac{1}{3}$ 03 ⑤ 04 ② 05 ③ 06 ② 07 $\frac{19}{24}$ 08 $\frac{168}{625}$	01 $\frac{5}{8}$ 02 ④ 03 43 04 $\frac{3}{25}$ 05 ② 06 $\frac{366}{901}$ 07 $\frac{23}{30}$ 08 ① 09 $\frac{2}{7}$ 10 $\frac{1}{9}$ 11 ④ 12 ② 13 $\frac{3}{14}$ 14 455 15 ③ 16 $\frac{4}{27}$ 17 ⑤ 18 5 19 ④ 20 ③ 21 8 22 $\frac{9}{16}$ 23 $\frac{19}{60}$ 24 ⑤ 25 ⑤ 26 203 27 99 28 ③ 29 ① 30 182 31 ⑤ 32 447 33 $\frac{5}{96}$	01 $\frac{4}{27}$ 02 81 03 81 04 $\frac{7}{81}$ 05 6 06 $\frac{4}{19}$	1 50 2 28 3 ① 4 78 5 ② 6 ④ 7 43 8 ①

Ⅲ 통계

04. 확률분포

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 pp.45~46	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.47~51	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.52	이것이 수능 p.53
01 ② 02 ③ 03 ① 04 6 05 ⑤ 06 $-\frac{4}{3}$ 07 ① 08 16 09 59 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 5 14 ④ 15 ⑤	01 $\frac{7}{97}$ 02 $\frac{1}{2}$ 03 ③ 04 ③ 05 ④ 06 ⑤ 07 ② 08 21 09 2 10 $\sqrt{55}$ 11 23 12 $\frac{73}{300}$ 13 553원 14 ⑤ 15 $\frac{77}{20}$ 16 $\frac{343}{216}$ 17 ③ 18 4 19 ③ 20 ② 21 ⑤ 22 41 23 ① 24 ② 25 ③ 26 $\frac{9}{2}$ 27 7 28 45 29 ⑤ 30 $\frac{3}{4}$ 31 $-\frac{1}{4}$ 32 $\frac{2}{3}$ 33 65 34 ④ 35 ① 36 ③	01 ③ 02 776 03 $\frac{2^{99}}{3^{100}}$ 04 11 05 146 06 142 07 6	1 ② 2 ①

05. 이항분포와 정규분포

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 pp.55~56	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.57~62	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.63	이것이 수능 p.64
01 ③ 02 ③ 03 ⑤ 04 2464 05 ⑤ 06 ① 07 ③ 08 30 09 ⑤ 10 ③ 11 0.8413 12 0.02 13 ② 14 ① 15 0.0228	01 $\frac{8}{27}$ 02 ③ 03 ② 04 ⑤ 05 ③ 06 960 07 ⑤ 08 ④ 09 ④ 10 ③ 11 ② 12 8 13 ③ 14 ② 15 30 16 0.13 17 −11 18 830 19 ① 20 ⑤ 21 ⑤ 22 ③ 23 0.0228 24 ② 25 1.3651 26 42 27 $\frac{5}{4}$ 28 ③ 29 0.9772 30 73 31 75.36 32 ③ 33 $\frac{1}{3}$ 34 809 35 0.9772 36 55 37 0.0228 38 0.0668 39 668 40 ① 41 ③ 42 ④	01 $\frac{1}{6}$ 02 38 03 0.0228 04 650점 05 ㄱ 06 ㄱ, ㄴ 07 0.07	1 62 2 ③ 3 ⑤ 4 ③

06. 통계적 추정

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.66	Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.67~70	Step 3 / 종합 사고력 문제 p.71	이것이 수능 p.72
01 ③ 02 ④ 03 $\frac{1}{10}$ 04 $\frac{1}{2}$ 05 ⑤ 06 ② 07 64 08 ②	01 ③ 02 $\frac{4}{49}$ 03 ③ 04 $\frac{9}{32}$ 05 ② 06 26 07 $\frac{21}{100}$ 08 4 09 ⑤ 10 0.4 11 $2\sqrt{17}$ 12 64 13 400 14 ③ 15 0.0228 16 ② 17 ① 18 107.064 19 129 20 ③ 21 ③ 22 32 23 ② 24 427 25 960 26 ① 27 ② 28 ④	01 88 02 ㄱ 03 ㄱ, ㄴ 04 11 05 ① 06 577500원	1 25 2 ① 3 12 4 25

I 경우의 수

01 순열과 조합

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 9~10

01 84	02 ②	03 5	04 ④	05 ②
06 ④	07 ①	08 ②	09 96	10 ③
11 ③	12 800	13 ④	14 ②	15 330

01 6명의 가족이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

3명의 아들이 모두 이웃하여 앉는 방법의 수는 3명의 아들을 한 사람으로 생각하고 원탁에 앉힌 후 3명의 아들끼리 자리를 바꾸면 되므로

$(4-1)!\times\underbrace{3!}_{\text{3명의 아들끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수}}=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$120-36=84$ 답 84

02 중앙의 작은 원을 칠하는 경우의 수는 9가지 색 중 1가지를 택하는 것과 같으므로 ${}_9C_1=9$

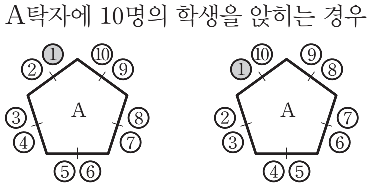
중앙의 작은 원을 제외한 8개의 영역을 칠하는 경우의 수는 $(8-1)!=7!$

따라서 구하는 경우의 수는 $9\times7!$ 답 ②

03 10명의 학생을 원형으로 앉히는 경우의 수는

$(10-1)!=9!$

(i) A탁자에 10명의 학생을 앉히는 경우

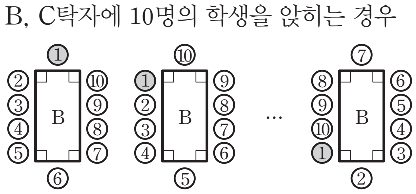


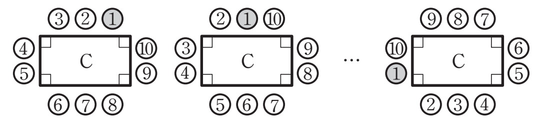
정오각형 모양의 탁자에 10명의 학생을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 기준이 되는 좌석의 위치에 따라 2개씩 다른 경우가 존재한다.

즉, 그 경우의 수는

$9!\times2$

(ii) B, C탁자에 10명의 학생을 앉히는 경우



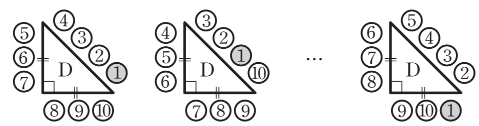


직사각형 모양의 탁자에 10명의 학생을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 기준이 되는 좌석의 위치에 따라 5개씩 다른 경우가 존재한다.

즉, 그 경우의 수는 각각

$9!\times5$

(iii) D탁자에 10명의 학생을 앉히는 경우



직각이등변삼각형 모양의 탁자에 10명의 학생을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 기준이 되는 좌석의 위치에 따라 10개씩 다른 경우가 존재한다.

즉, 그 경우의 수는

$9!\times10$

(i), (ii), (iii)에서 D탁자에 앉을 때 경우의 수가 최대, A탁자에 앉을 때 경우의 수가 최소이므로

$p=9!\times10$, $q=9!\times2$

$\therefore \dfrac{p}{q}=\dfrac{9!\times10}{9!\times2}=5$ 답 5

blacklabel 특강 참고

네 탁자 A, B, C, D 모두 10명의 학생이 둘러앉는 다각형 모양의 탁자이므로 원순열의 수 $(10-1)!=9!$에 한 좌석을 기준으로 하여 다르게 앉을 수 있는 경우의 수를 곱하여 전체 경우의 수를 구한다. 이때, 원순열의 수 $9!$은 모두 같으므로 탁자에 둘러앉는 한 가지 경우에 대하여 다르게 앉을 수 있는 방법의 수만 계산하여 $\dfrac{p}{q}$의 값을 계산할 수 있다. 네 탁자 A, B, C, D에 다르게 앉는 방법의 수는 각각 2, 5, 5, 10이므로 $\dfrac{p}{q}=\dfrac{10}{2}=5$이다.

04 10개의 위치에 각각 서로 다른 깊이의 3가지 음각을 새겨 열쇠를 만들 수 있으므로 만들 수 있는 열쇠의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 열쇠의 개수는

${}_3\Pi_{10}=3^{10}$ 답 ④

05 4개의 문자로 중복을 허용하여 만든 네 문자로 된 암호의 개수는 4개의 문자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

문자 H를 포함하지 않는 암호의 개수는 문자 H를 제외한 나머지 3개의 문자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 암호의 개수는

$256-81=175$ 답 ②

06

2, 2, 3, 3, 4, 4, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중에 같은 것이 각각 2개, 2개, 3개씩 들어 있는 순열의 수와 같으므로

$\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$

이때, 이웃한 두 자리의 수의 곱이 모두 짝수이려면 홀수끼리 서로 이웃하지 않아야 한다.

숫자 3이 적힌 카드가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 숫자 3이 적힌 카드 두 장을 하나로 묶어서 나열하면 되므로 6개 중에 같은 것이 각각 2개, 3개씩 들어 있는 순열의 수와 같다. 즉,

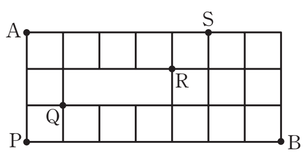
$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-60=150$

답 ④

07



위의 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A지점에서 B지점까지 가는 최단 경로는

A → P → B, A → Q → B,

A → R → B, A → S → B

중 하나이고 각 경우의 수는 다음과 같다.

(i) A → P → B의 경우 : $1\times1=1$

(ii) A → Q → B의 경우 : $\dfrac{3!}{2!1!}\times\dfrac{7!}{6!1!}=21$

(iii) A → R → B의 경우 : $\dfrac{5!}{4!1!}\times\dfrac{5!}{3!2!}=50$

(iv) A → S → B의 경우 : $1\times\dfrac{5!}{2!3!}=10$

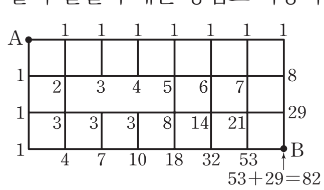
(i)~(iv)에서 구하는 최단 경로의 수는

$1+21+50+10=82$

답 ①

• 다른풀이 •

다음 그림과 같이 일일이 세는 방법도 가능하다.



08

서로 다른 세 종류의 공에서 중복을 허용하여 5개의 공을 택하는 경우의 수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

이때, 빨간 공 4개, 파란 공 8개, 노란 공 12개에서 빨간 공 5개를 택하는 경우는 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

1가지

$21-1=20$

답 ②

09

x, y, z, s, t가 모두 자연수이므로 $x+y+z$, $s+t$도 자연수이다.

두 자연수를 곱하여 35가 나오는 경우는

$35=1\times35=5\times7=7\times5=35\times1$

이때, $x+y+z\geq3$, $s+t\geq2$이므로 가능한 경우는

$x+y+z=7$, $s+t=5$ 또는 $x+y+z=5$, $s+t=7$

(i) $x+y+z=7$, $s+t=5$일 때,

$x+y+z=7$에서 $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$x'+y'+z'=4$ (단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_4$

$s+t=5$에서 $s=s'+1$, $t=t'+1$ (s', t'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$s'+t'=3$ (단, s', t'은 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (s', t')의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_2H_3$

즉, 구하는 경우의 수는

$${}_3H_4\times{}_2H_3={}_{3+4-1}C_4\times{}_{2+3-1}C_3$$
$$={}_6C_4\times{}_4C_3={}_6C_2\times{}_4C_1$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}\times4=60$$

(ii) $x+y+z=5$, $s+t=7$일 때,

(i)과 같은 방법으로 계산하면

방정식 $x+y+z=5$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_3H_2$, 방정식 $s+t=7$을 만족시키는 순서쌍 (s, t)의 개수는 ${}_2H_5$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3H_2\times{}_2H_5={}_{3+2-1}C_2\times{}_{2+5-1}C_5$$
$$={}_4C_2\times{}_6C_5={}_4C_2\times{}_6C_1$$
$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times6=36$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$60+36=96$

답 96

10

$10=1\times10=2\times5=5\times2=10\times1$이므로 두 조건 (가), (나)에 의하여 다음과 같이 경우를 나누어 함수 f의 개수를 구할 수 있다.

(i) $f(3)=1$, $f(4)=10$일 때, ← $f(n)\leq f(n+1)$이므로 $f(3)=10$, $f(4)=1$일 수는 없다.

$f(1)\leq f(2)\leq f(3)$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 자연수는 1이고, $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 자연수는 10이다.

즉, 함수 f의 개수는

$1\times1=1$

(ii) $f(3)=2$, $f(4)=5$일 때, ← $f(n)\leq f(n+1)$이므로 $f(3)=5$, $f(4)=2$일 수는 없다.

$f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 자연수는 1 또는 2이

고, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑은 후 크기 순서대로 $f(1)$, $f(2)$의 값으로 정하면 된다.
또한, $f(5)$, $f(6)$의 값이 될 수 있는 자연수는 5, 6, 7, 8, 9, 10이고, 이 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑은 후 크기 순서대로 $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하면 된다.
즉, 함수 f의 개수는

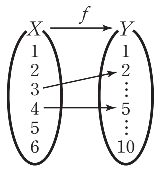
$${}_2\mathrm{H}_2\times{}_6\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2\times{}_{6+2-1}\mathrm{C}_2$$
$$={}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_2$$
$$=3\times\frac{7\times6}{2\times1}=63$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$1+63=64$ 답 ③

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

경우의 수는 집합, 함수 단원과 연계될 수 있다. 특히, 함수 단원에서 함수, 일대일함수, 일대일대응의 정의가 자주 이용되므로 이들 정의가 어떤 의미를 갖고 있는지 정확하게 파악해야 한다.
두 집합 X, Y에 대하여
- 함수 : 모든 X의 각 원소는 Y의 원소 중에서 하나를 선택한다.
- 일대일함수 : X의 서로 다른 두 원소가 Y의 같은 한 원소를 선택할 수 없다.
- 일대일대응 : 일대일함수이고, Y의 모든 원소가 X의 원소에 의하여 선택된다.

이 문제는 함수의 정의에 주어진 조건 (가), (나)를 적용시키는 문제이다.
조건 (가)에서 $f(3)f(4)=10$이므로
$\{f(3), f(4)\}=\{2, 5\}$ 또는 $\{f(3), f(4)\}=\{1, 10\}$
이때, 조건 (나)에 의하여
$f(3)=1$, $f(4)=10$ 또는 $f(3)=2$, $f(4)=5$
(i) $f(3)=1$, $f(4)=10$인 경우
조건 (나)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=1$,
$f(4)=f(5)=f(6)=10$이므로 함수 f의 개수는 1이다.
(ii) $f(3)=2$, $f(4)=5$인 경우
순서쌍 $(f(1), f(2))$는 (1, 1), (1, 2), (2, 2)의 3개
순서쌍 $(f(5), f(6))$은 (5, 5), (6, 6), ⋯, (10, 10)과 5, 6, ⋯, 10 중에서 2개를 택하여 작은 값이 $f(5)$, 큰 값이 $f(6)$이면 되므로 순서쌍 $(f(5), f(6))$의 개수는



$$6+{}_6\mathrm{C}_2=6+\frac{6\times5}{2\times1}=21$$
즉, 함수 f의 개수는 $3\times21=63$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$1+63=64$

11 다항식 $(x+2)^{19}$의 전개식에서
x^k의 계수는 ${}_{19}\mathrm{C}_k\times2^{19-k}$,
x^{k+1}의 계수는 ${}_{19}\mathrm{C}_{k+1}\times2^{19-(k+1)}$
이므로 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 크려면

$${}_{19}\mathrm{C}_k\times2^{19-k}>{}_{19}\mathrm{C}_{k+1}\times2^{19-(k+1)}$$
$$\frac{19!}{k!(19-k)!}\times2^{19-k}>\frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}\times2^{18-k}$$
$$\frac{2}{19-k}>\frac{1}{k+1}$$

$0\le k\le18$이므로 위의 부등식의 양변에 $(19-k)(k+1)$을 곱하면 $2(k+1)>19-k$

$3k>17$ $\quad\therefore k>\frac{17}{3}=5.66\times\times$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. 답 ③

12 $(1+x)^4$의 전개식에서 일반항은 ${}_4\mathrm{C}_rx^r$ ($0\le r\le4$인 정수)이고 $(2+x)^5$의 전개식에서 일반항은 ${}_5\mathrm{C}_s2^{5-s}x^s$ ($0\le s\le5$인 정수)이므로 $(1+x)^4(2+x)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r{}_5\mathrm{C}_s\,2^{5-s}x^{r+s}$ (단, $0\le r\le4$, $0\le s\le5$인 정수)
이때, x^2항은 $r+s=2$, x항은 $r+s=1$일 때이다.
(i) $r+s=2$를 만족시키는 순서쌍 (r, s)는
(0, 2), (1, 1), (2, 0)이므로 x^2의 계수는
$${}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_2\times2^3+{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1\times2^4+{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_0\times2^5$$
$$=1\times\frac{5\times4}{2\times1}\times8+4\times5\times16+\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times32$$
$$=80+320+192=592=a$$
(ii) $r+s=1$을 만족시키는 순서쌍 (r, s)는
(0, 1), (1, 0)이므로 x의 계수는
$${}_4\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_1\times2^4+{}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_0\times2^5$$
$$=1\times5\times16+4\times1\times32$$
$$=80+128=208=b$$
(i), (ii)에서
$a+b=592+208=800$ 답 800

13 $(x-y+2z)^4=\{(x-y)+2z\}^4$의 전개식에서 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r(x-y)^{4-r}(2z)^r={}_4\mathrm{C}_r2^r(x-y)^{4-r}z^r$
(단, $0\le r\le4$인 정수)
이때, xyz^2항은 $r=2$일 때이므로
$${}_4\mathrm{C}_22^2(x-y)^2z^2=\frac{4\times3}{2\times1}\times4\times(x-y)^2z^2$$
$$=24(x-y)^2z^2$$
그런데 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$이므로 $(x-y)^2$에서 xy의 계수는 -2이다.
따라서 구하는 xyz^2의 계수는
$24\times(-2)=-48$ 답 ④

• 다른풀이 •
$(x-y+2z)^4$의 전개식에서 일반항은
$$\frac{4!}{p!q!r!}x^p(-y)^q(2z)^r=\frac{4!}{p!q!r!}(-1)^q2^rx^py^qz^r$$
(단, $p+q+r=4$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$인 정수)
이때, xyz^2항은 $p=1$, $q=1$, $r=2$일 때이므로 구하는 계수는
$$\frac{4!}{1!1!2!}\times(-1)\times2^2=12\times(-1)\times4=-48$$

14 ${}_{30}\mathrm{C}_0-{}_{30}\mathrm{C}_1+{}_{30}\mathrm{C}_2-\cdots+{}_{30}\mathrm{C}_{28}-{}_{30}\mathrm{C}_{29}+{}_{30}\mathrm{C}_{30}=0$이므로
$${}_{30}\mathrm{C}_1-{}_{30}\mathrm{C}_2+{}_{30}\mathrm{C}_3-{}_{30}\mathrm{C}_4+\cdots-{}_{30}\mathrm{C}_{28}$$
$$={}_{30}\mathrm{C}_{30}-{}_{30}\mathrm{C}_{29}+{}_{30}\mathrm{C}_0$$
$$=1-30+1=-28$$ 답 ②

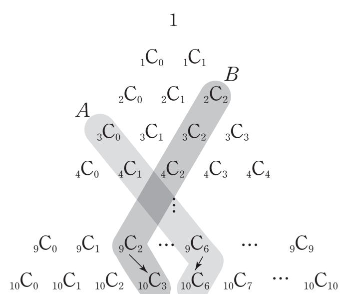
15 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$를 이용하여 A, B를 계산하면

$$A={}_3C_0+{}_4C_1+\cdots+{}_9C_6$$
$$=\underbrace{({}_4C_0+{}_4C_1)}_{={}_5C_1}+\cdots+{}_9C_6\ (\because\ {}_3C_0={}_4C_0=1)$$
$$=\underbrace{({}_5C_1+{}_5C_2)}_{={}_6C_2}+\cdots+{}_9C_6$$
$$\vdots$$
$$={}_9C_5+{}_9C_6={}_{10}C_6$$
$$B={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_9C_2$$
$$=\underbrace{({}_3C_3+{}_3C_2)}_{={}_4C_3}+{}_4C_2+\cdots+{}_9C_2\ (\because\ {}_2C_2={}_3C_3=1)$$
$$=\underbrace{({}_4C_3+{}_4C_2)}_{={}_5C_3}+\cdots+{}_9C_2$$
$$\vdots$$
$$={}_9C_3+{}_9C_2={}_{10}C_3$$
$$\therefore\ A+B={}_{10}C_6+{}_{10}C_3$$
$$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3={}_{11}C_4$$
$$=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

답 330

• 다른풀이 •

파스칼의 삼각형을 확장하여 하키 스틱 패턴을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.



blacklabel 특강 참고

파스칼의 삼각형과 하키 스틱 패턴

위의 그림과 같이 파스칼의 삼각형에서 각 행의 첫 번째 수나 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향에 배열된 수들을 모두 더한 값은 그 다음 행의 오른쪽이나 왼쪽에 있는 수와 같다. 이것을 파스칼의 삼각형에 표시하면 하키 스틱 모양이 되므로 하키 스틱 패턴이라고 한다.

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 11~16

01 288	02 3	03 1680	04 10	05 ④
06 72	07 300	08 ④	09 ④	10 ②
11 714	12 1680	13 ②	14 420	15 52
16 ④	17 725	18 35	19 ⑤	20 296
21 45	22 10	23 ④	24 83	25 49
26 92	27 ①	28 276	29 ③	30 6
31 70	32 ①	33 ①	34 495	35 $\frac{135}{2}$
36 ②	37 ②	38 ⑤	39 450	40 ⑤
41 ⑤	42 256	43 ③	44 ④	

01 조건 ㈎에서 학생은 학생끼리, 선생님은 선생님끼리 이웃하여 앉아야 하므로 학생 4명, 선생님 4명을 각각 한 사람으로 생각하면 2명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(2-1)!=1$

학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$4!=24$

조건 ㈏에서 특정한 선생님 2명이 이웃하여 앉지 않아야 하므로 선생님끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 선생님 4명이 자리를 바꾸는 방법의 수에서 특정한 선생님 2명이 이웃하여 앉는 방법의 수를 빼면 된다.

즉, 그 방법의 수는

$4!-3!\times2=24-12=12$

따라서 구하는 방법의 수는

$1\times24\times12=288$

답 288

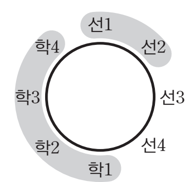
• 다른풀이 •

학생 4명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(5-1)!=4!$이고, 학생 4명끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!$

즉, 학생 4명이 이웃하여 앉는 방법의 수는

$4!\times4!$ ……㉠

오른쪽 그림과 같이 학생 4명과 특정한 선생님 2명을 각각 한 사람으로 생각하여 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(4-1)!=3!$이고, 학생 4명끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!$,



특정한 선생님 2명끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!$

즉, 학생 4명이 이웃하여 앉고 특정한 선생님 2명끼리 이웃하여 앉는 방법의 수는

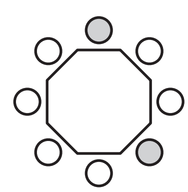
$3!\times4!\times2!$ ……㉡

따라서 구하는 방법의 수는 ㉠$-$㉡이므로

$$4!\times4!-3!\times4!\times2!=4!\times(4!-3!\times2!)$$
$$=24\times12=288$$

02 (i) A와 B 사이에 2명의 학생이 앉을 때,

오른쪽 그림과 같이 색칠한 곳에 A와 B가 앉는 방법의 수는 2



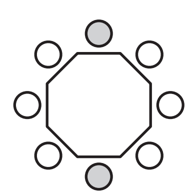
나머지 자리에 6명의 학생이 앉는 방법의 수는 $6!$

즉, 구하는 방법의 수는

$2\times6!$

(ii) A와 B 사이에 3명의 학생이 앉을 때,

오른쪽 그림과 같이 색칠한 곳에 A와 B가 앉는 방법의 수는 1



나머지 자리에 6명의 학생이 앉는 방법의 수는 $6!$

즉, 구하는 방법의 수는 $6!$

(i), (ii)에서 A와 B 사이에 2명 또는 3명의 학생이 앉는 방법의 수는

$2\times6!+6!=3\times6!$

$\therefore\ k=3$

답 3

03 (ⅰ) 칠면체의 밑면인 정삼각형에 색을 칠하는 방법의 수는 7개의 색 중에서 1개의 색을 택하면 되므로 ${}_7C_1=7$

(ⅱ) 밑면에 칠한 색을 제외한 6개의 색에서 3개의 색을 선택한 후, 회전을 고려하여 위쪽에 있는 3개의 정삼각형을 칠하는 방법의 수는
원순열

$${}_6C_3\times(3-1)!=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times2=40$$

(ⅲ) (ⅰ), (ⅱ)에서 사용한 4개의 색을 제외한 3개의 색으로 3개의 등변사다리꼴을 칠하는 방법의 수는
원순열이 아니다.
$3!=6$

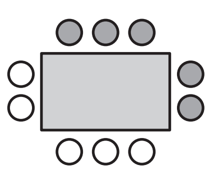
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 방법의 수는
$7\times40\times6=1680$ 답 1680

04 (ⅰ) 서로 다른 4가지 색 A, B, C, D를 모두 사용하여 칠하는 경우
먼저 색 A를 밑면에 칠하고, 또 다른 밑면에 다시 색 A를 칠하는 경우와 색 A를 칠하지 않는 경우로 나누어 생각할 수 있다.
① 또 다른 밑면에 색 A를 칠하는 경우
옆면을 서로 다른 3가지 색 B, C, D로 칠해야 하므로 마주보는 두 면을 같은 색으로 칠해야 한다.
즉, 남은 3가지 색 중에서 마주보는 두 면에 칠하는 색을 정하는 방법의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$
② 또 다른 밑면에 색 A를 칠하지 않는 경우
또 다른 밑면에 칠할 색을 정하는 방법의 수가 ${}_3C_1=3$이고, 옆면에 나머지 두 가지 색을 두 번씩 칠해야 하는데 그 방법의 수는 1가지뿐이다.
즉, 그 방법의 수는 $3\times1=3$
①, ②에서 구하는 방법의 수는
$3+3=6$

(ⅱ) 서로 다른 3가지 색을 사용하여 칠하는 경우
택한 3가지 색을 A, B, C라 하자.
4가지 색 중에서 3가지 색을 택하는 경우의 수가
${}_4C_3={}_4C_1=4$
먼저 색 A를 밑면에 칠하면 또 다른 밑면에도 반드시 색 A를 칠해야 한다.
그리고 옆면에 나머지 두 가지 색을 마주보는 면에 같은 색으로 칠해야 하므로 방법의 수는 1가지뿐이다.
즉, 구하는 방법의 수는 $4\times1=4$

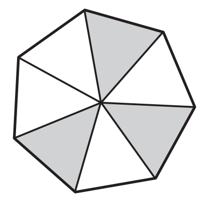
(ⅰ), (ⅱ)에서 정육면체를 칠하는 방법의 수는
$6+4=10$ 답 10

05 10개의 의자가 있는 직사각형 모양의 탁자에 A가 앉을 수 있는 방법의 수는 오른쪽 그림과 같이 5가지가 있다.



이때, B가 앉을 수 있는 방법의 수는 A와 이웃하지 않게 앉아야 하므로 A가 앉은 자리와 A의 양 옆 자리를 제외한 7가지
남은 8개의 자리 중에서 나머지 3명의 학생이 앉는 방법의 수는 ${}_8P_3$가지
따라서 구하는 방법의 수는
$5\times7\times{}_8P_3=5\times7\times(8\times7\times6)$
$=11760$ 답 ④

06 1부터 7까지의 자연수 중에서 서로소가 아닌 수의 집합은 {2, 4, 6}, {3, 6}
서로소가 아닌 수를 서로 이웃하지 않게 우산의 천에 써넣어야 하므로 2, 4, 6과 3, 6을 각각 서로 이웃하지 않게 써넣어야 한다.
이때, 2, 4, 6을 서로 이웃하지 않게 써넣으려면 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 써넣어야 하므로 그 방법의 수는
3!



3은 2, 4, 6이 적힌 영역과 6이 적힌 영역의 양쪽 영역을 제외한 곳에 써넣을 수 있으므로 방법의 수는 2
1, 5, 7은 나머지 세 영역에 써넣으면 되므로 방법의 수는 3!
따라서 구하는 방법의 수는
$3!\times2\times3!=72$ 답 72

07 (ⅰ) 정육면체 A의 겉면을 칠하는 방법의 수
먼저 밑면에 한 가지 색을 칠하고 또 다른 밑면에 색을 칠하는 방법의 수는 5가지이다.
또한, 나머지 4가지의 색으로 옆면을 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
$\therefore n(A)=5\times6=30$

(ⅱ) 직육면체 B의 겉면을 칠하는 방법의 수
직육면체 B는 가로의 길이, 세로의 길이를 나타내는 순서쌍이 (1, 1)인 면 2개와 (2, 1)인 면 4개로 이루어져 있다.
서로 다른 6가지의 색 중에서 (1, 1)인 면 2개에 칠할 2가지 색을 정하는 방법의 수는
${}_6P_2=6\times5=30$
이때, 각 경우에 대하여 회전하여 같은 경우가 2가지씩 생기므로
$\frac{30}{2}=15$
또한, 나머지 4가지의 색으로 (2, 1)인 면 4개를 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
$\therefore n(B)=15\times6=90$

(iii) 직육면체 C의 겉면을 칠하는 방법의 수

직육면체 C는 가로의 길이, 세로의 길이를 나타내는 순서쌍이 (1, 2)인 면 2개, (3, 1)인 면 2개, (3, 2)인 면 2개로 이루어져 있다.

먼저 (1, 2)인 면에 한 가지 색을 칠할 때, 그 맞은 편 면에 색을 칠하는 방법의 수는 5가지이고, 나머지 4가지의 색으로 옆면을 칠하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2}=12$이므로 그 방법의 수는 $5\times12=60$

같은 모양인 면이 2개씩 있으므로

같은 방법으로 먼저 (3, 1)인 면, (3, 2)인 면에 한 가지 색을 칠하는 경우에 대해서도 각각 60가지씩 있으므로

$n(\mathrm{C})=60\times3=180$

(i), (ii), (iii)에서

$n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})=30+90+180$
$=300$

답 300

08 (i) 한 자리의 수가 적힌 카드 중에서 숫자 0을 포함하지 않은 수가 적힌 카드는

1, 2, $\cdots$, 9의 9장

(ii) 두 자리의 수가 적힌 카드 중에서 숫자 0을 포함하지 않은 수가 적힌 카드의 장수는 서로 다른 9개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_9\Pi_2=9^2=81$

(iii) 세 자리의 수가 적힌 카드 중에서 숫자 0을 포함하지 않은 수가 적힌 카드의 장수는 서로 다른 9개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_9\Pi_3=9^3=729$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 카드의 장수는

$9+81+729=819$

답 ④

• 다른풀이 •

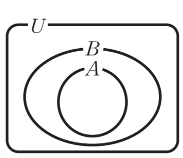
숫자 0을 포함한 수가 적힌 카드의 장수는 다음과 같다.

10, 20, 30, $\cdots$, 90의 9장
100, 101, 102, $\cdots$, 109의 10장
110, 120, 130, $\cdots$, 190의 9장
200, 201, 202, $\cdots$, 209의 10장
210, 220, 230, $\cdots$, 290의 9장
300, 301, 302, $\cdots$, 309의 10장
⋮
910, 920, 930, $\cdots$, 990의 9장

따라서 구하는 카드의 장수는

$999-(9+19\times9)=999-180=819$

09 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B\subset U$를 만족시키려면 벤다이어그램이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



전체집합 U의 원소의 개수가 4이므로 $U=\{a, b, c, d\}$라 하면 네 원소 a, b, c, d가 위의 그림의 세 영역 A, $B-A$, $U-B$ 중 하나에 포함되어야 한다.

따라서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

답 ④

• 다른풀이 •

전체집합 U의 원소의 개수가 4이므로 부분집합 B의 원소의 개수는 0, 1, 2, 3, 4이어야 한다.

(i) $n(B)=0$일 때,

$B=\varnothing$이므로 $A\subset B$를 만족시키려면 $A=\varnothing$이어야 한다.

즉, 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이다.

(ii) $n(B)=1$일 때,

집합 U의 4개의 원소 중에서 집합 B의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때, $A\subset B$를 만족시키려면 집합 A는 집합 B의 부분집합이어야 하므로 그 개수는 2^1

즉, 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4\times2=8$

(iii) $n(B)=2$일 때,

집합 U의 4개의 원소 중에서 집합 B의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

이때, $A\subset B$를 만족시키려면 집합 A는 집합 B의 부분집합이어야 하므로 그 개수는 2^2

즉, 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6\times2^2=24$

(iv) $n(B)=3$일 때,

집합 U의 4개의 원소 중에서 집합 B의 원소 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

이때, $A\subset B$를 만족시키려면 집합 A는 집합 B의 부분집합이어야 하므로 그 개수는 2^3

즉, 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4\times2^3=32$

(v) $n(B)=4$일 때,

$B\subset U$를 만족시키려면 $B=U$이어야 하므로 집합 B로 가능한 경우의 수는 1가지

이때, $A\subset B$를 만족시키려면 집합 A는 집합 B의 부분집합이어야 하므로 그 개수는 2^4

즉, 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1\times2^4=16$

(i)~(v)에서 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1+8+24+32+16=81$

10 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 a, b, c, d라 하면 a, b, c, d의 최댓값이 k이므로 주사위의 눈의 수가 1부

터 k까지 나오는 경우의 수에서 주사위의 눈의 수가 1부터 $k-1$까지 나오는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 눈의 수의 최댓값이 1인 경우

네 번 던져 네 번 모두 1이 나와야 하므로 경우의 수는 1가지이다.

$\therefore S_1=1$

(ii) 눈의 수의 최댓값이 3인 경우

네 번 던져 눈의 수가 모두 1, 2, 3 중에 하나인 경우의 수는 ${}_3\Pi_4$이고, 네 번 던져 눈의 수가 모두 1, 2 중에 하나인 경우의 수는 ${}_2\Pi_4$이므로

$S_3={}_3\Pi_4-{}_2\Pi_4$

$=3^4-2^4$

$=81-16=65$

(iii) 눈의 수의 최댓값이 5인 경우

네 번 던져 눈의 수가 모두 1, 2, 3, 4, 5 중에 하나인 방법의 수는 ${}_5\Pi_4$이고, 네 번 던져 눈의 수가 모두 1, 2, 3, 4 중에 하나인 방법의 수는 ${}_4\Pi_4$이므로

$S_5={}_5\Pi_4-{}_4\Pi_4$

$=5^4-4^4$

$=625-256=369$

(i), (ii), (iii)에서

$S_1+S_3+S_5=1+65+369=435$ 답 ②

11 구하는 방법의 수는 6개의 공을 3개의 상자에 넣는 모든 방법의 수에서 어떤 한 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 19 이상이 되도록 넣는 방법의 수를 빼면 된다.

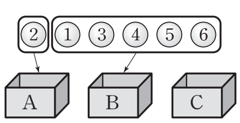
6개의 공을 3개의 상자에 넣는 모든 방법의 수는

${}_3\Pi_6=3^6=729$

$1+2+3+4+5+6=21$이므로 합이 19 이상인 경우는 다음과 같이 합이 19, 20, 21일 때로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 어떤 한 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 19일 때,

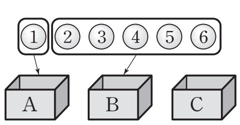
공을 (1, 3, 4, 5, 6), (2), (0)으로 나눈 후 세 상자 A, B, C에 넣으면 되므로 그 방법의 수는



$3!=6$

(ii) 어떤 한 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 20일 때,

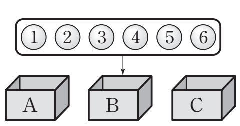
공을 (2, 3, 4, 5, 6), (1), (0)으로 나눈 후 세 상자 A, B, C에 넣으면 되므로 그 방법의 수는



$3!=6$

(iii) 어떤 한 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 21일 때,

공을 (1, 2, 3, 4, 5, 6), (0), (0)으로 나눈 후 세 상자 A, B, C에 넣으면 되므로 그 방법의 수는



$\dfrac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$729-(6+6+3)=714$ 답 714

12 A, B, C, D, E, F, G, H의 8명의 달리기 시합 결과로 들어온 순서의 경우의 수는 여덟 개의 문자 A, B, C, D, E, F, G, H를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

이때, 조건 (가)에서 B, D, F의 순서가 정해져 있으므로 B, D, F를 모두 X로 생각하여 나열한 후, 첫 번째 X는 B, 두 번째 X는 D, 세 번째 X는 F로 바꾸면 된다.

또한, 조건 (나)에서 C와 A, C와 G, C와 H 사이의 순서가 각각 정해져 있으므로 A, C, G, H를 모두 Y로 생각하여 나열한 후, 첫 번째 Y는 C로 바꾸고, 두 번째, 세 번째, 네 번째 Y는 A, G, H를 일렬로 나열한 순서대로 바꾸면 된다.

여덟 개의 문자 X, X, X, Y, Y, Y, Y, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{8!}{3!4!}=280$

각각의 경우에 대하여 두 번째, 세 번째, 네 번째 Y에 A, G, H를 일렬로 나열하여 넣는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$280\times6=1680$ 답 1680

13 흰 바둑돌을 W, 검은 바둑돌을 B, 나머지 9개의 꼭짓점 중 비어 있는 꼭짓점을 E라 하면 W가 4개, B가 3개, E가 2개이므로 구하는 방법의 수는

W, W, W, W, B, B, B, E, E

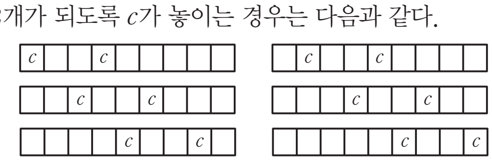
를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\dfrac{9!}{4!3!2!}=1260$ 답 ②

14 9개의 문자를 일렬로 나열할 때, 두 개의 문자 c 사이에 짝수 개의 문자가 들어가야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) c와 c 사이에 2개의 문자가 들어가는 경우

9개의 문자를 일렬로 나열할 때, c와 c 사이의 문자가 2개가 되도록 c가 놓이는 경우는 다음과 같다.



위의 각 경우에 따라 나머지 자리에 a, a, a, b, b, b, b의 7개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$6\times\dfrac{7!}{3!4!}=210$

(ii) c와 c 사이에 4개의 문자가 들어가는 경우

9개의 문자를 일렬로 나열할 때, c와 c 사이의 문자가 4개가 되도록 c가 놓이는 경우는 다음과 같다.

c					c			
	c					c		
		c					c	
			c					c

위의 각 경우에 따라 나머지 위치에 a, a, a, b, b, b, b의 7개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$4\times\dfrac{7!}{3!4!}=140$

(iii) c와 c 사이에 6개의 문자가 들어가는 경우

9개의 문자를 일렬로 나열할 때, c와 c 사이의 문자가 6개가 되도록 c가 놓이는 경우는 다음과 같다.

c							c	
	c							c

위의 각 경우에 따라 나머지 위치에 a, a, a, b, b, b, b의 7개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 경우의 수는

$2\times\dfrac{7!}{3!4!}=70$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$210+140+70=420$ **답** 420

15

6일 동안 세 과목 국어, 영어, 수학 중에서 하루에 두 과목씩 공부하므로 하루에 공부할 수 있는 과목의 경우를 순서쌍으로 나타내면

(국어, 영어), (국어, 수학), (영어, 수학)

의 세 가지이다.

이때, 각 과목을 공부하는 횟수가 모두 같으므로 위의 세 가지의 경우마다 2일씩 공부해야 한다.

6일 동안 세 순서쌍을 2일씩 공부하도록 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

각 순서쌍에 대하여 1교시, 2교시로 나누어 공부하는 경우는 2가지이므로 계획표를 만들 수 있는 경우의 수는

$90\times2^6=45\times2^7$

따라서 $a=45$, $b=7$이므로

$a+b=45+7=52$ **답** 52

• 다른풀이 •

6일 동안 세 과목 국어, 영어, 수학 중에서 하루에 두 과목씩, 각 과목을 공부하는 횟수가 같도록 계획표를 작성하려면 국어, 영어, 수학 모두 4일씩 공부해야 한다.

6일 중에서 국어를 공부하는 4일을 택하는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

하루에 두 과목씩 공부하려면 국어를 공부하지 않는 2일은 영어, 수학을 공부해야 하므로 국어를 공부하는 4일 중에서 영어를 공부하는 2일만 택하면 되고 그 방법의 수는 ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

이때, 하루에 공부하는 두 과목을 1교시, 2교시에 배정하는 경우는 1일마다 2가지이므로 만들 수 있는 계획표의 방법의 수는

$15\times6\times2^6=45\times2^7$

따라서 $a=45$, $b=7$이므로

$a+b=52$

16

비행장에 비행정이 두 줄로 배치되어 있으므로 윗줄의 신호등에 불이 켜지는 것을 x, 아랫줄의 신호등에 불이 켜지는 것을 y로 나타내자.

네 개의 신호등 중 임의로 한 개가 켜지고, 켜질 때마다 한 대의 비행정이 출발하므로 윗줄의 신호등이 4번 켜지고, 아랫줄의 신호등이 4번 켜져야 한다.

윗줄과 아랫줄의 신호등이 켜지는 순서는 각각 8개의 문자 x, x, x, x, y, y, y, y를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{8!}{4!4!}=70$

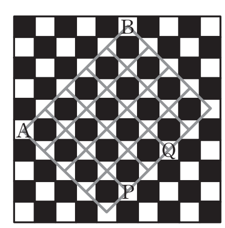
또한, 각 줄의 신호등은 좌, 우 중에서 한 번씩 켜질 수 있고, 출동하는 순서만을 생각하므로 각 줄에서 첫 번째, 두 번째, 세 번째로 출동하는 비행정은 좌, 우 중 어디에서 나오는지에 따라 다른 경우가 된다. 즉, 각 줄마다 2^3가지씩의 출동 순서가 존재한다.

따라서 출동하는 순서의 가능한 경우의 수는

$70\times2^3\times2^3=4480$ **답** ④

17

검게 칠한 영역은 지나지 않고 대각선의 방향으로만 이동하므로 주어진 체스판 위에 네 점 A, B, P, Q를 둘러싸도록 이동할 수 있는 경로를 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) A → P → B의 경로로 이동하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{4!1!}\times\dfrac{8!}{4!4!}=5\times70=350$

(ii) A → Q → B의 경로로 이동하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{4!3!}\times\dfrac{6!}{2!4!}=35\times15=525$

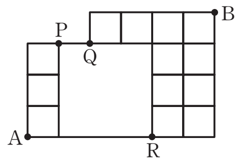
(iii) A → P → Q → B의 경로로 이동하는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{4!1!}\times1\times\dfrac{6!}{2!4!}=5\times15=75$

A에서 B까지 대각선 방향으로만 이동할 때, P, Q 중에서 한 곳만 들러서 최단 거리로 이동해야 하므로 구하는 방법의 수는 (i), (ii), (iii)에서

$\underbrace{(350-75)}_{\text{점 P만 들리는 방법의 수}}+\underbrace{(525-75)}_{\text{점 Q만 들리는 방법의 수}}=725$ **답** 725

18 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 이동하려면 두 방향 →, ↑ 으로만 이동해야 하므로, 주어진 도로망에 두 방향 →, ↑ 으로 이동할 수 있는 길만 표시하면 다음 그림과 같다.



위의 그림과 같이 세 점 P, Q, R를 표시하면 A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경로는 다음과 같다.

(i) A → P → Q → B의 경로로 이동하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!1!}\times1\times\dfrac{5!}{1!4!}=4\times5=20$

(ii) A → R → B의 경로로 이동하는 방법의 수는

$1\times\dfrac{6!}{2!4!}=15$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$20+15=35$ 답 35

(iii) P지점에서 좌회전을 한 후, Q지점에서 좌회전 또는 우회전을 하는 경우

(i), (ii)에 의하여 P지점에서 좌회전을 하려면 P_1 → P → P_3의 경로로 이동하고, Q지점에서 좌회전 또는 우회전을 하려면 Q_1 → Q → Q_4 또는 Q_2 → Q → Q_3의 경로로 이동해야 한다. 즉,

A → P_1 → P → P_3 → Q_1 → Q → Q_4 → B 또는

A → P_1 → P → P_3 → Q_2 → Q → Q_3 → B의 경로로 이동하면 되므로

$\dfrac{2!}{1!1!}\times1\times1\times1\times1\times1\times1$

$+\dfrac{2!}{1!1!}\times1\times1\times1\times1\times1\times\dfrac{2!}{1!1!}$

$=2+4=6$

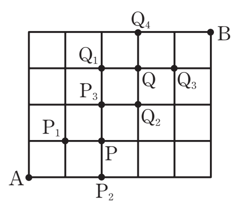
(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 경로의 수는

$126-(20+30-6)=82$ 답 ⑤

19 A지점에서 B지점으로 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\dfrac{9!}{5!4!}=126$

P지점에서는 좌회전이 되지 않고 Q지점에서는 직진만 가능하므로 A지점에서 B지점으로 가는 경우 중에서 P지점에서 좌회전을 하거나 Q지점에서 우회전 또는 좌회전을 하는 경우를 빼면 된다.



(i) P지점에서 좌회전을 하는 경우

위의 그림과 같이 세 점 P_1, P_2, P_3을 잡으면 P_2 → P일 때, 점 P에서 좌회전을 하여 최단 거리로 갈 수 없다.

즉, A → P_1 → P → P_3 → B의 경로로 이동하면 되므로

$\dfrac{2!}{1!1!}\times1\times1\times\dfrac{5!}{3!2!}=2\times10=20$

(ii) Q지점에서 좌회전 또는 우회전을 하는 경우

위의 그림과 같이 네 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4를 잡으면 Q_1 → Q일 때, 점 Q에서 우회전을 하여 최단 거리로 갈 수 없고, Q_2 → Q일 때, 점 Q에서 좌회전을 하여 최단 거리로 갈 수 없다.

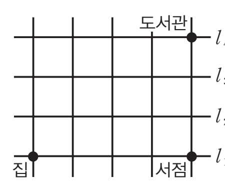
즉, A → Q_1 → Q → Q_4 → B 또는

A → Q_2 → Q → Q_3 → B의 경로로 이동하면 되므로

$\dfrac{5!}{2!3!}\times1\times1\times1+\dfrac{5!}{3!2!}\times1\times1\times\dfrac{2!}{1!1!}$

$=10+10\times2=30$

20



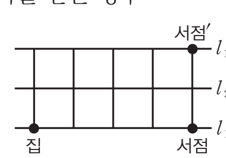
철수가 집에서 도로를 따라 최단 거리로 도서관으로 가다가 교차로에서 연락을 받고 바로 도로를 따라 최단 거리로 서점으로 이동하므로 위의 그림과 같이 가로로 된 도로 전체를 각각 l_1, l_2, l_3, l_4라 하면 철수가 연락을 받은 교차로의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 철수가 l_1 위의 교차로에서 연락을 받은 경우

철수는 길 l_1을 따라 이동하면 되므로 구하는 경로의 수는 1가지이다.

(ii) 철수가 l_2 위의 교차로에서 연락을 받은 경우

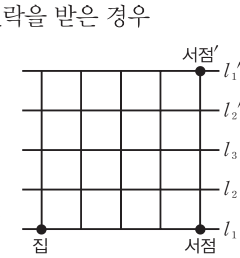
오른쪽 그림과 같이 두 길 l_1, l_2로 둘러싸인 도형을 직선 l_2에 대하여 대칭시켜 펼치면 구하는 경로의 수는 집에서 서점′으로 가는 경로의 수와 같으므로



$\dfrac{6!}{4!2!}=15$

(iii) 철수가 l_3 위의 교차로에서 연락을 받은 경우

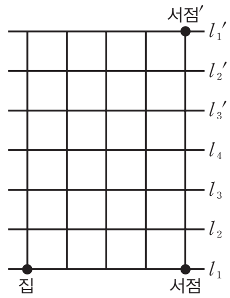
오른쪽 그림과 같이 두 길 l_1, l_3으로 둘러싸인 도형을 직선 l_3에 대하여 대칭시켜 펼치면 구하는 경로의 수는 집에서 서점′으로 가는 경로의 수와 같으므로



$\dfrac{8!}{4!4!}=70$

(iv) 철수가 l_4 위의 교차로에서 연락을 받은 경우

오른쪽 그림과 같이 두 길 l_1, l_4로 둘러싸인 도형을 직선 l_4에 대하여 대칭시켜 펼치면 구하는 경로의 수는 집에서 서점′으로 가는 경로의 수와 같으므로



$\frac{10!}{4!6!}=210$

(i)~(iv)에서 구하는 경로의 수는

$1+15+70+210=296$ 답 296

21 빨간색 볼펜 2개를 넣을 서로 다른 2개의 주머니를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때, 빈 주머니가 없어야 하므로 파란색 볼펜 1개를 빨간색 볼펜을 넣지 않은 주머니에 넣은 후, 남은 파란색 볼펜 4개를 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣는 방법의 수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times15=45$ 답 45

22 a, b, c는 2보다 큰 자연수이므로

$a=3^x$, $b=3^y$, $c=3^z$ (x, y, z는 자연수)으로 놓으면

$abc=3^n$에서 $3^{x+y+z}=3^n$

$\therefore x+y+z=n$ (단, x, y, z는 자연수)

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=n$

$\therefore x'+y'+z'=n-3$ (단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 $(n-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같고, 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

${}_3H_{n-3}={}_{3+(n-3)-1}C_{n-3}$

$={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=36$

에서

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=36$, $n^2-3n+2=72$

$n^2-3n-70=0$, $(n-10)(n+7)=0$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수) 답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	세 자연수 $a=3^x$, $b=3^y$, $c=3^z$ 꼴로 각각 나타낸 경우	20%
(나)	$abc=3^n$에 a, b, c를 대입한 후, x, y, z에 대한 일차 방정식과 그 해의 개수를 구한 경우	40%
(다)	순서쌍 (a, b, c)의 개수가 36임을 이용하여 n의 값을 구한 경우	40%

23 6개의 반지 중에서 손가락에 낄 4개를 택하는 방법의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

3개의 손가락에 반지 4개를 끼는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

4개의 반지를 배열하는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times15\times24=5400$ 답 ④

24 원기둥 모양의 그릇의 부피는

$\pi\times2^2\times16=64\pi$

그릇 안쪽에 그릇 전체의 부피의 $\frac{7}{8}$만큼의 물이 차 있으므로 넣은 구슬의 부피의 합은 그릇 전체의 부피의 $\frac{1}{8}$보다 작거나 같아야 한다.

이때, 구슬 1개의 부피가 $\frac{6}{5}\pi$이므로

$\frac{6}{5}\pi a+\frac{6}{5}\pi b+\frac{6}{5}\pi c\le\frac{1}{8}\times64\pi$

$\frac{6}{5}\pi(a+b+c)\le8\pi$ $\quad\therefore a+b+c\le\frac{20}{3}=6.6\times\times\times$

즉, $a+b+c\le6$

위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $a+b+c+d=6$ (d는 음이 아닌 정수)을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

이것은 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

이때, 그릇에 적어도 한 개의 구슬을 넣어야 하므로 방정식 $a+b+c+d=6$에서 $(0, 0, 0, 6)$의 경우는 제외해야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$84-1=83$ 답 83

• 다른풀이 •

$a+b+c\le\frac{20}{3}=6.6\times\times\times$

에서 a, b, c가 구슬의 개수이므로 넣은 구슬의 총개수는 1 이상 6 이하이어야 한다.

방정식 $a+b+c=n$ (a, b, c는 음이 아닌 정수, $1\le n\le6$인 자연수)을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n={}_{3+n-1}C_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$ (단, $1\le n\le6$)

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2$

$={}_2C_2+({}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2)-{}_2C_2$

$= {}_3C_3 + ({}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_8C_2) - 1 \; (\because {}_2C_2 = {}_3C_3 = 1)$

$= (\underbrace{{}_3C_3 + {}_3C_2}_{= {}_4C_3}) + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_8C_2 - 1$

$= (\underbrace{{}_4C_3 + {}_4C_2}_{= {}_5C_3}) + {}_5C_2 + \cdots + {}_8C_2 - 1$

$= ({}_5C_3 + {}_5C_2) + \cdots + {}_8C_2 - 1$

$\vdots$

$= {}_8C_3 + {}_8C_2 - 1$

$= {}_9C_3 - 1 = 84 - 1 = 83$

25 조건 ㈎에서 N은 10 이상 9999 이하의 홀수이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) N이 홀수인 두 자리의 자연수일 때,

$N = 10x + y$ (x는 자연수, y는 홀수)라 하면 조건 ㈏에서

$x + y = 7$

조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 $(6, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 5)$의 3가지이다.

(ii) N이 홀수인 세 자리의 자연수일 때,

$N = 100x + 10y + z$

(x는 자연수, y는 음이 아닌 정수, z는 홀수)

라 하면 조건 ㈏에서

$x + y + z = 7$

① $z = 1$일 때,

$x + y = 6$이므로 $x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x' + 1 + y = 6$

$\therefore x' + y = 5$ (단, x', y는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$

② $z = 3$일 때,

$x + y = 4$이므로 $x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x' + 1 + y = 4$

$\therefore x' + y = 3$ (단, x', y는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

③ $z = 5$일 때,

$x + y = 2$이므로 $x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x' + 1 + y = 2$

$\therefore x' + y = 1$ (단, x', y는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_1 = {}_{2+1-1}C_1 = {}_2C_1 = 2$

①, ②, ③에서 자연수 N의 개수는

$6 + 4 + 2 = 12$

(iii) N이 홀수인 네 자리의 자연수일 때,

$N = 1000x + 100y + 10z + w$

(x는 자연수, y, z는 음이 아닌 정수, w는 홀수)

라 하면 조건 ㈏에서

$x + y + z + w = 7$

④ $w = 1$일 때,

$x + y + z = 6$이므로

$x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$x' + 1 + y + z = 6$

$\therefore x' + y + z = 5$ (단, x', y, z는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

⑤ $w = 3$일 때,

$x + y + z = 4$이므로

$x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$x' + 1 + y + z = 4$

$\therefore x' + y + z = 3$ (단, x', y, z는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

⑥ $w = 5$일 때,

$x + y + z = 2$이므로

$x = x' + 1$ (x'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$x' + 1 + y + z = 2$

$\therefore x' + y + z = 1$ (단, x', y, z는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x', y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$

④, ⑤, ⑥에서 자연수 N의 개수는

$21 + 10 + 3 = 34$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수는

$3 + 12 + 34 = 49$ **답** 49

• 다른풀이 •

N이 10 이상 9999 이하의 홀수이므로

$N = 1000x + 100y + 10z + w$

(x, y, z는 음이 아닌 정수, w는 홀수)

라 하고 $x = y = z = 0$인 경우는 제외한다.

조건 ㈏에서 N의 각 자리 숫자의 합은 7이므로

$x + y + z + w = 7$ (x, y, z는 음이 아닌 정수, w는 홀수)

(i) $w = 1$일 때,

$x + y + z = 6$이므로 이것을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \dfrac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

(ii) $w=3$일 때,

$x+y+z=4$이므로 이것을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(iii) $w=5$일 때,

$x+y+z=2$이므로 이것을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 N의 개수는

$28+15+6=49$

26 x가 음이 아닌 정수이고 조건 (가)에서 $x^2\le5$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=0$일 때,

조건 (가)에서 $0\le y\le z\le w\le5$이므로 조건 (나)의 부등식 $y+z+w\le15$를 만족시키는 순서쌍 (y, z, w)의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉, 구하는 경우의 수는

$${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(ii) $x=1$일 때,

조건 (가)에서 $1\le y\le z\le w\le5$이므로 조건 (나)의 부등식 $y+z+w\le14$를 만족시키는 순서쌍 (y, z, w)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수에서 $(5, 5, 5)$인 1가지 경우를 빼야 한다. 즉, 구하는 경우의 수는

$${}_5H_3-1={}_{5+3-1}C_3-1={}_7C_3-1$$
$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}-1=35-1=34$$

(iii) $x=2$일 때,

조건 (가)에서 $4\le y\le z\le w\le5$이므로 조건 (나)의 부등식 $y+z+w\le13$을 만족시키는 순서쌍 (y, z, w)는 $(4, 4, 4)$, $(4, 4, 5)$의 2개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$56+34+2=92$

답 92

27 조건 (나)에서 4는 8보다 왼쪽에 있어야 하므로

4, 4, 8, 8, 8, 8

의 순서로 나열되어야 한다.

이때, 조건 (가), (다)에서 2는 6보다 항상 왼쪽에 있어야 하고, 이웃한 두 수의 합이 10이 되어서는 안되므로 다음과 같이 2의 위치에 따라 경우를 나눌 수 있다.

(i) 2가 가장 왼쪽에 위치할 때,

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧
∨2∨4∨4∨8∨8∨8∨8∨

위의 그림과 같이 2, 4, 8의 사이사이와 양 끝을 왼쪽부터 위치한 순서대로 ①~⑧이라 하자.

이웃한 두 수의 합이 10이 되어서는 안되므로 6은 ⑤, ⑥, ⑦, ⑧에 위치할 수 있다.

6은 3개 존재하므로 6이 들어갈 수 있는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

(ii) 2가 두 개의 4 사이에 위치할 때,

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧
∨4∨2∨4∨8∨8∨8∨8∨

위의 그림과 같이 2, 4, 8의 사이사이와 양 끝을 왼쪽부터 위치한 순서대로 ①~⑧이라 하자.

이웃한 두 수의 합이 10이 되어서는 안되므로 6은 ⑤, ⑥, ⑦, ⑧에 위치할 수 있고, (i)과 같은 방법으로 그 경우의 수는 20가지이다.

(iii) 2가 4와 8 사이에 위치할 때,

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧
∨4∨4∨2∨8∨8∨8∨8∨

위의 그림과 같이 2, 4, 8의 사이사이와 양 끝을 왼쪽부터 위치한 순서대로 ①~⑧이라 하자.

이웃한 두 수의 합이 10이 되어서는 안되므로 3개의 6 중에서 하나는 반드시 ④에 들어가고 나머지 2개는 ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧에 위치할 수 있다.

이것은 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$20+20+15=55$

답 ①

28 a_4는 부호의 변화가 4번 생기는 경우의 수이므로 다음 그림과 같이 이웃한 같은 부호를 하나의 묶음으로 생각하면 5개의 묶음이 있어야 하고, 각 묶음의 부호의 개수를 왼쪽부터 순서대로 a, b, c, d, e라 하면 모두 자연수이다.

[①][②][③][④][⑤]

(i) 묶음 ①, ③, ⑤가 양의 부호 +로 이루어져 있고, 묶음 ②, ④가 음의 부호 −로 이루어진 경우

양의 부호 +는 5개, 음의 부호 −는 7개이므로

$a+c+e=5$, $b+d=7$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면

$a'+c'+e'=2$, $b'+d'=5$

(단, a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)

따라서 위의 두 방정식을 동시에 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

$${}_3H_2\times{}_2H_5={}_{3+2-1}C_2\times{}_{2+5-1}C_5$$
$$={}_4C_2\times{}_6C_5={}_4C_2\times{}_6C_1$$

$$=\frac{4\times3}{2\times1}\times6=6\times6=36$$

(ii) 묶음 ①, ③, ⑤가 음의 부호 $-$로 이루어져 있고, 묶음 ②, ④가 양의 부호 $+$로 이루어진 경우

양의 부호 $+$는 5개, 음의 부호 $-$는 7개이므로

$a+c+e=7$, $b+d=5$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면

$a'+c'+e'=4$, $b'+d'=3$

(단, a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)

따라서 위의 두 방정식을 동시에 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

$${}_3H_4\times{}_2H_3={}_{3+4-1}C_4\times{}_{2+3-1}C_3$$
$$={}_6C_4\times{}_4C_3={}_6C_2\times{}_4C_1$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}\times4=15\times4=60$$

(i), (ii)에서 부호의 변화가 4번 일어나도록 나열하는 방법의 수는

$a_4=36+60=96$

같은 방법으로 a_5는 부호의 변화가 5번 생기는 경우의 수이므로 다음 그림과 같이 이웃한 같은 부호를 하나의 묶음으로 생각하면 6개의 묶음이 있어야 하고, 각 묶음의 부호의 개수를 a, b, c, d, e, f라 하면 모두 자연수이다.

[①][②][③][④][⑤][⑥]

세 묶음 ①, ③, ⑤와 ②, ④, ⑥은 각각 같은 부호로 이루어져야 하고, 양의 부호 $+$가 5개, 음의 부호 $-$가 7개이므로

$a+c+e=5$, $b+d+f=7$ 또는

$a+c+e=7$, $b+d+f=5$

이때, a, b, c, d, e, f가 모두 자연수이므로 구하는 경우의 수는

$$a_5=2\times{}_3H_2\times{}_3H_4=2\times{}_{3+2-1}C_2\times{}_{3+4-1}C_4$$
$$=2\times{}_4C_2\times{}_6C_4=2\times{}_4C_2\times{}_6C_2$$
$$=2\times\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1}=2\times6\times15=180$$

$\therefore a_4+a_5=96+180=276$

답 276

29 두 조건 ㈎, ㈏에서 치역은 $\{3, 7\}$ 또는 $\{2, 3, 5\}$이다.

(i) 치역이 $\{3, 7\}$인 경우

$f(1)=3$이므로 나머지 정의역의 원소 2, 3, 5, 7은 치역의 원소 3 또는 7에 대응해야 한다.

이때, $\underbrace{\text{모두 3에 대응하는 경우}}_{\text{치역이 }\{3\}}$를 제외해야 하므로 이때의 함수의 개수는

${}_2\Pi_4-1=2^4-1=15$

(ii) 치역이 $\{2, 3, 5\}$인 경우

$f(1)=3$이므로 나머지 정의역의 원소 2, 3, 5, 7은 치역의 원소 2 또는 3 또는 5에 대응해야 한다.

이때, 모두 2 또는 모두 3 또는 모두 5에 대응하는 경우와 모두 2, 3 또는 모두 3, 5에 대응하는 경우는 제외해야 하므로 이때의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4-3\times1-2({}_2\Pi_4-1-1)$$
$$=3^4-3-2(2^4-1-1)=50$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$15+50=65$

답 ③

30 집합 A의 임의의 두 원소 x, y에 대하여 $x<y$이면 $f(x)\le f(y)$이고, $f(n-2)=3$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(n-3)$의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3이고, 이 중에서 중복을 허용하여 $(n-3)$개를 뽑은 후 크기 순서대로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(n-3)$의 값으로 정하면 된다.

또한, $f(n-1)$, $f(n)$의 값이 될 수 있는 자연수는 3, 4, 5, 6, 7, 8이고, 이 중에서 중복을 허용하여 2개를 뽑은 후 크기 순서대로 $f(n-1)$, $f(n)$의 값으로 정하면 된다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_3H_{n-3}\times{}_6H_2={}_{3+(n-3)-1}C_{n-3}\times{}_{6+2-1}C_2$$
$$={}_{n-1}C_{n-3}\times{}_7C_2$$
$$={}_{n-1}C_2\times{}_7C_2$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2\times1}\times\frac{7\times6}{2\times1}$$
$$=\frac{21}{2}(n-1)(n-2)$$

그런데 조건을 만족시키는 함수 f의 개수가 210이므로

$\frac{21}{2}(n-1)(n-2)=210$

$(n-1)(n-2)=20$, $n^2-3n-18=0$

$(n-6)(n+3)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\ge4$)

답 6

31 $f(1)\le f(2)<f(3)\le f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$를 만족시키는 함수의 개수에서 $f(1)\le f(2)=f(3)\le f(4)$를 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_6H_4$

$f(1)\le f(2)=f(3)\le f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_6H_3$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$${}_6H_4-{}_6H_3={}_{6+4-1}C_4-{}_{6+3-1}C_3$$
$$={}_9C_4-{}_8C_3$$
$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}-\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$$
$$=126-56=70$$

답 70

• 다른풀이 •

(i) $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$인 함수의 개수

1, 2, 3, $\cdots$, 6에서 치역의 원소 4개를 택하면 되므로

경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)$ 또는

$f(1)<f(2)<f(3)=f(4)$인 함수의 개수

1, 2, 3, $\cdots$, 6에서 치역의 원소 3개를 택하면 되므로

각 경우의 수는 ${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

(iii) $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)$인 함수의 개수

1, 2, 3, $\cdots$, 6에서 치역의 원소 2개를 택하면 되므로

경우의 수는 ${}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$15+20+20+15=70$

32 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f는 정의역의 원소 a에 대하여 $f(a)\neq a$인 함수 중에서 $f(3)f(4)f(5)$가 3의 배수가 아닌 함수를 제외하면 된다.

정의역의 원소 a에 대하여 $f(a)\neq a$인 함수 f의 개수는 $f(a)$가 치역의 원소 중에서 a가 아닌 나머지 5개의 수이면 되므로

$5\times5\times5\times5\times5\times5=5^6$

이 중에서 $f(3)f(4)f(5)$가 3의 배수가 아니려면 $f(3)$은 1, 2, 4, 5 중 하나, $f(4)$는 1, 2, 5 중 하나, $f(5)$는 1, 2, 4 중 하나이어야 한다.

또한, 나머지 $f(1)$, $f(2)$, $f(6)$은 각각 1, 2, 6이 아닌 수이면 되므로 $f(3)f(4)f(5)$가 3의 배수가 아닌 함수 f의 개수는

$4\times3\times3\times5\times5\times5=3^2\times4\times5^3$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

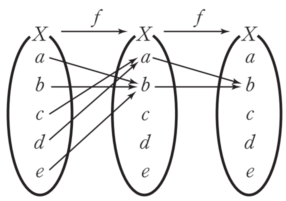
$$\begin{aligned}5^6-3^2\times4\times5^3&=5^3\times(5^3-3^2\times4)\\&=5^3\times(125-36)\\&=5^3\times89\end{aligned}$$

$\therefore k=89$

답 ①

33 $X=\{a, b, c, d, e\}$라 하자.

함수 f의 치역의 원소의 개수가 2개이고 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 1개이려면 다음 그림과 같이 치역의 두 원소를 a, b라 하였을 때, a, b는 모두 a 또는 모두 b에 대응해야 하고, c, d, e는 a 또는 b에 대응하면서 c, d, e 중에 적어도 하나는 a, b가 대응하지 않은 원소에 대응해야 한다.



집합 X에서 함수 f의 치역의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

함수 f의 치역의 원소 2개 중에서 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

함수 f의 치역에 포함되지 않는 나머지 3개의 원소들은 함수 f의 치역의 원소 2개 중에서 함숫값을 가져야 하고 이 중에서 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소만 택하는 경우를 제외하면 되므로 경우의 수는

${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$10\times2\times7=140$

답 ①

34 해결단계

❶ 단계	주어진 조건에 $a=1, 2, 3$을 대입한 후, 식을 정리한다.
❷ 단계	$f(2)-f(1)$, $f(3)-f(2)$, $f(4)-f(3)$을 미지수로 두고, ❶ 단계에서 정리한 식을 이용하여 미지수의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	$f(4)\le15$임을 이용하여 미지수를 이용한 일차부등식을 세우고, 이 식을 만족시키는 경우의 수를 구하여 함수 f의 개수를 구한다.

3 이하의 모든 자연수 a에 대하여

$f(a+1)\ge f(a)+a$이므로

$f(2)\ge f(1)+1$에서 $f(2)-f(1)\ge1$

$f(3)\ge f(2)+2$에서 $f(3)-f(2)\ge2$

$f(4)\ge f(3)+3$에서 $f(4)-f(3)\ge3$

$f(1)=k$, $f(2)-f(1)=x$, $f(3)-f(2)=y$,

$f(4)-f(3)=z$라 하면

$$\begin{aligned}f(4)&=f(3)+z\\&=\{f(2)+y\}+z\\&=\{f(1)+x\}+y+z\\&=k+x+y+z\ (\text{단, } k\ge1,\ x\ge1,\ y\ge2,\ z\ge3)\end{aligned}$$

이때, 함수 f의 공역은 $Y=\{y\,|\,y$는 15 이하의 자연수$\}$이므로 $f(4)\le15$이어야 한다.

즉, $k+x+y+z\le15$

위의 부등식을 만족시키는 순서쌍 (k, x, y, z)의 개수가 함수 f의 개수와 같고, 이것은 방정식

$k+x+y+z+w=15$ ($k\ge1$, $x\ge1$, $y\ge2$, $z\ge3$인 자연수, w는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (k, x, y, z, w)의 개수와 같다.

이때, $k=k'+1$, $x=x'+1$, $y=y'+2$, $z=z'+3$으로 놓으면 $k+x+y+z+w=15$에서

$(k'+1)+(x'+1)+(y'+2)+(z'+3)+w=15$

$\therefore k'+x'+y'+z'+w=8$

(단, k', x', y', z', w는 음이 아닌 정수)

이것을 만족시키는 순서쌍 (k', x', y', z', w)의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_8={}_{5+8-1}C_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 495이다.

답 495

35 $\left(3x^2-\dfrac{1}{2x^3}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_r(3x^2)^{n-r}\left(-\frac{1}{2x^3}\right)^r={}_nC_r3^{n-r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{2n-5r}$$

(단, $0\le r\le n$인 정수)

이고, 상수항은 $2n-5r=0$일 때이므로 $2n=5r$

이때, n은 자연수, r는 음이 아닌 정수이므로 $2n=5r$를 만족시키는 n의 최솟값은 5이다.

즉, $n=5$일 때, $2n=5r$에서

$2\times5=5r \qquad \therefore r=2$

따라서 구하는 상수항은

$${}_5C_2\times3^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\times4}{2\times1}\times27\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{135}{2}$$

답 $\dfrac{135}{2}$

36 $(1+x+ax^2)^{10}=\{(1+x)+ax^2\}^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_r(1+x)^{10-r}(ax^2)^r$ (단, $0\le r\le10$인 정수)

$(1+x)^{10-r}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10-r}C_sx^s$ (단, $0\le s\le10-r$인 정수)

즉, $(1+x+ax^2)^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_r\times{}_{10-r}C_sx^s(ax^2)^r={}_{10}C_r\times{}_{10-r}C_sa^rx^{2r+s}$

이때, x^4항은 $2r+s=4$ (r, s는 음이 아닌 정수)일 때이므로 이 등식을 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$이다.

따라서 x^4의 계수는

$${}_{10}C_0\times{}_{10}C_4\times a^0+{}_{10}C_1\times{}_9C_2\times a+{}_{10}C_2\times{}_8C_0\times a^2$$

$$=1\times\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times1+10\times\frac{9\times8}{2\times1}\times a+\frac{10\times9}{2\times1}\times1\times a^2$$

$=210+360a+45a^2$

$=45(a+4)^2-510$

이므로 x^4의 계수가 최소가 되도록 하는 상수 a의 값은 -4이다.

답 ②

• 다른풀이 •

$(1+x+ax^2)^{10}$의 전개식에서 일반항은

$$\frac{10!}{p!q!r!}1^px^q(ax^2)^r=\frac{10!}{p!q!r!}a^rx^{q+2r}$$

(단, $p+q+r=10$, $p\ge0$, $q\ge0$, $r\ge0$인 정수)

이고, x^4항은 $q+2r=4$ (q, r는 음이 아닌 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 p, q, r의 순서쌍 (p, q, r)는

$(8, 0, 2)$, $(7, 2, 1)$, $(6, 4, 0)$이다.

따라서 x^4의 계수는

$$\frac{10!}{8!0!2!}a^2+\frac{10!}{7!2!1!}a^1+\frac{10!}{6!4!0!}a^0$$

$=45a^2+360a+210$

$=45(a+4)^2-510$

이므로 x^4의 계수가 최소가 되도록 하는 상수 a의 값은 -4이다.

37 $(1-x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}(-x)^r$, 즉 ${}_nC_r(-1)^rx^r$ ($0\le r\le n$인 정수)이므로 연속하는 세 항을

${}_nC_r(-1)^rx^r$, ${}_nC_{r+1}(-1)^{r+1}x^{r+1}$, ${}_nC_{r+2}(-1)^{r+2}x^{r+2}$

이라 하면 각각의 계수는

$-{}_nC_r$, ${}_nC_{r+1}$, $-{}_nC_{r+2}$ 또는 ${}_nC_r$, $-{}_nC_{r+1}$, ${}_nC_{r+2}$

이때, ${}_nC_r>0$이므로 r는 홀수이고

$-{}_nC_r=-20$, ${}_nC_{r+1}=190$, $-{}_nC_{r+2}=-1140$

$\therefore {}_nC_r=20$, ${}_nC_{r+1}=190$, ${}_nC_{r+2}=1140$

$$\frac{{}_nC_{r+1}}{{}_nC_r}=\frac{\dfrac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-r)!r!}}=\frac{n-r}{r+1}$$

$$=\frac{190}{20}=\frac{19}{2}$$

즉, $\dfrac{n-r}{r+1}=\dfrac{19}{2}$에서 $2(n-r)=19(r+1)$

$\therefore 2n-21r=19 \qquad \cdots\cdots㉠$

$$\frac{{}_nC_{r+2}}{{}_nC_{r+1}}=\frac{\dfrac{n!}{(n-r-2)!(r+2)!}}{\dfrac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!}}=\frac{n-r-1}{r+2}$$

$$=\frac{1140}{190}=6$$

즉, $\dfrac{n-r-1}{r+2}=6$에서 $n-r-1=6(r+2)$

$\therefore n-7r=13 \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $n=20$, $r=1$

따라서 구하는 n의 값은 20이다.

답 ②

38 $(1+x)^m(1+x^2)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_mC_rx^r\times{}_nC_s(x^2)^s={}_mC_r\times{}_nC_sx^{r+2s}$

(단, $0\le r\le m$, $0\le s\le n$인 정수)

x^2의 계수가 12이므로 $r+2s=2$ (r, s는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 순서쌍 (r, s)가 $(0, 1)$, $(2, 0)$임을 이용하여 x^2의 계수를 구하면

$${}_mC_0\times{}_nC_1+{}_mC_2\times{}_nC_0=1\times n+\frac{m(m-1)}{2\times1}\times1$$

$$=n+\frac{m(m-1)}{2}$$

즉, $n+\dfrac{m(m-1)}{2}=12$에서

$2n+m(m-1)=24$

이때, m, n은 자연수이므로 $2n\ge2$

즉, $0\le m(m-1)\le22$에서 $1\le m\le5$

방정식 $2n+m(m-1)=24$를 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(1, 12)$, $(2, 11)$, $(3, 9)$, $(4, 6)$, $(5, 2)$ $\cdots\cdots㉠$

x^3의 계수를 구하기 위해 $r+2s=3$ (r, s는 음이 아닌 정수)을 만족시키는 순서쌍 (r, s)를 구하면 $(1, 1)$, $(3, 0)$이므로 x^3의 계수는

${}_mC_1\times{}_nC_1+{}_mC_3\times{}_nC_0$

$$=m\times n+\frac{m(m-1)(m-2)}{3\times2\times1}\times1$$

$=mn+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}$

㉠에서 구한 순서쌍 $(m,\ n)$을 위 식에 대입하면 x^3의 계수는 12, 22, 28, 28, 20이므로 구하는 x^3의 계수의 최댓값은 28이다.

답 ⑤

39 $N={}_{50}C_1\times9^2+{}_{50}C_2\times9^3+{}_{50}C_3\times9^4+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{51}$

$=9({}_{50}C_1\times9+{}_{50}C_2\times9^2+{}_{50}C_3\times9^3+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{50})$

$=9({}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times9+{}_{50}C_2\times9^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times9^{50}-{}_{50}C_0)$

$=9\{(1+9)^{50}-1\}$

$=9\times10^{50}-9$

$=8\underbrace{99\cdots9}_{9\text{가 }49\text{개}}1$

따라서 구하는 자연수 N의 각 자리의 숫자의 합은

$8+9\times49+1=450$

답 450

40 $(1+x)^n$ (n은 자연수)의 전개식에서 일반항은

${}_nC_rx^r$ (단, $0\le r\le n$인 정수)

이므로 x^{10}의 계수와 x^{11}의 계수는 각각 ${}_nC_{10}$, ${}_nC_{11}$

다항식 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{2021}$

에서

x^{10}의 계수는

${}_{10}C_{10}+{}_{11}C_{10}+{}_{12}C_{10}+{}_{13}C_{10}+{}_{14}C_{10}+\cdots+{}_{2021}C_{10}$

$=({}_{11}C_{11}+{}_{11}C_{10})+{}_{12}C_{10}+{}_{13}C_{10}+{}_{14}C_{10}+\cdots+{}_{2021}C_{10}$

$=({}_{12}C_{11}+{}_{12}C_{10})+{}_{13}C_{10}+{}_{14}C_{10}+\cdots+{}_{2021}C_{10}$

$=({}_{13}C_{11}+{}_{13}C_{10})+{}_{14}C_{10}+\cdots+{}_{2021}C_{10}$

$\vdots$

$={}_{2021}C_{11}+{}_{2021}C_{10}={}_{2022}C_{11}$

x^{11}의 계수는

${}_{11}C_{11}+{}_{12}C_{11}+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}+\cdots+{}_{2021}C_{11}$

$=({}_{12}C_{12}+{}_{12}C_{11})+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}+\cdots+{}_{2021}C_{11}$

$=({}_{13}C_{12}+{}_{13}C_{11})+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}+\cdots+{}_{2021}C_{11}$

$=({}_{14}C_{12}+{}_{14}C_{11})+{}_{15}C_{11}+\cdots+{}_{2021}C_{11}$

$\vdots$

$={}_{2021}C_{12}+{}_{2021}C_{11}={}_{2022}C_{12}$

따라서 주어진 다항식에서 x^{10}의 계수와 x^{11}의 계수의 합은

${}_{2022}C_{11}+{}_{2022}C_{12}={}_{2023}C_{12}$

답 ⑤

• 다른풀이 •

주어진 다항식은 첫째항이 $(1+x)$이고 공비가 $(1+x)$인 등비수열의 첫째항부터 제2021항까지의 합이므로

$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{2021}$

$=\dfrac{(1+x)\{(1+x)^{2021}-1\}}{(1+x)-1}$

$=\dfrac{(1+x)^{2022}-(1+x)}{x}$

주어진 다항식에서 x^{10}의 계수는 다항식 $(1+x)^{2022}$의 전개식에서 x^{11}의 계수와 같으므로 ${}_{2022}C_{11}$

또한, x^{11}의 계수는 다항식 $(1+x)^{2022}$의 전개식에서 x^{12}의 계수와 같으므로 ${}_{2022}C_{12}$

따라서 x^{10}의 계수와 x^{11}의 계수의 합은

${}_{2022}C_{11}+{}_{2022}C_{12}={}_{2023}C_{12}$

41 89^{80}

$=(9+80)^{80}$

$={}_{80}C_0\times9^{80}+{}_{80}C_1\times9^{79}\times80+{}_{80}C_2\times9^{78}\times80^2$
$+\cdots+{}_{80}C_{80}\times80^{80}$

에서 ${}_{80}C_1\times9^{79}\times80+{}_{80}C_2\times9^{78}\times80^2+\cdots+{}_{80}C_{80}\times80^{80}$은 80^2의 배수이므로 89^{80}을 6400으로 나눈 나머지는 ${}_{80}C_0\times9^{80}$, 즉 9^{80}을 6400으로 나눈 나머지와 같다.

이때,

$9^{80}=(9^2)^{40}=81^{40}$

$=(1+80)^{40}$

$={}_{40}C_0+{}_{40}C_1\times80+{}_{40}C_2\times80^2+\cdots+{}_{40}C_{40}\times80^{40}$

$=1+3200+{}_{40}C_2\times80^2+{}_{40}C_3\times80^3+\cdots+{}_{40}C_{40}\times80^{40}$

$=3201+80^2({}_{40}C_2+{}_{40}C_3\times80+\cdots+{}_{40}C_{40}\times80^{38})$

이므로 9^{80}을 6400으로 나눈 나머지는 3201이다.

따라서 구하는 나머지는 3201이다.

답 ⑤

• 다른풀이 •

89^{80}

$=(9+80)^{80}$

$={}_{80}C_0\times9^{80}+{}_{80}C_1\times9^{79}\times80+{}_{80}C_2\times9^{78}\times80^2$
$+\cdots+{}_{80}C_{80}\times80^{80}$

에서 ${}_{80}C_1\times9^{79}\times80+{}_{80}C_2\times9^{78}\times80^2+\cdots+{}_{80}C_{80}\times80^{80}$이 80^2의 배수이므로 89^{80}을 6400으로 나눈 나머지는 ${}_{80}C_0\times9^{80}=9^{80}$, 즉 81^{40}을 6400으로 나눈 나머지와 같다.

$80=x$로 놓고 81^{40}, 즉 $(x+1)^{40}$을 6400, 즉 x^2으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x+1)^{40}=x^2Q(x)+ax+b$ ……㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $b=1$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(x+1)^{40}-1=x^2Q(x)+ax$

${}_{40}C_{40}x^{40}+{}_{40}C_{39}x^{39}+{}_{40}C_{38}x^{38}+\cdots+{}_{40}C_1x+1-1$

$=x^2Q(x)+ax$

$x({}_{40}C_{40}x^{39}+{}_{40}C_{39}x^{38}+{}_{40}C_{38}x^{37}+\cdots+{}_{40}C_1)$

$=x\{xQ(x)+a\}$

위의 등식이 항등식이므로

${}_{40}C_{40}x^{39}+{}_{40}C_{39}x^{38}+{}_{40}C_{38}x^{37}+\cdots+{}_{40}C_1$

$=xQ(x)+a$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$a={}_{40}C_1=40$

따라서 나머지는 $40x+1$이므로 $x=80$을 대입하면 구하는 나머지는 3201이다.

42 a_n은 원소가 $(2n+1)$개인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 나누는 방법의 수이므로 두 부분집합의 원소의 개수의 순서쌍은 다음과 같다.

$(1,\ 2n)$, $(2,\ 2n-1)$, $(3,\ 2n-2)$, $\cdots$, $(n,\ n+1)$

$\therefore a_n={}_{2n+1}C_1\times{}_{2n}C_{2n}+{}_{2n+1}C_2\times{}_{2n-1}C_{2n-1}$
$+{}_{2n+1}C_3\times{}_{2n-2}C_{2n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_n\times{}_{n+1}C_{n+1}$
$={}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_3+\cdots+{}_{2n+1}C_n$ ……㉠
이때, ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
$a_n={}_{2n+1}C_{2n}+{}_{2n+1}C_{2n-1}+{}_{2n+1}C_{2n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_{n+1}$ ……㉡
㉠, ㉡을 변끼리 더하면
$2a_n={}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_3+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$
$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n+1}$
$-{}_{2n+1}C_0-{}_{2n+1}C_{2n+1}$
$=2^{2n+1}-2$
$\therefore a_n=2^{2n}-1=4^n-1$
$\therefore \dfrac{a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+5}$
$=\dfrac{(4^5-1)+(4^6-1)+(4^7-1)+(4^8-1)+(4^9-1)+5}{(4-1)+(4^2-1)+(4^3-1)+(4^4-1)+(4^5-1)+5}$
$=\dfrac{4^5+4^6+4^7+4^8+4^9}{4+4^2+4^3+4^4+4^5}$
$=\dfrac{4^4(4+4^2+4^3+4^4+4^5)}{4+4^2+4^3+4^4+4^5}$
$=4^4=256$ 답 256

43 ㄱ. $S={}_8C_1+2{}_8C_2+3{}_8C_3+\cdots+8{}_8C_8$
$=0\cdot{}_8C_0+1\cdot{}_8C_1+2\cdot{}_8C_2+3\cdot{}_8C_3+\cdots+8\cdot{}_8C_8$ ……㉠
이라 하면 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
$S=0\cdot{}_8C_8+1\cdot{}_8C_7+2\cdot{}_8C_6+3\cdot{}_8C_5+\cdots+8\cdot{}_8C_0$ ……㉡
㉠, ㉡을 변끼리 더하면
$2S=8({}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8)$
$=8\times2^8$
$=2^3\times2^8=2^{11}$
$\therefore S=2^{10}$ (참)
ㄴ. $\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$,
$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$
이므로 $\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k=2\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k+960$에서
$2^{2n}=2\times2^n+960$
$(2^n)^2-2\times2^n-960=0$
이때, $2^n=t$ $(t>0)$로 놓으면
$t^2-2t-960=0$, $(t-32)(t+30)=0$
$\therefore t=32$ $(\because t>0)$
즉, $2^n=32$이므로 $n=5$이다. (참)
ㄷ. $A=\sum_{k=1}^{20}{}_{41}C_k$
$={}_{41}C_1+{}_{41}C_2+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{20}$ ……㉢
이므로
$A={}_{41}C_{40}+{}_{41}C_{39}+{}_{41}C_{38}+\cdots+{}_{41}C_{21}$ ……㉣
㉢, ㉣을 변끼리 더하면
$2A={}_{41}C_1+{}_{41}C_2+{}_{41}C_3+\cdots+{}_{41}C_{40}$
$={}_{41}C_0+{}_{41}C_1+{}_{41}C_2+\cdots+{}_{41}C_{40}+{}_{41}C_{41}$
$-{}_{41}C_0-{}_{41}C_{41}$
$=2^{41}-2$
$\therefore A=2^{40}-1$
또한,
$B=\sum_{k=1}^{10}{}_{40}C_{2k-1}$
$={}_{40}C_1+{}_{40}C_3+{}_{40}C_5+\cdots+{}_{40}C_{19}$ ……㉤
이므로
$B={}_{40}C_{39}+{}_{40}C_{37}+{}_{40}C_{35}+\cdots+{}_{40}C_{21}$ ……㉥
㉤, ㉥을 변끼리 더하면
$2B={}_{40}C_1+{}_{40}C_3+{}_{40}C_5+\cdots+{}_{40}C_{39}$
$=2^{40-1}=2^{39}$
$\therefore B=2^{38}$
따라서 $A+1=2^{40}$, $2B=2^{39}$이므로 $A+1\neq2B$
(거짓)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

blacklabel 특강 참고

$1\cdot{}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$의 증명
[증명1] 이항계수의 성질을 이용한 증명
$S=1\cdot{}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n$
$=0\cdot{}_nC_0+1\cdot{}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+\cdots$
$+(n-1)\cdot{}_nC_{n-1}+n\cdot{}_nC_n$ ……㉠
라 하면, ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
$S=1\cdot{}_nC_{n-1}+2\cdot{}_nC_{n-2}+3\cdot{}_nC_{n-3}+\cdots+n\cdot{}_nC_0$
$=n\cdot{}_nC_0+(n-1)\cdot{}_nC_1+(n-2)\cdot{}_nC_2+\cdots$
$+1\cdot{}_nC_{n-1}+0\cdot{}_nC_n$ ……㉡
㉠+㉡을 하면
$2S=n({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n)=n\cdot2^n$ $\therefore S=n\cdot2^{n-1}$
[증명2] 미분을 이용한 증명
$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$
위의 식의 양변을 x에 대하여 각각 미분하면
$n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2\cdot{}_nC_2x+3\cdot{}_nC_3x^2+\cdots+n\cdot{}_nC_nx^{n-1}$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$n\cdot2^{n-1}={}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n$

44 이항정리에 의하여
${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n$ ……㉠
㉠의 양변에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면
${}_nC_0+\dfrac{1}{2}{}_nC_1+\dfrac{1}{4}{}_nC_2+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\times{}_nC_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
㉠의 양변에 $x=-\dfrac{1}{4}$을 대입하면
${}_nC_0-\dfrac{1}{4}{}_nC_1+\dfrac{1}{16}{}_nC_2-\cdots+\dfrac{1}{(-4)^n}\times{}_nC_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
$\therefore \dfrac{{}_nC_0+\dfrac{1}{2}{}_nC_1+\dfrac{1}{4}{}_nC_2+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\times{}_nC_n}{{}_nC_0-\dfrac{1}{4}{}_nC_1+\dfrac{1}{16}{}_nC_2-\cdots+\dfrac{1}{(-4)^n}\times{}_nC_n}$
$=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}=2^n$
자연수 n에 대하여 2^n을 순서대로 나열하면

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$

2^n을 3으로 나눈 나머지가 a_n이므로

$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=1,\ \cdots$

따라서 $a_n=\begin{cases} 2\ (n\text{은 홀수}) \\ 1\ (n\text{은 짝수}) \end{cases}$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(2+1)\times10=30$ 답 ④

• 다른풀이 •

$$\frac{{}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{4}{}_nC_2+\cdots+\frac{1}{2^n}\times{}_nC_n}{{}_nC_0-\frac{1}{4}{}_nC_1+\frac{1}{16}{}_nC_2-\cdots+\frac{1}{(-4)^n}\times{}_nC_n}=2^n\text{이므로}$$

a_n은 2^n을 3으로 나눈 나머지이다.

이때, $n=2k$ (k는 자연수)이면

$2^n=2^{2k}=4^k$

$=(3+1)^k$

$={}_kC_0+{}_kC_1\times3+{}_kC_2\times3^2+\cdots+{}_kC_k\times3^k$

에서 3으로 나눈 나머지는 1이다.

$\therefore\ a_2=a_4=a_6=\cdots=1$

또한, $n=2l-1$ (l은 자연수)이면

$2^n=2^{2l-1}=2\times4^{l-1}$

$=2\times(3+1)^{l-1}$

$=2({}_{l-1}C_0+{}_{l-1}C_1\times3+{}_{l-1}C_2\times3^2+\cdots+{}_{l-1}C_{l-1}\times3^{l-1})$

에서 3으로 나눈 나머지는 2이다.

$\therefore\ a_1=a_3=a_5=\cdots=2$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(2+1)\times10=30$

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 17

01 ①	02 12	03 900	04 −252	05 546
06 69	07 372			

01 해결단계

❶ 단계	서로 다른 14가지의 색 중에서 정육면체에 칠할 색 6개를 뽑은 후, 원순열의 수를 이용하여 정육면체를 색칠하는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	나머지 8개의 색을 정팔면체에 칠하는 방법의 수를 구한다.
❸ 단계	주어진 도형에 서로 다른 14가지의 색을 칠하는 방법의 수를 구한다.

서로 다른 14가지의 색 중에서 정육면체에 칠할 색 6개를 택하는 방법의 수는 ${}_{14}C_6$

택한 6가지의 색을 이용하여 정육면체의 밑면에 한 가지 색을 칠하면 또 다른 밑면에 색을 칠하는 방법의 수는 5가지이고, 나머지 4가지의 색을 옆면에 칠하는 방법의 수는 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!$

정팔면체의 쌍대다면체인 정육면체에 회전을 고려하여 칠하였으므로 서로 다른 14가지의 색 중에서 정육면체에 색칠한 색 6가지를 제외하고 남은 8가지의 색을 정팔면체에 색칠하는 방법의 수는 $8!$

따라서 주어진 도형에 색을 칠하는 방법의 수는

${}_{14}C_6\times5\times3!\times8!$

$=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9}{6\times5\times4\times3\times2\times1}\times5\times3!\times8!$

$=7\times13\times11\times10\times9\times8!$

$=7\times13\times11!$

$=91\times11!$ 답 ①

02 해결단계

❶ 단계	주어진 전개식에서 일반항을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 일반항에서 상수항이 되도록 하는 r의 값을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	p가 소수이고 상수항이 160임을 이용하여 n, p의 값을 구한 후, np의 값을 구한다.

$\left(x+\frac{p}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_rx^{n-r}\left(\frac{p}{x}\right)^r={}_nC_rp^rx^{n-2r}$(단, $0\le r\le n$인 정수)

이때, 상수항은 $n-2r=0$, 즉 $r=\frac{n}{2}$일 때이고, 상수항은 160이므로

${}_nC_{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}=160=2^5\times5$

그런데 r는 정수이므로 n은 짝수이다.

(i) $n=2$일 때,

${}_2C_1\times p=2p=160$에서 $p=80$

그런데 p가 소수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4$일 때,

${}_4C_2p^2=6p^2=160$에서 $p^2=\frac{80}{3}$

그런데 p가 소수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=6$일 때,

${}_6C_3p^3=20p^3=160$에서

$p^3=8\qquad\therefore\ p=2\ (\because\ p$는 소수$)$

(iv) $n=8$일 때,

${}_8C_4p^4=70p^4=160$에서 $p^4=\frac{16}{7}$

그런데 p가 소수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) n이 10 이상의 짝수일 때,

${}_nC_{\frac{n}{2}}>160$이므로 ${}_nC_{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}=160$을 만족시키는 소수 p가 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 $n=6$, $p=2$이므로

$np=12$ 답 12

03 해결단계

❶ 단계	빵을 접시에 담는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	음료수를 빵이 놓인 접시에 담는 방법의 수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 방법의 수와 곱의 법칙을 이용하여 구하는 방법의 수를 구한다.

서로 다른 6개의 빵을 똑같은 3개의 접시에 나누어 담는 방법의 수는 원소의 개수가 6인 집합을 공집합이 아닌 3개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

이때, $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$이므로

(i) 빵을 4개, 1개, 1개로 분할하는 방법의 수는

$$\underbrace{{}_6C_4}_{={}_6C_2}\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times2\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=15$$

(ii) 빵을 3개, 2개, 1개로 분할하는 방법의 수는

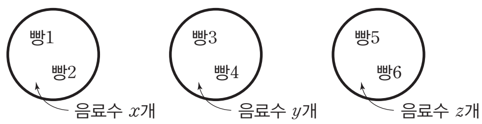
$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times3\times1$$
$$=60$$

(iii) 빵을 2개, 2개, 2개로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{6}$$
$$=15$$

(i), (ii), (iii)에서 빵을 나누어 담는 방법의 수는

$15+60+15=90$ ……㉠



한편, 빵이 담긴 3개의 접시는 구분이 되므로 3개의 접시에 각각 x개, y개, z개의 똑같은 음료수를 놓는다고 할 때, 똑같은 6개의 음료수를 서로 다른 3개의 접시에 적어도 하나씩 담는 방법의 수는 방정식

$x+y+z=6$ (단, x, y, z는 자연수) ……㉡

의 해의 개수와 같다.

이때, $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 방정식 ㉡의 해의 개수는 방정식

$x'+y'+z'=3$ (단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

의 해의 개수와 같다.

즉, 음료수를 담는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10 \quad \cdots\cdots㉢$$

따라서 ㉠, ㉢에서 구하는 방법의 수는

$90\times10=900$ **답** 900

04 해결단계

❶ 단계	이항정리를 이용하여 항등식의 좌변의 x^{10}의 계수를 구한다.
❷ 단계	이항정리를 이용하여 항등식의 우변의 x^{10}의 계수를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

항등식 $(1+x)^{10}(1-x)^{10}=(1-x^2)^{10}$ ……㉠

에서

$(1+x)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2+\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$,

$(1-x)^{10}={}_{10}C_0-{}_{10}C_1x+{}_{10}C_2x^2-\cdots+{}_{10}C_{10}x^{10}$

이므로 ㉠의 좌변에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}-{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8-\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$=({}_{10}C_0)^2-({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2-\cdots-({}_{10}C_9)^2+({}_{10}C_{10})^2$

……㉡

한편, ㉠의 우변에서 $(1-x^2)^{10}$의 전개식에서 일반항은

${}_{10}C_r(-x^2)^r={}_{10}C_r(-1)^rx^{2r}$ (단, $0\le r\le10$인 정수)

x^{10}항은 $2r=10$, 즉 $r=5$일 때이므로 x^{10}의 계수는

$${}_{10}C_5(-1)^5=-{}_{10}C_5=-\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$$
$$=-252 \quad \cdots\cdots㉢$$

그런데 ㉡=㉢이므로

$({}_{10}C_0)^2-({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2-\cdots-({}_{10}C_9)^2+({}_{10}C_{10})^2$

$=-252$ **답** -252

05 해결단계

❶ 단계	빨간색 구슬은 최대 3개 이하로 연속될 수 있음을 파악한다.
❷ 단계	한 묶음이 3개 이하이고, 묶음은 최대 6개가 되도록 빨간색 구슬을 나누는 경우를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계의 각 경우에 따라 빨간색 구슬의 묶음을 파란색 구슬의 사이사이 및 양 끝에 넣는 경우의 수를 구한다.
❹ 단계	만들 수 있는 장식의 수를 구한다.

빨간색 구슬을 R, 파란색 구슬을 B로 나타내면 빨간색 구슬은 연속으로 4번 이상 나올 수 없으므로 최대 3번 연속으로 나올 수 있다.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥
∨B ∨B ∨B ∨B ∨B ∨

[그림 1]

위의 그림과 같이 파란색 구슬을 일렬로 나열하고, 파란색 구슬의 사이사이 및 양 끝을 왼쪽부터 위치한 순서대로 ①~⑥이라 하자.

이때, 빨간색 구슬을 최대 6개의 묶음으로 나누어 위의 ①~⑥에 넣을 수 있다.

빨간색 구슬은 10개 있으므로 한 묶음에 3개 이하가 되도록 구슬을 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 빨간색 구슬을 네 묶음으로 나눈 경우

각 묶음의 빨간색 구슬의 개수를

a, b, c, d $(a\ge b\ge c\ge d\ge1)$라 하면

$a+b+c+d=10$

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는

$(3, 3, 3, 1)$, $(3, 3, 2, 2)$

위의 네 묶음을 각각 일렬로 나열한 후, [그림 1]의 ①~⑥ 중에서 네 개를 택하여 순서대로 넣으면 되므로 경우의 수는

$$\left(\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}\right)\times\underbrace{{}_6C_4}_{={}_6C_4=\frac{6\times5}{2\times1}=15}=(4+6)\times15=150$$

(ii) 빨간색 구슬을 다섯 묶음으로 나눈 경우

각 묶음의 빨간색 구슬의 개수를

a, b, c, d, e $(a\ge b\ge c\ge d\ge e\ge1)$라 하면

$a+b+c+d+e=10$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)는

$(3, 3, 2, 1, 1)$, $(3, 2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$

위의 다섯 묶음을 각각 일렬로 나열한 후, [그림 1]의 ①~⑥ 중에서 다섯 개를 택하여 순서대로 넣으면 되므로 경우의 수는

$$\left(\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{3!}+1\right)\times{}_6C_5$$
$$=(30+20+1)\times6=306$$

(iii) 빨간색 구슬을 여섯 묶음으로 나눈 경우
각 묶음의 빨간색 구슬의 개수를
$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\ (a\geq b\geq c\geq d\geq e\geq f\geq 1)$라 하면
$a+b+c+d+e+f=10$
이 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)$는
$(3,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(3,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)$
위의 여섯 묶음을 각각 일렬로 나열한 후, [그림 1]의 ①~⑥에 순서대로 넣으면 되므로 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!4!}+\dfrac{6!}{2!3!}+\dfrac{6!}{4!2!}=15+60+15=90$

(i), (ii), (iii)에서 만들 수 있는 장식의 수는
$150+306+90=546$ **답** 546

06 해결단계

❶ 단계	세 평행이동 $f,\ g,\ h$를 각각 $a,\ b,\ c$회 사용하여 이동한다고 할 때, $a,\ b,\ c$ 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 이용하여 c의 값에 따른 $a,\ b$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	f와 g가 연속하여 사용할 수 없음을 이용하여 ❷단계에서 구한 $a,\ b,\ c$의 값에 따라 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(8,\ 8)$로 이동하는 방법의 수를 구한다.

주어진 조건에 의하여 평행이동 f는 점을 x축의 방향으로 1만큼, 평행이동 g는 점을 y축의 방향으로 1만큼, 평행이동 h는 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 이동시킨다.
점 $(0,\ 0)$에서 점 $(8,\ 8)$로 이동하려면 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 8만큼 이동해야 하므로 사용된 세 평행이동 $f,\ g,\ h$의 횟수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면
$a+2c=8,\ b+2c=8$ ······㉠
이때, 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(8,\ 8)$로 이동하는 방법의 수는 각각 $a,\ b,\ c$개씩 존재하는 세 문자 $f,\ g,\ h$를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

(i) h가 1회 사용된 경우
$c=1$이므로 ㉠에서 $a=6,\ b=6$
$f,\ f,\ f,\ f,\ f,\ f,\ g,\ g,\ g,\ g,\ g,\ g,\ h$의 13개의 문자를 f와 g가 이웃하지 않게 나열하려면 f와 g가 각각 서로 이웃해야 한다. 즉,
$[f,\ f,\ f,\ f,\ f,\ f],\ h,\ [g,\ g,\ g,\ g,\ g,\ g]$와
$[g,\ g,\ g,\ g,\ g,\ g],\ h,\ [f,\ f,\ f,\ f,\ f,\ f]$
의 2가지이다.
따라서 h가 1회 사용된 방법의 수는 2이다.

(ii) h가 2회 사용된 경우
$c=2$이므로 ㉠에서 $a=4,\ b=4$
$f,\ f,\ f,\ f,\ g,\ g,\ g,\ g,\ h,\ h$의 10개의 문자를 f와 g가 이웃하지 않게 나열하려면 f와 g를 각각 서로 이웃하도록 나누어 한 문자로 본 후, 일렬로 나열된 h의 사이사이와 양 끝(∨)에 배치하면 된다.
$\vee h\vee h\vee$
① $[f,\ f,\ f,\ f],\ [g,\ g,\ g,\ g]$로 나눈 경우
위의 두 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)의 3개의 자리 중에서 2개를 택하여 순서대로 넣으면 되므로
$2!\times{}_3C_2=2\times3=6$
② $f,\ [f,\ f,\ f],\ [g,\ g,\ g,\ g]$ 또는
$[f,\ f,\ f,\ f],\ g,\ [g,\ g,\ g]$로 나눈 경우
위의 세 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)에 순서대로 넣으면 되므로
$2\times3!=12$
③ $[f,\ f],\ [f,\ f],\ [g,\ g,\ g,\ g]$ 또는
$[f,\ f,\ f,\ f],\ [g,\ g],\ [g,\ g]$로 나눈 경우
위의 세 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)에 순서대로 넣으면 되므로
$2\times\dfrac{3!}{2!1!}=6$
①, ②, ③에서 h가 2회 사용된 방법의 수는
$6+12+6=24$

(iii) h가 3회 사용된 경우
$c=3$이므로 ㉠에서 $a=2,\ b=2$
$f,\ f,\ g,\ g,\ h,\ h,\ h$의 7개의 문자를 f와 g가 이웃하지 않게 나열하려면 f와 g를 각각 서로 이웃하도록 나누어 한 문자로 본 후, 일렬로 나열된 h의 사이사이와 양 끝(∨)에 배치하면 된다.
$\vee h\vee h\vee h\vee$
④ $[f,\ f],\ [g,\ g]$로 나눈 경우
위의 두 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)의 4개의 자리 중에서 2개를 택하여 넣으면 되므로 $=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$
$2!\times{}_4C_2=2\times6=12$
⑤ $f,\ f,\ [g,\ g]$ 또는 $[f,\ f],\ g,\ g$로 나눈 경우
위의 세 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)의 4개의 자리 중에서 3개를 택하여 순서대로 넣으면 되므로
$2\times\dfrac{3!}{2!}\times{}_4C_3=2\times3\times4=24$
⑥ $f,\ f,\ g,\ g$로 나눈 경우
위의 네 묶음을 일렬로 나열한 후, h의 사이사이와 양 끝(∨)에 순서대로 넣으면 되므로
$\dfrac{4!}{2!2!}=6$
④, ⑤, ⑥에서 h가 3회 사용된 방법의 수는
$12+24+6=42$

(iv) h가 4회 사용된 경우
$c=4$이므로 ㉠에서 $a=0,\ b=0$
즉, $h,\ h,\ h,\ h$의 1가지이다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$2+24+42+1=69$ **답** 69

07 해결단계

❶ 단계	순서대로 AJ가 나오는 경우가 딱 한 번 존재하도록 문자의 배열의 경우를 찾는다.
❷ 단계	❶ 단계에서 찾은 배열을 이용하여 전체 아이디의 문자 수가 10이 되도록 하는 경우의 수를 각각 구한다.
❸ 단계	아이디를 만들 수 있는 방법의 수를 구한다.

(규칙 1)에 의하여 아이디는 문자 J로 시작하고, (규칙 2)에 의하여 아이디에서 문자는 같은 문자를 하나로 보면 J, I, N, A의 순서대로 이루어진다.
이때, (규칙 3)에 의하여 문자 A 다음에 문자 J가 나오는 경우가 딱 한 번 존재하므로 아이디에서 같은 문자를 하나로 봤을 때, 문자의 배열은 다음과 같다.

(i) 문자의 배열이 J, I, N, A, J일 때,
다섯 개의 문자 J, I, N, A, J가 각각 연속으로 a, b, c, d, e번 나온다고 하면 아이디는 10개의 문자로 이루어져 있으므로
$a+b+c+d+e=10$ (단, a, b, c, d, e는 자연수)
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'+e'=5$
(단, a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
$${}_5H_5={}_{5+5-1}C_5={}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

(ii) 문자의 배열이 J, I, N, A, J, I일 때,
(i)과 같은 방법으로 여섯 개의 문자 J, I, N, A, J, I가 각각 연속으로 a, b, c, d, e, f번 나온다고 하면 아이디는 10개의 문자로 이루어져 있으므로
$a+b+c+d+e+f=10$
(단, a, b, c, d, e, f는 자연수)
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$, $f=f'+1$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'+e'+f'=4$
(단, a', b', c', d', e', f'은 음이 아닌 정수)
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e', f')의 개수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126$

(iii) 문자의 배열이 J, I, N, A, J, I, N일 때,
일곱 개의 문자 J, I, N, A, J, I, N이 각각 연속으로 a, b, c, d, e, f, g번 나온다고 하면 아이디는 10개의 문자로 이루어져 있으므로
$a+b+c+d+e+f+g=10$
(단, a, b, c, d, e, f, g는 자연수)
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$, $f=f'+1$, $g=g'+1$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'+e'+f'+g'=3$
(단, a', b', c', d', e', f', g'은 음이 아닌 정수)
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a', b', c', d', e', f', g')$의 개수는 서로 다른 7개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
$${}_7H_3={}_{7+3-1}C_3={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

(iv) 문자의 배열이 J, I, N, A, J, I, N, A일 때,
여덟 개의 문자 J, I, N, A, J, I, N, A가 각각 연속으로 a, b, c, d, e, f, g, h번 나온다고 하면 아이디는 10개의 문자로 이루어져 있으므로
$a+b+c+d+e+f+g+h=10$
(단, a, b, c, d, e, f, g, h는 자연수)
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$, $f=f'+1$, $g=g'+1$, $h=h'+1$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'+e'+f'+g'+h'=2$
(단, a', b', c', d', e', f', g', h'은 음이 아닌 정수)
위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a', b', c', d', e', f', g', h')$의 개수는 서로 다른 8개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
$${}_8H_2={}_{8+2-1}C_2={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

(i)~(iv)에서 아이디를 만드는 방법의 수는
$126+126+84+36=372$

답 372

이것이 수능 pp. 18~19

1 ②	2 48	3 180	4 6	5 32
6 45	7 455	8 25		

1 해결단계

❶ 단계	여학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하고, 여학생 사이에 앉은 남학생의 수가 모두 다를 조건을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 조건에 맞게 남학생이 배열되는 경우의 수를 구한 후, n의 값을 구한다.

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!$
각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 달라야 하므로 각각 1명, 2명, 3명이고 이를 정하는 경우의 수는 $3!$
남학생을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!$
따라서 구하는 경우의 수는
$2!\times3!\times6!=12\times6!$
$\therefore n=12$

답 ②

• 다른풀이 •

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!$

각 경우에 대하여 여학생과 여학생 사이 세 곳에 앉는 남학생의 수는 모두 다르므로 남학생 6명이 3명, 2명, 1명의 세 조로 나뉘어 여학생과 여학생 사이에 앉아야 한다.

이와 같이 남학생을 세 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6!}{3!3!}\times\frac{3!}{2!}\times1=\frac{6!}{3!2!}$$

위의 세 조를 여학생과 여학생 사이의 세 곳에 배열하는 경우의 수는 $3!$

각 경우에 대하여 남학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!\times2!\times1!$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2!\times\frac{6!}{3!2!}\times3!\times3!\times2!\times1!=12\times6!$$

$\therefore n=12$

2

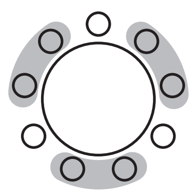
해결단계

❶ 단계	남학생끼리 2명씩 조를 만드는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	빈자리를 고려하여 원탁에 앉히는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	같은 조 학생들끼리 자리를 바꿀 수 있는 경우의 수를 구한 뒤, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구한다.

남학생 4명이 2명씩 조를 만드는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$$

조건 (나)를 만족시키려면 3개의 조가 오른쪽 그림과 같이 원탁에 둘러 앉아야 한다.



3개의 묶음을 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(3-1)!=2!=2$

같은 조의 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지씩 존재하고, 총 3조이므로 2^3

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times2\times2^3=48$ 답 48

3

해결단계

❶ 단계	세 개의 공에 적힌 수의 합이 5가 되는 조건을 찾는다.
❷ 단계	4, 5, 6이 적힌 칸에 모두 흰 공 또는 모두 검은 공이 들어가는 경우의 수를 각각 구한다.
❸ 단계	합의 법칙을 이용하여 구하는 경우의 수를 구한다.

4, 5, 6이 적힌 칸에 들어가는 세 개의 공에 적힌 수의 합이 5가 되기 위해서는 1, 2, 2가 적힌 공이어야 한다.

이때, 모두 같은 색이 들어가야 하므로 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 4, 5, 6이 적힌 칸에 모두 흰 공이 들어가는 경우

4, 5, 6이 적힌 칸에 1, 2, 2가 각각 적힌 3개의 흰 공을 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

나머지 5개의 칸에 1이 적힌 흰 공 1개와 1이 적힌 검은 공 2개, 2가 적힌 검은 공 2개를 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

즉, 구하는 경우의 수는 $3\times30=90$

(ⅱ) 4, 5, 6이 적힌 칸에 모두 검은 공이 들어가는 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 4, 5, 6이 적힌 칸에 1, 2, 2가 각각 적힌 검은 공 3개를 넣는 경우의 수는 90

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$90+90=180$ 답 180

4

해결단계

❶ 단계	네 자연수의 합이 6이 되는 경우를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 경우 중 곱이 4의 배수가 되는 것을 찾는다.
❸ 단계	같은 것이 있는 순열을 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.

네 자연수의 합이 6인 경우는 $1+1+1+3$ 또는 $1+1+2+2$의 두 가지이다.

(ⅰ) $1+1+1+3$인 경우

$1\times1\times1\times3=3$이므로 곱이 4의 배수가 아니다.

(ⅱ) $1+1+2+2$인 경우

$1\times1\times2\times2=4$이므로 곱이 4의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 네 자연수는 1, 1, 2, 2이므로 가능한 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다. 즉,

$\frac{4!}{2!2!}=6$ 답 6

5

해결단계

❶ 단계	조건 (나)를 만족시키는 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	b의 값에 따라 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한 후, 답을 구한다.

조건 (나)에서 $2^a\times4^b=2^{a+2b}$이고 이 수가 8의 배수이어야 하므로

$a+2b\geq3$ ($\because 8=2^3$)

(ⅰ) $b=0$일 때,

$a\geq3$이어야 하므로 조건 (가)의 $a+b+c=7$에서

$a=a'+3$ (a'은 음이 아닌 정수)으로 놓으면

$(a'+3)+c=7$

$\therefore a'+c=4$ (단, a', c는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', c)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(ii) $b=1$일 때,

$a\ge1$이어야 하므로 조건 (가)의 $a+b+c=7$에서

$a=a'+1$ (a'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$(a'+1)+1+c=7$

$\therefore a'+c=5$ (단, a', c는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', c)의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(iii) $b\ge2$일 때,

$a\ge0$이면 되므로 조건 (가)의 $a+b+c=7$에서

$b=b'+2$ (b'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+(b'+2)+c=7$

$\therefore a+b'+c=5$ (단, a, b', c는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a, b', c)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$5+6+21=32$

답 32

6

해결단계

❶ 단계	<B형>과 <C형>이 각각 2번씩 나타날 수 있는 경우를 구한다.
❷ 단계	각 경우에 대해 <A형> 4번, <D형> 1번이 나타날 수 있는 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 경우의 수와 합의 법칙을 이용하여 모든 경우의 수를 구한다.

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(i) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

${}_2C_1\times{}_3H_4={}_2C_1\times{}_6C_4={}_2C_1\times{}_6C_2$

$=2\times\frac{6\times5}{2\times1}=2\times15=30$

(ii) ○●○●○인 경우

(i)과 같은 방법으로

${}_3C_1\times{}_2H_4={}_3C_1\times{}_5C_4=3\times5=15$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 모든 경우의 수는

$30+15=45$

답 45

7

해결단계

❶ 단계	구하고자 하는 방법의 수를 중복조합의 수로 표현한다.
❷ 단계	${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$임을 이용하여 조합의 수로 표현한다.
❸ 단계	이항계수의 성질을 이용하여 값을 구한다.

선택한 빨간색, 파란색, 노란색 색연필의 개수를 각각 x, y, z라 하면 각 색의 색연필을 적어도 하나씩 포함해야 하고, 15개 이하의 색연필을 선택해야 하므로 구하는 방법의 수는 부등식 $x+y+z\le15$ (x, y, z는 자연수)의 해의 개수와 같다.

$x=x'+1$, $y=y+1'$, $z=z'+1$로 놓으면 부등식 $x+y+z\le15$의 해의 개수는 부등식 $x'+y'+z'\le12$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)의 해의 개수와 같다.

이때, 방정식 $x'+y'+z'=n$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)을 만족시키는 해의 개수는 ${}_3H_n$이므로 구하는 방법의 수는

${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+\cdots+{}_3H_{11}+{}_3H_{12}$

$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{12}$

$=(\underbrace{{}_3C_0+{}_3C_1}_{={}_4C_1})+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{12}$

$(\because {}_2C_0={}_3C_0=1)$

$=(\underbrace{{}_4C_1+{}_4C_2}_{={}_5C_2})+{}_5C_3+\cdots+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{12}$

$(\because {}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r)$

$=({}_5C_2+{}_5C_3)+\cdots+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{12}$

$(\because {}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r)$

$\vdots$

$={}_{14}C_{11}+{}_{14}C_{12}$

$={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3$

$=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$

답 455

8

해결단계

❶ 단계	이항계수의 성질을 이용하여 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$의 값을 간단히 정리한다.
❷ 단계	❶ 단계의 결과가 3의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구한다.

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

$=\underbrace{({}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n)}_{\text{이항계수 성질에 의해 }2^n\text{과 같다.}}-{}_nC_0$

$=2^n-1$ ⋯⋯㉠

㉠에서 n 대신에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$2^1-1=1$, $2^2-1=3$, $2^3-1=7$, $2^4-1=15$, …

즉, ㉠에서 2^n-1을 3으로 나눈 나머지가 n이 홀수이면 1이고, n이 짝수이면 3의 배수이다.

따라서 구하는 n의 개수는 2, 4, 6, …, 50의 25이다.

답 25

blacklabel 특강 풀이첨삭

n이 짝수일 때, 2^n-1이 3의 배수임을 증명해 보자.

$n=2k$ (k는 자연수)라 하면

$2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1$

$=(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+4+1)$

$=3(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+4+1)$

따라서 n이 짝수이면 2^n-1은 3의 배수이다.

II 확률

02 확률의 뜻과 활용

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 23

01 ③	02 $\frac{10}{27}$	03 ③	04 ②	05 $\frac{\pi}{8}$
06 ①	07 ④	08 ④		

01 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

한편, $f(x)=x^2+2ax+b=(x+a)^2+b-a^2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때, 최솟값 $b-a^2$을 갖는다.

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 작으려면

$b-a^2<0 \qquad \therefore b<a^2 \qquad \cdots\cdots$㉠

(i) $a=1$일 때,

$b<1$을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$b<4$이므로 $b=1,\ 2,\ 3$

이때, 순서쌍 $(a,\ b)$는 3가지

(iii) $a\geq3$일 때,

$a^2\geq9$이므로 b의 값에 관계없이 부등식 ㉠이 항상 성립한다.

이때, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $4\times6=24$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $3+24=27$(가지)이므로 구하는 확률은

$\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$ 답 ③

02 서로 다른 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣는 방법의 수는

${}_3\Pi_5=3^5$ ← 공 한 개당 넣어질 수 있는 상자는 3개씩이므로 $3\times3\times3\times3\times3$(가지)

이때, 상자 A만 비어 있는 경우의 수는 서로 다른 5개의 공을 2개의 상자 B, C에 넣는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5-2=30$ ← 상자 B가 비어 있는 경우와 상자 C가 비어 있는 경우를 제외해야 한다.

같은 방법으로 하면 상자 B만 비어 있는 경우의 수와 상자 C만 비어 있는 경우의 수도 각각 30이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{3\times30}{3^5}=\frac{10}{27}$ 답 $\frac{10}{27}$

03 1부터 8까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 뽑는 경우의 수는

${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

뽑힌 4개의 자연수 중에서 두 번째로 작은 자연수가 4인 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 1개, 5, 6, 7, 8 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_1\times{}_4C_2=3\times\frac{4\times3}{2\times1}=18$

따라서 구하는 확률은

$\frac{18}{70}=\frac{9}{35}$ 답 ③

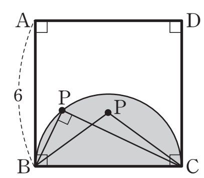
04 아무것도 적히지 않은 n개의 공이 들어 있는 볼풀장 안에 A가 적힌 20개의 공을 더 넣었으므로 볼풀장 안에 있는 공의 개수는 $n+20$이고, 이 볼풀장에서 한 개의 공을 꺼낼 때 A가 적힌 공이 뽑힐 확률은 $\frac{20}{n+20}$

이때, 시행 횟수는 5000번으로 충분히 크고, 100개 중에 1개 꼴로 A가 적힌 공이 나왔으므로

$\frac{20}{n+20}=\frac{1}{100}$에서 $n+20=2000$

$\therefore n=1980$ 답 ②

05 정사각형 ABCD의 내부에서 오른쪽 그림과 같이 점 P가 변 BC를 지름으로 하는 반원의 호 위에 있으면 △PBC는 직각삼각형이 되므로 어두운 부분인 반원의 내부에 점 P를 잡아야 △PBC가 둔각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{변 BC를 지름으로 하는 반원의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\pi\times3^2}{6^2}=\frac{\pi}{8}$ 답 $\frac{\pi}{8}$

06 ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여 $0\leq \mathrm{P}(A)\leq1$ (참)

ㄴ. (반례) 표본공간 $S=\{1,\ 2\}$의 두 부분집합 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$에 대하여 $A-B=A=\{1\}$이지만

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄷ. (반례) 표본공간 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\subset S$이다.

이때, $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$

그런데 $\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\underbrace{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)}_{=\frac{6}{5}}>\underbrace{\mathrm{P}(S)}_{=1}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

07 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{6}$ ……㉠

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{6}$ ……㉡

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}$

이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$2\left\{\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{6}\right\}-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

답 ④

• 다른풀이 •

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

이므로

$\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$

08 5개의 알파벳 a, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

모음 사이에 자음이 적어도 1개 있는 사건을 A라 하면 여사건 A^C은 모음이 서로 이웃하는 사건이다.

이때, 모음이 서로 이웃하는 경우의 수는 a, e를 묶어서 하나로 생각하고 전체 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$4!\times \underbrace{2!}_{\text{a, e를 일렬로 나열하는 경우}}=24\times 2=48$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

답 ④

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 24~28

01 ①	02 ④	03 38	04 $\frac{1}{6}$	05 ②
06 $\frac{1}{85}$	07 ①	08 53	09 $\frac{21}{64}$	10 ④
11 ③	12 10	13 ③	14 80	15 10
16 ④	17 ⑤	18 ⑤	19 $\frac{1}{2}$	20 ②
21 65	22 73	23 $\frac{8}{27}$	24 ④	25 13
26 ①	27 $\frac{115}{729}$	28 ①	29 ③	30 ⑤
31 $\frac{2}{3}$	32 $\frac{1061}{1250}$	33 19	34 ③	35 ⑤

01 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

조부모와 부모를 합친 4명을 한 사람으로 생각하고 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)!=4!$

이때, 조부모와 부모가 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!$이고, 조부모끼리, 부모끼리 자리를 바꾸는 경우의 수가 각각 $2!$이므로 구하는 확률은

$\frac{4!2!2!2!}{7!}=\frac{4}{105}$

답 ①

02 3개의 구슬을 서로 다른 구슬로 생각하여 확률을 구하면 각 구슬을 서로 다른 그릇 A, B, C에 담는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때, 각 그릇에 서로 다른 3개의 구슬을 하나씩 담으려면 3개의 구슬을 일렬로 나열한 후, 순서대로 세 그릇 A, B, C에 담으면 되므로 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

답 ④

blacklabel 특강 오답피하기

다음과 같이 계산하여 답을 틀릴 수 있다.

> 3개의 구슬이 서로 다른 세 그릇에 담기는 경우의 수는 그릇 3개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$
> 구슬은 서로 구별하지 않으므로 각 그릇에 구슬이 하나씩 담긴 경우는 1가지
> 즉, 구하는 경우의 수는 $\frac{1}{10}$

수학적 확률의 정의는 어떤 시행에서 표본공간의 각 근원사건이 나올 가능성이 같을 때에만 $\frac{(\text{해당 사건의 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$를 확률로 갖는다.

위의 풀이가 올바른 풀이라면 중복조합으로 계산한 10가지 경우의 근원사건이 나올 가능성이 같아야 한다. 즉, 세 구슬이 모두 그릇 A에 담길 확률과 세 구슬이 그릇 A에 두 개, 그릇 B에 한 개 담길 확률이 같아야 한다.

그러나 구슬 3개를 ①, ②, ③이라 할 때, 세 구슬이 모두 그릇 A에 담길 수 있는 경우의 수는 1가지, 세 구슬이 그릇 A에 두 개, 그릇 B에 한 개 담길 수 있는 경우의 수는 그릇 B에 ① 또는 ② 또는 ③을 담을 수 있으므로 3가지이다. 따라서 근원사건의 가능성이 모두 다르기 때문에 $\frac{1}{{}_3\mathrm{H}_3}=\frac{1}{10}$과 같이 계산하면 안 된다.

03 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{7!}{3!}=7\times6\times5\times4=840$

이때, 홀수가 적힌 카드 1, 3을 홀수 번째에 놓는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

짝수가 적힌 카드 2, 4를 짝수 번째에 놓는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

나머지 자리에는 숫자가 적혀 있지 않은 카드를 나열하면 되므로 1가지

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12\times6\times1}{840}=\dfrac{3}{35}$

이므로 $p=35$, $q=3$

$\therefore p+q=35+3=38$ 답 38

04 6개의 알파벳을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$

e가 c보다 왼쪽에 위치하고, a, c는 서로 이웃해야 하므로 a, c를 한 문자 X로 생각하고 e도 같은 문자 X로 생각하여 나열한 후, 첫 번째 X에는 e를, 두 번째 X에는 a, c 또는 c, a를 넣으면 된다.

5개의 문자 X, X, b, d, f를 일렬로 나열한 후, X에 e와 a, c를 넣는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{2!}\times2=5!$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{5!}{6!}=\dfrac{1}{6}$ 답 $\dfrac{1}{6}$

05 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 1, 2가 적힌 공이 나온 경우

일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

$a\le b\le c\le d$인 경우의 수는 1

(ii) 1, 1, 1, 3이 적힌 공이 나온 경우

일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

$a\le b\le c\le d$인 경우의 수는 1

(iii) 1, 1, 2, 3이 적힌 공이 나온 경우

일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

$a\le b\le c\le d$인 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 이 주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4+4+12=20$

나열된 순서대로 공에 적힌 수를 a, b, c, d라 할 때, $a\le b\le c\le d$인 경우는

$1+1+1=3$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{20}$이므로 $p=20$, $q=3$

$\therefore p+q=20+3=23$ 답 ②

06 35개의 공에서 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{35}C_2=\dfrac{35\times34}{2\times1}=595$

이때, 35개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 공에 적힌 자연수를 a, b $(1\le a<b\le35)$라 하면 2개의 공의 무게는 각각 $\dfrac{a^2}{3}-5a+23$, $\dfrac{b^2}{3}-5b+23$이고 2개의 공의 무게가 같으므로

$\dfrac{a^2}{3}-5a+23=\dfrac{b^2}{3}-5b+23$

$\underbrace{(a^2-b^2)}_{=(a-b)(a+b)}-15(a-b)=0$, $(a-b)(a+b-15)=0$

$\therefore a+b=15$ $(\because a\ne b)$

따라서 $1\le a<b\le35$인 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b=15$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 14)$, $(2, 13)$, $(3, 12)$, $\cdots$, $(7, 8)$의 7개이므로

구하는 확률은 $\dfrac{7}{595}=\dfrac{1}{85}$ 답 $\dfrac{1}{85}$

단계	채점 기준	배점
㈎	35개의 공에서 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수를 구한 경우	20%
㈏	동시에 꺼낸 2개의 공에 적힌 자연수를 a, b라 하고 2개의 공의 무게가 같을 조건을 구한 경우	40%
㈐	㈏단계에서 구한 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 후, 확률을 구한 경우	40%

07 400원짜리 우표 4장, 300원짜리 우표 5장, 200원짜리 우표 3장을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{12!}{4!5!3!}=11\times10\times9\times7\times4$

400원짜리의 우표 중 가장 왼쪽에 나열된 우표가 200원짜리 우표 중 가장 왼쪽에 나열된 우표보다 더 왼쪽에 나열되어야 하므로 400원짜리 우표 4장과 200원짜리 우표 3장을 모두 같은 우표 A로 생각하여 나열한 후, 왼쪽에서 첫 번째 우표에는 400원짜리 우표를 집어넣고 나머지 6장의 A 우표에는 400원짜리 우표 3장, 200원짜리 우표 3장을 일렬로 나열하여 순서대로 집어넣으면 된다.

A 우표 7장, 300원짜리 우표 5장을 나열한 후, 6장의 A 우표에 400원짜리 우표 3장과 200원짜리 우표 3장을 집어넣는 경우의 수는

$\dfrac{12!}{7!5!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=11\times10\times9\times8\times2$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{11\times10\times9\times8\times2}{11\times10\times9\times7\times4}=\dfrac{4}{7}$

이므로 $p=7$, $q=4$

$\therefore p+q=7+4=11$ 답 ①

08 1부터 9까지의 9개의 숫자 중에서 임의의 서로 다른 세 수를 순서대로 택하여 각각 a, b, c로 놓는 경우의 수는

${}_9P_3=9\times8\times7=504$

$10\left[\dfrac{a\times b\times c}{10}\right]=a\times b\times c$에서

$\left[\dfrac{a\times b\times c}{10}\right]=\dfrac{a\times b\times c}{10}$ ……㉠

㉠을 만족시키려면 $\dfrac{a\times b\times c}{10}$는 정수이어야 하므로

$a\times b\times c$는 10의 배수이어야 한다.

즉, a, b, c 중에 5는 반드시 포함되어야 하고, 나머지 두 수 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로 1부터 9까지의 수 중에서 곱하여 10의 배수가 되도록 세 수를 택하는 경우의 수는

1, 3, 7, 9 중에서 2개를 택하는 경우의 수

$1\times({}_8C_2-{}_4C_2)=28-6=22$

이때, 선택한 3개의 수를 a, b, c에 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$22\times6=132$

따라서 구하는 확률은

$\frac{132}{504}=\frac{11}{42}$

이므로 $p=42$, $q=11$

$\therefore p+q=42+11=53$

답 53

09 암호에는 a, b, c, d, e, f가 각각 한 번씩 사용되므로 여섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!$

이때, 각 문자는 대문자 또는 소문자로 쓸 수 있으므로 나열한 암호에 대하여 각각 경우의 수가 2^6가지씩 존재한다.

즉, 만들 수 있는 암호의 모든 경우의 수는 $6!\times2^6$

만들어진 암호에서 대문자는 서로 이웃해야 하므로 대문자의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) 대문자가 1개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 6개 중에서 하나를 택하여 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!\times6$

(ⅱ) 대문자가 2개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 6개 중에서 이웃한 2개를 택하여 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!\times5$

(ⅲ) 대문자가 3개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 6개 중에서 이웃한 3개를 택하여 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!\times4$

(ⅳ) 대문자가 4개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 6개 중에서 이웃한 4개를 택하여 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!\times3$

(ⅴ) 대문자가 5개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 6개 중에서 이웃한 5개를 택하여 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$6!\times2$

(ⅵ) 대문자가 6개인 경우

암호를 일렬로 나열한 후, 모두 대문자로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는 $6!$

(ⅰ)~(ⅵ)에서 대문자가 모두 서로 이웃한 경우의 수는

$6!\times6+6!\times5+6!\times4+6!\times3+6!\times2+6!\times1$

$=6!\times(6+5+4+3+2+1)$

$=6!\times21$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6!\times21}{6!\times2^6}=\frac{21}{64}$

답 $\frac{21}{64}$

10 주사위를 두 번 던졌으므로 전체 경우의 수는

$6^2=36$

$A(0, 4)$, $B(0, -4)$에서 $\overline{AB}=8$이고, 선분 AB를 삼각형 ABC의 밑변으로 생각하면 점 C에서 y축에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 CH의 길이가 삼각형 ABC의 높이이다.

이때, $\overline{CH}$는 점 C의 x좌표의 절댓값과 같으므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times8\times\overline{CH}$

$=4\left|m\cos\frac{n\pi}{3}\right|$

$=4m\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$ ($\because$ m은 자연수)

(ⅰ) $n=1, 2, 4, 5$일 때,

$\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=\frac{1}{2}$이므로 $S=2m$

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작아야 하므로

$S<12$에서 $2m<12$ $\quad\therefore m<6$

즉, $m=1, 2, 3, 4, 5$

(ⅱ) $n=3, 6$일 때,

$\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|=1$이므로 $S=4m$

삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작아야 하므로

$S<12$에서 $4m<12$ $\quad\therefore m<3$

즉, $m=1, 2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$5\times4+2\times2=24$

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 12보다 작을 확률은

$\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

답 ④

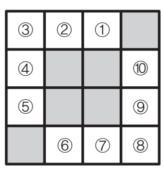
11 오각기둥의 10개의 꼭짓점 중 임의로 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는 ${}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

택한 3개의 꼭짓점이 오각기둥의 한 면 위에 있으면 반드시 오각기둥의 한 모서리를 변으로 갖게 된다.

따라서 만들어진 삼각형의 어떤 변도 오각기둥의 모서리가 아니려면 3개의 꼭짓점은 오각기둥의 한 면 위에 있지 않으면서 한 개는 밑면 ABCDE, 두 개는 밑면 FGHIJ에 있거나 한 개는 밑면 FGHIJ, 두 개는 밑면 ABCDE에 있어야 한다.

이때, 두 밑면이 합동이므로 밑면 ABCDE에서 한 개, 밑면 FGHIJ에서 두 개 택하는 경우의 수와 밑면 ABCDE에서 두 개, 밑면 FGHIJ에서 한 개 택하는 경우의 수는 같다.
밑면 ABCDE에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수가 5이고, 밑면 ABCDE에서 꼭짓점 A를 택했다고 하면 밑면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우는
J와 G, J와 H, I와 G
의 3가지이다.
즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는
$2\times5\times3=30$
따라서 구하는 확률은
$\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$ **답** ③

12 주어진 10개의 자연수를 색칠하지 않은 10개의 칸에 하나씩 써 넣는 경우의 수는 $10!$이고, 각각의 경우에 대하여 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 존재하므로 전체 경우의 수는 $\frac{10!}{2}$



위의 그림과 같이 색칠하지 않은 10개의 칸을 각각 ①~⑩이라 하면 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 생각하므로 홀수 2개를 ①~⑤에, 홀수 3개를 ⑥~⑩에 써 넣는다고 하자.
홀수가 1, 3, 5, 7, 9의 5개이므로 홀수를 2개, 3개로 나누는 방법의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_3=\frac{5\times4}{2\times1}\times1=10$
(i) 홀수 2개를 ①~⑤에 써 넣는 경우
이웃하지 않도록 칸 두 개를 택하는 경우는
①과③, ①과 ④, ①과 ⑤, ②와 ④, ②와 ⑤, ③과 ⑤
의 6가지이고, 홀수 2개의 위치를 바꿔 써 넣는 경우가 2가지이므로
$6\times2=12$
(ii) 홀수 3개를 ⑥~⑩에 써 넣는 경우
이웃하지 않도록 칸 세 개를 택하는 경우는
⑥, ⑧, ⑩뿐이고, 홀수 3개의 위치를 바꿔 써 넣는 경우가 $3!$가지이므로
$1\times3!=6$
(i), (ii)에서 2개, 3개로 나눈 홀수를 서로 이웃하지 않도록 색칠하지 않은 칸에 써 넣는 경우의 수는
$12\times6=72$
홀수를 써 넣고 남은 5개의 칸에 짝수 5개를 써 넣는 경우의 수는 $5!$
따라서 1부터 10까지의 자연수를 홀수끼리 서로 이웃하지 않도록 써 넣는 경우의 수는 $10\times72\times5!$이므로 구하는 확률은
$p=\frac{10\times72\times5!}{\frac{10!}{2}}=\frac{1}{21}$
$\therefore 210p=210\times\frac{1}{21}=10$ **답** 10

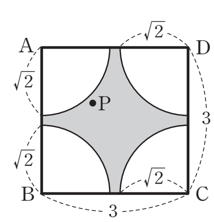
13 숫자 2가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{1500}{3000}=\frac{1}{2}$ ← 통계적 확률
주머니에 들어 있는 카드의 개수는 $2+5+n=7+n$이고, 숫자 2가 적힌 카드는 5개이므로 주머니에서 한 개의 카드를 꺼낼 때 숫자 2가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{5}{7+n}$
수학적 확률
이때, 시행 횟수는 3000번으로 충분히 크므로
$\frac{5}{7+n}=\frac{1}{2}$에서 $7+n=10$
(수학적 확률)=(통계적 확률)
$\therefore n=3$ **답** ③

14 A 고등학교에서 하루 평균 30분 미만으로 운동하는 학생 a명 중에서 비만인 학생은 12명이고, 그 비율이 전체의 10 %이므로
$\frac{12}{a}\times100=10$ $\therefore a=120$
B 고등학교에서 하루 평균 30분 미만으로 운동하는 학생 b명 중에서 비만인 학생은 36명이고, 그 비율이 전체의 18 %이므로
$\frac{36}{b}\times100=18$ $\therefore b=200$
$\therefore b-a=200-120=80$ **답** 80

단계	채점 기준	배점
(가)	A 고등학교의 비만인 학생 수와 비율을 이용하여 a의 값을 구한 경우	40%
(나)	B 고등학교의 비만인 학생 수와 비율을 이용하여 b의 값을 구한 경우	40%
(다)	$b-a$의 값을 구한 경우	20%

15 4번 중 1번 꼴로 바닥에 닿는 면에 적힌 숫자의 합이 2가 된다는 것은 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 둘 다 숫자 1이 적힌 면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이라는 것이다.
즉, 모든 경우의 수는 $20\times20=400$이고 숫자 1이 적힌 면의 개수를 a라 하면 둘 다 1이 나오는 경우의 수는
$a\times a=a^2$이므로
$\frac{a^2}{400}=\frac{1}{4}$, $a^2=100$ $\therefore a=10$ ($\because a>0$)
따라서 숫자 1이 적힌 면의 개수는 10이다. **답** 10

16 정사각형 ABCD의 네 꼭짓점과 점 P 사이의 거리가 모두 $\sqrt{2}$ 이상이 되려면 오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점을 중심으로 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 사분원을 그린 후, 사분원



의 경계 또는 외부에 점 P를 잡아야 한다.
이때, 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 넓이는 $3\times3=9$이고, 네 개의 사분원의 넓이의 합은
$\frac{1}{4}\times\pi\times(\sqrt{2})^2\times4=2\pi$이므로 어두운 부분의 넓이는 $9-2\pi$이다.
따라서 구하는 확률은

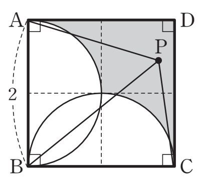
$$\frac{(\text{어두운 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}=\frac{9-2\pi}{9}$$

답 ④

• 다른풀이 •

(구하는 확률)
$=1-$(네 꼭짓점 중에서 점 P와의 거리가 $\sqrt{2}$보다 작은 꼭짓점이 존재할 확률)
$=1-$(사분원의 내부에 점 P를 잡을 확률)
$=1-\frac{2\pi}{9}\left(=\frac{9-2\pi}{9}\right)$

17 두 삼각형 PAB, PBC가 동시에 예각삼각형이 되려면 점 P가 변 AB를 지름으로 하는 반원의 외부와 변 BC를 지름으로 하는 반원의 외부의 공통부분, 즉 오른쪽 그림의 어두운 부분에 있어야 한다.

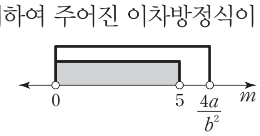


흰 부분의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정사각형과 반지름의 길이가 1인 사분원 두 개로 이루어져 있고, 정사각형 ABCD의 넓이가 $2^2=4$이므로 어두운 부분의 넓이는
$4-\left(1^2+2\times\frac{1}{4}\times\pi\times1^2\right)=3-\frac{\pi}{2}$
따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{어두운 부분의 넓이})}{(\text{정사각형 ABCD의 넓이})}=\frac{3-\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{6-\pi}{8}$$

답 ⑤

18 x에 대한 이차방정식 $ax^2+bmx+m=0$이 서로 다른 두 허근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,
$D=(bm)^2-4am<0$에서
$b^2m^2-4am<0$, $m(b^2m-4a)<0$
$\therefore 0<m<\frac{4a}{b^2}$ ($\because a>0,\ b>0$)
이때, $0<m<5$인 실수 m에 대하여 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가질 확률이 1이므로 오른쪽 그림에서



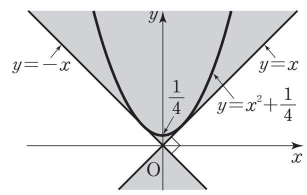
$\frac{4a}{b^2}\geq5$ $\quad\therefore \frac{a}{b^2}\geq\frac{5}{4}$
따라서 조건을 만족시키는 $\frac{a}{b^2}$의 최솟값은 $\frac{5}{4}$이다.

답 ⑤

19 (ⅰ) 직선 l이 점 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$에서 곡선과 만날 때,
직선의 방정식은
$l : x=0$

(ⅱ) 직선 l을 $y=mx$ (m은 실수)라 하면 곡선 $y=x^2+\frac{1}{4}$과 직선 $y=mx$가 만나므로 이차방정식 $x^2+\frac{1}{4}=mx$, 즉 $x^2-mx+\frac{1}{4}=0$이 실근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=m^2-4\times\frac{1}{4}\geq0$에서 $m^2-1\geq0$
$(m+1)(m-1)\geq0$ $\quad\therefore m\leq-1$ 또는 $m\geq1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 직선 l이 주어진 곡선과 만나려면 직선이 다음 그림의 어두운 부분의 경계 또는 내부에서 움직여야 한다.



(단, 경계선 포함)

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

20 전교생이 600명인 학교에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 학생이 스마트폰을 소지한 학생인 사건을 A, 태블릿 PC를 소지한 학생인 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{600}{600}=1$, $\mathrm{P}(A)=\frac{500}{600}=\frac{5}{6}$,
$\mathrm{P}(B)=\frac{120}{600}=\frac{1}{5}$
따라서 스마트폰과 태블릿 PC를 모두 소지하고 있는 학생인 사건은 $A\cap B$이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{5}{6}+\frac{1}{5}-1\\&=\frac{31}{30}-1=\frac{1}{30}\end{aligned}$$

답 ②

21 각 근원사건이 일어날 확률은 모두 같으므로 $\frac{1}{5}$
두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\leq1$ ……㉠

(ⅰ) $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$일 때,
$0<\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(A)$이므로 $\frac{1}{5}<\mathrm{P}(A)\leq1$
또한, ㉠에 의하여 $\mathrm{P}(A)\leq\frac{4}{5}$
$\therefore \frac{1}{5}<\mathrm{P}(A)\leq\frac{4}{5}$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$ 또는 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$ 또는 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$

이므로 두 사건 A, B를 택하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_1\times({}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4)=5\times\left(\frac{4\times3}{2\times1}+4+1\right)=55$$

(ii) $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$일 때,

$0<\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(A)$이므로 $\frac{2}{5}<\mathrm{P}(A)\le1$

또한, ㉠에 의하여 $\mathrm{P}(A)\le\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{2}{5}<\mathrm{P}(A)\le\frac{3}{5}$

즉, $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$이므로 두 사건 A, B를 택하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3=\frac{5\times4}{2\times1}\times1=10$$

(i), (ii)에서 두 사건 A, B를 택하는 경우의 수는

$55+10=65$

답 65

22 $15x^2-8kx+k^2=0$에서 $(3x-k)(5x-k)=0$

$\therefore x=\frac{k}{3}$ 또는 $x=\frac{k}{5}$

이때, 이 이차방정식의 해가 적어도 하나의 정수해를 가지려면 k는 3의 배수 또는 5의 배수이어야 한다.

k가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 k가 15의 배수인 사건이다.

k가 50 이하의 자연수이므로 이 중 3의 배수는 16개, 5의 배수는 10개, 15의 배수는 3개이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{16}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{50}$

k가 3의 배수 또는 5의 배수인 사건은 $A\cup B$이므로 그 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{16}{50}+\frac{10}{50}-\frac{3}{50}\\&=\frac{23}{50}\end{aligned}$$

따라서 $p=50$, $q=23$이므로

$p+q=50+23=73$

답 73

23 주어진 도형의 꼭짓점의 개수가 27이므로 이 중 2개를 택하여 선분을 만드는 방법의 수는

$${}_{27}\mathrm{C}_2=\frac{27\times26}{2\times1}=351$$

(i) 만든 선분의 길이가 $\sqrt{2}$일 때,

선분의 길이가 $\sqrt{2}$이려면 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선이어야 한다.

주어진 도형에서 한 변의 길이가 1인 정사각형은 36개이고, 1개의 정사각형에 대각선은 2개씩 존재하므로 길이가 $\sqrt{2}$인 선분의 개수는

$36\times2=72$

즉, 만든 선분의 길이가 $\sqrt{2}$일 확률은 $\frac{72}{351}$

(ii) 만든 선분의 길이가 $\sqrt{3}$일 때,

선분의 길이가 $\sqrt{3}$이려면 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 대각선이어야 한다.

주어진 도형에서 한 모서리의 길이가 1인 정육면체는 8개이고, 1개의 정육면체에 대각선은 4개씩 존재하므로 길이가 $\sqrt{3}$인 선분의 개수는

$8\times4=32$

즉, 만든 선분의 길이가 $\sqrt{3}$일 확률은 $\frac{32}{351}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{72}{351}+\frac{32}{351}=\frac{8}{27}$

답 $\frac{8}{27}$

24 자연수 $\underbrace{72}_{=2^3\times3^2}$의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

의 12개

이 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 모든 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_3=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$$

약수들을 3으로 나누었을 때, 나머지가 r $(r=0, 1, 2)$인 집합을 A_r라 하면

$A_0=\{3, 6, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

$A_1=\{1, 4\}$

$A_2=\{2, 8\}$

합이 3의 배수가 되도록 서로 다른 세 수를 택해야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 집합 A_0에서 세 수를 택하는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(ii) 세 집합 A_0, A_1, A_2에서 각각 한 개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=8\times2\times2=32$$

(i), (ii)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은

$\frac{56}{220}+\frac{32}{220}=\frac{88}{220}=\frac{2}{5}$

답 ④

25 주사위를 n번 던졌으므로 나올 수 있는 전체 경우의 수는 6^n

이때, 나오는 눈의 수는 차례로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이고

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}\ne15$,

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}\times a_n=15$

를 만족시키므로 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}$, a_n은 15의 약수이면서 곱이 15이어야 한다.

또한, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n은 1부터 6까지의 자연수이므로 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}=3$, $a_n=5$일 때,
$(n-1)$번째까지 3의 눈이 한 번, 1의 눈이 $(n-2)$번 나오고 n번째에 5의 눈이 나오면 되므로 경우의 수는
${}_{n-1}C_1=n-1$
즉, 이때의 확률은 $\frac{n-1}{6^n}$

(ⅱ) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}=5$, $a_n=3$일 때,
$(n-1)$번째까지 5의 눈이 한 번, 1의 눈이 $(n-2)$번 나오고 n번째에 3의 눈이 나오면 되므로 경우의 수는
${}_{n-1}C_1=n-1$
즉, 이때의 확률은 $\frac{n-1}{6^n}$

(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은
$\frac{n-1}{6^n}+\frac{n-1}{6^n}=\frac{2(n-1)}{6^n}$
그런데 이 확률이 $\frac{1}{2^{10}\times3^{12}}$이므로
$$\frac{2(n-1)}{6^n}=\frac{1}{2^{10}\times3^{12}}=\frac{24}{2^{13}\times3^{13}}=\frac{2\times12}{6^{13}}$$
$\therefore n=13$

답 13

26

네 팀 A, B, C, D 중 두 팀이 경기를 하는 방법의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
즉, 경기는 총 6번 이루어지고 각 경기마다 이기는 팀과 진 팀이 결정되므로 전체 경우의 수는 2^6가지이다.

(ⅰ) 모두 이긴 팀이 생길 확률
네 팀 중에서 모두 이긴 팀을 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
위의 각 경우에 대하여 각 팀은 다른 세 팀과 한 번씩 경기하므로 모두 이긴 팀이 참가하지 않는 3번의 경기마다 이기는 팀과 진 팀이 결정되는 경우의 수가 2^3가지씩 존재한다.
즉, 모두 이긴 팀이 생길 확률은 $\frac{4\times2^3}{2^6}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 모두 진 팀이 생길 확률
(ⅰ)과 같은 방법으로 네 팀 중에서 모두 진 팀을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
위의 각 경우에 대하여 각 팀은 다른 세 팀과 한 번씩 경기하므로 모두 진 팀이 참가하지 않는 3번의 경기마다 이기는 팀과 진 팀이 결정되는 경우의 수가 2^3가지씩 존재한다.
즉, 모두 진 팀이 생길 확률은 $\frac{4\times2^3}{2^6}=\frac{1}{2}$

(ⅲ) 모두 이긴 팀과 모두 진 팀이 동시에 생길 확률
네 팀 중에서 모두 이긴 팀과 모두 진 팀을 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2=4\times3=12$
모두 이긴 팀과 모두 진 팀이 참가하지 않는 경기는 1번뿐이므로 이 경기에서 남은 두 팀 중 이긴 팀과 진 팀이 결정되는 경우의 수가 2가지이다.
즉, 모두 이긴 팀과 모두 진 팀이 동시에 생길 확률은
$\frac{12\times2}{2^6}=\frac{3}{8}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$
따라서 $m=8$, $n=5$이므로
$m+n=8+5=13$

답 ①

27

9개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 1개씩 3번 구슬을 꺼내어 a, b, c를 정하는 모든 방법의 수는
$9\times9\times9=9^3$

(ⅰ) a, b, c가 모두 다른 경우
$X=3$이므로 a, b, c 중에서 가장 작은 수가 3이다.
즉, 3은 반드시 나오고 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 두 수가 나와야 하므로 두 수를 고르는 경우의 수는
${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$
3을 포함한 세 수를 순서쌍 (a, b, c)로 정하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 이 경우의 확률은 $\frac{15\times6}{9^3}=\frac{90}{9^3}$

(ⅱ) a, b, c 중에서 두 수만 같은 경우
$X=3$이므로 조건 ㈏에 의하여 세 수 중에서 두 수는 3이고, 나머지 한 수는 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 나와야 하므로 한 수를 고르는 경우의 수는 ${}_8C_1=8$
이때, 3, 3을 포함한 세 수를 순서쌍 (a, b, c)로 정하는 경우는
$(a, 3, 3)$, $(3, b, 3)$, $(3, 3, c)$의 3가지
따라서 이 경우의 확률은 $\frac{8\times3}{9^3}=\frac{24}{9^3}$

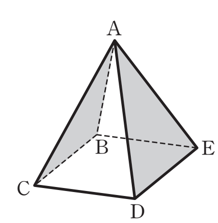
(ⅲ) a, b, c가 모두 같은 경우
$X=3$이므로 $a=b=c=3$이어야 한다.
따라서 이 경우의 확률은 $\frac{1}{9^3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은
$\frac{90}{9^3}+\frac{24}{9^3}+\frac{1}{9^3}=\frac{115}{729}$

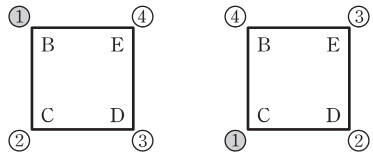
답 $\frac{115}{729}$

28

오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 각 꼭짓점을 A, B, C, D, E라 하면 꼭짓점 A에 숫자를 대응시키는 방법의 수는 5이고, 네 꼭짓점 B, C, D, E에 숫자를 원형으로 대응시키는 방법의 수는 $(4-1)!=3!=6$



그런데 두 옆면 ABC, ADE가 색칠되어 있으므로 위의 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 모양의 밑면에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 정사각뿔의 5개의 꼭짓점에 숫자를 대응시키는 모든 방법의 수는

$5\times6\times2=60$

$2(=2^1)$, $8(=2^3)$, $32(=2^5)$

한편, 꼭짓점 A에 $4(=2^2)$ 또는 $16(=2^4)$을 대응시킬 경우 지수가 홀수인 수 3개, 짝수인 수 1개가 남으므로 세 꼭짓점에 대응된 세 수의 곱이 같게 될 수 없다. (홀수)+(홀수) ≠(홀수)+(짝수)

즉, 색칠한 두 삼각형의 세 꼭짓점에 대응된 세 수의 곱이 같게 되기 위해서는 꼭짓점 A에 대응되는 수는 지수가 홀수인 $2(=2^1)$ 또는 $8(=2^3)$ 또는 $32(=2^5)$이어야 한다.

(i) 꼭짓점 A에 $2(=2^1)$를 대응시킬 때, 지수가 홀수인 수 2개, 지수가 짝수인 수 2개가 남는다.

$1+2+5=1+3+4$이므로 $2\times4\times32=2\times8\times16$에서 밑면의 네 꼭짓점 B, C, D, E에 대응되는 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$(4, 32, 8, 16)$, $(4, 32, 16, 8)$, $(32, 4, 8, 16)$, $(32, 4, 16, 8)$의 4가지이다.

(ii) 꼭짓점 A에 $8(=2^3)$을 대응시킬 때,

$3+1+5=3+2+4$이므로 $8\times2\times32=8\times4\times16$에서 밑면의 네 꼭짓점 B, C, D, E에 대응되는 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$(2, 32, 4, 16)$, $(2, 32, 16, 4)$, $(32, 2, 4, 16)$, $(32, 2, 16, 4)$의 4가지이다.

(iii) 꼭짓점 A에 $32(=2^5)$를 대응시킬 때,

$5+1+4=5+2+3$이므로 $32\times2\times16=32\times4\times8$에서 밑면의 네 꼭짓점 B, C, D, E에 대응되는 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$(2, 16, 4, 8)$, $(2, 16, 8, 4)$, $(16, 2, 4, 8)$, $(16, 2, 8, 4)$의 4가지이다.

(i), (ii), (iii) 중 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은

$\frac{4}{60}+\frac{4}{60}+\frac{4}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ 답 ①

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 원순열의 개념을 이용하는 문제로 원이 아닌 사각형이라는 점에 유의해야 한다. 또한, 정사각뿔의 꼭짓점에 대응할 숫자를 정할 때에는 지수법칙을 이용하면 편리하다. 접근하기 까다로운 문제라기보다는 주어진 조건을 정확히 해석하면 풀 수 있는 문제이다.

29

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로 $P(A^C\cap B^C)=0.1$에서

$1-P(A\cup B)=0.1$

$\therefore P(A\cup B)=0.9$

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로 $P(A^C\cup B^C)=0.8$에서

$1-P(A\cap B)=0.8$

$\therefore P(A\cap B)=0.2$

이때, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$0.9=0.6+P(B)-0.2$ ($\because P(A)=0.6$)

$\therefore P(B)=0.5$ 답 ③

30

$f(1)=x$, $f(3)=y$, $f(4)=z$, $f(5)=w$라 하면

조건 ㈎, ㈏에서 함숫값의 총합이 10이고 $f(2)=2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=10$

$\therefore x+y+z+w=8$

(단, x, y, z, w는 1 이상 5 이하의 자연수)

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$로 놓으면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=8$

$\therefore x'+y'+z'+w'=4$

(단, x', y', z', w'은 0 이상 4 이하의 정수) ……㉠

함수 f의 개수는 ㉠을 만족시키는 정수 x', y', z', w'의 순서쌍 (x', y', z', w')의 개수와 같으므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉, 경우의 수는

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

한편, 치역의 원소의 개수가 2 이상인 사건의 여사건은 치역의 개수가 1 이하인 사건이고, 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 조건 ㈏에 의하여 함숫값이 전부 2일 때이므로 1가지이다.

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$ 답 ⑤

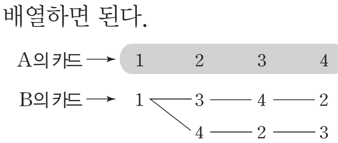
31

A가 카드를 꺼내는 순서의 각 경우에 따라 A, B 두 사람의 카드에 적힌 숫자가 동일할 때가 k번일 경우의 수가 각각 같으므로 A의 카드가 1, 2, 3, 4의 순서로 꺼내진다고 하자.

B가 카드 4장을 꺼내는 경우의 수는

$4!=24$

카드를 비교하여 같은 숫자일 때가 1번이려면 네 장의 카드 중에서 같은 것을 하나 고른 후, 나머지 세 장의 카드는 다르게 배열하면 된다.



같은 숫자가 1이라 하면 위의 그림과 같이 나머지 세 장의 카드가 다르게 배열되는 경우의 수는 2이므로 같은 숫자일 때가 1번인 경우의 수는 ${}_4C_1\times2=8$

$\therefore p_1=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

한편, 카드를 비교하여 같은 숫자일 때가 3번이려면 네 장의 카드 중에서 같은 것을 세 장 고르고, 나머지 한 장의 카드는 서로 달라야 하는데 이 경우는 존재하지 않는다. 즉,
$p_3=0$

$\therefore p_0+p_2+p_4=1-(p_1+p_3)$
$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

32 여섯 자리의 자연수의 개수는
$1000000-100000=900000$
이때, 각 자릿수에 사용된 숫자 중 적어도 하나가 두 번 이상 사용된 사건의 여사건은 각 자릿수에 사용된 모든 숫자가 한 번만 사용된 사건이다.
각 자릿수에 사용된 모든 숫자가 한 번만 사용된 여섯 자리의 자연수의 개수는 0부터 9에서 서로 다른 6개를 택하여 만든 여섯 자리의 자연수에서 십만의 자리의 수가 0인 경우를 빼면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{10}P_6-{}_9P_5=10\times9\times8\times7\times6\times5-9\times8\times7\times6\times5$$
$$=(10-1)\times9\times8\times7\times6\times5$$
$$=9\times9\times8\times7\times6\times5$$

즉, 각 자릿수에 사용된 모든 숫자가 한 번만 사용되었을 확률은
$\frac{9\times9\times8\times7\times6\times5}{900000}=\frac{189}{1250}$
따라서 구하는 확률은
$1-\frac{189}{1250}=\frac{1061}{1250}$ 답 $\frac{1061}{1250}$

33 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$ ……㉠
이때 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건의 여사건은 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건이다.
㉠ 중에서 $x=y=z$인 경우는 존재하지 않으므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키려면 x, y, z 중에서 두 개가 같아야 한다.
$x=y$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는
$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $\cdots$, $(5, 5, 0)$
의 6개이고, $y=z$인 경우와 $x=z$인 경우도 각각 6가지이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $3\times6=18$
즉, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시킬 확률은
$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$
따라서 구하는 확률은
$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$
이므로 $p=11$, $q=8$
$\therefore p+q=11+8=19$ 답 19

34 전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합이 각각 하나씩 적힌 15장의 카드 중에서 두 장의 카드를 택하는 방법의 수는
$15\times15=225$
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\not\subset B$이고 $B\not\subset A$인 사건의 여사건은 $A\subset B$ 또는 $B\subset A$인 사건이다.
이때, $B\subset A$인 경우의 수를 다음과 같이 집합 A의 원소의 개수에 따라 구할 수 있다.

(i) 집합 A의 원소의 개수가 4인 경우
$A=U$이므로 집합 B는 공집합을 제외한 전체집합 U의 부분집합이어야 한다.
즉, 집합 B의 개수는 $2^4-1=15$(개)이므로 구하는 경우의 수는 $1\times15=15$

(ii) 집합 A의 원소의 개수가 3인 경우
전체집합 U의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합의 수는 ${}_4C_3=4$
위의 각각에 대하여 집합 B는 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합이므로 개수는 $2^3-1=7$(개)이다.
즉, 구하는 경우의 수는 $4\times7=28$

(iii) 집합 A의 원소의 개수가 2인 경우
전체집합 U의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합의 수는 ${}_4C_2=6$
위의 각각에 대하여 집합 B는 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합이므로 개수는 $2^2-1=3$(개)이다.
즉, 구하는 경우의 수는 $6\times3=18$

(iv) 집합 A의 원소의 개수가 1인 경우
전체집합 U의 부분집합 중 원소의 개수가 1인 집합의 수는 ${}_4C_1=4$
위의 각각에 대하여 집합 B는 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합이므로 개수는 $2^1-1=1$(개)이다.
즉, 구하는 경우의 수는 $4\times1=4$

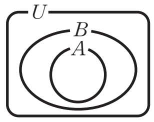
(i)~(iv)에서 $B\subset A$인 경우의 수는
$15+28+18+4=65$
같은 방법으로 $A\subset B$인 경우의 수도 65가지이다.
한편, $A=B$인 경우의 수는 전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 하나를 택하여 A와 B로 정하면 되므로 15가지이다.
즉, 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$ 또는 $B\subset A$일 확률은
$\frac{65}{225}+\frac{65}{225}-\frac{15}{225}=\frac{115}{225}=\frac{23}{45}$
따라서 $A\not\subset B$이고 $B\not\subset A$일 확률은
$1-\frac{23}{45}=\frac{22}{45}$
이므로 $p=45$, $q=22$
$\therefore p+q=45+22=67$ 답 ③

• 다른풀이 1 •
전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합이 각각 하나씩 적힌 15장의 카드 중에서 두 장의 카드를 택하는 방법의 수는
$15\times15=225$

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \not\subset B$이고 $B \not\subset A$인 사건의 여사건은 $A \subset B$ 또는 $B \subset A$인 사건이다.

(ⅰ) $A \subset B$인 경우

집합 A가 집합 B의 부분집합이므로 벤다이어그램이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



두 집합 A, B가 공집합이 아니므로 $A \subset B$인 경우의 수는 집합 U의 네 원소가 위의 그림의 세 영역 A, $B-A$, $U-B$에 포함되는 경우의 수에서 두 영역 $B-A$, $U-B$에만 포함되는 경우의 수를 빼면 된다.

즉,

$_3\Pi_4 - {_2\Pi_4} = 3^4 - 2^4 = 81 - 16 = 65$

(ⅱ) $B \subset A$인 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 계산하면 65가지이다.

(ⅲ) $A \subset B$이고 $B \subset A$인 경우

즉, $A = B$이므로 집합 U의 네 원소가 두 집합 A, $U-A$에 포함되는 경우에서 집합 A가 공집합인 경우를 빼면 된다. 구하는 경우의 수는

$_2\Pi_4 - 1 = 16 - 1 = 15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $A \subset B$ 또는 $B \subset A$인 경우의 수는

$65 + 65 - 15 = 115$

그러므로 구하는 확률은

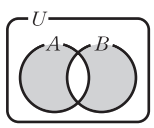
$1 - \dfrac{115}{225} = \dfrac{110}{225} = \dfrac{22}{45}$

• 다른풀이 2 •

전체집합 U의 공집합이 아닌 부분집합이 각각 하나씩 적힌 15장의 카드 중에서 두 장의 카드를 택하는 방법의 수는

$15 \times 15 = 225$

$A \not\subset B$이고 $B \not\subset A$이려면 벤다이어그램이 오른쪽 그림과 같으므로 어두운 부분의 두 집합이 각각 공집합이 아니어야 한다.



전체집합 U의 네 원소가 벤다이어그램의 네 영역에 포함되는 경우에서 어두운 부분의 두 집합이 공집합이 되는 경우를 빼면 되므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {_4\Pi_4} - ({_3\Pi_4} + {_3\Pi_4} - {_2\Pi_4}) &= 4^4 - (3^4 + 3^4 - 2^4) \\ &= 110 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{110}{225} = \dfrac{22}{45}$

35 해결단계

❶ 단계	두 조건 ㈎, ㈏를 이용하여 합성함수 $g \circ f$의 개수를 구한다.
❷ 단계	합성함수 $g \circ f$ 중에서 치역이 Z가 아닌 경우를 찾는다.
❸ 단계	여사건의 확률을 이용하여 구하고자 하는 확률을 구한다.

조건 ㈎에서 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이므로 집합 Y의 원소 4개 중에서 3개를 택하여 크기 순서대로 집합 X의 원소에 대응시키면 된다.

즉, 함수 f의 개수는 $_4C_3 = 4$

조건 ㈏에서 함수 g의 치역은 Z이므로 집합 Z의 원소 2개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 집합 Y의 원소를 대응시키면 된다.

그런데 치역이 $\{8\}$ 또는 $\{9\}$인 함수는 제외해야 하므로 함수 g의 개수는

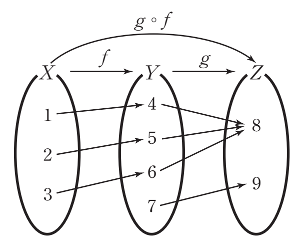
$_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = 14$

이때, 합성함수 $g \circ f$는 두 함수 f와 g를 각각 하나씩 선택하여 합성하여 만들 수 있으므로 그 개수는

$4 \times 14 = 56$ ……㉠

위의 56개의 합성함수 중에서 그 치역이 Z가 아닌 경우는 합성함수의 치역이 $\{8\}$ 또는 $\{9\}$가 되는 경우이다.

예를 들어, 함수 f, g, $g \circ f$의 대응 관계가 다음과 같을 때, 두 조건 ㈎, ㈏를 만족시키지만 합성함수 $g \circ f$의 치역은 $\{8\}$이다.



함수 f의 개수는 4이고, 각각에 대하여 함수 f의 치역의 원소가 함수 g에 의하여 모두 8로 대응되거나 모두 9로 대응되면 되므로 합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z가 아닌 경우의 수는

$4 \times 2 = 8$ ……㉡

㉠, ㉡에서 합성함수 $g \circ f$의 치역이 Z가 아닌 확률은

$\dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$1 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{7}$ 답 ⑤

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 29

01 1　02 $\dfrac{13}{128}$　03 $\dfrac{7}{25}$　04 $\dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}$

05 $\dfrac{25}{648}$　06 $\dfrac{3}{70}$　07 11

01 해결단계

❶ 단계	$x+y+z=6$과 $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$임을 이용하여 x, y, z의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	눈의 수의 합이 5가 되는 경우를 찾아 수학적 확률을 구한다.
❸ 단계	눈의 수의 합이 5가 되는 통계적 확률을 이용하여 x, y, z의 값을 구한다.

주사위 2개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
정육면체 모양의 주사위의 각 면에 1, 2, 3의 숫자가 각각 x개, y개, z개 적혀 있으므로
$x+y+z=6$ ……㉠
이때, $x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$이므로
$1\le x\le4$, $1\le y\le4$, $1\le z\le4$
한편, 주사위 2개를 동시에 던질 때, 눈의 수의 합이 5인 경우는 (2, 3), (3, 2)이고 (2, 3)인 경우의 수는 yz, (3, 2)인 경우의 수는 zy이므로 총 경우의 수는
$yz+zy=2yz$
따라서 주사위 2개를 동시에 던질 때, 눈의 수의 합이 5일 수학적 확률은 $\frac{2yz}{36}$이고, 이것은 3회당 1회 꼴로 나타나므로 통계적 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
즉, $\frac{2yz}{36}=\frac{1}{3}$에서 $yz=6$
$\therefore y=2,\ z=3$ 또는 $y=3,\ z=2$ ($\because 1\le y\le4,\ 1\le z\le4$)
이때, $y+z=5$이므로 이것을 ㉠에 대입하면
$x+5=6$ $\therefore x=1$ 답 1

02 해결단계

❶ 단계	전체 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	$X_1=-1$, $X_2=-1$ 또는 $X_1=1$, $X_2=1$인 사건으로 구분하여 각 경우의 수를 구한다.
❸ 단계	❷단계의 결과를 이용하여 확률을 구한다.

한 개의 동전을 여덟 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$2^8=256$
이때, $S_2\ne0$이고 $S_8=2$인 경우는 다음과 같이 두 가지가 있다.
(i) $X_1=-1$, $X_2=-1$일 때,
$S_8=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_8=2$에서
$(-1)+(-1)+\{1+1+1+1+1+(-1)\}=2$
즉, 처음 두 번의 시행에서는 앞면이 두 번 나오고, 나머지 6회의 시행에서 뒷면이 5회, 앞면이 1회 나와야 하므로 이때의 경우의 수는 ${}_6C_5=6$
즉, 이 경우의 확률은 $\frac{6}{256}$
(ii) $X_1=1$, $X_2=1$일 때,
$S_8=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_8=2$에서
$1+1+\{1+1+1+(-1)+(-1)+(-1)\}=2$
즉, 처음 두 번의 시행에서는 뒷면이 두 번 나오고, 나머지 6회의 시행에서 뒷면이 3회, 앞면이 3회 나와야 하므로 이때의 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
즉, 이 경우의 확률은 $\frac{20}{256}$
(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\frac{6}{256}+\frac{20}{256}=\frac{26}{256}=\frac{13}{128}$ 답 $\frac{13}{128}$

03 해결단계

❶ 단계	세 자리의 자연수 중에서 3의 배수의 개수를 구한다.
❷ 단계	백의 자리의 수가 9인 사건을 A, 십의 자리의 수가 9인 사건을 B, 일의 자리의 수가 9인 사건을 C라 하고 확률 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$, $\mathrm{P}(B\cap C)$, $\mathrm{P}(C\cap A)$, $\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$를 각각 구한다.
❸ 단계	확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$를 구한다.

100부터 999까지의 세 자리의 자연수 중에서 3의 배수는
102, 105, …, 996, 999의 300개이다.
이 중에서 백의 자리의 수가 9인 사건을 A, 십의 자리의 수가 9인 사건을 B, 일의 자리의 수가 9인 사건을 C라 하자.
이때, 3의 배수인 세 자리의 자연수의 백의 자리의 수를 a, 십의 자리의 수를 b, 일의 자리의 수를 c라 하면
$1\le a\le9$, $0\le b\le9$, $0\le c\le9$이고 $a+b+c=(3$의 배수$)$
(i) $a=9$, $b+c$가 3의 배수인 경우
세 자리의 자연수 $9\times10^2+b\times10+c\times1$에서 백의 자리의 수 9를 제외하고 b, c로 두 자리의 자연수 $b\times10+c\times1$을 만들면 $b\times10+c\times1$은 3의 배수이다.
이때, 0부터 99까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $\left[\frac{99}{3}\right]+1=34$이므로 사건 A의 확률은
$\because b+c$는 3의 배수
0은 3의 배수이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{34}{300}$
(ii) $b=9$, $a+c$가 3의 배수인 경우
세 자리의 자연수 $a\times10^2+9\times10+c\times1$에서 십의 자리의 수 9를 제외하고 a, c로 두 자리의 자연수 $a\times10+c\times1$을 만들면 $a\times10+c\times1$은 3의 배수이다.
이때, 10부터 99까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $\left[\frac{99}{3}\right]-\left[\frac{10}{3}\right]=33-3=30$이므로 사건 B의 확률은
$1\le a\le9$이므로
$\because a+c$는 3의 배수
$\mathrm{P}(B)=\frac{30}{300}$
(iii) $c=9$, $a+b$가 3의 배수인 경우
세 자리의 자연수 $a\times10^2+b\times10+9\times1$에서 일의 자리의 수 9를 제외하고 a, b로 두 자리의 자연수 $a\times10+b\times1$을 만들면 $a\times10+b\times1$은 3의 배수이다.
이때, 10부터 99까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 (ii)에 의하여 30이므로 사건 C의 확률은
$1\le a\le9$이므로
$\because a+b$는 3의 배수
$\mathrm{P}(C)=\frac{30}{300}$
(iv) $a=9$, $b=9$인 경우
세 자리의 자연수 $9\times10^2+9\times10+c\times1$이 3의 배수가 되도록 하는 c의 값은 0, 3, 6, 9의 4개이므로 사건 $A\cap B$의 확률은
$0\le c\le9$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{300}$
(v) $b=9$, $c=9$인 경우
세 자리의 자연수 $a\times10^2+9\times10+9\times1$이 3의 배수가 되도록 하는 a의 값은 3, 6, 9의 3개이므로 사건
$1\le a\le9$이므로

$B\cap C$의 확률은

$\mathrm{P}(B\cap C)=\dfrac{3}{300}$

(vi) $a=9$, $c=9$인 경우

세 자리의 자연수 $9\times10^2+b\times10+9\times1$이 3의 배수가 되도록 하는 b의 값은 0, 3, 6, 9의 4개이므로 사건 $A\cap C$의 확률은
$0\le b\le 9$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\dfrac{4}{300}$

(vii) $a=9$, $b=9$, $c=9$인 경우

999의 1개이므로 사건 $A\cap B\cap C$의 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{300}$

(i)~(vii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

$=\dfrac{34}{300}+\dfrac{30}{300}+\dfrac{30}{300}-\dfrac{4}{300}-\dfrac{3}{300}-\dfrac{4}{300}+\dfrac{1}{300}$

$=\dfrac{84}{300}=\dfrac{7}{25}$ 답 $\dfrac{7}{25}$

• 다른풀이 •

(i) $a=9$, $b+c$가 3의 배수인 경우

순서쌍 (b, c)는

$(0, 0)$, $(0, 3)$, $(0, 6)$, $(0, 9)$, $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(1, 8)$, $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$, $(3, 6)$, $(3, 9)$, $(4, 2)$, $(4, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$, $(5, 7)$, $(6, 0)$, $(6, 3)$, $(6, 6)$, $(6, 9)$, $(7, 2)$, $(7, 5)$, $(7, 8)$, $(8, 1)$, $(8, 4)$, $(8, 7)$, $(9, 0)$, $(9, 3)$, $(9, 6)$, $(9, 9)$

의 34개이므로 사건 A의 확률은 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{34}{300}$

(ii) $b=9$, $a+c$가 3의 배수인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 순서쌍 (a, c)의 개수는

$34-4=30$이므로 사건 B의 확률은 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{30}{300}$
$a\neq0$이므로 $a=0$인 순서쌍 $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(0, 6)$, $(0, 9)$를 제외해야 한다.

(iii) $c=9$, $a+b$가 3의 배수인 경우

(ii)와 같은 방법에 의하여 순서쌍 (a, b)의 개수는 30이므로 사건 C의 확률은 $\mathrm{P}(C)=\dfrac{30}{300}$

04 해결단계

❶ 단계	호 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 점 P가 선분 AB의 중점이기 위한 점 P의 자취를 파악한다.
❷ 단계	가능한 점 P의 영역을 구한 후, 넓이를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 확률을 구한다.

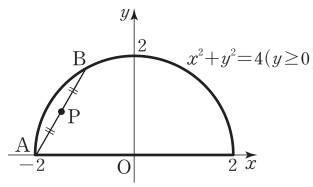
조건 (가)에 의하여 점 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OP}}$인 원과 선분 AB의 접점이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}=1$, $\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

즉, $\overline{\mathrm{OP}}\ge\sqrt{3}$ ($\because$ 조건 (나)) ······㉠

한편, 주어진 반원을 중심이 원점, 지름이 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면 오른쪽 그림과 같고, 두 점 A, B 중 하나의 좌표를 $(-2, 0)$, 나머지 한 점의 좌표를 (α, β)라 하면 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{\alpha-2}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$이므로



$x=\dfrac{\alpha-2}{2}$, $y=\dfrac{\beta}{2}$에서 $\alpha=2x+2$, $\beta=2y$

점 (α, β)는 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$(2x+2)^2+(2y)^2=4$ $\quad\therefore (x+1)^2+y^2=1$

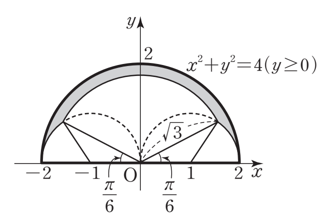
이때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이면 $\triangle\mathrm{OAB}$는 정삼각형이므로

$(\alpha, \beta)=(-1, \sqrt{3})$

조건 (나)에 의하여 $-2<\alpha\le-1$이므로

$-2<2x+2\le-1$ $\quad\therefore -2<x\le-\dfrac{3}{2}$

따라서 점 P는 도형 $(x+1)^2+y^2=1$ $\left(-2<x\le-\dfrac{3}{2},\ y>0\right)$ 위에 있고, 같은 방법으로 두 점 A, B 중에 하나의 좌표가 $(2, 0)$일 때 점 P는 도형 $(x-1)^2+y^2=1$ $\left(\dfrac{3}{2}\le x<2,\ y>0\right)$ 위에 있다. ······㉡



㉠, ㉡에서 점 P가 나타내는 영역은 위의 그림의 어두운 부분과 같으므로 그 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2^2\times\pi-\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{2}{3}\pi-2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times\sin\dfrac{\pi}{6}-2\times\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{\pi}{3}$

$=2\pi-\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi}=\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$ 답 $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$

지름의 길이가 4인 반원의 넓이

05 해결단계

❶ 단계	한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	두 원 C_1, C_2의 방정식을 표준형으로 바꾸어 두 원 C_1, C_2가 원점 이외의 교점을 갖지 않을 조건을 구한다.
❸ 단계	**❷ 단계**에서 구한 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하여 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6\times6=6^4$

원 C_1의 방정식 $x^2+y^2-2ax-2by=0$을 표준형으로 바

꾸면

$C_1:(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

즉, 원 C_1은 중심의 좌표가 (a, b)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.

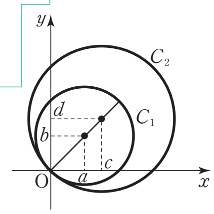
원 C_2의 방정식 $x^2+y^2-2cx-2dy=0$을 표준형으로 바꾸면

$C_2:(x-c)^2+(y-d)^2=c^2+d^2$

즉, 원 C_2는 중심의 좌표가 (c, d)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{c^2+d^2}$이다. $a>0, b>0, c>0, d>0$이므로 두 원 C_1, C_2는 원점에서 외접할 수 없다.

이때, 두 원 C_1, C_2는 원점에서만 만나야 하므로 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이다.

또한, 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2는 원점에서 내접하고, 원점과 두 원 C_1, C_2의 중심 (a, b), (c, d)는 일직선 위에 있어야 하므로



$\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}=k$ (k는 상수) 두 원의 중심에서 공통외접선에 내린 수선의 발은 각각 원점으로 동일하다.

이어야 한다.

(i) $k=1$일 때,

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_6P_2=6\times5=30$

(ii) $k=2$일 때,

$(1, 2), (2, 4), (3, 6)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

(iii) $k=\dfrac{1}{2}$일 때,

$(2, 1), (4, 2), (6, 3)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

(iv) $k=3$일 때,

$(1, 3), (2, 6)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_2P_2=2!=2$

(v) $k=\dfrac{1}{3}$일 때,

$(3, 1), (6, 2)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_2P_2=2!=2$

(vi) $k=\dfrac{3}{2}$일 때,

$(2, 3), (4, 6)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_2P_2=2!=2$

(vii) $k=\dfrac{2}{3}$일 때,

$(3, 2), (6, 4)$에서 서로 다른 2개를 택하여 각각 (a, b), (c, d)라 하면 되므로 경우의 수는

${}_2P_2=2!=2$

(i)~(vii)에서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$30+6+6+2+2+2+2=50$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{50}{6^4}=\dfrac{25}{648}$ 답 $\dfrac{25}{648}$

06 해결단계

❶ 단계	빨간색 카드 4장, 파란색 카드 4장, 노란색 카드 1장을 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	9장의 카드를 조건에 맞게 정리하였을 때, 최종적으로 RRYBB로 나열되기 위한 조건을 찾는다.
❸ 단계	❷단계의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 후, 확률을 구한다.

빨간색 카드를 R, 파란색 카드를 B, 노란색 카드를 Y라 하자. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 4장, 노란색 카드 1장의 9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 9개의 문자 R, R, R, R, B, B, B, B, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{9!}{4!4!}=630$

파란색 카드와 빨간색 카드가 이 순서대로 이웃하여 놓이면 2장의 카드를 빼는 시행을 반복하므로 일렬로 나열된 9개의 문자에서 BR로 놓인 것을 빼야 한다.

이때, 최종적으로 나열된 것이 RRYBB이므로 BR로 놓인 것을 두 번 빼야 한다.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥
∨R ∨R ∨Y ∨B ∨B ∨

BR는 위의 그림의 ①~⑥의 위치에 두 번 중복하여 들어갈 수 있으므로 경우의 수는

${}_6H_2={}_{6+2-1}C_2={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

또한, BBRR가 위의 그림의 ①~⑥의 위치에 들어가도 BR가 두 번 지워지므로 경우의 수는 6가지

따라서 가능한 경우의 수는 $21+6=27$이므로 구하는 확률은

$\dfrac{27}{630}=\dfrac{3}{70}$ 답 $\dfrac{3}{70}$

07 해결단계

❶ 단계	주어진 카드를 모두 나열하는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	적어도 한 종류의 카드는 2장 이상 연속으로 나열되는 사건의 여사건을 파악하고, 여사건의 경우의 수를 구하여 확률을 구한다.
❸ 단계	적어도 한 종류의 카드는 2장 이상 연속으로 나열될 확률을 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

숫자 1이 적힌 카드를 1, 숫자 2가 적힌 카드를 2, 숫자 3이 적힌 카드를 3으로 나타내면 6개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

적어도 한 종류의 카드가 2장 이상 연속으로 나열되는 사건의 여사건은 같은 종류의 카드끼리는 모두 서로 이웃하지 않는 것이다.

① 1 ② 1 ③ 1 ④

위의 그림과 같이 1을 일렬로 나열했을 때, 1의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리를 순서대로 ①, ②, ③, ④라 하면 1도 모두 이웃하지 않아야 하므로 ②, ③에는 반드시 하나의 숫자가 들어가야 한다.

이때, ②, ③에 들어가는 수를 다음과 같이 두 가지로 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) ②, ③에 각각 한 개의 숫자를 놓는 경우

②, ③에 각각 2, 2를 놓으면 3은 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 2가지

②, ③에 각각 2, 3 또는 3, 2를 놓으면 2는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 $2\times2=4$(가지)

즉, ②, ③에 숫자를 놓는 경우의 수는

$2+4=6$

(ii) ②, ③에 한 곳에는 두 개의 숫자, 다른 한 곳에는 한 개의 숫자를 놓는 경우

2는 서로 이웃할 수 없으므로 숫자는 23, 2로 나누어 일렬로 나열한 후, ②, ③에 놓아야 한다.

23, 2를 나열하는 경우 2가지, 23의 순서를 바꾸는 경우 2가지이므로 ②, ③에 숫자를 놓는 경우의 수는

$2\times2=4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $6+4=10$이므로 그 확률은 $\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

이므로 $p=6$, $q=5$

$\therefore p+q=6+5=11$ **답** 11

이것이 수능 p. 30

1 ④ 2 ② 3 11 4 19

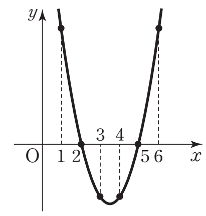
1

해결단계

❶ 단계	한 개의 주사위를 두 번 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$의 그래프를 이용하여 $f(k)$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 6)$의 값의 부호를 각각 구한다.
❸ 단계	$f(a)f(b)<0$이 성립할 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 두 번 던지므로 순서쌍 (a, b)의 전체 경우의 수는 $6\times6=36$

이차함수 $f(x)=x^2-7x+10$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$f(1)>0$, $f(2)=0$, $f(3)<0$,

$f(4)<0$, $f(5)=0$, $f(6)>0$

이때, $f(a)f(b)<0$이려면

$f(a)>0$, $f(b)<0$ 또는

$f(a)<0$, $f(b)>0$이어야 하므로 이것을 만족시키는 경우의 수는

$2\times2+2\times2=8$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$ **답** ④

2

해결단계

❶ 단계	주어진 여섯 장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
❷ 단계	양 끝에 A가 적혀 있는 카드를 나열하고 사이에 나머지 4장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.
❸ 단계	확률을 구한다.

A, A, A, B, B, C가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

양 끝 모두에 A가 적혀 있는 카드를 나열하고 A, B, B, C가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하여 양 끝의 A 사이에 순서대로 넣으면 되므로 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$ **답** ②

3

해결단계

❶ 단계	갑과 을이 두 주머니 A, B에서 각각 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	갑과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수가 모두 같을 때와 모두 다를 때 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수를 각각 구한다.
❸ 단계	갑과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 서로 같을 확률을 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=36$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같은 경우
1, 2, 3, 4 중에서 임의로 카드 2장을 택한 후, 그 카드를 갑과 을이 모두 꺼내면 되므로 방법의 수는
$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(ⅱ) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 다른 경우
$1+4=2+3$이므로 갑이 1, 4가 적힌 카드를, 을이 2, 3이 적힌 카드를 뽑는 경우와 갑이 2, 3이 적힌 카드를, 을이 1, 4가 적힌 카드를 뽑은 경우의 2가지이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은
$\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
따라서 $p=9$, $q=2$이므로
$p+q=9+2=11$ 답 11

4 해결단계

❶단계	6명이 6개의 공을 나눠가질 경우의 수를 구한다.
❷단계	A, B가 모두 노란색 공을 뽑을 확률과 모두 파란색 공을 뽑을 확률을 각각 구한다.
❸단계	A, B가 같은 색의 공을 뽑을 확률을 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

빨간색 공을 R, 노란색 공을 Y, 파란색 공을 B라 하면 빨간색 공 1개, 노란색 공 2개, 파란색 공 3개를 여섯 사람이 나누어 가져가는 경우의 수는 R, Y, Y, B, B, B를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
$\frac{6!}{2!3!}=60$

(ⅰ) A, B가 노란색 공을 뽑는 경우
A, B를 제외한 나머지 4명이 공을 뽑는 경우의 수는 R, B, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{3!}=4$
이 경우의 확률은 $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$

(ⅱ) A, B가 파란색 공을 뽑는 경우
A, B를 제외한 나머지 4명이 공을 뽑는 경우의 수는 R, Y, Y, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{2!}=12$
이 경우의 확률은 $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은
$\frac{1}{15}+\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$
따라서 $p=15$, $q=4$이므로
$p+q=15+4=19$ 답 19

03 조건부확률

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 32

01 ①	02 $\frac{1}{3}$	03 ⑤	04 ②	05 ③
06 ②	07 $\frac{19}{24}$	08 $\frac{168}{625}$		

01 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이므로

$$\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B|A)\}=\mathrm{P}(A)\left\{1-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\right\}$$
$$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이고, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.6$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$$
$$=0.6-0.2\ (\because ㉠)$$
$$=0.4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때,
$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.2\ (\because ㉠)$$
$$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-0.4=0.6\ (\because ㉡)$$
$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$
답 ①

02 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
이때,
$$A=\{(X, Y)\,|\,X+Y\geq10\}$$
$$=\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$
이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$
$$A\cap B=\{(X, Y)\,|\,X+Y\geq10, X>Y\}$$
$$=\{(6, 4), (6, 5)\}$$
이므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$
$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}$$
답 $\frac{1}{3}$

03 버스 노선이 개편될 사건을 E, 갑, 을, 병 세 사람이 시장으로 당선될 사건을 각각 A, B, C라 하면
$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{5},$$
$$\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(E|C)=\frac{2}{5}$$

A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&\qquad+\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\\&=\frac{12}{50}+\frac{1}{20}+\frac{2}{25}\\&=\frac{37}{100}\end{aligned}$$

답 ⑤

04 상자 A를 선택하는 사건을 A, 상자 B를 선택하는 사건을 B, 흰 공 1개, 검은 공 1개가 나오는 사건을 E라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap E)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2\times5}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{5}{21}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap E)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3\times2}{\frac{5\times4}{2\times1}}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\frac{5}{21}+\frac{3}{10}=\frac{113}{210}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{5}{21}}{\frac{113}{210}}=\frac{50}{113}$$

답 ②

blacklabel 특강 풀이첨삭

$A^C=B$이므로 확률이 0이 아닌 두 사건 A, E에 대하여 두 사건 $A\cap E$와 $B\cap E(=A^C\cap E)$는 서로 배반사건이다.

$$\begin{aligned}\therefore E&=(A\cap E)\cup(A^C\cap E)\\&=(A\cap E)\cup(B\cap E)\end{aligned}$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\end{aligned}$$

05 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A-B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

즉, 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\mathrm{P}(A)$$

$$\begin{aligned}1-\mathrm{P}(A|B)&=1-\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=1-\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1-\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C)\end{aligned}$$

이때, $\mathrm{P}(A)\neq\frac{1}{2}$이면 $\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(A^C)$이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)\neq1-\mathrm{P}(A|B)$ (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&\le1\end{aligned}$$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

06 표본공간을 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이라 하면

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\therefore n(A\cap B)=1$

또한, 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\therefore n(A^C\cap B)=1$

즉, 집합 B는 두 집합 A, $\underbrace{A^C}_{=\{4,5,6\}}$의 원소 중에서 각각 한 개씩만을 원소로 가져야 한다.

따라서 구하는 사건 B의 개수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=3\times3=9$

답 ②

07 조건 (나)에서 두 사건 A, B가 서로 독립이고, 조건 (가)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

조건 (다)에서 두 사건 $A\cup B$와 C는 서로 배반사건이므로

$(A\cup B)\cap C=\varnothing$ $\quad\therefore \mathrm{P}((A\cup B)\cap C)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B\cup C)$ $=(A\cup B)\cup C$

$=\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}((A\cup B)\cap C)$

$=\frac{5}{8}+\frac{1}{6}-0$ ($\because$ ㈎)

$=\frac{19}{24}$ 답 $\frac{19}{24}$

08 A팀의 승률이 $\frac{3}{5}$이므로 B팀의 승률은 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이고

다섯 번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 네 번째 경기까지 3번 이기고 1번 진 후, 다섯 번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) A팀이 우승할 확률은

$$\underbrace{{}_4\mathrm{C}_3}_{={}_4\mathrm{C}_1}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}=\frac{4\times27\times2\times3}{5^5}=\frac{648}{5^5}$$

(ii) B팀이 우승할 확률은

$$\underbrace{{}_4\mathrm{C}_3}_{={}_4\mathrm{C}_1}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{4\times8\times3\times2}{5^5}=\frac{192}{5^5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{648}{5^5}+\frac{192}{5^5}=\frac{840}{5^5}=\frac{168}{625}$ 답 $\frac{168}{625}$

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 33~37

01 $\frac{5}{8}$	02 ④	03 43	04 $\frac{3}{25}$	05 ②
06 $\frac{366}{901}$	07 $\frac{23}{30}$	08 ①	09 $\frac{2}{7}$	10 $\frac{1}{9}$
11 ④	12 ②	13 $\frac{3}{14}$	14 455	15 ③
16 $\frac{4}{27}$	17 ⑤	18 5	19 ④	20 ③
21 8	22 $\frac{9}{16}$	23 $\frac{19}{60}$	24 ⑤	25 ⑤
26 203	27 99	28 ③	29 ①	30 182
31 ⑤	32 447	33 $\frac{5}{96}$		

01 이 학교 학생 중에서 임의로 택한 한 학생이 버스를 이용하여 통학하는 학생인 사건을 A, 지하철을 이용하여 통학하는 학생인 사건을 B라 하자.

지하철을 이용하여 통학하는 학생의 수는 버스를 이용하여 통학하는 학생의 수의 $\frac{7}{8}$이므로

$n(B)=\frac{7}{8}n(A)$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{8}\mathrm{P}(A)$

이 학교 학생 중 임의로 택한 한 학생이 지하철을 이용하여 통학하는 학생이었을 때, 이 학생이 버스도 이용하여 통학하는 학생이었을 확률이 $\frac{5}{7}$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{5}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{7}\mathrm{P}(B)=\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{8}\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{5}{8}$ 답 $\frac{5}{8}$

02 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$ $\therefore B-A=B$

$\therefore \mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B-A)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=1$ (참)

ㄴ. (반례) 전사건 S가 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$일 때,

$A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$이라 하면

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$이지만 $A^C=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$B\neq A^C$

즉, 사건 B는 사건 A의 여사건이 아니다. (거짓)

ㄷ. $A-B\neq A$에서 $A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq0$

이때, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B|A)$에서

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A|B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}}$

$=\mathrm{P}(B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

03 주머니에서 3개의 공을 꺼내므로

$m+n=3$에서 $n=3-m$

$2m\geq n$에서 $2m\geq3-m$ $\therefore m\geq1$

(i) $m=1$일 때,

주머니에서 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공이 1개, 검은 공이 2개일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}=\frac{18}{35}$$

(ii) $m=2$일 때,

주머니에서 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공이 2개, 검은 공이 1개일 확률은

$$\frac{\overbrace{{}_3\mathrm{C}_2}^{{}_3\mathrm{C}_1}\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3\times4}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}=\frac{12}{35}$$

(iii) $m=3$일 때,

주머니에서 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공이 3개일 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}=\frac{1}{35}$$

(i), (ii), (iii)에서 $2m\geq n$인 사건을 A, 꺼낸 흰 공의 개수가 2인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{31}{35},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{12}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{31}{35}}=\frac{12}{31}$$

이므로 $p=31$, $q=12$

$\therefore\ p+q=31+12=43$

답 43

04

세 고등학교 A, B, C의 1교시 시험에서 수험표를 이용하여 본인 확인을 한 수험생의 수는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 각각 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

인증 도구 / 고등학교	수험표(명)	주민등록증(명)	합계(명)
A	$a-d$	25	$a-d+25$
B	a	30	$a+30$
C	$a+d$	85	$a+d+85$

본인 확인을 한 수험생 수는 800명이므로

$(a-d)+a+(a+d)+25+30+85=800$

$3a+140=800$, $3a=660$ $\quad\therefore\ a=220$

따라서 800명의 수험생 중에서 임의로 택한 한 명이 B 고등학교에서 시험을 치른 학생인 사건을 B, 주민등록증으로 본인 확인을 한 학생인 사건을 I라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(I|B)=\frac{\mathrm{P}(I\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(I\cap B)}{n(B)}$$

$$=\frac{30}{220+30}=\frac{30}{250}=\frac{3}{25}$$

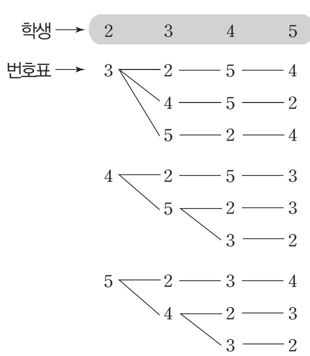
답 $\frac{3}{25}$

05

1번부터 5번까지의 번호가 각각 하나씩 적혀 있는 번호표를 섞어 학생들에게 하나씩 나눠주는 방법의 수는 $5!$

(i) 1번 학생이 선물을 받을 경우

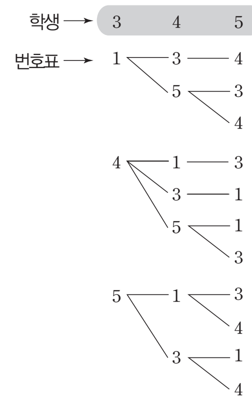
1번 학생은 1이 적힌 번호표를 받고, 2, 3, 4, 5번 학생은 자신의 번호가 적힌 번호표를 받지 않는 방법의 수는 오른쪽 그림과 같이 9가지이므로 구하는 확률은



$\frac{9}{5!}$

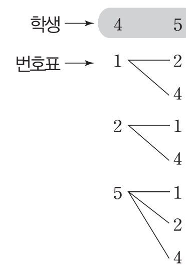
(ii) 2번 학생이 선물을 받을 경우

2번 학생은 2가 적힌 번호표를 받고, 3, 4, 5번 학생은 자신의 번호가 적힌 번호표를 받지 않는 방법의 수는 오른쪽 그림과 같이 11가지이다. 1번 학생은 2, 3, 4, 5번 학생이 받은 번호표를 제외한 나머지를 받으면 되므로 구하는 확률은 $\frac{11}{5!}$



(iii) 3번 학생이 선물을 받을 경우

3번 학생은 3이 적힌 번호표를 받고, 4, 5번 학생은 자신의 번호가 적힌 번호표를 받지 않는 방법의 수는 오른쪽 그림과 같이 7가지이다. 1, 2번 학생은 3, 4, 5번 학생이 받은 번호표를 제외한 나머지 번호표를 나눠 가지면 되므로 구하는 확률은



$\frac{7\times2!}{5!}=\frac{14}{5!}$

(iv) 4번 학생이 선물을 받을 경우

4번 학생이 4가 적힌 번호표를 받으면 5번 학생은 1, 2, 3이 적힌 번호표를 받아야 하므로 3가지이다.

이때, 1, 2, 3번 학생은 4, 5번 학생이 받은 번호표를 제외한 나머지 번호표를 나눠 가지면 되므로 구하는 확률은

$\frac{3\times3!}{5!}=\frac{18}{5!}$

(v) 5번 학생이 선물을 받을 경우

5번 학생이 5가 적힌 번호표를 받고, 나머지 학생들은 나머지 4장의 번호표를 나눠 가지면 되므로 구하는 확률은

$\frac{4!}{5!}=\frac{24}{5!}$

(i)~(v)에서 선물을 받은 학생이 있는 사건을 A, 학생의 번호가 짝수인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{9+11+14+18+24}{5!}=\frac{76}{5!}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{11+18}{5!}=\frac{29}{5!}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{29}{5!}}{\frac{76}{5!}}=\frac{29}{76}$$

답 ②

06 5개의 서로 다른 구슬을 각각 4개의 바구니 중에서 임의로 하나를 택하여 넣는 방법의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5$

(i) 2가 적힌 바구니에 3개 이상의 구슬이 들어간 경우

① 구슬이 3개 들어간 경우

3개의 구슬은 2가 적힌 바구니에 넣고, 나머지 2개의 구슬은 3, 4, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

${}_5C_2=$

$$\frac{{}_5C_3\times{}_3\Pi_2}{4^5}=\frac{10\times3^2}{4^5}=\frac{90}{4^5}$$

② 구슬이 4개 들어간 경우

4개의 구슬은 2가 적힌 바구니에 넣고, 나머지 1개의 구슬은 3, 4, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

${}_5C_1=$

$$\frac{{}_5C_4\times{}_3\Pi_1}{4^5}=\frac{5\times3}{4^5}=\frac{15}{4^5}$$

③ 구슬이 5개 들어간 경우

구슬이 총 5개이므로 모두 2가 적힌 바구니에 넣어야 한다.

즉, 구하는 확률은 $\frac{1}{4^5}$이다.

①, ②, ③에서 2가 적힌 바구니에 3개 이상의 구슬이 들어갈 확률은 $\frac{90}{4^5}+\frac{15}{4^5}+\frac{1}{4^5}=\frac{106}{4^5}$

(ii) 3이 적힌 바구니에 4개 이상의 구슬이 들어간 경우

④ 구슬이 4개 들어간 경우

4개의 구슬은 3이 적힌 바구니에 넣고, 나머지는 2, 4, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

${}_5C_1=$

$$\frac{{}_5C_4\times{}_3\Pi_1}{4^5}=\frac{5\times3}{4^5}=\frac{15}{4^5}$$

⑤ 구슬이 5개 들어간 경우

구슬이 총 5개이므로 모두 3이 적힌 바구니에 넣어야 한다.

즉, 구하는 확률은 $\frac{1}{4^5}$이다.

④, ⑤에서 3이 적힌 바구니에 4개 이상의 구슬이 들어갈 확률은 $\frac{15}{4^5}+\frac{1}{4^5}=\frac{16}{4^5}$

(iii) 4가 적힌 바구니에 5개의 구슬이 들어간 경우

구슬이 총 5개이므로 모두 4가 적힌 바구니에 넣어야 한다.

즉, 구하는 확률은 $\frac{1}{4^5}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 바구니의 앞면에 적힌 숫자보다 바구니에 들어간 구슬의 개수가 큰 바구니가 있는 사건을 A라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{106}{4^5}+\frac{16}{4^5}+\frac{1}{4^5}=\frac{123}{4^5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\frac{123}{1024}=\frac{901}{1024}$$

한편, 앞면에 적힌 숫자와 동일한 개수의 구슬이 들어 있는 바구니가 있는 사건을 B라 하면

(iv) 2가 적힌 바구니에 2개의 구슬이 들어간 경우

2개의 구슬은 2가 적힌 바구니에 넣고, 나머지 3개의 구슬은 3, 4, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3\Pi_3}{4^5}=\frac{10\times3^3}{4^5}=\frac{270}{4^5}$$

(v) 3이 적힌 바구니에 3개의 구슬이 들어간 경우

3개의 구슬은 3이 적힌 바구니에 넣고, 나머지 2개의 구슬은 2, 4, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

${}_5C_2=$

$$\frac{{}_5C_3\times{}_3\Pi_2}{4^5}=\frac{10\times3^2}{4^5}=\frac{90}{4^5}$$

(vi) 4가 적힌 바구니에 4개의 구슬이 들어간 경우

4개의 구슬은 4가 적힌 바구니에 넣고, 나머지 1개의 구슬은 2, 3, 5가 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

${}_5C_1=$

$$\frac{{}_5C_4\times{}_3\Pi_1}{4^5}=\frac{5\times3}{4^5}=\frac{15}{4^5}$$

(vii) 5가 적힌 바구니에 5개의 구슬이 들어간 경우

구슬이 총 5개이므로 모두 5가 적힌 바구니에 넣으면 된다. 즉, 구하는 확률은 $\frac{1}{4^5}$이다.

(viii) 2, 3이 적힌 바구니에 각각 2, 3개의 구슬이 들어간 경우

5개의 구슬을 2개, 3개로 나누어 2개의 구슬은 2가 적힌 바구니에, 3개의 구슬은 3이 적힌 바구니에 넣으면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_3}{4^5}=\frac{10\times1}{4^5}=\frac{10}{4^5}$$

(iv) ~ (viii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)&=\frac{270+90+15+1-10}{4^5}\\&=\frac{366}{4^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B|A^C)&=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}\\&=\frac{\frac{366}{4^5}}{\frac{901}{4^5}}\\&=\frac{366}{901}\end{aligned}$$

답 $\frac{366}{901}$

07 적어도 하나가 파란 공일 사건의 여사건은 2개 모두 빨간 공일 사건이므로 2개 모두 빨간 공일 확률을 구해 보자.

(i) 동전의 앞면이 나오고 상자 A에서 꺼낸 공 2개가 모두 빨간 공일 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

(ii) 동전의 뒷면이 나오고 상자 B에서 꺼낸 공 2개가 모두 빨간 공일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

(i), (ii)에서 2개의 공이 모두 빨간 공일 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{3}{20}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$

따라서 적어도 한 개가 파란 공일 확률은

$1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}$ 답 $\frac{23}{30}$

08 2개의 공에 적힌 두 숫자의 합이 홀수인 사건을 E, 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 숫자가 짝수인 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

이때, 두 주머니 A, B에서 각각 하나씩 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 숫자의 합이 홀수이려면

(짝수)+(홀수) 또는 (홀수)+(짝수)

이어야 하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{2}{5}\times\underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 숫자가 홀수일 확률}}+\frac{3}{5}\times\underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 숫자가 짝수일 확률}}\\&=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{4}{13}$ 답 ①

09 생산된 빵 중 임의로 택한 한 개가 세 대의 기계 A, B, C에서 생산된 빵인 사건을 각각 A, B, C, 불량품인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.2$, $\mathrm{P}(B)=0.3$, $\mathrm{P}(C)=0.5$,

$\mathrm{P}(E|A)=0.005$, $\mathrm{P}(E|B)=0.01$, $\mathrm{P}(E|C)=0.02$

이때, 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&\qquad+\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)\\&=0.2\times0.005+0.3\times0.01+0.5\times0.02\\&=0.001+0.003+0.01\\&=0.014\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(C|E)=\frac{\mathrm{P}(C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.01}{0.014}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B|E)=1-\mathrm{P}(C|E)=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

10 (i) 두 번째 검사에서 검사가 끝나는 경우

첫 번째 검사에서 1개의 불량품을 꺼내는 사건을 A_1, 두 번째 검사에서 두 번째 불량품을 꺼내는 사건을 B_1이라 하면

$\mathrm{P}(A_1)=\frac{{}_2C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{2}{10}$, $\mathrm{P}(B_1|A_1)=\frac{{}_1C_1}{{}_9C_1}=\frac{1}{9}$

$\therefore p_1=\mathrm{P}(A_1\cap B_1)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(B_1|A_1)$

$=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$

(ii) 다섯 번째 검사에서 검사가 끝나는 경우

네 번째 검사까지 1개의 불량품을 꺼내는 사건을 A_2, 다섯 번째 검사에서 두 번째 불량품을 꺼내는 사건을 B_2라 하면

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{2\times\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(B_2|A_2)=\frac{{}_1C_1}{{}_6C_1}=\frac{1}{6}$

$\therefore p_2=\mathrm{P}(A_2\cap B_2)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B_2|A_2)$

$=\frac{8}{15}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{45}$

(i), (ii)에서

$p_1+p_2=\frac{1}{45}+\frac{4}{45}=\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

11 이 선수가 첫 번째 경기에서 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 질 확률도 $\frac{1}{2}$이고, 이 선수가 이긴 다음에 다시 이길 확률이 $\frac{4}{9}$이므로 이긴 다음에 질 확률은 $\frac{5}{9}$이다.

3번 경기를 해서 2번 이겨야 하므로

(i) 이 선수가 두 번째 경기에서 우승한 경우

첫 번째 경기와 두 번째 경기에서 모두 이겨야 하므로

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

(ii) 이 선수가 세 번째 경기에서 우승한 경우

첫 번째 경기와 세 번째 경기에서 이기거나 두 번째 경기와 세 번째 경기에서 이겨야 하므로

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 이 선수가 우승할 확률은

$\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$ 답 ④

12 해당 지역의 인구를 a명이라 하면 슈퍼 바이러스의 발병률이 0.1 %이므로 보균자는 $0.001a$명, 비보균자는 $0.999a$명이다.

이때, 슈퍼 바이러스의 보균자인 경우에는 검사 결과가 100 % 양성으로 나오지만 비보균자인 경우에도 5 %는 양성으로 나오므로 검사 결과에서 양성으로 나오는 사람 수는

$0.001a+0.999a\times0.05=0.05095a$

즉, 구하는 확률은

$\dfrac{0.001a}{0.05095a}=\dfrac{100}{5095}=\dfrac{20}{1019}$

이므로 $p=1019$, $q=20$

$\therefore p+q=1019+20=1039$ 답 ②

13 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이는 1이고, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이가 모두 1이므로 그 넓이는 $\dfrac{1}{2}$이다.

(i) 동전을 2번 던져 앞면이 2번 나온 경우

모두 앞면이 나올 확률은 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$이다.

동전과 같이 던진 주사위의 눈의 수만큼 상자 A에서 두 번 퍼즐을 꺼내 그 넓이의 합이 4가 되어야 하므로 첫 번째와 두 번째 시행에서 나온 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면

$a+b=4$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{48}$

(ii) 동전을 2번 던져 앞면, 뒷면이 각각 1번씩 나온 경우

동전이 앞면, 뒷면 또는 뒷면, 앞면의 순서대로 나오므로 그 확률은

$2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

앞면이 나오면 상자 A에서, 뒷면이 나오면 상자 B에서 퍼즐을 꺼내 그 넓이의 합이 4가 되어야 하므로 동전이 앞면이 나왔을 때의 주사위의 눈의 수와 뒷면이 나왔을 때의 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면

$a+\dfrac{1}{2}b=4$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(1, 6)$의 3가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{24}$

(iii) 동전을 2번 던져 뒷면이 2번 나온 경우

모두 뒷면이 나올 확률은 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$이다.

동전과 같이 던진 주사위의 눈의 수만큼 상자 B에서 두 번 퍼즐을 꺼내 그 넓이의 합이 4가 되어야 하므로 첫 번째와 두 번째 시행에서 나온 주사위의 눈의 수를 각각 a, b라 하면

$\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b=4 \qquad \therefore a+b=8$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$의 5가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{36}=\dfrac{5}{144}$

두 번의 시행으로 얻은 모든 퍼즐 조각의 넓이의 합이 4인 사건을 X, 얻은 퍼즐 조각이 모두 정사각형 모양인 사건을 Y라 하면 (i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(X)=\dfrac{1}{48}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{5}{144}=\dfrac{14}{144}=\dfrac{7}{72}$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{1}{48}$

$\therefore \mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{\frac{1}{48}}{\frac{7}{72}}=\dfrac{3}{14}$ 답 $\dfrac{3}{14}$

14 상자 A에서 상자 B에 넣을 공 6개를 택하는 방법의 수는

${}_{14}\mathrm{C}_6=\dfrac{14\times13\times12\times11\times10\times9}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=3003$

이때, 처음 상자 A에는 노란 공이 5개 들어 있으므로 상자 B에 들어갈 수 있는 노란 공의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i) $k=0$일 때,

상자 A에서 빨간 공 6개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 노란 공 5개, 빨간 공 3개가 남아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(0)=\dfrac{\overbrace{{}_9\mathrm{C}_6}^{={}_9\mathrm{C}_3}}{3003}\times\left(\dfrac{5}{8}\times0+\dfrac{3}{8}\times1\right)$

$=\dfrac{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{3003}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{286}$

(ii) $k=1$일 때,

상자 A에서 노란 공 1개, 빨간 공 5개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 노란 공 4개, 빨간 공 4개가 남아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$\mathrm{P}(1)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times\overbrace{{}_9\mathrm{C}_5}^{={}_9\mathrm{C}_4}}{3003}\times\left(\dfrac{4}{8}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{8}\times\dfrac{5}{6}\right)$

$=\dfrac{5\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}}{3003}\times\dfrac{24}{48}=\dfrac{15}{143}$

(iii) $k=2$일 때,

상자 A에서 노란 공 2개, 빨간 공 4개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 노란 공 3개, 빨간 공 5개가 남

아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(2)=\frac{{}_5C_2\times{}_9C_4}{3003}\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{4}{6}\right)$$

$$=\frac{\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}}{3003}\times\frac{26}{48}=\frac{5}{22}$$

(iv) $k=3$일 때,

상자 A에서 노란 공 3개, 빨간 공 3개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 노란 공 2개, 빨간 공 6개가 남아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(3)=\frac{\overbrace{{}_5C_3}^{={}_5C_2}\times{}_9C_3}{3003}\times\left(\frac{2}{8}\times\frac{3}{6}+\frac{6}{8}\times\frac{3}{6}\right)$$

$$=\frac{\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{3003}\times\frac{24}{48}=\frac{20}{143}$$

(v) $k=4$일 때,

상자 A에서 노란 공 4개, 빨간 공 2개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 노란 공 1개, 빨간 공 7개가 남아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(4)=\frac{\overbrace{{}_5C_4}^{={}_5C_1}\times{}_9C_2}{3003}\times\left(\frac{1}{8}\times\frac{4}{6}+\frac{7}{8}\times\frac{2}{6}\right)$$

$$=\frac{5\times\frac{9\times8}{2\times1}}{3003}\times\frac{18}{48}=\frac{45}{2002}$$

(vi) $k=5$일 때,

상자 A에서 노란 공 5개, 빨간 공 1개를 꺼내 상자 B에 넣으면 상자 A에는 빨간 공 8개가 남아 있으므로 각 상자에서 공 하나씩을 꺼내 동시에 노란 공이 나오거나 동시에 빨간 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(5)=\frac{{}_5C_5\times{}_9C_1}{3003}\times\left(0\times\frac{5}{6}+1\times\frac{1}{6}\right)$$

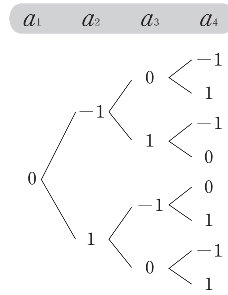
$$=\frac{9}{3003}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2002}$$

(i)~(vi)에서 확률 $\mathrm{P}(k)$의 최댓값은 $k=2$일 때, $M=\frac{5}{22}$이고 최솟값은 $k=5$일 때, $m=\frac{1}{2002}$이다.

$$\therefore \frac{M}{m}=\frac{\frac{5}{22}}{\frac{1}{2002}}=455$$

답 455

15 a_n의 값에 따라 주사위를 던져 짝수가 나오는 경우와 홀수가 나오는 경우의 a_{n+1}의 값을 위아래로 나열하면 다음 그림과 같고, 주사위를 한 번 던져 짝수가 나올 확률과 홀수가 나올 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이므로 a_n에서 a_{n+1}이 결정될 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.



ㄱ. $a_1=0$일 때, 주사위를 던져 짝수의 눈이 나오면 $a_2=-1$, 홀수의 눈이 나오면 $a_2=1$이므로 $a_2=1$일 확률은 $\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄴ. $a_3=1$이려면 $a_2=-1$이어야 하므로 $a_3=1$일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.

이때, $a_4=0$이려면 $a_2=-1$, $a_3=1$ 또는 $a_2=1$, $a_3=-1$이어야 하므로 $a_4=0$일 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

즉, $a_3=1$일 확률과 $a_4=0$일 확률은 서로 같다. (참)

ㄷ. $a_9=0$일 확률이 p이면 $a_9=1$, $a_9=-1$일 확률은 각각 $\frac{1-p}{2}$이다.

$a_{11}=0$이려면 $a_9\to a_{10}\to a_{11}$에서

$0\to-1\to0$, $0\to1\to0$, $1\to-1\to0$,

$-1\to1\to0$이므로 $a_{11}=0$일 확률은

$$p\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+p\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1-p}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1-p}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1+p}{4}\text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

blacklabel 특강 풀이첨삭

ㄷ에서 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=1$일 확률과 $a_n=-1$일 확률이 같은 이유를 살펴보자.

a_n에서 a_{n+1}이 결정될 확률이 모두 $\frac{1}{2}$이므로 위의 그림을 확장하였을 때, 가능한 a_n의 값을 세로로 나열한 것 중에서 -1과 1이 몇 개인지에 따라 $a_n=1$일 확률과 $a_n=-1$일 확률이 결정된다.

이때, $a_1=0$이므로 가능한 a_2의 값 중에서 -1과 1의 개수는 1로 동일하다. a_2를 이용하여 가능한 a_3을 나열하였을 때, -1과 1은 $a_2=1$일 때와 $a_2=-1$일 때에서 나올 수 있으므로 가능한 a_3의 값 중에서 -1과 1의 개수는 동일하다. 이를 반복하면 2 이상의 자연수 n에 대하여 가능한 a_n의 값을 나열하였을 때, -1과 1의 개수가 같으므로 $a_n=1$일 확률과 $a_n=-1$일 확률이 같다.

16 해결단계

❶ 단계	카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 이용하여 나머지가 모두 같아지려면 최소 3번 시행해야 함을 파악한다.
❷ 단계	스티커가 각각 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 카드를 1장씩 꺼내서 스티커를 붙였을 때, 3번 시행하여 나머지가 같을 확률을 구한다.
❸ 단계	1회부터 8회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 9회에서 사건 A가 일어날 확률을 구한다.

처음 스티커가 각각 1개, 2개, 3개 붙어 있던 카드 순서대로 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$로 나타내면 처음 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 $(1,\ 2,\ 0)$이다.
주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같으려면 나머지의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이어야 하고, 한 번 시행하여 스티커를 1개 붙이므로 나머지가 모두 같아지려면 3의 배수만큼 시행해야 한다.
세 번 시행하여 스티커를 3장의 카드에 임의로 붙이는 방법의 수는
$3^3=27$
이때, 세 번 시행하여 나머지가 같으려면 처음에 $(1,\ 2,\ 0)$이므로 첫 번째 카드와 두 번째 카드에 각각 스티커 2개, 1개를, 또는 두 번째 카드와 세 번째 카드에 각각 스티커 2개, 1개를, 또는 첫 번째 카드와 세 번째 카드에 각각 스티커 1개, 2개를 붙여야 한다.
세 번 시행하여 첫 번째 카드와 두 번째 카드에 각각 스티커 2개, 1개를 나눠 붙이는 경우의 수가 3이고 두 번째 카드와 세 번째 카드에 각각 스티커 2개, 1개를, 또는 첫 번째 카드와 세 번째 카드에 각각 스티커 1개, 2개를 나눠 붙이는 경우의 수도 3이므로 세 번 시행하여 나머지가 같은 경우의 수는
$3\times3=9$
즉, 세 번 시행하여 나머지가 모두 같아질 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$,
나머지가 모두 같지 않을 확률은 $\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$이다.
따라서 1회부터 8회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 9회에서 사건 A가 일어나려면 3회, 6회에서는 나머지가 모두 같지 않고, 9회에서는 나머지가 모두 같으면 되므로
$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$ 답 $\frac{4}{27}$

17 ㄱ. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이다. (참)
ㄴ. $\mathrm{P}(B|A^C)+\mathrm{P}(B^C|A^C)$
$=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}+\frac{\overbrace{\mathrm{P}(B^C\cap A^C)}^{\mathrm{P}((B\cup A)^C)}}{\mathrm{P}(A^C)}$
$=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}+\frac{1-\mathrm{P}(B\cup A)}{\mathrm{P}(A^C)}$
$=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$
$+\frac{1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}}{\mathrm{P}(A^C)}$
$=\frac{1-\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=1$ (참)
ㄷ. $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A^C|B^C)=1$에서
$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=1$
양변에 $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B^C)$을 곱하면
$\mathrm{P}(A\cap B)\mathrm{P}(B^C)+\underbrace{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}_{=\mathrm{P}((A\cup B)^C)}\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(B^C)$
$\mathrm{P}(A\cap B)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\{1-\mathrm{P}(A\cup B)\}\mathrm{P}(B)$
$=\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$\mathrm{P}(A\cap B)-\{\mathrm{P}(A\cap B)+\underbrace{\mathrm{P}(A\cup B)}_{=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}\}\mathrm{P}(B)$
$=-\mathrm{P}(B)^2$
$\mathrm{P}(A\cap B)-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}\mathrm{P}(B)=-\mathrm{P}(B)^2$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

18 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	찬성(명)	반대(명)	합계(명)
남학생	a	b	12
여학생	c	d	24
합계	15	21	36

A반 학생 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 남학생인 사건을 A, 가영이에 대하여 찬성한 학생인 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{15}{36}$이다.
이때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서
$\frac{a}{36}=\frac{12}{36}\times\frac{15}{36}$
$\therefore a=\frac{12}{36}\times\frac{15}{36}\times36=5$
따라서 구하는 학생 수는 5이다. 답 5

단계	채점 기준	배점
㈎	남학생일 확률과 가영이에 대하여 찬성할 확률을 각각 구한 경우	50%
㈏	두 사건이 서로 독립임을 이용하여 가영이에 대해 찬성한 남학생 수를 구한 경우	50%

19 조건 ㈎에서 $A\cup B\cup C=S$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(S)=1$
조건 ㈏에서 두 사건 $A\cap B$, C는 서로 배반사건이므로
$(A\cap B)\cap C=\varnothing$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B\cap C)=0$
조건 ㈐에서 두 사건 A, B는 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
이때,
$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$
$-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)$
$+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$
이므로
$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+0$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{17}{12}-1=\frac{5}{12}$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(B|C)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(C)}+\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}\\&=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

답 ④

blacklabel 특강 필수 원리

세 집합 A, B, C가 유한집합일 때,
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
이므로
$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

20 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{8}=k+\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\frac{1}{4}=k+\frac{1}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$k=\left(k+\frac{1}{8}\right)\left(k+\frac{1}{4}\right)$, $k^2+\frac{3}{8}k+\frac{1}{32}=k$

$\therefore k^2-\frac{5}{8}k+\frac{1}{32}=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 곱은 $\frac{1}{32}$이다.

답 ③

21 $A=\{1, 3, 5\}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이다.

(i) $m=1$일 때,
$B=\{1\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

(ii) $m=2$일 때,
$B=\{1, 2\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(iii) $m=3$일 때,
$B=\{1, 3\}$이므로 $A\cap B=\{1, 3\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

(iv) $m=4$일 때,
$B=\{1, 2, 4\}$이므로 $A\cap B=\{1\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

(v) $m=5$일 때,
$B=\{1, 5\}$이므로 $A\cap B=\{1, 5\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

(vi) $m=6$일 때,
$B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A\cap B=\{1, 3\}$
즉, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에서 모든 m의 값의 합은
$2+6=8$

답 8

• 다른풀이 •

홀수의 눈이 나오는 사건이 A이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이다.

m의 약수의 눈의 개수를 k, m의 약수의 눈 중에서 홀수의 개수를 l이라 하면 m의 약수의 눈이 나오는 사건이 B이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{k}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{l}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{l}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{k}{6}$ $\qquad\therefore 2l=k$

즉, m은 약수의 눈 중에서 절반이 홀수이어야 한다.
1의 약수는 1이므로 $m\neq1$
2의 약수는 1, 2이고 이 중에서 홀수는 1이므로 $m=2$
3의 약수는 1, 3이고 이 중에서 홀수는 1, 3이므로 $m\neq3$
4의 약수는 1, 2, 4이고 이 중에서 홀수는 1이므로 $m\neq4$
5의 약수는 1, 5이고 이 중에서 홀수는 1, 5이므로 $m\neq5$
6의 약수는 1, 2, 3, 6이고 이 중에서 홀수는 1, 3이므로 $m=6$
따라서 모든 m의 값의 합은
$2+6=8$

22 $A\cup B\cup C=S$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(S)=1$

두 사건 A, C가 서로 배반사건이므로

$A\cap C=\varnothing$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=0$, $\mathrm{P}(\underbrace{A\cap B\cap C}_{=(A\cap C)\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing})=0$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{16}$

이때,

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$$

에서

$$1=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\frac{1}{16}-\mathrm{P}(B\cap C)$$

$$\therefore \mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{17}{16}-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\ge 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}=2\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{P}(C\cap B^C)=\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{17}{16}-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}\ (\because ㉠)\le\frac{17}{16}-\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

따라서 확률 $\mathrm{P}(C\cap B^C)$의 최댓값은 $\frac{9}{16}$이다. **답** $\frac{9}{16}$

23 $n(X)=4$, $7\in X$이므로 집합 X의 나머지 세 원소를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

조건 (나)에서 집합 X의 원소 중 홀수가 나오는 사건이 A, 6 이상의 수가 나오는 사건이 B이므로 집합 X의 원소 중에서 홀수의 개수를 a, 6 이상의 수의 개수를 b라 하면 $a\le4$, $b\le4$이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{a}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{b}{4}$$

또한, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때, 전체집합 U의 원소 중 6 이상의 홀수는 7, 9, 11이므로 두 사건 A, B가 일어나는 경우를 각각 집합 A, B로 나타내면 $A\cap B$는 7을 반드시 원소로 갖는 집합 $\{7, 9, 11\}$의 부분집합이다.

(i) $A\cap B=\{7\}$인 경우

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서 $\frac{1}{4}=\frac{a}{4}\times\frac{b}{4}$

$\therefore ab=4$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (1, 4), (2, 2), (4, 1)이다.

① (a, b)가 (1, 4)일 때,
7을 제외하면 6 이상의 짝수 6, 8, 10이 집합 X의 원소이므로 $X=\{6, 7, 8, 10\}$이다.

② (a, b)가 (2, 2)일 때,
7을 제외하면 6 미만의 홀수 1, 3, 5 중에서 하나, 6 이상의 짝수 6, 8, 10 중에서 하나를 택하고, 나머지 하나는 6 미만의 짝수 2, 4 중에서 택해야 하므로 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=3\times3\times2=18$

③ (a, b)가 (4, 1)일 때,
7을 제외하면 6 미만의 홀수 1, 3, 5가 집합 X의 원소이므로 $X=\{1, 3, 5, 7\}$이다.

①, ②, ③에서 구하는 확률은

$$\frac{1+18+1}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

(ii) $A\cap B=\{7, 9\}$인 경우

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서 $\frac{2}{4}=\frac{a}{4}\times\frac{b}{4}$

$\therefore ab=8$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (2, 4), (4, 2)이다.

④ (a, b)가 (2, 4)일 때,
7, 9를 제외하면 6 이상의 짝수 6, 8, 10 중에서 두 개를 택하면 되므로 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$

⑤ (a, b)가 (4, 2)일 때,
7, 9를 제외하면 6 미만의 홀수 1, 3, 5 중에서 두 개를 택하면 되므로 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2=3$

④, ⑤에서 구하는 확률은

$$\frac{3+3}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

(iii) $A\cap B=\{7, 11\}$인 경우

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서 $\frac{2}{4}=\frac{a}{4}\times\frac{b}{4}$

$\therefore ab=8$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (2, 4), (4, 2)이므로 (ii)와 같은 방법으로 계산하면 구하는 확률은 $\frac{1}{20}$

(iv) $A\cap B=\{7, 9, 11\}$인 경우

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서 $\frac{3}{4}=\frac{a}{4}\times\frac{b}{4}$

$\therefore ab=12$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (3, 4), (4, 3)이다.

⑥ (a, b)가 (3, 4)일 때,
7, 9, 11을 제외하면 6 이상의 짝수 6, 8, 10 중에서 하나를 택하면 되므로 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1=3$

⑦ (a, b)가 (4, 3)일 때,
7, 9, 11을 제외하면 6 미만의 홀수 1, 3, 5 중에서 하나를 택하면 되므로 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1=3$

⑥, ⑦에서 구하는 확률은 $\frac{3+3}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

(i)~(iv)에서 집합 X가 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{19}{60}$ 답 $\frac{19}{60}$

24 희수가 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 나온 앞면의 개수가 0, 1, 2인 사건을 각각 A, B, C라 하고, 효원이가 동전을 던져서 나온 앞면의 개수가 1인 사건을 E라 하자.

(i) 희수가 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 나온 앞면의 개수가 0일 때, 효원이는 동전을 던질 수 없으므로 앞면이 한 개 나올 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 0=0$

(ii) 희수가 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 한 개 나올 때, 효원이는 동전을 한 개 던질 수 있으므로 이때 앞면이 한 개 나올 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 희수가 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 두 개 모두 앞면이 나올 때, 효원이는 동전을 두 개 던질 수 있으므로 이때 앞면이 한 개 나올 확률은

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)$

$={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$ 답 ⑤

25 주어진 주사위를 한 번 던질 때 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수일 확률은 $\frac{1}{4}$, 짝수일 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

이 주사위를 5번 던질 때, 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자들의 합이 홀수인 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) (홀수)+(짝수)+(짝수)+(짝수)+(짝수)인 경우

${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{5\times 81}{1024}=\frac{405}{1024}$

(ii) (홀수)+(홀수)+(홀수)+(짝수)+(짝수)인 경우

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{10\times 9}{1024}=\frac{90}{1024}$

(iii) (홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)+(홀수)인 경우

${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{1024}$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 확률은

$\frac{405}{1024}+\frac{90}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{496}{1024}=\frac{31}{64}$

따라서 $p=64$, $q=31$이므로

$p+q=64+31=95$ 답 ⑤

26 앞면이 나온 동전의 개수가 주사위의 눈의 수보다 큰 사건을 A라 하고, 앞면이 나온 동전의 개수가 4 이상인 사건을 B라 하자.

(i) 앞면이 나온 동전의 개수가 2일 때,
주사위의 눈의 수는 1이어야 하므로 확률은

${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{15}{2^6\times 6}$

(ii) 앞면이 나온 동전의 개수가 3일 때,
주사위의 눈의 수는 1, 2이어야 하므로 확률은

${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{6}=\frac{40}{2^6\times 6}$

(iii) 앞면이 나온 동전의 개수가 4일 때,
주사위의 눈의 수는 1, 2, 3이어야 하므로 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{6}=\frac{45}{2^6\times 6}$

(iv) 앞면이 나온 동전의 개수가 5일 때,
주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, 4이어야 하므로 확률은

${}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{4}{6}=\frac{24}{2^6\times 6}$

(v) 앞면이 나온 동전의 개수가 6일 때,
주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5이어야 하므로 확률은

${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\frac{5}{6}=\frac{5}{2^6\times 6}$

(i)~(v)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{15+40+45+24+5}{2^6\times 6}=\frac{129}{2^6\times 6}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{45+24+5}{2^6\times 6}=\frac{74}{2^6\times 6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{74}{2^6\times 6}}{\frac{129}{2^6\times 6}}=\frac{74}{129}$

이므로 $p=129$, $q=74$

$\therefore p+q=129+74=203$ 답 203

27 $\mathrm{P}(A)=p$ $(0<p<1)$라 하면 $\mathrm{P}(A^C)=1-p$

이때, 두 확률의 차가 $\frac{1}{2}$이고, $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(A^C)$이므로

$(1-p)-p=\frac{1}{2}$, $2p=\frac{1}{2}$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

9회의 독립시행 중에서 사건 A가 5회 일어날 확률은

${}_9\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\times\frac{3^4}{4^9}=\frac{126\times 3^4}{2^{18}}$

9회의 독립시행 중에서 사건 A가 연속으로 5회 일어나는 경우의 수는 다음 그림과 같이 5이다.

○○○○○××××, ×○○○○○×××,
××○○○○○××, ×××○○○○○×,
××××○○○○○

즉, 이 경우의 확률은

$5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{5\times3^4}{2^{18}}$

따라서 9회의 독립시행에서 사건 A가 5회 일어나지만 연속으로 5회는 일어나지 않을 확률은

$$\frac{126\times3^4}{2^{18}}-\frac{5\times3^4}{2^{18}}=(126-5)\times\frac{3^4}{2^{18}}$$
$$=\frac{121\times3^4}{2^{18}}$$
$$=\frac{11^2\times9^2}{2^{18}}=\frac{99^2}{2^{18}}$$

$\therefore k=99$ 답 99

28

5점을 먼저 얻어야 우승하므로 갑은 2번, 을은 3번을 더 이겨야 한다.

갑이 한 게임에서 이길 확률과 질 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이므로 갑이 우승할 확률은 다음과 같다.

(i) 갑이 2번 더 게임을 하여 우승하는 경우
2번 연속으로 갑이 이겨야 하므로

$_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(ii) 갑이 3번 더 게임을 하여 우승하는 경우
첫 번째, 두 번째 게임은 갑과 을이 서로 한 번씩 이기고, 마지막 게임은 갑이 이겨야 하므로

$_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 갑이 4번 더 게임을 하여 우승하는 경우
첫 번째, 두 번째, 세 번째 게임 중에서 갑이 1번, 을이 2번 이기고, 마지막 게임은 갑이 이겨야 하므로

$_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 갑이 우승할 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$

비기는 경우는 없으므로 을이 우승할 확률은

$1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$

따라서 갑과 을이 우승할 확률이 각각 $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{16}$이므로 총 상금 800원에서 갑이 가져가야 할 상금은

$800\times\frac{11}{16}=550$(원) 답 ③

29

한 번의 시행에서 1개의 공을 A, B, C, D, E, F의 6개의 상자 중 1개의 상자에 넣을 때, 1개의 공이 A, B, C 세 상자 중 어느 하나에 들어가는 사건을 X라 하면 사건 X가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(X)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이때, 10회의 독립시행에서 A, B, C 세 상자에 들어가는 공의 개수의 합이 4가 되려면 사건 X가 4회 일어나야 하므로 구하는 확률은

$${}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times\frac{1}{2^{10}}$$
$$=\frac{210}{1024}=\frac{105}{512}$$

답 ①

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

경우의 수에 대한 문제는 경우를 확실히 구분하는 것이 중요하다. 이 문제에서 서로 다른 10개의 공을 서로 다른 6개의 상자에 넣는 모든 경우의 수는 6^{10}, 4개의 공을 A, B, C 세 상자에 넣는 경우의 수는 3^4, 나머지 6개의 공을 D, E, F 세 상자에 넣는 경우의 수는 3^6이다. 이때, 10개의 공이 서로 다르므로 A, B, C 세 상자에 넣을 4개의 공을 선택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4$이다. 따라서 구하는 확률은

$\frac{({}_{10}C_4\times3^4)\times3^6}{6^{10}}=\frac{105}{512}$

30

가위바위보를 한 번 할 때 이길 확률과 질 확률, 비길 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이므로 지호가 사탕을 2개 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 사탕을 1개 받을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

게임에서 지호가 사탕을 2개 받는 횟수를 a, 1개 받는 횟수를 b라 하면 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5이므로

$2a+b=5$

위의 식을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(0, 5)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$의 3가지이다.

(i) (a, b)가 $(0, 5)$인 경우
다섯 번의 게임을 하여 모두 사탕을 1개 받으므로 확률은

$_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

(ii) (a, b)가 $(1, 3)$인 경우
네 번의 게임을 하여 한 번은 사탕을 2개 받고, 세 번은 사탕을 1개 받으므로 확률은

$_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

(iii) (a, b)가 $(2, 1)$인 경우
세 번의 게임을 하여 두 번은 사탕을 2개 받고, 한 번은 사탕을 1개 받으므로 확률은

$_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{32}{243}+\frac{32}{81}+\frac{2}{9}=\frac{182}{243}$

따라서 $\frac{k}{243}=\frac{182}{243}$에서 $k=182$이다. 답 182

31 ㄱ. 비행기 모형의 장난감은 나사가 4개이고, 2개 이상의 나사가 풀리면 장난감이 작동하지 않으므로 작동하지 않을 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16}\ (\text{참})$$

ㄴ. 배 모형의 장난감은 나사가 5개이므로 $\frac{5}{2}$개, 즉 3개 이상의 나사가 풀리면 장난감이 작동하지 않는다. 즉, 구하는 확률은

$${}_5C_5p^5+{}_5C_4p^4(1-p)+{}_5C_3p^3(1-p)^2$$
$$=p^5+5p^4(1-p)+10p^3(p^2-2p+1)$$
$$=p^5+5p^4-5p^5+10p^5-20p^4+10p^3$$
$$=6p^5-15p^4+10p^3\ (\text{참})$$

ㄷ. 비행기 모형의 장난감이 작동하지 않을 확률은

$${}_4C_4p^4+{}_4C_3p^3(1-p)+{}_4C_2p^2(1-p)^2$$
$$=p^4+4p^3(1-p)+6p^2(p^2-2p+1)$$
$$=p^4+4p^3-4p^4+6p^4-12p^3+6p^2$$
$$=3p^4-8p^3+6p^2$$

ㄴ에서 배 모형의 장난감이 작동하지 않을 확률이 $6p^5-15p^4+10p^3$이므로

$$6p^5-15p^4+10p^3-(3p^4-8p^3+6p^2)$$
$$=6p^5-15p^4+10p^3-3p^4+8p^3-6p^2$$
$$=6p^5-18p^4+18p^3-6p^2$$
$$=6p^2(p^3-3p^2+3p-1)$$
$$=6p^2(p-1)^3<0\ (\because 0<p<1)$$

따라서 비행기 모형의 장난감보다 배 모형의 장난감이 작동하지 않을 확률이 더 작다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

32 주사위를 한 개 던져 3의 배수가 나올 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 ○, ×를 두 칸에 그릴 확률이 $\frac{1}{3}$, 한 칸에 그릴 확률이 $\frac{2}{3}$이고, 다음 그림과 같이 빈칸을 왼쪽부터 순서대로 ①~⑩이라 하자.

○	○	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	×

(i) A가 색칠된 칸에 ○를 그릴 확률

주사위를 총 네 번 던져 색칠된 칸에 ○를 그리려면 네 번째 주사위를 던졌을 때 칸 ④까지 ○를 그리거나 칸 ③까지 ○를 그린 후 다섯 번째 주사위를 던졌을 때 ○를 두 칸 그려야 한다.

① 네 번째 주사위를 던졌을 때, 칸 ④까지 ○를 그린 경우

주사위를 세 번 던져 네 칸에 ○를 그리려면 두 칸을 1번, 한 칸을 2번 그리면 되므로

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

② 네 번째 주사위를 던졌을 때, 칸 ③까지 ○를 그린 경우

주사위를 세 번 던져 세 칸에 ○를 그리려면 한 칸씩 3번을 그리면 된다.

그리고 다섯 번째 주사위를 던져 두 칸을 그리면 되므로

$${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

①, ②에서 A가 색칠된 칸에 ○를 그릴 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{81}=\frac{44}{81}=\frac{44}{3^4}$$

(ii) B가 색칠된 칸에 ×를 그릴 확률

주사위를 총 네 번 던져 색칠된 칸에 ×를 그리려면 네 번째 주사위를 던졌을 때, 칸 ⑥까지 ×를 그리거나 칸 ⑦까지 ×를 그린 후 다섯 번째 주사위를 던졌을 때 ×를 두 칸 그려야 한다.

③ 네 번째 주사위를 던졌을 때, 칸 ⑥까지 ×를 그린 경우

주사위를 세 번 던져 다섯 칸에 ×를 그리려면 두 칸을 2번, 한 칸을 1번 그리면 되므로

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$$

④ 네 번째 주사위를 던졌을 때, 칸 ⑦까지 ×를 그린 경우

주사위를 세 번 던져 네 칸에 ×를 그리려면 두 칸을 1번, 한 칸을 2번 그려야 한다.

그리고 다섯 번째 주사위를 던져 두 칸을 그리면 되므로

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

③, ④에서 B가 색칠된 칸에 ×를 그릴 확률은

$$\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{10}{27}=\frac{10}{3^3}$$

(i), (ii)에서 두 사람 A, B가 다섯 번째 주사위를 던졌을 때, 색칠된 칸에 ○, ×를 그릴 확률은

$$\frac{44}{3^4}\times\frac{10}{3^3}=\frac{440}{3^7}$$

따라서 $a=7$, $b=440$이므로

$a+b=7+440=447$ **답** 447

33 해결단계

❶ 단계	박테리아가 1시간에 최대 2배가 될 수 있음을 이용하여 2시간 후의 박테리아가 3개 또는 4개이어야 함을 파악한다.
❷ 단계	2시간 후의 박테리아가 3개일 확률과 4개일 확률을 각각 구한다.
❸ 단계	3시간 후에 박테리아가 6개가 될 확률을 구한다.

3시간 후에 박테리아가 6개가 되려면 2시간 후에 적어도 3개의 박테리아가 있어야 하고, 2시간 후에 적어도 3개의 박테리아가 있으려면 1시간 후에는 박테리아가 반드시 2개가 있어야 한다.

이때, 1개의 박테리아가 1시간 후에 2개, 1개, 0개가 될 수 있으므로 2시간 후의 박테리아는 최대 4개이다.

(i) 2시간 후에 박테리아가 3개인 경우

1시간 후에 박테리아가 2개인 상태에서 둘 중 하나는 2개, 나머지 하나는 1개가 되어야 하고, 이 3개의 박테리아는 3시간 후에 모두 2개가 되어야 한다.

즉, 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$$

(ii) 2시간 후에 박테리아가 4개인 경우

1시간 후에 박테리아가 2개가 되고, 이 2개의 박테리아가 모두 2시간 후에 각각 2개가 되어야 한다.

3시간 후에 4개의 박테리아가 6개가 되어야 하므로 4개 중에서 세 개는 각각 2개, 나머지 하나는 0개가 되거나 4개 중에서 두 개는 각각 2개, 나머지 두 개는 각각 1개가 되어야 한다.

즉, 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{32}$$

(i), (ii)에서 3시간 후에 박테리아가 6개가 될 확률은

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{32}=\frac{5}{96}$$

답 $\frac{5}{96}$

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 38

01 $\frac{4}{27}$ 02 81 03 81 04 $\frac{7}{81}$ 05 6
06 $\frac{4}{19}$

01 해결단계

❶ 단계	주사위를 던져 숫자 1, 2, 3이 나올 확률을 각각 구한다.
❷ 단계	처음 주사위에서 나온 숫자에 따른 4장의 카드가 모두 동일한 면이 위로 향해 있을 각각의 확률을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 각각의 확률을 더한다.

주사위를 던졌을 때, 숫자 1, 2, 3일 나올 확률은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$이다.

(i) 처음 주사위를 던져 숫자 1이 나온 경우

한 장의 카드를 뒤집으므로 앞면 3장, 뒷면 1장이다.

두 번째 주사위를 던졌을 때, 모두 같은 면이 위로 향하게 하려면 뒷면인 1장의 카드를 뒤집거나 앞면인 3장의 카드를 뒤집어야 한다.

즉, 두 번째 주사위를 던졌을 때 숫자 1 또는 숫자 3이 나와야 하므로 그 확률은

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{처음 주사위에서 1이 나올 확률}}\times\left(\overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{두번째 주사위에서 1이 나올 확률}}\times\underbrace{\frac{{}_1C_1}{{}_4C_1}}_{\text{뒷면과 연결된 버튼을 선택할 확률}}+\frac{3}{6}\times\frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}\right)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{24}+\frac{3}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{36}$$

(ii) 처음 주사위를 던져 숫자 2가 나온 경우

두 장의 카드를 뒤집으므로 앞면 2장, 뒷면 2장이다.

두 번째 주사위를 던졌을 때, 모두 같은 면이 위로 향하게 하려면 뒷면인 2장의 카드를 뒤집거나 앞면인 2장의 카드를 뒤집어야 한다.

즉, 두 번째 주사위를 던졌을 때 숫자 2가 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\left(\underbrace{\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}}_{\text{뒷면과 연결된 버튼을 선택할 확률}}+\underbrace{\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}}_{\text{앞면과 연결된 버튼을 선택할 확률}}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

(iii) 처음 주사위를 던져 숫자 3이 나온 경우

세 장의 카드를 뒤집으므로 앞면 1장, 뒷면 3장이다.

두 번째 주사위를 던졌을 때, 모두 같은 면이 위로 향하게 하려면 뒷면인 3장의 카드를 뒤집거나 앞면인 1장의 카드를 뒤집어야 한다.

즉, 두 번째 주사위를 던졌을 때 숫자 3 또는 숫자 1이 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{3}{6}\times\left(\frac{3}{6}\times\frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}+\frac{1}{6}\times\frac{{}_1C_1}{{}_4C_1}\right)=\frac{3}{6}\times\left(\frac{3}{24}+\frac{1}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{12}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{27}+\frac{1}{12}=\frac{16}{108}=\frac{4}{27}$$

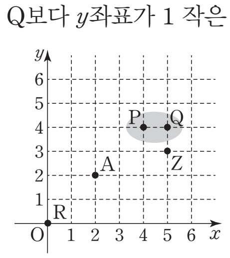
답 $\frac{4}{27}$

02 해결단계

❶ 단계	점 R가 x축, y축의 양의 방향으로 1만큼 움직일 확률을 각각 구한다.
❷ 단계	점 R가 원점에서 출발하여 색칠한 부분에 위치할 확률과 점 A를 지나면서 색칠한 부분에 위치할 확률을 각각 구한다.
❸ 단계	점 R가 점 A를 지나지 않으면서 색칠한 부분을 지날 확률을 구하여 s, t, k의 값을 각각 구한 후, $s+t+k$의 값을 구한다.

주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 x축의 양의 방향으로 1만큼 움직일 확률이 $\frac{1}{3}$, y축의 양의 방향으로 1만큼 움직일 확률이 $\frac{2}{3}$이다.

다음 그림과 같이 색칠한 부분에 포함되는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q보다 y좌표가 1 작은 점을 Z라 하자.



점 R가 원점 O에서 출발하여 점 P 또는 점 Q에 위치하려면 O → P 또는 O → Z → Q이어야 하므로 확률은

$$\frac{8!}{4!4!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{8!}{5!3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$$

$$=70\times\frac{2^4}{3^8}+56\times\frac{2^4}{3^9}=133\times\frac{2^5}{3^9}$$

점 R가 원점 O에서 출발하여 점 A를 지난 후, 점 P 또는 점 Q에 위치하려면 O → A → P 또는
O → A → Z → Q이어야 하므로 그 확률은

$$\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 +\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}$$

$$=36\times\frac{2^4}{3^8}+24\times\frac{2^4}{3^9}=66\times\frac{2^5}{3^9}$$

따라서 점 R가 점 A를 지나지 않으면서 색칠한 부분을 지날 확률은

$$133\times\frac{2^5}{3^9}-66\times\frac{2^5}{3^9}=67\times\frac{2^5}{3^9}$$

이므로 $s=5$, $t=9$, $k=67$

$\therefore s+t+k=5+9+67=81$ **답** 81

03 해결단계

❶ 단계	뽑은 세 개의 카드에 적힌 수를 각각 x, y, z라 했을 때, x가 적힌 카드를 뽑은 사람이 이기는 경우의 수를 구한다.
❷ 단계	**❶단계**에서 구한 식을 이용하여 갑이 이기는 방법의 수를 구한 후, 한 번 게임을 하여 갑이 이길 확률을 구한다.
❸ 단계	1번 게임을 해서 비길 확률을 구한 후, 5번 게임을 했을 때, 갑, 을이 각각 1번, 2번씩 이기고 2번은 비길 확률을 구한다.
❹ 단계	k의 값을 구한다.

갑, 을, 병이 각각 A, B, C 세 개의 주머니에서 임의로 카드 한 장을 뽑는 경우의 수는 $10^3=1000$

조건 (가)에서 다른 두 장의 카드에 적힌 수의 합보다 한 장의 카드에 적힌 수가 크면 이긴다고 했으므로 세 장의 카드에 적힌 수를 각각 x, y, z라 하고 x가 적힌 카드를 뽑은 사람이 이기는 경우의 수를 구하면

$y+z<x$, 즉 $y+z\le x-1$

$\therefore y+z+w=x-1$

(단, y, z는 1부터 10까지의 자연수, w는 음이 아닌 정수)

$y=y'+1$, $z=z'+1$로 놓으면

$y'+z'+w=x-3$ (단, y', z', w는 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 (y', z', w)의 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_{x-3}={}_{x-1}\mathrm{C}_{x-3}={}_{x-1}\mathrm{C}_2$ ······㉠

한편, 갑이 을, 병을 이기기 위해서는 뽑은 카드에 적힌 수가 3, 4, 5, ⋯, 10이어야 한다.

즉, ㉠에 의하여 갑이 이기는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_9\mathrm{C}_2$$
$$=(\underbrace{{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2}_{{}_4\mathrm{C}_3})+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_9\mathrm{C}_2\ (\because {}_2\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_3)$$
$$=(\underbrace{{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2}_{{}_5\mathrm{C}_3})+\cdots+{}_9\mathrm{C}_2$$
$$={}_5\mathrm{C}_3+\cdots+{}_9\mathrm{C}_2$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{120}{1000}=\frac{3}{25}$

갑, 을, 병이 이길 확률은 서로 같으므로 한 번 게임을 하여 비길 확률은

$$1-\frac{3}{25}-\frac{3}{25}-\frac{3}{25}=\frac{16}{25}$$

5번 게임을 했을 때, 갑, 을이 각각 1번, 2번씩 이기고, 2번은 비겼을 확률은

$$\frac{5!}{1!2!2!}\times\left(\frac{3}{25}\right)^1\left(\frac{3}{25}\right)^2\left(\frac{16}{25}\right)^2$$
$$=30\times\frac{27\times2^8}{5^{10}}=81\times\left(\frac{2}{5}\right)^9$$

$\therefore k=81$ **답** 81

04 해결단계

❶ 단계	B 상자에 들어 있는 카드에 적힌 수의 합이 A 상자에 들어 있는 카드에 적힌 수의 합의 2배가 되는 사건을 X라 하고, X의 조건을 구한다.
❷ 단계	첫 번째 시행에서 같은 숫자가 적힌 카드를 교환한 경우와 다른 숫자가 적힌 카드를 교환한 경우로 나누어 각 확률을 구한다.
❸ 단계	첫 번째 시행 후에는 X를 만족시키지 않지만 두 번째 시행 후에는 X를 만족시키게 될 확률을 구한다.

B 상자에 들어 있는 카드에 적힌 수의 합이 A 상자에 들어 있는 카드에 적힌 수의 합의 2배가 되는 사건을 X라 하자.

두 상자에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 카드가 각각 1장씩 있으므로 두 상자에 들어 있는 카드에 적힌 수의 합은

$2\times(1+2+3)=12$

즉, X를 만족시키려면 두 상자 A, B에 들어 있는 카드의 적힌 수의 합이 각각 4, 8이고, 각각 1, 1, 2가 적힌 카드와 2, 3, 3이 적힌 카드가 들어 있어야 한다.

첫 번째 시행에서는 X를 만족시키지 않으므로 A 상자에 들어 있는 숫자의 합이 4가 아니어야 한다.

(i) 첫 번째 시행에서 같은 숫자가 적힌 카드를 교환한 경우
첫 번째 시행 후 두 상자 A, B에는 1, 2, 3이 하나씩 적힌 카드 3장이 각각 들어 있으므로 두 번째 시행 후 X를 만족시키려면 A 상자에서는 3, B 상자에서는 1을 서로 맞교환해야 한다. 즉, 이때의 구하는 확률은

$$\frac{3}{{}_3\Pi_2}\times\frac{1}{{}_3\Pi_2}=\frac{3}{81}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 다른 숫자가 적힌 카드를 교환한 경우
첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 카드는
1, 1, 2 또는 1, 1, 3 또는 1, 2, 2 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3 또는 2, 3, 3
이때, 1, 3, 3 또는 2, 2, 3 또는 2, 3, 3인 경우 가장 큰 수가 적힌 카드를 주고, B 상자에 들어 있는 가장 작은 숫자가 적힌 카드를 받아도 A 상자에 들어 있는 카드의 합이 4가 될 수 없다.

또한 1, 1, 2이면 A 상자에 들어 있는 수의 합이 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

첫 번째 시행 후 상자 A에 1, 1, 3이 적힌 카드가 들어 있을 때, 상자 A에서는 3, 상자 B에서는 2가 적힌 카드를 맞교환해야 하고 상자 B에 들어 있는 2가 적힌 카드가 2장이므로 2가지이다.

첫 번째 시행 후 상자 A에 1, 2, 2가 적힌 카드가 들어 있을 때, 상자 A에서는 2, 상자 B에서는 1이 적힌 카드를 맞교환해야 하고 상자 A에 들어 있는 2가 적힌 카드가 2장이므로 2가지이다.

즉, 이때의 구하는 확률은

$$\frac{2+2}{{}_3\Pi_2\times{}_3\Pi_2}=\frac{4}{81}$$

(i), (ii)에서 첫 번째 시행 후에는 X를 만족시키지 않지만 두 번째 시행 후에는 X를 만족시키게 될 확률은

$$\frac{3}{81}+\frac{4}{81}=\frac{7}{81}$$

답 $\frac{7}{81}$

05 해결단계

❶ 단계	갑이 n번째 시행을 하였을 때의 확률을 이용하여 갑이 $(n+1)$번째 시행을 할 확률을 구한다.
❷ 단계	P_2의 값을 구한 후, ❶단계에서 구한 관계식을 이용하여 P_3, P_4, P_5의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	$P_3+6P_4+5P_5$의 값을 구한다.

갑이 n번째 시행을 할 확률이 P_n이므로 을이 n번째 시행을 할 확률은 $1-P_n$

갑이 $(n+1)$번째 시행을 하려면 갑이 n번째 시행을 하였을 때 흰 공을 꺼내거나 을이 n번째 시행을 하였을 때 검은 공을 꺼내야 한다.

즉, 갑이 $(n+1)$번째 시행을 할 확률은

$$P_{n+1}=P_n\times\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}+(1-P_n)\times\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1}$$
$$=\frac{2}{5}P_n+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}P_n$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_n$$

한편, 1번째 시행은 갑이 하므로

$P_1=1$

$$P_2=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_1=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P_3=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_2=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$$

$$P_4=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_3=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{13}{25}=\frac{62}{125}$$

$$P_5=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_4=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{62}{125}=\frac{313}{625}$$

$$\therefore P_3+6P_4+5P_5=\frac{13}{25}+6\times\frac{62}{125}+5\times\frac{313}{625}$$
$$=\frac{13}{25}+\frac{685}{125}=\frac{13}{25}+\frac{137}{25}$$
$$=\frac{150}{25}=6$$

답 6

• 다른풀이 •

$P_{n+1}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_n$이므로

$$P_{n+2}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_{n+1}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_n\right)$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{3}{25}+\frac{1}{25}P_n$$
$$=\frac{12}{25}+\frac{1}{25}P_n$$

$$P_{n+3}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_{n+2}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{25}P_n\right)$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{12}{125}-\frac{1}{125}P_n$$
$$=\frac{63}{125}-\frac{1}{125}P_n$$

$$\therefore P_{n+1}+6P_{n+2}+5P_{n+3}$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_n+6\left(\frac{12}{25}+\frac{1}{25}P_n\right)+5\left(\frac{63}{125}-\frac{1}{125}P_n\right)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{72}{25}+\frac{63}{25}-\frac{1}{5}P_n+\frac{6}{25}P_n-\frac{1}{25}P_n$$
$$=6$$

06 해결단계

❶ 단계	테이블 위의 카드를 1, 2, 3, ⋯, 7이라 하고 게임에서 이기려면 게임을 멈추었을 때 뒤집은 카드가 7임을 파악한다.
❷ 단계	네 번째, 다섯 번째, 여섯 번째, 일곱 번째 카드를 뒤집어 이길 확률을 각각 구한다.
❸ 단계	윤서가 게임에서 이겼다고 할 때, 여섯 번째 카드를 뒤집어서 이겼을 확률을 구한다.

테이블 위에 7장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $7!$

이 카드에 적힌 수를 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이라 하면 게임에서 이기기 위해서는 게임을 멈추었을 때 뒤집은 카드가 7이 적힌 카드이어야 한다.

일렬로 나열한 카드에 적힌 수를 첫 번째 놓인 카드부터 순서대로 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_7이라 하자.

(i) 네 번째 카드를 뒤집어 이긴 경우

$a_4=7$이므로 네 번째 뒤집은 카드에 적힌 수가 항상 a_1, a_2, a_3보다 크다.

즉, 1부터 6까지의 수를 일렬로 나열하여 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7이라 하면 되므로 네 번째 카드를 뒤집어 이길 확률은 $\frac{6!}{7!}=\frac{720}{7!}$

(ii) 다섯 번째 카드를 뒤집어 이긴 경우

$a_5=7$이고 네 번째 카드를 뒤집었을 때 게임을 멈추지 않았으므로 a_4는 a_1, a_2, a_3의 최댓값보다 작다. ……㉠

① a_1, a_2, a_3의 최댓값이 6인 경우

a_4가 1부터 5까지의 수이면 ㉠을 항상 만족시킨다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 6인 수와 a_5를 제외한 나머지 수에 1부터 5까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times5!=360$

② a_1, a_2, a_3의 최댓값이 5인 경우

a_4는 1부터 4까지의 수이고, $a_6=6$ 또는 $a_7=6$이면 ㉠을 항상 만족시킨다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 5인 수와 a_6, a_7 중에서 6인 수, a_5를 제외한 나머지 수에 1부터 4까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times4!=144$

③ a_1, a_2, a_3의 최댓값이 4인 경우

a_4는 1부터 3까지의 수이고, a_6, a_7은 5, 6 중에서 각각 하나이면 ㉠을 항상 만족시킨다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 4인 수와 a_5, a_6, a_7을 제외한 나머지 수에 1부터 3까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times2!\times3!=36$

①, ②, ③에서 다섯 번째 카드를 뒤집어 이기는 경우의 수는 $360+144+36=540$

즉, 다섯 번째 카드를 뒤집어 이길 확률은 $\dfrac{540}{7!}$

(iii) 여섯 번째 카드를 뒤집어 이긴 경우

$a_6=7$이고 네 번째, 다섯 번째 카드를 뒤집었을 때 게임을 멈추지 않았으므로 a_4, a_5는 a_1, a_2, a_3의 최댓값보다 작다. ……㉡

④ a_1, a_2, a_3의 최댓값이 6인 경우

a_4, a_5가 1부터 5까지의 수이면 ㉡을 항상 만족시킨다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 6인 수와 a_6을 제외한 나머지 수에 1부터 5까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times5!=360$

⑤ a_1, a_2, a_3의 최댓값이 5인 경우

a_4, a_5가 1부터 4까지의 수이고, $a_7=6$이면 ㉡을 항상 만족시킨다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 5인 수와 a_6, a_7을 제외한 나머지 수에 1부터 4까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times4!=72$

④, ⑤에서 여섯 번째 카드를 뒤집어 이기는 경우의 수는 $360+72=432$

즉, 여섯 번째 카드를 뒤집어 이길 확률은 $\dfrac{432}{7!}$

(iv) 마지막 카드를 뒤집어 이긴 경우

$a_7=7$이고 네 번째, 다섯 번째, 여섯 번째 카드를 뒤집었을 때 게임을 멈추지 않았으므로 a_4, a_5, a_6은 a_1, a_2, a_3의 최댓값보다 작다.

즉, a_1, a_2, a_3 중에서 하나가 6이고, 그 수와 a_7을 제외한 나머지 수에 1부터 5까지를 순서대로 나열하여 배치하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_3C_1\times5!=360$

즉, 마지막 카드를 뒤집어 이길 확률은 $\dfrac{360}{7!}$

(i)~(iv)에서 윤서가 게임에서 이기는 사건을 A, 여섯 번째 카드를 뒤집어 이기는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{720+540+432+360}{7!}=\frac{2052}{7!}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{432}{7!}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{432}{7!}}{\frac{2052}{7!}}=\frac{432}{2052}=\frac{4}{19}$$

답 $\dfrac{4}{19}$

이것이 수능 pp. 39~40

1 50	2 28	3 ①	4 78	5 ②
6 ④	7 43	8 ①		

1

해결단계

❶ 단계	갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건 A에 대한 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 사건 A에 대해, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건 B가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하여 $\mathrm{P}(B|A)$를 구한다.

갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하면 전체 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6\times3\times3=54$

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 A라 하고, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 B라 하자.

$a>b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$

의 12가지이고, 각각의 경우에 대하여 c가 3가지씩 존재하므로 $a>b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$12\times3=36$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{36}{54}=\dfrac{2}{3}$

$a>b+c$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는
$(3,\ 1,\ 1)$, $(4,\ 1,\ 1)$, $(4,\ 1,\ 2)$,
$(4,\ 2,\ 1)$, $(5,\ 1,\ 1)$, $(5,\ 1,\ 2)$,
$(5,\ 1,\ 3)$, $(5,\ 2,\ 1)$, $(5,\ 2,\ 2)$,
$(5,\ 3,\ 1)$, $(6,\ 1,\ 1)$, $(6,\ 1,\ 2)$,
$(6,\ 1,\ 3)$, $(6,\ 2,\ 1)$, $(6,\ 2,\ 2)$,
$(6,\ 2,\ 3)$, $(6,\ 3,\ 1)$, $(6,\ 3,\ 2)$
의 18가지이므로 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로 $100k=100\times\frac{1}{2}=50$ **답** 50

2 해결단계

❶ 단계	3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하고, 그 확률을 구한다.
❷ 단계	첫 번째 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 B라 하고, 사건 $A\cap B$의 확률을 구한다.
❸ 단계	확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 계산하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

차례대로 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 B라 하면 여사건 A^C은 꺼낸 3개의 공에 적힌 세 수가 모두 홀수인 경우이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}}=\frac{1}{20}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이면서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 확률은 다음과 같다.

(i) (홀수×홀수×짝수)인 경우

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$$

(ii) (홀수×짝수×홀수)인 경우

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{20}$$

(iii) (홀수×짝수×짝수)인 경우

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{20}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{20}}{\frac{19}{20}}=\frac{9}{19}$$

이므로 $p=19$, $q=9$

$\therefore p+q=19+9=28$ **답** 28

3 해결단계

❶ 단계	5번째에 짝수가 적힌 공을 꺼내기 위한 조건을 파악한다.
❷ 단계	확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구한다.

5번째까지 시행을 한 후 시행을 멈추려면 4번째 시행까지 홀수가 적혀 있는 공 2개와 짝수가 적혀 있는 공 2개를 꺼내고 5번째의 시행에서 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\times\frac{4\times3\times3\times2}{7\times6\times5\times4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{35}$$

답 ①

4 해결단계

❶ 단계	각 시행에 따른 동전 상태의 순서쌍을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 순서쌍에 따른 각각의 확률을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 각각의 확률을 더하여 p의 값을 구한 후, $125p$의 값을 구한다.

앞면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수를 a, 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수를 b라 할 때, 순서쌍 $(a,\ b)$가 처음에는 $(2,\ 3)$이고 3번의 시행의 결과도 $(2,\ 3)$이다.
이때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 경우를 표를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><th></th><th>처음</th><th>시행</th><th></th><th>시행</th><th></th><th>시행</th><th>결과</th></tr>
<tr><td>(i)</td><td rowspan="6">(2, 3)</td><td rowspan="6">⇨</td><td rowspan="3">(2, 3)</td><td rowspan="6">⇨</td><td>(2, 3)</td><td rowspan="6">⇨</td><td rowspan="6">(2, 3)</td></tr>
<tr><td>(ii)</td><td>(0, 5)</td></tr>
<tr><td>(iii)</td><td>(4, 1)</td></tr>
<tr><td>(iv)</td><td>(0, 5)</td><td>(2, 3)</td></tr>
<tr><td>(v)</td><td rowspan="2">(4, 1)</td><td>(2, 3)</td></tr>
<tr><td>(vi)</td><td>(4, 1)</td></tr>
</table>

(i)의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{27}{125}$$

(ii)의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{50}$$

(iii)의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{27}{250}$$

(iv)의 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{50}$$

(v)의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{27}{250}$$

(vi)의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{18}{250}$$

(ⅰ)~(ⅵ)에서

$p=\frac{27}{125}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{18}{250}$

$=\frac{156}{250}=\frac{78}{125}$

$\therefore 125p=125\times\frac{78}{125}=78$ 답 78

5

해결단계

❶ 단계	두 사건 A, B가 서로 독립이면 A, B^C 그리고 A^C, B도 서로 독립임을 이해한다.
❷ 단계	두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용하여 주어진 식을 정리하여 $\mathrm{P}(B)$의 값을 구한다.

A, B가 서로 독립이므로 A, B^C과 A^C, B도 서로 독립이다.

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{5}{6}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$1+4\mathrm{P}(B)=2$, $4\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 답 ②

• 다른풀이 •

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$임을 이용한다.

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6}\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{6}=\frac{4}{6}\mathrm{P}(B)$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

6

해결단계

❶ 단계	여사건을 이용하여 확률 $\mathrm{P}(A)$를 구한다.
❷ 단계	두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용하여 확률 $\mathrm{P}(B)$를 구한다.
❸ 단계	두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B도 서로 독립임을 이용하여 답을 구한다.

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 ④

7

해결단계

❶ 단계	앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 큰 경우를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 각 경우에 대한 확률을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 확률을 이용하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 크기 위해서는 앞면이 6, 5, 4회 나오면 된다.

(ⅰ) 앞면이 6회, 뒷면이 0회인 경우

$_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

(ⅱ) 앞면이 5회, 뒷면이 1회인 경우

$_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1={}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6$

(ⅲ) 앞면이 4회, 뒷면이 2회인 경우

$_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}$

$=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$

이므로 $p=32$, $q=11$

$\therefore p+q=32+11=43$ 답 43

8

해결단계

❶ 단계	예약한 손님이 예약을 취소할 확률을 구한다.
❷ 단계	식당의 좌석이 부족하게 될 확률을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 확률을 이용하여 p의 값을 구한다.

예약한 손님이 예약을 취소할 확률은 $\frac{1}{10}$이고, 식당의 좌석이 부족하려면 예약한 손님 52명 중 예약을 취소한 손님이 1명 이하이어야 한다.

따라서 좌석이 부족하게 될 확률은

$_{52}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^{51}+{}_{52}\mathrm{C}_0\left(\frac{9}{10}\right)^{52}$

$=\left(\frac{52}{9}+1\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{52}$

$=\frac{61}{9}\times0.9^{52}$

이므로 $p=\frac{61}{9}$ 답 ①

III 통계

04 확률분포

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 45~46

01 ②	02 ③	03 ①	04 6	05 ⑤
06 $-\frac{4}{3}$	07 ①	08 16	09 59	10 ②
11 ③	12 ④	13 5	14 ④	15 ⑤

01 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{{}_4C_1}{k}+\frac{{}_4C_2}{k}+\frac{{}_4C_3}{k}+\frac{{}_4C_4}{k}=\frac{4+6+4+1}{k}=\frac{15}{k}=1$$

$\therefore k=15$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	15	30	45	60	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore \mathrm{P}(X\geq 40)=\mathrm{P}(X=45)+\mathrm{P}(X=60)$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

답 ②

blacklabel 특강 참고

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4$

$\therefore {}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4=2^4-1=15$

02 $$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$
$$=\frac{a(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$$
$$=\frac{a(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}{2}$$

이때, 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=40)=1$$

$$\frac{a}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{79})\}=1$$

$$\frac{a}{2}(\sqrt{81}-1)=1,\ 4a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

즉, 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{8}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$$

$$\therefore b=\mathrm{P}(X=13)+\mathrm{P}(X=14)+\cdots+\mathrm{P}(X=40)$$
$$=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=12)\}$$
$$=1-\frac{1}{8}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$$
$$=1-\frac{1}{8}(\sqrt{25}-1)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

답 ③

03 $X^2-2X<0$에서 $X(X-2)<0$이므로

$0<X<2$

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1, 2, 3이므로

$$\mathrm{P}(X^2-2X<0)=\mathrm{P}(0<X<2)$$
$$=\mathrm{P}(X=1)$$

이때, 카드에 적힌 두 수의 차가 1인 경우는 1이 적힌 카드와 0이 적힌 카드를 동시에 뽑는 경우, 2가 적힌 카드와 1이 적힌 카드를 동시에 뽑는 경우, 3이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 동시에 뽑는 경우의 3가지이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

답 ①

blacklabel 특강 참고

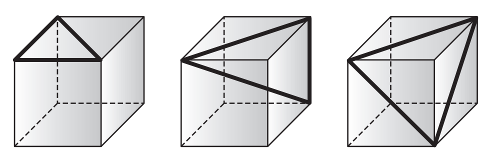
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

04 8개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이때, 만들 수 있는 서로 다른 삼각형의 종류는 다음 그림과 같다.



(i) 세 변의 길이가 1, 1, $\sqrt{2}$인 삼각형
정사각형인 한 면에 4개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는 $4\times6=24$

(ii) 세 변의 길이가 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$인 삼각형
정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 2개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는
$2\times2\times6=24$

(iii) 세 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$인 삼각형
정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 2개의 삼각형이 존재한다. 이때, 세 변의 길이가 모두 면의 대각선으로 3번 중복되므로 그 개수는
$2\times2\times6\div3=8$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\therefore 7\mathrm{P}\left(X<\frac{5}{2}\right)=7\{\mathrm{P}(X=\sqrt{2})+\mathrm{P}(X=\sqrt{6})\}$

$=7\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\right)$

$=7\times\frac{6}{7}=6$ 답 6

05

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{7}{8}$이므로

$\mathrm{P}(X=-1)=1-\mathrm{P}(0\le X\le 2)$

$=\frac{1}{8}=\frac{3-a}{8}$

$\therefore a=2$

$\therefore \mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{8}$

$=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ 답 ⑤

06

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)=1$

$\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}a=1,\ \frac{6}{5}a=1$

$\therefore a=\frac{5}{6}$

즉, $\mathrm{P}(X=x)=\frac{x^2}{6}\ (x=-2,\ -1,\ 1)$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{4}{6}+(-1)\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}$

$=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

07

확률의 총합은 1이므로

$b+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1 \qquad \therefore b=\frac{3}{5}$

이때, $\mathrm{E}(X)=5$이므로

$2\times\frac{3}{5}+4\times\frac{1}{5}+a\times\frac{1}{5}=5$

$\frac{1}{5}a=3 \qquad \therefore a=15$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{V}(X)=\left(2^2\times\frac{3}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+15^2\times\frac{1}{5}\right)-5^2$

$=\frac{253}{5}-25=\frac{128}{5}$ 답 ①

08

$\mathrm{E}(X)=2$이므로 $\mathrm{E}((X-2)^2)=\mathrm{V}(X)$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}((X-2)^2)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=20-2^2=16$ 답 16

• 다른풀이 •

$\mathrm{E}((X-2)^2)=\mathrm{E}(X^2-4X+4)$

$=\mathrm{E}(X^2)-4\mathrm{E}(X)+4$

$=20-8+4=16$

09

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{100}{126}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{25}{126}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5\times{}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{126}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{100}{126}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{100}{126}+4\times\frac{25}{126}+5\times\frac{1}{126}=\frac{405}{126}=\frac{45}{14}$

$\therefore \mathrm{E}(14X+14)=14\mathrm{E}(X)+14$

$=14\times\frac{45}{14}+14$

$=45+14=59$ 답 59

10

확률의 총합은 1이므로

$a+b+2a=1 \qquad \therefore b=1-3a$

이때, $0<b<1$이므로

$0<1-3a<1,\ 0<3a<1$

$\therefore 0<a<\frac{1}{3}$

한편,

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times 2a=a,$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times b+1^2\times 2a=3a$

이므로 $\mathrm{E}(X^2)=12\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$3a=12a^2,\ 3a(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}\left(\because 0<a<\frac{1}{3}\right)$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3a-a^2$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

이므로

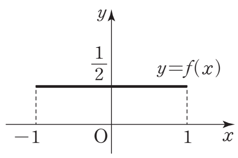
$\mathrm{V}(-4X-3)=16\mathrm{V}(X)=16\times\frac{11}{16}=11$ 답 ②

11

$-1\le x\le 1$에서 정의된 함수가 확률밀도함수가 되기 위해서는 함숫값이 0 이상이어야 하고, 함수의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 한다.

ㄱ. $f(x)=\frac{1}{2}>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $2\times\frac{1}{2}=1$이다.



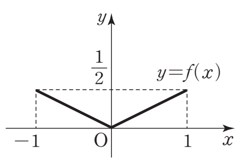
즉, 함수 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

ㄴ. $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

ㄷ. $f(x)=\frac{1}{2}|x|=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & (-1\le x<0)\\ \frac{1}{2}x & (0\le x\le 1)\end{cases}$

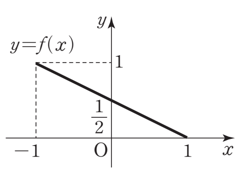
이므로 $f(x)\ge 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.



ㄹ. $-1\le x\le 1$에서 $0\le -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\le 1$, 즉 $f(x)\ge 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$이다.

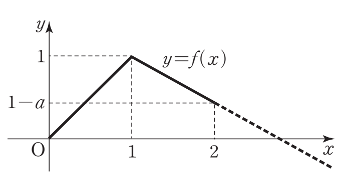


즉, 함수 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답** ③

12

확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times(1+1-a)\times1=1$

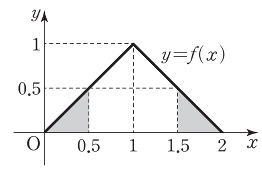
$\frac{3}{2}-\frac{a}{2}=1$, $-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases}x & (0\le x<1)\\ -x+2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

$\mathrm{P}(|X-1|\ge0.5)$
$=\mathrm{P}(X-1\le-0.5)+\mathrm{P}(X-1\ge0.5)$
$=\mathrm{P}(X\le0.5)+\mathrm{P}(X\ge1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le X\le0.5)+\mathrm{P}(1.5\le X\le2)$

이므로 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=0.5$로 둘러싸인 도형의 넓이, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1.5$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 합한 것과 같다.

따라서 구하는 확률은 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(|X-1|\ge0.5)$
$=2\times\left(\frac{1}{2}\times0.5\times0.5\right)$
$=0.25$

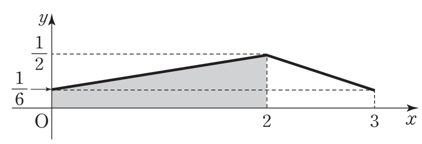
답 ④

13

확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$3\times k+\frac{1}{2}\times3\times(3k-k)=1$

$3k+3k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{6}$



$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{2}{3}$

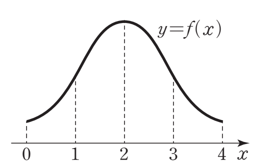
따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=3+2=5$

답 5

14

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\mathrm{P}(2\le X\le4)$

$\mathrm{P}(0\le X\le4)=\mathrm{P}(0\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le4)=1$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le2)=\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(0\le X\le3)=\mathrm{P}(0\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le3)$
$=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(2\le X\le3)$ ($\because$ ㉠)
$=\frac{11}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(2\le X\le3)=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

따라서

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=\mathrm{P}(1\le X\le2)+\mathrm{P}(2\le X\le3)$
$=2\mathrm{P}(2\le X\le3)$
$=2\times\frac{5}{12}=\frac{5}{6}$

이므로 $a=6$, $b=5$

$\therefore a+b=6+5=11$ 답 ④

• 다른풀이 1 •

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{11}{12}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 4)$에서

$1=\frac{11}{12}+\mathrm{P}(3\le X\le 4)$

$\therefore \mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{1}{12}$

이때, 조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

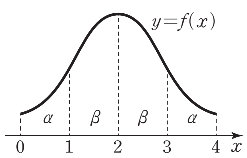
$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(3\le X\le 4)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 3)$
$=\mathrm{P}(0\le X\le 4)-\{\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\mathrm{P}(3\le X\le 4)\}$
$=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

따라서 $a=6$, $b=5$이므로 $a+b=11$

• 다른풀이 2 •

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 네 직선 $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



$0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=4$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$2\alpha+2\beta=1$ ⋯⋯㉡

조건 ㈏에 의하여 $\alpha+2\beta=\frac{11}{12}$ ⋯⋯㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{1}{12}$, $\beta=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 3)=2\beta=2\times\frac{5}{12}=\frac{5}{6}$

따라서 $a=6$, $b=5$이므로 $a+b=11$

15 구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)$, $g(x)$가 확률밀도함수이므로

$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$ ⋯⋯㉠이고,

$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=1$

이때, 주어진 함수가 구간 $[0,\ 1]$에서 확률밀도함수이려면 그 구간에서의 함숫값이 0 이상이고, 함수를 0에서 1까지 적분한 값이 1이어야 한다.

① $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx$
$=1-1=0$

즉, 함수 $f(x)-g(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

② $\int_0^1 \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx$
$=1+1=2$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

③ (반례) $f(x)=g(x)=1$이면

$\int_0^1 \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}\times 0\,dx=0$

즉, 함수 $\frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$는 확률밀도함수가 아니다.

④ $\int_0^1 \frac{f(x)-2g(x)}{3}\,dx$
$=\int_0^1 \frac{1}{3}f(x)\,dx-\int_0^1 \frac{2}{3}g(x)\,dx$
$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

즉, 함수 $\frac{f(x)-2g(x)}{3}$는 확률밀도함수가 아니다.

⑤ ㉠에서 $\frac{3f(x)+g(x)}{4}\ge 0$이고,

$\int_0^1 \frac{3f(x)+g(x)}{4}\,dx$
$=\frac{3}{4}\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_0^1 g(x)\,dx$
$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

즉, 함수 $\frac{3f(x)+g(x)}{4}$는 확률밀도함수이다.

따라서 확률밀도함수는 ⑤ $\frac{3f(x)+g(x)}{4}$이다. 답 ⑤

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 47~51

01 $\frac{7}{97}$	02 $\frac{1}{2}$	03 ③	04 ③	05 ④
06 ⑤	07 ②	08 21	09 2	10 $\sqrt{55}$
11 23	12 $\frac{73}{300}$	13 553원	14 ⑤	15 $\frac{77}{20}$
16 $\frac{343}{216}$	17 ③	18 4	19 ③	20 ②
21 ⑤	22 41	23 ①	24 ②	25 ③
26 $\frac{9}{2}$	27 7	28 45	29 ⑤	30 $\frac{3}{4}$
31 $-\frac{1}{4}$	32 $\frac{2}{3}$	33 65	34 ④	35 ①
36 ③				

01 숫자와 알파벳 10개 중에서 서로 다른 4개를 뽑아 숫자와 알파벳을 각각 적어도 하나씩 포함하도록 암호를 만드는 것의 여사건은 만들어진 암호가 모두 숫자만 포함하거나 모두 알파벳만을 포함하는 경우이므로 전체 경우의 수는

${}_{10}C_4-(\overset{{}_6C_2}{{}_6C_4}+{}_4C_4)=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}-\left(\frac{6\times5}{2\times1}+1\right)$
$=210-16=194$

만들어진 암호에서 알파벳의 개수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3}{194}=\frac{4\times20}{194}=\frac{80}{194}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2}{194}=\frac{6\times15}{194}=\frac{90}{194}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_1}{194}=\frac{4\times6}{194}=\frac{24}{194}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$$=\frac{80}{194}-\frac{90}{194}+\frac{24}{194}=\frac{14}{194}=\frac{7}{97}$$

답 $\frac{7}{97}$

02

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$+\mathrm{P}(X=4)=1$

$c^2+c+c^2+c+c^2=1,\ 3c^2+2c-1=0$

$(3c-1)(c+1)=0\qquad \therefore\ c=\frac{1}{3}\ (\because\ c>0)$

즉, 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{9} & (x=0,\ 2,\ 4)\\ \frac{1}{3} & (x=1,\ 3)\end{cases}$$

이때,

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(X\ge1)=1-\mathrm{P}(X=0)$

$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\ge3)$

$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

03

$\mathrm{P}(X=1)=a$라 하면

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}a$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}a=\frac{4}{25}a$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{25}a=\frac{8}{125}a$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{2}{5}a$	$\frac{4}{25}a$	$\frac{8}{125}a$	1

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{2}{5}a+\frac{4}{25}a+\frac{8}{125}a=1$

$\frac{203}{125}a=1\qquad \therefore\ a=\frac{125}{203}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{4}{25}a+\frac{8}{125}a=\frac{28}{125}a$

$=\frac{28}{125}\times\frac{125}{203}=\frac{4}{29}$

답 ③

04

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=90)=1$

$k\sin^2 0°+k\sin^2 1°+k\sin^2 2°+\cdots+k\sin^2 90°=1$

$k(\sin^2 0°+\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 90°)=1$

$k\{(\sin^2 0°+\sin^2 90°)+(\sin^2 1°+\sin^2 89°)$
$+\cdots+(\sin^2 44°+\sin^2 46°)+\sin^2 45°\}=1$

$k\{(\sin^2 0°+\cos^2 0°)+(\sin^2 1°+\cos^2 1°)$
$+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°\}=1$

$k\left\{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{45개}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=1,\ \frac{91}{2}k=1$

$\therefore\ k=\frac{2}{91}$

$\therefore\ \mathrm{P}(25\le X\le65)$

$=\mathrm{P}(X=25)+\mathrm{P}(X=26)+\mathrm{P}(X=27)+\cdots$
$+\mathrm{P}(X=65)$

$=\frac{2}{91}\sin^2 25°+\frac{2}{91}\sin^2 26°+\frac{2}{91}\sin^2 27°+\cdots$
$+\frac{2}{91}\sin^2 65°$

$=\frac{2}{91}(\sin^2 25°+\sin^2 26°+\sin^2 27°+\cdots+\sin^2 65°)$

$=\frac{2}{91}\{(\sin^2 25°+\sin^2 65°)+(\sin^2 26°+\sin^2 64°)$
$+\cdots+(\sin^2 44°+\sin^2 46°)+\sin^2 45°\}$

$=\frac{2}{91}\{(\sin^2 25°+\cos^2 25°)+(\sin^2 26°+\cos^2 26°)$
$+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°\}$

$=\frac{2}{91}\left\{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{20개}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$

$=\frac{2}{91}\times\frac{41}{2}=\frac{41}{91}$

답 ③

05

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1, 2, 3, $\cdots$, 6이고 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X\le k)=ak^2$에서

$\mathrm{P}(X\le6)=36a=1\qquad \therefore\ a=\frac{1}{36}$

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X\le k)-\mathrm{P}(X\le k-1)$

$=\frac{1}{36}k^2-\frac{1}{36}(k-1)^2$

$=\frac{1}{36}(2k-1)$ (단, $k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$)

이고 $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X\le1)=\frac{1}{36}$

즉, 확률 $\mathrm{P}(X=x)$는 $x=6$일 때 최대이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{36}(2\times6-1)=\frac{11}{36}$

또한, $x=1$일 때 최소이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{36}$

확률 $\mathrm{P}(X=x)$의 최댓값과 최솟값의 차는

$\mathrm{P}(X=6)-\mathrm{P}(X=1)=\frac{11}{36}-\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

따라서 $p=18$, $q=5$이므로

$p+q=18+5=23$ 답 ④

06 해결단계

❶ 단계	동전을 n번 던져 앞면이 r번 나왔을 때, 확률변수 X와 이때의 확률을 각각 구하고, r의 값에 따른 확률변수 X의 확률분포를 표로 작성한다.
❷ 단계	ㄱ, ㄴ은 ❶ 단계에서 작성한 확률분포를 나타낸 표를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄷ은 $f(n,\ 0)$, $f(n+2,\ 0)$의 비와 1의 대소 관계를 구한 후, 참, 거짓을 판별한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 A가, 뒷면이 나오면 B가 한 계단을 올라가므로 동전을 n번 던져 앞면이 r번, 뒷면이 $(n-r)$번 나왔다고 하면 A는 r칸, B는 $(n-r)$칸 계단을 올라간다.

A가 올라간 계단의 수에서 B가 올라간 계단의 수를 뺀 값이 확률변수 X이므로

$X=r-(n-r)=2r-n\ (0\le r\le n)$

이고 이때의 확률은

$$\mathrm{P}(X=2r-n)={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$$

$$={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (0\le r\le n) \quad \cdots\cdots ㉠$$

r의 값에 따른 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n	합계
X	$-n$	$2-n$	$4-n$	$\cdots$	$n-2$	n	0
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_0}{2^n}$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2^n}$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^n}$	$\cdots$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_{n-1}}{2^n}$	$\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}$	1

[표 1]

ㄱ. $n=3$일 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-1	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3}$	$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{2^3}$	$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3}$	$\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{2^3}$	1

$\therefore f(3,\ 1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{2^3}=\frac{3}{8}$ (참)

ㄴ. [표 1]에서 X의 확률분포는 $X=0$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=-k)$

즉, $f(n,\ k)=f(n,\ -k)$ (참)

ㄷ. n이 짝수이므로 $n=2m$(m은 자연수)이라 하자.

동전을 n번 던졌을 때, $X=0$이려면 ㉠에서

$2r-n=0$이므로 $r=\frac{n}{2}$, 즉 $r=m$

$\therefore f(n,\ 0)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{2m}\mathrm{C}_m}{2^{2m}}$

동전을 $(n+2)$번 던졌을 때, $X=0$이려면 ㉠에서

$2r-(n+2)=0$이므로 $r=\frac{n+2}{2}$, 즉 $r=m+1$

$\therefore f(n+2,\ 0)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_{2m+2}\mathrm{C}_{m+1}}{2^{2m+2}}$

$$\frac{f(n,\ 0)}{f(n+2,\ 0)}=\frac{{}_{2m}\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{{}_{2m+2}\mathrm{C}_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}}$$

$$=\frac{\frac{(2m)!}{m!m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}{\frac{(2m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{(2m+2)(2m+1)}{(m+1)^2}\times\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2(m+1)}{2m+1}=\frac{2m+2}{2m+1}>1$$

$\therefore f(n,\ 0)>f(n+2,\ 0)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른풀이 •

$\mathrm{P}(X=2r-n)={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (0\le r\le n)$

이고, $f(n,\ k)=\mathrm{P}(X=k)$이므로

$2r-n=k$, $2r=n+k$

$\therefore r=\frac{n+k}{2}$ (단, $n+k$는 짝수)

$f(n,\ k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (-n\le k\le n)$

ㄱ. $f(3,\ 1)={}_3\mathrm{C}_{\frac{3+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$ (참)

ㄴ. $f(n,\ -k)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

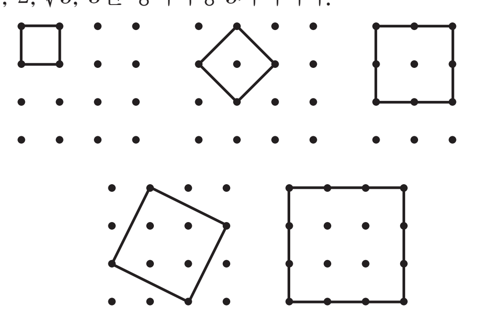
$={}_n\mathrm{C}_{n-\frac{n-k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=f(n,\ k)$ (참)

07

16개의 점 중 4개를 연결하여 만들 수 있는 넓이가 다른 정사각형은 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$, 3인 정사각형 5가지이다.



확률변수 X는 정사각형의 넓이이므로 가질 수 있는 값은 1, 2, 4, 5, 9이고 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	5	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{4}{20}+4\times\frac{4}{20}+5\times\frac{2}{20}+9\times\frac{1}{20}$

$=\frac{9+8+16+10+9}{20}$

$=\frac{52}{20}=\frac{13}{5}$

답 ②

08 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{8}+b+\frac{1}{4}=1$, $a+b+\frac{3}{8}=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{8}$ ……㉠

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{8}+1\times b+2\times\frac{1}{4}$

$=-a+b+\frac{1}{2}=-a+\left(\frac{5}{8}-a\right)+\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=-2a+\frac{9}{8}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times b+2^2\times\frac{1}{4}$

$=a+b+1=\frac{5}{8}+1$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{13}{8}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{13}{8}-\left(-2a+\frac{9}{8}\right)^2$

$=-4\left(a-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{13}{8}$ $\left(\text{단, } 0\le a\le\frac{5}{8}\right)$

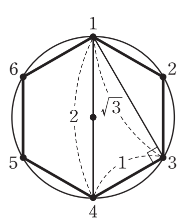
따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\frac{9}{16}$일 때, 최댓값 $\frac{13}{8}$을 가지므로

$p=8$, $q=13$

$\therefore p+q=8+13=21$

답 21

09 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정육각형의 한 변의 길이는 1이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, $\sqrt{3}$, 2이다.



이때, 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하면 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.

(i) 선분 AB의 길이가 0일 때,
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
의 6가지

(ii) 선분 AB의 길이가 1일 때,
(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 1), (1, 6)
의 12가지

(iii) 선분 AB의 길이가 $\sqrt{3}$일 때,
(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4), (5, 1), (1, 5), (6, 2), (2, 6)
의 12가지

(iv) 선분 AB의 길이가 2일 때,
(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)
의 6가지

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	1

따라서 구하는 X^2의 평균은

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{6}{36}+1^2\times\frac{12}{36}+(\sqrt{3})^2\times\frac{12}{36}+2^2\times\frac{6}{36}$

$=\frac{12+36+24}{36}=\frac{72}{36}$

$=2$

답 2

10 $\mathrm{P}(B)=a$라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}a$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\frac{1}{5}+a-\frac{1}{5}a$, $\frac{3}{5}=\frac{4}{5}a$

$\therefore a=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}a=\frac{3}{20}$

두 사건 A, B 중에서 하나만 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{5}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

또한, 두 사건 A, B가 모두 일어나지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	1

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{13}{20}+1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{20}$

$=\frac{-13+4+9}{20}=0$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{13}{20}+1^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{20}$

$=\frac{13+4+27}{20}=\frac{44}{20}=\frac{11}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{11}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{5}}=\frac{\sqrt{55}}{5}$

$\therefore 5\sigma(X)=\sqrt{55}$

답 $\sqrt{55}$

11 제품 n개 중에서 불량품은 2개이므로 정상 제품은 $(n-2)$개이다. 불량품 1개를 회수할 때까지 포장을 뜯은 제품의 개수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$이다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{n}=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{(n-2)\times2}{n(n-1)}=\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{(n-2)(n-3)\times2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}(X=n-1)=\frac{2}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\\&=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left\{n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\\&=\frac{2}{n(n-1)}\times\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\\&=\frac{n+1}{3}\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)\ge8$에서 $\frac{n+1}{3}\ge8$

$n+1\ge24\qquad\therefore\ n\ge23$

따라서 자연수 n의 최솟값은 23이다. **답** 23

12 한 주머니 안에 흰 구슬과 검은 구슬을 모두 합하여 10개의 구슬이 들어 있으므로 검은 구슬의 개수를 n이라 하면 흰 구슬의 개수는 $(10-n)$이다.

이때, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{60}$, 즉 동전 2개를 동시에 던져 모두 앞면이 나오고, 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 구슬일 확률이 $\frac{1}{60}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=2)&={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{n(n-1)}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}\\&=\frac{n(n-1)}{360}=\frac{1}{60}\end{aligned}$$

$n(n-1)=6$, $n^2-n-6=0$

$(n+2)(n-3)=0\qquad\therefore\ n=3\ (\because\ n>0)$

즉, 주머니 안에 들어 있는 검은 구슬은 3개이고 흰 구슬은 7개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=0$일 때,

㉠ 동전 2개가 모두 뒷면이 나오거나

㉡ 동전은 1개만 앞면이 나오고 꺼낸 1개의 구슬이 흰 구슬이거나

㉢ 동전은 모두 앞면이 나오고 꺼낸 2개의 구슬이 모두 흰 구슬인 경우

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=0)\\&={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}\\&\qquad+{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{21}{45}\\&=\frac{1}{4}+\frac{7}{20}+\frac{7}{60}=\frac{43}{60}\end{aligned}$$

(ii) $X=1$일 때,

㉠ 동전은 1개만 앞면이 나오고 꺼낸 1개의 구슬이 검은 구슬이거나

㉡ 동전은 모두 앞면이 나오고 꺼낸 2개의 구슬 중 1개만 검은 구슬인 경우

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X=1)\\&={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}+{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{{}_7\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\\&=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{21}{45}\\&=\frac{3}{20}+\frac{7}{60}=\frac{16}{60}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{43}{60}$	$\frac{16}{60}$	$\frac{1}{60}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{43}{60}+1\times\frac{16}{60}+2\times\frac{1}{60}=\frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=0^2\times\frac{43}{60}+1^2\times\frac{16}{60}+2^2\times\frac{1}{60}\\&=\frac{16}{60}+\frac{4}{60}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{10}\right)^2\\&=\frac{1}{3}-\frac{9}{100}=\frac{73}{300}\end{aligned}$$

답 $\frac{73}{300}$

blacklabel 특강 **참고**

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

이때, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{60}$이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{43}{60}$만 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)\}\\&=1-\left(\frac{43}{60}+\frac{1}{60}\right)=\frac{16}{60}\end{aligned}$$

13 주머니에 1, 2, 3, ⋯, 20의 수가 하나씩 적힌 공이 각각 1개, 3개, 5개, ⋯, 39개씩 들어 있으므로 주머니에 들어 있는 공의 전체 개수는

$$\sum_{k=1}^{20}(2k-1)=2\times\frac{20\times21}{2}-20$$
$$=420-20=400$$

주머니에서 꺼낸 공에 적힌 숫자를 확률변수 Y_1이라 하고 Y_1의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y_1	1	2	3	⋯	20	합계
$\mathrm{P}(Y_1=y)$	$\frac{1}{400}$	$\frac{3}{400}$	$\frac{5}{400}$	⋯	$\frac{39}{400}$	1

$$\mathrm{E}(Y_1)=\sum_{k=1}^{20}k\times\frac{2k-1}{400}$$
$$=\frac{1}{400}\sum_{k=1}^{20}(2k^2-k)$$
$$=\frac{1}{400}\left(2\times\frac{20\times21\times41}{6}-\frac{20\times21}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{400}(5740-210)$$
$$=\frac{553}{40}$$

한편, 정사면체 주사위를 1회 던져 받을 수 있는 상금을 Y_2원이라 하고 Y_2의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y_2	0	160	합계
$\mathrm{P}(Y_2=y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(Y_2)=0\times\frac{3}{4}+160\times\frac{1}{4}=40$$

따라서 주머니에서 공을 하나 꺼내어 적힌 숫자만큼 이 게임을 반복할 때, 받을 수 있는 상금 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y_1)\mathrm{E}(Y_2)$$
$$=\frac{553}{40}\times40=553(\text{원})$$

답 553원

14 한 상자당 상한 과일은 2개씩 들어 있으므로 한 상자에서 3개의 과일을 뽑을 때, 상한 과일이 없을 확률은

$$\frac{{}_{38}\mathrm{C}_3}{{}_{40}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{38\times37\times36}{3\times2\times1}}{\frac{40\times39\times38}{3\times2\times1}}=\frac{111}{130}$$

상한 과일이 1개 이상 있을 확률은
상한 과일이 1개 또는 2개

$$1-\frac{111}{130}=\frac{19}{130}$$

이때, 상한 과일이 없으면 한 상자에 5000원, 상한 과일이 1개 이상이면 한 상자에 6000원으로 판매하므로 한 상자의 판매액의 기댓값은

$$5000\times\frac{111}{130}+6000\times\frac{19}{130}=\frac{66900}{13}(\text{원})$$

따라서 130상자를 판매할 때, 전체 판매액의 기댓값은

$$130\times\frac{66900}{13}=669000(\text{원})$$

답 ⑤

15 화살을 던져 화살이 꽂힌 지점 P와 원판의 중심 O 사이의 거리 k가 $x\le k<x+1$일 확률은

$$\frac{(x+1)^2\pi-x^2\pi}{10^2\pi}=\frac{2x+1}{100}$$

이때, $(10-x)$점을 얻으므로 화살을 한 번 던져 얻는 점수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	9	8	⋯	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{5}{100}$	⋯	$\frac{19}{100}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{100}+9\times\frac{3}{100}+8\times\frac{5}{100}+7\times\frac{7}{100}$$
$$+6\times\frac{9}{100}+5\times\frac{11}{100}+4\times\frac{13}{100}+3\times\frac{15}{100}$$
$$+2\times\frac{17}{100}+1\times\frac{19}{100}$$
$$=\frac{1}{100}(10+27+40+49+54+55+52+45$$
$$+34+19)$$
$$=\frac{385}{100}=\frac{77}{20}$$

답 $\frac{77}{20}$

16 주사위를 던질 수 있는 횟수를 확률변수 X라 하면 주사위는 한 번 이상 네 번 이하로 던질 수 있으므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.
눈의 수가 1이 3번 나오고 네 번째에는 아무거나 나오는 경우

(i) $X=1$일 때,
주사위를 1회 던졌을 때 나오는 눈의 수가 4, 5, 6인 경우이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=2$일 때, ← 첫 번째 나온 눈의 수가 3 이하이어야 한다.
주사위를 2회 던졌을 때 나오는 눈의 수의 합이 4 이상인 경우이므로 나오는 눈의 수를 순서대로 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)는
(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$$

(iii) $X=3$일 때, ← 두 번째까지 나온 눈의 수의 합이 3 이하이어야 한다.
주사위를 3회 던졌을 때 나오는 눈의 수의 합이 4 이상인 경우이므로 나오는 눈의 수를 순서대로 a, b, c라 하면 순서쌍 (a, b, c)는

(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5),
(1, 1, 6), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3),
(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6),
(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 1, 4),
(2, 1, 5), (2, 1, 6)

$\therefore\ \mathrm{P}(X=3)=\dfrac{17}{6^3}=\dfrac{17}{216}$

(iv) $X=4$일 때, ← 세 번째까지 나온 눈의 수의 합이 3 이하이어야 한다.
주사위를 4회 던졌을 때 나오는 눈의 수의 합이 4 이상인 경우이므로 나오는 눈의 수를 순서대로 a, b, c, d라 하면 순서쌍 (a, b, c, d)는
(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3),
(1, 1, 1, 4), (1, 1, 1, 5), (1, 1, 1, 6)

$\therefore\ \mathrm{P}(X=4)=\dfrac{6}{6^4}=\dfrac{1}{216}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{17}{216}$	$\frac{1}{216}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{5}{12}+3\times\dfrac{17}{216}+4\times\dfrac{1}{216}$

$=\dfrac{108+180+51+4}{216}$

$=\dfrac{343}{216}$ 답 $\dfrac{343}{216}$

17 해결단계

❶ 단계	A팀과 B팀이 세 번째 경기, 네 번째 경기, 다섯 번째 경기에서 우승팀이 결정될 확률을 각각 구한다.
❷ 단계	❶단계의 각 경우에 대하여 결승전 결과에 따른 A팀이 받을 상금을 구한다.
❸ 단계	A팀이 받을 상금의 기댓값을 구한다.

A팀이 1승을 한 상황에서 5전 3선승제로 A팀과 B팀이 우승할 확률과 그때의 A팀이 받을 상금은 각각 다음과 같다.

(i) 세 번째 경기에서 A팀의 우승이 결정될 경우
두 번째 경기와 세 번째 경기 모두 A팀이 이기면 되므로
$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$
이때, 상금은 A팀이 모두 갖게 되므로 A팀이 받을 상금은 5400만 원이다.

(ii) 네 번째 경기에서 A팀의 우승이 결정될 경우
두 번째 경기와 세 번째 경기에서 A팀과 B팀이 한 번씩 이기고, 네 번째 경기에서 A팀이 이기면 되므로
${}_2\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$
이때, 조건 (나)에 의하여 상금은 A팀과 B팀이 3 : 1로 나누어 가지므로 A팀이 받을 상금은
$5400\times\dfrac{3}{4}=4050$(만 원)

(iii) 다섯 번째 경기에서 A팀의 우승이 결정될 경우
두 번째 경기, 세 번째 경기, 네 번째 경기에서 A팀이 한 번, B팀이 두 번 이기고, 다섯 번째 경기에서 A팀이 이기면 되므로
${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$
이때, 조건 (나)에 의하여 상금은 A팀과 B팀이 3 : 2로 나누어 가지므로 A팀이 받을 상금은
$5400\times\dfrac{3}{5}=3240$(만 원)

(iv) 네 번째 경기에서 B팀의 우승이 결정될 경우
두 번째 경기, 세 번째 경기, 네 번째 경기에서 모두 B팀이 이기면 되므로
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$
이때, 조건 (나)에 의하여 상금은 A팀과 B팀이 1 : 3으로 나누어 가지므로 A팀이 받을 상금은
$5400\times\dfrac{1}{4}=1350$(만 원)

(v) 다섯 번째 경기에서 B팀의 우승이 결정될 경우
두 번째 경기, 세 번째 경기, 네 번째 경기에서 A팀이 한 번, B팀이 두 번 이기고, 다섯 번째 경기에서 B팀이 이기면 되므로
${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$
이때, 조건 (나)에 의하여 상금은 A팀과 B팀이 2 : 3으로 나누어 가지므로 A팀이 받을 상금은
$5400\times\dfrac{2}{5}=2160$(만 원)

결승전 결과 A팀이 받을 상금을 확률변수 X라 하면 (i)~(v)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1350	2160	3240	4050	5400	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	1

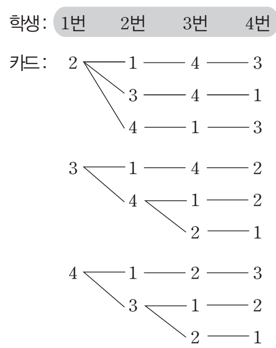
따라서 A팀이 받을 상금에 대한 기댓값은
$1350\times\dfrac{1}{27}+2160\times\dfrac{2}{27}+3240\times\dfrac{4}{27}$
$+4050\times\dfrac{8}{27}+5400\times\dfrac{4}{9}$
$=50+160+480+1200+2400$
$=4290$(만 원) 답 ③

18

4명의 학생이 4장의 카드를 나누어 가지는 전체 경우의 수는 $4!$
이때, 자신의 번호가 적힌 카드를 가진 학생 수가 확률변수 X이므로 $X=3$일 때, 즉 4명의 학생 중에서 3명은 자신의 번호가 적힌 카드를 갖고, 나머지 1명은 자신의 번

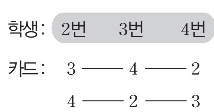
호가 적히지 않은 카드를 받는 경우는 존재하지 않는다.
즉, X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 4이고 확률은 각각 다음과 같다.

(i) $X=0$일 때,
4명의 학생 모두 자신의 번호가 적히지 않은 카드를 받는 경우의 수는 다음 수형도와 같이 9가지이다.



$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\dfrac{9}{4!}=\dfrac{9}{24}$

(ii) $X=1$일 때,
4명 중에서 자신의 번호가 적힌 카드를 받을 학생 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$
이 학생을 1번이라 하면 2번, 3번, 4번 학생이 자신의 번호가 적히지 않은 카드를 받는 경우의 수는 다음 수형도와 같이 2가지이다.



$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\dfrac{4\times2}{4!}=\dfrac{8}{24}$

(iii) $X=2$일 때,
4명 중에서 자신의 번호가 적힌 카드를 받을 학생 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
나머지 두 학생은 서로의 번호가 적힌 카드를 바꿔 가지면 되므로 1가지이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\dfrac{6}{4!}=\dfrac{6}{24}$

(iv) $X=4$일 때,
4명 학생 모두 자신의 번호가 적힌 카드를 가지면 되므로 경우의 수는 1가지이다.

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{9}{24}$	$\dfrac{8}{24}$	$\dfrac{6}{24}$	$\dfrac{1}{24}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{9}{24}+1\times\dfrac{8}{24}+2\times\dfrac{6}{24}+4\times\dfrac{1}{24}$
$=\dfrac{24}{24}=1$

$\therefore \mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=3\times1+1=4$ 　　답 4

19 액자의 가로의 길이를 X, 액자 넓이를 Y라 하면 직사각형 모양의 액자의 둘레의 길이가 100 cm이므로 세로의 길이는 $\dfrac{100-2X}{2}=50-X$

$\therefore Y=X(50-X)=50X-X^2$

또한, $\sigma(X)=2a$에서 $\mathrm{V}(X)=4a^2$, $\mathrm{E}(X)=4a$이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=4a^2+(4a)^2=20a^2$

따라서 액자 넓이의 평균은
$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(50X-X^2)$
$=50\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X^2)$
$=50\times4a-20a^2$
$=-20a^2+200a$
$=-20(a^2-10a+25)+500$
$=-20(a-5)^2+500$

이므로 액자 넓이의 평균의 최댓값은 $a=5$일 때, 500 cm^{2}이다. 　　답 ③

20 확률의 총합은 1이므로
$\displaystyle\sum_{x=1}^{n}\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=1}^{n}cx=\frac{cn(n+1)}{2}=1$

즉, $c=\dfrac{2}{n(n+1)}$이므로
$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{2}{n(n+1)}x$

한편, $Y=2X+1$이고 $\mathrm{V}(Y)=24$이므로
$\mathrm{V}(2X+1)=24$, $2^2\mathrm{V}(X)=24$
$\therefore \mathrm{V}(X)=6$ 　……㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$\displaystyle=\sum_{x=1}^{n}x^2\mathrm{P}(X=x)-\left\{\sum_{x=1}^{n}x\mathrm{P}(X=x)\right\}^2$
$\displaystyle=\sum_{x=1}^{n}\frac{2}{n(n+1)}x^3-\left\{\sum_{x=1}^{n}\frac{2}{n(n+1)}x^2\right\}^2$
$\displaystyle=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}x^3-\left\{\frac{2}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}x^2\right\}^2$
$\displaystyle=\frac{2}{n(n+1)}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
$\displaystyle\quad-\left\{\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^2$
$\displaystyle=\frac{n(n+1)}{2}-\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$
$\displaystyle=\frac{9(n^2+n)-2(4n^2+4n+1)}{18}$
$\displaystyle=\frac{n^2+n-2}{18}$

㉠에 의하여 $\dfrac{n^2+n-2}{18}=6$
$n^2+n-110=0$, $(n+11)(n-10)=0$
$\therefore n=10$ $(\because n>0)$ 　　답 ②

21 1, 3, 3, 6의 숫자가 하나씩 적힌 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 두 공에 적힌 숫자의 합이 확률변수 X이므로 X의 확률은 다음과 같다.

(i) 1, 3이 적힌 공이 뽑힌 경우

$X=1+3=4$이므로

$$P(X=4)=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{6}$$

(ii) 3, 3이 적힌 공이 뽑힌 경우

$X=3+3=6$이므로

$$P(X=6)=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

(iii) 1, 6이 적힌 공이 뽑힌 경우

$X=1+6=7$이므로

$$P(X=7)=\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$$

(iv) 3, 6이 적힌 공이 뽑힌 경우

$X=3+6=9$이므로

$$P(X=9)=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{6}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	6	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

$$\therefore E(X)=4\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}+9\times\frac{2}{6}=\frac{39}{6}=\frac{13}{2},$$

$$E(X^2)=4^2\times\frac{2}{6}+6^2\times\frac{1}{6}+7^2\times\frac{1}{6}+9^2\times\frac{2}{6}=\frac{279}{6}=\frac{93}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(4(X-a)^2)&=E(4X^2-8aX+4a^2)\\&=4E(X^2)-8aE(X)+4a^2\\&=4\times\frac{93}{2}-8a\times\frac{13}{2}+4a^2\\&=4a^2-52a+186\\&=4\left(a^2-13a+\frac{169}{4}\right)+17\\&=4\left(a-\frac{13}{2}\right)^2+17\end{aligned}$$

따라서 $4(X-a)^2$의 평균의 최솟값은 $a=\frac{13}{2}$일 때 17이다.

답 ⑤

blacklabel 특강 참고

$$\begin{aligned}E((X-a)^2)&=E(X^2-2aX+a^2)=E(X^2)-2aE(X)+a^2\\&=a^2-2aE(X)+\{E(X)\}^2+E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\{a-E(X)\}^2+V(X)\end{aligned}$$

에서 $E((x-a)^2)$은 $a=E(X)$일 때, 최솟값 $V(X)$를 갖는다.
따라서 해당 문항에서 $E(4(X-a)^2)=4E((X-a)^2)$은 $a=E(X)$일 때, 최솟값으로 $4V(X)$를 갖는다.

22 조건 ㈎에서 좌표평면 위에 순서쌍 $(x, P(X=x))$를 나타내면 한 직선 위에 있으므로

$P(X=x)=ax+b$ (a, b는 상수, $x=0, 1, 2, \cdots, 6$)

라 할 수 있다.

확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=6)=1$

$b+(a+b)+(2a+b)+\cdots+(6a+b)=1$

$21a+7b=1$ ⋯⋯㉠

조건 ㈏에서 $P(X=6)=\frac{4}{21}$이므로

$6a+b=\frac{4}{21}$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{63}$, $b=\frac{2}{21}$

즉, $P(X=x)=\frac{1}{63}x+\frac{2}{21}=\frac{x+6}{63}$이므로

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{6}{63}+1\times\frac{7}{63}+2\times\frac{8}{63}+3\times\frac{9}{63}\\&\quad+4\times\frac{10}{63}+5\times\frac{11}{63}+6\times\frac{12}{63}\\&=\frac{7+16+27+40+55+72}{63}\\&=\frac{217}{63}=\frac{31}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(9X+10)&=9E(X)+10\\&=9\times\frac{31}{9}+10=41\end{aligned}$$

답 41

23 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 흰 공 3개 또는 검은 공 3개가 나올 때까지 공을 꺼내는 횟수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이다.

(i) $X=3$일 때,

공을 3번 꺼내 모두 흰 공이 나오거나 모두 검은 공이 나와야 하므로 확률은

$$P(X=3)=\frac{3\times2\times1}{7\times6\times5}+\frac{4\times3\times2}{7\times6\times5}=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$$

(ii) $X=4$일 때,

공을 4번 꺼내 흰 공 3개가 나오려면 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 흰 공 2개, 검은 공 1개가 나오고 네 번째 시행에서 흰 공이 나와야 하므로

$${}_3C_2\times\frac{3\times2\times4}{7\times6\times5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{35}$$

공을 4번 꺼내 검은 공 3개가 나오려면 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 검은 공 2개, 흰 공 1개가 나오고 네 번째 시행에서 검은 공이 나와야 하므로

$${}_3C_2\times\frac{4\times3\times3}{7\times6\times5}\times\frac{2}{4}=\frac{9}{35}$$

$$\therefore P(X=4)=\frac{3}{35}+\frac{9}{35}=\frac{12}{35}$$

(iii) $X=5$일 때,

공을 5번 꺼내 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 시행에서 흰 공 2개, 검은 공 2개가 나오면 다섯 번째 시행을 했을 때, 반드시 흰 공 3개 또는 검은 공 3개가 되므로

$$\mathrm{P}(X=5)={}_4\mathrm{C}_2\times\frac{3\times2\times4\times3}{7\times6\times5\times4}=\frac{18}{35}$$

(i), (ii), (iii)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{18}{35}\\&=\frac{15+48+90}{35}=\frac{153}{35}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(35X-20)&=35\mathrm{E}(X)-20\\&=35\times\frac{153}{35}-20\\&=153-20=133\end{aligned}$$

답 ①

24

0, 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 노란색 카드와 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 빨간색 카드가 들어 있는 상자에서 2장의 카드를 꺼내 카드의 색이 같으면 카드에 적힌 숫자 중 큰 숫자가, 카드의 색이 다르면 카드에 적힌 숫자 중 작거나 같은 숫자가 X이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 그 확률은 다음과 같다.

(i) $X=0$일 때,

0이 가장 작은 숫자이므로 2장의 카드를 꺼냈을 때 두 카드의 색이 달라야 한다.

즉, 노란색 카드는 0이 적힌 것을 뽑고 빨간색 카드는 아무거나 한 장을 뽑으면 되므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

(ii) $X=1$일 때,

2장의 카드를 꺼내 같은 색이 나온 경우, 0과 1이 적힌 노란색 카드를 뽑아야 하고

다른 색이 나온 경우, 1이 적힌 카드 한 장과 1 이상의 숫자가 적힌 카드 한 장을 뽑아야 한다.

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1-1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

1이 적힌 노란색 카드와 빨간색 카드를 뽑은 경우

(iii) $X=2$일 때,

2장의 카드를 꺼내 같은 색이 나온 경우, 2가 적힌 카드 한 장과 2보다 작은 숫자가 적힌 카드 한 장을 뽑아야 하고

다른 색이 나온 경우, 2가 적힌 카드 한 장과 2 이상의 숫자가 적힌 카드 한 장을 뽑아야 한다.

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1-1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

2가 적힌 노란색 카드와 빨간색 카드를 뽑은 경우

(iv) $X=3$일 때,

2장의 카드를 꺼내 같은 색이 나온 경우, 3이 적힌 카드 한 장과 3보다 작은 숫자가 적힌 카드 한 장을 뽑아야 하고

다른 색이 나온 경우, 3이 적힌 카드를 각각 한 장씩 뽑아야 한다.

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{2}{7}\\&=\frac{2+4+6}{7}=\frac{12}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=0^2\times\frac{1}{7}+1^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{2}{7}\\&=\frac{2+8+18}{7}=\frac{28}{7}=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=4-\left(\frac{12}{7}\right)^2=4-\frac{144}{49}=\frac{52}{49}\end{aligned}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{52}{49}}=\frac{2\sqrt{13}}{7}$이므로

$$\sigma(7X+3)=7\sigma(X)=7\times\frac{2\sqrt{13}}{7}=2\sqrt{13}$$

답 ②

25

두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에서

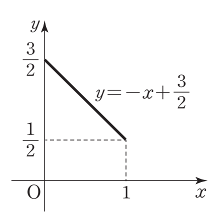
$f(x)=-2x+2$, $g(x)=1$ (단, $0\le x\le1$)

이때, $0\le x\le1$에서 정의된 함수가 확률밀도함수가 되기 위해서는 함숫값이 0 이상이어야 하고, 함수의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 한다.

ㄱ. $0\le x\le1$에서

$$\frac{f(x)+g(x)}{2}=\frac{(-2x+2)+1}{2}=-x+\frac{3}{2}>0$$

또한, 함수 $y=-x+\frac{3}{2}$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\times1=1$$

즉, $\frac{f(x)+g(x)}{2}$는 확률밀도함수이다.

ㄴ. $0\le x\le1$에서

$2f(x)-g(x)=2(-2x+2)-1=-4x+3$

그런데 $x=1$일 때,

$1\in[0,\ 1]$

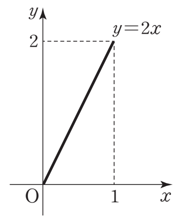
$2f(1)-g(1)=-4\times1+3=-1<0$

이므로 $2f(x)-g(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

ㄷ. $0\le x\le 1$에서

$2g(x)-f(x)=2\times1-(-2x+2)=2x\ge0$

또한, 함수 $y=2x$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times1\times2=1$

즉, $2g(x)-f(x)$는 확률밀도함수이다.

따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

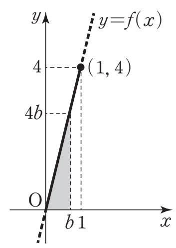
답 ③

26 $f(x)=a^2x-a^2+4=a^2(x-1)+4\ (0\le x\le b)$

에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 4)$를 지난다.

이때, a^2의 값은 직선 $y=f(x)$의 기울기이고 a^2의 값이 최대일 때 a의 값이 최대이다.

한편, $0\le x\le b$에서 $f(x)$가 확률밀도함수가 되려면 $f(x)\ge0$이어야 하므로 이것을 만족시키면서 직선 $y=f(x)$의 기울기 a^2의 값이 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=f(x)$가 원점을 지날 때이다.



즉, $f(0)=0$에서 $-a^2+4=0$

$a^2=4\qquad\therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore f(x)=4(x-1)+4=4x$ (단, $0\le x\le b$)

또한, $0\le x\le b$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

확률의 총합

$\frac{1}{2}\times b\times4b=1,\ 2b^2=1$

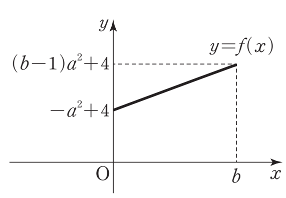
$\therefore b^2=\frac{1}{2}$

$\therefore a^2+b^2=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

• 다른풀이 •

확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고 $0\le x\le b$의 모든 x에 대하여 $f(x)\ge0$이어야 하므로



$f(0)\ge0$에서

$-a^2+4\ge0,\ a^2-4\le0\qquad\therefore -2\le a\le2$

즉, 양수 a의 최댓값은 2이다.

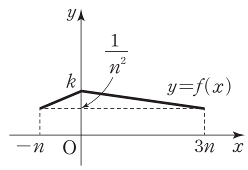
$0\le x\le b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\{(-a^2+4)+(ba^2-a^2+4)\}\times b=1$

$4b\times b\times\frac{1}{2}=1\qquad\therefore b^2=\frac{1}{2}$

$\therefore a^2+b^2=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

27 $-n\le x\le 3n$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-n,\ x=3n$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.



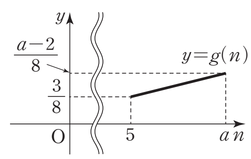
$\frac{1}{2}\times\left(k+\frac{1}{n^2}\right)\times n+\frac{1}{2}\times\left(k+\frac{1}{n^2}\right)\times3n=1$

$2n\left(k+\frac{1}{n^2}\right)=1,\ k+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2n}$

$\therefore k=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}$

$\therefore g(n)=\frac{1}{4}kn^2=\frac{1}{4}n^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{8}n-\frac{1}{4}$

$5\le n\le a$에서 함수 $y=g(n)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=g(n)$의 그래프와 두 직선 $n=5,\ n=a$ 및 n축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 한다. 즉,



$\frac{1}{2}\times(a-5)\times\left(\frac{3}{8}+\frac{a-2}{8}\right)=1$

$\frac{1}{16}(a-5)(a+1)=1,\ a^2-4a-5=16$

$a^2-4a-21=0,\ (a-7)(a+3)=0$

$\therefore a=7\ (\because a>5)$

답 7

28 $0\le x\le 5n$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times5n\times f(n)=1\qquad\therefore f(n)=\frac{2}{5n}$

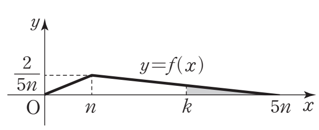
$\mathrm{P}(0\le X\le n)=\frac{1}{2}\times n\times\frac{2}{5n}=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le n)=\mathrm{P}(k\le X\le 5n)$에서

$\mathrm{P}(k\le X\le 5n)=\frac{1}{5}$

또한,

$\mathrm{P}(n\le X\le 5n)=1-\mathrm{P}(0\le X\le n)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$



이때, $x\ge n$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=n$ 및 x축으로 둘러싸인 도형과 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 x축으로 둘러싸인 도형이 닮음이고,

$\mathrm{P}(n\le X\le 5n)=\mathrm{P}(k\le X\le 5n)=4:1$

이므로 두 도형의 닮음비는 $2:1$이다.

즉, $(5n-n):(5n-k)=2:1$에서

$10n-2k=4n,\ 2k=6n\qquad\therefore k=3n$

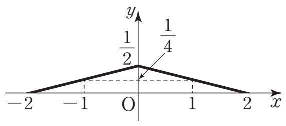
따라서 $a_n=3n$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=3+6+9+12+15=45$

답 45

29 $-2\le x\le 2$에서 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times k=1\qquad \therefore k=\frac{1}{2}$



$A=\{X\mid -2\le X\le 0\}$, $B=\{X\mid 0\le X\le 2\}$,
$C=\{X\mid -1\le X\le 1\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(-2\le X\le 0)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times 1=\frac{3}{4}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{8}$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times 1=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(C\mid B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(B)}$
$=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{3}{4}$이고 ㄱ에서

$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{3}{8}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉, 두 사건 A와 C는 서로 독립이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

30 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=4$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(0\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 4)$
$=2\mathrm{P}(0\le X\le 2)=1$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}$

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=a$

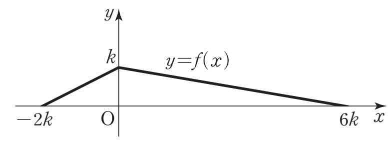
$\therefore a=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(x\le X\le 2)=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}$

조건 (나)에 $x=1$을 대입하면

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 3)$
$=2\mathrm{P}(1\le X\le 2)$
$=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

31 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $-2k\le x\le 6k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 8k\times k=1$, $4k^2=1\qquad \therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k>0)$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & (-1\le x<0)\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}x & (0\le x\le 3)\end{cases}$$

(i) $a=-1$일 때,

$\mathrm{P}(a\le X\le a+1)=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$
$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) $-1<a<0$일 때,

$\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$
$=1-\mathrm{P}(-1\le X<a)-\mathrm{P}(a+1<X\le 3)$
$=1-\frac{1}{2}\times\{a-(-1)\}\times\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)$
$\quad-\frac{1}{2}\times\{3-(a+1)\}\times\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(a+1)\right\}$
$=1-\frac{1}{4}(a+1)^2-\frac{1}{12}(a-2)^2$
$=-\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{6}a+\frac{5}{12}$
$=-\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$

즉, 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$의 최댓값은 $a=-\frac{1}{4}$일 때, $\frac{7}{16}$이다.

(iii) $a\ge 0$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $f(x)$는 감소함수이므로 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$은 $a=0$일 때 최대이고 최댓값은

$\mathrm{P}(a\le X\le a+1)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$
$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 1$
$=\frac{5}{12}$

(i), (ii), (iii)에서 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$의 최댓값은 $a=-\frac{1}{4}$일 때, $\frac{7}{16}$이다. 답 $-\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$-2k\le x\le 6k$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 k의 값을 구한 경우	20%
(나)	$a=-1$, $-1<a<0$, $a\ge 0$으로 범위를 나누어 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$을 각각 구한 경우	50%
(다)	(나)에서 구한 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)$의 최댓값을 각각 구하여 비교한 후, 최대가 되도록 하는 상수 a의 값을 구한 경우	30%

32 y에 대한 이차방정식 $y^2-4y+3x+2=0$의 두 근이 모두 양수이기 위해서는 다음을 만족시켜야 한다.

(i) 이차방정식 $y^2-4y+3x+2=0$이 두 근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(3x+2)\ge 0$에서 $3x\le 2$ $\quad\therefore x\le\frac{2}{3}$

(ii) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0이어야 하므로

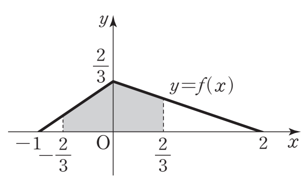
$4>0$, $3x+2>0$ $\quad\therefore x>-\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 양수이려면

$-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3}$

즉, 구하는 확률은 $\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3}<X\le\frac{2}{3}\right)$이다.

한편, $-1\le x\le 2$에서 주어진 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 확률 $\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3}<X\le\frac{2}{3}\right)$는 위의 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{2}{3}<X\le\frac{2}{3}\right)$

$=1-\mathrm{P}\left(-1\le X\le-\frac{2}{3}\right)-\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}<X\le 2\right)$

$=1-\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{2}{3}-(-1)\right\}\times\frac{2}{9}-\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{9}$

$=1-\frac{1}{27}-\frac{8}{27}$

$=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$ **답** $\frac{2}{3}$

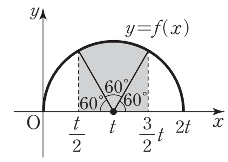
33 $0\le x\le 2t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 반지름의 길이가 t인 반원의 넓이가 1이어야 한다. 즉,

$\frac{1}{2}\pi t^2=1$에서 $t^2=\frac{2}{\pi}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$4X^2-8tX+3t^2\le 0$에서 $(2X-3t)(2X-t)\le 0$

$\therefore \frac{t}{2}\le X\le\frac{3}{2}t$

이때, 확률 $\mathrm{P}\left(\frac{t}{2}\le X\le\frac{3}{2}t\right)$는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=\frac{t}{2}$, $x=\frac{3}{2}t$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이이다.



즉, 중심각이 60°인 부채꼴 한 개와 세 내각이 30°, 60°, 90°이고 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $\frac{t}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}t$인 직각삼각형 두 개의 넓이의 합과 같으므로

$\mathrm{P}(4X^2-8tX+3t^2\le 0)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{t}{2}\le X\le\frac{3}{2}t\right)$

$=\pi t^2\times\frac{60}{360}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$=\frac{1}{6}t^2\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}t^2$

$=\frac{1}{6}\times\frac{2}{\pi}\times\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\pi}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

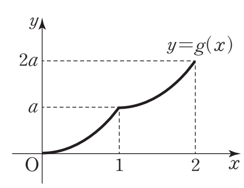
$180(a^2+b^2)=180\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\right)=20+45=65$ **답** 65

34 $f(x)=ax^2$이므로

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1)\\ f(x-1)+f(1) & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} ax^2 & (0\le x<1)\\ a(x-1)^2+a & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

즉, $0\le x\le 2$에서 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^1 ax^2\,dx+\int_1^2\{a(x-1)^2+a\}\,dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{a}{3}(x-1)^3+ax\right]_1^2$

$=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+a=\frac{5}{3}a=1$

$\therefore a=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(a\le X\le a+1)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{5}\le X\le\dfrac{8}{5}\right)$

$=\displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^{\frac{8}{5}} g(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{3}{5}}^{1}\frac{3}{5}x^2dx+\int_{1}^{\frac{8}{5}}\left\{\frac{3}{5}(x-1)^2+\frac{3}{5}\right\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{5}x^3\right]_{\frac{3}{5}}^{1}+\left[\dfrac{1}{5}(x-1)^3+\dfrac{3}{5}x\right]_{1}^{\frac{8}{5}}$

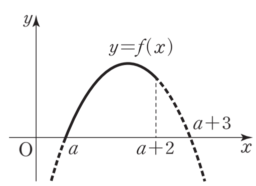
$=\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{27}{125}\right)+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{27}{125}+\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{8}{5}-1\right)$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{9}{25}=\dfrac{14}{25}$ 답 ④

35 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $f(a)=f(a+3)=0$인 이차 함수의 일부이므로

$f(x)=k(x-a)(x-a-3)$ (단, $k\neq0$)

이라 할 수 있다.



$a\le x\le a+2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=a+2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\displaystyle\int_a^{a+2}f(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_a^{a+2}k(x-a)(x-a-3)\,dx$

$=k\displaystyle\int_a^{a+2}\{x^2-(2a+3)x+a(a+3)\}\,dx$

$=k\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2a+3}{2}x^2+a(a+3)x\right]_a^{a+2}$

$=k\left\{\dfrac{1}{3}(6a^2+12a+8)-\dfrac{2a+3}{2}(4a+4)+2a(a+3)\right\}$

$=-\dfrac{10}{3}k=1$

$\therefore k=-\dfrac{3}{10}$

한편, 확률변수 X가 $a+1$보다 작을 확률은

$\mathrm{P}(X<a+1)$

$=\displaystyle\int_a^{a+1}f(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_a^{a+1}\left\{-\frac{3}{10}(x-a)(x-a-3)\right\}dx$

$=-\dfrac{3}{10}\displaystyle\int_a^{a+1}\{x^2-(2a+3)x+a(a+3)\}\,dx$

$=-\dfrac{3}{10}\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2a+3}{2}x^2+a(a+3)x\right]_a^{a+1}$

$=-\dfrac{3}{10}\left\{\dfrac{1}{3}(3a^2+3a+1)-\dfrac{2a+3}{2}(2a+1)+a(a+3)\right\}$

$=-\dfrac{3}{10}\times\left(-\dfrac{7}{6}\right)=\dfrac{7}{20}$

이므로 임의의 두 값 X_1, X_2를 택할 때, 두 값 모두 $a+1$보다 작을 확률은

$\left(\dfrac{7}{20}\right)^2=\dfrac{49}{400}$

따라서 $p=400$, $q=49$이므로

$p+q=400+49=449$ 답 ①

• 다른풀이 •

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $f(a)=f(a+3)=0$인 이차함수의 일부이므로

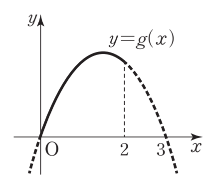
$f(x)=k(x-a)(x-a-3)$ $(k\neq0)$

이라 할 수 있다.

이때, $Y=X-a$라 하고 확률변수 Y의 확률밀도함수를 $g(x)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것과 같으므로

$g(x)=kx(x-3)$ $(0\le x\le2)$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 kx(x-3)\,dx$

$=k\displaystyle\int_0^2(x^2-3x)\,dx$

$=k\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^2$

$=k\left(\dfrac{8}{3}-6\right)$

$=-\dfrac{10}{3}k=1$

$\therefore k=-\dfrac{3}{10}$

확률변수 X가 $a+1$보다 작을 확률은 확률변수 Y가 1보다 작을 확률과 같으므로

$\mathrm{P}(X<a+1)=\mathrm{P}(Y<1)$

$=\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_0^1\left\{-\frac{3}{10}x(x-3)\right\}dx$

$=-\dfrac{3}{10}\displaystyle\int_0^1(x^2-3x)\,dx$

$=-\dfrac{3}{10}\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\right)$

$=-\dfrac{3}{10}\times\left(-\dfrac{7}{6}\right)=\dfrac{7}{20}$

임의의 두 값 X_1, X_2를 선택할 때, 두 값 모두 $a+1$보다 작을 확률은

$\left(\frac{7}{20}\right)^2=\frac{49}{400}$

이므로 $p=400$, $q=49$

$\therefore p+q=400+49=449$

36 확률변수 X가 구간 $[0, 2a]$에서 정의되어 있으므로

$P(0\le X\le 2a)=1$

조건 (가)의 $P(0\le X\le x)=kx^2$에 $x=2a$를 대입하면

$4ka^2=1$ ……㉠

또한, $P(0\le X\le x)=kx^2$에서

$\int_0^x f(t)\,dt=kx^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2kx$

이것을 조건 (나)에 대입하면

$\int_0^{2a} xf(x)\,dx=\int_0^{2a} f(x)\,dx$

$\int_0^{2a} 2kx^2\,dx=\int_0^{2a} 2kx\,dx$

$\left[\frac{2}{3}kx^3\right]_0^{2a}=\left[kx^2\right]_0^{2a}$

$\frac{16ka^3}{3}=4ka^2$, $16ka^3-12ka^2=0$

$4ka^2(4a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{4}$ ($\because a>0$, $k\ne0$)

$k=0$이면 모든 실수 x에 대하여 $P(0\le X\le x)=0$이므로 확률밀도함수의 성질을 만족시키지 않는다. $\therefore k\ne0$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$4k\times\frac{9}{16}=1$, $\frac{9}{4}k=1$

$\therefore k=\frac{4}{9}$

답 ③

Step 3	1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제**	p. 52

01 ③	**02** 776	**03** $\frac{2^{99}}{3^{100}}$	**04** 11	**05** 146
06 142	**07** 6			

01 해결단계

❶ 단계	확률의 총합이 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	ㄱ은 $P(X=1)=0$임을 파악한 후, 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄴ은 확률 $P(X\ge k)$를 $f(k)$, $f(k+1)$에 관한 식으로 변형한 후, 참, 거짓을 판별한다.
❹ 단계	ㄷ은 부등식 $\sum_{x=1}^{n} f(x)>\sum_{x=1}^{n} xP(X=x)$를 확률 $P(X=x)$의 합으로 변형한 후, 참, 거짓을 판별한다.

확률의 총합이 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$

$\left(a-\frac{1}{10}\right)+\left(2a-\frac{1}{10}\right)+\left(3a-\frac{1}{10}\right)+\left(4a-\frac{1}{10}\right)+\left(5a-\frac{1}{10}\right)=1$

$15a-\frac{1}{2}=1$ $\therefore a=\frac{1}{10}$

즉, $P(X=x)=\frac{1}{10}x-\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

ㄱ. $P(X=1)=0$이므로

$f(1)=P(X\ge1)$
$=P(X=1)+P(X\ge2)$
$=0+P(X\ge2)$
$=f(2)$ (참)

ㄴ. $f(k)=P(X\ge k)$
$=P(X=k)+P(X\ge k+1)$
$=P(X=k)+f(k+1)$

$\therefore P(X=k)=f(k)-f(k+1)$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{x=1}^{n} f(x)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$
$=P(X\ge1)+P(X\ge2)+\cdots+P(X\ge n)$
$=P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+nP(X=n)+\cdots+nP(X=5)$

$\sum_{x=1}^{n} xP(X=x)$
$=P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+nP(X=n)$

$\sum_{x=1}^{n} f(x)>\sum_{x=1}^{n} xP(X=x)$에서

$P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+nP(X=n)+\cdots+nP(X=5)$
$>P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+nP(X=n)$

이때, $n\le4$이면

$nP(X=n+1)+\cdots+nP(X=5)>0$

이므로 주어진 부등식은 항상 성립하고

$n=5$이면

$P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+5P(X=5)$
$=P(X=1)+2P(X=2)+\cdots+5P(X=5)$

이므로 부등식은 성립하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 4이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른풀이 •

ㄷ. $f(x)=P(X\ge k)$이므로

$f(1)=P(X\ge1)=1$

$f(2)=P(X\ge2)=1$

$f(3)=P(X\ge3)=\frac{9}{10}$

$f(4)=\mathrm{P}(X\geq 4)=\frac{7}{10}$

$f(5)=\mathrm{P}(X\geq 5)=\frac{4}{10}$

$\sum_{x=1}^{n} f(x)>\sum_{x=1}^{n} x\mathrm{P}(X=x)$에서

$n=1$일 때,

$\sum_{x=1}^{1} f(x)=f(1)=1$

$\sum_{x=1}^{1} x\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(X=1)=0$

$\therefore \sum_{x=1}^{1} f(x)>\sum_{x=1}^{1} x\mathrm{P}(X=x)$

$n=2$일 때,

$\sum_{x=1}^{2} f(x)=f(1)+f(2)=2$

$\sum_{x=1}^{2} x\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{10}$

$\therefore \sum_{x=1}^{2} f(x)>\sum_{x=1}^{2} x\mathrm{P}(X=x)$

$n=3$일 때,

$\sum_{x=1}^{3} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)=\frac{29}{10}$

$\sum_{x=1}^{3} x\mathrm{P}(X=x)$

$=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)=\frac{8}{10}$

$\therefore \sum_{x=1}^{3} f(x)>\sum_{x=1}^{3} x\mathrm{P}(X=x)$

$n=4$일 때,

$\sum_{x=1}^{4} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\frac{36}{10}$

$\sum_{x=1}^{4} x\mathrm{P}(X=x)$

$=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)$
$+4\mathrm{P}(X=4)$

$=2$

$\therefore \sum_{x=1}^{4} f(x)>\sum_{x=1}^{4} x\mathrm{P}(X=x)$

$n=5$일 때,

$\sum_{x=1}^{5} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=4$

$\sum_{x=1}^{5} x\mathrm{P}(X=x)$

$=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)$
$+4\mathrm{P}(X=4)+5\mathrm{P}(X=5)$

$=4$

$\therefore \sum_{x=1}^{5} f(x)=\sum_{x=1}^{5} x\mathrm{P}(X=x)$

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 4이다.

(참)

02 해결단계

❶ 단계	주사위를 세 번 던져 나온 숫자를 순서대로 X_i $(i=1, 2, 3)$라 한 후, $\mathrm{E}(X_i)$를 구한다.
❷ 단계	$X=100X_1+10X_2+X_3$임을 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 구한다.
❸ 단계	$\mathrm{E}(2X-1)$을 구한다.

주사위를 세 번 던져서 나온 숫자를 순서대로 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하고 X_i $(i=1, 2, 3)$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_i	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X_i=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X_i)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$

$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

이때, 한 개의 주사위를 세 번 던져 나온 숫자를 순서대로 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리로 하는 세 자리 자연수가 X이므로

$X=100X_1+10X_2+X_3$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(100X_1+10X_2+X_3)$

$=100\mathrm{E}(X_1)+10\mathrm{E}(X_2)+\mathrm{E}(X_3)$

$=100\times\frac{7}{2}+10\times\frac{7}{2}+\frac{7}{2}$

$=\frac{7}{2}\times 111=\frac{777}{2}$

$\therefore \mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1$

$=2\times\frac{777}{2}-1$

$=777-1=776$

답 776

03 해결단계

❶ 단계	조건부확률의 정의를 이용하여 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(C)$ 사이의 관계를 밝힌다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 관계를 이용하여 확률 $\mathrm{P}(X>n)$을 구한다.
❸ 단계	$\mathrm{P}(X=100)=\mathrm{P}(X>99)-\mathrm{P}(X>100)$을 이용하여 확률 $\mathrm{P}(X=100)$을 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 자연수이고

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X>1)=1-\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ……㉠

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(C)$에서 조건부확률의 정의에 의하여

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(C)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

이때, a, b는 모두 자연수이므로

$a+b>a$에서 $(X>a+b)\subset(X>a)$

$\therefore A\cap B=A$

즉, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로

$\mathrm{P}(X>a+b)=\mathrm{P}(X>a)\mathrm{P}(X>b)$ ……㉡

㉡에 $a=1$, $b=1$을 대입하면

$P(X>2)=P(X>1)P(X>1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ($\because$ ㉠)

㉡에 $a=2$, $b=1$을 대입하면

$P(X>3)=P(X>2)P(X>1)=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

㉡에 $a=3$, $b=1$을 대입하면

$P(X>4)=P(X>3)P(X>1)=\left(\frac{2}{3}\right)^4$

⋮

같은 방법으로 계속하면 $P(X>n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$이므로

$$P(X=100)=P(X>99)-P(X>100)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{99}-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{99}=\frac{2^{99}}{3^{100}}$$

답 $\frac{2^{99}}{3^{100}}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

㉡에 $a=1$, $b=1$을 대입하면

$P(X>2)=P(X>1)P(X>1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$이므로

$P(X\le 2)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

이때, $P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$이므로

$P(X=2)=P(X\le 2)-P(X=1)$

$=\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{2}{3^2}$

같은 방법으로 확률 $P(X=n)$ (n은 자연수)을 구하면

$P(X=3)=\frac{4}{27}=\frac{2^2}{3^3}$, $P(X=4)=\frac{8}{81}=\frac{2^3}{3^4}$, $\cdots$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 조건부확률의 성질과 규칙성을 활용할 줄 아는가를 묻는 문제이다. 실제 모의고사나 수능에서도 기본 정의나 성질을 활용하는 문제가 많이 출제되기에 확실하게 알고 있는 것이 중요하다. 먼저 주어진 조건이 $P(X>a+b)=P(X>a)P(X>b)$임을 알아야 한다. 다음에는 a, b에 임의의 수를 대입하면서 규칙성을 찾는다. 이 문제와 같이 임의의 수를 대입하는 형태의 문제는 주어진 조건을 최대한 활용하는 것이 좋다. 조건부확률의 성질, 부등호가 포함된 확률변수, 규칙성 등 문제를 푸는 다양한 개념들이 필요하지만 차근차근 하나씩 적용하면 쉽게 접근할 수 있는 문제이다.

04 해결단계

❶ 단계	주어진 식에 $x=-1$, $x=4$를 각각 대입하여 식의 값을 구한 후, 두 식을 연립하여 a, b의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	c의 값을 구한 후, 미분을 이용하여 확률밀도함수 $f(x)$를 구한다.
❸ 단계	$24f\left(\frac{1}{c}\right)$의 값을 구한다.

$P(-1\le X\le x)=ax^2+bx+\frac{1}{10}$ $(-1\le x\le 4)$ ……㉠

㉠에 $x=4$를 대입하면

$P(-1\le X\le 4)=16a+4b+\frac{1}{10}$

이때, 확률변수 X가 $-1\le X\le 4$에서 정의되어 있으므로 $P(-1\le X\le 4)=1$

즉, $16a+4b+\frac{1}{10}=1$이므로 $16a+4b=\frac{9}{10}$ ……㉡

또한, 연속확률변수가 어떤 특정한 값을 가질 확률이 0이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1\le X\le -1)=P(X=-1)=0$

즉, $a-b+\frac{1}{10}=0$이므로 $a-b=-\frac{1}{10}$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{40}$, $b=\frac{1}{8}$

이므로 $P(-1\le X\le x)=\frac{1}{40}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}$

$$\therefore c=P(0\le X\le 1)$$
$$=P(-1\le X\le 1)-P(-1\le X\le 0)$$
$$=\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$$

이때,

$$P(-1\le X\le x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{40}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}$$

이므로 위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{20}x+\frac{1}{8}$

$\therefore 24f\left(\frac{1}{c}\right)=24f\left(\frac{20}{3}\right)=24\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)=11$

답 11

05 해결단계

❶ 단계	확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	확률변수 X에서 임의의 두 값 X_1, X_2를 택할 때, 두 값 중 적어도 하나는 1보다 작을 사건의 여사건을 파악한 후, 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구한다.
❸ 단계	p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{2}{3}=1$ $\quad\therefore a=3$

즉, $f(x)=-\frac{2}{9}(x-3)$

이때, 임의의 두 값 X_1, X_2를 택할 때, 두 값 중 적어도 하나는 1보다 작은 사건의 여사건은 두 값이 모두 1보다 크거나 같은 사건이다.

확률변수 X가 1보다 크거나 같을 확률은

$P(X\ge 1)=\frac{1}{2}\times(3-1)\times\left\{-\frac{2}{9}(1-3)\right\}=\frac{4}{9}$

이므로 X에서 임의의 두 값 X_1, X_2를 택할 때 두 값 중 적어도 하나는 1보다 작을 확률은

$1-\left(\frac{4}{9}\right)^2=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

따라서 $p=81$, $q=65$이므로

$p+q=81+65=146$

답 146

06 해결단계

❶ 단계	k가 적힌 칸을 조준하여 화살을 쐈을 때, 화살이 맞은 칸에 적힌 숫자를 확률변수 X_k라 하고, k의 값에 따른 X_k의 확률분포를 표로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 확률분포를 나타낸 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X_k)$의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	점수의 기댓값이 $\mathrm{E}(X_k)$임을 파악한 후, $\mathrm{E}(X_k)$가 최대가 되는 k의 값 α와 그때의 기댓값 β를 각각 구한다.
❹ 단계	$\alpha+13\beta$의 값을 구한다.

k가 적힌 칸을 조준하여 화살을 쐈을 때, 화살이 맞은 칸에 적힌 숫자를 X_k라 하면 얻는 점수도 X_k이므로 확률변수 X_k의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때,

X_1	11	12	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X_1=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

$$\mathrm{E}(X_1)=11\times\frac{1}{13}+12\times\frac{3}{13}+1\times\frac{5}{13}+2\times\frac{3}{13}+3\times\frac{1}{13}=\frac{61}{13}$$

(ii) $k=2$일 때,

X_2	12	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X_2=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

$$\mathrm{E}(X_2)=12\times\frac{1}{13}+1\times\frac{3}{13}+2\times\frac{5}{13}+3\times\frac{3}{13}+4\times\frac{1}{13}=\frac{38}{13}$$

(iii) $3\le k\le 10$일 때,

X_k	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	합계
$\mathrm{P}(X_k=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

$$\mathrm{E}(X_k)=(k-2)\times\frac{1}{13}+(k-1)\times\frac{3}{13}+k\times\frac{5}{13}+(k+1)\times\frac{3}{13}+(k+2)\times\frac{1}{13}=\frac{13k}{13}=k$$

$3\le k\le 10$에서 점수의 기댓값 $\mathrm{E}(X_k)$는 $k=10$일 때 최댓값 10을 갖는다.

(iv) $k=11$일 때,

X_{11}	9	10	11	12	1	합계
$\mathrm{P}(X_{11}=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

$$\mathrm{E}(X_{11})=9\times\frac{1}{13}+10\times\frac{3}{13}+11\times\frac{5}{13}+12\times\frac{3}{13}+1\times\frac{1}{13}=\frac{131}{13}$$

(v) $k=12$일 때,

X_{12}	10	11	12	1	2	합계
$\mathrm{P}(X_{12}=x)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	1

$$\mathrm{E}(X_{12})=10\times\frac{1}{13}+11\times\frac{3}{13}+12\times\frac{5}{13}+1\times\frac{3}{13}+2\times\frac{1}{13}=\frac{108}{13}$$

(i)~(v)에서 점수의 기댓값 $\mathrm{E}(X_k)$는 $k=11$일 때, 최댓값 $\frac{131}{13}$을 가지므로

$\alpha=11$, $\beta=\frac{131}{13}$

$$\therefore\ \alpha+13\beta=11+13\times\frac{131}{13}=11+131=142$$

답 142

07 해결단계

❶ 단계	확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프와 직선 $x=4$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 a의 값과 확률밀도함수를 구한다.
❷ 단계	$x<0$, $0\le x<1$, $1\le x<4$, $x\ge 4$로 구간을 나누어 함수 $f(x)=\mathrm{P}(X\ge x)$를 구한다.
❸ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 직선 $g(x)=t(x-1)+f(1)$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점이 최대가 되기 위한 조건을 찾는다.
❹ 단계	❸ 단계에서 구한 조건을 만족시키는 t의 값의 범위 $p<t<q$와 그때의 교점의 개수 r를 구한 후, $10(q-p)+r$의 값을 구한다.

확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프와 직선 $x=4$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times1\times a+\frac{1}{2}\times3\times3a=1$$

$5a=1\qquad\therefore\ a=\frac{1}{5}$

즉, 확률밀도함수는

$$y=\begin{cases}-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5} & (0\le x<1)\\ \frac{1}{5}x-\frac{1}{5} & (1\le x\le 4)\end{cases}$$

$f(x)=\mathrm{P}(X\ge x)$이므로

(i) $x<0$일 때,

$f(x)=\mathrm{P}(X\ge x)=1$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{P}(X\ge x)\\&=\mathrm{P}(x\le X\le 1)+\mathrm{P}(1\le X\le 4)\\&=\frac{1}{2}\times(1-x)\left(-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{5}\\&=\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{5}x+1\end{aligned}$$

(iii) $1\le x<4$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{P}(X\ge x)\\&=\mathrm{P}(x\le X\le 4)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)\times(4-x)$$
$$=-\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

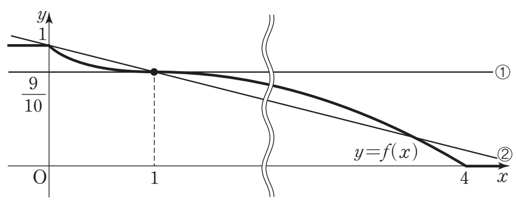
(iv) $x\geq4$일 때,

$f(x)=\mathrm{P}(X\geq x)=0$

(i)~(iv)에서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<0)\\ \frac{1}{10}x^2-\frac{1}{5}x+1 & (0\leq x<1)\\ -\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{4}{5} & (1\leq x<4)\\ 0 & (x\geq4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 직선 $y=g(x)$는 점 $(1,\ f(1))$을 지나고 기울기가 t인 직선이므로 위의 그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 두 직선 ①, ② 사이에 위치할 때, 교점의 개수가 최대이다.

직선 ①은 x축과 평행한 직선이므로 방정식은 $y=\frac{9}{10}$이고 기울기는 0이다.

직선 ②는 직선 $g(x)=t(x-1)+f(1)$이 점 $(0,\ 1)$을 지날 때이므로

$$1=t(0-1)+\frac{9}{10}\qquad\therefore t=-\frac{1}{10}$$

따라서 $-\frac{1}{10}<t<0$일 때, 교점의 개수 $h(t)$는 5로 최대이므로

$$p=-\frac{1}{10},\ q=0,\ r=5$$

$$\therefore 10(q-p)+r=10\left\{0-\left(-\frac{1}{10}\right)\right\}+5=6$$

답 6

이것이 수능 p. 53

1 ② 2 ①

1

해결단계

❶ 단계	점 $(x,\ y)$에서 점 $(x+1,\ y+1)$로 이동하는 횟수가 많을수록 확률변수 X가 작은 값을 가짐을 이용하여 (가)에 들어갈 수 a를 구한다.
❷ 단계	같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (나)에 들어갈 수 b를 구한다.
❸ 단계	확률의 총합은 1임을 이용하여 (다)에 들어갈 수 c를 구한다.
❹ 단계	$a+b+c$의 값을 구한다.

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자.

확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 이 경우는 점 $(x,\ y)$에서 점 $(x+1,\ y+1)$로의 점프의 횟수가 최대일 때이므로 점 $(x+1,\ y+1)$로 3번 점프, 점 $(x+1,\ y)$로 1번 점프하는 경우이다.

즉, $k=\boxed{4}$이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

(i) $X=k$일 때,

점 $(x+1,\ y+1)$로 3번 점프, 점 $(x+1,\ y)$로 1번 점프하는 경우이므로 확률은

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!1!}=\frac{4}{N}$$

(ii) $X=k+1$일 때,

점 $(x+1,\ y+1)$로 2번 점프, 점 $(x+1,\ y)$로 2번 점프, 점 $(x,\ y+1)$로 1번 점프하는 경우이므로 확률은

$$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!1!}=\frac{30}{N}$$

(iii) $X=k+2$일 때,

점 $(x+1,\ y+1)$로 1번 점프, 점 $(x+1,\ y)$로 3번 점프, 점 $(x,\ y+1)$로 2번 점프하는 경우이므로 확률은

$$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times\frac{6!}{1!3!2!}=\frac{\boxed{60}}{N}$$

(iv) $X=k+3$일 때,

점 $(x+1,\ y)$로 4번 점프, 점 $(x,\ y+1)$로 3번 점프하는 경우이므로 확률은

$$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{4!3!}=\frac{35}{N}$$

(i)~(iv)에서 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=k)+\mathrm{P}(X=k+1)+\mathrm{P}(X=k+2)+\mathrm{P}(X=k+3)$$
$$=\frac{4}{N}+\frac{30}{N}+\frac{60}{N}+\frac{35}{N}$$
$$=\frac{129}{N}=1$$

$$\therefore N=\boxed{129}$$

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=k\mathrm{P}(X=k)+(k+1)\mathrm{P}(X=k+1)+(k+2)\mathrm{P}(X=k+2)+(k+3)\mathrm{P}(X=k+3)$$
$$=4\times\frac{4}{129}+5\times\frac{30}{129}+6\times\frac{60}{129}+7\times\frac{35}{129}$$
$$=\frac{771}{129}=\frac{257}{43}$$

따라서 $a=4,\ b=60,\ c=129$이므로

$a+b+c=4+60+129=193$

답 ②

2

해결단계

❶ 단계	주머니에 무게가 1인 추 1개를 넣을 확률을 구한다.
❷ 단계	독립시행의 확률을 이용하여 (가), (나), (다)에 들어갈 수 $a,\ b,\ c$를 각각 구한 후, $\frac{ab}{c}$의 값을 구한다.

나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1인 추 1개를 주머니에 넣고 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2인 추 1개를 주머니에 넣으므로 주머니에 무게가 1인 추가 하나 들어 있을

확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 무게가 2인 추가 하나 들어 있을 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수가 확률변수 X이므로

(i) $X=3$인 사건은 추의 총무게가 처음으로 6 이상이 될 때 주머니에 총 3개의 추가 들어 있는 사건이다.
이때, $2+2+2\geq 6$이므로 $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$$P(X=3)={}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boxed{\frac{8}{27}}$$

(ii) $X=4$인 사건은 추의 총무게가 처음으로 6 이상이 될 때 주머니에 총 4개의 추가 들어 있는 사건이다.
이는 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5이고 네 번째 시행에서는 어느 추를 넣어도 되는 경우로 나눌 수 있다.
1 또는 2를 세 번 더하여 4 또는 5가 되는 경우는
$1+1+2=4$, $1+2+2=5$이므로

$$P(X=4)={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\boxed{\frac{4}{27}}+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\frac{4}{27}+\frac{4}{9}=\frac{16}{27}$$

(iii) $X=5$인 사건은 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5이고 다섯 번째 시행에서는 어느 추를 넣어도 되는 경우로 나눌 수 있다.
1 또는 2를 네 번 더하여 4 또는 5가 되는 경우는
$1+1+1+1=4$, $1+1+1+2=5$이므로

$$P(X=5)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$
$$={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{\frac{8}{81}}$$
$$=\frac{2}{243}+\frac{8}{81}=\frac{26}{243}$$

(iv) $X=6$인 사건은 다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5이고 여섯 번째 시행에서는 어느 추를 넣어도 되는 경우이다.
이때, 1 또는 2를 다섯 번 더하여 5가 되는 경우는
$1+1+1+1+1=5$이므로

$$P(X=6)={}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{243}$$

따라서 $a=\frac{8}{27}$, $b=\frac{4}{27}$, $c=\frac{8}{81}$이므로

$\frac{ab}{c}=\frac{4}{9}$

답 ①

05 이항분포와 정규분포

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** pp. 55~56

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 2464	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 30	09 ⑤	10 ③
11 0.8413	12 0.02	13 ②	14 ①	15 0.0228

01 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 6 이하인 경우는
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4),
(3, 1), (3, 2), (3, 3),
(4, 1), (4, 2),
(5, 1)
의 15가지이므로 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 두 눈의 수의 합이 6 이하일 확률은
$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$
위의 시행을 120회 반복할 때, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(120, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{120}C_x\left(\frac{5}{12}\right)^x\left(\frac{7}{12}\right)^{120-x}$$
$(x=0, 1, 2, \cdots, 120)$

$$\therefore \frac{P(X=1)}{P(X=2)}=\frac{{}_{120}C_1\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^{119}}{{}_{120}C_2\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^{118}}$$
$$=\frac{120\times 7}{\frac{120\times 119}{2}\times 5}=\frac{2}{85}$$

답 ③

02 확률변수 X가 이항분포 $B(3, p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는
$P(X=x)={}_3C_xp^x(1-p)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$
$\therefore P(X=3)={}_3C_3p^3=p^3$
확률변수 Y가 이항분포 $B(4, 2p)$를 따르므로 Y의 확률질량함수는
$P(Y=y)={}_4C_y(2p)^y(1-2p)^{4-y}$ $(y=0, 1, 2, 3, 4)$
$\therefore P(Y\geq 3)=P(Y=3)+P(Y=4)$
$={}_4C_3(2p)^3(1-2p)^1+{}_4C_4(2p)^4$
$=32p^3(1-2p)+16p^4$
$=32p^3-48p^4$
이때, $10P(X=3)=P(Y\geq 3)$을 만족시키므로
$10p^3=32p^3-48p^4$
$48p^4-22p^3=0$, $2p^3(24p-11)=0$
$\therefore p=\frac{11}{24}$ $\left(\because 0<p<\frac{1}{2}\right)$
따라서 $m=24$, $n=11$이므로
$m+n=24+11=35$

답 ③

03 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{10}=1,$$

$$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{10}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=1+\frac{9}{10}=\frac{19}{10}$$

답 ⑤

04 샴푸와 린스의 불량률이 각각 20%, 30%이므로 두 제품 모두 정상일 확률은

$$\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{30}{100}\right)=\frac{80}{100}\times\frac{70}{100}$$

$$=\frac{14}{25}$$

따라서 10000세트를 만들었을 때, 두 제품 모두 정상인 세트의 개수인 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10000,\ \frac{14}{25}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=10000\times\frac{14}{25}\times\left(1-\frac{14}{25}\right)$$

$$=10000\times\frac{14}{25}\times\frac{11}{25}$$

$$=2464$$

답 2464

05 한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{2}=10,$$

$$\mathrm{V}(X)=20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5$$

ㄱ. $Y=20-X$이므로

$$\mathrm{P}(8\le Y\le 12)=\mathrm{P}(8\le 20-X\le 12)$$
$$=\mathrm{P}(-12\le X-20\le -8)$$
$$=\mathrm{P}(8\le X\le 12)\ (\text{참})$$

ㄴ. $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(20-X)=20-\mathrm{E}(X)$
$=20-10=10$
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(20-X)=(-1)^2\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(X)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

06 한 개의 주사위를 던져 2 이하의 눈이 나올 확률이 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때, 2 이하의 눈이 x번 나오면 $(4^x\times100)$원의 상금을 받으므로 상금의 기댓값은

$$\mathrm{E}(4^X\times100)=\sum_{x=0}^{n}4^x\times100\,{}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}$$

$$=100\sum_{x=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}$$

$$=100\times\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=100\times2^n$$

상금의 기댓값이 십만 원보다 커야 하므로

$100\times2^n>100000$, $2^n>1000$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 10이다.

답 ①

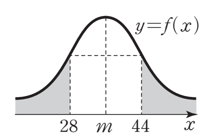
07 큰수의 법칙에 의하여 주어진 사건이 일어나는 통계적 확률 $\frac{X}{n}$는 n의 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워진다.

이때, 2개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^2이고, 2개의 주사위가 모두 같은 눈이 나오는 경우는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(6,\ 6)$의 6가지이므로 구하는 수학적 확률 p는

$$p=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

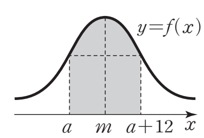
답 ③

08 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(X\le28)=\mathrm{P}(X\ge44)$에서



$$m=\frac{28+44}{2}=36$$

또한, 확률 $\mathrm{P}(a\le X\le a+12)$가 최대가 되기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 $f(a)=f(a+12)$이어야 한다.



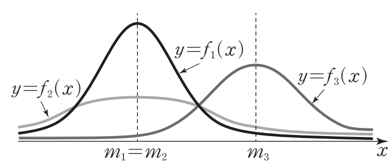
즉, 두 직선 $x=a$, $x=a+12$가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이어야 하므로

$$\frac{a+a+12}{2}=36\text{에서 }a+6=36$$

$\therefore\ a=30$

답 30

09 확률변수 $X_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$는 정규분포 $\mathrm{N}(m_i,\ \sigma_i^2)$을 따르므로 확률변수 X_i의 평균과 표준편차는 각각 m_i, σ_i이다.



ㄱ. 평균 m_i가 같을 때, σ의 값이 클수록 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 모양은 양옆으로 넓게 퍼지므로 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프에서

$\sigma_1<\sigma_2$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f_i(x)$의 그래프는 직선 $x=m_i(i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 대칭이므로 주어진 그래프에서

$m_1=m_2<m_3$

$\therefore\ m_2<m_3$ (참)

ㄷ. 주어진 그래프에서 $x=m_1$일 때의 $f_1(x)$의 값이 $x=m_3$일 때의 $f_3(x)$의 값보다 크므로

$f_3(m_3)<f_1(m_1)$ (참)

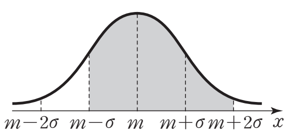
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

10 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 $m=50$, $\sigma=5$라 하면

$\mathrm{P}(45\le X\le 60)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$

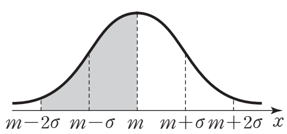
$=a$



$\mathrm{P}(40\le X\le 50)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)$

$=b$



이때,

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)$

$=a$

이므로

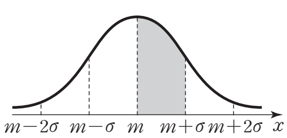
$\mathrm{P}(50\le X\le 55)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+\sigma)$

$\quad-\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m)$

$=a-b$



답 ③

• 다른풀이 •

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따를 때,

$Z=\dfrac{X-50}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(45\le X\le 60)=\mathrm{P}\left(\dfrac{45-50}{5}\le Z\le \dfrac{60-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)=a$

$\mathrm{P}(40\le X\le 50)=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-50}{5}\le Z\le \dfrac{50-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)=b$

이때, $\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)=a$이므로

$\mathrm{P}(50\le X\le 55)=\mathrm{P}\left(\dfrac{50-50}{5}\le Z\le \dfrac{55-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)-\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$

$=a-b$

11 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=60,\ \sigma(X)=5$

이때, $Y=3X+1$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+1)$

$=3\mathrm{E}(X)+1$

$=3\times 60+1=181$

$\sigma(Y)=\sigma(3X+1)$

$=3\sigma(X)$

$=3\times 5=15$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(181,\ 15^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{Y-181}{15}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le 196)=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{196-181}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$ 답 0.8413

• 다른풀이 •

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-60}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때, $Y=3X+1$이므로

$\mathrm{P}(Y\le 196)=\mathrm{P}(3X+1\le 196)$

$=\mathrm{P}(X\le 65)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{65-60}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

12 이 지역의 한 해 강수량을 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 4^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{X-100}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 이 지역의 한 해 강수량이 108 mm 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 108)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{108-100}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48$

$=0.02$ 답 0.02

13 세 나라 A, B, C의 작년 국민소득을 각각 $X_{\mathrm{A}},\ X_{\mathrm{B}},\ X_{\mathrm{C}}$라 하면 확률변수 $X_{\mathrm{A}},\ X_{\mathrm{B}},\ X_{\mathrm{C}}$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10000,\ 2000^2)$, $\mathrm{N}(40000,\ 12000^2)$, $\mathrm{N}(32000,\ 5000^2)$을 따른다.

이때, $Z_A=\dfrac{X_A-10000}{2000}$, $Z_B=\dfrac{X_B-40000}{12000}$,

$Z_C=\dfrac{X_C-32000}{5000}$이라 하면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

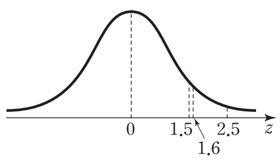
세 나라 A, B, C에서 뽑은 국민 P_A, P_B, P_C의 작년 소득이 각각 15000, 58000, 40000이었으므로 세 사람의 소득을 각각 표준화하면

$Z_A=\dfrac{15000-10000}{2000}=2.5$

$Z_B=\dfrac{58000-40000}{12000}=1.5$

$Z_C=\dfrac{40000-32000}{5000}=1.6$

세 나라의 국민 P_A, P_B, P_C의 작년 소득의 자국 내에서의 위치가 오른쪽 그림과 같으므로 상대적으로 소득이 높은 순서대로 나열하면 P_A, P_C, P_B이다.



답 ②

14 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{100}C_x p^x(1-p)^{100-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(100,\ p)$를 따르고, $E(X)=20$이므로

$100p=20$ $\quad\therefore p=\dfrac{1}{5}$

$\therefore V(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16=4^2$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\le 10)&=P\left(Z\le\frac{10-20}{4}\right)\\&=P(Z\le -2.5)\\&=P(Z\ge 2.5)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5-0.4938\\&=0.0062\end{aligned}$$

답 ①

15 B 회사의 스마트폰을 구입할 확률은 0.2, A 또는 C 회사의 태블릿 PC를 구입할 확률은 $0.3+0.2=0.5$이므로 고객 한 사람이 B 회사의 스마트폰과 A 또는 C 회사의 태블릿 PC를 구입할 확률은

$0.2\times0.5=0.1$

고객 900명 중에서 B 회사의 스마트폰과 A 또는 C 회사의 태블릿 PC를 구입하는 고객 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(900,\ 0.1)$을 따르므로

$E(X)=900\times0.1=90$

$V(X)=900\times0.1\times0.9=81=9^2$

이때, 900은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 9^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-90}{9}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\ge 108)&=P\left(Z\ge\frac{108-90}{9}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 57~62

01 $\frac{8}{27}$	**02** ③	**03** ②	**04** ⑤	**05** ③
06 960	**07** ⑤	**08** ④	**09** ④	**10** ③
11 ②	**12** 8	**13** ③	**14** ②	**15** 30
16 0.13	**17** -11	**18** 830	**19** ①	**20** ⑤
21 ⑤	**22** ③	**23** 0.0228	**24** ②	**25** 1.3651
26 42	**27** $\frac{5}{4}$	**28** ③	**29** 0.9772	**30** 73
31 75.36	**32** ③	**33** $\frac{1}{3}$	**34** 809	**35** 0.9772
36 55	**37** 0.0228	**38** 0.0668	**39** 668	**40** ①
41 ③	**42** ④			

01 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

이때, $P(X=1)=8P(X=0)$에서

${}_nC_1 p^1(1-p)^{n-1}=8\times{}_nC_0 p^0(1-p)^n$

$np(1-p)^{n-1}=8(1-p)^n$

$\therefore\ np=8(1-p)$ $(\because 1-p>0)$ $\quad\cdots\cdots㉠$

또한, $P(X=2)=3P(X=1)$에서

${}_nC_2 p^2(1-p)^{n-2}=3\times{}_nC_1 p^1(1-p)^{n-1}$

$\dfrac{n(n-1)}{2}\times p^2(1-p)^{n-2}=3np(1-p)^{n-1}$

$\dfrac{1}{2}(n-1)p=3(1-p)$ $(\because n>0,\ 1-p>0,\ p>0)$

$(n-1)p=6(1-p)$

$\therefore np=p+6(1-p)$ $\quad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$8-8p=6-5p$, $3p=2$

$\therefore p=\dfrac{2}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{3}n=8\times\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore n=4$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이므로 $\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ 답 $\frac{8}{27}$

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따름을 이용하여 확률변수 X의 확률질량함수를 구한 경우	30%
(나)	주어진 조건을 이용하여 $n,\ p$의 값을 각각 구한 경우	50%
(다)	확률 $\mathrm{P}(X=2)$를 구한 경우	20%

02

$f(t)=t^2-2at+4=(t-a)^2-a^2+4$

에서 함수 $f(t)$의 최솟값은 $-a^2+4$이므로

$X=-a^2+4$

이때, 동전을 3번 던져 앞면이 나오는 횟수가 a이므로 가능한 a의 값은 0, 1, 2, 3이고 확률 $\mathrm{P}(X=-a^2+4)$는 동전을 3번 던져 앞면이 a번 나올 확률과 같다. 즉,

$\mathrm{P}(X=-a^2+4)={}_3\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^{3-a}$ $(a=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-5	0	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률의 최댓값은 $\frac{3}{8}$이고, 이때의 확률변수 X의 값은 0, 3이므로 합은 $0+3=3$이다. 답 ③

03

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{48}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{48-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 48)$

이때,

$$\frac{\mathrm{P}(X=n+1)}{\mathrm{P}(X=n)}=\frac{{}_{48}\mathrm{C}_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{47-n}}{{}_{48}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{48-n}}$$
$$=\frac{\frac{48!}{(n+1)!(47-n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{47-n}}{\frac{48!}{n!(48-n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{48-n}}$$
$$=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{48-n}\times 3}$$
$$=\frac{48-n}{3(n+1)}$$

$\mathrm{P}(X=n+1)>\mathrm{P}(X=n)$인 경우는

$\frac{\mathrm{P}(X=n+1)}{\mathrm{P}(X=n)}>1$에서 $\frac{48-n}{3(n+1)}>1$

위의 부등식의 양변에 $3(n+1)$을 곱하면

$48-n>3n+3$

$4n<45$ $\therefore n<\frac{45}{4}=11.25$

$\mathrm{P}(X=1)<\mathrm{P}(X=2)<\cdots<\mathrm{P}(X=12)$,

$\mathrm{P}(X=12)>\mathrm{P}(X=13)>\cdots>\mathrm{P}(X=48)$

이므로 확률은 $X=12$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $\mathrm{P}(X=n)+\mathrm{P}(X=n+1)$의 값은 $n=11$ 또는 $n=12$일 때 최대이다. 이때,

$$\frac{\mathrm{P}(X=13)}{\mathrm{P}(X=11)}=\frac{{}_{48}\mathrm{C}_{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{35}}{{}_{48}\mathrm{C}_{11}\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\left(\frac{3}{4}\right)^{37}}$$
$$=\frac{\frac{48!}{13!35!}\left(\frac{1}{4}\right)^{13}\left(\frac{3}{4}\right)^{35}}{\frac{48!}{11!37!}\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\left(\frac{3}{4}\right)^{37}}$$
$$=\frac{\frac{1}{13\times 12}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{37\times 36}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{37}{39}<1$$

$\therefore \mathrm{P}(X=13)<\mathrm{P}(X=11)$

따라서 $\mathrm{P}(X=n)+\mathrm{P}(X=n+1)$은 $n=11$일 때 최댓값을 갖는다. 답 ②

blacklabel 특강 **참고**

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르고 48이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따른다.
이때, 정규분포 곡선은 $x=m$일 때 최댓값을 가지므로 정규분포를 근사적으로 따르는 확률변수 X의 확률은 $X=12$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 $\mathrm{P}(X=n)+\mathrm{P}(X=n+1)$의 값이 최대이려면 두 확률 $\mathrm{P}(X=n)$, $\mathrm{P}(X=n+1)$ 중에 하나는 확률 $\mathrm{P}(X=12)$이어야 하므로 $n=11$ 또는 $n=12$이다.

04

해결단계

❶ 단계	이산확률변수 X의 확률질량함수를 이용하여 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	함수 $f(x)$를 정리한 후 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	❷단계에서 정리한 함수 $f(x)$를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=n)={}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}={}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{100-n}$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(X=25)={}_{100}\mathrm{C}_{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{75}$

$={}_{100}\mathrm{C}_{75}\left(\frac{1}{2}\right)^{75}\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ $(\because {}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r})$

$=\mathrm{P}(X=75)$ (참)

ㄴ. $f(x)=\mathrm{P}(X\le 5x+50)$

$=\mathrm{P}(X\le[5x+50])$ x는 $-10\le x\le 10$을 만족시키는 실수이고 확률변수 X는 정수이므로 경계가 되는 정수가 필요하다.

$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$+\cdots+\mathrm{P}(X=[5x+50])$

(단, $[5x+50]$은 $5x+50$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$x_1 \le x_2$이면 $[5x_1+50] \le [5x_2+50]$이므로

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x_1+50]) \\ &\le \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x_2+50]) \\ &= f(x_2) \ (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄷ. $-10 \le x \le 10$인 임의의 x에 대하여

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mathrm{P}(X \le -5x+50) \\ &= \mathrm{P}(X \le [-5x+50]) \\ &= \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[-5x+50]) \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=100-n) &= {}_{100}\mathrm{C}_{100-n}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \\ &= {}_{100}\mathrm{C}_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \\ &= \mathrm{P}(X=n) \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} 100-[-5x+50] &= 100-(-5x+50-\alpha) \\ &= 5x+50+\alpha \ (0 \le \alpha < 1) \\ &\le [5x+50]+1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[-5x+50]) \\ &= \mathrm{P}(X=100)+\mathrm{P}(X=99)+\mathrm{P}(X=98) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=100-[-5x+50]) \\ &\ge \mathrm{P}(X=100)+\mathrm{P}(X=99)+\mathrm{P}(X=98) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x+50]+1) \end{aligned}$$

$\therefore f(x)+f(-x)$

$$\begin{aligned} &= \{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x+50])\} \\ &\quad +\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[-5x+50])\} \\ &\ge \{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x+50])\} \\ &\quad +\{\mathrm{P}(X=100)+\mathrm{P}(X=99)+\mathrm{P}(X=98) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=[5x+50]+1)\} \\ &= \mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2) \\ &\quad +\cdots+\mathrm{P}(X=100) \\ &= 1 \ (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

05

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=160$에서 $np=160$ ……㉠

$\mathrm{V}(X)=32$에서 $np(1-p)=32$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$160(1-p)=32$, $1-p=\dfrac{1}{5}$

$\therefore p=\dfrac{4}{5}$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$n \times \dfrac{4}{5}=160 \qquad \therefore n=160\times\dfrac{5}{4}=200$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200^2, \dfrac{9}{25}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=200^2\times\dfrac{9}{25}$,

$\mathrm{V}(Y)=200^2\times\dfrac{9}{25}\times\dfrac{16}{25}$

따라서 $\mathrm{E}(aY)=n\mathrm{V}(Y)$에서 $a\mathrm{E}(Y)=n\mathrm{V}(Y)$이므로

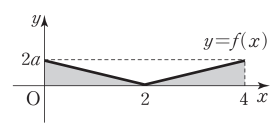
$$a=\frac{n\mathrm{V}(Y)}{\mathrm{E}(Y)}=\frac{200\times200^2\times\frac{9}{25}\times\frac{16}{25}}{200^2\times\frac{9}{25}}$$

$$=200\times\frac{16}{25}=128$$

답 ③

06

X의 확률밀도함수가 $f(x)=a|x-2|\ (0 \le x \le 4)$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $0 \le x \le 4$에서 함수



$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$2\times\dfrac{1}{2}\times2\times2a=1 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{4}|x-2|\ (0 \le x \le 4)$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\times1=\dfrac{3}{8}$

즉, 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $\mathrm{P}(0 \le X \le 1)=\dfrac{3}{8}$이고, 이 시행을 n번 반복하는 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수가 확률변수 Y이므로 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \dfrac{3}{8}\right)$을 따른다.

$\sigma(Y)=15$에서 $\mathrm{V}(Y)=225$이므로

$n\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=225$

$\therefore n=960$ **답** 960

07

$X=2Y+1$이라 하고 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	…	19	20	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	${}_{20}\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$	${}_{20}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{19}$	${}_{20}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18}$	…	${}_{20}\mathrm{C}_{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^1$	${}_{20}\mathrm{C}_{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$	1

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=20\times\frac{1}{4}=5,$

$\mathrm{V}(Y)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

이때, $X=2Y+1$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(2Y+1)=2\mathrm{E}(Y)+1$

$\qquad=2\times5+1=11$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(2Y+1)=2^2\mathrm{V}(Y)$

$\qquad=4\times\frac{15}{4}=15$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=11+15=26$

답 ⑤

08 $\frac{1}{2^{80}}\sum_{x=0}^{40}x\,{}_{40}\mathrm{C}_x3^{40-x}+\frac{1}{2^{80}}\sum_{x=0}^{80}x^2\,{}_{80}\mathrm{C}_x$

$=\sum_{x=0}^{40}x\,{}_{40}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{40-x}+\sum_{x=0}^{80}x^2\,{}_{80}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{80-x}$

이때, 이항분포 $\mathrm{B}\left(40,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수를 X라 하면 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{40}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{40-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)$

이므로

$\sum_{x=0}^{40}x\,{}_{40}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{40-x}=\sum_{x=0}^{40}x\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{E}(X)$

$\qquad=40\times\frac{1}{4}=10$

또한, 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수를 Y라 하면 Y의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(Y=y)={}_{80}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{2}\right)^{80-y}\ (y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 80)$

이므로 $\mathrm{E}(Y)=80\times\frac{1}{2}=40,\ \mathrm{V}(Y)=80\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=20$

$\therefore\ \sum_{x=0}^{80}x^2\,{}_{80}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{80-x}$

$=\sum_{x=0}^{80}x^2\mathrm{P}(Y=x)=\mathrm{E}(Y^2)$

$=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$(\because\ \mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2)$

$=20+40^2=1620$

$\therefore\ \frac{1}{2^{80}}\sum_{x=0}^{40}x\,{}_{40}\mathrm{C}_x3^{40-x}+\frac{1}{2^{80}}\sum_{x=0}^{80}x^2\,{}_{80}\mathrm{C}_x$

$=10+1620=1630$

답 ④

09 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 일반항은

$a_n=a+d(n-1)$ (단, a, d는 상수, $d>0$)

한편, 확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=a_k)={}_{48}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{48}(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 49)$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{48}	a_{49}	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{48}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$	${}_{48}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$	${}_{48}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$	$\cdots$	${}_{48}\mathrm{C}_{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$	${}_{48}\mathrm{C}_{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$	1

이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수를 Y라 하면 Y의 확률밀도함수가

$\mathrm{P}(Y=y)={}_{48}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{2}\right)^{48-y}={}_{48}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{2}\right)^{48}$

$(y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 48)$

이므로

$X=a+(Y+1-1)d=dY+a$

이고,

$\mathrm{E}(Y)=48\times\frac{1}{2}=24,$

$\mathrm{V}(Y)=48\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=12,$

$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

이때, $\mathrm{E}(X)=78,\ \sigma(X)=6\sqrt{3}$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(dY+a)$에서

$\mathrm{E}(X)=d\mathrm{E}(Y)+a$

$78=24d+a\qquad\cdots\cdots㉠$

$\sigma(X)=\sigma(dY+a)$에서

$\sigma(X)=d\sigma(Y)\ (\because\ d>0)$

$6\sqrt{3}=d\times2\sqrt{3}\qquad\therefore\ d=3$

위의 값을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=78-24d=78-24\times3=6$

따라서 $a_n=6+(n-1)\times3=3n+3$이므로

$a_{10}=3\times10+3=33$

답 ④

10 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수인 확률은

$1-\overbrace{\frac{3\times3}{36}}^{\text{두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률}}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 16번 하여 2점을 얻는 횟수를 Y라 하면 3점을 잃는 횟수는 $16-Y$이므로 16번 던진 후의 점수 X는

$X=50+2Y-3(16-Y)=5Y+2$

이때, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=16\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=3$

$\therefore\ \sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sigma(5Y+2)=5\sigma(Y)=5\sqrt{3}$

답 ③

11 확률변수 X는 이항분포 $B(100,\ 0.4)$를 따르므로

$E(X)=100\times0.4=40$,

$V(X)=100\times0.4\times0.6=24$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$\quad=24+40^2=1624$

$\therefore E(X^2)-E(4X-4)=E(X^2)-4E(X)+4$

$\quad=1624-4\times40+4$

$\quad=1468$

답 ②

12 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 k 이하일 확률을 $p(p>0)$라 하자.

이 시행을 200번 하여 두 눈의 수의 곱이 k 이하인 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(200,\ p)$를 따르므로

$E(X)=200p$, $V(X)=200p(1-p)$

이때의 점수는 $2X$이고, 얻은 점수의 평균과 분산이 각각 m, σ^2이므로

$m=E(2X)=2E(X)=400p$,

$\sigma^2=V(2X)=2^2V(X)=800p(1-p)$

$\sigma^2\le\frac{10}{9}m$을 만족시키므로

$800p(1-p)\le\frac{10}{9}\times400p$

$1-p\le\frac{5}{9}$ ($\because p>0$) $\quad\therefore p\ge\frac{4}{9}$

두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱을 작은 순서대로 나열하면

$1=1\times1$

$2=1\times2=2\times1$

$3=1\times3=3\times1$

$4=1\times4=2\times2=4\times1$

$5=1\times5=5\times1$

$6=1\times6=2\times3=3\times2=6\times1$

$8=2\times4=4\times2$

$9=3\times3$

$\vdots$

두 눈의 수의 곱이 8일 때,

$1+2+2+3+2+4+2=16$이므로 두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 8 이하일 확률은

$\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$

k가 최소이려면 p도 최소이어야 하므로 조건을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

답 8

13 3개의 동전을 동시에 던질 때, 2개의 동전은 앞면, 1개의 동전은 뒷면이 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

이 시행을 16번 반복할 때, 확률변수 X는 이항분포

$B\left(16,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$E(X)=16\times\frac{3}{8}=6$,

$V(X)=16\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{15}{4}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$\quad=\frac{15}{4}+6^2=\frac{159}{4}$

$\therefore f(a)=E(X^2+2aX-a^2)$

$\quad=E(X^2)+2aE(X)-a^2$

$\quad=\frac{159}{4}+12a-a^2$

$\quad=-(a-6)^2+\frac{303}{4}$

따라서 $X^2+2aX-a^2$의 기댓값 $f(a)$는 $a=6$일 때, 최댓값 $\frac{303}{4}$을 가지므로 구하는 상수 a의 값은 6이다.

답 ③

14 흰 공 4개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 2개의 공 모두 흰 공이 나올 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

이므로 위의 시행을 72번 반복할 때, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(72,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=72\times\frac{1}{6}=12$,

$\quad V(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$\quad=10+12^2=154$

$\therefore f(x)=\sum_{k=0}^{72}(x-3k)^2P(X=k)$

$\quad=\sum_{k=0}^{72}(x^2-6xk+9k^2)P(X=k)$

$\quad=\sum_{k=0}^{72}x^2P(X=k)-\sum_{k=0}^{72}6xkP(X=k)$

$\quad\quad+\sum_{k=0}^{72}9k^2P(X=k)$

$\quad=x^2\underbrace{\sum_{k=0}^{72}P(X=k)}_{=1}-6x\underbrace{\sum_{k=0}^{72}kP(X=k)}_{=E(X)}$

$\quad\quad+9\underbrace{\sum_{k=0}^{72}k^2P(X=k)}_{=E(X^2)}$

$\quad=x^2-6xE(X)+9E(X^2)$

$\quad=x^2-6x\times12+9\times154$

$=x^2-72x+1386$

$=(x-36)^2+90$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=36$일 때, 최솟값 90을 갖는다.

답 ②

• 다른풀이 •

$f(x)=\sum_{k=0}^{72}(x-3k)^2\mathrm{P}(X=k)$

$=\mathrm{E}((x-3X)^2)$

$=\mathrm{E}(x^2-6xX+9X^2)$

$=x^2-6x\mathrm{E}(X)+9\mathrm{E}(X^2)$

15 제품 하나가 불량품일 확률을 p, 한 상자에 들어 있는 50개의 제품을 모두 검사할 때 나오는 불량품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(50, p)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=m=50p,$ ······㉠

$\mathrm{V}(X)=\frac{48}{25}=50p(1-p)$ ······㉡

이때, ㉡에서

$625p(1-p)=24,\ 625p^2-625p+24=0$

$(25p-24)(25p-1)=0$

$\therefore p=\frac{24}{25}$ 또는 $p=\frac{1}{25}$

$p=\frac{24}{25}$일 때, ㉠에서 $m=50\times\frac{24}{25}=48$

$p=\frac{1}{25}$일 때, ㉠에서 $m=50\times\frac{1}{25}=2$

그런데 m은 5 이하인 자연수이므로 $m=2$이다.

따라서 애프터서비스로 인하여 필요한 비용의 기댓값은 $\mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X)=2a$이고 이 기댓값은 한 상자의 제품을 모두 검사하는 데 드는 비용과 같으므로

$2a=60000 \quad \therefore a=30000$

$\therefore \frac{a}{1000}=\frac{30000}{1000}=30$

답 30

16 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60, 5^2)$을 따르므로

$m=60,\ \sigma=5$

이때, 정규분포 $\mathrm{N}(60, 5^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=60$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=2\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)$

$=2\mathrm{P}(60\le X\le 65)$

$=0.68$

$\therefore \mathrm{P}(60\le X\le 65)=0.34$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=2\mathrm{P}(60\le X\le 70)$

$=0.94$

$\therefore \mathrm{P}(60\le X\le 70)=0.47$

$\therefore \mathrm{P}(65\le X\le 70)$

$=\mathrm{P}(60\le X\le 70)-\mathrm{P}(60\le X\le 65)$

$=0.47-0.34$

$=0.13$

답 0.13

• 다른풀이 •

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때,

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.68$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.34$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.94$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.47$

이때, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 5^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(65\le X\le 70)=\mathrm{P}\left(\frac{65-60}{5}\le Z\le\frac{70-60}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.47-0.34$

$=0.13$

17 모든 실수 x에 대하여 $f(x-4)=g(x+2)$가 성립하므로 이 식에 x 대신 $x+4$를 대입하면

$f(x)=g(x+6)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.

이때, 확률변수 X의 평균과 표준편차를 각각 m, σ라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m+6$에 대하여 대칭이다.

즉, $\mathrm{E}(Y)=m+6$

$\mathrm{E}(2X+1)=\mathrm{E}(2Y+k)$에서

$2\mathrm{E}(X)+1=2\mathrm{E}(Y)+k$

$2m+1=2(m+6)+k$

$1=12+k \quad \therefore k=-11$

답 -11

18 지원자의 영어시험 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(800, 15^2)$을 따른다.

$\therefore m=800,\ \sigma=15$

지원자 5000명 중에서 115명을 신입 사원으로 뽑았으므로 신입 사원으로 뽑힌 합격자의 영어시험 성적의 최솟값을 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X \ge a)=\dfrac{115}{5000}=0.023$

이때, 확률밀도함수의 그래프가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(X \ge m)=0.5$이고, $\mathrm{P}(X \ge a)<0.5$이므로 $a>m$에서

$\mathrm{P}(X \ge a)=0.5-\mathrm{P}(m \le X \le a)=0.023$

$\therefore\ \mathrm{P}(m \le X \le a)=0.5-0.023=0.477$

주어진 그림에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma)&=2\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)\\&=0.954\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)=0.477$

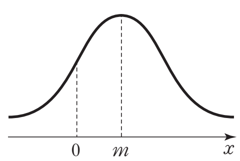
즉, $\mathrm{P}(m \le X \le a)=\mathrm{P}(m \le X \le m+2\sigma)$이므로

$a=m+2\sigma=800+2\times 15=830$ **답** 830

단계	채점 기준	배점
(가)	지원자 5000명 중에서 115명을 신입 사원으로 뽑을 때, 신입 사원으로 뽑힐 확률을 구한 경우	20%
(나)	신입 사원으로 뽑힌 합격자의 영어시험 성적의 최솟값을 a점이라 하고 $\mathrm{P}(X \ge a)=0.023$에서 확률 $\mathrm{P}(m \le X \le a)$를 구한 경우	40%
(다)	주어진 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 a의 값을 구한 경우	40%

19

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ $(m>0)$을 따르므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $f(x)=\mathrm{P}(X \ge x)$ $(x \ge 0)$에 대하여

$f(0)=\mathrm{P}(X \ge 0)$이므로 $\dfrac{1}{2}<f(0)<1$

$f(m)=\mathrm{P}(X \ge m)$이므로 $f(m)=\dfrac{1}{2}$

한편, $0<x_1<x_2$일 때,

$f(x_1)=\mathrm{P}(X \ge x_1)$, $f(x_2)=\mathrm{P}(X \ge x_2)$

이므로 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x>0$에서 감소한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ①이다. **답** ①

20 해결단계

❶ 단계	ㄱ은 $\dfrac{f(30)}{f(6)}<\dfrac{g(30)}{g(6)}<1$을 이용하여 m의 값의 범위에 따라 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그린 후, 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	ㄴ은 ❶ **단계**에서 그린 그래프의 개형과 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고 직선 $x=m$에서 멀리 떨어진 점일수록 함숫값이 작아짐을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄷ은 m이 자연수임을 이용하여 최댓값과 최솟값을 각각 구하고 그 합을 구하여 참, 거짓을 판별한다.

$\dfrac{f(30)}{f(6)}<\dfrac{g(30)}{g(6)}<1$에서 $\dfrac{f(6)}{f(30)}>\dfrac{g(6)}{g(30)}>1$

또한,

$\dfrac{f(30)}{f(6)}<1$에서 $f(30)<f(6)$ $(\because\ f(x)>0)$

$\dfrac{g(30)}{g(6)}<1$에서 $g(30)<g(6)$ $(\because\ g(x)>0)$

이므로 직선 $x=m$은 직선 $x=30$보다 직선 $x=6$에 더 가까워야 한다. 즉,

$|m-6|<|m-30|$

(i) $1 \le m \le 6$ ($\because\ m$은 자연수)이면

$-(m-6)<-(m-30)$에서

$6<30$이므로 항상 성립한다.

(ii) $6<m \le 30$이면

$m-6<-(m-30)$에서 $m<18$

$\therefore\ 6<m<18$

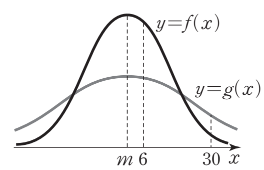
(iii) $m>30$이면

$m-6<m-30$에서

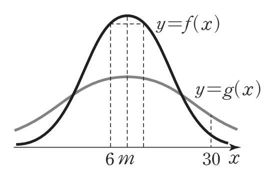
$6>30$이므로 성립하지 않는다.

이때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 m의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

① $1 \le m \le 6$일 때,



② $6<m<18$일 때,



ㄱ. 위의 그림에서 확률변수 Y의 확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프가 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프보다 가운데 부분의 높이가 낮으면서 양옆으로 퍼지는 모양이므로

$\sigma_1<\sigma_2$ (참)

ㄴ. x의 값이 평균 m에 가까울수록 $f(x)$의 값이 커진다.

(i) $1 \le m \le 6$일 때,

$-4 \le m-5 \le 1$에서 $0 \le |m-5| \le 4$,

$-30 \le m-31 \le -25$에서 $25 \le |m-31| \le 30$

즉, $|m-5|<|m-31|$이므로 5와 31 중에서 평균 m에 가까운 값은 5이다.

$\therefore\ f(5)>f(31)$

(ii) $6<m<18$일 때,

즉, $7 \le m \le 17$이므로

$2 \le m-5 \le 12$에서 $2 \le |m-5| \le 12$,

$-24 \le m-31 \le -14$에서 $14 \le |m-31| \le 24$

즉, $|m-5|<|m-31|$이므로 5와 31 중에서 평균 m에 가까운 값은 5이다.

$\therefore\ f(5)>f(31)$

(i), (ii)에서 $f(5)>f(31)$ (참)

ㄷ. 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는 $1\le m<18$이므로 자연수 m의 최댓값은 17, 최솟값은 1이다.
즉, m의 최댓값과 최솟값의 합은
$17+1=18$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

21 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m+2,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-(m+2)}{2}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때,

$$f(m)=\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2-(m+2)}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{m}{2}\right)$$

ㄱ. $f(0)=\mathrm{P}(Z\ge 0)=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(2)-f(-2)=\mathrm{P}(Z\ge -1)-\mathrm{P}(Z\ge 1)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=1-2\mathrm{P}(Z\ge 1)$
$=1-2f(-2)$ (참)

ㄷ. $f(x_1)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{x_1}{2}\right)$, $f(x_2)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{x_2}{2}\right)$이고,
$x_1<x_2$이면 $-\dfrac{x_2}{2}<-\dfrac{x_1}{2}$이므로 $f(x_1)<f(x_2)$
(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

22 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(100,\ 4\sigma^2)$을 따르므로 양수 σ에 대하여
$Z_1=\dfrac{X-120}{\sigma}$, $Z_2=\dfrac{Y-100}{2\sigma}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 즉,

$$\mathrm{P}(X\le 130)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{130-120}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{10}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}(Y\ge k)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{k-100}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le-\frac{k-100}{2\sigma}\right)$$

이때, $\mathrm{P}(X\le 130)=\mathrm{P}(Y\ge k)$이므로
$\mathrm{P}\left(Z_1\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\le-\dfrac{k-100}{2\sigma}\right)$에서
$\dfrac{10}{\sigma}=-\dfrac{k-100}{2\sigma}$, $100-k=20$
$\therefore k=80$ **답** ③

23 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-20}{3}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때,

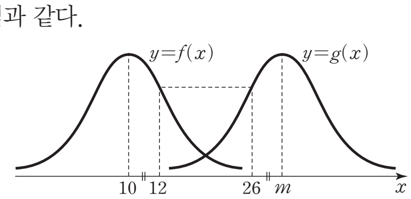
$$\mathrm{P}(14\le X\le 26)=\mathrm{P}\left(\frac{14-20}{3}\le Z_1\le\frac{26-20}{3}\right)=\mathrm{P}(-2\le Z_1\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z_1\le 2)=0.9544$$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_1\le 2)=0.4772$ ……㉠

한편, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 9^2)$을 따르므로
$\mathrm{E}(Y)=m$, $\sigma(Y)=9$
이때, $\mathrm{E}(X)=20$, $\sigma(X)=3$이고, $Y=aX-15$이므로
$\sigma(Y)=\sigma(aX-15)$
$=a\sigma(X)$ ($\because a>0$)
$=a\times 3=9$
$\therefore a=3$
즉, $Y=3X-15$이므로
$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X-15)$
$=3\mathrm{E}(X)-15$
$=60-15=45$
따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 9^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{Y-45}{9}$라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge 63)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{63-45}{9}\right)$
$=\mathrm{P}(Z_2\ge 2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 2)$
$=0.5-0.4772$ ($\because$ ㉠)
$=0.0228$ **답** 0.0228

24 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 x축의 방향으로 평행이동하여 일치시킬 수 있다.
$\mathrm{P}(Y\ge 26)\ge 0.5$에서 $m\ge 26$이고, $f(12)=g(26)$이므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$m-26=12-10$이므로 $m=26+2=28$
즉, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 4^2)$을 따른다.
이때, $Z=\dfrac{Y-28}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le 20)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{20-28}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$ 답 ②

blacklabel 특강 해결실마리

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다. 이때, m은 대칭축을 결정하고, σ는 곡선의 모양을 결정한다. 해당 문항에서 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 같은 모양의 곡선이다.

25 $f(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+1)$

$f(3)\le f(4)$에서 $\mathrm{P}(3\le X\le 4)\le \mathrm{P}(4\le X\le 5)$이므로

$m\ge 4$

$f(5)\ge f(6)$에서 $\mathrm{P}(5\le X\le 6)\ge \mathrm{P}(6\le X\le 7)$이므로

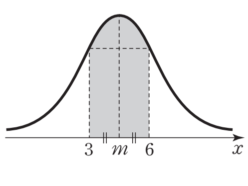
$m\le 6$

$\therefore\ 4\le m\le 6$

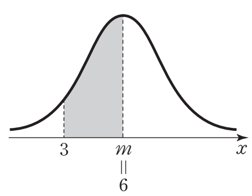
이때, $f(3)+f(4)+f(5)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)$이므로

$f(3)+f(4)+f(5)$의 값은 [그림 1]과 같이 두 직선 $x=3$, $x=6$이 직선 $x=m$에 대하여 대칭일 때, 즉

$m=\dfrac{3+6}{2}=4.5$일 때 최대이고, [그림 2]와 같이 $m=6$일 때 최소이다.



[그림 1]



[그림 2]

$m=4.5$일 때, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(4.5,\ 1^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-4.5}{1}$라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z_1\le 1.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z_1\le 1.5)$

$=2\times 0.4332=0.8664$

$m=6$일 때, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 1^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{X-6}{1}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z_2\le 0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_2\le 3)$

$=0.4987$

즉, $0.4987\le f(3)+f(4)+f(5)\le 0.8664$

따라서 α의 최댓값은 0.4987, β의 최솟값은 0.8664이므로 그 합은

$0.4987+0.8664=1.3651$ 답 1.3651

26 두 확률변수 X, Y가 정규분포를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$라 하면

조건 (가)에 의하여 $Y=aX$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX)=a\mathrm{E}(X)=am$

$\sigma(Y)=\sigma(aX)=|a|\sigma(X)=a\sigma\ (\because\ a>0)$

즉, 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(am,\ (a\sigma)^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-m}{\sigma}$, $Z_2=\dfrac{Y-am}{a\sigma}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\le 18)+\mathrm{P}(Y\ge 36)=1$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\le \dfrac{18-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\ge \dfrac{36-am}{a\sigma}\right)=1$

$\dfrac{18-m}{\sigma}=\dfrac{36-am}{a\sigma}$

$a(18-m)=36-am$, $18a=36$

$\therefore\ a=2$

또한, 조건 (다)에서 $\mathrm{P}(X\le 28)=\mathrm{P}(Y\ge 28)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\le \dfrac{28-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge \dfrac{28-2m}{2\sigma}\right)\ (\because\ a=2)$

$=\mathrm{P}\left(Z_2\le -\dfrac{28-2m}{2\sigma}\right)$

$\dfrac{28-m}{\sigma}=-\dfrac{28-2m}{2\sigma}$

$2(28-m)=-28+2m$

$4m=84\qquad \therefore\ m=21$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=am=2\times 21=42$ 답 42

• 다른풀이 •

$Y=aX$이고, $\mathrm{P}(X\le 18)+\mathrm{P}(Y\ge 36)=1$이므로

$\mathrm{P}(X\le 18)+\mathrm{P}(aX\ge 36)=1$

$\mathrm{P}(X\le 18)+\mathrm{P}\left(X\ge \dfrac{36}{a}\right)=1\ (\because\ a>0)$

즉, $18=\dfrac{36}{a}$이므로 $a=\dfrac{36}{18}=2$

이때, $Y=2X$에서 $X=\dfrac{1}{2}Y$이고,

조건 (다)에서 $\mathrm{P}(X\le 28)=\mathrm{P}(Y\ge 28)$이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}Y\le 28\right)=\mathrm{P}(Y\ge 28)$

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\le 56)=\mathrm{P}(Y\ge 28)$

확률변수 Y의 평균을 m이라 하면 두 직선 $x=56$, $x=28$이 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$m=\dfrac{56+28}{2}=42$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=42$

27 조건 (가)에서 확률변수 X의 표준편차 σ는 확률변수 Z의 표준편차 1보다 크므로 가운데 부분의 높이가 더 낮으면서 양옆으로 퍼져 있는 그래프가 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

한편, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이가 0.096이므로 조건 ㈏에 의하여

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(-1.5\le X\le 1.5)=0.096$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-2\mathrm{P}(0\le X\le 1.5)=0.096$

$$\begin{aligned}2\mathrm{P}(0\le X\le 1.5)&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-0.096\\&=2\times 0.433-0.096\\&=0.866-0.096=0.770\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 1.5)=0.385$

이때, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X}{\sigma}$라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 1.5)=\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le \dfrac{1.5}{\sigma}\right)=0.385$

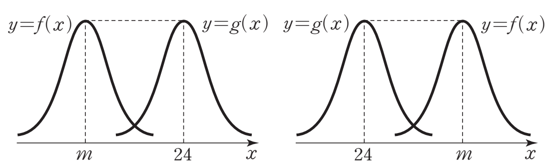
주어진 표준정규분포표에 의하여

$\mathrm{P}(0\le Z_1\le 1.2)=0.385$이므로 $\dfrac{1.5}{\sigma}=1.2$

$\therefore \sigma=\dfrac{1.5}{1.2}=\dfrac{5}{4}$

답 $\dfrac{5}{4}$

28 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이고, X의 평균이 m이므로 함수 $f(x)$는 $x=m$일 때 최댓값을 갖는다.
마찬가지로 확률변수 Y의 확률밀도함수가 $g(x)$이고, 확률변수 Y의 평균이 24이므로 함수 $g(x)$는 $x=24$일 때 최댓값을 갖는다.
이때, 부등식 $f(x)\ge g(24)$를 만족시키는 실수 x의 개수가 1이려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 위치 관계는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(m)=g(24)$이므로 두 함수의 그래프는 서로 평행이동하여 일치시킬 수 있고 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같아야 한다.

$\therefore \sigma=3$

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(24,\ 3^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-m}{3}$, $Z_2=\dfrac{Y-24}{3}$라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(18\le X\le 21)+\mathrm{P}(21\le Y\le 24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{18-m}{3}\le Z_1\le \frac{21-m}{3}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{21-24}{3}\le Z_2\le \frac{24-24}{3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{18-m}{3}\le Z_1\le \frac{21-m}{3}\right)+\mathrm{P}(-1\le Z_2\le 0)\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$㉠

에서 $\mathrm{P}(18\le X\le 21)+\mathrm{P}(21\le Y\le 24)$의 값이 최대이려면 확률 $\mathrm{P}\left(\dfrac{18-m}{3}\le Z_1\le \dfrac{21-m}{3}\right)$이 최대이어야 하므로 두 직선 $x=\dfrac{18-m}{3}$, $x=\dfrac{21-m}{3}$이 직선 $x=0$에 대하여 대칭이어야 한다.
확률변수 Z의 평균

즉, $\dfrac{\dfrac{18-m}{3}+\dfrac{21-m}{3}}{2}=0$에서 $39-2m=0$

$\therefore m=\dfrac{39}{2}$

㉠에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(18\le X\le 21)+\mathrm{P}(21\le Y\le 24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{18-m}{3}\le Z_1\le \frac{21-m}{3}\right)+\mathrm{P}(-1\le Z_2\le 0)\\&\le \mathrm{P}\left(\frac{18-\frac{39}{2}}{3}\le Z_1\le \frac{21-\frac{39}{2}}{3}\right)+\mathrm{P}(-1\le Z_2\le 0)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z_1\le 0.5)+\mathrm{P}(-1\le Z_2\le 0)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z_1\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z_2\le 1)\\&=2\times 0.1915+0.3413\\&=0.7243\end{aligned}$$

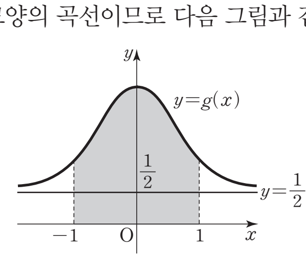
따라서 구하는 최댓값은 0.7243이다.

답 ③

blacklabel 특강 **참고**

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, X의 확률밀도함수는 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$이다. 곡선을 평행이동하여도 모양은 바뀌지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-m$만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
함수 $g(x)$가 σ에 의해서만 달라지므로 정규분포 곡선은 표준편차 σ에 따라 모양이 결정된다.
또한, 최댓값은 $x=m$일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$이므로 최댓값 또한 σ에 의해서만 달라진다.
즉, 두 확률밀도함수의 최댓값이 같으면 표준편차가 같으므로 두 함수의 그래프의 모양은 같다.

29 확률변수 Z의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이고 직선 $y=\dfrac{1}{2}$을 점근선으로 가지는 종 모양의 곡선이므로 다음 그림과 같다.



$\int_{-1}^{1}\left\{f(x)+\frac{1}{2}\right\}dx$는 위의 그림의 어두운 부분의 넓이이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 세 직선 $x=-1$, $x=1$, $y=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left\{f(x)+\frac{1}{2}\right\}dx&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)+2\times\frac{1}{2}\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+1\\&=2\times 0.3413+1\\&=1.6826\end{aligned}$$

즉, 조건 (가)에서

$2\mathrm{P}(X\ge 4)=1.6826$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 4)=0.8413$

이때, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 4)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{4-m}{\sigma}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{m-4}{\sigma}\right)\\&=0.8413\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{4-m}{\sigma}\right)=0.8413>0.5$이므로 $\frac{4-m}{\sigma}<0$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\frac{m-4}{\sigma}\right)=0.3413$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{m-4}{\sigma}=1\qquad \therefore m-4=\sigma$

조건 (나)에서 m, σ가 소수이므로 $m+\sigma$의 값이 최소이려면

$m=7$, $\sigma=3$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\le 13)&=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{13-7}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 0.9772

30 국어 점수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 6^2)$을 따르고, 수학 점수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(58,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-64}{6}$, $Z_2=\frac{Y-58}{10}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, $\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}(Y\ge a)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{a-64}{6}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{a-58}{10}\right)$에서

$\frac{a-64}{6}=\frac{a-58}{10}$, $10a-640=6a-348$

$4a=292\qquad \therefore a=73$

답 73

31 학생들이 수학 시험을 끝내는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 12^2)$을 따른다.

시험을 치르는 90 %의 학생들에게 주어지는 충분한 시험시간을 t분이라 하면 시험을 끝내는 데 t분 이상 걸리는 학생, 즉 t분이 충분하지 않은 학생은 10 %가 되어야 하므로

$\mathrm{P}(X\ge t)=0.1$

이때, $Z=\frac{X-60}{12}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge t)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{t-60}{12}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{t-60}{12}\right)\\&=0.1\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(X\ge t)=0.1<0.5$이므로 $t>60$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{t-60}{12}\right)=0.4$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)=0.40$이므로

$\frac{t-60}{12}=1.28$, $t-60=15.36$

$\therefore t=75.36$

따라서 시험시간을 75.36분으로 해야 한다.

답 75.36

32 이 학급의 임의의 학생의 국어 성적을 X_1, 수학 성적을 X_2, 한국사 성적을 X_3, 사회 성적을 X_4라 하면 네 확률변수 X_1, X_2, X_3, X_4는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(82,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(79,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(70,\ 4^2)$, $\mathrm{N}(70,\ 5^2)$을 따른다.

이때, $Z_1=\frac{X_1-82}{2}$, $Z_2=\frac{X_2-79}{2}$, $Z_3=\frac{X_3-70}{4}$, $Z_4=\frac{X_4-70}{5}$이라 하면 네 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. 이 학급의 임의의 학생의 국어 성적이 수진이보다 높거나 같을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1\ge 85)&=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{85-82}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le 1.5)\end{aligned}$$

또한, 이 학생의 수학 성적이 76점 이하일 확률은

$P(X_2 \le 76) = P\left(Z_2 \le \frac{76-79}{2}\right)$

$= P(Z_2 \le -1.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_2 \le 1.5)$

$\therefore P(X_1 \ge 85) = P(X_2 \le 76)$ (참)

ㄴ. 수진이의 네 과목의 성적을 각각 표준화하면

국어 : $Z_1 = \frac{85-82}{2} = 1.5$

수학 : $Z_2 = \frac{80-79}{2} = 0.5$

한국사 : $Z_3 = \frac{78-70}{4} = 2$

사회 : $Z_4 = \frac{77.5-70}{5} = 1.5$

표준화한 값이 클수록 각 과목 내에서 상대적으로 우수하므로 수진이는 네 과목 중에서 한국사를 가장 잘하고 수학을 가장 못한다. (참)

ㄷ. 네 과목의 90점 이상인 학생의 비율을 각각 구하면

국어 : $P(X_1 \ge 90) = P\left(Z_1 \ge \frac{90-82}{2}\right)$

$= P(Z_1 \ge 4)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_1 \le 4)$

수학 : $P(X_2 \ge 90) = P\left(Z_2 \ge \frac{90-79}{2}\right)$

$= P(Z_2 \ge 5.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_2 \le 5.5)$

한국사 : $P(X_3 \ge 90) = P\left(Z_3 \ge \frac{90-70}{4}\right)$

$= P(Z_3 \ge 5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_3 \le 5)$

사회 : $P(X_4 \ge 90) = P\left(Z_4 \ge \frac{90-70}{5}\right)$

$= P(Z_4 \ge 4)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_4 \le 4)$

확률 $P(0 \le Z \le k)$에서 k의 값이 클수록 확률도 커지므로 90점 이상인 학생의 수는 수학이 가장 적다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

33 빨간색 볼펜의 무게를 X g, 파란색 볼펜의 무게를 Y g이라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(102,\ 2^2)$, $N(103,\ 6^2)$을 따르므로 $Z_1 = \frac{X-102}{2}$, $Z_2 = \frac{Y-103}{6}$

이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 볼펜의 무게가 100g 이하이면 불량품 판정을 하므로 빨간색 볼펜이 불량품일 확률은

$P(X \le 100) = P\left(Z_1 \le \frac{100-102}{2}\right)$

$= P(Z_1 \le -1)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_1 \le 1)$

$= 0.5 - 0.35 = 0.15$

파란색 볼펜이 불량품일 확률은

$P(Y \le 100) = P\left(Z_2 \le \frac{100-103}{6}\right)$

$= P(Z_2 \le -0.5)$

$= 0.5 - P(0 \le Z_2 \le 0.5)$

$= 0.5 - 0.2 = 0.3$

임의로 볼펜 한 개를 선택하였을 때, 그 볼펜이 불량품인 사건을 A, 빨간색인 사건을 B라 하면

$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{2} \times 0.15 = 0.075$

$P(A \cap B^C) = P(B^C)P(A|B^C) = \frac{1}{2} \times 0.3 = 0.15$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B^C) + P(A \cap B)}$

$= \frac{0.075}{0.075 + 0.15}$

$= \frac{0.075}{0.225} = \frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

34 (다음해 연봉) $=$ (올해 연봉) $\times \left(1.04 + \frac{A-m}{10\sigma}\right)$

연봉이 15 % 이상 20 % 이하 인상되었으므로

$1.15 \le 1.04 + \frac{A-m}{10\sigma} \le 1.2$

$0.11 \le \frac{A-m}{10\sigma} \le 0.16$

$1.1 \le \frac{A-m}{\sigma} \le 1.6$

$\therefore m + 1.1\sigma \le A \le m + 1.6\sigma$

직원들의 근무 점수 A가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z = \frac{A-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이 회사 직원 중에서 연봉이 15 % 이상 20 % 이하 인상된 직원의 비율은

$P(m + 1.1\sigma \le A \le m + 1.6\sigma)$

$= P\left(\frac{m + 1.1\sigma - m}{\sigma} \le \frac{A-m}{\sigma} \le \frac{m + 1.6\sigma - m}{\sigma}\right)$

$= P(1.1 \le Z \le 1.6)$

$= P(0 \le Z \le 1.6) - P(0 \le Z \le 1.1)$

$= 0.4452 - 0.3643$

$= 0.0809$

따라서 이 회사 직원 중에서 연봉이 15 % 이상 20 % 이하 인상된 직원의 수는

$0.0809 \times 10000 = 809$(명) 답 809

35 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(720,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=0)={}_{720}\mathrm{C}_0(1-p)^{720}=\dfrac{1}{6^{720}}$에서

$(1-p)^{720}=\dfrac{1}{6^{720}}$, $1-p=\dfrac{1}{6}$ ($\because 0<p<1$)

$\therefore p=\dfrac{5}{6}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{5}{6}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{5}{6}=600$,

$\mathrm{V}(X)=720\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=100=10^2$

이때, 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-600}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 580)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{580-600}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 0.9772

36 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이고, 주사위를 n번 던지므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=n\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{n}{3}$,

$\quad\mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2n}{9}$

이때, n은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{n}{3},\ \left(\dfrac{\sqrt{2n}}{3}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-\dfrac{n}{3}}{\dfrac{\sqrt{2n}}{3}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|X-\frac{n}{3}\right|\le 7\right)&=\mathrm{P}\left(-7\le X-\frac{n}{3}\le 7\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{-7}{\frac{\sqrt{2n}}{3}}\le Z\le\frac{7}{\frac{\sqrt{2n}}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{21}{\sqrt{2n}}\le Z\le\frac{21}{\sqrt{2n}}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21}{\sqrt{2n}}\right)\\&\ge 0.954\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{21}{\sqrt{2n}}\right)\ge 0.477$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.477$이므로

$\dfrac{21}{\sqrt{2n}}\ge 2$, $\sqrt{2n}\le\dfrac{21}{2}$

$2n\le\dfrac{441}{4}\qquad\therefore n\le\dfrac{441}{8}=55.125$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 55이다. 답 55

37 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따르는 확률변수를 X라 하면 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)={}_{100}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{9}{10}\right)^x\left(\dfrac{1}{10}\right)^{100-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$

이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\mathrm{P}(X=100)+\mathrm{P}(X=99)\\&\quad+\cdots+\mathrm{P}(X=96)\\&=\mathrm{P}(X\ge 96)\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

또한, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{9}{10}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{9}{10}=90$,

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{10}=9=3^2$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-90}{3}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\mathrm{P}(X\ge 96)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{96-90}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 0.0228

38 흰 공 2개와 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼냈을 때, 검은 공이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$

이 시행을 n회 반복하여 검은 공이 나오는 횟수를 X라 하면 흰 공이 나오는 횟수는 $n-X$이고, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{3}n$, $\mathrm{V}(X)=\dfrac{2}{9}n$

이 시행을 n회 반복한 후 받은 사탕의 개수의 합을 Y라 하면

$Y=2X+(n-X)=X+n$

이고, 사탕의 개수의 합의 기댓값이 216개이므로

$\mathrm{E}(Y)=216$에서 $\mathrm{E}(X+n)=216$

$\mathrm{E}(X)+n=216$, $\dfrac{1}{3}n+n=216$

$\frac{4}{3}n=216 \qquad \therefore n=216\times\frac{3}{4}=162$

$\therefore \mathrm{E}(X)=54,\ \mathrm{V}(X)=36=6^2$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X+162)=\mathrm{V}(X)=36=6^2$

이때, 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(216,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-216}{6}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 받은 사탕의 개수의 합이 225개 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 225)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{225-216}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 0.0668

39 주사위를 한 개 던져 3의 배수인 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 주사위를 450번 던졌을 때 3의 배수인 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150,$

$\quad \mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100=10^2$

한편, A, B 두 사람이 주사위를 던져 3의 배수인 눈이 나오면 B가 A에게 구슬을 2개 주고, 그 외의 눈이 나오면 A가 B에게 구슬을 1개 주므로 주사위를 450번 던진 후 A, B 두 사람이 각각 가진 구슬의 개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{A가 가진 구슬의 개수})&=900+2X-(450-X)\\&=450+3X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{B가 가진 구슬의 개수})&=900-2X+(450-X)\\&=1350-3X\end{aligned}$$

A가 가진 구슬의 개수가 B가 가진 구슬의 개수보다 90개 이상 많아야 하므로

$450+3X\ge 1350-3X+90$

$6X\ge 990 \qquad \therefore X\ge 165$

이때, 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-150}{10}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 확률 α는

$$\begin{aligned}\alpha&=\mathrm{P}(X\ge 165)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{165-150}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

$\therefore 10000\alpha=668$

답 668

40 폐암 발병자의 수를 X라 하면 1년 간 폐암 발생률이 20 %이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(40000,\ 0.2)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=40000\times 0.2=8000,$

$\quad \mathrm{V}(X)=40000\times 0.2\times 0.8=6400=80^2$

이때, 40000은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(8000,\ 80^2)$을 따른다.

보험회사가 x명의 지급금을 준비했다고 하면 지급금이 부족해질 확률이 2 %보다 작아야 하므로

$\mathrm{P}(X>x)<0.02$

이때, $Z=\frac{X-8000}{80}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X>x)<0.02$, 즉 $\mathrm{P}(X>x)<0.5$이므로 $\frac{x-8000}{80}>0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>x)&=\mathrm{P}\left(Z>\frac{x-8000}{80}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{x-8000}{80}\right)<0.02\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{x-8000}{80}\right)>0.48$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{x-8000}{80}>2,\ x-8000>160$

$\therefore x>8160$

따라서 보험회사는 최소 8161명의 지급금을 준비해야 하므로 $x=8161$이다.

답 ①

41 실제로 고속 철도에 타는 사람 수를 X라 하면 고객 한 명이 예약을 취소하거나 실제로 고속 철도에 타지 않을 확률은 20 %이고 예약자는 총 100명이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \underbrace{\frac{4}{5}}_{=1-\frac{1}{5}}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times\frac{4}{5}=80,$

$\quad \mathrm{V}(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16=4^2$

이때, 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-80}{4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 탑승객이 87명 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 87)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{87-80}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.75)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.75)\\&=0.5-0.4599\\&=0.0401\end{aligned}$$

답 ③

42 어느 자영업자의 하루 매출액을 X만 원이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 4^2)$을 따르고, $Z_1=\frac{X-30}{4}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 하루

매출액이 31만 원 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 31)&=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{31-30}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1\ge 0.25)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le 0.25)\\&=0.5-0.10\\&=0.4\end{aligned}$$

한편, 영업한 600일 중에서 하루 매출액이 31만 원 이상인 날 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(600,\ 0.4)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=600\times0.4=240,$

$\mathrm{V}(Y)=600\times0.4\times0.6=144=12^2$

이때, 600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(240,\ 12^2)$을 따르고, $Z_2=\frac{Y-240}{12}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 기부금의 총 금액을 확률변수 W라 하면 $W=1000Y$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(W\ge 222000)&=\mathrm{P}(1000Y\ge 222000)\\&=\mathrm{P}(Y\ge 222)\\&=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{222-240}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_2\ge -1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_2\le 1.5)\\&=0.5+0.43\\&=0.93\end{aligned}$$

답 ④

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 표준정규분포를 두 번 적용해야 하는 문제로, 문제에 주어진 많은 정보를 어디에 어떻게 활용해야 하는지를 묻는 문제이다.
먼저 매출액에 대한 확률분포의 평균과 표준편차는 모두 나와 있으며 이를 이용하여 하루 매출액이 31만 원 이상일 때의 확률을 먼저 구해준다. 그런 다음 이 확률을 이용하여 600일 동안 영업할 때 하루 매출액이 31만 원 이상인 날이 222일 이상일 확률을 구해 주면 된다.
이 문제와 같이 표준정규분포를 두 번 적용해야 하는 문제에서는 마지막에 어떤 값을 구해야 하는지를 정확히 알고 접근해야 한다.

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 63

01 $\frac{1}{6}$	**02** 38	**03** 0.0228	**04** 650점	**05** ㄱ
06 ㄱ, ㄴ	**07** 0.07			

01 해결단계

❶ 단계	주어진 이항분포를 이용하여 추가된 부품 S의 개수에 따른 확률질량함수를 구한다.
❷ 단계	7개의 부품 중에서 임의로 한 개를 선택한 것이 T인 사건을 A, 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B라 하고, 추가된 부품의 종류에 따라 경우를 나누어 두 확률 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 구한다.
❸ 단계	확률 $\mathrm{P}(B\mid A)$를 구한다.

추가된 부품 S의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=r)={}_2\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{2-r}={}_2\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^2\ (r=0,\ 1,\ 2)$

7개의 부품 중에서 임의로 한 개를 선택한 것이 T인 사건을 A, 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B라 하자.

부품 S가 3개, 부품 T가 2개 있는 상태에서 부품 S 또는 부품 T를 2개 추가하였으므로 추가한 부품의 종류에 따른 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 부품 S 두 개를 추가한 경우

부품 S 두 개를 추가할 확률은

$\mathrm{P}(X=2)={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

창고에는 부품 S가 5개, 부품 T가 2개 있으므로 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\frac{2}{7}$

(ii) 부품 S, 부품 T를 각각 한 개씩 추가한 경우

부품 S, 부품 T를 각각 한 개씩 추가할 확률은

$\mathrm{P}(X=1)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

창고에는 부품 S가 4개, 부품 T가 3개 있으므로 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\frac{3}{7}$

(iii) 부품 T 두 개를 추가한 경우

부품 T 두 개를 추가할 확률은

$\mathrm{P}(X=0)={}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

창고에는 부품 S가 3개, 부품 T가 4개 있으므로 이 7개의 부품 중 임의로 1개를 선택한 것이 T일 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\frac{4}{7}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

02 해결단계

❶ 단계	$f(m-1)+f(m+1)+f(m+3)+\cdots=0.69$를 간단히 정리한다.
❷ 단계	$f(t)$의 값이 최대이기 위한 조건을 찾고, **❶단계**에서 구한 식을 이용하여 $f(t)$의 최댓값을 구하여 M의 최솟값을 구한다.
❸ 단계	$100M$의 최솟값을 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, $f(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+2)$이므로

$$f(m-1)+f(m+1)+f(m+3)+\cdots$$
$$=\mathrm{P}(m-1\le X\le m+1)+\mathrm{P}(m+1\le X\le m+3)+\mathrm{P}(m+3\le X\le m+5)+\cdots$$
$$=\mathrm{P}(X\ge m-1)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{m-1-m}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge -0.5)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.69$$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.19$

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 $f(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+2)$의 값이 최대이려면 두 직선 $x=t$, $x=t+2$가 직선 $x=m$에 대칭이어야 한다. 즉,

$\dfrac{t+t+2}{2}=m$에서 $t+1=m$ $\quad\therefore\ t=m-1$

$$\therefore\ f(m-1)=\mathrm{P}(m-1\le X\le m+1)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-1-m}{2}\le Z\le \frac{m+1-m}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0.5)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=2\times 0.19=0.38$$

따라서 $f(t)\le M$을 만족시키는 M의 최솟값이 0.38이므로 $100M$의 최솟값은

$0.38\times 100=38$ **답** 38

03 해결단계

❶ 단계	A, B 두 사람이 가위바위보 게임을 하여 서로 이길 확률을 각각 구한다.
❷ 단계	가위바위보 게임을 n번 시행한 후, B가 얻는 점수의 기댓값이 390점임을 이용하여 n의 값을 구한다.
❸ 단계	A가 얻는 점수가 450점 이상일 확률을 구한다.

A와 B 두 사람이 가위바위보 게임을 하여

A가 이길 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

B가 이길 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

A, B가 가위바위보 게임을 한 번 하여 이기면 3점을 얻고, 비기거나 지면 1점을 얻으므로 이 시행을 n번 하였을 때 B가 이기는 횟수를 확률변수 X라 하면 비기거나 지는 횟수가 $n-X$이므로 n번의 시행 후 B가 얻는 점수는

$3X+(n-X)=2X+n$

이때, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{5}{16}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{5}{16}n$

이고, B가 얻는 점수의 기댓값이 390점이므로

$\mathrm{E}(2X+n)=390$, $2\mathrm{E}(X)+n=390$

$\dfrac{5}{8}n+n=390$, $\dfrac{13}{8}n=390$

$\therefore\ n=390\times\dfrac{8}{13}=240$

한편, 이 시행을 240번 하였을 때, A가 이기는 횟수를 확률변수 Y라 하면 비기거나 지는 횟수가 $240-Y$이므로 240번의 시행 후 A가 얻는 점수는

$3Y+(240-Y)=2Y+240$

A가 얻는 점수가 450점 이상이려면

$2Y+240\ge 450$, $2Y\ge 210$

$\therefore\ Y\ge 105$

이때, Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240,\ \dfrac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=240\times\dfrac{3}{8}=90$,

$\mathrm{V}(Y)=240\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{225}{4}$,

$\sigma(Y)=\sqrt{\mathrm{V}(Y)}=\sqrt{\dfrac{225}{4}}=\dfrac{15}{2}$

240은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(90,\ \left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{Y-90}{\frac{15}{2}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y\ge 105)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{105-90}{\frac{15}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

답 0.0228

04 해결단계

❶ 단계	단추를 한 번 눌러 숫자 n이 나왔을 때, 주사위 1개를 n번 던져 짝수의 눈이 나오는 횟수가 따르는 이항분포를 구한다.
❷ 단계	짝수의 눈이 나오는 횟수와 그때의 점수의 합의 기댓값을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	얻는 점수의 합의 기댓값을 구한다.

장치 A의 단추를 한 번 눌러 숫자 $n(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 19)$이 나왔을 때, 주사위 1개를 n번 던져 짝수의 눈이 나오는 횟수를 X, 그때의 점수의 합을 Y라 하면 $Y=100X$

이때, 주사위 1개를 1번 던져 $\underbrace{\text{짝수의 눈}}_{=2,\,4,\,6}$이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=n\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$

$$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$$
$$=100\times\frac{n}{2}=50n$$

한편, 장치 A에서 n이 나타날 확률은 $\dfrac{n}{190}$이므로 구하는 기댓값은

$$\sum_{n=1}^{19} 50n \times \frac{n}{190} = \frac{5}{19}\sum_{n=1}^{19} n^2$$
$$= \frac{5}{19} \times \frac{19\times 20 \times 39}{6}$$
$$=650(\text{점})$$

답 650점

05 해결단계

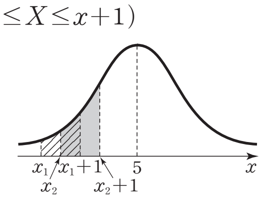
❶ 단계	ㄱ은 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$을 따르므로 확률밀도함수의 그래프가 직선 $x=5$에 대하여 대칭임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	ㄴ은 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률은 구간에서의 확률밀도함수와 x축 사이의 넓이임을 이해하여 증가, 감소를 파악하고, 확률이 최대가 되기 위한 x의 값을 구하여 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄷ은 5 이상의 실수 k에 대하여 $f(k)$, $g(k)$의 값의 범위를 추측한 후, 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\mathrm{P}(X\le x)$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$
$=\mathrm{P}(X\le1)+\mathrm{P}(X\le2)+\mathrm{P}(X\le3)+\mathrm{P}(X\le4)$
$\quad+\mathrm{P}(X\le5)+\mathrm{P}(X\le6)+\mathrm{P}(X\le7)+\mathrm{P}(X\le8)$
$\quad+\mathrm{P}(X\le9)$
$=\mathrm{P}(X\ge9)+\mathrm{P}(X\ge8)+\mathrm{P}(X\ge7)+\mathrm{P}(X\ge6)$
$\quad+\mathrm{P}(X\le5)+\mathrm{P}(X\le6)+\mathrm{P}(X\le7)+\mathrm{P}(X\le8)$
$\quad+\mathrm{P}(X\le9)$
$=\{\mathrm{P}(X\ge9)+\mathrm{P}(X\le9)\}+\{\mathrm{P}(X\ge8)+\mathrm{P}(X\le8)\}$
$\quad+\{\mathrm{P}(X\ge7)+\mathrm{P}(X\le7)\}+\{\mathrm{P}(X\ge6)+\mathrm{P}(X\le6)\}$
$\quad+\mathrm{P}(X\le5)$
$=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x+1)-f(x)$
$\qquad=\mathrm{P}(X\le x+1)-\mathrm{P}(X\le x)$
$\qquad=\mathrm{P}(x\le X\le x+1)$



위의 그림의 X의 확률밀도함수의 그래프에서

$x_1<x_2$일 때,

$g(x_2)-g(x_1)$
$=\mathrm{P}(x_2\le X\le x_2+1)-\mathrm{P}(x_1\le X\le x_1+1)$
$=\mathrm{P}(x_1+1\le X\le x_2+1)-\mathrm{P}(x_1\le X\le x_2)$

이때, $g(x_2)-g(x_1)>0$, 즉

$\mathrm{P}(x_1\le X\le x_2)<\mathrm{P}(x_1+1\le X\le x_2+1)$이면

함수 $g(x)$는 증가한다.

두 직선 $x=x_1$, $x=x_1+1$이 직선 $x=5$에 대하여 대칭이면 확률 $\mathrm{P}(x_1\le X\le x_1+1)$이 최대이므로

$\dfrac{x_1+x_1+1}{2}=5$에서 $x_1=\dfrac{9}{2}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x\le\dfrac{9}{2}$에서 증가한다. (거짓)

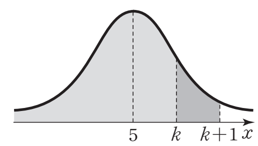
ㄷ. ㄴ에서 $g(x)=\mathrm{P}(x\le X\le x+1)$이므로

$f(k)=g(k)$에서 $\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(k\le X\le k+1)$

그런데 5 이상의 실수 k에 대하여

$\mathrm{P}(X\le k)\ge0.5$이고,

$\mathrm{P}(k\le X\le k+1)<0.5$



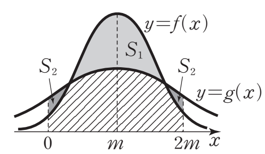
이므로 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 5 이상의 실수 k는 존재하지 않는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

06 해결단계

❶ 단계	S_1, $2S_2$를 각각 X, Y에 대한 확률로 나타낸다.
❷ 단계	확률변수 X, Y를 표준화한 후, $h(m)$을 표준정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률로 나타내어 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.



위의 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 S라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$S_1=\mathrm{P}(0\le X\le 2m)-S$,

$2S_2=\mathrm{P}(0\le Y\le 2m)-S$

한편, 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-m}{10}$, $Z_2=\dfrac{Y-m}{20}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore h(m)=S_1-2S_2$
$\qquad=\mathrm{P}(0\le X\le 2m)-\mathrm{P}(0\le Y\le 2m)$
$\qquad=\mathrm{P}\left(-\dfrac{m}{10}\le Z_1\le\dfrac{m}{10}\right)-\mathrm{P}\left(-\dfrac{m}{20}\le Z_2\le\dfrac{m}{20}\right)$
$\qquad=2\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{m}{10}\right)-2\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\dfrac{m}{20}\right)$
$\qquad=2\left\{\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{m}{10}\right)-\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\dfrac{m}{20}\right)\right\}$

ㄱ. $h(10)=2\{\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)-\mathrm{P}(0\le Z_2\le0.5)\}$
$\qquad=2\times(0.34-0.19)$
$\qquad=2\times0.15$
$\qquad=0.3$ (참)

ㄴ. $m>0$이므로 $\dfrac{m}{10}>\dfrac{m}{20}$이다.

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{m}{10}\right)>\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\dfrac{m}{20}\right)$이므로

$h(m)>0$ (참)

ㄷ. (반례) $m_1=10$, $m_2=20$일 때,

$h(20)-h(10)$

$=2\{\mathrm{P}(0\le Z_1\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 1)\}$

$\quad -2\{\mathrm{P}(0\le Z_1\le 1)-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 0.5)\}$

$=2\times(0.48-0.34)-2\times(0.34-0.19)$

$=2\times 0.14-2\times 0.15$

$=-0.02<0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

07 해결단계

❶ 단계	제품 A의 무게를 X라 하고 확률변수 X가 따르는 정규분포를 구한 후, 불량품이 나올 확률을 구한다.
❷ 단계	15000개의 제품 중에서 불량품의 개수를 Y라 하고, 확률변수 Y가 따르는 이항분포를 구한다.
❸ 단계	확률변수 Y가 근사적으로 따르는 정규분포를 구하여 확률을 구한다.

제품 A의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{X-200}{10}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

제품 A가 불량품 판정을 받을 확률은

$\mathrm{P}(X\le 180)+\mathrm{P}(X\ge 220)$

$=\mathrm{P}\left(Z_1\le\dfrac{180-200}{10}\right)+\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{220-200}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_1\le -2)+\mathrm{P}(Z_1\ge 2)$

$=2\mathrm{P}(Z_1\ge 2)$

$=2\times\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le 2)\}$

$=2\times(0.5-0.48)$

$=0.04$

한편, 이 공장에서 하루에 생산되는 15000개의 제품 A 중에서 불량품의 개수를 Y라 하면 제품 하나가 불량품일 확률이 0.04이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(15000,\ 0.04)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=15000\times 0.04=600$,

$\quad \mathrm{V}(Y)=15000\times 0.04\times 0.96=576=24^2$

이때, 15000은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 24^2)$을 따르고, $Z_2=\dfrac{Y-600}{24}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y\ge 636)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{636-600}{24}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_2\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 1.5)$

$=0.5-0.43$

$=0.07$ 답 0.07

이것이 수능 p. 64

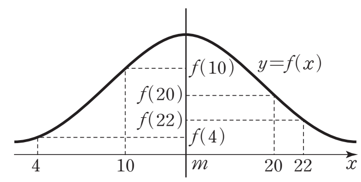
1 62　2 ③　3 ⑤　4 ③

1 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 이용하여 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, m의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	m이 자연수임을 이용하여 m의 값을 구한 후, 정규분포의 표준화를 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	$1000a$의 값을 구한다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양이다.

두 조건 (가), (나)에서 $f(10)>f(20)$, $f(4)<f(22)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 다음 그림과 같다.



$f(10)>f(20)$에서 $m<\dfrac{10+20}{2}=15$

$f(4)<f(22)$에서 $m>\dfrac{4+22}{2}=13$

$\therefore\ m=14$ ($\because$ m은 자연수)

즉, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 5^2)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{X-14}{5}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(17\le X\le 18)=\mathrm{P}\left(\dfrac{17-14}{5}\le Z\le\dfrac{18-14}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0.6\le Z\le 0.8)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.288-0.226=0.062$

따라서 $a=0.062$이므로

$1000a=1000\times 0.062=62$ 답 62

2 해결단계

❶ 단계	주어진 식을 표준화하여 정리한다.
❷ 단계	정규분포의 표준화와 정규분포 곡선의 성질을 이용하여 σ의 값을 구한다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$이라 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 즉,

$\mathrm{P}(m\le X\le m+12)-\mathrm{P}(X\le m-12)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-m}{\sigma}\le Z\le\dfrac{m+12-m}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{m-12-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\le -\dfrac{12}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma}\right)=0.3664$ ……㉠

한편, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma}\right)=0.5$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{12}{\sigma}\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{12}{\sigma}\right)$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)-\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)\right\}=0.3664$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)=0.8664$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{12}{\sigma}=1.5 \qquad \therefore \sigma=\frac{12}{1.5}=8$

답 ③

3 해결단계

❶단계	이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X라 하고 정규분포의 표준화를 이용하여 이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간이 73분 이상일 확률을 구한다.
❷단계	이 회사 직원들 중에서 임의로 선택한 1명이 지하철을 이용하였을 확률을 구한다.

이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4,\ 15^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{X-66.4}{15}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\ge 73)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)$

$=0.5-0.17=0.33$

이 회사 직원들 중에서 출근 시간이 73분 이상인 직원들의 40 %, 73분 미만인 직원들의 20 %만이 이 날 지하철을 이용하여 출근하였으므로 구하는 확률은

$0.33\times 0.4+(1-0.33)\times 0.2$

$=0.33\times 0.4+0.67\times 0.2$

$=0.132+0.134=0.266$

답 ⑤

4 해결단계

❶단계	이 학교 학생들의 수학 점수를 확률변수 X라 하고 이 학교 학생의 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B가 될 조건을 X를 이용하여 나타낸다.
❷단계	정규분포의 표준화를 이용하여 **❶단계**를 만족시키는 확률을 구한다.

이 학교 학생들의 수학 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(67,\ 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-67}{12}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

주어진 성취도 기준 표에 의하여 성취도가 A 또는 B인 학생들의 비율은

$\mathrm{P}(X\ge 89)+\mathrm{P}(79\le X<89)$

$=\mathrm{P}(X\ge 79)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{79-67}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

답 ③

06 통계적 추정

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 66

01 ③ 02 ④ 03 $\frac{1}{10}$ 04 $\frac{1}{2}$ 05 ⑤
06 ② 07 64 08 ②

01 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 임의추출한 표본을 X_1, X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

X_1, X_2에 따른 확률변수 $\overline{X}$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	8	9	11	12	15
8	8	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	10	$\frac{23}{2}$
9	$\frac{17}{2}$	9	10	$\frac{21}{2}$	12
11	$\frac{19}{2}$	10	11	$\frac{23}{2}$	13
12	10	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$	12	$\frac{27}{2}$
15	$\frac{23}{2}$	12	13	$\frac{27}{2}$	15

따라서 서로 다른 $\overline{X}$의 개수는

$8,\ \frac{17}{2},\ 9,\ \frac{19}{2},\ 10,\ \frac{21}{2},\ 11,\ \frac{23}{2},\ 12,\ 13,\ \frac{27}{2},\ 15$

로 12이다.

답 ③

02 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하므로 임의추출한 표본을 $\{X_1,\ X_2\}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

(i) $\{X_1,\ X_2\}$가 $\{0,\ 0\}$, $\{2,\ 2\}$, $\{4,\ 4\}$일 때,
표본평균 $\overline{X}$가 각각 0, 2, 4이므로 표본분산은

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\}$

$=0$

(ii) $\{X_1,\ X_2\}$가 $\{0,\ 2\}$, $\{2,\ 0\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{4,\ 2\}$일 때,
표본평균 $\overline{X}$가 각각 1, 1, 3, 3이므로 표본분산은

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\}$

$=1+1=2$

(iii) $\{X_1,\ X_2\}$가 $\{0,\ 4\}$, $\{4,\ 0\}$일 때,
표본평균 $\overline{X}$가 모두 2이므로 표본분산은

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\}$

$=4+4=8$

(i), (ii), (iii)에서 표본분산 S^2의 최댓값은 8이다.

답 ④

03 주어진 확률분포를 나타낸 표에서 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ ······㉠

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{2}+20a+30b=5+20a+30b$

이때, $\mathrm{E}(\overline{X})=18$이고, $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$이므로

$5+20a+30b=18$

$\therefore 20a+30b=13$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{3}{10}$

$\therefore b-a=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

04 확률변수 X의 확률질량함수가

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a-x}{10}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이고, 확률의 총합은 1이므로

$\frac{a-1}{10}+\frac{a-2}{10}+\frac{a-3}{10}+\frac{a-4}{10}=1$

$\frac{4a-10}{10}=1,\ 4a=20 \qquad \therefore a=5$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}$

$=\frac{20}{10}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}$

$=\frac{50}{10}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

따라서 표본의 크기가 4이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

05 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X-20}{2}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(20\le X\le 30)=\mathrm{P}\left(\frac{20-20}{2}\le Z_1\le\frac{30-20}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_1\le 5)$

한편, 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{2^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(20,\ \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_2=\frac{\overline{X}-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(20\le\overline{X}\le 22)=\mathrm{P}\left(\frac{20-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\le Z_2\le\frac{22-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_2\le\sqrt{n})$

이때, $\mathrm{P}(20\le\overline{X}\le 22)=\mathrm{P}(20\le X\le 30)$이므로

$\mathrm{P}(0\le Z_2\le\sqrt{n})=\mathrm{P}(0\le Z_1\le 5)$에서

$\sqrt{n}=5 \qquad \therefore n=25$

답 ⑤

06 이 지역의 1인 가구의 월 식료품 구입비를 X만 원이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 8^2)$을 따르므로 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(45,\ 2^2)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 16가구의 월 식료품 구입비의 표본평균이 44만 원 이상이고 47만 원 이하일 확률은

$\mathrm{P}(44\le\overline{X}\le 47)=\mathrm{P}\left(\frac{44-45}{2}\le Z\le\frac{47-45}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.1915+0.3413$

$=0.5328$

답 ②

07 $n>50$에서 표본의 크기 n이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 0.4를 이용할 수 있다.

표본평균이 a, 표본표준편차가 0.4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$a-2\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}\le m\le a+2\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.475$에서
$\mathrm{P}(|Z|\le 2)=2\times 0.475=0.95$

위의 신뢰구간이 $2.4\le m\le 2.6$이므로

$a-2\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=2.4$ ······㉠

$a+2\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=2.6$ ······㉡

㉡$-$㉠을 하면 $2\times 2\times\frac{0.4}{\sqrt{n}}=0.2$이므로

$\sqrt{n}=8 \qquad \therefore n=64$

답 64

08 표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 α %로 추정할 때, 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

① $n=36,\ \sigma=4$이면 신뢰구간의 길이는

$2\times k\times\frac{4}{\sqrt{36}}=\frac{4}{3}k$

② $n=36$, $\sigma=9$이면 신뢰구간의 길이는

$$2\times k\times\frac{9}{\sqrt{36}}=3k$$

③ $n=81$, $\sigma=9$이면 신뢰구간의 길이는

$$2\times k\times\frac{9}{\sqrt{81}}=2k$$

④ $n=81$, $\sigma=12$이면 신뢰구간의 길이는

$$2\times k\times\frac{12}{\sqrt{81}}=\frac{8}{3}k$$

⑤ $n=100$, $\sigma=12$이면 신뢰구간의 길이는

$$2\times k\times\frac{12}{\sqrt{100}}=\frac{12}{5}k$$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다. 답 ②

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 67~70

01 ③	02 $\frac{4}{49}$	03 ③	04 $\frac{9}{32}$	05 ②
06 26	07 $\frac{21}{100}$	08 4	09 ⑤	10 0.4
11 $2\sqrt{17}$	12 64	13 400	14 ③	15 0.0228
16 ②	17 ①	18 107.064	19 129	20 ③
21 ③	22 32	23 ②	24 427	25 960
26 ①	27 ②	28 ④		

01 모집단에서 추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 표본평균이 $\overline{X_i}$이므로

$$\frac{X_1+X_2}{2}=\overline{X_i}\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

$\overline{X_i}=2$에서 $X_1+X_2=4$ ……㉠

(i) $\overline{X_1}=2$일 때,

추출한 것을 넣지 않고 하나씩 순서대로 추출하여 ㉠을 만족시키려면 추출한 표본 $(X_1,\ X_2)$는 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$이어야 한다.

$$\therefore p_1=\mathrm{P}(\overline{X_1}=2)=\frac{2}{{}_3\mathrm{P}_2}=\frac{2}{3\times2}=\frac{1}{3}$$

(ii) $\overline{X_2}=2$일 때,

한꺼번에 2개의 표본을 모두 추출하여 ㉠을 만족시키려면 추출한 표본 $(X_1,\ X_2)$는 $(1,\ 3)$이어야 한다.

$$\therefore p_2=\mathrm{P}(\overline{X_2}=2)=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$

(iii) $\overline{X_3}=2$일 때,

하나씩 순서대로 복원추출하여 ㉠을 만족시키려면 추출한 표본 $(X_1,\ X_2)$는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이어야 한다.

$$\therefore p_3=\mathrm{P}(\overline{X_3}=2)=\frac{3}{{}_3\Pi_2}=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 $p_1=p_2=p_3$이다. 답 ③

02 모집단에서 추출한 크기가 3인 표본을 X_1, X_2, X_3이라 하면 $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}=\overline{X}$

$\overline{X}=3$에서 $X_1+X_2+X_3=9$

(단, $1\le X_i\le7$인 자연수, $i=1,\ 2,\ 3$)

이때, $X_1=X_1'+1$, $X_2=X_2'+1$, $X_3=X_3'+1$

(X_1', X_2', X_3'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$X_1'+X_2'+X_3'=6$ (단, X_1', X_2', X_3'은 음이 아닌 정수)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2}=28$$

$$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{28}{7\times7\times7}=\frac{4}{49}$$

답 $\frac{4}{49}$

• 다른풀이 •

7개의 구슬에서 3개의 구슬을 임의추출하는 경우의 수는 7^3이다.

이때, 추출한 3개의 구슬에 적힌 숫자를 각각 X_1, X_2, X_3이라 하면

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$$

$\overline{X}=3$에서 $X_1+X_2+X_3=9$

$X_1+X_2+X_3=9$인 순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 개수는 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) $\{X_1,\ X_2,\ X_3\}$이 $\{1,\ 2,\ 6\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$인 경우

순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 개수는

$3!\times3=6\times3=18$

(ii) $\{X_1,\ X_2,\ X_3\}$이 $\{1,\ 1,\ 7\}$, $\{1,\ 4,\ 4\}$, $\{2,\ 2,\ 5\}$인 경우

순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 개수는

$$\frac{3!}{2!}\times3=9$$

(iii) $\{X_1,\ X_2,\ X_3\}$이 $\{3,\ 3,\ 3\}$인 경우

순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$의 개수는 $(3,\ 3,\ 3)$으로 1

(i), (ii), (iii)에서 $\overline{X}=3$인 경우의 수는

$18+9+1=28$

$$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}=3)=\frac{28}{7^3}=\frac{4}{49}$$

03 주머니에서 2개의 공을 한 개씩 복원추출하여 얻은 숫자의 표본평균이 $\overline{X}$이므로 표본을 X_1, X_2라 하면

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$$

X_1, X_2에 따른 확률변수 $\overline{X}$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

각 X_1, X_2에 따른 표본분산

$S^2=\frac{1}{2-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2\}$

의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	1	3	5	7
1	0	2	8	18
3	2	0	2	8
5	8	2	0	2
7	18	8	2	0

$\therefore \mathrm{E}(S^2)=\frac{0\times4+2\times6+8\times4+18\times2}{16}$

$=\frac{80}{16}=5$ 답 ③

blacklabel 특강 참고

표본분산의 평균은 모분산과 같다. 즉, 모집단의 분산을 σ^2이라 하고, 이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본분산을 S^2이라 하면

$\mathrm{E}(S^2)=\sigma^2$

위의 내용을 이용하여 해당 문항의 임의추출한 크기가 2인 표본에 대하여 표본분산의 평균을 구해보자.

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=\frac{16}{4}=4$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}=\frac{84}{4}=21$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=21-4^2=5$

따라서 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본분산이 S^2이므로 $\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{V}(X)=5$

04 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 X_1, X_2, X_3이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

표본 $\{X_1, X_2, X_3\}$을 다음과 같이 경우를 나누어 표본분산을 구할 수 있다.

(i) 표본이 $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{4, 4, 4\}$인 경우

표본평균 $\overline{X}$가 각각 1, 2, 4이므로 표본분산은

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{2}\times0=0$

(ii) 표본이 $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 2\}$인 경우

자료값에서 평균을 뺀 값

표본평균 $\overline{X}$가 각각 $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$이므로 편차는 각각

$\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$이다.

즉, 표본분산은

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{3}$

(iii) 표본이 $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 4, 4\}$인 경우

표본평균 $\overline{X}$가 각각 2, 3이므로 편차는 각각 $\{-1, -1, 2\}$, $\{-2, 1, 1\}$이다.

즉, 표본분산은

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{2}\times(1+1+4)=3$

(iv) 표본이 $\{2, 2, 4\}$, $\{2, 4, 4\}$인 경우

표본평균 $\overline{X}$가 각각 $\frac{8}{3}$, $\frac{10}{3}$이므로 편차는 각각

$\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$, $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$이다.

즉, 표본분산은

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}\right)=\frac{4}{3}$

(v) 표본이 $\{1, 2, 4\}$인 경우

표본평균 $\overline{X}$가 $\frac{7}{3}$이므로 편차는 $\left\{-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

즉, 표본분산은

$S^2=\frac{1}{3-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{25}{9}\right)=\frac{7}{3}$

(i)~(v)에서 가능한 서로 다른 S^2의 값을 작은 것부터 순서대로 나열하면

$0, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 3$

따라서 $a_3=\frac{4}{3}$이고, 이때의 표본은 $\{2, 2, 4\}$, $\{2, 4, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(S^2=a_3)=\mathrm{P}\left(S^2=\frac{4}{3}\right)$

$=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{3}{16}+\frac{3}{32}=\frac{9}{32}$ 답 $\frac{9}{32}$

05 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=\frac{15}{5}=3$

이때, 크기가 2인 표본의 표본평균 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$에 대하여

$Y=\frac{X_1+X_2}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{X_1+X_2}{2}=\frac{1}{2}\overline{X}$

한편, $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\bar{X}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(\bar{X})$

$=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$ 답 ②

• 다른풀이 •

X_1, X_2에 따른 확률변수 $Y=\frac{X_1+X_2}{4}$를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2 \ X_1	1	2	3	4	5
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$
3	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$
5	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$

위의 표에서 각 경우의 확률이 $\frac{1}{25}$이므로 확률변수 $Y=\frac{X_1+X_2}{4}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

$\therefore \mathrm{E}(Y)$

$=\frac{1}{4\times 25}(2\times 1+3\times 2+4\times 3+5\times 4+6\times 5$
$+7\times 4+8\times 3+9\times 2+10\times 1)$

$=\frac{150}{100}=\frac{3}{2}$

06 1이 적혀 있는 공 1개, 3이 적혀 있는 공 n개가 들어 있는 주머니에서 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_1, 복원추출하여 다시 꺼낸 공에 적힌 수를 X_2라 하면 두 수의 평균이 $\bar{X}$이므로

$\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\bar{X}=1$에서 $X_1+X_2=2$이므로 $X_1=X_2=1$이어야 한다.
즉,

$\mathrm{P}(\bar{X}=1)=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$에서

$n+1=7$ ($\because n+1>0$) $\quad\therefore n=6$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{1\times 1+3\times 6}{1+6}=\frac{19}{7}$

$\mathrm{E}(\bar{X})=\mathrm{E}(X)$이므로 $\mathrm{E}(\bar{X})=\frac{19}{7}$

따라서 $p=7$, $q=19$이므로

$p+q=7+19=26$ 답 26

07 확률의 총합은 1이므로

$2a+2b=1$, $2a=1-2b$

$\therefore a=\frac{1}{2}-b$ ⋯⋯㉠

$\mathrm{E}(X)=a+3b+5b+7a$

$=8a+8b$

$=8\left(\frac{1}{2}-b\right)+8b$ ($\because$ ㉠)

$=4$

$\mathrm{E}(X^2)=a+9b+25b+49a$

$=50a+34b$

$=50\left(\frac{1}{2}-b\right)+34b$ ($\because$ ㉠)

$=25-16b$

$\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{29}{10}$이고 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{2}=\frac{29}{10}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\frac{29}{5}$

이때, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\frac{29}{5}=25-16b-4^2$

$\frac{29}{5}=-16b+9$, $16b=\frac{16}{5}$

$\therefore b=\frac{1}{5}$, $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\bar{X}\le 2$에서 $X_1+X_2\le 4$

즉, 추출한 표본 $\{X_1, X_2\}$는 $\{1, 1\}$, $\{1, 3\}$, $\{3, 1\}$이어야 한다.

$\therefore \mathrm{P}(\bar{X}\le 2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}$

$=\frac{21}{100}$ 답 $\frac{21}{100}$

08 해결단계

❶ 단계	$\mathrm{E}(\bar{X})$, $\mathrm{V}(\bar{X})$를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구한다.
❷ 단계	2와 6이 적힌 카드의 수를 각각 a, b라 하고, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 각각 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$가 서로 같음을 이용하여 식을 세운 후, b의 값을 구하여 6이 적힌 카드의 수를 구한다.

$\mathrm{E}(\bar{X})=3$, $\mathrm{V}(\bar{X})\le 3$이고, 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\bar{X})=3$

$\mathrm{V}(\bar{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{2}$에서 $\frac{\mathrm{V}(X)}{2}\le 3$

$\therefore \mathrm{V}(X)\le 6$

12장의 카드 중에서 2와 6이 적힌 카드의 수를 각각 a, b라 하면 0이 적힌 카드의 수는 $12-(a+b)$

이때, 0, 2, 6이 적힌 카드는 적어도 한 장 있으므로

$a\ge 1$, $b\ge 1$, $12-(a+b)\ge 1$

$$\mathrm{E}(X)=\frac{0\times\{12-(a+b)\}+2a+6b}{12}$$
$$=\frac{a+3b}{6}=3$$
$\therefore\ a=18-3b$ ……㉠

$a\geq1$이므로 $18-3b\geq1$, $3b\leq17$

$\therefore\ b\leq\frac{17}{3}=5.6\times\times\times$ ……㉡

$12-(a+b)\geq1$이므로 $12-(18-3b+b)\geq1$ ($\because$ ㉠)

$2b\geq7$ $\quad\therefore\ b\geq\frac{7}{2}=3.5$ ……㉢

또한, $\mathrm{V}(X)\leq6$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\frac{0^2\times\{12-(a+b)\}+4a+36b}{12}$$
$$=\frac{a+9b}{3}=\frac{18-3b+9b}{3}\ (\because\ ㉠)$$
$$=6+2b$$
$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=6+2b-3^2=2b-3$$
$\mathrm{V}(X)\leq6$에서 $2b-3\leq6$, $2b\leq9$

$\therefore\ b\leq\frac{9}{2}=4.5$ ……㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $b=4$ ($\because$ b는 자연수)

따라서 12장의 카드 중에서 6이 적힌 카드는 4장이다.

답 4

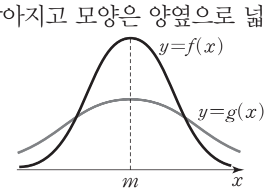
09 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 크기가 n_1인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고, 크기가 n_2인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{Y})=m$ (참)

ㄴ. $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로 $n_1>n_2$이면

$\sigma(\overline{X})<\sigma(\overline{Y})$

평균이 같을 때, 표준편차의 값이 클수록 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 모양은 양옆으로 넓게 퍼지므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크다. (참)

ㄷ. $Z_1=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}$, $Z_2=\frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq a)=\mathrm{P}(\overline{Y}\geq b)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1\geq\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z_2\geq\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$
$$\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}=\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}},\ \sqrt{n_1}(a-m)=\sqrt{n_2}(b-m)$$

$2a-b=m$에서 $2a-2m=b-m$이므로

$\sqrt{n_1}(a-m)=2\sqrt{n_2}(a-m)$

이때, $a=m$이면 $2a-b=m$에서 $b=m$

그런데 a, b는 서로 다른 두 실수이므로 $a\neq m$

즉, $\sqrt{n_1}=2\sqrt{n_2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $n_1=4n_2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

10 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X_n}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{1}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X_4}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르고, $Z_1=\frac{\overline{X_4}-m}{\frac{1}{2}}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

(i) $\mathrm{P}(\overline{X_4}\geq m+a)=0.4$에서

$$\mathrm{P}(\overline{X_4}\geq m+a)=\mathrm{P}\left(Z_1\geq\frac{m+a-m}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_1\geq2a)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2a)$$
$$=0.4$$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2a)=0.1$

(ii) $\mathrm{P}(\overline{X_4}\leq m+b)=0.8$에서

$$\mathrm{P}(\overline{X_4}\leq m+b)=\left(Z_1\leq\frac{m+b-m}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_1\leq2b)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2b)$$
$$=0.8$$
$\therefore\ \mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2b)=0.3$

한편, 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X_{16}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_2=\frac{\overline{X_{16}}-m}{\frac{1}{4}}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(m-\frac{1}{2}a\leq\overline{X_{16}}\leq m+\frac{1}{2}b\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-\frac{1}{2}a-m}{\frac{1}{4}}\leq Z_2\leq\frac{m+\frac{1}{2}b-m}{\frac{1}{4}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2a\leq Z_2\leq2b)$$
$$=\mathrm{P}(-2a\leq Z_2\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq2b)\ (\because\ 0<a<b)$$
$$=\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq2a)+\mathrm{P}(0\leq Z_2\leq2b)$$
$$=\mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2a)+\mathrm{P}(0\leq Z_1\leq2b)$$
$$=0.1+0.3=0.4$$

답 0.4

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 $\overline{X}_4$를 표준화하여 확률 $P(0\le Z_1\le 2a)$와 확률 $P(0\le Z_1\le 2b)$를 각각 구한 경우	50%
(나)	확률변수 $\overline{X}_{16}$를 표준화하여 구하는 확률이 $P(0\le Z_1\le 2a)+P(0\le Z_1\le 2b)$와 같음을 안 경우	40%
(다)	(가), (나)의 결과를 이용하여 확률을 구한 경우	10%

11 확률변수 X가 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르므로 이 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(20,\ \frac{4^2}{16}\right)$, 즉 $N(20,\ 1^2)$을 따른다.

이때, $Z_1=\frac{X-20}{4}$, $Z_2=\frac{\overline{X}-20}{1}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

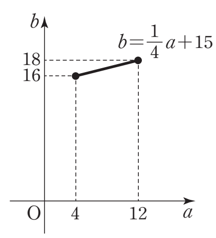
$P(X\ge a)=P(\overline{X}\ge b)$에서

$P\left(Z_1\ge\frac{a-20}{4}\right)=P(Z_2\ge b-20)$

즉, $\frac{a-20}{4}=b-20$이므로 $a-20=4b-80$

$4b=a+60$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}a+15\ (4\le a\le 12)$

위의 식을 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형의 길이는

$\sqrt{(12-4)^2+(18-16)^2}$

$=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$

$=2\sqrt{17}$

답 $2\sqrt{17}$

12 모집단이 정규분포 $N(m,\ 2^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{2^2}{n}\right)$,

즉 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$f(m)=P\left(\overline{X}\le 1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

$=P\left(Z\le\frac{1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}-m}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z\le 1.96-\frac{m\sqrt{n}}{2}\right)$

위의 식의 m 대신에 0, 0.9를 각각 대입하면

$f(0)=P(Z\le 1.96)$

$=0.5+P(0\le Z\le 1.96)$

$=0.5+0.475=0.975$

$f(0.9)=P\left(Z\le 1.96-\frac{0.9\sqrt{n}}{2}\right)$

$=P(Z\le 1.96-0.45\sqrt{n})$

그런데 $f(0)+f(0.9)\le 1.025$이므로

$0.975+P(Z\le 1.96-0.45\sqrt{n})\le 1.025$

$\therefore P(Z\le 1.96-0.45\sqrt{n})\le 0.05$ $\quad\cdots\cdots$㉠

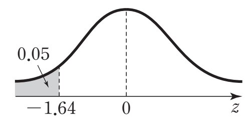
주어진 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 1.64)=0.45$이므로

$P(Z\le -1.64)$

$=P(Z\ge 1.64)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1.64)$

$=0.5-0.45=0.05$



㉠에서 $1.96-0.45\sqrt{n}\le -1.64$이므로

$\sqrt{n}\ge\frac{1.96+1.64}{0.45}=8$

$\therefore n\ge 64$

따라서 n의 최솟값은 64이다. 답 64

13 이 고등학교의 남학생들의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(180,\ 6^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X_1}$는 $N\left(180,\ \frac{6^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(180,\ \left(\frac{6}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

또한, 이 고등학교의 여학생들의 키를 Y cm라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(165,\ 2^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X_2}$는 $N\left(165,\ \frac{2^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(165,\ \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z_1=\frac{\overline{X_1}-180}{\frac{6}{\sqrt{n}}}$, $Z_2=\frac{\overline{X_2}-165}{\frac{2}{5}}$라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X_1}\ge 183)=P\left(Z_1\ge\frac{183-180}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z_1\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(\overline{X_2}\ge 169)=P\left(Z_2\ge\frac{169-165}{\frac{2}{5}}\right)$

$=P(Z_2\ge 10)$

$P(\overline{X_1}\ge 183)\le P(\overline{X_2}\ge 169)$에서

$P\left(Z_1\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\le P(Z_2\ge 10)$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 10$

$\sqrt{n}\ge 20$ $\quad\therefore n\ge 400$

따라서 자연수 n의 최솟값은 400이다. 답 400

14 이 농장에서 재배한 포도 1송이의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(500,\ 30^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(500,\ \frac{30^2}{9}\right)$, 즉 $N(500,\ 10^2)$을 따른다.

$\therefore E(\overline{X})=500,\ \sigma(\overline{X})=10$

이때, 확률변수 G는 한 상자에 담긴 9송이의 포도의 무게의 합이므로

$G=9\overline{X}$

ㄱ. $\mathrm{E}(G)=\mathrm{E}(9\overline{X})=9\mathrm{E}(\overline{X})$

$=9\times500=4500$ (참)

ㄴ. $\sigma(G)=\sigma(9\overline{X})=9\sigma(\overline{X})$

$=9\times10=90$ (거짓)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 확률변수 G는 정규분포 $\mathrm{N}(4500,\ 90^2)$을 따르므로 $Z=\frac{G-4500}{90}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(G\le4320)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{4320-4500}{90}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

이때, $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.96$에서

$\mathrm{P}(|Z|\le2)=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.96$

이므로 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.48$

$\therefore\ \mathrm{P}(G\le4320)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.48$

$=0.02$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

15 이 과수원에서 생산되는 사과의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(260,\ 25^2)$을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(260,\ \frac{25^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(260,\ 5^2)$을 따른다.

한편, 빈 상자의 무게가 250 g이므로 25개의 사과의 무게의 합이 $6500-250=6250$(g) 미만, 즉 25개의 사과의 무게의 평균이 $\frac{6250}{25}=250$(g) 미만이면 저울에서 경고음이 울린다.

이때, $Z=\frac{\overline{X}-260}{5}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 저울에서 경고음이 울릴 확률은

$\underbrace{\mathrm{P}(\overline{X}<250)}_{=\mathrm{P}(25\overline{X}<6250)}=\mathrm{P}\left(Z<\frac{250-260}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<-2)$

$=\mathrm{P}(Z>2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$ 답 0.0228

16 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|X-m|\le20)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le\frac{20}{\sigma}\right)$ ($\because\ \sigma>0$)

$=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{20}{\sigma}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)$

$=0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{20}{\sigma}\right)=0.4772$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{20}{\sigma}=2\qquad\therefore\ \sigma=10$

또한,

$\mathrm{P}(X\le120)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{120-m}{10}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{120-m}{10}\right)$

$=0.8413$

에서 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{120-m}{10}\right)=0.3413$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{120-m}{10}=1\qquad\therefore\ m=110$

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(110,\ 10^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(110,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(110,\ 5^2)$을 따른다.

이때, $Z_1=\frac{\overline{X}-110}{5}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 4개의 제품의 무게의 합이 460 g 이상일 확률은

$p_1=\mathrm{P}(4\overline{X}\ge460)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge115)$

$=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\frac{115-110}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_1\ge1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

또한, 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(110,\ \frac{10^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(110,\ \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z_2=\frac{\overline{Y}-110}{\frac{5}{2}}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 임의추출한 16개의 제품의 무게의 합이 1840 g 이상일 확률은

$p_2=\mathrm{P}(16\overline{Y}\ge1840)=\mathrm{P}(\overline{Y}\ge115)$

$=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{115-110}{\frac{5}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_2\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

$\therefore p_1+p_2=0.1587+0.0228$

$=0.1815$ 답 ②

17 주머니 안에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적힌 공이 차례대로 40개, 30개, 20개, 10개씩 들어 있으므로 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}$

$=\frac{20}{10}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{4}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{2}{10}+4^2\times\frac{1}{10}$

$=\frac{50}{10}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-2^2=1$

이 주머니에서 임의추출한 64개의 공에 적힌 숫자의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본의 크기 64가 충분히 크므로 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(2, \frac{1^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(2, \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-2}{\frac{1}{8}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 64개의 공에 적힌 숫자의 합이 a 이상일 확률은

$\mathrm{P}(64\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge\frac{a}{64}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\frac{a}{64}-2}{\frac{1}{8}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a}{8}-16\right)$

$=0.0668$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a}{8}-16\right)=0.5-0.0668=0.4332$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a}{8}-16=1.5,\ \frac{a}{8}=17.5$

$\therefore a=140$ 답 ①

18 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$ $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$에서 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$

위의 신뢰구간이 $4.216\le m\le 5.784$이므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=4.216$ ……㉠

$\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=5.784$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2\overline{x}=10$

$\therefore \overline{x}=5$

이것을 ㉠에 대입하면

$5-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=4.216,\ \sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$

모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$5-2.58\times\frac{4}{\sqrt{100}}\le m\le 5+2.58\times\frac{4}{\sqrt{100}}$ $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$에서 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$

위의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$a=5-2.58\times\frac{4}{\sqrt{100}}=3.968$

$b=5+2.58\times\frac{4}{\sqrt{100}}=6.032$

$\therefore n+\overline{x}-a+b=100+5-3.968+6.032$

$=107.064$ 답 107.064

19 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신에 표본표준편차 500을 이용할 수 있다.

이때, 표본평균이 $\overline{x}$이므로 이 공장에서 생산되는 건전지의 수명의 평균을 m이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$에서 $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$

$\overline{x}-2.58\times\frac{500}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{500}{\sqrt{100}}$

$\overline{x}-129\le m\le\overline{x}+129$

$\therefore c=129$ 답 129

20 양계장에서 생산되는 계란 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다.

이 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{x}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$에서 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$

$\overline{x}-\frac{1.96}{6}\sigma\le m\le\overline{x}+\frac{1.96}{6}\sigma$

위의 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$이므로

$c=\frac{1.96}{6}\sigma$ ……㉠

한편, 크기가 144인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{144}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{12}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{12}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 이 양계장에서 생산되는 계란 중 임의추출한 144개의 무게의 평균이 $m+\frac{1}{4}c$ 이상일 확률은

$$P\left(\overline{X}\ge m+\frac{1}{4}c\right)=P\left(\overline{X}\ge m+\frac{1}{4}\times\frac{1.96}{6}\sigma\right)\ (\because \text{㉠})$$
$$=P\left(Z\ge\frac{m+1.96\times\frac{\sigma}{24}-m}{\frac{\sigma}{12}}\right)$$
$$=P(Z\ge 0.98)$$
$$=0.5-P(0\le Z\le 0.98)$$
$$=0.5-0.3365$$
$$=0.1635$$

답 ③

21 정규분포 $N(m,\ 1^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{X_1}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$P(0\le Z\le 1.96)=0.475$에서 $P(|Z|\le 1.96)=0.95$

$$\overline{X_1}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{X_1}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}$$

$\therefore\ \overline{X_1}-0.49\le m\le\overline{X_1}+0.49$

즉, $a=\overline{X_1}-0.49,\ b=\overline{X_1}+0.49$

또한, 이 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값 $\overline{X_2}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$P(0\le Z\le 2.58)=0.495$에서 $P(|Z|\le 2.58)=0.99$

$$\overline{X_2}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{X_2}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{36}}$$

$\therefore\ \overline{X_2}-0.43\le m\le\overline{X_2}+0.43$

즉, $c=\overline{X_2}-0.43,\ d=\overline{X_2}+0.43$

그런데 $a=c$이므로 $\overline{X_1}-0.49=\overline{X_2}-0.43$

$\therefore\ \overline{X_1}-\overline{X_2}=0.06$

$\therefore\ 100(b-d)=100\{(\overline{X_1}+0.49)-(\overline{X_2}+0.43)\}$
$=100(\overline{X_1}-\overline{X_2}+0.06)$
$=100\times(0.06+0.06)=12$

답 ③

22 표본의 크기 n이 충분히 크므로 모표준편차 대신에 표본표준편차 10을 이용할 수 있다.
이 공장에서 생산된 제품 중에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 500이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$P(0\le Z\le 2.58)=0.495$에서 $P(|Z|\le 2.58)=0.99$

$$500-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le 500+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때, 이 구간에 속하는 정수가 7개이어야 하므로 이 구간에 속하는 정수는 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503이어야 한다. 즉, $496<500-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le 497$,

$503\le 500+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}<504$이므로

$3\le 2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}<4$

$\frac{3}{25.8}\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{4}{25.8}$, $\frac{25.8}{4}<\sqrt{n}\le\frac{25.8}{3}$

위의 부등식의 각 변을 제곱하면

$\frac{665.64}{16}<n\le\frac{665.64}{9}$

$41.6025<n\le 73.96$

따라서 자연수 n은 42, 43, 44, $\cdots$, 73의 32개이다.

답 32

23 정규분포 $N(100,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)$, 즉 $N\left(100,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. 이때, $Z=\frac{\overline{X}-100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$와 모평균 100의 차가 10 이하일 확률은

$P(n,\ \sigma)=P(|\overline{X}-100|\le 10)$

$$=P\left(\left|\frac{\overline{X}-100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\ \left(\because\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}>0\right)$$
$$=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

ㄱ. $P(4,\ 3)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{4}}{3}\right)=P\left(|Z|\le\frac{20}{3}\right)$

$P(4,\ 5)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{4}}{5}\right)=P(|Z|\le 4)$

$\frac{20}{3}>4$이므로 $P\left(|Z|\le\frac{20}{3}\right)>P(|Z|\le 4)$

$\therefore\ P(4,\ 3)>P(4,\ 5)$ (거짓)

ㄴ. $P(3,\ 4)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{3}}{4}\right)=P\left(|Z|\le\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

$P(5,\ 4)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{5}}{4}\right)=P\left(|Z|\le\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$

$\frac{5\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{5}}{2}$이므로

$P\left(|Z|\le\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)<P\left(|Z|\le\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$

$\therefore\ P(3,\ 4)<P(5,\ 4)$ (참)

ㄷ. $P(3,\ 3)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$

$P(5,\ 5)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{5}}{5}\right)=P(|Z|\le 2\sqrt{5})$

$\frac{10\sqrt{3}}{3}>2\sqrt{5}$이므로

$P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)>P(|Z|\le 2\sqrt{5})$

$\therefore\ P(3,\ 3)>P(5,\ 5)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

blacklabel 특강 풀이첨삭

$P(n,\ \sigma)=P\left(|Z|\le\frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right)$에서 $\frac{10\sqrt{n}}{\sigma}$의 값이 커지면 확률 $P(n,\ \sigma)$도 커지므로 다음과 같은 성질을 만족시킨다.

(1) n이 일정할 때, σ가 작아지면 확률 $P(n,\ \sigma)$는 커진다.
즉, $\sigma_1<\sigma_2$일 때 $P(n,\ \sigma_1)>P(n,\ \sigma_2)$이다. (ㄱ)

(2) σ가 일정할 때, n이 커지면 확률 $P(n,\ \sigma)$도 커진다.
즉, $n_1<n_2$일 때 $P(n_1,\ \sigma)<P(n_2,\ \sigma)$이다. (ㄴ)

(3) $s<t$를 만족시키는 두 자연수 $s,\ t$에 대하여
$P(s,\ s)>P(t,\ t)$이다. (ㄷ)

24 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{4^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{4}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

표본평균 $\overline{X}$와 모평균 m의 차가 $\dfrac{1}{2}$ 이하일 확률이 99 %, 즉 0.99 이상이어야 하므로

$$\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{1}{2}\right)\ge 0.99$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right|\le\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.99\ \left(\because \frac{4}{\sqrt{n}}>0\right)$$

$$\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{\sqrt{n}}{8}\right)\ge 0.99$$

즉, $\dfrac{\sqrt{n}}{8}\ge 2.58$에서 $\sqrt{n}\ge 20.64$

$\therefore n\ge 426.0096$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 427이다. **답** 427

25 모표준편차는 3, 표본의 크기는 $n^2+n=n(n+1)$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l_n은

$$l_n=2\times\underbrace{2}_{\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.475\text{에서 } \mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.95}\times\frac{3}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{12}{\sqrt{n(n+1)}}$$

즉,

$$l_n^2=\frac{144}{n(n+1)}=144\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로

$l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{20}^2$

$$=144\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{20}}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=144\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=144\times\frac{20}{21}=\frac{960}{7}$$

$$\therefore 7(l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{20}^2)=7\times\frac{960}{7}=960$$

답 960

단계	채점 기준	배점
(가)	모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l_n을 구한 경우	50%
(나)	부분분수를 이용하여 $l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{20}^2$의 값을 구한 경우	40%
(다)	$7(l_1^2+l_2^2+l_3^2+\cdots+l_{20}^2)$의 값을 구한 경우	10%

26 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 64인 표본을 임의추출할 때, 추정한 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times k\times\frac{2}{\sqrt{64}}=\frac{k}{2}\ \left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

신뢰구간의 길이가 $\dfrac{1}{2}$ 이하가 되어야 하므로

$\dfrac{k}{2}\le\dfrac{1}{2}\qquad \therefore k\le 1$

신뢰도가 최대이면 k의 값도 최대이므로 $k=1$일 때의 신뢰도 α는

$$\frac{\alpha}{100}=\mathrm{P}(|Z|\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=2\times 0.3413=0.6826$$

$\therefore \alpha=68.26$

따라서 구하는 신뢰도의 최댓값은 68.26 %이다. **답** ①

27 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$로 추정한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{X}-2\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2\times\frac{4}{\sqrt{n}}$$

즉, $a=\overline{X}-\dfrac{8}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{X}+\dfrac{8}{\sqrt{n}}$

$\therefore f(n)=b-a=2\times\dfrac{8}{\sqrt{n}}=\dfrac{16}{\sqrt{n}}$

ㄱ. $f(16)=\dfrac{16}{\sqrt{16}}=\dfrac{16}{4}=4$ (참)

ㄴ. $f(n)\le 1$에서 $\dfrac{16}{\sqrt{n}}\le 1$, $\sqrt{n}\ge 16$

$\therefore n\ge 256$

즉, n의 최솟값은 256이다. (참)

ㄷ. $m=4n$에서

$$f(m)=f(4n)=\frac{16}{\sqrt{4n}}=\frac{16}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}f(n)\ (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

28 신뢰도가 79.6 %인 경우, 양수 k에 대하여 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=0.796$이 성립한다고 하면

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=0.796$에서 $2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.796$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.398$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.27)=0.3980$이므로 $k=1.27$

즉, 모표준편차는 σ, 크기는 n인 표본에서 추정한 모평균 m의 신뢰도 79.6 %의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2\times1.27\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ 2l=2\times2\times1.27\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times2.54\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때, 신뢰구간의 길이 $2l$은 모표준편차가 σ, 크기가 n인 표본에서 모평균 m을 신뢰도 α %로 추정한 것이므로

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{100}&=\mathrm{P}(|Z|\le2.54)\\&=\mathrm{P}(-2.54\le Z\le2.54)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.54)\\&=2\times0.4945=0.989\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha=98.9$ 답 ④

Step 3	1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제**	p. 71

01 88　**02** ㄱ　**03** ㄱ, ㄴ　**04** 11　**05** ①
06 577500원

01 해결단계

❶ 단계	A, B 두 연구원이 250개의 샘플을 각각 a개, b개로 나누었음을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	A, B 두 연구원이 추정한 각각의 신뢰구간의 길이를 비교하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계의 결과를 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, $\lvert a-b\rvert$의 값을 계산한다.

A, B 두 연구원이 250개의 샘플을 각각 a개, b개로 나누었으므로

$a+b=250$ ······㉠

A 연구원이 조사한 표본의 크기는 a, 표본표준편차는 18이고, a가 충분히 크므로 모표준편차 대신에 표본표준편차 18을 이용할 수 있다.

95 %의 신뢰도로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

P$(0\le Z\le2.0)=0.475$에서
P$(|Z|\le2.0)=2\times0.475=0.95$

$2\times2.0\times\dfrac{18}{\sqrt{a}}$

B 연구원이 조사한 표본의 크기는 b, 표본표준편차는 20이고, b가 충분히 크므로 모표준편차 대신에 표본표준편차 20을 이용할 수 있다.

99 %의 신뢰도로 추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

P$(0\le Z\le2.6)=0.495$에서
P$(|Z|\le2.6)=2\times0.495=0.99$

$2\times2.6\times\dfrac{20}{\sqrt{b}}$

이때, 두 신뢰구간의 길이가 같으므로

$2\times2.0\times\dfrac{18}{\sqrt{a}}=2\times2.6\times\dfrac{20}{\sqrt{b}}$

$\therefore\ \dfrac{81}{a}=\dfrac{169}{b}$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=81,\ b=169$

$\therefore\ |a-b|=|81-169|=88$ 답 88

02 해결단계

❶ 단계	확률변수 X의 정규분포를 이용하여 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 정규분포를 구한다.
❷ 단계	ㄱ은 정규분포의 표준화를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄴ은 정규분포의 표준화와 정규분포를 따르는 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖는 종 모양의 곡선임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❹ 단계	ㄷ은 두 확률변수 X, $\overline{X}$의 확률밀도함수의 그래프를 그려 참, 거짓을 판별한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 30^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{30^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 15^2)$을 따른다.

이때, $Z_1=\dfrac{X-m}{30}$, $Z_2=\dfrac{\overline{X}-m}{15}$이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(X\le m+60)+\mathrm{P}(\overline{X}\ge m+30)$

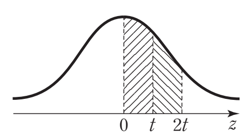
$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{m+60-m}{30}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{m+30-m}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1\le2)+\mathrm{P}(Z_2\ge2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_1\le2)+0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z_1\le2)+0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le2)\\&=1\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. 임의의 양수 t에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m+60t)+0.5&=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{m+60t-m}{30}\right)+0.5\\&=\mathrm{P}(Z_1\le2t)+0.5\\&=\mathrm{P}(0\le Z_1\le2t)+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\mathrm{P}(\overline{X}\ge m-15t)&=2\mathrm{P}\left(Z_2\ge\frac{m-15t-m}{15}\right)\\&=2\mathrm{P}(Z_2\ge-t)\\&=2\{\mathrm{P}(0\le Z_2\le t)+0.5\}\\&=2\mathrm{P}(0\le Z_2\le t)+1\end{aligned}$$

이때, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z의 확률밀도함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, $z>0$에서 z의 값이 커질수록 함숫값은 작아지므로



$\mathrm{P}(0\le Z\le t)>\mathrm{P}(t\le Z\le2t)$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le t)>\mathrm{P}(t\le Z\le2t)+\mathrm{P}(0\le Z\le t)$

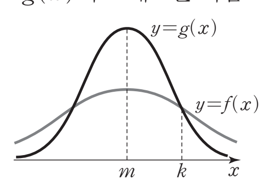
$2\mathrm{P}(0\le Z\le t)>\mathrm{P}(0\le Z\le2t)$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le2t)+1<2\mathrm{P}(0\le Z\le t)+1$

즉, $\mathrm{P}(0\le Z_1\le2t)+1<2\mathrm{P}(0\le Z_2\le t)+1$이므로

$\mathrm{P}(X\le m+60t)+0.5<2\mathrm{P}(\overline{X}\ge m-15t)$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=m$이고, $\sigma(X)=30$, $\sigma(\overline{X})=15$이므로 두 확률변수 X, $\overline{X}$의 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\mathrm{P}(m \le X \le k) + \mathrm{P}(\overline{X} \ge k)$$
$$\le \mathrm{P}(m \le \overline{X} \le k) + \mathrm{P}(\overline{X} \ge k)$$
$$= \mathrm{P}(\overline{X} \ge m) = \frac{1}{2} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ㄱ

03 해결단계

❶ 단계	크기가 2500인 표본의 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한다.
❷ 단계	불량품으로 판정될 확률을 구하여 확률변수 Y가 따르는 이항분포와 정규분포를 각각 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계의 $\overline{X}$, Y를 각각 표준화하고 주어진 표준정규분포표를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따르므로

$Z_1 = \dfrac{X-60}{5}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때, 한 개의 제품이 불량품으로 판정될 확률은

$$\mathrm{P}(X \le 50) = \mathrm{P}\left(Z_1 \le \frac{50-60}{5}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_1 \le -2)$$
$$= \mathrm{P}(Z_1 \ge 2)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z_1 \le 2)$$
$$= 0.5 - 0.48 = 0.02$$

한편, 크기가 2500인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \dfrac{5^2}{2500}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(60,\ \left(\dfrac{1}{10}\right)^2\right)$을 따르고, Y는 임의추출한 2500개의 제품에 포함된 불량품의 개수이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = 2500 \times 0.02 = 50,$

$\quad \mathrm{V}(Y) = 2500 \times 0.02 \times \overbrace{0.98}^{=1-0.02} = 49 = 7^2$

이때, 표본의 크기 2500은 충분히 크므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

ㄱ. $Z_2 = \dfrac{\overline{X}-60}{\frac{1}{10}}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 60) = \mathrm{P}\left(Z_2 \ge \frac{60-60}{\frac{1}{10}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_2 \ge 0)$$
$$= \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

표준정규분포 곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로

ㄴ. $Z_3 = \dfrac{Y-50}{7}$이라 하면 확률변수 Z_3은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(Y \ge 57) = \mathrm{P}\left(Z_3 \ge \frac{57-50}{7}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_3 \ge 1)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z_3 \le 1)$$
$$= 0.5 - 0.34$$
$$= 0.16$$

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le 59.9) = \mathrm{P}\left(Z_2 \le \frac{59.9-60}{\frac{1}{10}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z_2 \le -1)$$
$$= \mathrm{P}(Z_2 \ge 1)$$
$$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z_2 \le 1)$$
$$= 0.5 - 0.34$$
$$= 0.16$$

$\therefore\ \mathrm{P}(Y \ge 57) = \mathrm{P}(\overline{X} \le 59.9)$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(60-k \le X \le 60+k)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{60-k-60}{5} \le Z_1 \le \frac{60+k-60}{5}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(-\frac{k}{5} \le Z_1 \le \frac{k}{5}\right)$$
$$= 2\mathrm{P}\left(0 \le Z_1 \le \frac{k}{5}\right)$$

$\mathrm{P}(60-k \le \overline{X} \le 60+k)$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{60-k-60}{\frac{1}{10}} \le Z_2 \le \frac{60+k-60}{\frac{1}{10}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-10k \le Z_2 \le 10k)$$
$$= 2\mathrm{P}(0 \le Z_2 \le 10k)$$

이때, 양수 k에 대하여 $\dfrac{k}{5} < 10k$이므로

$\mathrm{P}(60-k \le X \le 60+k) < \mathrm{P}(60-k \le \overline{X} \le 60+k)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ㄱ, ㄴ

04 해결단계

❶ 단계	$\mathrm{P}(X=2)=a$, $\mathrm{P}(X=4)=b$, $\mathrm{P}(X=6)=c$로 놓는다.
❷ 단계	$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{16}$, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{6}$을 이용하여 a, b, c의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(\overline{X})$를 각각 구한 후, $\mathrm{E}(3\overline{X}+1)$을 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 2, 4, 6이므로

$\mathrm{P}(X=2)=a$, $\mathrm{P}(X=4)=b$, $\mathrm{P}(X=6)=c$라 하면

$a+b+c=1$ ← 확률의 총합은 1이다.

크기가 4인 표본을 X_1, X_2, X_3, X_4라 하면 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$$

$\overline{X}=2$에서 $\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}=2$

$\therefore\ X_1+X_2+X_3+X_4=8$

즉, 표본 $\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\}$는 $\{2,\ 2,\ 2,\ 2\}$이어야 하므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=a^4=\dfrac{1}{16}\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

또한, $\overline{X}=\dfrac{5}{2}$에서 $\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ X_1+X_2+X_3+X_4=10$

즉, 표본 $\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\}$는 $\{4,\ 2,\ 2,\ 2\}$, $\{2,\ 4,\ 2,\ 2\}$, $\{2,\ 2,\ 4,\ 2\}$, $\{2,\ 2,\ 2,\ 4\}$이어야 하므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)=4a^3b=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}b=\frac{1}{6}\ \left(\because a=\frac{1}{2}\right)$

$\therefore b=\frac{1}{3},\ c=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{10}{3}$

$\therefore \mathrm{E}(3\overline{X}+1)=3\mathrm{E}(\overline{X})+1$

$=3\times\frac{10}{3}+1=11$ 답 11

05 해결단계

❶ 단계	표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$를 이용하여 모평균 m의 신뢰도 95.44 %의 신뢰구간을 구한다.
❷ 단계	생산과정이 정상이기 위한 조건을 구한 후, 이 신뢰구간에 57.1이 포함되기 위한 $\overline{X}$의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 구간에 포함되는 구간을 찾는다.

테니스공의 무게가 정규분포 $\mathrm{N}(57.1,\ 2.8^2)$을 따를 때, 이 공장에서 임의추출한 16개의 테니스공의 무게의 평균을 $\overline{X}$ g이라 하면 모평균 m의 신뢰도 95.44 %의 신뢰구간은

P(0≤Z≤2)=0.4772에서 P(|Z|≤2)=95.44

$\overline{X}-2\times\frac{2.8}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{X}+2\times\frac{2.8}{\sqrt{16}}$

$\therefore \overline{X}-1.4\le m\le\overline{X}+1.4$

생산과정이 정상인 것으로 판단하려면 모평균 m의 신뢰도 95.44 %의 신뢰구간이 항상 57.1을 포함해야 하므로

$\overline{X}-1.4\le 57.1\le\overline{X}+1.4$

$\overline{X}-1.4\le 57.1$에서 $\overline{X}\le 58.5$

$57.1\le\overline{X}+1.4$에서 $\overline{X}\ge 55.7$

$\therefore 55.7\le\overline{X}\le 58.5$ ……㉠

따라서 이 공장에서 16개의 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 구간 ㉠에 포함되면 생산과정이 정상인 것으로 판단되므로 조건을 만족시키는 구간은 ①이다. 답 ①

06 해결단계

❶ 단계	비누를 낱개로 판매할 경우의 하루 순이익을 구한다.
❷ 단계	크기가 4인 표본의 표본평균이 따르는 정규분포를 구한다.
❸ 단계	비누를 세트로 판매할 경우의 하루 순이익을 구한다.
❹ 단계	❶, ❸단계의 결과를 이용하여 증가하는 하루 이익을 구한다.

비누 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_1=\frac{X-200}{10}$이라 하면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

비누 1개의 무게가 190 g 이하이면 불량으로 폐기 처분하므로 비누 1개가 폐기 처분될 확률은

$\mathrm{P}(X\le 190)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\frac{190-200}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_1\le -1)$

$=\mathrm{P}(Z_1\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_1\le 1)$

$=0.5-0.34\ (\because \mathrm{P}(0\le Z_1\le 1)=0.34)$

$=0.16$

즉, 하루에 생산하는 10000개의 비누 중에서 폐기하는 비누는 $10000\times0.16=1600$(개)이고 비누 1개의 제조원가는 300원, 정가는 500원이므로 비누를 낱개로 판매할 경우의 하루 순이익은

$\underbrace{8400}_{=10000-1600}\times500-10000\times300=1200000$(원) ……㉠

세트로 판매할 때, 1세트에 들어 있는 비누 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 5^2)$을 따르므로

$Z_2=\frac{\overline{X}-200}{5}$이라 하면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

1세트의 무게가 760 g 이하, 즉 비누 4개의 무게의 평균이 $\frac{760}{4}=190$(g) 이하이면 그 세트 전체를 폐기 처분하므로 1세트가 폐기 처분될 확률은

$\underbrace{\mathrm{P}(\overline{X}\le 190)}_{=\mathrm{P}(4\overline{X}\le 760)}=\mathrm{P}\left(Z_2\le\frac{190-200}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_2\le -2)$

$=\mathrm{P}(Z_2\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_2\le 2)$

$=0.5-0.48\ (\because \mathrm{P}(0\le Z_2\le 2)=0.48)$

$=0.02$

이때, 하루에 생산되는 $10000\div4=2500$(세트)의 비누 중에서 폐기하는 세트는 $2500\times0.02=50$(세트)이므로 판매하는 세트는 $2500-50=2450$(개)이다.

한편, 비누 1세트의 정가는 $4\times500-50=1950$(원)이므로 비누를 세트로 판매할 경우의 하루 순이익은

$2450\times1950-10000\times300=1777500$(원) ……㉡

㉡−㉠을 하면 세트로 판매한 이후 증가하는 하루 이익은

$1777500-1200000=577500$(원) 답 577500원

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 두 가지 경우를 비교하는 문제로, 주어진 정보가 아주 많다. 이 정보들을 적절히 활용하는 것이 중요하며, 이렇게 정보가 많을 때에는 구하고자 하는 값이 무엇인지부터 정확하게 파악하는 것이 좋다. 구하고자 하는 값이 세트로 판매한 이후 증가한 하루 이익이므로, 원래 이익과 세트로 판매한 이후의 이익을 각각 구한 후 그 차를 구하면 된다.

이것이 수능 p. 72

1 25	2 ①	3 12	4 25

1

해결단계

❶ 단계	대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인의 월 교통비를 X라 하고, X의 정규분포를 이용하여 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 정규분포를 구한다.
❷ 단계	정규분포의 표준화를 이용하여 조건을 만족시키는 n의 최솟값을 구한다.

대중교통을 이용하여 출근하는 이 지역 직장인의 월 교통비를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 1.2^2)$을 따르므로 임의추출한 n명의 월 교통비의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8,\ \frac{1.2^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(8,\ \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le8.24)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.6826$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.3413$$

주어진 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge1,\ \sqrt{n}\ge5$

위의 식의 양변을 제곱하면 $n\ge25$

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다. **답** 25

2

해결단계

❶ 단계	이 공장에서 생산되는 농구공의 무게를 X g이라 하고, X의 정규분포를 이용하여 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 정규분포를 구한다.
❷ 단계	정규분포의 표준화를 이용하여 평균이 595 g 이상 610 g 이하일 확률이 0.8185가 되도록 하는 n의 값을 구한다.

이 공장에서 생산되는 농구공의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 20^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(600,\ \frac{20^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(600,\ \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-600}{\frac{20}{\sqrt{n}}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 평균이 595 g 이상 610 g 이하일 확률이 0.8185이려면

$$\mathrm{P}(595\le\overline{X}\le610)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{595-600}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{610-600}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$
$$=0.8185$$

이때, 주어진 표준정규분포표에 의하여

$$\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.3413+0.4772$$
$$=0.8185$$

즉, $\frac{\sqrt{n}}{4}=1$에서 $\sqrt{n}=4$

$\therefore\ n=16$ **답** ①

3

해결단계

❶ 단계	크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 75일 때, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한다.
❷ 단계	크기가 16인 표본을 다시 임의추출하여 구한 표본평균이 77일 때, 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구한다.
❸ 단계	$d-b=3.86$을 만족시키는 σ의 값을 구한다.

지역 주민 중에서 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 75분이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le75+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$
$$75-0.49\sigma\le m\le75+0.49\sigma$$

$\therefore\ a=75-0.49\sigma,\ b=75+0.49\sigma$

16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$77-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le77+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$
$$77-0.645\sigma\le m\le77+0.645\sigma$$

$\therefore\ c=77-0.645\sigma,\ d=77+0.645\sigma$

따라서 $d-b=3.86$이므로

$$d-b=(77+0.645\sigma)-(75+0.49\sigma)$$
$$=2+0.155\sigma=3.86$$

$0.155\sigma=1.86$

$\therefore\ \sigma=12$ **답** 12

4

해결단계

❶ 단계	표본의 크기가 49, 모표준편차가 σ, 표본평균이 $\bar{x}$임을 이용하여 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 신뢰구간이 $1.73\le m\le1.87$이 되도록 하는 $\bar{x}$, σ를 각각 구한 후, k의 값을 구한다.

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$에서

$\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$

평균이 m, 표준편차가 σ, 표본의 크기가 49인 표본의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이므로 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 1.73 \quad \cdots\cdots ㉠,$$

$$\overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 1.87 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $2\overline{x} = 3.6 \qquad \therefore \overline{x} = 1.8$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$$1.8 - 1.96 \times \frac{\sigma}{7} = 1.73,\ 1.96 \times \frac{\sigma}{7} = 0.07$$

$\therefore \sigma = 0.25$

따라서 $k = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{0.25}{1.8} = \dfrac{5}{36}$이므로

$180k = 180 \times \dfrac{5}{36} = 25$ 답 25