정답과 해설

BLACKLABEL

Speed Check

I 지수함수와 로그함수

01. 지수

/ 본문 pp.009~017

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 -1	03 ③	04 ④
05 ①	06 ⑤	07 ④	08 ②
09 112	10 3	11 9	12 3
13 ①	14 ②		

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ⑤	02 56	03 143	04 ③	05 ④	06 69	07 ③	08 11
09 ④	10 ④	11 10	12 127	13 47	14 ②	15 ②	16 11
17 ②	18 ①	19 5	20 ③	21 4	22 ⑤	23 $\frac{1}{15}$	24 -2
25 ⑤	26 14	27 ①	28 20	29 648			

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $\sqrt{15}$	02 ①	03 7
04 11	05 ②	06 13
07 26	08 30	09 20
10 17	11 3	12 28

02. 로그

/ 본문 pp.019~027

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ②	02 ①	03 27	04 ①
05 ④	06 ⑤	07 ⑤	08 ③
09 12	10 ②	11 168	12 -11
13 ④	14 80		

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ④	02 45	03 ①	04 ②	05 34	06 5	07 ⑤	08 11
09 ④	10 42	11 ②	12 7	13 ③	14 74	15 2	16 ①
17 ⑤	18 ④	19 ②	20 3	21 ③	22 32	23 ①	24 ⑤
25 12	26 $\frac{1}{2}$	27 35	28 ③	29 8	30 4		

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $\frac{1}{2}$	02 2	03 7
04 27	05 ④	06 6
07 12	08 ②	09 15
10 78	11 500	12 22

03. 지수함수

/ 본문 pp.030~039

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ②	02 ③	03 ⑤	04 ③
05 ①	06 ③	07 15	08 13
09 ④	10 ②	11 ⑤	12 ④
13 ②	14 6	15 $-1<k<0$	
16 ①	17 $a<1$	18 33	19 ⑤
20 ④			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ③	02 ④	03 16	04 2	05 310	06 ⑤	07 ④	08 ③
09 ②	10 ⑤	11 ③	12 ③	13 8	14 3	15 16	16 $\frac{27}{64}$
17 ①	18 ①	19 100	20 35	21 ④	22 ②	23 7	24 19
25 $-\frac{7}{3}\le k\le 14$	26 163	27 ③	28 -3	29 19	30 36일		

STEP 3 종합 사고력 문제

01 17	02 $k<6$	03 ②
04 1	05 $1<a<6$	
06 16	07 8	08 38
09 5	10 4	11 ②
12 39		

04. 로그함수

/ 본문 pp.041~051

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ①	02 ②	03 -2	04 -1
05 -5	06 ⑤	07 ④	08 ①
09 1	10 ②	11 ③	12 ②
13 16	14 ③	15 ③	16 23
17 16	18 ⑤	19 ④	20 3
21 ③			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ④	02 ②	03 2	04 ②	05 $\frac{1}{2}$	06 ③	07 $\frac{3}{256}$	08 ②
09 $\frac{3}{2}$	10 ⑤	11 15	12 4	13 ⑤	14 ⑤	15 ①	16 19
17 18	18 192	19 ②	20 1	21 ④	22 64	23 68	24 ③
25 ④	26 ③	27 $\frac{1}{8}$	28 4	29 ②	30 63	31 $k<3$	
32 $0<k<\frac{1}{8}$		33 ④	34 ⑤	35 70	36 6년		

STEP 3 종합 사고력 문제

01 ⑤	02 4	03 6
04 ①	05 $2\sqrt{2}$	
06 $\frac{1}{1024}$	07 19	08 6
09 5	10 100	11 6

Ⅱ 삼각함수

05. 삼각함수의 정의

/ 본문 pp.055~062

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③ 02 제2사분면 03 6
04 $\frac{3}{5}\pi$ 05 ② 06 ③ 07 $3\sqrt{5}\pi$
08 ③ 09 ① 10 ④ 11 ①
12 ④ 13 ⑤ 14 ①

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ⑤ 02 ① 03 ③ 04 4 05 25 06 30 07 8 08 ④
09 ② 10 33 11 3 12 218 13 ⑤ 14 ④ 15 ② 16 ③
17 ⑤ 18 ① 19 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 20 $\frac{7}{8}$ 21 $-\frac{1}{2}$ 22 $\frac{5}{2}\pi$ 23 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 24 58

STEP 3 종합 사고력 문제

01 2 02 π 03 ③
04 4 05 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 06 7
07 21 08 $\frac{68}{3}$ 09 69
10 98 11 $\frac{100}{3}\pi$ 12 74

06. 삼각함수의 그래프

/ 본문 pp.065~076

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ⑤ 02 ⑤ 03 ③ 04 5
05 -1 06 ③ 07 ① 08 2
09 ③ 10 5 11 ④ 12 1
13 ① 14 ② 15 ③ 16 ③
17 ④ 18 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 19 ②
20 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 21 ⑤

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ① 02 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 03 ④ 04 7 05 $4\sqrt{3}$ 06 ③ 07 ② 08 ⑤
09 ③ 10 ④ 11 ② 12 ⑤ 13 24 14 37 15 ② 16 ①
17 ③ 18 23 19 48 20 36 21 4 22 ④ 23 -9 24 ②
25 4 26 ③ 27 ⑤ 28 7π 29 ② 30 72 31 ①
32 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$ 33 11 34 16 35 $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 36 ④
37 ⑤ 38 9 39 ③ 40 16 41 14

STEP 3 종합 사고력 문제

01 $\frac{3}{4}$ 02 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 03 $-\frac{3}{4}$
04 5 05 ① 06 -1
07 12 08 18 09 78
10 ② 11 $2\sqrt{26}$ 12 28

07. 사인법칙과 코사인법칙

/ 본문 pp.078~086

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ④ 02 30 03 ⑤ 04 ②
05 ⑤ 06 ① 07 ⑤ 08 ②
09 ③ 10 ④ 11 ③ 12 $4\sqrt{6}$
13 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 14 12

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ② 02 $\frac{33}{8}$ 03 ④ 04 $4\sqrt{3}$ 05 23 06 $\frac{18}{5}$ 07 ① 08 ⑤
09 7 10 $\frac{9\sqrt{5}}{40}\text{cm}^2$ 11 ⑤ 12 ① 13 27 14 291 15 ②
16 풀이 참조 17 ④ 18 $\frac{25}{4}$ 19 ③ 20 ③ 21 64 22 $2\sqrt{3}$
23 ② 24 ⑤ 25 ② 26 14 27 72 28 ⑤ 29 $4\sqrt{7}$ 30 ③

STEP 3 종합 사고력 문제

01 31 km 02 4 03 54
04 3 05 12 06 103
07 67 08 ③ 09 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10 80 11 13 12 237

Speed Check

Ⅲ 수열

08. 등차수열과 등비수열

/ 본문 pp.089~100

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 12
05 ②	06 ①	07 ④	08 1545
09 ⑤	10 ②	11 ①	12 ③
13 ⑤	14 ②	15 13	16 ②
17 ②	18 64	19 10	20 50만 원
21 ⑤			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ①	02 34	03 ⑤	04 197	05 24	06 54	07 ②	08 ④
09 36	10 24	11 612	12 ③	13 442	14 ⑤	15 43	16 ②
17 ②	18 ②	19 2225	20 489	21 187	22 ③	23 ①	24 ③
25 15	26 25	27 ④	28 ⑤	29 ⑤	30 $150\sqrt{2}$	31 ②	32 101
33 4	34 8	35 ①	36 ①	37 11	38 $762\sqrt{2}$	39 39	40 ④
41 4							

STEP 3 종합 사고력 문제

01 275	02 ①	03 1023
04 45	05 $2\sqrt{46}$	06 1
07 -34	08 $-\frac{57}{8}$	09 435
10 11	11 5	

09. 수열의 합

/ 본문 pp.102~110

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 ②	03 ④	04 10
05 ⑤	06 ⑤	07 1	08 2056
09 ③	10 ①	11 2	12 ②
13 ④	14 715		

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 ④	02 ④	03 55	04 188	05 10	06 ②	07 ③	08 ⑤
09 3025	10 220	11 ②	12 120	13 ①	14 ④	15 46	16 ①
17 60	18 208	19 ③	20 221	21 ⑤	22 49	23 ②	24 127
25 440	26 4	27 120	28 ①	29 ⑤	30 231		

STEP 3 종합 사고력 문제

01 29	02 170	03 ④
04 51	05 2144	06 240
07 19	08 $\frac{26}{55}$	09 7
10 184	11 6	

10. 수학적 귀납법

/ 본문 pp.112~119

STEP 1 우수 기출 대표 문제

01 ③	02 ③	03 212	04 20
05 ②	06 297	07 66	08 ⑤
09 ④	10 ⑤	11 320	12 ①
13 풀이 참조			

STEP 2 최고의 변별력 문제

01 8	02 $-\frac{1}{2}$	03 105	04 ⑤	05 31	06 ③	07 ④	08 624
09 120	10 ④	11 ②	12 ②	13 238	14 ③	15 ⑤	16 0
17 54	18 ③	19 ④	20 풀이 참조		21 풀이 참조		
22 풀이 참조							

STEP 3 종합 사고력 문제

01 ⑤	02 36	03 65
04 6	05 $\frac{17}{9}$	06 ②
07 10	08 풀이 참조	
09 54	10 ②	11 ②
12 231		

I 지수함수와 로그함수

01. 지수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.9~10

01 ③	02 -1	03 ③	04 ④	05 ①
06 ⑤	07 ④	08 ②	09 112	10 3
11 9	12 3	13 ①	14 ②	

01 ㄱ. $(-2)^4=16$이므로
16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$에서
$x^2=4$ 또는 $x^2=-4$
$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$ (거짓)
ㄴ. $a<0$일 때, $-a>0$이므로 $(\sqrt[3]{-a})^3=-a$ (거짓)
ㄷ. n이 홀수일 때, -3의 n제곱근 중에서 실수인 것은
$\sqrt[n]{-3}=-\sqrt[n]{3}$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

02 $x^n=99-n$에서 x는 $99-n$의 n제곱근이다.
(i) $n\le99$이면 $99-n\ge0$이므로
n이 홀수일 때, $f(n)=1$
n이 짝수일 때, $f(n)=2$
(ii) $n>99$이면 $99-n<0$이므로
n이 홀수일 때, $f(n)=1$
n이 짝수일 때, $f(n)=0$
(i), (ii)에서
$f(2)-f(3)+f(4)-\cdots+f(200)$
$=\{f(2)-f(3)\}+\{f(4)-f(5)\}+\cdots$
$+\{f(98)-f(99)\}+\{f(100)-f(101)\}+\cdots$
$+\{f(198)-f(199)\}+f(200)$
$=(2-1)\times49+(0-1)\times50+0$
$=49-50=-1$ 답 -1

• 다른 풀이 •

(i) n이 짝수일 때,
$n<99$이면 방정식 $x^n=99-n$의 실근이 양수와 음수 2개가 존재하므로 $f(n)=2$
$n>99$이면 방정식 $x^n=99-n$의 실근이 존재하지 않으므로 $f(n)=0$
(ii) n이 홀수일 때,
방정식 $x^n=99-n$의 실근은 항상 1개가 존재하므로 $f(n)=1$
(i), (ii)에서
$f(2)-f(3)+f(4)-\cdots+f(200)$
$=\{f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(98)\}$
$+\{f(100)+f(102)+f(104)+\cdots+f(200)\}$
$-\{f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(199)\}$
$=2\times49+0\times51-1\times99$
$=98-99=-1$

03 ㄱ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{a}}=\sqrt[4]{a}$ (참)
ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[12]{a^{16}}\neq\sqrt[12]{a}$ (거짓)
ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4\times a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄱ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}$ (참)
ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4=a^{\frac{4}{3}}\neq a^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{a}$ (거짓)
ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\left(a^2\times a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}$ (참)

04 이차방정식 $x^2-3\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{32}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3\sqrt[3]{2}$, $\alpha\beta=\sqrt[3]{32}$ ······㉠
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(3\sqrt[3]{2})^3-3\sqrt[3]{32}\times3\sqrt[3]{2}$ ($\because$ ㉠)
$=27\times2-3^2\times\sqrt[3]{64}$
$=54-9\times4=54-36=18$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$\sqrt[3]{2}=a$라 하면
$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^3\times2^2}=2\times(\sqrt[3]{2})^2=2a^2$
$x^2-3\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{32}=0$
$x^2-3ax+2a^2=0$
$(x-a)(x-2a)=0$
$\therefore x=a$ 또는 $x=2a$
$\therefore x=\sqrt[3]{2}$ 또는 $x=2\sqrt[3]{2}$
따라서 $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\beta=2\sqrt[3]{2}$ 또는 $\alpha=2\sqrt[3]{2}$, $\beta=\sqrt[3]{2}$이므로
$\alpha^3+\beta^3=2+16=18$

05 $A=\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times4]{3^4}=\sqrt[12]{81}$
$B=\sqrt[4]{5}=\sqrt[4\times3]{5^3}=\sqrt[12]{125}$
$C=\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[2\times3]{12}=\sqrt[6]{12}=\sqrt[6\times2]{12^2}=\sqrt[12]{144}$
$\therefore A<B<C$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$A=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=81^{\frac{1}{12}}$
$B=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=(5^3)^{\frac{1}{12}}=125^{\frac{1}{12}}$
$C=\sqrt{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[6]{12}=12^{\frac{1}{6}}=(12^2)^{\frac{1}{12}}=144^{\frac{1}{12}}$
$\therefore A<B<C$

06 $\dfrac{2^{-2}+1+2^2+2^4+\cdots+2^{100}}{2^2+1+2^{-2}+2^{-4}+\cdots+2^{-100}}$

$=\dfrac{2^{98}(2^{-100}+2^{-98}+2^{-96}+\cdots+2^2)}{2^2+1+2^{-2}+2^{-4}+\cdots+2^{-100}}$

$=2^{98}=2^{\frac{1}{2}\times196}=(\sqrt{2})^{196}$

$\therefore n=196$ 답 ⑤

07 지수가 정수가 아닌 유리수 또는 실수인 경우 지수법칙은 밑이 양수일 때만 반드시 성립한다.

즉, m, n이 정수가 아닌 유리수이면 $a<0$일 때 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립하지 않으므로

$\{(-2)^2\}^{\frac{5}{2}}=(-2)^{2\times\frac{5}{2}}=(-2)^5$은 잘못된 계산이다.

따라서 $\{(-2)^2\}^{\frac{5}{2}}\neq(-2)^5$이므로 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳은 ④이다. 답 ④

08 $x=3+2\sqrt{2}$, $y=3-2\sqrt{2}$에서

$x+y=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$,

$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$

$\therefore x+y=6,\ xy=1$ ……㉠

이때 방정식 $\sqrt[x]{a}\sqrt[y]{a}-3\sqrt{a^x a^y}+2=0$에서

$a^{\frac{1}{x}}a^{\frac{1}{y}}-3(a^x a^y)^{\frac{1}{2}}+2=0$

$a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}-3(a^{x+y})^{\frac{1}{2}}+2=0$

$a^{\frac{x+y}{xy}}-3a^{\frac{x+y}{2}}+2=0$

$a^6-3a^3+2=0$ (∵ ㉠)

$(a^3-1)(a^3-2)=0$

$\therefore a^3=2$ (∵ $a\neq1$)

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 양수 a의 값은

$a=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$ 답 ②

09 $a+b=6$, $2^{\frac{a}{3}}-2^{\frac{b}{3}}=4$이므로

$2^a-2^b=\left(2^{\frac{a}{3}}\right)^3-\left(2^{\frac{b}{3}}\right)^3$

$=\left(2^{\frac{a}{3}}-2^{\frac{b}{3}}\right)^3+3\times2^{\frac{a}{3}}\times2^{\frac{b}{3}}\left(2^{\frac{a}{3}}-2^{\frac{b}{3}}\right)$

$=\left(2^{\frac{a}{3}}-2^{\frac{b}{3}}\right)^3+3\times2^{\frac{a+b}{3}}\left(2^{\frac{a}{3}}-2^{\frac{b}{3}}\right)$

$=4^3+3\times2^2\times4$

$=64+48=112$ 답 112

10 $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=3$ $(a>0)$이므로

$a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^3+3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=3^3+3\times3=36$

$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2+2\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}$

$=3^2+2=11$

$\therefore \dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}+9}{a+a^{-1}+4}=\dfrac{36+9}{11+4}=\dfrac{45}{15}=3$ 답 3

11 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}+\dfrac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}$

$=\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}\times\dfrac{2^x}{2^x}+\dfrac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}\times\dfrac{2^x}{2^x}$

$=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}+\dfrac{2^{2x}-2^{-4x}}{1+2^{-2x}}$

$=\dfrac{(2^{2x})^2+\dfrac{1}{2^{2x}}}{2^{2x}+1}+\dfrac{2^{2x}-\dfrac{1}{(2^{2x})^2}}{1+\dfrac{1}{2^{2x}}}$

$=\dfrac{3^2+\dfrac{1}{3}}{3+1}+\dfrac{3-\dfrac{1}{3^2}}{1+\dfrac{1}{3}}$ (∵ $2^{2x}=3$)

$=\dfrac{\dfrac{28}{3}}{4}+\dfrac{\dfrac{26}{9}}{\dfrac{4}{3}}$

$=\dfrac{7}{3}+\dfrac{13}{6}=\dfrac{9}{2}$

따라서 $A=\dfrac{9}{2}$이므로

$2A=2\times\dfrac{9}{2}=9$ 답 9

• 다른 풀이 •

$\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}+\dfrac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}$

$=\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}\times\dfrac{2^x}{2^x}+\dfrac{2^x-2^{-5x}}{2^{-x}+2^{-3x}}\times\dfrac{2^{3x}}{2^{3x}}$

$=\dfrac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}+\dfrac{2^{4x}-2^{-2x}}{2^{2x}+1}$

$=\dfrac{2\times2^{4x}}{2^{2x}+1}=\dfrac{2\times3^2}{3+1}$

$=\dfrac{9}{2}=A$

$\therefore 2A=2\times\dfrac{9}{2}=9$

12 $3^{ab-2a+b}=3^{ab}\times3^{-2a}\times3^b$

$=(3^a)^b\times(3^a)^{-2}\times3^b$

$=5^b\times5^{-2}\times3^b$ (∵ $3^a=5$)

$=\dfrac{(5\times3)^b}{5^2}=\dfrac{15^b}{25}$

$=\dfrac{75}{25}$ (∵ $15^b=75$)

$=3$ 답 3

• 다른 풀이 •

$15^b=(3\times5)^b=(3\times3^a)^b=(3^{a+1})^b=3^{ab+b}$이므로

$3^{ab-2a+b}=3^{ab+b}\times3^{-2a}=15^b\times(3^a)^{-2}=\dfrac{75}{25}=3$

13 $3^a=24^b=2$이므로 $3=2^{\frac{1}{a}}$, $24=2^{\frac{1}{b}}$

이때 $2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=2^{\frac{1}{a}}\div2^{\frac{1}{b}}=3\div24=\dfrac{1}{8}=2^{-3}$이므로

$2^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=2^{-3}$

$\therefore \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=-3$ 답 ①

14 $T_n=50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{1620}}$이므로

$T_{1000}=50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}}$, $T_{1405}=50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1405}{1620}}$

$$\therefore \frac{T_{1000}}{T_{1405}}=\frac{50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}}}{50\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1405}{1620}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1000}{1620}-\frac{1405}{1620}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{405}{1620}}$$

$=2^{\frac{405}{1620}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$(배) 답 ②

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.11~15

01 ⑤	02 56	03 143	04 ③	05 ④
06 69	07 ③	08 11	09 ④	10 ④
11 10	12 127	13 47	14 ②	15 ②
16 11	17 ②	18 ①	19 5	20 ③
21 4	22 ⑤	23 $\frac{1}{15}$	24 -2	25 ⑤
26 14	27 ①	28 20	29 648	

01 ㄱ. n이 홀수이므로 실수 a의 값에 관계없이

$f(n,\ a)=f(n,\ -a)=1$ (참)

ㄴ. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2n>0$, $2n-1>0$이고, $2n$은 짝수, $2n-1$은 홀수이므로

$f(2n-1,\ 2n)=1$, $f(2n,\ 2n-1)=2$

$\therefore f(2n-1,\ 2n)+f(2n,\ 2n-1)=3$ (참)

ㄷ. 자연수 m에 대하여 $2m>0$, $2m+1>0$이고, $2m$은 짝수, $2m+1$은 홀수이므로

$f(2m,\ 2m)=2$, $f(2m+1,\ 2m+1)=1$

$\therefore f(2,\ 2)+f(3,\ 3)+f(4,\ 4)+\cdots+f(100,\ 100)$

$=\{f(2,\ 2)+f(4,\ 4)+\cdots+f(100,\ 100)\}$
$\quad+\{f(3,\ 3)+f(5,\ 5)+\cdots+f(99,\ 99)\}$

$=2\times50+1\times49$

$=149$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 $-n^2+13n-36=-(n-4)(n-9)$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $-(n-4)(n-9)<0$일 때,

$(n-4)(n-9)>0$에서 $n<4$ 또는 $n>9$

그런데 $2\le n\le15$이므로

$2\le n<4$ 또는 $9<n\le15$

이때 음수 $-n^2+13n-36$의 n제곱근 중에서 음의 실수인 것이 존재하려면 n이 홀수이어야 하므로

$n=3,\ 11,\ 13,\ 15$

(ⅱ) $-(n-4)(n-9)=0$일 때,

$n=4$ 또는 $n=9$

$-n^2+13n-36$, 즉 0의 n제곱근은 항상 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $-(n-4)(n-9)>0$일 때,

$(n-4)(n-9)<0$에서 $4<n<9$

이때 양수 $-n^2+13n-36$의 n제곱근 중에서 음의 실수인 것이 존재하려면 n이 짝수이어야 하므로

$n=6,\ 8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$3+6+8+11+13+15=56$ 답 56

03 $n^2-14n+40=(n-4)(n-10)$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $2\le n<4$일 때, $(n-4)(n-10)>0$이므로

$n^2-14n+40>0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5>0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(2)=2$, $f(3)=1$

(ⅱ) $n=4$일 때, $(n-4)(n-10)=0$이므로

$n^2-14n+40=0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5=0$

0의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(4)=1$

(ⅲ) $5\le n<10$일 때, $(n-4)(n-10)<0$이므로

$n^2-14n+40<0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5<0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$f(5)=f(7)=f(9)=1$, $f(6)=f(8)=0$

(ⅳ) $n=10$일 때, $(n-4)(n-10)=0$이므로

$n^2-14n+40=0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5=0$

0의 10제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 $f(10)=1$

(ⅴ) $n>10$일 때, $(n-4)(n-10)>0$이므로

$n^2-14n+40>0$, 즉 $(n^2-14n+40)^5>0$

$(n^2-14n+40)^5$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수는

$f(2k+9)=1$, $f(2k+10)=2$ (단, k는 자연수)

$\therefore f(11)=f(13)=f(15)=\cdots=f(99)=1$,

$f(12)=f(14)=f(16)=\cdots=f(100)=2$

(ⅰ)~(ⅴ)에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(100)$

$=2+1+1+1\times3+0\times2+1+1\times45+2\times45$

$=143$ 답 143

04 $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt[4]{6})x+\sqrt{2}\times\sqrt[4]{6}<0$에서

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{6})<0$

이때 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[4]{6}$이므로

$\sqrt{2}<x<\sqrt[4]{6}$

$\therefore A=\{x\,|\,\sqrt{2}<x<\sqrt[4]{6}\}$

또한, $x^2-(\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{11})x+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{11}<0$에서

$(x-\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[6]{11})<0$

이때 $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}<\sqrt[6]{11}$이므로

$\sqrt[3]{3}<x<\sqrt[6]{11}$

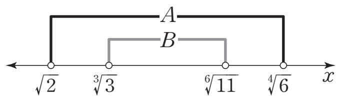
$\therefore B=\{x \mid \sqrt[3]{3}<x<\sqrt[6]{11}\}$

$\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}$,

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$, $\sqrt[6]{11}=\sqrt[12]{11^2}=\sqrt[12]{121}$이므로

$\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{11}$을 크기가 작은 순서대로 나타내면

$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{11}<\sqrt[4]{6}$



따라서 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로

$A\cap B=B$ 답 ③

05

ㄱ. (반례) $(g_4\circ f_4)(-2)=g_4(f_4(-2))$

$(g_4\circ f_4)(a)=g_4(f_4(a))=\sqrt[4]{a^4}$ 이므로 반례는 $a<0$일 때 찾을 수 있다.

$=g_4((-2)^4)$

$=g_4(16)$

$=\sqrt[4]{16}$

$=\sqrt[4]{2^4}=2$ (거짓)

ㄴ. $(g_m\circ g_n)(a)=g_m(g_n(a))=g_m(\sqrt[n]{a})$

$=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

$=\sqrt[mn]{a}=g_{mn}(a)$ (참)

ㄷ. (i) n이 짝수일 때, $n+1$은 홀수이므로

$(g_n\circ f_n)(a)=g_n(f_n(a))=g_n(a^n)$

$=\sqrt[n]{a^n}=-a$

$(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=g_{n+1}(f_{n+1}(a))=g_{n+1}(a^{n+1})$

$=\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=a$

(ii) n이 홀수일 때, $n+1$은 짝수이므로

$(g_n\circ f_n)(a)=g_n(f_n(a))=g_n(a^n)$

$=\sqrt[n]{a^n}=a$

$(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=g_{n+1}(f_{n+1}(a))=g_{n+1}(a^{n+1})$

$=\sqrt[n+1]{a^{n+1}}=-a$

(i), (ii)에서 자연수 n에 대하여

$(g_n\circ f_n)(a)+(g_{n+1}\circ f_{n+1})(a)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

06

모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=[\sqrt[3]{n}]$이므로

$[\sqrt[3]{n}]=k$ (k는 자연수)라 하면

$k\le\sqrt[3]{n}<k+1$

$\therefore \sqrt[3]{k^3}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{(k+1)^3}$ ······㉠

(i) $k=1$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{1}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=1$을 만족시키는 자연수 n의 값은

1, 2, 3, ⋯, 7이다.

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{7}]$

$=1\times7=7$

(ii) $k=2$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[3]{27}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=2$를 만족시키는 자연수 n의 값은

8, 9, 10, ⋯, 26이다.

$\therefore [\sqrt[3]{8}]+[\sqrt[3]{9}]+[\sqrt[3]{10}]+\cdots+[\sqrt[3]{26}]$

$=2\times(26-8+1)=38$

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{26}]$

$=7+38=45$

(iii) $k=3$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[3]{27}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=3$을 만족시키는 자연수 n의 값은

27, 28, 29, ⋯, 63이다.

$\therefore [\sqrt[3]{27}]+[\sqrt[3]{28}]+[\sqrt[3]{29}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$

$=3\times(63-27+1)=111$

$\therefore [\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]$

$=45+111=156$

(iv) $k=4$일 때,

㉠에서

$\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}\le\sqrt[3]{n}<\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[3]{125}$

이므로 $[\sqrt[3]{n}]=4$를 만족시키는 자연수 n의 값은

64, 65, 66, ⋯, 124이다.

이때 $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{a}]=180$이고

$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{63}]=156$이므로

$[\sqrt[3]{64}]+[\sqrt[3]{65}]+[\sqrt[3]{66}]+\cdots+[\sqrt[3]{a}]$

$=180-156=24$

$24=4\times6$이므로 $a=64+6-1=69$

(i)~(iv)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(a)=180$을 만족시키는 자연수 a의 값은 69이다. 답 69

07

ㄱ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로

$x^2y^3=(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^6=1$ (참)

ㄴ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로

$(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^9=x^3(\sqrt{y})^4(\sqrt{y})^5=x^3y^2(\sqrt{y})^5=1$

이때 $0<y<1$에서 $\sqrt{y}<1$이므로 $(\sqrt{y})^5<1$

$\therefore x^3y^2>1$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $x^2y^3=1$이므로

$(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4})^{12}=x^6y^{16}=(x^2y^3)^3y^7=y^7<1$ ($\because 0<y<1$)

$\therefore \sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}<1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

• 다른 풀이 1 •

$\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$에서 $\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$\therefore y=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2=x^{-\frac{2}{3}}$

ㄱ. $x^2y^3=x^2\times\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^3=x^2\times x^{-2}=1$ (참)

ㄴ. $x^3y^2=x^3\times\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^2=x^3\times x^{-\frac{4}{3}}=x^{3-\frac{4}{3}}$

$=x^{\frac{5}{3}}>1$ ($\because x>1$) (참)

ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}=x^{\frac{1}{2}}\times y^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{8}{9}}$

$=x^{\frac{1}{2}-\frac{8}{9}}=x^{-\frac{7}{18}}<1$ ($\because$ $x>1$) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

• 다른 풀이 2 •

ㄴ. $0<y<1<x$에서 $\dfrac{x}{y}>1$

$x^3y^2=x^2y^3\times\dfrac{x}{y}$이므로

$x^3y^2>x^2y^3$

$\therefore$ $x^3y^2>1$ ($\because$ ㄱ) (참)

08 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 정수 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	n이 짝수, 홀수일 때의 순서쌍 (n, a)를 각각 구한다.
❸ 단계	순서쌍의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $\sqrt[n+1]{a}>0$이므로 $a>0$이다.

조건 (나)에서

(i) n이 짝수일 때,

$\sqrt[n]{(-2)^n}=2$, $\sqrt[n+3]{(n-a)^{n+3}}=n-a$이므로

$2\times(n-a)=6$ $\quad\therefore$ $n-a=3$

$2\le n\le 10$이므로 가능한 순서쌍 (n, a)는

$(4, 1)$, $(6, 3)$, $(8, 5)$, $(10, 7)$의 4개이다.

(ii) n이 홀수일 때,

$\sqrt[n]{(-2)^n}=-2$, $\sqrt[n+3]{(n-a)^{n+3}}=|n-a|$이므로

$(-2)\times|n-a|=-6$ $\quad\therefore$ $|n-a|=3$

$2\le n\le 10$이므로 가능한 순서쌍 (n, a)는

$(3, 6)$, $(5, 2)$, $(5, 8)$, $(7, 4)$, $(7, 10)$,

$(9, 6)$, $(9, 12)$의 7개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$4+7=11$ 답 11

09

$\sqrt[3]{\dfrac{5^b}{7^{a+1}}}=\dfrac{5^{\frac{b}{3}}}{7^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수가 되려면 $a+1$과 b가 3의 배수이어야 하고, $\sqrt[5]{\dfrac{5^{b+1}}{7^a}}=\dfrac{5^{\frac{b+1}{5}}}{7^{\frac{a}{5}}}$이 유리수가 되려면 a와 $b+1$이 5의 배수이어야 한다.

즉, a는 5의 배수, $a+1$은 3의 배수이므로 a의 최솟값은 5이고, b는 3의 배수, $b+1$은 5의 배수이므로 b의 최솟값은 9이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 $5+9=14$이다. 답 ④

10

$$\left(-a\times\frac{1}{b}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{a}\times b^{-1}\right)^{-2}=\left(-\frac{a}{b}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{ab}\right)^{-2}$$
$$=-\frac{b}{a}\times a^2b^2$$
$$=-ab^3=216$$

이때 $216=2^3\times3^3$이므로 0이 아닌 두 정수 a와 b가 될 수 있는 값을 나타내면 다음 표와 같다.

a	1	-1	2^3	-2^3	3^3	-3^3	6^3	-6^3
b^3	-6^3	6^3	-3^3	3^3	-2^3	2^3	-1	1
b	-6	6	-3	3	-2	2	-1	1

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, -6)$, $(-1, 6)$, $(8, -3)$, $\cdots$, $(-216, 1)$의 8개이다.

답 ④

11

$$\frac{1}{a^{-31}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{29}+a^{-1}}=\frac{1}{a^{-31}+a^{-1}}\times\frac{a^{30}}{a^{30}}+\frac{1}{a^{29}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a^{30}}{a^{29}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{29}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a(a^{29}+a^{-1})}{a^{29}+a^{-1}}=a,$$

$$\frac{1}{a^{-30}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{28}+a^{-1}}=\frac{1}{a^{-30}+a^{-1}}\times\frac{a^{29}}{a^{29}}+\frac{1}{a^{28}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a^{29}}{a^{28}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{28}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a(a^{28}+a^{-1})}{a^{28}+a^{-1}}=a,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a^{-2}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{0}+a^{-1}}=\frac{1}{a^{-2}+a^{-1}}\times\frac{a}{a}+\frac{1}{a^{0}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a}{a^{0}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{0}+a^{-1}}$$
$$=\frac{a(a^{0}+a^{-1})}{a^{0}+a^{-1}}=a,$$

$$\frac{1}{a^{-1}+a^{-1}}=\frac{a}{2}$$

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\left(\frac{1}{a^{-31}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{29}+a^{-1}}\right)+\left(\frac{1}{a^{-30}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{28}+a^{-1}}\right)+$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{a^{-2}+a^{-1}}+\frac{1}{a^{0}+a^{-1}}\right)+\frac{1}{a^{-1}+a^{-1}}$$

$=30a+\dfrac{a}{2}=\dfrac{61a}{2}$

즉, $\dfrac{61a}{2}=305$이므로

$a=10$ 답 10

12

$$f(n)=\sqrt[n]{\sqrt[n-1]{3}\times\sqrt[n+1]{3}}=\left(3^{\frac{1}{n-1}}\times3^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$=\left(3^{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n+1)}}$$
$$=3^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=3^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}}$$

이므로

$f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(10)$

$=3^{1-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}\times\cdots\times3^{\frac{1}{8}-\frac{1}{10}}\times3^{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}$

$=3^{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)}$

$=3^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}}$

$=3^{\frac{72}{55}}$

따라서 $p=55$, $q=72$이므로

$p+q=127$ 답 127

단계	채점 기준	배점
(가)	$f(n)$을 $3^{g(n)}$ 꼴로 정리한 경우	30%
(나)	$f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(10)$을 간단히 한 경우	40%
(다)	$p,\ q$의 값을 구하고 $p+q$의 값을 구한 경우	30%

BLACKLABEL 특강 참고

부분분수로 변형하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

(1) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$ (단, $a\neq b$)

(2) $\dfrac{1}{(x-a)(x+a)}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$ (단, $a\neq 0$)

13 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$b=-a+6 \qquad \therefore a+b=6$

한편, $2^a=4+2^p$, $2^b=4+2^{-p}$을 변끼리 곱하면

$2^a2^b=(4+2^p)(4+2^{-p})$

$2^{a+b}=16+4\times2^p+4\times2^{-p}+1$

$2^6=17+2^{2+p}+2^{2-p}$ ($\because a+b=6$)

$\therefore 2^{2+p}+2^{2-p}=64-17=47$ 답 47

• 다른 풀이 •

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$ 위에 있으므로

$b=-a+6 \qquad \therefore a+b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2^a=4+2^p$, $2^b=4+2^{-p}$에서

$2^p=2^a-4 \cdots\cdots$ ㉡, $2^{-p}=2^b-4 \cdots\cdots$ ㉢

㉡×㉢을 하면

$1=(2^a-4)(2^b-4)$

$2^{a+b}-4(2^a+2^b)+15=0$

$64-4(2^a+2^b)+15=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore 2^a+2^b=\dfrac{79}{4}$

㉡+㉢을 하면

$2^p+2^{-p}=2^a+2^b-8=\dfrac{79}{4}-8=\dfrac{47}{4}$

$\therefore 2^{2+p}+2^{2-p}=4\times(2^p+2^{-p})=4\times\dfrac{47}{4}=47$

14 $f(x)=\sqrt{2x}$이므로

ㄱ. $f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))$

$=f(\sqrt{2})=\sqrt{2\sqrt{2}}$

$=2^{\frac12+\frac14}=2^{\frac34}$ (참)

ㄴ. $f^3(2)=(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))$

$=f(f(\sqrt{4}))=f(f(2))$

$=f(\sqrt{4})=f(2)$

$=\sqrt{4}=2$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $f^2(1)=\sqrt{2\sqrt{2}}$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))$

$=f(\sqrt{2\sqrt{2}})=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$=2^{\frac12+\frac14+\frac18}=2^{\frac78}=2^{\frac{2^3-1}{2^3}}$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))$

$=f(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}})=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

$=2^{\frac12+\frac14+\frac18+\frac1{16}}=2^{\frac{15}{16}}=2^{\frac{2^4-1}{2^4}}$

$\vdots$

$f^n(1)=2^{\frac12+\frac14+\frac18+\cdots+\frac1{2^n}}$

$=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}=2^{1-\frac1{2^n}}$

같은 방법으로

$f(4)=2\sqrt{2}=2^{1+\frac12}$

$f^2(4)=(f\circ f)(4)=f(f(4))$

$=f(2\sqrt{2})=\sqrt{4\sqrt{2}}$

$=2\sqrt[4]{2}=2^{1+\frac14}$

$f^3(4)=(f\circ f^2)(4)=f(f^2(4))$

$=f(2\sqrt[4]{2})=\sqrt{4\sqrt[4]{2}}$

$=2\sqrt[8]{2}=2^{1+\frac18}$

$\vdots$

$f^n(4)=2^{1+\frac1{2^n}}$

$\therefore f^n(1)f^n(4)=2^{1-\frac1{2^n}}\times2^{1+\frac1{2^n}}=2^2$

$\neq f(2)=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

$f^1(x)=\sqrt{2x}=(2x)^{\frac12}=2^{\frac12}x^{\frac12}$에서

$f^2(x)=\left(2\times2^{\frac12}x^{\frac12}\right)^{\frac12}=\left(2^{\frac32}x^{\frac12}\right)^{\frac12}=2^{\frac34}x^{\frac14}$

$f^3(x)=\left(2\times2^{\frac34}x^{\frac14}\right)^{\frac12}=\left(2^{\frac74}x^{\frac14}\right)^{\frac12}=2^{\frac78}x^{\frac18}$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}x^{\frac1{2^n}}$

ㄱ. $f^2(1)=2^{\frac34}$ (참)

ㄴ. $f^3(2)=2^{\frac78}2^{\frac18}=2^{\frac78+\frac18}=2$ (참)

ㄷ. $f^n(1)=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

$f^n(4)=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}4^{\frac1{2^n}}=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}2^{\frac2{2^n}}=2^{\frac{2^n+1}{2^n}}$

$\therefore f^n(1)f^n(4)=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}\times2^{\frac{2^n+1}{2^n}}=2^{\frac{2\times2^n}{2^n}}=2^2=4$

그런데 $f(2)=2$이므로 $f^n(1)f^n(4)\neq f(2)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

BLACKLABEL 특강 참고

함수 $f(x)=\sqrt{2x}$와 두 양수 $a,\ b$에 대하여

$f(a)=\sqrt{2a}$, $f(b)=\sqrt{2b}$

이므로 $f(a)f(b)=2\sqrt{ab}$이다.

이때 $ab=4$이면 $f(a)f(b)=4$이다.

같은 방법으로

$f(a)f(b)=4$이면 $f^2(a)f^2(b)=4$이다.

$f^2(a)f^2(b)=4$이면 $f^3(a)f^3(b)=4$이다.

$\vdots$ (중략)

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$ab=4$이면 $f^n(a)f^n(b)=4$이다.

ㄷ에서 $1\times4=4$이므로

$f^n(1)f^n(4)=4\neq f(2)=2$

그러므로 ㄷ은 거짓이다.

15 $\sqrt[8]{56\sqrt[4]{14^{n+3}}}$이 어떤 유리수 k의 네제곱근이라 하면

$k=(\sqrt[8]{56\sqrt[4]{14^{n+3}}})^4$
$=\left\{(56\sqrt[4]{14^{n+3}})^{\frac{1}{8}}\right\}^4$
$=\left\{(2^3\times7)\times(2^{n+3}\times7^{n+3})^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$=2^{\frac{3}{2}}\times7^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{n+3}{8}}\times7^{\frac{n+3}{8}}$
$=2^{\frac{n+15}{8}}\times7^{\frac{n+7}{8}}$

이때 k가 유리수이므로 $\frac{n+15}{8}$와 $\frac{n+7}{8}$의 값이 정수가 되어야 한다.

$|n|\le20$에서 $-20\le n\le20$

$\therefore -\frac{5}{8}\le\frac{n+15}{8}\le\frac{35}{8}$

즉, $\frac{n+15}{8}$의 값이 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3, 4이고, $\frac{n+15}{8}=\frac{n+7}{8}+1$에서 $\frac{n+15}{8}$의 값이 정수이면 $\frac{n+7}{8}$의 값도 정수이므로 조건을 만족시키는 정수 n은 -15, -7, 1, 9, 17의 5개이다. 답 ②

16 $\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=b$의 양변을 세제곱하면

$a-\frac{1}{a}-3\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)=b^3$

$a-\frac{1}{a}-3b=b^3\ \left(\because \sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=b\right)$

$\therefore b^3+3b=a-\frac{1}{a}$

이때 $b^3+3b=3$이므로 $a-\frac{1}{a}=3$

$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2$
$=3^2+2=11$ 답 11

17 $(5^{a+b}-5^{-a-b})(5^{a-b}-5^{-a+b})$
$=5^{2a}-5^{2b}-5^{-2b}+5^{-2a}$
$=5^{2a}+5^{-2a}-(5^{2b}+5^{-2b})$ ……㉠

$5^a+5^{-a}=7$에서
$5^{2a}+5^{-2a}=(5^a+5^{-a})^2-2\times5^a\times5^{-a}$
$=7^2-2=47$

$5^b+5^{-b}=4$에서
$5^{2b}+5^{-2b}=(5^b+5^{-b})^2-2\times5^b\times5^{-b}$
$=4^2-2=14$

따라서 ㉠에서
$(5^{a+b}-5^{-a-b})(5^{a-b}-5^{-a+b})=47-14=33$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$5^a=x$, $5^b=y$로 놓으면 $5^a+5^{-a}=7$, $5^b+5^{-b}=4$에서
$x+\frac{1}{x}=7$, $y+\frac{1}{y}=4$이므로

$(5^{a+b}-5^{-a-b})(5^{a-b}-5^{-a+b})$
$=\left(xy-\frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$
$=x^2+\frac{1}{x^2}-\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)$
$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$
$=7^2-4^2=33$

18 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$로 놓으면

$3^a\times3^b\times3^c=3^{a+b+c}=3^{-1}=\frac{1}{3}$에서

$xyz=\frac{1}{3}$ ……㉠

$3^a+3^b+3^c=5$에서

$x+y+z=5$ ……㉡

$3^{-a}+3^{-b}+3^{-c}=6$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$이므로

$6=3(xy+yz+zx)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore xy+yz+zx=2$ ……㉢

$\therefore 9^a+9^b+9^c=x^2+y^2+z^2$
$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
$=5^2-2\times2$ ($\because$ ㉡, ㉢)
$=21$ 답 ①

19 $2x=9^{10}-\frac{1}{9^{10}}=9^{10}-9^{-10}$에서 $x=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}$이므로

$1+x^2=1+\frac{(9^{10}-9^{-10})^2}{2^2}=\frac{4+(9^{10}-9^{-10})^2}{4}$
$=\frac{9^{20}+9^{-20}+2}{4}=\frac{(9^{10}+9^{-10})^2}{4}$

$\therefore \sqrt{1+x^2}=\sqrt{\frac{(9^{10}+9^{-10})^2}{4}}=\frac{9^{10}+9^{-10}}{2}$

$\therefore x+\sqrt{1+x^2}=\frac{9^{10}-9^{-10}}{2}+\frac{9^{10}+9^{-10}}{2}=9^{10}$

이때 $\sqrt[n]{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt[n]{9^{10}}=9^{\frac{10}{n}}=3^{\frac{20}{n}}$이므로 이 값이 정수가 되려면 자연수 n은 20의 양의 약수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n은 2, 4, 5, 10, 20의 5개이다.

답 5

20 $40^a=2$, $40^b=5$에서

$40=2^3\times5=(40^a)^3\times40^b=40^{3a+b}$

밑이 40으로 같으므로 $3a+b=1$에서

$1-b=3a$

$\therefore 8^{\frac{2(1-a-b)}{1-b}}=8^{\frac{2(3a-a)}{3a}}=8^{\frac{4}{3}}$
$=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$40^a=2$, $40^b=5$에서

$40^{1-a-b}=\frac{40}{40^a\times 40^b}=\frac{40}{2\times 5}=4$

$40^{1-b}=\frac{40}{40^b}=\frac{40}{5}=8$, $8^{\frac{1}{1-b}}=40$

$$8^{\frac{2(1-a-b)}{1-b}}=\left(8^{\frac{1}{1-b}}\right)^{2(1-a-b)}$$
$$=40^{2(1-a-b)}$$
$$=(40^{1-a-b})^2$$
$$=4^2=16$$

21
$$\frac{2^x}{1+2^{x-y}}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}=\frac{2^x}{1+2^{x-y}}\times\frac{2^{-x}}{2^{-x}}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}\times\frac{2^{-y}}{2^{-y}}$$
$$=\frac{1}{2^{-x}+2^{-y}}+\frac{1}{2^{-y}+2^{-x}}$$
$$=\frac{2}{2^{-x}+2^{-y}}=\frac{1}{2}$$

즉, $\frac{1}{2^{-x}+2^{-y}}=\frac{1}{4}$이므로

$2^{-x}+2^{-y}=4$ 답 4

• 다른 풀이 •

$$\frac{2^x}{1+2^{x-y}}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}=\frac{2^x}{1+2^{x-y}}\times\frac{2^y}{2^y}+\frac{2^y}{1+2^{-x+y}}\times\frac{2^x}{2^x}$$
$$=\frac{2^{x+y}}{2^y+2^x}+\frac{2^{x+y}}{2^x+2^y}$$
$$=\frac{2\times 2^{x+y}}{2^x+2^y}$$
$$=\frac{2^{1+x+y}}{2^x+2^y}=\frac{1}{2}$$

즉, $2\times 2^{1+x+y}=2^x+2^y$이므로

$2^x+2^y=2^{2+x+y}$ ……㉠

$$\therefore 2^{-x}+2^{-y}=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}$$
$$=\frac{2^x+2^y}{2^x\times 2^y}=\frac{2^{2+x+y}}{2^{x+y}}\ (\because ㉠)$$
$$=2^2=4$$

BLACKLABEL 특강 | 참고

이 문제는 식을 얼마나 잘 변형하는가를 평가하는 문제이다. 대칭식일 때는 대칭을 이루는 문자를 동일한 형태로 치환하여 접근해 보는 것도 좋은 아이디어이다.

$2^x=A$, $2^y=B$로 치환하여 식을 변형하면

$\frac{A}{1+\frac{A}{B}}+\frac{B}{1+\frac{B}{A}}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}+\frac{1}{\frac{1}{B}+\frac{1}{A}}=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}=\frac{1}{2}$, 즉 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=4$이고, 문제에서 구하고자 하는 값이 $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}$이므로 답이 4임을 알 수 있다.

22 $2^x=3^y=6^z=k\ (k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$, $6=k^{\frac{1}{z}}$

ㄱ. $k^{\frac{1}{x}}<k^{\frac{1}{y}}<k^{\frac{1}{z}}$에서

$k>1$이므로 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$

$\therefore z<y<x\ (\because x>0,\ y>0,\ z>0)$ (참)

ㄴ. $2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$을 변끼리 곱하면

$6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ ……㉠

그런데 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$이므로 $z=1$ (참)

ㄷ. $x=p$, $z=p^2\ (p\neq 1)$이면

㉠에서

$\frac{1}{y}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1-p}{p^2}$

$\therefore y=\frac{p^2}{1-p}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

23 $3^a=5^b$의 양변에 3^b을 곱하면

$3^a\times 3^b=5^b\times 3^b$

$\therefore 3^{a+b}=15^b$

이때 $2ab-a-b=0$에서 $a+b=2ab$이므로

$3^{2ab}=3^{a+b}=15^b$

$\therefore 3^{2a}=15$

$*\therefore \left(\frac{1}{27}\right)^a\times 5^b=3^{-3a}\times 3^a=3^{-2a}=\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{15}$

• 다른 풀이 1 •

$2ab-a-b=0$에서 $(2a-1)b=a$

이때 $a=\frac{1}{2}$이면 $0\times b=\frac{1}{2}$이므로 $a\neq\frac{1}{2}$

$\therefore b=\frac{a}{2a-1}$

$3^a=5^b$에서 $3^a=5^{\frac{a}{2a-1}}$, $3^{2a-1}=5$ $\therefore 3^{2a}=15$

다음은 *와 같다.

• 다른 풀이 2 •

$2ab-a-b=0$에서 $2ab=a+b$

$\frac{a+b}{ab}=2$ $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$ ……㉠

이때 $3^a=5^b=k\ (k>0)$로 놓으면

$k^{\frac{1}{a}}=3$, $k^{\frac{1}{b}}=5$

위의 두 식을 변끼리 곱하면

$k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=15$, $k^2=15\ (\because ㉠)$ $\therefore k=15^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \left(\frac{1}{27}\right)^a\times 5^b=(3^{-3})^a\times 5^b$$
$$=(3^a)^{-3}\times 5^b$$
$$=k^{-3}\times k=k^{-2}$$
$$=\left(15^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}=\frac{1}{15}$$

24 이차방정식 $x^2+(2-a-b)x+a-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+b-2$, $\alpha\beta=a-b$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{a+b-2}{a-b} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $3^a=6$, $3^b=24$이므로

$$3^{a+b-2}=3^a\times 3^b\times\frac{1}{9}=6\times 24\times\frac{1}{9}=16,$$

$$3^{a-b}=3^a\times\frac{1}{3^b}=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$$

이때 $16=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$이므로 $3^{a+b-2}=3^{-2(a-b)}$

$$3^{\frac{a+b-2}{a-b}}=3^{-2} \qquad \therefore \frac{a+b-2}{a-b}=-2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{a+b-2}{a-b}\ (\because ㉠)$$
$$=-2$$

답 -2

• 다른 풀이 •

이차방정식 $x^2+(2-a-b)x+a-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a+b-2$, $\alpha\beta=a-b$ $\quad\cdots\cdots ㉡$

한편, $3^a=6$에서 $3^{a-1}=2$,

$3^b=24$에서 $3^{b-1}=8=2^3$이므로

$3^{b-1}=(3^{a-1})^3$에서 $3^{b-1}=3^{3a-3}$

즉, $b-1=3a-3$이므로 $b=3a-2$

위의 식을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+\beta=4a-4$, $\alpha\beta=-2a+2$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{4a-4}{-2a+2}$$
$$=\frac{4(a-1)}{-2(a-1)}=-2$$

25 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$이므로

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}+2}+\frac{4^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}+2}$

$$=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}+2}+\frac{4^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}+2}\times\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}+2}+\frac{4^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{2\times 4^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}$$
$$=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}+2}+\frac{4}{2\times 4^{\frac{1}{3}}+4}$$
$$=\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}+2}+\frac{2}{4^{\frac{1}{3}}+2}$$
$$=\frac{4^{\frac{1}{3}}+2}{4^{\frac{1}{3}}+2}=1\text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$에서 x 대신 $1-x$를 대입하면

$$f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}\times\frac{4^x}{4^x}$$
$$=\frac{4}{2\times 4^x+4}=\frac{2}{4^x+2}$$

이므로

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{51}\right)+f\left(\frac{2}{51}\right)+f\left(\frac{3}{51}\right)+\cdots+f\left(\frac{50}{51}\right)$$
$$=\left\{f\left(\frac{1}{51}\right)+f\left(\frac{50}{51}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2}{51}\right)+f\left(\frac{49}{51}\right)\right\}$$
$$+\cdots+\left\{f\left(\frac{25}{51}\right)+f\left(\frac{26}{51}\right)\right\}$$
$$=1\times 25=25\text{ (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

26 정육면체의 한 변의 길이를 x라 하자.

정육면체의 부피는 x^3이므로

$x^3=2^7$ $\quad\therefore x=2^{\frac{7}{3}}$ $\quad\cdots\cdots ㉠$

이때 색칠한 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로

넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(2^{\frac{7}{3}}\right)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2^{\frac{14}{3}}=\sqrt{3}\times 2^{\frac{11}{3}}$$

$$\therefore \frac{q}{p}=\frac{11}{3}$$

즉, $p=3$, $q=11$이므로

$p+q=14$

답 14

27 단원자 이상기체의 단열 팽창 전 온도가 $480(\mathrm{K})$이고 부피가 $5(\mathrm{m}^3)$이므로

$T_i=480$, $V_i=5$

이 이상기체가 단열 팽창하여 기체의 온도가 $270(\mathrm{K})$이 되었으므로 $T_f=270$

$\gamma=\frac{5}{3}$이므로 팽창 후 부피를 V_f라 하고 주어진 등식

$T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$에 대입하면

$$480\times 5^{\frac{5}{3}-1}=270\times V_f^{\frac{5}{3}-1}$$
$$480\times 5^{\frac{2}{3}}=270\times V_f^{\frac{2}{3}}$$
$$16\times 5^{\frac{2}{3}}=9\times V_f^{\frac{2}{3}}$$
$$V_f^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{9}\times 5^{\frac{2}{3}}$$
$$\therefore V_f=\left(\frac{4}{3}\right)^{2\times\frac{3}{2}}\times 5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{64}{27}\times 5=\frac{320}{27}$$

답 ①

28 두 폭약이 수면으로부터 깊이가 $d(\mathrm{m})$인 지점에서 폭발했으므로

$W=160$, $D=d$일 때, $R_1=k\left(\dfrac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$W=p$, $D=d$일 때, $R_2=k\left(\dfrac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2}=\frac{k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{\frac{160}{d+10}}{\frac{p}{d+10}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$\dfrac{R_1}{R_2}=2$에서 $\left(\dfrac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2$

$\dfrac{160}{p}=2^3=8$

$\therefore p=\dfrac{160}{8}=20$ 답 20

29 정사각형을 넓이가 A, B, C, D인 네 개의 직사각형으로 나누었을 때, $A:B=C:D$이므로

$2^a3^b : 2^{a-1}3^{b+1}=2^{2a-1}3^b : 2^{a+1}3^{b+1}$

2^a3^b으로 나누면

$1:\dfrac{3}{2}=2^{a-1}:6$

즉, $\dfrac{3}{2}\times 2^{a-1}=6$이므로 $2^{a-1}=4$

$\therefore 2^{a-1}=2^2$

밑이 2로 같으므로

$a-1=2$ $\quad\therefore a=3$ ……㉠

㉠을 네 개의 직사각형의 넓이에 대입하여 정리하면

$A=2^33^b=8\times3^b$, $B=2^23^{b+1}=12\times3^b$,

$C=2^53^b=32\times3^b$, $D=2^43^{b+1}=48\times3^b$

이때 주어진 정사각형의 넓이는 $90^2=3^4\times100$이므로

$A+B+C+D=8\times3^b+12\times3^b+32\times3^b+48\times3^b$

$=(8+12+32+48)\times3^b$

$=100\times3^b=100\times3^4$

$\therefore b=4$ $\quad\therefore A=8\times3^4=648$ 답 648

• 다른 풀이 •

넓이가 A, C인 두 직사각형의 가로의 길이를 m, 넓이가 B, D인 두 직사각형의 가로의 길이를 n이라 하면

넓이가 A인 직사각형의 세로의 길이는 $\dfrac{2^a3^b}{m}$이고, 넓이가 A인 직사각형의 세로의 길이는 넓이가 B인 직사각형의 세로의 길이와 같으므로

$\dfrac{2^a3^b}{m}\times n=2^{a-1}3^{b+1}$

$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{2}$ ……㉡

또한, 넓이가 C인 직사각형의 세로의 길이는 $\dfrac{2^{2a-1}3^b}{m}$이고, 넓이가 C인 직사각형의 세로의 길이는 넓이가 D인 직사각형의 세로의 길이와 같으므로

$\dfrac{2^{2a-1}3^b}{m}\times n=2^{a+1}3^{b+1}$

$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{3}{2^{a-2}}$ ……㉢

㉡, ㉢에서

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2^{a-2}}$이므로 $a=3$

한편,

$A+B+C+D$

$=2^a3^b+2^{a-1}3^{b+1}+2^{2a-1}3^b+2^{a+1}3^{b+1}$

$=2^{a-1}3^b(2+3+2^a+2^2\times3)$

$=2^2\times3^b\times5^2$ ($\because a=3$)

이때 주어진 정사각형의 넓이는 $90^2=2^2\times3^4\times5^2$이므로

$b=4$

$\therefore A=2^a3^b=2^3\times3^4=648$

BLACKLABEL 특강 참고

넓이가 A, B인 두 직사각형의 넓이의 비는

$A:B=2^a3^b:2^{a-1}3^{b+1}=2:3$

이때 세로의 길이가 같으므로 가로의 길이의 비가 $2:3$이고, 주어진 정사각형의 한 변의 길이가 90이므로 넓이가 A인 직사각형의 가로의 길이는

$90\times\dfrac{2}{5}=36$

같은 방법으로 넓이가 B, D인 두 직사각형의 넓이의 비는

$B:D=2^{a-1}3^{b+1}:2^{a+1}3^{b+1}=1:4$

이때 가로의 길이가 같으므로 세로의 길이의 비가 $1:4$이고 정사각형의 한 변의 길이가 90이므로 넓이가 B인 직사각형의 세로의 길이는

$90\times\dfrac{1}{5}=18$

넓이가 A, B인 두 직사각형의 세로의 길이가 같으므로 넓이가 A인 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 36, 18이다.

$\therefore A=36\times18=648$

STEP 3 **1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제** pp.16~17

01 $\sqrt{15}$	02 ①	03 7	04 11	05 ②
06 13	07 26	08 30	09 20	10 17
11 3	12 28			

01 해결단계

❶ 단계	$a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$ $(k>0)$로 놓고, a, b, c를 각각 k에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	조건 ㈎와 ❶ 단계에서 구한 식을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\dfrac{3a+5c}{2b}$의 최솟값을 구한다.

조건 ㈏에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$ $(k>0)$로 놓으면

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$

$b=k^y$의 양변을 제곱하면 $b^2=k^{2y}$ ……㉠

$a=k^x$, $c=k^z$을 변끼리 곱하면

$ac=k^{x+z}$ ……㉡

조건 ㈎에서 $2y=x+z$이므로 ㉠, ㉡에서

$b^2=ac$

이때 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{3a+5c}{2b}&=\frac{3a}{2b}+\frac{5c}{2b}\\&\ge 2\sqrt{\frac{3a}{2b}\times\frac{5c}{2b}}\\&\ge 2\sqrt{\frac{15}{4}\times\frac{ac}{b^2}}\\&=2\sqrt{\frac{15}{4}}=\sqrt{15}\end{aligned}$$

(단, 등호는 $3a=5c$일 때 성립)

따라서 $\frac{3a+5c}{2b}$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다. 답 $\sqrt{15}$

• 다른 풀이 •

조건 ㈏에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$

$\therefore \frac{3a+5c}{2b}=\frac{3k^x+5k^z}{2k^y}$

조건 ㈎에서 $y=\frac{x+z}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{3k^x+5k^z}{2k^y}&=\frac{3k^x+5k^z}{2k^{\frac{x+z}{2}}}\\&=\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}+\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}\end{aligned}$$

이때 $k^{\frac{z-x}{2}}>0$, $\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}+\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}&\ge 2\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{k^{\frac{z-x}{2}}}\times\frac{5}{2}k^{\frac{z-x}{2}}}\\&=2\sqrt{\frac{15}{4}}=\sqrt{15}\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } k^{z-x}=\frac{3}{5}\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore \frac{3a+5c}{2b}\ge\sqrt{15}$

따라서 $\frac{3a+5c}{2b}$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다.

02 해결단계

❶ 단계	a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x임을 이용하여 조건 ㈎, ㈏, ㈐를 등식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 이용하여 mn의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

조건 ㈎에서 $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이므로

$b=(\sqrt[3]{a})^m=a^{\frac{m}{3}}$

조건 ㈏에서 $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이므로

$c=(\sqrt{b})^n=b^{\frac{n}{2}}$

조건 ㈐에서 c는 a^{12}의 네제곱근이므로

$a^{12}=c^4 \quad \therefore c=a^3$

즉, $c=b^{\frac{n}{2}}=\left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}=a^3$이므로

$\frac{mn}{6}=3 \quad \therefore mn=18$

따라서 $mn=18$을 만족시키는 1이 아닌 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 9)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(9, 2)$의 4개이다. 답 ①

03 해결단계

❶ 단계	거듭제곱근의 대소 관계를 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 범위를 이용하여 x^{-1}, x^{-2}의 값의 범위를 각각 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 범위를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$x=4^{\frac{4}{5}}$에서 $x^5=4^4=256$

이때 $3^5=243<256<4^5=1024$이므로

$3^5<x^5<4^5 \quad \therefore 3<x<4$ ……㉠

$\therefore \frac{1}{4}<x^{-1}<\frac{1}{3}$ ……㉡

또한, $x=4^{\frac{4}{5}}$에서 $x^{-2}=4^{-\frac{8}{5}}$

$4^{-\frac{8}{5}}=a\ (a>0)$로 놓으면 $a^5=4^{-8}=\frac{1}{4^8}$

$\frac{1}{4^8}<1$이므로 $a^5<1 \quad \therefore 0<a<1$

$\therefore 0<x^{-2}<1\ (\because a=4^{-\frac{8}{5}}=x^{-2})$ ……㉢

㉠에서 $4<x+1<5$이므로 $[x+1]=4$

㉢에서 $2<x^{-2}+2<3$이므로 $[x^{-2}+2]=2$

㉠, ㉡에서 $\frac{13}{4}<x+x^{-1}<\frac{13}{3}$ ∗

즉, $\frac{13}{12}<\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^{-1}<\frac{13}{9}$이므로 $\left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^{-1}\right]=1$

$\therefore [x+1]+[x^{-2}+2]+\left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^{-1}\right]$

$=4+2+1=7$ 답 7

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 ∗

$\frac{1}{x}\ (x>0)$은 x가 최대일 때 최솟값을 갖고, x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$3<x<4$에서 $x+\frac{1}{x}$의 값의 범위를 $\alpha<x+\frac{1}{x}<\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

㉠, ㉡에서 $\alpha>3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$, $\beta<4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$이므로

$\frac{13}{4}<x+\frac{1}{x}<\frac{13}{3}$

04 해결단계

❶ 단계	집합 X의 원소의 개수를 구한다.
❷ 단계	$n(A)$, $n(B)$를 이용하여 집합 X의 원소 중 양수, 음수의 개수를 각각 구한다.
❸ 단계	집합 X의 모든 원소의 합이 최대가 되도록 하는 원소를 구하고, 그 합을 구한다.

집합 X의 원소 x에 대하여 x의 실수인 세제곱근과 네제곱근의 개수는 x의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

	세제곱근의 개수	네제곱근의 개수
$x>0$	1	2
$x=0$	1	1
$x<0$	1	0

x의 실수인 세제곱근의 개수는 항상 1이고 $n(B)=7$이므로 집합 X의 원소의 개수는 7이다.

집합 X의 원소 중 양수의 개수를 m, 음수의 개수를 n이라 하자.

$0\notin X$이면 $n(A)=2m$

그런데 $n(A)=9$이므로 $0\in X$이어야 한다.

즉, $n(A)=2m+1$이므로

$2m+1=9 \qquad \therefore m=4$

집합 X의 원소 7개 중 양수는 4개, 0이 1개이므로 음수의 개수는 $n=7-4-1=2$

즉, 집합 X는 집합 U의 원소 중에서 0과 양수 4개와 음수 2개를 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합이 최대이려면

$X=\{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$이고, 구하는 최댓값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$ **답** 11

05 해결단계

❶ 단계	A, B, C를 간단히 정리하여 지수를 같게 한다.
❷ 단계	A, B, C의 대소 관계를 판단한다.
❸ 단계	$\lvert A-B\rvert+\lvert B-C\rvert+\lvert C-A\rvert$의 절댓값을 풀어 정리한다.

$A=\sqrt{m\sqrt[3]{n}}=m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{6}}=(m^6n^2)^{\frac{1}{12}}$

$B=\sqrt[3]{n\sqrt{m}}=n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{6}}=(m^2n^4)^{\frac{1}{12}}$

$C=\sqrt{\sqrt{mn}}=(mn)^{\frac{1}{4}}=(m^3n^3)^{\frac{1}{12}}$

이때 m, n은 연속하는 자연수이고, $1<m<n$이므로

$m=n-1$

(i) $\dfrac{A}{B}=\left(\dfrac{m^6n^2}{m^2n^4}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^4}{n^2}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^2}{n}\right)^{\frac{1}{6}}$

$=\left\{\dfrac{(n-1)^2}{n}\right\}^{\frac{1}{6}}$

이때 $1<m<n$에서 $1<n-1<n$이므로 $n>2$

$\therefore \dfrac{(n-1)^2}{n}=\dfrac{n^2-2n+1}{n}$

$=n-2+\dfrac{1}{n}>1$

$\therefore A>B$

(ii) $\dfrac{A}{C}=\left(\dfrac{m^6n^2}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{m^3}{n}\right)^{\frac{1}{12}}$

그런데 (i)에서 $\dfrac{m^2}{n}=\dfrac{(n-1)^2}{n}>1$이고, $m>1$이므로

$\dfrac{m^3}{n}>1$

$\therefore A>C$

(iii) $\dfrac{B}{C}=\left(\dfrac{m^2n^4}{m^3n^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{12}}$

이때 $1<m<n$에서 $0<\dfrac{1}{m}<1<\dfrac{n}{m}$

$\therefore B>C$

(i), (ii), (iii)에서 $C<B<A$

$\therefore \lvert A-B\rvert+\lvert B-C\rvert+\lvert C-A\rvert$

$=(A-B)+(B-C)-(C-A)$

$=2(A-C)$ **답** ②

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 거듭제곱근의 대소를 비교하는 것이고 거듭제곱근의 대소 비교에서 가장 중요한 것은 밑이나 지수를 하나로 통일하는 것이다. 밑이나 지수를 통일한 뒤에는 두 수의 대소를 차나 비율(1보다 큰지 작은지)을 이용하여 비교할 수 있다.

이 문제에서는 지수를 활용하므로 비율을 이용해 대소 관계를 파악한 후, 절댓값 기호를 풀어 정리하면 된다.

06 해결단계

❶ 단계	n이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 집합 X를 각각 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 나눈 경우에 따라 집합 X의 원소 중에서 양수인 모든 원소의 곱을 구한 후, 이 값이 5보다 작기 위한 n의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	집합 A의 모든 원소의 합이 최소이려면 n의 값도 최소임을 이용하여 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값을 구한다.

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이므로

(i) n이 홀수일 때,

$a=n$일 때, b의 n제곱근 중에서 실수는

$\sqrt[n]{-25}$, $\sqrt[n]{-5}$, $\sqrt[n]{5}$, $\sqrt[n]{25}$

$a=n+1$일 때, $n+1$은 짝수이고 음수의 짝수 제곱근은 실수의 범위에서 존재하지 않으므로 b의 $(n+1)$제곱근 중에서 실수는

$\pm\sqrt[n+1]{5}$, $\pm\sqrt[n+1]{25}$

$\therefore X=\{\sqrt[n]{-25}, \sqrt[n]{-5}, \sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{25}, \sqrt[n+1]{5}, -\sqrt[n+1]{5}, \sqrt[n+1]{25}, -\sqrt[n+1]{25}\}$

집합 X의 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[n]{5}\times\sqrt[n]{25}\times\sqrt[n+1]{5}\times\sqrt[n+1]{25}=5^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}}$

$=5^{\frac{3}{n}+\frac{3}{n+1}}=5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}$

(ii) n이 짝수일 때,

$a=n$일 때, b의 n제곱근 중에서 실수는

$\pm\sqrt[n]{5}$, $\pm\sqrt[n]{25}$

$a=n+1$일 때, $n+1$은 홀수이므로 b의 $(n+1)$제곱근 중에서 실수는

$\sqrt[n+1]{-25}$, $\sqrt[n+1]{-5}$, $\sqrt[n+1]{5}$, $\sqrt[n+1]{25}$

$\therefore X=\{\sqrt[n+1]{-25}, \sqrt[n+1]{-5}, \sqrt[n+1]{5}, \sqrt[n+1]{25}, \sqrt[n]{5}, -\sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{25}, -\sqrt[n]{25}\}$

집합 X의 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[n+1]{5}\times\sqrt[n+1]{25}\times\sqrt[n]{5}\times\sqrt[n]{25}=5^{\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}$

$=5^{\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n}}=5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}$

(i), (ii)에서 집합 X의 양수인 모든 원소의 곱이 $5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}$이고, 이 값이 5보다 작아야 하므로

$5^{\frac{6n+3}{n(n+1)}}<5$에서 $\frac{6n+3}{n(n+1)}<1$

$n(n+1)>0$이므로 위의 부등식의 양변에 $n(n+1)$을 곱하면

$6n+3<n(n+1)$, $n^2-5n-3>0$

$\therefore n<\frac{5-\sqrt{37}}{2}$ 또는 $n>\frac{5+\sqrt{37}}{2}$

이때 $\frac{5-\sqrt{37}}{2}<0$, $\frac{5+\sqrt{37}}{2}=5.\times\times\times$이고, n이 최소일 때, 집합 A의 모든 원소의 합도 최소이므로 $n=6$이어야 한다.

따라서 $A=\{6, 7\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합의 최솟값은

$6+7=13$ **답** 13

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

집합 X의 원소 중에서 양수인 모든 원소의 곱의 조건이 주어졌으므로 양의 실수 전체의 집합 K에 대하여 집합

$X\cap K=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x>0\}$

의 원소만 고려하면 된다. 이때 집합 $X\cap K$의 원소, 즉 x에 대한 방정식 $x^a=b$를 만족시키는 양수 x는 $b>0$일 때 존재하므로 $b=5$ 또는 $b=25$일 때, 집합 $X\cap K$의 모든 원소는

$\sqrt[n]{5},\ \sqrt[n+1]{5},\ \sqrt[n]{25},\ \sqrt[n+1]{25}$

이다.

07 해결단계

❶ 단계	세 수 $\sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt[3]{\frac{n}{3}}, \sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되기 위한 세 자연수 p, q, r의 조건을 구한다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 세 자연수 p, q, r의 조건을 이용하여 p, q, r의 값을 각각 구한 후, $2p-q+r$의 값을 구한다.

$n=2^p\times3^q\times5^r$에서

$\sqrt{\frac{n}{2}}$이 자연수가 되려면 q와 r은 2의 배수이고,

$p=2k_1+1$ (단, k_1은 음이 아닌 정수) ……㉠

$\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 p와 r은 3의 배수이고,

$q=3k_2+1$ (단, k_2는 음이 아닌 정수) ……㉡

$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되려면 p와 q는 5의 배수이고,

$r=5k_3+1$ (단, k_3은 음이 아닌 정수) ……㉢

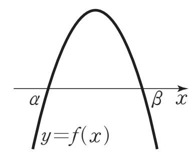
즉, p는 3과 5의 공배수 중에서 ㉠을 만족시키는 최솟값이므로 $p=15$, q는 2와 5의 공배수 중에서 ㉡을 만족시키는 최솟값이므로 $q=10$, r은 2와 3의 공배수 중에서 ㉢을 만족시키는 최솟값이므로 $r=6$이다.

$\therefore 2p-q+r=2\times15-10+6$

$=26$ **답** 26

08 해결단계

❶ 단계	조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 방정식 $x^n-256=0$의 실근임을 파악한다.
❷ 단계	n이 홀수일 때와 짝수일 때의 함수 $f(x)$의 식을 각각 구한다.
❸ 단계	함수 $f(x)$의 최댓값을 이용하여 자연수 n의 값을 구하고, 그 합을 구한다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이고, 조건 (나)에서 최댓값이 자연수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다고 하면 α, β는 방정식 $(x^n-256)f(x)=0$의 서로 다른 두 실근이다.

또한, 조건 (가)에 의하여 α, β는 방정식 $(x^n-256)f(x)=0$의 중근이므로 방정식 $x^n-256=0$의 서로 다른 두 실근이다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n-256=0$, 즉 $x^n=256$의 실근은

$x=\sqrt[n]{256}$

이때 방정식 $(x^n-256)f(x)=0$이 중근인 서로 다른 두 실근을 가질 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n-256=0$, 즉 $x^n=256$의 실근은

$x=-\sqrt[n]{256}$ 또는 $x=\sqrt[n]{256}$

이 두 근이 방정식 $f(x)=0$의 근이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=-(x+\sqrt[n]{256})(x-\sqrt[n]{256})\\&=-x^2+(\sqrt[n]{256})^2\\&=-x^2+\left(2^{\frac{8}{n}}\right)^2\\&=-x^2+2^{\frac{16}{n}}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$f(x)=-x^2+2^{\frac{16}{n}}$ (단, n은 짝수) ……㉠

한편, ㉠에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $2^{\frac{16}{n}}$을 갖고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 자연수이므로 $\frac{16}{n}$이 자연수이어야 한다.

즉, n은 짝수이면서 16의 약수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 값은 2, 4, 8, 16이고 그 합은

$2+4+8+16=30$ **답** 30

09 해결단계

❶ 단계	조건 (나)에서 주어진 등식을 $k\ (k>0)$로 놓고 식을 변형한다.
❷ 단계	조건 (가), (다)와 ❶ 단계에서 변형한 식을 이용하여 k의 값을 구한다.
❸ 단계	$\frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}$의 값을 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $a^{4x}=\frac{1}{(2b)^{5y}}=k\ (k>0)$로 놓으면

$a^{4x}=k$에서 $a^2=k^{\frac{1}{2x}}$

$\frac{1}{(2b)^{5y}}=k$에서 $2b=k^{-\frac{1}{5y}}$ ∴ $(2b)^3=k^{-\frac{3}{5y}}$

$$\begin{aligned}\therefore\ k^{\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}}&=k^{\frac{1}{2x}}k^{-\frac{3}{5y}}\\&=a^2\times(2b)^3\\&=8a^2b^3\\&=8\times125\ (\because\ \text{(가)})\\&=10^3\end{aligned}$$

조건 (다)에서 $\frac{1}{2x}-\frac{3}{5y}=3$이므로

$k^3=10^3$ ∴ $k=10$ (∵ k는 실수)

즉, $a^{4x}=k$에서 $a^{4x}=10$이므로

$$\begin{aligned}\frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^{2x}-a^{-2x}}\times\frac{a^{2x}}{a^{2x}}&=\frac{a^{4x}+1}{a^{4x}-1}\\&=\frac{10+1}{10-1}\\&=\frac{11}{9}\end{aligned}$$

따라서 $p=9$, $q=11$이므로

$p+q=20$ **답** 20

10 해결단계

❶ 단계	$2^{f(n)}$의 n제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -4임을 이용하여 $f(n)$을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 x좌표가 짝수이고 자연수인 점의 개수가 2임을 파악한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 교점의 x좌표를 이용하여 a, b의 값을 구하고, $a+b$의 값을 구한다.

$2^{f(n)}>0$이므로 $2^{f(n)}$의 n제곱근 중 실수인 것은

$-\sqrt[n]{2^{f(n)}}$, $\sqrt[n]{2^{f(n)}}$

$-\sqrt[n]{2^{f(n)}}\times\sqrt[n]{2^{f(n)}}=-2^{\frac{f(n)}{n}}\times2^{\frac{f(n)}{n}}=-2^{\frac{2f(n)}{n}}$

즉, $-2^{\frac{2f(n)}{n}}=-4$이므로

$2^{\frac{2f(n)}{n}}=2^2$, $\frac{2f(n)}{n}=2$ ∴ $f(n)=n$

즉, $f(n)=n$을 만족시키는 짝수인 자연수 n의 개수가 2이므로 함수

$$\begin{aligned}f(x)&=-a|x-6|+b\\&=\begin{cases}ax-6a+b & (x\le6)\\-ax+6a+b & (x>6)\end{cases}\end{aligned}$$

의 그래프와 직선 $y=x$의 교점 중 x좌표가 짝수이고 자연수인 점의 개수가 2이어야 한다.

조건을 만족시키는 교점의 x좌표를 각각 n_1, n_2 $(n_1<n_2)$라 하면 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $n_2\le6$일 때,

$x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 (n_1, n_1), (n_2, n_2)에서 만나려면 $x\le6$에서 두 그래프가 서로 일치해야 한다.

이때 두 그래프가 세 점 $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(6, 6)$에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n_1=6$일 때,

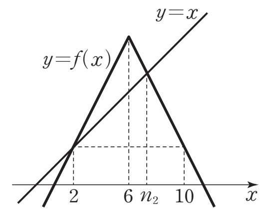
$x\ge6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 (n_1, n_1), (n_2, n_2)에서 만나야 하므로 $x\ge6$에서 두 그래프가 서로 일치해야 한다.

그런데 $x\ge6$에서 $f(x)=-ax+6a+b$ $(a>0)$이고 $f(x)\ne x$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n_1<6$, $n_2>6$일 때,

① $n_1=2$인 경우

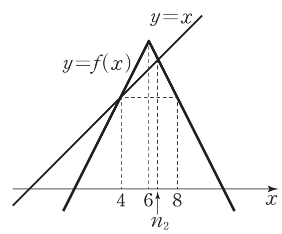
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2, 2)$를 지나고 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



이때 $6<n_2<10$이어야 하므로 조건을 만족시키는 n_2의 값은 $n_2=8$

② $n_1=4$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(4, 4)$를 지나고 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



이때 $6<n_2<8$이므로 조건을 만족시키는 n_2의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $n_1=2$, $n_2=8$

$f(2)=2$, $f(8)=8$에서

$f(2)=-4a+b=2$ ······㉠

$f(8)=-2a+b=8$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=14$

∴ $a+b=17$ **답** 17

11 해결단계

❶ 단계	$a=b^k$ (b, k는 자연수)으로 놓은 후, $\sqrt[m]{a}$와 $\sqrt[n]{a}$가 모두 자연수이기 위한 k의 조건을 찾는다.
❷ 단계	300 이하의 세 자리의 자연수 중에서 거듭제곱이 될 수 있는 수를 모두 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 수 중에서 ❶단계에서 찾은 조건을 만족시키는 수를 찾은 후, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$a=b^k$ (b, k는 자연수)으로 놓으면

$\sqrt[m]{a}=b^{\frac{k}{m}}$, $\sqrt[n]{a}=b^{\frac{k}{n}}$

이때 2 이상의 서로 다른 두 자연수 m, n에 대하여 $b^{\frac{k}{m}}$, $b^{\frac{k}{n}}$이 모두 자연수이어야 하므로 k는 2 이상의 서로 다른 두 약수 m, n을 가져야 한다.
한편, $100 \le a \le 300$에서 $100 \le b^k \le 300$이므로
b^k의 값으로 가능한 것은 2^7, 2^8, 3^5, 4^4, 5^3, 6^3, 10^2, 11^2, 12^2, 13^2, 14^2, 15^2, 16^2, 17^2이다.
이때 k가 2 이상의 서로 다른 두 약수를 가져야 하므로 2, 3, 5, 7은 될 수 없다.
$4^4=2^8$이므로 자연수 a는 256뿐이다.
따라서 k의 값으로 가능한 것은 4, 8이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(2, 4)$, $(2, 8)$, $(4, 8)$의 3개이다.
답 3

12 해결단계

❶ 단계	p, q가 짝수 또는 홀수일 때로 경우를 나누어 $\frac{f(p)}{f(q)}$를 $2^a \times 3^b$ 꼴로 나타낸다.
❷ 단계	$\frac{f(p)}{f(q)}$가 유리수가 되도록 하는 p, q의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수를 구한다.

(i) p, q가 모두 홀수인 경우

$$\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}}{\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}}=\sqrt[4]{2^{p-q}}=2^{\frac{p-q}{4}}$$

$|p-q|$가 4로 나누어떨어질 때 $\frac{f(p)}{f(q)}$는 유리수이고, p와 q는 10 이하의 홀수이므로

① $|p-q|=4$일 때,
조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(1, 5)$, $(5, 1)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$, $(5, 9)$, $(9, 5)$
의 6개이다.

② $|p-q|=8$일 때,
조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(1, 9)$, $(9, 1)$
의 2개이다.

③ $|p-q| \ge 12$일 때,
$|p-q| \le 9$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는
$6+2=8$

(ii) p는 홀수, q는 짝수인 경우

$$\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}}{\sqrt[4]{16\times 3^{q}}}=\sqrt[4]{2^{p-3}\times 3^{2-q}}=2^{\frac{p-3}{4}}\times 3^{\frac{2-q}{4}}$$

$|p-3|$, $|2-q|$가 각각 4로 나누어떨어질 때 $\frac{f(p)}{f(q)}$는 유리수이고, p는 10 이하의 홀수, q는 10 이하의 짝수이므로
$|p-3|=0$, 4에서 $p=3$, 7
$|2-q|=0$, 4, 8에서 $q=2$, 6, 10
즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는
$2\times 3=6$

(iii) p는 짝수, q는 홀수인 경우

$$\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{\sqrt[4]{16\times 3^{p}}}{\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}}=\sqrt[4]{2^{3-q}\times 3^{p-2}}$$
$$=2^{\frac{3-q}{4}}\times 3^{\frac{p-2}{4}}$$

$|3-q|$, $|p-2|$가 각각 4로 나누어떨어질 때 $\frac{f(p)}{f(q)}$는 유리수이고, p는 10 이하의 짝수, q는 10 이하의 홀수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 (ii)의 경우와 같다.
즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는
$3\times 2=6$

(iv) p, q가 모두 짝수인 경우

$$\frac{f(p)}{f(q)}=\frac{\sqrt[4]{16\times 3^{p}}}{\sqrt[4]{16\times 3^{q}}}=\sqrt[4]{3^{p-q}}=3^{\frac{p-q}{4}}$$

$|p-q|$가 4로 나누어떨어질 때 $\frac{f(p)}{f(q)}$는 유리수이고, p와 q는 10 이하의 짝수이므로

① $|p-q|=4$일 때,
조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(2, 6)$, $(6, 2)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$, $(6, 10)$, $(10, 6)$
의 6개이다.

② $|p-q|=8$일 때,
조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(2, 10)$, $(10, 2)$
의 2개이다.

③ $|p-q| \ge 12$일 때,
$|p-q| \le 9$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는 존재하지 않는다.

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)의 개수는
$6+2=8$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (p, q)의 개수는
$8+6+6+8=28$
답 28

02. 로그

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.19~20

01 ②	02 ①	03 27	04 ①	05 ④
06 ⑤	07 ⑤	08 ③	09 12	10 ②
11 168	12 −11	13 ④	14 80	

01 $x=\log_5(\sqrt{5}+2)$에서 $5^x=\sqrt{5}+2$

$$\begin{aligned}5^{2x}+5^{-2x}&=(5^x)^2+(5^{-x})^2\\&=(\sqrt{5}+2)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^2\\&=(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2\\&=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}\\&=18\end{aligned}$$

답 ②

• 다른 풀이 •

$x=\log_5(\sqrt{5}+2)$에서 $5^x=\sqrt{5}+2$

$$\begin{aligned}5^{2x}+5^{-2x}&=(5^x+5^{-x})^2-2\times5^x\times5^{-x}\\&=\left(\sqrt{5}+2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^2-2\\&=(\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2)^2-2\\&=20-2\\&=18\end{aligned}$$

02 로그의 정의에 의하여 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. 밑의 조건 : $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

진수의 조건 : $a^2+1>0$

즉, 실수 a의 값에 관계없이 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례) $a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례) $a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의되는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

03 $900=2^2\times3^2\times5^2$이므로 900의 양의 약수의 개수는

$(2+1)(2+1)(2+1)=27$ $\therefore n=27$

이때 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{27}$은 900의 양의 약수를 크기가 작은 순서대로 나열한 것이므로

$a_1a_{27}=a_2a_{26}=a_3a_{25}=\cdots=a_{13}a_{15}=900,\ a_{14}=30$

$$\begin{aligned}\therefore a_1a_2a_3\cdots a_{27}&=900^{13}\times30\\&=30^{26}\times30=30^{27}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore &\log_{30}a_1+\log_{30}a_2+\log_{30}a_3+\cdots+\log_{30}a_{27}\\&=\log_{30}a_1a_2a_3\cdots a_{27}\\&=\log_{30}30^{27}=27\end{aligned}$$

답 27

BLACKLABEL 특강 필수 개념

자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때

(1) N의 약수: (a^m의 약수)$\times$(b^n의 약수)

(2) N의 약수의 개수: $(m+1)(n+1)$

(3) N의 약수의 총합: $(1+a+a^2+\cdots+a^m)\times(1+b+b^2+\cdots+b^n)$

(4) N의 약수의 곱: $N^{\frac{(N\text{의 약수의 개수})}{2}}$

04 (i) $x^3=y^4$에서 $y=x^{\frac{3}{4}}$이므로

$A=\log_x y=\log_x x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$

(ii) $y^4=z^5$에서 $z=y^{\frac{4}{5}}$이므로

$B=\log_y z=\log_y y^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

(iii) $x^3=z^5$에서 $x=z^{\frac{5}{3}}$이므로

$C=\log_z x=\log_z z^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $A<B<C$

답 ①

05 두 점 $(3, \log_2 a)$, $(5, \log_4 b)$를 지나는 직선이 원점을 지나므로 원점과 두 점을 각각 이은 직선의 기울기는 서로 같아야 한다.

즉, $\frac{\log_2 a-0}{3-0}=\frac{\log_4 b-0}{5-0}$에서

$\frac{1}{3}\log_2 a=\frac{1}{5}\log_{2^2}b$, $\frac{1}{3}\log_2 a=\frac{1}{10}\log_2 b$

$\log_2 a=\frac{3}{10}\log_2 b$

$\therefore \log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{\log_2 b}{\frac{3}{10}\log_2 b}=\frac{10}{3}$

답 ④

• 다른 풀이 •

두 점 $(3, \log_2 a)$, $(5, \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-\log_2 a=\frac{\log_4 b-\log_2 a}{5-3}(x-3)$

$y-\log_2 a=\frac{\log_4 b-\log_2 a}{2}(x-3)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\log_2 a=\frac{\log_4 b-\log_2 a}{2}\times(-3)$

$\log_2 a=\frac{\frac{1}{2}\log_2 b-\log_2 a}{2}\times3$

$\log_2 a=\frac{3}{4}\log_2 b-\frac{3}{2}\log_2 a$

$\frac{5}{2}\log_2 a=\frac{3}{4}\log_2 b$, $\log_2 b=\frac{10}{3}\log_2 a$

$\log_2 b=\log_2 a^{\frac{10}{3}}$

$\therefore b=a^{\frac{10}{3}}$

$\therefore \log_a b=\log_a a^{\frac{10}{3}}=\frac{10}{3}\log_a a=\frac{10}{3}$

06 $a\neq1$, $b\neq1$에서 $(\log_{\sqrt{a}} b^4)^2>0$, $(\log_b \sqrt[4]{a})^2>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(\log_{\sqrt{a}} b^4)^2+(\log_b \sqrt[4]{a})^2$$
$$\geq 2\sqrt{(\log_{\sqrt{a}} b^4)^2\times(\log_b \sqrt[4]{a})^2}$$
$$=2\sqrt{(\log_{a^{\frac{1}{2}}} b^4)^2\times(\log_b a^{\frac{1}{4}})^2}$$
$$=2\sqrt{(8\log_a b)^2\times\left(\frac{1}{4}\log_b a\right)^2}$$
$$=2\sqrt{\left(8\log_a b\times\frac{1}{4}\log_b a\right)^2}$$
$$=2\sqrt{\left(2\times\log_a b\times\frac{1}{\log_a b}\right)^2}$$
$=2\times2=4$ (단, 등호는 $\log_{\sqrt{a}} b^4=\log_b \sqrt[4]{a}$일 때 성립)
따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 ⑤

07 $\log_a x=2$에서 $\log_x a=\frac{1}{2}$,

$\log_b x=3$에서 $\log_x b=\frac{1}{3}$,

$\log_c x=6$에서 $\log_x c=\frac{1}{6}$이므로

$$\log_x abc=\log_x a+\log_x b+\log_x c$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$
$\therefore \log_{abc} x=\frac{1}{\log_x abc}=1$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

$\log_a x=2$에서 $x=a^2$이므로 $a=x^{\frac{1}{2}}$
$\log_b x=3$에서 $x=b^3$이므로 $b=x^{\frac{1}{3}}$
$\log_c x=6$에서 $x=c^6$이므로 $c=x^{\frac{1}{6}}$
이때 $abc=x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$이므로
$\log_{abc} x=\log_x x=1$

08 $2^{a+b}=9$에서 $a+b=\log_2 9$ ……㉠
$3^{a-b}=6$에서 $a-b=\log_3 6$ ……㉡
㉠, ㉡의 변끼리 곱하면

$$(a+b)(a-b)=\log_2 9\times\log_3 6$$
$$=\log_2 3^2\times\frac{\log_2 6}{\log_2 3}$$
$$=2\log_2 3\times\frac{\log_2 6}{\log_2 3}$$
$$=2\log_2 6$$
$$=\log_2 6^2=\log_2 36$$
따라서 $a^2-b^2=\log_2 36$이므로
$2^{a^2-b^2}=2^{\log_2 36}=36$ 답 ③

• 다른 풀이 •

$$2^{a^2-b^2}=2^{(a+b)(a-b)}$$
$$=(2^{a+b})^{a-b}$$
$$=9^{a-b}\ (\because 2^{a+b}=9)$$
$$=(3^2)^{a-b}$$
$$=(3^{a-b})^2$$
$$=6^2=36\ (\because 3^{a-b}=6)$$

09 $\log_{64} a=\frac{1}{\log_2 b}$에서 $\log_{64} a\times\log_2 b=1$

$\log_{2^6} a\times\log_2 b=1$, $\frac{1}{6}\log_2 a\times\log_2 b=1$

$\therefore \log_2 a\times\log_2 b=6$ ……㉠
또한, $\log_2 ab=5$에서
$\log_2 a+\log_2 b=5$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\log_2 a$, $\log_2 b$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
즉, $\log_2 a=2$, $\log_2 b=3$ 또는 $\log_2 a=3$, $\log_2 b=2$이므로
$a=4$, $b=8$ 또는 $a=8$, $b=4$
$\therefore a+b=12$ 답 12

10 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2 a+\log_2 b=2$, $\log_2 a\times\log_2 b=-3$

$$\therefore \log_{a^2} 2+\log_b \sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_a 2+\frac{1}{2}\log_b 2$$
$$=\frac{1}{2}(\log_a 2+\log_b 2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_2 a+\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$
답 ②

• 다른 풀이 •

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
즉, $\log_2 a=-1$, $\log_2 b=3$ 또는 $\log_2 a=3$, $\log_2 b=-1$이므로

$$\log_{a^2} 2+\log_b \sqrt{2}=\frac{1}{2}(\log_a 2+\log_b 2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

11 $\log_2 \frac{n}{12}=k$ (k는 자연수)라 하면

$\frac{n}{12}=2^k$ $\quad\therefore n=12\times2^k$

$k=1$일 때, $n=12\times2=24$
$k=2$일 때, $n=12\times4=48$
$k=3$일 때, $n=12\times8=96$
$k\ge4$일 때, n은 세 자리 이상의 자연수이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은
$24+48+96=168$ 답 168

12 $\log_{15}A=30$에서 $A=15^{30}$,
$\log_{45}B=15$에서 $B=45^{15}$이므로
$\frac{B}{A}=\frac{45^{15}}{15^{30}}=\left(\frac{45}{225}\right)^{15}=\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$
$\therefore \log\frac{B}{A}=\log\left(\frac{1}{5}\right)^{15}=\log 5^{-15}$
$=-15\log 5=-15\log\frac{10}{2}$
$=-15(\log 10-\log 2)$
$=-15(1-0.3010)$
$=-15\times0.699$
$=-10.485$
따라서 $-11<\log\frac{B}{A}<-10$이므로 조건을 만족시키는 정수 n의 값은 -11이다. 답 -11

13 $\log A=3.24$이므로
$\log\frac{\sqrt[6]{A}}{A^{10}}=\log A^{\frac{1}{6}-10}=\log A^{-\frac{59}{6}}$
$=-\frac{59}{6}\log A=-\frac{59}{6}\times3.24$
$=-31.86=-32+0.14$
즉, $\log\frac{\sqrt[6]{A}}{A^{10}}$의 정수 부분은 -32, 소수 부분은 0.14이므로
$a=-32$, $b=0.14$
$\therefore 100b-a=100\times0.14-(-32)=14+32=46$
답 ④

14 40분 후 정맥에서의 약물 농도가 4 ng/mL이므로
$\log(10-4)=1-40k$ $\quad\therefore \log 6=1-40k$ ······㉠
a분 후 정맥에서의 약물 농도가 6.4 ng/mL이므로
$\log(10-6.4)=1-ka$
$\log 3.6=1-ka$
$ka=1-\log 3.6$
$=1-(\log 36-1)$
$=2-2\log 6$
$=2-2(1-40k)$ ($\because$ ㉠)
$=2-2+80k$
$=80k$
$\therefore a=80$ 답 80

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.21~25

01 ④	02 45	03 ①	04 ②	05 34
06 5	07 ⑤	08 11	09 ④	10 42
11 ②	12 7	13 ③	14 74	15 2
16 ①	17 ⑤	18 ④	19 ②	20 3
21 ③	22 32	23 ①	24 ⑤	25 12
26 $\frac{1}{2}$	27 35	28 ③	29 8	30 4

01 밑의 조건에 의하여 $3a-1>0$, $3a-1\ne1$
$\therefore \frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$ 또는 $a>\frac{2}{3}$ ······㉠
진수의 조건에 의하여 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+2ax+1-a>0$
그런데 ㉠에서 a는 양수이므로 이차방정식
$ax^2+2ax+1-a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-a(1-a)<0$에서
$a(2a-1)<0$ $\quad\therefore 0<a<\frac{1}{2}$ ······㉡
㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는
$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립하기 위한 필요충분조건은
$a>0$, $b^2-4ac<0$ 또는 $a=0$, $b=0$, $c>0$

02 $A=\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{k}\}$이므로
집합 A의 자연수인 원소는 다음과 같다.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	$\cdots$
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

$B=\{\log_{\sqrt{3}}1, \log_{\sqrt{3}}2, \log_{\sqrt{3}}3, \cdots, \log_{\sqrt{3}}k\}$이므로
집합 B의 자연수인 원소는 다음과 같다.

b	3	9	27	81	$\cdots$
$\log_{\sqrt{3}}b$	2	4	6	8	$\cdots$

이때 $n(C)=3$이므로 $C=\{2, 4, 6\}$이다.
즉, $8\notin C$이므로 자연수 k의 값의 범위는
$36\le k<81$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는
$81-36=45$ 답 45

03 두 집합 A, B의 원소가 모두 자연수이므로 자연수 m에 대하여 a, b, c, d는 모두 2^m 꼴이어야 한다.
네 자연수 m_1, m_2, m_3, m_4 $(m_1<m_2<m_3<m_4)$에 대하여 $a=2^{m_1}$, $b=2^{m_2}$, $c=2^{m_3}$, $d=2^{m_4}$이라 하면

$\log_2 a=m_1$, $\log_2 b=m_2$, $\log_2 c=m_3$, $\log_2 d=m_4$이므로
$A=\{2^{m_1},\ 2^{m_2},\ 2^{m_3},\ 2^{m_4}\}$, $B=\{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4\}$
이때 $b\times c=64$에서
$2^{m_2}\times 2^{m_3}=2^{m_2+m_3}=64=2^6 \qquad \therefore m_2+m_3=6$
$m_2<m_3$이므로
$m_2=1$, $m_3=5$ 또는 $m_2=2$, $m_3=4$
그런데 $m_2=1$이면 $m_1<m_2$에서 $m_1<1$이므로 m_1이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.
$\therefore m_2=2,\ m_3=4$
한편, $m_2=2$이면 $m_1=1$이므로
$A=\{2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^{m_4}\}=\{2,\ 4,\ 16,\ 2^{m_4}\}$
$B=\{1,\ 2,\ 4,\ m_4\}$
이때 $4<m_4<2^{m_4}$이고 $n(A\cap B)=3$이려면
$A\cap B=\{2,\ 4,\ 16\}$이어야 하므로
$m_4=16$
$\therefore A=\{2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^{16}\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은
$2^1\times 2^2\times 2^4\times 2^{16}=2^{1+2+4+16}=2^{23}$
$\therefore k=23$

답 ①

04

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$로 놓으면
$a-b=25^k=5^{2k} \qquad \cdots\cdots ㉠$
$a=9^k=3^{2k} \qquad \cdots\cdots ㉡$
$b=15^k=3^k\times 5^k \qquad \cdots\cdots ㉢$
㉠, ㉡, ㉢에서 $(a-b)a=b^2$
$\therefore b^2+ab-a^2=0$
$a>0$이므로 위의 식의 양변을 a^2으로 나누면
$$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0$$
$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
이때 진수의 조건에 의하여 $a-b>0$, $a>0$, $b>0$이므로
$0<\dfrac{b}{a}<1$이다.
$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

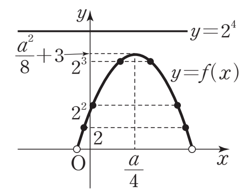
답 ②

• 다른 풀이 •

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$로 놓으면
$25^k=a-b$, $9^k=a$, $15^k=b$
$\therefore 25^k=9^k-15^k$
이때 $3^k=A$, $5^k=B$ $(A>0,\ B>0)$로 놓으면
$B^2=A^2-AB \qquad \therefore B^2+AB-A^2=0$
$A>0$이므로 위의 식의 양변을 A^2으로 나누면
$$\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{B}{A}-1=0$$
$$\therefore \frac{B}{A}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \left(\because \frac{B}{A}>0\right)$$
즉, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$이므로
$$\frac{b}{a}=\frac{15^k}{9^k}=\frac{5^k}{3^k}=\left(\frac{5}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

05

$f(x)=-2x^2+ax+3$이라 하면
$$\begin{aligned}f(x)&=-2x^2+ax+3\\&=-2\left(x^2-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}-\frac{a^2}{16}\right)+3\\&=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+3\end{aligned}$$
이때 $\log_2 f(x)$에서 로그의 정의에 의하여 $f(x)>0$이고, $\log_2 f(x)=n$ (n은 자연수), 즉 $f(x)=2^n$이므로
$\log_2 f(x)$가 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 세 직선 $y=2$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 2개의 점에서 만나고 $k\geq 4$인 자연수 k에 대하여 직선 $y=2^k$과는 만나지 않아야 한다.

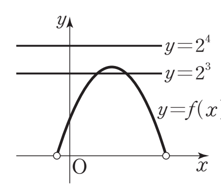


즉, $2^3<\dfrac{a^2}{8}+3<2^4$에서 $5<\dfrac{a^2}{8}<13$
$\therefore 40<a^2<104$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 값은 7, 8, 9, 10이므로 그 합은
$7+8+9+10=34$

답 34

• 다른 풀이 •

$f(x)=-2x^2+ax+3$이라 하면 $\log_2 f(x)$에서 로그의 정의에 의하여 $f(x)>0$이고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=2^3$과 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=2^4$과 만나지 않아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=2^3$, 즉 $2x^2-ax+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=a^2-4\times 2\times 5>0$
$\therefore a^2>40$
(ii) 이차방정식 $f(x)=2^4$, 즉 $2x^2-ax+13=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=a^2-4\times 2\times 13<0$
$\therefore a^2<104$
(i), (ii)에서
$40<a^2<104$
따라서 모든 자연수 a의 값은 7, 8, 9, 10이므로 그 합은
$7+8+9+10=34$

06 해결단계

❶단계	$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 하고, 자연수 c에 대하여 $a=c^m$, $b=c^n$으로 놓는다.
❷단계	자연수 c의 값에 따른 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)을 구한다.
❸단계	❷단계에서 구한 순서쌍을 이용하여 조건을 만족시키는 유리수의 개수를 구한다.

$\log_a b=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 하면

$b=a^{\frac{n}{m}}$에서 $a^n=b^m$이다.

즉, 자연수 c에 대하여 $a=c^m$, $b=c^n$으로 놓을 수 있다.

$\therefore 100<c^m<c^n<1000$

(i) $c=2$일 때,

$100<2^m<2^n<1000$에서

$2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$이므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(7, 8)$, $(7, 9)$, $(8, 9)$

$\therefore \log_a b=\frac{8}{7}$ 또는 $\log_a b=\frac{9}{7}$ 또는 $\log_a b=\frac{9}{8}$

(ii) $c=3$일 때,

$100<3^m<3^n<1000$에서

$3^5=243$, $3^6=729$이므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(5, 6)$

$\therefore \log_a b=\frac{6}{5}$

(iii) $c=4$일 때,

$100<4^m<4^n<1000$에서

$4^3=64$, $4^4=256$, $4^5=1024$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

(iv) $c=5$일 때,

$100<5^m<5^n<1000$에서

$5^3=125$, $5^4=625$이므로

조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 $(3, 4)$

$\therefore \log_a b=\frac{4}{3}$

(i)~(iv)에서 구하는 유리수는 $\frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}$의 5개이다.

└ $c\geq 6$일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

답 5

07

$(a, b)\in A$이면 (a, b)는 $(a, \log_2 a)$이므로

$b=\log_2 a$ ……㉠

ㄱ. $(a, b)\in A$이므로 ㉠에서

$b+1=\log_2 a+1=\log_2 a+\log_2 2=\log_2 2a$

따라서 $(2a, b+1)\in A$이다. (참)

ㄴ. $(a, b)\in A$이므로 ㉠에서

$kb=k\log_2 a=\log_2 a^k$

따라서 $(a^k, kb)\in A$이다. (참)

ㄷ. $(c, d)\in A$이므로 (c, d)는 $(c, \log_2 c)$이다.

$\therefore d=\log_2 c$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{b}{2}-d=\frac{\log_2 a}{2}-\log_2 c$$
$$=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 c$$
$$=\log_2 \frac{a^{\frac{1}{2}}}{c}$$
$$=\log_2 \frac{\sqrt{a}}{c}$$

따라서 $\left(\frac{\sqrt{a}}{c}, \frac{b}{2}-d\right)\in A$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

08

집합 $A=\{2, 3, 4, 9, 16\}$의 두 원소 x, y에 대하여 $\log_x y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x \ y	2	3	4	9	16
2	1	$\log_2 3$	2	$2\log_2 3$	4
3	$\log_3 2$	1	$2\log_3 2$	2	$4\log_3 2$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\log_2 3$	1	$\log_2 3$	2
9	$\frac{1}{2}\log_3 2$	$\frac{1}{2}$	$\log_3 2$	1	$2\log_3 2$
16	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\log_2 3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\log_2 3$	1

$$\therefore B=\left\{1, 2, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \log_2 3, 2\log_2 3, \log_3 2, 2\log_3 2, 4\log_3 2, \frac{1}{2}\log_3 2, \frac{1}{4}\log_2 3, \frac{1}{2}\log_2 3\right\}$$

이때 $A\cap B=\{2, 4\}$이므로

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=13-2=11$

답 11

09

세 양의 실수 a, b, c에 대하여

$\log_{(a+b)} c+\log_{(a-b)} c=2\log_{(a+b)} c\times\log_{(a-b)} c$

가 성립하므로

$$\frac{1}{\log_c (a+b)}+\frac{1}{\log_c (a-b)}=\frac{2}{\log_c (a+b)\times\log_c (a-b)}$$

양변에 $\log_c (a+b)\times\log_c (a-b)$를 곱하면

$\log_c (a-b)+\log_c (a+b)=2$

$\log_c (a-b)(a+b)=2$

$\log_c (a^2-b^2)=2$

$a^2-b^2=c^2 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 ④

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이므로 $\log_{(a-b)} c$에서 $a=b$인 경우는 존재할 수 없다.
즉, 로그의 정의를 이용하면 선택지 ①은 제외할 수 있다.

10

조건 (가)에서 $\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=66$이므로

$\log_3 abc=66$

$\therefore abc=3^{66}$ ……㉠

조건 (나)에서 a, b, c 중 하나가 1이면 나머지 두 수도 1이므로 a, b, c는 모두 1이 아니다.

이때 $a^2=b^4=c^6=k\ (k\neq 1)$로 놓으면

$a=k^{\frac{1}{2}}$, $b=k^{\frac{1}{4}}$, $c=k^{\frac{1}{6}}$이므로

$abc=k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=k^{\frac{11}{12}}$

㉠에 의하여 $k^{\frac{11}{12}}=3^{66}$이므로

$k=(3^{66})^{\frac{12}{11}}=3^{72}$

$\therefore \log_3 a+\log_3 b-\log_3 c=\log_3 \dfrac{ab}{c}=\log_3 k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}$

$=\log_3 k^{\frac{7}{12}}=\log_3 (3^{72})^{\frac{7}{12}}$

$=\log_3 3^{42}=42$ **답** 42

• 다른 풀이 •

조건 (나)에서 $a^2=b^4=c^6$이므로

$a=c^3$, $b=c^{\frac{3}{2}}$

조건 (가)에서 $\log_3 a+\log_3 b+\log_3 c=66$이므로

$\log_3 c^3+\log_3 c^{\frac{3}{2}}+\log_3 c=66$

$3\log_3 c+\dfrac{3}{2}\log_3 c+\log_3 c=66$

$\dfrac{11}{2}\log_3 c=66$, $\log_3 c=12$

이때 $\log_3 a=3\log_3 c=36$, $\log_3 b=\dfrac{3}{2}\log_3 c=18$

이므로

$\log_3 a+\log_3 b-\log_3 c=36+18-12=42$

11

$\overline{CD}=k$라 하면 $2\overline{AC}=3\overline{CD}$에서

$\overline{AC}=\dfrac{3}{2}k$

삼각형 ABC에서 $\overline{BA}=\overline{BC}$, $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}$이므로

$\log_a b=2\log_b a+k$ ……㉠

또한, $\angle DAB=\angle CAD$이므로 삼각형 ABC에서 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\log_a b:\dfrac{3}{2}k=2\log_b a:k$

$3\log_b a=\log_a b$, $\dfrac{3}{\log_a b}=\log_a b$

$(\log_a b)^2=3$

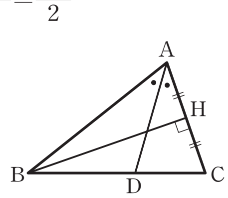
$\therefore \log_a b=\sqrt{3}$ ($\because \log_a b>0$)

㉠에서

$\sqrt{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+k$ $\quad\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $\overline{BA}=\overline{BC}=\sqrt{3}$, $\overline{AC}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이고,

$\overline{AH}\perp\overline{BH}$이므로

직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{3-\dfrac{3}{16}}=\sqrt{\dfrac{45}{16}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

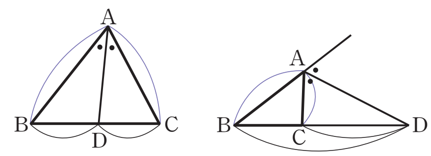
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$ **답** ②

BLACKLABEL 특강 | 필수 개념

삼각형의 각의 이등분선

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 또는 $\angle A$의 외각의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



12

이차방정식 $x^2-9x+\log_4 4a=0$의 두 근이 $\log_4 a$, $\log_4 4b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_4 a+\log_4 4b=9$

$\log_4 a+1+\log_4 b=9$

$\therefore \log_4 a+\log_4 b=8$ ……㉠

또한, $\log_4 a\times\log_4 4b=\log_4 4a$에서

$\log_4 a\times(1+\log_4 b)=1+\log_4 a$

$\log_4 a+\log_4 a\times\log_4 b=1+\log_4 a$

$\therefore \log_4 a\times\log_4 b=1$ ……㉡

$\therefore \log_{4a} b+\dfrac{1}{\log_a 4b}$

$=\dfrac{\log_4 b}{\log_4 4a}+\dfrac{\log_4 a}{\log_4 4b}$

$=\dfrac{\log_4 b}{1+\log_4 a}+\dfrac{\log_4 a}{1+\log_4 b}$

$=\dfrac{\log_4 b\times(1+\log_4 b)+\log_4 a\times(1+\log_4 a)}{(1+\log_4 a)(1+\log_4 b)}$

$=\dfrac{(\log_4 b)^2+(\log_4 a)^2+(\log_4 a+\log_4 b)}{\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 a+\log_4 b)+1}$

$=\dfrac{(\log_4 a+\log_4 b)^2-2(\log_4 a\times\log_4 b)+(\log_4 a+\log_4 b)}{\log_4 a\times\log_4 b+(\log_4 a+\log_4 b)+1}$

$=\dfrac{8^2-2\times1+8}{1+8+1}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=7$ **답** 7

13

ㄱ. $b=\dfrac{1}{2}$이면 $2^a=5^{\frac{1}{2}}$에서

$a=\log_2 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 5$

$=\log_{2^2} 5=\log_4 5$ (참)

ㄴ. $2^a=5^b$에서 $2^{\frac{a}{b}}=5$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\log_2 5$

그런데 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$에서

$2<\log_2 5<3$이므로 $2<\frac{a}{b}<3$ (참)

ㄷ. (반례) $2^a=5^b=10$일 때,

$2=10^{\frac{1}{a}}$, $5=10^{\frac{1}{b}}$에서

$\frac{1}{a}=\log_{10} 2$, $\frac{1}{b}=\log_{10} 5$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{10} 2+\log_{10} 5$

$=\log_{10} 10=1$ (유리수) (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄷ. $2^a=5^b=k\ (k>1)$로 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $5=k^{\frac{1}{b}}$에서 $\frac{1}{a}=\log_k 2$, $\frac{1}{b}=\log_k 5$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 5=\log_k 10$

따라서 $k=10^{\frac{n}{m}}$ (m, n은 자연수) 꼴이면

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{10^{\frac{n}{m}}} 10=\frac{1}{\frac{n}{m}}=\frac{m}{n}$

즉, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 유리수이다.

14 $\log_{10}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{a+1}\right)+\cdots$

$+\log_{10}\left(1+\frac{1}{a+b-1}\right)$

$=\log_{10}\frac{a+1}{a}+\log_{10}\frac{a+2}{a+1}+\cdots+\log_{10}\frac{a+b}{a+b-1}$

$=\log_{10}\left(\frac{\cancel{a+1}}{a}\times\frac{\cancel{a+2}}{\cancel{a+1}}\times\cdots\times\frac{a+b}{\cancel{a+b-1}}\right)$

$=\log_{10}\frac{a+b}{a}=\log_{10}\frac{b}{6}$

즉, $\frac{a+b}{a}=\frac{b}{6}$에서 $ab=6a+6b$

$ab-6a-6b=0$

$a(b-6)-6(b-6)=36$

$\therefore (a-6)(b-6)=36$

위의 식을 만족시키는 두 자연수 a, b $(a>b)$의 값은 다음과 같다.

$a-6$	36	18	12	9
$b-6$	1	2	3	4
a	42	24	18	15
b	7	8	9	10

따라서 $a+b$의 최댓값은 $42+7=49$이고, 최솟값은 $15+10=25$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$49+25=74$ **답** 74

15 $\log_5 2=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\frac{b_4}{2^4}+\cdots$의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 2=b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

$\log_5 4=b_1+\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

이때 $0<\log_5 4<1$이므로 $b_1=0$

$\therefore \log_5 4=\frac{b_2}{2}+\frac{b_3}{2^2}+\frac{b_4}{2^3}+\cdots$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5 4=b_2+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$

$\log_5 16=b_2+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5 16<2$이므로 $b_2=1$

즉, $\log_5 16=1+\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\cdots$이므로

$\log_5 16-1=\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\frac{b_5}{2^3}+\cdots$

$\log_5\frac{16}{5}=\frac{b_3}{2}+\frac{b_4}{2^2}+\frac{b_5}{2^3}+\cdots$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$2\log_5\frac{16}{5}=b_3+\frac{b_4}{2}+\frac{b_5}{2^2}+\cdots$

$\log_5\frac{256}{25}=b_3+\frac{b_4}{2}+\frac{b_5}{2^2}+\cdots$

이때 $1<\log_5\frac{256}{25}<2$이므로 $b_3=1$

$\therefore b_1+b_2+b_3=0+1+1=2$ **답** 2

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식의 양변에 2를 곱하여 b_1의 값을 구한 경우	30%
(나)	식을 정리한 후, 양변에 2를 곱하여 b_2의 값을 구한 경우	30%
(다)	식을 정리한 후, 양변에 2를 곱하여 b_3의 값을 구한 경우	30%
(라)	$b_1+b_2+b_3$의 값을 구한 경우	10%

16 $f(mn)=f(m)+f(n)$ ······㉠

(i) m이 짝수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

즉, m과 n이 모두 짝수일 때는 항상 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$

(ii) m이 짝수, n이 홀수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_3 n$

$\log_2 n=\log_3 n$ $\therefore n=1$

즉, m은 짝수이고 $n=1$일 때 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times1=10$

(iii) m이 홀수, n이 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 ㉠에서

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m$ $\therefore m=1$

즉, $m=1$이고 n은 짝수일 때 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1\times10=10$

(iv) m이 홀수, n이 홀수일 때,

mn은 홀수이므로 ㉠에서

$\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

즉, m과 n이 모두 홀수일 때는 항상 성립하므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $10\times10=100$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+10+10+100=220$

답 ①

17

$-4\log_a b=54\log_b c=\log_c a=k$로 놓으면

$\log_a b=-\frac{k}{4}$, $\log_b c=\frac{k}{54}$, $\log_c a=k$

이 세 식을 변끼리 곱하면

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=-\frac{k}{4}\times\frac{k}{54}\times k$

$\log_a b\times\frac{\log_a c}{\log_a b}\times\frac{1}{\log_a c}=-\frac{k^3}{216}$

$1=-\frac{k^3}{216}$

$k^3=-216 \qquad \therefore k=-6$

이때 $\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_a c=\frac{1}{\log_c a}=-\frac{1}{6}$에서

$\log_a bc=\log_a b+\log_a c=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore b\times c=a^{\frac{4}{3}}$

$a^{\frac{4}{3}}$이 자연수이려면 a는 자연수의 세제곱 꼴이어야 하므로 1이 아닌 자연수 n에 대하여 $a=n^3$이라 하면

$a^{\frac{4}{3}}=(n^3)^{\frac{4}{3}}=n^4\le300$

이때 $4^4=256$, $5^4=625$이므로 가능한 자연수 n의 값은

2, 3, 4

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$2^3+3^3+4^3=8+27+64=99$

답 ⑤

18

$a^5=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a^5=\log 10$, $5\log a=1$

$\therefore \log a=\frac{1}{5}=0.2$

$b^8=10$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log b^8=\log 10$, $8\log b=1$

$\therefore \log b=\frac{1}{8}=0.125$

$N=a^7b^9$이므로 이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log N&=\log a^7b^9\\&=\log a^7+\log b^9\\&=7\log a+9\log b\\&=7\times0.2+9\times0.125\\&=1.4+1.125=2.525\end{aligned}$$

이때 주어진 표에서 $\log 3.35=0.525$이므로

$$\begin{aligned}\log N&=2+0.525\\&=2+\log 3.35\\&=\log(3.35\times10^2)\\&=\log 335\end{aligned}$$

$\therefore N=335$

답 ④

• 다른 풀이 •

$a^5=10$에서 $a=10^{\frac{1}{5}}$, $b^8=10$에서 $b=10^{\frac{1}{8}}$이므로

$$\begin{aligned}N&=a^7b^9=(10^{\frac{1}{5}})^7\times(10^{\frac{1}{8}})^9\\&=10^{\frac{7}{5}}\times10^{\frac{9}{8}}=10^{\frac{7}{5}+\frac{9}{8}}\\&=10^{\frac{101}{40}}\end{aligned}$$

$\therefore \log N=\frac{101}{40}=2.525$

주어진 상용로그표에서 $0.525=\log 3.35$이므로

$$\begin{aligned}\log N&=2+\log 3.35\\&=\log(3.35\times10^2)\\&=\log 335\end{aligned}$$

$\therefore N=335$

19

이차식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$f(x)$를 $x-\log 5$로 나누었을 때의 나머지가 $\log 5^{-10}$이므로 나머지정리에 의하여

$f(\log 5)=\log 5^{-10}$

$(\log 5)^2+a\log 5+b=-10\log 5 \qquad \cdots\cdots㉠$

$f(x)$를 $x+\log 2$로 나누었을 때의 나머지가 $\log 2^{12}$이므로 나머지정리에 의하여

$f(-\log 2)=\log 2^{12}$

$(\log 2)^2-a\log 2+b=12\log 2 \qquad \cdots\cdots㉡$

이때 $\log 5=A$로 놓고 ㉠에 대입하면

$A^2+aA+b=-10A$

$A^2+(a+10)A+b=0 \qquad \cdots\cdots㉢$

또한, $\log 2=1-\log 5=1-A$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$(1-A)^2-a(1-A)+b=12(1-A)$

$A^2+(a-2)A-a+b+1=12-12A$

$A^2+(a+10)A-a+b-11=0 \qquad \cdots\cdots㉣$

㉢, ㉣에서 변끼리 빼면

$a+11=0 \qquad \therefore a=-11$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-11x+b=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 11이다.

답 ②

20

$\sqrt[3]{4n}=(4n)^{\frac{1}{3}}=(2^2\times n)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times n^{\frac{1}{3}}$에서

$2^{\frac{2}{3}}\times n^{\frac{1}{3}}$이 자연수가 되려면 음이 아닌 정수 k와 2의 배수가 아닌 자연수 p에 대하여 $n=2^{3k+1}\times p^3$ 꼴이어야 한다.

또한, $\sqrt[4]{5n}=(5n)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{4}}\times n^{\frac{1}{4}}$에서

$5^{\frac{1}{4}}\times n^{\frac{1}{4}}$이 자연수가 되려면 음이 아닌 정수 l과 5의 배수가 아닌 자연수 q에 대하여 $n=5^{4l+3}\times q^4$ 꼴이어야 한다.

이때 두 수 $\sqrt[3]{4n}$, $\sqrt[4]{5n}$이 모두 자연수가 되려면 $3k+1$과 $4l+3$이 각각 4의 배수, 3의 배수이어야 하므로 자연수 n이 최소가 되려면 $k=1$, $l=0$이고 자연수 n은 2와 5만을 소인수로 가져야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은

$N=2^4\times5^3$

$\therefore \log N=\log (2^4\times 5^3)$

$=\log 2^4+\log 5^3$

$=4\log 2+3\log 5$

$=4(1-\log 5)+3\log 5$

$=4-4\log 5+3\log 5$

$=4-\log 5$

$a+b\log 5=4-\log 5$에서 $a=4$, $b=-1$이므로

$a+b=3$ 답 3

21 $1<a<2$이므로 $\sqrt{10}<(\sqrt{10})^a<10$

$\therefore \sqrt{10}<\sqrt{10^a}<10$

이때 $3<\sqrt{10}<4$이므로 위의 부등식을 만족시키면서 4로 나누었을 때 몫이 정수이고 나머지가 1인 수는 5, 9이다.

즉, $\sqrt{10^a}=5$ 또는 $\sqrt{10^a}=9$이므로

$10^a=25$ 또는 $10^a=81$

$\therefore a=\log 25$ 또는 $a=\log 81$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 합은

$\log 25+\log 81=\log 5^2+\log 3^4$

$=2\log 5+4\log 3$

$=2(1-\log 2)+4\log 3$

$=2(1-0.3)+4\times 0.48$

$=3.32$ 답 ③

22 조건 (나)의 각 변에 상용로그를 취하면

$\log m\le \log \dfrac{3^{60}}{10^n}<\log (m+1)$

이때

$\log \dfrac{3^{60}}{10^n}=\log 3^{60}-\log 10^n$

$=60\log 3-n$

$=60\times 0.4771-n$

$=28.626-n$

이므로

$\log m\le 28.626-n<\log (m+1)$ ……㉠

조건 (가)의 각 변에 상용로그를 취하면

$0\le \log m<1$

또한, 자연수 m에 대하여 $1\le m<10$이므로

$1\le m\le 9$ $\therefore 2\le m+1\le 10$

위의 식의 각 변에 상용로그를 취하면

$\log 2\le \log (m+1)\le \log 10$

$0.301\le \log (m+1)\le 1$

이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 값은 28이다. $\underbrace{}_{0\le 28.626-n<1}$

$\therefore \log m\le 0.626<\log (m+1)$ ($\because$ ㉠)

이때

$\log 4=\log 2^2=2\log 2$

$=2\times 0.301=0.602$,

$\log 5=\log \dfrac{10}{2}=1-\log 2$

$=1-0.301=0.699$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 4이다.

$\therefore m+n=4+28=32$ 답 32

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

조건 (나)의 부등식의 의미를 살펴보자.
조건 (가)에 의하여 m은 한 자리 자연수이므로
$\dfrac{3^{60}}{10^n}=m+\alpha$ $(0\le \alpha<1)$로 나타낼 수 있다.
이때 어떤 수를 10의 거듭제곱으로 나눈다는 것은 소수점의 위치를 이동시키는 것과 같고, 3^{60}을 10^n으로 나누어 정수 부분이 한 자리 수가 되도록 만들었으므로 n은 3^{60}의 자릿수에서 1을 뺀 값과 같다. 또한, 한 자리 자연수 m은 3^{60}의 최고 자리의 수와 같다.
따라서 $\log 3^{60}=60\times \log 3=60\times 0.4771=28.626$에서 정수 부분인 28을 이용하여 n의 값을 구하고, 소수 부분인 0.626을 이용하여 m의 값을 구할 수 있다.

23 $\log m-\log n=[\log m]-[\log n]$에서

$\log m-[\log m]=\log n-[\log n]$

이때 $\log m-[\log m]$, $\log n-[\log n]$은 각각 $\log m$, $\log n$의 소수 부분을 의미하므로 $\log m$과 $\log n$의 소수 부분이 같아야 한다.

또한, $20<m<n<300$이므로 m, n은 자릿수는 다르지만 숫자의 배열이 같은 두 자연수이다.

따라서 두 자연수 m, n에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(21, 210)$, $(22, 220)$, $(23, 230)$, $\cdots$, $(29, 290)$

의 9개이다. 답 ①

• 다른 풀이 •

$\log m-\log n=[\log m]-[\log n]$에서

$[\log m]$, $[\log n]$은 각각 $\log m$, $\log n$의 정수 부분이므로

$\log n-\log m=N$ (단, N은 음이 아닌 정수)

이때 $20<m<n<300$에서 m, n은 두 자리 수 또는 세 자리 수이므로 $\log m$과 $\log n$의 정수 부분은 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $[\log m]=[\log n]=1$

(ii) $[\log m]=1$, $[\log n]=2$

(iii) $[\log m]=[\log n]=2$

그런데 (i), (iii)이면 $m=n$이므로 모순이다.

즉, $[\log m]=1$, $[\log n]=2$이므로

$\log n-\log m=[\log n]-[\log m]=1$

$\log n=1+\log m$, $\log n=\log 10m$

$\therefore n=10m$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(21, 210)$, $(22, 220)$, $(23, 230)$, $\cdots$, $(29, 290)$

의 9개이다.

24 ㄱ. $\log 1000=\log 10^3=3$이므로

$f(1000)=3$

$\log 20=\log 10+\log 2=1+\log 2$이므로

$f(20)=1$ ($\because 0<\log 2<1$)

$\log 50=\log 10+\log 5=1+\log 5$이므로

$f(50)=1$ ($\because 0<\log 5<1$)

$\therefore f(1000)=f(20)+f(50)+1$ (참)

ㄴ. $\log x=f(x)+g(x)$이므로

ㄱ에서 $g(1000)=0$, $g(20)=\log 2$,

$g(50)=\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2$

$\therefore g(1000)=g(20)+g(50)-1$ (참)

ㄷ. $\log x=f(x)+g(x)$,

$\log x^2=2\log x=f(x^2)+g(x^2)$,

$\log x^4=4\log x=f(x^4)+g(x^4)$이므로

$$\begin{aligned}f(x^4)+g(x^4)&=2\{f(x)+g(x)\}+f(x^2)+g(x^2)\\&=2f(x)+2g(x)+f(x^2)+g(x^2)\end{aligned}$$

이때 $g(x^2)=1-2g(x)$, 즉 $g(x^2)+2g(x)=1$

이므로

$f(x^4)+g(x^4)=f(x^2)+2f(x)+1$

또한, $f(x^2)+2f(x)+1$은 정수이고,

$0\le g(x^4)<1$이므로 $g(x^4)=0$

$\therefore f(x^4)=f(x^2)+2f(x)+1$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

ㄷ. $\log x=f(x)+g(x)$에서

$\log x^2=2\log x=2f(x)+2g(x)$

이때 $g(x)$의 값의 범위에 따라 $g(x^2)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(x^2)=\begin{cases}2g(x) & \left(0\le g(x)<\frac{1}{2}\right)\\ 2g(x)-1 & \left(\frac{1}{2}\le g(x)<1\right)\end{cases}$$

(i) $0\le g(x)<\frac{1}{2}$일 때,

$g(x^2)=1-2g(x)$에서

$2g(x)=1-2g(x)$, $g(x)=\frac{1}{4}$

$\log x^4=4\log x=4f(x)+4g(x)=4f(x)+1$

즉, $f(x^2)=2f(x)$, $f(x^4)=4f(x)+1$이므로

$$\begin{aligned}f(x^4)&=4f(x)+1\\&=2f(x)+2f(x)+1\\&=f(x^2)+2f(x)+1\end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2}\le g(x)<1$일 때,

$g(x^2)=1-2g(x)$에서

$2g(x)=1-\{2g(x)-1\}$, $g(x)=\frac{1}{2}$

$\log x^2=2\log x=2f(x)+2g(x)=2f(x)+1$

$\log x^4=4\log x=4f(x)+4g(x)=4f(x)+2$

즉, $f(x^2)=2f(x)+1$, $f(x^4)=4f(x)+2$이므로

$$\begin{aligned}f(x^4)&=4f(x)+2\\&=2f(x)+1+2f(x)+1\\&=f(x^2)+2f(x)+1\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $f(x^4)=f(x^2)+2f(x)+1$ (참)

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$\log 1000=\log 20+\log 50$이므로

$f(1000)+g(1000)$

$=f(20)+g(20)+f(50)+g(50)$

$=\{f(20)+f(50)+1\}+\{g(20)+g(50)-1\}$

즉, ㄱ에서 $f(1000)=f(20)+f(50)+1$이 참이면 ㄴ이 참임을 알 수 있고 또한 ㄴ에서 $g(1000)=g(20)+g(50)-1$이 참이면 ㄱ이 참임을 알 수 있다.

25 $64=2^6<99<2^7=128$이므로

$6<\log_2 99<7$ $\quad\therefore a=\log_2 99-6$

$25=5^2<99<5^3=125$이므로

$2<\log_5 99<3$ $\quad\therefore b=\log_5 99-2$

$$\begin{aligned}\therefore 2^{p+a}5^{q+b}&=2^{p-6+\log_2 99}5^{q-2+\log_5 99}\\&=2^{p-6}\times 2^{\log_2 99}\times 5^{q-2}\times 5^{\log_5 99}\\&=99^2\times 2^{p-6}\times 5^{q-2}\end{aligned}$$

이때 $40=2^3\times 5$이고, $2^{p+a}5^{q+b}$이 40의 배수가 되어야 하므로

$p-6\ge 3$, $q-2\ge 1$ $\quad\therefore p\ge 9$, $q\ge 3$

따라서 $p+q\ge 12$이므로 구하는 $p+q$의 최솟값은 12이다.

답 12

26 $\log_a N=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)에 대하여

$n-\alpha$가 최소이려면 n은 최소이고, α는 최대이어야 한다.

이때 a는 2보다 큰 자연수이고, N은 자연수이므로 n의 최솟값은 0이다.

즉, $\log_a N=\alpha$이고, α가 최대가 되려면

$0\le\alpha<1$에서 $N<a$이어야 하므로 $N=a-1$이어야 한다.

즉, $n=0$, $\alpha=\log_a(a-1)$일 때, $n-\alpha$의 값이 최소가 되므로

$h(a)=-\log_a(a-1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &h(3)\times h(4)\times h(5)\times\cdots\times h(2030)\times h(2031)\\&=(-\log_3 2)\times(-\log_4 3)\times(-\log_5 4)\times\cdots\\&\qquad\times(-\log_{2030} 2029)\times(-\log_{2031} 2030)\\&=\left(-\frac{\log 2}{\cancel{\log 3}}\right)\times\left(-\frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 4}}\right)\times\left(-\frac{\cancel{\log 4}}{\cancel{\log 5}}\right)\times\cdots\\&\qquad\times\left(-\frac{\cancel{\log 2029}}{\cancel{\log 2030}}\right)\times\left(-\frac{\cancel{\log 2030}}{\log 2031}\right)\\&=-\frac{\log 2}{\log 2031}\\&=-\log_{2031} 2=k\end{aligned}$$

따라서 $\log_{2031} 2^{-1}=k$이므로

$2031^k=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

27 최초 API 수율을 A라 하면 10회 연속으로 이온교환 장치를 통과한 API 수율은

$A\left(1-\frac{1}{10}\right)^{10}=A\times0.9^{10}$

즉, $A\times0.9^{10}=A\times\frac{k}{100}$이므로

$0.9^{10}=\frac{k}{100}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.9^{10}=\log\frac{k}{100}$

$10\log 0.9=\log k-2$

$\log k=10\log(9\times10^{-1})+2$

$=10(2\log 3-1)+2$

$=10(2\times0.4771-1)+2$

$=10\times(-0.0458)+2$

$=-0.458+2$

$=1.542=1+0.542$

$=1+\log 3.5=\log 35$

$\therefore k=35$ 답 35

28 2014년의 미취학 아동의 수를 A라 하면

2015년의 미취학 아동의 수는 $A\times0.4$

2015년 이후 매년 미취학 아동의 수가 30 %씩 증가하므로 n년 후의 미취학 아동의 수는

$A\times0.4\times(1+0.3)^n$

이때 미취학 아동의 수가 2014년의 미취학 아동의 수의 $\frac{11}{2}$배가 되려면

$A\times0.4\times(1+0.3)^n=A\times\frac{11}{2}$

$0.4\times1.3^n=\frac{11}{2}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(0.4\times1.3^n)=\log\frac{11}{2}$

$\log(4\times10^{-1}\times1.3^n)=\log 5.5$

$2\log 2-1+n\log 1.3=\log 5.5$

$2\times0.3010-1+n\times0.114=0.742$

$0.114n=1.14$ $\quad\therefore n=10$

따라서 2015년으로부터 10년 후의 미취학 아동의 수가 2014년의 미취학 아동의 수의 $\frac{11}{2}$배이므로

$a=2025$ 답 ③

29 약물 A의 흡수율과 배설률을 각각 K_A, E_A

약물 B의 흡수율과 배설률을 각각 K_B, E_B라 하면

$K_A=2K_B,\ E_A=\frac{1}{2}K_A,\ E_B=\frac{1}{4}K_B$ ……㉠

약물 A의 혈중농도가 최고치에 도달하는 시간은 3시간이므로

$3=c\times\frac{\log K_A-\log E_A}{K_A-E_A}$

$=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{2}K_A}{K_A-\frac{1}{2}K_A}$

$=c\times\frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A}=c\times\frac{2\log 2}{K_A}$

$\therefore \frac{c}{K_A}=\frac{3}{2\log 2}$ ……㉡

약물 B의 혈중농도가 최고치에 도달하는 시간은 a시간이므로

$a=c\times\frac{\log K_B-\log E_B}{K_B-E_B}$

이때 ㉠에서 $K_B=\frac{1}{2}K_A$, $E_B=\frac{1}{4}K_B=\frac{1}{8}K_A$이므로

$a=c\times\frac{\log\frac{1}{2}K_A-\log\frac{1}{8}K_A}{\frac{1}{2}K_A-\frac{1}{8}K_A}$

$=c\times\frac{\log 4}{\frac{3}{8}K_A}=\frac{c}{K_A}\times\frac{16\log 2}{3}$

$=\frac{3}{2\log 2}\times\frac{16\log 2}{3}$ ($\because$ ㉡)

$=8$ 답 8

30 별의 겉보기 등급이 각각 5.0, 4.5인 두 별을 동시에 관측할 때, 이 두 별이 방출하는 총광도에 대응하는 겉보기 등급 m은

$m=-2.5\times\log(10^{-0.4\times5.0}+10^{-0.4\times4.5})$

$=-2.5\times\log\left(10^{-\frac{2}{5}\times5}+10^{-\frac{2}{5}\times\frac{9}{2}}\right)$

$=-2.5\times\log\left(10^{-2}+10^{-\frac{9}{5}}\right)$ ……㉠

이때 $10^{-\frac{9}{5}}=A$라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$\log 10^{-\frac{9}{5}}=\log A$

$\log A=-\frac{9}{5}=-1.8=-2+0.2$

$=-2+\log 1.6=\log\frac{1.6}{100}$

$\therefore A=\frac{1.6}{100}$

즉, ㉠에서

$m=-2.5\times\log\left(\frac{1}{100}+\frac{1.6}{100}\right)$

$=-2.5\times\log\frac{2.6}{100}$

$=-2.5\times(\log 2.6-2)$

$=-2.5\times(0.4-2)$

$=-2.5\times(-1.6)=4$

따라서 두 별이 방출하는 총광도에 대응하는 겉보기 등급 m의 값은 4이다. 답 4

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.26~27

01 $\frac{1}{2}$	02 2	03 7	04 27	05 ④
06 6	07 12	08 ②	09 15	10 78
11 500	12 22			

01 해결단계

❶ 단계	$4^a=3^b=c$를 이용하여 $\log_6 c$를 a, b로 나타낸다.
❷ 단계	$4a^2+b^2=4ab(2a+b-1)$을 이용하여 ❶단계에서 구한 식의 값을 구한다.

$4^a=3^b=c$, 즉 $2^{2a}=3^b=c$에서

$2a=\log_2 c$, $b=\log_3 c$

$\log_c 2=\frac{1}{2a}$, $\log_c 3=\frac{1}{b}$

$\log_c 6=\log_c 2+\log_c 3$

$=\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=\frac{2a+b}{2ab}$

$\therefore \log_6 c=\frac{2ab}{2a+b}$ ……㉠

이때 $4a^2+b^2=4ab(2a+b-1)$에서

$4a^2+b^2=4ab(2a+b)-4ab$

$4a^2+4ab+b^2=4ab(2a+b)$

$(2a+b)^2=4ab(2a+b)$

$2a+b>0$이므로 양변을 $2(2a+b)^2$으로 나누면

$\frac{2ab}{2a+b}=\frac{1}{2}$ ……㉡

$\therefore \log_6 c=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡) 답 $\frac{1}{2}$

02 해결단계

❶ 단계	로그의 성질을 이용하여 집합 A의 원소 (x, y)에 대하여 $4xy=1$이 성립함을 보인다.
❷ 단계	집합 B의 원소 (x, y)가 동시에 집합 A의 원소가 되도록 하는 조건을 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위를 구하고, 그 최솟값을 구한다.

집합 A에서 로그의 성질에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\log 2\right)(\log_{\sqrt{2}} y)+\log x+\log 4$

$=\log\sqrt{2}\times\frac{\log y}{\log\sqrt{2}}+\log x+\log 4$

$=\log y+\log x+\log 4$

$=\log 4xy=0$

즉, $4xy=1$이므로 $y=\frac{1}{4x}$ ……㉠

또한, 집합 B에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$이므로

이 식의 양변을 제곱하면

$x+y+2\sqrt{xy}=a$ ……㉡

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 순서쌍 (x, y)가 존재한다.

㉠을 ㉡에 대입하면

$x+\frac{1}{4x}+1=a$

$\therefore x+\frac{1}{4x}=a-1$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{4x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{1}{4x}}=1$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$

즉, $a-1\geq 1$이므로 $a\geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

• 다른 풀이 •

집합 A에서 로그의 성질에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\log 2\right)(\log_{\sqrt{2}} y)+\log x+\log 4$

$=\log\sqrt{2}\times\frac{\log y}{\log\sqrt{2}}+\log x+\log 4$

$=\log y+\log x+\log 4$

$=\log 4xy=0$

$\therefore 4xy=1$ ……㉢

또한, 집합 B에서 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$이므로 이 식의 양변을 제곱하면

$x+2\sqrt{xy}+y=a$ ……㉣

㉢에서 $xy=\frac{1}{4}$이므로 이것을 위의 식에 대입하면

$x+1+y=a$ $\therefore y=-x+a-1$

위의 식을 ㉢에 대입하면 $4x(-x+a-1)=1$

$\therefore 4x^2-2(2a-2)x+1=0$ ……㉤

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이려면 ㉢, ㉣을 만족시키는 두 양수 x, y의 순서쌍 (x, y)가 존재해야 하므로 이차방정식 ㉤이 양의 실근을 가져야 한다. ($\because$ $x>0$이면 ㉢에서 $y>0$이다.)

(i) 이차방정식 ㉤의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a-2)^2-4=4a^2-8a$

$=4a(a-2)\geq 0$

$\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq 2$

(ii) (두 근의 합)$=\frac{2(2a-2)}{4}>0$이므로 $a>1$

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{1}{4}>0$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a\geq 2$이므로 양수 a의 최솟값은 2이다.

BLACKLABEL 특강 참고

다음과 같은 방법으로도 양수 a의 최솟값을 구할 수 있다.

㉢에서 $xy=\frac{1}{4}$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$에서 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 2\sqrt{\sqrt{xy}}=2\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

즉, $\sqrt{a}\geq\sqrt{2}$에서 $a\geq 2$이므로 양수 a의 최솟값은 2이다.

03 해결단계

❶ 단계	$2\le x\le 8$인 자연수 x에 대하여 $\log_x n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구한 후, $A(x)$를 구한다.
❷ 단계	집합 P의 부분집합 X에 대하여 X에서 X로의 함수 f가 일대일대응이 되기 위한 조건을 파악한 후, 집합 X의 개수를 구한다.

$\log_x n$이 자연수가 되려면 n은 x의 거듭제곱이어야 하므로 $A(x)$의 값은 1부터 300까지의 자연수 중에서 x의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.

$2^8=256<300<2^9=512$이므로 $\log_2 n$이 자연수이기 위한 n은 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^8$의 8개이다.

$\therefore A(2)=8$

같은 방법으로 3부터 8까지의 자연수 x에 대하여 $A(x)$의 값을 구하면

$3^5=243<300<3^6=729$이므로

$A(3)=5$

$4^4=256<300<4^5=1024$이므로

$A(4)=4$

$5^3=125<300<5^4=625$이므로

$A(5)=3$

$6^3=216<300<6^4=1296$이므로

$A(6)=3$

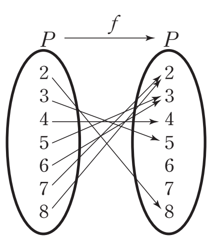
$7^2=49<300<7^3=343$이므로

$A(7)=2$

$8^2=64<300<8^3=512$이므로

$A(8)=2$

전체집합 $P=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에서 P로의 대응 f는 다음 그림과 같다.



즉, 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 X로의 함수 f가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X는 $\{4\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 8\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$의 7개이다. 답 7

BLACKLABEL 특강 필수 개념

일대일함수와 일대일대응

(1) 일대일함수
함수 $f:X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 「$x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$」가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라 한다.

(2) 일대일대응
함수 $f:X \longrightarrow Y$가 일대일함수이고 공역과 치역이 같을 때, 함수 f를 일대일대응이라 한다.
즉, 유한개의 원소를 가진 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 일대일대응이려면 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 같고, 집합 X의 한 원소는 집합 Y의 하나의 원소로 겹치지 않게 대응되어야 한다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$A(x)$의 값을 이용하여 조건을 만족시키는 집합 P의 부분집합 X를 구해보자.
$A(2)=8$, $A(8)=2$이므로 두 원소 2, 8은 집합 X에 함께 포함되어야 한다.
$A(3)=5$, $A(5)=3$이므로 두 원소 3, 5도 집합 X에 함께 포함되어야 한다.
$A(4)=4$이므로 원소 4는 집합 X에 홀로 포함될 수 있다.
그러나 $A(6)=3$, $A(7)=2$에서 원소 6, 7은 치역의 원소가 아니므로 두 원소 6, 7을 포함시키는 집합 X는 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 세 묶음 $(2,\ 8)$, $(3,\ 5)$, (4)를 원소로 가지는 집합 X의 개수는 $2^3-1=7$이다.

04 해결단계

❶ 단계	두 점 $\mathrm{P}(m,\ n)$, $\mathrm{Q}(\alpha,\ \beta)$가 각각 곡선과 직선 위에 존재함을 이용하여 관계식을 구한다.
❷ 단계	$\log AB$의 값을 이용하여 AB의 최댓값과 최솟값을 구한 후, 실수 k의 값을 구한다.

점 $\mathrm{P}(m,\ n)$은 곡선 $y=\dfrac{16}{x}$ 위에 있으므로

$n=\dfrac{16}{m}$　　$\therefore mn=16$

그런데 m, n은 음이 아닌 정수이고,

$16=1\times16=2\times8=4\times4$이므로 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(1,\ 16)$, $(2,\ 8)$, $(4,\ 4)$, $(8,\ 2)$, $(16,\ 1)$

또한, 점 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \beta)$는 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\beta=-\alpha+1$　　$\therefore \alpha+\beta=1$　　……㉠

$\therefore \log AB=\log A+\log B$

$=m+\alpha+n+\beta$

$=m+n+1$ ($\because$ ㉠)

이때 $m+n$의 최댓값은 $1+16=17$, 최솟값은 $4+4=8$이므로 $\log AB$의 최댓값은 $17+1=18$, 최솟값은 $8+1=9$이다.

따라서 AB의 최댓값은 10^{18}, 최솟값은 10^9이므로 그 곱은

$10^{18}\times10^9=10^{27}=10^k$

$\therefore k=27$　　답 27

05 해결단계

❶ 단계	로그의 진수의 조건을 이용하여 n의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	주어진 식의 값이 양수가 되는 n의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	n의 개수가 12가 되도록 하는 자연수 k의 값을 모두 구하고, 그 합을 구한다.

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$에서

진수의 조건에 의하여

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$, $75-kn>0$

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$에서

$-n^2+10n+75>0$, $n^2-10n-75<0$

$(n+5)(n-15)<0$

$\therefore 1\le n<15$ ($\because$ n은 자연수)　　……㉠

$75-kn>0$에서

$kn<75$　　$\therefore n<\dfrac{75}{k}$ ($\because$ k는 자연수)　　……㉡

한편, $\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$이려면
$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$
$-n^2+10n+75>75-kn$
$n^2-(k+10)n<0$, $n(n-k-10)<0$
$\therefore 1\le n<k+10$ ($\because$ k는 자연수) ……㉢
(i) $k\le 5$일 때,
$\frac{75}{k}$, $k+10$의 값이 모두 15가 된다.
$\frac{75}{k}\ge 15$, $k+10\le 15$이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$1\le n<k+10$
이 부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12가 되려면
$12<k+10\le 13$ $\therefore 2<k\le 3$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 3이다.
(ii) $k>5$일 때,
$\frac{75}{k}<15$, $k+10>15$이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$1\le n<\frac{75}{k}$
이 부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12가 되려면
$12<\frac{75}{k}\le 13$, $\frac{75}{13}\le k<\frac{75}{12}$
$\therefore 5.\times\times\times\le k<6.25$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 6이다.
(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은
$3+6=9$ 답 ④

06 해결단계

❶ 단계	조건 ㈎에서 $\log a$, $\log b$의 관계식을 구한다.
❷ 단계	조건 ㈏에서 $\log a$, $\log b$의 관계식을 구한 후, ❶ 단계의 식과 연립하여 $\log a$, $\log b$를 각각 구한다.
❸ 단계	❷ 단계의 식을 조건 ㈐의 부등식에 대입하여 $\log\frac{a}{b}$의 값을 구한 후, 모든 $\log\frac{a}{b}$의 값의 합을 구한다.

조건 ㈎의 $ab=100$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log ab=\log 100$ $\therefore \log a+\log b=2$ ……㉠
조건 ㈏에서 $\log a$와 $\log b$의 소수 부분이 같으므로
$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b=m$ (m은 정수) ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\log a=\frac{2+m}{2}$, $\log b=\frac{2-m}{2}$
조건 ㈐에서 $-1<\log b<\log a<5$이므로
$-1<\frac{2-m}{2}<\frac{2+m}{2}<5$
$\begin{cases} -1<\frac{2-m}{2}\text{에서 } m<4 \\ \frac{2-m}{2}<\frac{2+m}{2}\text{에서 } m>0 \\ \frac{2+m}{2}<5\text{에서 } m<8 \end{cases}$
$\therefore 0<m<4$
따라서 정수 m, 즉 $\log\frac{a}{b}$의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은
$1+2+3=6$ 답 6

• 다른 풀이 1 •
조건 ㈎의 $ab=100$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log ab=\log 100$
$\log a+\log b=2$
$\therefore \log b=2-\log a$ ……㉢
조건 ㈏에서 $\log a$, $\log b$의 소수 부분이 같으므로
$\log a-\log b=$(정수)
㉢을 위의 식에 대입하면
$\log a-(2-\log a)=$(정수)
$2\log a-2=$(정수)
이때 $\log a=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면
$2(n+\alpha)-2=$(정수), $2\alpha+2n-2=$(정수)
즉, 2α도 정수이어야 하므로
$2\alpha=0$ 또는 $2\alpha=1$ ($\because$ $0\le 2\alpha<2$)
$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$
한편, 조건 ㈐에서 $-1<\log b<\log a<5$이므로 ㉢을 부등식에 대입하면
$-1<2-\log a<\log a<5$
$\begin{cases} -1<2-\log a\text{에서 } \log a<3 \\ 2-\log a<\log a\text{에서 } \log a>1 \\ \log a<5 \end{cases}$
$\therefore 1<\log a<3$
(i) $\alpha=0$, 즉 $\log a=n$일 때,
$1<n<3$에서 $n=2$이므로
$\log a=2$
(ii) $\alpha=\frac{1}{2}$, 즉 $\log a=n+\frac{1}{2}$일 때,
$1<n+\frac{1}{2}<3$에서 $\frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$
즉, $n=1$ 또는 $n=2$이므로
$\log a=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 또는 $\log a=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
(i), (ii)에서
$\log a=\frac{3}{2}$ 또는 $\log a=2$ 또는 $\log a=\frac{5}{2}$
이때
$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$
$=\log a-(2-\log a)$ ($\because$ ㉢)
$=2\log a-2$
이므로
$\underbrace{\log\frac{a}{b}=1}_{\log a=\frac{3}{2}}$ 또는 $\underbrace{\log\frac{a}{b}=2}_{\log a=2}$ 또는 $\underbrace{\log\frac{a}{b}=3}_{\log a=\frac{5}{2}}$
따라서 모든 $\log\frac{a}{b}$의 값의 합은
$1+2+3=6$

• 다른 풀이 2 •

$\log a=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)라 하면

조건 ㈎의 $ab=100$에서 $b=\frac{100}{a}$이므로

$\log b=\log\frac{100}{a}=\log 100-\log a$

$=2-(n+\alpha)$ ……㉣

이때 α의 값에 따라 $\log b$의 소수 부분을 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $\alpha=0$일 때,

㉣에서 $\log b=2-n$

즉, $\log b$의 소수 부분은 0이다.

$\log a=n$, $\log b=2-n$을 조건 ㈐에 대입하면

$-1<2-n<n<5$

$\begin{cases} -1<2-n\text{에서 } n<3 \\ 2-n<n\text{에서 } n>1 \\ n<5 \end{cases}$

$\therefore 1<n<3$

즉, $n=2$이므로 $\log a=2$, $\log b=0$

$\therefore \log\frac{a}{b}=\log a-\log b=2$

(ii) $\alpha\ne0$일 때,

㉣에서 $\log b=2-n-\alpha=1-n+(1-\alpha)$이므로

$\log b$의 소수 부분은 $1-\alpha$이다.

조건 ㈏에서 $\log a$, $\log b$의 소수 부분이 같으므로

$\alpha=1-\alpha$, $2\alpha=1$ $\quad\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

즉, $\log a=n+\frac{1}{2}$, $\log b=\frac{3}{2}-n$이므로 이것을 조건 ㈐에 대입하면

$-1<\frac{3}{2}-n<n+\frac{1}{2}<5$

$\begin{cases} -1<\frac{3}{2}-n\text{에서 } n<\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}-n<n+\frac{1}{2}\text{에서 } n>\frac{1}{2} \\ n+\frac{1}{2}<5\text{에서 } n<\frac{9}{2} \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{2}<n<\frac{5}{2}$

따라서 $n=1$ 또는 $n=2$이므로

$\log a=\frac{3}{2}$, $\log b=\frac{1}{2}$ 또는 $\log a=\frac{5}{2}$, $\log b=-\frac{1}{2}$

$\therefore \log\frac{a}{b}=1$ 또는 $\log\frac{a}{b}=3$

(i), (ii)에서 $\log\frac{a}{b}$의 값이 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

07 해결단계

❶ 단계	$n=1, 2, 3, \cdots$을 주어진 등식에 대입한다.
❷ 단계	등식을 만족시키는 n의 값을 구한다.

(i) $n=1$일 때,

$\log_2 1=0$이므로

$[\log_2 1]=0<2\times1+1=3$

(ii) $2\le n<2^2$일 때,

$[\log_2 n]=1$이므로 $[\log_2 2]=[\log_2 3]=1$

$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]=1<2\times2+1=5$,

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]=2<2\times3+1=7$

(iii) $2^2\le n<2^3$일 때,

$[\log_2 n]=2$이므로

$[\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2$

$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+[\log_2 4]=4$

$<2\times4+1=9$,

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 7]=10$

$<2\times7+1=15$

(iv) $2^3\le n<2^4$일 때,

$[\log_2 n]=3$이므로

$[\log_2 8]=[\log_2 9]=[\log_2 10]=\cdots=[\log_2 15]=3$

$\therefore [\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 8]=13$

$<2\times8+1=17$,

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 15]=34$

$>2\times15+1=31$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는

$8<n<15$이므로

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]$

$=[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 7]$

$+[\log_2 8]+\cdots+[\log_2 n]$

$=2\times1+4\times2+3(n-7)=3n-11$

즉, $3n-11=2n+1$이므로

$n=12$ **답** 12

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$n=1, 2, 3, \cdots$을 대입할 때마다 등식의 좌변과 우변의 식의 값은 모두 증가하고, $[\log_2 1]<3$이다. 이때

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 (n-1)]$

$<2(n-1)+1$

에서 양변에 $[\log_2 n]$을 더하면

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]<2n-1+[\log_2 n]$

즉, $2n+1<2n-1+[\log_2 n]$이므로 $2<[\log_2 n]$

$[\log_2 n]$은 정수이므로

$3\le[\log_2 n]$ $\quad\therefore n\ge8$

따라서 n의 값을 구할 때 8부터 대입하여 계산하는 것이 편하다.

08 해결단계

❶ 단계	조건 ㈎, ㈏를 이용하여 $\log_a b=\frac{n}{m}$이라 하고, $1<a<a^{\frac{n}{m}}<a^2$임을 파악한다.
❷ 단계	m의 값에 따라 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하고, 순서쌍 (a, b)를 구한다.
❸ 단계	$a+b$의 최댓값을 구한다.

조건 ㈏에서 $\log_a b=\frac{n}{m}$ (m과 n은 서로소인 자연수)이라 하면

$b=a^{\frac{n}{m}}$

즉, $a^n=b^m$이고, m과 n은 서로소인 자연수이므로 어떤 자연수 p에 대하여 $a=p^m$, $b=p^n$이라 할 수 있다.
조건 (가)에서 $a<b<a^2$이므로

$1<a<a^{\frac{n}{m}}<a^2$, $1<\frac{n}{m}<2$

$\therefore m<n<2m$ ……㉠

이때 $\log a<\frac{3}{2}$이므로 $\underbrace{a<10^{\frac{3}{2}}}_{a^2<10^3}$

$\therefore 2\le a\le 31$ ……㉡

자연수 m의 값에 따라 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $m=1$일 때,
㉠을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=2$일 때,
㉠에서 $2<n<4$
$\therefore n=3$
$a=p^2$이므로 $p=2, 3, 4, 5$ ($\because$ ㉡)
$b=p^3$이므로 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(4, 8)$, $(9, 27)$, $(16, 64)$, $(25, 125)$이다.

(iii) $m=3$일 때,
㉠에서 $3<n<6$
$\therefore n=4$ 또는 $n=5$
① $m=3$, $n=4$인 경우
$a=p^3$이므로 $p=2, 3$ ($\because$ ㉡)
$b=p^4$이므로 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(8, 16)$, $(27, 81)$이다.
② $m=3$, $n=5$인 경우
$a=p^3$ 꼴이므로 $p=2, 3$ ($\because$ ㉡)
$b=p^5$ 꼴이므로 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(8, 32)$, $(27, 243)$이다.

(iv) $m=4$일 때,
㉠에서 $4<n<8$
이때 $n=6$은 $m=4$와 서로소가 아니므로
$n=5$ 또는 $n=7$
③ $m=4$, $n=5$인 경우
$a=p^4$이므로 $p=2$ ($\because$ ㉡)
$b=p^5$이므로 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(16, 32)$이다.
④ $m=4$, $n=7$인 경우
$a=p^4$이므로 $p=2$ ($\because$ ㉡)
$b=p^7$이므로 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(16, 128)$이다.

(v) $m\ge 5$일 때,
$a\ge 32$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 $a+b$는 $a=27$, $b=243$일 때 최댓값 270을 갖는다.

답 ②

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 로그의 값이 유리수라는 조건을 통해 서로소인 두 자연수 m, n을 이용하여 $a=p^m$, $b=p^n$으로 나타낸 후, m의 값에 따라 경우를 나누어야 하는 문제이다.
이와 같이 로그의 값이 자연수 또는 유리수가 되는 조건은 시험에서 자주 출제되는 유형으로 로그의 정의를 통해 로그의 밑과 진수의 관계식을 지수를 이용한 형태로 나타내는 것이 용이하다.

09 해결단계

❶ 단계	$4\log m-2\log n=k$ (k는 자연수)로 놓은 후, m, n 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 관계식을 이용하여 k가 짝수임을 파악한다.
❸ 단계	$k=2, 4, 6, \cdots$을 차례대로 대입하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$4\log m-2\log n=\log\frac{m^4}{n^2}=k$ (k는 자연수)라 하면

$\frac{m^4}{n^2}=10^k$, $m^2=10^{\frac{k}{2}}n$

이때 m^2, n이 자연수이므로 $10^{\frac{k}{2}}$도 자연수이어야 한다.

(i) $k=2$일 때,
$m^2=10n$에서 $m=\sqrt{10n}$이므로
조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
$(10, 10)$, $(20, 40)$, $(30, 90)$의 3개

(ii) $k=4$일 때,
$m^2=100n$에서 $m=10\sqrt{n}$이므로
조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
$(10, 1)$, $(20, 4)$, $(30, 9)$, $(40, 16)$, $(50, 25)$, $(60, 36)$, $(70, 49)$, $(80, 64)$, $(90, 81)$, $(100, 100)$의 10개

(iii) $k=6$일 때,
$m^2=1000n$에서 $m=10\sqrt{10n}$이므로
조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
$(100, 10)$의 1개

(iv) $k=8$일 때,
$m^2=10000n$에서 $m=100\sqrt{n}$이므로
조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
$(100, 1)$의 1개

(v) $k\ge 10$일 때,
$m^2=10^{\frac{k}{2}}n\ge 100000n$에서
$m\ge 100\sqrt{10n}>100$이므로
조건을 만족시키는 100 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 존재하지 않는다.

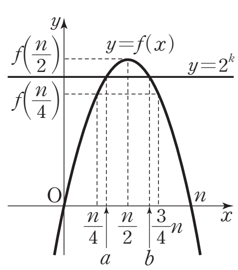
(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
$3+10+1+1=15$

답 15

10 해결단계

❶ 단계	$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$라 하고, a, b가 곡선 $y=nx-x^2$과 직선 $y=2^k$의 교점의 x좌표임을 파악한다.
❷ 단계	이차함수 $y=nx-x^2$의 그래프를 그린 후, a, b가 $0<b-a\le\frac{n}{2}$을 만족시키기 위한 n의 값의 범위를 k를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 부등식에 $k=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 부등식을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값을 각각 구한 후, 그 합을 구한다.

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$이 같은 자연수이므로
$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (k는 자연수)라 하면
$na-a^2=nb-b^2=2^k$ ……㉠
이때 $f(x)=nx-x^2$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^k$은 x좌표가 각각 a, b인 두 점에서 만난다.
㉠에서 $f(a)-f(b)=0$이므로
$(na-a^2)-(nb-b^2)=0$
$b^2-a^2-nb+na=0$
$(b-a)(b+a-n)=0$
이때 $b-a>0$이므로 $b+a=n$
$\therefore b=n-a,\ a=n-b$
주어진 조건에서 $0<b-a\le\frac{n}{2}$이므로
$0<(n-a)-a\le\frac{n}{2},\ 0<b-(n-b)\le\frac{n}{2}$
$-n<-2a\le-\frac{n}{2},\ n<2b\le\frac{3}{2}n$
$\therefore \frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}<b\le\frac{3}{4}n$
즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^k$은 다음 그림과 같다.



즉, $f\left(\frac{n}{4}\right)\le 2^k<f\left(\frac{n}{2}\right)$이어야 하므로
$\frac{3}{16}n^2\le 2^k<\frac{n^2}{4}$
$\frac{3}{16}n^2\le 2^k$에서 $3n^2\le 2^{k+4}$이므로 $n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$
$2^k<\frac{n^2}{4}$에서 $n^2>2^{k+2}$
$\therefore 2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$
*(ⅰ) $k=1$일 때,
$8<n^2\le\frac{32}{3}=10.6\times\times\times$ $\therefore n=3$
(ⅱ) $k=2$일 때,
$16<n^2\le\frac{64}{3}=21.3\times\times\times$
이것을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.
(ⅲ) $k=3$일 때,
$32<n^2\le\frac{128}{3}=42.6\times\times\times$ $\therefore n=6$
(ⅳ) $k=4$일 때,
$64<n^2\le\frac{256}{3}=85.3\times\times\times$ $\therefore n=9$
(ⅴ) $k=5$일 때,
$128<n^2\le\frac{512}{3}=170.6\times\times\times$ $\therefore n=12,\ 13$
(ⅵ) $k=6$일 때,
$256<n^2\le\frac{1024}{3}=341.3\times\times\times$ $\therefore n=17,\ 18$
(ⅶ) $k=7$일 때,
$512<n^2\le\frac{2048}{3}=682.6\times\times\times$이므로 이것을 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅶ)에서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이므로 그 합은
$3+6+9+12+13+17+18=78$ **답** 78

• 다른 풀이 •
$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$이 같은 자연수이므로
$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (k는 자연수)라 하면
$na-a^2=nb-b^2=2^k$
이때 a, b는 이차방정식 $nx-x^2=2^k$, 즉
$x^2-nx+2^k=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=n,\ ab=2^k$
한편, $(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=n^2-4\times2^k$이고
$0<b-a\le\frac{n}{2}$에서 $0<(b-a)^2\le\frac{n^2}{4}$이므로
$0<n^2-4\times2^k\le\frac{n^2}{4},\ 4\times2^k<n^2\le\frac{16\times2^k}{3}$
$\therefore 2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$
다음은 *와 같다.

11 해결단계

❶ 단계	$[\log x]$와 $f(x)$가 각각 $\log x$의 정수 부분, 소수 부분임을 파악한 후, 주어진 등식을 $[\log a]$, $f(a)$를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\log 2a$의 소수 부분이 $f(a)$의 값에 따라 결정됨을 이해하고, $f(a)$의 값의 범위에 따라 경우를 나눈다.
❸ 단계	❷단계에서 나눈 경우에 따라 $f(2a)$를 구한 후, ❶단계에서 구한 식에 대입하여 $[\log a]$, $f(a)$의 값을 각각 구한다.
❹ 단계	$\log a=[\log a]+f(a)$임을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 a의 값을 구하여 모두 곱한 후, k의 값을 구한다.

$f(x)=\log x-[\log x]$에서 $[\log x]$는 $\log x$의 정수 부분이므로 $f(x)$는 $\log x$의 소수 부분이다.
$\log a=2f(a)+f(2a)$에서

$\log a-f(a)=f(a)+f(2a)$

$\therefore [\log a]=f(a)+f(2a)$ ⋯⋯㉠

즉, $\log a$와 $\log 2a$의 소수 부분의 합이 $\log a$의 정수 부분과 같아야 한다.

$\log 2a=\log 2+\log a$

$\quad=\log 2+f(a)+[\log a]$ ⋯⋯㉡

에서 $\log 2a$의 소수 부분은 $f(a)$의 값에 따라 결정되므로 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0\le f(a)<\log 5$일 때, ← $\log 2+f(a)<1$일 때,

$\log 2\le f(a)+\log 2<1$이므로 ㉡에서

$f(2a)=f(a)+\log 2$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$[\log a]=f(a)+f(2a)$

$\quad=f(a)+f(a)+\log 2$

$\quad=2f(a)+\log 2$ ⋯⋯㉢

이때 $0\le f(a)<\log 5$에서

$0\le 2f(a)<2\log 5$

$\log 2\le 2f(a)+\log 2<2\log 5+\log 2$

$\therefore \log 2\le[\log a]<\log 50$ ($\because$ ㉢)

$[\log a]$는 정수이므로 $[\log a]=1$

따라서 $2f(a)+\log 2=1$이므로

$f(a)=\frac{1}{2}(1-\log 2)=\frac{1}{2}\log 5=\log\sqrt{5}$

$\log a=[\log a]+f(a)$에서

$\log a=1+\log\sqrt{5}=\log 10\sqrt{5}$

$\therefore a=10\sqrt{5}$

(ii) $\log 5\le f(a)<1$일 때, ← $\log 2+f(a)\ge 1$일 때,

$1\le f(a)+\log 2<1+\log 2$이므로 ㉡에서

$f(2a)=f(a)+\log 2-1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$[\log a]=f(a)+f(2a)$

$\quad=f(a)+f(a)+\log 2-1$

$\quad=2f(a)+\log 2-1$ ⋯⋯㉣

이때 $\log 5\le f(a)<1$에서

$2\log 5\le 2f(a)<2$

$2\log 5+\log 2-1\le 2f(a)+\log 2-1<1+\log 2$

$\therefore \log 5\le[\log a]<\log 20$ ($\because$ ㉣)

$[\log a]$는 정수이므로 $[\log a]=1$

따라서 $2f(a)+\log 2-1=1$이므로

$f(a)=\frac{1}{2}(2-\log 2)=\frac{1}{2}\log 50$

$\quad=\log\sqrt{50}=\log 5\sqrt{2}$

$\log a=[\log a]+f(a)$에서

$\log a=1+\log 5\sqrt{2}=\log 50\sqrt{2}$

$\therefore a=50\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $a=10\sqrt{5}$ 또는 $a=50\sqrt{2}$이므로 조건을 만족시키는 모든 양의 실수 a의 값의 곱은

$10\sqrt{5}\times 50\sqrt{2}=500\sqrt{10}$

$\therefore k=500$

답 500

12 해결단계

❶ 단계	$n(A_4\cap A_b)$는 $\log_4 x=\log_{2^k} y$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같음을 파악한다.
❷ 단계	k의 값에 따른 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 b의 값의 합을 구한다.

$A_4=\{\log_4 x\,|\,x$는 50 이하의 자연수$\}$이고

$b\in B$에서 5 이하의 자연수 k에 대하여 $b=2^k$

$\therefore A_b=A_{2^k}=\{\log_{2^k} y\,|\,y$는 50 이하의 자연수$\}$

이때 집합 $A_4\cap A_b$, 즉 $A_4\cap A_{2^k}$의 원소의 개수는 50 이하의 두 자연수 x, y에 대하여 $\log_4 x=\log_{2^k} y$를 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$\log_4 x=\log_{2^k} y$에서

$\log_{2^2} x=\log_{2^k} y$, $\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{k}\log_2 y$

$k\log_2 x=2\log_2 y$, $\log_2 x^k=\log_2 y^2$

$\therefore x^k=y^2$

50 이하의 두 자연수 x, y에 대하여 $x^k=y^2$을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때,

$x=y^2$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(9, 3)$, $\cdots$, $(49, 7)$의 7개이다.

$\therefore n(A_4\cap A_{2^1})=7$

(ii) $k=2$일 때,

$x^2=y^2$, 즉 $x=y$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $\cdots$, $(50, 50)$의 50개이다.

$\therefore n(A_4\cap A_{2^2})=50$

(iii) $k=3$일 때,

$x^3=y^2$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(4, 8)$, $(9, 27)$의 3개이다.

$\therefore n(A_4\cap A_{2^3})=3$

(iv) $k=4$일 때,

$x^4=y^2$, 즉 $x^2=y$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $\cdots$, $(7, 49)$의 7개이다.

$\therefore n(A_4\cap A_{2^4})=7$

(v) $k=5$일 때,

$x^5=y^2$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(4, 32)$의 2개이다.

$\therefore n(A_4\cap A_{2^5})=2$

(i)~(v)에서 $n(A_4\cap A_b)\ge 5$를 만족시키는 k의 값은 1, 2, 4이므로 모든 b, 즉 2^k의 값의 합은

$2^1+2^2+2^4=2+4+16=22$

답 22

03. 지수함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.30~32

01 ②	02 ③	03 ⑤	04 ③	05 ①
06 ③	07 15	08 13	09 ④	10 ②
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 6	15 $-1<k<0$
16 ①	17 $a<1$	18 33	19 ⑤	20 ④

01 $f(a)f(-2b)=128$에서

$2^a\times2^{-2b}=128$

$2^{a-2b}=2^7$

$\therefore a-2b=7$ ……㉠

$f(a+b)=\frac{1}{4}$에서

$2^{a+b}=\frac{1}{4}$

$2^{a+b}=2^{-2}$

$\therefore a+b=-2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-3$

$\therefore a^2+b^2=1^2+(-3)^2=10$

답 ②

02 ㄱ. 함수 $f(x)=5^x$은 실수 전체의 집합에서 일대일함수이다.

따라서 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 즉 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. (참)

ㄴ. (밑)$=5>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)=5^x$의 그래프는 아래로 볼록하므로 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다. (참) *

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

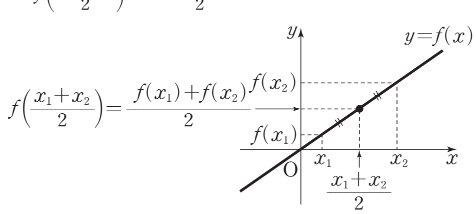
답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양에 따른 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$와 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$의 대소 관계는 다음과 같다.

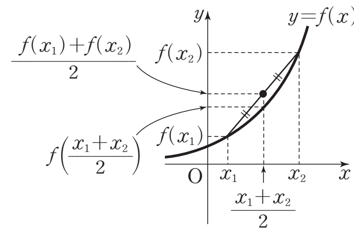
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양이 직선일 때,

$\iff f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



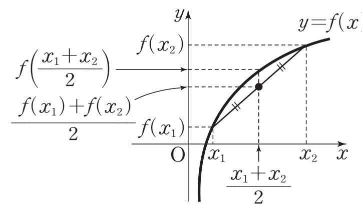
(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양이 아래로 볼록일 때,

$\iff f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프 모양이 위로 볼록일 때,

$\iff f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$



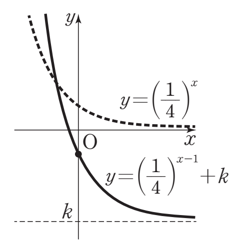
03 함수 $y=4^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=4^{-x}\qquad\therefore y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-k=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\qquad\therefore y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+k$

이 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+k\le0$

$\therefore k\le-4$

따라서 실수 k의 최댓값은 -4이다.

답 ⑤

04 $f(x)=a^x$이므로

$f(b)=4$에서 $a^b=4$

$f(c)=10$에서 $a^c=10$

$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right)=a^{\frac{b+c}{2}}=(a^{b+c})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^b\times a^c)^{\frac{1}{2}}=40^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{10}$

답 ③

05 $A=\sqrt[n+4]{a^{n+3}}=a^{\frac{n+3}{n+4}},\ B=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}},$

$C=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$이므로

$\frac{n+3}{n+4}-\frac{n+2}{n+3}=\frac{(n+3)^2-(n+2)(n+4)}{(n+3)(n+4)}$

$=\frac{1}{(n+3)(n+4)}>0$

$\therefore \dfrac{n+3}{n+4} > \dfrac{n+2}{n+3}$ ……㉠

$\dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$

$= \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$

$\therefore \dfrac{n+2}{n+3} > \dfrac{n+1}{n+2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{n+3}{n+4} > \dfrac{n+2}{n+3} > \dfrac{n+1}{n+2}$

이때 $0<(\text{밑})=a<1$이므로 $a^{\frac{n+3}{n+4}} < a^{\frac{n+2}{n+3}} < a^{\frac{n+1}{n+2}}$

$\therefore A<B<C$ 답 ①

• 다른 풀이 1 •

$A = \sqrt[n+4]{a^{n+3}} = a^{\frac{n+3}{n+4}}$, $B = \sqrt[n+3]{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+3}}$,

$C = \sqrt[n+2]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n+2}}$

이때 $\dfrac{n+3}{n+4} = 1 - \dfrac{1}{n+4}$, $\dfrac{n+2}{n+3} = 1 - \dfrac{1}{n+3}$,

$\dfrac{n+1}{n+2} = 1 - \dfrac{1}{n+2}$이고

$\dfrac{1}{n+4} < \dfrac{1}{n+3} < \dfrac{1}{n+2}$이므로

$-\dfrac{1}{n+4} > -\dfrac{1}{n+3} > -\dfrac{1}{n+2}$

$\therefore 1-\dfrac{1}{n+4} > 1-\dfrac{1}{n+3} > 1-\dfrac{1}{n+2}$

즉, $\dfrac{n+3}{n+4} > \dfrac{n+2}{n+3} > \dfrac{n+1}{n+2}$이고 $0<(\text{밑})=a<1$이므로

$a^{\frac{n+3}{n+4}} < a^{\frac{n+2}{n+3}} < a^{\frac{n+1}{n+2}}$

$\therefore A<B<C$

• 다른 풀이 2 •

모든 자연수 n에 대하여 세 수 A, B, C의 대소 관계가 성립하므로 특정한 자연수 n의 값을 이용하여 대소 관계를 구할 수 있다.

$n=1$일 때, $A=\sqrt[5]{a^4}=a^{\frac{4}{5}}$, $B=\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}$, $C=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$

이때 $\dfrac{4}{5} > \dfrac{3}{4} > \dfrac{2}{3}$이고, $0<(\text{밑})=a<1$이므로

$a^{\frac{4}{5}} < a^{\frac{3}{4}} < a^{\frac{2}{3}}$ $\therefore A<B<C$

06 ㉠과 ㉡은 $0<(\text{밑})<1$인 지수함수의 그래프이고, ㉢과 ㉣은 $(\text{밑})>1$인 지수함수의 그래프이다.

이때 $a>c>1$이므로 함수 $y=a^x$의 그래프는 ㉢, 함수 $y=c^x$의 그래프는 ㉣이다.

또한, $ab=1$, $cd=1$에서 $a=\dfrac{1}{b}$, $c=\dfrac{1}{d}$이므로

$\dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{d} > 1$ $\therefore 0<b<d<1$

즉, 함수 $y=b^x$의 그래프는 ㉡, 함수 $y=d^x$의 그래프는 ㉠이다.

따라서 그래프를 올바르게 짝지은 것은 ③이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

$ab=1$이므로 $b^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$

즉, 두 지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

또한, $cd=1$이므로 $d^x=\left(\dfrac{1}{c}\right)^x=c^{-x}$

즉, 두 지수함수 $y=c^x$, $y=d^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

07 $f(x)=2^{2x-1}+k=4^{x-\frac{1}{2}}+k$에서 $(\text{밑})=4>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=4$, $x=2$에서 최댓값 $f(2)=M$을 갖는다.

$f(0)=4$에서

$2^{0-1}+k=4$, $\dfrac{1}{2}+k=4$

$\therefore k=\dfrac{7}{2}$

$f(2)=M$에서

$M=2^{4-1}+k=8+\dfrac{7}{2}=\dfrac{23}{2}$

$\therefore k+M=\dfrac{7}{2}+\dfrac{23}{2}=15$ 답 15

BLACKLABEL 특강 참고

$f(x)=2^{2x-1}+\dfrac{7}{2}=4^{x-\frac{1}{2}}+\dfrac{7}{2}$

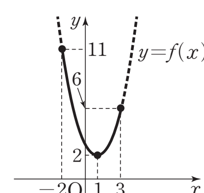
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\dfrac{7}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

08 $y=2^{x^2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-3}=2^{x^2}\times 2^{-2x+3}=2^{x^2-2x+3}$

함수 $y=2^{x^2-2x+3}$에서 $f(x)=x^2-2x+3$이라 하면

$f(x)=(x-1)^2+2$

$-2\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값 11, $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.



이때 함수 $y=2^{f(x)}$은 $(\text{밑})=2>1$이므로 $f(x)$가 최댓값을 가질 때 y도 최댓값을 갖고, $f(x)$가 최솟값을 가질 때 y도 최솟값을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2^{11}, 최솟값은 2^2이므로 그 곱은

$2^{11}\times 2^2=2^{13}=2^k$

$\therefore k=13$ 답 13

09 $y=9^x-2\times 3^{x+1}+7=(3^x)^2-6\times 3^x+7$

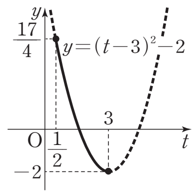
$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$

이때 $\log_3\dfrac{1}{2}\le x\le 1$에서

$\dfrac{1}{2}\le 3^x\le 3$ $\therefore \dfrac{1}{2}\le t\le 3$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le 3$에서 함수 $y=(t-3)^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=(t-3)^2-2$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{17}{4}$, $t=3$일 때 최솟값 -2를 갖는다.



즉, $M=\frac{17}{4}$, $m=-2$이므로

$M+m=\frac{17}{4}-2=\frac{9}{4}$ 답 ④

10 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점이 각각 P, Q이므로

$\mathrm{P}(a,\ 2^{-a+3}+4)$, $\mathrm{Q}(a,\ -2^{a-5}-3)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$

이때 $2^{-a+3}>0$, $2^{a-5}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}&=7+2^{-a+3}+2^{a-5}\\&\ge 7+2\sqrt{2^{-a+3}\times 2^{a-5}}\ (\text{단, 등호는 } a=4\text{일 때 성립})\\&=7+2\sqrt{2^{-2}}\\&=7+2\times\frac{1}{2}\\&=8\end{aligned}$$

즉, 선분 PQ의 길이의 최솟값은 8이다.

따라서 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이므로 정사각형의 넓이의 최솟값은

$(4\sqrt{2})^2=32$ 답 ②

11 $\frac{5^{x^2-x}}{5^{2x-1}}=25$에서

$5^{x^2-x-(2x-1)}=5^2$, $5^{x^2-3x+1}=5^2$

$x^2-3x+1=2\quad \therefore x^2-3x-1=0$

이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times(-1)=13>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=3^2-2\times(-1)=11\end{aligned}$$ 답 ⑤

12 $4^{x+1}-6\times 2^{x+2}+32=0$에서

$4\times(2^x)^2-24\times 2^x+32=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2-24t+32=0$

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉, $2^x=2$ 또는 $2^x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$4^\alpha+4^\beta=4+16=20$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$4^{x+1}-6\times 2^{x+2}+32=0$에서

$4\times(2^x)^2-24\times 2^x+32=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$4t^2-24t+32=0$, $t^2-6t+8=0$ ······㉠

한편, 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 2^α, 2^β이다.

이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=6$, $2^\alpha\times 2^\beta=8$

$$\begin{aligned}\therefore 4^\alpha+4^\beta&=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\times 2^\alpha\times 2^\beta\\&=6^2-2\times 8=20\end{aligned}$$

13 방정식 $(2x-1)^{x-3}=11^{x-3}$에서 지수가 같으므로 이 방정식이 성립하려면

(i) 밑이 같은 경우

$2x-1=11$에서 $2x=12\quad \therefore x=6$

(ii) (지수)$=0$인 경우

$x-3=0$에서 $x=3$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $6+3=9$ 답 ②

14 $\begin{cases}81^{2x}+81^{2y}=36\\ 81^{x+y}=9\sqrt{3}\end{cases}$에서

$81^{2x}=X\ (X>0)$, $81^{2y}=Y\ (Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}X+Y=36\\ \sqrt{XY}=9\sqrt{3}\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}X+Y=36\\ XY=243\end{cases}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 X, Y는 이차방정식 $t^2-36t+243=0$의 두 근이므로

$(t-9)(t-27)=0$

$\therefore t=9$ 또는 $t=27$

$\therefore X=9$, $Y=27$ 또는 $X=27$, $Y=9$

(i) $X=9$, $Y=27$일 때,

$81^{2x}=9$, $81^{2y}=27$이므로

$(3^4)^{2x}=3^2$, $(3^4)^{2y}=3^3$

$3^{8x}=3^2$, $3^{8y}=3^3$

밑이 3으로 같으므로 $8x=2$, $8y=3$

$\therefore x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{3}{8}$

(ii) $X=27$, $Y=9$일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면

$x=\frac{3}{8}$, $y=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $A=xy=\frac{3}{32}$이므로

$64A=64\times\frac{3}{32}=6$ 답 6

15 $4^x=2^{x+1}+k$에서 $(2^x)^2-2\times2^x-k=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-k=0$ ……㉠

이때 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 판별식 $D>0$ (ii) (두 근의 합)>0 (iii) (두 근의 곱)>0

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+k>0$ $\therefore k>-1$

(ii) (두 근의 합)$=2>0$이므로 항상 성립한다.

(iii) (두 근의 곱)>0이므로

$-k>0$ $\therefore k<0$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$-1<k<0$ **답** $-1<k<0$

16 부등식 $(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$이 성립하려면

$\begin{cases}2^x-32>0\\ \frac{1}{3^x}-27>0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}2^x-32<0\\ \frac{1}{3^x}-27<0\end{cases}$

(i) $\begin{cases}2^x-32>0 & \cdots\cdots㉠\\ \frac{1}{3^x}-27>0 & \cdots\cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $2^x>32$이므로

$2^x>2^5$ $\therefore x>5$

㉡에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>27$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $\therefore x<-3$

㉠, ㉡을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같다.

즉, ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값은 없다.

(ii) $\begin{cases}2^x-32<0 & \cdots\cdots㉢\\ \frac{1}{3^x}-27<0 & \cdots\cdots㉣\end{cases}$

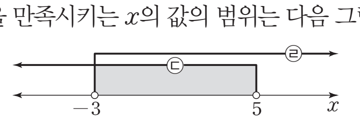
㉢에서 $2^x<32$이므로

$2^x<2^5$ $\therefore x<5$

㉣에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x<27$이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $\therefore x>-3$

㉢, ㉣을 만족시키는 x의 값의 범위는 다음 그림과 같다.



즉, ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

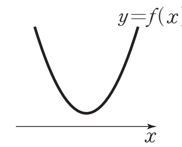
$-3<x<5$

(i), (ii)에서 지수부등식 $(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는 $-3<x<5$이므로 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$의 7개이다. **답** ①

17 x에 대한 이차부등식 $x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$f(x)=x^2-2(2^a+1)x-3(2^a-5)$

라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2^a+1)^2+3(2^a-5)<0$에서

$(2^a)^2+5\times2^a-14<0$

이때 $2^a=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2+5t-14<0$

$(t+7)(t-2)<0$ $\therefore -7<t<2$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<2$에서 $0<2^a<2^1$

(밑)$=2>1$이므로 $a<1$ **답** $a<1$

18 (i) $0<x^2-3x+3<1$일 때,

$0<x^2-3x+3$에서

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$x^2-3x+3<1$에서

$x^2-3x+2<0$, $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

이때 주어진 부등식에서 $0<$(밑)<1이므로

$2x-4>x+5$ $\therefore x>9$

그런데 $1<x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $x^2-3x+3=1$일 때,

$1<1$이므로 주어진 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 해는 없다.

(iii) $x^2-3x+3>1$일 때,

$x^2-3x+2>0$, $(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$

이때 주어진 부등식에서 (밑)>1이므로

$2x-4<x+5$ $\therefore x<9$

따라서 주어진 범위에서 부등식의 해는

$x<1$ 또는 $2<x<9$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<1$ 또는 $2<x<9$

따라서 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$ **답** 33

19 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}+2-k>0$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^x\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+2-k>0$

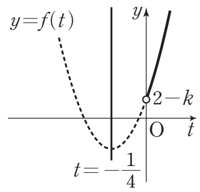
$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+16\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+2-k>0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$16t^2+8t+2-k>0$ ……㉠

$f(t)=16t^2+8t+2-k$

$=16\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+1-k$



라 하면 $t>0$에서 이차부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $f(0)=2-k\geq 0$이어야 하므로

$k\leq 2$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 2이다. **답** ⑤

20

$n=C_dC_g10^{\frac{4}{5}(x-9)}$에

$C_g=2,\ C_d=\frac{1}{4},\ x=a,\ n=\frac{1}{200}$을 대입하면

$\frac{1}{200}=\frac{1}{4}\times 2\times 10^{\frac{4}{5}(a-9)}$

$10^{\frac{4}{5}(a-9)}=\frac{1}{100},\ 10^{\frac{4}{5}(a-9)}=10^{-2}$

즉, $\frac{4}{5}(a-9)=-2$이므로 $a-9=-\frac{5}{2}$

$\therefore a=\frac{13}{2}$ **답** ④

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.33~37

01 ③	02 ④	03 16	04 2	05 310
06 ⑤	07 ④	08 ③	09 ②	10 ⑤
11 ③	12 ③	13 8	14 3	15 16
16 $\frac{27}{64}$	17 ①	18 ①	19 100	20 35
21 ④	22 ②	23 7	24 19	
25 $-\frac{7}{3}\leq k\leq 14$		26 163	27 ③	28 -3
29 19	30 36일			

01

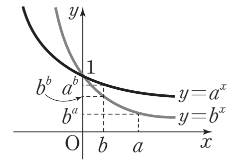
부등식 $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^1<\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b<1=\left(\frac{1}{3}\right)^0$에서

$(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이므로 $0<b<a<1$

ㄱ. $0<(\text{밑})=a<1$이므로 $y=a^x$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. 즉, y의 값이 증가하면 x의 값은 감소한다.
따라서 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여
$a^{x_1}<a^{x_2}$이면 $x_1>x_2$이다. (참)

ㄴ. $a^x<b^x$에 $x=1$을 대입하면 $a<b$이므로 $0<b<a<1$에 모순이다. (거짓)

ㄷ. $0<b<a<1$일 때 두 지수함수 $y=a^x,\ y=b^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $a>b$이므로
$b^a<b^b<a^b$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

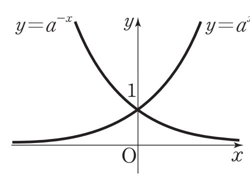
02

$f(x)=a^x\ (a>1)$에 대하여

ㄱ. $2f(x)=15f(x+1)-f(x-1)$에서
$2a^x=15a^{x+1}-a^{x-1}$
$a^x>0$이므로 위의 식의 양변을 a^x으로 나누면
$2=15a-\frac{1}{a}$
$15a^2-2a-1=0\ (\because a>1)$
$(5a+1)(3a-1)=0$
$\therefore a=-\frac{1}{5}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$
그런데 $a>1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=a^x>0,\ f(-x)=a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$f(x)+f(-x)$
$=a^x+a^{-x}$
$\geq 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)
$=2$ (참)

ㄷ. $f(|x|)-\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$
$=a^{|x|}-\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$
$=a^{|x|}-\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}a^{-x}$ ……㉠
또한, $a>1$일 때 두 함수 $y=a^x,\ y=a^{-x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $x<0$일 때,
$a^{|x|}=a^{-x}$이고, 위의 그림에서 $x<0$일 때 함수 $y=a^{-x}$의 그래프가 함수 $y=a^x$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $a^{-x}>a^x$
즉, ㉠에서
$a^{-x}-\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}a^{-x}=\frac{1}{2}a^{-x}-\frac{1}{2}a^x>0$
$\therefore f(|x|)>\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

(ii) $x\geq 0$일 때,
$a^{|x|}=a^x$이고, 위의 그림에서 $x\geq 0$일 때 함수 $y=a^x$의 그래프가 함수 $y=a^{-x}$의 그래프보다 위쪽에 있거나 그래프와 만나므로 $a^x\geq a^{-x}$

즉, ㉠에서

$$a^x-\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}a^{-x}=\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}a^{-x}\geq 0$$

$$\therefore f(|x|)\geq\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$$

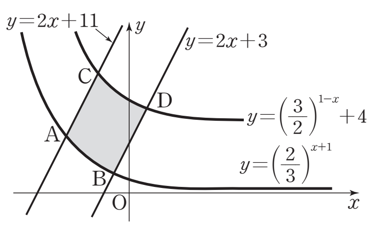
(i), (ii)에서

$f(|x|)\geq\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$ (참)

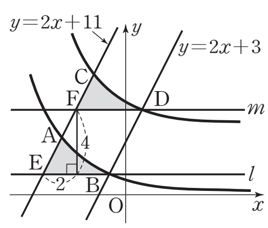
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ④

03 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+4=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}+4$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

두 곡선 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$, $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+4$와 두 직선 $y=2x+3$, $y=2x+11$의 네 교점을 A, B, C, D라 하고, 이 두 곡선과 두 직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 두 점 A, B를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 각각 점 C, 점 D가 된다.
또한, 다음 그림과 같이 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선을 l, 점 D를 지나고 x축과 평행한 직선을 m이라 하고 두 직선 l, $y=2x+11$의 교점을 E, 두 직선 m과 $y=2x+11$의 교점을 F라 하자.

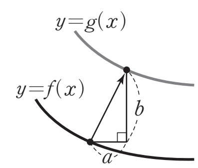


이때 점 E를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 점 F가 되므로 위의 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 같다.

즉, 두 곡선 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$, $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+4$와 두 직선 $y=2x+3$, $y=2x+11$로 둘러싸인 도형의 넓이는 평행사변형 FEBD의 넓이와 같다.
이때 $y=2x+11=2(x+4)+3$이므로 직선 $y=2x+11$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 직선 $y=2x+3$이 된다.
$\therefore \overline{EB}=4$
따라서 구하는 도형의 넓이는
$4\times4=16$ **답** 16

BLACKLABEL 특강 참고

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 될 때, 기울기가 $\frac{b}{a}$인 직선과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점도 같은 평행이동 관계에 있다.



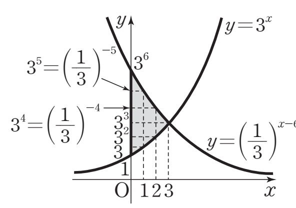
04 함수 $f(x)=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=a^{x-m}$
이 그래프가 점 $(n, 8)$을 지나면
$8=a^{n-m}$ ……㉠
또한, 함수 $y=a^{x-m}$의 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 a^{-m}이므로 $b_n=a^{-m}$
위의 식을 ㉠에 대입하면 $8=a^nb_n$

$$\therefore b_n=8\times\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \log b_1+\log b_2+\log b_3+\log b_4+\log b_5&=\log(b_1\times b_2\times b_3\times b_4\times b_5)\\&=\log\left\{8^5\times\left(\frac{1}{a}\right)^{1+2+3+4+5}\right\}\\&=\log\left\{2^{15}\times\left(\frac{1}{a}\right)^{15}\right\}=\log\left(\frac{2}{a}\right)^{15}=0\end{aligned}$$

즉, $\left(\frac{2}{a}\right)^{15}=1$이므로 $\frac{2}{a}=1$ $\quad\therefore a=2$ **답** 2

05 두 곡선 $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$과 y축으로 둘러싸인 도형 A를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.



이때 두 곡선의 교점의 x좌표는 방정식 $3^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$, 즉 $3^x=3^{-x+6}$의 근과 같다.
밑이 3으로 같으므로
$x=-x+6$, $2x=6$ $\quad\therefore x=3$
따라서 두 곡선의 교점의 좌표는 $(3, 3^3)$이므로 자연수 a의 값으로 가능한 것은 1 또는 2이다.

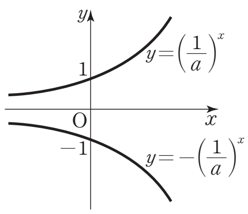
(i) $a=1$일 때,
$3<b<3^5$이므로 b의 개수는
$3^5-3-1=243-3-1=239$

(ii) $a=2$일 때,
$3^2<b<3^4$이므로 b의 개수는
$3^4-3^2-1=81-9-1=71$

(i), (ii)에서 영역 A의 내부에 속하는 점 (a, b)의 개수는
$239+71=310$ **답** 310

06

주어진 함수 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 함수 $-y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$, 즉 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프이므로 주어진 함수 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프와 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

$\frac{1}{a}>1 \qquad \therefore 0<a<1 \ (\because a>0)$

함수 $y=\left(-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}\right)^{x-1}-5$에서

$-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}=b$라 하면

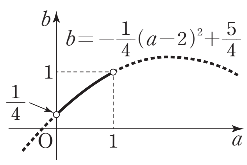
$y=b^{x-1}-5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때

$b=-\frac{1}{4}a^2+a+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(a^2-4a+4)+\frac{5}{4}$

$\quad =-\frac{1}{4}(a-2)^2+\frac{5}{4}$

$0<a<1$에서 함수 $b=-\frac{1}{4}(a-2)^2+\frac{5}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $\frac{1}{4}<b<1$이므로 함수 ㉠의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, 함수 $y=b^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

또한, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=b^{-1}-5=\frac{1}{b}-5$

이때 $\frac{1}{4}<b<1$에서 $1<\frac{1}{b}<4$이므로

$-4<\frac{1}{b}-5<-1$

따라서 함수 ㉠의 그래프와 y축의 교점의 y좌표는 -4보다 크고 -1보다 작은 값이므로 개형으로 알맞은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

07

두 점 P, Q의 x좌표의 비가 $1:2$이므로 점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 점 Q의 x좌표는 $2a$이다.

점 P는 두 함수 $y=k\times 3^x$, $y=3^{-x}$의 그래프의 교점이므로

$k\times 3^a=3^{-a} \qquad \therefore 3^{2a}=\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, 점 Q는 두 함수 $y=k\times 3^x$, $y=-4\times 3^x+8$의 그래프의 교점이므로

$k\times 3^{2a}=-4\times 3^{2a}+8$

위의 식의 양변에 ㉠을 대입하면

$k\times\frac{1}{k}=-4\times\frac{1}{k}+8,\ 1=-\frac{4}{k}+8$

$\frac{4}{k}=7,\ 7k=4$

$\therefore 35k=20$

답 ④

• 다른 풀이 •

점 P의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면 $3^{-p}=k\times 3^p$에서

$3^{2p}=\frac{1}{k},\ 2p=\log_3\frac{1}{k} \qquad \therefore p=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{k}$

점 Q의 x좌표를 $q\ (q>0)$라 하면 $-4\times 3^q+8=k\times 3^q$에서

$(k+4)3^q=8,\ 3^q=\frac{8}{k+4}$

$\therefore q=\log_3\frac{8}{k+4}$

이때 두 점 P, Q의 x좌표의 비가 $1:2$이므로

$p:q=1:2$

즉, $\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{k}:\log_3\frac{8}{k+4}=1:2$

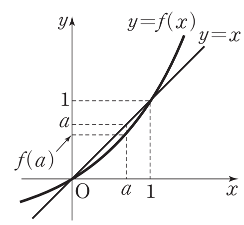
$\log_3\frac{8}{k+4}=\log_3\frac{1}{k}$

$\frac{8}{k+4}=\frac{1}{k},\ k+4=8k$

$7k=4 \qquad \therefore 35k=20$

08

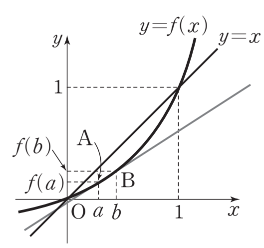
ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,\ 1)$에서 만나므로 오른쪽 그림에서 $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다. (참)



ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))\ (0<a<b)$에 대하여 직선 AB의 기울기는

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$

한편, $0<a<b<1$일 때 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작은 경우가 존재한다.



즉, $\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$에서 $b-a>2^b-2^a$ (거짓)

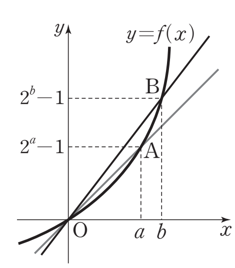
ㄷ. $0<a<b$일 때 오른쪽 그림에서 원점 O에 대하여

(직선 OA의 기울기)

$\quad$<(직선 OB의 기울기)

이므로

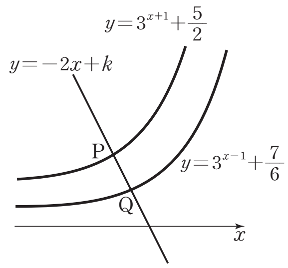
$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$



$\therefore b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

09



두 점 P, Q가 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면

$\mathrm{P}(p,\ -2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ -2q+k)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(q-p)^2+(-2q+k+2p-k)^2}=\sqrt{5}$

$\sqrt{5(q-p)^2}=\sqrt{5}$

$q-p=1$ ($\because p<q$) $\quad \therefore q=p+1$

$\therefore \mathrm{Q}(p+1,\ -2(p+1)+k)$

한편, 두 점 P, Q는 각각 두 곡선 $y=3^{x+1}+\frac{5}{2}$,

$y=3^{x-1}+\frac{7}{6}$ 위에 있으므로

$-2p+k=3^{p+1}+\frac{5}{2}$ ……㉠

$-2(p+1)+k=3^p+\frac{7}{6}$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$3^{p+1}-3^p+\frac{4}{3}=2$

$2\times3^p=\frac{2}{3}$, $3^p=\frac{1}{3}$

$\therefore p=-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$2+k=1+\frac{5}{2} \quad \therefore k=\frac{3}{2}$ 답 ②

•다른 풀이•

점 P를 지나고 x축과 수직인 직선과 점 Q를 지나고 y축과 수직인 직선이 만나는 점을 R이라 하자.

두 점 P, Q가 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로

$\overline{\mathrm{QR}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=2a$이다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 PRQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+(2a)^2=(\sqrt{5})^2$

$5a^2=5 \quad \therefore a=1$ ($\because a>0$)

즉, 점 P의 x좌표를 p라 하면 점 Q의 x좌표는 $p+1$이고 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}\left(p,\ 3^{p+1}+\frac{5}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(p+1,\ 3^p+\frac{7}{6}\right)$

한편, $\overline{\mathrm{PR}}=2$이므로

$3^{p+1}+\frac{5}{2}-\left(3^p+\frac{7}{6}\right)=2$

$3^{p+1}-3^p=\frac{2}{3}$, $2\times3^p=\frac{2}{3}$

$3^p=\frac{1}{3} \quad \therefore p=-1$

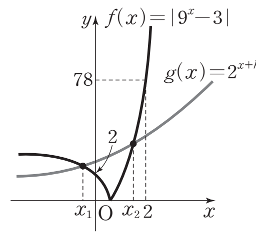
따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이고 점 Q는 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로

$\frac{3}{2}=-2\times0+k \quad \therefore k=\frac{3}{2}$

10

$f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 x_1, x_2 $(x_1<0<x_2<2)$이므로 다음 그림과 같다.



$x_1<0$이므로 $f(0)<g(0)$

$\therefore 2<2^k$ ……㉠

또한, $0<x_2<2$이므로 $f(2)>g(2)$에서

$78>2^{2+k}$, $2^k<\frac{78}{4}$

$\therefore 2^k<\frac{39}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2<2^k<\frac{39}{2}$

이때 $2^4=16<\frac{39}{2}<2^5=32$이므로 조건을 만족시키는 자연수 k는 2, 3, 4이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

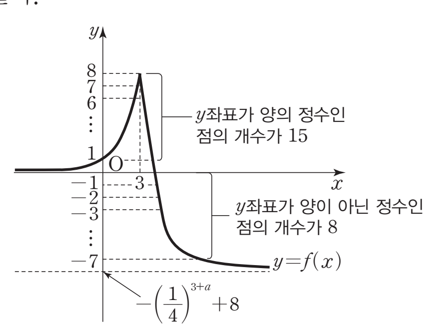
$2+3+4=9$ 답 ⑤

11

$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하자.

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고, 곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $g(3)=2^3=8$이므로 y좌표가 양의 정수인 점의 개수는 $8+7=15$이다.

따라서 y좌표가 양이 아닌 정수인 점의 개수는

$23-15=8$이므로

$-8\le -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le 16,\ 4^1<15<4^{-3-a}\le 4^2$

(밑)$=4>1$이므로

$1<-3-a\le 2 \qquad \therefore -5\le a<-4$

그러므로 구하는 정수 a의 값은 -5이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 필수 개념

지수함수 $y=a^{x-m}+n\ (a>0,\ a\ne 1)$의 그래프

지수함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,y>n\}$이다.

(2) 직선 $y=n$을 점근선으로 갖는다.

(3) a의 값에 관계없이 항상 점 $(m,\ 1+n)$을 지난다.

12 ㄱ. $a>0$일 때, $f(a)=3^a>1$

$b<0$일 때, $g(b)=\left(\frac{1}{2}\right)^b=2^{-b}>1$

이때 $a>0,\ b<0$이면 두 점 $(a,\ f(a)),\ (b,\ g(b))$를 지나는 직선의 y절편은 항상 $f(a)$와 $g(b)$ 사이에 존재하므로 1보다 크다. (참)

ㄴ. 직선 l이 y축과 평행하므로 $a=b$이고,

$a>0$이므로

$f(a)+g(b)=f(a)+g(a)$

$=3^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a$

$>2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a$

$>2\sqrt{2^a\times\left(\frac{1}{2}\right)^a}$

$=2$

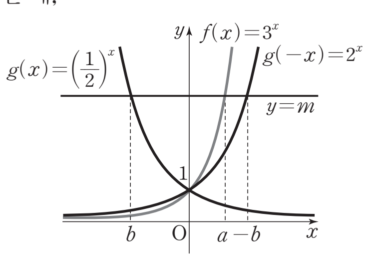
$2^a>0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다. 이때 $a>0$이므로 등호는 성립하지 않는다.

$\therefore \frac{f(a)+g(b)}{2}>1$ (참)

ㄷ. 직선 l이 x축과 평행하므로 직선 l의 방정식을 $y=m$ $(m\ne 1)$이라 하면 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$에 대하여

$\because a\ne b$

(i) $m>1$일 때,

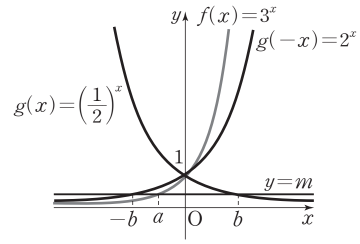


위의 그림에서 $b<0<a$이고,

$3^a=\left(\frac{1}{2}\right)^b=m$이므로 $3^a=2^{-b}$에서 $a<-b$

$\therefore a+b<0$

(ii) $m<1$일 때,



위의 그림에서 $a<0<b$이고,

$3^a=\left(\frac{1}{2}\right)^b=m$이므로 $3^a=2^{-b}$에서 $a>-b$

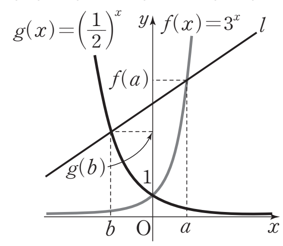
$\therefore a+b>0$

(i), (ii)에서 항상 $a+b<0$인 것은 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄱ. $g(b)<f(a)$라 하면 직선 l은 다음 그림과 같다.



이때 직선 l의 y절편은 $g(b)$보다 크고 $f(a)$보다 작은 값이다.

$f(a)<g(b)$일 때도 같은 방법으로 직선 l을 그려보면 y절편이 $f(a)$보다 크고 $g(b)$보다 작은 값이다.

따라서 직선 l의 y절편은 $f(a)$와 $g(b)$ 사이에 존재한다.

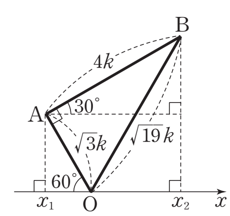
13 $\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$이므로 $\overline{OA}=\sqrt{3}k\ (k>0)$라 하면

$\overline{OB}=\sqrt{19}k$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{19k^2-3k^2}=4k$

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$라 하자.

직선 OA의 기울기는 $-\sqrt{3}$이므로 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기는 60°이다.



$\therefore x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ y_1=\frac{3}{2}k$

$\therefore A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{3}{2}k\right)$

$\overline{AB}\perp\overline{OA}$에서 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기는 30°이다.

이때 $\overline{AB}=4k$이므로

$x_2-x_1=4k\cos 30^\circ=2\sqrt{3}k$에서

$x_2=x_1+2\sqrt{3}k=-\frac{\sqrt{3}}{2}k+2\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$

$y_2-y_1=4k\sin 30^\circ=2k$에서

$y_2=y_1+2k=\frac{3}{2}k+2k=\frac{7}{2}k$

$\therefore B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k,\ \frac{7}{2}k\right)$

한편, 점 A는 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 위에 있으므로

$\frac{3}{2}k=a^{\sqrt{3k}}-1$에서 $\frac{3k+2}{2}=a^{\sqrt{3k}}$ ……㉠

점 B는 곡선 $y=a^{x}-1$ 위에 있으므로

$\frac{7}{2}k=a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}-1$에서 $\frac{7k+2}{2}=a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^{3}=\left(\frac{7k+2}{2}\right)^{2}$

$27k^{3}-44k^{2}-20k=0$, $k(k-2)(27k+10)=0$

이때 $k>0$이므로 $k=2$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=4k=8$ 답 8

14 점 A의 x좌표는 a이고, 점 A는 함수 $y=2^{x}$의 그래프 위에 있으므로

$\mathrm{A}(a,\ 2^{a})$ $\therefore b=2^{a}$

즉, 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같고, 점 B는 함수 $y=4^{x}$의 그래프 위에 있으므로 점 B의 x좌표는

$4^{x}=2^{a}$에서 $2^{2x}=2^{a}$ $\therefore x=\frac{a}{2}$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ 2^{a}\right)$

점 C의 x좌표는 a이고, 점 C는 함수 $y=4^{x}$의 그래프 위에 있으므로

$\mathrm{C}(a,\ 4^{a})$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 42이므로

$\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{a}{2}\right)\times(4^{a}-2^{a})=42$, $\frac{a}{4}(4^{a}-2^{a})=42$

$\therefore a(4^{a}-2^{a})=168$

$=2^{3}\times3\times7$

$=3\times(4^{3}-2^{3})$

자연수라는 조건 없이도 삼각형 ABC의 넓이가 42가 되도록 하는 실수 a의 값은 3뿐이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 3이다. 답 3

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$168=a(4^{a}-2^{a})$에서

$a(4^{a}-2^{a})=a(2^{2a}-2^{a})=a\times2^{a}\times(2^{a}-1)$이고

2^{a}와 $2^{a}-1$은 서로 이웃하는 자연수이므로 168을 이웃하는 두 자연수가 포함된 세 수의 곱으로 나타낸 경우는 다음과 같다.

$3\times8\times7$, $4\times7\times6$

이때 2^{a}은 짝수, $2^{a}-1$은 홀수이므로 조건을 만족시키는 경우는

$a\times2^{a}\times(2^{a}-1)=3\times8\times7$에서 $a=3$이다.

15 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=a^{x}$ 모두 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 점 P의 좌표는 $(0,\ 1)$

곡선 $y=2^{x}$ 위의 점 Q의 좌표를 $(q,\ 4)$라 하면

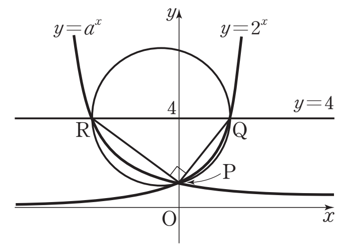
$2^{q}=4$ $\therefore q=2$

$\therefore \mathrm{Q}(2,\ 4)$

곡선 $y=a^{x}$ 위의 점 R의 좌표를 $(r,\ 4)$라 하면

$a^{r}=4$ $\therefore r=\log_{a}4$

$\therefore \mathrm{R}(\log_{a}4,\ 4)$



선분 QR을 지름으로 하는 원이 점 P를 지나므로 두 선분 PQ, PR은 서로 수직이다.*

이때 직선 PQ의 기울기는 $\frac{4-1}{2-0}=\frac{3}{2}$이고, 직선 PR의 기울기는 $\frac{4-1}{\log_{a}4-0}=\frac{3}{\log_{a}4}$이므로

$\frac{3}{2}\times\frac{3}{\log_{a}4}=-1$

$2\log_{a}4=-9$, $a^{-9}=4^{2}$

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{9}=16$ 답 16

• 다른 풀이 •

*에서 직선 $y=4$와 y축이 만나는 점을 S라 하면

두 직각삼각형 PSR, QSP에서 $\angle\mathrm{PRS}=\angle\mathrm{QPS}$이므로

$\triangle\mathrm{PSR}\backsim\triangle\mathrm{QSP}$ (AA 닮음)

이때 $\overline{\mathrm{PS}}:\overline{\mathrm{SR}}=\overline{\mathrm{QS}}:\overline{\mathrm{PS}}$에서 $\overline{\mathrm{PS}}^{2}=\overline{\mathrm{SR}}\times\overline{\mathrm{QS}}$

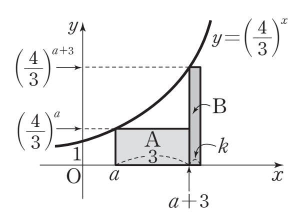
$\overline{\mathrm{PS}}=3$, $\overline{\mathrm{QS}}=2$이므로

$2\overline{\mathrm{SR}}=9$ $\therefore \overline{\mathrm{SR}}=\frac{9}{2}$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(-\frac{9}{2},\ 4\right)$이고 점 R은 곡선 $y=a^{x}$ 위에 있으므로 $4=a^{-\frac{9}{2}}$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{9}{2}}=4$ $\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{9}=16$

16 오른쪽 그림과 같이 x축 위에 있는 직사각형 A의 두 꼭짓점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(a+3,\ 0)$이라 하면 직사각형 A의 가로, 세로의 길이는 각각 3, $\left(\frac{4}{3}\right)^{a}$이고, 직사각형 B의 세로의 길이는 $\left(\frac{4}{3}\right)^{a+3}$이다.



이때 직사각형 B의 가로의 길이를 k라 하면 직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 3배이므로

$3\times k\times\left(\frac{4}{3}\right)^{a+3}=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{a}$

$k\times\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=1$

$\therefore k=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{27}{64}$

따라서 직사각형 B의 가로의 길이는 $\frac{27}{64}$이다. 답 $\frac{27}{64}$

단계	채점 기준	배점
(가)	x축 위에 있는 직사각형 A의 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 a, $a+3$으로 놓고 두 직사각형 A, B의 세로의 길이를 각각 구한 경우	40%
(나)	직사각형 B의 가로의 길이를 k로 놓고 직사각형 A의 넓이가 직사각형 B의 넓이의 3배임을 이용하여 방정식을 세운 경우	30%
(다)	직사각형 B의 가로의 길이를 구한 경우	30%

17 $y=2^{2x-a}-4^{-a}\times 2^{x+1}+6$

$=2^{-a}\times(2^x)^2-2^{-2a+1}\times 2^x+6$

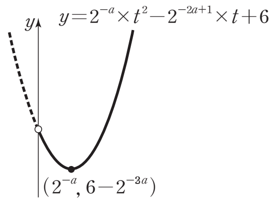
$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=2^{-a}\times t^2-2^{-2a+1}\times t+6$

$=2^{-a}(t^2-2^{-a+1}\times t)+6$

$=2^{-a}(t-2^{-a})^2+6-2^{-3a}$

이때 $2^{-a}>0$이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 함수는 $t>0$에서 $t=2^{-a}$, 즉 $x=-a$일 때 최솟값 $6-2^{-3a}$을 갖는다.

$-a=2$이므로 $a=-2$

$\therefore b=6-2^6=-58$

$\therefore ab=(-2)\times(-58)=116$ 답 ①

18 $y=a^{2x}-2a^{x-2}+10$

$=(a^x)^2-\dfrac{2}{a^2}\times a^x+10$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-\dfrac{2}{a^2}t+10$

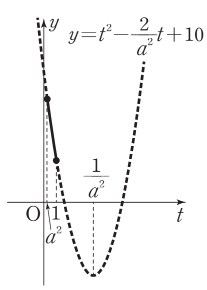
$=\left(t-\dfrac{1}{a^2}\right)^2+10-\dfrac{1}{a^4}$

$0\le x\le 2$이고 $0<a<1$이므로

$a^2\le t\le 1$

이때 $\dfrac{1}{a^2}>1$이므로 $a^2\le t\le 1$에서

함수 $y=\left(t-\dfrac{1}{a^2}\right)^2+10-\dfrac{1}{a^4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$t=a^2$일 때 최댓값

$a^4-2+10=a^4+8$,

$t=1$일 때 최솟값

$1-\dfrac{2}{a^2}+10=11-\dfrac{2}{a^2}$를 갖는다.

즉, $11-\dfrac{2}{a^2}=3$이므로

$\dfrac{2}{a^2}=8$, $a^2=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because 0<a<1)$

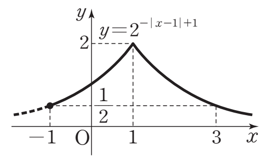
따라서 $t=a^2=\dfrac{1}{4}$일 때 구하는 최댓값은

$a^4+8=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+8=\dfrac{1}{16}+8=\dfrac{129}{16}$ 답 ①

19 $y=2^{-|x-1|+1}$

$=\begin{cases} 2^x & (x<1) \\ 2^{-x+2} & (x\ge 1)\end{cases}$

이므로 함수 $y=2^{-|x-1|+1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $a<1$일 때,

$-1\le x\le a$에서

$x=a$일 때, 최댓값은 $M=2^a$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $m=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

$M+m=\dfrac{33}{16}$에서 $2^a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{33}{16}$

$2^a=\dfrac{25}{16}$ $\quad\therefore a=\log_2\dfrac{25}{16}$

(ii) $1\le a\le 3$일 때,

$-1\le x\le a$에서

$x=1$일 때, 최댓값은 $M=2$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $m=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

$M+m=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>3$일 때,

$-1\le x\le a$에서

$x=1$일 때, 최댓값은 $M=2$

$x=a$일 때, 최솟값은 $m=2^{-a+2}$

$M+m=\dfrac{33}{16}$에서 $2+2^{-a+2}=\dfrac{33}{16}$

$2^{-a+2}=\dfrac{1}{16}$, $2^{-a+2}=2^{-4}$

밑이 2로 같으므로

$-a+2=-4$ $\quad\therefore a=6$

(i), (ii), (iii)에서 $a=\log_2\dfrac{25}{16}$ 또는 $a=6$이므로

$k=\log_2\dfrac{25}{16}+6$

$=\log_2\dfrac{25}{16}+\log_2 2^6=\log_2\left(\dfrac{25}{16}\times 2^6\right)$

$=\log_2(25\times 4)=\log_2 100$

$\therefore 2^k=2^{\log_2 100}=100^{\log_2 2}=100$ 답 100

20 색칠된 도형의 넓이를 S라 하면 S는 두 삼각형 ABC, ABD의 넓이의 차와 같으므로

$S=(\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이$)-(\triangle\mathrm{ABD}$의 넓이$)$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times($두 삼각형의 높이의 차$)$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}\times(b-a)\times\overline{\mathrm{CD}}$ ……㉠

이때 S가 최댓값을 가지려면 선분 CD의 길이가 최대이어야 한다.

$C(t,\ 2-2^{t-1})$, $D\left(t,\ \dfrac{2^t+2^{-t}}{2}\right)$이므로

$$\overline{CD}=2-2^{t-1}-\frac{2^t+2^{-t}}{2}$$
$$=2-2^{t-1}-2^{t-1}-2^{-t-1}$$
$$=2-2^t-2^{-t-1}$$
$$=2-(2^t+2^{-t-1})$$

$2^t>0$, $2^{-t-1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^t+2^{-t-1}\ge 2\sqrt{2^t\times 2^{-t-1}}\ \left(\text{단, 등호는 } t=-\frac{1}{2}\text{일 때 성립}\right)$$
$$=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ \overline{CD}=2-(2^t+2^{-t-1})\le 2-\sqrt{2}$

즉, 선분 CD의 길이의 최댓값이 $2-\sqrt{2}$이므로 ㉠에서 구하는 넓이 S의 최댓값은

$$\frac{1}{2}(b-a)(2-\sqrt{2})=k(b-a)$$

따라서 $k=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$70(k-1)^2=70\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$=70\times\frac{1}{2}=35$$

답 35

21 해결단계

❶ 단계	$0<a<1$일 때, $-1\le x\le 2$에서의 두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값을 각각 구한 후, 이 값이 같도록 하는 a의 값을 구한다.
❷ 단계	$a>1$일 때, $-1\le x\le 2$에서의 두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값을 각각 구한 후, 이 값이 같도록 하는 a의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 a의 값을 이용하여 α, β의 값을 각각 구한 후, $\log_5\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값을 구한다.

$f(x)=-2x^2+4x+3$, $g(x)=a^x$이므로

$f(g(x))=-2a^{2x}+4a^x+3$

$g(f(x))=a^{-2x^2+4x+3}$

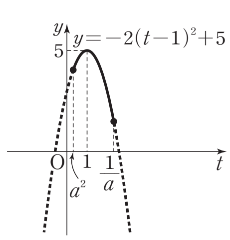
(i) $0<a<1$일 때,

$f(g(x))=-2(a^x)^2+4a^x+3$에서 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$-1\le x\le 2$에서 $a^2\le t\le\dfrac{1}{a}$이고 $y=f(g(x))$에서

$$y=-2t^2+4t+3$$
$$=-2(t^2-2t+1)+5$$
$$=-2(t-1)^2+5$$

이때 $0<a^2<1$, $\dfrac{1}{a}>1$이므로 함수 $y=-2(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(g(x))$의 최댓값은 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 5이다.

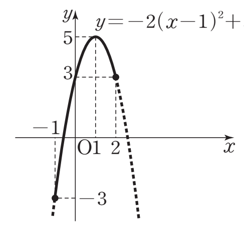


한편,

$g(f(x))=a^{-2x^2+4x+3}=a^{-2(x-1)^2+5}$

에서 $0<a<1$이므로 지수인 $-2(x-1)^2+5$가 최솟값을 가질 때, 함수 $y=g(f(x))$가 최댓값을 갖는다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=-2(x-1)^2+5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은 $x=-1$일 때 -3이고, 함수 $y=g(f(x))$의 최댓값은 a^{-3}이다.



두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값이 같아야 하므로

$$a^{-3}=5 \qquad \therefore\ a=5^{-\frac{1}{3}}$$

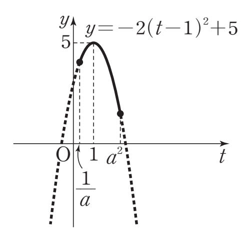
(ii) $a>1$일 때,

$f(g(x))=-2(a^x)^2+4a^x+3$에서 $a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$-1\le x\le 2$에서 $\dfrac{1}{a}\le t\le a^2$이고 $y=f(g(x))$에서

$$y=-2t^2+4t+3$$
$$=-2(t^2-2t+1)+5$$
$$=-2(t-1)^2+5$$

이때 $0<\dfrac{1}{a}<1$, $a^2>1$이므로 함수 $y=-2(t-1)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=f(g(x))$의 최댓값은 $t=1$, 즉 $x=0$일 때 5이다.

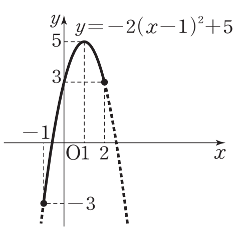


한편,

$g(f(x))=a^{-2x^2+4x+3}=a^{-2(x-1)^2+5}$

에서 $a>1$이므로 지수인 $-2(x-1)^2+5$가 최댓값을 가질 때, 함수 $y=g(f(x))$가 최댓값을 갖는다.

이때 $-1\le x\le 2$에서 함수 $y=-2(x-1)^2+5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $x=1$일 때 5이고, 함수 $y=g(f(x))$의 최댓값은 a^5이다.



두 함수 $y=f(g(x))$, $y=g(f(x))$의 최댓값이 같아야 하므로

$$a^5=5 \qquad \therefore\ a=5^{\frac{1}{5}}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 $5^{-\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{5}}$이므로

$\alpha=5^{-\frac{1}{3}}$, $\beta=5^{\frac{1}{5}}$ $(\because\ \alpha<\beta)$

$$\therefore\ \log_5\frac{\beta}{\alpha}=\log_5\frac{5^{\frac{1}{5}}}{5^{-\frac{1}{3}}}$$
$$=\log_5 5^{\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$=\log_5 5^{\frac{8}{15}}=\frac{8}{15}$$

답 ④

22 x에 대한 방정식 $2^{2x}-k\times2^{x+1}+4k+3=0$의 두 실근의 비가 $1:2$이므로 두 실근을 α, 2α라 하자.

$(2^x)^2-2k\times2^x+4k+3=0$에서

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2kt+4k+3=0$

t에 대한 이차방정식의 두 실근이 2^α, $2^{2\alpha}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^{2\alpha}=2k$ ……㉠

$2^\alpha\times2^{2\alpha}=4k+3$, $2^{3\alpha}=4k+3$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$2^{3\alpha}=2(2^{2\alpha}+2^\alpha)+3$

$(2^\alpha)^3-2\times(2^\alpha)^2-2\times2^\alpha-3=0$

$2^\alpha=s\ (s>0)$로 놓으면

$s^3-2s^2-2s-3=0$

$(s-3)(s^2+s+1)=0$

$\therefore s=3\ (\because s>0)$

즉, $2^\alpha=3$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$3+9=2k \qquad \therefore k=6$

답 ②

23 t는 모든 실수

$3^x-3^{-x}=t$로 놓으면 $9^x+9^{-x}=t^2+2$이므로

$9^x+9^{-x}+2a(3^x-3^{-x})+5=0$에서

$t^2+2+2at+5=0$

$\therefore t^2+2at+7=0$

주어진 지수방정식이 실근을 가지므로 t에 대한 이차방정식 $t^2+2at+7=0$도 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-7\geq0$에서 $a^2\geq7$

$\therefore a\geq\sqrt{7}\ (\because a>0)$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a의 최솟값이 $\sqrt{7}$이므로

$m=\sqrt{7} \qquad \therefore m^2=7$

답 7

24 $25^x-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$에서

$(5^x)^2-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

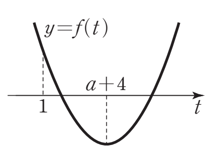
$t^2-2(a+4)t-3a^2+24a=0$ ……㉠

x가 양수일 때, $t>1$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되려면 t에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근은 모두 1보다 커야 한다.

즉,

$f(t)=t^2-2(a+4)t-3a^2+24a$

라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+4)^2-(-3a^2+24a)>0$에서

$a^2+8a+16+3a^2-24a>0$

$4a^2-16a+16>0$

$4(a-2)^2>0 \qquad \therefore a\neq2$인 실수

(ii) $f(1)>0$에서

$1-2(a+4)-3a^2+24a>0$

$3a^2-22a+7<0$, $(3a-1)(a-7)<0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<7$

(iii) 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축은 직선 $t=a+4$이므로 $a+4>1$이어야 한다.

$\therefore a>-3$

(i), (ii), (iii)에서

$\frac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+3+4+5+6=19$

답 19

• 다른 풀이 •

$25^x-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$에서

$(5^x)^2-2(a+4)5^x-3a^2+24a=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a+4)t-3a(a-8)=0$

$(t-3a)(t+a-8)=0$

$\therefore t=3a$ 또는 $t=-a+8$

이때 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 양수이려면 $t>1$이어야 하므로

$3a>1$에서 $a>\frac{1}{3}$ ……㉡

$-a+8>1$에서 $a<7$ ……㉢

또한, 두 근이 서로 달라야 하므로

$3a\neq-a+8$, $4a\neq8$

$\therefore a\neq2$ ……㉣

㉡, ㉢, ㉣에서

$\frac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+3+4+5+6=19$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

이차방정식의 근의 분리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

(1) 두 근이 모두 p보다 클 때,
$D\geq0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작을 때,
$D\geq0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있을 때,
$f(p)<0$

(4) 두 근이 $p,\ q\ (p<q)$ 사이에 있을 때,
$D\geq0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$

25 $4^x \geq k\times 2^x - 3k - 7$에서

$(2^x)^2 - k\times 2^x + 3k + 7 \geq 0$

$2^x = t\ (t>0)$로 놓으면

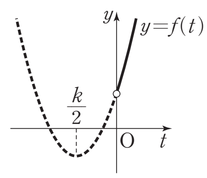
$t^2 - kt + 3k + 7 \geq 0$ ……㉠

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면 이차부등식 ㉠이 $t>0$에서 항상 성립해야 한다.

$f(t) = t^2 - kt + 3k + 7$이라 하면

$f(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 3k + 7$

(i) $\frac{k}{2} < 0$, 즉 $k<0$일 때,

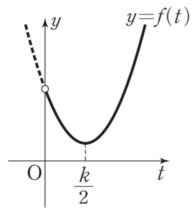


$t>0$에서 이차부등식 ㉠이 항상 성립하려면 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

즉, $3k+7 \geq 0$ $\quad\therefore k \geq -\frac{7}{3}$

이때 $k<0$이므로 $-\frac{7}{3} \leq k < 0$

(ii) $\frac{k}{2} \geq 0$, 즉 $k \geq 0$일 때,



$t>0$에서 이차부등식 ㉠이 항상 성립하려면 함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $f\left(\frac{k}{2}\right) \geq 0$이어야 한다.

즉, $-\frac{k^2}{4} + 3k + 7 \geq 0$

$k^2 - 12k - 28 \leq 0$, $(k+2)(k-14) \leq 0$

$\therefore -2 \leq k \leq 14$

이때 $k \geq 0$이므로 $0 \leq k \leq 14$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{7}{3} \leq k \leq 14$

답 $-\frac{7}{3} \leq k \leq 14$

• 다른 풀이 •

$4^x \geq k\times 2^x - 3k - 7$에서

$(2^x)^2 \geq k\times 2^x - 3k - 7$

$2^x = t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2 \geq kt - 3k - 7$

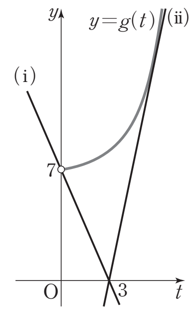
$t^2 + 7 \geq k(t-3)$

$g(t) = t^2 + 7$, $h(t) = k(t-3)$이라 하면

$t>0$에서 $g(t) \geq h(t)$ ……㉡

직선 $h(t) = k(t-3)$은 기울기 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

따라서 ㉡을 만족시키려면 직선 $h(t) = k(t-3)$의 기울기 k는 다음 그림과 같이 직선 (i)의 기울기보다 크거나 같고, 직선 (ii)의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



(i) 직선 $h(t) = k(t-3)$이 점 $(0,\ 7)$을 지날 때,

$7 = k(0-3)$ $\quad\therefore k = -\frac{7}{3}$

(ii) 직선 $h(t) = k(t-3)$이 곡선 $y=g(t)$에 접할 때,

이차방정식 $t^2 + 7 = k(t-3)$, 즉 $t^2 - kt + 3k + 7 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = k^2 - 12k - 28 = 0$, $(k+2)(k-14) = 0$

$\therefore k = -2$ 또는 $k = 14$

이때 $k>0$이므로 $k = 14$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-\frac{7}{3} \leq k \leq 14$

26 $\left(\frac{1}{9}\right)^x - (3n+27)\times\left(\frac{1}{3}\right)^x + 81n \leq 0$에서

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - (3n+27)\times\left(\frac{1}{3}\right)^x + 81n \leq 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2 - (3n+27)t + 81n \leq 0$

$(t-3n)(t-27) \leq 0$ ……㉠

(i) $3n<27$, 즉 $n<9$일 때,

㉠에서 $3n \leq t \leq 27$이므로 $3n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3^3$

$\therefore 3^{-3} \leq 3^x \leq \frac{1}{3n}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면 $x = -1,\ -2,\ -3$이어야 한다.

즉, $3^{-1} \leq \frac{1}{3n} < 3^0$이어야 하므로

$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3n} < 1$, $\frac{1}{3} < n \leq 1$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 1의 1개이다.

(ii) $3n=27$, 즉 $n=9$일 때,

㉠에서 $(t-27)^2 \leq 0$

$\therefore t = 27$

즉, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ $\quad\therefore x = -3$

따라서 이 부등식을 만족시키는 정수 x가 오직 하나뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $3n>27$, 즉 $n>9$일 때,

㉠에서 $27 \leq t \leq 3n$이므로 $3^3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 3n$

$\therefore \frac{1}{3n} \leq 3^x \leq 3^{-3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이려면

$x=-3, -4, -5$이어야 한다.

즉, $3^{-6} < \frac{1}{3n} \leq 3^{-5}$이어야 하므로

$\frac{1}{3^6} < \frac{1}{3n} \leq \frac{1}{3^5}$, $3^4 \leq n < 3^5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 81, 82, 83, $\cdots$, 242의 $242-81+1=162$(개)이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 개수는

$1+162=163$ 답 163

27 ㄱ. 조건 (나)에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에

$x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $f(x+y)=f(x)+f(y)$의 양변에

$y=-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x)$

$0=f(x)+f(-x)$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore f(-x)=-f(x)$ (거짓)

ㄷ. $f(3\times 2^x)+f(15\times 2^x-4^x-32)>0$에서

$f(3\times 2^x+15\times 2^x-4^x-32)>0$ ($\because$ 조건 (나))

$f(18\times 2^x-4^x-32)>0$

ㄱ에서 $f(0)=0$이므로

$f(18\times 2^x-4^x-32)>f(0)$

$18\times 2^x-4^x-32>0$ ($\because$ 조건 (가))

$4^x-18\times 2^x+32<0$

$\therefore (2^x)^2-18\times 2^x+32<0$

*이때 $2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-18t+32<0$, $(t-2)(t-16)<0$

$\therefore 2<t<16$

$t=2^x$이므로 $2<2^x<16$

$2<2^x<2^4$

$\therefore 1<x<4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3이므로 그 합은 $2+3=5$이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄷ. $f(3\times 2^x)+f(15\times 2^x-4^x-32)>0$에서

$f(3\times 2^x)>-f(15\times 2^x-4^x-32)$

ㄴ에서 $-f(x)=f(-x)$이므로

$f(3\times 2^x)>f(-15\times 2^x+4^x+32)$

$3\times 2^x>-15\times 2^x+4^x+32$ ($\because$ 조건 (가))

$(2^x)^2-18\times 2^x+32<0$

다음은 *와 같다.

28 $A=\{x \mid x^{2(x-2)^2} \leq x^{5-x}, x>0\}$에서

(i) $x=1$일 때,

(좌변)$=1^{2(1-2)^2}=1^2=1$,

(우변)$=1^{5-1}=1^4=1$이므로 $1\in A$

(ii) $0<x<1$일 때,

$x^{2(x-2)^2} \leq x^{5-x}$에서

$2(x-2)^2 \geq 5-x$

$2x^2-8x+8 \geq 5-x$, $2x^2-7x+3 \geq 0$

$(2x-1)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x\leq \frac{1}{2}$

(iii) $x>1$일 때,

$x^{2(x-2)^2} \leq x^{5-x}$에서

$2(x-2)^2 \leq 5-x$

$2x^2-7x+3 \leq 0$, $(2x-1)(x-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

그런데 $x>1$이므로 $1<x\leq 3$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\leq \frac{1}{2}$ 또는 $1\leq x\leq 3$이므로

$A=\left\{x \,\middle|\, 0<x\leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } 1\leq x\leq 3\right\}$

한편, $A\cap B=A$, 즉 $A\subset B$이어야 하므로 부등식

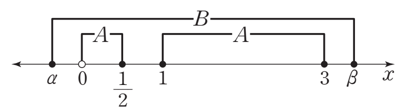
$x^2+ax+b\leq 0$의 해의 집합은 집합 A를 포함해야 한다.

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면

$x^2+ax+b\leq 0$에서 $(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$

$\therefore \alpha\leq x\leq \beta$

즉, $B=\{x \mid \alpha\leq x\leq \beta\}$이고, $A\subset B$이어야 하므로 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore \alpha\leq 0$, $\beta\geq 3$ $\cdots\cdots$㉠

이때

$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-\alpha-\beta$, $b=\alpha\beta$이므로

$a+b=-\alpha-\beta+\alpha\beta$

$=(\alpha-1)(\beta-1)-1$

㉠에서 $\alpha-1\leq -1$, $\beta-1\geq 2$이므로

$(\alpha-1)(\beta-1)\leq -2$

$(\alpha-1)(\beta-1)-1\leq -3$

$\therefore a+b\leq -3$

따라서 $a+b$의 최댓값은 -3이다. 답 -3

29 5년 동안 매출이 20 % 증가하였으므로

$\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^5=1.2$

$\therefore\ 1+\dfrac{a}{100}=1.2^{\frac{1}{5}}$ ……㉠

작년 말 이후로부터 n년 후의 매출이 60억 원이므로

$30\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^n=60$

$\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^n=2,\ 1.2^{\frac{n}{5}}=2\ (\because ㉠)$

이때 $1.2^{3.8}=2$이므로

$1.2^{\frac{n}{5}}=1.2^{3.8},\ \dfrac{n}{5}=3.8$

$\therefore\ n=19$ **답** 19

30 9일 후 잔류 농약의 양이 처음에 살포한 농약의 양의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$P(9)=m\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9k}=\dfrac{1}{2}m$에서

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9k}=\dfrac{1}{2}\ (\because\ m>0)$

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^k=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}}$ ……㉠

또한, n일 후 잔류 농약의 양이 처음에 살포한 농약의 양의 $\dfrac{1}{16}$ 이하가 된다고 하면

$P(n)=m\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{nk}\le\dfrac{1}{16}m$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{nk}\le\dfrac{1}{16}\ (\because\ m>0)$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{9}}\right\}^n\le\dfrac{1}{16}$에서 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{9}}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

이때 $0<(\text{밑})=\dfrac{1}{2}<1$이므로

$\dfrac{n}{9}\ge4$ $\therefore\ n\ge36$

따라서 최소한 36일이 지나야 한다. **답** 36일

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.38~39

01 17	02 $k<6$	03 ②	04 1	05 $1<a<6$
06 16	07 8	08 38	09 5	10 4
11 ②	12 39			

01 해결단계

❶ 단계	$3^x=t$로 치환하여 주어진 부등식을 t에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위한 조건을 확인한다.
❸ 단계	a의 값으로 가능한 각 자연수에 대하여 가능한 b의 값을 각각 구한 후, 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구한다.

$3^{2x}\ge2(a-2)3^x-b-5$, 즉 $(3^x)^2-2(a-2)3^x+b+5\ge0$에서 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2(a-2)t+b+5\ge0$

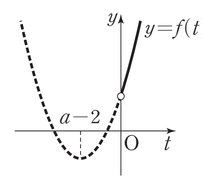
$f(t)=t^2-2(a-2)t+b+5$라 하면 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는 이차부등식 $f(t)\ge0$이 $t>0$인 모든 t에 대하여 항상 성립해야 한다.

$f(t)=t^2-2(a-2)t+b+5$

$\quad=\{t-(a-2)\}^2-(a-2)^2+b+5$

(i) $a-2\le0$, 즉 $a=1,\ 2$일 때,

$t>0$에서 $f(t)\ge0$이려면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $f(0)\ge0$이어야 한다.



즉, $b+5\ge0$에서 $b\ge-5$

따라서

$a=1$일 때, $b=2,\ 3,\ 4,\ 5$

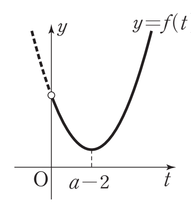
$a=2$일 때, $b=1,\ 3,\ 4,\ 5$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+4=8$

(ii) $a-2>0$, 즉 $a=3,\ 4,\ 5$일 때,

$t>0$에서 $f(t)\ge0$이려면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $f(a-2)\ge0$이어야 한다.



즉, $-(a-2)^2+b+5\ge0$에서

$b\ge(a-2)^2-5$

따라서

$a=3$일 때, $b\ge-4$이므로 $b=1,\ 2,\ 4,\ 5$

$a=4$일 때, $b\ge-1$이므로 $b=1,\ 2,\ 3,\ 5$

$a=5$일 때, $b\ge4$이므로 $b=4$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+4+1=9$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$8+9=17$ **답** 17

02 해결단계

❶ 단계	$2^x+2^{-x}=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 이차방정식으로 나타낸다.
❷ 단계	t의 값의 범위와 관련하여 t에 대한 이차방정식이 실근을 갖지 않거나 두 실근이 모두 2보다 작도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$4^x+4^{-x}-k(2^x+2^{-x})+11=0$에서

$(2^x+2^{-x})^2-2-k(2^x+2^{-x})+11=0$

$(2^x+2^{-x})^2-k(2^x+2^{-x})+9=0$

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

$\qquad\qquad =2$

$\therefore t\ge 2$

따라서 주어진 방정식은

* $t^2-kt+9=0$ (단, $t\ge 2$) $\qquad$ ······㉠

주어진 방정식의 근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉠이 실근을 갖지 않거나 두 실근이 모두 2보다 작아야 한다.

(i) ㉠이 실근을 갖지 않는 경우

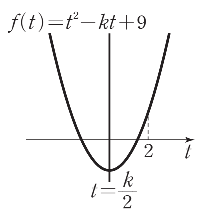
㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36<0$에서 $(k+6)(k-6)<0$

$\therefore -6<k<6$

(ii) ㉠의 두 실근이 모두 2보다 작은 경우

$f(t)=t^2-kt+9$라 할 때, 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



① ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-36\ge 0$에서

$(k+6)(k-6)\ge 0$

$\therefore k\le -6$ 또는 $k\ge 6$

② $f(2)=13-2k>0$에서

$k<\frac{13}{2}$

③ 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축은 직선 $t=\frac{k}{2}$이므로

$\frac{k}{2}<2 \qquad \therefore k<4$

①, ②, ③에서 $k\le -6$

(i), (ii)에서 $k<6$ $\qquad$ **답** $k<6$

• 다른 풀이 •

*에서 이차방정식 ㉠의 양변을 t로 나누면

$t-k+\frac{9}{t}=0$, $t+\frac{9}{t}=k$ (단, $t\ge 2$)

이때 $t+\frac{9}{t}$에서 $t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\frac{9}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{9}{t}}=6$

$\left(\text{단, 등호는 } t=\frac{9}{t}, \text{ 즉 } t=3\text{일 때 성립}\right)$

즉, $t+\frac{9}{t}$는 $t=3$일 때 최솟값 6을 가지므로 $t\ge 2$에서 이차방정식 ㉠의 해가 존재하지 않으려면 $k<6$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$k<6$

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 지수함수, 산술평균과 기하평균의 관계, 이차방정식의 근의 분리 등 여러 가지 개념이 혼용되어 있는 문제이다. 특히 산술평균과 기하평균의 관계, 이차방정식의 근의 분리는 예전에 배운 개념으로, 잊어버리지 않게 종종 문제를 풀면서 기억을 해두는 것이 중요하다.
이 문제의 경우 2^x을 t로 치환하여 식을 정리하면 사차방정식이 나와 문제에 접근하기가 더 까다로워지므로 2^x+2^{-x}을 t로 치환하여 이차방정식을 만들고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $t\ge 2$임을 알고 이용해야 한다. 그런 다음 이차방정식의 근의 분리를 사용하여 문제를 해결해야 한다.
이처럼 위의 개념들은 여러 단원에서 자주 활용되므로 이번 문제를 통해 다시 한번 공부를 하는 것이 좋다.

03 해결단계

❶ 단계	주어진 곡선의 방정식에 $x=-1$, $y=0$을 대입하여 등식이 성립하는지 확인하고 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	$a=4$일 때 두 곡선을 좌표평면 위에 나타내어 교점의 개수를 구한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	$a>4$일 때의 두 곡선을 좌표평면 위에 나타내어 교점의 개수를 확인한 후, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

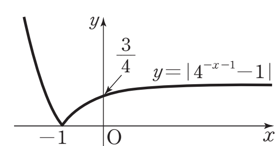
ㄱ. $y=|a^{-x-1}-1|$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면

$|a^{1-1}-1|=0$ (참)

ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 방정식은

$y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$

이때 $y=|4^{-x-1}-1|$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로



$x<-1$에서 두 곡선

$y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$

은 한 점에서 만난다.

또한, $x\ge -1$일 때, $4^x=-4^{-x-1}+1$에서

양변에 4^{x+1}을 곱하여 정리하면

$4^{2x+1}-4^{x+1}+1=0$, $4\times(4^x)^2-4\times 4^x+1=0$

$4^x=X$ $\left(X\ge\frac{1}{4}\right)$로 놓으면

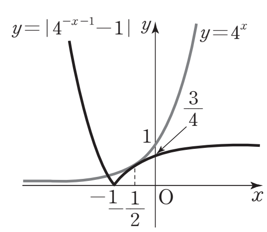
$4X^2-4X+1=0$

$(2X-1)^2=0 \qquad \therefore X=\frac{1}{2}$

$4^x=\frac{1}{2}$이므로 $2^{2x}=2^{-1}$

$2x=-1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$

즉, 다음 그림과 같이 $x\ge -1$에서 두 곡선 $y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$은 $x=-\frac{1}{2}$인 점에서 접한다.



따라서 $a=4$일 때, 두 곡선 $y=4^x$, $y=|4^{-x-1}-1|$의 교점의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $a>4$이면

(ⅰ) $x<-1$일 때, 두 곡선 $y=a^x$, $y=|a^{-x-1}-1|$은 한 점에서 만나므로 이 두 곡선의 교점의 x좌표를 α라 하면 $\alpha<-1$

(ⅱ) $x\geq-1$일 때, $a^x=-a^{-x-1}+1$에서 양변에 a^{x+1}을 곱하여 정리하면

$a^{2x+1}-a^{x+1}+1=0$, $a\times(a^x)^2-a\times a^x+1=0$

$a^x=Y$ $\left(Y\geq\dfrac{1}{a}\right)$로 놓으면

$aY^2-aY+1=0$ ……㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a=a(a-4)>0$ ($\because$ $a>4$)

따라서 두 곡선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 두 교점의 x좌표를 각각 β, γ $(\beta<\gamma)$라 하면 ㉠의 두 근은 a^β, a^γ이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a^\beta\times a^\gamma=\dfrac{1}{a}$에서 $a^{\beta+\gamma}=a^{-1}$

$\therefore$ $\beta+\gamma=-1$ ($\because$ $a>4$)

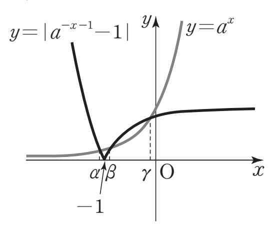
(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha+\beta+\gamma<-2$

따라서 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 작다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 참고

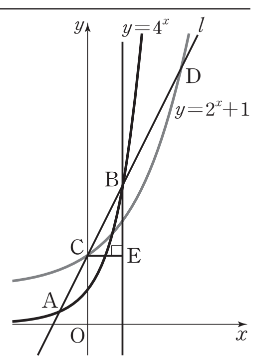
$a>4$일 때, 두 곡선 $y=a^x$, $y=|a^{-x-1}-1|$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



04 해결단계

❶ 단계	빗변을 $\overline{BC}$로 하고, 나머지 두 변이 x축, y축과 평행한 직각삼각형을 만든 후, $\overline{BC}=\sqrt{5}$임을 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구한다.
❷ 단계	두 점 B, C의 좌표를 이용하여 ❶단계에서 만든 직각삼각형의 나머지 두 변의 길이에 대한 식을 세운다.
❸ 단계	❷단계에서 세운 식을 연립하여 두 점 B, C의 좌표와 직선 l의 방정식을 구한 후, 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x+1$과 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 C에서 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 E라 하면 직선 l의 기울기가 2이므로

$\overline{CE}=k$ $(k>0)$라 하면 $\overline{BE}=2k$이다.

직각삼각형 BCE에서 $\overline{BC}=\sqrt{5}$이므로

$(\sqrt{5})^2=k^2+(2k)^2$

$5k^2=5$, $k^2=1$ $\quad\therefore$ $k=1$ ($\because$ $k>0$)

$\therefore$ $\overline{CE}=1$, $\overline{BE}=2$

또한, $B(b,\ 4^b)$, $C(c,\ 2^c+1)$에서

$\overline{CE}=b-c$, $\overline{BE}=4^b-(2^c+1)$이므로

$b-c=1$, $4^b-2^c-1=2$

$b-c=1$에서 $c=b-1$

위의 식을 $4^b-2^c-1=2$, 즉 $4^b-2^c-3=0$에 대입하면

$4^b-2^{b-1}-3=0$, $(2^b)^2-\dfrac{1}{2}\times2^b-3=0$

$2^b=t$ $(t>0)$로 놓으면

$t^2-\dfrac{1}{2}t-3=0$, $2t^2-t-6=0$

$(t-2)(2t+3)=0$ $\quad\therefore$ $t=2$ ($\because$ $t>0$)

$2^b=2$이므로 $b=1$

$\therefore$ $c=b-1=0$

$\therefore$ $B(1,\ 4)$, $C(0,\ 2)$

한편, 직선 l의 방정식을 $y=2x+n$이라 하면 직선 l은 점 $C(0,\ 2)$를 지나므로 $n=2$

$\therefore$ l : $y=2x+2$

따라서 직선 l의 x절편은 -1, y절편은 2이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$ **답** 1

05 해결단계

❶ 단계	$0<a<1$일 때, 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	$a>1$일 때, 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	$a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$가 조건을 만족시키는지 확인한다.
❹ 단계	❶, ❷, ❸단계에서 구한 a의 값의 범위를 이용하여 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=a^{-x^2+6x-11}\\&=a^{-(x^2-6x+9)-2}\\&=a^{-(x-3)^2-2}\end{aligned}$$

에서 $g(x)=-(x-3)^2-2$라 하자.

(ⅰ) $0<a<1$일 때,

함수 $f(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $f(x)$의 값이 감소하므로 $0<x\leq a$에서 함수 $y=f(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면 함수 $y=g(x)$가 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않아야 한다.

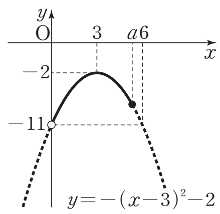
그런데 $0<x\leq a$에서 함수 $y=g(x)$는 $x=a$에서 항상 최댓값을 갖고 최솟값은 갖지 않으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a>1$일 때,

함수 $f(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $0<x\leq a$에서 함수 $y=f(x)$가 최

댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면 함수 $y=g(x)$도 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않아야 한다.

이때 함수 $g(x)=-(x-3)^2-2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $0<x\le a$에서 함수 $y=g(x)$가 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않으려면



$0<a<6$

이때 $a>1$이므로 $1<a<6$

(iii) $a=1$일 때,

$f(x)=1$이므로 최댓값과 최솟값 모두 1이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$1<a<6$ **답** $1<a<6$

• 다른 풀이 •

$f(x)=a^{-x^2+6x-11}$에서

$g(x)=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$

라 하면 이차함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, $x\le3$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x>3$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(i) $0<a<1$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(a)$이므로

$f(a)\le f(x)<f(0)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최솟값}}_{f(a)}$을 갖고, 최댓값을 갖지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$f(x)=1$이므로 최댓값과 최솟값 모두 1이다.

(iii) $1<a<3$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(a)$이므로

$f(0)<f(x)\le f(a)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최댓값}}_{f(a)}$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.

(iv) $3\le a<6$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(0)<g(x)\le g(3)$이므로

$f(0)<f(x)\le f(3)$

즉, $f(x)$는 $\underbrace{\text{최댓값}}_{f(3)}$을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.

(v) $a\ge6$일 때,

$0<x\le a$에서 $g(a)\le g(x)\le g(3)$이므로

$f(a)\le f(x)\le f(3)$

즉, $f(x)$는 $\overbrace{\text{최댓값}}^{f(3)}$과 $\underbrace{\text{최솟값}}_{f(a)}$을 모두 갖는다.

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$1<a<6$

06 해결단계

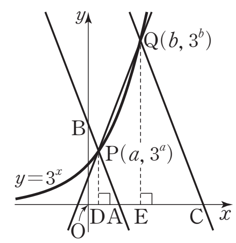
❶ 단계	$\overline{AB}=4\overline{PB}$, $4\overline{CQ}=9\overline{AB}$임을 이용하여 $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$의 비를 구한다.
❷ 단계	두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 할 때, 두 삼각형 APD, CQE의 닮음을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	두 직선 PQ, AB의 기울기를 이용하여 점 A의 x좌표를 a에 대한 식으로 나타낸다.
❹ 단계	두 삼각형 APD, ABO의 닮음을 이용하여 a, b의 값을 구하고 $12(a+b)$의 값을 구한다.

$\overline{PB}=k$ $(k>0)$라 하면 $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $4\overline{CQ}=9\overline{AB}$이므로

$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=4\overline{PB}-\overline{PB}=3\overline{PB}=3k$

$\overline{CQ}=\frac{9}{4}\overline{AB}=\frac{9}{4}\times4\overline{PB}=9\overline{PB}=9k$

$\therefore$ $\overline{AP}:\overline{CQ}=3k:9k=1:3$



이때 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 △APD∽△CQE (AA 닮음)이므로

$\overline{PD}:\overline{QE}=\overline{AP}:\overline{CQ}=1:3$

즉, $3^a:3^b=1:3$이므로

$3^b=3\times3^a=3^{a+1}$

$\therefore$ $b=a+1$ ……㉠

$\therefore$ $P(a,\ 3^a)$, $Q(a+1,\ 3^{a+1})$

직선 PQ의 기울기가 m이므로

$m=\frac{3^{a+1}-3^a}{(a+1)-a}=2\times3^a$

직선 AB는 기울기가 $-m=-2\times3^a$이고, 점 $P(a,\ 3^a)$을 지나므로 방정식은

$y-3^a=-2\times3^a(x-a)$ ……㉡

점 A는 직선 AB 위에 있으므로 $y=0$을 ㉡에 대입하면

$-3^a=-2\times3^a(x-a)$

$\therefore$ $x=a+\frac{1}{2}$

즉, 점 A의 x좌표는 $a+\frac{1}{2}$이다.

이때 △APD∽△ABO (AA 닮음)이므로

$\overline{AO}:\overline{DO}=\overline{AB}:\overline{PB}=4:1$

$\left(a+\frac{1}{2}\right):a=4:1$

$4a=a+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ $a=\frac{1}{6}$

이것을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$

$\therefore$ $12(a+b)=12\times\left(\frac{1}{6}+\frac{7}{6}\right)=16$ **답** 16

07 해결단계

❶ 단계	두 점 P, S가 곡선 $y=a^x$ 위에 있음을 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	두 점 Q, R이 곡선 $y=b^x$ 위에 있음을 이용하여 식을 세운다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 세운 식과 $df=eg=16$임을 이용하여 ab와 c의 값을 구한 후, abc의 값을 구한다.

두 점 $P(c,\ e)$, $S(f,\ g)$가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^c=e,\ a^f=g$

두 점 $Q(c,\ g)$, $R(d,\ e)$가 곡선 $y=b^x$ 위에 있으므로

$b^c=g,\ b^d=e$

$\therefore e=a^c=b^d,\ g=a^f=b^c$ ……㉠

이때 $a^c=b^d$에서 $a^{cf}=b^{df}$, $a^f=b^c$에서 $a^{cf}=b^{c^2}$이므로

$b^{df}=b^{c^2}$ $\therefore df=c^2$ ($\because b>1$)

이때 $df=16$이므로

$c^2=16$ $\therefore c=4$ ($\because c>0$)

$c=4$를 ㉠에 대입하면

$e=a^4,\ g=b^4$이므로 $eg=a^4b^4$

이때 $eg=16$이므로

$16=a^4b^4,\ (ab)^4=2^4$

$\therefore ab=2$ ($\because 1<a<b$)

$\therefore abc=2\times4=8$

답 8

08 해결단계

❶ 단계	지수함수의 성질을 이용하여 두 점 A, B의 x좌표, y좌표를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	두 선분 AC, BE가 만나는 점을 F라 하고, 선분 AF의 길이를 구한다.
❸ 단계	두 삼각형 AEC, ACD의 넓이를 이용하여 사각형 AECD의 넓이를 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자.

점 A는 두 곡선 $y=4^{a-x}$, $y=2^x$의 교점이므로

$4^{a-x_1}=2^{x_1}$에서 $2^{2(a-x_1)}=2^{x_1}$

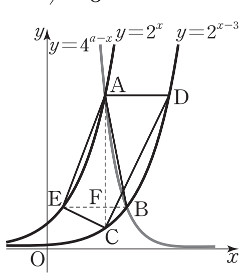
즉, $2(a-x_1)=x_1$이므로 $x_1=\frac{2}{3}a$

점 B는 두 곡선 $y=4^{a-x}$, $y=2^{x-3}$의 교점이므로

$4^{a-x_2}=2^{x_2-3}$에서 $2^{2(a-x_2)}=2^{x_2-3}$

즉, $2(a-x_2)=x_2-3$이므로 $x_2=\frac{2}{3}a+1$

$\therefore x_2-x_1=\left(\frac{2}{3}a+1\right)-\frac{2}{3}a=1$ ……㉠



위의 그림과 같이 두 선분 AC, BE가 만나는 점을 F라 하면 $\overline{AC}\perp\overline{BE}$이므로 직각삼각형 AFB에서

$\overline{BF}=x_2-x_1=1$ ($\because$ ㉠), $\overline{AB}=\sqrt{17}$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{AF}^2+1^2=(\sqrt{17})^2$

$\therefore \overline{AF}=4$

이때 $y_1=2^{x_1}=2^{\frac{2}{3}a}$, $y_2=2^{x_2-3}=2^{\frac{2}{3}a-2}$이므로

$\overline{AF}=y_1-y_2=2^{\frac{2}{3}a}-2^{\frac{2}{3}a-2}=\frac{3}{4}\times2^{\frac{2}{3}a}=4$에서

$2^{\frac{2}{3}a}=\frac{16}{3}$ $\therefore y_1=\frac{16}{3}$

점 C의 x좌표가 $x_1=\frac{2}{3}a$이므로 y좌표는

$2^{\frac{2}{3}a-3}=\frac{1}{8}\times2^{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{8}\times\frac{16}{3}=\frac{2}{3}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$

이때 곡선 $y=2^{x-3}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AD}=\overline{EB}=3$

$\therefore \overline{EF}=\overline{EB}-\overline{BF}=3-1=2$

*따라서 사각형 AECD의 넓이는

$\triangle AEC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{EF}+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{14}{3}\times2+\frac{1}{2}\times\frac{14}{3}\times3$

$=\frac{14}{3}+7=\frac{35}{3}$

즉, $p=3,\ q=35$이므로

$p+q=38$

답 38

• 다른 풀이 •

곡선 $y=4^{a-x}$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-3}$과 만나는 점이 A, B이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 m, n이라 하면

$4^{a-m}=2^m$에서 $2^{2a-2m}=2^m$

$2a-2m=m$ $\therefore 3m=2a$ ……㉡

$4^{a-n}=2^{n-3}$에서 $2^{2a-2n}=2^{n-3}$

$2a-2n=n-3$ $\therefore 3n=2a+3$

㉡을 위의 식에 대입하면 $3n=3m+3$

$\therefore n=m+1$

즉, $A(m,\ 2^m)$, $B(m+1,\ 2^{m-2})$

한편, 곡선 $y=2^{x-3}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AD}=3$, $\overline{EB}=3$

$\therefore D(m+3,\ 2^m)$, $E(m-2,\ 2^{m-2})$

점 C는 점 A와 x좌표가 같고 곡선 $y=2^{x-3}$ 위에 있으므로

$C(m,\ 2^{m-3})$

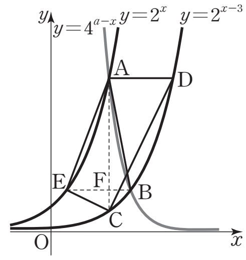
이때 $\overline{AB}=\sqrt{17}$에서 $\overline{AB}^2=17$이므로

$1^2+(2^{m-2}-2^m)^2=17,\ \left(\frac{1}{4}\times2^m-2^m\right)^2=16$

$\frac{3}{4}\times2^m=4$ ($\because 2^m>0$) $\therefore 2^m=\frac{16}{3}$ ……㉢

다음 그림과 같이 두 직선 AC, EB의 교점을 F라 하면

$\overline{AC}\perp\overline{BE}$이므로



$\overline{\mathrm{EF}}=m-(m-2)=2$,

$\overline{\mathrm{AC}}=2^m-2^{m-3}=2^m\left(1-\dfrac{1}{8}\right)$

$=\dfrac{7}{8}\times 2^m$

$=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{16}{3}$ ($\because$ ㉢)

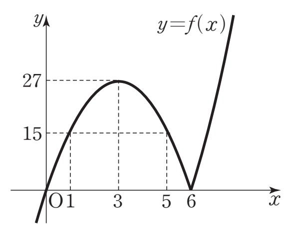
$=\dfrac{14}{3}$

다음은 *와 같다.

09 해결단계

❶ 단계	함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	t의 값의 범위에 따라 $g(t)$를 구한다.
❸ 단계	함수 $g(t)$의 최솟값이 15가 되도록 하는 양수 a의 값의 범위를 구하여 a의 최솟값을 구한다.

$f(x)=\begin{cases} -3x^2+18x & (-1\le x<6) \\ a(4^{x-6}-1) & (x\ge 6)\end{cases}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. (단, $a>0$)



(i) $0\le t<2$일 때,

$-1\le x<3$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로

$g(t)=f(t+1)$

이때 $1\le t+1<3$이므로

$f(1)\le g(t)<f(3)$

$\therefore$ $15\le g(t)<27$

(ii) $2\le t\le 4$일 때,

$g(t)=f(3)=27$

(iii) $4<t\le 5$일 때,

$3<x\le 6$에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$g(t)=f(t-1)$

이때 $3<t-1\le 4$이므로

$f(4)\le g(t)<f(3)$

$\therefore$ $24\le g(t)<27$

한편, $t>5$에서 $f(t-1)=f(t+1)$인 t의 값을 α $(5<\alpha<7)$라 하고, $f(\alpha-1)=f(\alpha+1)=k$라 하자.

(iv) $5<t<\alpha$일 때,

$g(t)=f(t-1)$

이때 $4<t-1<\alpha-1$이므로

$k<g(t)<24$

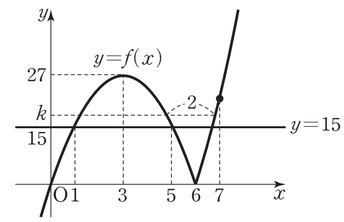
(v) $t\ge\alpha$일 때,

$g(t)=f(t+1)$

이때 $t+1\ge\alpha+1$이므로

$g(t)\ge k$

이때 함수 $g(t)$의 최솟값이 15가 되려면 $k\ge 15$이어야 한다.



즉, $f(\alpha-1)=f(\alpha+1)\ge 15$이고 $f(5)=15$이므로

$f(7)\ge 15$이어야 한다.*

따라서 $a\times(4^{7-6}-1)\ge 15$이므로

$3a\ge 15$ $\quad\therefore$ $a\ge 5$

그러므로 a의 최솟값은 5이다. **답** 5

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$f(7)<15$라 가정하자.

(i) $5<\alpha<6$일 때,

$6<\alpha+1<7$이므로 $f(\alpha+1)<f(7)<15$

그런데 $f(\alpha+1)=k$이므로 $k\ge 15$에 모순이다.

(ii) $\alpha=6$일 때,

$f(7)=f(5)=15$이므로 $f(7)<15$에 모순이다.

(iii) $6<\alpha<7$일 때,

$5<\alpha-1<6$이므로 $f(\alpha-1)<f(5)=15$

그런데 $f(\alpha-1)=k$이므로 $k\ge 15$에 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(7)\ge 15$이어야 한다.

10 해결단계

❶ 단계	$f(a)$의 값의 범위에 따른 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	❶단계의 경우에 따라 실수 k의 최댓값을 구한다.
❸ 단계	실수 k의 최댓값이 $6b$임을 이용하여 a, b의 값을 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

$f(x)=\begin{cases} 2^{x-2}+2b & (x\le a) \\ \dfrac{2a}{x}+4b & (x>a)\end{cases}$

에서 $f_1(x)=2^{x-2}+2b$, $f_2(x)=\dfrac{2a}{x}+4b$라 하자.

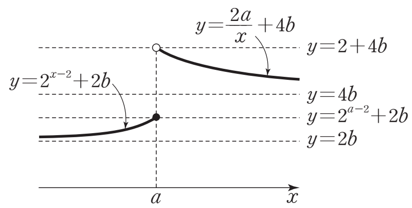
함수 $y=f_1(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또한, 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 각각 $y=2b$, $y=4b$이므로

$x\le a$에서 $2b<f_1(x)\le 2^{a-2}+2b$

$x>a$에서 $4b<f_2(x)<2+4b$

(ⅰ) $2^{a-2}+2b<4b$일 때,



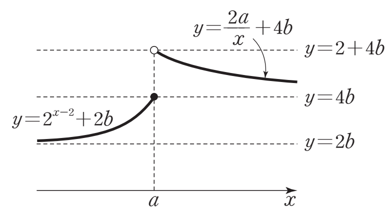
$2b<t<2^{a-2}+2b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이므로 k의 최댓값은 $2^{a-2}+2b$

이때 실수 k의 최댓값이 $6b$이어야 하므로

$2^{a-2}+2b=6b$

그런데 $2^{a-2}+2b<4b$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $2^{a-2}+2b=4b$일 때,



$2b<t<2+4b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로 k의 최댓값은 $2+4b$

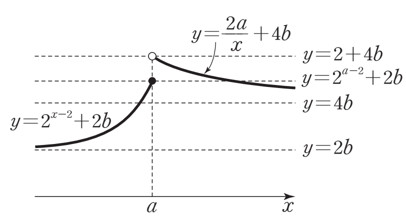
이때 실수 k의 최댓값이 $6b$이어야 하므로

$2+4b=6b$　　$\therefore b=1$

이것을 $2^{a-2}+2b=4b$에 대입하여 정리하면

$2^{a-2}+2=4$　　$\therefore a=3$

(ⅲ) $4b<2^{a-2}+2b\leq 2+4b$일 때,



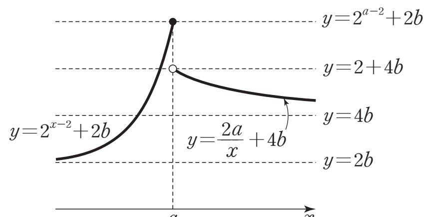
$2b<t<4b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이므로 k의 최댓값은 $4b$

이때 실수 k의 최댓값이 $6b$이어야 하므로

$4b=6b$　　$\therefore b=0$

그런데 $b>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $2^{a-2}+2b>2+4b$일 때,



$2b<t<4b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이므로 k의 최댓값은 $4b$

이때 실수 k의 최댓값이 $6b$이어야 하므로

$4b=6b$　　$\therefore b=0$

그런데 $b>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $a=3$, $b=1$

$\therefore a+b=4$　　**답** 4

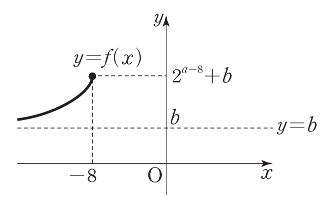
11 해결단계

❶ 단계	x의 값의 범위를 나누어 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	$3\leq k<4$인 k에 대하여 $x\leq k$일 때, $f(x)$의 값이 정수이면 그 값은 6 또는 7임을 파악한다.
❸ 단계	a, b의 값을 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\leq -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

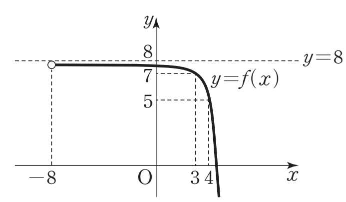
$x\leq -8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $y=b$이다.

따라서 $x\leq -8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, $b<f(x)\leq f(-8)$이다.　　……㉠



$x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $y=8$이다.

따라서 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, $f(x)<8$이다.



한편, $f(3)=7$, $f(4)=5$이므로 $3<t<4$이고 $f(t)=6$인 실수 t가 존재한다.

(ⅰ) $t\leq k<4$일 때,

$-8<x\leq k$에서 $f(x)$의 값 중 정수인 것은

$f(3)=7$, $f(t)=6$의 2개이다.

이때 집합 $\{f(x)\,|\,x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것이 2개이어야 하므로 $x\leq -8$에서 정수인 $f(x)$의 값이 존재하면 그 값은 6 또는 7이어야 한다.

(ⅱ) $3\leq k<t$일 때,

$-8<x\leq k$에서 $f(x)$의 값 중 정수인 것은

$f(3)=7$의 1개이다.

이때 집합 $\{f(x)\,|\,x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것이 2개이어야 하므로 $x\leq -8$에서 $f(x)=6$인 x가 반드시 존재해야 한다.

(i), (ii)에서 $x\le -8$에서 $f(x)$의 값 중 정수인 것이 6, 7이면 3보다 작은 k에 대하여 집합 $\{f(x)\,|\,x\le k\}$의 원소 중 정수인 것이 2개가 된다. 그런데 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x\le -8$에서 $f(x)$의 값 중 정수인 것은 6, 7 중 하나이어야 한다.
따라서 $\{f(x)\,|\,x\le -8\}$의 원소 중 정수인 것은 6뿐이므로 $x\le -8$에서 $5<f(x)<7$이어야 한다.
㉠에 의하여
$5\le b<6$이고, $6\le f(-8)<7$ *
b는 자연수이므로
$b=5$
$6\le f(-8)<7$에서
$6\le 2^{a-8}+5<7$, $1\le 2^{a-8}<2$
$0\le a-8<1$, $8\le a<9$
$\therefore a=8$ ($\because a$는 자연수)
$\therefore a+b=8+5=13$

답 ②

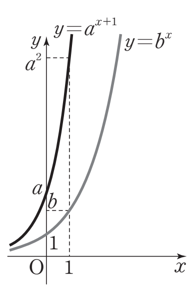
BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$f(-8)\ge 7$이면 $x\le -8$에서 $f(x)=6$, $f(x)=7$을 만족시키는 x가 존재하게 되므로 k의 최솟값이 3보다 작아진다.
따라서 $f(-8)<7$이어야 한다.

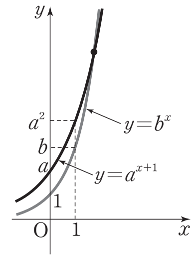
12 해결단계

❶ 단계	조건 (나)를 이용하여 $t\ge 1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같아야 함을 파악한다.
❷ 단계	$a\ge b$일 때, 두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프를 이용하여 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.
❸ 단계	$a<b$일 때, 두 함수 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$의 그래프를 이용하여 $\overline{PQ}$의 최솟값이 항상 10보다 작거나 같음을 파악한 후, $2\le a<b\le 10$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.
❹ 단계	❷, ❸단계에서 구한 순서쌍 (a, b)의 개수를 합하여 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

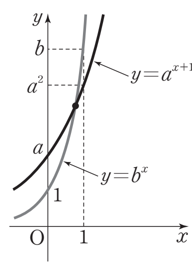
두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 직선 $x=t\ (t\ge 1)$와 만나는 점이 각각 P, Q이므로
$P(t, a^{t+1})$, $Q(t, b^t)$　　$\therefore \overline{PQ}=|a^{t+1}-b^t|$
조건 (나)에서 $t\ge 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}\le 10$이어야 하므로 $\overline{PQ}$의 최솟값이 10보다 작거나 같아야 한다. *
(i) $a\ge b$일 때,
두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 오른쪽 그림과 같으므로 $x\ge 1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $t=1$일 때이다.



($\overline{PQ}$의 최솟값)
$=|a^2-b|$
$=a^2-b$ ($\because a^2>b$)
이므로 $a^2-b\le 10$
$\therefore a^2-10\le b\le a$
$a=2$일 때, $-6\le b\le 2$이고 조건 (가)에서 $2\le b\le 10$이므로 $b=2$
$a=3$일 때, $-1\le b\le 3$이고 조건 (가)에서 $2\le b\le 10$이므로 $b=2$, 3
$a\ge 4$이면 $a^2-b\ge a^2-a\ge 12$이므로 부등식을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.
따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는
$(2, 2)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$의 3이다.
(ii) $a<b$일 때,
두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$은 $x>0$에서 반드시 한 점에서 만나므로 교점의 위치에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.
① (교점의 x좌표)≥ 1, 즉 $a^2\ge b$일 때,



두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 위의 그림과 같으므로 $x\ge 1$에서 ($\overline{PQ}$의 최솟값)$=0$이 되어 $\overline{PQ}\le 10$을 만족시키는 t가 반드시 존재한다.
② (교점의 x좌표)<1, 즉 $a^2<b$일 때,

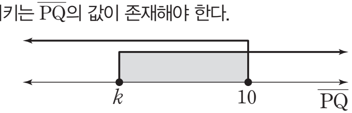


두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$이 위의 그림과 같으므로 $x\ge 1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값은 $t=1$일 때이다.
($\overline{PQ}$의 최솟값)$=|a^2-b|$
$=b-a^2$ ($\because b>a^2$)
이때 조건 (가)에서 $2\le a\le 10$, $2\le b\le 10$이므로
$b-a^2\le 6$
즉, $\overline{PQ}\le 10$을 만족시키는 t가 반드시 존재한다.
①, ②에서 $2\le a<b\le 10$을 만족시키는 모든 자연수 a, b에 대하여 $\overline{PQ}\le 10$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는
${}_9C_2=\dfrac{9\times 8}{2\times 1}=36$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$3+36=39$

답 39

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$t\ge 1$에서 $\overline{PQ}$의 최솟값을 $k\ (k\ge 0)$라 하자. 이때 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}\le 10$이어야 하므로 다음 그림과 같이 $k\le \overline{PQ}$, $\overline{PQ}\le 10$을 동시에 만족시키는 $\overline{PQ}$의 값이 존재해야 한다.



즉, $k\le 10$이어야 한다.

04. 로그함수

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.41~43

01 ①	02 ②	03 -2	04 -1	05 -5
06 ⑤	07 ④	08 ①	09 1	10 ②
11 ③	12 ②	13 16	14 ③	15 ③
16 23	17 16	18 ⑤	19 ④	20 3
21 ③				

01 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\log_2\dfrac{x+1}{x}$이므로

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(31)$

$=\log_2\dfrac{3}{2}+\log_2\dfrac{4}{3}+\log_2\dfrac{5}{4}+\cdots+\log_2\dfrac{32}{31}$

$=\log_2\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots\times\dfrac{32}{31}\right)$

$=\log_2\dfrac{32}{2}=\log_2 16$

$=\log_2 2^4=4$ 답 ①

02 ㄱ. 함수의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다. (참)

ㄴ. 그래프의 점근선은 y축이다. (거짓)

ㄷ. $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$
$0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$ (거짓)

ㄹ. $y=-\log_a\dfrac{1}{x}=-\log_a x^{-1}=\log_a x$이고 정의역이 $\{x|x$는 $x>0$인 실수$\}$로 같으므로 두 함수의 그래프는 일치한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

03 함수 $y=\log_3(x-1)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+2=\log_3(x-1)$ $\therefore y=\log_3(x-1)-2$

이것을 다시 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\log_3(-x-1)-2$

$=\log_3(-x-1)+\log_3 3^{-2}$

$=\log_3\dfrac{1}{9}(-x-1)$

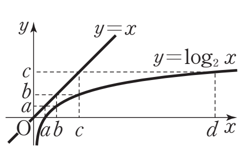
$=\log_3\left(-\dfrac{1}{9}x-\dfrac{1}{9}\right)$

이것이 함수 $y=\log_3(ax+b)$와 일치해야 하므로

$a=-\dfrac{1}{9}$, $b=-\dfrac{1}{9}$

$\therefore 9(a+b)=-2$ 답 -2

04 오른쪽 그림에서



$\log_2 a=0$이므로 $a=1$

$\log_2 b=a$, 즉 $\log_2 b=1$이므로 $b=2$

$\log_2 c=b$, 즉 $\log_2 c=2$이므로 $c=2^2=4$

$\log_2 d=c$, 즉 $\log_2 d=4$이므로 $d=2^4=16$

$\therefore \log_2\dfrac{bc}{d}=\log_2\dfrac{2\times4}{16}$

$=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ 답 -1

05 정사각형 ABCD의 넓이가 9이므로 $\overline{AD}=3$

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 D의 x좌표도 k이다.

두 점 A, D가 각각 함수 $y=\log_4\dfrac{1}{x}$, $y=\log_2 x$의 그래프 위에 있으므로

$A\left(k, \log_4\dfrac{1}{k}\right)$, $D(k, \log_2 k)$

$\overline{AD}=3$이므로 $\log_2 k-\log_4\dfrac{1}{k}=3$

$\log_2 k-\log_{2^2}k^{-1}=3$, $\log_2 k+\dfrac{1}{2}\log_2 k=3$

$\dfrac{3}{2}\log_2 k=3$, $\log_2 k=2$ $\therefore k=4$

$\therefore A(4, -1)$

이때 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

(직선 AC의 기울기)$=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=1$

즉, 직선 AC는 점 $A(4, -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-4$ $\therefore y=x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다. 답 -5

06 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또한, 점 $P(5, 5)$가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 삼각형 APD도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, △APD는 직각이등변삼각형이고, 넓이가 $\dfrac{9}{2}$이므로

$\triangle APD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{DP}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{AP}^2=\dfrac{9}{2}$

$\overline{AP}^2=9$ $\therefore \overline{AP}=\overline{DP}=3$ ($\because \overline{AP}>0$)

$\therefore A(2, 5)$, $D(5, 2)$

이때 점 A가 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^2=5$ $\therefore a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

점 C는 점 D와 x좌표가 같으므로 $C(5, (\sqrt{5})^5)$

$\overline{CP}=(\sqrt{5})^5-5=25\sqrt{5}-5$

△CPB도 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{2}\,\overline{CP}=25\sqrt{10}-5\sqrt{2}$ 답 ⑤

07 $1<a<b<a^a$의 각 변에 밑이 a $(a>1)$인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a a<\log_a b<\log_a a^a$이므로

$0<1<\log_a b<a$ ……㉠

$\therefore A=\log_a b>1$

$A>1$이므로 $B=(\log_a b)^2=A^2>A$

㉠에서 $1<\log_a b<a$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a(\log_a b)<\log_a a$이므로

$0<\log_a(\log_a b)<1$

$\therefore 0<C<1$

따라서 세 수 A, B, C의 대소 관계는 $C<A<B$이다.

답 ④

BLACKLABEL 특강 참고

위와 같은 로그의 대소 관계 문제는 a, b에 적당한 숫자를 대입해서 푸는 것도 하나의 방법이다. 항상 성립하는 대소 관계를 찾는 문제이므로 임의로 설정한 값에 대해서도 성립해야 한다.
예를 들어, $a=3$, $b=3^2=9$라 하면 $1<a<b<a^a$이 성립하고,

$A=\log_a b=\log_3 9=2$,

$B=(\log_a b)^2=(\log_3 9)^2=2^2=4$,

$C=\log_a(\log_a b)=\log_3(\log_3 9)=\log_3 2<1$

이므로 $C<A<B$이다.

08

(i) $a>1$일 때,

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-1)=\log_a 3+7>\frac{11}{2}$ ($\because \log_a 3>0$)

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<1$일 때,

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(11)=\log_a 27+7=\frac{11}{2}$

$3\log_a 3=-\frac{3}{2}$, $\log_a 3=-\frac{1}{2}$

$a^{-\frac{1}{2}}=3 \quad \therefore a=\frac{1}{9}$

(i), (ii)에서 $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}(2x+5)+7$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값 M은

$M=f(-1)=\log_{\frac{1}{9}} 3+7=-\frac{1}{2}+7=\frac{13}{2}$

$\therefore 36aM=36\times\frac{1}{9}\times\frac{13}{2}=26$

답 ①

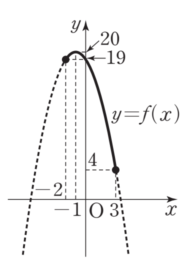
09

$y=\log_5(-x^2-2x+19)$에서

$f(x)=-x^2-2x+19$

$\quad =-(x+1)^2+20$

이라 하면 $-2\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값 20, $x=3$일 때 최솟값 4를 갖는다.



이때 $y=\log_5 f(x)$에서 (밑)$=5>1$이므로 $f(x)$가 최댓값을 가질 때 y도 최댓값을 갖고, $f(x)$가 최솟값을 가질 때 y도 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=\log_5 20$, $m=\log_5 4$이므로

$M-m=\log_5 20-\log_5 4$

$\quad =\log_5 5=1$

답 1

10

$y=(\log_3 x)^2+a\log_{27}x^2+2b+1$

$\quad =(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+2b+1$

$\log_3 x=t$로 놓으면

$y=t^2+\frac{2}{3}at+2b+1$

$\quad =\left(t+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{9}+2b+1$

이때 $x=3$, 즉 $t=1$에서 최솟값 4를 가지므로

$-\frac{a}{3}=1$, $-\frac{a^2}{9}+2b+1=4$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=9+4=13$

답 ②

11

$f(x)=4x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 f(x)=\log_2 4+\log_2 x^{-4+\log_2 x}$

$\quad =2+(-4+\log_2 x)\times\log_2 x$

$\quad =(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2 \quad$ ……㉠

$y=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2$에서

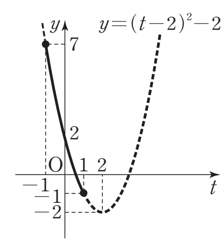
$\log_2 x=t$로 놓으면 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 $\log_2\frac{1}{2}\le\log_2 x\le\log_2 2$

즉, $-1\le t\le 1$이고

$y=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$

$-1\le t\le 1$에서 함수 $y=(t-2)^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 ㉠에서



$-1\le\log_2 f(x)\le 7$

$\therefore \frac{1}{2}\le f(x)\le 128$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$M=128$, 최솟값은 $m=\frac{1}{2}$이므로

$Mm=128\times\frac{1}{2}=64$

답 ③

12

$y=\log_2 x^{\log_2 x}+(\log_x 2)^2-\log_2 x^2-\log_x 4+8$

$\quad =(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-2(\log_2 x+\log_x 2)+8$

$\quad =(\log_2 x+\log_x 2)^2-2\times\underbrace{\log_2 x\times\log_x 2}_{=1}-2(\log_2 x+\log_x 2)+8$

$\quad =(\log_2 x+\log_x 2)^2-2(\log_2 x+\log_x 2)+6$

$\log_2 x+\log_x 2=t$로 놓으면

$x>1$에서 $\log_2 x>0$, $\log_x 2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=\log_2 x+\log_x 2\ge 2\sqrt{\log_2 x\times\log_x 2}=2$

(단, 등호는 $\log_2 x=\log_x 2$일 때 성립)

$\therefore\ y=t^2-2t+6=(t-1)^2+5\ (t\geq 2)$
따라서 주어진 함수는 $t=2$, 즉 $x=2$일 때 최솟값 6을 갖는다. 답 ②

13 진수의 조건에서
$x-2>0,\ x>0$
$\therefore\ x>2$ ……㉠
$\log_{\sqrt{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}x=4$에서
$\log_2(x-2)^2+\log_2 x=4$
$\log_2 x(x-2)^2=4$
$x(x-2)^2=16$
$x^3-4x^2+4x-16=0$
$(x-4)(x^2+4)=0$
$\therefore\ x=4\ (\because$ ㉠$)$
따라서 $a=4$이므로 $2^a=2^4=16$ 답 16

14 $(\log 2x)(\log ax)=1$에서
$(\log 2+\log x)(\log a+\log x)=1$
$(\log x)^2+(\log 2+\log a)\times\log x+\log 2\times\log a=1$
$(\log x)^2+\log 2a\times\log x+\log 2\times\log a-1=0$
$\log x=t$로 놓으면
$t^2+t\log 2a+\log 2\times\log a-1=0$
이때 주어진 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 위의 이차방정식의 두 근은 $\log\alpha,\ \log\beta$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log\alpha+\log\beta=-\log 2a$에서
$\log\alpha\beta=-\log 2a$
그런데 $\alpha\beta=3$이므로
$\log 3=\log\frac{1}{2a}$
$3=\frac{1}{2a}\qquad\therefore\ a=\frac{1}{6}$
$\therefore\ 30a=30\times\frac{1}{6}=5$ 답 ③

15 $(5x)^{\log 5}=10x$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log(5x)^{\log 5}=\log 10x$
$\log 5\times\log 5x=\log 10+\log x$
$\log 5\times(\log 5+\log x)=1+\log x$
$(\log 5)^2+\log 5\times\log x=1+\log x$
$(1-\log 5)\log x=(\log 5)^2-1$
$(1-\log 5)\log x=(\log 5-1)(\log 5+1)$
$\log x=-(\log 5+1)$
$\quad=-\log 50=\log\frac{1}{50}$
$\therefore\ x=\frac{1}{50}$ 답 ③

• 다른 풀이 •
$(5x)^{\log 5}=10x$에서 $5x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^{\log 5}=2t$
위의 식의 양변을 t로 나누면
$\frac{t^{\log 5}}{t}=2,\ t^{\log 5-1}=2$
$t^{\log\frac{1}{2}}=2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\log t}=2$ ← $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$
$\log t=-1,\ t=\frac{1}{10}$
$5x=\frac{1}{10}\qquad\therefore\ x=\frac{1}{50}$

16 $\log_3 x\times\log_2 y=6$에서 $\frac{\log x}{\log 3}\times\frac{\log y}{\log 2}=6$
$\frac{\log x}{\log 2}\times\frac{\log y}{\log 3}=6\qquad\therefore\ \log_2 x\times\log_3 y=6$
$\log_2 x=X,\ \log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은
$\begin{cases}X+Y=5\\XY=6\end{cases}$ *
$X+Y=5$에서 $Y=5-X$이므로 이 식을 $XY=6$에 대입하면
$X(5-X)=6,\ X^2-5X+6=0$
$(X-2)(X-3)=0\qquad\therefore\ X=2$ 또는 $X=3$
위의 값을 각각 $Y=5-X$에 대입하여 풀면
$\begin{cases}X=2\\Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\Y=2\end{cases}$
**이때 $X=\log_2 x,\ Y=\log_3 y$에서 $x=2^X,\ y=3^Y$이므로
$\begin{cases}x=4\\y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=9\end{cases}$
$\therefore\ \begin{cases}\alpha=4\\\beta=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}\alpha=8\\\beta=9\end{cases}$
따라서 $\alpha=4,\ \beta=27$일 때 $\beta-\alpha$가 최댓값을 가지므로
$27-4=23$ 답 23

• 다른 풀이 •
*에서 $X,\ Y$는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로
$t^2-5t+6=0,\ (t-2)(t-3)=0$
$\therefore\ t=2$ 또는 $t=3$
즉, $\begin{cases}X=2\\Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\Y=2\end{cases}$
다음은 **와 같다.

17 부등식 $\log_4\{\log_3(x^2+1)\}\leq 1$에서
진수의 조건에 의하여 $\log_3(x^2+1)>0$
(밑)$=3>1$이므로 $x^2+1>1,\ x^2>0$
$\therefore\ x\neq 0$ ……㉠
또한, $\log_4\{\log_3(x^2+1)\}\leq 1$에서 (밑)$=4>1$이므로
$\log_3(x^2+1)\leq 4$
(밑)$=3>1$이므로 $x^2+1\leq 3^4$

$x^2 \le 80$　　$\therefore -4\sqrt{5} \le x \le 4\sqrt{5}$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$-4\sqrt{5} \le x < 0$ 또는 $0 < x \le 4\sqrt{5}$

이때 $8 < 4\sqrt{5} < 9$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-8, -7, -6, \cdots, -1, 1, 2, 3, \cdots, 8$의 16개이다.

답 16

18 부등식 $(1-\log_3 a)x^2+2(1-\log_3 a)x+\log_3 a>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

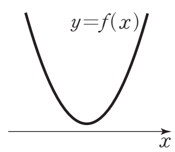
(i) $1-\log_3 a=0$, 즉 $\log_3 a=1$에서 $a=3$일 때,

$1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore a=3$

(ii) $1-\log_3 a \ne 0$, 즉 $\log_3 a \ne 1$에서 $a \ne 3$일 때,

$f(x)=(1-\log_3 a)x^2+2(1-\log_3 a)x+\log_3 a$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$1-\log_3 a>0$이므로 $\log_3 a<1$

$\log_3 a<\log_3 3$

$\therefore 0<a<3$ ($\because$ (밑)$=3>1$)　　$\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-\log_3 a)^2-(1-\log_3 a)\log_3 a<0$

$1-2\log_3 a+(\log_3 a)^2-\log_3 a+(\log_3 a)^2<0$

$2(\log_3 a)^2-3\log_3 a+1<0$

$(\log_3 a-1)(2\log_3 a-1)<0$

즉, $\frac{1}{2}<\log_3 a<1$에서 $\log_3 \sqrt{3}<\log_3 a<\log_3 3$

$\therefore \sqrt{3}<a<3$ ($\because$ (밑)$=3>1$)　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\sqrt{3}<a\le 3$

답 ⑤

19 집합 A의 부등식 $2^{2x}-2^{x+1}-8<0$을 풀면

$(2^x)^2-2\times 2^x-8<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-8<0$, $(t+2)(t-4)<0$

$\therefore 0<t<4$ ($\because t>0$)

$t=2^x$이므로 $0<2^x<4$

$\therefore x<2$

$\therefore A=\{x\,|\,x<2\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이고 $A\cup B=\{x\,|\,x\le 16\}$이므로

$B=\{x\,|\,2\le x\le 16\}$

$2\le x\le 16$에서 $1\le \log_2 x\le 4$이므로

$\log_2 x=k$로 놓으면 $1\le k\le 4$

이때 집합 B의 부등식 $(\log_2 x)^2-a\log_2 x+b\le 0$, 즉 $k^2-ak+b\le 0$의 해가 $1\le k\le 4$이므로

$(k-1)(k-4)\le 0$, $k^2-5k+4\le 0$

따라서 $a=5$, $b=4$이므로

$ab=20$

답 ④

20 $2^{4x+3}>5^{7-x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(4x+3)\log 2>(7-x)\log 5$

$\therefore (4\log 2+\log 5)x>7\log 5-3\log 2$

이때 $\log 5=\log \frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3=0.7$

이므로

$(4\times 0.3+0.7)x>7\times 0.7-3\times 0.3$

$1.9x>4$

$\therefore x>2.1\times\times\times$

따라서 정수 x의 최솟값은 3이다.

답 3

21 현재 개체 수가 5000이므로

$t=0$일 때 $N=5000$

$\therefore \log 5000=k$

지금으로부터 x년 후에 개체 수가 1000보다 적어진다 하면

$\log 5000+x\log \frac{4}{5}<\log 1000$

$\log(5\times 1000)+x\log \frac{8}{10}<\log 1000$

$\log 5+3+x(3\log 2-1)<3$

$(1-3\log 2)x>\log \frac{10}{2}$

$(1-3\times 0.3010)x>1-0.3010$

$0.097x>0.699$　　$\therefore x>7.2\times\times\times$

따라서 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 8년 후이므로 $n=8$

답 ③

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제　pp.44~49

01 ④	02 ②	03 2	04 ②	05 $\frac{1}{2}$
06 ③	07 $\frac{3}{256}$	08 ②	09 $\frac{3}{2}$	10 ⑤
11 15	12 4	13 ⑤	14 ⑤	15 ①
16 19	17 18	18 192	19 ②	20 1
21 ④	22 64	23 68	24 ③	25 ④
26 ③	27 $\frac{1}{8}$	28 4	29 ②	30 63
31 $k<3$	32 $0<k<\frac{1}{8}$	33 ④	34 ⑤	35 70
36 6년				

01 $f(x)=\log_a x$이므로

ㄱ. $f\left(\frac{x}{a}\right)=\log_a \frac{x}{a}$

$=\log_a x-\log_a a$

$=f(x)-1$ (참)

ㄴ. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a x+\log_a \frac{1}{x}$

$=\log_a x-\log_a x=0$ (거짓)

ㄷ. $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\log_a \frac{x+y}{2}$

$\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{\log_a x+\log_a y}{2}$

$=\frac{1}{2}\log_a xy=\log_a \sqrt{xy}$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

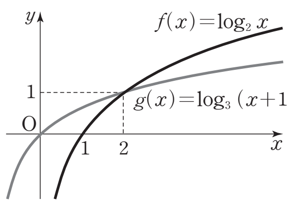
이고, $0<a<1$이므로

$\log_a \frac{x+y}{2}\le\log_a \sqrt{xy}$

$\therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

02 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_3 (x+1)$이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 양수 a에 대하여 $a+2>2$이고, 위의 그림에서 $x>2$일 때 $f(x)>g(x)$이므로

$f(a+2)>g(a+2)$

$\therefore \log_2 (a+2)>\log_3 (a+3)$ (참)

ㄴ. $\log_2 (a+1)>\log_3 (a+2)$에서

$f(a+1)>g(a+1)$

이때 위의 그림에서 $f(x)>g(x)$가 성립하려면 $x>2$이어야 하므로

$a+1>2 \qquad \therefore a>1$ (참)

ㄷ. (반례) $a=1$, $b=1$이면

$\log_2 (a+1)=\log_2 2=1$, $\log_3 (b+2)=\log_3 3=1$

즉, $\log_2 (a+1)=\log_3 (b+2)$이지만 $a>b$는 아니다. (거짓)

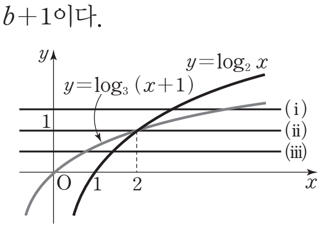
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

ㄷ. $\log_2 (a+1)=\log_3 (b+2)$에서

$f(a+1)=g(b+1)$

$f(a+1)=g(b+1)=k$라 하면 직선 $y=k$와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 (x+1)$의 교점의 x좌표가 각각 $a+1$, $b+1$이다.



이때 위의 그래프에서 직선 $y=k$가

(i)이면 $a+1<b+1$에서 $a<b$

(ii)이면 $a+1=b+1$에서 $a=b$

(iii)이면 $a+1>b+1$에서 $a>b$

즉, $\log_2 (a+1)=\log_3 (b+2)$이면 항상 $a>b$인 것은 아니다. (거짓)

03 $y=\log (10-x^2)$에서 진수의 조건에 의하여

$10-x^2>0$에서 $x^2<10 \qquad \therefore -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$

$\therefore A=\{x|-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$ ……㉠

$y=\log (\log x)$에서 진수의 조건에 의하여

$x>0$, $\log x>0$

$\log x>0$에서 $\log x>\log 1$

$\therefore x>1$ ($\because$ (밑)$=10>1$)

$\therefore B=\{x|x>1\}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $A\cap B=\{x|1<x<\sqrt{10}\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소 중에서 정수인 것은 2, 3의 2개이다. 답 2

단계	채점 기준	배점
㈎	로그의 진수의 조건을 이용하여 집합 A를 구한 경우	40%
㈏	로그의 진수의 조건을 이용하여 집합 B를 구한 경우	40%
㈐	집합 $A\cap B$를 구하고, $A\cap B$의 원소 중에서 정수의 개수를 구한 경우	20%

04 ㄱ. (반례) $a=\frac{1}{2}$일 때,

$b<c$의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}} b>\log_{\frac{1}{2}} c$

따라서 $\log_a b<\log_a c$를 만족시키지 않는다. (거짓)

ㄴ. $c=1$이면 $0<a<b<1$ ……㉠

㉠에서 $a<b<1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1 \qquad \therefore 0<\log_a b<1$

또한, ㉠에서 $a<b<1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a>\log_b b>\log_b 1 \qquad \therefore \log_b a>1$

$\therefore \log_a b<\log_b a$ (참)

ㄷ. (반례) $a=\frac{1}{2}$, $b=10$, $c=100$일 때,

$(c-a)(\log b-a)=\left(100-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{199}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{199}{4}$

$(b-a)(\log c-a)=\left(10-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{19}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{57}{4}$

$\therefore (c-a)(\log b-a)>(b-a)(\log c-a)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

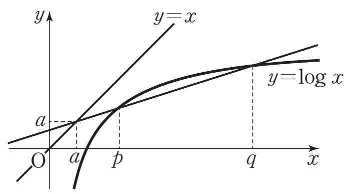
$0<a<b<c$이므로 ㄷ에서

$(c-a)(\log b-a)<(b-a)(\log c-a)$

$b-a>0$, $c-a>0$이므로

$\dfrac{\log b-a}{b-a}<\dfrac{\log c-a}{c-a}$ ……㉡

이때 직선 $y=x$ 위의 점 (a, a)와 곡선 $y=\log x$ 위의 두 점 $(b, \log b)$, $(c, \log c)$에 대하여 $\dfrac{\log b-a}{b-a}$는 두 점 (a, a), $(b, \log b)$를 지나는 직선의 기울기와 같고, $\dfrac{\log c-a}{c-a}$는 두 점 (a, a), $(c, \log c)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.



위의 그림과 같이 점 (a, a)를 지나는 직선이 곡선 $y=\log x$와 두 점에서 만날 때 교점의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면 $p<b<q$, $c>q$인 b, c에 대하여 $\dfrac{\log c-a}{c-a}<\dfrac{\log b-a}{b-a}$이므로 ㉡을 만족시키지 않는 반례가 된다.

05 곡선 $y=\log_2 x$를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프의 식은

$y=\log_2(-x)$

함수 $y=\log_2(-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프의 식은

$y=\log_2(-x+1)$ $\quad\therefore f(x)=\log_2(-x+1)$

한편, 두 점 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$에 대하여 $\triangle OAB$가 $\overline{OB}=\overline{AB}$인 이등변삼각형이려면 점 B는 선분 OA의 수직이등분선 위에 있어야 한다.

선분 OA의 수직이등분선은 직선 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 점 B는 x좌표가 $\dfrac{1}{2}$이고 함수 $f(x)=\log_2(-x+1)$의 그래프 위의 점이다.

$\therefore B\left(\dfrac{1}{2}, \log_2\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)\right)$, 즉 $B\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$

* $\therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times(1-0)\times|-1|=\dfrac{1}{2}$ 답 $\dfrac{1}{2}$

• 다른 풀이 •

$f(x)=\log_2(-x+1)$이고 점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로 $B(a, \log_2(-a+1))$이라 하자.

원점 O와 점 $A(1, 0)$에 대하여 $\overline{OB}=\overline{AB}$이므로

$\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$에서

$a^2+\{\log_2(-a+1)\}^2=(a-1)^2+\{\log_2(-a+1)\}^2$

$a^2=a^2-2a+1$, $2a=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$

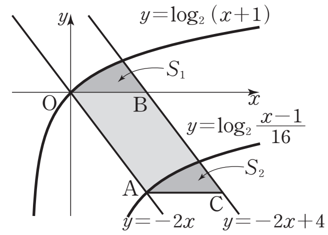
$\therefore B\left(\dfrac{1}{2}, \log_2\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)\right)$, 즉 $B\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$

다음은 *와 같다.

06 $y=\log_2\dfrac{x-1}{16}=\log_2(x-1)-\log_2 16$

$=\log_2(x-1)-4$

이므로 곡선 $y=\log_2\dfrac{x-1}{16}$은 곡선 $y=\log_2(x+1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.



위의 그림과 같이 직선 $y=-2x$와 곡선 $y=\log_2\dfrac{x-1}{16}$의 교점을 A, 직선 $y=-2x+4$와 x축의 교점을 B, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 직선 $y=-2x+4$의 교점을 C라 하자.

곡선 $y=\log_2(x+1)$과 직선 $y=-2x+4$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\log_2\dfrac{x-1}{16}$과 직선 $y=-2x+4$ 및 직선 AC로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_1=S_2$

즉, 구하는 넓이는 평행사변형 OACB의 넓이와 같다.

이때 점 A는 원점 O를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 $A(2, -4)$

$-2x+4=0$에서 $x=2$

$\therefore B(2, 0)$

$-2x+4=-4$에서 $x=4$

$\therefore C(4, -4)$

따라서 $\overline{OB}=2$이고 점 A의 y좌표는 -4이므로 평행사변형 OACB의 넓이는

$2\times4=8$ 답 ③

07 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\log_3(-x)$ $\quad\therefore f(x)=\log_3(-x)$

$P(a, ma)$, $Q(b, mb)$라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 함수 $y=\log_3 x$, $f(x)=\log_3(-x)$의 그래프 위에 있으므로

$ma=\log_3 a$, $mb=\log_3(-b)$ ……㉠

또한, 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점이 원점이므로

$\left(\dfrac{b+3a}{4}, \dfrac{mb+3ma}{4}\right)=(0, 0)$

$\therefore b=-3a$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$-3ma=\log_3 3a$, $-3ma=1+\log_3 a$

$ma=\log_3 a$를 위의 식에 대입하면

$-3\log_3 a=1+\log_3 a$, $-4\log_3 a=1$

$\log_3 a=-\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore a=3^{-\frac{1}{4}}$

위의 값을 $ma=\log_3 a$에 대입하면

$3^{-\frac{1}{4}}m=\log_3 3^{-\frac{1}{4}}$, $3^{-\frac{1}{4}}m=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore m=-\dfrac{1}{4}\times 3^{\frac{1}{4}}$

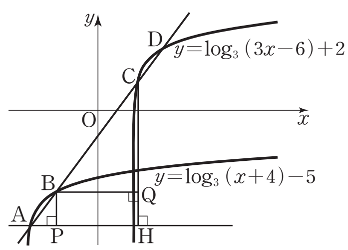
$\therefore m^4=\left(-\dfrac{1}{4}\times 3^{\frac{1}{4}}\right)^4=\dfrac{3}{256}$　　　답 $\dfrac{3}{256}$

08 $y=\log_3(3x-6)+2=\log_3(x-2)+3$
이므로 함수 $y=\log_3(3x-6)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3(x+4)-5$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

이때 네 점 A, B, C, D는 모두 기울기가 $\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{6}$인 직선 위에 있으므로 점 A를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동하면 점 C가 되고, 점 B를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 8만큼 평행이동하면 점 D가 된다.

$\therefore x_3=x_1+6,\ y_3=y_1+8$

한편, 점 C에서 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 B에서 두 선분 AH, CH에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 다음 그림과 같다.



$\triangle$APB와 $\triangle$AHC에서
$\angle$APB$=\angle$AHC$=90^\circ$, $\angle$A는 공통이므로
$\triangle$APB$\backsim\triangle$AHC (AA 닮음)
$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=1:3:1$에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:4$이고,
$\overline{AH}=6$, $\overline{CH}=8$이므로

$\overline{AP}:\overline{AH}=1:4$에서 $\overline{AP}=\dfrac{1}{4}\overline{AH}=\dfrac{1}{4}\times 6=\dfrac{3}{2}$

$\overline{BP}:\overline{CH}=1:4$에서 $\overline{BP}=\dfrac{1}{4}\overline{CH}=\dfrac{1}{4}\times 8=2$

$\therefore x_2=x_1+\dfrac{3}{2},\ y_2=y_1+2$

두 점 A, B는 함수 $y=\log_3(x+4)-5$의 그래프 위에 있으므로

$y_1=\log_3(x_1+4)-5$, $y_2=\log_3(x_2+4)-5$에서

$$y_2-y_1=\log_3\left(x_1+\dfrac{3}{2}+4\right)-5-\{\log_3(x_1+4)-5\}$$
$$=\log_3\dfrac{x_1+\dfrac{11}{2}}{x_1+4}=2$$

즉, $\dfrac{x_1+\dfrac{11}{2}}{x_1+4}=3^2$이므로

$x_1+\dfrac{11}{2}=9x_1+36,\ 8x_1=-\dfrac{61}{2}$　　$\therefore x_1=-\dfrac{61}{16}$

$$\therefore x_1+x_3=-\dfrac{61}{16}+\left(-\dfrac{61}{16}+6\right)$$
$$=-\dfrac{13}{8}$$
답 ②

서울대 선배들의 추천 PICK　1등급 비법 노하우

이 문제는 좌표평면에서 평행이동과 직선의 기울기 사이의 관계를 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다. 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점을 P라 하면 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{n}{m}$이고 점 P는 곡선 $y=g(x)$ 위에 있다. 또한, 점 A를 지나고 기울기가 $\dfrac{n}{m}$인 직선이 곡선 $y=g(x)$와 한 점에서 만날 때, 그 교점은 점 P와 같다. 도형은 어떤 시각으로 바라보느냐에 따라 다양한 풀이와 해석이 나올 수 있으므로 문제를 풀 때 여러 시각으로 보는 법을 연습해 두어야 한다.

09 A$(a,\ \log_2(a-2))$, B$(b,\ \log_2(b-2))$ $(a<b)$라 하면
$\overline{AA'}=\overline{BB'}$이므로
$-\log_2(a-2)=\log_2(b-2)$

$\log_2\dfrac{1}{a-2}=\log_2(b-2)$, $\dfrac{1}{a-2}=b-2$

$\therefore (a-2)(b-2)=1$　　$\cdots\cdots$㉠

$\triangle$ACA′과 $\triangle$BCB′에서
$\angle$CAA′$=\angle$CBB′ ($\because$ 엇각), $\overline{AA'}=\overline{BB'}$,
$\angle$AA′C$=\angle$BB′C$=90^\circ$이므로
$\triangle$ACA′$\equiv\triangle$BCB′ (ASA 합동)
$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}$
즉, 점 C는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{13}{4}$　　$\therefore a+b=\dfrac{13}{2}$

$\therefore (a-2)+(b-2)=\dfrac{5}{2}$　　$\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a-2$, $b-2$는 이차방정식 $x^2-\dfrac{5}{2}x+1=0$, 즉

$2x^2-5x+2=0$의 서로 다른 두 근이다.
$2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=2$

이때 $a<b$이므로 $a-2=\dfrac{1}{2}$, $b-2=2$

$\therefore a=\dfrac{5}{2},\ b=4$

따라서 $\overline{A'B'}$의 길이는

$b-a=4-\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$　　　답 $\dfrac{3}{2}$

• 다른 풀이 •

$\triangle$ACA′$\equiv\triangle$BCB′에서 $\overline{A'C}=\overline{B'C}$
따라서 $\overline{A'C}=\alpha$ $(\alpha>0)$라 하면

A′$\left(\dfrac{13}{4}-\alpha,\ 0\right)$, B′$\left(\dfrac{13}{4}+\alpha,\ 0\right)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_2(x-2)$ 위에 있으므로

A$\left(\dfrac{13}{4}-\alpha,\ \log_2\left(\dfrac{5}{4}-\alpha\right)\right)$, B$\left(\dfrac{13}{4}+\alpha,\ \log_2\left(\dfrac{5}{4}+\alpha\right)\right)$

$\overline{AA'}=\overline{BB'}$이므로

$-\log_2\left(\dfrac{5}{4}-\alpha\right)=\log_2\left(\dfrac{5}{4}+\alpha\right)$

$\log_2 \left(\frac{5}{4}+\alpha\right)\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)=0$

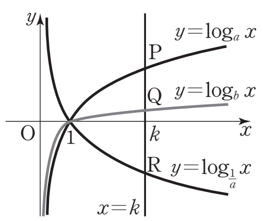
$\left(\frac{5}{4}-\alpha\right)\left(\frac{5}{4}+\alpha\right)=1$

$\frac{25}{16}-\alpha^2=1,\ \alpha^2=\frac{9}{16}\qquad \therefore\ \alpha=\frac{3}{4}\ (\because\ \alpha>0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}}=2\alpha=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

10 $0<\frac{1}{a}<1<a<b$이므로

세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=2:5$이므로 $5\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PR}}$에서

$5(\log_a k-\log_b k)=2\left(\log_a k-\log_{\frac{1}{a}} k\right)$

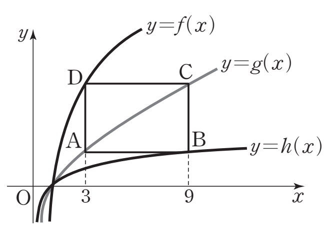
$5\log_a k-5\log_b k=4\log_a k$

$\log_a k=5\log_b k$

$\frac{\log k}{\log a}=\frac{5\log k}{\log b},\ \frac{\log b}{\log a}=5\ (\because\ \log k>0)$

$\therefore\ \log_a b=5$ 답 ⑤

11



직사각형 ABCD의 가로의 길이가 6이고, 넓이가 24이므로 세로의 길이는 4이다.

두 점 $\mathrm{A}(3,\ g(3))$, $\mathrm{C}(9,\ g(9))$가 함수 $y=g(x)$의 그래프 위에 있으므로

$g(9)-g(3)=4,\ \log_b 9-\log_b 3=4$

$\log_b 3=4\qquad\cdots\cdots$㉠

$\therefore\ b^4=3$

또한, $\overline{\mathrm{AD}}=4$이므로

$f(3)-g(3)=4,\ \log_a 3-\log_b 3=4$

$\log_a 3-4=4\ (\because$ ㉠$)$

$\log_a 3=8\qquad \therefore\ a^8=3$

$\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

$g(9)-h(9)=4,\ \log_b 9-\log_c 9=4$

$\log_b 3-\log_c 3=2$

$4-\log_c 3=2\ (\because$ ㉠$)$, $\log_c 3=2\qquad \therefore\ c^2=3$

$b^4=3,\ a^8=3$에서 $b=3^{\frac{1}{4}},\ a=3^{\frac{1}{8}}$이고, $c^4=9$이므로

이 식을 $c^4=a^mb^n$에 대입하면

$9=3^{\frac{1}{8}m}\times3^{\frac{1}{4}n},\ 3^2=3^{\frac{1}{8}m+\frac{1}{4}n}$

$\frac{1}{8}m+\frac{1}{4}n=2\qquad \therefore\ m+2n=16$

따라서 $m+2n=16$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(14,\ 1),\ (12,\ 2),\ (10,\ 3),\ \cdots,\ (2,\ 7)$

이므로 $m+n$의 최댓값은 $m=14$, $n=1$일 때

$14+1=15$ 답 15

BLACKLABEL 특강 참고

$m+2n=16$에서 $m=16-2n,\ n=\frac{16-m}{2}$

m, n이 자연수이므로 $m\ge1,\ n\ge1$에서

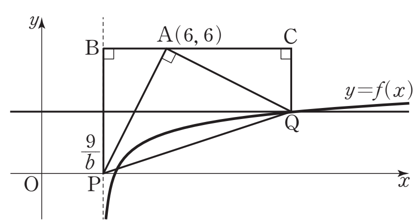
$m\le14,\ n\le\frac{15}{2}\qquad \therefore\ 1\le m\le14,\ 1\le n\le7$

또한, $m+2n=16$에서 $m+n=16-n$이므로 $m+n$의 최댓값은 $16-n$의 최댓값과 같고, n이 최소일 때 $16-n$이 최대가 된다.

따라서 $n=1$일 때, $m+n$의 최댓값은 $16-1=15$이다.

12 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=\frac{9}{b}$이므로 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{b},\ 0\right)$이다.

조건 ㈎에서 선분 AP의 중점의 y좌표와 점 Q의 y좌표는 같으므로 점 Q의 y좌표는 $\frac{6+0}{2}=3$



위의 그림과 같이 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$의 점근선과 만나는 점을 B, 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선과 만나는 점을 C라 하자.

점 Q의 좌표를 $(q,\ 3)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\left(\frac{9}{b},\ 6\right)$, 점 C의 좌표는 $(q,\ 6)$이다.

조건 ㈏에서 $\triangle\mathrm{APQ}$는 $\angle\mathrm{A}=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}},\ \angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{ACQ}=90^\circ,$

$\angle\mathrm{BPA}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAQ}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABP}\equiv\triangle\mathrm{QCA}$ (RHA 합동)

즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{QC}},\ \overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CA}}$이므로

$6-\frac{9}{b}=3,\ 6=q-6$

$\therefore\ b=3,\ q=12$

$\therefore\ \mathrm{Q}(12,\ 3)$

점 Q가 곡선 $y=\log_a(3x-9)$ 위에 있으므로

$\log_a 27=3,\ a^3=27$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=\log_3(3x-9)$이므로

$f(30)=\log_3 81=4$ 답 4

13 ㄱ. 조건 ㈏에 의하여

$f(9)=f(7+2)$
$=f(7)+1=f(5+2)+1$
$=f(5)+2=f(3+2)+2$
$=f(3)+3$

조건 ㈎에 의하여

$f(9)=f(3)+3=\log_3 3+3=4$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(9)=4$이므로

$f(f(9))=f(4)$
$=f(2+2)=f(2)+1$ ($\because$ 조건 ㈏)
$=\log_3 2+1$ ($\because$ 조건 ㈎)
$=\log_3 6$

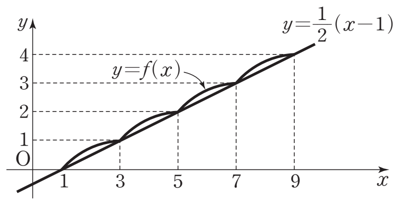
이때 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(f(9))=\log_3 6$에서 $g(g(\log_3 6))=9$ (참)

ㄷ. $2f(x)-x+1=0$에서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)$이므로

주어진 방정식의 실근은 두 함수 $y=f(x)$,

$y=\frac{1}{2}(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

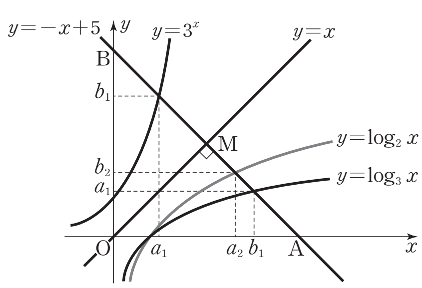


위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}(x-1)$이 서로 다른 5개의 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

14 함수 $y=3^x$의 역함수가 $y=\log_3 x$이므로 세 곡선 $y=3^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점의 좌표가 (a_1, b_1)이므로 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점의 좌표는 (b_1, a_1)이다.

$\therefore a_1<b_2$ (참)

ㄴ. 위의 그래프에서 원점과 점 (a_1, b_1)을 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 (a_2, b_2)를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$\frac{b_1-0}{a_1-0}>\frac{b_2-0}{a_2-0}$에서 $\frac{b_1}{a_1}>\frac{b_2}{a_2}$

이때 $a_1>0$, $a_2>0$이므로 위의 부등식의 양변에 a_1a_2를 곱하면

$a_2b_1>a_1b_2$ (참)

ㄷ. 원점을 O, 직선 $y=-x+5$가 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B, 원점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{OM}$은 점 O와 직선 $y=-x+5$ 위의 임의의 점 사이의 거리 중에서 가장 짧은 거리이다.

즉, 직선 $y=-x+5$ 위의 점은 점 M으로부터 멀어질수록 원점과의 거리가 더 길어지고, 앞의 그래프에서 점 (a_1, b_1)은 점 (a_2, b_2)보다 점 M으로부터 더 멀리 있으므로

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}>\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a_1^2+b_1^2>a_2^2+b_2^2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

15 함수 $f(x)=\log_a(x-1)-b$에서

$y=\log_a(x-1)-b$로 놓으면

$y+b=\log_a(x-1)$, $a^{y+b}=x-1$

$x=a^{y+b}+1$

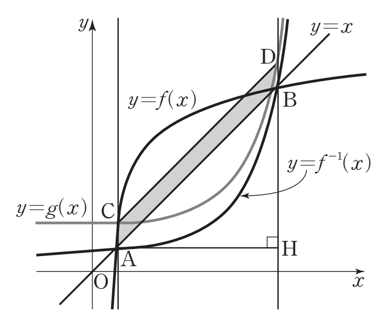
x와 y를 서로 바꾸면

$y=a^{x+b}+1$

$\therefore f^{-1}(x)=a^{x+b}+1$

$g(x)=a^{x+b}+2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

세 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 조건을 만족시키는 네 점 A, B, C, D를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}=1$

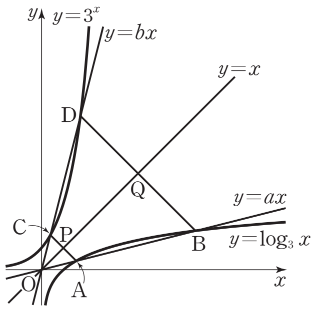
이때 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 A에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면 △BAH는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{AH}=4$

따라서 사각형 ABDC의 넓이는

$\overline{AC}\times\overline{AH}=1\times4=4$ 답 ①

16 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$이려면 두 점 A와 C, 두 점 B와 D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.



한편, 직선 $y=x$와 두 선분 AC, BD가 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 두 삼각형 AOP와 BOQ에서 $\angle$AOP는 공통이고, $\angle APO=\angle BQO=90^\circ$이므로

$\triangle AOP \backsim \triangle BOQ$ (AA 닮음)

이때 $\overline{BD}=3\overline{AC}$에서 $\overline{BQ}=3\overline{AP}$, 즉 $\overline{OB}=3\overline{OA}$이므로

점 A의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면

$A(k, \log_3 k)$, $B(3k, \log_3 3k)$

두 점 A, B가 직선 $y=ax$ 위에 있으므로

$a=\dfrac{\log_3 k}{k}=\dfrac{\log_3 3k}{3k}$ ……㉠

$3\log_3 k=\log_3 3k$에서 $3\log_3 k=1+\log_3 k$

$\log_3 k=\dfrac{1}{2}$ $\therefore k=\sqrt{3}$

㉠에서 $a=\dfrac{\log_3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ *

또한, 두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$이므로 두 점 C, D의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 3\sqrt{3}\right)$이다.

두 점 C, D가 직선 $y=bx$ 위에 있으므로

$b=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{\sqrt{3}}{6}+2\sqrt{3}=\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$

따라서 $p=6$, $q=13$이므로

$p+q=19$ 답 19

• 다른 풀이 •

*에서 두 점 A와 C, 두 점 B와 D는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 직선 AC와 BD는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식이 $y=bx$이므로

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}y$, $y=\dfrac{6}{\sqrt{3}}x=2\sqrt{3}x$

$\therefore b=2\sqrt{3}$

$\therefore a+b=\dfrac{\sqrt{3}}{6}+2\sqrt{3}=\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$

따라서 $p=6$, $q=13$이므로

$p+q=19$

BLACKLABEL 특강 참고

좌표평면에서 좌표축과 평행하지 않은 두 직선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 두 직선의 기울기의 곱은 1이다.

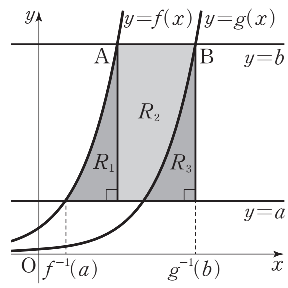
증명 직선 $l_1 : y=mx+n$ $(m\neq 0)$에 대하여 직선 l_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$x=my+n$ $\therefore y=\dfrac{1}{m}x-\dfrac{n}{m}$

따라서 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 m, $\dfrac{1}{m}$이므로

$m\times\dfrac{1}{m}=1$

17 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-3}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 세 도형 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 직선 $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$S_1=S_3$

또한, $\overline{AB}=3$이므로 조건 ㈎에서

$S_1+S_2=S_3+S_2=3(b-a)=18$

$\therefore b-a=6$ ……㉠*

조건 ㈏에서

$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면

$f(p)=a$, $g(q)=b$이므로

$2^p=a$, $2^{q-3}=b$

$\therefore p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+3=\log_2 8b$

$g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=4$에서

$q-p=4$이므로

$\log_2 8b-\log_2 a=4$, $\log_2\dfrac{8b}{a}=4$

$\dfrac{8b}{a}=2^4$, $8b=16a$

$\therefore b=2a$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=12$

$\therefore a+b=18$ 답 18

• 다른 풀이 •

*에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 교점의 x좌표를 t라 하면

$f^{-1}(a)=t$, 즉 $2^t=a$

조건 ㈏에서 $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=4$이므로

$g^{-1}(b)=t+4$, 즉 $2^{t+4-3}=2^{t+1}=b$

㉠에서 $b-a=6$이므로

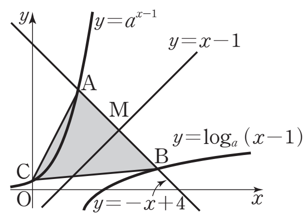
$b-a=2^{t+1}-2^t=6$

$2\times2^t-2^t=2^t=6$, $t=\log_2 6$

$a=2^{\log_2 6}=6$, $b=a+6=12$

$\therefore a+b=18$

18 곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.



이때 위의 그림과 같이 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면

$-x+4=x-1$에서 $2x=5$ $\quad\therefore x=\frac{5}{2}$

이것을 $y=x-1$에 대입하면 $y=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

점 A는 직선 $y=-x+4$ 위에 있으므로 점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$ $\left(0<k<\frac{5}{2}\right)$라 하면

$$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2\left(k-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left(\frac{5}{2}-k\right)\ \left(\because 0<k<\frac{5}{2}\right)$$

즉, $\sqrt{2}\left(\frac{5}{2}-k\right)=\sqrt{2}$에서 $\frac{5}{2}-k=1$

$\therefore k=\frac{3}{2}$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$이고 점 A는 곡선 $y=a^{x-1}$ 위에 있으므로

$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$, $a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{25}{4}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0, \frac{4}{25}\right)$이고,

점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$=\frac{96}{25}$$

$\therefore 50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$ **답** 192

19 ㄱ. $ab=1$에서 $b=\frac{1}{a}$

점 P는 곡선 $y=\log_b x$, 즉 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 위에 있고 y좌표는 1이므로

$1=\log_{\frac{1}{a}} x$에서 $x=\frac{1}{a}$ $\quad\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{a}, 1\right)$

점 Q는 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있고 y좌표는 -1이므로

$-1=\log_a x$에서 $x=\frac{1}{a}$ $\quad\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{1}{a}, -1\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{a}$ (참)

ㄴ. D$(1, 1)$이고, 점 R은 x좌표가 1인 곡선 $y=b^x$ 위에 있으므로 R$(1, b)$

$\therefore \overline{\mathrm{DR}}=1-b$

C$(1, -1)$, Q$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$이므로 $\overline{\mathrm{CQ}}=1-\frac{1}{a}$

이때 $ab<1$에서 $b<\frac{1}{a}$ $(\because a>0)$

$-b>-\frac{1}{a}$ $\quad\therefore 1-b>1-\frac{1}{a}$

$\therefore \overline{\mathrm{DR}}>\overline{\mathrm{CQ}}$ (참)

ㄷ. R$(1, b)$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{1+b^2}$

Q$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$이므로 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}$

이때 $ab>1$에서 $b>\frac{1}{a}$ $(\because a>0)$

$b^2>\left(\frac{1}{a}\right)^2$ $(\because a>0, b>0)$

$1+b^2>\left(\frac{1}{a}\right)^2+1$ $\quad\therefore \sqrt{1+b^2}>\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}$

$\therefore \overline{\mathrm{OR}}>\overline{\mathrm{OQ}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

20 $f(x)=\left(\log_a\frac{x}{10}\right)\left(\log_a\frac{x}{4}\right)$

$=(\log_a x-\log_a 10)(\log_a x-\log_a 4)$

$=(\log_a x)^2-(\log_a 10+\log_a 4)\log_a x$

$+\log_a 10\times\log_a 4$

이때 $\log_a x=t$, $\log_a 10=\alpha$, $\log_a 4=\beta$로 놓으면

$$f(a^t)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta$$

$$=\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

이므로 $t=\frac{\alpha+\beta}{2}$일 때 최솟값 $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$을 갖는다.

즉, $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=-\frac{1}{16}$에서

$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{1}{4}$

$\alpha=\log_a 10$, $\beta=\log_a 4$이므로

$\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=-\frac{1}{4}$

$\log_a \frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 또는 $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$\therefore a=\frac{25}{4}$ 또는 $a=\frac{4}{25}$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$\frac{25}{4}\times\frac{4}{25}=1$ 답 1

21

$$\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}=\frac{\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}}{\frac{1}{\log_2 xy}}=\frac{\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}}{\frac{1}{\log_2 x+\log_2 y}}$$

$\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$로 놓으면

$$(\text{주어진 식})=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a+b}}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1}{a+b}}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

이때 $x>1$, $y>1$에서 $a>0$, $b>0$, 즉 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}+2$$
$$=4\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{a}{b}\text{, 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 4이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

$\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}$

$=(\log_x 2+\log_y 2)\times\log_2 xy$

$=(\log_x 2+\log_y 2)(\log_2 x+\log_2 y)$ ……㉠

이때 1보다 큰 두 실수 x, y에 대하여 $\log_x 2>0$, $\log_y 2>0$, $\log_2 x>0$, $\log_2 y>0$이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$(\log_x 2+\log_y 2)(\log_2 x+\log_2 y)$

$=\{(\sqrt{\log_x 2})^2+(\sqrt{\log_y 2})^2\}\{(\sqrt{\log_2 x})^2+(\sqrt{\log_2 y})^2\}$

$\ge(\sqrt{\log_x 2}\times\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{\log_y 2}\times\sqrt{\log_2 y})^2$

$=(1+1)^2=4$ ……㉡

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{\sqrt{\log_2 x}}{\sqrt{\log_x 2}}=\frac{\sqrt{\log_2 y}}{\sqrt{\log_y 2}}\text{, 즉 } x=y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 ㉠, ㉡에서 $\frac{\log_x 2+\log_y 2}{\log_{xy} 2}\ge 4$이므로 구하는 최솟값은 4이다.

22

진수의 조건에 의하여 $x>0$

$y=\frac{x^{-3\log_2 x}}{16x^{12}}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y=\log_2\frac{x^{-3\log_2 x}}{16x^{12}}$$
$$=\log_2 x^{-3\log_2 x}-\log_2 16x^{12}$$
$$=-3(\log_2 x)^2-12\log_2 x-4\ (\because x>0)$$
$$=-3(\log_2 x+2)^2+8$$

이므로 $\log_2 y$는 $\log_2 x=-2$, 즉 $x=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 8을 갖는다.

이때 $\log_2 y$에서 (밑)$=2>1$이므로 $\log_2 y$의 값이 최대일 때 y의 값도 최대이다.

즉, 함수 $y=\frac{x^{-3\log_2 x}}{16x^{12}}$은 $x=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $2^8=256$을 가지므로

$a=\frac{1}{4}$, $b=256$

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times256=64$ 답 64

23

$f(x)=\log_5(-|3x-2|+5)$에서 진수의 조건에 의하여

$-|3x-2|+5>0$

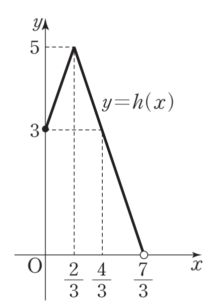
$|3x-2|<5$, $-5<3x-2<5$

$\therefore 0\le x<\frac{7}{3}$ ($\because x\ge0$)

$0\le x<\frac{7}{3}$에서 $h(x)=-|3x-2|+5$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}3x+3 & \left(0\le x<\frac{2}{3}\right)\\ -3x+7 & \left(\frac{2}{3}\le x<\frac{7}{3}\right)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=\log_5 h(x)$에서 (밑)$=5>1$이므로 함수 $h(x)$의 값이 최대일 때 함수 $f(x)$의 값도 최대이고, 함수 $h(x)$의 값이 최소일 때 함수 $f(x)$의 값도 최소이다.

(i) $0<a<\frac{2}{3}$일 때,

함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각

$h(a)=3a+3$, $h(0)=3$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$\log_5(3a+3)$, $\log_5 3$
이 두 수의 차가 2이므로
$\log_5(3a+3)-\log_5 3=2$
$\log_5(a+1)=2$, $a+1=25$ $\quad\therefore a=24$
그런데 $0<a<\frac{2}{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

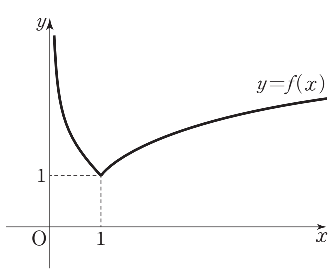
(ii) $\frac{2}{3}\le a<\frac{4}{3}$일 때,
함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$h\left(\frac{2}{3}\right)=5$, $h(0)=3$
이므로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$\log_5 5=1$, $\log_5 3$
그런데 이 두 수의 차는 $1-\log_5 3\neq 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\frac{4}{3}\le a<\frac{7}{3}$일 때,
함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$h\left(\frac{2}{3}\right)=5$, $h(a)=-3a+7$
이므로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각
$\log_5 5=1$, $\log_5(-3a+7)$
이 두 수의 차가 2이므로
$1-\log_5(-3a+7)=2$, $\log_5(-3a+7)=-1$
$-3a+7=\frac{1}{5}$ $\quad\therefore a=\frac{34}{15}$

(i), (ii), (iii)에서 $a=\frac{34}{15}$이므로
$30a=68$

답 68

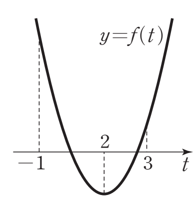
24 $f(x)=\begin{cases}-\log_2\frac{x}{2} & (0<x<1)\\ \log_2 2x & (x\ge 1)\end{cases}$
$=\begin{cases}-\log_2 x+1 & (0<x<1)\\ \log_2 x+1 & (x\ge 1)\end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $a\le -1$일 때, $a+1\le 0$이므로 함수 $f(x)$가 정의되지 않는다.
(ii) $-1<a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값이 존재하지 않는다.
(iii) $0<a-1<1$, 즉 $1<a<2$일 때,
$a-1<1<a+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.
① 함수 $f(x)$가 $x=a+1$에서 최댓값을 가지면
$f(a+1)+1=5$이어야 하므로
$\log_2(a+1)+1+1=5$
$\log_2(a+1)=3$, $a+1=8$
$\therefore a=7$
그런데 $1<a<2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
② 함수 $f(x)$가 $x=a-1$에서 최댓값을 가지면
$f(a-1)+1=5$이어야 하므로
$-\log_2(a-1)+1+1=5$
$\log_2(a-1)=-3$, $a-1=\frac{1}{8}$
$\therefore a=\frac{9}{8}$
(iv) $a-1\ge 1$, 즉 $a\ge 2$일 때,
$1\le a-1<a+1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서 최댓값을 갖고, $x=a-1$에서 최솟값을 갖는다.
$f(a+1)+f(a-1)=5$이어야 하므로
$\{\log_2(a+1)+1\}+\{\log_2(a-1)+1\}=5$
$\log_2(a^2-1)=3$, $a^2-1=8$
$a^2=9$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a\ge 2$)
(i)~(iv)에서 모든 실수 a의 값의 곱은
$\frac{9}{8}\times 3=\frac{27}{8}$

답 ③

25 $(\log_3 x)^2-\log_3 x^4+k=0$에서
$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+k=0$
$\log_3 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은 $t^2-4t+k=0$
이때 주어진 방정식의 두 근이 $\frac{1}{3}$과 27 사이에 있고
$\log_3\frac{1}{3}=-1$, $\log_3 27=3$이므로 t에 대한 이차방정식
$t^2-4t+k=0$의 두 근이 -1과 3 사이에 있어야 한다.
$f(t)=t^2-4t+k$라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4-k\ge 0$ $\quad\therefore k\le 4$
(ii) $f(-1)>0$에서 $5+k>0$이므로 $k>-5$
$f(3)>0$에서 $-3+k>0$이므로 $k>3$
$\therefore k>3$
(i), (ii)에서 $3<k\le 4$

답 ④

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

로그방정식을 치환하여 풀 때 반드시 치환하는 것이 무엇인지 명확히 표시를 하고, 치환한 변수의 범위 또한 표시해 놓아야 한다. 위의 문제는 $\log_3 x$를 t로 치환하면 한결 쉽게 풀 수 있는데 이때의 x의 값은 $\frac{1}{3}$과 27 사이에 있으므로 t의 값은 -1과 3 사이에 있음에 주의하자.
치환을 이용하면 이 문제는 t에 대한 이차방정식 문제가 되므로 보다 쉽게 k의 값의 범위를 구할 수 있다.

26 $\begin{cases} \dfrac{2}{\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_y 2}=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 밑의 조건에 의하여 $x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$이고 밑의 변환 공식에 의하여

$2\log_4 x+\log_2 y=3$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=3 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에서 진수의 조건에 의하여 $x>0$, $y>0$이고

$\log_2 3+\log_2 x+2\log_2 y=\log_2(2^4\times3)$에서

$\log_2 3+\log_2 x+2\log_2 y=4+\log_2 3$

$\therefore \log_2 x+2\log_2 y=4 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$\log_2 x=2$, $\log_2 y=1 \quad \therefore x=4,\ y=2$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=16+4=20$ 답 ③

• 다른 풀이 •

㉠에서 밑의 조건에 의하여 $x>0$, $x\neq1$, $y>0$, $y\neq1$이고 밑의 변환 공식에 의하여

$2\log_4 x+\log_2 y=3$

$\log_2 x+\log_2 y=3$, $\log_2 xy=3$

$\therefore xy=8$

㉡에서 $\log_2 3x+2\log_2 y=\log_2 48$

$\log_2 3x+\log_2 y^2=\log_2 48$

$\log_2 3xy^2=\log_2 48$

$3xy^2=48 \quad \therefore xy^2=16$

위의 식에 $xy=8$을 대입하면

$8y=16 \quad \therefore y=2,\ x=4$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=16+4=20$

27 방정식의 두 근을 α, α^2이라 하자.

$(\log_2 x)^2-6a\log_2 x+a+1=0$에서 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-6at+a+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 t_1, t_2라 하면

$t_1=\log_2\alpha$, $t_2=\log_2\alpha^2=2\log_2\alpha=2t_1$

즉, 이차방정식 ㉠의 두 근은 t_1, $2t_1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+2t_1=6a$에서 $3t_1=6a \quad \therefore t_1=2a$

$t_1\times2t_1=a+1$에서 $2{t_1}^2=a+1$

위의 식에 $t_1=2a$를 대입하면

$2(2a)^2=a+1$, $8a^2-a-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{1}{8}$이다. 답 $\frac{1}{8}$

28 방정식 $3\log_2[x]=2(x-1)$의 서로 다른 실근은 두 함수 $y=3\log_2[x]$, $y=2(x-1)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$y=3\log_2[x]$에서 진수의 조건에 의하여 $[x]>0$

$[x]$는 정수이므로 $[x]\geq1$에서 $x\geq1$

(ⅰ) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=0$

(ⅱ) $2\leq x<3$일 때, $[x]=2$

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3$

(ⅲ) $3\leq x<4$일 때, $[x]=3$

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 3=\log_2 27$

이때 $\log_2 16<\log_2 27<\log_2 32$이므로

$4<\log_2 27<5$

(ⅳ) $4\leq x<5$일 때, $[x]=4$

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=6$

(ⅴ) $5\leq x<6$일 때, $[x]=5$

함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 5=\log_2 125$

이때 $\log_2 64<\log_2 125<\log_2 128$이므로

$6<\log_2 125<7$

(ⅵ) $6\leq x<7$일 때, $[x]=6$

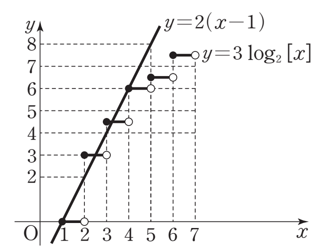
함수 $y=3\log_2[x]$에서 $y=3\log_2 6=\log_2 216$

이때 $\log_2 128<\log_2 216<\log_2 256$이므로

$7<\log_2 216<8$

⋮

(ⅰ)~(ⅵ)에서 두 함수 $y=3\log_2[x]$, $y=2(x-1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 4

• 다른 풀이 •

$3\log_2[x]$에서 진수의 조건에 의하여 $[x]>0$

이때 $[x]$는 정수이므로 $[x]\geq1 \quad \therefore x\geq1$

(ⅰ) $1\leq x<2$일 때,

$[x]=1$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 1=2(x-1)$, $2(x-1)=0$

$\therefore x=1$

(ⅱ) $2\leq x<3$일 때,

$[x]=2$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 2=2(x-1)$, $2(x-1)=3$

$2x=5 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

(ⅲ) $3\leq x<4$일 때,

$[x]=3$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 3=2(x-1)$, $2x=3\log_2 3+2$

$2x=\log_2 108 \quad \therefore x=\frac{1}{2}\log_2 108$

이때 $\log_2 64<\log_2 108<\log_2 128$에서

$6<\log_2 108<7 \qquad \therefore 3<\frac{1}{2}\log_2 108<\frac{7}{2}$

즉, $x=\frac{1}{2}\log_2 108$은 주어진 방정식의 해이다.

(iv) $4\le x<5$일 때,

$[x]=4$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 4=2(x-1)$, $6=2(x-1)$

$2x=8 \qquad \therefore x=4$

(v) $n\ge 5$에 대하여 $n\le x<n+1$일 때,

$[x]=n$이므로 이 값을 주어진 방정식에 대입하면

$3\log_2 n=2(x-1)$, $2x=3\log_2 n+2$

$2x=\log_2 4n^3 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}\log_2 4n^3$

5 이상의 자연수 n에 대하여 $4n^3<4^n$ *

즉, $\frac{1}{2}\log_2 4n^3<n$이므로 주어진 방정식의 근은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 주어진 방정식의 근은

1, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\log_2 108$, 4의 4개이다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

수학적 귀납법을 이용하여 *를 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=5$일 때,

(좌변)$=4\times 5^3=500$, (우변)$=4^5=1024$에서

(좌변)$<$(우변)이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k>5)$일 때,

$4k^3<4^k$이 성립한다고 가정하면 $\frac{1}{k}<\frac{1}{5}$이므로

$4(k+1)^3=4k^3\left(1+\frac{1}{k}\right)^3<4k^3\left(\frac{6}{5}\right)^3<4^k\times 4=4^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 *가 성립한다.

29 해결단계

❶ 단계	로그의 진수의 조건을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.
❷ 단계	주어진 로그방정식을 정리하여 x에 대한 이차방정식을 만든다.
❸ 단계	a의 값의 범위에 따라 ❶단계에서 구한 x의 값의 범위에서 ❷단계에서 구한 이차방정식이 오직 하나의 실근을 갖기 위한 a의 값의 범위를 구한다.

$\log_9(2x^2-8)=\log_3(x-a)$에서 진수의 조건에 의하여

$2x^2-8>0$에서 $x^2-4>0$, $(x+2)(x-2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>2$ ……㉠

$x-a>0$에서 $x>a$ ……㉡

또한, 주어진 방정식에서

$\log_9(2x^2-8)=\log_{3^2}(x-a)^2$

$\log_9(2x^2-8)=\log_9(x-a)^2$, $2x^2-8=(x-a)^2$

$x^2+2ax-8-a^2=0$

$f(x)=x^2+2ax-8-a^2$

$\quad=(x+a)^2-2a^2-8$

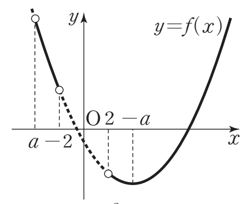
이라 하면 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위에서 이차방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

(i) $a<-2$일 때,

㉠, ㉡에서 $a<x<-2$ 또는 $x>2$ ……㉢

$a<-2$에서 $-a>2$이고, $f(-a)=-2a^2-8<0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 $x>2$에서 반드시 실근을 갖는다.

즉, ㉢에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2)\ge 0$, $f(2)\le 0$

이때 $f(2)=4+4a-8-a^2=-(a-2)^2$이므로 모든 실수 a에 대하여 $f(2)\le 0$을 만족시킨다.

또한, $f(-2)=4-4a-8-a^2\ge 0$에서

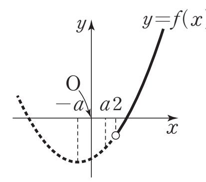
$a^2+4a+4\le 0$, $(a+2)^2\le 0 \qquad \therefore a=-2$

그런데 $a<-2$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-2\le a\le 2$일 때,

㉠, ㉡에서 $x>2$

$x>2$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $f(2)<0$



$f(2)=4+4a-8-a^2<0$에서

$a^2-4a+4>0$, $(a-2)^2>0$

$\therefore a\ne 2$

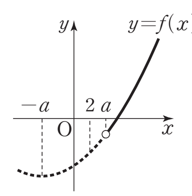
따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$-2\le a<2$

(iii) $a>2$일 때,

㉠, ㉡에서 $x>a$

$x>a$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(a)<0$

$f(a)=a^2+2a^2-8-a^2<0$에서

$2a^2-8<0$, $a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$

그런데 $a>2$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$-2\le a<2$

답 ②

30

$\log_4 x^2+\log_{\sqrt{x}} 8\le 7$에서 $x\ge 2$이므로

$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 4}+\frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{x}}\le 7$

$\frac{2\log_2 x}{2}+\frac{3}{\frac{1}{2}\log_2 x}\le 7$

$\log_2 x+\frac{6}{\log_2 x}\le 7 \qquad$ ……㉠

이때 $x\ge 2$이므로 $\log_2 x\ge 1$

㉠의 양변에 $\log_2 x$를 곱하면

$(\log_2 x)^2+6\le 7\log_2 x$

$(\log_2 x)^2-7\log_2 x+6\le 0$

$(\log_2 x-1)(\log_2 x-6)\le 0$

$\therefore 1\le \log_2 x\le 6$

(밑)$=2>1$이므로

$2\le x\le 2^6$

따라서 구하는 2 이상의 자연수 x의 개수는

$2^6-2+1=64-2+1$

$=63$

답 63

31 $k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+4$에서

$\log_2 t=x$로 놓으면

$t>1$에서 $\log_2 t>0$이므로 $x>0$이고,

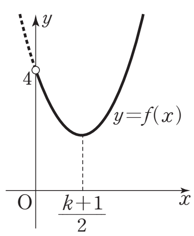
$kx<x^2-x+4$

$\therefore x^2-(k+1)x+4>0$

이때 $f(x)=x^2-(k+1)x+4$라 하고, $x>0$에서 부등식 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 경우를 다음과 같이 나누어 보자.

(i) $\dfrac{k+1}{2}>0$, 즉 $k>-1$인 경우

$x>0$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D<0$이어야 하므로

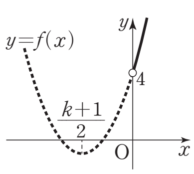
$D=(k+1)^2-16<0$, $k^2+2k-15<0$

$(k+5)(k-3)<0$ $\quad\therefore -5<k<3$

그런데 $k>-1$이므로 $-1<k<3$이다.

(ii) $\dfrac{k+1}{2}\le 0$, 즉 $k\le -1$인 경우

$x>0$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하도록 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$f(0)=4>0$이므로 부등식 $f(x)>0$은 항상 성립한다.

따라서 $k\le -1$이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$k<3$

답 $k<3$

• 다른 풀이 •

$t>1$에서 $\log_2 t>0$이므로 부등식

$k\log_2 t<(\log_2 t)^2-\log_2 t+4$의 양변을 $\log_2 t$로 나누면

$k<\log_2 t-1+\dfrac{4}{\log_2 t}=\log_2 t+\dfrac{4}{\log_2 t}-1$

$\log_2 t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_2 t+\dfrac{4}{\log_2 t}\ge 2\sqrt{\log_2 t\times\dfrac{4}{\log_2 t}}=4$

(단, 등호는 $t=4$일 때 성립)

이므로

$\log_2 t+\dfrac{4}{\log_2 t}-1\ge 4-1=3$

따라서 $t>1$인 임의의 실수 t에 대하여 조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $k<3$이다.

32 (i) 이차방정식 $x^2+x+k=0$이 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

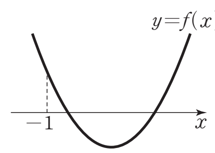
$D=1-4k\ge 0$ $\quad\therefore k\le\dfrac{1}{4}$

(ii) $\log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)<-3$에서

진수의 조건에 의하여 $\alpha+1>0$, $\beta+1>0$

$\therefore \alpha>-1$, $\beta>-1$

이때 $f(x)=x^2+x+k$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 실근 α, β가 모두 -1보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(-1)>0$이므로

$f(-1)=1-1+k>0$ $\quad\therefore k>0$

(iii) $\log_2(\alpha+1)+\log_2(\beta+1)<-3$에서

$\log_2(\alpha+1)(\beta+1)<\log_2 2^{-3}$

(밑)$=2>1$이므로 $(\alpha+1)(\beta+1)<\dfrac{1}{8}$

$\alpha\beta+\alpha+\beta+1<\dfrac{1}{8}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

이때 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=k$

이것을 ㉠에 대입하면

$k-1+1<\dfrac{1}{8}$ $\quad\therefore k<\dfrac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{1}{8}$

답 $0<k<\dfrac{1}{8}$

33 집합 A의 $3^{\log x}\times x^{\log 3}-(3^{\log x}+x^{\log 3})-3<0$에서

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로

$(3^{\log x})^2-2\times 3^{\log x}-3<0$

$(3^{\log x}-3)(3^{\log x}+1)<0$

이때 $3^{\log x}+1>0$이므로

$3^{\log x}-3<0$, $\log x<1$

$\therefore 0<x<10$

$\therefore A=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

집합 B의 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^{2a}+a^2-1\ge 0$에서

$(\log_2 x)^2-2a\log_2 x+a^2-1\ge 0$

$(\log_2 x-a+1)(\log_2 x-a-1)\ge 0$

$\log_2 x\le a-1$ 또는 $\log_2 x\ge a+1$

$\therefore 0<x\le 2^{a-1}$ 또는 $x\ge 2^{a+1}$

$\therefore B=\{x\,|\,0<x\le 2^{a-1}$ 또는 $x\ge 2^{a+1}$, x는 자연수$\}$

(i) $a\le -1$ 또는 $a\ge 5$일 때,

$A\subset B$이므로 $n(A\cap B)=n(A)=9$

(ii) $a=0$일 때,

$B=\left\{x\,\middle|\,0<x\le\frac{1}{2}\text{ 또는 } x\ge 2\right\}=\{2, 3, 4, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{2, 3, 4, \cdots, 9\}$

$\therefore n(A\cap B)=8$

(iii) $a=1$일 때,

$B=\{x\,|\,0<x\le 1$ 또는 $x\ge 4\}=\{1, 4, 5, 6, \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore n(A\cap B)=7$

(iv) $a=2$일 때,

$B=\{x\,|\,0<x\le 2$ 또는 $x\ge 8\}=\{1, 2, 8, 9, 10, \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 2, 8, 9\}$

$\therefore n(A\cap B)=4$

(v) $a=3$일 때,

$B=\{x\,|\,0<x\le 4$ 또는 $x\ge 16\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore n(A\cap B)=4$

(vi) $a=4$일 때,

$B=\{x\,|\,0<x\le 8$ 또는 $x\ge 32\}$

$=\{1, 2, 3, \cdots, 8, 32, 33, 34, \cdots\}$

이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$

$\therefore n(A\cap B)=8$

(i)~(vi)에서 $n(A\cap B)=4$를 만족시키는 모든 정수 a의 값은 2, 3이므로 그 곱은

$2\times 3=6$

답 ④

34 $|\log_2 x-\log_2 5|+\log_2 y\le 2$에서

$\left|\log_2\frac{x}{5}\right|+\log_2 y\le 2$ ……㉠

(i) $\log_2\frac{x}{5}<0$일 때,

(밑)$=2>1$이므로 $0<\frac{x}{5}<1$

$\therefore 0<x<5$ ……㉡

또한, ㉠에서 $-\log_2\frac{x}{5}+\log_2 y\le 2$

$\log_2\frac{5y}{x}\le\log_2 4$에서 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{5y}{x}\le 4$ $\quad\therefore 5y\le 4x$ ($\because x>0$) ……㉢

㉡, ㉢을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$

의 6개이다.

(ii) $\log_2\frac{x}{5}\ge 0$일 때,

(밑)$=2>1$이므로 $\frac{x}{5}\ge 1$ $\quad\therefore x\ge 5$ ……㉣

또한, ㉠에서 $\log_2\frac{x}{5}+\log_2 y\le 2$이므로

$\log_2\frac{xy}{5}\le\log_2 4$이고 (밑)$=2>1$이므로

$\frac{xy}{5}\le 4$ $\quad\therefore xy\le 20$ ……㉤

㉣, ㉤을 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$,

$(6, 3)$, $(7, 1)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$,

$(9, 2)$, $(10, 1)$, $(10, 2)$, $(11, 1)$, $(12, 1)$, $(13, 1)$,

$\cdots$, $(20, 1)$

의 25개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$6+25=31$

답 ⑤

35 $R_t=\log_3\frac{3^{100}}{(t+1)^k}=100-k\log_3(t+1)$

4개월이 지난 후 남아 있는 향기 강도가 82.5이므로

$R_4=100-k\log_3 5=82.5$

$\therefore k\log_3 5=\frac{35}{2}$

이때 $\log_3 5=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{1-\log 2}{\log 3}=\frac{0.7}{0.48}=\frac{35}{24}$이므로

$\frac{35}{24}k=\frac{35}{2}$ $\quad\therefore k=12$

15개월이 지난 후 남아 있는 향기 강도는

$R_{15}=100-12\log_3 16=100-48\log_3 2$

이때 $\log_3 2=\frac{\log 2}{\log 3}=\frac{0.3}{0.48}=\frac{5}{8}$이므로

$R_{15}=100-48\times\frac{5}{8}=70$

답 70

36 2026년의 대학예산을 A, 시설투자비를 B라 하면

$B=\frac{4}{100}A$

대학예산과 시설투자비의 증가율은 각각 매년 12 %, 20 %이므로 2026년부터 n년 후의 대학예산은

$\left(1+\frac{12}{100}\right)^n A=1.12^n A$

2026년부터 n년 후의 시설투자비는

$\left(1+\frac{20}{100}\right)^n B=1.2^n B$

대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6 % 이상이 되려면

$$\frac{1.2^n B}{1.12^n A} \ge \frac{6}{100}$$

$$\frac{1.2^n \times \frac{4}{100}A}{1.12^n \times A} \ge \frac{6}{100},\ \left(\frac{1.2}{1.12}\right)^n \ge \frac{3}{2}$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면 (밑)$=10>1$이므로

$n \log \frac{1.2}{1.12} \ge \log \frac{3}{2}$에서

$$n \ge \frac{\log 3-\log 2}{\log 1.2-\log 1.12}$$
$$=\frac{0.4771-0.301}{0.0792-0.0492}$$
$$=\frac{0.1761}{0.03}=5.87$$

따라서 2026년을 기준으로 6년 후부터 대학예산에서 시설 투자비가 차지하는 비율이 6 % 이상이 된다. **답** 6년

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.50~51

01 ⑤	02 4	03 6	04 ①	05 $2\sqrt{2}$
06 $\frac{1}{1024}$	07 19	08 6	09 5	10 100
11 6				

01 해결단계

❶ 단계	점 B의 y좌표가 1보다 크고, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$가 x의 값이 감소하면 y의 값도 감소하는 함수임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	점 A의 y좌표가 1보다 작고, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$이 x의 값이 감소하면 y의 값도 감소하는 함수임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	주어진 네 곡선 사이의 관계를 이해하고, ㄴ에서 구한 것을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 점 B는 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위에 있으므로 진수의 조건에 의하여 $b>0$

또한, 점 B는 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로 $b>0$이면

$2^b>1$ ……㉠

한편, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 위의 점 중에서 y좌표가 1인 점은

$1=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 ㉠에 의하여 $b<\frac{1}{2}$

$\therefore 0<b<\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 점 A의 x좌표는 음수이므로

$a<0$에서 $2^a<1$ ……㉡

한편, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 위의 점 중에서 y좌표가 1인 점은

$1=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$에서 $x=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore \left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

이때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$은 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로 ㉡에 의하여

$a>-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore 2^a>2^{-\frac{1}{2}}$ ($\because$ (밑)$=2>1$)

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<2^a<1$ (참)

ㄷ. 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^{x-1}$이고, 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$이므로 두 점 A, C의 y좌표는 같아야 한다.

즉, $2^a=\log_{\frac{1}{2}} c$

이때 ㄴ에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}<2^a<1$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\log_{\frac{1}{2}} c<1$

$\therefore \frac{1}{2}<c<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\left(\because (\text{밑})=\frac{1}{2}<1\right)$

한편, 점 $\mathrm{C}(c,\ \log_{\frac{1}{2}} c)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

$$d=\frac{|c-\log_{\frac{1}{2}} c|}{\sqrt{2}}=\frac{\log_{\frac{1}{2}} c-c}{\sqrt{2}}$$

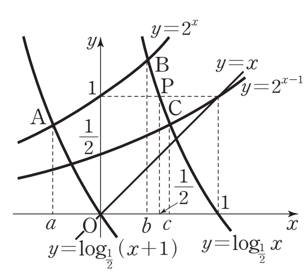
이때 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로 y는 x가 최대일 때 최솟값을 갖고, x가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}<\log_{\frac{1}{2}} c-c<\frac{1}{2}$이므로

$d<\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

BLACKLABEL 특강 참고



위의 그림과 같이 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$은 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프 위에 있고, 점 P와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

이때 점 C와 직선 $y=x$ 사이의 거리는 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리보다 작으므로 $\frac{\sqrt{2}}{4}$보다 작다.

02 해결단계

❶단계	로그의 성질을 이용하여 조건 (가), (나)에 주어진 식을 간단히 정리한다.
❷단계	❶단계에서 구한 두 식을 연립하여 x^2+3y^2의 값을 구한다.

조건 (가)에서

$\log_2(x^2-2xy+y^2)-\log_2(x^2-3xy+y^2)=2$

$\log_2\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=2$, $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=4$

$x^2-2xy+y^2=4x^2-12xy+4y^2$

$3x^2-10xy+3y^2=0$, $(3x-y)(x-3y)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}y$ 또는 $x=3y$

그런데 $x>y>0$이므로

$x=3y$ ……㉠

한편, 조건 (나)에서 $|\log_a x|=|\log_a y|$이므로

$\log_a x=\pm\log_a y$

그런데 $x>y$이므로 $\log_a x\neq\log_a y$이다.

즉, $\log_a x=-\log_a y$에서

$\log_a x=\log_a\dfrac{1}{y}$, $x=\dfrac{1}{y}$ $\qquad\therefore xy=1$

㉠을 위의 식에 대입하면 $3y^2=1$ ← $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\ (\because y>0)$이므로 $x=\sqrt{3}$

$\therefore x^2+3y^2=(3y)^2+3y^2\ (\because ㉠)$

$=12y^2=4\times3y^2=4$

답 4

03 해결단계

❶단계	$n=1, 2, 3, 4$를 대입하여 네 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$, $y=f_4(x)$를 구하고, 그래프를 그린다.
❷단계	세 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}}x$, $k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그린다.
❸단계	❶, ❷단계에서 그린 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하고, $a+b+c$의 값을 구한다.

$f_n(x)=-|x-1|+\dfrac{n+4}{4}\left(\text{단, } 1-\dfrac{n}{4}\le x\le1+\dfrac{n}{4}\right)$

에서 n 대신에 1, 2, 3, 4를 대입하면

$f_1(x)=-|x-1|+\dfrac{5}{4}\left(\text{단, }\dfrac{3}{4}\le x\le\dfrac{5}{4}\right)$

$f_2(x)=-|x-1|+\dfrac{3}{2}\left(\text{단, }\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\right)$

$f_3(x)=-|x-1|+\dfrac{7}{4}\left(\text{단, }\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{7}{4}\right)$

$f_4(x)=-|x-1|+2$ (단, $0\le x\le2$)

이때 $1-\dfrac{n}{4}\le x\le1+\dfrac{n}{4}$에서

$-\dfrac{n}{4}\le x-1\le\dfrac{n}{4}$

$|x-1|\le\dfrac{n}{4}$, $-|x-1|\ge-\dfrac{n}{4}$

$\therefore -|x-1|+\dfrac{n+4}{4}\ge1$

즉, 함수 $f_n(x)$의 최솟값은 1이다.

이때 세 곡선 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}}x$,

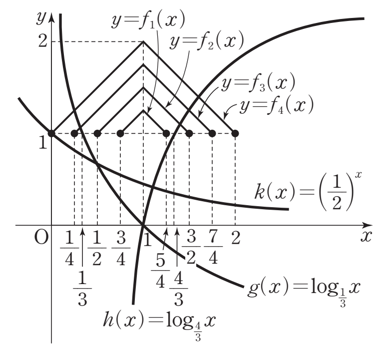
$k(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 y좌표가 1인 점을 각각 구하면

$1=\log_{\frac{1}{3}}x$에서 $x=\dfrac{1}{3}$ $\qquad\therefore\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

$1=\log_{\frac{4}{3}}x$에서 $x=\dfrac{4}{3}$ $\qquad\therefore\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$

$1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$에서 $x=0$ $\qquad\therefore(0, 1)$

세 곡선 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$, $h(x)=\log_{\frac{4}{3}}x$, $k(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$과 네 함수 $y=f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, 4)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



따라서 $a=2$, $b=3$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+3+1=6$

답 6

04 해결단계

❶단계	세 실수 a, b, c가 어떤 방정식의 실근이 되는지 파악한다.
❷단계	로그를 이용하여 ❶단계에서 세운 방정식을 로그방정식으로 나타낸다.
❸단계	필요한 지수함수와 로그함수의 그래프를 그린 후, 세 실수 a, b, c를 좌표평면 위에 나타내어 대소 관계를 구한다.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^a=2a$이므로 a는 방정식 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=2x$의 근이다.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2b}=b$의 양변에 밑이 $\dfrac{1}{3}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2b}=\log_{\frac{1}{3}}b$ $\qquad\therefore\log_{\frac{1}{3}}b=2b$

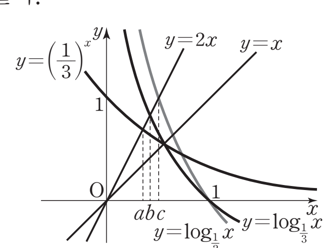
따라서 b는 방정식 $\log_{\frac{1}{3}}x=2x$의 근이다.

또한, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2c}=c$의 양변에 밑이 $\dfrac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2c}=\log_{\frac{1}{2}}c$ $\qquad\therefore\log_{\frac{1}{2}}c=2c$

따라서 c는 방정식 $\log_{\frac{1}{2}}x=2x$의 근이다.

즉, 세 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표가 각각 a, b, c이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore a<b<c$

답 ①

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

이 문제는 주어진 a, b, c를 포함한 세 등식을 a, b, c를 근으로 갖는 방정식으로 이해한 후, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표임을 이용하여 그래프를 그려 a, b, c의 대소 관계를 찾아야 한다.
세 등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$에서 a, b, c를 세 방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=x$의 근으로 생각해 보자. 이때 이 방정식에서 세 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$의 그래프와 두 직선 $y=x$, $y=2x$를 그려 교점의 x좌표로 대소 관계를 파악하려고 한다면 위의 다섯 개의 함수 사이에 특별한 관계가 없으므로 그래프를 정확히 그리기가 어렵다. 그러나 세 방정식을 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x$, $\log_{\frac{1}{3}}x=2x$, $\log_{\frac{1}{2}}x=2x$로 변형한다면 세 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프와 직선 $y=2x$만 그리면 된다.
이때 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하면 그래프를 그리기가 조금 더 수월하다.

05 해결단계

❶ 단계	두 점 P, Q가 직선 $y=x+2$ 위에 있음을 이용하여 두 점의 좌표를 정한다.
❷ 단계	두 점 P, Q가 두 곡선 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$ 위에 있으므로 ❶단계에서 정한 두 점 P, Q의 좌표를 대입하여 관계식을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 관계식을 연립하여 a, b의 값을 각각 구한 후, ab의 값을 구한다.

세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프가 모두 서로 다른 두 점 P, Q를 지나므로
$\mathrm{P}(p, p+2)$, $\mathrm{Q}(q, q+2)$ $(p\neq q)$라 하자.
두 점 P, Q는 곡선 $y=\log_a bx$ 위에 있으므로
$p+2=\log_a bp$ ……㉠
$q+2=\log_a bq$ ……㉡
㉠−㉡을 하면
$p-q=\log_a bp-\log_a bq$
$p-q=\log_a \frac{p}{q}$, $a^{p-q}=\frac{p}{q}$
$\therefore a^p=\frac{p}{q}a^q$ ……㉢
또한, 두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x+b$ 위에 있으므로
$p+2=a^p+b$ ……㉣
$q+2=a^q+b$ ……㉤
㉣−㉤을 하면
$p-q=a^p-a^q$
$=\frac{p}{q}a^q-a^q$ ($\because$ ㉢)
$=\frac{p-q}{q}a^q$
$p\neq q$이므로 위의 식의 양변을 $p-q$로 나누면
$1=\frac{a^q}{q}$ $\quad\therefore a^q=q$
위의 식을 ㉤에 대입하면
$q+2=q+b$ $\quad\therefore b=2$
$b=2$와 $q=a^q$를 ㉡에 대입하면
$q+2=\log_a 2a^q$, $q+2=\log_a 2+q$
$2=\log_a 2$, $a^2=2$
$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)
$\therefore ab=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

• 다른 풀이 •
세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프를 모두 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수의 식은
$y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$, $y=x$
두 점 P, Q를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 각각 P′, Q′이라 하자.
세 함수 $y=\log_a bx$, $y=a^x+b$, $y=x+2$의 그래프가 모두 서로 다른 두 점 P, Q를 지나므로 세 함수 $y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$, $y=x$의 그래프는 모두 서로 다른 두 점 P′, Q′을 지난다.
이때 P′, Q′은 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 함수 $y=\log_a b(x-2)$, $y=a^{x-2}+b$는 밑이 a로 같으므로 서로 역함수 관계이어야 한다.
$y=\log_a b(x-2)$에서 $b(x-2)=a^y$
$x-2=\frac{a^y}{b}$, $x=\frac{a^y}{b}+2$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\frac{a^x}{b}+2$
위의 함수가 $y=a^{x-2}+b$와 같아야 하므로
$\frac{1}{b}=a^{-2}$, $b=2$
$\therefore a=\sqrt{2}$, $b=2$
$\therefore ab=2\sqrt{2}$

06 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 만족시키는 $f(x)$의 값을 정수 부분과 소수 부분으로 나누어 생각한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 $f(x)$의 값이 정수임을 이용하여 a_n의 규칙을 찾는다.
❸ 단계	a_{10}의 값을 구한다.

$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$에서 $\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$
$\therefore 1\leq\frac{f(x)}{[f(x)]}<2$
이때 $f(x)=\log_2 x=k+\alpha$ (k는 정수, $0\leq\alpha<1$)라 하면
$[f(x)]=k$이므로 $1\leq\frac{k+\alpha}{k}<2$
$1\leq 1+\frac{\alpha}{k}<2$ $\quad\therefore 0\leq\frac{\alpha}{k}<1$ ……㉠
그런데 $0<x<1$에서 $\log_2 x<0$, 즉 $k+\alpha<0$이고

$0 \le \alpha < 1$이므로 $k<0$

㉠의 양변에 k를 곱하면

$k < \alpha \le 0$이고, $0 \le \alpha < 1$이므로 $\alpha = 0$

즉, $f(x) = \log_2 x = k$이므로

$x = 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k}$ (단, k는 음의 정수)

이때 $-k = n$으로 놓으면 n은 자연수이고, n이 증가하면 x의 값은 감소한다.

$\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \therefore a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 답 $\frac{1}{1024}$

BLACKLABEL 특강 참고

조건을 만족시키는 $f(x)$의 값이 음의 정수임을 다음과 같이 파악할 수 있다.

$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$에서 $\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$

$1 \le \frac{f(x)}{[f(x)]} < 2$, $\frac{1}{2} < \frac{[f(x)]}{f(x)} \le 1$

$0<x<1$에서 $f(x)<0$이므로

$f(x) \le [f(x)] < \frac{f(x)}{2}$

한편, $[f(x)] \le f(x)$이므로

$[f(x)] = f(x)$

즉, $f(x)$의 값은 정수이고 $f(x)<0$이므로

$f(x) = \log_2 x = k$ (단, k는 음의 정수)

07 해결단계

❶ 단계	세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.
❷ 단계	곡선 $y=g(x)$를 평행이동, 대칭이동을 하여 곡선 $y=f(x)$로 옮길 수 있음을 파악한다.
❸ 단계	S_1+S_2의 값은 사다리꼴의 넓이와 같음을 파악하고, 넓이를 구한다.

점 A의 x좌표는 $0 = -\sqrt{3}^x + 3$에서

$\sqrt{3}^x = 3$, $3^{\frac{x}{2}} = 3$

$\frac{x}{2} = 1$, $x = 2 \qquad \therefore A(2, 0)$

점 B의 x좌표는 $0 = 2 - \log_{\sqrt{3}}(1-x)$에서

$\log_{\sqrt{3}}(1-x) = 2$, $1-x = 3$

$x = -2 \qquad \therefore B(-2, 0)$

점 C의 x좌표는 $4 = 2 - \log_{\sqrt{3}}(1-x)$에서

$\log_{\sqrt{3}}(1-x) = -2$, $1-x = \sqrt{3}^{-2}$

$x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \therefore C\left(\frac{2}{3}, 4\right)$

함수 $y = -\sqrt{3}^x + 3$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x = -\sqrt{3}^y + 3$, $\sqrt{3}^y = 3 - x$

$\therefore y = \log_{\sqrt{3}}(3-x)$

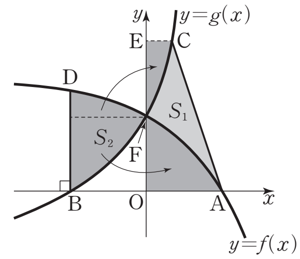
이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y = -\log_{\sqrt{3}}(3-x)$

함수 $y = -\log_{\sqrt{3}}(3-x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = 2 - \log_{\sqrt{3}}(1-x)$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축에 대하여 대칭이동하고, x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.



E(0, 4), F(0, 2)라 하면 곡선 AF와 곡선 BF의 모양이 서로 일치하고, 곡선 CF와 곡선 DF의 모양이 서로 일치하므로 S_1+S_2의 값은 사다리꼴 OACE의 넓이와 같다. 즉,

$$S_1+S_2 = \frac{1}{2} \times (\overline{CE} + \overline{AO}) \times \overline{EO}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + 2\right) \times 4 = \frac{16}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=19$ 답 19

BLACKLABEL 특강 참고

곡선 $y=g(x)$를 점 $(0, 2)$를 중심으로 반시계 방향으로 $90°$만큼 회전시키면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다.

따라서 곡선 AF와 곡선 BF의 모양이 서로 일치하고, 곡선 CF와 곡선 DF의 모양이 서로 일치한다.

08 해결단계

❶ 단계	세 점 A, B, C의 좌표를 한 문자 p로 나타낸다.
❷ 단계	△BCD가 이등변삼각형임을 이용하여 p의 값을 구한다.
❸ 단계	두 점 A, B가 곡선 $f(x)=\log_a(x-k)$ 위에 있음을 이용하여 a, k의 값을 구하고, $f(32)$의 값을 구한다.

점 D의 좌표는 $(2, 0)$, 점 A의 좌표를 $\left(p, \frac{1}{3}p - \frac{2}{3}\right)$라 하면 점 A는 선분 DB의 중점이므로 $B\left(2p-2, \frac{2}{3}p - \frac{4}{3}\right)$

두 함수 $f(x) = \log_a(x-k)$, $g(x) = a^x + k$는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선 $f(x) = \log_a(x-k)$, $g(x) = a^x + k$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 직선 BC의 기울기가 -1이므로 점 C는 점 B와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore C\left(\frac{2}{3}p - \frac{4}{3}, 2p-2\right)$

이때 △BCD는 $\overline{BC} = \overline{CD}$인 이등변삼각형이므로 두 직선 BD, AC는 서로 수직이다.

즉, 직선 BD의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 AC의 기울기는 -3이다. 즉,

$$\frac{\frac{1}{3}p - \frac{2}{3} - (2p-2)}{p - \left(\frac{2}{3}p - \frac{4}{3}\right)} = -3$$에서

$$\frac{-\frac{5}{3}p+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}p+\frac{4}{3}}=-3,\ -5p+4=-3p-12$$

$2p=16 \qquad \therefore\ p=8$

즉, $\mathrm{A}(8,\ 2)$, $\mathrm{B}(14,\ 4)$이고, 두 점 모두 곡선

$f(x)=\log_a(x-k)$ 위에 있으므로

$\log_a(8-k)=2,\ \log_a(14-k)=4$이고, $k<8$

두 식을 연립하면

진수 조건에 의하여 $8-k>0,\ 14-k>0$ $\therefore\ k<8$

$2\log_a(8-k)=\log_a(14-k)$

$\log_a(8-k)^2=\log_a(14-k)$

$(k-8)^2=14-k,\ k^2-15k+50=0$

$(k-5)(k-10)=0 \qquad \therefore\ k=5\ (\because\ k<8)$

즉, $f(8)=\log_a 3=2$이므로 $a=\sqrt{3}\ (\because\ a>1)$

따라서 $f(x)=\log_{\sqrt{3}}(x-5)$이므로

$f(32)=\log_{\sqrt{3}}(32-5)=\log_{\sqrt{3}}27=6$

답 6

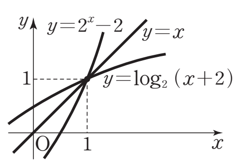
09 해결단계

❶ 단계	두 곡선 $y=2^x-n$, $y=\log_2(x+n)$으로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 점 $(a,\ b)$가 포함되면 점 $(b,\ a)$도 포함됨을 파악한다.
❷ 단계	n의 값이 커질 때 곡선의 이동방향을 파악하여 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 9일 때, 그 점을 구한다.
❸ 단계	❷단계를 만족시키는 자연수 n의 개수를 구한다.

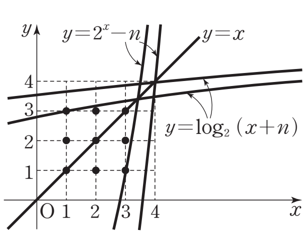
두 곡선 $y=2^x-n$, $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 곡선 $y=2^x-n$, $y=\log_2(x+n)$으로 둘러싸인 도형이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(a,\ b)$가 주어진 도형의 내부 또는 경계에 포함되면 점 $(b,\ a)$도 포함된다.

$n=2$일 때, 두 곡선 $y=2^x-2$, $y=\log_2(x+2)$는 오른쪽 그림과 같으므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은 $(1,\ 1)$뿐이다.



n의 값이 커지면 함수 $y=2^x-n$의 그래프는 오른쪽으로 이동하고, 함수 $y=\log_2(x+n)$의 그래프는 위쪽으로 이동하므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가 9일 때의 점은 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$이다.



즉, 주어진 두 곡선이 서로 역함수 관계이므로 곡선 $y=2^x-n$만 생각하면 조건을 만족시키는 n의 값은 이 곡선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때부터 점 $(4,\ 4)$를 지나기 전까지이다.

$f(x)=2^x-n$이라 할 때 $f(3)\le 1$, $f(4)>4$이므로

$2^3-n\le 1,\ 2^4-n>4 \qquad \therefore\ 7\le n<12$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 7, 8, 9, 10, 11의 5개이다.

답 5

BLACKLABEL 특강 참고

두 곡선 $y=2^x-n$, $y=\log_2(x+n)$으로 둘러싸인 도형이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 $(a,\ b)$가 주어진 도형의 내부 또는 경계에 포함되면 점 $(b,\ a)$도 포함된다.
즉, 주어진 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 홀수이려면 도형의 내부 또는 경계에 포함된 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 직선 $y=x$ 위의 점의 개수가 홀수이어야 한다.

10 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B의 좌표를 이용하여 a, b를 k에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나 존재함을 이용하여 k, a, b의 값을 구한다.
❸ 단계	$k+a+2b$의 값을 구한다.

조건 ㈎에서 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$가 곡선 $y=\log_4(x+32)+k$ 위에 있으므로 $b=\log_4(a+32)+k$ ……㉠

또한, 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $\mathrm{B}(b,\ a)$

조건 ㈏에 의하여 이 점이 곡선 $y=16^{x+k}+32$ 위에 있으므로 $a=16^{b+k}+32$ ……㉡

㉠에서

$b-k=\log_4(a+32),\ 4^{b-k}=a+32$

$\therefore\ a=4^{b-k}-32$

이것을 ㉡에 대입하면

$4^{b-k}-32=16^{b+k}+32$

$4^{2b}\times 4^{2k}-4^b\times 4^{-k}+64=0$

$4^b=t\ (t>0)$로 놓으면

$4^{2k}\times t^2-4^{-k}\times t+64=0$ ……㉢

이때 조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나 존재하므로 t에 대한 이차방정식 ㉢도 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

└㉢이 서로 다른 두 실근을 갖는다면 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 하는데 (두 근의 곱)$=\frac{64}{4^k}=4^{3-k}>0$ 이므로 두 근의 부호는 항상 같다.

$D=4^{-2k}-4\times 4^{2k}\times 64=0$에서

$4^{-2k}=4^{2k+4}$

즉, $-2k=2k+4$에서

$4k=-4 \qquad \therefore\ k=-1$

이것을 ㉢에 대입하면

$\frac{t^2}{16}-4t+64=0,\ \left(\frac{t}{4}-8\right)^2=0$

$\frac{t}{4}=8 \qquad \therefore\ t=32$

즉, $4^b=32$에서 $2^{2b}=2^5 \qquad \therefore\ b=\frac{5}{2}$

$k=-1$, $b=\frac{5}{2}$를 ㉡에 대입하면

$a=16^{\frac{5}{2}-1}+32=4^{3}+32=96$

$\therefore k+a+2b=-1+96+5=100$ **답** 100

BLACKLABEL 특강 참고

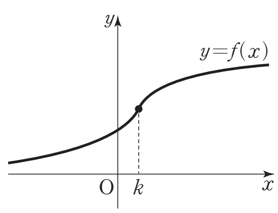
조건 (가)에서 점 A가 곡선 $y=\log_4(x+32)+k$ 위에 있으므로 조건 (나)에서 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 $\mathrm{B}(b, a)$는 함수 $y=\log_4(x+32)+k$의 역함수, 즉 함수 $y=4^{x-k}-32$의 그래프 위에 있다.
즉, $a=4^{b-k}-32$이고, 조건 (나)에서 $a=16^{b+k}+32$이므로 이 조건을 만족시키는 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 오직 하나 존재함을 이용하여 문제를 풀 수도 있다.

11 해결단계

❶ 단계	$0<k<1$, $k>1$일 때의 곡선 $y=f(x)$의 개형을 각각 파악한다.
❷ 단계	$0<k<1$, $k>1$일 때의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 좌표를 구하고, 교점이 조건을 만족시키는지 확인한다.
❸ 단계	a, k의 값을 구하여 t의 값의 범위를 구하고, m의 값을 구한다.

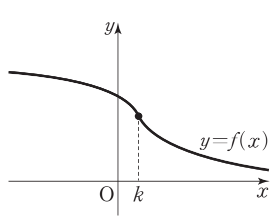
$$f(x)=\begin{cases}\log_k(-x+k+1)+2^a & (x<k)\\ \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(x-k+1)+2^a & (x\ge k)\end{cases}$$ 에서

(i) $0<k<1$일 때,



$x<k$에서 함수 $y=\log_k(-x+k+1)+2^a$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $x\ge k$에서 $\frac{1}{k}>1$이므로 함수 $y=\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(x-k+1)+2^a$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다. 즉,
$f(1)=g(1)=1$, $f(t)=g(t)=t$, $f(5)=g(5)=5$
그런데 $f(1)=\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(2-k)+2^a$에서
$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(2-k)>0$, $2^a>1$이므로
$f(1)>1$
따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k>1$일 때,



$x<k$에서 함수 $y=\log_k(-x+k+1)+2^a$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $x\ge k$에서 $0<\frac{1}{k}<1$이므로 함수 $y=\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(x-k+1)+2^a$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 함수 $y=f(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 세 교점의 좌표는 $\underline{(1, 5), (t, t), (5, 1)}$ *
$f(1)=\log_k k+2^a=5$에서
$1+2^a=5$ $\therefore a=2$ ······㉠

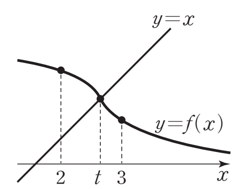
① $1<k\le5$이면
$f(5)=\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(6-k)+2^a=1$이므로
$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{k}}(6-k)+4=1$, $\log_{\frac{1}{k}}(6-k)=-2$
$6-k=k^2$, $k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$
$\therefore k=2$ ($\because 1<k\le5$) ······㉡

② $k>5$이면
$f(5)=\underbrace{\log_k(k-4)}_{>0}+\underbrace{2^a}_{>1}\ne1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$, $k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(-x+3)+4 & (x<2)\\ \frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+4 & (x\ge2)\end{cases}$$

이때 $f(2)=4>2$, $f(3)=\frac{5}{2}<3$이므로 두 점 $(2, f(2))$, $(3, f(3))$은 각각 직선 $y=x$보다 위쪽, 아래쪽에 있다.



따라서 $2<t<3$이고 $f(t)=t$인 t가 존재한다.
㉠, ㉡에 의하여
$6<a+t+k<7$이므로 구하는 정수 m의 값은
$m=6$ **답** 6

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 세 교점의 좌표를 $(1, p)$, (t, q), $(5, r)$이라 하면 $p>q>r$
이때 세 점 $(p, 1)$, (q, t), $(r, 5)$도 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이므로 p, q, r은 1, t, 5 중에 하나이다.
$p>q>r$이므로 $p=5$, $q=t$, $r=1$
따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 세 교점의 좌표는 $(1, 5)$, (t, t), $(5, 1)$이다.

BLACKLABEL 특강 필수 개념

함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, 다음이 성립한다.
(1) 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 (a, b)이면 (b, a)도 교점이다.
(2) 함수 $y=f(x)$가 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 모든 교점은 직선 $y=x$ 위에 존재한다.

Ⅱ 삼각함수

05. 삼각함수의 정의

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.55~56

01 ③	02 제2사분면	03 6	04 $\frac{3}{5}\pi$	05 ②
06 ③	07 $3\sqrt{5}\pi$	08 ③	09 ①	10 ④
11 ①	12 ④	13 ⑤	14 ①	

01 ㄱ. $225^\circ=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{4}\pi$ (참)

ㄴ. $-1035^\circ=360^\circ\times(-3)+45^\circ$이므로 제1사분면의 각이다. (거짓)

ㄷ. 1라디안은 호의 길이와 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

02 θ가 제3사분면의 각이므로

$2n\pi+\pi<\theta<2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, n은 정수)

$\therefore \frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{2n}{3}\pi+\frac{\pi}{2}$ ……㉠

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

㉠에서 $2k\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

㉠에서 $2k\pi+\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{7}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

㉠에서 $2k\pi+\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<2k\pi+\frac{11}{6}\pi$

따라서 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다. **답** 제2사분면

• 다른 풀이 •

㉠에서

$n=0$일 때,

$\frac{\pi}{3}<\frac{\theta}{3}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

$n=1$일 때,

$\pi<\frac{\theta}{3}<\frac{7}{6}\pi$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

$n=2$일 때,

$\frac{5}{3}\pi<\frac{\theta}{3}<\frac{11}{6}\pi$이므로 $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

$n=3, 4, 5, \cdots$에 대해서도 동경의 위치가 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면으로 반복되므로 각 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

03 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기가

$40^\circ=40\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$

이고, 각 θ를 나타내는 동경이 동경 OP와 일치하므로

$\theta=2n\pi+\frac{2}{9}\pi$ (단, n은 정수)

이때 $-\frac{9}{2}\pi<\theta<\frac{15}{2}\pi$에서

$-\frac{9}{2}\pi<2n\pi+\frac{2}{9}\pi<\frac{15}{2}\pi$

$-\frac{9}{2}\pi-\frac{2}{9}\pi<2n\pi<\frac{15}{2}\pi-\frac{2}{9}\pi$

$-\frac{85}{18}<2n<\frac{131}{18}$

$\therefore -\frac{85}{36}<n<\frac{131}{36}$

즉, 부등식을 만족시키는 정수 n은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$의 6개이므로 구하는 각 θ의 개수는 6이다. **답** 6

04 각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고, 방향이 서로 반대이므로 두 동경이 원점에 대하여 대칭이다.

즉, $6\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)이므로

$5\theta=(2n+1)\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n+1}{5}\pi$ ……㉠

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n+1}{5}\pi<\pi$이므로

$\frac{5}{2}<2n+1<5$, $\frac{3}{4}<n<2$

$\therefore n=1$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{3}{5}\pi$ **답** $\frac{3}{5}\pi$

05 각 2θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$2\theta+5\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

$7\theta=2n\pi$ $\quad\therefore \theta=\frac{2n\pi}{7}$ ……㉠

이때 $0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n\pi}{7}<\pi$이므로 $0<n<\frac{7}{2}$

$\therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ ……㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{2}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{7}\pi$ 또는 $\theta=\frac{6}{7}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\frac{2}{7}\pi+\frac{4}{7}\pi+\frac{6}{7}\pi=\frac{12}{7}\pi$

답 ②

06 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면 호 AB의 길이가 4π이므로

$12\theta=4\pi \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

$\triangle$AOC에서

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\frac{\pi}{3}=12\times\frac{1}{2}=6,$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin\frac{\pi}{3}=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

이므로 삼각형 AOC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OC}}=6$이므로 부채꼴 DOC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

따라서 색칠한 도형의 넓이는

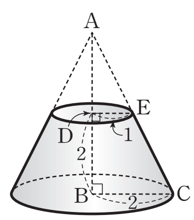
$\triangle$AOC$-$(부채꼴 DOC의 넓이)$=18\sqrt{3}-6\pi$

즉, $p=18$, $q=6$이므로

$p+q=18+6=24$

답 ③

07 오른쪽 그림과 같이 점 A, B, C, D, E를 정하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 AA 닮음이므로



$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BC}}$

즉, $\overline{\mathrm{AD}}:(\overline{\mathrm{AD}}+2)=1:2$에서

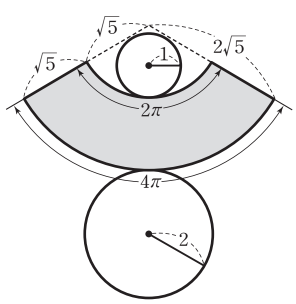
$\overline{\mathrm{AD}}+2=2\overline{\mathrm{AD}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=2$

또한, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{5}$

따라서 원뿔대의 전개도는 다음 그림과 같다.



이때 원뿔대의 옆면의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times4\pi-\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\pi$

$=4\sqrt{5}\pi-\sqrt{5}\pi=3\sqrt{5}\pi$

답 $3\sqrt{5}\pi$

08 부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 40이므로

$2r+l=40 \qquad \therefore l=40-2r$

이때 $r>0$, $40-2r>0$이므로 $0<r<20$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(40-2r)$

$=-r^2+20r$

$=-(r-10)^2+100$

따라서 $r=10$일 때 부채꼴의 넓이가 최대이므로 이때의 호의 길이는

$l=40-2\times10=20$

* $l=r\theta$이므로

$20=10\theta \qquad \therefore \theta=2$

$\therefore l-5\theta=20-5\times2=10$

답 ③

• 다른 풀이 •

부채꼴의 반지름의 길이를 r이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 40이므로

$2r+l=40$ ……㉠

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl$

이때 $2r>0$, $l>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2r+l\ge2\sqrt{2rl}=2\sqrt{4S}=4\sqrt{S}$

(단, 등호는 $2r=l$일 때 성립)

$4\sqrt{S}\le40$ ($\because$ ㉠)

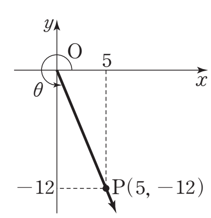
$\sqrt{S}\le10 \qquad \therefore S\le100$

이때 등호가 성립하려면 $2r=l$이어야 하고, 이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$4r=40 \qquad \therefore r=10,\ l=20$

다음은 *와 같다.

09 P(5, -12)이므로



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$

동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1+\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$

$=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2}$

답 ①

• 다른 풀이 •

P(5, -12)이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$

동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ이므로

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

$\therefore \dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}$

$=-\dfrac{13}{12}-\dfrac{5}{12}=-\dfrac{3}{2}$

10 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta<0$

또한, $\sin\theta\cos\theta>0$이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \tan\theta>0$

즉, $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta<0$, $\cos\theta-\tan\theta<0$

$\therefore |\sin\theta+\cos\theta|-\sqrt{\sin^2\theta}-|\cos\theta-\tan\theta|$

$=-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta-\tan\theta$

$=-\tan\theta$

답 ④

BLACKLABEL 특강 참고

$\sin\theta\cos\theta>0$이면 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값의 부호가 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다. ……㉠

$\cos\theta\tan\theta<0$이면 $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값의 부호가 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다. ……㉡

㉠, ㉡에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

11 $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\sqrt{3}$에서

$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

$(\sqrt{3}+1)\sin\theta=(\sqrt{3}-1)\cos\theta$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

답 ①

• 다른 풀이 •

$\cos\theta=0$이면 $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{-\sin\theta}=-1$이므로 주어진 식을 만족시키지 않는다.

따라서 $\cos\theta\neq0$이므로

$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\sqrt{3}$

$1+\tan\theta=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\theta$

$(1+\sqrt{3})\tan\theta=\sqrt{3}-1$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$

12 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{4\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{4\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=8\sqrt{5}$

답 ④

13 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{7}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{7}{16}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{9}{32}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

답 ⑤

14 이차방정식 $x^2+2ax+4=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=-2a$에서

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-2a$ ……㉠

$\dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\cos\theta}=4$에서

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\dfrac{1}{4}}=-2a$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{a}{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{a^2}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2}{4}$, $1+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{a^2}{4}$ ($\because$ ㉡)

$\frac{a^2}{4}=\frac{3}{2}$, $a^2=6$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

즉, ㉠에서 $-2a>0$이므로 $a<0$

$\therefore a=-\sqrt{6}$

답 ①

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.57~60

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 4	05 25
06 30	07 8	08 ④	09 ②	10 33
11 3	12 218	13 ⑤	14 ④	15 ②
16 ③	17 ⑤	18 ①	19 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	20 $\frac{7}{8}$
21 $-\frac{1}{2}$	22 $\frac{5}{2}\pi$	23 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	24 58	

01 θ가 제1사분면의 각이므로

$\theta=2n\pi+\alpha$ $\left(\text{단, } n\text{은 정수, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \frac{\theta}{2}=n\pi+\frac{\alpha}{2}$

(i) $n=2m$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=2m\pi+\frac{\alpha}{2}$에서 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

즉, $\frac{\theta}{2}$가 제3사분면의 각이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2m+1$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=(2m+1)\pi+\frac{\alpha}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}$에서

$\pi<\pi+\frac{\alpha}{2}<\frac{5}{4}\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서

$\frac{\theta}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}$ $\qquad\therefore \frac{\theta}{4}=m\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$

(iii) $m=2k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}<\frac{5}{8}\pi$이므로

$\frac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

(iv) $m=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}=2k\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}$에서

$\frac{3}{2}\pi<\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}<\frac{13}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

(iii), (iv)에서 $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 ⑤

•다른 풀이•

θ가 제1사분면의 각이므로

$2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

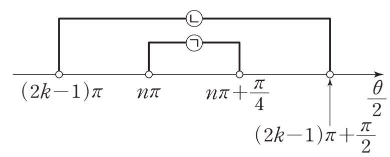
$\therefore n\pi<\frac{\theta}{2}<n\pi+\frac{\pi}{4}$ ……㉠

그런데 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이므로

$(2k-1)\pi<\frac{\theta}{2}<(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, k는 정수)

……㉡

이때 제1사분면의 각 θ에 대하여 $\frac{\theta}{2}$가 제3사분면의 각이므로 부등식 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $(2k-1)\pi\le n\pi$에서 $2k-1\le n$

$n\pi+\frac{\pi}{4}\le(2k-1)\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $n\le 2k-\frac{3}{4}$

$\therefore 2k-1\le n\le 2k-\frac{3}{4}$

이때 n, k가 모두 정수이므로 $n=2k-1$

위의 식을 ㉠에 대입하면

$(2k-1)\pi<\frac{\theta}{2}<(2k-1)\pi+\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{2k-1}{2}\pi<\frac{\theta}{4}<\frac{2k-1}{2}\pi+\frac{\pi}{8}$ ……㉢

(i) $k=2l+1$ (l은 정수)일 때,

㉢에서 $2l\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{4}<2l\pi+\frac{5}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

(ii) $k=2l+2$ (l은 정수)일 때,

㉢에서 $2l\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{\theta}{4}<2l\pi+\frac{13}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

02 두 각 α, 4α를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\alpha+4\alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

$5\alpha=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ $\qquad\therefore \alpha=\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}$ ……㉠

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<\frac{2n}{5}\pi+\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{10}<\frac{2}{5}n\pi<\frac{2}{5}\pi$

$\therefore -\frac{1}{4}<n<1$

이때 n은 정수이므로 $n=0$

$n=0$을 ㉠에 대입하면 $\alpha=\dfrac{\pi}{10}$

두 각 β, 4β를 나타내는 두 동경이 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\beta+4\beta=2m\pi+\dfrac{3}{2}\pi$ (단, m은 정수)

$5\beta=2m\pi+\dfrac{3}{2}\pi \qquad \therefore\ \beta=\dfrac{2m}{5}\pi+\dfrac{3}{10}\pi \qquad \cdots\cdots$㉡

$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$\pi<\dfrac{2m}{5}\pi+\dfrac{3}{10}\pi<\dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{7}{10}\pi<\dfrac{2}{5}m\pi<\dfrac{6}{5}\pi$

$\therefore\ \dfrac{7}{4}<m<3$

이때 m은 정수이므로 $m=2$

$m=2$를 ㉡에 대입하면 $\beta=\dfrac{4}{5}\pi+\dfrac{3}{10}\pi=\dfrac{11}{10}\pi$

$\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{11}{10}\pi=\dfrac{12}{10}\pi=\dfrac{6}{5}\pi$

답 ①

03

점 P의 x좌표를 a $(a>0)$라 하면 점 P의 좌표는 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a+3\right)$

두 각 θ, 5θ를 나타내는 두 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2n\pi+\pi$ (단, n은 정수)

$6\theta=2n\pi+\pi \qquad \therefore\ \theta=\dfrac{n}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}$

이때 점 P는 제1사분면 위에 있으므로 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ n=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

즉, 직선 OP의 기울기는

$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\frac{1}{2}a+3}{a}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\frac{1}{2}a+3}{a}$

$\sqrt{3}a=\dfrac{3}{2}a+9$, $(2\sqrt{3}-3)a=18$

$\therefore\ a=\dfrac{18}{2\sqrt{3}-3}=12\sqrt{3}+18$

따라서 $p=12$, $q=18$이므로

$p+q=12+18=30$

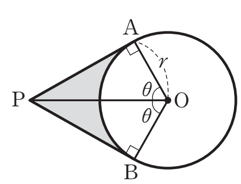
답 ③

04

$\overline{AR}$, $\overline{BQ}$는 원의 지름이므로 부채꼴 AOB와 부채꼴 QOR의 넓이는 서로 같다.

$\overline{OA}=r$이라 하면

(부채꼴 AOB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}r^2\times2\theta=r^2\theta \qquad \cdots\cdots$㉠



오른쪽 그림과 같이 두 점 O, P를 선분으로 연결하면 $\triangle$OAP, $\triangle$OBP는 합동이므로

$\angle AOP=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\theta$

$\therefore\ \overline{AP}=r\tan\theta$

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 및 호 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\square OAPB-$(부채꼴 AOB의 넓이)

$=2\triangle OAP-r^2\theta$ ($\because$ ㉠)

$=2\times\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AP}-r^2\theta$

$=r^2\tan\theta-r^2\theta$

이때 주어진 그림의 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

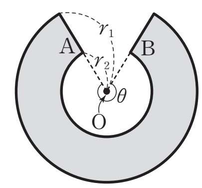
$r^2\theta=r^2\tan\theta-r^2\theta$

$\therefore\ \tan\theta=2\theta$

$\therefore\ \dfrac{2\tan\theta}{\theta}=\dfrac{2\times2\theta}{\theta}=4$

답 4

05



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 정하고 $\angle AOB=\theta$라 하면 색칠한 도형의 둘레의 길이가 20이므로

$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=20$

$\therefore\ (r_1+r_2)\theta$

$\quad=20-2(r_1-r_2) \qquad \cdots\cdots$㉠

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}r_1^2\theta-\dfrac{1}{2}r_2^2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1^2-r_2^2)\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1-r_2)\{20-2(r_1-r_2)\}$ ($\because$ ㉠)

$=-(r_1-r_2)^2+10(r_1-r_2)$

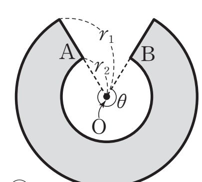
$=-(r_1-r_2-5)^2+25$

이때 ㉠에서 $0<r_1-r_2<10$

따라서 $r_1-r_2=5$일 때, 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 25이다.

답 25

• 다른 풀이 •



오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 정하고 $\angle AOB=\theta$라 하면 색칠한 도형의 둘레의 길이가 20이므로

$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=20$

$2(r_1-r_2)+\theta(r_1+r_2)=20 \qquad \cdots\cdots$㉡

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}r_1^2\theta-\dfrac{1}{2}r_2^2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1^2-r_2^2)\theta$

$=\dfrac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$

이때 $2(r_1-r_2)>0$, $\theta(r_1+r_2)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2(r_1-r_2)+\theta(r_1+r_2)\geq 2\sqrt{2(r_1-r_2)\times\theta(r_1+r_2)}$

(단, 등호는 $2(r_1-r_2)=\theta(r_1+r_2)$일 때 성립)

$20\geq 2\sqrt{4S}$ ($\because$ ㉡), $4\sqrt{S}\leq 20$

$\sqrt{S}\leq 5 \qquad \therefore S\leq 25$

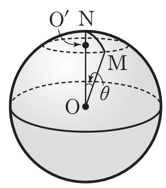
이때 등호가 성립하려면 $2(r_1-r_2)=\theta(r_1+r_2)$이어야 하고, $2(r_1-r_2)+\theta(r_1+r_2)=20$이므로

$4(r_1-r_2)=20 \qquad \therefore r_1-r_2=5$

따라서 $r_1-r_2=5$일 때, 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 25이다.

06

오른쪽 그림과 같이 구 위의 한 점 N에 고정한 실의 나머지 한 끝이 놓인 지점을 M, 구의 중심을 O라 하면

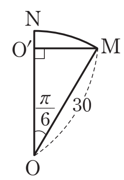


$\overline{OM}=\overline{ON}=30$

부채꼴 OMN에서 $\angle NOM=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{NM}=30\theta$이고 실의 길이는 5π이므로

$5\pi=30\theta \qquad \therefore \theta=\frac{\pi}{6}$

이때 실 끝이 나타내는 도형의 둘레의 길이 l은 점 M이 그리는 원의 둘레의 길이이다. 이 원의 중심을 O′이라 하면 오른쪽 그림에서



$\underbrace{\overline{O'M}=\overline{OM}\sin\frac{\pi}{6}}_{\triangle OO'M\text{에서 }\frac{\overline{O'M}}{\overline{OM}}=\sin\frac{\pi}{6}}=30\times\frac{1}{2}=15$

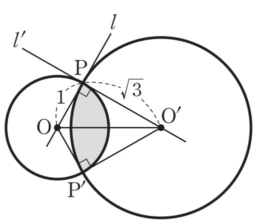
따라서 구하는 길이 l은

$l=2\pi\times 15=30\pi \qquad \therefore \frac{l}{\pi}=\frac{30\pi}{\pi}=30$

답 30

07

오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 두 교점을 P, P′이라 하자.



점 P에서의 각 원의 접선을 l, l'이라 하면 $l\perp l'$이고, 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로 두 접선 l, l'은 서로 다른 원의 중심을 지난다.

즉, $\angle OPO'=90°$이고 $\overline{OP}=1$, $\overline{O'P}=\sqrt{3}$이므로 $\triangle OPO'$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OO'}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

즉, $\overline{OO'}:\overline{OP}:\overline{O'P}=2:1:\sqrt{3}$이므로

$\angle POO'=\frac{\pi}{3}$, $\angle PO'O=\frac{\pi}{6}$

같은 방법으로 $\triangle OP'O'$에서

$\angle P'OO'=\frac{\pi}{3}$, $\angle P'O'O=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \angle POP'=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$, $\angle PO'P'=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

구하는 넓이를 S라 하면

$S=$(부채꼴 POP′의 넓이)+(부채꼴 PO′P′의 넓이)

$-\underbrace{(\text{사각형 OPO′P′의 넓이})}_{=2\triangle OPO'}$

$=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}-2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\right)$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$

$=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

따라서 $a=5$, $b=3$이므로

$a+b=5+3=8$

답 8

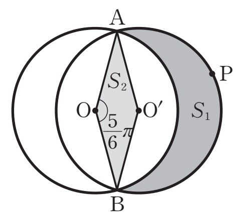
08

마름모 AOBO′에서

$\angle AO'B=\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$

다음 그림과 같이 원 O'과 넓이가 S_1인 도형의 경계선의 공통부분 위에 점 P를 놓으면 호 APB의 중심각은

$2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$



이때 원 O'에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′BP의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면

$\underbrace{S_1=T_1+S_2-T_2}_{*}$

$\therefore S_1-S_2=T_1-T_2$

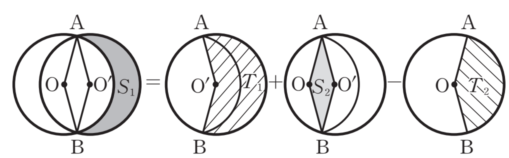
$=\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{7}{6}\pi-\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{5}{6}\pi$

$=\frac{21}{4}\pi-\frac{15}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 ④

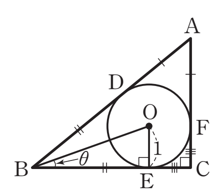
BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

*를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



09

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA와 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로



$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$

또한, 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로 $\angle OEB=90°$

직각삼각형 OBE에서 $\overline{BE}=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\overline{BD}=\overline{BE}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=1$

이때 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$$\left(\frac{1}{\tan\theta}+x\right)^2=\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)^2+(x+1)^2$$

$$\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2x}{\tan\theta}+x^2=\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1+x^2+2x+1$$

$$2x\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}+2$$

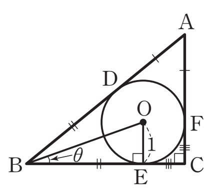
$$2x\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=2\times\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta}$$

$$\therefore x=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

$$\therefore \overline{AC}=x+1=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+1=\frac{2}{1-\tan\theta}$$ 답 ②

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변과 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면



$\overline{AD}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BE}$, $\overline{CE}=\overline{CF}$

직각삼각형 OBE에서

$\tan\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\overline{BE}}$ $\quad\therefore \overline{BD}=\overline{BE}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=1$

내접원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{AD}=\overline{AF}=x$라 하면

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times1\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)(x+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2x+2\right)$$

$$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)=2(x+1)+\frac{2}{\tan\theta}$$

$$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}$$

$$(x+1)\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{\tan\theta}$$

$$\therefore \overline{AC}=x+1=\frac{2}{\tan\theta}\times\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}$$

10

점 A의 좌표를 $(4,\ a)(a>0)$라 하면

점 B의 좌표는 $(4,\ -a)$

$\overline{OA}=\overline{OB}=r$이므로

$\cos\alpha=\frac{4}{r}$, $\sin\beta=-\frac{a}{r}$

이때 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\frac{-\frac{a}{r}}{\frac{4}{r}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{a}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore a=2\sqrt{3}$$

점 $A(4,\ a)$, 즉 $(4,\ 2\sqrt{3})$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위에 있으므로

$r^2=4^2+(2\sqrt{3})^2=28$

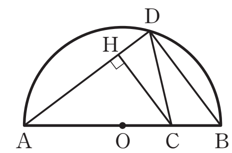
또한, $\sin\alpha=\frac{a}{r}$, $\tan\beta=-\frac{a}{4}$이므로

$$r^2(\sin^2\alpha+\tan^2\beta)=r^2\left(\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^2}{16}\right)$$

$$=28\left(\frac{12}{28}+\frac{12}{16}\right)=33$$ 답 33

11

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 ACH에서

$\tan(\angle CAD)=\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$,

직각삼각형 CDH에서 $\tan(\angle ADC)=\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}$이므로

$$\frac{\tan(\angle ADC)}{\tan(\angle CAD)}=\frac{\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}}{\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}$$

또한, $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$ $\quad\therefore \overline{AC}=3\overline{BC}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 선분 AB가 반원의 지름이므로

$\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

따라서 $\triangle ACH \backsim \triangle ABD$ (AA 닮음)이므로

$$\frac{\tan(\angle ADC)}{\tan(\angle CAD)}=\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=3\ (\because ㉠)$$ 답 3

12

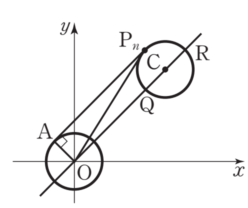
원 $x^2+y^2=2$의 중심은 원점 $O(0,\ 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 또한, 원 $(x-n)^2+(y-n)^2=2$의 중심을 C라 하면 $C(n,\ n)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

직선 AP_n이 점 A에서의 원의 접선이므로 $\triangle OAP_n$은 $\angle OAP_n=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 $\overline{OA}=\sqrt{2}$이므로

$$\sin(\angle AP_nO)=\frac{\overline{OA}}{\overline{OP_n}}=\frac{\sqrt{2}}{\overline{OP_n}}$$

즉, $\overline{OP_n}$의 길이가 최대일 때 $\sin(\angle AP_nO)$의 값은 최소이고 $\overline{OP_n}$의 길이가 최소일 때 $\sin(\angle AP_nO)$의 값은 최대이다.



위의 그림과 같이 직선 OC가 원 $(x-n)^2+(y-n)^2=2$와 만나는 점 중 원점 O에 가까이 있는 점을 Q, 원점 O에 멀리 있는 점을 R이라 하자.

$\overline{OP_n}$의 길이는 점 P_n이 점 Q의 위치에 있을 때 최소이고 점 R의 위치에 있을 때 최대이다.

이때 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{n^2+n^2}=\sqrt{2}n$이므로

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{OP}_n}\text{의 길이의 최솟값})&=\overline{\mathrm{OQ}}\\&=\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{CQ}}\\&=\sqrt{2}n-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{OP}_n}\text{의 길이의 최댓값})&=\overline{\mathrm{OR}}\\&=\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{CR}}\\&=\sqrt{2}n+\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\sin(\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O})$의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}n-\sqrt{2}}=\frac{1}{n-1}$$

$\sin(\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{O})$의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}n+\sqrt{2}}=\frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(n)&=\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{(n-1)(n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$\therefore f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(10)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{106}{165}=\frac{53}{165}$$

따라서 $p=165$, $q=53$이므로

$p+q=165+53=218$ **답** 218

13 $\sin\frac{n\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{6}$가 음수인 n제곱근을 가지려면

(i) n이 짝수일 때,

$\sin\frac{n\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{6}>0$이어야 하므로 $\frac{n\pi}{6}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다. 즉,

$\sin\frac{n\pi}{6}>0,\ \cos\frac{n\pi}{6}>0$ 또는 $\sin\frac{n\pi}{6}<0,\ \cos\frac{n\pi}{6}<0$

$2k\pi<\frac{n\pi}{6}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 또는

$2k\pi+\pi<\frac{n\pi}{6}<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, k는 정수)

$12k<n<12k+3$ 또는 $12k+6<n<12k+9$

이때 $2\le n\le 20$이므로

$n=2,\ 8,\ 14,\ 20$

(ii) n이 홀수일 때,

$\sin\frac{n\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{6}<0$이어야 하므로 $\frac{n\pi}{6}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. 즉,

$\sin\frac{n\pi}{6}>0,\ \cos\frac{n\pi}{6}<0$ 또는 $\sin\frac{n\pi}{6}<0,\ \cos\frac{n\pi}{6}>0$

$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n\pi}{6}<2k\pi+\pi$ 또는

$2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{n\pi}{6}<2k\pi+2\pi$ (단, k는 정수)

$\therefore 12k+3<n<12k+6$

또는 $12k+9<n<12k+12$

이때 $2\le n\le 20$이므로

$n=5,\ 11,\ 17$

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$(2+8+14+20)+(5+11+17)=77$ **답** ⑤

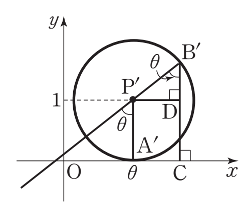
BLACKLABEL 특강 필수 개념

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

14 $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\angle\mathrm{OPA}=\theta$에서 $\widehat{\mathrm{OA}}=\theta$이므로 원을 x축의 방향으로 θ만큼 굴리면 점 A가 x축 위에 놓이게 된다.

두 점 P, A가 이동한 점을 각각 P′, A′이라 하고, 점 B′에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 P′에서 $\overline{\mathrm{B'C}}$에 내린 수선의 발을 D라 하면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $\triangle\mathrm{B'P'D}$는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{B'P'}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{P'D}}=\overline{\mathrm{B'P'}}\sin\theta=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{B'D}}=\overline{\mathrm{B'P'}}\cos\theta=\cos\theta$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{점 B}'\text{의 }x\text{좌표})&=\overline{\mathrm{OA'}}+\overline{\mathrm{A'C}}\\&=\overline{\mathrm{OA'}}+\overline{\mathrm{P'D}}\\&=\theta+\sin\theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{점 B}'\text{의 }y\text{좌표})&=\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{B'D}}\\&=\overline{\mathrm{A'P'}}+\overline{\mathrm{B'D}}\\&=1+\cos\theta\end{aligned}$$

따라서 점 B′의 좌표는 $(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$이다.

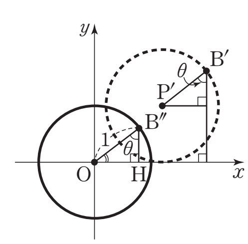
답 ④

• 다른 풀이 •

원을 굴렸을 때, 점 P가 이동한 점을 P′이라 하면

P′$(\theta,\ 1)$

점 P′이 원점에 오도록, 즉 x축, y축의 방향으로 각각 $-\theta$, -1만큼 원을 평행이동하였을 때 점 B′이 이동한 점을 B″, 점 B″에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{B''O}}\sin\theta=\sin\theta$

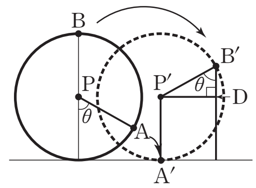
$\overline{\mathrm{B''H}}=\overline{\mathrm{B''O}}\cos\theta=\cos\theta$

$\therefore$ B″$(\sin\theta,\ \cos\theta)$

다시 원점이 점 P′에 오도록, 즉 x축, y축의 방향으로 각각 θ, 1만큼 원을 평행이동하면 점 B″이 점 B′에 놓이게 되므로

B′$(\theta+\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭



점 A가 이동한 점을 A′, 점 P가 이동한 점을 P′이라 하면
$\angle \mathrm{BPA}=\pi-\theta$이므로
$\angle \mathrm{B'P'A'}=\pi-\theta$
이때 $\angle \mathrm{DP'A'}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{B'DP'}=\frac{\pi}{2}$이므로
$\angle \mathrm{P'B'D}=\theta$

15 ㄱ. θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{|\cos\theta|}-\dfrac{\sin\theta}{|\sin\theta|}-\dfrac{\tan\theta}{|\tan\theta|}$

$=-1-1-(-1)=-1$ (참)

ㄴ. $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$ (n은 정수) ……㉠

이므로 $4n\pi+\pi<2\theta<4n\pi+2\pi$

즉, 2θ는 제3사분면 또는 제4사분면 또는 y축의 음의 방향 위의 각이므로

$\sin 2\theta<0$ (참)

ㄷ. ㉠에서 $n\pi+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2}>0$

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi<\dfrac{\theta}{2}<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

$\therefore \tan\dfrac{\theta}{2}>0$

(i), (ii)에서 $\tan\dfrac{\theta}{2}>0$이므로 $\tan\dfrac{\theta}{2}=-\sqrt{3}$을 만족시키는 θ는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

16 ㄱ. $\dfrac{\cos x}{\cos x+1}+\dfrac{\cos x}{\cos x-1}$

$=\dfrac{\cos x(\cos x-1)+\cos x(\cos x+1)}{(\cos x+1)(\cos x-1)}$

$=\dfrac{\cos^2 x-\cos x+\cos^2 x+\cos x}{\cos^2 x-1}$

$=\dfrac{2\cos^2 x}{-\sin^2 x}$

$=-\dfrac{2}{\tan^2 x}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1+\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$=\dfrac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{2}{\sin x}$ (거짓)

ㄷ. $\left(\tan x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

$=\dfrac{(\sin x+1)^2}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

17 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=\dfrac{23}{32}$

즉, $2\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{9}{32}$이므로

$\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{9}{64}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta\cos\theta<0$, $\sin\theta-\cos\theta>0$

$\sin\theta\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{64}}=-\dfrac{3}{8}$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)$

$=\dfrac{7}{4}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 답 ⑤

18 $f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=x$에서 $A=\dfrac{x}{1-x}$라 하면

$\dfrac{1}{A}=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}-1$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{A}+1=\dfrac{1+A}{A}$

$\therefore x=\dfrac{A}{1+A}$

이때 $0<x<1$에서 $0<\dfrac{A}{1+A}<1$

$0<1-\dfrac{1}{1+A}<1$, $0<\dfrac{1}{1+A}<1$

$1+A>1$ $\quad\therefore A>0$

즉, $f(A)=\dfrac{A}{1+A}$ $(A>0)$이므로

$f(\tan^2\theta)=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$$=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

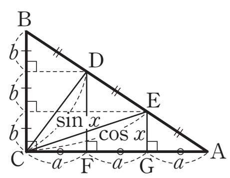
$$=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$=\sin^2\theta$

답 ①

19 $\overline{AC}=3a$, $\overline{BC}=3b$라 하고, 점 D, E에서 $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하면 오른쪽 그림과 같다.



직각삼각형 CFD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}^2=a^2+(2b)^2$

$\therefore a^2+4b^2=\sin^2 x$ ······㉠

직각삼각형 CGE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}^2=(2a)^2+b^2$

$\therefore 4a^2+b^2=\cos^2 x$ ······㉡

㉠+㉡을 하면

$5(a^2+b^2)=1$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{5}$

따라서 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=(3a)^2+(3b)^2=9(a^2+b^2)$

$=9\times\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

• 다른 풀이 •

$\overline{BD}=l$, $\overline{AC}=m$, $\overline{BC}=n$이라 하면 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$m^2+n^2=9l^2$

삼각형 BCE에서 중선정리에 의하여

$\overline{BC}^2+\overline{CE}^2=2(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)$

$n^2+\cos^2 x=2(\sin^2 x+l^2)$ ······㉢

삼각형 DCA에서 중선정리에 의하여

$\overline{CD}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{CE}^2+\overline{AE}^2)$

$\sin^2 x+m^2=2(\cos^2 x+l^2)$ ······㉣

㉢+㉣을 하면

$\cos^2 x+\sin^2 x+n^2+m^2=2(\cos^2 x+\sin^2 x+2l^2)$

$1+9l^2=2+4l^2$, $5l^2=1$

$\therefore l=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \overline{AB}=3l=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

20 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+1=0$의 두 근이 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$에서

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=4$, $\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1^2-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

답 $\frac{7}{8}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

(1) a, b, c가 모두 유리수일 때,
$p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

(2) a, b, c가 모두 실수일 때,
$p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다.
(단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

21 조건 (가)에서

$2n\pi<2\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$n\pi<\theta<n\pi+\frac{\pi}{4}$

(i) $n=2k$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{4}$이므로 θ는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\frac{5}{4}\pi$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다. ······㉠

조건 (나)에서 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-3\sin^2\theta=1-\sin^2\theta-3\sin^2\theta$

$=1-4\sin^2\theta=0$

즉, $\sin^2\theta=\frac{1}{4}$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

또한, 주어진 이차방정식이 음수인 중근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2\cos\theta}{3}<0$ $\therefore \cos\theta<0$ ······㉡

이때 ㉠, ㉡에서 θ는 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2}$

22 이차방정식 $kx^2-(k+2)x+k+1=0\ (k\neq0)$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{k+2}{k}$ ……㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k+1}{k}$ ……㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

㉡을 위의 식에 대입하면

$1+\frac{2(k+1)}{k}=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$\frac{(k+2)^2}{k^2}-\frac{2(k+1)}{k}-1=0$

이때 $k\neq0$이므로 위의 식의 양변에 k^2을 곱하면

$k^2+4k+4-2k^2-2k-k^2=0$

$-2k^2+2k+4=0$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $k=2$이면 주어진 이차방정식은 $2x^2-4x+3=0$이고, 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times3=4-6=-2<0$

이므로 허근을 갖는다.

$\therefore k=-1$

$k=-1$일 때, 주어진 이차방정식은 $-x^2-x=0$이므로

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$

이때 $0<\theta<2\pi$이므로

(i) $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$일 때, $\theta=\pi$

(ii) $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$일 때, $\theta=\frac{3}{2}\pi$ *

(i), (ii)에서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$ 답 $\frac{5}{2}\pi$

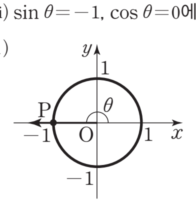
BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

단위원 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

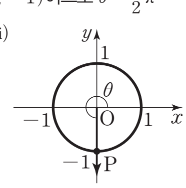
(i) $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$에서 $P(-1,\ 0)$이므로 $\theta=\pi$

(ii) $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$에서 $P(0,\ -1)$이므로 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

(i)



(ii)



23 두 방정식 $x^2-6x\sin\theta+1=0$, $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$에 $x=0$을 대입하면 모두 등식이 성립하지 않으므로 $x\neq0$이다.

방정식 $x^2-6x\sin\theta+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-6\sin\theta+\frac{1}{x}=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=6\sin\theta$ ……㉠

또한, 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

㉠을 위의 식에 대입하면

$36\sin^2\theta+12\sin\theta-3=0$

$12\sin^2\theta+4\sin\theta-1=0$

$(6\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{6}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

그런데 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ ($\because \cos\theta<0$)

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 이차방정식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$을 θ를 이용하여 나타낸 경우	40%
(나)	주어진 사차방정식을 변형하여 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식을 세운 경우	40%
(다)	(가)에서 구한 식을 (나)에 대입하여 $\sin\theta$의 값을 구한 후, $\cos\theta$의 값을 구한 경우	20%

24 해결단계

❶ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 관계와 $\lvert\sin\theta\rvert$, $\cos\theta$의 관계를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 a^2, b의 값을 구한다.
❸ 단계	a^2+2b^2의 값을 구한다.

이차방정식 $10x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{a}{10}$ ……㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{b}{10}$ ……㉡

이차방정식 $10x^2-2ax-b=0$의 두 근이 $|\sin\theta|$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$|\sin\theta|+\cos\theta=\frac{2a}{10}$ ······㉢

$|\sin\theta|\cos\theta=-\frac{b}{10}$ ······㉣

㉡, ㉣에서 $\sin\theta\le 0$

$\sin\theta=0$이면 ㉠, ㉢에서

$\cos\theta=-\frac{a}{10}$, $\cos\theta=\frac{2a}{10}$

이므로 $\cos\theta=0$이 되어 모순이다.

$\therefore \sin\theta<0$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\sin\theta=-\frac{3a}{20}$, $\cos\theta=\frac{a}{20}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(-\frac{3a}{20}\right)^2+\left(\frac{a}{20}\right)^2=1$, $10a^2=400$

$\therefore a^2=40$

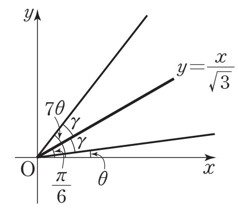
㉡에서 $\left(-\frac{3a}{20}\right)\times\frac{a}{20}=\frac{b}{10}$, $-3a^2=40b$

$a^2=40$을 대입하면 $b=-3$

$\therefore a^2+2b^2=40+2\times(-3)^2$
$=40+18=58$

답 58

그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 직선 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$가 이루는 예각의 크기를 γ라 하면 두 각 θ, 7θ를 나타내는 두 동경이 직선 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$에 대하여 대칭이므로



$\theta=\frac{\pi}{6}-\gamma$, $7\theta=2n\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\gamma\right)$ (단, $n=0, 1, 2, \cdots$)

$\theta+7\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$, $8\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta=\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{24}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{24}<\frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{6}<n<\frac{11}{6}$ $\quad\therefore n=0$ 또는 $n=1$

$n=0$일 때, $\theta=\frac{\pi}{24}=\alpha$

$n=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}=\frac{7}{24}\pi=\beta$

$\therefore \sin 12\alpha+\tan\left(\beta-\frac{\pi}{24}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{2}+\tan\frac{\pi}{4}$
$=1+1$
$=2$

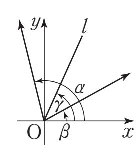
답 2

BLACKLABEL 특강 참고

원점에서 시작하는 반직선 l이 나타내는 각이 γ이고, 두 각 α, β를 나타내는 두 동경이 반직선 l에 대하여 대칭이면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma+n\pi$ (n은 정수)

가 성립한다.



STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.61~62

01 2	02 π	03 ③	04 4	05 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
06 7	07 21	08 $\frac{68}{3}$	09 69	10 98
11 $\frac{100}{3}\pi$	12 74			

01 해결단계

❶ 단계	x축과 직선 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$가 이루는 예각의 크기를 구한다.
❷ 단계	두 각 θ, 7θ를 ❶단계에서 구한 예각을 이용하여 나타내고, 두 각 θ, 7θ의 합을 구한다.
❸ 단계	θ의 일반각을 구한 후, α, β를 구하여 주어진 식의 값을 구한다.

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$이므로 x축과 직선 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

02 해결단계

❶ 단계	$\cos 2\theta\sin\theta>0$, $\sin 2\theta\cos\theta<0$에서 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 부호를 기준으로 경우를 나눈 후, 각 경우에 따른 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$의 값의 부호를 판별한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 삼각함수의 값의 부호를 통해 조건을 만족시킬 수 있는 θ의 범위를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 θ의 범위를 이용하여 점 P가 나타내는 모든 호의 길이를 구하여 그 합을 구한다.

$0<\theta<2\pi$에서 $0<2\theta<4\pi$이므로

$\cos 2\theta\sin\theta>0$, $\sin 2\theta\cos\theta<0$을 만족시키는 θ의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

(i) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$인 경우

$\cos 2\theta>0$, $\sin 2\theta<0$이어야 하므로 θ는 제1사분면의 각이고 2θ는 제4사분면의 각이어야 한다.

2θ가 제4사분면의 각이므로

$\frac{3}{2}\pi < 2\theta < 2\pi$ 또는 $\frac{7}{2}\pi < 2\theta < 4\pi$에서

$\frac{3}{4}\pi < \theta < \pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

이때 θ는 제1사분면의 각이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$인 경우

$\cos 2\theta > 0$, $\sin 2\theta > 0$이어야 하므로 θ는 제2사분면의 각이고 2θ는 제1사분면의 각이어야 한다.

2θ가 제1사분면의 각이므로

$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $2\pi < 2\theta < \frac{5}{2}\pi$에서

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$

이때 θ는 제2사분면의 각이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$인 경우

$\cos 2\theta < 0$, $\sin 2\theta < 0$이어야 하므로 θ는 제4사분면의 각이고 2θ는 제3사분면의 각이어야 한다.

2θ가 제3사분면의 각이므로

$\pi < 2\theta < \frac{3}{2}\pi$ 또는 $3\pi < 2\theta < \frac{7}{2}\pi$에서

$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

이때 θ는 제4사분면의 각이어야 하므로 조건을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

(iv) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$인 경우

$\cos 2\theta < 0$, $\sin 2\theta > 0$이어야 하므로 θ는 제3사분면의 각이고 2θ는 제2사분면의 각이어야 한다.

2θ가 제2사분면의 각이므로

$\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$ 또는 $\frac{5}{2}\pi < 2\theta < 3\pi$에서

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

이때 θ는 제3사분면의 각이어야 하므로 조건을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

(i)~(iv)에서 $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$이므로 점 P가 나타내는 모든 호의 길이의 합은

$2\times\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right) + 2\times\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{3}{2}\pi\right) = \pi$ 답 π

03 해결단계

❶ 단계	점 P의 좌표를 $(t, \sqrt{t})(t>0)$라 하고 $\cos\theta$, $\sin\theta$를 t에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = -1$을 이용하여 t의 값을 구한다.
❸ 단계	선분 OP의 길이를 구한다.

점 P의 좌표를 $(t, \sqrt{t})(t>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{t^2+t}$이므로

$\cos\theta = \frac{t}{\sqrt{t^2+t}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+t}}$

$\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = -1$에서

$\frac{t^2}{t^2+t} - \frac{2t}{t^2+t} = -1$

$t^2 - 2t = -t^2 - t$, $t(2t-1) = 0$

$\therefore t = 0$ 또는 $t = \frac{1}{2}$

이때 $t > 0$이므로 $t = \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ③

04 해결단계

❶ 단계	$\cos t$, $\sin t$를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$에 대입하여 점 A가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 도형을 좌표평면 위에 나타낸 후, 함수 $f(t)$의 최댓값 M, 최솟값 m을 구하여 $M-m$의 값을 구한다.

$x = 2 + 2\cos t$, $y = 6 + 2\sin t$에서

$\cos t = \frac{x-2}{2}$, $\sin t = \frac{y-6}{2}$

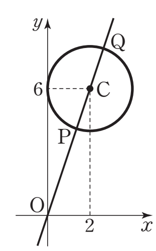
이때 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$이므로

$\left(\frac{y-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore (x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$

즉, 점 A는 중심의 좌표가 (2, 6)이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

원 $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$의 중심을 C라 하면 C(2, 6)이고 반지름의 길이는 2이다.



오른쪽 그림과 같이 직선 OC가 원과 만나는 두 점 중 원점에 가까운 점을 P, 나머지 한 점을 Q라 하면

$f(t)$의 최댓값은 $M = \overline{\mathrm{OQ}}$,

$f(t)$의 최솟값은 $m = \overline{\mathrm{OP}}$이므로

$M - m = \overline{\mathrm{OQ}} - \overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PQ}} = 2\times 2 = 4$

답 4

05 해결단계

❶ 단계	두 삼각형 EBA, ECD가 모두 이등변삼각형이고, 서로 닮음임을 파악한다.
❷ 단계	점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 세 선분 AB, CD, BH의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}}\cos\theta$, $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{BC}}\cos\theta$임을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ABC}$ ($\because$ $\widehat{\mathrm{AC}}$에 대한 원주각)

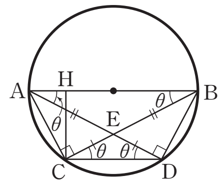
$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCD}$ ($\because$ $\widehat{\mathrm{BD}}$에 대한 원주각)

이때 두 선분 AB, CD가 평행하므로

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{ADC}$, $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCD}$

$\therefore \angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BCD} = \theta$

즉, 두 삼각형 EBA, ECD는 모두 이등변삼각형이고 서로 닮음이다.*



이때 넓이의 비가 9 : 1이므로 닮음비는 3 : 1이다.

$\overline{AB}=6k$라 하면 $\overline{CD}=2k$

□ACDB는 등변사다리꼴이므로 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}(6k-2k)=2k$이므로 $\overline{BH}=6k-2k=4k$

직각삼각형 ACB에서

$\overline{BC}=\overline{AB}\cos\theta$

직각삼각형 BHC에서 $\overline{BH}=\overline{BC}\cos\theta$

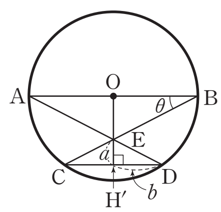
즉, $\overline{BH}=\overline{AB}\cos^2\theta$이므로

$4k=6k\cos^2\theta$, $\cos^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

• 다른 풀이 1 •

그림과 같이 원의 중심을 O라 하고 점 O에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.



두 삼각형 EH′D, EOB에서

$\angle EOB=\angle EH'D=90^\circ$

$\angle EDH'=\angle EBO=\theta$

($\because \overset{\frown}{AC}$에 대한 원주각)

$\therefore \triangle EH'D \backsim \triangle EOB$ ($\because$ AA 닮음)

이때 $\triangle ECD=\frac{1}{9}\triangle EBA$이므로 두 삼각형 EH′D, EOB의 닮음비는 1 : 3이다.

$\overline{EH'}=a$, $\overline{H'D}=b$라 하면 $\overline{EO}=3a$, $\overline{BO}=3b$

$\therefore \overline{EB}=\sqrt{\overline{EO}^2+\overline{BO}^2}=3\sqrt{a^2+b^2}$

직각삼각형 OH′D에서

$\overline{OH'}^2+\overline{H'D}^2=\overline{OD}^2$

$\overline{OD}=\overline{BO}=3b$이므로

$16a^2+b^2=9b^2$, $b^2=2a^2$ $\therefore b=\sqrt{2}a$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{BO}}{\overline{EB}}=\frac{3b}{3\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3\sqrt{2}a}{3\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

• 다른 풀이 2 •

*에서 선분 AB가 원의 지름이므로

$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$

$\overline{AB}=a$라 하면 $\triangle ACB$는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=a\sin\theta$, $\overline{BC}=a\cos\theta$

또한, $\overline{AE}=\overline{BE}=x$, $\overline{CE}=\overline{DE}=y$라 하면

$\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BE}$에서 $x+y=a\cos\theta$ ……㉠

$\triangle ACE$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}^2=\overline{AC}^2+\overline{CE}^2$

$x^2=a^2\sin^2\theta+y^2$

$a^2\sin^2\theta=x^2-y^2$

$a^2\sin^2\theta=(x+y)(x-y)$

㉠을 위의 식에 대입하면

$a^2\sin^2\theta=a(x-y)\cos\theta$

$\therefore x-y=\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{a}{2\cos\theta}$, $y=a\cos\theta-\frac{a}{2\cos\theta}$

이때 두 삼각형 EBA, ECD가 서로 닮음이고, 넓이의 비가 9 : 1이므로 닮음비는 3 : 1이다.

즉, $x:y=3:1$에서

$\frac{a}{2\cos\theta}:\left(a\cos\theta-\frac{a}{2\cos\theta}\right)=3:1$

$3a\cos\theta-\frac{3a}{2\cos\theta}=\frac{a}{2\cos\theta}$

위의 식의 양변에 $2\cos\theta$를 곱하면

$6a\cos^2\theta-3a=a$, $6\cos^2\theta=4$

$\cos^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{에서 }\cos\theta>0\right)$

06 해결단계

❶ 단계	$h(\theta)$가 원점과 점 P 사이의 거리의 제곱임을 이해한다.
❷ 단계	$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 반직선 OQ와 원 C_1의 교점을 B라 하고 호 AB의 길이와 호 BP의 길이가 같음을 이용하여 $\angle BQP$의 크기를 구한 후, $\angle OQP$의 크기를 구한다.
❸ 단계	두 점 P, Q의 좌표를 구하고, $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구한다.

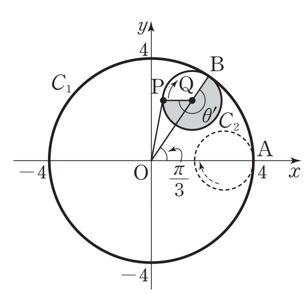
$P(f(\theta),\ g(\theta))$에 대하여 $\overline{OP}^2=\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2$이므로

$h(\theta)=\{f(\theta)\}^2+\{g(\theta)\}^2=\overline{OP}^2$

즉, $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 원점과 점 P 사이의 거리의 제곱이다.

다음 그림과 같이 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 두 원 C_1, C_2의 접점을 B라 하면

$\angle BOA=\frac{\pi}{3}$



원 C_2가 원 C_1에 내접하면서 미끄러지지 않게 굴렸으므로 부채꼴 BOA의 호 AB와 색칠한 부채꼴 BQP의 호 BP의 길이가 같다. 즉, $\angle BQP=\theta'$이라 하면

$4\times\frac{\pi}{3}=1\times\theta'$에서 $\theta'=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \angle OQP=\theta'-\pi=\frac{4}{3}\pi-\pi=\frac{\pi}{3}$

이때 $\angle\mathrm{OQP}=\angle\mathrm{BOA}=\frac{\pi}{3}$이므로 선분 PQ가 x축과 평행하고, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로 점 P는 점 Q를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{QB}}=3$이므로 점 Q의 좌표는
$\left(3\cos\frac{\pi}{3},\ 3\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이므로
$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$$\begin{aligned}\therefore h\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\left\{f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2+\left\{g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}+\frac{27}{4}=7\end{aligned}$$
답 7

07 해결단계

❶ 단계	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 정리한다.
❷ 단계	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$의 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{8}{\cos^2 x}+3\\&=\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}+\frac{8(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\cos^2 x}+3\\&=2+\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x}+8+3\\&=\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x}+13\end{aligned}$$
이때 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}>0,\ \frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x}>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$\begin{aligned}f(x)&\geq 2\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}\times\frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x}}+13\\&=2\times4+13=21\end{aligned}$$
$\left(\text{단, 등호는 }\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x}\text{일 때 성립}\right)$
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 21이다. 답 21

• 다른 풀이 •

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0,\ \cos x>0$이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$$\left(\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{\sin x}+\cos x\times\frac{2\sqrt{2}}{\cos x}\right)^2\leq(\sin^2 x+\cos^2 x)\left(\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{8}{\cos^2 x}\right)$$
(단, 등호는 $\sqrt{2}\sin x=\cos x$일 때 성립)
$18\leq\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{8}{\cos^2 x},\ 21\leq\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{8}{\cos^2 x}+3$
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 21이다.

08 해결단계

❶ 단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sin\theta$와 $\cos\theta$ 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 관계식과 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 구한다.
❸ 단계	$(a-b)^2$의 값과 $\tan\theta$의 값을 구한 후, $(a-b)^2\tan\theta$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2\sin\theta-4x+1+\cos\theta=0$의 두 근이 a, b이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a+b=\frac{4}{\sin\theta},\ ab=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$
또한, 이차방정식 $2x^2\sin\theta-4x+\sin\theta=0$의 두 근이 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{\sin\theta},\ \frac{1}{ab}=\frac{1}{2}\qquad\therefore ab=2$
$ab=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$에서 $2=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$
$\therefore \cos\theta=2\sin\theta-1$
*이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta+(2\sin\theta-1)^2=1$
$5\sin^2\theta-4\sin\theta=0\qquad\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}\ (\because \sin\theta\neq0)$
$\cos\theta=2\sin\theta-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$
$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{3}$
$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로
$(a-b)^2=\left(\frac{4}{\sin\theta}\right)^2-4\times\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=25-4\times2=17$
$\therefore (a-b)^2\tan\theta=17\times\frac{4}{3}=\frac{68}{3}$ 답 $\frac{68}{3}$

• 다른 풀이 •

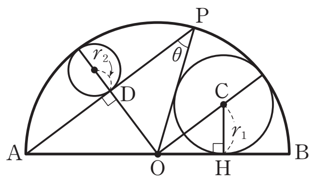
이차방정식 $x^2\sin\theta-4x+1+\cos\theta=0$의 두 근이 a, b일 때, $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}$을 두 근으로 하는 이차방정식은
$(1+\cos\theta)x^2-4x+\sin\theta=0$
이때 이차방정식 $2x^2\sin\theta-4x+\sin\theta=0$의 두 근이 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}$이므로
$1+\cos\theta=2\sin\theta\qquad\therefore \cos\theta=2\sin\theta-1$
다음은 *와 같다.

BLACKLABEL 특강 참고

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (c\neq0)$의 두 근이 p, q이면
이차방정식 $cx^2\pm bx+a=0$의 두 근은 $\pm\frac{1}{p},\ \pm\frac{1}{q}$이다. (복부호 동순)
증명 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 p이므로
$ap^2+bp+c=0\qquad\cdots\cdots㉠$
한편, $x=\pm\frac{1}{p}$을 이차식 $cx^2\pm bx+a$에 대입하면
$\frac{c}{p^2}+\frac{b}{p}+a=\frac{1}{p^2}(c+bp+ap^2)=0\ (\because ㉠)$
따라서 이차방정식 $cx^2\pm bx+a=0$의 한 근은 $\pm\frac{1}{p}$이다.
같은 방법으로 $\pm\frac{1}{q}$에 대해서도 성립한다.

09 해결단계

❶ 단계	부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 C, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\angle BOC=\theta$, $\overline{OC}=6-r_1$, $\overline{CH}=r_1$임을 이용하여 r_1의 값을 구한다.
❷ 단계	선분 AP의 중점을 D라 할 때, 호 AP와 선분 AP에 동시에 접하는 원의 넓이가 최대이려면 원의 중심이 직선 OD 위에 있어야 함을 파악한다.
❸ 단계	선분 OD의 길이를 구하고, $\overline{OD}=6-2r_2$임을 이용하여 r_2의 값을 구한다.
❹ 단계	$20(r_1+r_2)$의 값을 구한다.



부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 C라 하자.

$\angle OPA=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\triangle AOP$는 $\overline{OA}=\overline{OP}$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAP=\angle OPA=\theta$에서

$\angle BOP=2\theta$

이때 점 C는 $\angle BOP$의 이등분선 위에 있으므로

$\angle BOC=\theta$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OC}=6-r_1$, $\overline{CH}=r_1$이므로

$\sin\theta=\frac{r_1}{6-r_1}=\frac{3}{5}$

$18-3r_1=5r_1 \qquad \therefore r_1=\frac{9}{4}$

한편, 선분 AP의 중점을 D라 하자.

호 AP와 선분 AP에 동시에 접하는 원의 넓이가 최대이려면 원의 중심이 직선 OD 위에 있어야 한다.*

이때 $\overline{OD}=6-2r_2$이고

$\overline{OD}=\overline{OA}\sin\theta=6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$이므로

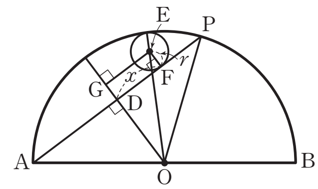
$\frac{18}{5}=6-2r_2 \qquad \therefore r_2=\frac{6}{5}$

$\therefore 20(r_1+r_2)=20\times\left(\frac{9}{4}+\frac{6}{5}\right)=69$ **답** 69

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

삼각함수를 이용하여 선분의 길이를 구하거나 나타내는 것은 시험에서 자주 출제되는 중요한 개념이다. 어떠한 선분의 길이를 구하거나 나타낼 때 우선 그 선분을 포함하는 직각삼각형을 찾을 수 있도록 노력해야 한다. 특히, 두 원이 접하는 경우 두 원의 중심을 연결하는 직선과 두 원의 접점을 같이 표시하는 것이 문제 해결에 도움이 된다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *



그림과 같이 호 AP와 선분 AP에 동시에 접하는 원의 중심을 E, 반지름의 길이를 r이라 하고 점 E에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 F, 선분 OD의 연장선에 내린 수선의 발을 G라 하자.

$\overline{FD}=x$라 하면 $\overline{EG}=\overline{FD}=x$이고

$\overline{OG}=\overline{OD}+\overline{DG}=\frac{18}{5}+r$, $\overline{OE}=6-r$이므로

직각삼각형 OGE에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+\left(\frac{18}{5}+r\right)^2=(6-r)^2$

$x^2+\frac{324}{25}+\frac{36}{5}r+r^2=36-12r+r^2$

$\frac{96}{5}r=\frac{576}{25}-x^2,\ r=\frac{6}{5}-\frac{5}{96}x^2$

즉, r의 값이 최대이려면 $x=0$이어야 하므로 두 점 D와 F는 서로 일치해야 한다.

따라서 호 AP와 선분 AP에 동시에 접하면서 넓이가 최대인 원의 중심은 직선 OD 위에 있다.

10 해결단계

❶ 단계	주어진 등식의 각 변을 제곱한다.
❷ 단계	$\sin x=p$, $\cos y=q$로 치환하고, 삼각함수의 관계를 이용하여 p, q의 관계식을 구한다.
❸ 단계	$64(\sin^2 x+\cos^2 y)$를 p, q에 대한 식으로 나타내고 그 값을 구한다.

$\sin x+\cos y=\cos x\sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}}$의 각 변을 제곱하면

$(\sin x+\cos y)^2=\frac{1}{32}$,

$\cos^2 x\sin^2 y=\frac{1}{32}$

$\sin x=p\ (-1\le p\le 1)$, $\cos y=q\ (-1\le q\le 1)$로 놓으면

$(\sin x+\cos y)^2=(p+q)^2=\frac{1}{32}$

$p^2+2pq+q^2=\frac{1}{32}$ ……㉠

$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-p^2$,

$\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-q^2$이므로

$\cos^2 x\sin^2 y=(1-p^2)(1-q^2)=\frac{1}{32}$

$1-p^2-q^2+p^2q^2=\frac{1}{32}$ ……㉡

이때 ㉠에서 $p^2+q^2=\frac{1}{32}-2pq$이므로 이 식을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p^2q^2+2pq+\frac{15}{16}=0$

$16p^2q^2+32pq+15=0$

$(4pq+5)(4pq+3)=0$

$\therefore pq=-\frac{5}{4}$ 또는 $pq=-\frac{3}{4}$

이때 $-1 \le p \le 1$, $-1 \le q \le 1$에서 $-1 \le pq \le 1$이므로

$pq = -\frac{3}{4}$

$$\therefore 64(\sin^2 x + \cos^2 y) = 64(p^2+q^2)$$
$$= 64\{(p+q)^2 - 2pq\}$$
$$= 64\left\{\frac{1}{32} - 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)\right\}$$
$$= 64 \times \frac{49}{32} = 98$$

답 98

11 해결단계

❶ 단계	두 선분 OP, OQ가 1초당 회전하는 각의 크기를 구한다.
❷ 단계	15초 단위로 두 선분 OP, OQ의 위치와 그때의 원의 내부의 흰색 부분과 검은색 부분을 나타낸다.
❸ 단계	원의 내부 상태가 반복되는 주기를 찾고 1000초 후의 원의 내부를 그림으로 나타낸다.
❹ 단계	1000초 후의 검은색 부분의 넓이를 구한다.

두 선분 OP, OQ가 원을 한 바퀴 도는 데 각각 30초, 60초가 걸리므로 1초당

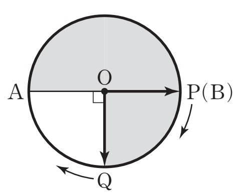
선분 OP는 $\frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$,

선분 OQ는 $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$

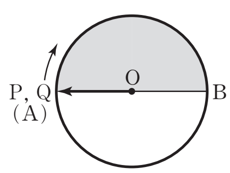
만큼 회전한다.

$\angle AOB = \pi$이므로 선분 OA에서 출발한 선분 OP는 15초 후에 선분 OB에 도착하고, 그때의 선분 OQ는 선분 OB에서 시계 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전한 곳에 도착한다.

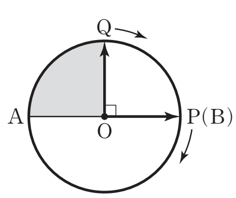
즉, 15초마다 두 선분 OP, OQ는 시계 방향으로 각각 π만큼, $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하므로 두 선분이 동시에 출발하여 15초, 30초, 45초, 60초가 되는 순간, 흰색 부분과 검은색 부분을 나타내면 다음 그림과 같다.



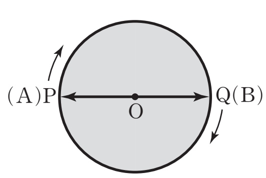
[15초]



[30초]



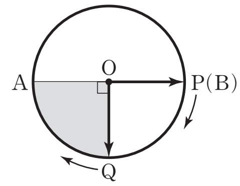
[45초]



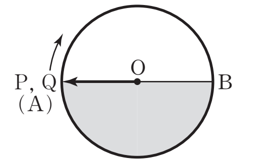
[60초]

60초가 지났을 때, 두 선분 OP, OQ는 각각 처음과 같은 위치인 두 선분 OA, OB에 위치하고, 이때 원의 내부 전체가 검은색이다.

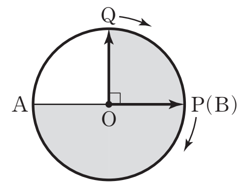
출발한 지 60초 후 두 선분 OP, OQ의 위치는 출발 직후와 같으면서 검은색 부분은 흰색으로, 흰색 부분은 검은색으로 바뀌므로 다음 그림과 같다.



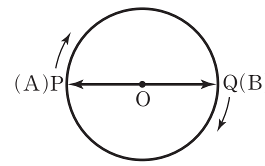
[75초]



[90초]



[105초]

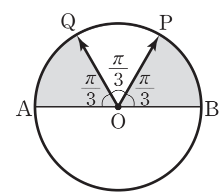


[120초]

즉, 출발한 지 120초 후 두 선분 OP, OQ의 위치와 원의 내부의 흰색 부분과 검은색 부분은 출발 직후와 동일해지므로 원의 내부는 120초를 주기로 반복된다.

이때 $1000 = 120 \times 8 + 40$이므로 두 선분 OP, OQ가 출발한 지 1000초 후의 원의 내부는 출발한 지 40초 후의 원의 내부와 같다.

이는 출발한 지 30초가 지났을 때의 원의 내부에서 10초가 더 지났으므로 오른쪽 그림과 같이 선분 OP는 선분 OA에서



$\frac{\pi}{15} \times 10 = \frac{2}{3}\pi$만큼, 선분 OQ는

선분 OA에서 $\frac{\pi}{30} \times 10 = \frac{\pi}{3}$만큼 회전한 위치에 있다.

따라서 출발한 지 1000초 후, 검은색 부분의 넓이는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 두 개의 넓이의 합과 같으므로

$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{100}{3}\pi$

답 $\frac{100}{3}\pi$

12 해결단계

❶ 단계	두 함수 $f(n)$, $g(n)$의 규칙성을 찾는다.
❷ 단계	n의 값에 따라 함수 $f(n)$, $g(n)$의 값을 구하고, 주어진 방정식에 대입한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 n의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

자연수 k에 대하여 $f(n) = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$에서

$f(2k-1) = \frac{2k-1}{2} - \left[\frac{2k-1}{2}\right] = k - \frac{1}{2} - (k-1) = \frac{1}{2}$

$f(2k) = \frac{2k}{2} - \left[\frac{2k}{2}\right] = k - k = 0$

$g(n) = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$에서

$g(3k-2) = \frac{3k-2}{3} - \left[\frac{3k-2}{3}\right] = k - \frac{2}{3} - (k-1) = \frac{1}{3}$

$g(3k-1) = \frac{3k-1}{3} - \left[\frac{3k-1}{3}\right] = k - \frac{1}{3} - (k-1) = \frac{2}{3}$

$g(3k) = \frac{3k}{3} - \left[\frac{3k}{3}\right] = k - k = 0$

따라서 자연수 k에 대하여

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ (n=2k-1)\\ 0\ \ (n=2k)\end{cases},\ g(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ (n=3k-2)\\ \frac{2}{3}\ (n=3k-1)\\ 0\ \ (n=3k)\end{cases}$$

$$(a^2+b^2+2ab-3)\cos\frac{f(n)}{2}\pi+(b^2+ab-2)\tan\frac{g(n)}{2}\pi=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

에 대하여

(i) $n=6l+1$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+1)=\frac{1}{2}$, $g(6l+1)=\frac{1}{3}$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\frac{g(n)}{2}\pi=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2+2ab-3)+\frac{\sqrt{3}}{3}(b^2+ab-2)=1$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ii) $n=6l+2$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+2)=0$, $g(6l+2)=\frac{2}{3}$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=1$, $\tan\frac{g(n)}{2}\pi=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$(a^2+b^2+2ab-3)+\sqrt{3}(b^2+ab-2)=1$

$a^2+b^2+2ab-3=1$, $b^2+ab-2=0$이므로

$(a+b)^2=4$, $b(a+b)=2$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$의 1개이다.

(iii) $n=6l+3$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+3)=\frac{1}{2}$, $g(6l+3)=0$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\frac{g(n)}{2}\pi=0$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2+2ab-3)=1$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iv) $n=6l+4$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+4)=0$, $g(6l+4)=\frac{1}{3}$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=1$, $\tan\frac{g(n)}{2}\pi=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$(a^2+b^2+2ab-3)+\frac{\sqrt{3}}{3}(b^2+ab-2)=1$

$a^2+b^2+2ab-3=1$, $b^2+ab-2=0$이므로

$(a+b)^2=4$, $b(a+b)=2$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$의 1개이다.

(v) $n=6l+5$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+5)=\frac{1}{2}$, $g(6l+5)=\frac{2}{3}$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\frac{g(n)}{2}\pi=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2+2ab-3)+\sqrt{3}(b^2+ab-2)=1$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(vi) $n=6l+6$ (l은 음이 아닌 정수)일 때,

$f(6l+6)=0$, $g(6l+6)=0$이므로

$\cos\frac{f(n)}{2}\pi=1$, $\tan\frac{g(n)}{2}\pi=0$

위의 두 식을 ㉠에 대입하면

$a^2+b^2+2ab-3=1$이므로

$(a+b)^2=4$

이것을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$의 3개이다.

(i)~(vi)에서 순서쌍 (a, b)의 개수가 1이려면

$n=6l+2$ 또는 $n=6l+4$

$n\le 20$이므로 $6l+2\le 20$에서 $l\le 3$

즉, $l=0, 1, 2, 3$이므로 $n=2, 8, 14, 20$

또한, $6l+4\le 20$에서 $l\le\frac{8}{3}$

즉, $l=0, 1, 2$이므로 $n=4, 10, 16$

따라서 자연수 n의 값은 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20이므로 구하는 합은

$2+4+8+10+14+16+20=74$

답 74

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

n의 값에 따라 함수 $\cos\frac{f(n)}{2}\pi$, $\tan\frac{g(n)}{2}\pi$의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
$\cos\frac{f(n)}{2}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\tan\frac{g(n)}{2}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	0

음이 아닌 두 정수 a, b에 대하여 $a^2+b^2+2ab-3$, b^2+ab-2의 값은 정수이고

$n=1$, 5이면 $\cos\frac{f(n)}{2}\pi=$(무리수), $\tan\frac{g(n)}{2}\pi=$(무리수)이므로 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b는 존재하지 않는다.

또한, $n=3$이면 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2+b^2+2ab-3)=1$이므로 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 두 정수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 $n=2$, 4, 6에서 조건을 만족시키는 두 정수 a, b가 존재하는지 구하면 된다.

06. 삼각함수의 그래프

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.65~67

01 ⑤	02 ⑤	03 ③	04 5	05 -1
06 ③	07 ①	08 2	09 ③	10 5
11 ④	12 1	13 ①	14 ②	15 ③
16 ③	17 ④	18 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	19 ②	
20 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$		21 ⑤		

01 주어진 함수는 주기함수이고, 보기의 각 함수의 주기를 구하면 다음과 같다.

① (주기)$=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

② (주기)$=\dfrac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

③ (주기)$=\pi$

④ (주기)$=\dfrac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

⑤ (주기)$=\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}\pi}=\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+\sqrt{2})$를 만족시키는 함수는 ⑤이다. 답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

주기가 $\sqrt{2}$가 아니더라도 $f(x)=f(x+\sqrt{2})$를 만족시킬 수 있다.
예를 들어, 함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이면
$f(x)=f\left(x+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=f\left(x+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=f(x+\sqrt{2})$

02 ㄱ. 함수 $y=\cos 4x-7$의 그래프는 함수 $y=2\cos 4x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배 한 후 y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=2\cos(4x+\pi)=2\cos 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y=2\cos 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=-2\cos 4x+5$의 그래프는 함수 $y=2\cos 4x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 함수 $y=2\cos(4x+3\pi)+2=2\cos 4\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)+2$의 그래프는 함수 $y=2\cos 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{4}\pi$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2\cos 4x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

03 ㄱ. 최댓값은 $|-2|+1=2+1=3$이고,
최솟값은 $-|-2|+1=-2+1=-1$이다. (참)

ㄴ. $y=-2\cos(3x-\pi)+1$에서
$y-1=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=-2\cos 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=-2\cos(3x-\pi)+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$인 주기함수이므로
$f(x)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$
즉,
$-2\cos(3x-\pi)+1$
$=-2\cos\left\{3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)-\pi\right\}+1$
$=-2\cos(3x+\pi)+1$
이므로 주어진 함수의 그래프는 함수
$y=-2\cos(3x+\pi)+1$의 그래프와 일치한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른 풀이 •

ㄷ. $\cos(3x-\pi)=\cos(\pi-3x)$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$
$=-\cos 3x$
$\cos(3x+\pi)=\cos(\pi+3x)$
$=-\cos 3x$
즉, 주어진 함수 $y=-2\cos(3x-\pi)+1$의 그래프는 함수 $y=-2\cos(3x+\pi)+1$의 그래프와 일치한다. (참)

04 함수 $f(x)=a\sin\frac{x}{2b}+c$의 최솟값이 -1이므로
$-|a|+c=-1$
그런데 $a>0$이므로
$-a+c=-1$ ……㉠
또한, 함수 $f(x)=a\sin\frac{x}{2b}+c$의 주기가 4π이므로
$\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2b}\right|}=4\pi$
그런데 $b>0$이므로
$\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2b}}=4\pi$
$4b\pi=4\pi$ $\therefore b=1$

이때 $f(x)=a\sin\frac{x}{2}+c$에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{11}{4}$이므로

$a\sin\frac{\pi}{6}+c=\frac{11}{4}$, $\frac{1}{2}a+c=\frac{11}{4}$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{2}$, $c=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+c=\frac{5}{2}+1+\frac{3}{2}=5$ 답 5

05 주어진 함수의 그래프에서 최댓값이 1, 최솟값이 -3이므로

$|a|+d=1$, $-|a|+d=-3$

그런데 $a>0$이므로

$a+d=1$, $-a+d=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $d=-1$

또한, 주어진 그래프에서 주기는 $\frac{3}{2}\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=2\pi$, $|b|=1$ $\quad\therefore b=1$ ($\because b>0$)

즉, 주어진 함수의 식은

$y=2\cos(x-c\pi)-1$

그런데 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$을 지나므로

$1=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\pi\right)-1$, $2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\pi\right)$

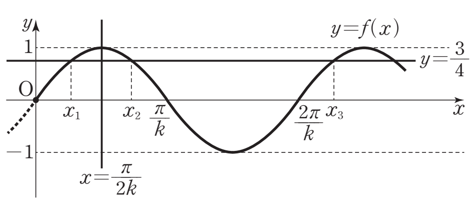
$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-c\pi\right)=1$

이때 $0<c\le\frac{1}{2}$에서 $0\le\frac{\pi}{2}-c\pi<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}-c\pi=0$ $\quad\therefore c=\frac{1}{2}$

$\therefore abcd=2\times1\times\frac{1}{2}\times(-1)=-1$ 답 -1

06 함수 $f(x)=\sin kx$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이므로 다음 그림과 같이 $0\le x\le\frac{\pi}{k}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2k}$에 대하여 대칭이다.



또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 x_1, x_2, x_3, …이라 하면 방정식 $f(x)=\frac{3}{4}$의 근은 x_1, x_2, x_3, …과 같다.

이때 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2k}$이므로

$x_1+x_2=\frac{\pi}{k}$

$\therefore f(x_1+x_2+x_3)=f\left(\frac{\pi}{k}+x_3\right)=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+x_3\right)$

$=\sin(\pi+kx_3)$

$=-\sin kx_3$

$=-f(x_3)=-\frac{3}{4}$ 답 ③

07 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos(2\pi+\theta)+\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cos\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times(-\sin\theta)$

$=-\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=-1$ 답 ①

08 $75^\circ=90^\circ-15^\circ$이므로 주어진 식의 삼각함수를 모두 15°에 대한 삼각함수로 변환하여 계산하면

$\frac{\sin 75^\circ-\cos 75^\circ-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\tan 75^\circ-\cos 75^\circ}$

$=\frac{\sin(90^\circ-15^\circ)-\cos(90^\circ-15^\circ)-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\tan(90^\circ-15^\circ)-\cos(90^\circ-15^\circ)}$

$=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ-\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ\times\frac{1}{\tan 15^\circ}-\sin 15^\circ}$

$=\frac{2\cos 15^\circ-2\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\times\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}-\sin 15^\circ}$

$=\frac{2(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=2$ 답 2

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

90°를 이용한 삼각함수의 변환에 익숙하지 않다면 다음과 같이 $\frac{\pi}{2}$를 이용하여 변환해도 된다.

$15^\circ=\theta$로 놓으면 $75^\circ=90^\circ-15^\circ=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\sin 75^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\cos 15^\circ$

$\cos 75^\circ=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\sin 15^\circ$

$\tan 75^\circ=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan 15^\circ}$

09 단위원을 10등분하였고 $\angle P_1OP_2=\theta$이므로

$10\theta=2\pi$ $\quad\therefore 5\theta=\pi$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$

$+\cos(\pi+\theta)+\cos(\pi+2\theta)$

$+\cos(\pi+3\theta)+\cos(\pi+4\theta)$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$

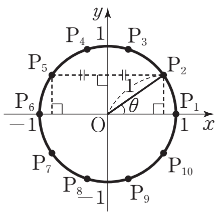
$-\cos\theta-\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos 4\theta$

$=\cos 5\theta$

$=\cos\pi=-1$ 답 ③

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림에서 두 점 P_1과 P_6, 두 점 P_2와 P_5, 두 점 P_3과 P_4, 두 점 P_7과 P_{10}, 두 점 P_8과 P_9는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 각 두 점의 x좌표는 절댓값이 같고, 부호가 서로 반대이다.



즉, 삼각함수의 정의에 의하여 점 P_2의 x좌표는 $\cos\theta$이고 점 P_5의 x좌표는 $\cos 4\theta$이므로

$\cos\theta+\cos 4\theta=0$

같은 방법으로

$\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$, $\cos 6\theta+\cos 9\theta=0$,

$\cos 7\theta+\cos 8\theta=0$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta$
$\qquad +\cos 6\theta+\cos 7\theta+\cos 8\theta+\cos 9\theta$
$\qquad =\cos 5\theta=\cos\pi=-1$

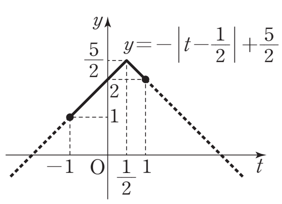
10 $y=-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}$에서 $\sin 2x=t$로 놓으면

$-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는 $y=-\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}$

(i) $-1\le t<\frac{1}{2}$일 때, $y=t-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=t+2$

(ii) $\frac{1}{2}\le t\le 1$일 때, $y=-\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=-t+3$

(i), (ii)에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때



$M=-\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

최솟값은 $t=-1$일 때

$m=-\left|-1-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$

$\therefore 2Mm=2\times\frac{5}{2}\times 1=5$ 답 5

• 다른 풀이 •

모든 실수 x에 대하여

$-1\le \sin 2x\le 1$이므로

$-\frac{3}{2}\le \sin 2x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$, $0\le\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}\le-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|\le 0$

$\therefore 1\le-\left|\sin 2x-\frac{1}{2}\right|+\frac{5}{2}\le\frac{5}{2}$

따라서 최댓값 $M=\frac{5}{2}$, 최솟값 $m=1$이므로

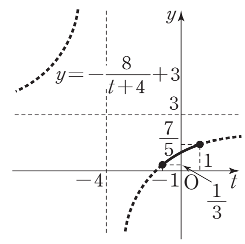
$2Mm=2\times\frac{5}{2}\times 1=5$

11 $y=\frac{3\sin x+4}{\sin x+4}$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=\frac{3t+4}{t+4}=\frac{3(t+4)-8}{t+4}$

$\quad=-\frac{8}{t+4}+3$

이므로 오른쪽 그림에서 최댓값은 $t=1$일 때



$-\frac{8}{1+4}+3=\frac{7}{5}$,

최솟값은 $t=-1$일 때

$-\frac{8}{-1+4}+3=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

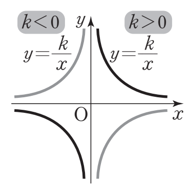
$\frac{7}{5}+\frac{1}{3}=\frac{26}{15}$

즉, $m=15$, $n=26$이므로

$m+n=41$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

유리함수 $y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$의 그래프



(1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
(2) 원점에 대하여 대칭이다.
(3) 점근선은 x축, y축이다.
(4) $k>0$이면 그래프가 제1, 3사분면에 있고, $k<0$이면 그래프가 제2, 4사분면에 있다.
(5) $|k|$의 값이 커질수록 곡선은 원점에서 멀어진다.

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프

(1) 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) 정의역은 $\{x|x\neq p$인 실수$\}$, 치역은 $\{y|y\neq q$인 실수$\}$이다.
(3) 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.
(4) 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

t에 대한 유리함수 $y=f(t)$의 점근선의 방정식을 $t=p$라 할 때, $a\le t\le b$ (a, b는 실수)에서 유리함수 $y=f(t)$의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하려면 $p<a$ 또는 $p>b$이어야 하고, $f(a)$, $f(b)$ 중 하나는 최댓값, 하나는 최솟값이어야 한다.

즉, 문제에서 함수 $f(t)=\frac{3t+4}{t+4}$라 하면 점근선의 방정식은 $t=-4$이므로 $-1\le t\le 1$에서 최댓값과 최솟값의 합은 $f(-1)+f(1)$이다.

12 $y=\cos^2\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)-3\cos^2(\pi-x)-4\sin(x+2\pi)$

$\quad=\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-3\cos^2(\pi-x)-4\sin(2\pi+x)$

$\quad=(-\sin x)^2-3(-\cos x)^2-4\sin x$

$\quad=\sin^2 x-3\cos^2 x-4\sin x$

$\quad=\sin^2 x-3(1-\sin^2 x)-4\sin x$

$\quad=4\sin^2 x-4\sin x-3$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

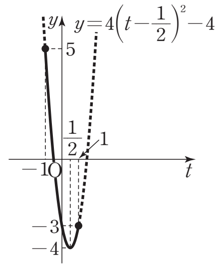
$y=4t^2-4t-3=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-4$

이므로 오른쪽 그림에서
최댓값은 $t=-1$일 때

$4\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2-4=5$,

최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때

$4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-4=-4$



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$5+(-4)=1$

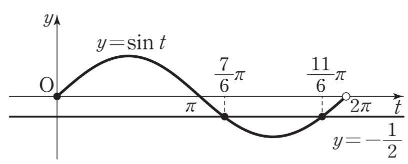
답 1

13 $\frac{1}{3}x=t$로 놓으면 $0\le x<6\pi$에서

$0\le\frac{1}{3}x<2\pi$ $\quad\therefore 0\le t<2\pi$

주어진 방정식은

$2\sin t+1=0$ $\quad\therefore \sin t=-\frac{1}{2}$



$0\le t<2\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표는

$\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

이때 $t=\frac{1}{3}x$이므로

$\frac{1}{3}x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{1}{3}x=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{2}\pi$

따라서 $\beta-\alpha=\frac{11}{2}\pi-\frac{7}{2}\pi=2\pi$이므로

$\cos(\beta-\alpha)=\cos 2\pi=1$

답 ①

14 $\cos x=\sqrt{3}(\sin x+1)$ $\quad\cdots\cdots$㉠

위의 식의 양변을 제곱하면

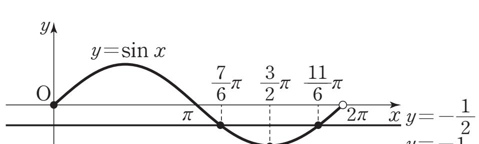
$\cos^2 x=3(\sin x+1)^2$

$1-\sin^2 x=3(\sin^2 x+2\sin x+1)$

$4\sin^2 x+6\sin x+2=0$, $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$

$(\sin x+1)(2\sin x+1)=0$

$\therefore \sin x=-1$ 또는 $\sin x=-\frac{1}{2}$



(i) $\sin x=-1$일 때,

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점의 x좌표는 $\frac{3}{2}\pi$

㉠에서 $\cos x=0$이고, $x=\frac{3}{2}\pi$이면 $\cos\frac{3}{2}\pi=0$이므로 주어진 방정식이 성립한다.

(ii) $\sin x=-\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

㉠에서 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고,

$x=\frac{7}{6}\pi$이면 $\cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 주어진 방정식이 성립하지 않는다.

$x=\frac{11}{6}\pi$이면 $\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 주어진 방정식이 성립한다.

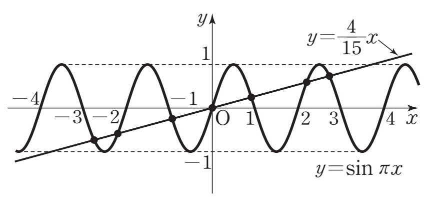
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$\frac{3}{2}\pi+\frac{11}{6}\pi=\frac{10}{3}\pi$

답 ②

15 방정식 $\sin\pi x=\frac{4}{15}x$의 실근은 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

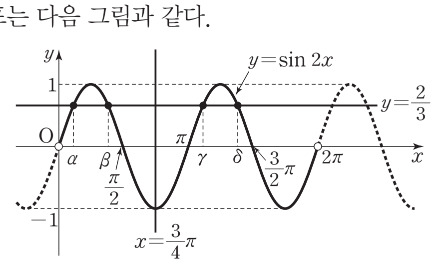
이때 $-1\le\sin\pi x\le 1$이고, 함수 $y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=\sin\pi x$, $y=\frac{4}{15}x$의 그래프의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수도 7이다.

답 ③

16 $0<x<2\pi$에서 $-1\le\sin 2x\le 1$이고, 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 $0<x<2\pi$에서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 방정식의 네 실근을 각각 α, β, γ, δ $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$

라 하면 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 $0<x<\frac{3}{2}\pi$에서 직선

$x=\frac{3}{4}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{3}{4}\pi$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{4}\pi$

$\alpha+\delta=\beta+\gamma=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ \theta=\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$

$\therefore\ \sin\frac{\theta}{6}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 답 ③

17 $\cos^2 x+2a\sin x=a^2$에서

$(1-\sin^2 x)+2a\sin x=a^2$

$\sin^2 x-2a\sin x+a^2-1=0$

$\sin^2 x-2a\sin x+(a-1)(a+1)=0$

$(\sin x-a+1)(\sin x-a-1)=0$

$\therefore\ \sin x=a-1$ 또는 $\sin x=a+1$ ……㉠

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 ㉠의 해가 존재하려면

$-1\le a-1\le1$ 또는 $-1\le a+1\le1$

즉, $0\le a\le2$ 또는 $-2\le a\le0$이어야 하므로

$-2\le a\le2$ 답 ④

18 이차방정식 $2x^2-4x\cos\theta-3\sin\theta=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta+6\sin\theta=0$

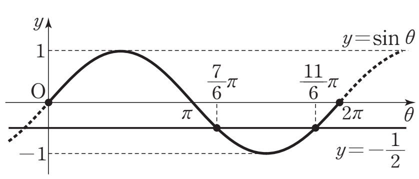
$4(1-\sin^2\theta)+6\sin\theta=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$

$\therefore\ \sin\theta=-\frac{1}{2}$ ($\because$ $-1\le\sin\theta\le1$)

$0\le\theta\le2\pi$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $\sin\theta=-\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{7}{6}\pi$일 때,

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}\pi$

$=-1+0=-1$

(ii) $\theta=\frac{11}{6}\pi$일 때,

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 식의 값의 합은

$-1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

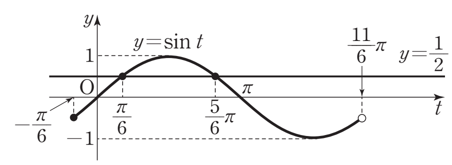
19 $x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ $\therefore\ -\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$

주어진 부등식은 $2\sin t\ge1$ $\therefore\ \sin t\ge\frac{1}{2}$ ……㉠

$-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선

$y=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$

이때 $t=x-\frac{\pi}{6}$이므로

$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$ $\therefore\ \frac{\pi}{3}\le x\le\pi$

그러므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 π, 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$이므로

$M=\pi$, $m=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \frac{M}{m}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ 답 ②

20 로그의 정의에 의하여 $1+\sin x>0$, $\cos x>0$

$\therefore\ \sin x>-1$, $\cos x>0$ ……㉠

$\log_4(1+\sin x)-\log_2\cos x>\frac{1}{2}$에서

$\log_4(1+\sin x)-\log_4\cos^2 x>\frac{1}{2}$

$\log_4\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}>\frac{1}{2}$

이때 (밑)$=4>1$이므로

$\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}>4^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}>2$

$\dfrac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}>2$

㉠에서 $1+\sin x>0$이므로

$\dfrac{1}{1-\sin x}>2$

이때 $1-\sin x\neq0$, 즉 $\sin x\neq1$ ……㉡

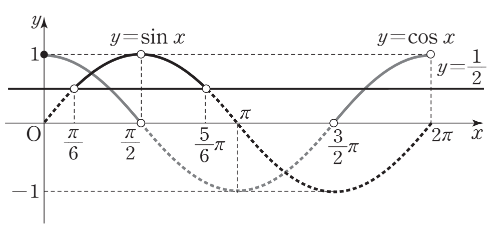
이고 $1-\sin x>0$이므로 부등식의 양변에 $1-\sin x$를 곱하면

$1>2(1-\sin x)$, $2\sin x>1$

$\therefore \sin x>\dfrac{1}{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 두 부등식 $\dfrac{1}{2}<\sin x<1$, $\cos x>0$을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위가 주어진 부등식의 해이다.

$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$은 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 부등식의 해는

$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 답 $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$

21 $\cos^2\theta-3\cos\theta-a+5\ge0$에서 $\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고 주어진 부등식은

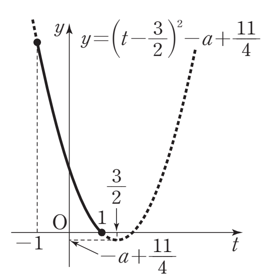
$t^2-3t-a+5\ge0$

$f(t)=t^2-3t-a+5$라 하면

$f(t)=t^2-3t-a+5$

$=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-a+\dfrac{11}{4}$

이때 $-1\le t\le1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최솟값은



$f(1)=1-3-a+5=-a+3$

주어진 부등식이 항상 성립하려면 ($f(t)$의 최솟값)≥0이어야 하므로

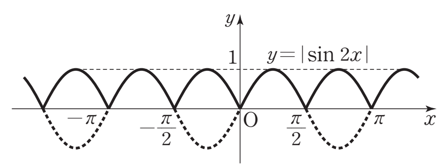
$-a+3\ge0$ $\therefore a\le3$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 3이다. 답 ⑤

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.68~74

01 ①	**02** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	**03** ④	**04** 7	**05** $4\sqrt{3}$
06 ③	**07** ②	**08** ⑤	**09** ③	**10** ④
11 ②	**12** ⑤	**13** 24	**14** 37	**15** ②
16 ①	**17** ③	**18** 23	**19** 48	**20** 36
21 4	**22** ④	**23** -9	**24** ②	**25** 4
26 ③	**27** ⑤	**28** 7π	**29** ②	**30** 72
31 ①	**32** $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$	**33** 11	**34** 16	
35 $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	**36** ④	**37** ⑤	**38** 9	**39** ③
40 16	**41** 14			

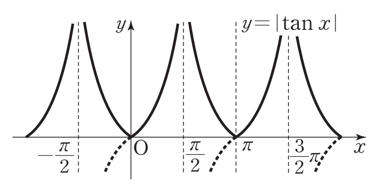
01 (i) $-1\le\sin 2x\le1$이고, 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=|\sin 2x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|\sin 2x|$의 주기는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\therefore a=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) 함수 $y=\tan x$의 주기는 π이고, 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로 함수 $y=|\tan x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.

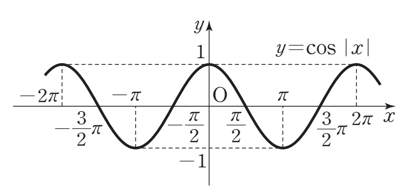


따라서 함수 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

$\therefore b=\pi$

(iii) $\cos|x|=\begin{cases}\cos x & (x\ge0)\\ \cos(-x) & (x<0)\end{cases}$

그런데 $\cos(-x)=\cos x$에서 $\cos|x|=\cos x$이므로 함수 $y=\cos|x|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\cos|x|$의 주기는 2π이다.

$\therefore c=2\pi$

(i), (ii), (iii)에서

$a<b<c$ 답 ①

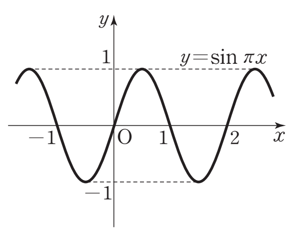
02 함수 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$의 주기가 p이므로 $f(x+p)=f(x)$이다.
위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(p)=f(0)$이므로
$\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}=\sqrt{1+\cos 0}+\sqrt{1-\cos 0}$
$\sqrt{1+\cos p}+\sqrt{1-\cos p}=\sqrt{2}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$1+\cos p+2\sqrt{1-\cos^2 p}+1-\cos p=2$
$\therefore\ \sqrt{1-\cos^2 p}=0$
이때 $1-\cos^2 p=\sin^2 p$이므로
$\sqrt{\sin^2 p}=0 \qquad \therefore\ |\sin p|=0$
위의 식을 만족시키는 최소인 양수 p의 값은 π이므로
$\sin\left(\pi+\frac{p}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$
$=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

03 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
또한, $f(x+1)=f(-x+1)$에서 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

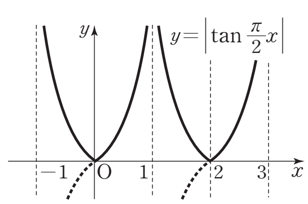
ㄱ. $f(x)=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$
$=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$
$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$
$=\sin\pi x$

이때 $(주기)=\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\cos\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니다.

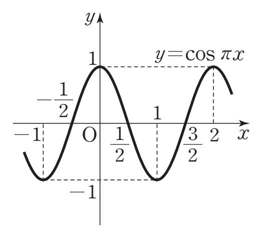
ㄴ. 함수 $y=\tan\frac{\pi}{2}x$는 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$이고, 점근선의 방정식은 $x=2n+1$ (n은 정수)이므로 함수 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\left|\tan\frac{\pi}{2}x\right|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f(x)=\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$
$=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$
$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)$
$=\cos\pi x$

이때 $(주기)=\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\sin\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
$f(x+1)=f(-x+1)$이므로 이 식에 x 대신에 $x+1$을 대입하면
$f(x+2)=f(-x)$
그런데 $f(-x)=f(x)$이므로 $f(x+2)=f(x)$
따라서 주기가 2이고, 그래프가 y축에 대하여 대칭인 함수를 골라도 된다.

04 (i) $f(x)=\tan\frac{3\pi}{2}x-\sin 2\pi x$에서
두 함수 $y=\tan\frac{3\pi}{2}x$, $y=\sin 2\pi x$의 주기는 각각
$\frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{2}{3}$, $\frac{2\pi}{2\pi}=1$
두 자연수 m, n에 대하여 $\frac{2}{3}m=n$을 만족시키는 m, n의 순서쌍은
$(3, 2)$, $(6, 4)$, $(9, 6)$, $\cdots$
이때 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 최소인 양수 p의 값은
$m=3$, $n=2$일 때
$p=\frac{2}{3}\times3=1\times2=2$
따라서 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.
$\therefore\ p_1=2$

(ii) $g(x)=2\pi+\cos 2\pi x \sin \frac{4\pi}{3}x$에서

두 함수 $y=\cos 2\pi x$, $y=\sin \frac{4\pi}{3}x$의 주기는 각각

$\frac{2\pi}{2\pi}=1$, $\frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}}=\frac{3}{2}$

두 자연수 m, n에 대하여 $m=\frac{3}{2}n$을 만족시키는 m, n의 순서쌍은

$(3, 2)$, $(6, 4)$, $(9, 6)$, $\cdots$

이때 $g(x)=g(x+p)$를 만족시키는 최소인 양수 p의 값은

$m=3$, $n=2$일 때

$p=1\times 3=\frac{3}{2}\times 2=3$

따라서 함수 $g(x)$의 주기는 3이다.

$\therefore p_2=3$

(iii) $h(x)=\sin \pi x-\left|\cos \frac{3\pi}{2}x\right|$에서

두 함수 $y=\sin \pi x$, $y=\left|\cos \frac{3\pi}{2}x\right|$의 주기는 각각

$\frac{2\pi}{\pi}=2$, $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

두 자연수 m, n에 대하여 $2m=\frac{2}{3}n$, 즉 $m=\frac{n}{3}$을 만족시키는 m, n의 순서쌍은

$(1, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 9)$, $\cdots$

이때 $h(x)=h(x+p)$를 만족시키는 최소인 양수 p의 값은

$m=1$, $n=3$일 때

$p=2\times 1=\frac{2}{3}\times 3=2$

따라서 함수 $h(x)$의 주기는 2이다.

$\therefore p_3=2$

(i), (ii), (iii)에서

$p_1+p_2+p_3=2+3+2=7$ **답** 7

05

함수 $y=\tan x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, c\right)$를 지나므로

$c=\tan \frac{\pi}{3}$ $\therefore c=\sqrt{3}$

주어진 그래프에서 함수 $y=a \sin bx$의 주기가 π이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\pi$에서 $|b|=2$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

즉, 함수 $y=a\sin 2x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$을 지나므로

$a \sin \frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}$

$\therefore a=2$

$\therefore abc=2\times 2\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ **답** $4\sqrt{3}$

06

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{b}$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{2}{b}=5$

즉, $\frac{a}{b}=5$이므로 $a=5b$ ······㉠

또한, 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2b}$, $\frac{5}{2b}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b}, a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b}, a\right)$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

에서 $a^2b^2=\frac{25}{16}$이므로 $ab=\frac{5}{4}$ ($\because ab>0$) ······㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

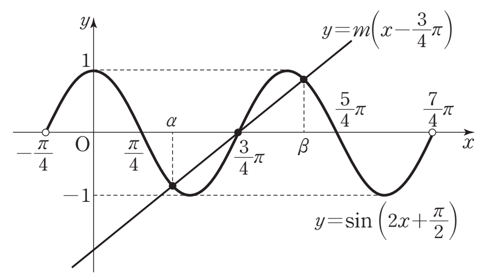
$5b^2=\frac{5}{4}$, $b^2=\frac{1}{4}$ $\therefore b=\frac{1}{2}$ ($\because b>0$)

즉, $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=3$ **답** ③

07

함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 함수 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$에서 함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=m\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$는 모두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$을 지나고 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$에 대하여 대칭이므로 나머지 두 교점도 점 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}\pi$에서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$

이때 $\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{5}{12}\pi$, $\beta=\frac{13}{12}\pi$

$x=\frac{5}{12}\pi$를 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$에 대입하면

$\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 직선 $y=m\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$는 점 $\left(\frac{5}{12}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나므로

$-\frac{\sqrt{3}}{2}=m\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)$

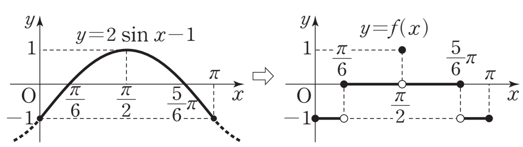
$\therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{3}{\pi}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos 2x$

이므로 함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 일치한다.

08 함수 $y=2\sin x-1$ $(0\le x\le\pi)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로 치역의 원소는 3개이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점으로 만들 수 있는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 삼각형은 꼭짓점의 좌표가 세 점 $(0, -1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, -1)$인 삼각형이므로 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\pi\times2=\pi$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

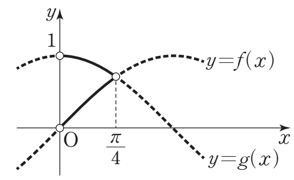
• 다른 풀이 •

ㄴ. $f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1\right]$
$=[2\cos x-1]$

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\right]$
$=[2\cos x-1]$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (참)

09 $0<x<\frac{\pi}{4}$에서 함수 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<\frac{\pi}{4}$에서

$0<f(x)<g(x)<1$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $0<f(x)<g(x)<1$이므로

$\log f(x)<\log g(x)<0$

$\log f(x)<\log g(x)$의 양변을 $\log g(x)$로 나누면

$1<\frac{\log f(x)}{\log g(x)}$ ($\because \log g(x)<0$)

$\therefore 1<\log_{g(x)} f(x)$ (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $0<f(x)<g(x)<1$이므로

$f(x)<g(x)$의 양변에 $\log f(x)$를 곱하면

$g(x)\log f(x)<f(x)\log f(x)$ ($\because \log f(x)<0$)

$\log\{f(x)\}^{g(x)}<\log\{f(x)\}^{f(x)}$

$\{f(x)\}^{g(x)}<\{f(x)\}^{f(x)}$

또한, ㄴ에서

$\log f(x)<\log g(x)<0$이므로

$\log f(x)<\log g(x)$의 양변에 $f(x)$를 곱하면

$f(x)\log f(x)<f(x)\log g(x)$

$\log\{f(x)\}^{f(x)}<\log\{g(x)\}^{f(x)}$

$\{f(x)\}^{f(x)}<\{g(x)\}^{f(x)}$

$\therefore \{f(x)\}^{g(x)}<\{f(x)\}^{f(x)}<\{g(x)\}^{f(x)}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

10 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1+2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$
$=(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$
$=(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$\therefore f(\theta)=\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}+\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$
$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$
$=|\sin\theta+\cos\theta|+|\sin\theta-\cos\theta|$

$\sin\theta+\cos\theta=0$에서

$\sin\theta=-\cos\theta$, 즉 $\tan\theta=-1$

$\therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$ ($\because 0\le\theta\le\pi$)

$\sin\theta-\cos\theta=0$에서

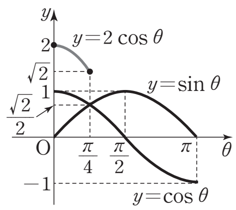
$\sin\theta=\cos\theta$, 즉 $\tan\theta=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$ ($\because 0\le\theta\le\pi$)

(i) $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\ge0$, $\sin\theta-\cos\theta\le0$이므로

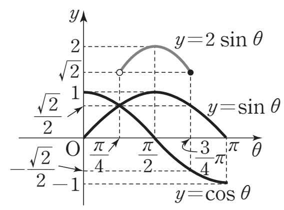
$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)$
$=2\cos\theta$



(ii) $\frac{\pi}{4}<\theta\le\frac{3}{4}\pi$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\ge0$, $\sin\theta-\cos\theta\ge0$이므로

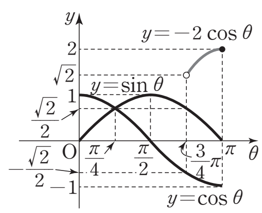
$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta$
$\quad=2\sin\theta$



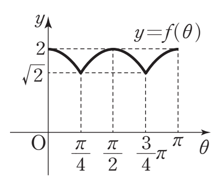
(iii) $\frac{3}{4}\pi<\theta\le\pi$일 때,

$\sin\theta+\cos\theta\le0$, $\sin\theta-\cos\theta\ge0$이므로

$f(\theta)=-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta-\cos\theta$
$\quad=-2\cos\theta$



(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(\theta)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ④

11 주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 5, -5이므로

$\alpha_1=5$ ($\because \alpha_1>0$)

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{|\beta_1|}=4$에서 $|\beta_1|=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \beta_1=\frac{\pi}{2}$ ($\because \beta_1>0$)

함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\gamma_1\right)$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=5\sin(-\gamma_1)$, $-5\sin\gamma_1=5$

$\sin\gamma_1=-1$ $\quad\therefore \gamma_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

같은 방법으로 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_2=\frac{1}{2}$ ($\because \alpha_2>0$)

주기가 4이므로 $\frac{2\pi}{|\beta_2|}=4$에서 $|\beta_2|=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \beta_2=\frac{\pi}{2}$ ($\because \beta_2>0$)

함수 $g(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\gamma_2\right)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$0=\frac{1}{2}\cos(-\gamma_2)$, $\cos\gamma_2=0$

$\therefore \gamma_2=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (단, m은 정수)

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 모두 4이므로 임의의 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$, $g(x+4)=g(x)$

이때 $h(x)=f(x)-g(x)$이므로

$h(x+4)=f(x+4)-g(x+4)$
$\quad=f(x)-g(x)$
$\quad=h(x)$

$\frac{4}{n}$ (n은 자연수)

즉, 함수 $h(x)$의 주기는 4 또는 4보다 작다. (거짓)

ㄴ. $\alpha_1=5$, $\beta_1=\frac{\pi}{2}$, $\gamma_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이므로

$f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$
$\quad=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$
$\quad=5\cos\frac{\pi}{2}x$

즉, 두 상수 a, b에 대하여 $f(x)=a\cos bx$ 꼴로 나타낼 수 있다. (참)

ㄷ. $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{\pi}{2}$, $\gamma_2=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (m은 정수)이므로

$g(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-2m\pi\mp\frac{\pi}{2}\right)$
$\quad=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\mp\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$ 또는 $g(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

그런데 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

ㄴ에서 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{2}x$이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 4로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 10배 확대한 후 x축의 방향으로 $4k-1$ (k는 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, $f(x)=10g(x-4k+1)$ (k는 정수)이므로

$a=10$, $b=4k-1$

이때 $9<b<13$이므로 $9<4k-1<13$

$10<4k<14$ $\quad\therefore \frac{5}{2}<k<\frac{7}{2}$

k는 정수이므로 $k=3$

$\therefore b=11$

$\therefore a+b=10+11=21$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y=\cos x$의 그래프와 같으므로 두 삼각함수 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{2}x$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$는 y축의 방향으로 확대 또는 축소하고 x축의 방향으로 평행이동하여 같은 그래프가 되도록 만들 수 있다.
이와 같은 방식으로 접근하면 sin과 cos으로 이루어진 두 삼각함수의 그래프는 언제나 확대와 평행이동을 이용하여 일치하게 만들 수 있다.

12 $0<A<\pi$, $0<B<\pi$, $A\neq B$에서 $\sin A=\sin B$이므로 $B=\pi-A$, 즉 $A+B=\pi$이다.

두 각 A, B가 나타내는 두 동경은 y축에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ (참)

ㄴ. $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$
$=\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$
$=0$ (참)

ㄷ. $\tan A+\tan B=\tan A+\tan(\pi-A)$
$=\tan A-\tan A$
$=0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

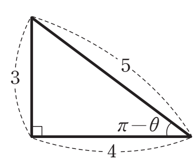
13 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 기울기는 $\tan\theta$이므로 직선 $3x+4y+3=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$에서 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$이고, $\tan\theta<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\therefore \sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

이때 오른쪽 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 3, 4인 직각삼각형을 생각하면



$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$\cos(\pi+\theta)+\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{5}$

따라서 $p=5$, $q=19$이므로

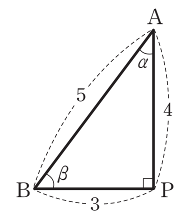
$p+q=24$ 답 24

14 선분 AB는 반원을 포함한 원의 지름이고 점 P가 반원 위에 있으므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이때 △ABP는 빗변이 $\overline{AB}$인 직각삼각형이므로



$\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\sin(5\alpha+4\beta)=\sin\{4(\alpha+\beta)+\alpha\}$
$=\sin(2\pi+\alpha)$
$=\sin\alpha=\frac{3}{5}$

$\cos(3\alpha+4\beta)=\cos\{3(\alpha+\beta)+\beta\}$
$=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\beta\right)=\sin\beta=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin(5\alpha+4\beta)\cos(3\alpha+4\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$

따라서 $p=25$, $q=12$이므로

$p+q=37$ 답 37

15 ㄱ. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$에서 $0<\frac{\pi}{4}-\alpha<\pi$이므로

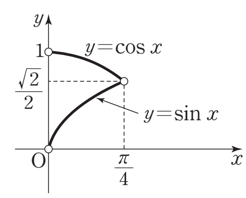
$-\frac{3}{4}\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}$

그런데 $0<\alpha<\pi$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\beta<\frac{\pi}{4}$

오른쪽 그림에서

$\sin\alpha<\cos\beta$ (참)



ㄴ. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\frac{\pi}{2}<\pi$이므로

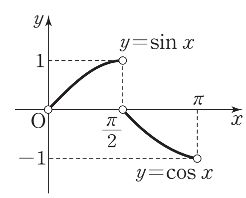
$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

그런데 $0<\alpha<\pi$이므로

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

오른쪽 그림에서

$\sin\alpha>\cos\beta$ (참)



ㄷ. $\alpha+\beta=\pi$, 즉 $\beta=\pi-\alpha$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\alpha-\cos(\pi-\alpha)$
$=\cos\alpha+\cos\alpha$
$=2\cos\alpha$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$일 때, $\cos\alpha>0$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\alpha>0$에서

$\cos\alpha>\cos\beta$

$\frac{\pi}{2}\le\alpha<\pi$일 때, $\cos\alpha\le0$이므로

$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\alpha\le0$에서

$\cos\alpha\le\cos\beta$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

ㄱ. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$에서 $\alpha=\frac{\pi}{4}-\beta$이므로

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$

이때 $0<\beta<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)<\cos\beta$이므로

$\sin\alpha<\cos\beta$ (참)

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $y=\cos x$는 x의 값이 증가할수록 y의 값은 감소한다.

ㄴ. $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$이므로

$$\sin\alpha-\cos\beta=\sin\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha$$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha-\cos\beta=2\sin\alpha>0$이다.

$\therefore \sin\alpha>\cos\beta$ (참)

16 $\tan\theta=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $(0<x<1)$의 양변을 제곱하면

$\tan^2\theta=\frac{1-x}{x}$, $\tan^2\theta=\frac{1}{x}-1$

$\frac{1}{x}=1+\tan^2\theta$

$$\therefore x=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos^2\theta$$

이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$이므로

$$\frac{\sin^2\theta}{x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\sin^2\theta}{x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta(\cos^2\theta-\cos\theta)+\sin^2\theta(\cos^2\theta+\cos\theta)}{(\cos^2\theta+\cos\theta)(\cos^2\theta-\cos\theta)}$$
$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}=\frac{2\sin^2\theta}{-\sin^2\theta}$$

$=-2$ ($\because$ $\tan\theta\neq0$이므로 $\sin\theta\neq0$) **답** ①

$0<x<1$에서 $\frac{1-x}{x}>0$이므로 $\tan\theta>0$

17 ㄱ. $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 2°+\sin^2 4°+\sin^2 6°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 90°$

$=(\sin^2 2°+\sin^2 88°)+(\sin^2 4°+\sin^2 86°)+\cdots$
$\quad+(\sin^2 44°+\sin^2 46°)+\sin^2 90°$

$=(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+(\sin^2 4°+\cos^2 4°)+\cdots$
$\quad+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 90°$

$=1\times22+1^2=23$ (참)

ㄴ. $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cos^2 3°+\cdots+\cos^2 90°$

$=(\cos^2 1°+\cos^2 89°)+(\cos^2 2°+\cos^2 88°)+\cdots$
$\quad+(\cos^2 44°+\cos^2 46°)+\cos^2 45°+\cos^2 90°$

$=(\cos^2 1°+\sin^2 1°)+(\cos^2 2°+\sin^2 2°)+\cdots$
$\quad+(\cos^2 44°+\sin^2 44°)+\cos^2 45°+\cos^2 90°$

$=1\times44+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0$

$=\frac{89}{2}$ (거짓)

ㄷ. $\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 1°\times\tan 2°\times\tan 3°\times\cdots\times\tan 89°$

$=(\tan 1°\times\tan 89°)\times(\tan 2°\times\tan 88°)\times\cdots$
$\quad\times(\tan 44°\times\tan 46°)\times\tan 45°$

$=\left(\tan 1°\times\frac{1}{\tan 1°}\right)\times\left(\tan 2°\times\frac{1}{\tan 2°}\right)\times\cdots$
$\quad\times\left(\tan 44°\times\frac{1}{\tan 44°}\right)\times\tan 45°$

$=1^{44}\times1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ③

18 $\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\left(\frac{1}{\sin^2 1°}+\frac{1}{\sin^2 2°}+\frac{1}{\sin^2 3°}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23°}\right)$
$\quad-(\tan^2 67°+\tan^2 68°+\tan^2 69°+\cdots+\tan^2 89°)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2 1°}+\frac{1}{\sin^2 2°}+\frac{1}{\sin^2 3°}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23°}\right)$
$\quad-\left(\frac{1}{\tan^2 23°}+\frac{1}{\tan^2 22°}+\frac{1}{\tan^2 21°}+\cdots+\frac{1}{\tan^2 1°}\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2 1°}+\frac{1}{\sin^2 2°}+\frac{1}{\sin^2 3°}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23°}\right)$
$\quad-\left(\frac{\cos^2 23°}{\sin^2 23°}+\frac{\cos^2 22°}{\sin^2 22°}+\frac{\cos^2 21°}{\sin^2 21°}+\cdots+\frac{\cos^2 1°}{\sin^2 1°}\right)$

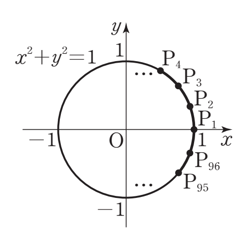
$=\left(\frac{1}{\sin^2 1°}-\frac{\cos^2 1°}{\sin^2 1°}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2 2°}-\frac{\cos^2 2°}{\sin^2 2°}\right)+\cdots$
$\quad+\left(\frac{1}{\sin^2 23°}-\frac{\cos^2 23°}{\sin^2 23°}\right)$

$=\frac{1-\cos^2 1°}{\sin^2 1°}+\frac{1-\cos^2 2°}{\sin^2 2°}+\cdots+\frac{1-\cos^2 23°}{\sin^2 23°}$

$=\frac{\sin^2 1°}{\sin^2 1°}+\frac{\sin^2 2°}{\sin^2 2°}+\cdots+\frac{\sin^2 23°}{\sin^2 23°}$

$=1\times23=23$ **답** 23

19 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$에 내접하는 정96각형의 각 꼭짓점을 $P_n(a_n,\ b_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 96)$이라 하면



$\angle P_1OP_{96}=\frac{\pi}{48}$,

$\angle P_nOP_{n+1}=\frac{\pi}{48}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 95$)

동경 OP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하면

$\theta_{n+48}-\theta_n=\angle P_nOP_{n+48}$

$\quad=\frac{\pi}{48}\times48=\pi$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 48$)

$\therefore\ \theta_{n+48}=\theta_n+\pi$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots, 48$)

점 P_n이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $a_n=\cos\theta_n$

$\therefore\ a_{n+48}{}^2=\cos^2\theta_{n+48}=\cos^2(\theta_n+\pi)=\cos^2\theta_n=a_n{}^2$

$\therefore\ a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{96}{}^2$

$=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{48}{}^2+a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{48}{}^2$

$=2(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{48}{}^2)$ ······㉠

또한,

$$\theta_{n+24}-\theta_n=\angle P_nOP_{n+24}=\frac{\pi}{48}\times 24=\frac{\pi}{2}$$

(단, $n=1, 2, 3, \cdots, 24$)

이므로

$\theta_{n+24}=\theta_n+\dfrac{\pi}{2}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots, 24$)

$\therefore\ a_n{}^2+a_{n+24}{}^2=\cos^2\theta_n+\cos^2\left(\theta_n+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\cos^2\theta_n+\sin^2\theta_n=1$

즉,

$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{48}{}^2$

$=(a_1{}^2+a_{25}{}^2)+(a_2{}^2+a_{26}{}^2)+\cdots+(a_{24}{}^2+a_{48}{}^2)$

$=1\times 24=24$

이므로 ㉠에서

$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{96}{}^2=2\times 24=48$ **답** 48

20 해결단계

❶ 단계	동경 OP가 1회에 $\frac{5}{18}\pi$만큼 회전하므로 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는 $2n\pi\div\frac{5}{18}\pi=\frac{36n}{5}$ (n은 자연수)임을 파악한다.
❷ 단계	N의 값을 구한다.
❸ 단계	$\sin\theta_{19}=-\sin\theta_1$, $\sin\theta_{20}=-\sin\theta_2$, $\cdots$, $\sin\theta_{36}=-\sin\theta_{18}$임을 이용하여 식을 정리한 후, 주어진 식의 값을 구한다.

동경 OP가 1회에 $\dfrac{5}{18}\pi$만큼 회전하므로 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는

$2n\pi\div\dfrac{5}{18}\pi=2n\pi\times\dfrac{18}{5\pi}=\dfrac{36n}{5}$ (단, n은 자연수)

위의 값이 자연수가 되는 n의 최솟값은 5이므로 처음으로 다시 시초선으로 돌아올 때까지 이동한 횟수는

$N=\dfrac{36\times 5}{5}=36$

이때 $\theta_k=\dfrac{5}{18}\pi\times k$이므로

$\sin\theta_{19}=\sin\left(\dfrac{5}{18}\pi\times 19\right)=\sin\dfrac{95}{18}\pi$

$=\sin\left(5\pi+\dfrac{5}{18}\pi\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{5}{18}\pi\right)$

$=-\sin\dfrac{5}{18}\pi=-\sin\theta_1$

같은 방법으로

$\sin\theta_{20}=-\sin\theta_2$, $\sin\theta_{21}=-\sin\theta_3$, $\cdots$,

$\sin\theta_{36}=-\sin\theta_{18}$

$\therefore\ N+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_N$

$=36+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{36}$

$=36+\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{18}$

$-(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{18})$

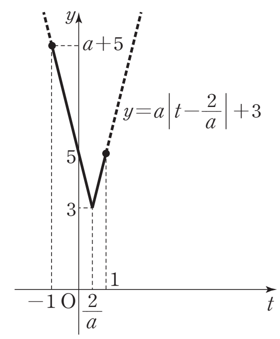
$=36$ **답** 36

21

$y=|a\sin x-2|+3$에서 $\sin x=t$로 놓으면

$y=|at-2|+3=a\left|t-\dfrac{2}{a}\right|+3\ (-1\le t\le 1)$

$a>2$에서 $0<\dfrac{2}{a}<1$이므로 함수 $y=a\left|t-\dfrac{2}{a}\right|+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t=-1$일 때 최댓값 $a+5$, $t=\dfrac{2}{a}$일 때 최솟값 3을 갖는다.



이때 최댓값과 최솟값의 곱이 27이므로

$3(a+5)=27$ $\therefore\ a=4$ **답** 4

• 다른 풀이 •

$-1\le\sin x\le 1$이고 $a>2$이므로

$-a\le a\sin x\le a$

$-a-2\le a\sin x-2\le a-2$

이때 $-a-2<-4$, $a-2>0$이고

$|a-2|<|-a-2|$이므로

$0\le|a\sin x-2|\le a+2$

$\therefore\ 3\le|a\sin x-2|+3\le a+5$

따라서 함수 $y=|a\sin x-2|+3$의 최댓값은 $a+5$, 최솟값은 3이고 최댓값과 최솟값의 곱이 27이므로

$3(a+5)=27$ $\therefore\ a=4$

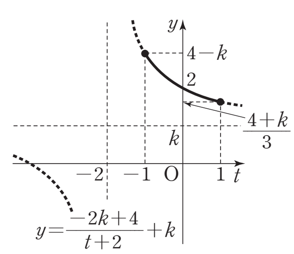
22

$y=\dfrac{4+k\sin\theta}{2+\sin\theta}$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면 $0\le\theta\le 2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는

$y=\dfrac{4+kt}{2+t}=\dfrac{k(2+t)-2k+4}{2+t}$

$=\dfrac{-2k+4}{t+2}+k\ (-1\le t\le 1)$

이때 $k<2$에서 $-2k+4>0$이므로 오른쪽 그림에서



최댓값은 $t=-1$일 때

$\dfrac{-2k+4}{(-1)+2}+k=4-k$

최솟값은 $t=1$일 때

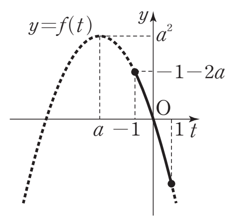
$\dfrac{-2k+4}{1+2}+k=\dfrac{4+k}{3}$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 5이므로

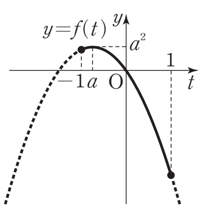
$4-k+\frac{4+k}{3}=5$, $12-3k+4+k=15$

$2k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$ 답 ④

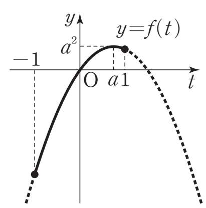
23 $y=\sin^2 x+2a\cos x-1$
$=1-\cos^2 x+2a\cos x-1$
$=-\cos^2 x+2a\cos x$
이때 $\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le 2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고 주어진 함수는
$y=-t^2+2at=-(t-a)^2+a^2$
$f(t)=-(t-a)^2+a^2$ $(-1\le t\le 1)$이라 하면
(i) $a<-1$일 때,
함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=-1$일 때
$f(-1)=-1-2a=5$
$2a=-6$ $\quad\therefore a=-3$



(ii) $-1\le a\le 1$일 때,

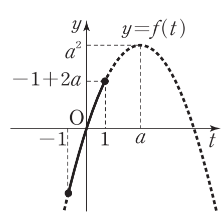


[그림 1]



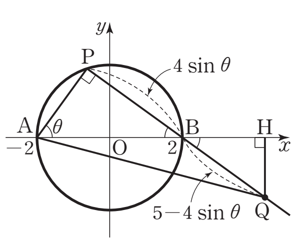
[그림 2]

함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같으므로 최댓값은 $t=a$일 때
$f(a)=a^2=5$ $\quad\therefore a=\pm\sqrt{5}$
그런데 $-1\le a\le 1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.
(iii) $a>1$일 때,
함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 $t=1$일 때
$f(1)=-1+2a=5$
$2a=6$ $\quad\therefore a=3$



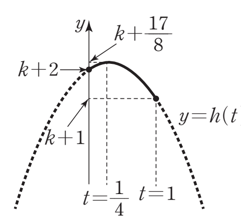
(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a의 값은 -3, 3이므로 그 곱은 $(-3)\times 3=-9$ 답 -9

24



선분 AB는 원의 지름이고 점 P가 원 위에 있으므로
$\angle APB=\frac{\pi}{2}$
$\angle PAB=\theta$라 하면
$\overline{BQ}=\overline{PQ}-\overline{PB}=5-4\sin\theta$
점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle QBH=\angle ABP=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로
$\overline{BH}=\overline{BQ}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\overline{BQ}\sin\theta$
$=(5-4\sin\theta)\sin\theta$
이때 점 Q의 x좌표는 선분 OH의 길이와 같으므로
$\overline{OH}=\overline{OB}+\overline{BH}$
$=2+(5-4\sin\theta)\sin\theta$
$=-4\sin^2\theta+5\sin\theta+2$
$=-4\left(\sin\theta-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{57}{16}$
즉, $\sin\theta=\frac{5}{8}$일 때, 점 Q의 x좌표가 최대이다.
$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{39}}{8}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
이므로
$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=4\times\frac{\sqrt{39}}{8}=\frac{\sqrt{39}}{2}$
$\therefore \tan(\angle AQP)=\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{\sqrt{39}}{2}}{5}=\frac{\sqrt{39}}{10}$ 답 ②

25 $(f\circ g)(x)=2(-\cos x)^2+\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}+k$
이때 $1-\cos x\ge 0$, $1+\cos x\ge 0$이므로
$(f\circ g)(x)=2\cos^2 x+\sqrt{1-\cos^2 x}+k$
$=2(1-\sin^2 x)+\sqrt{\sin^2 x}+k$
$=-2\sin^2 x+|\sin x|+k+2$
$=-2|\sin x|^2+|\sin x|+k+2$
$|\sin x|=t$ $(0\le t\le 1)$로 놓고,
$(f\circ g)(x)=h(t)$라 하면
$h(t)=-2t^2+t+k+2$
$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+k+\frac{17}{8}$
이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
즉, 함수 $h(t)$는
$t=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $k+\frac{17}{8}$,
$t=1$일 때 최솟값 $k+1$을 갖는다.



함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값이 $\frac{31}{16}$이므로
$k+1=\frac{31}{16}$ $\quad\therefore k=\frac{15}{16}$
$\therefore k+M=k+k+\frac{17}{8}=2k+\frac{17}{8}$
$=2\times\frac{15}{16}+\frac{17}{8}=4$ 답 4

26 $a>0$, $b>0$이므로 $a^2+b^2=4ab\cos\theta$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4\cos\theta$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4\cos\theta=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}$

$=2$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \cos\theta\geq\frac{1}{2}$

이때 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos\theta\leq 1$

$\therefore \frac{1}{2}\leq\cos\theta\leq 1$

$2\sin^2\theta+\cos\theta=2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta$

$=-2\cos^2\theta+\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}\leq t\leq 1$이고 주어진 식은

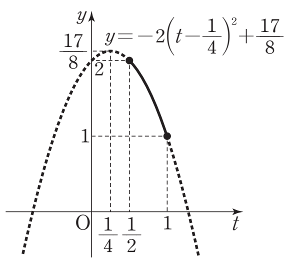
$-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

$f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

이라 하면 함수

$y=f(t)$ $\left(\frac{1}{2}\leq t\leq 1\right)$의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



최댓값은 $t=\frac{1}{2}$일 때

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

$=2$ 답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

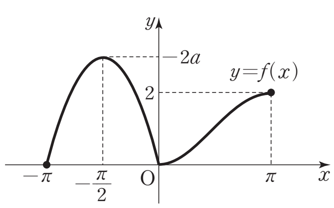
양수 a, b에 대하여 $a^2>0$, $b^2>0$이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}$ (단, 등호는 $a^2=b^2$일 때 성립)
이때 $a^2+b^2=4ab\cos\theta$이므로
$4ab\cos\theta\geq 2ab$
$\therefore \cos\theta\geq\frac{1}{2}$

27

함수 $f(x)=\begin{cases} 2a\sin x & (-\pi\leq x<0) \\ 1-\cos x & (0\leq x\leq\pi)\end{cases}$에 대하여

(ⅰ) $a<-1$일 때,

$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $-2a$,

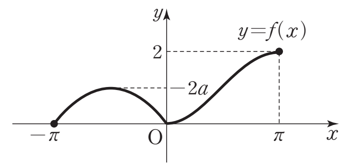
최솟값은 $x=-\pi$ 또는 $x=0$일 때 0이므로

$M-m=-2a-0=-2a$

즉, $-2a=8$이므로 $a=-4$

(ⅱ) $-1\leq a<0$일 때,

$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=\pi$일 때 2,

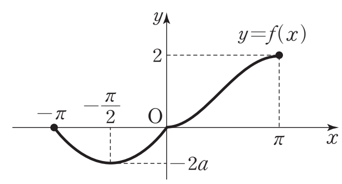
최솟값은 $x=-\pi$ 또는 $x=0$일 때 0이므로

$M-m=2-0=2\neq 8$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a>0$일 때,

$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최댓값은 $x=\pi$일 때 2,

최솟값은 $x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $-2a$이므로

$M-m=2-(-2a)=2+2a$

즉, $2+2a=8$이므로 $2a=6$

$\therefore a=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 -4, 3이고 그 곱은 $(-4)\times 3=-12$ 답 ⑤

28 해결단계

❶ 단계	삼각함수의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$를 탄젠트함수를 이용한 함수로 변형한다.
❷ 단계	$\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=t$로 치환하여 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하고, 그때의 t좌표를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 x의 값을 구하여 $\lvert(a-b)(M+m)\rvert$의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}-\frac{4\cos\left(\frac{5}{12}\pi-x\right)}{\sin\left(x+\frac{7}{12}\pi\right)}+3$에서

$\cos\left(\frac{5}{12}\pi-x\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

$\sin\left(x+\frac{7}{12}\pi\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}$

$=\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

이므로 주어진 함수는

$f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}-\frac{4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}+3$

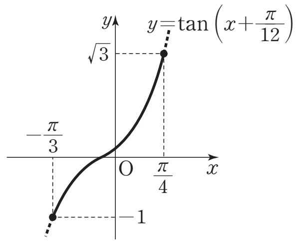
$$=\frac{2\left\{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}-\frac{4\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}+3$$

$$=2\left\{\tan^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+1\right\}-4\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+3$$

$$=2\tan^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-4\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+5$$

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

함수 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



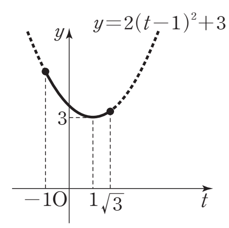
$-1\le\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\le\sqrt{3}$

이때 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=t$로 놓으면 주어진 함수는

$y=2t^2-4t+5$

$\quad=2(t-1)^2+3\ (-1\le t\le\sqrt{3})$

이고 이 함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값과 최솟값은 각각 $t=-1$, $t=1$일 때 갖는다.



$t=-1$, 즉 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-1$

에서

$x+\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 $x=-\frac{\pi}{3}\qquad\therefore a=-\frac{\pi}{3}$

이때의 최댓값은

$M=2(-1-1)^2+3=11$

또한, $t=1$, 즉 $\tan\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=1$에서

$x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{3}\right)$

$-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{4}$이므로

이므로 $x=\frac{\pi}{6}\qquad\therefore b=\frac{\pi}{6}$

이때의 최솟값은 $m=3$

$\therefore\ |(a-b)(M+m)|=\left|\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\times(11+3)\right|$

$=\frac{\pi}{2}\times14=7\pi$

답 7π

29 $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y & \cdots\cdots ㉠\\ 2\cos x+\cos y=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ 에서

㉠의 양변을 제곱하면

$2\sin^2 x=\sin^2 y\qquad\cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $1-2\cos x=\cos y$이므로 양변을 제곱하면

$4\cos^2 x-4\cos x+1=\cos^2 y\qquad\cdots\cdots ㉣$

㉢+㉣을 하면

$2\sin^2 x+4\cos^2 x-4\cos x+1=\sin^2 y+\cos^2 y$

$2(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x-4\cos x+1=1$

$2-2\cos^2 x+4\cos^2 x-4\cos x=0$

$\cos^2 x-2\cos x+1=0$

$(\cos x-1)^2=0$, $\cos x=1$

$\therefore x=0\ (\because\ 0\le x<2\pi)$

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $\sin y=0$

$\therefore y=0$ 또는 $y=\pi\ (\because\ 0\le y<2\pi)$

그런데 $x=0$, $y=0$이면 ㉡에서

$2+1=3\ne1$이므로 모순이다.

$\therefore x=0,\ y=\pi$

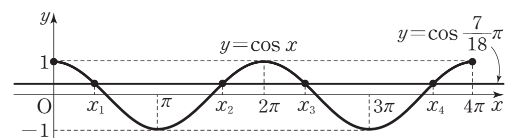
따라서 $a=0$, $b=\pi$이므로

$a+b=\pi$

답 ②

30 $\sin\frac{8}{9}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7}{18}\pi\right)=\cos\frac{7}{18}\pi$이므로

$\cos x=\sin\frac{8}{9}\pi$에서 $\cos x=\cos\frac{7}{18}\pi$



위의 그림과 같이 $0\le x\le4\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\cos\frac{7}{18}\pi$의 네 교점의 x좌표가 각각 x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$이므로

$x_1=\frac{7}{18}\pi$

$\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로 $\frac{7}{18}\pi+x_2=2\pi$

$\therefore x_2=\frac{29}{18}\pi$

또한, 함수 $y=\cos x$의 주기는 2π이므로

$x_3=x_1+2\pi=\frac{7}{18}\pi+2\pi=\frac{43}{18}\pi$,

$x_4=x_2+2\pi=\frac{29}{18}\pi+2\pi=\frac{65}{18}\pi$

$$\therefore\ \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}=\frac{\frac{29}{18}\pi+\frac{65}{18}\pi}{\frac{7}{18}\pi+\frac{43}{18}\pi}=\frac{\frac{94}{18}\pi}{\frac{50}{18}\pi}=\frac{47}{25}$$

따라서 $p=25$, $q=47$이므로

$p+q=72$

답 72

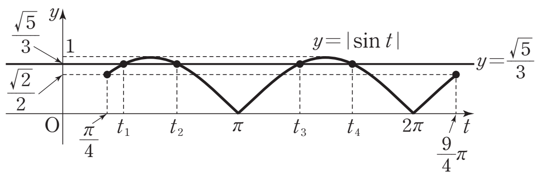
31 $x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면

$0\le x\le2\pi$에서

$\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi\qquad\therefore\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$

$\frac{30}{\sqrt{5}}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-10=0$에서

$\frac{30}{\sqrt{5}}|\sin t|-10=0\qquad\therefore\ |\sin t|=\frac{\sqrt{5}}{3}$



위의 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=|\sin t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{5}}{3}$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

각 교점의 t좌표를 각각 t_1, t_2, t_3, t_4 $(t_1<t_2<t_3<t_4)$라 하면

$\frac{t_1+t_4}{2}=\frac{t_2+t_3}{2}=\pi$이므로 $t_1+t_4=t_2+t_3=2\pi$

$\therefore t_1+t_2+t_3+t_4=4\pi$

한편, $x+\frac{\pi}{4}=t$이므로 방정식

$\frac{30}{\sqrt{5}}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-10=0$의 실근을 각각 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4$

$=\left(t_1-\frac{\pi}{4}\right)+\left(t_2-\frac{\pi}{4}\right)+\left(t_3-\frac{\pi}{4}\right)+\left(t_4-\frac{\pi}{4}\right)$

$=(t_1+t_2+t_3+t_4)-\pi$

$=4\pi-\pi=3\pi$ 답 ①

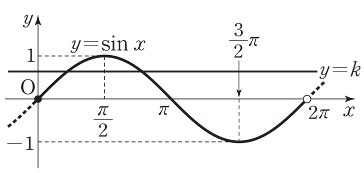
32

$2\cos^2 x-2\sin x+2a-3=0$에서

$2(1-\sin^2 x)-2\sin x+2a-3=0$

$\therefore 2\sin^2 x+2\sin x-2a+1=0$ ……㉠

$0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $\sin x=k$는 $k=-1$ 또는 $k=1$일 때 하나의 실근을 갖고, $-1<k<1$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.



방정식 ㉠에서 $\sin x=t$로 놓으면 $2t^2+2t-2a+1=0$이고, $f(t)=2t^2+2t-2a+1$이라 하면 t에 대한 방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 두 실근으로 -1, 1을 갖거나 $-1<t<1$에서 중근 또는 하나의 실근만을 가져야 한다.

이때 $f(-1)=-2a+1$, $f(1)=-2a+5$에서

$f(-1) \ne f(1)$이므로 방정식 $f(t)=0$은 두 실근으로 -1, 1을 동시에 가질 수 없다.*

(i) $-1<t<1$에서 중근을 가질 때,

$f(t)=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2a+\frac{1}{2}$에서

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2a+\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$

(ii) $-1<t<1$에서 하나의 실근만을 가질 때,

$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$f(-1)=2-2-2a+1=-2a+1$,

$f(1)=2+2-2a+1=-2a+5$에서

$(-2a+1)(-2a+5)<0$

$(2a-1)(2a-5)<0 \qquad \therefore \frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a의 값 또는 그 범위는

$a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$ 답 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

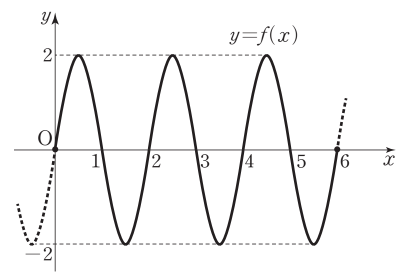
BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭 *

$t=-1$, $t=1$을 근으로 갖고, t^2의 계수가 2인 이차방정식은 $2(t+1)(t-1)=0$에서 $2t^2-2=0$으로 t의 계수가 0이다.
그런데 방정식 $f(t)=0$의 t의 계수는 2이므로 방정식 $f(t)=0$은 $t=-1$, $t=1$을 모두 근으로 가질 수 없다.

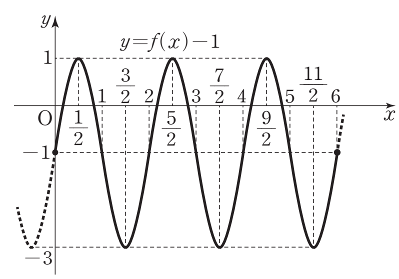
33

$f(x)=2\sin \pi x$라 하면 $-2 \le 2\sin \pi x \le 2$이므로 함수 $f(x)$는 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고, 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$인 함수이다.

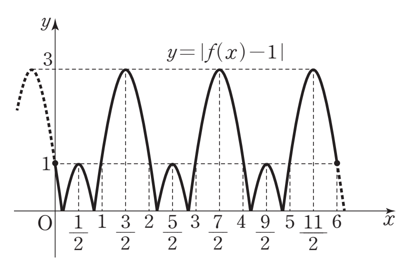
따라서 $0 \le x \le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)-1$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

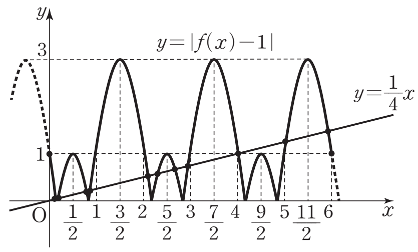


함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)-1$의 그래프에서 x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



방정식 $|f(x)-1|=\frac{1}{4}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수와 같다.

$0\le x\le 6$일 때, 두 함수 $y=|f(x)-1|$, $y=\frac{1}{4}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그러므로 함수 $y=|f(x)-1|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x$의 교점의 개수는 11이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수도 11이다. 답 11

• 다른 풀이 •

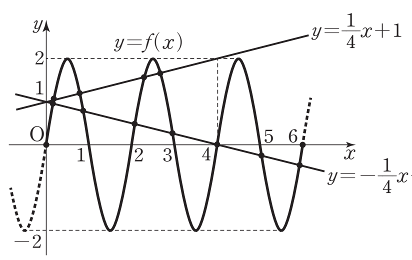
$f(x)=2\sin\pi x$라 하면 방정식 $|f(x)-1|=\frac{1}{4}x$에서

$f(x)-1=\pm\frac{1}{4}x$, $f(x)=\pm\frac{1}{4}x+1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x+1$ 또는 $f(x)=-\frac{1}{4}x+1$

즉, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 두 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x+1$, $f(x)=-\frac{1}{4}x+1$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

이때 함수 $f(x)=2\sin\pi x$는 최댓값과 최솟값이 각각 2, -2이고, 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$인 함수이므로 $0\le x\le 6$에서 세 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{4}x+1$, $y=-\frac{1}{4}x+1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 11이다.

34 조건 (나)에서

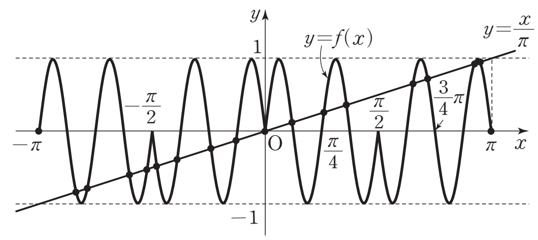
$0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, 함수 $y=\sin 8x$의 주기는 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서의 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{8}$배한 모양이 2번 반복된다.

조건 (다)에서

$\frac{\pi}{2}<x\le\pi$일 때, $y=-\sin 8x$의 주기는 $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서의 함수 $y=-\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{8}$배한 모양이 2번 반복된다.

조건 (가)에 의하여 $-\pi\le x\le 0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

따라서 $-\pi\le x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 16이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수도 16이다. 답 16

35 $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$에서

$0\le\sin\alpha\le 1$, $-1\le\cos\beta\le 1$이므로

$0\le\pi\sin\alpha\le\pi$, $-\pi\le\pi\cos\beta\le\pi$

즉, $0\le\sin(\pi\sin\alpha)\le 1$, $-1\le\cos(\pi\cos\beta)\le 1$이므로

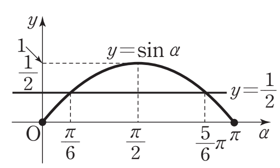
$\sin(\pi\sin\alpha)+\cos(\pi\cos\beta)=2$에서

$\sin(\pi\sin\alpha)=1$, $\cos(\pi\cos\beta)=1$

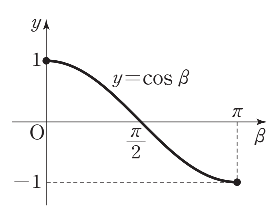
이때 $0\le\pi\sin\alpha\le\pi$, $-\pi\le\pi\cos\beta\le\pi$이므로

$\pi\sin\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\pi\cos\beta=0$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=0$



[그림 1]



[그림 2]

$0\le\alpha\le\pi$에서 함수 $y=\sin\alpha$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 방정식 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$을 만족시키는 α의 값은

$\alpha=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$

$0\le\beta\le\pi$에서 함수 $y=\cos\beta$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 방정식 $\cos\beta=0$을 만족시키는 β의 값은

$\beta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\alpha+\beta=\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi$

(ⅰ) $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$일 때,

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sin\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(ⅱ) $\alpha+\beta=\frac{4}{3}\pi$일 때,

$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$

$$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sin\frac{4}{3}\pi+\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 최솟값은

$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

36 조건 (가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이므로

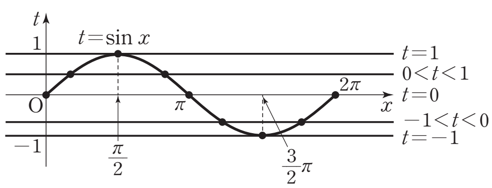
$\sin(a\pi)=-1$ 또는 $\sin(a\pi)=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$ ($\because 0\le a\le 2$)

$g(x)=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

조건 (나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\le t\le 1$에서 이차방정식 $f(t)=0$의 해가 존재한다.



위의 그림에서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $g(x)=t$의 해의 합은

$t=-1$이면 $\frac{3}{2}\pi$, $-1<t\le 0$이면 3π,

$0<t<1$이면 π, $t=1$이면 $\frac{\pi}{2}$

$0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이 $\frac{5}{2}\pi$이므로 가능한 것은 $\frac{3}{2}\pi$, π뿐이다.

즉, 이차방정식 $f(t)=0$은 -1을 실근으로 갖고

$0<t<1$에서 하나의 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1,

α $(0<\alpha<1)$를 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\alpha=-a$ ……㉠, $-\alpha=b$ ……㉡

(ⅰ) $a=\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서 $-1+\alpha=-\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

㉡에서 $b=-\frac{1}{2}$

(ⅱ) $a=\frac{3}{2}$일 때,

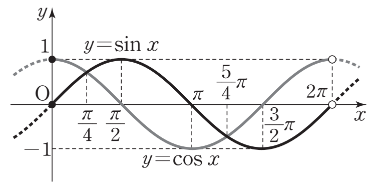
㉠에서 $-1+\alpha=-\frac{3}{2}$ $\therefore \alpha=-\frac{1}{2}$

이것은 $0<\alpha<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ $\therefore f(2)=\frac{9}{2}$ 답 ④

37 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $\sin x\le\cos x$를 만족시키는 x의 값의 범위는

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$ ……㉠

또한, $2\sin^2 x-5\cos x+1\ge 0$에서

$2(1-\cos^2 x)-5\cos x+1\ge 0$

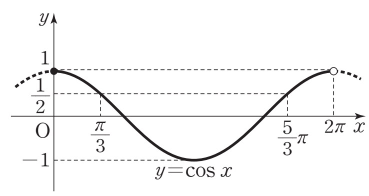
$2-2\cos^2 x-5\cos x+1\ge 0$

$2\cos^2 x+5\cos x-3\le 0$

$(\cos x+3)(2\cos x-1)\le 0$

$\therefore -1\le\cos x\le\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\cos x\le 1$)

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



부등식 $-1\le\cos x\le\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{5}{4}\pi$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{5}{4}\pi+\frac{5}{3}\pi=\frac{35}{12}\pi$ 답 ⑤

38 $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\ge 0$에서

$\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 주어진 부등식은

$2\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-\left\{-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}-1\ge 0$

$2-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\ge 0$

$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1\le 0$

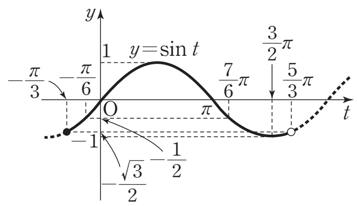
이때 $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=A$로 놓으면 $-1\le A\le 1$이고 주어진 부등식은 $2A^2-A-1\le 0$이다.

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$
$\therefore -1\le \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$

즉, $(2A+1)(A-1)\le 0$이므로 $-\frac{1}{2}\le A\le 1$

$\therefore -\frac{1}{2}\le \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이므로 함수 $y=\sin t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$-\frac{1}{2}\le \sin t\le 1$을 만족시키는 t의 값의 범위는

$-\frac{\pi}{6}\le t\le \frac{7}{6}\pi$

즉, $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{3}\le \frac{7}{6}\pi$에서 $\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{3}{2}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{\pi}{6}}=9$$

답 9

39 $f(x)=x^2-2x\cos\theta+\sin^2\theta$

$=x^2-2x\cos\theta+1-\cos^2\theta$

$=(x-\cos\theta)^2+1-2\cos^2\theta$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta,\ 1-2\cos^2\theta)$

이때 꼭짓점과 원점 사이의 거리가 1 이하이므로

$\sqrt{\cos^2\theta+(1-2\cos^2\theta)^2}\le 1$

$\cos^2\theta+(1-2\cos^2\theta)^2\le 1$

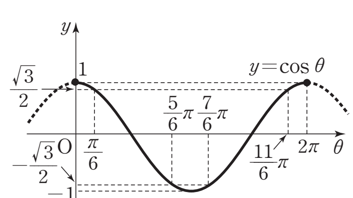
$\cos^2\theta+1-4\cos^2\theta+4\cos^4\theta\le 1$

$4\cos^4\theta-3\cos^2\theta\le 0$

$\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)\le 0$

$0\le\cos^2\theta\le\frac{3}{4}$ $\quad\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……㉠

$0\le\theta\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{7}{6}\pi\le\theta\le\frac{11}{6}\pi$

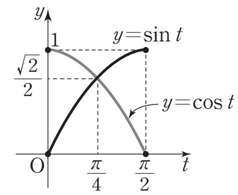
따라서 θ의 값으로 가능하지 않은 것은 ③이다. 답 ③

40 $0\le|\cos 2x|\le 1$이므로

$0\le\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|\le\frac{\pi}{2}$

이때 $\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|=t$로 놓으면 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서

두 함수 $y=\sin t$, $y=\cos t$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $\sin t\ge\cos t$를 만족시키는 t의 값의 범위는



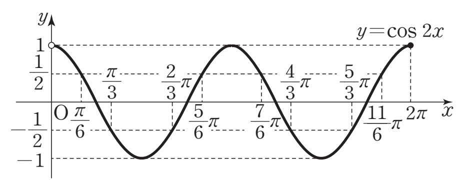
$\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}$

즉, $\frac{\pi}{4}\le\left|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right|\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\le|\cos 2x|\le 1$

$\therefore -1\le\cos 2x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2}\le\cos 2x\le 1$ ……㉠

한편, 함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, $0<x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos 2x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $0<x\le 2\pi$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi\le x\le 2\pi$

이때 $\frac{\pi}{3}<2<\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi<3<\frac{7}{6}\pi$, $\frac{4}{3}\pi<5<\frac{5}{3}\pi$, $\frac{11}{6}\pi<6<2\pi$이므로 자연수 x는 2, 3, 5, 6이다.

$\rightarrow \frac{\pi}{6}<1<\frac{\pi}{3}$, $\frac{7}{6}\pi<4<\frac{4}{3}\pi$, $7>2\pi$

따라서 그 합은

$2+3+5+6=16$ 답 16

단계	채점 기준	배점
(가)	$\left\|\frac{\pi}{2}\cos 2x\right\|=t$로 놓고 $\sin t\ge\cos t$를 만족시키는 t의 값의 범위를 구한 경우	40%
(나)	주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 x의 값의 범위에 속하는 자연수를 구하고 그 합을 구한 경우	20%

41 $(a\sin^2 x-4)\cos x+4=\{a(1-\cos^2 x)-4\}\cos x+4$

$=-a\cos^3 x+(a-4)\cos x+4$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$

$-a\cos^3 x+(a-4)\cos x+4=-at^3+(a-4)t+4$

$=-(t-1)(at^2+at+4)$

$-1\le t\le 1$에서 부등식 $-(t-1)(at^2+at+4)\ge 0$을 만족시키는 a의 값의 범위를 구하면 다음과 같다.

(i) $t=1$일 때,

$0\geq 0$이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $-1\leq t<1$일 때,

$-(t-1)>0$이므로 $at^2+at+4\geq 0$이어야 한다.

$\therefore\ a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+4\geq 0$ ……㉠

① $a=0$이면

$4\geq 0$이므로 부등식이 성립한다.

② $a>0$이면

㉠에서 $-\frac{1}{4}a+4\geq 0$, $a\leq 16$

$\therefore\ 0<a\leq 16$

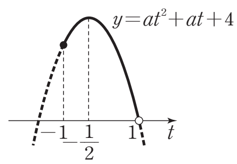
③ $a<0$이면

㉠에서 $t=1$일 때

최소가 된다. 즉,

$2a+4\geq 0$, $a\geq -2$

$\therefore\ -2\leq a<0$



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-2\leq a\leq 16$

따라서 실수 a의 최댓값은 16, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은 14이다. 답 14

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.75~76

01 $\frac{3}{4}$	02 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	03 $-\frac{3}{4}$	04 5	05 ①
06 -1	07 12	08 18	09 78	10 ②
11 $2\sqrt{26}$	12 28			

01 해결단계

❶ 단계	주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 a, c의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	주어진 함수의 주기를 이용하여 b의 값을 구한다.
❸ 단계	$\frac{ab}{c\pi}$의 값을 구한다.

원의 반지름의 길이는 30 cm이고, 페달이 최저점을 지날 때 지면으로부터의 높이가 10 cm이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $2\times 30+10=70$, 최솟값은 10이다.

즉, $f(x)=a\sin b\left(x-\frac{1}{2}\right)+c$에서

$|a|+c=70$, $-|a|+c=10$이므로

$a+c=70$, $-a+c=10$ ($\because\ a>0$)

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=30$, $c=40$

또한, 페달이 한 바퀴 도는 데 2초가 걸리므로 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.

즉, $\frac{2\pi}{|b|}=2$이므로 $\frac{2\pi}{b}=2$ ($\because\ b>0$)

$\therefore\ b=\pi$

$\therefore\ a=30$, $b=\pi$, $c=40$

$\therefore\ \frac{ab}{c\pi}=\frac{30\pi}{40\pi}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

02 해결단계

❶ 단계	$2t-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓고, 삼각형 ABC의 넓이를 θ에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 θ의 값의 범위를 구하고 이때의 t의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	α와 β의 값을 각각 구한 후, $\sin(\beta-\alpha)$의 값을 구한다.

점 $\mathrm{C}\left(\sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right)$에서

$2t-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면

$\mathrm{C}(\sin\theta, \cos\theta)$

$0\leq t<\frac{5}{12}\pi$이므로

$-\frac{\pi}{3}\leq 2t-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$

즉, $\cos\theta>0$이므로

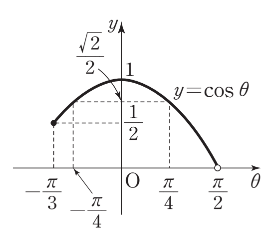
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\cos\theta$$

$$=\frac{5}{4}\cos\theta$$

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이상이 되어야 하므로

$\frac{5}{4}\cos\theta\geq\frac{5\sqrt{2}}{8}$에서 $\cos\theta\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos\theta$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$

즉, $-\frac{\pi}{4}\leq 2t-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\pi}{12}\leq 2t\leq\frac{7}{12}\pi$

$\therefore\ \frac{\pi}{24}\leq t\leq\frac{7}{24}\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{24}$, $\beta=\frac{7}{24}\pi$이므로

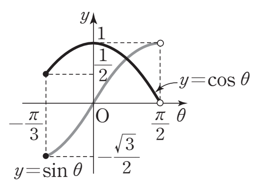
$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\left(\frac{7}{24}\pi-\frac{\pi}{24}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

BLACKLABEL 특강 참고

$-\frac{\pi}{3} \le \theta < \frac{\pi}{2}$에서 두 함수 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로

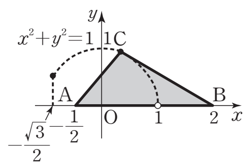


$-\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin\theta < 1$,

$0 < \cos\theta \le 1$이다.

또한, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 점 C는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.

따라서 세 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(2, 0)$, $\mathrm{C}(\sin\theta, \cos\theta)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



03 해결단계

❶ 단계	$\cos x = X$, $\sin x = Y$로 치환하고 $X^2+Y^2=1$임을 파악한다.
❷ 단계	주어진 함수에 $\cos x = X$, $\sin x = Y$를 대입하여 직선의 방정식을 구한다.
❸ 단계	원의 중심 $(0, 0)$과 **❷단계**에서 구한 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같음을 이용하여 y의 최댓값을 구한다.

$\cos x = X$, $\sin x = Y$로 놓으면

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$이므로

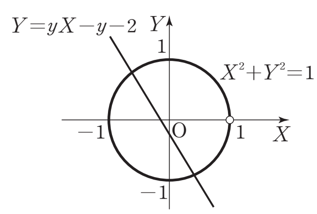
$X^2+Y^2=1$ ……㉠

또한, $y=\frac{\sin x+2}{\cos x-1}$에서 $y=\frac{Y+2}{X-1}$ $(X \ne 1)$이므로

$Y+2 = y(X-1)$

$yX - Y - y - 2 = 0$ ……㉡

이때 오른쪽 그림의 XY좌표평면에서 원 ㉠과 직선 ㉡이 만나려면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로



$\frac{|-y-2|}{\sqrt{y^2+(-1)^2}} \le 1$, $|y+2| \le \sqrt{y^2+1}$

$|y+2| \ge 0$, $\sqrt{y^2+1} \ge 0$이므로 위의 부등식의 양변을 제곱하면

$(y+2)^2 \le y^2+1$, $4y \le -3$

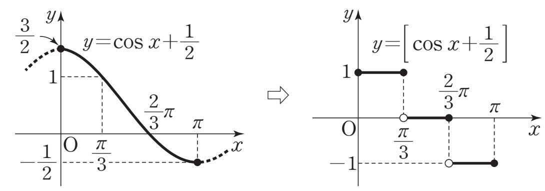
$\therefore y \le -\frac{3}{4}$

따라서 구하는 최댓값은 $-\frac{3}{4}$이다. **답** $-\frac{3}{4}$

04 해결단계

❶ 단계	$0 \le x \le \pi$에서 함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	방정식 $\left[\cos x + \frac{1}{2}\right] = x - k$의 정수해가 존재하기 위한 조건을 파악한다.
❸ 단계	**❷단계**에서 구한 조건에 따른 k의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$0 \le x \le \pi$에서 함수 $y=\cos x + \frac{1}{2}$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



방정식 $\left[\cos x + \frac{1}{2}\right] = x - k$의 정수해가 존재하려면 두 함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$, $y=x-k$의 그래프의 교점 중에서 x좌표가 정수인 점이 존재해야 한다.

이때 $\frac{\pi}{3} \fallingdotseq 1.05$, $\frac{2}{3}\pi \fallingdotseq 2.09$, $\pi \fallingdotseq 3.14$이므로 교점의 x좌표로 가능한 것은 0, 1, 2, 3이다.

(i) 교점의 x좌표가 0인 경우

함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나므로

$y=x-k$에서 $1=0-k$

$\therefore k=-1$

(ii) 교점의 x좌표가 1인 경우

함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(1, 1)$을 지나므로 ($0<1<\frac{\pi}{3}$)

$y=x-k$에서 $1=1-k$

$\therefore k=0$

(iii) 교점의 x좌표가 2인 경우

함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(2, 0)$을 지나므로 ($\frac{\pi}{3}<2<\frac{2}{3}\pi$)

$y=x-k$에서 $0=2-k$

$\therefore k=2$

(iv) 교점의 x좌표가 3인 경우

함수 $y=\left[\cos x + \frac{1}{2}\right]$의 그래프는 점 $(3, -1)$을 지나므로 ($\frac{2}{3}\pi<3<\pi$)

$y=x-k$에서 $-1=3-k$

$\therefore k=4$

(i)~(iv)에서 주어진 방정식의 정수해가 존재하도록 하는 k의 값은 -1, 0, 2, 4이므로 그 합은

$-1+0+2+4=5$ **답** 5

05 해결단계

❶ 단계	주어진 방정식을 $\sin x$에 대한 식으로 정리한다.
❷ 단계	$\sin x=t$로 치환하여 주어진 방정식을 t에 대한 식으로 바꾼 후, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 t의 조건을 구한다.
❸ 단계	점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하고, 그 도형을 좌표평면 위에 나타낸 것을 찾는다.

$\cos^2 x+a\sin x-b=0$에서

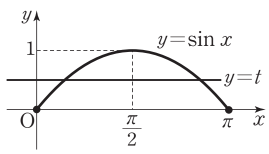
$1-\sin^2 x+a\sin x-b=0$

$\therefore \sin^2 x-a\sin x+b-1=0$

이때 $\sin x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $0\le t\le 1$이고 주어진 방정식은

$t^2-at+b-1=0$ ……㉠

$0\le x\le\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le t<1$일 때, 방정식 $\sin x=t$는 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.



따라서 x에 대한 방정식 $\sin^2 x-a\sin x+b-1=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 t에 대한 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 갖고 그 중에서 한 근이 $t=\sin x=1$이어야 한다.

㉠에 $t=1$을 대입하면

$1^2-a+b-1=0 \qquad \therefore b=a$

즉, $t^2-at+a-1=0$에서

$(t-1)\{t-(a-1)\}=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=a-1$

또한, t에 대한 방정식 ㉠의 나머지 한 근이 $0\le t<1$을 만족시켜야 하므로

$0\le a-1<1 \qquad \therefore 1\le a<2$

따라서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형의 방정식은 $b=a\ (1\le a<2)$이므로 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

답 ①

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 좀 어렵게 느껴질 수 있지만 이차방정식과 삼각함수를 연관시킨 문제가 시험에 자주 출제되므로 잘 알아두어야 한다.
우선 주어진 식을 $\sin x$에 대한 식으로 바꾸면
$\sin^2 x-a\sin x+b-1=0$이고 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $\sin x=t$로 치환한 방정식 $t^2-at+b-1=0$이 실근 $t=1$과 $0\le t<1$인 실근 하나를 가져야 함을 알아야 한다. 왜냐하면 두 근이 모두 $0\le t<1$을 만족시키면 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖기 때문이다.

06 해결단계

❶ 단계	함수 $f(n)$, $g(n)$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 함숫값을 구하고, 규칙성을 파악한다.
❷ 단계	$h(n)=\dfrac{g(n)}{f(n+1)}$을 이용하여 $h(1)+h(2)+h(3)+h(4)$의 값을 구한다.
❸ 단계	$h(n)=h(n+4)$임을 이용하여 $h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(15)$의 값을 구한다.

함수 $f(n)$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하면

$f(1)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$f(2)=2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}=-1$

$f(3)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$f(4)=2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$

$f(5)=2\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$\quad=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\quad\vdots$

따라서 자연수 k에 대하여

$f(4k-3)=\sqrt{3},\ f(4k-2)=-1,\ f(4k-1)=-\sqrt{3},$
$f(4k)=1$

함수 $g(n)$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하면

$g(1)=3\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{\tan\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{3}$

$g(2)=3\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$\quad=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

$g(3)=3\tan\left(\frac{9}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$\quad=\dfrac{3}{\tan\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{3}$

$g(4)=3\tan\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

$g(5)=3\tan\left(\frac{15}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=3\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$\quad=\dfrac{3}{\tan\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{3}$

$\quad\vdots$

따라서 자연수 k에 대하여

$g(2k-1)=3\sqrt{3},\ g(2k)=\sqrt{3}$

$h(n)=\dfrac{g(n)}{f(n+1)}$이므로

$h(1)+h(2)+h(3)+h(4)$

$=\dfrac{g(1)}{f(2)}+\dfrac{g(2)}{f(3)}+\dfrac{g(3)}{f(4)}+\dfrac{g(4)}{f(5)}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{1}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$=-3\sqrt{3}-1+3\sqrt{3}+1=0$

한편, 자연수 n에 대하여 $h(n)=h(n+4)$이므로

$h(1)+h(2)+h(3)+h(4)$

$=h(5)+h(6)+h(7)+h(8)$

$=h(9)+h(10)+h(11)+h(12)$

$=0$

$\therefore h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(15)$

$\quad=0+0+0+h(13)+h(14)+h(15)$

$=h(1)+h(2)+h(3)$

$=-3\sqrt{3}-1+3\sqrt{3}$

$=-1$ 답 -1

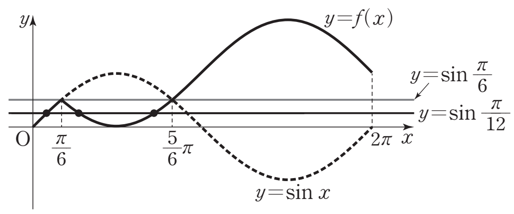
07 해결단계

❶ 단계	$\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x$의 그래프는 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에 대하여 대칭임을 파악한다.
❷ 단계	$k=1, 2, 3, 4, 5, 6$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 파악하고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{12}\pi\right)$의 교점의 개수를 구한다.
❸ 단계	$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)$의 값을 구한다.

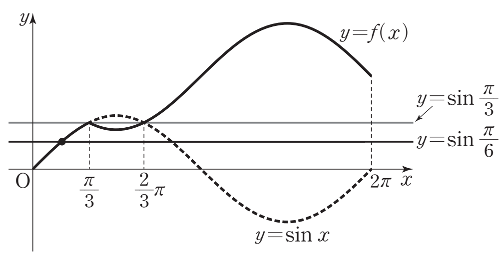
$\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$에서 $\frac{f(x)+\sin x}{2}=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x$의 그래프는 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{12}\pi\right)$는 k의 값에 따라 다음 그림과 같다.

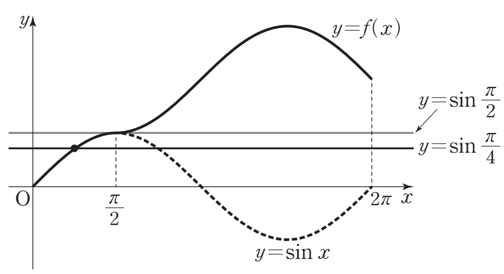
(i) $k=1$일 때, $g(1)=3$



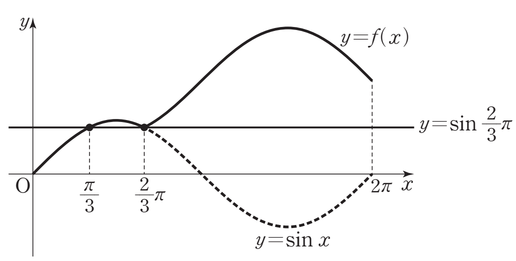
(ii) $k=2$일 때, $g(2)=1$



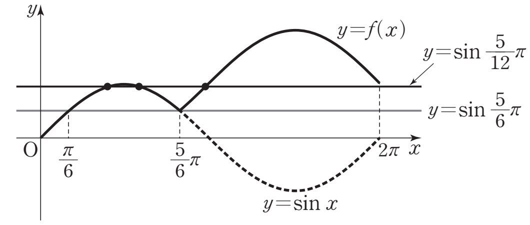
(iii) $k=3$일 때, $g(3)=1$



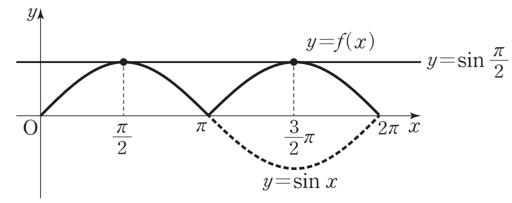
(iv) $k=4$일 때, $g(4)=2$



(v) $k=5$일 때, $g(5)=3$



(vi) $k=6$일 때, $g(6)=2$



(i)~(vi)에서

$g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)$

$=3+1+1+2+3+2=12$ 답 12

08 해결단계

❶ 단계	n에 1, 2, 3, …을 대입하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.
❷ 단계	$0<k<1$임을 이용하여 정수인 $f(t)$의 값은 0 또는 1뿐임을 파악한다.
❸ 단계	$f(t)=0$, $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수를 구한 후, $g(a)=85$가 되도록 하는 a의 값을 구한다.
❹ 단계	$\log_a\frac{1}{2}$의 값을 구한다.

두 함수 $y=2k^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x$, $y=-2k^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x$는 모두 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이고, $x=4n-4$, $x=4n-2$, $x=4n$에서의 함숫값이 모두 0이며 최댓값이 각각 $2k^{2n-1}$, $2k^{2n}$이다.

n에 1, 2, 3, …을 대입하여 함수 $y=f(x)$를 구하면

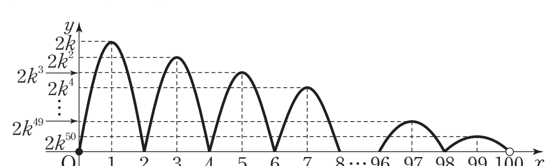
$$n=1일\ 때,\ f(x)=\begin{cases}2k\sin\frac{\pi}{2}x & (0\le x<2)\\ -2k^2\sin\frac{\pi}{2}x & (2\le x<4)\end{cases}$$

$$n=2일\ 때,\ f(x)=\begin{cases}2k^3\sin\frac{\pi}{2}x & (4\le x<6)\\ -2k^4\sin\frac{\pi}{2}x & (6\le x<8)\end{cases}$$

$$n=3일\ 때,\ f(x)=\begin{cases}2k^5\sin\frac{\pi}{2}x & (8\le x<10)\\ -2k^6\sin\frac{\pi}{2}x & (10\le x<12)\end{cases}$$

⋮

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 모든 자연수 n에 대하여

$0<k<1$에서 $0<2k^n<2$이므로 $f(t)$의 값이 가질 수 있는 정수는 0과 1뿐이다.

(i) $f(t)=0$일 때,

위의 식을 만족시키는 t는 0, 2, 4, $\cdots$, 98의 50개이다.

(ii) $f(t)=1$일 때,

위의 식을 만족시키는 t의 개수는 k의 값에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

$2k=1$, 즉 $k=\frac{1}{2}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 1

$2k^2=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 $2+1$

$2k^3=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는 $2+2+1$

$\vdots$

$2k^m=1$, 즉 $k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ (m은 자연수)이면 $f(t)=1$을 만족시키는 t의 개수는

$2\times(m-1)+1=2m-1$

(i), (ii)에서 $f(t)$의 값이 정수가 되도록 하는 t의 개수는

$$g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right)=50+(2m-1)$$
$$=2m+49$$

즉, $2m+49=85$에서 $2m=36$

$\therefore m=18$

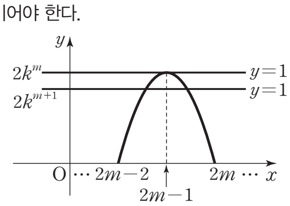
따라서 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}}$이므로

$\log_a \frac{1}{2}=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}}} \frac{1}{2}=18$ **답** 18

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

(ii)에서 $2k^m$ (m은 자연수)의 값이 1이 되는 경우를 기준으로 하여 t의 개수를 구하는 이유를 알아보자.

$f(t)=0$이 되도록 하는 t의 개수가 50이고, $f(t)$의 값이 정수가 되도록 하는 t의 총개수가 85이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수는 $85-50=35$이어야 한다.



$2k^m=1$이면 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같이 $x=2m-1$일 때 접한다. 이때 구간 $0<x<2$, $2<x<4$, $4<x<6$, $\cdots$, $2m-4<x<2m-2$마다 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수가 35인 k의 값을 구할 수 있다.

그러나 $2k^m<1<2k^{m-1}$이면 구간 $0<x<2$, $2<x<4$, $4<x<6$, $\cdots$, $2m-2<x<2m$마다 직선 $y=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 모두 2이므로 $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수는 짝수이다. 즉, $f(t)=1$이 되도록 하는 t의 개수가 35인 k의 값이 존재하지 않으므로 $2k^m=1$이 되는 경우만을 따져도 된다.

09 해결단계

❶ 단계	x의 범위를 $-2\pi\le x<0$과 $0\le x\le 2\pi$인 경우로 나누고 각 범위에서 방정식 $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 x의 값의 개수와 합을 각각 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$$f(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$
$$=\begin{cases}|-2\sin x+1| & (-2\pi\le x<0)\\ |2\sin 3x+1| & (0\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=1$의 근과 같다.

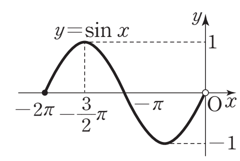
(i) $-2\pi\le x<0$일 때,

방정식 $f(x)=1$에서 $|-2\sin x+1|=1$

$-2\sin x+1=1$ 또는 $-2\sin x+1=-1$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

$-2\pi\le x<0$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\sin x=0$에서

$x=-2\pi$ 또는 $x=-\pi$

$\sin x=1$에서 $x=-\frac{3}{2}\pi$

따라서 방정식 $f(x)=1$의 모든 근의 합은

$(-2\pi)+(-\pi)+\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{9}{2}\pi$

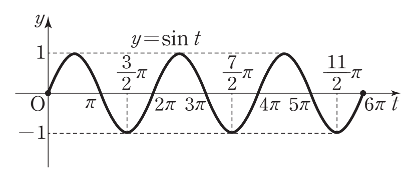
(ii) $0\le x\le 2\pi$일 때,

방정식 $f(x)=1$에서 $|2\sin 3x+1|=1$

$2\sin 3x+1=1$ 또는 $2\sin 3x+1=-1$

$\therefore \sin 3x=0$ 또는 $\sin 3x=-1$

이때 $3x=t$로 놓으면 $0\le 3x\le 6\pi$이므로 함수 $y=\sin t$ $(0\le t\le 6\pi)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\sin t=0$에서 $t=0$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π이므로

$x=0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, 2π

$\sin t=-1$에서 $t=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{11}{2}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$

따라서 방정식 $f(x)=1$의 모든 근의 합은

$$0+\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\pi+\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi$$
$$=\frac{21}{2}\pi$$

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=1$의 근은 모두 13개이므로 $n=13$이고, 그 합은

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{13}$$
$$=\left(-\frac{9}{2}\pi\right)+\frac{21}{2}\pi=6\pi$$

$$\therefore \frac{n}{\pi}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=\frac{13}{\pi}\times 6\pi$$
$$=78$$

답 78

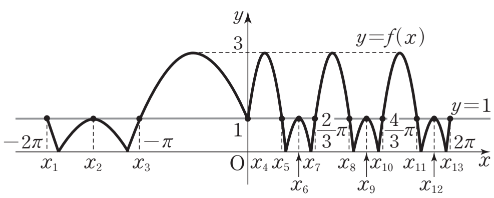
• 다른 풀이 •

함수 $f(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$의 그래프를 직접 그린 후, 삼각함수의 주기와 대칭성을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수도 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} |-2\sin x+1| & (-2\pi\le x<0) \\ |2\sin 3x+1| & (0\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 모두 13개이므로

$n=13$

$-2\pi\le x<0$에서 생기는 교점의 x좌표가 x_1, x_2, x_3이고, 위의 그림에서

$x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$이므로

$$x_1+x_2+x_3=x_1+\frac{x_1+x_3}{2}+x_3$$
$$=\frac{3}{2}(x_1+x_3)$$
$$=\frac{3}{2}(-2\pi-\pi)$$
$$=\frac{3}{2}\times(-3\pi)=-\frac{9}{2}\pi \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0\le x\le 2\pi$에서 생기는 교점의 x좌표가 x_4, x_5, x_6, $\cdots$, x_{13}이고, 위의 그림에서

$x_4=0$, $x_6=\dfrac{x_5+x_7}{2}$, $x_9=\dfrac{x_8+x_{10}}{2}$, $x_{12}=\dfrac{x_{11}+x_{13}}{2}$이므로

$$x_4+x_5+x_6+\cdots+x_{13}$$
$$=0+\frac{3}{2}(x_5+x_7)+\frac{3}{2}(x_8+x_{10})+\frac{3}{2}(x_{11}+x_{13})$$
$$=\frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13}) \quad \cdots\cdots ㉡$$

또한, $x_7=\dfrac{x_5+x_8}{2}$에서

$x_5+x_8=2x_7$, $x_{11}=\dfrac{x_{10}+x_{13}}{2}$

이므로 위의 식을 ㉡에 대입하면

$$\frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})$$
$$=\frac{3}{2}\left\{3x_7+\frac{3}{2}(x_{10}+x_{13})\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\left\{3\times\frac{2}{3}\pi+\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi+2\pi\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\times 7\pi$$
$$=\frac{21}{2}\pi \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉢에서

$$\frac{n}{\pi}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=\frac{13}{\pi}\times\left(-\frac{9}{2}\pi+\frac{21}{2}\pi\right)$$
$$=\frac{13}{\pi}\times 6\pi$$
$$=78$$

BLACKLABEL 특강 참고

㉡에서 $\dfrac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

다른 풀이의 그림에서

$x_9=\dfrac{x_5+x_{13}}{2}=\dfrac{x_7+x_{11}}{2}=\dfrac{x_8+x_{10}}{2}$이므로

$$\frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})$$
$$=3\times\left(\frac{x_5+x_{13}}{2}+\frac{x_7+x_{11}}{2}+\frac{x_8+x_{10}}{2}\right)$$
$$=3\times 3x_9=9x_9$$

한편, $x_5=\dfrac{x_4+x_7}{2}$, $x_6=\dfrac{x_5+x_7}{2}$에서

$$x_5=\frac{0+\frac{2}{3}\pi}{2}=\frac{\pi}{3},\ x_6=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

이때 $x_9-x_6=\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$$x_9=x_6+\frac{2}{3}\pi=\frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{3}{2}(x_5+x_7+x_8+x_{10}+x_{11}+x_{13})$$
$$=9\times\frac{7}{6}\pi=\frac{21}{2}\pi$$

10 해결단계

❶ 단계	$\{x\mid f(x)=a\}\subset\{x\mid g(x)=a\}$이려면 k는 12의 약수이어야 함을 파악한다.
❷ 단계	$k=1, 2, 3, 4, 6, 12$일 때 조건을 만족시키는지 확인한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 k의 개수를 구한다.

함수 $f(x)=\sin kx+2$는 최댓값이 $1+2=3$, 최솟값이 $-1+2=1$이고, 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$ (k는 자연수)인 함수이다.

또한, 함수 $g(x)=3\cos 12x$는 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고, 주기가 $\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$인 함수이다.

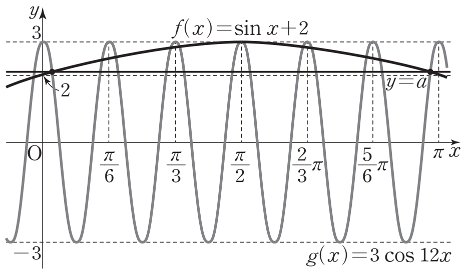
$A=\{x\mid f(x)=a\}$, $B=\{x\mid g(x)=a\}$라 할 때, $A\subset B$를 만족시키기 위해서는 방정식 $f(x)=a$의 실근이 모두 방정식 $g(x)=a$의 실근이 되어야 하므로

$\dfrac{2\pi}{k}$, $\dfrac{4\pi}{k}$, $\dfrac{6\pi}{k}$, $\cdots$의 값이 모두 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{6}$, $\cdots$의 값에 대응될 수 있어야 한다. 주기의 배수

즉, k가 12의 약수이어야 하므로 가능한 k의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이다.

(i) $k=1$일 때,

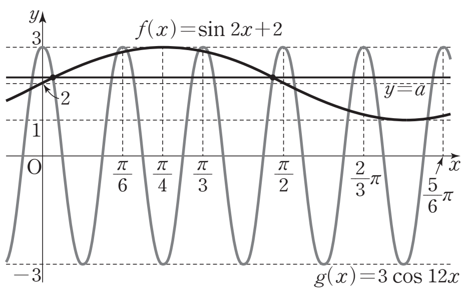
$f(x)=\sin x+2$의 주기가 2π이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(ii) $k=2$일 때,

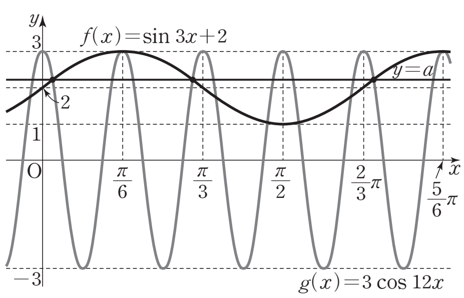
$f(x)=\sin 2x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(iii) $k=3$일 때,

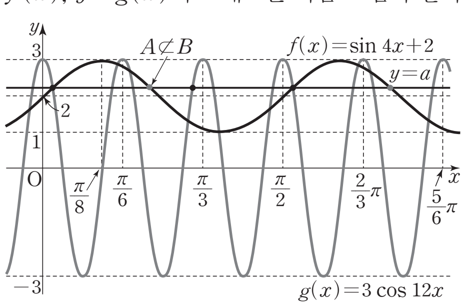
$f(x)=\sin 3x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(iv) $k=4$일 때,

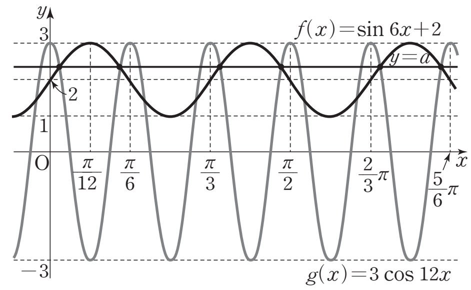
$f(x)=\sin 4x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \not\subset B$

(v) $k=6$일 때,

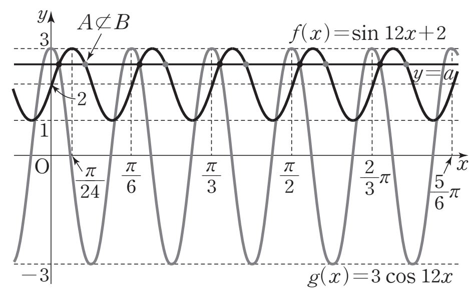
$f(x)=\sin 6x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \subset B$

(vi) $k=12$일 때,

$f(x)=\sin 12x+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore A \not\subset B$

(i)~(vi)에서 $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$를 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 6의 4개이다. **답** ②

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로 그 주기의 $\frac{1}{2}$인 $\frac{\pi}{k}$가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\cdots$ 일 때, $A \subset B$가 성립한다.

즉, $\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{6}\times n$ (n은 자연수)이므로 $k=\frac{6}{n}$이고 k가 자연수이므로 조건을 만족시키는 k는 1, 2, 3, 6이다.

11 해결단계

❶ 단계	사분원의 호를 $(2n+1)$등분한 각 호의 중심각의 크기를 θ라 하고 $\overline{P_iQ_i}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, 2n)$를 사분원의 반지름의 길이 $\overline{OA}$ 및 θ에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$\overline{P_1Q_1}^2+\overline{P_2Q_2}^2+\overline{P_3Q_3}^2+\cdots+\overline{P_{2n}Q_{2n}}^2=624$를 만족시키는 $\overline{OA}$를 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	부채꼴 OP_nP_{n+1}의 넓이 $S(n)$을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❹ 단계	$\frac{S(n)}{\pi}$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 값을 찾아 $\overline{OA}$의 길이의 최솟값을 구한다.

점 B를 점 P_{2n+1}이라 하고

$\angle AOP_1=\angle P_iOP_{i+1}=\theta$ (단, $i=1, 2, \cdots, 2n$)

라 하면 점 P_i가 사분원의 호를 $(2n+1)$등분하였으므로

$\theta=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2n+1}$

$\therefore (2n+1)\theta=\frac{\pi}{2}$, $\angle P_iOA=i\theta$ $(i=1, 2, \cdots, 2n)$

$\triangle P_iOQ_i$는 $\angle P_iQ_iO=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{P_iQ_i}=\overline{OP_i}\times\sin(\angle P_iOQ_i)$
$\quad=\overline{OP_i}\sin i\theta=\overline{OA}\sin i\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_i}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2\sin^2 i\theta$

이때 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{Q}_{2n}}^2=624$이므로

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}^2+\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}^2+\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{Q}_{2n}}^2\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2(\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta+\cdots+\sin^2 2n\theta)\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2[\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta\\
&\qquad+\sin^2\{(2n+1)\theta-n\theta\}\\
&\qquad+\sin^2\{(2n+1)\theta-(n-1)\theta\}\\
&\qquad+\cdots+\sin^2\{(2n+1)\theta-\theta\}] \quad (2n+1)\theta=\tfrac{\pi}{2}\text{이므로}\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2\left[\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-n\theta\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}-(n-1)\theta\right\}+\cdots+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2(\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\cdots+\sin^2 n\theta\\
&\qquad+\cos^2 n\theta+\cdots+\cos^2 2\theta+\cos^2\theta)\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)+\cdots\\
&\qquad+(\sin^2 n\theta+\cos^2 n\theta)\}\\
&=\overline{\mathrm{OA}}^2\times(1\times n)=n\overline{\mathrm{OA}}^2=624
\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}^2=\dfrac{624}{n}$ ······㉠

한편, 부채꼴 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이가 $S(n)$이므로

$$\begin{aligned}
S(n)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}^2\times\theta=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}^2\times\frac{\pi}{2(2n+1)}\\
&=\frac{624}{4n(2n+1)}\pi=\frac{156}{n(2n+1)}\pi
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{S(n)}{\pi}=\frac{156}{n(2n+1)}=\frac{2^2\times3\times13}{n(2n+1)}$$

$\dfrac{S(n)}{\pi}$이 자연수이어야 하고, $2n+1$이 3 이상의 홀수이므로

$2n+1=3$ 또는 $2n+1=13$ 또는 $2n+1=39$

$\therefore\ n=1$ 또는 $n=6$ 또는 $n=19$

$n=1$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{1\times3}=52$

$n=6$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{6\times13}=2$

$n=19$이면 $\dfrac{S(n)}{\pi}=\dfrac{2^2\times3\times13}{19\times39}=\dfrac{4}{19}$

$\therefore\ n=1$ 또는 $n=6$

한편, ㉠에서 n이 최대일 때 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이는 최소이므로 선분 OA의 길이의 최솟값은 $n=6$일 때

$\sqrt{\dfrac{624}{6}}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$ **답** $2\sqrt{26}$

12 해결단계

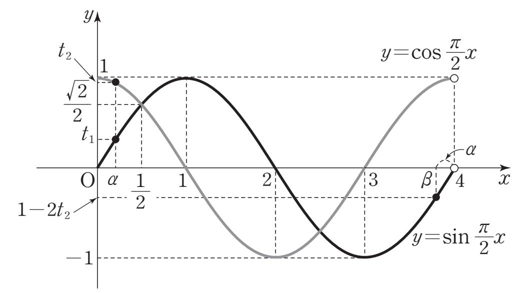
❶ 단계	$0\le x<4$에서 두 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프의 개형을 파악한다.
❷ 단계	t_1, t_2의 값의 범위를 구하고 삼각함수의 관계를 이용하여 $t_1^2+t_2^2=1$임을 구한다.
❸ 단계	함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 이용하여 $t_1=2t_2-1$임을 구하여 t_1, t_2의 값을 각각 구한다.
❹ 단계	$100\times\lvert t_1^2-t_2^2\rvert$의 값을 구한다.

$\{f(x)-t\}\{g(x)-t\}=0$에서

$\sin\dfrac{\pi}{2}x=t$ 또는 $\cos\dfrac{\pi}{2}x=t$

이 방정식의 실근은 두 함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$, $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.

이때 두 함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$, $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$의 주기가 모두 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



조건 ㈎에서

$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$이어야 하고, $t_1<t_2$이므로

$0<t_1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t_2<1$

$\therefore\ \sin\dfrac{\pi}{2}\alpha=t_1$, $\cos\dfrac{\pi}{2}\alpha=t_2$

이때 $\sin^2\dfrac{\pi}{2}\alpha+\cos^2\dfrac{\pi}{2}\alpha=1$이므로

$t_1^2+t_2^2=1$ ······㉠

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t_2<1$에서 $-1<1-2t_2<0$

조건 ㈏에서

$\alpha(t_1)+\beta(1-2t_2)=4$

$\beta(1-2t_2)=\beta$라 하면

$\alpha+\beta=4$, 즉 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2$

이때 함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(\alpha,\ t_1)$, $(\beta,\ 1-2t_2)$도 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\dfrac{t_1+(1-2t_2)}{2}=0$이므로 $t_1=2t_2-1$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2t_2-1)^2+t_2^2=1$

$5t_2^2-4t_2=0$, $t_2(5t_2-4)=0$

$\therefore\ t_1=\dfrac{3}{5}$, $t_2=\dfrac{4}{5}\ \left(\because\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<t_2<1\right)$

$$\begin{aligned}
\therefore\ 100\times\lvert t_1^2-t_2^2\rvert&=100\times\lvert(t_1+t_2)(t_1-t_2)\rvert\\
&=100\times\left(\frac{7}{5}\times\frac{1}{5}\right)\\
&=28
\end{aligned}$$

답 28

07. 사인법칙과 코사인법칙

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.78~79

01 ④	02 30	03 ⑤	04 ②	05 ⑤
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ③	10 ④
11 ③	12 $4\sqrt{6}$	13 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$	14 12	

01 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, $3\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\sin A$

$3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\sin A$ $\therefore \sin A=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos^2 A=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$ 답 ④

02 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\overline{BD}$는 원의 지름이다.

△ABD에서 $\angle A=180^\circ-(50^\circ+40^\circ)=90^\circ$

즉, △ABD는 직각삼각형이므로 $\overline{BD}$는 원의 지름이다.

이때 원의 반지름의 길이를 R이라 하면 $2R=20\sqrt{3}$

따라서 △ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\underbrace{\sin(50^\circ+70^\circ)}_{\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ}}=2R$, $\frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AC}=20\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30$ 답 30

03 $6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C=k$라 하면

$\sin A=\frac{k}{6}$, $\sin B=\frac{k}{2\sqrt{3}}$, $\sin C=\frac{k}{3}$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{k}{6}:\frac{k}{2\sqrt{3}}:\frac{k}{3}=\underbrace{1:\sqrt{3}:2}_{=a:b:c}$

따라서 △ABC에서 ∠C=90°, ∠B=60°, ∠A=30°이므로 ∠A의 크기는 30°이다. 답 ⑤

04 ∠A+∠B+∠C=180°이므로

$c\sin(A+B)=b\sin(A+C)$에서

$c\sin(180^\circ-C)=b\sin(180^\circ-B)$

$\therefore c\sin C=b\sin B$

이때 △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$c\times\frac{c}{2R}=b\times\frac{b}{2R}$

즉, $b^2=c^2$이므로 $b=c$ ($\because b>0, c>0$)

따라서 △ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ②

05 ∠A+∠B+∠C=180°에서

$\angle C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

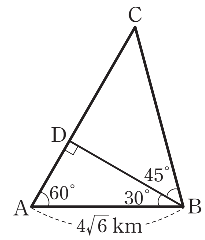
△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$, $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ$

$=\frac{4\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12(\text{km})$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •



오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 하면

∠ABD=30°, ∠CBD=45°

△ABD에서

$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{BD}=2:1:\sqrt{3}$이므로

$4\sqrt{6}:\overline{AD}:\overline{BD}=2:1:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AD}=2\sqrt{6}(\text{km})$, $\overline{BD}=6\sqrt{2}(\text{km})$

또한, △BCD에서 ∠BCD=45°이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}:\overline{BC}=6\sqrt{2}:\overline{CD}:\overline{BC}=1:1:\sqrt{2}$

$\therefore \overline{CD}=6\sqrt{2}(\text{km})$, $\overline{BC}=12(\text{km})$

06 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

∠A+∠C=180° ∴ ∠A=180°−60°=120°

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\underbrace{\cos 120^\circ}_{=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}}$

$=25+9+15=49$

$\therefore \overline{BD}=7$ ($\because \overline{BD}>0$)

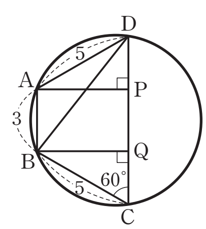
△BCD에서 $\overline{CD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$7^2=5^2+x^2-2\times5\times x\times\cos 60^\circ$, $x^2-5x-24=0$

$(x+3)(x-8)=0$ $\therefore x=8$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{BD}\times\overline{CD}=7\times8=56$ 답 ①

• 다른 풀이 •



원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\overline{AD}=\overline{BC}$이고, 길이가 같은 현에 대한 원주각의 크기는 같으므로

∠ABD=∠BDC

즉, 두 변 AB, CD는 평행하므로

□ABCD는 등변사다리꼴이다.

두 점 A, B에서 변 CD에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$\overline{BQ}=\overline{BC}\sin 60^\circ=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CQ}=\overline{BC}\cos 60^\circ=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

이때 $\overline{CD}=\overline{CQ}+\overline{QP}+\overline{PD}$에서

$\overline{PD}=\overline{CQ}=\frac{5}{2}$, $\overline{QP}=\overline{AB}=3$이므로

$\overline{CD}=\frac{5}{2}+3+\frac{5}{2}=8$

한편, $\overline{QD}=\overline{QP}+\overline{PD}=3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$이고,

$\triangle$DBQ는 $\overline{\text{BD}}$가 빗변인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{BD}}^2=\overline{\text{BQ}}^2+\overline{\text{QD}}^2$

$=\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{75}{4}+\frac{121}{4}=49$

$\therefore \overline{\text{BD}}=7$ ($\because \overline{\text{BD}}>0$)

$\therefore \overline{\text{BD}}\times\overline{\text{CD}}=7\times8=56$

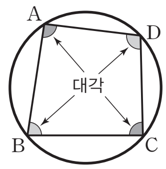
BLACKLABEL 특강 필수 개념

원에 내접하는 사각형의 성질

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다. 즉,

$\angle\text{A}+\angle\text{C}=180^\circ$,

$\angle\text{B}+\angle\text{D}=180^\circ$



07

삼각형 ABC에서 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}=6:4=3:2$

이때 $\overline{\text{BC}}=5\sqrt{3}$이므로

$\overline{\text{BD}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\text{CD}}=2\sqrt{3}$ *

$\angle\text{A}=2\alpha$, $\overline{\text{AD}}=x$라 하면 $\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{6^2+x^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times6\times x}=\frac{x^2+9}{12x}$$

$\triangle$ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{4^2+x^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times x}=\frac{x^2+4}{8x}$$

즉, $\frac{x^2+9}{12x}=\frac{x^2+4}{8x}$에서 $2x^2+18=3x^2+12$

$x^2=6$ $\quad\therefore x=\sqrt{6}$ ($\because x>0$) 답 ⑤

• 다른 풀이 •

*에서 $\angle\text{B}=\beta$라 하면 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\beta=\frac{6^2+(5\sqrt{3})^2-4^2}{2\times6\times5\sqrt{3}}=\frac{19\sqrt{3}}{36}$$

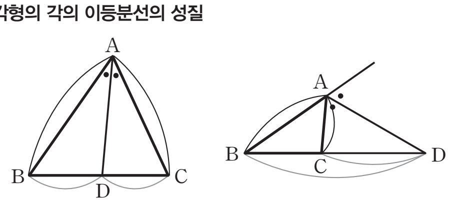
$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{AD}}^2=6^2+(3\sqrt{3})^2-2\times6\times3\sqrt{3}\times\frac{19\sqrt{3}}{36}=6$$

$\therefore \overline{\text{AD}}=\sqrt{6}$ ($\because \overline{\text{AD}}>0$)

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼각형의 각의 이등분선의 성질



삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 또는 $\angle$A의 외각의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}=\overline{\text{BD}}:\overline{\text{CD}}$

08

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이가 13이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{BC}}=2\times13\times\sin60^\circ=2\times13\times\frac{\sqrt{3}}{2}=13\sqrt{3}$$

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{AC}}=4:1$에서 $\overline{\text{AC}}=x$ $(x>0)$라 하면

$\overline{\text{AB}}=4x$이므로 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(13\sqrt{3})^2=(4x)^2+x^2-2\times4x\times x\times\cos60^\circ$

$13x^2=13^2\times3$, $x^2=39$

$\therefore x=\sqrt{39}$ ($\because x>0$) 답 ②

09

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$2\sin A\cos B=\sin C$에서

$$2\times\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c}{2R}$$

$c^2+a^2-b^2=c^2$, $a^2-b^2=0$

$(a+b)(a-b)=0$ $\quad\therefore a=b$ ($\because a>0,\ b>0$)

따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ③

10

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BC}}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos60^\circ$

$=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{2}=12$

$\therefore \overline{\text{BC}}=2\sqrt{3}(\text{km})$ ($\because \overline{\text{BC}}>0$) *

이때 학교를 세우려는 지점을 P라 하면 점 P는 세 지점 A, B, C로부터 같은 거리에 있으므로 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

즉, $\overline{\text{PC}}$는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이이므로 $\triangle$ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=2\overline{\text{PC}},\ \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\overline{\text{PC}}$$

$4=2\overline{\text{PC}}$ $\quad\therefore \overline{\text{PC}}=2(\text{km})$

따라서 구하는 거리는 2 km이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 $\overline{\text{AB}}=4$ km, $\overline{\text{BC}}=2\sqrt{3}$ km, $\overline{\text{CA}}=2$ km

$4^2=(2\sqrt{3})^2+2^2$이므로 $\triangle$ABC는 $\angle\text{C}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 학교를 세우려는 지점은 삼각형 ABC의 외접원의 중심, 즉 외심이고, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 일치하므로 지점 C와 학교를 세우려는 지점 사이의 거리는

$\frac{1}{2}\times4=2(\text{km})$

11

$a+b=24$이므로 $b=24-a$

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(24-a)^2=6^2+a^2-2\times6\times a\times\cos120^\circ$

$a^2-48a+576=a^2+6a+36$

$54a=540 \qquad \therefore a=10$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=15\sqrt{3}$ 답 ③

12 $\triangle DBC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

또한, $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{7^2+4^2-5^2}{2\times7\times4}=\frac{40}{56}=\frac{5}{7}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

$\therefore \triangle ABD=\frac{1}{2}\times7\times4\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times7\times4\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}$ 답 $4\sqrt{6}$

• 다른 풀이 •

$\triangle DBC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BD}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

따라서 $\triangle ABD$에서 $s=\frac{7+4+5}{2}=8$이라 하면 헤론의 공식에 의하여

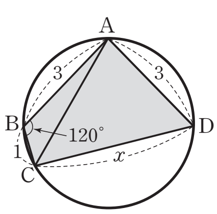
$\triangle ABD=\sqrt{8\times(8-7)\times(8-4)\times(8-5)}$

$=\sqrt{8\times1\times4\times3}=4\sqrt{6}$

서울대 선배들의 추천 PICK | 1등급 비법 노하우

이 문제는 시험에 자주 출제되는 유형으로 주의하여 알아두어야 한다. 코사인법칙은 삼각형의 세 변의 길이만 알면 어떤 각도 코사인값을 구할 수 있다는 점에서 유용하다. 코사인값을 알면 사인값, 탄젠트값은 저절로 얻을 수 있으므로 코사인법칙은 아주 유용한 법칙이다.
이 문제에서는 삼각형 ABD의 넓이를 구해야 하므로 적어도 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알아야 한다. 이때 $\overline{BD}=5$임을 쉽게 알 수 있으므로 어느 한 각의 크기를 코사인법칙으로 구하고 이를 이용하여 사인값을 쉽게 구할 수 있다.

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{CD}=x$라 하면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{AC}^2$

$=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos120^\circ$

$=1+9-2\times1\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=13$

원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이므로

이때 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle B+\angle D=180^\circ$

$\therefore \angle D=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

또한, $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$13=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos60^\circ$

$13=9+x^2-2\times3\times x\times\frac{1}{2}$

$x^2-3x-4=0,\ (x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

$\therefore \square ABCD$

$=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin60^\circ$

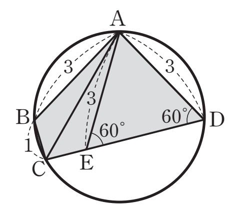
$=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{3}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 답 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

• 다른 풀이 •

변 CD 위에 $\angle AED=60^\circ$인 점 E를 잡으면 $\triangle ADE$는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로



$\overline{AE}=3$

한편, 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로

$\angle ACB=\angle ACD$

또한, $\angle ABC=\angle AEC=120^\circ$이므로 두 삼각형 ACB, ACE에서 $\angle CAB=\angle CAE$이다.

즉, 두 삼각형 ACB, ACE는 $\overline{AB}=\overline{AE}$, $\angle CAB=\angle CAE$이고 $\overline{AC}$가 공통이므로

$\triangle ACB\equiv\triangle ACE$ (SAS 합동)

$\therefore \square ABCD$

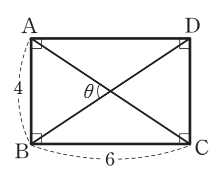
$=\triangle ACB+\triangle ACE+\triangle ADE$

$=2\times\frac{1}{2}\times1\times3\times\sin120^\circ+\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

14 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여



$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

이때 직사각형의 두 대각선의 길이는 같으므로

$\overline{BD}=\overline{AC}=2\sqrt{13}$

직사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta=\overline{AB}\times\overline{BC}$

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times2\sqrt{13}\times\frac{k}{13}=4\times6\ \left(\because \sin\theta=\frac{k}{13}\right)$

$2k=24 \qquad \therefore k=12$ 답 12

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.80~84

01 ②	02 $\frac{33}{8}$	03 ④	04 $4\sqrt{3}$	05 23
06 $\frac{18}{5}$	07 ①	08 ⑤	09 7	10 $\frac{9\sqrt{5}}{40}$ cm^2
11 ⑤	12 ①	13 27	14 291	15 ②
16 풀이 참조	17 ④	18 $\frac{25}{4}$	19 ③	20 ③
21 64	22 $2\sqrt{3}$	23 ②	24 ⑤	25 ②
26 14	27 72	28 ⑤	29 $4\sqrt{7}$	30 ③

01 원의 반지름의 길이를 R이라 하면 네 삼각형 ABC, ABD, ABE, ABF에서 사인법칙에 의하여

$\sin(\angle\mathrm{CAB})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2R}=\frac{1}{5}$이므로

$$\sin(\angle\mathrm{DAB})=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{2R}=\frac{2\overline{\mathrm{BC}}}{2R}=2\times\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2R}$$
$$=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$
$$\sin(\angle\mathrm{EAB})=\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{2R}=\frac{3\overline{\mathrm{BC}}}{2R}=3\times\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2R}$$
$$=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$
$$\sin(\angle\mathrm{FAB})=\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{2R}=\frac{4\overline{\mathrm{BC}}}{2R}=4\times\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{2R}$$
$$=4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$
$$\therefore \sin(\angle\mathrm{DAB})+\sin(\angle\mathrm{EAB})+\sin(\angle\mathrm{FAB})$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$$

답 ②

02 $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$에서

$b+c=5k,\ c+a=6k,\ a+b=7k$라 하자.

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=4k,\ b=3k,\ c=2k$

이때 △ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{4k}{2R}$$
$$\sin B=\frac{b}{2R}=\frac{3k}{2R}$$
$$\sin C=\frac{c}{2R}=\frac{2k}{2R}$$
$$\therefore \frac{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C}{\sin A\sin B\sin C}$$
$$=\frac{\left(\frac{4k}{2R}\right)^3+\left(\frac{3k}{2R}\right)^3+\left(\frac{2k}{2R}\right)^3}{\frac{4k}{2R}\times\frac{3k}{2R}\times\frac{2k}{2R}}$$
$$=\frac{64k^3+27k^3+8k^3}{24k^3}$$
$$=\frac{99}{24}=\frac{33}{8}$$

답 $\frac{33}{8}$

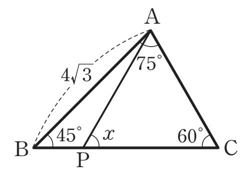
BLACKLABEL 특강 참고

△ABC에서 사인법칙에 의하여
$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$
이므로 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$의 값에 각각 a, b, c를 대입하여 계산해도 결과는 같다.

03 $\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=180^\circ$에서

$\angle\mathrm{C}=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

이므로 △ABC에서 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 45^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$

점 P가 점 B 위에 있을 때

점 P가 점 C로 가까이 갈 때

한편, $\angle\mathrm{APC}=x\ (45^\circ\le x<120^\circ)$라 하고 △APC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin x}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin x}$$

이때 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin x\le 1$이므로

$4\sqrt{2}\le 2R\le 8$

따라서 △APC의 외접원의 지름의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다.

답 ④

• 다른 풀이 •

$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=180^\circ$에서

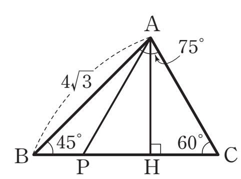
$\angle\mathrm{C}=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

△APC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{AP}}\qquad\cdots\cdots㉠$$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소일 때 △APC의 외접원의 지름의 길이가 최소이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이가 최소일 때는 점 P가 점 H 위에 있을 때이므로



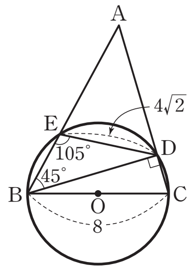
$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin 45^\circ$$
$$=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=2\sqrt{6}$$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{6}$이다.

따라서 ㉠에서 △APC의 외접원의 지름의 길이의 최솟값은

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{6}=4\sqrt{2}$$

04 △BDE의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 $2R=8$이므로 사인법칙에 의하여



$\sin(\angle EBD)=\dfrac{\overline{DE}}{2R}=\dfrac{4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle EBD=45^\circ$

$(\because\ 0^\circ<\angle EBD<90^\circ)$

△ABD에서 $\angle BAD=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$

△BDE에서 $\angle EDB=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

$\therefore\ \angle ADE=\angle ADB-\angle EDB$

$=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

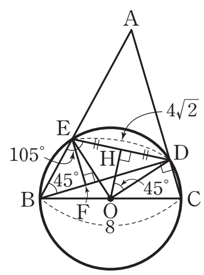
따라서 △AED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AE}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{ED}}{\sin 45^\circ}$에서 $\dfrac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore\ \overline{AE}=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ODH에서



$\overline{HD}=2\sqrt{2}$, $\overline{OD}=4$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{HD}^2}$

$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

△ODH는 $\angle OHD=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\angle HOD=45^\circ$

같은 방법으로 $\angle HOE=45^\circ$

즉, $\angle EOD=90^\circ$이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle EBD=\dfrac{1}{2}\angle EOD$

$=\dfrac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$

또한, △BDE에서

$\angle BDE=180^\circ-\{\angle BED+\angle DBE\}$

$=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

이므로 사인법칙에 의하여

$\overline{EB}=2R\sin(\angle BDE)$

$=8\times\sin 30^\circ=8\times\dfrac{1}{2}=4$

한편, 점 E에서 변 BD에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\angle BEF=45^\circ$, $\angle DEF=60^\circ$이므로

$\overline{BF}=\overline{EB}\sin(\angle BEF)=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

$\overline{FD}=\overline{ED}\sin(\angle DEF)=4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$

이때 $\triangle EBF\backsim\triangle ABD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{EB}:\overline{AB}=\overline{BF}:\overline{BD}$, $4:\overline{AB}=2\sqrt{2}:\overline{BD}$

$2\sqrt{2}\,\overline{AB}=4\overline{BD}$, $\overline{AB}=\sqrt{2}\,\overline{BD}$

$\overline{BD}=\overline{BF}+\overline{FD}=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2}(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=4+4\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}$이므로

$\overline{AE}=4+4\sqrt{3}-4=4\sqrt{3}$

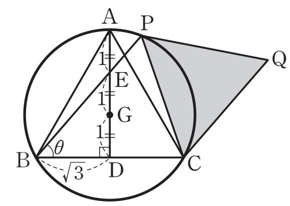
05 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$

무게중심 G는 중선 AD를 2 : 1로 내분하므로 선분 AG의 중점을 E라 하면

$\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{GD}=1$

직각삼각형 EBD에서



$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{ED}=2$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$

또한, $\angle PBC=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

이때 주어진 원의 반지름의 길이는 $\overline{AG}=2$이므로

정삼각형의 무게중심은 정삼각형의 외접원의 중심, 즉 외심과 일치하므로 점 G는 주어진 원의 중심이다.

△PBC에서 사인법칙에 의하여

$2\times 2=\dfrac{\overline{PC}}{\sin\theta}$에서 $4=\dfrac{\overline{PC}}{\frac{2}{\sqrt{7}}}$

$\therefore\ \overline{PC}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

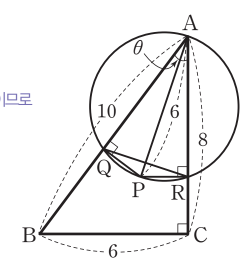
따라서 정삼각형 PCQ의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{PC}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{8}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{16}{7}\sqrt{3}$

즉, $p=7$, $q=16$이므로 $p+q=23$ 답 23

06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$가 지름이고 사각형 AQPR이 내접하는 원을 그리자.

$\angle AQP+\angle ARP=180^\circ$이므로



이때 이 원의 반지름의 길이가 3이므로 $\angle QAR=\theta$라 하면

△AQR에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{QR}}{\sin\theta}=2\times 3=6$

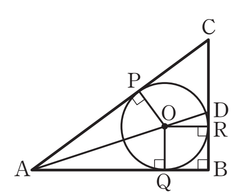
또한, △ABC는 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\dfrac{\overline{QR}}{\sin\theta}=6$에서 $\dfrac{\overline{QR}}{\frac{3}{5}}=6$

$\therefore\ \overline{QR}=6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$ 답 $\dfrac{18}{5}$

07 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 변 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R이라 하자.



$\overline{OQ}=\overline{OR}=3$이므로

$\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=4-3=1$

직각삼각형 DOR에서

$\overline{DO}=\sqrt{\overline{OR}^2+\overline{DR}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sin(\angle DOR)=\dfrac{\overline{DR}}{\overline{DO}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ……㉠

두 삼각형 DOR, OAQ의 닮음비가

$\overline{DR}:\overline{OQ}=1:3$이므로

$\overline{AQ}=3\times\overline{OR}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{PA}=\overline{AQ}=9$, $\angle CAD=\angle DAB$

삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$(9+3):(9+\overline{CP})=4:(\overline{CR}-1)$

$9+\overline{CP}=3(\overline{CR}-1)$

이때 $\overline{CP}=\overline{CR}$이므로

$\overline{CR}=6$ $\quad\therefore \overline{CD}=\overline{CR}-1=5$

이때 $\angle CAD=\angle DAB=\angle DOR$이므로 $\triangle ADC$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{5}{\sin(\angle DOR)}=5\sqrt{10}\ (\because ㉠)$$

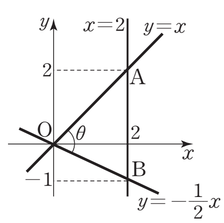
따라서 $R=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2\pi=\dfrac{125}{2}\pi$

답 ①

08

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$와 두 직선 $y=x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$의 교점을 각각 A, B라 하면



A(2, 2), B(2, -1)

$\triangle OBA$에서

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{AB}=2-(-1)=3$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-3^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{8+5-9}{4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

이때 θ는 예각이므로 $\sin\theta>0$

$$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 ⑤

BLACKLABEL 특강 참고

삼각형의 넓이를 이용하여 $\sin\theta$의 값을 구할 수도 있다.
$\triangle OBA$의 밑변을 AB라 하면 $\triangle OBA$는 밑변의 길이가 3이고 높이가 2인 삼각형이므로

$\triangle OBA=\dfrac{1}{2}\times3\times2=3$

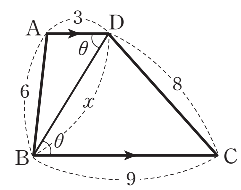
이때 $\overline{OA}=2\sqrt{2}$, $\overline{OB}=\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sin\theta=3$

$\sqrt{10}\sin\theta=3$ $\quad\therefore \sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

09

$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로



$\angle ADB=\angle DBC$ ($\because$ 엇각)

이때 $\angle ADB=\angle DBC=\theta$,

$\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle ABD$와

$\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{x^2+3^2-6^2}{2\times x\times3}=\frac{x^2+9^2-8^2}{2\times x\times9}$$

$$\frac{x^2-27}{6x}=\frac{x^2+17}{18x}$$

$3x^2-81=x^2+17$, $2x^2=98$

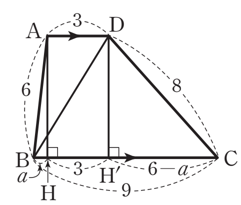
$x^2=49$ $\quad\therefore x=7$ ($\because x>0$)

따라서 대각선 BD의 길이는 7이다.

답 7

• 다른 풀이 •

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고



$\overline{BH}=a$라 하면

$\overline{HH'}=\overline{AD}=3$,

$\overline{H'C}=9-a-3=6-a$

이때 $\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로

$\overline{AH}=\overline{DH'}$이고 $\triangle ABH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}^2=6^2-a^2=36-a^2$

$\triangle DH'C$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{DH'}^2=8^2-(6-a)^2=64-(6-a)^2$

즉, $\underbrace{36-a^2=64-(6-a)^2}_{\overline{AH}=\overline{DH'}\text{이면 }\overline{AH}^2=\overline{DH'}^2\text{이므로}}$에서

$12a=8$ $\quad\therefore a=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \overline{AH}=\overline{DH'}=\sqrt{6^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{320}{9}}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

$\overline{BH'}=a+3=\dfrac{2}{3}+3=\dfrac{11}{3}$이므로 $\triangle DBH'$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD}=\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{441}{9}}=\sqrt{49}=7$$

10

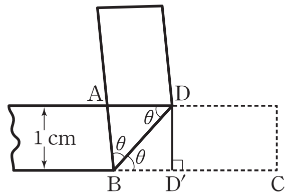
$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$이므로 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D′이라 하면

$\triangle BD'D$에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{DD'}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{BD}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}(\mathrm{cm})$



접은 각　　　　　엇각

이때 $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{ADB}=\theta$에서 $\triangle\mathrm{ABD}$는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 이등변삼각형이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}}\ *$$

$$=\frac{\overline{\mathrm{AD}}^2+\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\frac{3}{\sqrt{5}}}\ (\because\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}})$$

$$=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{6}{\sqrt{5}}\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{3\sqrt{5}}{10\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{2}{3}$$

이므로 $20\overline{\mathrm{AD}}=9\sqrt{5}$　　$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{20}(\mathrm{cm})$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DD'}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9\sqrt{5}}{20}\times1=\dfrac{9\sqrt{5}}{40}(\mathrm{cm}^2)$　　**답** $\dfrac{9\sqrt{5}}{40}\ \mathrm{cm}^2$

• 다른 풀이 •

$*$에서 선분 BD의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$

$\cos\theta=\dfrac{2}{3},\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$에서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}\tan\theta=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}\tan\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3}{4}(\mathrm{cm})$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}\times\dfrac{3}{4}$

$=\dfrac{9}{8\sqrt{5}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{40}(\mathrm{cm}^2)$

11 ㄱ. $a=5$이면 $\triangle\mathrm{ABC}$는 빗변이 $\overline{\mathrm{BC}}$인 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$는 원의 지름이다.

$5^2=3^2+4^2$이므로

$\therefore\ R=\dfrac{5}{2}$ (참)

ㄴ. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2R,\ a=2R\sin A$

$\therefore\ a=2\times4\times\sin A=8\sin A$ (참)

ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$의 각 변을 제곱하면 $1<a^2\le13$이고 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙에 의하여

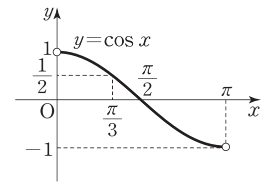
$\cos A=\dfrac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4}=\dfrac{25-a^2}{24}$

이므로 $-13\le-a^2<-1$

$12\le25-a^2<24,\ \dfrac{1}{2}\le\dfrac{25-a^2}{24}<1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\le\cos A<1$

이때 $\angle\mathrm{A}$는 삼각형의 한 내각이므로 $0<\angle\mathrm{A}<\pi$이고, $0<x<\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0^\circ<\angle\mathrm{A}\le60^\circ$

따라서 $\angle\mathrm{A}$의 최댓값은 60°이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.　　**답** ⑤

12 $\overline{\mathrm{BD}}=a$라 하면 $\triangle\mathrm{ODB}$가 직각삼각형이고 $\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2a,\ \overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{3}a$이다.

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{OD}}=2:1:\sqrt{3}$이므로

이때 $\angle\mathrm{ABD}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$,

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{OB}}=2\times2a=4a$이므로 $\triangle\mathrm{ADB}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=(4a)^2+a^2-2\times4a\times a\times\cos60^\circ$

$=16a^2+a^2-2\times4a\times a\times\dfrac{1}{2}=13a^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{13}a\ (\because\ \overline{\mathrm{AD}}>0)$

또한, $\triangle\mathrm{ADB}$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(4a)^2+(\sqrt{13}a)^2-a^2}{2\times4a\times\sqrt{13}a}=\dfrac{16a^2+13a^2-a^2}{8\sqrt{13}a^2}$

$=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\dfrac{49}{52}}=\sqrt{\dfrac{3}{52}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}}{\frac{7}{2\sqrt{13}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$　　**답** ①

• 다른 풀이 •

$\overline{\mathrm{BD}}=a$라 하면 $\triangle\mathrm{ODB}$가 직각삼각형이고 $\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2a,\ \overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{3}a$이다.

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{OD}}\sin30^\circ=\sqrt{3}a\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OD}}\cos30^\circ=\sqrt{3}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}a$

이때 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{OH}}$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=2a+\dfrac{3}{2}a=\dfrac{7}{2}a$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{AH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{7}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

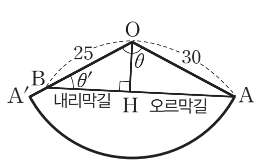
서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

삼각형에 대한 조건이 몇 가지 주어지고 미지수를 구하는 문제로 시험에 자주 출제된다. 이때 주어진 조건으로 얻을 수 있는 것이 무엇인지 확인하고 답을 구하는데 필요한 것을 차근차근 계산하면 쉽게 해결할 수 있다. 이 문제에서는 $\angle BOD=30°$이므로 $\overline{OB}=2$, $\overline{BD}=1$로 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 즉, $\overline{AB}=4$이고, $\triangle ADB$에서 $\angle B=60°$이므로 코사인법칙을 이용하면 $\overline{AD}$의 길이를 구할 수 있다. 마지막으로 $\triangle ADB$에서 코사인법칙을 이용하여 $\cos\theta$의 값을 구하면 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값도 각각 구할 수 있다.

13 선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로
$\triangle ABC$는 직각삼각형이다.
$\therefore \angle BCA=90°$
$\angle CAB=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$에서
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
이므로
$\overline{BC}=\overline{AB}\times\sin\theta$에서
$$12\sqrt{2}=\overline{AB}\times\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore \overline{AB}=18$$
$$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}\times\cos\theta=18\times\frac{1}{3}=6$$
또한, 점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로
$$\overline{AD}=\frac{5}{9}\times\overline{AB}=\frac{5}{9}\times18=10$$
$\triangle CAD$에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{DC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\cos\theta$$
$$=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{1}{3}$$
$$=96$$
$\therefore \overline{DC}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ ($\because \overline{DC}>0$)
삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{DC}}{\sin\theta}=2r,\ \frac{4\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2r \qquad \therefore r=3\sqrt{3}$$
따라서 삼각형 CAD의 외접원의 넓이 S는
$S=\pi\times(3\sqrt{3})^2=27\pi$
$\therefore \frac{S}{\pi}=27$

답 27

14 주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.

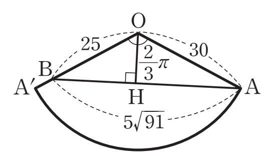


이때 밑면인 원의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면
$$2\pi\times10=30\theta \qquad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$$
$\triangle OAB$에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{AB}^2=30^2+25^2-2\times30\times25\times\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=900+625-2\times30\times25\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2275$$
$\therefore \overline{AB}=5\sqrt{91}$ ($\because \overline{AB}>0$)
이때 $\angle OBA=\theta'$이라 하면 $\triangle OAB$에서 코사인법칙에 의하여
$$\cos\theta'=\frac{25^2+(5\sqrt{91})^2-30^2}{2\times25\times5\sqrt{91}}$$
$$=\frac{2000}{250\sqrt{91}}=\frac{8}{\sqrt{91}}$$
또한, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$$\overline{BH}=25\cos\theta'$$
$$=25\times\frac{8}{\sqrt{91}}=\frac{200}{\sqrt{91}}$$
따라서 내리막길의 길이는 $\frac{200}{\sqrt{91}}=\frac{a}{\sqrt{b}}$이므로
$a=200$, $b=91$
$\therefore a+b=291$

답 291

• 다른 풀이 •

*에서 주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.



또한, 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times5\sqrt{91}\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times30\times25\times\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$\sqrt{91}\times\overline{OH}=150\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \overline{OH}=\frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$
직각삼각형 OBH에서 피타고라스 정리에 의하여
$$\overline{BH}^2=25^2-\left(\frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=625\left(1-\frac{27}{91}\right)=\frac{625\times64}{91}$$
$\therefore \overline{BH}=\frac{200}{\sqrt{91}}$ ($\because \overline{BH}>0$)
따라서 $a=200$, $b=91$이므로 $a+b=291$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

주어진 도형의 꼭짓점 O와 선분 AB 위를 이동하는 점 P 사이의 거리는 점 P가 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 이동함에 따라 변함을 파악할 수 있다.
특히, 점 P가 점 A에서 점 H까지 이동할 때는 선분 OP의 길이가 점점 짧아지고 있지만 점 P가 점 H에서 점 B로 이동할 때는 선분 OP의 길이가 다시 길어지고 있음을 확인할 수 있다.
따라서 점 H의 위치가 오르막길과 내리막길의 기준이 된다.

15 주어진 방정식이 이차방정식이므로
$\sin B+\cos C\neq0$

이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\cos^2 A+(\sin B+\cos C)(\sin B-\cos C)=0$

$\cos^2 A+\sin^2 B-\cos^2 C=0$

$1-\sin^2 A+\sin^2 B-(1-\sin^2 C)=0$

$\sin^2 B-\sin^2 A+\sin^2 C=0$

이때 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2-\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$

$\frac{b^2-a^2+c^2}{4R^2}=0 \quad \therefore a^2=b^2+c^2 \ (\because R\neq 0)$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90^\circ$인 직각삼각형이다. **답** ②

16 $\cos A : \cos B=b : a$에서 $a\cos A=b\cos B$이고

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

위의 식의 양변에 $2abc$를 곱하면

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로

$a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

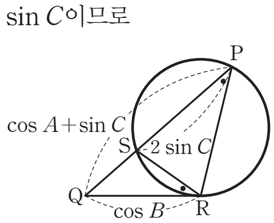
따라서 $\triangle$ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle$C$=90^\circ$인 직각삼각형이다. **답** 풀이 참조

단계	채점 기준	배점
㈎	$\cos A : \cos B=b : a$에서 $a\cos A=b\cos B$임을 알고 코사인법칙을 이용하여 이 식을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸 경우	50%
㈏	㈎에서 나타낸 식을 인수분해하여 $\triangle$ABC가 어떤 삼각형인지 구한 경우	50%

17 $\overline{\text{PQ}}=\cos A+\sin C$, $\overline{\text{PS}}=2\sin C$이므로

$\overline{\text{QS}}=\overline{\text{PQ}}-\overline{\text{PS}}$

$\quad=\cos A-\sin C$



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{SR}}$을 그으면 두 삼각형 PQR, RQS에서

$\angle$QPR$=\angle$QRS,

$\angle$PQR$=\angle$RQS (공통)

$\therefore$ $\triangle$PQR$\backsim\triangle$RQS (AA 닮음)

즉, $\overline{\text{PQ}} : \overline{\text{RQ}}=\overline{\text{QR}} : \overline{\text{QS}}$에서

$\overline{\text{QR}}^2=\overline{\text{PQ}}\times\overline{\text{QS}}$이므로

$\cos^2 B=(\cos A+\sin C)(\cos A-\sin C)$

$\cos^2 B=\cos^2 A-\sin^2 C$

$1-\sin^2 B=(1-\sin^2 A)-\sin^2 C$

$\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=0$

이때 $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$

$\frac{a^2-b^2+c^2}{4R^2}=0 \quad \therefore b^2=a^2+c^2 \ (\because R\neq 0)$

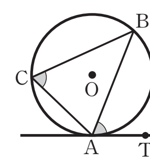
따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$B$=90^\circ$인 직각삼각형이다. **답** ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

원의 접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

$\angle$BAT$=\angle$BCA



18 $\overline{\text{BC}}=a$, $\overline{\text{CA}}=b$, $\overline{\text{AB}}=c$라 하면

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

조건 ㈏에서 $\overline{\text{CA}}=\overline{\text{BC}}\cos C-\overline{\text{AB}}\cos A$이므로

$b=a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\ =\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$

$\ =\frac{2a^2-2c^2}{2b}=\frac{a^2-c^2}{b}$

즉, $b^2=a^2-c^2$이므로 $a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$A$=90^\circ$인 직각삼각형이다. ……㉠

또한, $A+B+C=180^\circ$에서 $A-B+C=180^\circ-2B$이므로

$\frac{A-B+C}{2}=90^\circ-B$

조건 ㈐에서 $\sin A=2\sin\frac{A-B+C}{2}\sin C$이므로

$\sin A=2\sin(90^\circ-B)\sin C$

$\sin A=2\cos B\sin C$

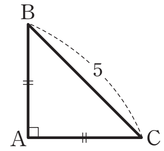
$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\frac{c}{2R}$

$a=\frac{c^2+a^2-b^2}{a} \ (\because R\neq 0)$

$a^2=c^2+a^2-b^2$, $b^2=c^2 \quad \therefore b=c \ (\because b>0, c>0)$

즉, $\triangle$ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다. ……㉡

㉠, ㉡에서 △ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이고, 조건 ㈎에서



$\overline{BC}=5$이므로 $\overline{AB}=\overline{CA}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

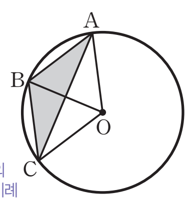
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{25}{4}$ 답 $\dfrac{25}{4}$

BLACKLABEL 특강 참고

$\angle A=90^\circ$임을 다음과 같이 구할 수 있다.
점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\overline{AB}\cos A$, $\overline{CH}=\overline{BC}\cos C$
이때 $\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{CH}$이므로
$\overline{AC}=\overline{AB}\cos A+\overline{BC}\cos C$
한편, 조건 ㈏에서 $\overline{AC}=\overline{BC}\cos C-\overline{AB}\cos A$이므로
$\overline{AB}\cos A=0$, $\cos A=0$ ($\because \overline{AB}>0$)
$\therefore \angle A=90^\circ$ ($\because 0^\circ<\angle A<180^\circ$)

19 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$를 그으면



$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}$ ← 한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례

$=\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$ ← 한 원에서 부채꼴의 중심각의 크기는 원주각의 크기에 정비례

$=\angle C:\angle A:\angle B$

그런데 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=1:1:4$이므로

삼각형 ABC에서

$\angle A=\angle C=\underbrace{180^\circ}_{\text{삼각형의 세 내각의 합은 }180^\circ}\times\dfrac{1}{6}=30^\circ$,

$\angle B=180^\circ\times\dfrac{4}{6}=120^\circ$

이때 △ABC의 외접원의 반지름의 길이는 1이므로 사인법칙에 의하여

$\underbrace{a}_{\overline{BC}}=\underbrace{c}_{\overline{AB}}=2\times1\times\sin A=2\sin30^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 답 ③

BLACKLABEL 특강 참고

삼각형 ABC에서
$\angle A=\angle C=180^\circ\times\dfrac{1}{6}=30^\circ$이므로
$\angle AOB=\angle BOC=60^\circ$ ← 한 원에서 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배
이때 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$이므로 두 삼각형 AOB, BOC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.
따라서 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$, 즉 $a=c=1$이다.

20 $\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하면 직각이등변삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{a^2+a^2}=6$, $\sqrt{2a^2}=6$ $\quad\therefore a=3\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

또한, 직각이등변삼각형 ACQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{b^2+b^2}=4$, $\sqrt{2b^2}=4$ $\quad\therefore b=2\sqrt{2}$ ($\because b>0$)

이때 $\angle PAB=\angle QAC=45^\circ$이므로 ← △ABP, △ACQ가 직각이등변삼각형이므로

$\angle PAQ=90^\circ+\angle BAC$이고, 삼각형 APQ의 넓이가 4이므로

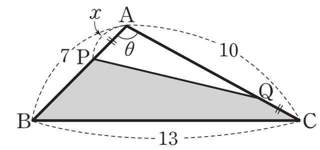
$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}ab\sin(\angle PAQ)$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin(90^\circ+\angle BAC)$

$=6\cos(\angle BAC)=4$

$\therefore \cos(\angle BAC)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ 답 ③

21 오른쪽 그림과 같이 $\angle PAQ=\theta$라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여



$\cos\theta=\dfrac{7^2+10^2-13^2}{2\times7\times10}=-\dfrac{1}{7}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2=1$, $\sin^2\theta=\dfrac{48}{49}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ ($\because \sin\theta>0$)

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times7\times10\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times7\times10\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

$=20\sqrt{3}$

이때 사각형 PBCQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$이므로

$\triangle APQ=\triangle ABC-\square PBCQ$

$=20\sqrt{3}-14\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\overline{AP}=\overline{CQ}=x$ $(0<x<7)$라 하면 삼각형 APQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times x\times(10-x)\times\sin\theta=6\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\times x\times(10-x)\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=6\sqrt{3}$

$x^2-10x+21=0$, $(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ ($\because 0<x<7$)

따라서 △APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=3^2+7^2-2\times3\times7\times\cos\theta$

$=3^2+7^2-2\times3\times7\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)$

$=64$ 답 64

22 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

이때 선분 PQ에 의하여 삼각형 ABC의 넓이가 이등분되므로

$\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AP}\times\overline{AQ}=12$

또한, △APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{AQ}\times\cos 60^\circ$

$\quad=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-2\times 12\times\frac{1}{2}$

$\quad=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-12$

이때 $\overline{AP}^2>0$, $\overline{AQ}^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{PQ}^2\geq 2\sqrt{\overline{AP}^2\times\overline{AQ}^2}-12$

(단, 등호는 $\overline{AP}=\overline{AQ}$일 때 성립)

$\quad=2\overline{AP}\times\overline{AQ}-12$

$\quad=2\times 12-12=12$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ **답** $2\sqrt{3}$

23 $\overline{OB}$의 중점이 C이므로

$\overline{OC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

$\overline{CP}=x\ (x>0)$라 하면 △OPC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OP}^2+\overline{CP}^2-\overline{OC}^2}{2\times\overline{OP}\times\overline{CP}}$

$\quad=\dfrac{6^2+x^2-3^2}{12x}$

$\quad=\dfrac{1}{12}\left(x+\dfrac{27}{x}\right)$

이때 $x>0$, $\dfrac{27}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\dfrac{27}{x}\geq 2\sqrt{x\times\dfrac{27}{x}}$

$\quad=6\sqrt{3}\left(\text{단, 등호는 } x=\dfrac{27}{x},\ \text{즉 } x=3\sqrt{3}\text{일 때 성립}\right)$

즉, $\dfrac{1}{12}\left(x+\dfrac{27}{x}\right)\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta$는 $x=3\sqrt{3}$일 때 최솟값 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 가지고 이때의 θ의 값은 30°이다. θ는 예각이므로

따라서 $\theta=30^\circ$일 때의 삼각형 OPC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6\times\sin 30^\circ=9\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

$\quad=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ **답** ②

• 다른 풀이 •

$\overline{OB}$의 중점이 C이므로

$\overline{OC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 6=3$

∠OCP$=\alpha$라 하면 △OCP에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{OC}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{OP}}{\sin\alpha}$, $\dfrac{3}{\sin\theta}=\dfrac{6}{\sin\alpha}$

$\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\alpha$

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha}$에서

$\cos\theta$는 $\sin\alpha=1$, 즉 $\alpha=90^\circ$일 때 최솟값 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$을 가지고 이때의 θ의 값은 30°이다.

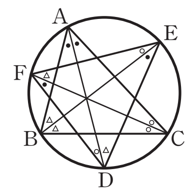
$\cos\theta$가 최소일 때, 변 CP의 길이는

$\overline{CP}=\overline{OP}\cos 30^\circ=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

이므로 삼각형 OPC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6\times\sin 30^\circ=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

24 삼각형 ABC의 세 각의 이등분선이 외접원과 만나는 점이 각각 D, E, F이고, 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로



$\angle BAD=\angle CAD=\angle CFD$

$\quad=\angle BED=\bullet \leftarrow \frac{A}{2}$

$\angle ABE=\angle CBE=\angle CFE$

$\quad=\angle ADE=\triangle \leftarrow \frac{B}{2}$

$\angle ACF=\angle BCF=\angle BEF$

$\quad=\angle ADF=\circ \leftarrow \frac{C}{2}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$D=\triangle+\circ=\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{180^\circ-A}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$,

$E=\bullet+\circ=\dfrac{A+C}{2}=\dfrac{180^\circ-B}{2}=90^\circ-\dfrac{B}{2}$,

$F=\bullet+\triangle=\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{180^\circ-C}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$ ……㉠

한편, $\overline{EF}=d$, $\overline{DF}=e$, $\overline{DE}=f$라 하면 삼각형 DEF의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\sin D=\dfrac{d}{2R}$

$\therefore\ \triangle DEF=\frac{1}{2}ef\sin D=\frac{1}{2}ef\times\dfrac{d}{2R}=\dfrac{def}{4R}$

또한, $d=2R\sin D$, $e=2R\sin E$, $f=2R\sin F$이므로

△DEF

$=\dfrac{def}{4R}$

$=\dfrac{2R\sin D\times 2R\sin E\times 2R\sin F}{4R}$

$=2R^2\sin D\sin E\sin F$

$=2R^2\sin\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)\sin\left(90^\circ-\dfrac{B}{2}\right)\sin\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)$

(∵ ㉠)

$=2R^2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ **답** ⑤

25 해결단계

❶ 단계	△ABC에서 사인법칙과 $a(\sin B+\sin C)=10\sqrt{3}$임을 이용하여 ∠BAC의 크기를 구한다.
❷ 단계	삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 △ABP$=\frac{2}{5}$△ABC임을 파악한다.
❸ 단계	두 삼각형 ABP, ABC의 넓이를 이용하여 선분 AP의 길이를 구한다.

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{12}{2R}$, $\sin C=\dfrac{8}{2R}$

$a(\sin B+\sin C)=10\sqrt{3}$이므로

$a\left(\dfrac{12}{2R}+\dfrac{8}{2R}\right)=\dfrac{20a}{2R}=10\sqrt{3}$, $\dfrac{a}{R}=\sqrt{3}$

$\therefore \sin(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\angle \mathrm{BAC}>90^\circ$이므로 $\angle \mathrm{BAC}=120^\circ$

선분 AP가 $\angle$BAC를 이등분하므로

$\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{PAC}=60^\circ$

$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:3$

따라서 삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{2}{5}$배이므로

$\triangle \mathrm{ABP}=\dfrac{2}{5}\triangle \mathrm{ABC}$

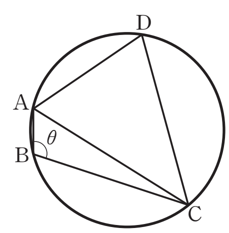
$\dfrac{1}{2}\times 8\times \overline{\mathrm{AP}}\times \sin 60^\circ=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2}\times 8\times 12\times \sin 120^\circ\right)$

$\dfrac{1}{2}\times 8\times \overline{\mathrm{AP}}\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2}\times 8\times 12\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{24}{5}$

답 ②

26 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}$를 긋자.



$\angle \mathrm{ABC}=\theta$로 놓으면

$\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$이므로

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=1^2+5^2-2\times 1\times 5\times \cos\theta$

$\quad=1+25-2\times 1\times 5\times \left(-\dfrac{1}{5}\right)=28$ ……㉠

$\triangle$ACD에서 $\angle \mathrm{ADC}=180^\circ-\theta$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$, $\overline{\mathrm{AD}}=y$ $(x>0,\ y>0)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-\theta)$

$\quad=x^2+y^2+2xy\cos\theta$

$\quad=x^2+y^2-\dfrac{2}{5}xy=28$ ($\because$ ㉠) ……㉡

한편, $0^\circ<\theta<180^\circ$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\quad=\sqrt{1-\dfrac{1}{25}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

이때 사각형 ABCD의 넓이가 $4\sqrt{6}$이므로

$\square \mathrm{ABCD}=\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{ACD}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times 1\times 5\times \sin\theta+\dfrac{1}{2}\times x\times y\times \sin(180^\circ-\theta)$

$\quad=\dfrac{5}{2}\times \dfrac{2\sqrt{6}}{5}+\dfrac{1}{2}xy\times \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\quad=\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{5}xy=4\sqrt{6}$

즉, $\dfrac{\sqrt{6}}{5}xy=3\sqrt{6}$이므로 $xy=15$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+y^2-\dfrac{2}{5}\times 15=28$

$\therefore x^2+y^2=34$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

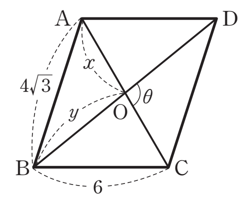
$x+y=\sqrt{34+2\times 15}=\sqrt{64}=8$ ($\because x>0,\ y>0$)

따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$1+5+x+y=6+8=14$

답 14

27 오른쪽 그림과 같이 두 대각선 AC와 BD의 교점을 O, $\overline{\mathrm{OA}}=x$, $\overline{\mathrm{OB}}=y$라 하면



$\triangle$OAB에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

$48=x^2+y^2-2xy\cos\theta$ ……㉠

$\triangle$OBC에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-\theta)$

$36=x^2+y^2+2xy\cos\theta$ ……㉡

㉡$-$㉠을 하면

$4xy\cos\theta=-12$ ……㉢

$x>0$, $y>0$이므로 $\cos\theta<0$

이때 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because \cos\theta<0$)

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$xy=3\sqrt{3}$

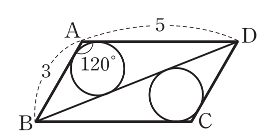
$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times \overline{\mathrm{AC}}\times \overline{\mathrm{BD}}\times \sin\theta=\dfrac{1}{2}\times 2x\times 2y\times \sin\theta$

$\quad=2xy\sin\theta=2\times 3\sqrt{3}\times \dfrac{\sqrt{6}}{3}=6\sqrt{2}$

$\therefore S^2=72$

답 72

28 평행사변형 ABCD의 넓이는



$3\times 5\times \sin 120^\circ=15\times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times \overline{\mathrm{AB}}\times \overline{\mathrm{AD}}\times \cos 120^\circ$

$\quad=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\quad=9+25+15=49$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=7$ ($\because \overline{\mathrm{BD}}>0$)

이때 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\times(3+5+7)=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin 120^\circ$

$\frac{15}{2}r=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 오려내는 내접원 한 개의 넓이는

$\pi r^2=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\pi$

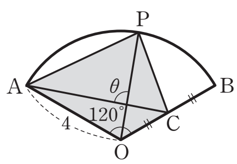
따라서 오려내고 남은 부분의 넓이는 평행사변형의 넓이에서 내접원 두 개의 넓이를 빼면 되므로

$\frac{15\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\pi\times2=\frac{15\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\pi$

답 ⑤

29

$\overline{\mathrm{OB}}$의 중점이 C이므로



$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times4=2$

△AOC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos 120^\circ$ ← $=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ$

$=16+4-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{7}\ (\because \overline{\mathrm{AC}}>0)$

이때 사각형 AOCP의 두 대각선 AC, OP가 이루는 각 중 작은 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, 사각형 AOCP의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\underbrace{4}_{\text{부채꼴의 반지름의 길이}}\times\sin\theta$

$=4\sqrt{7}\sin\theta$

그런데 $0^\circ<\theta\le90^\circ$에서 $0<\sin\theta\le1$이므로

$0<S\le4\sqrt{7}$ (단, 등호는 $\theta=90^\circ$일 때 성립)

따라서 구하는 사각형 AOCP의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{7}$이다.

답 $4\sqrt{7}$

30

△ABD에서 $\angle\mathrm{ADB}=\alpha$라 하면 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

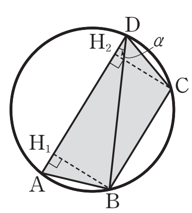
$\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\times6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (\because 0^\circ<\alpha<90^\circ)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{ADB}=\alpha$

즉, 두 변 AD, BC는 평행하므로

□ABCD는 등변사다리꼴이다.*



오른쪽 그림과 같이 두 점 B, C에서 변 AD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때,

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha=3\sqrt{15}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{30}$

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\sin\alpha=3\sqrt{15}\times\frac{1}{3}=\sqrt{15}$

$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{DH_2}}$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\frac{1}{2}\times\{(\overline{\mathrm{DH_1}}+\overline{\mathrm{AH_1}})+(\overline{\mathrm{DH_1}}-\overline{\mathrm{DH_2}})\}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=\overline{\mathrm{DH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}$

$=2\sqrt{30}\times\sqrt{15}$

$=30\sqrt{2}$

답 ③

• 다른 풀이 •

*에서 $\overline{\mathrm{AD}}=x$, $\overline{\mathrm{BC}}=y$라 하면

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=x^2+(3\sqrt{15})^2-2\times x\times3\sqrt{15}\times\cos\alpha$

$x^2-4\sqrt{30}x+119=0$

또한, △BCD에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=y^2+(3\sqrt{15})^2-2\times y\times3\sqrt{15}\times\cos\alpha$

$y^2-4\sqrt{30}y+119=0$

즉, x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-4\sqrt{30}t+119=0$ ……㉠

의 서로 다른 두 양의 실근이다.
(두 근의 합)>0, (두 근의 곱)>0, $D>0$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$x+y=4\sqrt{30}$

$\therefore$ □ABCD=△ABD+△BCD

$=\frac{1}{2}\times x\times3\sqrt{15}\times\sin\alpha+\frac{1}{2}\times y\times3\sqrt{15}\times\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times x\times3\sqrt{15}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times y\times3\sqrt{15}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{\sqrt{15}}{2}(x+y)=\frac{\sqrt{15}}{2}\times4\sqrt{30}=30\sqrt{2}$

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제

pp.85~86

01 31 km	02 4	03 54	04 3	05 12
06 103	07 67	08 ③	09 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	10 80
11 13	12 237			

01

해결단계

❶ 단계	$\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구한 후, △APQ에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	△BQP에서 사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{PB}}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	△APB에서 코사인법칙을 이용하여 두 건물 A와 B 사이의 거리를 구한다.

지점 P에서 시속 25 km로 1시간을 달려 지점 Q로 이동하였으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=25\times1=25(\mathrm{km})$

이때 △APQ에서

$\angle\mathrm{QAP}+\angle\mathrm{APQ}=45^\circ$이므로

$\angle\mathrm{QAP}=45^\circ-15^\circ=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle AQP)}$$

$$\frac{25}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AP}}{\underbrace{\sin 135^\circ}_{=180^\circ-45^\circ}}$$

$$\therefore\ \overline{AP}=\frac{25}{\sin 30^\circ}\times\sin 135^\circ=\frac{25}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}(\mathrm{km})$$

또한, $\triangle BQP$에서

$\angle QPB+\angle QBP=60^\circ$이므로

$\angle QBP=60^\circ-30^\circ=30^\circ$

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QBP)}=\frac{\overline{PB}}{\sin(\angle PQB)}$$

$$\frac{25}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{PB}}{\underbrace{\sin 120^\circ}_{=180^\circ-60^\circ}}$$

$$\therefore\ \overline{PB}=\frac{25}{\sin 30^\circ}\times\sin 120^\circ=\frac{25}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}(\mathrm{km})$$

즉, $\triangle APB$에서 $\angle APB=45^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2&=\overline{AP}^2+\overline{PB}^2-2\times\overline{AP}\times\overline{PB}\times\cos 45^\circ\\&=(25\sqrt{2})^2+(25\sqrt{3})^2-2\times25\sqrt{2}\times25\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=1250+1875-1250\sqrt{3}=3125-1250\sqrt{3}\\&=3125-1250\times1.7\ (\because \sqrt{3}=1.7)\\&=1000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AB}&=\sqrt{1000}=10\sqrt{10}\ (\because \overline{AB}>0)\\&=10\times3.1\ (\because \sqrt{10}=3.1)\\&=31(\mathrm{km})\end{aligned}$$

따라서 두 건물 A와 B 사이의 거리는 31 km이다.

답 31 km

02 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABC$에서 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 $\sin B$, $\sin C$, $\cos A$를 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	❶ 단계에서 구한 식을 주어진 식에 대입하여 정리한다.
❸ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 모든 상수 k의 값을 구한 후, 그 합을 구한다.

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

또한, $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 $2\cos A\sin C=(k-1)\sin B$에 대입하면

$$2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{c}{2R}=(k-1)\frac{b}{2R}$$

$b^2+c^2-a^2=(k-1)b^2$

$a^2+(k-2)b^2-c^2=0$

$\triangle ABC$가 직각삼각형이려면 피타고라스 정리를 만족해야 하므로

$k-2=-1$ 또는 $k-2=1$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=3$

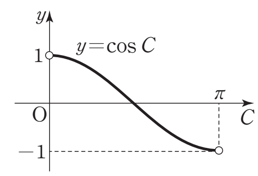
따라서 구하는 합은

$1+3=4$

답 4

03 해결단계

❶ 단계	$0<C<\pi$에서 각 C의 크기가 최대이면 $\cos C$의 값은 최소임을 파악한다.
❷ 단계	$\overline{BC}=x$라 하고, 코사인법칙을 이용하여 $\cos C$를 x에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\cos C$의 최솟값을 구하고, 이때의 x의 값, $\sin C$의 값을 구하여 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.



$0<C<\pi$에서 각 C의 크기가 증가하면 $\cos C$의 값은 감소하므로 각 C의 크기가 최대일 때 $\cos C$는 최솟값을 갖는다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=x\ (x>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C&=\frac{x^2+15^2-12^2}{2\times x\times15}\\&=\frac{x^2+81}{30x}\\&=\frac{x^2}{30x}+\frac{81}{30x}\\&=\frac{x}{30}+\frac{27}{10x}\end{aligned}$$

이때 $x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{x}{30}+\frac{27}{10x}&\ge2\sqrt{\frac{x}{30}\times\frac{27}{10x}}\\&=\frac{3}{5}\left(\text{단, 등호는 }\frac{x}{30}=\frac{27}{10x}\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\cos C$의 최솟값은 $\frac{3}{5}$이고, 이때의 x의 값은

$\frac{x}{30}=\frac{27}{10x}$에서 $x^2=81$

$\therefore\ x=9$

이때 $0<C<\pi$이므로

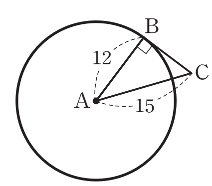
$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\sin C\\&=\frac{1}{2}\times9\times15\times\frac{4}{5}=54\end{aligned}$$

답 54

BLACKLABEL 특강 참고

$\overline{AB}=12$, $\overline{CA}=15$이므로 $\overline{CA}=15$인 선분 AC에 대하여 점 B는 점 A가 중심이고 반지름의 길이가 12인 원 위에 있다.



이때 삼각형 ABC에서 $\angle C$가 최대이려면 점 B는 점 C에서 원에 그은 접선의 접점이어야 하므로 이때의 $\triangle ABC$는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

이때 피타고라스 정리에 의하여

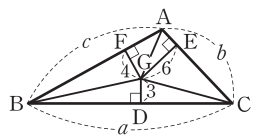
$\overline{BC}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{81}=9$

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times12\times9=54$

04 해결단계

❶ 단계	무게중심의 성질을 이용하여 세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이가 같음을 안다.
❷ 단계	세 삼각형 ABG, BCG, CAG의 넓이를 이용하여 세 변의 길이의 비를 구한다.
❸ 단계	사인법칙을 이용하여 $\sin A:\sin B:\sin C$를 구한 후, $\dfrac{\sin A\sin C}{\sin^2 B}$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로



$\triangle ABG=\triangle BCG=\triangle CAG$

즉, $\dfrac{1}{2}\times4\times c=\dfrac{1}{2}\times3\times a=\dfrac{1}{2}\times6\times b$에서

$4c=3a=6b$

이때 $3a=6b$에서 $a=2b$, $4c=6b$에서 $c=\dfrac{3}{2}b$이므로

$a:b:c=2b:b:\dfrac{3}{2}b=4:2:3$

따라서 $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:2:3$이므로

$\sin A=4k$, $\sin B=2k$, $\sin C=3k\ (k>0)$라 하면

$\dfrac{\sin A\sin C}{\sin^2 B}=\dfrac{4k\times3k}{(2k)^2}=3$

답 3

05 해결단계

❶ 단계	직원뿔의 옆면의 중심각의 크기를 구한다.
❷ 단계	직원뿔의 꼭짓점을 O′이라 할 때, $\overline{OA'}=1$, $\overline{OB'}=2$임을 이용하여 두 점 A, B가 꼭짓점 O′에서부터 모선의 길이를 각각 1 : 2, 2 : 1로 내분하는 점임을 파악한다.
❸ 단계	밑면의 중심 O에서 각각 두 점 A′, B′ 방향으로 반직선을 그려 원과 만나는 점을 C, D라 할 때, $\angle A'OB'=\dfrac{\pi}{2}$임을 이용하여 $\overset{\frown}{CD}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overset{\frown}{CD}$의 길이를 이용하여 $\angle AO'B$의 크기를 구한 후, 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}^2$, 즉 d^2의 값을 구한다.
❺ 단계	두 유리수 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

직원뿔의 옆면의 전개도는 부채꼴이고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 옆면의 중심각의 크기를 θ라 하면

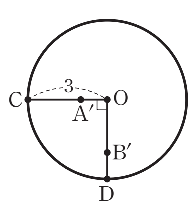
$6\theta=2\pi\times3\qquad\therefore\ \theta=\pi$

이때 밑면 위의 두 점 A′, B′에 대하여 $\overline{OA'}=1$, $\overline{OB'}=2$이고, 밑면의 반지름의 길이는 3이므로 직원뿔의 옆면 위의 두 점 A, B는 각각 직원뿔의 꼭짓점에서부터 모선의 길이를 1 : 2, 2 : 1로 내분하는 점이다.

즉, 직원뿔의 꼭짓점을 O′이라 하면

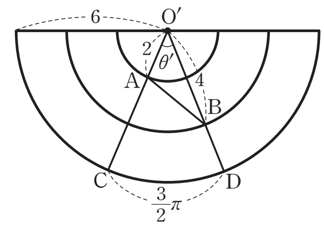
$\overline{O'A}=2$, $\overline{O'B}=4$

한편, 밑면의 중심 O에서 두 점 A′, B′으로 반직선을 각각 그어 원과 만나는 점을 C, D라 하면



$\angle A'OB'=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\angle COD=\dfrac{\pi}{2}$이고, 밑면의 반지름의 길이가 3이므로

$\overset{\frown}{CD}=3\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{2}\pi$



두 점 C, D는 직원뿔의 꼭짓점 O′에서 두 점 A, B를 지나는 직선을 각각 그었을 때, 밑면과 만나는 점이므로 $\angle CO'D=\theta'$이라 하면

$6\theta'=\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\theta'=\dfrac{\pi}{4}$

$\triangle O'AB$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{O'A}^2+\overline{O'B}^2-2\times\overline{O'A}\times\overline{O'B}\times\cos\dfrac{\pi}{4}$

$=2^2+4^2-2\times2\times4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=20-8\sqrt{2}$

따라서 $d^2=20-8\sqrt{2}$이므로 $p=20$, $q=-8$

$\therefore\ p+q=12$

답 12

06 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABC$에서 코사인법칙을 이용하여 넓이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{PF}=x$라 하고 $\triangle ABC$의 넓이를 x에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 $\triangle ABC$의 넓이가 같음을 이용하여 x의 값을 구한다.
❹ 단계	$\triangle EFP$의 넓이를 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$이므로 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$

$=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\dfrac{3}{4}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\ (\because\ 0^\circ<A<180^\circ)$

$\therefore\ \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times6\times5\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

또한, $\overline{PF}=x\ (x>0)$라 하면 $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\left(6\times x+4\times\sqrt{7}+5\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

$=3x+\dfrac{13\sqrt{7}}{4}$

즉, $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}=3x+\dfrac{13\sqrt{7}}{4}$에서

$3x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\qquad\therefore\ x=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

이때 □AFPE에서 $\angle FPE=180^\circ-A$이므로

$\triangle EFP=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PE}\times\sin(\angle FPE)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin(180^\circ-A)$

$=\frac{7}{24}\times\sin A$

$=\frac{7}{24}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{96}$

따라서 $p=96$, $q=7$이므로

$p+q=103$ **답** 103

07 해결단계

❶ 단계	$\triangle PAC$의 넓이가 최대일 때의 점 P의 위치를 파악한다.
❷ 단계	두 삼각형 PAC, ABC에서 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\triangle BAD$에서 사인법칙을 이용하여 외접원의 반지름의 길이를 구하고, 그 넓이를 구한다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대이려면 점 P가 점 B를 포함하지 않는 호 AC와 변 AC의 수직이등분선의 교점이어야 한다.

$\overline{AB}=4\overline{BC}$, $\cos(\angle ABC)=-\frac{7}{32}$이므로

$\cos(\angle CPA)=\cos(\pi-\angle ABC)$

$=-\cos(\angle ABC)=\frac{7}{32}$

$\overline{PA}=\overline{PC}=4$이므로 $\triangle PAC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-2\times\overline{PA}\times\overline{PC}\times\cos(\angle CPA)$

$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{7}{32}$

$=32-7=25$

$\overline{BC}=a\ (a>0)$라 하면 $\overline{AB}=4\overline{BC}=4a$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=(4a)^2+a^2-2\times4a\times a\times\left(-\frac{7}{32}\right)$

$=17a^2+\frac{7}{4}a^2=\frac{75}{4}a^2$

즉, $25=\frac{75}{4}a^2$에서 $a^2=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\because a>0)$

$\angle CDB=30^\circ$이므로 $\angle ADB=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

$\triangle BAD$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}=\frac{4a}{\sin 150^\circ}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\triangle BAD$의 외접원의 넓이는

$\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{64}{3}\pi$

즉, $p=3$, $q=64$이므로

$p+q=67$ **답** 67

08 해결단계

❶ 단계	$4\sin\theta=3\cos\theta$임을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	선분 PA의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\triangle ADC=\triangle PAD+\triangle PDC-\triangle PAC$임을 이용하여 삼각형 ADC의 넓이를 구한다.

$4\sin\theta=3\cos\theta$이므로 $\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}\ (\because 0^\circ<\theta<90^\circ)$

또한, $\overline{AB}=10$, $\angle APB=90^\circ$이므로

$\overline{PA}=10\cos\theta=10\times\frac{4}{5}=8$

따라서 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=8$이고,

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OPA=\angle OAP=\theta$에서

$\angle CPD=\angle APB-\angle OPA=90^\circ-\theta$

$\therefore \triangle ADC=\triangle PAD+\triangle PDC-\triangle PAC$

$=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin\theta$

$+\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin(90^\circ-\theta)-\frac{1}{2}\times8\times8$

$=32\sin\theta+32\cos\theta-32$

$=32\times\frac{3}{5}+32\times\frac{4}{5}-32$

$=\frac{64}{5}$ **답** ③

09 해결단계

❶ 단계	$\triangle ABC$에서 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\triangle ABC$에서 사인법칙을 이용하여 외접원의 지름의 길이를 구한다.
❸ 단계	$\angle EAB=30^\circ$임을 파악한 후, $\triangle AEB$에서 사인법칙을 이용하여 선분 BE의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\triangle AEB$에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AE의 길이를 구한다.

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 120^\circ$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{13}\ (\because \overline{BC}>0)$

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=\frac{\sqrt{13}}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \overline{DE}=2R=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

선분 DE가 원의 지름이므로 $\angle EAD=90^\circ$이고, 선분 AD가 $\angle A$를 이등분하므로

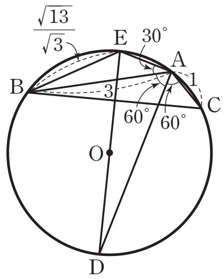
$\angle BAD = \angle CAD = 60°$

$\therefore \angle EAB = 90° - 60° = 30°$

다음 그림과 같이 $\overline{BE}$를 그으면 $\triangle AEB$가 원에 내접하므로 사인법칙에 의하여

$\overline{BE} = 2R \sin(\angle EAB) = 2R \sin 30°$

$= \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$



따라서 $\triangle AEB$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \times \overline{AE} \times \overline{AB} \times \cos 30°$

$\left(\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \overline{AE}^2 + 3^2 - 2 \times \overline{AE} \times 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AE}^2 - 3\sqrt{3}\,\overline{AE} + \dfrac{14}{3} = 0$

$3\overline{AE}^2 - 9\sqrt{3}\,\overline{AE} + 14 = 0$

$(\sqrt{3}\,\overline{AE} - 2)(\sqrt{3}\,\overline{AE} - 7) = 0$

$\therefore \overline{AE} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $\overline{AE} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ ……㉠

그런데 $\triangle AED$는 $\overline{DE} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2 - \overline{AE}^2}$

㉠에서

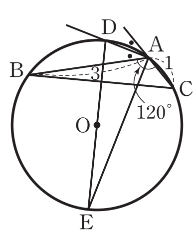
$\overline{AE} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{AD} = 4$, $\overline{AE} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{AD} = 1$

이때 $\overline{AE} < \overline{AD}$이므로

$\overline{AE} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

BLACKLABEL 특강 참고

$\angle A$의 외각의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 D, 점 D와 원의 중심을 지나는 직선이 원과 만나는 점을 E라 하면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $\overline{AE} > \overline{AD}$이므로 $\overline{AE} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$은 주어진 문제에서 $\angle A$의 이등분선을 $\angle A$의 외각의 이등분선으로 바꾸어 생각한 경우이다.

10 해결단계

❶ 단계	$\triangle ECD$에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\triangle ODE$에서 코사인법칙을 이용하여 반원의 반지름의 길이를 구한다.
❸ 단계	두 삼각형 ACD, ACE에서 사인법칙을 이용하여 선분 AC의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overline{AC} \times \overline{CD}$의 값을 구한 후, k의 값을 구한다.

$\angle CEA = 135°$이므로

$\angle CED = 180° - 135° = 45°$

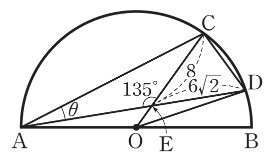
$\triangle ECD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2 = 8^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \times 8 \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 40$

$\therefore \overline{CD} = 2\sqrt{10}$ ($\because \overline{CD} > 0$) ……㉠

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$를 긋고 반원의 반지름의 길이를 R이라 하면



$\overline{OD} = R$, $\overline{OE} = R - 8$

이므로 $\triangle ODE$에서 코사인법칙에 의하여

$R^2 = (R-8)^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \times (R-8) \times 6\sqrt{2} \times \cos 135°$

$= R^2 - 16R + 64 + 72 + 2 \times (R-8) \times 6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$4R = 40$ $\therefore R = 10$

$\triangle ACD$에서 $\angle CAD = \theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin\theta = \dfrac{\overline{CD}}{2R} = \dfrac{2\sqrt{10}}{20} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\triangle ACE$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 135°} = \dfrac{\overline{CE}}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{AC} = \dfrac{8}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{5}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{AC} \times \overline{CD} = 8\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} = 80\sqrt{2}$

$\therefore k = 80$ 답 80

BLACKLABEL 특강 참고

㉠에서 반원의 반지름의 길이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\triangle ECD$에서 $\angle OCD = \alpha$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\alpha = \dfrac{8^2 + (2\sqrt{10})^2 - (6\sqrt{2})^2}{2 \times 8 \times 2\sqrt{10}} = \dfrac{32}{32\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

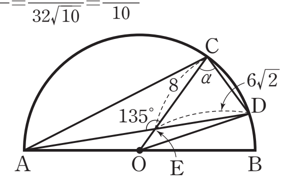
$\overline{OC} = R$이라 하면 $\triangle OCD$에서 코사인법칙에 의하여

$R^2 = R^2 + (2\sqrt{10})^2$

$\quad - 2 \times R \times 2\sqrt{10} \times \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$= R^2 + 40 - 4R$

$4R = 40$ $\therefore R = 10$



11 해결단계

❶ 단계	$\overline{AB}=a$라 하고 $\triangle DAB$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$\triangle BCD$에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$, $\overline{DC}$의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	두 삼각형 ABD, BCD의 넓이를 이용하여 사각형 ABCD의 넓이를 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=a$ $(a>0)$라 하면 $\overline{DA}=2a$

$\triangle DAB$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$\quad=a^2+4a^2+2a^2=7a^2$

$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{7}a$ $(\because\ a>0)$

$\angle ABC=\theta$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin\theta$,

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times\sin(\pi-\theta)$

$\quad=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times\sin\theta$

이때 $\overline{BE}:\overline{ED}=3:4$이므로

$\triangle ABC:\triangle ADC=3:4$

$\overline{BA}\times\overline{BC}:\overline{DA}\times\overline{DC}=3:4$

$a\overline{BC}:2a\overline{DC}=3:4$

$\therefore\ \overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{DC}$

$\overline{DC}=k$ $(k>0)$라 하면 $\overline{BC}=\frac{3}{2}k$이고 $\overline{BD}=\sqrt{7}a$,

$\angle BCD=\frac{\pi}{3}$이므로 $\triangle BCD$에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{7}a)^2=\left(\frac{3}{2}k\right)^2+k^2-2\times\frac{3}{2}k\times k\times\cos\frac{\pi}{3}$

$7a^2=\frac{9}{4}k^2+k^2-\frac{3}{2}k^2$, $7a^2=\frac{7}{4}k^2$

$\therefore\ k=2a$

$\therefore\ \overline{BC}=3a$, $\overline{DC}=2a$

한편, $\triangle DAB$의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$\sqrt{7}a=2\times1\times\sin\frac{\pi}{3}\qquad\therefore\ a=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$\quad=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$\quad=\frac{9\sqrt{3}}{14}$

$\therefore\ \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$\quad=\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{9\sqrt{3}}{14}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$

따라서 $p=7$, $q=6$이므로

$p+q=13$

답 13

12 해결단계

❶ 단계	$\overline{BD}=\overline{CD}=a$, $\overline{AD}=b$라 하고 두 삼각형 DAB, CAD에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AE}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	두 삼각형 ABC, BDC에서 코사인법칙을 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	$\triangle BCD$의 넓이를 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$\angle BAD=\angle CAD$이고, 크기가 같은 원주각에 대한 현의 길이는 같으므로

$\overline{BD}=\overline{CD}$

$\overline{BD}=\overline{CD}=a$, $\overline{AD}=b$, $\angle BAD=\angle CAD=\theta$라 하면

$\triangle DAB$에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=7^2+b^2-2\times7\times b\times\cos\theta$

$\quad=49+b^2-14b\cos\theta$

$\triangle CAD$에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+9^2-2\times b\times9\times\cos\theta$

$\quad=b^2+81-18b\cos\theta$

즉, $49+b^2-14b\cos\theta=b^2+81-18b\cos\theta$에서

$4b\cos\theta=32\qquad\therefore\ b\cos\theta=8$

직각삼각형 ADE에서

$\overline{AE}=b\cos\theta=8$

삼각형 ABE의 넓이가 $7\sqrt{15}$이므로

$\frac{1}{2}\times7\times8\times\sin(\angle BAC)=7\sqrt{15}$

$\therefore\ \sin(\angle BAC)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$0^\circ<\angle BAC<90^\circ$이므로

$\cos(\angle BAC)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAC)}$

$\quad=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=7^2+9^2-2\times7\times9\times\cos(\angle BAC)$

$\quad=130-126\times\frac{1}{4}=\frac{197}{2}$

$\triangle BDC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\cos(180^\circ-\angle BAC)$

$\quad=2a^2-2a^2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{2}a^2$

즉, $\frac{197}{2}=\frac{5}{2}a^2$에서 $a^2=\frac{197}{5}$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin(\angle BDC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{197}{5}\times\sin(180^\circ-\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{197}{5}\times\sin(\angle BAC)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{197}{5}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{197}{40}\sqrt{15}$

따라서 $p=40$, $q=197$이므로

$p+q=237$

답 237

III 수열

08. 등차수열과 등비수열

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.89~91

01 ③	02 ③	03 ⑤	04 12	05 ②
06 ①	07 ④	08 1545	09 ⑤	10 ②
11 ①	12 ③	13 ⑤	14 ②	15 13
16 ②	17 ②	18 64	19 10	20 50만 원
21 ⑤				

01 3과 4의 최소공배수는 12이므로 주어진 수열을 12의 배수가 나올 때마다 한 묶음씩으로 생각하면 다음과 같이 6개씩 항을 묶을 수 있다.
$(3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12),\ (15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 21,\ 24),$
$(27,\ 28,\ 30,\ 32,\ 33,\ 36),\ \cdots$
한 묶음의 항의 개수는 6이고 $101=6\times16+5$이므로 주어진 수열의 제101항은 17번째 묶음의 5번째 항이다.
이때 각 묶음의 마지막 항은 12의 배수이므로 17번째 묶음의 마지막 항은 $12\times17=204$
또한, 각 묶음에서 5번째 항은 마지막 항보다 3만큼 작은 수이다.
따라서 구하는 제101항은
$204-3=201$ 답 ③

02 등차수열 $x,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ y$의 공차를 d_1이라 하면
$y=x+4d_1 \qquad \therefore d_1=\dfrac{y-x}{4}$
등차수열 $x,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ y$의 공차를 d_2라 하면
$y=x+6d_2 \qquad \therefore d_2=\dfrac{y-x}{6}$
$\therefore \dfrac{a_2-a_1}{b_5-b_4}=\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}}=\dfrac{3}{2}\ (\because x\neq y)$ 답 ③

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

문제에서 조건 '$x\neq y$'가 주어진 이유
만약 $x=y$이면 두 등차수열 $x,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ y$와 $x,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ y$의 공차는 모두 0일 수밖에 없다. 이때 b_5-b_4는 수열 $x,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ y$의 공차로, 그 값이 0이면 $\dfrac{a_2-a_1}{b_5-b_4}$의 값은 존재하지 않는다.
따라서 문제에서 구하는 식의 값이 존재하기 위해서는 조건 '$x\neq y$'가 반드시 필요하다.

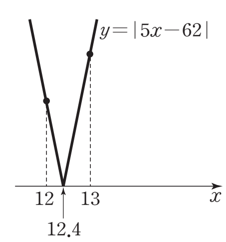
03 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 일반항은
$a_n=a+(n-1)d$
$a_2+a_{10}=68$에서 $(a+d)+(a+9d)=68$
$\therefore 2a+10d=68 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$a_6+a_{15}=122$에서 $(a+5d)+(a+14d)=122$
$\therefore 2a+19d=122 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉡−㉠을 하면
$9d=54 \qquad \therefore d=6$
위의 값을 ㉠에 대입하면
$2a+60=68,\ 2a=8 \qquad \therefore a=4$
$\therefore a_{40}=a+39d=4+39\times6=238$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •
세 수 $a_2,\ a_6,\ a_{10}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$a_6=\dfrac{a_2+a_{10}}{2}=\dfrac{68}{2}=34$
이때 $a_6+a_{15}=122$이므로
$a_{15}=122-a_6=122-34=88$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{15}-a_6=9d=54 \qquad \therefore d=6$
$\therefore a_{40}=a_{15}+25d=88+150=238$

04 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 5이므로 첫째항을 a라 하면
$a_{18}=28$에서 $a+17\times5=28 \qquad \therefore a=-57$
$\therefore a_n=-57+(n-1)\times5=5n-62$
그런데 $a_n>0$이 되는 경우는 $5n-62>0$에서 $5n>62$
$\therefore n>\dfrac{62}{5}=12.4$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 제13항부터 양수이므로
$|a_1|>|a_2|>\cdots>|a_{12}|,\ |a_{13}|<|a_{14}|<\cdots$
이때 $a_{12}=5\times12-62=-2,\ a_{13}=5\times13-62=3$이므로
$|a_{12}|<|a_{13}|$
따라서 $|a_n|$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n의 값은 12이다. 답 12

BLACKLABEL 특강 참고

자연수 n과 12.4의 차가 작을수록 $|a_n|$의 값이 작아지므로 $|a_n|$의 값이 최소이려면 자연수 n의 값이 12, 13 중에 하나이어야 한다. 이때 $|12.4-12|=0.4,\ |12.4-13|=0.6$이므로 구하는 자연수 n의 값은 12이다.



05 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 $\log_2 3$, 제12항이 $\log_2 96$이므로
$\log_2 3+(12-1)\times d=\log_2 96$
$\log_2 3+11d=\log_2 96$
$11d=\log_2 96-\log_2 3=\log_2 \dfrac{96}{3}=\log_2 32=5$

$\therefore d=\frac{5}{11}$

이때 $a_{10}=a_1+(10-1)\times d=a_1+9d$이므로

$a_{10}-a_1=9d=9\times\frac{5}{11}=\frac{45}{11}$ 답 ②

06 $f(x)=x^2-ax+2a$라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 p, q, r이므로 나머지정리에 의하여

$p=f(-1)=(-1)^2-a\times(-1)+2a=3a+1$,

$q=f(1)=1^2-a\times1+2a=a+1$,

$r=f(2)=2^2-a\times2+2a=4$

이때 세 수 p, q, r, 즉 $3a+1$, $a+1$, 4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+1)=(3a+1)+4$, $2a+2=3a+5$

$\therefore a=-3$ 답 ①

07 삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근은 $a-d$, a, $a+d$로 놓을 수 있다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6\qquad\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 방정식에 $x=2$를 대입하면

$8-24-8+k=0\qquad\therefore k=24$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 필수 개념

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

08 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$라 하면

$a_5=a_6-d$, $a_7=a_6+d$

즉, $a_5+a_6+a_7=45$에서

$(a_6-d)+a_6+(a_6+d)=45$

$3a_6=45\qquad\therefore a_6=15$

또한, $a_5a_7=221$에서 $(15-d)(15+d)=221$

$225-d^2=221$, $d^2=4\qquad\therefore d=2$ $(\because d>0)$

즉, $a_6=a_1+5\times2=15$에서 $a_1=5$

따라서 $a_2=5+2=7$, $a_{30}=5+29\times2=63$이므로

$a_1+2a_2+a_3+2a_4+a_5+2a_6+\cdots+a_{29}+2a_{30}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30})$

$=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}+\frac{15(a_2+a_{30})}{2}$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
수열 $\{a_{2n}\}$도 등차수열이다.

$=\frac{30\times(5+63)}{2}+\frac{15\times(7+63)}{2}$

$=1020+525=1545$ 답 1545

09 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6=\frac{6(2a+5d)}{2}=60$에서

$2a+5d=20\qquad\cdots\cdots㉠$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=\frac{12(2a+11d)}{2}=264$에서

$2a+11d=44\qquad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $d=4$

$\therefore a_{16}=a+15d=0+15\times4=60$ 답 ⑤

10 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{30}=116$에서 $a+29d=116\qquad\cdots\cdots㉠$

$a_{50}=56$에서 $a+49d=56\qquad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=203$, $d=-3$ *

$\therefore a_n=203+(n-1)\times(-3)=-3n+206$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 최대가 되려면 a_n의 값이 음수가 되기 바로 전의 항까지 더하면 되므로

$-3n+206\ge0$에서 $n\le\frac{206}{3}=68.6\times\times\times$

따라서 첫째항부터 제68항까지의 합이 최대이므로

조건을 만족시키는 n의 값은 68이다. 답 ②

• 다른 풀이 •

*에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$S_n=\frac{n\{2\times203+(n-1)\times(-3)\}}{2}$

$=-\frac{3}{2}n^2+\frac{409}{2}n$

$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{409}{6}\right)^2+\frac{409^2}{24}$

이때 $\frac{409}{6}=68.1\times\times\times$이고, n은 자연수이므로

$n=68$일 때 S_n은 최대이다.

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 $\frac{3}{7}$이므로

$a_n=\frac{3}{7}+(n-1)\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}n$

이때 a_n이 정수이려면 n이 7의 배수이어야 하므로

$b_1=a_7=3$

$b_2=a_{14}=6$

$b_3=a_{21}=9$

$\vdots$

$\therefore b_n=3n$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times3\}}{2}$$
$$=\frac{n(3n+3)}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$$

$\frac{3n(n+1)}{2}=165$, $n(n+1)=110$

$n^2+n-110=0$, $(n+11)(n-10)=0$

$\therefore n=10$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 10이다.

답 ①

12 $S_n=n^2-2n+4$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1-2+4=3$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n+4)-\{(n-1)^2-2(n-1)+4\}$
$=2n-3$ ……㉠

(i), (ii)에서 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 $a_1=3$이 다르므로

$a_1=3$, $a_n=2n-3$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

ㄱ. $a_2=2\times2-3=1$ (참)

ㄴ. $a_3=2\times3-3=3$, $a_4=2\times4-3=5$이므로

$a_3-a_1=3-3=0$, $a_4-a_2=5-1=4$

$\therefore a_3-a_1\neq a_4-a_2$ (거짓)

ㄷ. $a_n=2n-3>100$에서 $n>51.5$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 52이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

13 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\frac{a_{14}}{a_4}+\frac{a_{15}}{a_5}$$
$$=\frac{a_1r^{10}}{a_1}+\frac{a_1r^{11}}{a_1r}+\frac{a_1r^{12}}{a_1r^2}+\frac{a_1r^{13}}{a_1r^3}+\frac{a_1r^{14}}{a_1r^4}$$
$$=r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}=5r^{10}=20$$

$\therefore r^{10}=4$

$\therefore \frac{a_{40}}{a_{20}}=\frac{a_1r^{39}}{a_1r^{19}}=r^{20}=(r^{10})^2=4^2=16$ 답 ⑤

14 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$7a_n+a_{n+1}=7ar^{n-1}+ar^n$
$=(7a+ar)r^{n-1}$

즉, 수열 $\{7a_n+a_{n+1}\}$의 첫째항은 $7a+ar$, 공비는 r이므로

$7a+ar=18$, $r=2$

$r=2$를 $7a+ar=18$에 대입하면

$9a=18$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2\times2^{n-1}=2^n$이므로

$a_2=2^2=4$ 답 ②

15 첫째항이 $\frac{1}{32}$, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=\frac{1}{32}\times2^{n-1}=2^{-5}\times2^{n-1}=2^{n-6}$이므로

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=2^{-5}\times2^{-4}\times2^{-3}\times\cdots\times2^{n-6}$
$=2^{-5+(-4)+(-3)+\cdots+(n-6)}$ ← 첫째항이 -5, 제n항이 $n-6$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.
$=2^{\frac{n(-5+n-6)}{2}}=2^{\frac{n(n-11)}{2}}$

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n>64$에서

$2^{\frac{n(n-11)}{2}}>64$, $2^{\frac{n(n-11)}{2}}>2^6$

$\frac{n(n-11)}{2}>6$, $n^2-11n-12>0$

$(n+1)(n-12)>0$ $\therefore n>12$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 13이다.

답 13

16 세 수 12, $x-4$, $y-3$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(x-4)=12+(y-3)$

$2x-8=y+9$ $\therefore y=2x-17$ ……㉠

세 수 $10-3x$, $y+9$, 4가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(y+9)^2=(10-3x)\times4$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2x-8)^2=4(10-3x)$

$4x^2-32x+64=40-12x$

$4x^2-20x+24=0$, $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

위의 값을 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$x=2$일 때 $y=-13$, $x=3$일 때 $y=-11$

따라서 xy의 최댓값은 $x=2$, $y=-13$일 때이므로

$xy=-26$ 답 ②

17 주어진 등비수열의 공비를 r $(r>0)$이라 하면 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 제$(n+2)$항이 8이므로

$\frac{1}{2}\times r^{n+1}=8$ $\therefore r^{n+1}=16$ ……㉠ *

이때 모든 항의 곱이 1024, 즉 2^{10}이고

$\frac{1}{2}\times8=a_1a_n=a_2a_{n-1}=\cdots=4$이므로

$4^{\frac{n+2}{2}}=2^{10}$, $2^{n+2}=2^{10}$

$n+2=10$ $\therefore n=8$

이것을 ㉠에 대입하면

$r^9=16$ $\therefore r=2^{\frac{4}{9}}$

따라서 구하는 값은

$$\log_2 a_{n-1}=\log_2 a_7=\log_2\left(\frac{1}{2}r^7\right)=\log_2\left(2^{-1}\times2^{\frac{28}{9}}\right)$$
$$=\log_2 2^{\frac{19}{9}}=\frac{19}{9}$$

답 ②

•다른 풀이•

$*$에서 모든 항의 곱이 1024, 즉 2^{10}이므로

$\frac{1}{2}\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n\times 8=1024$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}r\times\frac{1}{2}r^2\times\frac{1}{2}r^3\times\cdots\times\frac{1}{2}r^n\times 8=1024$

$2^{2-n}\times r^{1+2+3+\cdots+n}=2^{10}$, $r^{\frac{n(n+1)}{2}}=2^{n+8}$

$(r^{n+1})^{\frac{n}{2}}=2^{n+8}$, $16^{\frac{n}{2}}=2^{n+8}$ ($\because$ ㉠)

$2^{2n}=2^{n+8}$, $2n=n+8$ $\quad\therefore n=8$

이것을 ㉠에 대입하면

$r^9=16\quad\therefore \log_2 r=\frac{4}{9}$

$\therefore \log_2 a_{n-1}=\log_2 a_7=\log_2\frac{1}{2}r^7=\log_2(2^{-1}\times r^7)$

$=7\log_2 r-1=7\times\frac{4}{9}-1=\frac{19}{9}$

18 세 모서리의 길이 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r이라 하면

$b=ar$, $c=ar^2$

직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=2(a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a)$

$=2ar(a+ar+ar^2)=160$ $\quad\cdots\cdots$㉠

직육면체의 모든 모서리의 길이의 총합은

$4(a+b+c)=4(a+ar+ar^2)=80$

즉, $a+ar+ar^2=20$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$2ar\times 20=160\quad\therefore ar=4$

따라서 주어진 직육면체의 부피는

$abc=a\times ar\times ar^2$

$=(ar)^3=4^3=64$

답 64

•다른 풀이•

세 모서리의 길이 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2=ac$ $\quad\cdots\cdots$㉡

직육면체의 모든 모서리의 길이의 총합은

$4(a+b+c)=80\quad\therefore a+b+c=20$ $\quad\cdots\cdots$㉢

직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=160\quad\therefore ab+bc+ca=80$

㉡을 위의 식에 대입하면

$ab+bc+b^2=80$

$b(a+b+c)=80\quad\therefore b=4$ ($\because$ ㉢)

따라서 주어진 직육면체의 부피는

$abc=b^3=4^3=64$

19 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2+a_3=21$에서 $a+ar+ar^2=21$

$\therefore a(1+r+r^2)=21$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$a_2+a_4+a_6=126$에서 $ar+ar^3+ar^5=126$

$ar(1+r^2+r^4)=126$ 복이차식의 인수분해

$\therefore ar(1+r+r^2)(1-r+r^2)=126$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡÷㉠을 하면

$r(1-r+r^2)=6$

$r^3-r^2+r-6=0$ $\quad\cdots\cdots$㉢

㉢에 $r=2$를 대입하면 등식이 성립하므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 ㉢의 좌변을 인수분해하면

2	1	-1	1	-6
		2	2	6
	1	1	3	0

$(r-2)(r^2+r+3)=0$

이때 이차방정식 $r^2+r+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times 3=-11<0$, 즉 실근을 갖지 않으므로 방정식 ㉢의 실근은 $r=2$뿐이다.

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$a(1+2+4)=21$, $7a=21\quad\therefore a=3$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k>3000$에서

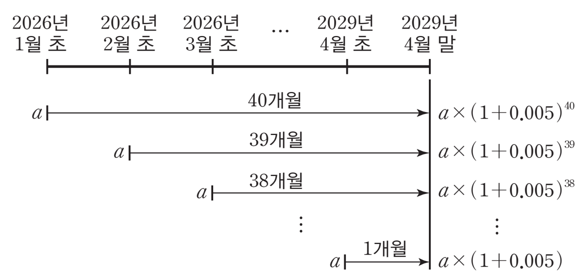
$\frac{3(2^k-1)}{2-1}>3000$, $3(2^k-1)>3000$

$2^k-1>1000$, $2^k>1001$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 10이다.

답 10

20 매월 초에 a만 원씩 적립한다고 하면 a만 원에 대한 2029년 4월 말의 원리합계는 다음과 같다.



2029년 4월 말에 지급받는 총액이 2211만 원이므로

$a\times 1.005+a\times 1.005^2+a\times 1.005^3+\cdots+a\times 1.005^{40}$

$=\frac{a\times 1.005\times(1.005^{40}-1)}{1.005-1}$

$=\frac{a\times 1.005\times(1.22-1)}{0.005}$ ($\because 1.005^{40}=1.22$)

$=a\times 201\times 0.22$

$=44.22\times a=2211$(만 원)

$\therefore a=50$(만 원)

따라서 수현이가 매월 적립해야 하는 금액은 50만 원이다.

답 50만 원

21 $S_n=6\times 3^{n-1}+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=6\times 3^0+k=6+k$ $\quad\cdots\cdots$㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=6\times 3^{n-1}+k-(6\times 3^{n-2}+k)$

$=6\times 3^{n-1}-6\times 3^{n-2}=12\times 3^{n-2}$ $\quad\cdots\cdots$㉡

이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값이 ㉠과 같아야 한다.

즉, $6+k=12\times3^{-1}=12\times\frac{1}{3}=4$이므로

$k=-2$ 답 ⑤

• 다른 풀이 •

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=Ar^n+B$ (A, B는 상수) 꼴일 때, $B=-A$이면 이 수열은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

이때 $S_n=6\times3^{n-1}+k=2\times3^n+k$이므로 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$k=-2$

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.92~98

01 ①	02 34	03 ⑤	04 197	05 24
06 54	07 ②	08 ④	09 36	10 24
11 612	12 ③	13 442	14 ⑤	15 43
16 ②	17 ②	18 ②	19 2225	20 489
21 187	22 ③	23 ①	24 ③	25 15
26 25	27 ④	28 ⑤	29 ⑤	30 $150\sqrt{2}$
31 ②	32 101	33 4	34 8	35 ①
36 ①	37 11	38 $762\sqrt{2}$	39 39	40 ④
41 4				

01 2로 나누어떨어지지 않는 수는 홀수이므로 2로도 3으로도 나누어떨어지지 않는 자연수는 3의 배수가 아닌 홀수이다.

즉, 홀수를 순서대로 3개씩 한 줄에 나열할 때, 오른쪽과 같이 가운데 수는 지워지고 남은 수가 크기순으로 수열 $\{a_n\}$의 항을 이룬다.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \cancel{3} & 5 \\ 7 & \cancel{9} & 11 \\ 13 & \cancel{15} & 17 \\ 19 & \cancel{21} & 23 \\ 25 & \cancel{27} & 29 \\ & \vdots & \end{array}$$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 2개씩 한 줄에 나열되므로 a_{50}의 값은 25번째 줄의 두 번째 수이다.

각 줄의 두 번째 수는 순서대로

1번째 줄 : $5=6\times1-1$

2번째 줄 : $11=6\times2-1$

3번째 줄 : $17=6\times3-1$

$\vdots$

이와 같이 계속되므로 25번째 줄의 두 번째 수는

$a_{50}=6\times25-1=149$ 답 ①

• 다른 풀이 •

$\{a_n\}$: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, …이므로

$a_{n+2}=a_n+6$이 성립한다.

$\therefore a_{50}=a_{48}+6=a_{46}+6\times2=a_{44}+6\times3=\cdots$

$=a_2+6\times24$

$=5+144=149$

02 $(n+6)^2=n^2+12n+36=6(2n+6)+n^2$

이때 $6(2n+6)$은 6의 배수이므로 $(n+6)^2$을 6으로 나누었을 때의 나머지와 n^2을 6으로 나누었을 때의 나머지는 서로 같다.

즉, $a_{n+6}=a_n$이 성립한다.

자연수 $n=1$, 2, 3, …, 6에 대하여

$a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=1$, $a_6=0$

$\therefore a_2=a_8=a_{14}=\cdots=4$, $a_4=a_{10}=a_{16}=\cdots=4$

따라서 $a_n=4$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n은

2, 4, 8, 10, …, 94, 98, 100의 34개이다. 답 34

03 자연수 n이 두 자연수 p, q의 곱으로 표현될 때, 즉 $n=p\times q$일 때, p와 q는 모두 n의 약수이다.

자연수 n의 양의 약수의 개수를 N이라 하면 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) N이 짝수, 즉 $N=2k$ (k는 자연수)일 때,

자연수 n의 약수를 가장 작은 것부터 크기순으로 p_1, p_2, p_3, p_4, …, p_{2k} (k는 자연수)라 하면

$n=p_1\times p_{2k}=p_2\times p_{2k-1}=\cdots$

$=p_{k-1}\times p_{k+2}=p_k\times p_{k+1}$

즉, n을 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수 a_n은

$a_n=k=\frac{N}{2}$

(ii) N이 홀수, 즉 $N=2k-1$ (k는 자연수)일 때,

자연수 n의 약수를 가장 작은 것부터 크기순으로 p_1, p_2, p_3, p_4, …, p_{2k-1} (k는 자연수)이라 하면

$n=p_1\times p_{2k-1}=p_2\times p_{2k-2}=\cdots$

$=p_{k-1}\times p_{k+1}=p_k\times p_k$

즉, n을 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법의 수 a_n은

$a_n=k=\frac{N+1}{2}$

ㄱ. $72=2^3\times3^2$의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)=12$로 짝수이므로 (i)에서

$a_{72}=\frac{12}{2}=6$

$81=3^4$의 약수의 개수는 $4+1=5$로 홀수이므로 (ii)에서

$a_{81}=\frac{5+1}{2}=3$

$\therefore a_{72}+a_{81}=6+3=9$ (참)

ㄴ. $a_n=3$을 만족시키는 자연수 n의 약수의 개수를 m이라 하자.

m이 짝수일 때, (i)에서

$\frac{m}{2}=3 \quad \therefore m=6$

약수의 개수가 6인 자연수 n의 최솟값은

$2^2\times3=12$

m이 홀수일 때, (ii)에서

$\frac{m+1}{2}=3 \quad \therefore m=5$

약수의 개수가 5인 자연수 n의 최솟값은

$2^4=16$

즉, $a_n=3$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 12이다. (거짓)

ㄷ. 두 자연수 m, n이 소수이면 m과 n의 약수의 개수는 모두 2이므로 (i)에 의하여

$a_m=a_n=\frac{2}{2}=1 \qquad \therefore a_m+a_n=2$

① $m=n$일 때,
$mn=m^2$의 약수의 개수는 3으로 홀수이므로 (ii)에 의하여 $a_{mn}=\frac{3+1}{2}=2$

② $m\neq n$일 때,
$m\times n$의 약수의 개수는 $(1+1)\times(1+1)=4$로 짝수이므로 (i)에 의하여 $a_{mn}=\frac{4}{2}=2$

①, ②에서 $a_{mn}=2$
즉, 두 자연수 m, n이 소수이면
$a_m+a_n=a_{mn}=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ⑤

04

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 조건 ㈎에서 $a_2+a_4+a_6=123$이므로
$(a+d)+(a+3d)+(a+5d)=123$
$3(a+3d)=123 \qquad \therefore a+3d=41 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
*조건 ㈏에서 $a_n>116$을 만족시키는 n의 최솟값이 17이므로 $a_{16}\le116$, $a_{17}>116$이다.
$a_{16}\le116$에서 $a+15d\le116$
$(a+3d)+12d\le116$, $41+12d\le116$ ($\because$ ㉠)
$12d\le75 \qquad \therefore d\le\frac{25}{4}=6.25 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
$a_{17}>116$에서 $a+16d>116$
$(a+3d)+13d>116$, $41+13d>116$ ($\because$ ㉠)
$13d>75 \qquad \therefore d>\frac{75}{13}=5.7\times\times\times \qquad \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢에서 $5.7\times\times\times<d\le6.25$
d는 정수이므로
$d=6$
이것을 ㉠에 대입하면 $a=23$이므로
$a_{30}=a+29d$
$=23+29\times6$
$=23+174$
$=197$ **답** 197

• 다른 풀이 •

세 수 a_2, a_4, a_6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a_4=a_2+a_6$
조건 ㈎에서 $a_2+a_4+a_6=123$이므로
$3a_4=123 \qquad \therefore a_4=41$
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_4=a+3d=41$
다음은 *와 같다.

05

선분을 일정한 간격으로 그었으므로 수열 $\{x_n\}$은 등차수열을 이룬다.
이 수열의 공차를 d $(d>0)$라 하면 $x_1=-1$이므로
$x_n=-1+(n-1)d$
$x_7=-1+6d=1$이므로
$6d=2 \qquad \therefore d=\frac{1}{3}$
$\therefore x_n=-1+\frac{1}{3}(n-1)$
$=\frac{1}{3}n-\frac{4}{3}$
이때 각 선분의 연장선과 x축의 교점의 x좌표가 x_n이므로 두 곡선 사이의 선분의 길이를 구하면
$l_n=x_n^2+ax_n+b-x_n^2$
$=\underline{ax_n+b}_*$
$=a\left(\frac{1}{3}n-\frac{4}{3}\right)+b$
$l_{10}=14$이므로 $2a+b=14 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
$l_{13}=18$이므로 $3a+b=18 \qquad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=6$이므로
$ab=24$ **답** 24

단계	채점 기준	배점
㈎	등차수열 $\{x_n\}$의 일반항을 n에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
㈏	수열 $\{l_n\}$의 일반항을 n에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
㈐	주어진 조건을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, ab의 값을 구한 경우	30%

BLACKLABEL 특강 참고 *

등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 n에 대한 일차 이하의 다항식으로 나타낼 수 있다.
등차수열 $\{x_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 p, q라 하면
$x_n=p+(n-1)q$ (단, p, q는 상수)
이때 *에서 $l_n=ax_n+b$이므로
$l_n=a\{p+(n-1)q\}+b=ap+b+(n-1)aq$
즉, 수열 $\{l_n\}$의 일반항을 n에 대한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{l_n\}$도 등차수열이다.

06

조건 ㈏에서 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 각 항에서 3의 배수를 제외시킨 것이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a=3k$ (k는 자연수) 꼴인 경우
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_1, a_4, a_7, $\cdots$이다.
$\therefore \{b_n\}$: a_2, a_3, a_5, a_6, a_8, a_9, $\cdots$
즉, $b_{40}=a_{60}=172$이므로
$a+59\times2=172$
$\therefore a=54$

(ii) $a=3k-1$ (k는 자연수) 꼴인 경우
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_3, a_6, a_9, $\cdots$이다.
$\therefore \{b_n\}$: a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8, $\cdots$

즉, $b_{40}=a_{59}=172$이므로

$a+58\times2=172$

$\therefore a=56$

(iii) $a=3k-2$ (k는 자연수) 꼴인 경우

수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수는 a_2, a_5, a_8, $\cdots$이다.

$\therefore \{b_n\} : a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, a_9, \cdots$

즉, $b_{40}=a_{60}=172$이므로

$a+59\times2=172$

$\therefore a=54$

그런데 $a=3k-2$ 꼴이어야 하므로 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 a의 최솟값은 54이다. 답 54

• 다른 풀이 •

$b_{40}=172$도 수열 $\{a_n\}$의 항이므로 수열 $\{a_n\}$을 172부터 순서를 거꾸로 하여 나열하면

172, 170, 168, 166, 164, 162, 160, 158, 156, $\cdots$

이 중에서 3의 배수를 제외하여 수열 $\{b_n\}$을 172부터 순서를 거꾸로 하여 나열하면

172, 170 / 166, 164 / 160, 158 / $\cdots$

따라서 $b_{n+2}=b_n+6$이므로

$b_{40}=b_2+6\times19$ $\quad\therefore b_2=58$

$\therefore b_1=56$ 또는 $b_1=54$

그런데 b_1은 3의 배수가 될 수 없으므로 $b_1=56$

b_1은 a_1, a_2 중에 하나이므로

$b_1=a_1=56$이면 $a=56$, $b_1=a_2=56$이면 $a=54$

따라서 a의 최솟값은 54이다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

수열 $\{a_n\}$의 세 항마다 하나씩 3의 배수가 지워지고 남은 수들을 크기 순으로 나열한 것이 수열 $\{b_n\}$이므로 지워지는 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

$\{a_n\} : a_1, a_2, a_3 \,/\, a_4, a_5, a_6 \,/\, \cdots \,/\, a_{58}, a_{59}, a_{60} \,/\, \cdots$

(i) $\times, b_1, b_2 \,/\, \times, b_3, b_4 \,/\, \cdots \,/\, \times, b_{39}, b_{40} \,/\, \cdots$

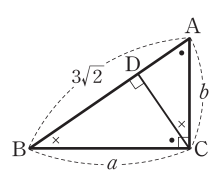
(ii) $b_1, b_2, \times \,/\, b_3, b_4, \times \,/\, \cdots \,/\, b_{39}, b_{40}, \times \,/\, \cdots$

(iii) $b_1, \times, b_2 \,/\, b_3, \times, b_4 \,/\, \cdots \,/\, b_{39}, \times, b_{40} \,/\, \cdots$

즉, (i), (iii)에서 $b_{40}=a_{60}$, (ii)에서 $b_{40}=a_{59}$이다.

07

두 삼각형 ACD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면



$\triangle ABC=\triangle ACD+\triangle CBD$

$=S_1+S_2$

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\triangle CBD=\triangle ACD+\triangle ABC$에서

$2S_2=S_1+(S_1+S_2)$ $\quad\therefore S_2=2S_1$

$\therefore \triangle ACD : \triangle CBD=1:2$

이때 두 삼각형 ACD, CBD는 각각 변 AD와 변 BD를 밑변으로 하고 높이가 서로 같은 삼각형이므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\overline{AD}:\overline{BD}=1:2$이고 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD}=\sqrt{2}$, $\overline{BD}=2\sqrt{2}$

$\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}=4$이므로

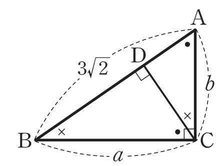
$\overline{CD}=2$ ($\because \overline{CD}>0$)

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2=3\sqrt{2}$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하면 $\triangle ABC$에서 피타고라스 정리에 의하여



$a^2+b^2=(3\sqrt{2})^2$

$\therefore a^2+b^2=18$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$이므로

$\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BC}:\overline{BD}$에서 $3\sqrt{2}:a=a:\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=\dfrac{a^2}{3\sqrt{2}}$

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{CD}$에서 $3\sqrt{2}:b=a:\overline{CD}$

$\therefore \overline{CD}=\dfrac{ab}{3\sqrt{2}}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$에서 $3\sqrt{2}:b=b:\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{b^2}{3\sqrt{2}}$

즉, 세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이는

$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AD}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{ab}{3\sqrt{2}}\times\dfrac{b^2}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{36}ab^3$

$\triangle CBD=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{3\sqrt{2}}\times\dfrac{ab}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{36}a^3b$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}$

$=\dfrac{1}{2}ab$

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times\dfrac{1}{36}a^3b=\dfrac{1}{36}ab^3+\dfrac{1}{2}ab$

그런데 $a>0$, $b>0$에서 $ab\neq0$이므로 양변에 $\dfrac{36}{ab}$을 곱하면

$2a^2=b^2+18$

$\therefore b^2=2a^2-18$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3a^2-18=18$, $3a^2=36$

$a^2=12$ $\quad\therefore a=2\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

위의 값을 ㉡에 대입하면

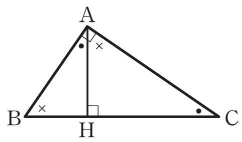
$b^2=2\times12-18=6$ $\quad\therefore b=\sqrt{6}$ ($\because b>0$)

$\therefore \triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

직각삼각형의 닮음의 응용

$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,



(1) $\triangle ABC \backsim \triangle HBA$에서
$\overline{AB} : \overline{BH} = \overline{BC} : \overline{AB}$
$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle HAC$에서
$\overline{CB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CH} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$

(3) $\triangle HBA \backsim \triangle HAC$에서
$\overline{BH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{CH} \Rightarrow \overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$

08

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 수 a_5, a_7, a_9가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_7 = a_5 + a_9$

조건 (가)에서 $a_5+a_7+a_9=-6$이므로

$3a_7=-6 \qquad \therefore a_7=-2$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d (d는 정수)라 하면 조건 (나)에서
모든 항이 정수이므로 공차도 정수이다.

$a_l + a_m = 6$이므로

$a_7+(l-7)d+a_7+(m-7)d=6$

$2a_7+(l+m-14)d=6$

$-4+(l+m-14)d=6 \ (\because a_7=-2)$

$\therefore (l+m-14)d=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 조건 (나)에서 $a_l+a_m=6$을 만족시키는 두 자연수 l, m에 대하여 $l+m$의 값은 일정하다.

$l+m=t$로 놓으면 조건을 만족시키는 l, m의 순서쌍 (l, m)의 개수가 9이므로 순서쌍 (l, m)은

$(1, t-1), (2, t-2), (3, t-3), \cdots, (9, t-9)$

$l<m$이므로 $9<t-9$에서 $t>18$

순서쌍 $(10, t-10)$은 조건을 만족시키지 않으므로

$10 \ge t-10$에서 $t \le 20$

$\therefore 18 < t \le 20$

$\therefore t=19$ 또는 $t=20$

(i) $t=19$, 즉 $l+m=19$일 때,

㉠에 대입하면

$5d=10 \qquad \therefore d=2$

이때 $a_n=a_7+(n-7)d$이므로

$a_n=2n-16$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수인 조건을 만족시킨다.

(ii) $t=20$, 즉 $l+m=20$일 때,

㉠에 대입하면

$6d=10 \qquad \therefore d=\dfrac{5}{3}$

그런데 d는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$a_n=2n-16$이므로

$a_{20}=2\times 20-16=24$ 답 ④

09

조건 (가)의 $a+b-ab<1$에서

$ab-a-b+1>0$, $a(b-1)-(b-1)>0$

$\therefore (a-1)(b-1)>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+2$에서

$f(a-2)=\dfrac{1}{a-1}+2$, $f(0)=3$, $f(b-2)=\dfrac{1}{b-1}+2$

조건 (나)에서 세 수 $\dfrac{1}{a-1}+2$, 3, $\dfrac{1}{b-1}+2$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times 3=\dfrac{1}{a-1}+2+\dfrac{1}{b-1}+2$

$6=4+\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}$

$\therefore \dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

이때 ㉠, ㉡에 의하여

$a-1>0$, $b-1>0$

$A=a-1$, $B=b-1$로 놓으면

* $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=2$, $A>0$, $B>0$

$2a+18b=2(A+1)+18(B+1)$
$\qquad =2A+18B+20$

$2A+18B=\underbrace{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)}_{\frac{1}{2}\times 2=1}(2A+18B)$

$\qquad =\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{18B}{A}+\dfrac{2A}{B}+20\right)$

$\qquad =\dfrac{9B}{A}+\dfrac{A}{B}+10$

이때 $\dfrac{B}{A}>0$, $\dfrac{A}{B}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{9B}{A}+\dfrac{A}{B}+10 \ge 2\sqrt{\dfrac{9B}{A}\times\dfrac{A}{B}}+10=16$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{9B}{A}=\dfrac{A}{B}\text{, 즉 } A^2=9B^2\text{일 때 성립}\right)$

즉, $2A+18B \ge 16$이므로

$2a+18b=2A+18B+20 \ge 36$

따라서 $2a+18b$의 최솟값은 36이다. 답 36

• 다른 풀이 •

*에서 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{A}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\right\}\{(\sqrt{2A})^2+(\sqrt{18B})^2\} \ge (\sqrt{2}+\sqrt{18})^2$
$\qquad =32$

$\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)(2A+18B) \ge 32$

$2A+18B \ge 16 \ \left(\because \dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=2\right)$

(단, 등호는 $\sqrt{2}A=\sqrt{18}B$, 즉 $A=3B$일 때 성립)

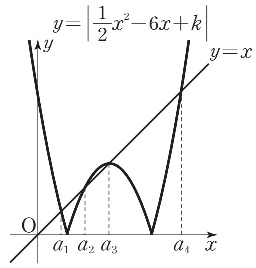
$A=a-1$, $B=b-1$을 이 부등식에 대입하면

$2(a-1)+18(b-1) \ge 16$

$\therefore 2a+18b \ge 36$

따라서 $2a+18b$의 최솟값은 36이다.

10 함수 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6x+k\right|$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 네 점에서 만나므로 두 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-6x+k=x$, 즉 $x^2-14x+2k=0$의 서로 다른 두 실근이 a_1, a_4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_4=14$ ……㉠, $a_1a_4=2k$ ……㉡

또한, 이차방정식 $-\frac{1}{2}x^2+6x-k=x$, 즉 $x^2-10x+2k=0$의 서로 다른 두 실근이 a_2, a_3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_2+a_3=10$ ……㉢, $a_2a_3=2k$ ……㉣

한편, 세 수 a_1, a_2, a_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_2=a_1+a_3$

㉠, ㉢에서 $a_1=14-a_4$, $a_3=10-a_2$이고 이것을 위의 식에 대입하면

$2a_2=14-a_4+10-a_2$

$3a_2=24-a_4$　　$\therefore a_2=8-\frac{1}{3}a_4$

㉡, ㉣에서 $a_1a_4=a_2a_3=2k$이므로

$a_1a_4=a_2a_3$에서

$(14-a_4)\times a_4=a_2\times(10-a_2)$

$(14-a_4)\times a_4=\left(8-\frac{1}{3}a_4\right)\times\left(2+\frac{1}{3}a_4\right)$

$-a_4{}^2+14a_4=-\frac{1}{9}a_4{}^2+2a_4+16$

$\frac{8}{9}a_4{}^2-12a_4+16=0$, $2a_4{}^2-27a_4+36=0$

$(2a_4-3)(a_4-12)=0$

$\therefore a_4=\frac{3}{2}$ 또는 $a_4=12$

이때 $a_1<a_4$에서 $14-a_4<a_4$, 즉 $a_4>7$이어야 하므로

$a_4=12$　　$\therefore a_1=2$ ($\because$ ㉠)

㉡에서

$a_1a_4=2\times12=24=2k$

$\therefore k=12$

$\therefore k+a_4=12+12=24$　　**답** 24

11 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=-4$에서 $a+2d=-4$ ……㉠

$a_9=44$에서 $a+8d=44$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-20$, $d=8$

$\therefore a_n=-20+(n-1)\times8$

$=8n-28$

이때 $a_n<0$, 즉 $8n-28<0$에서

$n<3.5$

따라서 $n\le3$이면 $a_n<0$이고, $n\ge4$이면 $a_n>0$이다.

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$

$=-(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+\cdots+a_{15})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})-2(a_1+a_2+a_3)$

$=\frac{15\{2\times(-20)+(15-1)\times8\}}{2}-2\times(-20-12-4)$

$=540+72=612$　　**답** 612

12 ㄱ. $S_{14}=S_{28}$에서

$a_1+a_2+\cdots+a_{14}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{14})+(a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{28})$

$\therefore a_{15}+a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{28}=0$ (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$\underline{a_{15}+a_{28}=a_{16}+a_{27}=\cdots=a_{19}+a_{24}=\cdots=a_{21}+a_{22}}$

공차를 d라 하면 모두 $2a_1+41d$이다.

즉, ㄱ에서 $7(a_{19}+a_{24})=0$이므로

$a_{19}+a_{24}=0$　　$\therefore a_{19}=-a_{24}$

$\therefore |a_{19}|=|a_{24}|$ (참)

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 ㄴ에서

$a_{19}+a_{24}=0$이므로

$a_1+18d+a_1+23d=0$, $2a_1=-41d$

$\therefore a_1=-\frac{41}{2}d$

이때 $a_1>0$이므로 $d<0$이고,

$a_n=-\frac{41}{2}d+(n-1)d=d\left(n-\frac{43}{2}\right)$

S_n의 값이 최대가 되는 것은 $a_n\ge0$인 항만을 모두 더했을 때이므로

$d\left(n-\frac{43}{2}\right)\ge0$　　$\therefore n\le21.5$ ($\because d<0$)

즉, $n=21$일 때, S_n은 최댓값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.　　**답** ③

13 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{11}+a_{21}=82$에서 $2a_{16}=82$

$a_{16}=41$　　$\therefore a+15d=41$ ……㉠

$a_{11}-a_{21}=6$에서 $(a+10d)-(a+20d)=6$

$-10d=6$　　$\therefore d=-\frac{3}{5}$

위의 값을 ㉠에 대입하면

$a+15\times\left(-\frac{3}{5}\right)=41$

$a-9=41$　　$\therefore a=50$

$\therefore a_n=50+(n-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)$ ……㉡

이때 집합 A의 원소 a_n의 값은 자연수이므로

$50+(n-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)>0$, $n-1<\frac{250}{3}$

$\therefore n<\frac{253}{3}=84.3\times\times\times$

또한, a_n의 값이 자연수가 되려면 ㉡에서 $n-1$의 값은 0 또는 5의 배수이어야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 n의 값은 1, 6, 11, …, 81의 17개이다.

따라서 수열 $a_1, a_6, a_{11}, \cdots, a_{81}$은 첫째항이 50이고,
공차는 $5d=-3$이다.
제17항이 $a_{81}=50+(81-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=2$인 등차수열이므로 그 합은

$\frac{17\times(50+2)}{2}=442$ 답 442

14 ㄱ. $T_4=a_1-a_2+a_3-a_4$

$=-(a_2-a_1)-(a_4-a_3)$

$=-d-d=-2d$ (거짓)

ㄴ. $T_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5$

$=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)$

$=a_1+d+d$

$=a_1+2d=a_3$ (참)

ㄷ. $T_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n$이므로

$T_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{2n-2}a_{2n-1}+(-1)^{2n-1}a_{2n}$

$=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}$

$T_{2(n-1)}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{2(n-1)-1}a_{2(n-1)}$

$=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2n-2}$

$\therefore T_{2n}-T_{2(n-1)}=a_{2n-1}-a_{2n}=-d$

즉, 수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

• 다른 풀이 •

n의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) n이 짝수일 때,

$T_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)$

$=-d\times\frac{n}{2}$

$=-\frac{dn}{2}$

(ii) n이 홀수일 때,

$T_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})+a_n$

$=-d\times\frac{n-1}{2}+a_1+(n-1)d$

$=a_1+\frac{n-1}{2}\times d$

ㄱ. (i)에 $n=4$를 대입하면 $T_4=-2d$ (거짓)

ㄴ. (ii)에 $n=5$를 대입하면 $T_5=a_1+2d=a_3$ (참)

ㄷ. $2n$은 짝수이므로 (i)에 의하여

$T_{2n}=-\frac{d\times 2n}{2}=-dn$

이때 수열 $\{T_{2n}\}$의 일반항 T_{2n}이 n에 대한 일차식이므로 수열 $\{T_{2n}\}$은 등차수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

ㄷ에서

$T_2=a_1-a_2=-d$

$T_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)=-2d$

$T_6=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)=-3d$

⋮

즉, 수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다.

15 $S_{17}=S_{18}$이므로 $S_{18}-S_{17}=0$ $\therefore a_{18}=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 34이므로

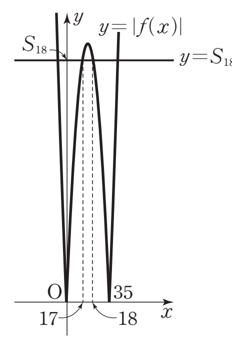
$a_{18}=34+(18-1)\times d=0$

$17d=-34$ $\therefore d=-2$

$\therefore S_n=\frac{n\{2\times 34+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n(n-35)$ ……㉠

$f(x)=-x(x-35)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 자연수 n에 대하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(i) $1\le n\le 35$일 때,

$f(18)\ge|f(n)|$

즉, $1\le n\le 35$인 자연수 n에 대하여 $|S_n|>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $n>35$일 때,

$|S_n|>S_{18}$이려면 $-S_n>S_{18}$이어야 한다.

이때 ㉠에 의하여 $S_{18}=-18\times(18-35)=306$이므로

$n(n-35)>306$이 성립해야 한다.

이때 $n=42$이면 $n(n-35)=42\times 7=294$이고

$n=43$이면 $n(n-35)=43\times 8=344$이므로

$-S_n>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다.

(i), (ii)에서 $|S_n|>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다. 답 43

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$m=n-17.5$라 하면 $n(n-35)>306$에서

$(m+17.5)(m-17.5)>306$, $m^2-306.25>306$

$m^2>612.25$

$24^2=576$, $25^2=625$이므로

$m>24.\times\times\times$, 즉 $n>17.5+24.\times\times\times$라 할 수 있다.

따라서 위의 부등식에 $n=42$, $n=43$ 등을 대입하여 부등식이 성립하는지 판단하면 된다.

16 공차가 양수인 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$에 대하여 조건 (나), (다)에서 첫째항부터 제m항까지의 합은

$\frac{m(a_1+a_m)}{2}=90+72=162$

$\therefore m(a_1+a_m)=324$ ……㉠

홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크므로 m은 홀수이고, 자연수 1, 2, 3, …, m 중에서 홀수는

$\frac{m+1}{2}$개, 짝수는 $\frac{m-1}{2}$개이다.
조건 (나)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_m=90$이므로

$$\frac{\frac{m+1}{2}(a_1+a_m)}{2}=90$$

$\therefore (m+1)(a_1+a_m)=360$ ……㉡
㉡$-$㉠을 하면
$a_1+a_m=36$
이것을 ㉠에 대입하여 정리하면
$m=9$
$\therefore a_1+a_m+m=36+9=45$ 답 ②

17 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열이므로
$a_n=30-(n-1)d$
$\therefore a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}$

$$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$$
$$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2}=0$$

이때 $k+1>0$이므로
$60-(2m+k-2)d=0$
$(2m+k-2)d=60$ $\therefore 2m+k=2+\frac{60}{d}$
그런데 m, k가 자연수이므로 위의 식을 만족시키는 d는 60의 약수이어야 한다.
따라서 $60=2^2\times3\times5$이므로 d의 개수는
$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}=0$, 즉 등차수열의 연속하는 $(k+1)$개의 항의 합이 0이므로 k의 값에 따라 수열 a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, $\cdots$, a_{m+k}를 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(i) $k+1$이 홀수일 때,
$\cdots$, d, 0, $-d$, $\cdots$
이때 첫째항이 30이고 공차가 $-d$인 등차수열에서 항의 값이 0이 되려면 d는 30의 양의 약수가 되어야 하므로
$d=1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$
(ii) $k+1$이 짝수일 때,
$\cdots$, $\frac{d}{2}$, $-\frac{d}{2}$, $\cdots$
이때 $a_n=30-(n-1)d$이므로
$30-(n-1)d=\frac{d}{2}$에서 $(n-1)d=-\frac{d}{2}+30$
$n-1=-\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$ $\therefore n=\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$
그런데 n은 자연수이므로
$d=4, 12, 20, 60$
(i), (ii)에서 구하는 d의 개수는 $8+4=12$이다.

18 해결단계

❶ 단계	$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$, $\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\cdots+\lvert a_9\rvert$의 값을 구한다.
❷ 단계	$n\le4$일 때 $a_n\le0$, $n\ge5$일 때 $a_n>0$임을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 구한다.
❸ 단계	$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}$의 값을 구한다.

세 수 a_1, a_5, a_9가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2a_5=a_1+a_9$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=\frac{9\times(a_1+a_9)}{2}$$
$$=9a_5 \quad \cdots\cdots㉠$$

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)(\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\cdots+\lvert a_9\rvert)$
$=189$에서
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9\le\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\cdots+\lvert a_9\rvert$
이고, $189=3^3\times7$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=9$, ← ㉠에서 $a_1+a_2+\cdots+a_9$의 값은 9의 배수
$\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\cdots+\lvert a_9\rvert=21$
㉠에서 $9a_5=9$ $\therefore a_5=1$
등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이고, 공차가 자연수이므로
$n\le4$일 때 $a_n\le0$, $n\ge5$일 때 $a_n>0$
$\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\lvert a_3\rvert+\cdots+\lvert a_9\rvert$
$=-a_1-a_2-a_3-a_4+a_5+\cdots+a_9$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)-2(a_1+a_2+a_3+a_4)$
$=9-2(a_1+a_2+a_3+a_4)=21$
$2(a_1+a_2+a_3+a_4)=-12$
$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=-6$
이때 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$(a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)=-6$
$(1-4d)+(1-3d)+(1-2d)+(1-d)=-6$
$4-10d=-6$, $10d=10$ $\therefore d=1$
$a_5=1$에서 $a_1+4=1$ $\therefore a_1=-3$
따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -3이고 공차가 1이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=\frac{18\times(-6+17\times1)}{2}$$
$$=99$$

답 ②

19 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열하면 2, 5, 8, …이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이다.
$\therefore a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$
또한, 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열하면 3, 7, 11, …이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이다.
$\therefore b_n=3+(n-1)\times4=4n-1$
이때 $a_p=b_q$에서 $3p-1=4q-1$, 즉 $3p=4q$이고 3과 4는 서로소이므로 자연수 k에 대하여 $p=4k$, $q=3k$로 나타낼 수 있다.
100 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 조건을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는 $(4, 3)$, $(8, 6)$, $(12, 9)$, $\cdots$, $(100, 75)$의 25개이므로 $m=25$

$\therefore (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_m+b_m)$

$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_{25}+b_{25})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{25})$

$=\dfrac{25\times(2+74)}{2}+\dfrac{25\times(3+99)}{2}$

$=950+1275=2225$ 답 2225

20 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=24$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{10^2+24^2}=26$

$\therefore \overline{AC}:\overline{CB}:\overline{AB}=5:12:13$

점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 세 직각삼각형 ABC, ACH, CBH는 모두 닮음이므로

$\overline{AH}=\overline{CA}\times\dfrac{5}{13}=10\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{50}{13}$

$\overline{CH}=\overline{CA}\times\dfrac{12}{13}=10\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{120}{13}$

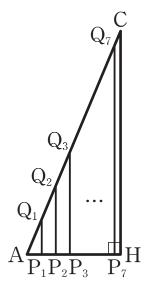
$\dfrac{7}{2}<\overline{AH}<4$, $\overline{P_nP_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$이므로

점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_7은 선분 AH 위에 있고,

점 P_8, P_9, P_{10}, $\cdots$, P_{51}은 선분 BH 위에 있다.

$n\le 7$일 때,

두 직각삼각형 CAH, Q_nAP_n이 서로 닮음이고, $\overline{AP_n}=\dfrac{n}{2}$이므로



$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{AP_n}:\overline{P_nQ_n}$

즉, $\dfrac{n}{2}:\overline{P_nQ_n}=5:12$에서

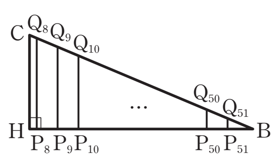
$5\overline{P_nQ_n}=6n \qquad \therefore \overline{P_nQ_n}=\dfrac{6}{5}n$

따라서 수열 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\cdots$, $\overline{P_7Q_7}$은 첫째항이 $\dfrac{6}{5}$, 공차가 $\dfrac{6}{5}$인 등차수열이고, 항의 개수는 7이므로

$S=\dfrac{7\left(2\times\dfrac{6}{5}+6\times\dfrac{6}{5}\right)}{2}=\dfrac{168}{5}$

$n\ge 8$일 때,

두 직각삼각형 CHB, Q_nP_nB가 서로 닮음이고 $\overline{AP_n}+\overline{BP_n}=26$에서



$\overline{BP_n}=26-\overline{AP_n}=26-\dfrac{n}{2}$이므로

$\overline{CH}:\overline{BH}=\overline{P_nQ_n}:\overline{BP_n}$

즉, $5:12=\overline{P_nQ_n}:\left(26-\dfrac{n}{2}\right)$에서

$12\overline{P_nQ_n}=5\left(26-\dfrac{n}{2}\right)$

$\therefore \overline{P_nQ_n}=\dfrac{5}{12}\left(26-\dfrac{n}{2}\right)=-\dfrac{5n}{24}+\dfrac{65}{6}$

따라서 수열 $\overline{P_8Q_8}$, $\overline{P_9Q_9}$, $\overline{P_{10}Q_{10}}$, $\cdots$, $\overline{P_{51}Q_{51}}$은 첫째항이 $\dfrac{55}{6}$, 공차가 $-\dfrac{5}{24}$인 등차수열이고, 항의 개수는 44이므로

$T=\dfrac{44\left\{2\times\dfrac{55}{6}+43\times\left(-\dfrac{5}{24}\right)\right\}}{2}=\dfrac{825}{4}$

$\therefore 4T-10S=825-336=489$ 답 489

21 해결단계

❶ 단계	S_n, T_n을 이용하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$의 일반항을 구한다.
❷ 단계	❶단계를 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.
❸ 단계	수열 $\{a_n+b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구한다.

$S_n=n^2+1$에서

(i) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+1)-\{(n-1)^2+1\}$

$=2n-1$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+1=2$

$T_n=\dfrac{n(4n^2+21n-1)}{6}+6$에서

(iii) $n\ge 2$일 때,

$a_nb_n=T_n-T_{n-1}$

$=\left\{\dfrac{n(4n^2+21n-1)}{6}+6\right\}$

$\quad-\left[\dfrac{(n-1)\{4(n-1)^2+21(n-1)-1\}}{6}+6\right]$

$=\dfrac{12n^2+30n-18}{6}$

$=2n^2+5n-3$

$=(2n-1)(n+3)$

(iv) $n=1$일 때,

$a_1b_1=T_1=\dfrac{4+21-1}{6}+6=4+6=10$

(i)~(iv)에서

$a_1=2$, $a_n=2n-1$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

$b_1=5$, $b_n=n+3$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_{10}+b_{10})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$

$=(2+3+5+7+\cdots+19)+(5+5+6+7+\cdots+13)$

$=2+\dfrac{9\times(3+19)}{2}+5+\dfrac{9\times(5+13)}{2}$

$=2+99+5+81=187$ 답 187

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 수열 $\{a_nb_n\}$이나 $\{a_n+b_n\}$을 다루는 점에서 조금은 생소한 문제이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)이므로 일반항 $a_n=f(n)$을 구할 수 있다. 이때 $S_0=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 $a_n=f(n)$이지만 $S_0\neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 $a_n=f(n)$이다.

22 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_3=ar^2<0$이므로 $a\neq 0$, $r\neq 0$

이때 $a_2a_7=2a_5$에서

$ar\times ar^6=2ar^4$

$a^2r^7=2ar^4$, $ar^3=2$　　$\therefore a_4=2$

$a_3<0$, $a_4>0$에서 $r<0$이므로 $a_5<0$

$a_3+|a_4|+|6a_5|=0$에서

$a_3+a_4-6a_5=0$

$a_3+a_3r-6a_3r^2=0$, $1+r-6r^2=0$ ($\because a_3\neq 0$)

$(1+3r)(1-2r)=0$

$\therefore r=-\dfrac{1}{3}$ ($\because r<0$)

위의 값을 $a_4=2$, 즉 $ar^3=2$에 대입하여 풀면

$a\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=2$, $-\dfrac{a}{27}=2$

$\therefore a=-54$

따라서 $a_2=ar=(-54)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=18$, $a_1=a=-54$이므로

$a_2-a_1=18-(-54)=72$　　답 ③

23 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1+a_3=12$에서 $a+ar^2=12$　　……㉠

$a_1+a_3+a_5+a_7=15$에서

$12+a_5+a_7=15$

즉, $a_5+a_7=3$에서

$ar^4+ar^6=3$　　$\therefore r^4(a+ar^2)=3$　　……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12r^4=3$　　$\therefore r^4=\dfrac{1}{4}$

이때 모든 항이 실수이므로 $r^2=\dfrac{1}{2}$　　……㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a+\dfrac{1}{2}a=12$, $\dfrac{3}{2}a=12$　　$\therefore a=8$

$\therefore a_1a_2a_3a_4=a\times ar\times ar^2\times ar^3=a^4r^6=a^4(r^2)^3$

$=8^4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{2^{12}}{2^3}=2^9$　　답 ①

24 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=br^{n-1}$

$a_nb_n=\dfrac{(a_{n+1})^2+4(b_{n+1})^2}{5}$에서

$ar^{n-1}\times br^{n-1}=\dfrac{(ar^n)^2+4(br^n)^2}{5}$

$abr^{2n-2}=\dfrac{a^2r^{2n}+4b^2r^{2n}}{5}$

$(a^2+4b^2)r^2=5ab$ ($\because r>0$)

$\therefore r^2=\dfrac{5ab}{a^2+4b^2}=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}$　　……㉠

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\dfrac{a}{b}>0$, $\dfrac{4b}{a}>0$이고 산술평균과

모든 항이 양수이므로 $a>0$, $b>0$, $r>0$

기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{4b}{a}}=4$

(단, 등호는 $a^2=4b^2$일 때 성립)

$\therefore r^2=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}\leq\dfrac{5}{4}$ ($\because$ ㉠)

따라서 공비 r의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다.　　답 ③

25 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d ($d\neq 0$)라 하면

$a_2=a+d$, $a_4=a+3d$, $a_9=a+8d$　　……㉠

이고, 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)$

$a^2+6ad+9d^2=a^2+9ad+8d^2$

$d^2-3ad=0$, $d(d-3a)=0$

$\therefore d=3a$ ($\because d\neq 0$)

이것을 ㉠에 각각 대입하여 정리하면

$a_2=4a$, $a_4=10a$, $a_9=25a$

$\therefore r=\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{10a}{4a}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore 6r=6\times\dfrac{5}{2}=15$　　답 15

26 [그림 2]에서 b는 3과 1의 최소공배수이므로 3이고, c는 1과 4의 최소공배수이므로 4이다.

이때 e와 12의 최대공약수가 $b=3$이므로

$e=3k$ (k는 자연수)라 하면 k와 4는 서로소이다.

또한, f와 12의 최대공약수가 $c=4$이므로

$f=4l$ (l은 자연수)이라 하면 l과 3은 서로소이다.

한편, e, 12, f가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$12^2=ef$에서

$144=3k\times 4l=12kl$　　$\therefore kl=12$

이때 k, l은 각각 4, 3과 서로소인 자연수이므로

$k=3$, $l=4$

$\therefore e=3\times 3=9$, $f=4\times 4=16$

$\therefore e+f=25$　　답 25

27 $x=n+a$ (n은 양의 정수, $0<a<1$)라 하면

$[x]=n$, $x-[x]=(n+a)-n=a$

이때 세 수 $x-[x]$, $[x]$, x, 즉 a, n, $n+a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$n^2=a(n+a)$, $a^2+na-n^2=0$

$\therefore a=\dfrac{-n+\sqrt{5n^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}n$ ($\because n>0$, $0<a<1$)

……㉠

이때 $0<a<1$이므로

$0<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}n<1$

$0<n<\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1.\times\times\times$

$\therefore n=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x-[x]=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 답 ④

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

양의 실수 x의 정수 부분을 n, 소수 부분을 a라 하면
$x=n+a$ (단, n은 0 또는 양의 정수이고, $0\le a<1$)
(i) $n=0$, $a=0$일 때,
$x=0$이므로 x는 양의 실수라는 조건에 모순이다.
(ii) $n=0$, $a\neq 0$일 때,
$x=a$, $[x]=0$이므로 $x-[x]$, $[x]$, x는 a, 0, a이고, 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.
(iii) $n\neq 0$, $a=0$일 때,
$x=n$, $[x]=n$이므로 $x-[x]$, $[x]$, x는 0, n, n이고, 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $n\neq 0$, $a\neq 0$이므로
$x=n+a$ (단, n은 양의 정수, $0<a<1$)

28 조건 ㈏에서 $\dfrac{d}{a}=\dfrac{e}{d}$, 즉 $d^2=ae$이므로 a, d, e 또는 e, d, a는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

또한, 조건 ㈐에서 $a=kd$, $b=\dfrac{e}{k}$이므로

$k=\dfrac{a}{d}=\dfrac{e}{b}$ $\qquad\therefore ab=de$

조건 ㈏에서 (a, d, e) 또는 (e, d, a)의 순서대로 등비수열을 이루므로 (a, e, d, b), (b, d, e, a), (d, a, b, e), (d, b, a, e), (e, a, b, d), (e, b, a, d)의 경우는 생각하지 않는다.

따라서 a, d, e, b 또는 b, e, d, a는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

조건 ㈎에서 $a<c$이므로 a, d, e, b, c 또는 b, e, d, a, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 이때의 c는 제5항이다.

$\therefore n=5$ 답 ⑤

29 이차방정식 $px^2+2qx+r=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=q^2-pr$ ……㉠

ㄱ. p^2, q^2, r^2이 이 순서대로 등차수열을 이루면

$q^2=\dfrac{p^2+r^2}{2}$

㉠에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\frac{p^2+r^2}{2}-pr\\&=\frac{p^2-2pr+r^2}{2}\\&=\frac{(p-r)^2}{2}\end{aligned}$$

이때 p, r은 서로 다른 양수이므로 $\dfrac{(p-r)^2}{2}>0$

즉, $\dfrac{D}{4}>0$이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{q}$, $\dfrac{1}{r}$이 이 순서대로 등비수열을 이루면

$\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1}{pr}$ $\qquad\therefore q^2=pr$

㉠에서 $\dfrac{D}{4}=pr-pr=0$

즉, $\dfrac{D}{4}=0$이므로 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다. (참)

ㄷ. $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{q}$, $\dfrac{1}{r}$이 이 순서대로 등차수열을 이루면

$\dfrac{2}{q}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{p+r}{pr}$

$q=\dfrac{2pr}{p+r}$ $\qquad\therefore q^2=\dfrac{4p^2r^2}{(p+r)^2}$

㉠에서

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\frac{4p^2r^2}{(p+r)^2}-pr\\&=pr\times\frac{4pr-(p+r)^2}{(p+r)^2}\\&=pr\times\frac{-(p-r)^2}{(p+r)^2}\\&=-pr\times\left(\frac{p-r}{p+r}\right)^2\end{aligned}$$

이때 p, r은 서로 다른 양수이므로

$pr>0$, $\left(\dfrac{p-r}{p+r}\right)^2>0$

$\therefore -pr\times\left(\dfrac{p-r}{p+r}\right)^2<0$

즉, $\dfrac{D}{4}<0$이므로 주어진 이차방정식은 허근을 갖는다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

30 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=50\sqrt{2}$ ……㉠

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$은 첫째항이 $a_{21}=a_1r^{20}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\begin{aligned}a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}&=\frac{a_1r^{20}(r^{10}-1)}{r-1}\\&=450\sqrt{2}\end{aligned}$$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$50\sqrt{2}r^{20}=450\sqrt{2}$, $r^{20}=9$

$\therefore r^{10}=3$ ($\because \underbrace{r^{10}>0}_{r\text{은 실수이므로}}$)

따라서 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$은 첫째항이 $a_{11}=a_1r^{10}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\begin{aligned}a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}&=\frac{a_1r^{10}(r^{10}-1)}{r-1}\\&=r^{10}\times\frac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}\\&=3\times50\sqrt{2}\ (\because ㉠)\\&=150\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $150\sqrt{2}$

• 다른 풀이 •

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$
$=a_1r^{20}+a_2r^{20}+a_3r^{20}+\cdots+a_{10}r^{20}$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{20}$
$=S_{10}r^{20}$

이때 $S_{10}=50\sqrt{2}$, $S_{10}r^{20}=450\sqrt{2}$이므로

$r^{20}=\dfrac{S_{10}r^{20}}{S_{10}}=\dfrac{450\sqrt{2}}{50\sqrt{2}}=9$, $(r^{10})^2=9$

$\therefore r^{10}=3$ ($\because r^{10}>0$)

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$
$=a_1r^{10}+a_2r^{10}+a_3r^{10}+\cdots+a_{10}r^{10}$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{10}$
$=S_{10}r^{10}$
$=50\sqrt{2}\times 3$
$=150\sqrt{2}$

BLACKLABEL 특강 참고

등비수열의 일정한 개수의 항의 합으로 이루어진 수열도 등비수열을 이루므로 주어진 문제에서
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_1$, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=S_2$, $a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=S_3$이라 하면 세 수 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
공비를 R이라 할 때, $\dfrac{S_3}{S_1}=9$에서 $R^2=9$ $\quad\therefore R=3$ ($\because R>0$)
$\therefore S_2=S_1\times R=50\sqrt{2}\times 3=150\sqrt{2}$
또한, 등차수열의 일정한 개수의 항의 합으로 이루어진 수열도 등차수열을 이룬다.

31 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
첫째항부터 제5항까지의 합이 $\dfrac{31}{2}$이므로

$\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}=\dfrac{31}{2}$ ……㉠

또한, 첫째항부터 제5항까지의 곱은 32이므로
$a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4=32$
$a^5r^{10}=32$, $(ar^2)^5=32$
$\therefore ar^2=2$ ……㉡

$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$
$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}+\dfrac{1}{ar^3}+\dfrac{1}{ar^4}$
$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^2+\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^3+\dfrac{1}{a}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^4$
$=\dfrac{\dfrac{1}{a}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=\dfrac{\dfrac{1}{a}\times\dfrac{r^5-1}{r^5}}{\dfrac{r-1}{r}}$
$=\dfrac{r^5-1}{ar^4(r-1)}=\dfrac{a(r^5-1)}{a^2r^4(r-1)}$
$=\left(\dfrac{1}{ar^2}\right)^2\times\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}$
$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{31}{2}$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$=\dfrac{31}{8}$

답 ②

• 다른 풀이 •

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.
첫째항부터 제5항까지의 곱이 32이므로
$a_1a_2a_3a_4a_5=a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4$
$=a^5r^{10}=(ar^2)^5=32$
$\therefore ar^2=2$ $\quad\therefore a_3=2$
${a_3}^2=a_1a_5=a_2a_4=4$이므로

$S=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$이라 하면

$4S=\dfrac{4}{a_1}+\dfrac{4}{a_2}+\dfrac{4}{a_3}+\dfrac{4}{a_4}+\dfrac{4}{a_5}$
$=a_5+a_4+a_3+a_2+a_1$
$=\dfrac{31}{2}$

$\therefore S=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{31}{2}=\dfrac{31}{8}$

32 $f(x)=2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100}$에서
$(f\circ f)(x)=2+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})$
$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^2$
$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^3+\cdots$
$+(2+x+x^2+x^3+\cdots+x^{100})^{100}$

즉, 함수 $(f\circ f)(x)$의 상수항은

$2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}=2+\dfrac{2(2^{100}-1)}{2-1}$
$=2+(2^{101}-2)$
$=2^{101}=2^k$

$\therefore k=101$

답 101

• 다른 풀이 •

함수 $f(f(x))$의 상수항은 $x=0$일 때의 함숫값이므로
$f(0)=2$에서
$f(f(0))=f(2)$
$=2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$
$=2+\dfrac{2(2^{100}-1)}{2-1}$
$=2+2^{101}-2$
$=2^{101}=2^k$
$\therefore k=101$

33 $a_1=b_1$이므로 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 a라 하면 모든 항이 0이 아니므로
$a\neq 0$, $r\neq 0$
이때 r의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.
(i) $r=1$일 때,
두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 1이므로
$S_n=na$, $T_n=na$
조건 ㈎에서 $S_{2m}=5T_m$ $(m\geq 2)$이므로
$2ma=5ma$

$3ma=0 \qquad \therefore a=0\ (\because m\ge 2)$

그런데 $a\neq 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=-1$일 때,

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 각각 -1, 1이므로

$$S_n=\frac{a\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}=\frac{a\{1-(-1)^n\}}{2},\ T_n=na$$

조건 (가)에서 $S_{2m}=5T_m\ (m\ge 2)$이므로

$$\frac{a\{1-(-1)^{2m}\}}{2}=5ma$$

$5ma=0 \qquad \therefore a=0\ (\because m\ge 2)$

그런데 $a\neq 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $|r|\neq 1$일 때,

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1},\ T_n=\frac{a\{(r^2)^n-1\}}{r^2-1}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r^2-1}$$

조건 (가)에서 $S_{2m}=5T_m\ (m\ge 2)$이므로

$$\frac{a(r^{2m}-1)}{r-1}=\frac{5a(r^{2m}-1)}{r^2-1},$$

$$\frac{a(r^{2m}-1)}{r-1}=\frac{5a(r^{2m}-1)}{(r+1)(r-1)}$$

$1=\dfrac{5}{r+1}\ (\because a\neq 0,\ |r|\neq 1)$

$r+1=5 \qquad \therefore r=4$

(i), (ii), (iii)에서 $r=4$

조건 (나)에서 $T_m=8S_m+21S_{m-1}$이므로

$$\frac{a(r^{2m}-1)}{r^2-1}=\frac{8a(r^m-1)}{r-1}+\frac{21a(r^{m-1}-1)}{r-1}$$

$$\frac{(4^{2m}-1)}{15}=\frac{8(4^m-1)}{3}+\frac{21(4^{m-1}-1)}{3}$$

$(\because a\neq 0,\ r=4)$

$4^{2m}-1=40(4^m-1)+105(4^{m-1}-1)$

$4^{2m}-40\times 4^m-105\times 4^{m-1}+144=0$

$4^{m-1}=t$로 놓으면

$(4t)^2-40\times 4t-105t+144=0$

$16t^2-265t+144=0,\ (16t-9)(t-16)=0$

$\therefore t=\dfrac{9}{16}$ 또는 $t=16$

이때 $m\ge 2$이므로 $t=4^{m-1}\ge 4$

$\therefore t=16$

즉, $4^{m-1}=16=4^2$이므로 $m-1=2 \qquad \therefore m=3$

따라서 $a_n=a\times 4^{n-1}$, $b_n=a\times(4^2)^{n-1}=a\times 4^{2n-2}$이므로

$$\frac{a_{m+1}}{b_{m-1}}=\frac{a_4}{b_2}=\frac{a\times 4^3}{a\times 4^2}=4$$

답 4

34

n번째 반원의 지름의 길이를 a_n이라 하면

$a_1=2\times 1=2$

반원의 넓이가 2배씩 증가하므로 반원의 지름의 길이는 $\sqrt{2}$배씩 증가한다.

$\therefore a_n=2\times(\sqrt{2})^{n-1}$

완성된 반원의 지름의 길이의 합은 $\overline{AB}$의 길이인 100보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{2\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}\le 100$$

$(\sqrt{2})^n\le 50(\sqrt{2}-1)+1$

$=21.7\ (\because \sqrt{2}=1.414)$

이때 $n=8$이면 $(\sqrt{2})^8=2^4=16$,

$n=9$이면 $(\sqrt{2})^9=2^4\times\sqrt{2}=16\times 1.414=22.624$

이므로 n의 최댓값은 8이다.

따라서 완성된 반원의 최대 개수는 8이다.

답 8

35

정사각형 모양의 종이 ABCD의 한 변의 길이가 2이고, 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1은 각 변의 중점이므로 종이 ABCD를 접어 만든 도형 $A_1B_1C_1D_1$은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.

즉, S_1을 펼쳤을 때, 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

S_1을 접어 만든 도형 $A_2B_2C_2D_2$는 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 S_1에서 이미 접은 종이를 다시 접어서 종이가 2겹이므로 S_2를 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$2\times(4\times 1)=8$

S_2를 접어 만든 도형 $A_3B_3C_3D_3$은 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고, S_1, S_2에서 이미 접은 종이를 다시 접어서 종이가 4겹이므로 S_3을 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은

$4\times\left(4\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=8\sqrt{2}$

⋮

이와 같이 계속되므로 S_n을 펼친 그림에서 새로 생긴 접힌 모든 선들의 길이의 합은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$l_5=\frac{4\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

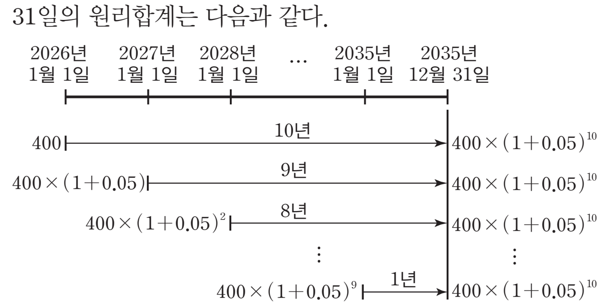
$=4\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})$

$=24+28\sqrt{2}$

답 ①

36

매년 전년도보다 5 % 증액하여 적립하므로 2035년 12월 31일의 원리합계는 다음과 같다.



$\therefore\ 10\times400\times1.05^{10}=10\times400\times1.6$

$=6400$(만 원)

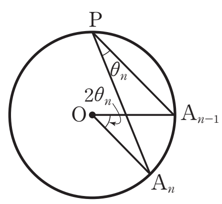
따라서 구하는 원리합계는 6400만 원이다. 답 ①

BLACKLABEL 특강 해결 실마리

첫해에 400만 원을 적립하였고, 이 금액은 10년 동안 연이율 5 %의 복리로 계산하면 (400×1.05^{10})만 원이다.
이후로는 매년 전년도보다 5 % 증액하여 적립하므로 두 번째 해에 저금한 금액은 (400×1.05)만 원이고, 이 금액을 9년 동안 연이율 5 %의 복리로 계산하면 $400\times1.05\times1.05^{9}=400\times1.05^{10}$(만 원)이다.
같은 방법으로 계산하면 매년 적립한 금액의 2035년 12월 31일까지의 원리합계는 모두 (400×1.05^{10})만 원으로 동일하므로 총 원리합계는 $(10\times400\times1.05^{10})$만 원이다.

37 오른쪽 그림과 같이

$\angle A_{n-1}PA_n=\theta_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



이라 하고, 원의 중심을 O라 하면 한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$\angle A_{n-1}OA_n=2\theta_n$이다.

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overparen{A_{n-1}A_n}$의 길이는

$l_n=2\times2\theta_n=4\theta_n$

수열 $\{\theta_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{6}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}=4(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{10})$$
$$=4\times\frac{\frac{\pi}{6}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\pi\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

$\therefore\ p=1,\ q=10$ $\therefore\ p+q=11$ 답 11

38 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n-2}+a_{2n}=3\times2^n-3$ ……㉠

에서

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n-2}=3\times2^{n-1}-3$이므로

$a_{2n}=3\times2^n-3\times2^{n-1}$

$=3\times2^{n-1}$ $(n\ge2)$ ……㉡

이때 ㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_2=6-3=3$이고, ㉡에서 $a_2=3$이므로

$a_{2n}=3\times2^{n-1}$ $(n\ge1)$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$\frac{a_4}{a_2}=r^2$에서 $r^2=\frac{6}{3}=2$ $\therefore\ r=\sqrt{2}$ $(\because\ r>0)$

$a_2=3$에서 $ar=3$

$\therefore\ a=\frac{3}{r}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a_n=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}$

따라서 $a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{17}$은 첫째항이

$a_5=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2})^4=6\sqrt{2}$이고, 공비가 $(\sqrt{2})^2=2$, 항의 개수가 7인 등비수열의 합이므로

$$a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{17}=\frac{6\sqrt{2}(2^7-1)}{2-1}$$
$$=762\sqrt{2}$$

답 $762\sqrt{2}$

39 $(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4a_na_{n+1}+4$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$에서

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

$(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2$ $(\because\ a_{n+1}>a_n)$

또한, $a_2-a_1=3-1=2$이므로

$a_{n+1}-a_n=2$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

$\therefore\ a_{20}=2\times20-1=39$ 답 39

40 ㄱ. 주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$S_1+T_1=a_1+b_1=\frac{9-3}{2}=3$

이때 $a_1=b_1$이면 $a_1=b_1=\frac{3}{2}$ (거짓)

ㄴ. (i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$, $b_n=T_n-T_{n-1}$이므로

$$a_n+b_n=(S_n-S_{n-1})+(T_n-T_{n-1})$$
$$=(S_n+T_n)-(S_{n-1}+T_{n-1})$$
$$=\frac{9n^2-3n}{2}-\frac{9(n-1)^2-3(n-1)}{2}$$
$$=\frac{9n^2-3n}{2}-\frac{9n^2-21n+12}{2}$$
$$=9n-6$$

(ii) $n=1$일 때, $a_1+b_1=3$

(i), (ii)에서 $a_n+b_n=9n-6$ $(n\ge1)$

이때 $a_n=n+3$이면

$b_n=(9n-6)-(n+3)=8n-9$ (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$의 공차가 d_1, 수열 $\{b_n\}$의 공차가 d_2이므로

$$a_n+b_n=a_1+(n-1)d_1+b_1+(n-1)d_2$$
$$=a_1+b_1+(d_1+d_2)(n-1)$$

한편, ㄴ에서

$a_n+b_n=9n-6=3+9(n-1)$

$\therefore\ a_1+b_1=3,\ d_1+d_2=9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 •

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a_1, 공차가 d_1이므로

$$S_n=\frac{n\{2a_1+d_1(n-1)\}}{2}$$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 b_1, 공차가 d_2이므로

$$T_n=\frac{n\{2b_1+d_2(n-1)\}}{2}$$

$\therefore S_n+T_n$

$=\dfrac{n\{2a_1+d_1(n-1)\}}{2}+\dfrac{n\{2b_1+d_2(n-1)\}}{2}$

$=\dfrac{n\{2(a_1+b_1)+(d_1+d_2)(n-1)\}}{2}$

이때 $S_n+T_n=\dfrac{9n^2-3n}{2}=\dfrac{n(9n-3)}{2}$이므로

$d_1+d_2=9$, $2(a_1+b_1)-(d_1+d_2)=-3$

즉, $2(a_1+b_1)-9=-3$이므로 $2(a_1+b_1)=6$

$\therefore a_1+b_1=3$, $d_1+d_2=9$

ㄱ. $a_1=b_1$이면 $2a_1=3$ $\quad\therefore a_1=\dfrac{3}{2}$ (거짓)

ㄴ. $a_n=n+3$이면 $a_1=4$이므로 $b_1=-1$

$d_1=1$이므로 $d_2=8$

$\therefore b_n=-1+8(n-1)=8n-9$ (참)

ㄷ. $d_1+d_2=9$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

41

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 3이므로

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$S_n=\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{3}{2}(3^n-1)$

$\dfrac{S_{4n}-S_{2n}}{S_n}>1000a_n$에서

$\dfrac{\frac{3}{2}(3^{4n}-1)-\frac{3}{2}(3^{2n}-1)}{\frac{3}{2}(3^n-1)}>1000\times3^n$

$\dfrac{3^{4n}-3^{2n}}{3^n-1}>1000\times3^n$

$\dfrac{3^{2n}(3^{2n}-1)}{3^n-1}>1000\times3^n$

$\dfrac{3^{2n}(3^n+1)(3^n-1)}{3^n-1}>1000\times3^n$

$\therefore 3^n(3^n+1)>1000$ ($\because 3^n-1>0$)

*이때 $3^3\times(3^3+1)=756$, $3^4\times(3^4+1)=6642$이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$n\geq4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

답 4

• 다른 풀이 •

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 3이므로

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$\dfrac{S_{4n}-S_{2n}}{S_n}>1000a_n$에서

$\dfrac{a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{4n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}>1000a_n$

$\dfrac{(a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n})+(a_{3n+1}+a_{3n+2}+\cdots+a_{4n})}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}>1000a_n$

$\dfrac{3^{2n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+3^{3n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}>1000\times3^n$

$3^{2n}+3^{3n}>1000\times3^n$, $3^n+3^{2n}>1000$

$\therefore 3^n(3^n+1)>1000$

다음은 *와 같다.

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.99~100

01 275	02 ①	03 1023	04 45	05 $2\sqrt{46}$
06 1	07 -34	08 $-\dfrac{57}{8}$	09 435	10 11
11 5				

01

해결단계

❶ 단계	등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.
❷ 단계	x의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 부등식 $3\lvert x-a_n\rvert\geq4\lvert x-a_{n+1}\rvert$을 푼다.
❸ 단계	b_n을 n에 대한 식으로 나타내고, $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공차가 3이므로

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

이때 $a_n=3n-1$, $a_{n+1}=3(n+1)-1=3n+2$이고

$a_n<a_{n+1}$이므로 부등식 $3\lvert x-a_n\rvert\geq4\lvert x-a_{n+1}\rvert$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $x<a_n$일 때,

$3\lvert x-a_n\rvert\geq4\lvert x-a_{n+1}\rvert$에서

$-3x+3a_n\geq-4x+4a_{n+1}$

$x\geq4a_{n+1}-3a_n$

$=4(3n+2)-3(3n-1)$

$=3n+11$

그런데 $x<a_n$, 즉 $x<3n-1$이므로 조건을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $a_n\leq x<a_{n+1}$일 때,

$3\lvert x-a_n\rvert\geq4\lvert x-a_{n+1}\rvert$에서

$3x-3a_n\geq-4x+4a_{n+1}$

$7x\geq4a_{n+1}+3a_n$

$=4(3n+2)+3(3n-1)$

$=21n+5$

$\therefore x\geq3n+\dfrac{5}{7}$

이때 $x<a_{n+1}$이므로 $3n+\dfrac{5}{7}\leq x<3n+2$

(iii) $x\geq a_{n+1}$일 때,

$3\lvert x-a_n\rvert\geq4\lvert x-a_{n+1}\rvert$에서

$3x-3a_n\geq4x-4a_{n+1}$

$\therefore x\leq4a_{n+1}-3a_n$

$=4(3n+2)-3(3n-1)$

$=3n+11$

이때 $a_{n+1}\leq x$이므로 $3n+2\leq x\leq3n+11$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $3n+\frac{5}{7}\le x\le 3n+11$이므로

$b_n=3n+11$

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=\frac{10\times(14+41)}{2}$

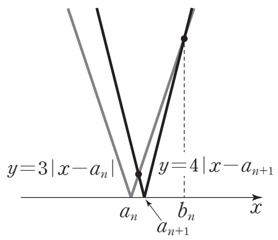
$=275$ **답** 275

• 다른 풀이 •

b_n은 두 함수

$y=3|x-a_n|$,

$y=4|x-a_{n+1}|$의 그래프의 교점의 x좌표 중 큰 값이다.



$3(b_n-a_n)=4(b_n-a_{n+1})$

에서 *에 의하여

$b_n=4a_{n+1}-3a_n=3(a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}$

$=9+3n+2=3n+11$

따라서 구하는 합은

$\frac{10(b_1+b_{10})}{2}=\frac{10\times(14+41)}{2}=275$

02 해결단계

❶ 단계	수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하고, 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$이 등비수열인지 확인한다.
❷ 단계	수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$의 공차를 d라 하고, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열인지 확인한다.
❸ 단계	수열 $\{a_na_{n+1}\}$의 공비를 r이라 하고, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등비수열인지 확인한다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 공비를 r이라 하면

$a_{n+1}=ra_n$

(i) $r=1$일 때,

$a_n=a_1$이므로 $a_{n+1}-a_n=0$

수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$도 등비수열이다.

(ii) $r\ne1$일 때,

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{ra_{n+1}-a_{n+1}}{ra_n-a_n}=\frac{(r-1)a_{n+1}}{(r-1)a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$$

(i), (ii)에서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. 수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=d$

$\therefore a_{n+2}-a_n=d$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공차가 d인 등차수열을 이룬다.

이때 수열 $\{a_n\}$이 등차수열인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_na_{n+1}\}$이 등비수열이므로 공비를 r이라 하면

$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=r$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공비가 r인 등비수열을 이루므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 짝수항끼리 또는 홀수항끼리 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열을 이룬다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 등비수열인지는 알 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

• 다른 풀이 •

ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}=ar\times r^{n-1}-ar^{n-1}$

$=a(r-1)r^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. (반례) 수열 $\{a_n\}$이 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, $\cdots$이면 수열 $\{a_{n+1}+a_n\}$은 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$로 등차수열이지만 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. (반례) 수열 $\{a_n\}$이 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, $\cdots$이면 수열 $\{a_na_{n+1}\}$은 1, 2, 4, 8, 16, 32, $\cdots$로 등비수열이지만 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$로 등비수열이 아니다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

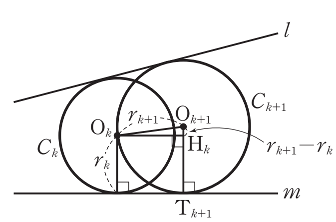
이러한 유형의 문제는 출제 빈도가 높으므로 기본적인 접근 방법을 익혀 두는 것이 좋다.
첫 번째 방법은 주어진 수열이 등차수열이나 등비수열이면 일반항을 구해 계산하는 것이다. 이때에는 첫째항에 주의한다.
두 번째 방법은 숫자를 대입해 반례를 찾는 것이다.
가능하면 위의 두 가지 방법을 모두 사용하여 실수를 줄이도록 하자.

03 해결단계

❶ 단계	원 C_k의 반지름의 길이를 r_k, 중심을 O_k라 하고, 점 O_k에서 점 O_{k+1}을 지나면서 직선 m에 수직인 선분에 내린 수선의 발을 H_k라 할 때, $\angle O_{k+1}O_kH_k$의 크기는 k의 값에 관계없이 항상 일정함을 확인한다.
❷ 단계	$\sin(\angle O_{k+1}O_kH_k)=p$ (p는 상수)라 하고, 수열 $\{r_n\}$이 등비수열을 이루는 것을 확인한 후, 그 공비를 p를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 것을 이용하여 수열 $\{S_n\}$이 등비수열을 이루는 것을 확인한 후, 등비수열 $\{S_n\}$의 일반항 S_n을 구하고, 주어진 식의 값을 구한다.

원 C_k의 반지름의 길이를 r_k, 중심을 O_k, 원 C_{k+1}과 직선 m의 접점을 T_{k+1}이라 하면 $r_k<r_{k+1}$이고, 점 O_k에서 선분 $O_{k+1}T_{k+1}$에 내린 수선의 발을 H_k라 하면 다음 그림과 같다.

$S_1<S_4$이므로 ㄱ



$\sin(\angle O_{k+1}O_kH_k)$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 일정하므로 그 값을 p (p는 상수)라 하면

$\frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}}=p$ $\quad\therefore r_{k+1}=\frac{1}{1-p}r_k$ $(\because \underbrace{p\neq1}_{r_{k+1}>r_k>0})$

즉, 수열 $\{r_k\}$는 공비가 $\frac{1}{1-p}$인 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$는 공비가 $\left(\frac{1}{1-p}\right)^2$인 등비수열이다. $S_k=\pi r_k^2$

이때 $S_1=1$이므로 일반항 S_n은

$S_n=\left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^{n-1}$

또한, $S_5=4$이므로 $S_5=\left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^4=4$에서

$\left\{\left(\frac{1}{1-p}\right)^2\right\}^2=2$ $\quad\therefore \left(\frac{1}{1-p}\right)^2=\sqrt{2}$

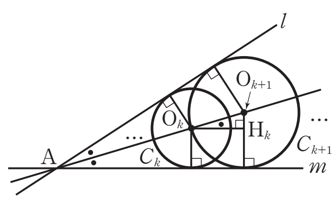
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $(\sqrt{2})^2=2$인 등비수열이다.

$\therefore S_1+S_3+S_5+\cdots+S_{19}=\frac{1\times(2^{10}-1)}{2-1}=1023$

답 1023

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

다음 그림과 같이 자연수 k에 대하여 원 C_k의 중심 O_k는 모두 한 직선 위에 있고, •로 표시된 각의 크기는 모두 같다.



04 해결단계

❶ 단계	등비수열 5, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 15의 공비를 r이라 하고, 이 수열의 제$(n+2)$항이 15임을 이용하여 r, n에 대한 식을 구한다.
❷ 단계	$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$과 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$을 r에 대한 식으로 간단히 정리한다.
❸ 단계	등차수열 5, b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 15의 공차를 d라 하고, 이 수열의 제$(n+2)$항이 15임을 이용하여 d, n에 대한 식을 구한다.
❹ 단계	$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$을 n에 대한 식으로 간단히 정리한다.
❺ 단계	주어진 등식을 만족시키는 n의 값을 구한다.

5, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 15가 등비수열을 이루므로 이 수열의 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면

$5\times r^{n+1}=15$ $\quad\therefore r^{n+1}=3$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=5r+5r^2+5r^3+\cdots+5r^n$

$=\frac{5r(r^n-1)}{r-1}$

$=\frac{5(r^{n+1}-r)}{r-1}$

$=\frac{5(3-r)}{r-1}$ $(\because r^{n+1}=3)$,

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$=\frac{1}{5r}+\frac{1}{5r^2}+\frac{1}{5r^3}+\cdots+\frac{1}{5r^n}$

$=\frac{\frac{1}{5r}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{5r}\times\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}}$

$=\frac{r^n-1}{5r^n(r-1)}=\frac{r^{n+1}-r}{5r^{n+1}(r-1)}$

$=\frac{3-r}{15(r-1)}$ $(\because r^{n+1}=3)$

또한, 5, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_n, 15가 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d $(d\neq0)$라 하면

$5+(n+1)d=15$ $\quad\therefore (n+1)d=10$

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=(5+d)+(5+2d)+(5+3d)+\cdots+(5+nd)$

$=\frac{n\{(5+d)+(5+nd)\}}{2}$

$=\frac{n\{10+(n+1)d\}}{2}$

$=\frac{n(10+10)}{2}$ $(\because (n+1)d=10)$

$=10n$

따라서 주어진 등식

$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=6$

에서

$\frac{\frac{3-r}{15(r-1)}\times10n}{\frac{5(3-r)}{r-1}}=6$

$\frac{2n}{15}=6$ $\quad\therefore n=45$

답 45

• 다른 풀이 •

5, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 15가 등비수열을 이루므로

$a_1a_n=a_2a_{n-1}=\cdots=5\times15=75$

$S=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$이라 하면

$75S=\frac{75}{a_1}+\frac{75}{a_2}+\frac{75}{a_3}+\cdots+\frac{75}{a_n}$

$=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1$

$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=6$

에서

$\frac{S(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)}{75S}=6$

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=450$

이때 5, b_1, b_2, $\cdots$, b_n, 15가 등차수열을 이루므로

$b_1+b_n=5+15=20$

따라서 $\frac{n(b_1+b_n)}{2}=450$이므로

$10n=450$ $\quad\therefore n=45$

05 해결단계

❶ 단계	삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$임을 이용하여 $\overline{DE}$, $\overline{EC}$의 길이를 구한다.
❷ 단계	$\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룸을 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구한다.
❸ 단계	이등변삼각형의 성질을 이용하여 삼각형 DEB의 넓이를 구한 후, 평행사변형 ABCD의 넓이를 구한다.
❹ 단계	❸단계에서 구한 넓이를 이용하여 평행사변형 ABCD의 높이를 구한 후, 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다.

$\triangle EBC=\frac{1}{5}\square ABCD$, $\triangle DBC=\frac{1}{2}\square ABCD$이므로

$$\triangle DEB=\triangle DBC-\triangle EBC$$
$$=\frac{1}{2}\square ABCD-\frac{1}{5}\square ABCD$$
$$=\frac{3}{10}\square ABCD \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\triangle DEB:\triangle EBC=\frac{3}{10}\square ABCD:\frac{1}{5}\square ABCD$$
$$=3:2$$

에서 $\overline{DE}:\overline{CE}=3:2$

즉, $\overline{CD}=\overline{AB}=20$이므로 $\overline{DE}=12$, $\overline{CE}=8$

이때 $\triangle EDA'$, $\triangle EBC$에서

$\angle A'ED=\angle CEB$ ($\because$ 맞꼭지각),

평행사변형의 대각

$\angle DA'E=\angle BCE$, $\overline{A'D}=\overline{CB}$이므로

평행사변형의 대변

$\triangle EDA'\equiv\triangle EBC$ (ASA 합동)

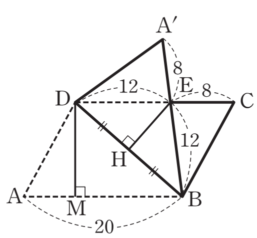
$\therefore \overline{EB}=\overline{DE}=12$

$\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{EB}^2=\overline{CE}\times\overline{BD}$에서 $12^2=8\times\overline{BD}$

$\therefore \overline{BD}=18$

한편, 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle DEB$가 이등변삼각형이므로 $\overline{EH}$는 $\overline{DB}$를 수직이등분한다.



이때 $\triangle DHE$가 직각삼각형이고, $\overline{DH}=9$이므로

$\overline{EH}=\sqrt{12^2-9^2}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ *

$\therefore \triangle DEB=\frac{1}{2}\times18\times3\sqrt{7}=27\sqrt{7}$,

$\square ABCD=90\sqrt{7}$ ($\because$ ㉠)

또한, 위의 그림과 같이 점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\square ABCD=20\times\overline{DM}=90\sqrt{7}$

$\therefore \overline{DM}=\frac{9\sqrt{7}}{2}$

$\triangle DMB$가 직각삼각형이므로

$$\overline{MB}=\sqrt{18^2-\left(\frac{9\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{729}{4}}=\frac{27}{2}$$

$$\therefore \overline{AM}=\overline{AB}-\overline{MB}=20-\frac{27}{2}=\frac{13}{2}$$

따라서 $\triangle DAM$이 직각삼각형이므로

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{9\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{736}{4}}=\sqrt{184}=2\sqrt{46}$$

답 $2\sqrt{46}$

• 다른 풀이 •

*에서 $\angle EDH=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{DE}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$\triangle CDB$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=20^2+18^2-2\times20\times18\times\cos\theta$$
$$=400+324-2\times20\times18\times\frac{3}{4}$$
$$=724-540=184$$

$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}=2\sqrt{46}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

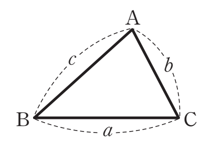
코사인법칙

(1) 코사인법칙

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



(2) 코사인법칙의 변형

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

06 해결단계

❶ 단계	두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{S_{2n}\}$의 일반항을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 일반항과 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구한다.
❸ 단계	$a_{15}=99$와 $a_2=1$을 이용하여 a_1의 값을 구한다.

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=1$, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_{2n}=1+4(n-1)=4n-3$

수열 $\{S_{2n}\}$은 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항을 S_2라 하면

$S_{2n}=S_2\times2^{n-1}$

$$\therefore a_{2n}+a_{2n-1}=S_{2n}-S_{2n-2}$$
$$=S_2\times2^{n-1}-S_2\times2^{n-2}$$
$$=S_2\times2^{n-2}\ (\text{단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$a_{2n}=4n-3$이므로

$a_{2n-1}=S_2\times2^{n-2}-4n+3$

위의 식에 $n=8$을 대입하면

$a_{15}=S_2\times2^6-4\times8+3$

즉, $64S_2-29=99$이므로 $64S_2=128$

$\therefore S_2=2$

$a_2=1$이므로 $S_2=a_1+a_2=a_1+1=2$

$\therefore a_1=1$

답 1

• 다른 풀이 •

$a_2=1$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{a_{2n}\}$은 공차가 4인 등차수열이므로

$a_2=1$, $a_4=5$, $a_6=9$, $\cdots$

한편, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n이므로

$S_{14}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{14}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{14})$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+\dfrac{7\times(2\times1+6\times4)}{2}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+91$ ……㉠

$S_{16}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{16}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+a_{15})$

$+(a_2+a_4+\cdots+a_{14}+a_{16})$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{13}+\underbrace{99}_{=a_{15}})+\dfrac{8\times(2\times1+7\times4)}{2}$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{13})+99+120$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{13})+219$ ……㉡

이때 수열 $\{S_{2n}\}$은 공비가 2인 등비수열이므로

$2S_{14}=S_{16}$

즉, $2\times$㉠$=$㉡이므로

$2\{(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+91\}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})+219$

$\therefore a_1+a_3+\cdots+a_{13}=37$

이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$S_{14}=\underbrace{128}_{2^7},\ S_{16}=\underbrace{256}_{2^8}$

따라서 $S_{2n}=2^n$이므로 $S_2=a_1+a_2$에서

$2=a_1+1 \qquad \therefore a_1=1$

07 해결단계

❶ 단계	$c_5>0$, $c_4c_5<0$, $c_5c_6<0$에서 $a_4b_4<0$, $a_5b_5>0$, $a_6b_6<0$임을 파악한다.
❷ 단계	수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 음수, 양수임을 파악한다.
❸ 단계	❶단계를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 구하여 $a_{10}+b_9$의 최솟값을 구한다.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2 (d_1, d_2는 정수)라 하면 첫째항이 각각 25, -19이므로

$a_n=25+(n-1)d_1,\ b_n=-19+(n-1)d_2$ ……㉠

$c_5>0$, $c_4c_5<0$, $c_5c_6<0$에서

$c_4<0$, $c_5>0$, $c_6<0$

$\therefore a_4b_4<0$, $a_5b_5>0$, $a_6b_6<0$

$a_4<0$이면 $a_4b_4<0$이므로 $b_4>0$이어야 한다.

그런데 $a_4>a_5>a_6$, $b_4<b_5<b_6$이므로

$a_4<0$이면 $a_5<0$이고, $b_4>0$이면 $b_5>0$ $\quad\therefore a_5b_5<0$

즉, $a_5b_5>0$이 성립하지 않으므로 $a_4>0$이어야 한다.

따라서 a_4, a_5, a_6, b_4, b_5, b_6의 부호를 구하면 다음과 같다.

	$n=4$	$n=5$	$n=6$
a_n	$+$	$-$	$-$
b_n	$-$	$-$	$+$
a_nb_n	$-$	$+$	$-$

	$n=4$	$n=5$	$n=6$
a_n	$+$	$+$	$-$
b_n	$-$	$+$	$+$
a_nb_n	$-$	$+$	$-$

위의 표에서 $a_4>a_5>a_6$이어야 하므로 $d_1<0$

$b_4<b_5<b_6$이어야 하므로 $d_2>0$

(i) $a_4>0$, $a_5<0$, $b_5<0$, $b_6>0$일 때,

$a_4=3d_1+25>0$, $a_5=4d_1+25<0$에서

$-\dfrac{25}{3}<d_1<-\dfrac{25}{4}$

이때 d_1은 정수이므로 $d_1=-8$ 또는 $d_1=-7$

$b_5=4d_2-19<0$, $b_6=5d_2-19>0$에서

$\dfrac{19}{5}<d_2<\dfrac{19}{4}$

이때 d_2는 정수이므로 $d_2=4$

① $d_1=-8$, $d_2=4$인 경우

㉠에서 $a_n=-8n+33$, $b_n=4n-23$이므로

$a_{10}+b_9=-47+13=-34$

② $d_1=-7$, $d_2=4$인 경우

㉠에서 $a_n=-7n+32$, $b_n=4n-23$이므로

$a_{10}+b_9=-38+13=-25$

(ii) $a_5>0$, $a_6<0$, $b_4<0$, $b_5>0$일 때,

$a_5=4d_1+25>0$, $a_6=5d_1+25<0$에서

$-\dfrac{25}{4}<d_1<-5$

이때 d_1은 정수이므로 $d_1=-6$

$b_4=3d_2-19<0$, $b_5=4d_2-19>0$에서

$\dfrac{19}{4}<d_2<\dfrac{19}{3}$

이때 d_2는 정수이므로 $d_2=5$ 또는 $d_2=6$

③ $d_1=-6$, $d_2=5$인 경우

㉠에서 $a_n=-6n+31$, $b_n=5n-24$이므로

$a_{10}+b_9=-29+21=-8$

④ $d_1=-6$, $d_2=6$인 경우

㉠에서 $a_n=-6n+31$, $b_n=6n-25$이므로

$a_{10}+b_9=-29+29=0$

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은 -34이다. **답** -34

08 해결단계

❶ 단계	주어진 삼차방정식을 인수분해하여 세 근을 구한 후, 조건 (다)를 만족시키는 a, b의 경우를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 나눈 경우에 따라 조건 (가), (나)를 만족시키는 a, b의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	a, b의 값을 이용하여 모든 ab의 값의 합을 구한다.

$x^3-(ab+a+b)x^2+ab(a+b+1)x-(ab)^2=0$

……㉠

㉠의 좌변을 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2(bx-b^2)+a(-bx^2-x^2+b^2x+bx)+x^3-bx^2=0$

$a^2b(x-b)-a(b+1)(x-b)x+x^2(x-b)=0$

$(x-b)\{a^2b-a(b+1)x+x^2\}=0$

$(x-b)(x-a)(x-ab)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=ab$

즉, 삼차방정식 ㉠의 세 근은 a, b, ab이다.

그런데 조건 (다)에 의하여 세 근 중에서 한 근은 양수, 두 근은 음수이어야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a<0$, $b<0$인 경우

조건 (가)에서 a, ab, b 또는 b, ab, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(ab)^2=ab \qquad \therefore ab=1\ (\because ab\neq0)$

또한, 조건 (나)에서

또는 ab, b, a가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

a, b, ab 또는 b, a, ab

또는 ab, a, b가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+ab$ 또는 $2a=b+ab$

이때 $ab=1$에서 $b=\frac{1}{a}$이므로 위의 두 식에 각각 대입하면 $\frac{2}{a}=a+1$ 또는 $2a=\frac{1}{a}+1$

위의 두 식의 양변에 각각 a를 곱하여 정리하면

$a^2+a-2=0$ 또는 $2a^2-a-1=0$

$(a+2)(a-1)=0$ 또는 $(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-2,\ b=-\frac{1}{2},\ ab=1$

또는 $a=-\frac{1}{2},\ b=-2,\ ab=1$

(ii) $a<0$, $b>0$인 경우

조건 (가)에서 a, b, ab 또는 ab, b, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=a^2b$ $\quad\therefore b=a^2$ ($\because b\neq 0$) ……㉡

또한, 조건 (나)에서

ab, a, b 또는 a, ab, b

또는 b, ab, a가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

또는 b, a, ab가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=b+ab$ 또는 $2ab=a+b$ ……㉢

㉡을 ㉢에 각각 대입하여 풀면

$2a=b+ab$에서 $2a=a^2+a^3$

$a^3+a^2-2a=0$, $a(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-2,\ b=4,\ ab=-8$

$2ab=a+b$에서 $2a^3=a+a^2$

$2a^3-a^2-a=0$, $a(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4},\ ab=-\frac{1}{8}$

(iii) $a>0$, $b<0$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 계산하면

$ab=-8$ 또는 $ab=-\frac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 서로 다른 ab의 값은 1, -8, $-\frac{1}{8}$이므로 그 합은

$1+(-8)+\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{57}{8}$ **답** $-\frac{57}{8}$

• 다른 풀이 •

*에서 조건 (나)에 의하여 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 $p-d$, p, $p+d$ ($p<0$, $d>0$)라 하면

$p-d<p<0<p+d$

조건 (가)에서 세 수 $p-d$, p, $p+d$를 적절히 나열하여 등비수열을 만들 수 있으므로

$(p-d)p=(p+d)^2$이어야 한다.

(음수)×(음수)=(양수)

$p^2-dp=p^2+2pd+d^2$, $d^2+3pd=0$

$d(d+3p)=0$

$\therefore d=-3p$ ($\because d>0$)

따라서 세 근은 $4p$, p, $-2p$라 할 수 있다.

(i) $a=4p$, $b=p$일 때,

나머지 한 근은 $ab=-2p$

이때 $ab=4p^2$이므로 $4p^2=-2p$

$2p(2p+1)=0$ $\quad\therefore p=-\frac{1}{2}$ ($\because p<0$)

$\therefore ab=1$

(ii) $a=p$, $b=-2p$일 때,

나머지 한 근은 $ab=4p$

이때 $ab=-2p^2$이므로 $-2p^2=4p$

$2p(p+2)=0$ $\quad\therefore p=-2$ ($\because p<0$)

$\therefore ab=-8$

(iii) $a=-2p$, $b=4p$일 때,

나머지 한 근은 $ab=p$

이때 $ab=-8p^2$이므로 $-8p^2=p$

$p(8p+1)=0$ $\quad\therefore p=-\frac{1}{8}$ ($\because p<0$)

$\therefore ab=-\frac{1}{8}$

(i), (ii), (iii)에서 모든 ab의 값의 합은

$1+(-8)+\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{57}{8}$

09 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n과 집합 A를 구한다.
❷ 단계	조건 (나)를 이용하여 네 집합 $A\cap B$, $A\cap B^C$, $A^C\cap B$, B의 원소의 개수를 각각 구한다.
❸ 단계	수열 $\{b_n\}$이 등차수열임을 이용하여 **❷단계**에서 구한 것과 조건 (다)를 동시에 만족시키는 집합 $A\cap B$를 구한다.
❹ 단계	집합 B의 원소가 60 이하임을 이용하여 수열 $\{b_n\}$의 공차를 구한다.
❺ 단계	집합 B의 모든 원소의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면 조건 (가)에서

$a_{10}=a_1+9d_1=1+9d_1=55$

$9d_1=54$ $\quad\therefore d_1=6$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times 6=6n-5$이므로

$A=\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55\}$

$\therefore n(A)=10$

조건 (나)에서 $n(A\cap B)=n(A\cap B^C)$이고,

$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)$

$n(A\cap B)=n(A\cap B^C)=5$

또한, $n(A\cap B)=\frac{1}{2}\times n(A^C\cap B)=5$이므로

$n(A^C\cap B)=10$

$\therefore n(B)=n(A\cap B)+n(A^C\cap B)$

$=5+10=15$

한편, 집합 A의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열했을 때, 이웃한 두 항이 $A\cap B$의 원소이면 수열 $\{b_n\}$이

등차수열이므로 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소가 된다.
즉, 이 경우에 $n(A\cap B)=10$이므로 $n(A\cap B)=5$에 모순이다.
따라서 집합 A에서 이웃하지 않은 항으로 집합 $A\cap B$에 속하는 5개의 원소를 선택해야 하고, 그 경우는 다음과 같다.

(i) $A\cap B=\{1,\ 13,\ 25,\ 37,\ 49\}$일 때,
모든 원소의 합이 $\dfrac{5\times(1+49)}{2}=125$이므로
조건 (다)를 만족시킨다.

(ii) $A\cap B=\{7,\ 19,\ 31,\ 43,\ 55\}$일 때,
모든 원소의 합이 $\dfrac{5\times(7+55)}{2}=155$이므로
조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $A\cap B=\{1,\ 13,\ 25,\ 37,\ 49\}$
집합 B의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 수열 $\{c_n\}$이라 하고, 이 수열의 공차를 d_2라 하면 1, 13, 25, 37, 49는 공차가 12인 등차수열이므로 d_2는 12의 양의 약수이다.
또한, $7\in(A\cap B^C)$이므로 d_2는 $7-\underbrace{1}_{=c_1}$, 즉 6의 양의 약수가 아니다.
$c_{15}=c_1+14d_2\leq 60$이므로
$14d_2\leq 59,\ d_2\leq 4.\times\times\times$ $\quad\therefore d_2=4$
그러므로 집합 B의 모든 원소의 합은 첫째항이 1이고, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합과 같으므로
$\dfrac{15\times(1+57)}{2}=435$ **답** 435

BLACKLABEL 특강 참고

공차가 각각 x, y인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\}$이라 하자.
$n(A\cap B)\geq 3$이면 집합 $A\cap B$의 원소들을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은 등차수열을 이루고, 공차는 $|x|$, $|y|$의 최소공배수가 된다.
위의 문제에서 집합 $A\cap B$의 원소들을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 공차가 12인 등차수열을 이루므로 d_1, d_2의 최소공배수는 12가 된다. 이때 $d_1=6$, $d_2<6$이므로 $d_2=4$이다.

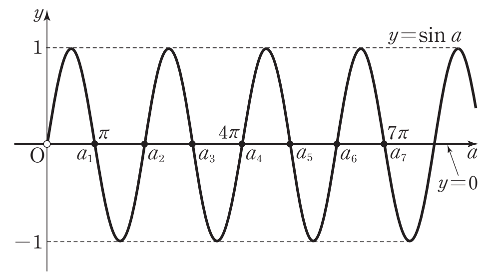
10 해결단계

❶ 단계	방정식 $f(a)=q$의 해는 함수 $y=\sin a$의 그래프와 직선 $y=0$ 또는 직선 $y=\dfrac{2q}{p}$의 교점의 x좌표와 같음을 파악한다.
❷ 단계	$\dfrac{2q}{p}$의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 방정식 $f(a)=q$의 해를 구한 후, 세 항 a_1, a_4, a_7이 등차수열을 이루도록 하는 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 p, q의 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수를 구한다.

$f(x)=|p\sin x-q|$에서 $f(a)=q\ (a>0)$이면
$|p\sin a-q|=q,\ p\sin a-q=\pm q$
$p\sin a=0$ 또는 $p\sin a=2q$
$\therefore \sin a=0$ 또는 $\sin a=\dfrac{2q}{p}$ ($\because p$는 자연수)

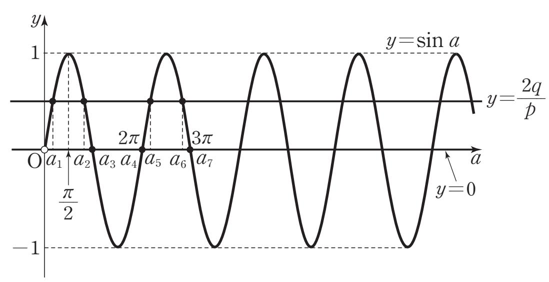
따라서 방정식 $f(a)=q$의 해는 함수 $y=\sin a$의 그래프와 직선 $y=0$ 또는 직선 $y=\dfrac{2q}{p}$의 교점의 a좌표와 같다.

(i) $\dfrac{2q}{p}=0$, 즉 $q=0$일 때,
함수 $y=\sin a$의 그래프와 직선 $y=0$은 다음 그림과 같다.



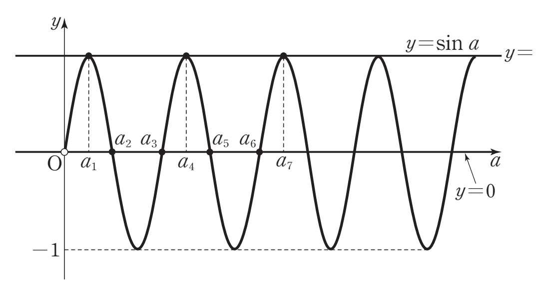
$\therefore a_1=\pi,\ a_4=4\pi,\ a_7=7\pi$
이때 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 조건 (가)를 만족시킨다.
또한, $f(x)=|p\sin x|$에서 $0\leq|p\sin x|\leq p$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 15이므로
$p=15$
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(15,\ 0)$의 1개이다.

(ii) $0<\dfrac{2q}{p}<1$일 때,
함수 $y=\sin a$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=\dfrac{2q}{p}$는 다음 그림과 같다.



$\therefore 0<a_1<\dfrac{\pi}{2},\ a_4=2\pi,\ a_7=3\pi$
이때 $a_4-a_1>\pi$, $a_7-a_4=\pi$이므로 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루지 않는다.
즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\dfrac{2q}{p}=1$일 때,
함수 $y=\sin a$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$은 다음 그림과 같다.



$\therefore a_1=\dfrac{\pi}{2},\ a_4=\dfrac{5}{2}\pi,\ a_7=\dfrac{9}{2}\pi$

이때 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, $f(x)=|p\sin x-q|$에서

$0\le|p\sin x-q|\le p+q$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 15이므로

$p+q=15$

이때 $\dfrac{2q}{p}=1$이므로 $p=2q$

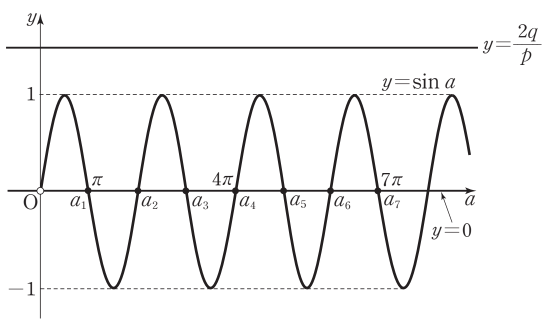
이것을 $p+q=15$에 대입하면

$3q=15\qquad\therefore p=10,\ q=5$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(10,\ 5)$의 1개이다.

(iv) $\dfrac{2q}{p}>1$일 때,

함수 $y=\sin a$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=\dfrac{2q}{p}$는 다음 그림과 같다.



$\therefore a_1=\pi,\ a_4=4\pi,\ a_7=7\pi$

이때 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, $f(x)=|p\sin x-q|$에서

$0\le|p\sin x-q|\le p+q$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 15이므로

$p+q=15$

이때 $\dfrac{2q}{p}>1$이므로 $2q>p$

$q=15-p$이므로 위의 식에 대입하면

$2(15-p)>p\qquad\therefore p<10$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(1,\ 14)$, $(2,\ 13)$, $(3,\ 12)$, $(4,\ 11)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 9)$, $(7,\ 8)$, $(8,\ 7)$, $(9,\ 6)$의 9개이다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$1+1+9=11$

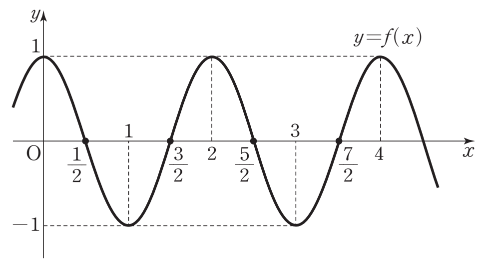
답 11

11 해결단계

❶ 단계	수열 $\{a_n\}$은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x-k)$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 나열한 것과 같음을 파악한다.
❷ 단계	$k=1$, $k=2$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x-k)$의 그래프의 교점의 좌표를 구한다.
❸ 단계	❷ 단계에서 구한 것을 이용하여 $k\ge3$일 때의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x-k)$의 그래프의 교점의 좌표를 나타낸다.
❹ 단계	수열 $\{S_{4n}\}$을 구한 후 $S_{4n}>100$을 만족시키는 n의 최솟값을 구한다.

방정식 $f(x)=g(x-k)$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-k)$의 교점의 x좌표와 같다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 k에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x-k)$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 나열한 것과 같다.



함수 $f(x)=\cos\pi x$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$, $\cdots$을 지나고, 각 점에 대하여 대칭이다.

$k=1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-1)$, 즉 $y=x-\dfrac{1}{2}$은 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$에서만 만난다. 이 교점의 x좌표를 $p_1=\dfrac{1}{2}$이라 하자.

$-1\le f(x)\le1$이므로 $-1\le g(x-2)\le1$, 즉 $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{2}$에서 방정식 $f(x)=g(x-2)$의 실근이 존재한다.

$k=2$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-2)$, 즉 $y=x-\dfrac{3}{2}$은 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$과 $\dfrac{1}{2}<x<1$, $2<x<\dfrac{5}{2}$에서 각각 한 점에서 만난다. 이 교점의 x좌표를 작은 것부터 순서대로 p_2, $p_3=\dfrac{3}{2}$, p_4 $\left(\dfrac{1}{2}<p_2<1,\ 2<p_4<\dfrac{5}{2}\right)$라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-2)$는 모두 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로

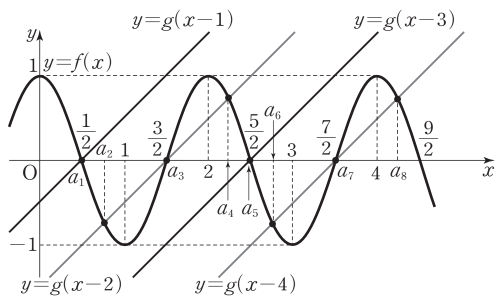
$\dfrac{p_2+p_4}{2}=\dfrac{3}{2}\qquad\therefore p_2+p_4=3\qquad\cdots\cdots㉠$

$k=3$일 때,

함수 $f(x)$의 주기가 2이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하여도 그래프의 모양은 동일하다. 또한, 직선 $y=g(x-3)$은 직선 $y=g(x-1)$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-3)$의 교점은 점 $(p_1,\ 0)$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, 교점의 x좌표가 p_1+2이므로 $p_5=p_1+2$라 하자.

$k=4$일 때,
마찬가지로 함수 $f(x)$의 주기가 2이고, 직선 $y=g(x-4)$는 직선 $y=g(x-2)$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x-4)$의 교점의 x좌표는 p_2+2, p_3+2, p_4+2이다.
$p_6=p_2+2$, $p_7=p_3+2$, $p_8=p_4+2$라 하자.
⋮
서로 다른 두 자연수 s, t에 대하여 $A_s \cap A_t=\varnothing$
또한, $p_1=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<p_2<1$, $p_3=\frac{3}{2}$, $2<p_4<\frac{5}{2}$이고,
자연수 n에 대하여 $p_{n+4}=p_n+2$이므로 $p_n<p_{n+1}$



따라서 $a_n=p_n$이고 $a_{n+4}=a_n+2$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+a_2+\frac{3}{2}+a_4$$
$$=2+3=5\ (\because\ ㉠에서\ a_2+a_4=3)$$

$a_5+a_6+a_7+a_8$
$=(a_1+2)+(a_2+2)+(a_3+2)+(a_4+2)$
$=(a_1+a_2+a_3+a_4)+8$
$=5+8$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$
$=(a_5+2)+(a_6+2)+(a_7+2)+(a_8+2)$
$=(a_5+a_6+a_7+a_8)+8$
$=5+8+8$
⋮
$a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}=5+8(n-1)$
따라서 수열 $\{S_{4n}\}$은 첫째항이 5이고 공차가 8인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로

$$S_{4n}=\frac{n\{2\times5+8(n-1)\}}{2}=4n^2+n$$

이때
$n=4$이면 $4\times4^2+4=68<100$
$n=5$이면 $4\times5^2+5=105>100$
이므로 $S_{4n}>100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다.　　**답** 5

09. 수열의 합

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.102~103

01 ③	02 ②	03 ④	04 10	05 ⑤
06 ⑤	07 1	08 2056	09 ③	10 ①
11 2	12 ②	13 ④	14 715	

01 ① $\sum_{i=1}^{n}2^i=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n=2+4+8+\cdots+2^n$

② $\sum_{k=2}^{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$
$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$

③ $\sum_{k=1}^{9}10(10^k-1)$
$=10(10^1-1)+10(10^2-1)+10(10^3-1)+\cdots+10(10^9-1)$
$=90+990+9990+\cdots+9999999990$

④ $\sum_{k=3}^{n-1}(k+1)(k+2)=4\times5+5\times6+6\times7+\cdots+n(n+1)$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k=(-1)^2\times1+(-1)^3\times2+(-1)^4\times3+\cdots+(-1)^{n+1}\times n$
$=1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}\times n$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.　　**답** ③

02 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-2a_k+1)$
$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1$
$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k+10=28$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k=18$　　……㉠

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}(a_k{}^2-a_k)$
$=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=16$　　……㉡

$2\times㉡-㉠$을 하면
$2\left(\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-\sum_{k=1}^{10}a_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k\right)=2\times16-18$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k{}^2=14$　　**답** ②

03 $\sum_{k=1}^{30}a_{2k-1}-\sum_{k=2}^{21}a_{2k+7}$
$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{59})-(a_{11}+a_{13}+a_{15}+\cdots+a_{49})$
$=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{51}+a_{53}+a_{55}+a_{57}+a_{59}$
이때 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $m+l=60$인 두 자연수 m, l에 대하여
$a_m+a_l=2a_{30}$

$\therefore \sum_{k=1}^{30} a_{2k-1} - \sum_{k=2}^{21} a_{2k+7}$

$=(a_1+a_{59})+(a_3+a_{57})+(a_5+a_{55})+(a_7+a_{53})+(a_9+a_{51})$

$=2a_{30}\times 5=10a_{30}$

따라서 $10a_{30}=110$이므로 $a_{30}=11$

**수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $2a_{30}=a_2+a_{58}$

$\therefore a_{58}=2a_{30}-a_2=22-5=17$ 답 ④

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{30} a_{2k-1} - \sum_{k=2}^{21} a_{2k+7}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{59})-(a_{11}+a_{13}+a_{15}+\cdots+a_{49})$

$=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{51}+a_{53}+a_{55}+a_{57}+a_{59}$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\frac{5(a+a+8d)}{2}=5(a+4d)$,

$a_{51}+a_{53}+a_{55}+a_{57}+a_{59}=\frac{5(a+50d+a+58d)}{2}$

$=5(a+54d)$

$\sum_{k=1}^{30} a_{2k-1} - \sum_{k=2}^{21} a_{2k+7}=110$이므로

$5(a+4d)+5(a+54d)=110$

$a+29d=11 \qquad \therefore a_{30}=11$

다음은 **와 같다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$이므로

$a_m+a_l=\{a+(m-1)d\}+\{a+(l-1)d\}$

$=2a+(m+l-2)d$

$=2(a+29d)$ ($\because m+l=60$)

$=2a_{30}$

04

$\sum_{k=1}^{10}\frac{2^{k+1}-3^{k-1}}{6^k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2^{k+1}}{6^k}-\sum_{k=1}^{10}\frac{3^{k-1}}{6^k}$

$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$

$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+1\right\}$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=1$이므로

$a+2b+3c=1+6+3=10$ 답 10

05

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2+n-n=n^2$ (참)

ㄴ. $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=n+n+1+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$=\frac{12n^2+6n+2n^2+3n+1}{6n}$

$=\frac{14n^2+9n+1}{6n}$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2+3+\cdots+k}{k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{n^2+3n}{2}=\frac{n(n+3)}{4}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06

$\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{5}jk\right)-\sum_{k=1}^{5}\left\{\sum_{j=1}^{10}(j+k)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{j=1}^{5}j\right)-\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{10}j+\sum_{j=1}^{10}k\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(k\times\frac{5\times 6}{2}\right)-\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{10\times 11}{2}+10k\right)$

$=15\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{5}55-10\sum_{k=1}^{5}k$

$=15\times\frac{10\times 11}{2}-55\times 5-10\times\frac{5\times 6}{2}$

$=825-275-150$

$=400$ 답 ⑤

07

자연수 n에 대하여 $f(n)=(9^n$의 일의 자리의 수$)$이므로

$f(1)=9$, $f(2)=1$, $f(3)=9$, $f(4)=1$, $\cdots$

마찬가지로 $g(n)=(8^n$의 일의 자리의 수$)$이므로

$g(1)=8$, $g(2)=4$, $g(3)=2$, $g(4)=6$, $g(5)=8$, $\cdots$

이때 $a_n=f(n)-g(n)$이므로

$a_1=f(1)-g(1)=9-8=1$

$a_2=f(2)-g(2)=1-4=-3$

$a_3=f(3)-g(3)=9-2=7$

$a_4=f(4)-g(4)=1-6=-5$

$a_5=f(5)-g(5)=9-8=1$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은

$1, -3, 7, -5, 1, -3, 7, -5, \cdots$

이므로 $1, -3, 7, -5$가 이 순서대로 계속 반복된다.

따라서 $777=4\times 194+1$이므로

$\sum_{k=1}^{777} a_k = \sum_{k=1}^{776} a_k + a_{777}$

$= 194\sum_{k=1}^{4} a_k + a_1$

$= 194(1-3+7-5)+1$

$= 1$ **답** 1

BLACKLABEL 특강 참고

자연수 a에 대하여 a, a^2, a^3, …의 일의 자리의 수를 구할 때는 거듭제곱의 값을 모두 구하지 않고 다음과 같이 일의 자리의 수만 계산하여 구해도 된다.

3의 일의 자리의 수 ⇨ 3

3^2의 일의 자리의 수 ⇨ $3\times3=9$에서 9

3^3의 일의 자리의 수 ⇨ $9\times3=27$에서 7

3^4의 일의 자리의 수 ⇨ $7\times3=21$에서 1

⋮

08

[1단계]에서 색칠된 정사각형의 개수는 2이고, 색칠된 정사각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$a_1=2,\ b_1=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$

[2단계]에서 색칠된 정사각형의 개수는 4이고, 색칠된 정사각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$이므로

$a_2=4=2^2,\ b_2=\frac{1}{16}\times4=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$

[3단계]에서 색칠된 정사각형의 개수는 8이고, 색칠된 정사각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$이므로

$a_3=8=2^3,\ b_3=\frac{1}{64}\times8=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$

⋮

따라서 [n단계]에서 색칠된 정사각형의 개수는 2^n이고, 색칠된 정사각형 하나의 넓이는 $\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{2n}}$이므로

$a_n=2^n,\ b_n=\frac{1}{2^{2n}}\times2^n=\frac{1}{2^n}$

* $\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k(b_k+1)=\sum_{k=1}^{10} 2^k\left(\frac{1}{2^k}+1\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}(1+2^k)$

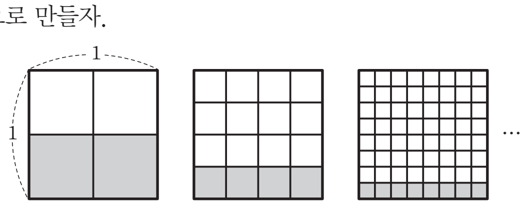
$=10+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$

$=10+2046$

$=2056$ **답** 2056

• 다른 풀이 •

색칠된 정사각형을 그림과 같이 이동시켜 하나의 직사각형으로 만들자.



[1단계] [2단계] [3단계]

각 단계별 색칠된 정사각형의 개수는

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=8,\ \cdots$

$\therefore a_n=2^n$

각 단계별 직사각형의 가로의 길이는 모두 1이므로 그 넓이는

$b_1=\frac{1}{2},\ b_2=\frac{1}{2^2},\ b_3=\frac{1}{2^3},\ \cdots$

$\therefore b_n=\frac{1}{2^n}$

다음은 *와 같다.

09

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구하면

(i) $n\ge2$일 때,

$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1}$

$=n^2+4n-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$

$=n^2+4n-(n^2-2n+1+4n-4)$

$=2n+3$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=1^2+4=5$

(i), (ii)에서

$a_{2n-1}=2n+3$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

위의 일반항에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2\times2+3=7$

*이때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_3-a_1=2d$에서

$7-5=2d$

$2d=2 \quad \therefore d=1$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times1=n+4$

$\therefore a_{20}=20+4=24$ **답** ③

• 다른 풀이 1 •

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=n^2+4n$에서

$n=1$일 때, $a_1=1^2+4=5$,

$n=2$일 때, $a_1+a_3=2^2+4\times2=12$

이므로 $a_3=12-5=7$

다음은 *와 같다.

• 다른 풀이 2 •

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 한 것이다.

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=S_n$이라 하면

$S_n=n^2+4n$이므로

$S_{11}=11^2+4\times11=165$,

$S_9=9^2+4\times9=117$

에서

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{21}=165$ ……㉠

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{17}=117$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$a_{19}+a_{21}=48$

이때 a_{20}은 a_{19}, a_{21}의 등차중항이므로 $2a_{20}=a_{19}+a_{21}$에서

$2a_{20}=48 \qquad \therefore a_{20}=24$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

이 문제에서 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$은 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들의 합이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$S_{2n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \neq S_{2n-1}$

즉, $\sum$를 S_n으로 바꾸어 나타낼 때 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=S_{2n-1}$로 두고 문제를 풀어 답을 틀리는 경우가 있으니 주의하도록 하자.

10 수열 $\frac{1}{2\times5}$, $\frac{1}{5\times8}$, $\frac{1}{8\times11}$, $\cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{29}}-\frac{1}{32}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{15}{32}=\frac{5}{32}\end{aligned}$$

따라서 $p=32$, $q=5$이므로

$p+q=37$ 답 ①

BLACKLABEL 특강 참고

수열의 합의 소거 형태

부분분수에서 소거하여 수열의 합을 구할 때, 소거가 안 되는 수의 위치는 대칭을 이룬다. 예를 들어,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k+1}-\frac{k+4}{k+3}\right)\\&=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{6}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+3}{n+2}\right)+\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+4}{n+3}\right)\\&=\left(\frac{3}{2}-\cancel{\frac{5}{4}}\right)+\left(\frac{4}{3}-\cancel{\frac{6}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{5}{4}}-\cancel{\frac{7}{6}}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\cancel{\frac{n+1}{n}}-\frac{n+3}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{n+2}{n+1}}-\frac{n+4}{n+3}\right)\\&=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{n+3}{n+2}-\frac{n+4}{n+3}\end{aligned}$$

와 같이 앞에서 첫 번째, 세 번째 수가 소거되지 않으면 뒤에서 첫 번째, 세 번째 수도 소거되지 않는다.

11 첫째항이 4, 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times1=n+3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}&=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3}}\\&=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+4}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})}\\&=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3})\\&=(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{4})+(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{5}})+\cdots+(\sqrt{16}-\cancel{\sqrt{15}})\\&=-\sqrt{4}+\sqrt{16}=-2+4=2\end{aligned}$$

답 2

• 다른 풀이 •

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}\\&=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}\\&=\sum_{k=1}^{12}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}\\&=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})\\&=(\cancel{\sqrt{a_2}}-\sqrt{a_1})+(\cancel{\sqrt{a_3}}-\cancel{\sqrt{a_2}})+(\cancel{\sqrt{a_4}}-\cancel{\sqrt{a_3}})+\cdots\\&\qquad+(\sqrt{a_{13}}-\cancel{\sqrt{a_{12}}})\\&=-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{13}}\\&=-\sqrt{4}+\sqrt{16}\ (\because a_n=4+(n-1)\times1=n+3)\\&=-2+4=2\end{aligned}$$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 1인 등차수열이므로 $a_{k+1}-a_k=1$

12
$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{39}(\log_3 a_{2n-1}-\log_3 a_{2n})\\&=\sum_{n=1}^{39}\log_3\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}\\&=\sum_{n=1}^{39}\log_3\frac{2n+1}{2n+3}\\&=\log_3\frac{3}{5}+\log_3\frac{5}{7}+\log_3\frac{7}{9}+\cdots+\log_3\frac{79}{81}\\&=\log_3\left(\frac{3}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{9}}\times\cdots\times\frac{\cancel{79}}{81}\right)\\&=\log_3\frac{1}{27}=\log_3 3^{-3}=-3\end{aligned}$$

답 ②

13 주어진 수열을

$\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $\cdots$,

$\left(\frac{25}{25}, \frac{24}{25}, \frac{23}{25}, \cdots, \frac{1}{25}\right)$,

$\left(\frac{27}{27}, \frac{26}{27}, \frac{25}{27}, \cdots, \frac{4}{27}, \cdots, \frac{1}{27}\right)$, $\cdots$

과 같이 분모가 같은 것끼리 묶은 군수열로 생각하면

제n군의 분모는 $2n-1$이고, 항의 개수도 $2n-1$이므로

$\frac{4}{27}$는 제14군의 24번째 항이다.

한편, 제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{13}(2k-1)&=2\sum_{k=1}^{13}k-13\\&=2\times\frac{13\times14}{2}-13\\&=182-13\\&=169\end{aligned}$$

따라서 $169+24=193$이므로 $\frac{4}{27}$는 193번째 항에서 처음으로 나타난다.

답 ④

14 표에 채워진 수는 1이 1개, 2가 3개, 3이 5개, $\cdots$, 10이 19개이므로 그 합은

$1\times1+2\times3+3\times5+\cdots+10\times19$

이것은 일반항이 $n(2n-1)$인 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같으므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{10}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$$
$$=770-55=715$$

답 715

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.104~108

01 ④	02 ④	03 55	04 188	05 10
06 ②	07 ③	08 ⑤	09 3025	10 220
11 ②	12 120	13 ①	14 ④	15 46
16 ①	17 60	18 208	19 ③	20 221
21 ⑤	22 49	23 ②	24 127	25 440
26 4	27 120	28 ①	29 ⑤	30 231

01 ㄱ. $\sum_{n=1}^{46}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{46}$

$$=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{44}+a_{45}+a_{46})$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{15}(a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1})\ (\text{참})$$

ㄴ. $1+2+2^2+\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}2^k$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{l=2}^{11}(l-1)^5=1^5+2^5+3^5+\cdots+10^5$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^5\ (\text{참})$$

$\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 변수인 k는 i, j, l 등 다른 문자로 바꾸어도 무방하다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

02 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k+2^{k-1})$

$$=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}2^{k-1}$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+\frac{2^{10}-1}{2-1}$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+1023=1000$$
$$\therefore\ 3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=-23\quad\cdots\cdots㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}\left(a_k+3b_k-\frac{11}{2}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}\frac{11}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\frac{11}{2}\times10$$
$$=\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-55=84$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k=139\quad\cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=7$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=44$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=7+44=51$

답 ④

03 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=3$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{m}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{m}(a_k+m)=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}-a_k-m)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(3-m)=m(3-m)$$

즉, $m(3-m)=66-174=-108$이므로

$m^2-3m-108=0$, $(m+9)(m-12)=0$

$\therefore\ m=-9$ 또는 $m=12$

이때 m은 자연수이므로 $m=12$

$$\sum_{k=1}^{12}(a_k+12)=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{12}12$$
$$=\frac{12(2a_1+11\times3)}{2}+12\times12$$
$$=174$$

즉, $6(2a_1+33)+144=174$에서 $a_1=-14$

$\therefore\ a_{2m}=a_{24}=-14+23\times3=55$

답 55

04 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n=\frac{2n^2-n}{n}=2n-1,\ b_n=\frac{-(2-n)}{n}=-\frac{2}{n}+1$$

이때 $b_n-1=-\frac{2}{n}$이므로

$$\frac{1}{b_n-1}=-\frac{n}{2}$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{16}\left(a_k+\frac{1}{b_k-1}\right)=\sum_{k=1}^{16}\left\{(2k-1)-\frac{k}{2}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{16}\left(\frac{3}{2}k-1\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{16\times17}{2}-1\times16$$
$$=204-16=188$$

답 188

05 $1\times(2n-1)+2\times(2n-3)+3\times(2n-5)+\cdots+n\times1$

$$=\sum_{k=1}^{n}[k\times\{2n-(2k-1)\}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+1)k\}$$

$$=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)(2n+1)\left(-\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

즉, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=385$이고 385를 소인수분해 하면 $385=5\times7\times11$이므로

$$\begin{aligned} n(n+1)(2n+1)&=2\times3\times5\times7\times11\\ &=10\times11\times21\\ &=10\times(10+1)\times(2\times10+1)\end{aligned}$$

$\therefore n=10$ **답** 10

06 $\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$에서

$$-\frac{1}{2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}<n^2+n+\frac{1}{4}-m<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$$

이때 m, n은 자연수이므로 n^2+n-m은 정수이다.

즉, $n^2+n-m=0$이므로 $m=n^2+n$

$\therefore a_n=n^2+n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$$

$$=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$$

$$=55+15=70$$

답 ②

BLACKLABEL 특강 참고

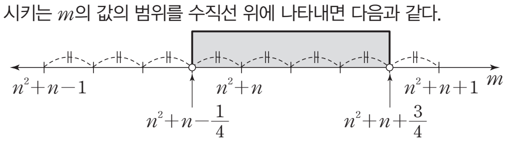
수직선을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m의 값을 구해 보자.

$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}<m-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}<m<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$\therefore n^2+n-\frac{1}{4}<m<n^2+n+\frac{3}{4}$

이때 자연수 n에 대하여 n^2+n도 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 m의 값의 범위를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



그런데 m은 자연수이므로 $a_n=n^2+n$

07 $n=1$일 때, $\frac{(n-1)^3}{n}=\frac{(1-1)^3}{1}=0$이므로

$$\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{(k+1)^3}{k}-\sum_{n=2}^{t}\frac{(n-1)^3}{n}\right\}$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{(k+1)^3}{k}-\sum_{n=1}^{t}\frac{(n-1)^3}{n}\right\}$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left[t^3-\sum_{k=1}^{t}\left\{\frac{(k+1)^3}{k}+\frac{(k-1)^3}{k}\right\}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left(t^3-\sum_{k=1}^{t}\frac{2k^3+6k}{k}\right)$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-\sum_{k=1}^{t}(2k^2+6)\right\}$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left\{t^3-2\times\frac{t(t+1)(2t+1)}{6}-6t\right\}$$

$$=\sum_{t=1}^{10}\left(\frac{1}{3}t^3-t^2-\frac{19}{3}t\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2-\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{19}{3}\times\frac{10\times11}{2}$$

$$=\frac{3025}{3}-385-\frac{1045}{3}=275$$

답 ③

08 $\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}$

$$=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-29^2+30^2$$

$$=-(1^2+3^2+5^2+\cdots+29^2)+(2^2+4^2+6^2+\cdots+30^2)$$

$$=-\sum_{k=1}^{15}(2k-1)^2+\sum_{k=1}^{15}(2k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\{-(2k-1)^2+(2k)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}(4k-1)$$

$$=4\times\frac{15\times16}{2}-1\times15$$

$$=480-15=465$$

답 ⑤

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}$

$$=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-29^2+30^2$$

$$=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots+(-29^2+30^2)$$

$$=(-1+2)(1+2)+(-3+4)(3+4)+\cdots+(-29+30)(29+30)$$

$$=1+2+3+4+\cdots+29+30$$

$$=\sum_{k=1}^{30}k=\frac{30\times31}{2}=465$$

09 $\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

$$\begin{aligned}&=(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2)\\ &\quad+(2^2+3^2+\cdots+9^2+10^2)\\ &\quad+(3^2+\cdots+9^2+10^2)\\ &\qquad\vdots\\ &\quad+(9^2+10^2)\\ &\quad+10^2\end{aligned}$$

$$=1^2\times1+2^2\times2+3^2\times3+\cdots+10^2\times10$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^3$$

$$=\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2=3025$$

답 3025

단계	채점 기준	배점
(가)	$\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$을 구체적인 수로 나열하여 $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$으로 변형한 경우	80%
(나)	자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 주어진 식의 값을 구한 경우	20%

10 $xy+96=8x+12y+5^n$에서

$x(y-8)-12(y-8)=5^n$

$(x-12)(y-8)=5^n$ ······㉠

이때 x, y가 정수이므로 $x-12$, $y-8$도 정수이다.

즉, $x-12$, $y-8$은 $\pm(5^n$의 약수$)$이므로 ㉠에서 $x-12$가 될 수 있는 값은

5^0, 5^1, 5^2, $\cdots$, 5^n 또는 -5^0, -5^1, -5^2, $\cdots$, -5^n

또한, 각 $x-12$의 값에 따라 $y-8$의 값도 하나씩 정해지므로 두 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수 a_n은

$a_n=(n+1)\times2=2(n+1)$

$\therefore a_{2k-1}=2(2k-1+1)=4k$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}ka_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}4k^2=4\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=4\times\frac{5\times6\times11}{6}$

$=220$

답 220

11 방정식 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 또는 $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

이때 $\omega^3=1$, $\omega^2=-\omega-1$이고, ω^n의 실수부분이 $f(n)$이므로

$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 또는 $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$에서 $f(1)=-\frac{1}{2}$,

$\omega^2=-\omega-1$에서 $f(2)=-\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{1}{2}$,

$\omega^3=1$에서 $f(3)=1$,

$\omega^4=\omega^3\times\omega=\omega$에서 $f(4)=f(1)=-\frac{1}{2}$,

$\omega^5=\omega^3\times\omega^2=\omega^2$에서 $f(5)=f(2)=-\frac{1}{2}$,

⋮

즉, $f(n)$은 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 계속 반복된다.

따라서 $100=3\times33+1$이므로

$\sum_{k=1}^{100}f(k)=\sum_{k=1}^{99}f(k)+f(100)$

$=33\sum_{k=1}^{3}f(k)+f(1)$

$=33\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ②

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

$f(n)$은 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1, 즉 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 이 순서대로 계속 반복되므로 $\sum_{k=1}^{100}f(k)=33\sum_{k=1}^{3}f(k)+f(1)$이다.

이와 같이 같은 수가 반복되는 수열의 합은 한 주기의 합을 구하여 반복되는 횟수만큼 곱하고 남은 항의 합을 더하여 구할 수 있으므로 한 주기의 합을 먼저 계산해 두는 것이 편리하다.

12 $\frac{n(n+1)}{2}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하면

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, $\cdots$

이때 $\frac{n(n+1)}{2}$을 n으로 나누었을 때의 나머지가 $f(n)$이므로

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $f(3)=0$, $f(4)=2$,

$f(5)=0$, $f(6)=3$, $f(7)=0$, $f(8)=4$, $\cdots$

$$\therefore f(n)=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ \frac{n}{2} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}f(k)=f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(30)$

$(\because f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(29)=0)$

$=\frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}+\cdots+\frac{30}{2}$

$=1+2+3+\cdots+15$

$=\sum_{k=1}^{15}k=\frac{15\times16}{2}$

$=120$

답 120

•다른 풀이•

자연수 n에 대하여 $\frac{n(n+1)}{2}$을 n으로 나누었을 때의 나머지가 $f(n)$이므로

(i) n이 홀수일 때,

$n=2p-1$ (p는 자연수)이라 하면

$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(2p-1)\times2p}{2}=p(2p-1)$

이므로 $p(2p-1)$을 $2p-1$로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

$\therefore f(n)=f(2p-1)=0$

(ii) n이 짝수일 때,

$n=2p$ (p는 자연수)라 하면

$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2p(2p+1)}{2}=p(2p+1)$

이므로 $2p^2+p$를 $2p$로 나누었을 때의 나머지는 p이다.

$\therefore f(n)=f(2p)=p$

(i), (ii)에서

$\sum_{k=1}^{30}f(k)=\sum_{k=1}^{15}f(2k-1)+\sum_{k=1}^{15}f(2k)$

$=\sum_{k=1}^{15}0+\sum_{k=1}^{15}k$

$=\frac{15\times16}{2}=120$

13 15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 구하면

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4,\ a_4=7,\ a_5=8,\ a_6=11,\ a_7=13,$
$a_8=14,\ \cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{8} a_n=1+2+4+7+8+11+13+14=60$

이때 14 이하의 자연수 k가 15와 서로소이면 $k+15$도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15,\ a_{10}=a_2+15,\ \cdots,\ a_{16}=a_8+15,\ \cdots$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{16} a_n&=\sum_{n=1}^{8} a_n+\sum_{n=9}^{16} a_n\\&=\sum_{n=1}^{8} a_n+\sum_{n=1}^{8}(a_n+15)\\&=2\sum_{n=1}^{8} a_n+15\times 8\\&=2\times 60+120\\&=240\end{aligned}$$

답 ①

• 다른 풀이 •

$15(k-1)+1\le n\le 15k$ (k는 자연수)를 만족시키는 자연수 n 중에서 15와 서로소인 자연수는

$15(k-1)+1,\ 15(k-1)+2,\ 15(k-1)+4,$
$15(k-1)+7,\ 15(k-1)+8,\ 15(k-1)+11,$
$15(k-1)+13,\ 15(k-1)+14$의 8개이다.

$8\times 2=16$이므로 a_{16}은 $16\le n\le 30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중에서 가장 큰 수이다.

즉, $\sum_{n=1}^{16} a_n$은 1부터 30까지의 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이고, 1부터 30까지의 자연수 중에는 3의 배수가 10개, 5의 배수가 6개, 15의 배수가 2개 있으므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{16} a_n&=\sum_{n=1}^{30} n-\sum_{n=1}^{10} 3n-\sum_{n=1}^{6} 5n+\sum_{n=1}^{2} 15n\\&=\frac{30\times 31}{2}-3\times\frac{10\times 11}{2}-5\times\frac{6\times 7}{2}+15\times\frac{2\times 3}{2}\\&=465-165-105+45=240\end{aligned}$$

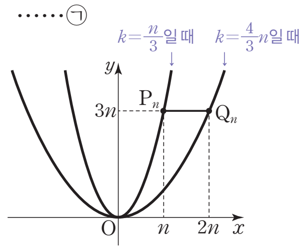
14 함수 $y=\frac{1}{k}x^2$의 그래프가

점 $\mathrm{P}_n(n,\ 3n)$을 지날 때 $3n=\frac{1}{k}\times n^2$에서 $k=\frac{n}{3}$이고,

점 $\mathrm{Q}_n(2n,\ 3n)$을 지날 때 $3n=\frac{1}{k}\times 4n^2$에서 $k=\frac{4}{3}n$

이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 곡선 $y=\frac{1}{k}x^2$이 만나기 위한 k의 값의 범위는

$\frac{n}{3}\le k\le \frac{4}{3}n$ ……㉠



n은 자연수이므로 자연수 m에 대하여 다음과 같이 나누어 생각해 보자.

(i) $n=3m-2$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}(3m-2)\le k\le\frac{4}{3}(3m-2)$

$\therefore m-\frac{2}{3}\le k\le 4m-2-\frac{2}{3}$

이때 $m,\ 4m-2$는 자연수이므로 $\underbrace{\text{조건을 만족시키는 자연수 }k\text{의 개수는}}_{m,\,m+1,\,m+2,\,\cdots,\,4m-3}$

$4m-3-m+1=3m-2$

(ii) $n=3m-1$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}(3m-1)\le k\le\frac{4}{3}(3m-1)$

$\therefore m-\frac{1}{3}\le k\le 4m-1-\frac{1}{3}$

이때 $m,\ 4m-1$은 자연수이므로 $\underbrace{\text{조건을 만족시키는 자연수 }k\text{의 개수는}}_{m,\,m+1,\,m+2,\,\cdots,\,4m-2}$

$4m-2-m+1=3m-1$

(iii) $n=3m$일 때,

㉠에서 $\frac{1}{3}\times 3m\le k\le\frac{4}{3}\times 3m$

$\therefore m\le k\le 4m$

이때 $m,\ 4m$은 자연수이므로 $\underbrace{\text{조건을 만족시키는 자연수 }k\text{의 개수는}}_{m,\,m+1,\,m+2,\,\cdots,\,4m}$

$4m-m+1=3m+1$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{17} a_n&=\sum_{n=1}^{6} a_{3n-2}+\sum_{n=1}^{6} a_{3n-1}+\sum_{n=1}^{5} a_{3n}\\&=\sum_{n=1}^{6}(3n-2)+\sum_{n=1}^{6}(3n-1)+\sum_{n=1}^{5}(3n+1)\\&=3\times\frac{6\times 7}{2}-6\times 2+3\times\frac{6\times 7}{2}-6+3\times\frac{5\times 6}{2}+5\\&=63-12+63-6+45+5\\&=158\end{aligned}$$

답 ④

BLACKLABEL 특강 참고

위의 풀이에서 다음과 같이 해결할 수 있다.
(i) $n=3m-2$일 때,
조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $3m-2$, 즉 n이다.
(ii) $n=3m-1$일 때,
조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $3m-1$, 즉 n이다.
(iii) $n=3m$일 때,
조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는 $3m+1$, 즉 $n+1$이다.
(i), (ii), (iii)에서
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{17} a_n&=\sum_{n=1}^{17} n+5=\frac{17\times 18}{2}+5\\&=153+5=158\end{aligned}$$

15 집합 $A_n=\{x\,|\,(x-n)(x-2n+1)\le 0\}$이므로

$(x-n)(x-2n+1)\le 0$에서 $n\le x\le 2n-1$

$\therefore A_n=\{x\,|\,n\le x\le 2n-1\}$

$25\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면

$n\le 25\le 2n-1$

$n\le25$이고, $25\le2n-1$에서 $n\ge13$이므로

$13\le n\le25$

$\therefore a_n=\begin{cases}-1 & (1\le n\le12 \text{ 또는 } n\ge26)\\ 1 & (13\le n\le25)\end{cases}$

한편,

$\sum_{k=1}^{12}a_k=(-1)\times12=-12$,

$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k=(-1)\times12+1\times13=1$

이므로 $\sum_{k=1}^{m}a_k=-20$이려면 $m\ge26$이어야 한다.

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k+\sum_{k=26}^{m}a_k$

$=(-1)\times12+1\times13+(-1)\times(m-25)$

$=-m+26=-20$

$\therefore m=46$

답 46

16 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $S_n=n^3$이므로

(i) $n\ge2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^3-(n-1)^3$

$=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)=3n^2-3n+1$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^3=1$

(i), (ii)에서 $a_n=3n^2-3n+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이므로

$a_{2n}=3\times(2n)^2-3\times2n+1$

$=12n^2-6n+1$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$\therefore \sum_{k=1}^{100}a_{2k}=\sum_{k=1}^{99}a_{2k}+a_{200}$

$=\sum_{k=1}^{99}(12k^2-6k+1)+a_{200}$

$=12\sum_{k=1}^{99}k^2-6\sum_{k=1}^{99}k+\sum_{k=1}^{99}1+a_{200}$

위의 식에서

$12\sum_{k=1}^{99}k^2=12\times\frac{99\times100\times199}{6}$,

$2\times99\times100\times199$

$6\sum_{k=1}^{99}k=6\times\frac{99\times100}{2}$, $\sum_{k=1}^{99}1=1\times99$

$3\times99\times100$

이므로 각각 99로 나누어떨어진다.

즉, $12\sum_{k=1}^{99}k^2-6\sum_{k=1}^{99}k+\sum_{k=1}^{99}1$은 99로 나누어떨어지므로

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$의 값을 99로 나누었을 때의 나머지는 a_{200}을 99로 나누었을 때의 나머지와 같다. 이때

$a_{200}=12\times100^2-6\times100+1$

$=12(99+1)^2-6(99+1)+1$

$=12(99^2+2\times99\times1+1^2)-6\times99-6+1$

$=99(12\times99+12\times2-6)+7$

이므로 a_{200}을 99로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$의 값을 99로 나누었을 때의 나머지는 7이다.

답 ①

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^3$에서

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$

$=n^3-(n-1)^3$

$=3n^2-3n+1$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)

이고, $a_1=1^3=1$이므로

$a_{2n}=3\times(2n)^2-3\times2n+1$

$=12n^2-6n+1$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

이때 $99=a$로 놓으면

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}=\sum_{k=1}^{a+1}(12k^2-6k+1)$

$=12\times\frac{(a+1)(a+2)(2a+3)}{6}$

$-6\times\frac{(a+1)(a+2)}{2}+a+1$

$=2(a+1)(a+2)(2a+3)$

$-3(a+1)(a+2)+a+1$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{100}a_{2k}$의 값을 99로 나누었을 때의 나머지는 다항식 ㉠을 a로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 나머지정리에 의하여 ㉠에 $a=0$을 대입하면 나머지는

$2\times1\times2\times3-3\times1\times2+1=7$

17 $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+cn$이므로

$a_{10}=\sum_{k=1}^{5}a_{2k}-\sum_{k=1}^{4}a_{2k}$

$=(5^2+5c)-(4^2+4c)=9+c$

$a_{10}=11$에서 $9+c=11$

$\therefore c=2$

즉, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=2n^2-5n$, $\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=n^2+2n$이고,

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n}a_k$

이므로

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=(2n^2-5n)+(n^2+2n)=3n^2-3n$

위의 식의 양변에 $n=5$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3\times5^2-3\times5=60$

답 60

• 다른 풀이 •

$\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=cn^2-5n$에서

$a_1=c-5$,

$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$

$$=cn^2-5n-\{c(n-1)^2-5(n-1)\}$$
$$=cn^2-5n-(cn^2-2cn+c-5n+5)$$
$$=2cn-c-5\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이므로

$a_{2n-1}=2cn-c-5$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

또한, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=n^2+cn$에서

$a_2=1+c$,

$$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k}$$
$$=n^2+cn-\{(n-1)^2+c(n-1)\}$$
$$=n^2+cn-(n^2-2n+1+cn-c)$$
$$=2n+c-1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이므로

$a_{2n}=2n+c-1$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

이때 $a_{10}=11$

$2\times5+c-1=11,\ 9+c=11 \qquad \therefore c=2$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=4n-7,\ a_{2n}=2n+1$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(4k-7+2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(6k-6)=6\times\frac{5\times6}{2}-6\times5$$
$$=90-30$$
$$=60$$

BLACKLABEL 특강 오답 피하기

$\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$이므로

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k=(cn^2-5n)+(n^2+cn)$$
$$=(c+1)n^2+(c-5)n$$

위의 식의 양변에 $n=\frac{m}{2}$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=(c+1)\left(\frac{m}{2}\right)^2+(c-5)\frac{m}{2}$$
$$=\frac{c+1}{4}m^2+\frac{c-5}{2}m$$

이러한 방법으로 $\sum_{k=1}^{m} a_k$를 구하여 틀리는 경우가 있다. $\sum_{k=1}^{2n} a_k$는 첫째항부터 짝수 번째 항까지의 합을 나타낸 것이므로 이 문제처럼 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$가 다르게 정의된 경우에 $\sum_{k=1}^{2n} a_k$의 식을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 식을 구하면 오류가 발생할 수 있음에 주의하자.

18 $b_n=\dfrac{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n}{n+1}$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n} b_k=n^2+7n+2$

(i) $n\ge2$일 때,

$$b_n=\sum_{k=1}^{n} b_k-\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$=n^2+7n+2-\{(n-1)^2+7(n-1)+2\}$$
$$=n^2+7n+2-(n^2-2n+1+7n-7+2)$$
$$=2n+6$$

(ii) $n=1$일 때,

$b_1=1^2+7\times1+2=10 \qquad \cdots\cdots$㉠

(i), (ii)에서 $b_1=10,\ b_n=2n+6$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

$n\ge2$에서

$b_n=\dfrac{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n}{n+1}=2n+6$이므로

$c_n=a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n$이라 하면

$c_n=(n+1)(2n+6)=2n^2+8n+6$ (단, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)

또한, $\underbrace{c_n-c_{n-1}}_{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-1)a_n-\{a_1+3a_2+5a_3+\cdots+(2n-3)a_{n-1}\}}=2n^2+8n+6-(2n^2+4n)$이므로

$(2n-1)a_n=4n+6$

$\therefore a_n=\dfrac{4n+6}{2n-1}$ (단, $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$)

한편, ㉠에서 $b_1=\dfrac{a_1}{2}=10$, 즉 $a_1=20$이므로

$a_1\times a_3\times a_5=20\times\dfrac{18}{5}\times\dfrac{26}{9}=208$ 답 208

19 $a_{1000}n^{1000}+a_{999}n^{999}+a_{998}n^{998}+\cdots+a_0=\sum_{k=0}^{1000} a_kn^k$

이므로

$\sum_{k=1}^{n} k^{999}=\sum_{k=0}^{1000} a_kn^k \qquad \cdots\cdots$㉠

이때 $\sum_{k=1}^{n} k^{999}=S_n$이라 하면 $n\ge2$일 때,

$$n^{999}=S_n-S_{n-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{1000} a_kn^k-\sum_{k=0}^{1000} a_k(n-1)^k\ (\because ㉠)$$
$$=\sum_{k=0}^{1000} a_k\{n^k-(n-1)^k\}$$
$$=a_0\{n^0-(n-1)^0\}$$
$$+a_1\{n^1-(n-1)^1\}$$
$$+a_2\{n^2-(n-1)^2\}$$
$$\vdots$$
$$+a_{1000}\{n^{1000}-(n-1)^{1000}\}$$
$$=a_1+a_2(2n-1)+a_3(3n^2-3n+1)+\cdots$$
$$+a_{1000}(1000n^{999}-\cdots-1)$$

위의 등식은 2 이상의 자연수 n에 대한 항등식이므로 양변의 n^{999}의 계수는 서로 같다.

즉, $1=1000a_{1000}$이므로

$a_{1000}=\dfrac{1}{1000}$ 답 ③

20 해결단계

❶ 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 a_{2n-2}, a_{2n-1} 사이의 관계를 구한다.
❷ 단계	수열 $\{a_{2n-1}\}$의 일반항을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{n=1}^{10}\lvert a_{2n-1}\rvert$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $a_1=5$이고 $n\ge2$일 때,

$$\underline{a_{2n-1}+a_{2n-2}}=\sum_{k=1}^{2n-1} a_k-\sum_{k=1}^{2n-3} a_k$$
$$=4n+1-\{4(n-1)+1\}$$
$$\underline{=4}_{*} \qquad \cdots\cdots㉠$$

조건 (나)에서 n 대신 $2n-3$을 대입하면

$|a_{2n-1}-a_{2n-2}|=3(2n-3)=6n-9\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

조건 (다)에서 n 대신 $n-1$을 대입하면

$a_{2n-2}>a_{2n-1}$

즉, 조건 (나), (다)에 의하여

$a_{2n-1}-a_{2n-2}=-6n+9\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a_{2n-1}=-3n+\frac{13}{2}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}|a_{2n-1}|=a_1+a_3+\sum_{n=3}^{10}\left(3n-\frac{13}{2}\right)$$

$n\geq3$이면 $a_{2n-1}=-3n+\frac{13}{2}<0$ 이므로 $|a_{2n-1}|=-a_{2n-1}=3n-\frac{13}{2}$

$$=5+\frac{1}{2}+3\sum_{n=3}^{10}n-8\times\frac{13}{2}$$

$$=5+\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{10\times11}{2}-1-2\right)-52$$

$$=\frac{219}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=219$이므로

$p+q=221$

답 221

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

조건 (가)에서 n에 1, 2, 3, …을 대입하면 다음과 같다.

$n=1$일 때, $a_1=5$

$n=2$일 때, $a_1+a_2+a_3=9$ $\quad\therefore a_2+a_3=4$

$n=3$일 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=13$ $\quad\therefore a_4+a_5=4$

⋮

$\therefore a_{2n-2}+a_{2n-1}=4\ (n\geq2)$

21

$S_n=n^2+6n$이므로

(i) $n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+6n)-\{(n-1)^2+6(n-1)\}$$
$$=2n+5$$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1+6=7$

(i), (ii)에서

$a_n=2n+5$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+5)(2k+7)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+5}-\frac{1}{2k+7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{7}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{13}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n+5}}-\frac{1}{2n+7}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2n+7}\right)=\frac{n}{7(2n+7)}$$

즉, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}<\frac{7}{100}$에서 $\dfrac{n}{7(2n+7)}<\dfrac{7}{100}$

$100n<98n+343$, $2n<343$

$\therefore n<171.5$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 171이다.

답 ⑤

22

$a_n=2n+1$이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n(n+2)$$

$$\therefore \frac{1}{S_{2n+3}}=\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$$

이때 $b_n=2^{\frac{1}{S_{2n+3}}}+2n+3$이므로

$b_n=2^{\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}}+a_{n+1}$에서

$b_n-a_{n+1}=2^{\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}}=2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)}$

$\therefore \log_2(b_n-a_{n+1})=\log_2 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\log_2(b_n-a_{n+1})$$

$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{43}}-\frac{1}{45}\right)\right\}$$

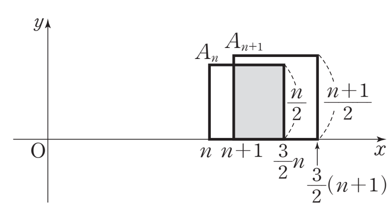
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{45}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{45}=\frac{4}{45}$$

따라서 $p=45$, $q=4$이므로

$p+q=49$

답 49

23



색칠한 부분의 세로의 길이는 정사각형 A_n의 세로의 길이인 $\frac{n}{2}$이고, 가로의 길이는 $\frac{3}{2}n-(n+1)=\frac{n-2}{2}$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$a_n=\dfrac{n-2}{2}\times\dfrac{n}{2}=\dfrac{n(n-2)}{4}$ (단, $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$)

$$\therefore \sum_{n=3}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{10}\frac{4}{n(n-2)}$$

$$=4\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{(n-2)n}$$

$$=4\times\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{10}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=2\times\frac{58}{45}$$

$$=\frac{116}{45}$$

답 ②

24 직선 $y=nx+a_n$과 곡선 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$이 접하므로 이차방정식 $nx+a_n=x^2-x+\frac{1}{4}$, 즉 $x^2-(n+1)x+\frac{1}{4}-a_n=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(n+1)^2-4\left(\frac{1}{4}-a_n\right)=0$$

$n^2+2n+1-1+4a_n=0$, $4a_n=-n^2-2n$

$\therefore a_n=\dfrac{-n^2-2n}{4}$

$a_k=\dfrac{-k^2-2k}{4}<0$이므로 $|a_k|=\dfrac{k^2+2k}{4}$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{7}\frac{1}{|a_k|}
&=\sum_{k=1}^{7}\frac{4}{k^2+2k}\\
&=4\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{k(k+2)}\\
&=4\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&=2\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\right.\\
&\qquad\left.+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{9}\right)\right\}\\
&=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\\
&=2\times\frac{91}{72}=\frac{91}{36}
\end{aligned}$$

따라서 $p=36$, $q=91$이므로

$p+q=127$ 답 127

25 $a_n=\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}$이므로

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}}\\
&=\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})}\\
&=\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^2
&=\sum_{k=1}^{10}\{(\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1})+(\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1})\}^2\\
&=\sum_{k=1}^{10}(2\sqrt{2k})^2=\sum_{k=1}^{10}8k\\
&=8\sum_{k=1}^{10}k=8\times\frac{10\times11}{2}\\
&=440
\end{aligned}$$

답 440

26 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=n^2$에서 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=S_n$이라 하면 $S_n=n^2$이므로

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n^2=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

$\therefore a_n=\sqrt{2n-1}$ ($\because a_n>0$)

(ii) $n=1$일 때,

$a_1^2=S_1=1$ $\quad\therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)

(i), (ii)에서

$a_n=\sqrt{2n-1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{40}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}
&=\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}\\
&=\sum_{k=1}^{40}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\\
&=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+\cdots+(\sqrt{81}-\cancel{\sqrt{79}})\}\\
&=\frac{1}{2}(\sqrt{81}-\sqrt{1})\\
&=\frac{1}{2}(9-1)=4
\end{aligned}$$

답 4

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 합을 이용하여 $n\geq2$일 때의 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구한다.	40%
(나)	주어진 합을 이용하여 a_1을 구한다.	20%
(다)	$\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}$의 값을 구한다.	40%

27 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 $2+\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}+3\sqrt{4}$, $\cdots$이므로

$a_n=(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{a_n}&=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\\
&=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\}\{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\}}\\
&=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}\\
&=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\\
&=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

*이때

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right)+\cdots\\
&\qquad+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{10}{11}
\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{11}$, $\sqrt{n+1}=11$

위의 식의 양변을 제곱하면

$n+1=121 \qquad \therefore n=120$ **답** 120

• 다른 풀이 •

수열 $\{a_n\}$의 각 항이 $2+\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}+3\sqrt{4}$, $\cdots$ 이므로

$a_n=(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{a_n}&=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

다음은 $*$와 같다.

28

주어진 수열을

$(1, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0, 0), \cdots$

과 같이 군수열로 생각하면 제n군의 0의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 0의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$n=13$일 때, 즉 제13군까지는 0이 $\frac{13\times14}{2}=91$(개)이므로 100번째로 나타나는 0은 제14군의 10번째 항이다.

제n군의 항의 개수가 $n+1$이므로 제1군부터 제13군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13}(k+1)=\sum_{k=1}^{13}k+13=\frac{13\times14}{2}+13=104$$

따라서 100번째로 나타나는 0은 $104+10=114$에서 제114항이다. **답** ①

• 다른 풀이 1 •

주어진 수열을

$(1), (0, 2), (0, 0, 3), (0, 0, 0, 4), \cdots$

와 같이 군수열로 생각하면 제n군의 0의 개수는 $n-1$이므로 제1군부터 제n군까지의 0의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k-n=\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$$

$n=14$일 때, 즉 제14군까지는 0이 $\frac{14\times13}{2}=91$(개)이므로 100번째로 나타나는 0은 제15군의 9번째 항이다.

제n군의 항의 개수가 n이므로 제1군부터 제14군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{14}k=\frac{14\times15}{2}=105$$

따라서 100번째로 나타나는 0은 $105+9=114$에서 제114항이다.

• 다른 풀이 2 •

주어진 수열을

$(1, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0, 0), \cdots$

과 같이 군수열로 생각하면 제n군에서 0이 아닌 수는 제n군의 첫 번째 항인 n뿐이다.

100번째로 나타나는 0이 제14군에 있고, 이 앞에 0이 아닌 수는 각 군의 첫 번째 항인 1, 2, 3, $\cdots$, 14이므로 100번째로 나타나는 0은 $100+14=114$에서 제114항이다.

29

n행에 놓인 수의 합을 A_n이라 하면

$$\begin{aligned}A_n&=(n+1)+2(n+1)+3(n+1)+\cdots+n(n+1)\\&=(n+1)(1+2+3+\cdots+n)\\&=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\&=\underline{(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}}_{\,*}\\&=\frac{1}{2}(n^3+2n^2+n)\end{aligned}$$

$**$ 상자 안의 수는 모두 10행이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}A_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}(k^3+2k^2+k)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}(3025+770+55)=1925\end{aligned}$$

답 ⑤

• 다른 풀이 1 •

$*$에서

$$\begin{aligned}A_n&=(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)^2}{2}\end{aligned}$$

상자 안의 수는 모두 10행이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}A_k&=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\{k(k+1)(k+2)-k(k+1)\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times12\times13}{4}-\frac{10\times11\times12}{3}\right)\\&=\frac{10\times11}{2}\left(\frac{12\times13}{4}-\frac{12}{3}\right)\\&=55\times35=1925\end{aligned}$$

• 다른 풀이 2 •

n행에 놓인 수는 첫째항이 $n+1$, 공차가 $n+1$인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 수이다.

n행에 놓인 수의 합을 A_n이라 하면

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{n\{2(n+1)+(n-1)(n+1)\}}{2}\\&=\frac{n(n^2+2n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(n^3+2n^2+n)\end{aligned}$$

다음은 $**$와 같다.

30 주어진 수열을

$(1),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}\right),\ \cdots$

과 같이 군수열로 생각하면 제n군의 최솟값은 $\frac{1}{n}$이므로

처음으로 $\frac{1}{20}$보다 작아지는 항은 $\frac{1}{21}$이고, $\frac{1}{21}$은 제21군의 마지막 항이다. ($\frac{1}{20}<\frac{2}{21}$이므로)

제n군의 항의 개수가 n이므로 제1군부터 제21군까지의 항의 개수는

$\sum_{k=1}^{21} k=\frac{21\times 22}{2}=231$

따라서 $\frac{1}{21}$은 231번째 항이므로

$m=231$ 답 231

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.109~110

01 29	02 170	03 ④	04 51	05 2144
06 240	07 19	08 $\frac{26}{55}$	09 7	10 184
11 6				

01 해결단계

❶ 단계	등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 a, d라 하고 주어진 식을 변형하여 $\sum_{n=1}^{18}(a_{2n}{}^2-a_{2n-1}{}^2)=d\times\sum_{n=1}^{36}a_n$임을 파악한다.
❷ 단계	a_{36}의 값을 통해 a와 d의 관계식을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 식과 $a>0$임을 이용하여 d의 값을 구한다.
❹ 단계	구한 a, d의 값을 이용하여 $\sum_{k=1}^{15}(-1)^{k-1}a_k$의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공차를 d $(d>0)$라 하면 (수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수)

$\sum_{n=1}^{18}(a_{2n}{}^2-a_{2n-1}{}^2)$

$=\sum_{n=1}^{18}(a_{2n}-a_{2n-1})(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=\sum_{n=1}^{18}d(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=d\sum_{n=1}^{18}(a_{2n}+a_{2n-1})=d\sum_{n=1}^{36}a_n$

이때 $a_{36}=45$이고 $a_{36}=a+35d$이므로

$a=a_{36}-35d=45-35d$ ······㉠

$\therefore\ d\sum_{n=1}^{36}a_n=d\times\frac{36\times(2a+35d)}{2}$

$=d\times\frac{36\times(90-35d)}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=90d(18-7d)$

즉, $90d(18-7d)=720$에서

$d(18-7d)=8,\ 7d^2-18d+8=0$

$(7d-4)(d-2)=0$ $\therefore\ d=\frac{4}{7}$ 또는 $d=2$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$a=45-35d>0$에서 $d<\frac{9}{7}$

$\therefore\ d=\frac{4}{7}$

㉠에서 $a=45-35\times\frac{4}{7}=25$이므로

$\sum_{k=1}^{15}(-1)^{k-1}a_k$

$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+\cdots+(a_{13}-a_{14})+a_{15}$

$=-7d+a+14d=a+7d$

$=25+7\times\frac{4}{7}=29$ 답 29

02 해결단계

❶ 단계	N을 n으로 나누었을 때의 몫을 Q라 하고, N을 n, Q에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	수열의 합을 이용하여 a_n을 n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구한다.

N을 n으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 각각 Q, R이라 하면

$N=n\times Q+R$ (단, $0\le R<n$)

이때 몫과 나머지의 합이 n이어야 하므로

$Q+R=n$ $\therefore\ R=n-Q$

$\therefore\ N=n\times Q+(n-Q)$ (단, $0<Q\le n$)

a_n은 N을 n으로 나누었을 때, 몫과 나머지의 합이 n인 모든 자연수 N의 합이므로

$a_n=\{n\times 1+(n-1)\}+\{n\times 2+(n-2)\}$
$+\{n\times 3+(n-3)\}+\cdots+\{n\times(n-1)+1\}$
$+(n\times n)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{n\times k+(n-k)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(n-1)k+n\}$

$=(n-1)\times\frac{n(n+1)}{2}+n^2$

$=\frac{n^3+2n^2-n}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+2k^2-k}{2}$

$=\frac{1}{22}\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2-k)$

$=\frac{1}{22}\left\{\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}-\frac{10\times 11}{2}\right\}$

$=\frac{1}{22}(3025+770-55)$

$=170$ 답 170

03 해결단계

❶ 단계	주어진 일반항 a_n을 이용하여 $\sum_{k=1}^{m} a_k$를 m을 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	$\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 자연수가 되도록 하는 조건을 구한다.
❸ 단계	주어진 조건을 만족시키는 m의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times2}{3}+\log_2\frac{2\times3}{4}+\log_2\frac{2\times4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times2}{\cancel{3}}\times\frac{2\times\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{2\times\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{2\times(\cancel{m+1})}{m+2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$$

이므로 $\sum_{k=1}^{m} a_k=N$ (N은 100 이하의 자연수)이라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N$에서 $\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N}$

$\therefore m+2=2^{m+1-2N}$

m은 자연수이므로 $m+2\geq3$

즉, $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때,

$2^{3-2N}=2^2$이므로 $3-2N=2$ $\quad\therefore N=\frac{1}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq2$

(ⅱ) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때,

$2^{7-2N}=2^3$이므로 $7-2N=3$ $\quad\therefore N=2$

(ⅲ) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때,

$2^{15-2N}=2^4$이므로 $15-2N=4$ $\quad\therefore N=\frac{11}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq14$

(ⅳ) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때,

$2^{31-2N}=2^5$이므로 $31-2N=5$ $\quad\therefore N=13$

(ⅴ) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때,

$2^{63-2N}=2^6$이므로 $63-2N=6$ $\quad\therefore N=\frac{57}{2}$

이때 N은 100 이하의 자연수이므로 $m\neq62$

(ⅵ) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때,

$2^{127-2N}=2^7$이므로 $127-2N=7$ $\quad\therefore N=60$

(ⅶ) $m+2\geq2^8$일 때

$N>100$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅶ)에서

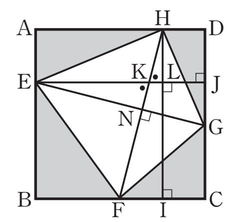
$m=6,\ 30,\ 126$이므로 모든 m의 값의 합은

$6+30+126=162$ 답 ④

04 해결단계

❶ 단계	점 H에서 변 BC, 점 E에서 변 CD에 수선의 발을 각각 내린다.
❷ 단계	$\overline{EG}=\overline{HF}$임을 확인한다.
❸ 단계	S_n을 n에 대한 식으로 나타낸 후, $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{S_n}$의 값을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 점 H에서 변 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 E에서 변 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자.



또한, 두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고, 선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하자.

두 삼각형 HKL, EKN에서

$\angle HKL=\angle EKN$이고 $\angle KLH=\angle KNE=90°$이므로

$\triangle HKL \backsim \triangle EKN$ (AA 닮음)

$\therefore \angle KHL=\angle KEN$ ……㉠

두 직각삼각형 HFI, EGJ에 대하여

$\angle FHI=\angle GEJ$ ($\because$ ㉠), $\overline{HI}=\overline{EJ}$, $\angle FIH=\angle GJE$

이므로

$\triangle HFI\equiv\triangle EGJ$ (ASA 합동)

* $\therefore \overline{EG}=\overline{HF}=2\sqrt{4n^2+1}$

네 삼각형 AEH, BFE, CGF, DHG의 넓이의 합 S_n은

$S_n=\square ABCD-\square EFGH$

$=(4n)^2-\frac{1}{2}(2\sqrt{4n^2+1})^2$

$=8n^2-2$

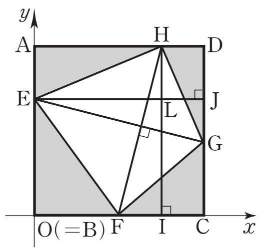
$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{S_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{8n^2-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{4n^2-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{39}}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)=\frac{10}{41}$$

따라서 $p=41$, $q=10$이므로

$p+q=51$ 답 51

• 다른 풀이 •

다음 그림과 같이 좌표평면 위에 점 B를 원점으로 하고, 두 반직선 BC, BA가 각각 x축, y축의 양의 방향으로 오도록 정사각형 ABCD를 놓자.



점 H에서 변 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 E에서 변 CD에 내린 수선의 발을 J라 하면 두 직선 EG, FH의 기울기는 각각

$-\dfrac{\overline{GJ}}{\overline{EJ}}$, $\dfrac{\overline{HI}}{\overline{FI}}$

이고, 두 직선이 서로 수직이므로

$-\dfrac{\overline{GJ}}{\overline{EJ}}\times\dfrac{\overline{HI}}{\overline{FI}}=-1$

이때 $\overline{EJ}=\overline{HI}=4n$이므로

$\dfrac{\overline{GJ}}{\overline{FI}}=1$

$\therefore\ \overline{FI}=\overline{GJ}$

두 직각삼각형 HFI, EGJ에 대하여

$\overline{HI}=\overline{EJ}$, $\angle HIF=\angle EJG$, $\overline{FI}=\overline{GJ}$이므로

$\triangle HFI\equiv\triangle EGJ$ (SAS 합동)

다음은 *와 같다.

05 해결단계

❶ 단계	다항식 $n^4+3n^3-129n^2+14n+35$를 $n+13$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구한다.
❷ 단계	n의 값의 범위에 따른 일반항 a_n을 구한다.
❸ 단계	$\sum\limits_{n=1}^{15}a_n$의 값을 구한다.

다항식 $n^4+3n^3-129n^2+14n+35$를 $n+13$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -13 & 1 & 3 & -129 & 14 & 35 \\ & & -13 & 130 & -13 & -13 \\ \hline & 1 & -10 & 1 & 1 & \boxed{22} \end{array}$$

에서

$n^4+3n^3-129n^2+14n+35$

$=(n+13)(n^3-10n^2+n+1)+22$

이므로

$\dfrac{n^4+3n^3-129n^2+14n+35}{n+13}$

$=\dfrac{(n+13)(n^3-10n^2+n+1)+22}{n+13}$

$=(n^3-10n^2+n+1)+\dfrac{22}{n+13}$

$\therefore\ a_n=\left[\dfrac{n^4+3n^3-129n^2+14n+35}{n+13}\right]$

$\quad=n^3-10n^2+n+1+\left[\dfrac{22}{n+13}\right]$

$\left[\dfrac{22}{n+13}\right]=b_n$이라 하면

(i) $1\le n\le 9$일 때,

$14\le n+13\le 22$에서 $1\le\dfrac{22}{n+13}\le\dfrac{11}{7}$

즉, $\left[\dfrac{22}{n+13}\right]=1$이므로 $b_n=1$

(ii) $10\le n\le 15$일 때,

$23\le n+13\le 28$에서 $\dfrac{11}{14}\le\dfrac{22}{n+13}\le\dfrac{22}{23}$

즉, $\left[\dfrac{22}{n+13}\right]=0$이므로 $b_n=0$

(i), (ii)에서

$\sum\limits_{n=1}^{15}a_n$

$=\sum\limits_{n=1}^{15}(n^3-10n^2+n+1)+\sum\limits_{n=1}^{15}b_n$

$=\left(\dfrac{15\times16}{2}\right)^2-10\times\dfrac{15\times16\times31}{6}+\dfrac{15\times16}{2}+15+9$

$=14400-12400+120+15+9$

$=2144$

답 2144

BLACKLABEL 특강 참고

$1\le n\le 15$에서 a_n을 구하면 다음과 같다.

$$a_n=\begin{cases} n^3-10n^2+n+2 & (1\le n\le 9) \\ n^3-10n^2+n+1 & (10\le n\le 15) \end{cases}$$

06 해결단계

❶ 단계	S_n을 이용하여 a_n과 a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 관계식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 구한 후, b_n을 a_n에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\sum\limits_{k=1}^{8}\dfrac{1}{b_k-1}=86$을 만족시키는 p의 값을 구한다.
❹ 단계	$(p+4)\times b_1\times b_3\times b_5\times b_7\times b_9\times b_{11}$의 값을 구한다.

(i) $n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=(4n^2+pn)-\{4(n-1)^2+p(n-1)\}$

$\quad=8n+p-4$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=4+p$

(i), (ii)에서

$a_n=8n+p-4$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$) ······㉠

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 8인 등차수열이므로 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k+a_{k+2}=2a_{k+1}$이 성립한다.

이차방정식 $a_kx^2-2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$에서

$a_kx^2-(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$

$(x-1)(a_kx-a_{k+2})=0\qquad\therefore\ x=1$ 또는 $x=\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이고 공차가 8인 등차수열이므로 $a_{k+2}>a_k$에서 $\dfrac{a_{k+2}}{a_k}>1$

즉, 이차방정식 $a_kx^2-2a_{k+1}x+a_{k+2}=0$의 두 실근 중 큰 수는 $\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$이므로 $b_k=\dfrac{a_{k+2}}{a_k}$ ······㉡

$\dfrac{1}{b_k-1}=\dfrac{1}{\dfrac{a_{k+2}}{a_k}-1}=\dfrac{a_k}{a_{k+2}-a_k}=\dfrac{a_k}{16}$이므로

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{b_k-1}=\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{16}=\frac{1}{16}S_8$$
$$=\frac{1}{16}(4\times8^2+8p)$$
$$=16+\frac{p}{2}=86$$

$\frac{p}{2}=70 \qquad \therefore p=140$

㉠에서 $a_n=8n+140-4=8n+136$이므로

$(p+4)\times b_1\times b_3\times b_5\times b_7\times b_9\times b_{11}$

$=144\times\frac{\cancel{a_3}}{a_1}\times\frac{\cancel{a_5}}{\cancel{a_3}}\times\frac{\cancel{a_7}}{\cancel{a_5}}\times\frac{\cancel{a_9}}{\cancel{a_7}}\times\frac{\cancel{a_{11}}}{\cancel{a_9}}\times\frac{a_{13}}{\cancel{a_{11}}}$ (∵ ㉡)

$=144\times\frac{a_{13}}{a_1}=144\times\frac{240}{144}=240$ 답 240

BLACKLABEL 특강 참고

등차수열과 등비수열의 합의 일반항

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 상수) 꼴, 즉 n에 대한 이차 이하의 다항식이면 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 이때 $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이루고, $C\neq0$이면 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 등차수열을 이루며 공차는 n^2의 계수의 두 배인 $2A$이다.
또한, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 T_n이 $T_n=Ar^n+B$ ($r\neq0$, $r\neq1$, A, B는 상수) 꼴일 때
$A+B=0$이면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이루고,
$A+B\neq0$이면 수열 $\{b_n\}$은 제2항부터 등비수열을 이루며 공비는 지수 n의 밑인 r이다.

07 해결단계

❶ 단계	조건 (가), (나)를 이용하여 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$의 공비를 구한다.
❷ 단계	$a_3a_7=\frac{25}{4}$를 이용하여 a_1의 값을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}-a_{2k})=\frac{31}{8}$을 이용하여 a_2의 값을 구하고, $p+q$의 값을 구한다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항을 a ($a>0$), 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$a_{2n-1}=ar^{n-1}$

조건 (나)에 의하여 $n=2k-1$일 때도 $\frac{a_n}{a_{n+16}}=256$이 성립하므로

$\frac{1}{r^8}=256 \qquad \therefore r=\frac{1}{2}$ (∵ $r>0$)

$\therefore a_{2n-1}=a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

마찬가지로 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비도 $\frac{1}{2}$이므로

$a_{2n}=a_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 $a_3a_7=\frac{25}{4}$이므로

$ar\times ar^3=\frac{25}{4}$, $\frac{a^2}{16}=\frac{25}{4}$

$a^2=100 \qquad \therefore a=10$ (∵ $a>0$)

즉, $a_{2k+1}=10\left(\frac{1}{2}\right)^k$이므로

$a_{2k+1}-a_{2k}=10\left(\frac{1}{2}\right)^k-a_2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=(5-a_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

이때 $\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}-a_{2k})=\frac{31}{8}$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k+1}-a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(5-a_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{(5-a_2)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{31}{16}(5-a_2)=\frac{31}{8}$$

$5-a_2=2 \qquad \therefore a_2=3$

$\therefore a_{10}=a_2r^4=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$

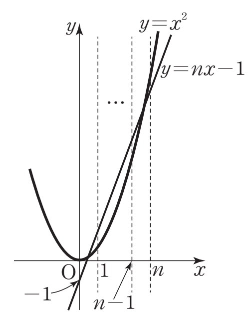
따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=19$ 답 19

08 해결단계

❶ 단계	두 그래프로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 x좌표를 a (a는 자연수)라 하고, 각 a의 값에 따라 y좌표가 자연수인 점의 개수를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 일반항 a_n을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{k=3}^{10}\frac{1}{a_k}$의 값을 구한다.

좌표평면 위에 두 함수 $y=x^2$, $y=nx-1$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



두 그래프로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표를 a ($a<n$)라 하면 구하는 점의 y좌표는 a^2보다 크거나 같고, $na-1$보다 작거나 같은 자연수이다. 즉,

$a^2\leq y\leq na-1$

$a=1$일 때 y좌표로 가능한 값은

$1, 2, 3, \cdots, n-1$의 $(n-1)$개,

$a=2$일 때 y좌표로 가능한 값은

$4, 5, 6, \cdots, 2n-1$의 $(2n-4)$개,

⋮

$a=k$일 때 y좌표로 가능한 값은

$k^2, k^2+1, k^2+2, \cdots, nk-1$의 $(nk-k^2)$개이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=n\times\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=3}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=3}^{10}\frac{6}{k(k-1)(k+1)}$$

$$=6\times\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{10}\left\{\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$=3\left\{\left(\frac{1}{2\times3}-\cancel{\frac{1}{3\times4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3\times4}}-\cancel{\frac{1}{4\times5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9\times10}}-\frac{1}{10\times11}\right)\right\}$$

$$=3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{110}\right)$$

$$=3\times\frac{52}{330}=\frac{26}{55}$$

답 $\frac{26}{55}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$a=n-1$일 때,
$(n-1)^2=n^2-2n+1$, $n(n-1)-1=n^2-n-1$이고
$n^2-2n+1-(n^2-n-1)=-n+2\le0$ ($\because$ n은 3 이상의 자연수)
이므로
$(n-1)^2\le n(n-1)-1$
$a=n$일 때,
$n^2>n^2-1$
이므로 두 그래프로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계에 포함되는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표인 a의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$이다.

09 해결단계

❶ 단계	$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$을 $\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{3}$로 변형한다.
❷ 단계	부등식의 각 변에 5를 계속 곱하여 자연수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 값을 차례대로 구한 후 수열 $\{a_n\}$의 규칙성을 찾는다.
❸ 단계	$a_{1000}+a_{1001}+a_{1002}$의 값을 구한다.

$0<\frac{1}{3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{5^n}$에서

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{5^k}<\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^n}<\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\cdots+\frac{a_n}{5^n}<\frac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{5}{3}-\frac{1}{5^{n-1}}<a_1+\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-1}}<\frac{5}{3}$ ……㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$\frac{2}{3}<a_1<\frac{5}{3}$

$\therefore$ $a_1=1$ ($\because$ a_1은 자연수)

㉠의 각 변에서 1을 빼면

$\frac{2}{3}-\frac{1}{5^{n-1}}<\frac{a_2}{5}+\frac{a_3}{5^2}+\frac{a_4}{5^3}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-1}}<\frac{2}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{10}{3}-\frac{1}{5^{n-2}}<a_2+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-2}}<\frac{10}{3}$ ……㉡

㉡에 $n=2$를 대입하면

$\frac{7}{3}<a_2<\frac{10}{3}$

$\therefore$ $a_2=3$ ($\because$ a_2는 자연수)

㉡의 각 변에서 3을 빼면

$\frac{1}{3}-\frac{1}{5^{n-2}}<\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{5^2}+\frac{a_5}{5^3}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-2}}<\frac{1}{3}$

위의 식의 각 변에 5를 곱하면

$\frac{5}{3}-\frac{1}{5^{n-3}}<a_3+\frac{a_4}{5}+\frac{a_5}{5^2}+\cdots+\frac{a_n}{5^{n-3}}<\frac{5}{3}$

위의 식에 $n=3$을 대입하면

$\frac{2}{3}<a_3<\frac{5}{3}$

$\therefore$ $a_3=1$ ($\because$ a_3은 자연수)

같은 방법으로 계속하면

$a_4=3$, $a_5=1$, $a_6=3$, $\cdots$

$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n\text{이 홀수})\\ 3 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$

$\therefore$ $a_{1000}+a_{1001}+a_{1002}=3+1+3=7$

답 7

10 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 집합 A에 속하지 않는 원소를 a_i $(1\le i\le15)$를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	두 집합 A, A^C의 모든 원소의 제곱의 합이 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같음을 식으로 나타낸다.
❸ 단계	조건 (나)와 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 $\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 집합 A의 임의의 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i$ $(1\le i\le15)$로 나타낼 수 있다.

따라서 $\sum_{i=1}^{15}a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다. 즉,

$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30}i^2$

$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31^2-62a_i+a_i^2)=\frac{30\times31\times61}{6}$

이때 조건 (나)에서 $\sum_{i=1}^{15}a_i=264$이므로

$2\sum_{i=1}^{15}a_i^2+31^2\times15-62\times264=5\times31\times61$

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{2}(5\times31\times61-31^2\times15+62\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(5\times61-31\times15+2\times264)$$

$$=\frac{31}{2}(305-465+528)$$

$$=31\times184$$

$$\therefore \frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{31}\times31\times184$$

$$=184$$

답 184

BLACKLABEL 특강 참고

두 원소의 합이 31이 되는 순서쌍은 (1, 30), (2, 29), $\cdots$, (15, 16)이므로 집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다.
주어진 조건을 만족시키는 집합 A는 여러 개가 있는데, 위의 방법을 이용하여 집합 A 중에서 하나를 구하면 다음과 같다.
{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30}

11 해결단계

❶ 단계	주어진 경로와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하고, 점 P_0에서 각 교점까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리를 구한다.
❷ 단계	점 P_0에서 점 P_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리가 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{4}$임을 파악한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 거리가 같음을 이용하여 n의 값을 구한다.
❹ 단계	❸ 단계에서 구한 n의 값에 대하여 점 P_n의 x좌표를 구한다.

주어진 경로와 직선 $y=x$의 교점의 좌표는

$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (4,\ 4),\ (6,\ 6),\ (9,\ 9),\ (12,\ 12),\ \cdots$

이므로 점 P_0에서 각 교점까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots$

이때 조건 (나)에 의하여 점 P_0에서 점 P_n까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$
$$= \frac{1}{4}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$$
$$= \frac{n^2+2n}{4}$$

점 P_n이 직선 $y=x$ 위에 있으려면

$\frac{n^2+2n}{4}=2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots$

이어야 하고, $\frac{n(n+2)}{4}=(\text{짝수})$ 꼴이므로

$n=2k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

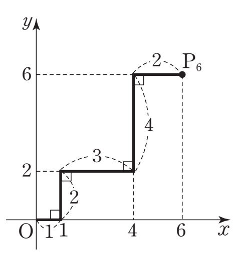
즉, $\frac{(2k)^2+2\times 2k}{4}=2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots$에서

$k^2+k=2,\ 4,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots$

$\therefore\ k=1,\ 3,\ \cdots$

$\therefore\ n=2,\ 6,\ \cdots$

따라서 점 P_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점은 P_6이다.



점 P_0에서 점 P_6까지 점 P가 경로를 따라 이동한 거리는

$\frac{6^2+2\times 6}{4}=12$이고, $12=(1+2+3+4)+2$이므로

점 P_6의 x좌표는 6이다. **답** 6

BLACKLABEL 특강 참고

(i) $\frac{n^2+2n}{4}=2$일 때,
$n^2+2n-8=0,\ (n+4)(n-2)=0$ $\therefore\ n=2$ ($\because$ n은 자연수)

(ii) $\frac{n^2+2n}{4}=4$일 때,
$n^2+2n-16=0$이고, 이 방정식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $\frac{n^2+2n}{4}=8$일 때,
$n^2+2n-32=0$이고, 이 방정식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $\frac{n^2+2n}{4}=12$일 때,
$n^2+2n-48=0,\ (n+8)(n-6)=0$ $\therefore\ n=6$ ($\because$ n은 자연수)

10. 수학적 귀납법

STEP 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 pp.112~113

01 ③	02 ③	03 212	04 20	05 ②
06 297	07 66	08 ⑤	09 ④	10 ⑤
11 320	12 ①	13 풀이 참조		

01

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하자.

$a_1=28,\ a_3=22$이므로

$28+2d=22$

$2d=-6$ $\therefore\ d=-3$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=28+(n-1)\times(-3)$
$=-3n+31$

ㄱ. $a_6=-3\times 6+31=13$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$
$=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$
$=a_n=-3n+31$ (참)

ㄷ. $a_n=-3n+31<0$에서
$n>\frac{31}{3}=10.3\times\times\times$
즉, 수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

02

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 이 수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$r=1$이면 $S_8=2S_4$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다. $\therefore\ r\neq 1$

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=90$ ……㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=1530$ ……㉡

㉡÷㉠을 하면

$\dfrac{\frac{a(r^8-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{1530}{90},\ \frac{r^8-1}{r^4-1}=17$

$\frac{(r^4+1)(r^4-1)}{r^4-1}=17,\ r^4+1=17$

$r^4=16$ $\therefore\ r=-2$ 또는 $r=2$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $r>0$

$\therefore\ r=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=90,\ 15a=90$

$\therefore\ a=6$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{6(2^{10}-1)}{2-1}=6\times 1023$$
$$=6138$$

답 ③

03 $b_{n+1}=b_n+4$에서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=3$, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 b_n은

$b_n=3+(n-1)\times 4$
$\quad=4n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_n+b_n-a_{n+1}=0$에 ㉠을 대입하면

$a_n+4n-1-a_{n+1}=0$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+4n-1$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=a_1+3\\
&\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+7\\
&\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+11\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{11}=\cancel{a_{10}}+39\\
\hline
&a_{11}=a_1+3+7+11+\cdots+39\\
&\quad=a_1+\sum_{k=1}^{10}(4k-1)\\
&\quad=2+4\times\frac{10\times 11}{2}-10\ (\because\ a_1=2)\\
&\quad=212
\end{aligned}$$

답 212

04 $a_{n+1}=(2n-1)a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}=1\times a_1\\
&\cancel{a_3}=3\times \cancel{a_2}\\
&\cancel{a_4}=5\times \cancel{a_3}\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_n=(2n-3)\times \cancel{a_{n-1}}\\
\hline
&a_n=1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n-3)\times a_1\ (\text{단, } n\ge 2)\\
&\quad=1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n-3)\ (\because\ a_1=1)
\end{aligned}$$

한편, $a_5=1\times 3\times 5\times 7=105$이므로 5 이상의 자연수 k에 대하여 a_k는 모두 105로 나누어떨어진다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1000}$을 105로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 105로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+3+15=20$이므로 구하는 나머지는 20이다.

답 20

05 $2a_{n+1}=a_n+3$에서 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+3}{2}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1+3}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}\ (\because\ a_1=4)$$
$$a_3=\frac{a_2+3}{2}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{2}+3\right)=3+\frac{1}{4}$$
$$a_4=\frac{a_3+3}{2}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{4}+3\right)=3+\frac{1}{8}$$
$$a_5=\frac{a_4+3}{2}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{8}+3\right)=3+\frac{1}{16}$$
$$a_6=\frac{a_5+3}{2}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{16}+3\right)=3+\frac{1}{32}$$
$$a_7=\frac{a_6+3}{2}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{32}+3\right)=3+\frac{1}{64}=\frac{193}{64}$$
$$\vdots$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$이고 $a_7=\dfrac{193}{64}$이므로 $a_n>\dfrac{193}{64}$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 6이다.

답 ②

• 다른 풀이 •

$a_{n+1}=pa_n+q$에서 $p\ne 1,\ pq\ne 0$

$2a_{n+1}=a_n+3$에서 $\underline{a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots ㉠$

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$라 하면 $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$

위의 식이 ㉠과 같으므로

$p=\dfrac{1}{2},\ -p\alpha+\alpha=\dfrac{3}{2}$

$-\dfrac{1}{2}\alpha+\alpha=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{3}{2} \qquad \therefore\ \alpha=3$

$\therefore\ a_{n+1}-3=\dfrac{1}{2}(a_n-3)$

즉, 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=4-3=1$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 일반항 a_n-3은

$a_n-3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n=3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n>\dfrac{193}{64}$에서 $3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>\dfrac{193}{64}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>\dfrac{1}{64}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6},\ n-1<6$

$\therefore\ n<7$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 6이다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$a_{n+1}=pa_n+q$ ($p\ne 1$, $pq\ne 0$) 꼴의 귀납적 정의에서 일반항을 구하는 방법은 다음과 같다.

(i) $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로 놓고 식을 정리하면
$a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$

(ii) $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$와 $a_{n+1}=pa_n+q$가 같은 식을 나타내어야 하므로 $-p\alpha+\alpha=q$, 즉 $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$로부터 α의 값을 구한다.

06 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\ (\because\ a_1=1)$$
$$a_3=\frac{a_2}{a_2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$$
$$a_4=\frac{a_3}{a_3+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{4}$$

$\vdots$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$

$*A=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}a_ka_{k+1}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\cancel{\dfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2}}-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\dfrac{1}{9}}-\dfrac{1}{10}\right)$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

$B=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k(k+1)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)$

$=\dfrac{9\times10\times19}{6}+\dfrac{9\times10}{2}$

$=285+45$

$=330$

$\therefore AB=\dfrac{9}{10}\times330=297$ **답** 297

• 다른 풀이 •

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$의 양변에 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{a_n}$ $\quad\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=1$, 공차가 1인 등차수열이므로 일반항 $\dfrac{1}{a_n}$은

$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n$

$\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$

다음은 *와 같다.

07

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=4-8=-4$ ($\because a_1=8,\ a_2=4$)

$a_4=a_3-a_2=-4-4=-8$

$a_5=a_4-a_3=-8-(-4)=-4$

$a_6=a_5-a_4=-4-(-8)=4$

$a_7=a_6-a_5=4-(-4)=8$

$a_8=a_7-a_6=8-4=4$

$\vdots$

즉, $a_{n+6}=a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 8, 4, -4, -8, -4, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $1\le k\le6$에서 $|a_k|=4$이려면 $k=2,\ 3,\ 5,\ 6$

또한, $100=16\times6+4$이므로 구하는 자연수 k의 개수는

$16\times4+2=66$ **답** 66

08

$S_n=2a_na_{n+1}+1$에 $n=1$을 대입하면

$S_1=2a_1a_2+1,\ a_1=2a_1a_2+1$

$2=4a_2+1$ ($\because a_1=2$)

$\therefore a_2=\dfrac{1}{4}$

한편, $S_n=2a_na_{n+1}+1$의 n에 $n+1$을 대입하면

$S_{n+1}=2a_{n+1}a_{n+2}+1$이므로

$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}a_{n+2}+1-(2a_na_{n+1}+1)$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}>0$이므로

양변을 a_{n+1}로 나누면

$1=2(a_{n+2}-a_n),\ a_{n+2}-a_n=\dfrac{1}{2}$

즉, 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 각각

$a_1=2,\ a_2=\dfrac{1}{4}$이고 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다.

따라서 $a_{2n-1}=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2},\ a_{2n}=\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}$이므로

$S_8=\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\left(n+\frac{5}{4}\right)$

$=\dfrac{4\times5}{2}+\dfrac{5}{4}\times4=15$ **답** ⑤

09

$a_1=a_2=a_3=1,\ a_{n+3}=-2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

1, 1, 1, -2, -2, -2, 4, 4, 4, -8, -8, -8, 16, ⋯

이때 10 이하의 자연수 p에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=p}^{10}a_n=0$을 만족시키는 자연수 p의 값은 2, 5, 8이다.

또한, 11 이상의 자연수 q에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=11}^{q}a_n=0$을 만족시키는 자연수 q의 값은 13, 16, 19, ⋯이다.

따라서 $p=2,\ q=13$일 때, $p+q$의 최솟값은

$m=2+13=15$

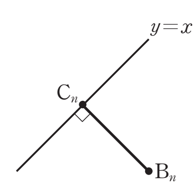
$\therefore a_m=a_{15}=16$ **답** ④

10

점 A_n은 x축 위에 있다.

점 $\mathrm{A}_n(a_n,\ 0)$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점 B_n의 좌표는 $(a_n+n,\ 0)$

이때 점 B_n에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발 C_n은 점 B_n을 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선 위에 있다.



이 직선의 방정식은

$y-0=-(x-a_n-n)$

$\therefore y=-x+a_n+n$

점 C_n의 x좌표는 $x=-x+a_n+n$에서

$2x=a_n+n$ $\quad\therefore x=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{n}{2}$

즉, $C_n\left(\frac{a_n}{2}+\frac{n}{2},\ \frac{a_n}{2}+\frac{n}{2}\right)$이고 점 C_n에서 x축에 내린 수선의 발 A_{n+1}의 좌표는 $\left(\frac{a_n}{2}+\frac{n}{2},\ 0\right)$이므로

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{n}{2}$　　$\therefore\ k=\frac{1}{2},\ f(n)=\frac{n}{2}$

점 A_1은 원점이므로 $a_1=0$

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{n}{2}$의 n에 1, 2를 대입하면

$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{a_2}{2}+1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}$

$\therefore\ a_3\times\frac{f(100)}{k}=\frac{5}{4}\times\frac{100}{2}\times2=125$　　답 ⑤

11 n회 시행 후 페트병 A에 들어 있는 물의 양이 a_n ml이므로 페트병 B에 들어 있는 물의 양은 $(200-a_n)$ml

$(n+1)$회 시행 후 페트병 A에 들어 있는 물의 양은

$$a_{n+1}=\left(a_n-\frac{2}{5}a_n\right)+\frac{1}{3}\left\{(200-a_n)+\frac{2}{5}a_n\right\}$$
$$=\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{3}\left(200-\frac{3}{5}a_n\right)$$
$$=\frac{2}{5}a_n+\frac{200}{3}\ (\text{ml})$$

따라서 $p=\frac{2}{5}$, $q=\frac{200}{3}$이므로

$12pq=12\times\frac{2}{5}\times\frac{200}{3}=320$　　답 320

12 $p(1)$이 참이므로 $p(2)$, $p(3)$도 참이다.

$p(2)$, $p(3)$이 참이므로 $p(2^2)$, $p(2\times3)$, $p(3^2)$도 참이다.

같은 방법으로 음이 아닌 두 정수 a, b에 대하여 $p(2^a\times3^b)$은 참이다.

따라서 명제 $p(k)$가 반드시 참이려면 $k=2^a\times3^b$ 꼴이어야 한다.

(i) $b=0$일 때,

$k=2^a\times3^0=2^a$이므로 15 이하의 자연수 k는 1, 2, 4, 8의 4개이다.

(ii) $b=1$일 때,

$k=2^a\times3^1=3\times2^a$이므로 15 이하의 자연수 k는 3, 6, 12의 3개이다.

(iii) $b=2$일 때,

$k=2^a\times3^2=9\times2^a$이므로 15 이하의 자연수 k는 9의 1개이다.

(iv) $b\geq3$일 때,

$k\geq2^a\times3^3=27\times2^a$이므로 15 이하의 자연수 k는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$4+3+1=8$　　답 ①

13 (i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times2=2$, (우변)$=\frac{1\times2\times3}{3}=2$에서

(좌변)$=$(우변)$=\boxed{2}$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{(k+1)(k+2)}$를 더하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+\boxed{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\boxed{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) : 2, (나) : $(k+1)(k+2)$,

(다) : $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$　　답 풀이 참조

STEP 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp.114~117

01 8	02 $-\frac{1}{2}$	03 105	04 ⑤	05 31
06 ③	07 ④	08 624	09 120	10 ④
11 ②	12 ②	13 238	14 ③	15 ⑤
16 0	17 54	18 ③	19 ④	20 풀이 참조
21 풀이 참조	22 풀이 참조			

01 ${a_{n+1}}^2+4{a_n}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$에서

$(a_1-2)^2+{a_{n+1}}^2-4a_{n+1}a_n+4{a_n}^2=0$

$\therefore\ (a_1-2)^2+(a_{n+1}-2a_n)^2=0$

이때 a_n, a_{n+1}은 실수이므로

$a_1-2=0$, $a_{n+1}-2a_n=0$

$\therefore\ a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

이때 $\sum_{k=1}^{m}a_k=510$이므로

$\sum_{k=1}^{m}2^k=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=2^{m+1}-2=510$

즉, $2^{m+1}=512=2^9$이므로

$m+1=9$　　$\therefore\ m=8$　　답 8

02 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$a_{n+2}x^2+(a_n+a_{n+2})x+a_n=0$

$(a_{n+2}x+a_n)(x+1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$ 또는 $x=-1$

$\therefore b_n=-\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$ ($\because b_n\neq-1$)

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$라 하면

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_n+1}&=\frac{-\dfrac{a_n}{a_{n+2}}}{-\dfrac{a_n}{a_{n+2}}+1}=\frac{-\dfrac{a_n}{a_{n+2}}}{\dfrac{-a_n+a_{n+2}}{a_{n+2}}}\\&=\frac{-a_n}{a_{n+2}-a_n}\\&=\frac{-a_1-(n-1)d}{2d}\\&=-\frac{a_1}{2d}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

따라서 등차수열 $\left\{\dfrac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는 $-\dfrac{1}{2}$이다. 답 $-\dfrac{1}{2}$

BLACKLABEL 특강 필수 개념

일반항에서 공차와 공비 찾기

(1) 일반항 a_n이 n에 대한 일차식인 $a_n=An+B$ (A, B는 상수) 꼴일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고 공차는 n의 계수인 A이다.

(2) 일반항 b_n이 $b_n=A\times B^n$ (A, B는 상수) 꼴일 때, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이고 공비는 지수 n의 밑인 B이다.

03 $a_{n+1}a_n-2a_{n+2}a_n+a_{n+1}a_{n+2}=0$의 양변을 $a_na_{n+1}a_{n+2}$로 나누면

$\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{2}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_n}=0$ $\quad\therefore \dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$, 공차가 $\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$인 등차수열이므로 일반항 $\dfrac{1}{a_n}$은

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{20\times21}{2}=105$ 답 105

04 ㄱ. $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$이므로

$a_2=\dfrac{4a_1-2}{a_1+1}=\dfrac{12-2}{3+1}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

$a_3=\dfrac{4a_2-2}{a_2+1}=\dfrac{10-2}{\dfrac{5}{2}+1}=\dfrac{8}{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{16}{7}$ (참)

ㄴ. $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-2}{a_n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1&=\frac{4a_n-2-(a_n+1)}{a_n+1}\\&=\frac{3(a_n-1)}{a_n+1}\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2&=\frac{4a_n-2-2(a_n+1)}{a_n+1}\\&=\frac{2(a_n-2)}{a_n+1}\quad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

㉡÷㉠을 하면 $\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_n-2}{a_n-1}$

즉, 수열 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-1}\right\}$는 첫째항이 $\dfrac{a_1-2}{a_1-1}=\dfrac{3-2}{3-1}=\dfrac{1}{2}$, 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\dfrac{a_n-2}{a_n-1}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k-2}{a_k-1}&=\sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right\}\\&=\frac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 $$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+(-1)^n\times\frac{2n+1}{n(n+1)}\\&=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 14를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1-\left(1+\frac{1}{2}\right)\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&\ \ \vdots\\+)\ a_{15}&=\cancel{a_{14}}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{15}&=a_1-1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{14}}+\frac{1}{15}\\&=a_1-1+\frac{1}{15}=a_1-\frac{14}{15}\\&=2-\frac{14}{15}\ (\because a_1=2)\\&=\frac{16}{15}\end{aligned}$$

따라서 $p=15$, $q=16$이므로

$p+q=31$ 답 31

06 $$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=n^2+2n=n(n+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}b_n}{a_{n+1}+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+3)+1}b_n\\&=\frac{(n+1)(n+3)}{n^2+4n+4}b_n\\&=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}b_n\end{aligned}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{b_2}=\frac{2\times4}{3\times3}b_1$$

$$\cancel{b_3}=\frac{3\times5}{4\times4}\cancel{b_2}$$

$$\cancel{b_4}=\frac{4\times6}{5\times5}\cancel{b_3}$$

$$\vdots$$

$$\times\big)\ b_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}\cancel{b_{n-1}}$$

$$b_n=b_1\times\left\{\frac{2\times\cancel{4}}{3\times\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{5}}{\cancel{4}\times\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}\times\cancel{6}}{\cancel{5}\times\cancel{5}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}(n+2)}{(\cancel{n+1})(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{2(n+2)}{3(n+1)}\ (\because b_1=1)$$

$$\therefore b_{19}=\frac{2\times21}{3\times20}=\frac{7}{10}$$

답 ③

• 다른 풀이 •

$*$에서 $\dfrac{n+2}{n+3}b_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}b_n$이므로

$$\frac{n+1}{n+2}b_n=\frac{n}{n+1}b_{n-1}=\cdots=\frac{2}{3}b_1=\frac{2}{3}\ (\because b_1=1)$$

따라서 $b_n=\dfrac{2(n+2)}{3(n+1)}$이므로

$$b_{19}=\frac{2\times21}{3\times20}=\frac{7}{10}$$

07 $pa_{n+1}=qa_n+r$ $\cdots\cdots$㉠

ㄱ. $r=0$이므로 ㉠에서

$pa_{n+1}=qa_n$ $\quad\therefore a_{n+1}=\dfrac{q}{p}a_n$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다. (거짓)

ㄴ. $p=q$이므로 ㉠에서

$$a_{n+1}=a_n+\frac{r}{p}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{r}{p}$인 등차수열이고, 일반항 a_n은

$$a_n=1+(n-1)\times\frac{r}{p}\ (\because a_1=1)$$

$$=\frac{r}{p}n-\frac{r}{p}+1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\left(1+\frac{r}{p}n-\frac{r}{p}+1\right)}{2}$$

$$=\frac{n(rn+2p-r)}{2p}\ (\text{참})$$

ㄷ. $p=q+r$에서 r의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $r=0$일 때,

$p=q$이므로 ㉠에서

$pa_{n+1}=pa_n$, $a_{n+1}=a_n$ $(\because p\neq0)$

$a_1=1$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=1$이다.

(ii) $r\neq0$일 때,

$p=q+r$이므로 ㉠에서

$(q+r)a_{n+1}=qa_n+r$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하면

$(q+r)a_2=q+r$ $(\because a_1=1)$ $\quad\therefore a_2=1$

$(q+r)a_3=q+r$ $(\because a_2=1)$ $\quad\therefore a_3=1$

$\vdots$

$(q+r)a_n=q+r$ $(\because a_{n-1}=1)$ $\quad\therefore a_n=1$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=1$이다.

(i), (ii)에서 $p=q+r$이면 $a_n=1$이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

• 다른 풀이 1 •

ㄷ. $p=q+r$이면 $r=p-q$이므로 ㉠에서

$pa_{n+1}=qa_n+p-q$

$p(a_{n+1}-1)=q(a_n-1)$

$\therefore a_{n+1}-1=\dfrac{q}{p}(a_n-1)$

즉, 수열 $\{a_n-1\}$은 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이므로 일반항 a_n-1은

$$a_n-1=(a_1-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

이때 $a_1=1$이므로

$a_n-1=0$ $\quad\therefore a_n=1$ (참)

• 다른 풀이 2 •

ㄷ. 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=1$일 때,

$a_1=1$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_k=1$이라 가정하면

$pa_{k+1}=qa_k+r=q+r=p$

$\therefore a_{k+1}=1$

(i), (ii)에서 $q+r=p$이면 $a_n=1$이다. (참)

08 $n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n+2n+1$의 양변을 $n^2(n+1)^2$으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$\dfrac{a_n}{n^2}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=b_n+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{b_2}=b_1+\frac{3}{1^2\times2^2}$$

$$\cancel{b_3}=\cancel{b_2}+\frac{5}{2^2\times3^2}$$

$$\cancel{b_4}=\cancel{b_3}+\frac{7}{3^2\times4^2}$$

$$\vdots$$

$$+\underline{)\ b_n=\cancel{b_{n-1}}+\frac{2n-1}{(n-1)^2n^2}}$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$=\frac{2k+1}{k^2(k^2+2k+1)}$$

$$=\frac{2k+1}{2k+1}\times\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\ \left(\because\ b_1=\frac{a_1}{1^2}=\frac{0}{1}=0\right)$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2^2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}\right)+\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{(n-1)^2}}-\frac{1}{n^2}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{n^2}$$

$\therefore\ a_n=n^2b_n=n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=n^2-1$

$\therefore\ a_{25}=25^2-1=624$ 답 624

• 다른 풀이 •

$n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n+2n+1$의 양변을 $n^2(n+1)^2$으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}$$

$\dfrac{a_{n+1}+1}{(n+1)^2}=\dfrac{a_n+1}{n^2}$이므로

$$\frac{a_n+1}{n^2}=\frac{a_{n-1}+1}{(n-1)^2}=\cdots=\frac{a_1+1}{1^2}=1\ (\because\ a_1=0)$$

따라서 $a_n=n^2-1$이므로

$a_{25}=25^2-1=624$

09

$4S_n=a_n{}^2+2a_n-3$에 $n=1$을 대입하면

$4S_1=a_1{}^2+2a_1-3,\ 4a_1=a_1{}^2+2a_1-3\ (\because\ S_1=a_1)$

$a_1{}^2-2a_1-3=0,\ (a_1+1)(a_1-3)=0$

$\therefore\ a_1=3\ (\because\ a_1>0)$

$4S_n=a_n{}^2+2a_n-3$의 n에 $n+1$을 대입하면

$4S_{n+1}=a_{n+1}{}^2+2a_{n+1}-3$

$4S_{n+1}-4S_n=a_{n+1}{}^2+2a_{n+1}-3-(a_n{}^2+2a_n-3)$

$4(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+2a_{n+1}-2a_n$

$4a_{n+1}=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+2a_{n+1}-2a_n$

$a_{n+1}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}-2a_n=0$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_{n+1}+a_n\neq0$

$a_{n+1}-a_n-2=0\qquad\therefore\ a_{n+1}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}+10=120$$

답 120

10

$S_n=1-(n+1)a_n$에서 $S_1=1-2a_1$

$S_1=a_1$이므로

$a_1=1-2a_1,\ 3a_1=1\qquad\therefore\ a_1=\dfrac{1}{3}$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=\{1-(n+1)a_n\}-\{1-na_{n-1}\}$

$\quad=na_{n-1}-(n+1)a_n$

$(n+2)a_n=na_{n-1}\qquad\therefore\ a_n=\dfrac{n}{n+2}a_{n-1}$ (단, $n\geq2$) *

위의 식의 n에 2, 3, 4, $\cdots$, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{4}a_1$$

$$\cancel{a_3}=\frac{3}{5}\cancel{a_2}$$

$$\cancel{a_4}=\frac{4}{6}\cancel{a_3}$$

$$\vdots$$

$$\times\underline{)\ a_n=\frac{n}{n+2}\cancel{a_{n-1}}}$$

$$a_n=a_1\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n}{n+2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\times\frac{\cancel{n}}{n+2}$$

$$\left(\because\ a_1=\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\ (\text{단, } n\geq2)\qquad\cdots\cdots㉠$$

이때 $a_1=\dfrac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 모든 자연수 n에 대하여

$$**a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+20\right)$$

$$=285$$

답 ④

• 다른 풀이 •

*에서 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+3}a_n\ (n\geq1)$이므로

$(n+3)a_{n+1}=(n+1)a_n$

$(n+2)(n+3)a_{n+1}=(n+1)(n+2)a_n$이므로

$(n+1)(n+2)a_n=n(n+1)a_{n-1}=\cdots$

$$=6a_1=2\ \left(\because\ a_1=\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

다음은 **와 같다.

서울대 선배들의 추천 PICK 1등급 비법 노하우

이 문제는 수열의 합 S_n을 이용하여 귀납적으로 정의함으로써 일반항을 구하는 과정을 한 단계 더 복잡하게 만들어 놓았지만 기본적인 몇 가지만 정확하게 알고 있으면 된다.
이 문제에서도 먼저 $S_n-S_{n-1}=a_n$임을 이용하여 a_n과 a_{n-1} 사이의 관계식을 구한 후 일반항 a_n을 구하면 된다. 기본적인 귀납적 정의의 형태가 안 보일 경우에는 직접 숫자를 대입해 가며 규칙을 찾아가는 것도 하나의 방법이다.

11 $\sum_{k=1}^{n}a_k-na_n=n\log n-\log f(n)$ ……㉠

㉠의 n에 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}a_k-(n-1)a_{n-1}$

$=(n-1)\log(n-1)-\log f(n-1)$ (단, $n\ge2$) ……㉡

㉠－㉡을 하면

$a_n-na_n+(n-1)a_{n-1}=n\log n-(n-1)\log(n-1)$
$-\log f(n)+\log f(n-1)$

$(1-n)a_n-(1-n)a_{n-1}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log\dfrac{f(n)}{f(n-1)}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log\dfrac{n!}{(n-1)!}$

$=n\log n-(n-1)\log(n-1)-\log n$

$=(1-n)\log(n-1)-(1-n)\log n$

위의 식의 양변을 $1-n$으로 나누면

$a_n-a_{n-1}=\log(n-1)-\log n$ (단, $n\ge2$)

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, 20을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}-a_1=\log 1-\log 2\\
&\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=\log 2-\log 3\\
&\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=\log 3-\log 4\\
&\quad\vdots\\
+)\ &a_{20}-\cancel{a_{19}}=\log 19-\log 20\\
\hline
&a_{20}-a_1=(\log 1-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 2}-\cancel{\log 3})+\cdots\\
&\qquad+(\cancel{\log 19}-\log 20)\\
&\qquad=\log 1-\log 20\\
&\qquad=-\log 20
\end{aligned}$$

$\therefore a_{20}=a_1-\log 20$

$=2-\log 20$ ($\because a_1=2$)

$=\log 5$ **답** ②

12 $na_n=(n-1)S_n$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉠

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $2a_2=(2-1)S_2=a_1+a_2$

$\therefore a_2=a_1=1$ ($\because a_1=1$)

㉠에서 $S_n=\dfrac{n}{n-1}a_n$이므로 $n\ge3$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n}{n-1}a_n-\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\dfrac{1}{n-1}a_n=\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}$ (단, $n\ge3$)

위의 식의 n에 3, 4, 5, …, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_3}=\frac{2^2}{1}a_2\\
&\cancel{a_4}=\frac{3^2}{2}\cancel{a_3}\\
&\cancel{a_5}=\frac{4^2}{3}\cancel{a_4}\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &a_n=\frac{(n-1)^2}{n-2}\cancel{a_{n-1}}\\
\hline
&a_n=a_2\times\frac{2^2}{1}\times\frac{3^2}{2}\times\frac{4^2}{3}\times\cdots\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\\
&\quad=1\times\frac{2^{\cancel{2}}}{1}\times\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\times\frac{4^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{(n-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{n-3}}\times\frac{(n-1)^2}{\cancel{n-2}}\\
&\qquad(\because a_2=1)\\
&\quad=1\times2\times3\times4\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)^2\\
&\quad=(n-1)\times(n-1)!
\end{aligned}$$

$\therefore a_{100}=99\times99!$ **답** ②

• 다른 풀이 •

$S_n-S_{n-1}=a_n$이므로 $na_n=(n-1)S_n$ $(n\ge2)$에서

$n(S_n-S_{n-1})=(n-1)S_n$

$\therefore S_n=nS_{n-1}$

위의 식의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{S_2}=2S_1\\
&\cancel{S_3}=3\cancel{S_2}\\
&\cancel{S_4}=4\cancel{S_3}\\
&\quad\vdots\\
\times)\ &S_n=n\cancel{S_{n-1}}\\
\hline
&S_n=S_1\times2\times3\times4\times\cdots\times n
\end{aligned}$$

$\therefore S_n=n!$ ($\because S_1=a_1=1$)

$\therefore a_{100}=S_{100}-S_{99}=100!-99!$

$=(100-1)\times99!=99\times99!$

13 $a_na_{n+1}=2a_n-1$의 양변을 a_n으로 나누면

$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ ……㉠

이때 $a_1=5$이므로

$a_1=5=1+\dfrac{4}{1}$

㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=2-\dfrac{1}{a_1}=2-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{5}=1+\dfrac{4}{5}$

$a_3=2-\dfrac{1}{a_2}=2-\dfrac{5}{9}=\dfrac{13}{9}=1+\dfrac{4}{9}$

$a_4=2-\dfrac{1}{a_3}=2-\dfrac{9}{13}=\dfrac{17}{13}=1+\dfrac{4}{13}$

$\vdots$

$\therefore a_n=1+\dfrac{4}{1+(n-1)\times 4}=1+\dfrac{4}{4n-3}$

$=\dfrac{4n+1}{4n-3}$

*따라서 $a_{30}=\dfrac{4\times 30+1}{4\times 30-3}=\dfrac{121}{117}$이므로

$p=117,\ q=121$

$\therefore p+q=238$ 답 238

• 다른 풀이 •

$a_na_{n+1}=2a_n-1$의 양변을 a_n으로 나누면

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n}$

이때 $a_1=5$이므로

$a_1=\dfrac{5}{1}$

$a_2=\dfrac{2a_1-1}{a_1}=\dfrac{2\times 5-1}{5}=\dfrac{9}{5}$

$a_3=\dfrac{2a_2-1}{a_2}=\dfrac{2\times\frac{9}{5}-1}{\frac{9}{5}}=\dfrac{13}{9}$

$a_4=\dfrac{2a_3-1}{a_3}=\dfrac{2\times\frac{13}{9}-1}{\frac{13}{9}}=\dfrac{17}{13}$

$\vdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 분모, 분자는 각각 첫째항이 1, 5이고 공차는 모두 4인 등차수열이므로

$a_n=\dfrac{5+(n-1)\times 4}{1+(n-1)\times 4}=\dfrac{4n+1}{4n-3}$

다음은 *와 같다.

14 조건 (가)에서 $1\le n\le 4$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+4}=15$이므로

$\sum_{n=1}^{8}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$

$=(a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$

$=15\times 4=60$

이때 $\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{4}a_n+\sum_{n=5}^{8}a_n=60$이고, $\sum_{n=1}^{4}a_n=6$이므로

$\sum_{n=5}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_n-\sum_{n=1}^{4}a_n=60-6=54$ ……㉠

조건 (나)에서 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=n$이므로 $a_{n+1}=a_n+n$

위의 식의 n에 5, 6, 7을 차례대로 대입하면

$a_6=a_5+5$

$a_7=a_6+6=a_5+11$

$a_8=a_7+7=a_5+18$

$\therefore \sum_{n=5}^{8}a_n=a_5+a_6+a_7+a_8$

$=a_5+(a_5+5)+(a_5+11)+(a_5+18)$

$=4a_5+34$

$=54$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a_5=5$ 답 ③

15 $a_{n+1}+a_n=b_{n+1}-b_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}a_2+a_1&=\cancel{b_2}-b_1\\ a_3+a_2&=\cancel{b_3}-\cancel{b_2}\\ a_4+a_3&=\cancel{b_4}-\cancel{b_3}\\ &\vdots\\ +)\ a_{10}+a_9&=b_{10}-\cancel{b_9}\end{aligned}$$

$a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_9)+a_{10}=b_{10}-b_1$

즉, $2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})-a_1-a_{10}=b_{10}-b_1$에서

$2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=a_{10}+b_{10}+a_1-b_1=30$

($\because a_1=b_1,\ a_{10}+b_{10}=30$)

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=15$ 답 ⑤

16 $a_{n+1}-a_n=(-1)^n(a_n-a_{n-1})$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉠

(i) n이 홀수일 때,

㉠에서 $a_{n+1}-a_n=-(a_n-a_{n-1})$

$a_{n+1}-a_n=-a_n+a_{n-1}$

$\therefore a_{n+1}=a_{n-1}$

즉, 짝수항끼리는 모두 같고, $a_2=0$이므로

$a_{2k}=0$ (단, k는 자연수)

(ii) n이 짝수일 때,

㉠에서 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$

이때 (i)에서 $a_{2k}=0$이므로

$a_{n+1}=-a_{n-1}$ ($\because n$은 짝수)

$a_1=1$이므로 $a_{2k-1}=(-1)^{k+1}$ (단, k는 자연수)

(i), (ii)에서

$a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ (-1)^{k+1} & (n=2k-1)\end{cases}$ (단, k는 자연수)

$\therefore \sum_{k=1}^{200}a_k=\sum_{k=1}^{100}a_{2k}+\sum_{k=1}^{100}a_{2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{100}0+\sum_{k=1}^{100}(-1)^{k+1}$

$=0$ 답 0

17 $\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}=a_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이라 하면 규칙 (가), (다)에서

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_na_{n+2}=a_{n+1}+1$

위의 식의 양변을 a_n으로 나누면

$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=\dfrac{a_2+1}{a_1}=\dfrac{2+1}{3}=1,\ a_4=\dfrac{a_3+1}{a_2}=\dfrac{1+1}{2}=1,$

$a_5=\dfrac{a_4+1}{a_3}=\dfrac{1+1}{1}=2,\ a_6=\dfrac{a_5+1}{a_4}=\dfrac{2+1}{1}=3,$

$a_7=\dfrac{a_6+1}{a_5}=\dfrac{3+1}{2}=2,\ a_8=\dfrac{a_7+1}{a_6}=\dfrac{2+1}{3}=1,$

$a_9=\dfrac{a_8+1}{a_7}=\dfrac{1+1}{2}=1,\ a_{10}=\dfrac{a_9+1}{a_8}=\dfrac{1+1}{1}=2,$

$\vdots$

즉, $a_{n+5}=a_n$이므로 $\{a_n\}$은 3, 2, 1, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

따라서 $x_{30}=a_1+a_3+\cdots+a_{29}$, $y_{30}=a_2+a_4+\cdots+a_{30}$이므로

$$\begin{aligned} x_{30}+y_{30}&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{29}+a_{30}\\ &=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\\ &=6(3+2+1+1+2)\\ &=54 \end{aligned}$$

답 54

18 해결단계

❶ 단계	$\sum\limits_{n=1}^{19} a_n$을 a_n+a_{n+1}의 합의 꼴로 변형하여 합을 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	$b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$로 놓은 후, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구하여 ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$a_n+a_{n+1}=n^2$ ······㉠

ㄱ. $\sum\limits_{n=1}^{19} a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}$

$$\begin{aligned} &=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19})\\ &=1+2^2+4^2+\cdots+18^2\\ &=1+\sum_{k=1}^{9}(2k)^2=1+4\sum_{k=1}^{9}k^2\\ &=1+4\times\frac{9\times10\times19}{6}=1141\ (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. ㉠에서 $a_{n+1}=n^2-a_n$이고 $a_1=1$이므로

$a_2=1^2-a_1=1-1=0$

$a_3=2^2-a_2=4-0=4$

$a_4=3^2-a_3=9-4=5$

$a_5=4^2-a_4=16-5=11$

$a_6=5^2-a_5=25-11=14$

$a_7=6^2-a_6=36-14=22$

$a_8=7^2-a_7=49-22=27$

$\vdots$

이때 $b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$이라 하면

$b_1=-1,\ b_2=1,\ b_3=3,\ b_4=5,\ \cdots$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -1이고 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 b_n은

$b_n=-1+(n-1)\times2=2n-3$

$\therefore\ a_{20}-a_{19}=b_{10}=2\times10-3=17$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $b_n=a_{2n}-a_{2n-1}$이고, $b_n=2n-3$이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15}(a_{2n}-a_{2n-1})&=\sum_{n=1}^{15}(2n-3)\\ &=2\times\frac{15\times16}{2}-15\times3\\ &=195\ (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

• 다른 풀이 1 •

$a_n+a_{n+1}=n^2$에서 $a_{n+1}=-a_n+n^2$이므로

$a_2=-a_1+1^2=-1+1^2$

$a_3=-a_2+2^2=1-1^2+2^2$

$a_4=-a_3+3^2=-1+1^2-2^2+3^2$

$a_5=-a_4+4^2=1-1^2+2^2-3^2+4^2$

$\vdots$

즉, 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned} a_{2n-1}&=1-1^2+2^2-3^2+\cdots+(2n-2)^2\\ &=1+(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots\\ &\qquad+\{-(2n-3)^2+(2n-2)^2\}\\ &=1+(1+2)+(3+4)+\cdots\\ &\qquad+\{(2n-3)+(2n-2)\}\\ &=1+\sum_{k=1}^{2n-2}k\\ &=1+\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}\\ &=1+(n-1)(2n-1)\\ &=2n^2-3n+2 \end{aligned}$$

이때 $a_n+a_{n+1}=n^2$이므로

$a_{2n-1}+a_{2n}=\underbrace{(2n-1)^2}_{=4n^2-4n+1}$에서

$$\begin{aligned} a_{2n}&=-a_{2n-1}+(2n-1)^2\\ &=-2n^2+3n-2+4n^2-4n+1\\ &=2n^2-n-1 \end{aligned}$$

ㄱ. $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{19}a_n&=\sum_{k=1}^{9}(a_{2k-1}+a_{2k})+a_{19}\\ &=\sum_{k=1}^{9}(4k^2-4k+1)+(2\times10^2-3\times10+2)\\ &=4\times\frac{9\times10\times19}{6}-4\times\frac{9\times10}{2}+9+172\\ &=1140-180+9+172\\ &=1141\ (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned} a_{2n}-a_{2n-1}&=(2n^2-n-1)-(2n^2-3n+2)\\ &=2n^2-n-1-2n^2+3n-2\\ &=2n-3 \end{aligned}$$

$\therefore\ a_{20}-a_{19}=2\times10-3=17$ (거짓)

ㄷ. $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15}(a_{2n}-a_{2n-1})&=\sum_{n=1}^{15}(2n-3)\\ &=2\times\frac{15\times16}{2}-15\times3\\ &=195\ (\text{참}) \end{aligned}$$

• 다른 풀이 2 •

ㄴ. ㉠에서 $a_{n+1}=n^2-a_n$이고 $a_1=1$이므로

$a_2=1^2-a_1=1-1=0$

$a_3=2^2-a_2=2^2-0=2^2$

$a_4=3^2-a_3=3^2-2^2$

$a_5=4^2-a_4=4^2-3^2+2^2$

$\vdots$

$a_{19}=18^2-a_{18}=18^2-17^2+16^2-\cdots+2^2$

$a_{20}=19^2-a_{19}=19^2-18^2+17^2-\cdots+3^2-2^2$

$\therefore\ a_{20}-a_{19}$

$=(19^2-18^2)-(18^2-17^2)+(17^2-16^2)-\cdots$
$+(3^2-2^2)-2^2$
$=(19+\cancel{18})-(\cancel{18}+\cancel{17})+(\cancel{17}+\cancel{16})-\cdots$
$+(\cancel{3}+2)-4$
$=19+2-4=17$ (거짓)

19 (i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=a_1=(2^2-1)\times1+0=3$

$(\text{우변})=2^2-2\times2^{-1}=3$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\\&=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}\\&\quad+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}\\&=2^{m(m+1)}(1+2^{2m+2}-1)-2^{-m}(m+1-m\times2^{-1})\\&=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times2^{-m}\\&=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{2\times7+2}}{2^{3\times(3+1)}}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$ 답 ④

20 (i) $n=2$일 때,

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$에서 $a_1=\frac{1}{1}=1$, $a_2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

즉, $n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$에서

$(\text{좌변})=2+a_1=2+1=3$, $(\text{우변})=2a_2=2\times\frac{3}{2}=3$

이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=ka_k$ ……㉠

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}$에서

$a_n=a_{n+1}-\frac{1}{n+1}$ ……㉡

㉠의 좌변에 $1+a_k$를 더하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+1+a_k$

$=ka_k+1+a_k$ ($\because$ ㉠)

$=(k+1)a_k+1$

$=(k+1)\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+1$ ($\because$ ㉡)

$=(k+1)a_{k+1}$

$\therefore\ (k+1)+a_1+a_2+\cdots+a_k=(k+1)a_{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$이 성립한다. 답 풀이 참조

단계	채점 기준	배점
(가)	$n=2$일 때, 주어진 등식이 성립함을 보인 경우	30%
(나)	$n=k\ (k\ge2)$일 때 주어진 등식이 성립함을 가정한 후, $n=k+1$일 때도 성립함을 보인 경우	70%

21 (i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=\frac{1}{2}$, $(\text{우변})=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\boxed{\sqrt{3k+1}}}$

위의 부등식의 양변에 $\frac{\boxed{2k+1}}{2k+2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{\boxed{2k+1}}{2k+2}\le\frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}$$

이때

$$\begin{aligned}&(2k+2)^2(3k+1)\\&=\{(2k+1)+1\}^2(3k+1)\\&=\{(2k+1)^2+2(2k+1)+1\}(3k+1)\\&=(2k+1)^2(3k+1)+2(2k+1)(3k+1)+(3k+1)\\&=(2k+1)^2(3k+1)+12k^2+13k+3\\&=(2k+1)^2(3k+1)+3(4k^2+4k+1)+k\\&=(2k+1)^2(3k+1)+3(2k+1)^2+k\\&=(2k+1)^2(3k+4)+k\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}\right\}^2&=\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2(3k+1)}\\&=\frac{(\boxed{2k+1})^2}{(2k+1)^2(3k+4)+k}\ (\because ㉠)\\&=\frac{1}{3k+4+\frac{k}{(2k+1)^2}}\\&<\frac{1}{\boxed{3k+4}}\ (\because k\ge1)\end{aligned}$$

$\therefore\ \frac{\boxed{2k+1}}{(2k+2)\boxed{\sqrt{3k+1}}}<\frac{1}{\boxed{\sqrt{3k+4}}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) : $\sqrt{3k+1}$, (나) : $2k+1$, (다) : $3k+4$ 답 풀이 참조

22 (i) $n=4$일 때,

$1\times2\times3\times4=24>16=2^4$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge4)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k>2^k$

위의 부등식의 양변에 $k+1$을 곱하면

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k\times(k+1)>2^k\times(k+1)$ ……㉠

이때 $k\ge4$이므로

$2^k(k+1)\ge2^k\times5>2^{k+1}$

즉, ㉠에서

$1\times2\times3\times4\times\cdots\times k\times(k+1)>2^{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 4 이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. **답** 풀이 참조

단계	채점 기준	배점
(가)	$n=4$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보인 경우	30%
(나)	$n=k\ (k\ge4)$일 때 주어진 부등식이 성립함을 가정한 후, $n=k+1$일 때도 성립함을 보인 경우	70%

STEP 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 pp.118~119

01 ⑤	02 36	03 65	04 6	05 $\frac{17}{9}$
06 ②	07 10	08 풀이 참조	09 54	10 ②
11 ②	12 231			

01 해결단계

❶ 단계	주어진 등식의 좌변을 인수분해하여 a_n과 b_n 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	주어진 조건과 ❶ 단계의 결과를 이용하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	a_n을 구하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$3n^2a_n+(4a_n-b_n)n+a_n-b_n=0$에서

$(3n^2+4n+1)a_n-(n+1)b_n=0$

$(3n+1)(n+1)a_n-(n+1)b_n=0$

$(n+1)\{(3n+1)a_n-b_n\}=0$

즉, $(3n+1)a_n-b_n=0\ (\because n+1>0)$이므로

$b_n=(3n+1)a_n$

이때 $b_n=(3n-2)a_{n+1}$이므로

$(3n+1)a_n=(3n-2)a_{n+1}$ $\quad\therefore a_{n+1}=\dfrac{3n+1}{3n-2}a_n$ *

위의 식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{4}{1}a_1$$

$$\cancel{a_3}=\frac{7}{4}\cancel{a_2}$$

$$\cancel{a_4}=\frac{10}{7}\cancel{a_3}$$

$$\vdots$$

$$\times)\ a_n=\frac{3n-2}{3n-5}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=a_1\times\frac{4}{1}\times\frac{7}{4}\times\frac{10}{7}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n-5}$$

$$=2\times\frac{\cancel{4}}{1}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{7}}\times\cdots\times\frac{3n-2}{\cancel{3n-5}}\ (\because a_1=2)$$

$$=2(3n-2)=6n-4$$

** ㄱ. $a_5=6\times5-4=26$ (거짓)

ㄴ. $a_n=6n-4=2+6(n-1)$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 6인 등차수열이므로

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(6k-4)$

$=6\times\dfrac{10\times11}{2}-10\times4=290$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

• 다른 풀이 •

*에서 $\dfrac{a_{n+1}}{3n+1}=\dfrac{a_n}{3n-2}$이므로

$\dfrac{a_n}{3n-2}=\dfrac{a_{n-1}}{3n-5}=\cdots=\dfrac{a_1}{3\times1-2}=2\ (\because a_1=2)$

$\therefore a_n=2(3n-2)=6n-4$

다음은 **와 같다.

02 해결단계

❶ 단계	바둑돌 $(n+2)$개를 나열할 때, 마지막 바둑돌이 검은 바둑돌인 경우와 흰 바둑돌인 경우로 나누어 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구하고, p, q의 값을 각각 구한다.
❷ 단계	a_1, a_2의 값을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷ 단계에서 구한 값을 이용하여 $p+q+a_7$의 값을 구한다.

바둑돌 $(n+2)$개를 나열하는 방법의 수는 a_{n+2}이다.

(i) $(n+2)$번째 바둑돌이 검은 바둑돌인 경우

$(n+1)$번째 바둑돌은 검은 바둑돌이어도 가능하고, 흰 바둑돌이어도 가능하다.

즉, 이 방법의 수는 a_{n+1}이다.

(ii) $(n+2)$번째 바둑돌이 흰 바둑돌인 경우

$(n+1)$번째 바둑돌은 반드시 검은 바둑돌이어야 하므로 (i)에서 이 방법의 수는 a_n이다.

(i), (ii)에서

$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……㉠

이므로 $p=1$, $q=1$이다.

한편, 바둑돌 한 개를 나열하는 방법의 수는

○, ●의 2개이므로 $a_1=2$

바둑돌 두 개를 나열하는 방법의 수는

●●, ○●, ●○의 3개이므로 $a_2=3$

㉠에서 $a_3=2+3=5$, $a_4=3+5=8$, $a_5=5+8=13$, $a_6=8+13=21$이므로

$a_7=13+21=34$

$\therefore p+q+a_7=1+1+34=36$ 답 36

03 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 1000을 차례대로 대입하여 변끼리 더한다.
❷ 단계	$a_1=a_{1001}+20$임을 이용하여 $\sum_{n=1}^{1000}a_n$의 값을 구한다.

$a_{n+1}=(-1)^n\times n-7a_n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, 1000을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_2=-1-7a_1 \\ & a_3=2-7a_2 \\ & a_4=-3-7a_3 \\ & \vdots \\ +) & a_{1001}=1000-7a_{1000} \\ \hline \end{array}$$

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1001}$
$=\{(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-999+1000)\}-7(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1000})$
$=500-7\sum_{n=1}^{1000}a_n$

$\sum_{n=1}^{1000}a_n-a_1+a_{1001}=500-7\sum_{n=1}^{1000}a_n$

이때 $a_1=a_{1001}+20$이므로

$\sum_{n=1}^{1000}a_n-20=500-7\sum_{n=1}^{1000}a_n$

$8\sum_{n=1}^{1000}a_n=500+20=520$

$\therefore \sum_{n=1}^{1000}a_n=65$ 답 65

04 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 이용하여 $a_{n+4}-a_n=2$임을 구한다.
❷ 단계	$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$를 p에 대한 식으로 나타낸다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}\times\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=3000$임을 이용하여 p의 값을 구한다.

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=2n+5$ ……㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=7$

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=p$이므로 $a_4=4-p$

㉠의 n에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}=2(n+1)+5$ ……㉡

㉡$-$㉠을 하면

$a_{n+4}-a_n=2$

따라서 네 수열 $\{a_{4n-3}\}$, $\{a_{4n-2}\}$, $\{a_{4n-1}\}$, $\{a_{4n}\}$은 각각 첫째항이 a_1, a_2, a_3, a_4이고, 공차가 2인 등차수열이므로

$a_{4n-3}=1+2(n-1)=2n-1$

$a_{4n-2}=2+2(n-1)=2n$

$a_{4n-1}=p+2(n-1)=2n+p-2$

$a_{4n}=4-p+2(n-1)=2n+2-p$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}(a_{4k-3}+a_{4k-1})$
$=\sum_{k=1}^{5}(2k-1+2k+p-2)$
$=\sum_{k=1}^{5}(4k+p-3)$
$=4\sum_{k=1}^{5}k+5(p-3)$
$=4\times\frac{5\times6}{2}+5p-15=45+5p$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{5}(a_{4k-2}+a_{4k})$
$=\sum_{k=1}^{5}(2k+2k+2-p)$
$=\sum_{k=1}^{5}(4k+2-p)$
$=4\sum_{k=1}^{5}k+5(2-p)$
$=4\times\frac{5\times6}{2}+10-5p=70-5p$

이때 $\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}\times\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=3000$이므로

$(45+5p)(70-5p)=3000$

$(9+p)(14-p)=120$, $p^2-5p-6=0$

$(p+1)(p-6)=0$

$\therefore p=6$ ($\because p>0$) 답 6

05 해결단계

❶ 단계	주어진 관계식을 이용하여 $a_3=3$, $a_6=37$을 만족시키는 a_4의 값을 구한다.
❷ 단계	주어진 관계식을 이용하여 $a_3=3$, $a_4=7$을 만족시키는 a_2의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합을 구한다.

$a_{n+2}=\begin{cases}3a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$에서

$a_4=k$라 하고 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

(i) $a_3\le a_4$일 때,

$a_3=3$이므로 $3\le k$

또한, $a_5=3a_3+a_4=9+k$

이때 $k<9+k$, 즉 $a_4<a_5$이므로

$a_6=3a_4+a_5=3k+(9+k)=4k+9$

즉, $4k+9=37$이므로 $k=7$

$3<7$에서 $a_3\le a_4$를 만족시키므로 $a_4=7$

(ii) $a_3>a_4$일 때,

$a_3=3$이므로 $3>k$

또한, $a_5=a_3+a_4=3+k$

이때 $k<3+k$, 즉 $a_4<a_5$이므로

$a_6=3a_4+a_5=3k+(3+k)=4k+3$

즉, $4k+3=37$이므로 $k=\frac{17}{2}$

그런데 $\frac{17}{2}>3$, 즉 $a_4>a_3$이므로 모순이다.

(i), (ii)에서 $a_4=7$이다.

한편, 주어진 식에서

$a_n \le a_{n+1}$이면 $a_{n+2}=3a_n+a_{n+1}$이므로

$a_n=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3}$

$a_n>a_{n+1}$이면 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$이므로

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$\therefore\ a_n=\begin{cases} \dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_{n+2}-a_{n+1} & (a_n>a_{n+1}) \end{cases}$

이때 $a_3=3$, $a_4=7$에서 항을 역으로 계산하면

(iii) $a_2 \le a_3$일 때,

$a_2=\dfrac{a_4-a_3}{3}=\dfrac{7-3}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{4}{3}<3$에서 $a_2 \le a_3$을 만족시키므로 $a_2=\dfrac{4}{3}$

① $a_1 \le a_2$일 때,

$a_1=\dfrac{a_3-a_2}{3}=\dfrac{3-\frac{4}{3}}{3}=\dfrac{5}{9}$

$\dfrac{5}{9}<\dfrac{4}{3}$에서 $a_1 \le a_2$를 만족시키므로 $a_1=\dfrac{5}{9}$

② $a_1>a_2$일 때,

$a_1=a_3-a_2=3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{5}{3}>\dfrac{4}{3}$에서 $a_1>a_2$를 만족시키므로 $a_1=\dfrac{5}{3}$

(iv) $a_2>a_3$일 때,

$a_2=a_4-a_3=7-3=4$

$4>3$에서 $a_2>a_3$을 만족시키므로 $a_2=4$

① $a_1 \le a_2$일 때,

$a_1=\dfrac{a_3-a_2}{3}=\dfrac{3-4}{3}=-\dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{1}{3}<4$에서 $a_1 \le a_2$를 만족시키므로 $a_1=-\dfrac{1}{3}$

② $a_1>a_2$일 때,

$a_1=a_3-a_2=3-4=-1$

그런데 $-1<4$, 즉 $a_1<a_2$이므로 모순이다.

(iii), (iv)에서 a_1의 값이 될 수 있는 것은 $\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{5}{3}$, $-\dfrac{1}{3}$이므로 모든 a_1의 값의 합은

$\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{17}{9}$

답 $\dfrac{17}{9}$

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

수열 $\{a_n\}$을 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{3}$	3	7	16	37
$\frac{5}{3}$					
$-\frac{1}{3}$	4				

06 해결단계

❶ 단계	$k=1$일 때, 조건을 만족시키는지 확인한다.
❷ 단계	k의 값이 2, 3, 4, …일 때 조건을 만족시키는지 확인하고, 그 규칙을 찾는다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$a_1=0$,

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$ (k는 자연수)에서

$a_2=a_1+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$

즉, $a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}$

$\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{k}$, 즉 $a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 0, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$이 이 순서대로 반복된다.

$22=3\times7+1$에서 $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편, $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{2}{k}$

$\dfrac{2}{k+1}<\dfrac{2}{k}$, 즉 $a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 0, $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{6}$, $-\dfrac{1}{3}$이 이 순서대로 반복된다.

$22=5\times4+2$에서 $a_{22}=\dfrac{1}{3}$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

$k>2$이면 $a_6>0$이므로

$a_7=a_6-\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{3}{k}$

$\dfrac{3}{k+1}<\dfrac{3}{k}$, 즉 $a_7<0$이므로

$a_8=a_7+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k}=\dfrac{k-3}{k(k+1)}$

이때 $k=3$이면 $a_8=0$이므로 수열 $\{a_n\}$은 0, $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{12}$, $\dfrac{1}{6}$, $-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{12}$, $-\dfrac{1}{4}$이 이 순서대로 반복된다.

$22=7\times3+1$에서 $a_{22}=0$이므로 $k=3$은 조건을 만족시킨다.

즉, 위의 과정에서 수열 $\{a_n\}$은

$k=1$일 때 3개의 수, $k=2$일 때 5개의 수,

$k=3$일 때 7개의 수가 반복되므로 자연수 k에 대하여 $(2k+1)$개의 수가 반복된다.

이때 $a_{22}=0$이려면 $22=(2k+1)\times\square+1$ 꼴이어야 하므로 $(2k+1)$은 21의 약수이어야 한다.
즉, $2k+1=3$ 또는 $2k+1=7$ 또는 $2k+1=21$이므로
$k=1$ 또는 $k=3$ 또는 $k=10$
*따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값은 1, 3, 10이므로 그 합은
$1+3+10=14$ 답 ②

• 다른 풀이 •

21 이하인 자연수 k에 대하여 $a_k>0$인 a_k의 개수를 m이라 하면 $a_k\le 0$인 a_k의 개수는 $21-m$이다.

$\therefore a_{22}=a_1+\dfrac{21-m}{k+1}-\dfrac{m}{k}=\dfrac{21-m}{k+1}-\dfrac{m}{k}$ ($\because a_1=0$)

$a_{22}=0$이면 $\dfrac{21-m}{k+1}-\dfrac{m}{k}=0$이므로

$\dfrac{21k-mk-mk-m}{k(k+1)}=0$, $21k-2mk-m=0$

$(21-2m)k-m=0 \qquad \therefore k=\dfrac{m}{21-2m}$

$k\ge 1$에서 $\dfrac{m}{21-2m}\ge 1$이므로

$m\ge 21-2m$이고 $21-2m>0$이다.

$\therefore 7\le m<10.5$

따라서 가능한 m의 값은 7, 8, 9, 10이다.

$m=7$일 때 $k=\dfrac{7}{21-2\times 7}=1$,

$m=8$일 때 $k=\dfrac{8}{21-2\times 8}=\dfrac{8}{5}$

그런데 k는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$m=9$일 때 $k=\dfrac{9}{21-2\times 9}=3$,

$m=10$일 때 $k=\dfrac{10}{21-2\times 10}=10$

다음은 *와 같다.

07 해결단계

❶ 단계	주어진 식의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 값을 구한다.
❷ 단계	수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.
❸ 단계	$\sum_{k=1}^{100} a_k$의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ ……㉠

$n=1$을 ㉠에 대입하면 $a_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)$

$\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2a_1}$, $a_1^2=1 \qquad \therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)

$n=2$를 ㉠에 대입하면 $a_1+a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_2+\dfrac{1}{a_2}\right)$

$1+\dfrac{1}{2}a_2-\dfrac{1}{2a_2}=0$, $a_2^2+2a_2-1=0$

$a_2=-1\pm\sqrt{2} \qquad \therefore a_2=\sqrt{2}-1$ ($\because a_2>0$)

$n=3$을 ㉠에 대입하면

$a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{2}\left(a_3+\dfrac{1}{a_3}\right)$

$1+\sqrt{2}-1+\dfrac{1}{2}a_3-\dfrac{1}{2a_3}=0$, $a_3^2+2\sqrt{2}a_3-1=0$

$a_3=-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$

$\therefore a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ($\because a_3>0$)

$\vdots$

$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$*\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$=\cancel{1}+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=\sqrt{100}=10$ 답 10

• 다른 풀이 1 •

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$에서

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$

$\therefore 2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ ……㉡

$n=1$을 ㉡에 대입하면

$2S_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$, $2a_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$

$a_1=\dfrac{1}{a_1}$, $a_1^2=1 \qquad \therefore a_1=1$ ($\because a_1>0$)

또한, ㉡의 n에 $n-1$을 대입하면

$2S_{n-1}=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$ (단, $n\ge 2$) ……㉢

㉡−㉢을 하면 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$2a_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$

$a_n-\dfrac{1}{a_n}=-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ ……㉣

㉣의 양변을 제곱하면

$a_n^2-2+\dfrac{1}{a_n^2}=a_{n-1}^2+2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}$

이때 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=X_n$으로 놓으면

$X_n-2=X_{n-1}+2 \qquad \therefore X_n=X_{n-1}+4$ (단, $n\ge 2$)

즉, 수열 $\{X_n\}$은 첫째항이 $X_1=a_1^2+\dfrac{1}{a_1^2}=2$이고 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 X_n은

$X_n=2+4(n-1)=4n-2$

$X_n=a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}$이므로 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n-2$

$a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n$, $\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2=4n$

$\therefore a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n}$ ($\because a_n>0$)

위의 식의 양변에 각각 a_n을 곱하여 정리하면

$a_n^2-2\sqrt{n}a_n+1=0$

$\therefore a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 또는 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$

그런데 ㉣에서

$a_n+a_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{a_na_{n-1}}$

이고, $a_n>0$, $a_{n-1}>0$이므로

$a_{n-1}>a_n$

$\therefore\ a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

다음은 *와 같다.

• 다른 풀이 2 •

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$에서 $S_n=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$

$2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$

위의 식의 양변에 S_n-S_{n-1}을 곱하면

$2S_n(S_n-S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2+1$

$2S_n^{\ 2}-2S_nS_{n-1}=S_n^{\ 2}-2S_nS_{n-1}+S_{n-1}^{\ \ 2}+1$

$S_n^{\ 2}=S_{n-1}^{\ \ 2}+1$

이때 $S_n^{\ 2}=b_n$으로 놓으면 $b_n=b_{n-1}+1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=S_1^{\ 2}=a_1^{\ 2}=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$b_n=1+(n-1)=n$

따라서 $S_n^{\ 2}=n$이므로 $S_n=\sqrt{n}$ ($\because\ a_n>0$)

$\therefore\ \sum_{k=1}^{100}a_k=S_{100}=\sqrt{100}=10$

08 해결단계

❶ 단계	$n=1$일 때, 주어진 등식이 성립함을 보인다.
❷ 단계	$n=m$ $(m\geq 1)$일 때 등식이 성립한다고 가정하고, $n=m+1$일 때도 성립함을 보인다.

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ ……(*)

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{2}$

이므로 등식 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ $(m\geq 1)$일 때 등식 (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$ ……㉠

$n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m}$

$+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$

$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}+\frac{1}{m+1}$

$=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$

$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{m+1+k}$

따라서 $n=m+1$일 때도 등식 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 등식 (*)이 성립한다.

답 풀이 참조

09 해결단계

❶ 단계	a_2가 홀수, 짝수일 때로 경우를 나누어 a_6을 a_1, a_2에 대한 식으로 나타낸다.
❷ 단계	$a_6=139$를 만족시키는 a_1, a_2의 조건을 구한다.
❸ 단계	$a_1\times a_2$의 최댓값과 최솟값을 구하고 그 합을 구한다.

$a_n=\begin{cases}2a_{n-1}+5 & (a_{n-1}\text{은 홀수})\\ a_{n-1}+a_{n-2} & (a_{n-1}\text{은 짝수})\end{cases}$ $(n\geq 3)$에서

(i) a_2가 홀수일 때,

$a_3=2a_2+5$ ← 홀수

$a_4=2a_3+5=2^2a_2+2\times 5+5$ ← 홀수

$a_5=2a_4+5=2^3a_2+2^2\times 5+2\times 5+5$ ← 홀수

$a_6=2a_5+5=2^4a_2+2^3\times 5+2^2\times 5+2\times 5+5$

$=16a_2+75$

이때 $a_6=139$이므로 $16a_2+75=139$

$16a_2=64$ $\quad\therefore\ a_2=4$

그런데 a_2는 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a_2가 짝수일 때,

① a_1이 홀수이면

$a_3=a_1+a_2$ ← 홀수

$a_4=2a_3+5=2(a_1+a_2)+5$ ← 홀수

$a_5=2a_4+5=2^2(a_1+a_2)+2\times 5+5$ ← 홀수

$a_6=2a_5+5=2^3(a_1+a_2)+2^2\times 5+2\times 5+5$

$=8(a_1+a_2)+35$

이때 $a_6=139$이므로 $8(a_1+a_2)+35=139$

$8(a_1+a_2)=104$ $\quad\therefore\ a_1+a_2=13$

② a_1이 짝수이면

$a_3=a_1+a_2$ ← 짝수

$a_4=a_2+a_3=a_1+2a_2$ ← 짝수

$a_5=a_3+a_4=2a_1+3a_2$ ← 짝수

$a_6=a_4+a_5=3a_1+5a_2$

a_6은 짝수이므로 $a_6=139$에 모순이다.

(i), (ii)에서 a_1, a_2는 각각 홀수, 짝수이고

$a_1+a_2=13$

*$a_1\times a_2$의 최댓값은 $a_1=7$, $a_2=6$일 때 42이고 최솟값은 $a_1=1$, $a_2=12$일 때 12이므로 구하는 합은

$42+12=54$

답 54

• 다른 풀이 •

a_1, a_2의 홀짝에 따라 수열 $\{a_n\}$의 홀짝은 다음과 같다.

(i) a_1, a_2 모두 홀수일 때,

$\{a_n\}$: 홀, 홀, 홀, 홀, 홀, 홀, ⋯

(ii) a_1, a_2가 각각 홀수, 짝수일 때,

$\{a_n\}$: 홀, 짝, 홀, 홀, 홀, 홀, ⋯

(iii) a_1, a_2가 각각 짝수, 홀수일 때,

$\{a_n\}$: 짝, 홀, 홀, 홀, 홀, 홀, ⋯

(iv) a_1, a_2 모두 짝수일 때,

$\{a_n\}$: 짝, 짝, 짝, 짝, 짝, 짝, ⋯

그런데 $a_6=139$는 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은

3 이상의 모든 자연수 n에 대하여 a_n이 홀수이다.

$a_n=2a_{n-1}+5$ (a_{n-1}은 홀수)에서

$a_{n-1}=\dfrac{a_n-5}{2}$이므로

$a_5=\dfrac{a_6-5}{2}=\dfrac{139-5}{2}=\dfrac{134}{2}=67,$

$a_4=\dfrac{a_5-5}{2}=\dfrac{67-5}{2}=\dfrac{62}{2}=31,$

$a_3=\dfrac{a_4-5}{2}=\dfrac{31-5}{2}=\dfrac{26}{2}=13$

a_2가 홀수이면

$a_2=\dfrac{a_3-5}{2}=\dfrac{13-5}{2}=\dfrac{8}{2}=4$이므로 모순이다.

a_2가 짝수이면 (ⅱ)에서 a_1은 홀수이고

$a_3=a_1+a_2=13$

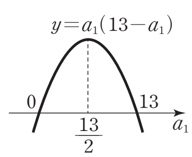
다음은 $*$와 같다.

BLACKLABEL 특강 풀이 첨삭

$a_1+a_2=13$이므로 $a_2=13-a_1$

$a_1\times a_2=a_1(13-a_1)$

오른쪽 그림에서 a_1의 값과 $\dfrac{13}{2}$의 차가 작을수록 $a_1\times a_2$의 값은 커지고, a_1의 값과 $\dfrac{13}{2}$의 차가 클수록 $a_1\times a_2$의 값은 작아진다.



이때 a_1은 홀수이므로 $a_1\times a_2$는 $a_1=7$일 때 최댓값을 갖고, $a_1=1$일 때 최솟값을 갖는다.

10 해결단계

❶ 단계	$k=1$, $k=2$일 때의 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6$의 값의 부호를 확인한다.
❷ 단계	$k\geq 3$일 때 a_3, a_4, a_5, a_6을 k에 대한 식으로 나타내고, $a_3\times a_4\times a_5\times a_6$의 값의 부호를 확인한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 k의 값을 구하고, 그 합을 구한다.

$a_1=k$,

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n\leq 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0) \end{cases}$ (k는 자연수)에서

$a_1=k>0$, $a_2=a_1-2\times 1-k=-2<0$,

$a_3=a_2+2\times 2-k=2-k$

(ⅰ) $k=1$일 때,

$a_3=1>0$이므로

$a_4=a_3-2\times 3-1=-6<0$

$a_5=a_4+2\times 4-1=1>0$

$a_6=a_5-2\times 5-1=-10<0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $k\geq 3$일 때,

$a_3=2-k<0$이므로

$a_4=a_3+2\times 3-k=8-2k$

① $k=3$인 경우

$a_3=-1$, $a_4=2>0$이므로

$a_5=a_4-2\times 4-3=-9<0$

$a_6=a_5+2\times 5-3=-2<0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

② $k=4$인 경우

$a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

③ $k\geq 5$인 경우

$a_4=8-2k<0$이므로

$a_5=a_4+2\times 4-k=16-3k$

$k=5$이면

$a_3=-3$, $a_4=-2$, $a_5=1>0$이므로

$a_6=a_5-2\times 5-5=-14$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

$k\geq 6$이면

$a_5=16-3k<0$이므로

$a_6=a_5+2\times 5-k=26-4k$

이때 $a_3<0$, $a_4<0$, $a_5<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$을 만족시키려면

$a_6>0$에서 $26-4k>0$ $\quad\therefore k<\dfrac{13}{2}$

이때 $k\geq 6$이므로 $6\leq k<\dfrac{13}{2}$ $\quad\therefore k=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 합은

$3+5+6=14$

답 ②

11 해결단계

❶ 단계	수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	na_n을 b_n으로 놓고 b_{n+1}과 b_n 사이의 관계식을 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 관계식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다.
❹ 단계	a_{10}의 값을 구한다.

$S_n=\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3-a_n$의 양변에 n을 곱하면

$nS_n=(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})+3n-na_n$ ⋯⋯㉠

㉠의 n에 $n+1$을 대입하면

$(n+1)S_{n+1}$

$=(S_1+S_2+\cdots+S_n)+3(n+1)-(n+1)a_{n+1}$ ⋯⋯㉡

㉡$-$㉠을 하면

$(n+1)S_{n+1}-nS_n=S_n+3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$(n+1)S_{n+1}-(n+1)S_n=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$\therefore (n+1)(S_{n+1}-S_n)=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$(n+1)a_{n+1}=3-(n+1)a_{n+1}+na_n$

$2(n+1)a_{n+1}=na_n+3$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

이때 $na_n=b_n$으로 놓으면

$2b_{n+1}=b_n+3$

$*b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$2S_2=S_1+6-2a_2$

$2(a_1+a_2)=a_1+6-2a_2$

$2(4+a_2)=10-2a_2$ ($\because a_1=4$) $\quad \therefore a_2=\frac{1}{2}$

$\therefore b_2=2a_2=1$

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$의 n에 2, 3, 4, $\cdots$, 9를 차례대로 대입하면

$$b_3=\frac{1}{2}b_2+\frac{3}{2}$$

$$b_4=\frac{1}{2}b_3+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times b_2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$

$$b_5=\frac{1}{2}b_4+\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times b_2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\vdots$$

$$b_{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^8\times b_2+\left(\frac{1}{2}\right)^7\times\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\frac{3}{2}+\cdots+\frac{3}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^8\times b_2+\frac{\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^8}+3\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\ (\because b_2=1)$$

$$=3-\frac{1}{2^7}$$

$na_n=b_n$에서 $a_n=\frac{b_n}{n}$이므로

$a_{10}=\frac{b_{10}}{10}=\frac{3}{10}-\frac{1}{10\times2^7}=\frac{3}{10}-\frac{1}{5\times2^8}$ 답 ②

• 다른 풀이 •

$*$에서

$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$) ……㉢

㉠에 $n=2$를 대입하면

$2S_2=S_1+6-2a_2$

$2(a_1+a_2)=a_1+6-2a_2$

$2(4+a_2)=10-2a_2$ ($\because a_1=4$) $\quad \therefore a_2=\frac{1}{2}$

$b_2=2a_2=1$이므로 $b_2-3=-2$

즉, ㉢에서 수열 $\{b_n-3\}$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)은 제2항이 -2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$b_n-3=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$\therefore b_n=3-\frac{1}{2^{n-3}}$ (단, $n=2, 3, 4, \cdots$)

따라서 $a_n=\frac{b_n}{n}=\frac{3}{n}-\frac{1}{n\times2^{n-3}}$ ($n=2, 3, 4, \cdots$)이므로

$a_{10}=\frac{3}{10}-\frac{1}{5\times2^8}$

12 해결단계

❶ 단계	$n\neq4$, $n\neq9$이거나 $a_n\leq0$이면 $a_n=a_{n+1}-1$임을 이용하여 a_{10}의 값을 구한다.
❷ 단계	$a_9\leq0$, $a_9>0$일 때로 나누어 a_1의 값을 구한다.
❸ 단계	조건을 만족시키는 a_1의 값을 구하고, 그 곱을 구한다.

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-\sqrt{n}\times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n>0\text{인 경우})\\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

15 이하의 자연수 n에 대하여

$\sqrt{n}$이 자연수이려면 $n=4$ 또는 $n=9$ ($\because n\geq2$)이므로

$a_4>0$이면 $a_5=a_4-2a_2$, $a_9>0$이면 $a_{10}=a_9-3a_3$

이고 그 외에는 $a_{n+1}=a_n+1$이다.

즉, $a_n=a_{n+1}-1$이고 $a_{15}=1$이므로

(a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8, a_9), ($a_{10}, a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{16}$), $\cdots$은 각각 공차가 1인 등차수열이다.

$a_{10}=a_{15}-5=-4$

(i) $a_9\leq0$일 때,

$a_9=a_{10}-1=-5$이므로 $a_5=a_9-4=-9$

① $a_4\leq0$인 경우

$a_4=a_5-1=-10$이므로 $a_2=a_4-2=-12$

$\therefore a_1=-a_2=12$

② $a_4>0$인 경우

$a_5=a_4-2a_2$이므로 $a_4=a_5+2a_2=2a_2-9$

$a_2=a_4-2=2a_2-11$이므로

$a_2=11$

이때 $a_4=2a_2-9=13>0$이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a_1=-a_2=-11$

(ii) $a_9>0$일 때,

$a_{10}=a_9-3a_3=-4$이므로 $a_9=3a_3-4$

$a_5=a_9-4=3a_3-8$

① $a_4\leq0$인 경우

$a_4=a_5-1=3a_3-9$이므로

$a_3=a_4-1=3a_3-10 \quad \therefore a_3=5$

그런데 $a_3=5$이면 $a_4=6$이므로 $a_4\leq0$을 만족시키지 않는다.

② $a_4>0$인 경우

$a_5=a_4-2a_2$이므로 $3a_3-8=a_4-2a_2$

$a_4=a_3+1$을 위의 식에 대입하여 정리하면

$2(a_2+a_3)=9$

$a_3=a_2+1$을 위의 식에 대입하면

$2(2a_2+1)=9 \quad \therefore a_2=\frac{7}{4}$

$a_4=a_2+2=\frac{15}{4}>0$,

$a_9=3a_3-4=3a_2-1=\frac{17}{4}>0$

이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a_1=-a_2=-\frac{7}{4}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a_1의 값은 12, -11, $-\frac{7}{4}$

이므로 그 곱은

$12\times(-11)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=231$ 답 231