

THE 개념
블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L



I. 도형의 방정식

01. 평면좌표

1 두 점 사이의 거리

기본 + 필수연습

본문 pp.012~021

- 01 (1) 6 (2) 12 02 -2
 03 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{13}$ 04 5, 9
 05 -1, 11 06 12 07 $\frac{32}{3}$ 08 18
 09 최댓값 : 3, 최솟값 : -1
 10 (1) P(0, 1) (2) Q(-3, 4)
 11 $10+5\sqrt{2}$ 12 10
 13 $\overline{AB}=\overline{CA}$ 인 이등변삼각형 14 $2\sqrt{2}$
 15 $x=0, y=2$ 또는 $x=\sqrt{3}, y=-1$ 16 $5\sqrt{2}$
 17 $2\sqrt{13}$ 18 10 19 (1) 12 (2) $P(\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$
 20 16 21 30 22 풀이 참조
 23 풀이 참조 24 $10x-4y-3=0$
 25 $x=\frac{13}{3}$

01

- (1) 수직선 위의 두 점 A(-4), B(-10) 사이의 거리는
 $\overline{AB}=|-10-(-4)|=|-6|=6$
 (2) 수직선 위의 원점 O(0)과 점 A(12) 사이의 거리는
 $\overline{OA}=|12|=12$

답 (1) 6 (2) 12

02

수직선 위의 두 점 O(0), A(p) 사이의 거리는
 $\overline{OA}=|p|=4$
 이때 $p < 0$ 이므로
 $-p=4 \quad \therefore p=-4$
 또한, 수직선 위의 두 점 A(p), B(q) 사이의 거리는
 $\overline{AB}=|q-p|=6$

이때 $q > p, p=-4$ 이므로
 $q-(-4)=6 \quad \therefore q=2$
 $\therefore p+q=-4+2=-2$

답 -2

03

- (1) 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(-2, 1) 사이의 거리는
 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}$
 $=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$
 (2) 좌표평면 위의 원점 O(0, 0)과 점 A(-3, 2) 사이의 거리는
 $\overline{OA}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{13}$

04

좌표평면 위의 두 점 A(a-1, 4), B(5, a-4) 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로
 $\sqrt{\{5-(a-1)\}^2+(a-4-4)^2}=\sqrt{10}$
 $\sqrt{(6-a)^2+(a-8)^2}=\sqrt{10}$
 양변을 제곱하면
 $(6-a)^2+(a-8)^2=10$
 $a^2-14a+45=0, (a-5)(a-9)=0$
 $\therefore a=5$ 또는 $a=9$
 따라서 구하는 a의 값은 5, 9이다.

답 5, 9

05

- $\overline{AC}+\overline{BC}=12$ 이므로 $|x-3|+|x-7|=12$
 (i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-7)=12$ 에서
 $-2x+10=12, -2x=2$
 $\therefore x=-1$
 (ii) $3 \leq x < 7$ 일 때,
 $x-3-(x-7)=4 \neq 12$ 이므로
 조건을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.

(iii) $x \geq 7$ 일 때,

$$x-3+x-7=12 \text{에서}$$

$$2x-10=12, 2x=22$$

$$\therefore x=11$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 값은 $-1, 11$ 이다.

답 $-1, 11$

06

$\overline{PA} + \overline{PB} \leq 4\overline{AB}$ 에서

$$|x-(-1)| + |x-2| \leq 4 \times |2-(-1)| \text{이므로}$$

$$|x+1| + |x-2| \leq 12$$

(i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x+1)-(x-2) \leq 12 \text{에서}$$

$$-2x+1 \leq 12, -2x \leq 11$$

$$\therefore x \geq -\frac{11}{2}$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -\frac{11}{2} \leq x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x+1-(x-2)=3 \leq 12 \text{이므로}$$

$-1 \leq x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x+1+x-2 \leq 12 \text{에서}$$

$$2x-1 \leq 12, 2x \leq 13$$

$$\therefore x \leq \frac{13}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x \leq \frac{13}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{11}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$ 이므로

구하는 정수 x 는 $-5, -4, -3, \dots, 6$ 의 12개이다.

답 12

07

$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(3+3)^2 + (a-4)^2} = 2\sqrt{(3-4)^2 + (a-5)^2}$$

양변을 제곱하면

$$36 + (a-4)^2 = 4\{1 + (a-5)^2\}$$

$$a^2 - 8a + 52 = 4a^2 - 40a + 104$$

$$3a^2 - 32a + 52 = 0 \leftarrow (a-2)(3a-26)=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=\frac{26}{3}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{32}{3} \text{이다.}$$

답 $\frac{32}{3}$

08

두 점 $A(5-x, 0)$, $B(0, x-3)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0-(5-x)\}^2 + (x-3-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (x-3)^2}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 16x + 34}$$

$$= \sqrt{2(x-4)^2 + 2}$$

따라서 $x=4$ 일 때, 선분 AB 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이므로

$$a=4, m=\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2 + m^2 = 4^2 + (\sqrt{2})^2 = 18$$

답 18

09

두 점 $A(x+1, 0)$, $B(0, 2x-3)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0-(x+1)\}^2 + (2x-3-0)^2}$$

$$= \sqrt{(x+1)^2 + (2x-3)^2}$$

$$= \sqrt{5x^2 - 10x + 10}$$

이때 $\overline{AB} \leq 5$ 이므로

$$\sqrt{5x^2 - 10x + 10} \leq 5$$

양변을 제곱하면

$$5x^2 - 10x + 10 \leq 25$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0, (x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3$$

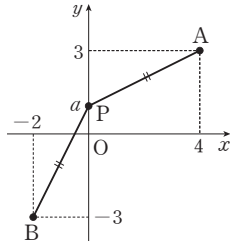
따라서 x 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이다.

답 최댓값 : 3, 최솟값 : -1

10

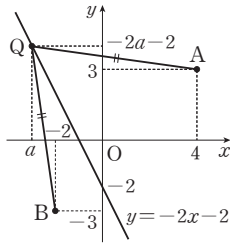
- (1) 오른쪽 그림과 같이 y 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{PB} \text{에서} \\ \overline{PA}^2 &= \overline{PB}^2 \text{이므로} \\ (0-4)^2 + (a-3)^2 &= (0+2)^2 + (a+3)^2 \\ a^2 - 6a + 25 &= a^2 + 6a + 13 \\ 12a &= 12 \quad \therefore a = 1 \\ \therefore P(0, 1) \end{aligned}$$



- (2) 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = -2x - 2$ 위의 점 Q의 좌표를 $(a, -2a - 2)$ 라 하면

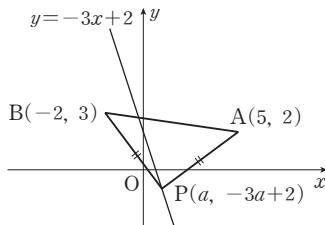
$$\begin{aligned} \overline{QA} &= \overline{QB} \text{에서} \\ \overline{QA}^2 &= \overline{QB}^2 \text{이므로} \\ (a-4)^2 + (-2a-5)^2 &= (a+2)^2 + (-2a+1)^2 \\ 5a^2 + 12a + 41 &= 5a^2 + 5 \\ 12a &= -36 \quad \therefore a = -3 \\ \therefore Q(-3, 4) \end{aligned}$$



답 P(0, 1) (2) Q(-3, 4)

11

- 다음 그림과 같이 직선 $y = -3x + 2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -3a + 2)$ 라 하자.



$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{PB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{이므로} \\ (a-5)^2 + (-3a)^2 &= (a+2)^2 + (-3a-1)^2 \\ 10a^2 - 10a + 25 &= 10a^2 + 10a + 5 \\ 20a &= 20 \quad \therefore a = 1 \\ \text{즉, } P(1, -1) &\text{이므로} \\ \overline{PA} &= \overline{PB} = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = 5, \end{aligned}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+2)^2 + (2-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PAB의 둘레의 길이는

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{AB} = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

답 $10 + 5\sqrt{2}$

12

삼각형 ABC의 외심을 O(a, b)라 하면

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} \text{에서 } \overline{AO}^2 = \overline{BO}^2 = \overline{CO}^2$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{BO}^2 \text{에서}$$

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-3)^2 + b^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$8a - 4b - 4 = 0 \quad \therefore 2a - b - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } \overline{AO}^2 = \overline{CO}^2 \text{에서}$$

$$(a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-6)^2 + (b-2)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 = a^2 - 12a + 36 + b^2 - 4b + 4$$

$$14a = 35 \quad \therefore a = \frac{5}{2}, b = 4 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore ab = \frac{5}{2} \times 4 = 10$$

답 10

보충 설명

삼각형의 외심의 성질 |

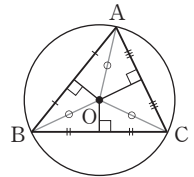
- (1) 삼각형의 세 변의 수직이등분선은

한 점(외심)에서 만난다.

- (2) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이

르는 거리는 모두 같다.

$$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = (\text{외접원의 반지름의 길이})$$



13

A(-1, -3), B(1, 2), C(4, -1)이므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{29}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-4)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{29}$$

이때 $\overline{AB} = \overline{CA} = \sqrt{29}$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

답 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형

14

삼각형 AOB에서 $\angle AOB=90^\circ$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$$

이때 $O(0, 0)$, $A(a, a+4)$, $B(-a, -a+4)$ 이므로

$$\begin{aligned} & \{a^2 + (a+4)^2\} + \{(-a)^2 + (-a+4)^2\} \\ &= \{a - (-a)\}^2 + \{(a+4) - (-a+4)\}^2 \\ & 4a^2 + 32 = 8a^2, \quad 4a^2 = 32, \quad a^2 = 8 \\ & \therefore a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$

15

$\triangle OAB$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} \text{에서 } \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$$

이때 $\overline{OA}^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$, $\overline{OB}^2 = x^2 + y^2$,

$$\overline{AB}^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 \text{이므로}$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 \text{에서 } x^2 + y^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \text{에서 } x^2 + y^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 \text{이므로}$$

$$y = -\sqrt{3}x + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$x^2 + (-\sqrt{3}x + 2)^2 = 4$$

$$x^2 - \sqrt{3}x = 0, \quad x(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 0, y = 2 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}, y = -1 \quad (\because \textcircled{2})$$

답 $x = 0, y = 2$ 또는 $x = \sqrt{3}, y = -1$

16

세 점 (a, b) , $(0, 4)$, $(5, -1)$ 을 각각 A, B, C라 하면

$$\sqrt{a^2 + (b-4)^2} = \overline{BA},$$

$$\sqrt{(5-a)^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (b+1)^2} = \overline{CA}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + (b-4)^2} + \sqrt{(5-a)^2 + (b+1)^2}$$

$$= \overline{BA} + \overline{CA}$$

$$\geq \overline{BC} \quad \leftarrow \text{점 A가 } \overline{BC} \text{ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.}$$

$$= \sqrt{(5-0)^2 + (-1-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

답 $5\sqrt{2}$

17

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

에서 세 점 (x, y) , $(1, -4)$, $(-3, 2)$ 를 각각 A, B, C라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = \overline{BA},$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \overline{CA}$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$$

$$= \overline{BA} + \overline{CA}$$

$$\geq \overline{BC} \quad \leftarrow \text{점 A가 } \overline{BC} \text{ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.}$$

$$= \sqrt{(-3-1)^2 + (2+4)^2}$$

$$= \sqrt{16+36}$$

$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$ 이다.

답 $2\sqrt{13}$

18

세 점 (x, y) , $(1, -2)$, $(-4, k)$ 를 각각 A, B, C라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \overline{BA},$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-k)^2} = \overline{CA}$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-k)^2}$$

$$= \overline{BA} + \overline{CA}$$

$$\geq \overline{BC} \quad \leftarrow \text{점 A가 } \overline{BC} \text{ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.}$$

$$= \sqrt{(-4-1)^2 + (k+2)^2}$$

$$= \sqrt{k^2 + 4k + 29}$$

즉, 점 A가 $\overline{BC}$ 위에 있을 때 최솟값 $\sqrt{k^2 + 4k + 29}$ 를 가지므로 $\sqrt{k^2 + 4k + 29} = 13$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 4k + 29 = 169, \quad k^2 + 4k - 140 = 0$$

$$(k+14)(k-10) = 0$$

$$\therefore k = 10 \quad (\because k > 0)$$

답 10

19

(1) y 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, y)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (1^2 + y^2) + \{3^2 + (y+2)^2\}$$

$$= 2y^2 + 4y + 14$$

$$= 2(y+1)^2 + 12$$

따라서 $y = -1$, 즉 $P(0, -1)$ 일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 최솟값 12를 갖는다.

(2) 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= \{(x-4)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-5)^2 + (y-2)^2\} \\ &= 2x^2 - 18x + 2y^2 - 10y + 54 \\ &= 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + 1\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{5}{2}$ 일 때 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 최솟값 1을 가

지므로 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

답 (1) 12 (2) $P\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

20

직선 $y = x + 2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, a+2)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 &= \frac{1}{2}\{(a-3)^2 + (a+2-1)^2\} - \{(a+1)^2 + (a+2)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 - 4a + 10) - (2a^2 + 6a + 5) \\ &= -a^2 - 8a \\ &= -(a+4)^2 + 16\end{aligned}$$

따라서 $a = -4$, 즉 $P(-4, -2)$ 일 때 $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2$ 은 최댓값 16을 갖는다.

답 16

21

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

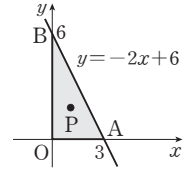
$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x^2 + y^2) + \{(x-3)^2 + y^2\} + \{x^2 + (y-6)^2\} \\ &= 3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 45 \\ &= 3(x-1)^2 + 3(y-2)^2 + 30\end{aligned}$$

따라서 $x=1$, $y=2$, 즉 $P(1, 2)$ 일 때 $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 최솟값 30을 갖는다.

답 30

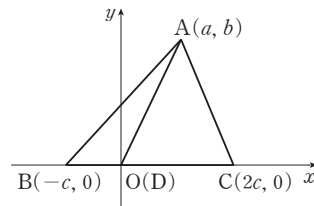
보충 설명

오른쪽 그림과 같이 점 $P(1, 2)$ 는 직선 AB, 즉 직선 $y = -2x + 6$ 보다 아래쪽에 있으므로 점 P는 삼각형 OAB의 내부에 있다.



22

다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓으면 점 D는 원점 $(0, 0)$ 이다.



이때 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면 $C(2c, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (a+c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac, \\ \overline{AC}^2 &= (a-2c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac\end{aligned}$$

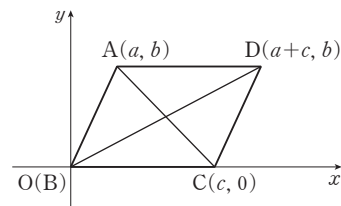
이때 $\overline{AD}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BD}^2 = c^2$ 이므로

$$\begin{aligned}2\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ac) + (a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac) \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \\ &= 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

23

다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면 위에 평행사변형 ABCD를 놓으면 점 B는 원점 $(0, 0)$ 이다.



이때 평행사변형 ABCD의 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $C(c, 0)$, $D(a+c, b)$ 라 하면
 $\overline{AC}^2 = (a-c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac$,
 $\overline{BD}^2 = (a+c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac$
 이때 $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{BC}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ac) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ac)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $= 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$

답 풀이 참조

24

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $A(4, 1)$, $B(-1, 3)$ 이고
 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 4$ 이므로
 $\{(x-4)^2 + (y-1)^2\} - \{(x+1)^2 + (y-3)^2\} = 4$
 $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17 - (x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10) = 4$
 $\therefore 10x - 4y - 3 = 0$
 따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은
 $10x - 4y - 3 = 0$

답 $10x - 4y - 3 = 0$

25

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $A(2, 6)$, $B(0, 2)$,
 $C(4, -2)$ 이고 $\overline{PA}^2 - 2\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 0$ 이므로
 $\{(x-2)^2 + (y-6)^2\} - 2\{x^2 + (y-2)^2\}$
 $+ \{(x-4)^2 + (y+2)^2\} = 0$
 $(x^2 + y^2 - 4x - 12y + 40) - 2(x^2 + y^2 - 4y + 4)$
 $+ (x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20) = 0$
 $12x - 52 = 0$
 $\therefore x = \frac{13}{3}$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 $x = \frac{13}{3}$

답 $x = \frac{13}{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.022-023

01 $\frac{34}{3}$	02 5	03 4	04 52
05 1시간	06 2	07 1	08 ⑤
09 2	10 14	11 $\frac{21}{2}$	12 $\frac{9}{2}$

01

$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이므로

$$|a - (-1)| = 2 \times |a - 4|, |a + 1| = 2 \times |a - 4|$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 2a + 1 = 4(a^2 - 8a + 16)$$

$$3a^2 - 34a + 63 = 0 \leftarrow (3a-7)(a-9) = 0 \quad \therefore a = \frac{7}{3} \text{ 또는 } a = 9$$

구하는 모든 a 의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{34}{3}$ 이다.

답 $\frac{34}{3}$

02

$\overline{PR} + \overline{QR} < 6$ 에서 $|x - (-3)| + |x - 1| < 6$ 이므로

$$|x + 3| + |x - 1| < 6$$

(i) $x < -3$ 일 때,

$$-(x + 3) - (x - 1) < 6 \text{에서}$$

$$-2x - 2 < 6, -2x < 8$$

$$\therefore x > -4$$

그런데 $x < -3$ 이므로 $-4 < x < -3$

(ii) $-3 \leq x < 1$ 일 때,

$$x + 3 - (x - 1) = 4 < 6 \text{이므로}$$

$-3 \leq x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + 3 + x - 1 < 6 \text{에서}$$

$$2x + 2 < 6, 2x < 4$$

$$\therefore x < 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-4 < x < 2$ 이므로 구하는 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다.

답 5

03

정사각형 ABCD의 넓이가 5이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

따라서 대각선 AC의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AC}^2 = 10, \text{ 즉}$$

$$(k+1-2)^2 + (1-2)^2 = 10 \text{에서}$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0, (k+2)(k-4) = 0$$

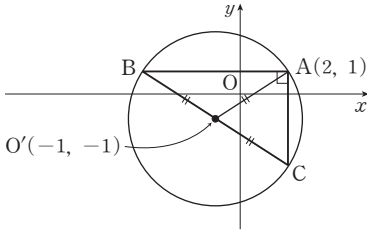
$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

답 4

04

삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 $\overline{BC}$ 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

또한, 외심은 $\overline{BC}$ 의 중점이므로 삼각형 ABC의 외심을 O'이라 하면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } \overline{O'A} = \overline{O'B} = \overline{O'C} = \frac{1}{2}\overline{BC} \text{이므로}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = (2\overline{O'A})^2 = 4\overline{O'A}^2$$

$$= 4\{(2+1)^2 + (1+1)^2\}$$

$$= 52$$

답 52

05

동서 방향을 x 축, 남북 방향을 y 축으로 하는 좌표평면을 생각하자.

A는 점 (3, 0), B는 점 (0, -4)에서 출발한다고 할 때, t 시간 후의 A, B의 위치를 각각

$$A(3-4t, 0), B(0, -4+2t) \text{라 하면}$$

두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (3-4t)\}^2 + \{-4 + 2t - 0\}^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 40t + 25}$$

$$= \sqrt{20(t-1)^2 + 5}$$

이므로 $t=1$ 일 때, 최솟값 $\sqrt{5}$ 를 갖는다.

따라서 출발하여 1시간이 지난 후 A, B 사이의 거리가 최소가 된다.

답 1시간

06

점 (a, b) 가 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$$b=2a+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 (a, b) , 즉 $(a, 2a+1)$ 이 두 점 A(1, 1),

B(3, -1)로부터 같은 거리에 있으므로

$$\sqrt{(a-1)^2 + (2a)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+2)^2}$$

$$\sqrt{5a^2 - 2a + 1} = \sqrt{5a^2 + 2a + 13}$$

양변을 제곱하면

$$5a^2 - 2a + 1 = 5a^2 + 2a + 13$$

$$4a = -12 \quad \therefore a = -3, b = -5 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore a - b = -3 - (-5) = 2$$

답 2

07

점 P(a, b)가 직선 $x+y-4=0$ 위에 있으므로

$$a+b-4=0 \quad \therefore b=-a+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 P(a, -a+4), A(2, 0), B(-4, 0)이고

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 5 \text{에서}$$

$$\overline{BP} = 5\overline{AP}, \text{ 즉 } \overline{BP}^2 = 25\overline{AP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+4)^2 + (-a+4)^2 = 25\{(a-2)^2 + (-a+4)^2\}$$

$$2a^2 + 32 = 25(2a^2 - 12a + 20)$$

$$48a^2 - 300a + 468 = 0, 4a^2 - 25a + 39 = 0$$

$$(a-3)(4a-13) = 0 \quad \therefore a = 3 (\because a \text{는 정수})$$

$$a = 3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -3 + 4 = 1$$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로

$$a - 2b = 3 - 2 \times 1 = 1$$

답 1

08

$$\neg, \overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (참)}$$

$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2}$
 $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
 $\overline{BC} = 2\sqrt{5} (\because \neg)$
 $\overline{CA} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2}$
 $= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
 즉, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 을 만족시키므로 피타고라스 정리
 에 의하여
 $\angle B = 90^\circ$ (참)
 다. $\neg$, $\neg$ 에서
 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = \sqrt{5} : 2\sqrt{5} : 5$
 $= 1 : 2 : \sqrt{5}$ (참)
 따라서 $\neg$, $\neg$, 다 모두 옳다.

답 ⑤

09

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$
 $= \{(a+2)^2 + b^2\} + \{(a-2)^2 + b^2\} + \{a^2 + (b-6)^2\}$
 $= 3a^2 + 3b^2 - 12b + 44$
 $= 3a^2 + 3(b-2)^2 + 32$
 따라서 $a=0, b=2$, 즉 $P(0, 2)$ 일 때 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의
 값이 최소가 되므로
 $a+b=0+2=2$

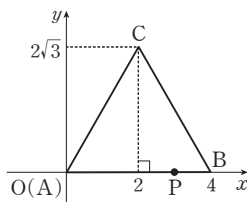
답 2

보충 설명

삼각형의 무게중심의 성질 | 삼각형의 내부에 있는 점 중에서 삼각형의 세 꼭짓점까지의 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점은 무게중심이다. 즉, 문제에서 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 본문 p.026의 개념05에서 '좌표평면 위의 삼각형의 무게중심'을 배우면 문제를 빠르게 풀 수 있다.

10

오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x 축, 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면 위에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 놓으면 점 A는 원점 $(0, 0)$ 이다.



이때 삼각형 ABC의 나머지 두 꼭짓점의 좌표는 각각 $B(4, 0), C(2, 2\sqrt{3})$
 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 높이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
 또한, 점 P는 x 축 위의 점이므로
 $P(a, 0) (0 \leq a \leq 4)$ 이라 하면

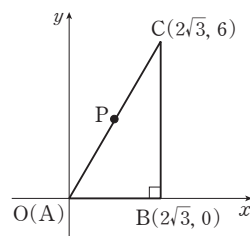
$$\begin{aligned}
 \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= \{(a-4)^2 + 0^2\} + \{(a-2)^2 + (2\sqrt{3})^2\} \\
 &= 2a^2 - 12a + 32 \\
 &= 2(a-3)^2 + 14
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3$, 즉 $P(3, 0)$ 일 때 $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 최솟값 14를 갖는다.

답 14

11

다음 그림과 같이 직선 AB를 x 축, 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓으면 점 A는 원점 $(0, 0)$ 이다.



이때 삼각형 ABC의 나머지 두 꼭짓점의 좌표는 각각 $B(2\sqrt{3}, 0), C(2\sqrt{3}, 6)$ 이므로 직선 AC의 방정식은

$$y = \frac{6}{2\sqrt{3}}x \quad \therefore y = \sqrt{3}x$$

점 P는 변 CA 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, \sqrt{3}a) (0 \leq a \leq 2\sqrt{3})$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= \{a^2 + (\sqrt{3}a)^2\} + \{(a-2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}a)^2\} \\
 &= 8a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 \\
 &= 8\left(a - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{21}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 즉 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 일 때 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 최솟값 $\frac{21}{2}$ 을 갖는다.

답 $\frac{21}{2}$

12

A(1, -1), B(5, 3)이므로 P(x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 - 8 \text{에서}$$

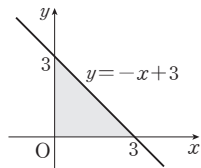
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} - 8$$

$$8x + 8y = 24 \quad \therefore x + y = 3$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 x절편이 3, y절편이 3인 직선이다.

따라서 직선 $y = -x + 3$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$



답 $\frac{9}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 - 8$ 을 x, y에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(나)	점 P가 나타내는 도형이 직선임을 확인한 경우	20%
(다)	점 P가 나타내는 도형 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 경우	40%

2 선분의 내분점

기본 + 필수연습

본문 pp.028-035

26 (1) 3 (2) 4 27 (1) $(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ (2) (2, 0)

28 5 29 7 30 2

31 -75 32 10 33 $0 < t < \frac{5}{7}$

34 $\frac{19}{2}$ 35 35 36 C(-30, -6)

37 9 38 $2\sqrt{10}$ 39 D($\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$)

40 -4 41 0 42 22 43 9

44 $\frac{23}{2}$

26

(1) 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\frac{1 \times 7 + 2 \times 1}{1+2} = 3$$

(2) 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\frac{1+7}{2} = 4$$

답 (1) 3 (2) 4

27

$$(1) \frac{2 \times 4 + 1 \times 0}{2+1} = \frac{8}{3}, \frac{2 \times (-2) + 1 \times 2}{2+1} = -\frac{2}{3}$$

따라서 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}) \text{이다.}$$

$$(2) \frac{0+4}{2} = 2, \frac{2+(-2)}{2} = 0$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는 (2, 0)이다.

답 (1) $(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ (2) (2, 0)

28

선분 AB를 3:1로 내분하는 점 P의

$$x\text{좌표는 } \frac{3 \times 6 + 1 \times (-2)}{3+1} = 4,$$

$$y\text{좌표는 } \frac{3 \times a + 1 \times (-3)}{3+1} = \frac{3a-3}{4} \text{이므로}$$

$$P(4, \frac{3a-3}{4})$$

이때 점 P가 x축 위에 있으므로 $\leftarrow x\text{축 위의 점의 } y\text{좌표는 } 0\text{이다.}$

$$\frac{3a-3}{4} = 0 \quad \therefore a = 1$$

따라서 a의 값과 점 P의 x좌표의 합은

$$1 + 4 = 5$$

답 5

29

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 (a, b)는

$$a = \frac{2+5+5}{3} = 4, b = \frac{3+(-1)+7}{3} = 3$$

$$\therefore a+b = 4+3 = 7$$

답 7

30

선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표가 (7, 3)이므로

$$\frac{3 \times 3a + 2 \times (2a - 2)}{3 + 2} = 7, \frac{3 \times (2a - b) + 2 \times 3b}{3 + 2} = 3$$

$$\text{즉, } \frac{13a - 4}{5} = 7 \text{에서}$$

$$13a - 4 = 35, 13a = 39 \quad \therefore a = 3$$

$$\frac{6a + 3b}{5} = 3 \text{에서 } 6a + 3b = 15$$

$$18 + 3b = 15, 3b = -3 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 3 + (-1) = 2$$

답 2

31

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-11) + 1 \times 7}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2 + 1} \right)$$

$$\therefore P(-5, 3)$$

또한, 선분 OP를 1:3으로 내분하는 점의 좌표 (a, b)는

$$a = \frac{1 \times (-5) + 3 \times 0}{1 + 3} = -\frac{5}{4}$$

$$b = \frac{1 \times 3 + 3 \times 0}{1 + 3} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 80ab = 80 \times \left(-\frac{5}{4}\right) \times \frac{3}{4} = -75$$

답 -75

32

선분 AB를 삼등분하는 두 점은 선분 AB를 1:2로 내분하는 점과 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1 + 2}, \frac{1 \times 15 + 2 \times (-9)}{1 + 2} \right)$$

$$\therefore (2, -1)$$

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-2) + 1 \times 4}{2 + 1}, \frac{2 \times 15 + 1 \times (-9)}{2 + 1} \right)$$

$$\therefore (0, 7)$$

이때 $a > c$ 이므로 P(2, -1), Q(0, 7)에서

$$a = 2, b = -1, c = 0, d = 7$$

$$\therefore a - b - c + d = 2 - (-1) - 0 + 7 = 10$$

답 10

33

두 점 A(1, -2), B(-8, 5)에 대하여 선분 AB를

$(1-t):t$ ($0 < t < 1$)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t) \times (-8) + t \times 1}{(1-t) + t}, \frac{(1-t) \times 5 + t \times (-2)}{(1-t) + t} \right)$$

$$\therefore (9t - 8, -7t + 5)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$9t - 8 < 0, -7t + 5 > 0$$

$$9t - 8 < 0 \text{에서 } 9t < 8 \quad \therefore t < \frac{8}{9}$$

$$-7t + 5 > 0 \text{에서 } -7t > -5 \quad \therefore t < \frac{5}{7}$$

$$\therefore 0 < t < \frac{5}{7} (\because 0 < t < 1)$$

답 $0 < t < \frac{5}{7}$

34

두 점 A(-1, -4), B(2, a)에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2 + 1}, \frac{2 \times a + 1 \times (-4)}{2 + 1} \right)$$

$$\therefore \left(1, \frac{2a - 4}{3} \right)$$

이 점이 직선 $y = 2x + 3$ 위에 있으므로

$$\frac{2a - 4}{3} = 2 \times 1 + 3$$

$$2a - 4 = 15, 2a = 19$$

$$\therefore a = \frac{19}{2}$$

답 $\frac{19}{2}$

35

이차함수 $y=ax^2$ ($a>0$)의 그래프와 직선 $y=2x+3$ 이 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 이차방정식 $ax^2=2x+3$, 즉 $ax^2-2x-3=0$ 의 두 근이다.

서로 다른 두 점 P, Q의 x 좌표를 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a}, \alpha\beta=-\frac{3}{a}$$

또한, 두 점 P, Q의 중점 M은 제1사분면 위의 점이므로 M의 x 좌표는 선분 MH의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{a}=\frac{1}{2} \quad \therefore a=2$$

$$\therefore \alpha+\beta=1, \alpha\beta=-\frac{3}{2} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

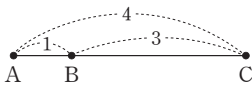
이때 두 점 P, Q는 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (\beta-\alpha)^2 + \{2\beta+3-(2\alpha+3)\}^2 \\ &= (\beta-\alpha)^2 + 4(\beta-\alpha)^2 \\ &= 5(\beta-\alpha)^2 \\ &= 5\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\} \\ &= 5\left\{1^2 - 4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 5\times 7 = 35 \end{aligned}$$

답 35

36

$3\overline{AC}=4\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=4:3$ 이고, 점 C가 선분 AB의 연장선 위의 점이므로 다음 그림과 같이 점 B는 선분 AC를 1:3으로 내분하는 점이다.



A(6, 2), B(-3, 0)이므로 점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

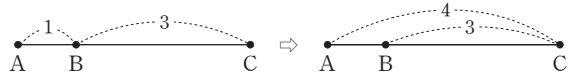
$$\frac{1\times a+3\times 6}{1+3}=-3 \text{에서 } a=-30$$

$$\frac{1\times b+3\times 2}{1+3}=0 \text{에서 } b=-6$$

$$\therefore C(-30, -6)$$

답 C(-30, -6)

다른 풀이



점 C가 선분 AB를 4:3으로 외분하므로

$$a=\frac{4\times(-3)-3\times 6}{4-3}=-30$$

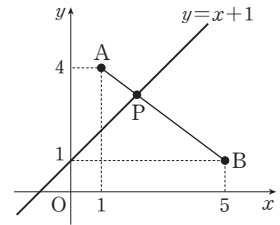
$$b=\frac{4\times 0-3\times 2}{4-3}=-6$$

$$\therefore C(-30, -6)$$

37

두 점 A(1, 4), B(5, 1)과 직선 $y=x+1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

이때 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ 이므로 점 P는 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분한다.



선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{5m+n}{m+n}, \frac{m+4n}{m+n}\right) \text{이고,}$$

점 P는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{m+4n}{m+n}=\frac{5m+n}{m+n}+1, \frac{m+4n}{m+n}=\frac{6m+2n}{m+n}$$

$$m+4n=6m+2n \quad \therefore 5m=2n$$

서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여

$$m:n=2:5 \text{이므로 } m=2, n=5$$

$$\therefore 2m+n=2\times 2+5=9$$

답 9

다른 풀이

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{1-4}{5-1}=-\frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\text{직선 AB의 방정식을 } y=-\frac{3}{4}x+a \text{ (a는 상수)라 하면}$$

$$\text{이 직선이 점 A(1, 4)를 지나므로 } 4=-\frac{3}{4}\times 1+a \text{에서}$$

$$a=\frac{19}{4}$$

$$\therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이때 선분 AB는 $\textcircled{1}$ 에서 $1\leq x\leq 5$ 일 때이다.

㉠과 $y=x+1$ 을 연립하여 풀면

$$x=\frac{15}{7}, y=\frac{22}{7}$$

즉, 선분 AB와 직선 $y=x+1$ 의 교점 P의 좌표는

$$\left(\frac{15}{7}, \frac{22}{7}\right) \text{이므로}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \left(\frac{15}{7} - 1\right) : \left(5 - \frac{15}{7}\right) = \frac{8}{7} : \frac{20}{7} = 2 : 5$$

따라서 $m=2, n=5$ 이므로

$$2m+n=2 \times 2+5=9$$

38

A(-3, 1), B(2, 6), C(4, 0)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+3)^2 + (6-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4+3)^2 + (0-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

$\angle A$ 의 이등분선이 선분 BC와

만나는 점이 D이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

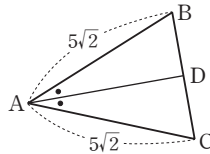
$$= 5\sqrt{2} : 5\sqrt{2} = 1 : 1$$

즉, 점 D는 선분 BC의 중점이므로

$$D\left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) \quad \therefore D(3, 3)$$

따라서 선분 AD의 길이는

$$\sqrt{(3+3)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{10}$$



답 $2\sqrt{10}$

39

A(2, 3), B(-2, 1), C(5, -3)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = 2\sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 2 : 3$$

이때 $\star$ 가 $\triangle ABC$ 의 내심이므로 직선 AI는 $\angle BAC$ 의 이등분선이다.

따라서 점 D는 선분 BC를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{2 \times 5 + 3 \times (-2)}{2+3}, \frac{2 \times (-3) + 3 \times 1}{2+3}\right)$$

$$\therefore D\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

답 $D\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

40

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형의 두 대각선의 중점은 일치한다.

이때 선분 OB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+4}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 2)$$

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5+a}{2}, \frac{9+b}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{5+a}{2} = 3, \frac{9+b}{2} = 2$$

따라서 $a=1, b=-5$ 이므로

$$a+b=1+(-5)=-4$$

답 -4

41

$\star$ 마름모에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 중점은 일치한다.

이때 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+b}{2}, \frac{-2+c}{2}\right)$$

또한, 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{a+0}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-1, \frac{a}{2}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{-4+b}{2} = -1, \frac{-2+c}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore b=2, c=a+2$$

$$\text{즉, } a-c=-2, b=2 \text{이므로}$$

$$a+b-c=-2+2=0$$

답 0

42

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (4, 7)이므로

$$\frac{0+a+4}{3} = 4, \frac{3+4+b}{3} = 7$$

$$\therefore a=8, b=14$$

$$\therefore a+b=8+14=22$$

답 22

43

삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, u)$ 라 하자.

이때 점 $P(0, 3)$ 은 변 AB의 중점이므로

$$\frac{p+r}{2}=0, \frac{q+s}{2}=3 \text{에서}$$

$$p+r=0, q+s=6 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

점 $Q(a, -1)$ 은 변 BC의 중점이므로

$$\frac{r+t}{2}=a, \frac{s+u}{2}=-1 \text{에서}$$

$$r+t=2a, s+u=-2 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

점 $R(4, b)$ 는 변 CA의 중점이므로

$$\frac{t+p}{2}=4, \frac{u+q}{2}=b \text{에서}$$

$$t+p=8, u+q=2b \quad \cdots \textcircled{㉓}$$

또한, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(3, 2)$ 이므로

$$\frac{p+r+t}{3}=3, \frac{q+s+u}{3}=2$$

$$\therefore p+r+t=9, q+s+u=6 \quad \cdots \textcircled{㉔}$$

㉑, ㉒, ㉓에서

$$2(p+r+t)=0+2a+8=2a+8$$

$$2(q+s+u)=6+(-2)+2b=2b+4$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } 2a+8=18, 2b+4=12$$

$$\therefore a=5, b=4 \quad \therefore a+b=5+4=9$$

답 9

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 $(3, 2)$ 는 삼각형 ABC의 세 변의 중점 $P(0, 3)$, $Q(a, -1)$, $R(4, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 무게중심과 일치한다.

$$\text{즉, } \frac{0+a+4}{3}=3, \frac{3+(-1)+b}{3}=2 \text{이므로}$$

$$a=5, b=4 \quad \therefore a+b=5+4=9$$

44

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(5, 5)$ 이므로

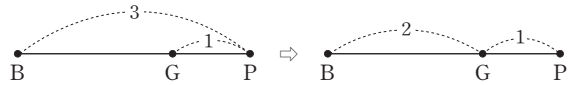
$$\frac{1+5-p+8}{3}=5, \frac{5+1+6+q}{3}=5 \quad \therefore p=-1, q=3$$

즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $B(6, 1)$, $C(8, 9)$ 이다.

이때 $\overline{PB}=3\overline{PG}$ 이므로 $\overline{PB}:\overline{PG}=3:1$ 이고,

점 P가 선분 BG의 연장선 위의 점이므로

점 G는 선분 BP를 2:1로 내분하는 점이다.



$P(a, b)$, $B(6, 1)$, $G(5, 5)$ 이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 6}{2+1}=5 \text{에서 } a=\frac{9}{2}, \frac{2 \times b + 1 \times 1}{2+1}=5 \text{에서 } b=7$$

$$\therefore a+b=\frac{9}{2}+7=\frac{23}{2}$$

답 $\frac{23}{2}$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $(5, 5)$ 이므로

$$\frac{1+5-p+8}{3}=5, \frac{5+1+6+q}{3}=5 \quad \therefore p=-1, q=3$$

즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $B(6, 1)$, $C(8, 9)$ 이다.

이때 $\overline{PB}=3\overline{PG}$ 에서 $\overline{PB}:\overline{PG}=3:1$

무게중심 G에 대하여

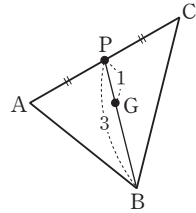
$\overline{BG}:\overline{PG}=2:1$ 이므로 점 P는 오른

쪽 그림과 같이 변 AC의 중점이다.

즉, AC의 중점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1+8}{2}, \frac{5+9}{2}\right) \quad \therefore P\left(\frac{9}{2}, 7\right)$$

따라서 $a=\frac{9}{2}$, $b=7$ 이므로 $a+b=\frac{23}{2}$



STEP 1

개념 마무리

본문 p.036

13 16

14 $\frac{1}{5} < t < \frac{2}{3}$

15 -6

16 5

17 -6

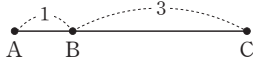
18 $P\left(\frac{11}{2}, 4\right)$

13

$-4 < 8$ 이므로 수직선 위에서 점 A는 점 B보다 왼쪽에 있다.

또한, $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$ 이므로 점 C의 위치는 다음과 같이 경우를 나누어 나타낼 수 있다.

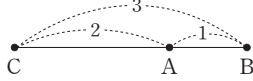
(i) 점 B가 선분 AC를 1:3으로 내분하는 경우



$$\therefore, \frac{1 \times a + 3 \times (-4)}{1+3} = 8 \text{이므로}$$

$$a = 44$$

(ii) 점 A가 선분 CB를 2:1로 내분하는 경우



$$\therefore, \frac{2 \times 8 + 1 \times a}{2+1} = -4 \text{이므로}$$

$$a = -28$$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은

$$44 + (-28) = 16$$

답 16

14

두 점 $A(1, 4)$, $B(-4, -2)$ 에 대하여 선분 AB를

$t : (1-t)$ ($0 < t < 1$)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{-4t + (1-t)}{t + (1-t)}, \frac{-2t + 4(1-t)}{t + (1-t)} \right)$$

$$\therefore (-5t + 1, -6t + 4)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$-5t + 1 < 0, -6t + 4 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{5} < t < \frac{2}{3}$$

답 $\frac{1}{5} < t < \frac{2}{3}$

15

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 8 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(4, \frac{2a}{3} \right)$$

이 점이 직선 $y = -x$ 위에 있으므로

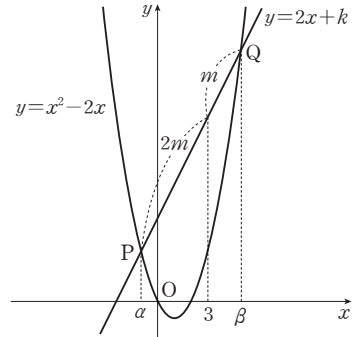
$$\frac{2a}{3} = -4 \text{에서 } 2a = -12$$

$$\therefore a = -6$$

답 -6

16

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 $\alpha < \beta$ 이고 다음 그림과 같다.



곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 직선 $y = 2x + k$ ($k > 0$)가 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식

$$x^2 - 2x = 2x + k, \text{ 즉 } x^2 - 4x - k = 0 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

의 실근과 같으므로 α, β 는 이차방정식 ㉑의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\alpha\beta = -k \quad \cdots \textcircled{㉓}$$

이때 선분 PQ를 2:1로 내분하는 점의 x 좌표가 3이므로

$$\frac{2 \times \beta + 1 \times \alpha}{2+1} = 3 \text{에서 } \frac{\alpha + 2\beta}{3} = 3$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 9 \quad \cdots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉒}, \textcircled{㉔} \text{을 연립하여 풀면 } \alpha = -1, \beta = 5$$

$$\textcircled{㉓} \text{에서 } -k = (-1) \times 5 = -5$$

$$\therefore k = 5$$

답 5

17

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가

$(4, 2)$ 이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4, \frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \text{ 즉 } x_1 + x_2 = 8, y_1 + y_2 = 4$$

또한, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 3)$ 이므로

$$\frac{x_1 + x_2 + a}{3} = -1, \frac{8 + a}{3} = -1 \quad \therefore a = -11$$

$$\frac{y_1 + y_2 + b}{3} = 3, \frac{4 + b}{3} = 3 \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore a + b = -11 + 5 = -6$$

답 -6

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을

$G(-1, 3)$, 선분 AB의 중점을

$M(4, 2)$ 라 하면 점 G는 선분 CM

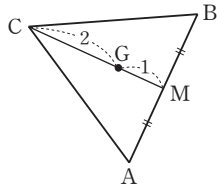
을 2:1로 내분하므로

$$\frac{2 \times 4 + 1 \times a}{2+1} = -1, \frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1} = 3$$

$$\frac{a+8}{3} = -1 \text{에서 } a = -11$$

$$\frac{b+4}{3} = 3 \text{에서 } b = 5$$

$$\therefore a+b = -11+5 = -6$$



18

$A(-1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(7, 6)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(7-4)^2 + (6-2)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 1$$

이때 $\angle B$ 의 이등분선이 선분 AC와 만나는 점이 D이므로
점 D는 선분 AC의 중점이다.

즉, $\overline{BP} : \overline{CP} = \overline{AD} : \overline{CD} = 1 : 1$ 이므로 점 P는 선분 BC의
중점이다. ← 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용한다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{4+7}{2}, \frac{2+6}{2} \right) \quad \therefore P\left(\frac{11}{2}, 4 \right)$$

$$\text{답 } P\left(\frac{11}{2}, 4 \right)$$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.037

1 11

2 $4\sqrt{10}$

3 13

4 $\frac{7}{4}$

5 8

6 $(a-3)^2 + b^2 = 288$

1

$A(1, 5)$, $B(a, b)$ 이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{b-5}{a-1}$$

직선 AB가 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$ 과 평행하므로

$$\frac{b-5}{a-1} = -1, b-5 = -a+1$$

$$\therefore a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 P는 선분 AB 위에 있고, $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로 점 P는 선분 AB를 1:2로 내분한다.

즉, 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times a + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 5}{1+2} \right)$$

$$\therefore P\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+10}{3} \right)$$

이때 점 P는 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

$$\frac{b+10}{3} = \frac{a+2}{3} + 1, b+10 = a+2+3$$

$$\therefore a-b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{11}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{2} = 11$$

답 11

다른 풀이

직선 AB와 직선 $x+y-3=0$ 이 평행하므로 직선 AB의 기
울기는 -1 이다.

직선 AB의 방정식을 $y=-x+k$ (k 는 상수)라 하면 이 직선
이 점 $A(1, 5)$ 를 지나므로

$$5 = -1 + k \quad \therefore k = 6$$

즉, 직선 AB의 방정식은 $y=-x+6$ 이므로

$y=x+1$, $y=-x+6$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{5}{2}, y = \frac{7}{2} \quad \therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

또한, $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로 점 P는 선분
AB를 1:2로 내분한다.

즉, 두 점 $\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+10}{3} \right)$ 과 $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$ 이 일치하므로

$$\frac{a+2}{3} = \frac{5}{2}, \frac{b+10}{3} = \frac{7}{2}$$

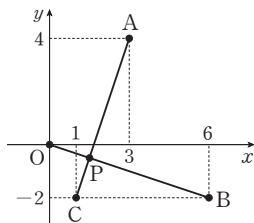
$$\therefore a = \frac{11}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{2} = 11$$

2

다음 그림에서

$\overline{PO} + \overline{PB} \geq \overline{OB}$, $\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC}$ 이고,
이를 동시에 만족시키는 점 P가 존재하므로
 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{OB} + \overline{AC}$



$$\overline{OB} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{OB} + \overline{AC} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{10}$ 이다.

답 $4\sqrt{10}$

3

세 점 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PAB에 대하여

$$\overline{BP} < \overline{AP} + \overline{AB} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \overline{AP} < \overline{BP} + \overline{AB} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 세 점 P, A, B가 일직선 위에 있을 때

$$\overline{BP} = \overline{AP} + \overline{AB} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) $\overline{AP} \leq \overline{BP}$ 일 때,

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{에서 } \overline{BP} \leq \overline{AP} + \overline{AB}$$

$$\overline{BP} - \overline{AP} \leq \overline{AB}$$

이때 $\overline{BP} - \overline{AP} \geq 0$, $\overline{AB} \geq 0$ 이므로

$$|\overline{AP} - \overline{BP}|^2 = |\overline{BP} - \overline{AP}|^2 \leq \overline{AB}^2$$

(ii) $\overline{BP} \leq \overline{AP}$ 일 때,

$$\textcircled{2} \text{에서 } \overline{AP} < \overline{BP} + \overline{AB}$$

$$\overline{AP} - \overline{BP} < \overline{AB}$$

이때 $\overline{AP} - \overline{BP} \geq 0$, $\overline{AB} \geq 0$ 이므로

$$|\overline{AP} - \overline{BP}|^2 < \overline{AB}^2$$

(i), (ii)에서

$$|\overline{AP} - \overline{BP}|^2 \leq \overline{AB}^2 \quad \leftarrow \overline{AP} \leq \overline{BP} \text{일 때, 최댓값을 갖는다.}$$

$$= (3-1)^2 + (5-2)^2 = 13$$

이므로 $|\overline{AP} - \overline{BP}|^2$ 의 최댓값은 13이다.

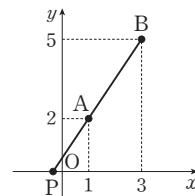
답 13

보충 설명

점 P의 좌표가 $(-\frac{1}{3}, 0)$ 일 때, 세 점

P, A, B는 일직선 위에 있고, 이때

$|\overline{AP} - \overline{BP}|^2$ 이 최댓값을 갖는다.



4

A(0, 0), B(0, 2)이므로 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 4$ 에서

$$(x^2 + y^2) + \{x^2 + (y-2)^2\} = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4y + 4 = 4, \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 1$$

이때 $x^2 = 1 - (y-1)^2 \geq 0$ 이므로

$$(y-1)^2 \leq 1, \quad -1 \leq y-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq y \leq 2$$

$x^2 = 1 - (y-1)^2$ 을 $y - x^2$ 에 대입하면

$$y - x^2 = y - \{1 - (y-1)^2\}$$

$$= y^2 - y$$

$$= \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (0 \leq y \leq 2)$$

따라서 $y - x^2$ 은 $y=2$ 일 때 최댓값 2를 갖고, $y=\frac{1}{2}$ 일 때

최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 가지므로 $y - x^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$2 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

답 $\frac{7}{4}$

5

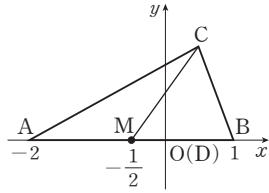
$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$

선분 CD가 $\angle BCA$ 의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$$

즉, 점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB
를 x 축, 점 D를 지나고 직선
AB에 수직인 직선을 y 축으
로 하는 좌표평면 위에 삼각
형 ABC를 놓으면 점 D는
원점 (0, 0)이다.



이때 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, B의 좌표는 각각
 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ 이므로
선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$\overline{CM}$ 은 선분 AB를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이와 같
으므로

$$\overline{CM} = \frac{3}{2}$$

$C(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면

$$\sqrt{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + a + b^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또한, $\overline{AC} = 2\overline{BC}$, 즉 $\overline{AC}^2 = 4\overline{BC}^2$ 이므로

$$(a+2)^2 + b^2 = 4\{(a-1)^2 + b^2\}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$a = 2 - 4a, 5a = 2 \quad \therefore a = \frac{2}{5}$$

$$k^2 = \overline{CD}^2$$

$$= a^2 + b^2 = 4a \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= 4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore 5k^2 = 5 \times \frac{8}{5} = 8$$

보충 설명

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{5}, b = \frac{6}{5} \quad (\because b > 0)$$

$$k^2 = \overline{CD}^2$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$$

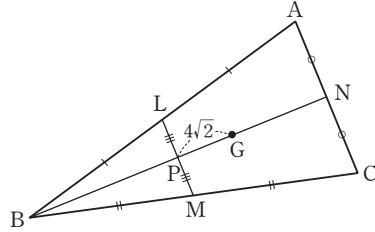
$$\therefore 5k^2 = 5 \times \frac{8}{5} = 8$$

답 8

6

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 중점이 각각 L, M이므
로 $\overline{LM} \parallel \overline{AC}$

따라서 점 P는 선분 LM의 중점이다.



$L(2, 1)$, $M(4, -1)$ 이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right) \quad \therefore P(3, 0)$$

또한, $\overline{NP} = \overline{BP}$, $\overline{PG} = 4\sqrt{2}$ 이고,

삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$\overline{BG} : \overline{GN} = 2 : 1$ 이므로

$$(\overline{BP} + \overline{PG}) : (\overline{NP} - \overline{PG}) = 2 : 1$$

$$(\overline{NP} + 4\sqrt{2}) : (\overline{NP} - 4\sqrt{2}) = 2 : 1$$

$$2(\overline{NP} - 4\sqrt{2}) = \overline{NP} + 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{NP} = 12\sqrt{2}$$

이때 $N(a, b)$, $P(3, 0)$ 이므로

$$\overline{NP}^2 = (a-3)^2 + b^2 = (12\sqrt{2})^2$$

따라서 구하는 관계식은

$$(a-3)^2 + b^2 = 288$$

$$\text{답 } (a-3)^2 + b^2 = 288$$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심 G는 삼각형 ABC의 세 변의 중점
L, M, N을 꼭짓점으로 하는 삼각형 LMN의 무게중심과 일
치하므로

$$G\left(\frac{2+4+a}{3}, \frac{1-1+b}{3}\right)$$

$$\therefore G\left(\frac{a+6}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

이때 $P(3, 0)$ 이고, $\overline{PG} = 4\sqrt{2}$ 에서

$$\overline{PG}^2 = 32 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{a-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 32, \frac{1}{9}(a-3)^2 + \frac{1}{9}b^2 = 32$$

$$\therefore (a-3)^2 + b^2 = 288$$

02. 직선의 방정식

1 직선의 방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.046-056

01 (1) $y=3x-7$ (2) $x=-3$

02 (1) $y=-x+2$ (2) $y=6$ (3) $y=\frac{3}{2}x-6$

03 (1) 기울기 : $-\frac{7}{5}$, y 절편 : $\frac{3}{5}$

(2) 기울기 : 정의되지 않는다., y 절편 : 없다.

(3) 기울기 : 0, y 절편 : 5

04 제2사분면 05 $(-2, -1)$

06 $x-2y-4=0$

07 (1) $y=-4x+3$ (2) $y=x-3$ 08 -2

09 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$

10 (1) $y=\frac{1}{3}x+2$ (2) -8 11 14 12 48

13 -7 14 14 15 -2

16 $y=-4x+9$ 17 $y=2x-6$

18 2

19 (1) 제1, 2, 3사분면 (2) 제2, 3사분면

20 제1사분면 21 $\perp, \parallel$

22 $y=-x+3$ 23 $\sqrt{2}$ 24 $-\frac{3}{10}$

25 $\frac{1}{3} < k < \frac{5}{3}$ 26 $-1 \leq m \leq \frac{3}{4}$

27 $2x-y+6=0$ 28 $-\frac{8}{3}$

01

(1) 점 $(2, -1)$ 을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y - (-1) = 3(x - 2)$$

$$\therefore y = 3x - 7$$

(2) 직선 위의 모든 점의 x 좌표가 -3 이므로 직선의 방정식은

$$x = -3$$

답 (1) $y=3x-7$ (2) $x=-3$

02

(1) 두 점 $(-3, 5)$, $(1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{1-(-3)} \{x - (-3)\}$$

$$\therefore y = -x + 2$$

(2) 직선 위의 모든 점의 y 좌표가 6이므로 직선의 방정식은

$$y = 6$$

(3) x 절편이 4이고 y 절편이 -6 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1 \quad \therefore y = \frac{3}{2}x - 6$$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=6$ (3) $y=\frac{3}{2}x-6$

03

(1) $7x+5y-3=0$ 에서 $y = -\frac{7}{5}x + \frac{3}{5}$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 $-\frac{7}{5}$

이고, y 절편은 $\frac{3}{5}$ 이다.

(2) $-3x-1=0$ 에서 $x = -\frac{1}{3}$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 정의되지 않고, y 절편은 없다.

(3) $-5y+25=0$ 에서 $y=5$

즉, 주어진 일차방정식이 나타내는 직선의 기울기는 0이고, y 절편은 5이다.

답 (1) 기울기 : $-\frac{7}{5}$, y 절편 : $\frac{3}{5}$

(2) 기울기 : 정의되지 않는다., y 절편 : 없다.

(3) 기울기 : 0, y 절편 : 5

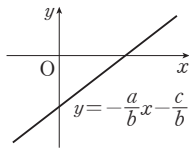
04

$ax+by+c=0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ($\because b \neq 0$)

$a < 0, b > 0$ 이므로 $-\frac{a}{b} > 0$

$b > 0, c > 0$ 이므로 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 (기울기) > 0 , (y 절편) < 0
이므로 직선은 오른쪽 그림과 같고
제2사분면을 지나지 않는다.



답 제2사분면

05

주어진 직선의 방정식을 k 에 대하여 정리하면

$$2x + y + 5 + k(x - 3y - 1) = 0$$

이 등식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2x + y + 5 = 0, x - 3y - 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = -2, y = -1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, -1)$ 이다.

답 $(-2, -1)$

06

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x - y + 3 + k(2x - 3y - 5) = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

으로 나타낼 수 있고 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$6 + 1 + 3 + k(4 + 3 - 5) = 0$$

$$10 + 2k = 0 \quad \therefore k = -5$$

$k = -5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$3x - y + 3 - 5(2x - 3y - 5) = 0$$

$$\therefore x - 2y - 4 = 0$$

답 $x - 2y - 4 = 0$

다른 풀이

두 직선의 방정식 $3x - y = -3, 2x - 3y = 5$ 를 연립하여 풀면

$$x = -2, y = -3$$

따라서 구하는 직선은 두 점 $(-2, -3), (2, -1)$ 을 지나는

직선이므로 그 방정식은

$$y - (-3) = \frac{-1 - (-3)}{2 - (-2)} \{x - (-2)\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

07

(1) 두 점 $(3, 3), (-1, -5)$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{3 + (-5)}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -1)$$

따라서 점 $(1, -1)$ 을 지나고 기울기가 -4 인 직선의 방정식은

$$y - (-1) = -4(x - 1) \quad \therefore y = -4x + 3$$

(2) x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기

울기는 $\tan 45^\circ = 1$

따라서 점 $(2, -1)$ 을 지나고 기울기가 1 인 직선의 방정식은

$$y - (-1) = x - 2 \quad \therefore y = x - 3$$

답 (1) $y = -4x + 3$ (2) $y = x - 3$

08

$$x - 2y + 3 = 0 \text{에서 } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

직선 $x - 2y + 3 = 0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 직선은 점

$(2, 3)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선이다. 이 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\therefore x - 2y + 4 = 0$$

이 직선이 직선 $ax + by + 4 = 0$ 과 일치하므로

$$a = 1, b = -2$$

$$\therefore ab = 1 \times (-2) = -2$$

답 -2

09

직선 $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \theta = 60^\circ \quad (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

직선 $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 이등분하는 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

$$\frac{\theta}{2} = 30^\circ \text{이므로 구하는 직선의 기울기는}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

한편, 직선 $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ 의 x 절편은

$$0 = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} \quad \therefore x = 3$$

따라서 점 $(3, 0)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$$

답 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$

10

(1) 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 7 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 7}{2+1} \right), \text{ 즉 } (3, 3)$$

따라서 두 점 (3, 3), (-3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{1-3}{-3-3}(x-3) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + 2$$

(2) x절편이 2, y절편이 -3인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \quad \therefore 3x - 2y - 6 = 0$$

이 직선이 직선 $3x + ay + b = 0$ 과 일치하므로

$$a = -2, b = -6$$

$$\therefore a + b = (-2) + (-6) = -8$$

$$\text{답 (1) } y = \frac{1}{3}x + 2 \quad (2) -8$$

11

x절편이 y절편의 3배이므로 x절편과 y절편을 각각 $3k, k (k > 0)$ 라 하면 이 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3k} + \frac{y}{k} = 1 \quad \therefore x + 3y - 3k = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 (-1, 4)를 지나므로

$$-1 + 12 - 3k = 0, 3k = 11$$

$$\therefore k = \frac{11}{3}$$

이것을 ①에 대입하면 직선의 방정식은

$$x + 3y - 11 = 0$$

이 직선이 직선 $x + ay + b = 0$ 과 일치하므로

$$a = 3, b = -11$$

$$\therefore a - b = 3 - (-11) = 14$$

답 14

12

두 점 (5, 7), (8, 4)를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-7 = \frac{4-7}{8-5}(x-5) \quad \therefore y = -x + 12$$

즉, 직선 l이 x축과 만나는 점 A의 좌표는 (12, 0)이고,

두 직선 l, $y = 2x$ 가 만나는 점 B의 x좌표는

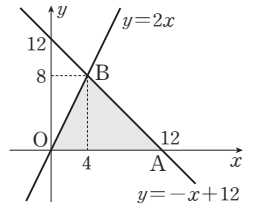
$$-x + 12 = 2x, 3x = 12 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore B(4, 8)$$

따라서 삼각형 OAB는 오른쪽

그림과 같으므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$$



답 48

13

세 점 A(2, 1), B(4, -2), C(-k-1, k+2)가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다.

$$\text{즉, } \frac{-2-1}{4-2} = \frac{(k+2)-1}{(-k-1)-2} \text{에서}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{k+1}{-k-3}, 3k+9=2k+2$$

$$\therefore k = -7$$

답 -7

14

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, A(-2k+1, 2), B(-2, k-3), C(k+1, k+3)에 대하여 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{(k-3)-2}{-2-(-2k+1)} = \frac{(k+3)-2}{(k+1)-(-2k+1)}$$

$$\frac{k-5}{2k-3} = \frac{k+1}{3k}$$

$$3k^2 - 15k = 2k^2 - k - 3 \quad \therefore k^2 - 14k + 3 = 0$$

따라서 모든 k의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 14이다.

답 14

15

세 점 A(a, a³), B(b, b³), C(2, 8)이 한 직선 위에 있으므로 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같다.

$$\frac{8-a^3}{2-a} = \frac{8-b^3}{2-b}$$

$$\frac{(2-a)(a^2+2a+4)}{2-a} = \frac{(2-b)(b^2+2b+4)}{2-b}$$

$$a^2+2a+4=b^2+2b+4 \quad (\because a \neq 2, b \neq 2)$$

$$a^2-b^2+2a-2b=0$$

$$(a-b)(a+b)+2(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b+2)=0$$

$$\therefore a+b=-2 \quad (\because a \neq b)$$

답 -2

16

삼각형 ABC는 오른쪽 그림과 같고 꼭짓점 C를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 이 직선이 변 AB의 중점을 지나야 한다.

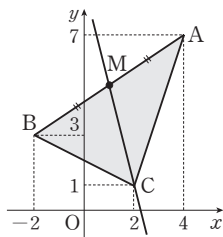
변 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) \quad \therefore M(1, 5)$$

따라서 두 점 C(2, 1), M(1, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{1-2}(x-2) \quad \therefore y=-4x+9$$

$$\text{답 } y=-4x+9$$



17

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선 l은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

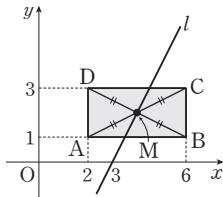
직사각형의 네 꼭짓점을 A(2, 1), B(6, 1), C(6, 3), D(2, 3)이라고 하고 두 대각선의 교점을 M이라 하면 점 M은 선분 AC의 중점이므로

$$M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore M(4, 2)$$

또한, 직선 l의 x절편이 3이므로 직선 l은 점 (3, 0)을 지난다. 따라서 두 점 (3, 0), M(4, 2)를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-0=\frac{2-0}{4-3}(x-3) \quad \therefore y=2x-6$$

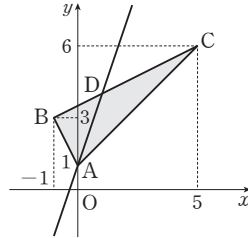
$$\text{답 } y=2x-6$$



18

다음 그림과 같이 변 BC 위의 점 D에 대하여 꼭짓점 A와 점 D를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 삼등분하는 두 직선 중 점 B에 가까운 직선이라면

△ADB와 △ACD의 넓이의 비가 1:2이어야 한다.



즉, $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$ 이므로 점 D는 변 BC를 1:2로 내분하는 점이다.

이때 B(-1, 3), C(5, 6)이므로

$$D\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 3}{1+2}\right)$$

$$\therefore D(1, 4)$$

두 점 A(0, 1), D(1, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{4-1}{1-0}(x-0)$$

$$\therefore 3x-y+1=0$$

따라서 $a=3$, $b=-1$ 이므로

$$a+b=3+(-1)=2$$

답 2

19

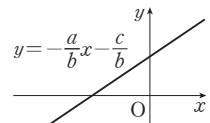
(1) $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

$$(기울기)=-\frac{a}{b}, (y절편)=-\frac{c}{b}$$

$$ab<0, bc<0 \text{에서 } -\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}>0 \text{이므로}$$

$$(기울기)>0, (y절편)>0$$

따라서 직선은 오른쪽 그림과 같고 제1, 2, 3사분면을 지난다.



(2) $ac>0, bc=0$ 에서 $b=0$ 이므로

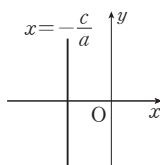
$$ax+c=0 \quad \therefore x=-\frac{c}{a}$$

이때 $ac > 0$ 이므로

$$-\frac{c}{a} < 0$$

따라서 직선은 오른쪽 그림과 같고

제 2, 3사분면을 지난다.



답 (1) 제 1, 2, 3사분면 (2) 제 2, 3사분면

20

$ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b} > 0, (\text{y절편})=-\frac{c}{b} < 0$$

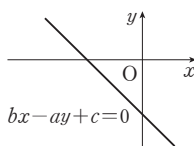
$$\therefore ab < 0, bc > 0$$

이때 a, c 는 서로 부호가 다르므로 $ac < 0$

$bx-ay+c=0$ 에서 $y=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 이므로

$$(\text{기울기})=\frac{b}{a} < 0, (\text{y절편})=\frac{c}{a} < 0$$

따라서 직선 $bx-ay+c=0$ 은 오른쪽 그림과 같고 제 1사분면을 지나지 않는다.



답 제 1사분면

21

직선 l 의 기울기는 음수이고, y 절편은 양수이므로

$$a < 0, b > 0$$

직선 m 의 기울기는 양수이고, y 절편은 음수이므로

$$c > 0, d < 0$$

$$\neg. a < 0, c > 0 \text{에서 } ac < 0 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. b > 0, d < 0 \text{에서 } b > d \text{ (참)}$$

ㄷ. 두 직선 l, m 의 x 절편은 각각 $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$ 이고 주어진 그

림에서

$$-\frac{b}{a} < -\frac{d}{c} \quad \therefore \frac{b}{a} > \frac{d}{c} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

22

$(k+1)^2x-ky-k^2-1=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$k^2x+2kx+x-ky-k^2-1=0$$

$$\therefore (x-1)k^2+(2x-y)k+x-1=0$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-1=0, 2x-y=0$$

$$\therefore x=1, y=2$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(1, 2)$ 이므로 점 $P(1, 2)$ 를 지나고 기

울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-2=-(x-1) \quad \therefore y=-x+3$$

답 $y=-x+3$

23

$(3k+1)x-(k-2)y-2k-3=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$x+2y-3+k(3x-y-2)=0$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2y-3=0, 3x-y-2=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=1$$

따라서 점 P 의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로 선분 OP 의 길이는

$$OP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

24

점 (a, b) 는 직선 $x+3y-2=0$ 위의 점이므로

$$a+3b-2=0 \quad \therefore a=2-3b$$

이것을 $5ax-2by+2=0$ 에 대입하면

$$5(2-3b)x-2by+2=0$$

이 식을 b 에 대하여 정리하면

$$10x+2+b(-15x-2y)=0$$

이 등식이 b 에 대한 항등식이므로

$$10x+2=0, -15x-2y=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{1}{5}, y=\frac{3}{2}$$

즉, 이 직선은 b 의 값에 관계없이 항상 점 $(-\frac{1}{5}, \frac{3}{2})$ 을 지난다.

따라서 $p = -\frac{1}{5}$, $q = \frac{3}{2}$ 이므로

$$pq = (-\frac{1}{5}) \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{10}$$

답 $-\frac{3}{10}$

25

$(k+1)x - (k-1)y + 4 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$x + y + 4 + k(x - y) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x + y + 4 = 0, \quad x - y = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x = -2, \quad y = -2$$

따라서 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$ 을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-3, 0)$ 을 지날 때,

$$1 - 3k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

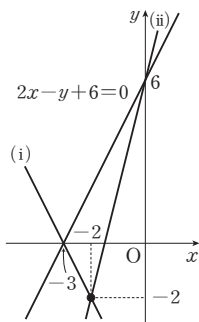
(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 6)$ 을 지날 때,

$$10 - 6k = 0$$

$$\therefore k = \frac{5}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < k < \frac{5}{3}$$



답 $\frac{1}{3} < k < \frac{5}{3}$

26

$$m(x+1) + y - 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 등식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x + 1 = 0, \quad y - 2 = 0$$

$$\therefore x = -1, \quad y = 2$$

따라서 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $A(3, -1)$ 을

지날 때,

$$4m - 3 = 0 \quad \therefore m = \frac{3}{4}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $B(2, 5)$ 를 지

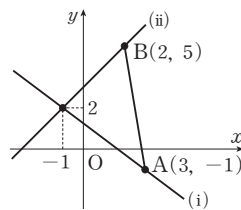
날 때,

$$3m + 3 = 0 \quad \therefore m = -1$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-1 \leq m \leq \frac{3}{4}$$

답 $-1 \leq m \leq \frac{3}{4}$



27

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x + y - 1 + k(3x + 2y - 5) = 0, \quad \text{즉}$$

$$3(k+1)x + (2k+1)y - 5k - 1 = 0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

으로 나타낼 수 있다.

직선 $\textcircled{1}$ 의 기울기가 2이므로

$$-\frac{3(k+1)}{2k+1} = 2, \quad -3k - 3 = 4k + 2$$

$$7k = -5 \quad \therefore k = -\frac{5}{7}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$3\left(-\frac{5}{7} + 1\right)x + \left(-\frac{10}{7} + 1\right)y + \frac{25}{7} - 1 = 0$$

$$\therefore 2x - y + 6 = 0$$

답 $2x - y + 6 = 0$

다른 풀이

$3x + y - 1 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -1, \quad y = 4$$

즉, 두 직선 $3x + y - 1 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$ 의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이다.

따라서 구하는 직선은 점 $(-1, 4)$ 를 지나고 기울기가 2이므로 직선의 방정식은

$$y - 4 = 2\{x - (-1)\} \quad \therefore 2x - y + 6 = 0$$

28

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(a+1)x+2y+1+k\{2x-(a-1)y+3\}=0$, 즉
 $(2k+a+1)x+(-ak+k+2)y+3k+1=0$ (k 는 실수)
㉠

으로 나타낼 수 있다.

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$3k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{3}$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$$\left(a+\frac{1}{3}\right)x+\left(\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}\right)y=0$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}a+\frac{5}{3}}=3, \quad -a-\frac{1}{3}=a+5$$

$$2a=-\frac{16}{3} \quad \therefore a=-\frac{8}{3}$$

답 $-\frac{8}{3}$

ㄹ. 두 점 $(0, -2)$, $(3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \quad \therefore 2x-3y-6=0 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉡

02

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는
 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

점 $(-2, 1)$ 을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-1=\sqrt{3}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+1 \\ =\sqrt{3}+1$$

답 $\sqrt{3}+1$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.057-058

- | | | | |
|--------------------|--------------------------------|---------------------------------|------|
| 01 ㉡ | 02 $\sqrt{3}+1$ | 03 1 | 04 2 |
| 05 486 | 06 14 | 07 $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$ | |
| 08 $\frac{5}{4}$ | 09 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ | 10 1 | |
| 11 $-\frac{17}{3}$ | 12 5 | | |

01

ㄱ. 점 $(2, -3)$ 을 지나고 y 축에 수직인 직선은 직선 위의 모든 점의 y 좌표가 -3 이므로 직선의 방정식은 $y=-3$ 이다. (참)

ㄴ. 점 $(4, 5)$ 를 지나고 기울기가 0인 직선의 방정식은
 $y-5=0 \times (x-4) \quad \therefore y=5$ (거짓)

ㄷ. 점 $(2, -3)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은
 $y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-4$ (참)

03

이차함수 $y=-x^2+2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$
 이므로

$A(0, 2)$

이차함수 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -4)$ 이므로

$B(3, -4)$

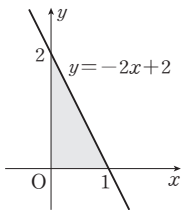
즉, 직선 AB의 방정식은

$$y-(-4)=\frac{2-(-4)}{0-3}(x-3)$$

$$\therefore y=-2x+2$$

따라서 직선 $y=-2x+2$ 를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 직선 AB와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$



답 1

04

두 점 $A(-2, 2)$, $B(0, 3)$ 에 대하여 직선 AB 의 방정식은

$$y-3=\frac{3-2}{0-(-2)}x$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또한, 두 점 $O(0, 0)$, $C(-4, 2)$ 에 대하여 직선 OC 의 방정식은

$$y=\frac{2}{-4}x \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=\frac{3}{2}$

즉, 직선 AB 와 선분 OC 의 교점 D 의 좌표는 $(-3, \frac{3}{2})$

한편, 점 D 는 선분 OC 를 $m:n$ 으로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{-4m}{m+n}, \frac{2m}{m+n}\right)$$

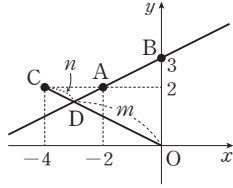
따라서 $\frac{-4m}{m+n}=-3$ 이므로
 $-4m=-3m-3n$, $m-3n=0$

$$\therefore m=3n$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=3, n=1$$

$$\therefore m-n=3-1=2$$



답 2

05

두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1, x+3y=3$$

$$\therefore x=-3y+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

직선 l 위의 임의의 점 (x, y) 에 대하여 등식

$$x^2+ay^2+bx+c=0$$
이 성립하므로

$\textcircled{7}$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$(-3y+3)^2+ay^2+b(-3y+3)+c=0$$

$$9y^2-18y+9+ay^2-3by+3b+c=0$$

$$\therefore (a+9)y^2-3(b+6)y+3b+c+9=0$$

이 등식이 y 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$a+9=0, b+6=0, 3b+c+9=0$$

$$\therefore a=-9, b=-6, c=9$$

$$\therefore abc=(-9) \times (-6) \times 9=486$$

답 486

06

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB 와 직선 BC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-2-a}{2-1}=\frac{-14-(-2)}{a-2}, -2-a=\frac{-12}{a-2}$$

$$(a+2)(a-2)=12$$

$$a^2=16 \quad \therefore a=4 (\because a>0)$$

즉, 두 점 $A(1, 4)$, $B(2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{-2-4}{2-1}(x-1) \quad \therefore y=-6x+10$$

따라서 이 직선의 y 절편은 10이므로

$$b=10$$

$$\therefore a+b=4+10=14$$

답 14

07

삼각형 ABC 의 변 BC 위의

점 D 에 대하여

$$\triangle ABD : \triangle ADC = 3 : 1$$
이

므로 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 3:1로

내분하는 점이다.

이때 $B(-1, 2)$, $C(3, -2)$ 이므로

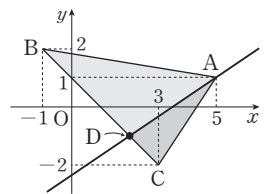
$$D\left(\frac{3 \times 3 + 1 \times (-1)}{3+1}, \frac{3 \times (-2) + 1 \times 2}{3+1}\right)$$

$$\therefore D(2, -1)$$

따라서 두 점 $A(5, 1)$, $D(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{2-5}(x-5)$$

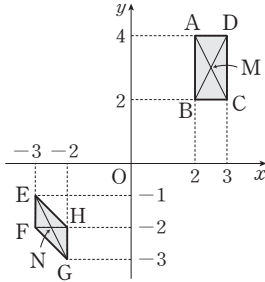
$$\therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$



$$\text{답 } y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$$

08

다음 그림과 같이 두 사각형의 꼭짓점을 나타내면 □ABCD는 직사각형, □EFGH는 평행사변형이다.



직사각형 ABCD와 평행사변형 EFGH의 두 대각선의 교점을 각각 M, N이라 하면 두 사각형 ABCD, EFGH의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 M과 N을 동시에 지난다.

즉, 점 M은 선분 AC의 중점이므로
A(2, 4), C(3, 2)에서

$$M\left(\frac{2+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \quad \therefore M\left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

또한, 점 N은 선분 FH의 중점이므로
F(-3, -2), H(-2, -2)에서

$$N\left(\frac{-3+(-2)}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) \quad \therefore N\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$$

즉, 직선 MN의 방정식은

$$y-3 = \frac{3-(-2)}{\frac{5}{2}-(-\frac{5}{2})}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore y = x + \frac{1}{2}$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a^2+b^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

09

$$y=(1-m^2)x-2m+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $1-m^2=0$, 즉 $m=1$ 또는 $m=-1$ 일 때,

$m=1$ 이면 ①에서 $y=-1$

$m=-1$ 이면 ①에서 $y=3$

오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는 경우는 직선 $y=-1$ 일 때, 즉 $m=1$ 일 때이다.

(ii) $1-m^2>0$, 즉 $-1<m<1$ 일 때, 기울기가 양수인 직선 ①이 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 y 절편이 양수가 아니어야 하므로

$$-2m+1 \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{2}$$

이때 $-1<m<1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \leq m < 1$$

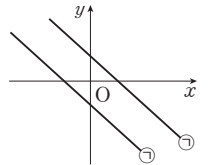
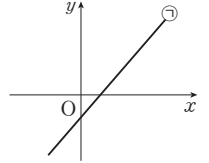
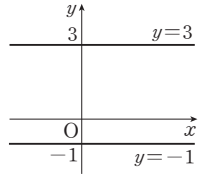
(iii) $1-m^2<0$, 즉 $m<-1$ 또는 $m>1$ 일 때,

기울기가 음수인 직선 ①은 y 절편에 관계없이 제2사분면을 반드시 지나므로 이 범위에서 조건을 만족시키는 m 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 1$$

답 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$



10

주어진 두 직선을

$$x+y-2=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$kx-y+k+1=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

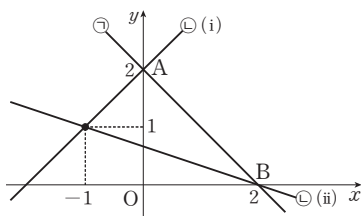
이라 하자.

직선 ①이 y 축, x 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(0, 2), B(2, 0)$$

또한, ②에서 $-y+1+k(x+1)=0$ 이므로 직선 ②은 정수 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

즉, 두 직선 ①, ②은 다음 그림과 같다.



(i) 직선 ㉠이 점 A(0, 2)를 지날 때,

$$k \times 0 - 2 + k + 1 = 0 \text{에서 } k = 1$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(2, 0)을 지날 때,

$$2k - 0 + k + 1 = 0 \text{에서 } k = -\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$-\frac{1}{3} < k < 1$ 이므로 정수 k 는 0의 1개이다.

답 1

다른 풀이

주어진 두 직선을

$$x + y - 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$kx - y + k + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이라 하자.

$k = -1$ 이면 ㉡에서 $-x - y = 0$, 즉 $x + y = 0$ 이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 평행하다.(만나지 않는다.)

두 직선의 기울기가 서로 같고 y절편은 다르다.
 $\therefore k \neq -1$

두 직선의 교점의 x 좌표는 ㉠+㉡에서

$$(k+1)x + k - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1-k}{1+k}$$

$x = \frac{1-k}{1+k}$ 를 ㉠에 대입하면 교점의 y 좌표는

$$\frac{1-k}{1+k} + y - 2 = 0 \quad \therefore y = \frac{1+3k}{1+k}$$

즉, 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{1-k}{1+k}, \frac{1+3k}{1+k} \right)$$

이때 두 직선이 제1사분면에서 만나므로

$$\frac{1-k}{1+k} > 0, \frac{1+3k}{1+k} > 0$$

양변에 각각 $(1+k)^2$ 을 곱하면

$$\frac{(1-k)(1+k) > 0, (1+3k)(1+k) > 0}{(k+1)(k-1) < 0 \quad (k+1)(3k+1) > 0}$$

$$(k+1)(k-1) < 0 \text{에서}$$

$$-1 < k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(k+1)(3k+1) > 0 \text{에서}$$

$$k < -1 \text{ 또는 } k > -\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $-\frac{1}{3} < k < 1$

따라서 정수 k 는 0의 1개이다.

11

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$kx - y - 2 + m\{-7x + (k+1)y - 1\} = 0 \quad (\text{단, } m \text{은 실수})$$

$$\therefore (-7m+k)x + (km+m-1)y - m-2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$-m-2=0 \quad \therefore m=-2$$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$$(k+14)x + (-2k-3)y = 0$$

$$\therefore y = \frac{k+14}{2k+3}x$$

이 직선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{k+14}{2k+3} = -1, k+14 = -2k-3$$

$$3k = -17 \quad \therefore k = -\frac{17}{3}$$

답 $-\frac{17}{3}$

12

두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$ 의 교점을 지나고,

두 직선과 x 축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은

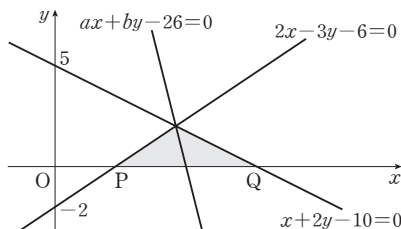
두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$ 이 x 축과 만나는

두 점의 중점을 지난다.

두 직선 $2x-3y-6=0$, $x+2y-10=0$ 을 좌표평면 위에

나타내고, 두 직선이 x 축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 다

음 그림과 같다.



직선 $2x-3y-6=0$ 이 x 축과 만나는 점 P는
 $2x-6=0$ 에서 $x=3$ $\therefore P(3, 0)$
 또한, 직선 $x+2y-10=0$ 이 x 축과 만나는 점 Q는
 $x-10=0$ 에서 $x=10$ $\therefore Q(10, 0)$
 따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{3+10}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \therefore \left(\frac{13}{2}, 0\right)$
 한편, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $2x-3y-6+k(x+2y-10)=0$ (단, k 는 실수)
 $\therefore (k+2)x+(2k-3)y-10k-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ 을 지나므로
 $\frac{13}{2}k+13-10k-6=0, -\frac{7}{2}k+7=0$
 $\therefore k=2$
 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
 $4x+y-26=0$
 따라서 $a=4, b=1$ 이므로
 $a+b=4+1=5$

답 5

다른 풀이

두 직선의 방정식 $2x-3y-6=0, x+2y-10=0$ 을 연립하여 풀면
 $x=6, y=2$
 이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(6, 2)$ 이다.
 또한, 두 직선 $2x-3y-6=0, x+2y-10=0$ 이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각
 $(3, 0), (10, 0)$
 이때 두 직선 $2x-3y-6=0, x+2y-10=0$ 의 교점을 지나고, 두 직선과 x 축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선은 두 점 $(3, 0), (10, 0)$ 의 중점 $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ 을 지난다.
 따라서 구하는 직선은 두 점 $(6, 2), \left(\frac{13}{2}, 0\right)$ 을 지나므로 이 직선의 방정식은
 $y-2=\frac{0-2}{\frac{13}{2}-6}(x-6)$
 $y-2=-4(x-6)$
 $\therefore 4x+y-26=0$
 따라서 $a=4, b=1$ 이므로
 $a+b=4+1=5$

2 두 직선의 위치 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.063-068

- 29 (1) $y=-2x-7$ (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$
 30 (1) $y=x-5$ (2) $y=-2x+25$
 31 (1) -2 (2) 1 (3) $a \neq -2, a \neq 1$ 인 모든 실수
 32 (1) 8 (2) 47
 33 (1) $y=2x+2$ (2) $-\frac{3}{2}$ 34 $\frac{7}{3}$ 35 -5
 36 $\frac{15}{2}$ 37 17 38 $\frac{2}{3}$ 39 2
 40 0 41 8 42 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

29

- (1) 직선 $y=-2x+5$ 의 기울기가 -2 이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 -2 이다.
 따라서 점 $(-4, 1)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은
 $y-1=-2(x+4) \therefore y=-2x-7$
 (2) 직선 $x+2y-3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$
 이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.
 따라서 점 $(-4, 1)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은
 $y-1=-\frac{1}{2}(x+4) \therefore y=-\frac{1}{2}x-1$
 답 (1) $y=-2x-7$ (2) $y=-\frac{1}{2}x-1$

30

- (1) 직선 $y=-x+1$ 의 기울기가 -1 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면
 $-m=-1 \therefore m=1$
 따라서 점 $(10, 5)$ 를 지나고 기울기가 1 인 직선의 방정식은
 $y-5=x-10 \therefore y=x-5$
 (2) 직선 $5x-10y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$
 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$\frac{1}{2}m = -1 \quad \therefore m = -2$$

따라서 점 (10, 5)를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$$y - 5 = -2(x - 10) \quad \therefore y = -2x + 25$$

$$\text{답 (1) } y = x - 5 \quad (2) y = -2x + 25$$

31

- (1) 두 직선 $ax + 2y + 2 = 0$, $x + (a + 1)y + 2 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \neq \frac{2}{2}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \text{에서 } a^2 + a = 2$$

$$a^2 + a - 2 = 0, (a + 2)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

그런데 $a = 1$ 이면 두 직선이 일치하므로

$$a = -2$$

- (2) (1)에 의하여 $a = 1$

- (3) (1)에 의하여 $a \neq -2$, $a \neq 1$ 인 모든 실수

$$\text{답 (1) } -2 \quad (2) 1 \quad (3) a \neq -2, a \neq 1 \text{인 모든 실수}$$

32

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \text{에서 } x + 4y - 4 = 0$$

- (1) 두 직선 $2x + ay + 3 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$ 의 교점의 개수가 0이라면 두 직선이 서로 평행해야 하므로

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{4} \neq \frac{3}{-4} \quad \therefore a = 8$$

- (2) 두 직선 $2x + ay + 3 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$ 의 교점의 개수가 1이라면 두 직선의 기울기가 달라야 하므로

$$\frac{2}{1} \neq \frac{a}{4}, \text{ 즉 } a \neq 8$$

따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 10 = 47$$

$$\text{답 (1) } 8 \quad (2) 47$$

33

두 점 (2, -1), (5, 5)를 지나는 직선 l 의 기울기는

$$\frac{5+1}{5-2} = 2$$

- (1) 직선 l 에 평행한 직선 m 의 기울기는 2이다.

따라서 기울기가 2이고 점 (1, 4)를 지나는 직선 m 의 방정식은

$$y - 4 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x + 2$$

- (2) 직선 l 에 수직인 직선 n 의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다. $-2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$

기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 (4, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 4) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 3$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$ 이므로

$$ab = \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{답 (1) } y = 2x + 2 \quad (2) -\frac{3}{2}$$

34

두 직선의 방정식 $2x + y - 4 = 0$, $x - 3y - 9 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = -2$$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 (3, -2)이다.

직선 $6x + 2y + 1 = 0$, 즉 $y = -3x - \frac{1}{2}$ 의 기울기는 -3이므로

이 직선에 평행한 직선의 기울기도 -3이다.

즉, 점 (3, -2)를 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$$y + 2 = -3(x - 3) \quad \therefore y = -3x + 7$$

이 직선의 방정식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = -3x + 7 \quad \therefore x = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 x 절편은 $\frac{7}{3}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{7}{3}$$

다른 풀이

두 직선 $2x + y - 4 = 0$, $x - 3y - 9 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x+y-4+k(x-3y-9)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

$$\therefore (k+2)x - (3k-1)y - 9k - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

직선 ㉠과 직선 $6x+2y+1=0$ 이 평행하므로

$$\frac{k+2}{6} = \frac{-(3k-1)}{2} \neq \frac{-9k-4}{1} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\frac{k+2}{6} = \frac{-(3k-1)}{2} \text{에서}$$

$$2(k+2) = -6(3k-1)$$

$$2k+4 = -18k+6 \quad \therefore k = \frac{1}{10}$$

$k = \frac{1}{10}$ 을 ㉡에 대입하면 $\frac{7}{20} \neq -\frac{49}{10}$ 가 성립한다.

따라서 $k = \frac{1}{10}$ 을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$3x+y-7=0 \text{이므로 이 직선의 } x \text{절편은 } \frac{7}{3} \text{이다.}$$

35

직선 $ax+2by-3=0$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$a+2b-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 두 직선 $ax+2by-3=0$, $x-by+a=0$ 은 서로 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-b} \neq \frac{-3}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{1} = \frac{2b}{-b} \text{에서 } -ab=2b$$

$$\therefore a=-2 \text{ (}\because b \neq 0\text{)}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$-2+2b-3=0, 2b-5=0 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore ab=(-2) \times \frac{5}{2} = -5$$

답 -5

36

두 직선 $(m-4)x+3y-4=0$, $(m-2)x-y+5=0$ 에 대하여

(i) 두 직선이 서로 평행하면

$$\frac{m-4}{m-2} = \frac{3}{-1} \neq \frac{-4}{5}$$

$$\frac{m-4}{m-2} = \frac{3}{-1} \text{에서 } -m+4=3m-6$$

$$4m=10 \quad \therefore m=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a=\frac{5}{2}$$

(ii) 두 직선이 서로 수직이면

$$(m-4)(m-2)+3 \times (-1)=0$$

$$m^2-6m+5=0, (m-1)(m-5)=0$$

$$\therefore m=1 \text{ 또는 } m=5$$

$$\therefore b=5 \text{ (}\because b>3\text{)}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a+b=\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

37

두 직선 l 과 m 은 서로 수직이므로

$$1 \times 4 + (-a) \times b = 0$$

$$4-ab=0 \quad \therefore ab=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 직선 l 과 n 은 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{-a}{-(b-3)} \neq \frac{1}{-1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{-a}{-(b-3)} \text{에서 } a=b-3$$

$$\therefore a-b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

$$=(-3)^2+2 \times 4$$

$$=17$$

답 17

보충 설명

㉡에서 $a=b-3$ 을 ㉠에 대입하면

$$(b-3) \times b=4, b^2-3b-4=0$$

$$(b+1)(b-4)=0$$

$$\therefore b=-1 \text{ 또는 } b=4$$

이때 $a=b-3$ 이므로

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

$$\therefore a^2+b^2=17$$

38

$$2x-3y-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+y-8=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$kx-y-4=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이라 하면 ①, ②은 서로 평행하지 않으므로 ①, ②, ③이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 직선 중 두 직선만 평행할 때,

두 직선 ①, ③이 서로 평행할 때,

$$\frac{2}{k} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{-6}{-4} \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

두 직선 ②, ③이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-8}{-4} \quad \therefore k = -1$$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선 ①, ②의 교점을 직선 ③이 지나면 된다.

①, ②을 연립하여 풀면 $x=6, y=2$ 이므로 두 직선 ①, ②의 교점의 좌표는 (6, 2)이다.

직선 ③이 점 (6, 2)를 지나야 하므로

$$6k-2-4=0 \quad \therefore k=1$$

(i), (ii)에서 모든 상수 k 의 값은 $\frac{2}{3}, -1, 1$ 이므로 구하는 합은

$$\frac{2}{3} + (-1) + 1 = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

39

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $2x-y-3=0, x+y-3=0$ 은 서로 평행하지 않으므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 두 직선 $2x-y-3=0, ax-y-1=0$ 이 서로 평행할 때,

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3}{-1} \text{이므로 } a=2$$

(ii) 두 직선 $x+y-3=0, ax-y-1=0$ 이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-1} \text{이므로 } a=-1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선의 방정식 $2x-y-3=0, x+y-3=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

즉, 이 두 직선의 교점의 좌표는 (2, 1)이고 나머지 한 직선

$$ax-y-1=0 \text{이 점 (2, 1)을 지나야 하므로}$$

$$2a-1-1=0 \quad \therefore a=1$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a 의 값은 2, -1, 1이므로 구하는 합은

$$2 + (-1) + 1 = 2$$

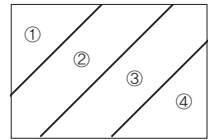
답 2

보충 설명

한 평면 위의 서로 다른 세 직선에 의하여 평면이 나누어지는 영역의 개수는 세 직선의 위치 관계에 따라 다음과 같이 달라진다.

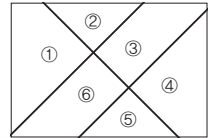
(1) 세 직선이 모두 평행할 때,

오른쪽 그림과 같이 4개의 영역으로 나누어진다.



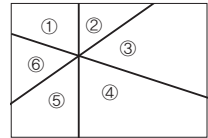
(2) 두 직선만 평행할 때,

오른쪽 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진다.



(3) 어느 두 직선도 평행하지 않을 때,

① 세 직선이 한 점에서 만날 때,
오른쪽 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진다.



② 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 때,

세 직선에 의하여 삼각형이만 들어지고 오른쪽 그림과 같이 7개의 영역으로 나누어진다.



40

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1-3}{2} \right) \quad \therefore (3, -2)$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-(-1)}{4-2} = -1$ 이므로 선분 AB

와 수직인 직선의 기울기는 1이다. $\leftarrow (-1) \times 1 = -1$

즉, 선분 AB의 수직이등분선은 점 (3, -2)를 지나고 기울기가 1인 직선이므로
 $y - (-2) = 1 \times (x - 3)$
 $\therefore x - y - 5 = 0$
 따라서 $a = 1, b = -1$ 이므로
 $a + b = 1 + (-1) = 0$

답 0

41

선분 AB의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{3+7}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \therefore \left(5, \frac{a+b}{2}\right)$
 선분 AB의 수직이등분선 $2x - y - 7 = 0$ 이 이 점을 지나므로
 $2 \times 5 - \frac{a+b}{2} - 7 = 0$
 $\therefore a + b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 또한, 직선 AB의 기울기는 $\frac{b-a}{7-3} = \frac{b-a}{4}$ 이고,
 선분 AB의 수직이등분선의 방정식 $2x - y - 7 = 0$ 에서
 $y = 2x - 7$ 이므로
 $\frac{b-a}{4} \times 2 = -1$
 $\therefore a - b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 4, b = 2$
 $\therefore ab = 4 \times 2 = 8$

답 8

42

선분 OA의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \therefore (2, 1)$
 직선 OA의 기울기는 $\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$ 이므로 선분 OA와 수직인
 직선의 기울기는 -2 이다. $-\frac{1}{2} \times (-2) = -1$
 즉, 선분 OA의 수직이등분선은 점 (2, 1)을 지나고 기울기가

-2 인 직선이므로

$$y - 1 = -2(x - 2) \therefore y = -2x + 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

선분 OB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \therefore (1, 2)$$

직선 OB의 기울기는 $\frac{4-0}{2-0} = 2$ 이므로 선분 OB와 수직인

직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다. $-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

즉, 선분 OB의 수직이등분선은 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선이므로

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 을 연립하여 풀면 $x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{3}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 이다.

답 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

다른 풀이

삼각형 OAB의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형 OAB의 외심과 같다.

삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같으므로 구하는 점을 P(a, b)라 하면

외접원의 반지름

$\overline{PO} = \overline{PA}$ 에서

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2}$$

$$\therefore 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$\overline{PO} = \overline{PB}$ 에서

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2}$$

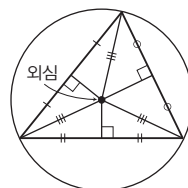
$$\therefore a + 2b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

$\textcircled{㉤}, \textcircled{㉥}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{5}{3}, b = \frac{5}{3}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 이다.

보충 설명

삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나고 이 점은 삼각형의 외심과 같다. 따라서 두 변의 수직이등분선의 방정식을 각각 구한 후 두 식을 연립하여 풀거나, 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점까지의 거리가 같다는 성질을 이용하여 교점의 좌표를 구할 수 있다.



- 13 ⑤ 14 -6 15 4 16 4
17 28 18 -2

13

$l: x + ky - 1 = 0$, $m: kx + (2k + 3)y - 3 = 0$ 에서

ㄱ. $k=3$ 이면 두 직선 l, m 은

$$l: x + 3y - 1 = 0, m: 3x + 9y - 3 = 0$$

이때 $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{-1}{-3}$ 이므로 두 직선 l, m 은 일치한다. (참)

ㄴ. $k=-1$ 이면 두 직선 l, m 은

$$l: x - y - 1 = 0, m: -x + y - 3 = 0$$

이때 $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{-3}$ 이므로 두 직선 l, m 은 서로 평

행하다. (참)

ㄷ. $k=0$ 이면 두 직선 l, m 은

$$l: x - 1 = 0, m: 3y - 3 = 0$$

$$\therefore l: x = 1, m: y = 1$$

즉, 두 직선 l, m 은 서로 수직이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

14

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $2x + by - 3 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{b} \neq \frac{1}{-3} \quad \therefore b = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $2x + (b + 5)y + 2 = 0$ 이 서로 수직
이므로

$$2 + a(b + 5) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2 + a(2a + 5) = 0$$

$$2a^2 + 5a + 2 = 0, (a + 2)(2a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -2, b = -4 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}, b = -1 (\because \textcircled{1})$$

이때 a, b 는 정수이므로

$$a + b = -2 + (-4) = -6$$

답 -6

15

점 $(2, -1)$ 을 지나고 직선 $y = x + 3$ 에 평행한 직선 l 의 방정식

$$y + 1 = x - 2 \quad \therefore y = x - 3$$

또한, 점 $(3, 4)$ 를 지나고 직선 $x + 2y - 2 = 0$, 즉

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{과 수직인 직선 } m \text{의 방정식은}$$

$$y - 4 = 2(x - 3) \quad \therefore y = 2x - 2$$

두 직선 $l: y = x - 3$, $m: y = 2x - 2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x - 3 = 2x - 2 \text{에서 } x = -1$$

$x = -1$ 을 $y = x - 3$ 에 대입하면 $y = -4$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(-1, -4)$ 이므로

$$a = -1, b = -4$$

$$\therefore ab = (-1) \times (-4) = 4$$

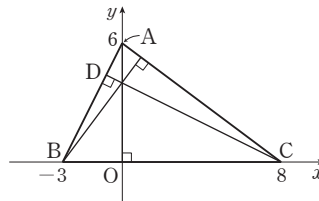
답 4

16

삼각형의 세 꼭짓점에서 각 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만나므로 두 수선의 교점을 나머지 한 수선이 지나게 된다.

세 점 $A(0, 6)$, $B(-3, 0)$, $C(8, 0)$ 은 다음 그림과 같으므로 점 A 에서 변 BC 에 그은 수선은 y 축이고 수선 OA 의 방정식은

$$x = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$



한편, 꼭짓점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 D 라 하면

직선 AB 의 기울기가 $\frac{0-6}{-3-0} = 2$ 이므로 직선 CD 의

기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $C(8, 0)$ 을 지나는 수선 CD 의

방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x - 8) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $x = 0, y = 4$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (0, 4)이므로

$$a=0, b=4$$

$$\therefore a+b=0+4=4$$

답 4

17

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

이때 두 직선 $x-y=0$, $2x+y-9=0$ 은 서로 평행하지 않으므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 두 직선 $x-y=0$, $8x-ky+48=0$ 이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{8} = \frac{-1}{-k} \neq \frac{0}{48} \text{이므로 } k=8$$

(ii) 두 직선 $2x+y-9=0$, $8x-ky+48=0$ 이 서로 평행할 때,

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{-k} \neq \frac{-9}{48} \text{이므로 } k=-4$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

두 직선의 방정식 $x-y=0$, $2x+y-9=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=3$$

즉, 이 두 직선의 교점의 좌표는 (3, 3)이고, 나머지 한 직선 $8x-ky+48=0$ 이 점 (3, 3)을 지나야 하므로

$$24-3k+48=0$$

$$3k=72 \quad \therefore k=24$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 k 의 값은 8, -4, 24이므로 구하는 합은

$$8+(-4)+24=28$$

답 28

18

네 점 A(1, 3), B, C(5, 1), D를 꼭짓점으로 하는 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로를 수직이등분한다.

직선 AC의 기울기가 $\frac{1-3}{5-1} = -\frac{1}{2}$ 이므로 직선 BD의 기울기는 2이다.

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (3, 2)$$

따라서 직선 BD는 기울기가 2이고 점 (3, 2)를 지나는 직선이므로

$$y-2=2(x-3) \quad \therefore 2x-y-4=0$$

따라서 $a=2$, $b=-4$ 이므로

$$a+b=2+(-4)=-2$$

답 -2

3 점과 직선 사이의 거리

기본 + 필수연습

본문 pp.073-077

$$43 \quad 12 \quad 44 \quad \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad 45 \quad 5, 7 \quad 46 \quad -3$$

$$47 \quad \frac{1}{5} \quad 48 \quad 9 \quad 49 \quad 5 \quad 50 \quad 81$$

$$51 \quad 4 \quad 52 \quad \frac{27}{8}$$

$$53 \quad x-5y+3=0, 5x+y+1=0$$

$$54 \quad -36, 16$$

43

점 (0, 1)과 직선 $\sqrt{3}x+y+23=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\sqrt{3} \times 0 + 1 + 23|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} \\ = \frac{24}{2} = 12$$

답 12

44

평행한 두 직선 $3x-y+2=0$, $3x-y+8=0$ 사이의 거리를 d 라 하면 d 는 직선 $3x-y+2=0$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $3x-y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d = \frac{|3 \times 0 - 2 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \\ = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

45

점 $(3, -2)$ 와 직선 $4x+3y-k=0$ 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$ 이므로

$$\frac{|4 \times 3 + 3 \times (-2) - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{|6-k|}{5} = \frac{1}{5}, |k-6|=1$$

$$k-6=\pm 1 \quad \therefore k=5 \text{ 또는 } k=7$$

답 5, 7

46

직선 $ax+by+2=0$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$a+b+2=0$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원점과 직선 $ax+by+2=0$ 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 이므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \frac{4}{a^2+b^2} = \frac{10}{25}$$

$$\therefore a^2+b^2=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 이므로 이 식에 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$(-2)^2=10+2ab$$

$$2ab=-6 \quad \therefore ab=-3$$

답 -3

보충 설명

$\textcircled{1}$ 에서 $b=-a-2$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2+(-a-2)^2=10$$

$$a^2+2a-3=0, (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a=-3$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-3$ 이므로

$$ab=-3$$

47

$(3k+1)x+(k-5)y+k+11=0$ 에서

$$x-5y+11+k(3x+y+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 이 k 에 대한 항등식이면

$$x-5y+11=0, 3x+y+1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=2$ 이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 실수 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

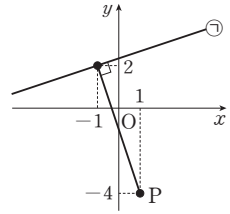
이때 점 $P(1, -4)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사

이의 거리가 최대가 되려면 오른

쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 2)$,

$P(1, -4)$ 를 지나는 직선이 직

선 $\textcircled{1}$ 과 수직이어야 한다.



이때 직선 $\textcircled{1}$ 의 기울기는 $-\frac{3k+1}{k-5}$ 이므로

$$-\frac{3k+1}{k-5} \times \frac{-4-2}{1-(-1)} = -1$$

$$-9k-3=k-5 \quad \therefore k=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

다른 풀이

점 $P(1, -4)$ 와 직선 $(3k+1)x+(k-5)y+k+11=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3k+1-4(k-5)+k+11|}{\sqrt{(3k+1)^2+(k-5)^2}}$$

$$= \frac{32}{\sqrt{10k^2-4k+26}}$$

이때 $f(k)=10k^2-4k+26$ 이라 하면 $f(k)$ 가 최솟값을 가질 때, d 가 최댓값을 갖는다.

$$f(k)=10k^2-4k+26$$

$$=10\left(k-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{128}{5}$$

이므로 $f(k)$ 는 $k=\frac{1}{5}$ 일 때 최솟값 $\frac{128}{5}$ 을 갖는다.

따라서 구하는 실수 k 의 값은 $\frac{1}{5}$ 이다.

48

직선 $2x-3y-4=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 과

직선 $2x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 이므로

$$\frac{|2 \times 2 - 3 \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}$$

$$|k+4|=13, k+4=\pm 13$$

$$\therefore k=9 (\because k>0)$$

답 9

49

두 직선 $x+ay+2=0$, $x+2y+b=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{2} \neq \frac{2}{b} \quad \therefore a=2, b \neq 2$$

평행한 두 직선 $x+2y+2=0$, $x+2y+b=0$ 사이의 거리는

직선 $x+2y+2=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$ 과

직선 $x+2y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2+2 \times 0+b|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$|-2+b|=1, b-2=\pm 1 \quad \therefore b=3 (\because b>1)$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

답 5

50

두 직선 $(a-1)x-3y+2=0$, $-2x+(a+4)y+5=0$ 이

서로 평행하므로

$$\frac{a-1}{-2} = \frac{-3}{a+4} \neq \frac{2}{5}$$

$$\frac{a-1}{-2} = \frac{-3}{a+4} \text{에서 } (a-1)(a+4)=6$$

$$a^2+3a-10=0, (a+5)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

즉, 두 직선 $x-3y+2=0$, $-2x+6y+5=0$ 사이의 거리가

d 이고, d 는 직선 $x-3y+2=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$ 과 직선

$-2x+6y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d = \frac{|-2 \times (-2) + 6 \times 0 + 5|}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2}} = \frac{9}{2\sqrt{10}}$$

$$\therefore 40d^2 = 40 \times \frac{81}{40} = 81$$

답 81

51

두 점 $A(1, 3)$, $B(2, 5)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

직선 AB 의 방정식은

$$y-3 = \frac{5-3}{2-1}(x-1) \quad \therefore 2x-y+1=0$$

점 $C(3, -1)$ 과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|2 \times 3 - (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = 4$$

답 4

다른 풀이

세 점 $A(1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(3, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |1 \times 5 + 2 \times (-1) + 3 \times 3 - 2 \times 3 - 3 \times 5 - 1 \times (-1)|$$

$$= \frac{1}{2} \times |5 - 2 + 9 - 6 - 15 + 1|$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

52

두 직선의 방정식 $x+5y+2=0$, $3x+2y-7=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=-1$$

즉, 두 직선의 교점 $(3, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을

$$y=m(x-3)-1, \text{ 즉}$$

$$mx-y-3m-1=0 \quad (m \text{은 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 원점에서 직선 $\textcircled{1}$ 까지의 거리가 1이므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$$

즉, $|3m+1| = \sqrt{m^2+1}$ 의 양변을 제곱하면

$$9m^2+6m+1=m^2+1$$

$$8m^2+6m=0, 2m(4m+3)=0$$

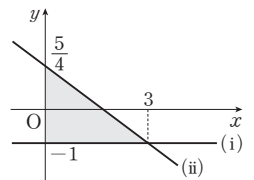
$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=-\frac{3}{4}$$

(i) $m=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 은 $y=-1$

(ii) $m=-\frac{3}{4}$ 일 때, $\textcircled{1}$ 은 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 두 직선은 각각 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{5}{4}+1\right) = \frac{27}{8}$$



답 $\frac{27}{8}$

다른 풀이

두 직선 $x+5y+2=0$, $3x+2y-7=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+5y+2+k(3x+2y-7)=0, \text{ 즉}$$

$$(1+3k)x+(5+2k)y+2-7k=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 원점과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|2-7k|}{\sqrt{(1+3k)^2+(5+2k)^2}}=1$$

즉, $|2-7k|=\sqrt{13k^2+26k+26}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$18k^2-27k-11=0, (3k+1)(6k-11)=0$$

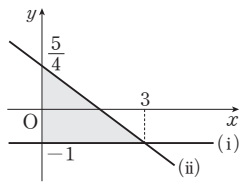
$$\therefore k=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } k=\frac{11}{6}$$

$$(i) k=-\frac{1}{3} \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 은 } y=-1$$

$$(ii) k=\frac{11}{6} \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 은 } 3x+4y-5=0$$

(i), (ii)에서 두 직선은 각각 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{5}{4} + 1 \right) = \frac{27}{8}$$



53

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P에서 두 직선

$2x+3y-1=0$, $3x-2y+2=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|3x-2y+2|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+3y-1| = |3x-2y+2|$$

$$2x+3y-1 = \pm(3x-2y+2)$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$x-5y+3=0 \text{ 또는 } 5x+y+1=0$$

$$\text{답 } x-5y+3=0, 5x+y+1=0$$

54

두 직선 $3x+4y-4=0$, $5x+12y-k=0$ 이 만나서 생기는 각의 이등분선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로 점 $(2, -1)$ 에서 두 직선에 이르는 거리는 같다.

$$\text{즉, } \frac{|3 \times 2 + 4 \times (-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5 \times 2 + 12 \times (-1) - k|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

에서

$$\frac{2}{5} = \frac{|-2-k|}{13}, |k+2| = \frac{26}{5}, k+2 = \pm \frac{26}{5}$$

$$\text{따라서 } k = -\frac{36}{5} \text{ 또는 } k = \frac{16}{5} \text{ 이므로}$$

$$5k = -36 \text{ 또는 } 5k = 16$$

답 -36, 16

STEP 1 개념 마무리

본문 p.078

$$19 \quad \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$20 \quad \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$21 \quad \sqrt{6}$$

$$22 \quad 233$$

$$23 \quad 69$$

$$24 \quad \frac{13}{8}$$

19

$$(-k+1)x + (2k-3)y + 5k-4=0 \text{ 에서}$$

$$x-3y-4+k(-x+2y+5)=0$$

이 직선이 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 두 직선

$x-3y-4=0$, $-x+2y+5=0$ 의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=7, y=1 \quad \therefore P(7, 1)$$

따라서 점 $P(7, 1)$ 과 직선 $x+3y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|7+3 \times 1 - 5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{10}}{2}$$

20

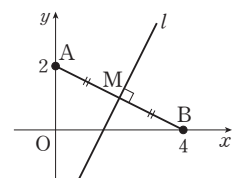
접은 선을 직선 l 이라 하면 직선 l

은 선분 AB의 수직이등분선이다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 직선 } l \text{의 기}$$

울기는 2이다.



또한, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \quad \therefore M(2, 1)$$

즉, 기울기가 2이고 점 M(2, 1)을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-1=2(x-2) \quad \therefore 2x-y-3=0$$

따라서 원점에서 접은 선 l까지의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

21

정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{3}{5}$ 이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 이다.

두 점 A, B는 직선 $y=\frac{3}{a}x-\frac{2}{a}$, 즉 $3x-ay-2=0$,

두 점 C, D는 직선 $y=\frac{3}{a}x-\frac{5}{a}$, 즉 $3x-ay-5=0$

위에 있고 이 두 직선은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 이어야 한다.

즉, 직선 $3x-ay-2=0$ 위의 한 점 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 과

직선 $3x-ay-5=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 이므로

$$\frac{\left|3 \times \frac{2}{3} - a \times 0 - 5\right|}{\sqrt{3^2 + (-a)^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{9+a^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{에서 양변을 제곱하면}$$

$$\frac{9}{a^2+9} = \frac{3}{5}, \quad 45=3a^2+27$$

$$a^2=6 \quad \therefore a=\sqrt{6} \quad (\because a>0)$$

답 $\sqrt{6}$

단계	채점 기준	배점
(가)	정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 구한 경우	30%
(나)	평행한 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타낸 경우	40%
(다)	양수 a 의 값을 구한 경우	30%

22

두 점 A(1, 2), B(-3, 4)에 대하여 직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{4-2}{-3-1}(x-1) \quad \therefore x+2y-5=0$$

$-4 \leq a \leq 1$ 인 실수 a 에 대하여 점 P의 좌표를

(a, a^2+4a-7) , 직선 AB와 점 P 사이의 거리를 d 라 하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5},$$

$$d=\frac{|a+2(a^2+4a-7)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$=\frac{|2a^2+9a-19|}{\sqrt{5}}$$

삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 d 이므로

$$\triangle PAB=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times d$$

$$=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|2a^2+9a-19|}{\sqrt{5}}$$

$$= \left| 2\left(a+\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{233}{8} \right|$$

이때 $f(a)=2\left(a+\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{233}{8}$ 이라 하면

$-4 \leq a \leq 1$ 에서 $f(a)$ 의 최댓값은 $f(1)=-8$,

최솟값은 $f\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{233}{8}$ 이므로

$$-\frac{233}{8} \leq f(a) \leq -8$$

$$\text{즉, } \triangle PAB=|f(a)| \text{에서 } 8 \leq \triangle PAB \leq \frac{233}{8}$$

따라서 $M=\frac{233}{8}$, $m=8$ 이므로

$$Mm=\frac{233}{8} \times 8=233$$

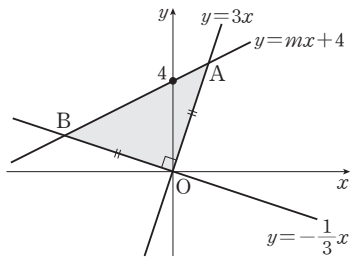
답 233

23

직선 $y=mx+4$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 (0, 4)를 지

나는 직선이고 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$ 는 서로 수직이므

로 주어진 세 직선은 다음 그림과 같다.



두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x$ 와 직선 $y=mx+4$ 의 교점을 각

각 A, B라 하면 점 A의 x 좌표는

$$3x=mx+4, (3-m)x=4$$

$$\therefore x=\frac{4}{3-m}, y=\frac{12}{3-m} \quad (\because m \neq 3)$$

$m=3$ 이면 삼각형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore A\left(\frac{4}{3-m}, \frac{12}{3-m}\right) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

같은 방법으로 점 B의 x 좌표는

$$-\frac{1}{3}x=mx+4, \left(m+\frac{1}{3}\right)x=-4$$

$$\therefore x=\frac{-12}{3m+1}, y=\frac{4}{3m+1} \quad (\because m \neq -\frac{1}{3})$$

$m=-\frac{1}{3}$ 이면 삼각형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore B\left(\frac{-12}{3m+1}, \frac{4}{3m+1}\right) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때 $\triangle OAB$ 는 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3-m}\right)^2 + \left(\frac{12}{3-m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-12}{3m+1}\right)^2 + \left(\frac{4}{3m+1}\right)^2}$$

위의 식을 정리하면 $\frac{4\sqrt{10}}{|3-m|} = \frac{4\sqrt{10}}{|3m+1|}$ 에서

$$|3-m| = |3m+1|$$

$$\therefore 3-m=3m+1 \text{ 또는 } 3-m=-3m-1$$

(i) $3-m=3m+1$ 일 때,

$$4m=2 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) $3-m=-3m-1$ 일 때,

$$2m=-4 \quad \therefore m=-2$$

그런데 $m>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=\frac{1}{2}$ 이므로 직선 $y=mx+4$ 는

$$y=\frac{1}{2}x+4 \quad \therefore x-2y+8=0$$

직선 $x-2y+8=0$ 과 원점 O 사이의 거리를 h 라 하면

$$h=\frac{|8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

또한, $m=\frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에 각각 대입하면

$$A\left(\frac{8}{5}, \frac{24}{5}\right), B\left(-\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

이므로 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\frac{24}{5}-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}-\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$$

따라서 이등변삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{64}{5}$$

따라서 $p=5, q=64$ 이므로

$$p+q=5+64=69$$

답 69

보충 설명

$\triangle OAB$ 는 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 인 직각이등변삼각형이므로 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하지 않고도 그 넓이를 구할 수 있다.

$$\text{즉, } \overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{10}}{5} \times \frac{8\sqrt{10}}{5} \\ &= \frac{64}{5} \end{aligned}$$

24

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{5}{2}, 6\right)$ 이고, 직선 AB의 기울

기는 $-\frac{12}{5}$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y-6=\frac{5}{12}\left(x+\frac{5}{2}\right) \quad \therefore y=\frac{5}{12}x+\frac{169}{24} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 선분 AC의 중점의 좌표는 $(0, 12)$ 이고, 직선 AC의 기울기는 0이므로 선분 AC의 수직이등분선의 방정식은

$$x=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 점 O는 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=0, y=\frac{169}{24} \quad \therefore O\left(0, \frac{169}{24}\right)$$

한편, 점 I에서 직선 AC와 직선 BC에 이르는 거리가 서로 같고, 직선 AC의 방정식은 $y=12$, 직선 BC의 방정식은

$$12x-5y=0 \text{이므로 점 I의 좌표를 } (0, a) \quad (0 < a < 12) \text{라}$$

하면 $\leftarrow$ 점 I는 $\angle B$ 의 이등분선 $x=0$ 위에 있다.

$$12-a=\frac{|-5a|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$$

$$12-a=\frac{5}{13}a \quad (\because 0 < a < 12)$$

$$\frac{18}{13}a=12 \quad \therefore a=\frac{26}{3}$$

따라서 $I\left(0, \frac{26}{3}\right)$ 이므로

$$\overline{OI}=\left|\frac{169}{24}-\frac{26}{3}\right|=\frac{13}{8}$$

답 $\frac{13}{8}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.079

1 $y=2x-2$

2 -5

3 30

4 ③

5 $\sqrt{2}$

6 (1, 2)

1

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점이 각각

$P(2, 2)$, $Q(1, 3)$, $R(0, 1)$

이므로 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여 직선 AB와 직선 QR은 평행하다.

이때 직선 QR의 기울기는

$$\frac{1-3}{0-1}=2$$

따라서 직선 AB는 점 $P(2, 2)$ 를 지나고 기울기가 2인 직선
이므로 직선 AB의 방정식은

$$y-2=2(x-2) \quad \therefore y=2x-2$$

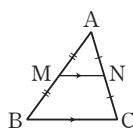
답 $y=2x-2$

보충 설명

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질 |

- (1) 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{BC} \parallel \overline{MN}, \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$



- (2) 삼각형 ABC에서 변 AB의 중점 M을 지나고 변 BC에 평행한 직선과 변 AC의 교점을 N이라 하면

$$\overline{AN}=\overline{NC}$$

다른 풀이

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 이라 하면

변 AB의 중점이 $P(2, 2)$ 이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2, \frac{y_1+y_2}{2}=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

변 BC의 중점이 $Q(1, 3)$ 이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=1, \frac{y_2+y_3}{2}=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

변 CA의 중점이 $R(0, 1)$ 이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=0, \frac{y_3+y_1}{2}=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③에서 $x_1+x_2=4$, $x_2+x_3=2$, $x_3+x_1=0$ 이고,

이 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x_1+x_2+x_3)=6$$

$$x_1+x_2+x_3=3$$

$$\therefore x_1=1, x_2=3, x_3=-1$$

또한, ①, ②, ③에서 $y_1+y_2=4$, $y_2+y_3=6$, $y_3+y_1=2$ 이고,

이 세 식을 변끼리 더하면

$$2(y_1+y_2+y_3)=12$$

$$y_1+y_2+y_3=6$$

$$\therefore y_1=0, y_2=4, y_3=2$$

$$\therefore A(1, 0), B(3, 4), C(-1, 2)$$

따라서 두 점 A, B를 지나고 직선 AB의 방정식은

$$y-0=\frac{4-0}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=2x-2$$

2

$$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b=f(x, y)g(x, y) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

에서 좌변의 x^2 항의 계수가 2이므로

$$f(x, y)=x+py+q, g(x, y)=2x+ry+s$$

(p, q, r, s 는 상수)

라 하자.

이때 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$ 은 서로 수직인 두 직선의 방정식을 나타내므로

$$1 \times 2 + pr = 0 \quad \therefore p = -\frac{2}{r}$$

이것을 ①에 대입하면

$$2x^2-3xy+ay^2-x+7y+b=\left(x-\frac{2}{r}y+q\right)(2x+ry+s)$$

.....②

등식 ㉠에서 우변의 xy 항은

$$x \times ry + \left(-\frac{2}{r}y\right) \times 2x = \left(r - \frac{4}{r}\right)xy$$

이고, 좌변의 xy 항의 계수가 -3 이므로

$$r - \frac{4}{r} = -3, r^2 + 3r - 4 = 0$$

$$(r+4)(r-1)=0 \quad \therefore r = -4 \text{ 또는 } r=1$$

(i) $r = -4$ 일 때

이것을 ㉠에 대입하면

$$2x^2 - 3xy + ay^2 - x + 7y + b$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y + q\right)(2x - 4y + s)$$

$$= 2x^2 - 3xy - 2y^2 + (2q+s)x + \left(-4q + \frac{1}{2}s\right)y + qs$$

이므로

$$a = -2, 2q + s = -1, -4q + \frac{1}{2}s = 7, b = qs$$

$$2q + s = -1, -4q + \frac{1}{2}s = 7 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$q = -\frac{3}{2}, s = 2 \quad \therefore qs = \left(-\frac{3}{2}\right) \times 2 = -3$$

$$\therefore a = -2, b = -3$$

(ii) $r = 1$ 일 때

이것을 ㉠에 대입하면

$$2x^2 - 3xy + ay^2 - x + 7y + b$$

$$= (x - 2y + q)(2x + y + s)$$

$$= 2x^2 - 3xy - 2y^2 + (2q+s)x + (q-2s)y + qs$$

이므로

$$a = -2, 2q + s = -1, q - 2s = 7, b = qs$$

$$2q + s = -1, q - 2s = 7 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$q = 1, s = -3 \quad \therefore qs = 1 \times (-3) = -3$$

$$\therefore a = -2, b = -3$$

(i), (ii)에서 $a+b = -2 + (-3) = -5$

답 -5

3

$$ab - 6a + 3b - 18 = 0 \text{에서}$$

$$a(b-6) + 3(b-6) = 0$$

$$(a+3)(b-6) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } b = 6$$

(i) $a = -3$ 일 때,

직선 $x+3y+4=0$ 과 직선 $x-ay+4=0$, 즉

$x+3y+4=0$ 은 일치하므로 두 직선 $x+3y+4=0$,

$2x+by+8=0$ 은 한 점에서 만나야 한다.

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \neq \frac{3}{b} \text{에서 } b \neq 6$$

이때 b 는 $|b| \leq 10$ 인 정수이므로 b 의 값으로 가능한 것은

$-10, -9, -8, \dots, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$ 의 20개이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 20이다.

(ii) $b = 6$ 일 때,

직선 $x+3y+4=0$ 과 직선 $2x+by+8=0$, 즉

$2x+6y+8=0$ 은 일치하므로 두 직선 $x+3y+4=0$,

$x-ay+4=0$ 은 한 점에서 만나야 한다.

$$\text{즉, } \frac{1}{1} \neq \frac{3}{-a} \text{에서 } a \neq -3$$

이때 a 는 $|a| \leq 5$ 인 정수이므로 a 의 값으로 가능한 것은

$-5, -4, -2, -1, 0, \dots, 3, 4, 5$ 의 10개이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 10이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$20 + 10 = 30$$

답 30

보충 설명

$a = -3, b = 0$ 또는 $a = 0, b = 6$ 일 때, 두 직선

$x+3y+4=0$, $\underline{2x+8=0}$ 은 한 점에서 만난다.
 $x+4=0$

4

A(8, 6)이므로 직선 OA의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x \quad \therefore 3x - 4y = 0$$

또한, H(8, 0)이므로 $0 < a < 8$ 인 실수 a 에 대하여 점 B의

좌표를 $(a, 0)$ 라 하면

$$\overline{BI} = \frac{|3 \times a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3a}{5}, \overline{BH} = 8 - a$$

이때 $\overline{BI} = \overline{BH}$ 이므로

$$\frac{3a}{5} = 8 - a, 3a = 40 - 5a$$

$$8a = 40 \quad \therefore a = 5$$

즉, B(5, 0)이므로 직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{6-0}{8-5}(x-5) \quad \therefore y = 2x - 10$$

따라서 $m=2, n=-10$ 이므로
 $m+n=2+(-10)=-8$

답 ③

다른 풀이1

A(8, 6)이므로 $\overline{AH}=6, \overline{OH}=8$

$\triangle OAH$ 는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{100} = 10\end{aligned}$$

$\overline{BI}=\overline{BH}=x$ 라 하면 $\overline{OB}=8-x$ 이고

두 삼각형 OBI, OAH 는 서로 닮음이므로

$$(8-x):x=10:6, 10x=48-6x, 16x=48$$

$$\therefore x=3$$

즉, B(5, 0)이므로 직선 AB의 방정식은

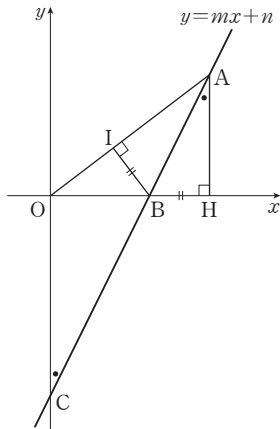
$$y=\frac{6-0}{8-5}(x-5) \quad \therefore y=2x-10$$

따라서 $m=2, n=-10$ 이므로

$$m+n=2+(-10)=-8$$

다른 풀이2

다음 그림과 같이 직선 $y=mx+n$ 과 y 축의 교점을 C라 하면 두 직선 OC, AH가 서로 평행하므로 $\angle OCB = \angle HAB$



한편, $\overline{BI}=\overline{BH}$ 이고 $\overline{AB}$ 는 공통이므로 두 직각삼각형 AIB, AHB는 서로 합동이다. RHS 합동

즉, $\angle BAI = \angle BAH = \angle OCA$ 이므로

$\triangle OCA$ 는 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$$

따라서 점 C의 좌표는 (0, -10)이므로 직선 AC의 y 절편 n 은 -10이고 기울기 m 은

$$m=\frac{6-(-10)}{8-0}=2$$

$$\therefore m+n=2+(-10)=-8$$

5

$xy+x+y-1=0$ 에서 $x(y+1)+y+1=2$

$$\therefore (x+1)(y+1)=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 x, y 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 $x+1, y+1$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$x+1$	1	2	-1	-2
$y+1$	2	1	-2	-1

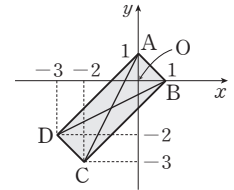
즉, 각 경우에 정수 x, y 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	1	-2	-3
y	1	0	-3	-2

즉, 순서쌍 (x, y) 는 (0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)이고 이 네 점을 각각 A, B, C, D라 하면 도형 F는 사각형 ABCD이다.

오른쪽 그림과 같이 사각형

ABCD는 평행사변형이므로 이 넓이를 이등분하는 직선 l 은 이 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지난다.



또한, 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 두 대각선의 교점은 선분 AC의 중점과 일치한다.

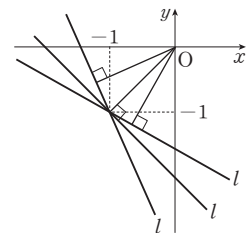
선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{1+(-3)}{2} \right) \quad \therefore (-1, -1)$$

즉, 직선 l 은 점 (-1, -1)을 지난다.

한편, 오른쪽 그림에서

점 (-1, -1)을 지나고 직선 l 과 원점 사이의 거리가 최대가 되려면 원점에서 직선 l 에 내린 수선의 발이 점 (-1, -1)이어야 한다.



따라서 구하는 최댓값은 두 점 (0, 0), (-1, -1) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

6

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리가 같다.

두 직선 $2x-4y+11=0$, $4x-2y-5=0$ 에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{|2a-4b+11|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{|4a-2b-5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}$$

$$|2a-4b+11| = |4a-2b-5|$$

$$2a-4b+11 = \pm(4a-2b-5)$$

$$\therefore a+b-8=0 \text{ 또는 } a-b+1=0$$

이때 오른쪽 그림과 같이

세 직선으로 둘러싸인 삼

각형의 내각의 이등분선

중에서 두 직선

$$2x-4y+11=0,$$

$$4x-2y-5=0 \text{이 이루는}$$

각의 이등분선의 기울기는 양수이므로 이등분선의 방정식은

$$x-y+1=0 \quad \cdots \textcircled{1} \leftarrow \text{직선 } x+y-8=0 \text{의 기울기는 } -1 \text{이다.}$$

또한, 두 직선 $2x-4y+11=0$, $2x+4y-5=0$ 에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (c, d) 라 하면

$$\frac{|2c-4d+11|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{|2c+4d-5|}{\sqrt{2^2+4^2}}$$

$$|2c-4d+11| = |2c+4d-5|$$

$$2c-4d+11 = \pm(2c+4d-5)$$

$$\therefore c = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } d=2$$

이때 오른쪽 그림과 같이

세 직선으로 둘러싸인 삼

각형의 내각의 이등분선

중에서 두 직선

$$2x-4y+11=0,$$

$$2x+4y-5=0 \text{이 이루는}$$

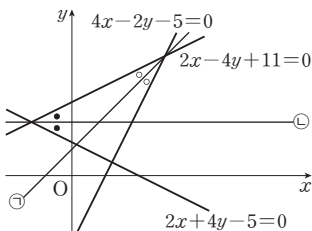
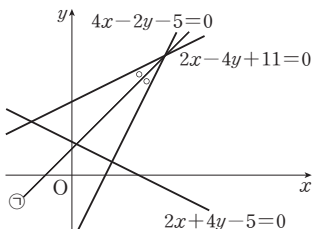
각의 이등분선은 x 축과 평행한 직선이므로

$$y=2 \quad \cdots \textcircled{2} \leftarrow \text{직선 } x=-\frac{3}{2} \text{은 } y\text{-축과 평행하다.}$$

삼각형의 내심은 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점이므로 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $x=1$, $y=2$

따라서 삼각형의 내심의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

답 (1, 2)



03. 원의 방정식

1 원의 방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.086-092

01 (1) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 13$ (2) $x^2 + y^2 = 25$

02 (1) 중심의 좌표 : $(1, 3)$, 반지름의 길이 : $2\sqrt{2}$

(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 2

03 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 18$ 04 (1) 3 (2) $(-6, -6)$

05 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ 06 4 07 $\sqrt{7}$

08 (1) -1 (2) $-5 < k < 7$ 09 -6, 2 10 16π

11 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5$ 12 -2

13 (1) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

(2) 194π

14 6π 15 3π 16 2

01

(1) 중심의 좌표가 $(-2, 6)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-6)^2 = 13$$

(2) 중심이 원점이고 점 $(4, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ 이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = 25$$

답 (1) $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 13$

(2) $x^2 + y^2 = 25$

02

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 8$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이고, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

(2) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 에서

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

따라서 중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이고, 반지름의 길이는 2이다.

답 (1) 중심의 좌표 : $(1, 3)$, 반지름의 길이 : $2\sqrt{2}$

(2) 중심의 좌표 : $(2, 0)$, 반지름의 길이 : 2

03

원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+6}{2}\right), \text{ 즉 } (1, 3)$$

선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{\{4-(-2)\}^2 + \{6-0\}^2}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 18$$

$$\text{답 } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 18$$

다른 풀이 본문 p.084 한 걸음 더 참고

두 점 A(-2, 0), B(4, 6)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x+2)(x-4) + y(y-6) = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 + y^2 - 6y = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 = 18$$

04

$$(1) x^2 + y^2 + 8x - 6y - 2a + 15 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 2a + 10$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 = 2a + 10$$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 (-4, 3)이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{2a+10}$ 이다.

이때 주어진 원이 y축에 접하므로

$$(\text{반지름의 길이}) = |(\text{중심의 } x\text{좌표})| = |-4| = 4$$

$$\text{즉, } 2a+10=4^2 \text{이므로 } 2a=6$$

$$\therefore a=3$$

$$(2) \text{ 구하는 원의 반지름의 길이를 } r (r>0) \text{이라 하면 이 원의 넓이가 } 36\pi \text{이므로}$$

$$\pi r^2 = 36\pi, r^2 = 36$$

$$\therefore r=6 (\because r>0)$$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$$(\text{반지름의 길이}) = |(\text{중심의 } x\text{좌표})| = |(\text{중심의 } y\text{좌표})|$$

즉, 구하는 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면

$$6 = |a| = |b|$$

이때 이 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로

$$a < 0, b < 0 \text{에서}$$

$$a = -6, b = -6$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 (-6, -6)이다.

$$\text{답 } (1) 3 \quad (2) (-6, -6)$$

05

원의 중심이 x축 위에 있으므로 이 원의 중심의 좌표를

(a, 0), 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 두 점 A(4, 1), B(1, 2)를 지나므로

$$(4-a)^2 + 1^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 8a + 17 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(1-a)^2 + 2^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 2a + 5 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=2, r^2=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 = 5$$

$$\text{답 } (x-2)^2 + y^2 = 5$$

06

두 점 A(-7, -3), B(5, 6)에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times (-7)}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2}\right)$$

$$\therefore (-3, 0)$$

즉, 점 (-3, 0)을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 원의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 (1, 3)을 지나므로

$$4^2 + 3^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$$

따라서 원 $(x+3)^2 + y^2 = 25$ 가 점 (0, k)를 지나므로

$$3^2 + k^2 = 25, k^2 = 16$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

$$\text{답 } 4$$

07

원의 중심 C는 선분 PQ의 중점이므로 그 좌표는

$$C\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right), \text{ 즉 } C(2, 1)$$

또한, 선분 PQ가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{(0-4)^2 + (3+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$$

즉, 주어진 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

이 원이 x 축과 만나는 두 점 A, B의 x 좌표는

$$(x-2)^2 + (0-1)^2 = 8 \text{에서}$$

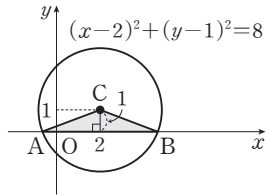
$$(x-2)^2 = 7, x-2 = \pm\sqrt{7}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{7}$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2 + \sqrt{7} - (2 - \sqrt{7}) \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 1 \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$



답 $\sqrt{7}$

다른 풀이

두 점 P(4, -1), Q(0, 3)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-4)(x-0) + (y+1)(y-3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

이 원이 x 축과 만나는 두 점 A, B의 x 좌표는 $\textcircled{1}$ 에서

$$x(x-4) + 1 \times (-3) = 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \times (-3)} = 2 \pm \sqrt{7}$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = (2 + \sqrt{7}) - (2 - \sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 1 = \sqrt{7}$$

08

(1) $x^2 + y^2 + 2kx + y + 1 = 0$ 에서

$$(x+k)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = k^2 - \frac{3}{4}$$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $\left(-k, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름의

길이가 $\sqrt{k^2 - \frac{3}{4}}$ 이다.

이때 이 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$k^2 - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

(i) $k=1$ 일 때,

원의 중심의 좌표는 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로 원의 중심이

제3사분면 위에 있다.

(ii) $k=-1$ 일 때,

원의 중심의 좌표는 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로 원의 중심이

제4사분면 위에 있다.

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값은 -1 이다.

(2) $x^2 + y^2 + 12x - 6y + k^2 - 2k + 10 = 0$ 에서

$$(x+6)^2 + (y-3)^2 = -k^2 + 2k + 35$$

이 방정식이 나타내는 도형이 원이 되려면

$$-k^2 + 2k + 35 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$k^2 - 2k - 35 < 0, (k+5)(k-7) < 0$$

$$\therefore -5 < k < 7$$

답 (1) -1 (2) $-5 < k < 7$

09

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + k^2 + 4k - 16 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = -k^2 - 4k + 21$$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(-2, 1)$ 이고, 반지름의 길이가

$$\sqrt{-k^2 - 4k + 21} \text{이다.}$$

이때 이 원의 반지름의 길이가 3이므로

$$-k^2 - 4k + 21 = 3^2$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0, (k+6)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -6 \text{ 또는 } k = 2$$

답 $-6, 2$

10

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + k^2 - 10k + 19 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -k^2 + 10k - 9$$

즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(3, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{-k^2+10k-9}$ 이다.

이때 이 원의 넓이가 최대가 되려면

$-k^2+10k-9>0$ 이고, 반지름의 길이인 $\sqrt{-k^2+10k-9}$ 의 값이 최대가 되어야 한다.

$-k^2+10k-9>0$ 에서

$k^2-10k+9<0, (k-1)(k-9)<0$

$\therefore 1<k<9$

또한, $\sqrt{-k^2+10k-9}=\sqrt{-(k-5)^2+16}$ 이므로

$1<k<9$ 에서 $k=5$ 일 때, 반지름의 길이 $\sqrt{-k^2+10k-9}$ 는 최댓값 $\sqrt{16}=4$ 를 갖는다.

따라서 구하는 원의 넓이의 최댓값은

$\pi \times 4^2=16\pi$

답 16π

11

원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$ (원의 반지름의 길이)

이때 $\overline{AP}^2=(a-2)^2+(b+1)^2, \overline{BP}^2=(a-3)^2+b^2,$

$\overline{CP}^2=(a-6)^2+(b+1)^2$ 에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=(a-3)^2+b^2$

$\therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$(a-3)^2+b^2=(a-6)^2+(b+1)^2$

$\therefore 3a-b=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=-2$

따라서 원의 중심은 $P(4, -2)$ 이고, 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y+2)^2=5 \quad \leftarrow x^2+y^2-8x+4y+15=0$

답 $(x-4)^2+(y+2)^2=5$

★다른 풀이

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C 는 상수)

이라 하면 이 원이

점 $A(2, -1)$ 을 지나므로

$5+2A-B+C=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

점 $B(3, 0)$ 을 지나므로

$9+3A+C=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

점 $C(6, -1)$ 을 지나므로

$37+6A-B+C=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $32+4A=0$

$\therefore A=-8, B=4, C=15$ ($\because \textcircled{2}, \textcircled{3}$)

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+4y+15=0 \quad \leftarrow (x-4)^2+(y+2)^2=5$

12

세 점 A, B, C 를 지나는 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$ (원의 반지름의 길이)

이때 $\overline{AP}^2=(a+2)^2+(b-6)^2,$

$\overline{BP}^2=(a+8)^2+(b+2)^2,$

$\overline{CP}^2=(a-4)^2+(b+6)^2$ 에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$(a+2)^2+(b-6)^2=(a+8)^2+(b+2)^2$

$\therefore 3a+4b=-7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$(a+8)^2+(b+2)^2=(a-4)^2+(b+6)^2$

$\therefore 3a-b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-1$

즉, 원의 중심은 $P(-1, -1)$ 이고, 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{(-1+2)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{50}$

이므로 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+1)^2=50$

점 $D(2, k)$ 가 이 원 위에 있으므로

$(2+1)^2+(k+1)^2=50 \quad \therefore k^2+2k-40=0$

이때 k 에 대한 이차방정식 $k^2+2k-40=0$ 은 서로 다른 두

실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모

든 k 의 값의 합은 -2 이다. $\leftarrow \frac{D}{4}=(-1)^2-1 \times (-40)=41>0$

답 -2

13

(1) 직선 $y=2x+1$ 위에 있는 원의 중심의 좌표를

$(a, 2a+1)$ 이라 하면 이 원이 y 축에 접하므로 반지름의

길이는 $|a|$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-2a-1)^2 = a^2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

원 $\textcircled{7}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (3-2a-1)^2 = a^2$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0, (a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

$\textcircled{7}$ 에서 구하는 모든 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$$

- (2) 점 $(-8, -1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 제3사분면 위에 있다.

즉, 원의 반지름의 길이를 a ($a > 0$)라 하면 중심의 좌표는 $(-a, -a)$ 이므로 원의 방정식은

$$(x+a)^2 + (y+a)^2 = a^2 \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

이 원이 점 $(-8, -1)$ 을 지나므로

$$(-8+a)^2 + (-1+a)^2 = a^2$$

$$a^2 - 18a + 65 = 0, (a-5)(a-13) = 0$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=13$$

$\textcircled{8}$ 에서 조건을 만족시키는 두 원의 방정식은

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25, (x+13)^2 + (y+13)^2 = 169$$

이므로 이 두 원의 넓이의 합은

$$25\pi + 169\pi = 194\pi$$

$$\text{답 (1)} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$$

$$(2) 194\pi$$

14

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 에서 $\overline{BP} = 3\overline{AP}$ 이므로

$$\overline{BP}^2 = 9\overline{AP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{BP}^2 = 9\overline{AP}^2$ 에서

$$(x-4)^2 + y^2 = 9\{(x+4)^2 + y^2\}$$

$$8x^2 + 80x + 8y^2 + 128 = 0, x^2 + 10x + y^2 + 16 = 0$$

$$\therefore (x+5)^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-5, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

답 6π

★다른 풀이

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 C,

D라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이때 $C(-2, 0)$, $D(-8, 0)$ 이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+(-8)}{2}, 0\right), \text{ 즉 } (-5, 0) \text{이고, 원의 반지름의 길이는}$$

$$\frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2} \times |-8 - (-2)| = 3 \text{이다.}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-5, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

15

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하고 선분 OP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 2x, b = 2y \quad \dots\dots\textcircled{9}$$

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$, 즉

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 12 \text{ 위의 점이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b+2)^2 = 12$$

$\textcircled{9}$ 을 위의 식에 대입하면

$$(2x-2)^2 + (2y+2)^2 = 12 \quad \therefore (x-1)^2 + (y+1)^2 = 3$$

따라서 선분 OP의 중점 $Q(x, y)$ 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

답 3π

16

$P(a, b)$, $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a+(-4)+2}{3}, y = \frac{b+2+8}{3}$$

$$\therefore a = 3x+2, b = 3y-10 \quad \dots\dots\textcircled{10}$$

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 36$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 36$$

$\textcircled{10}$ 을 위의 식에 대입하면

$$(3x+2)^2 + (3y-10)^2 = 36$$

$$\therefore \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 = 4$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

STEP 1 개념 마무리

본문 p.093

- 01 1 02 $-1 \leq k < \frac{1}{3}$ 또는 $2 < k \leq \frac{10}{3}$
 03 $\frac{17}{10}$ 04 9 05 -58 06 -3

01

$x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 10a - 15 = 0$ 에서
 $(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 5a^2 - 10a + 15$
 즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(2a, -a)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5a^2 - 10a + 15}$ 이다.
 이때 $f(a) = 5a^2 - 10a + 15$ 라 하면
 $f(a) = 5(a - 1)^2 + 10$
 즉, $f(a)$ 는 $a = 1$ 일 때 최솟값 10을 갖는다.
 따라서 주어진 원의 넓이가 최소일 때의 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$ 이므로
 $p = 2, q = -1$
 $\therefore p + q = 2 + (-1) = 1$

답 1

02

$x^2 + y^2 + 2(k + 1)x - 2k^2 + 9k - 1 = 0$ 에서
 $\{x + (k + 1)\}^2 + y^2 = 3k^2 - 7k + 2$
 즉, 이 원은 중심의 좌표가 $(-k - 1, 0)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{3k^2 - 7k + 2}$ 이다.
 이 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이하이므로
 $0 < \sqrt{3k^2 - 7k + 2} \leq 2\sqrt{3}$
 $\therefore 0 < 3k^2 - 7k + 2 \leq 12$
 $3k^2 - 7k + 2 > 0$ 에서 $(3k - 1)(k - 2) > 0$
 $\therefore k < \frac{1}{3}$ 또는 $k > 2$ ㉠
 $3k^2 - 7k + 2 \leq 12$ 에서 $3k^2 - 7k - 10 \leq 0$
 $(k + 1)(3k - 10) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq k \leq \frac{10}{3}$ ㉡
 따라서 실수 k 의 값의 범위는 ㉠, ㉡의 공통부분이므로
 $-1 \leq k < \frac{1}{3}$ 또는 $2 < k \leq \frac{10}{3}$

답 $-1 \leq k < \frac{1}{3}$ 또는 $2 < k \leq \frac{10}{3}$

03

$x + y = 0$ ㉠
 $2x - y - 3 = 0$ ㉡
 $x - 4y + 2 = 0$ ㉢
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 1, y = -1$ 이므로
 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1, -1)$,
 ㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$ 이므로
 두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$,
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x = 2, y = 1$ 이므로
 두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.
 세 교점을 각각 $A(1, -1), B(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}), C(2, 1)$ 이라 하고,
 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = r$
 이때 $\overline{AP}^2 = (a - 1)^2 + (b + 1)^2$,
 $\overline{BP}^2 = (a + \frac{2}{5})^2 + (b - \frac{2}{5})^2$,
 $\overline{CP}^2 = (a - 2)^2 + (b - 1)^2$ 에서
 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = (a + \frac{2}{5})^2 + (b - \frac{2}{5})^2$
 $\therefore a - b = \frac{3}{5}$ ㉣
 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로
 $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = (a - 2)^2 + (b - 1)^2$
 $\therefore a + 2b = \frac{3}{2}$ ㉤
 ㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{10}, b = \frac{3}{10}$
 따라서 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 외접원의 중심이
 $P(\frac{9}{10}, \frac{3}{10})$ 이므로 반지름의 길이 r 은
 $r = \overline{AP} = \sqrt{(\frac{9}{10} - 1)^2 + (\frac{3}{10} + 1)^2} = \sqrt{\frac{17}{10}}$
 $\therefore r^2 = \frac{17}{10}$

답 $\frac{17}{10}$

04

세 점 $A(-2, 3), B(2, 1), C(5, 2)$ 를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이다.

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 이

고, 직선 BC의 기울기는 $\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$ 이므로 선분 BC의 수직

이등분선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=-3\left(x-\frac{7}{2}\right) \quad \therefore y=-3x+12$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 선분 BC의 수직이등분

선 위에 있으므로 이 원의 중심을 $P(a, -3a+12)$ 라 하자.

또한, 삼각형 ABC의 외접원의 중심에서 두 점 A, B에 이르는 거리가 같으므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ 에서

$$(a+2)^2+(-3a+9)^2=(a-2)^2+(-3a+11)^2$$

$$10a^2-50a+85=10a^2-70a+125$$

$$20a=40 \quad \therefore a=2$$

즉, 직선 $y=mx+n$ 이 점 $P(2, 6)$ 을 지나므로

$$2m+n=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 $y=mx+n$ 이 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ 의 넓이를 이등분하려면 이 직선은 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ 의 중심 $(5, -3)$ 을 지나야 하므로

$$5m+n=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$m=-3, n=12 \quad \therefore m+n=-3+12=9$$

$$\begin{aligned} ad+bc &= (-r_1) \times r_2 + r_1 \times (-r_2) \\ &= -r_1 r_2 - r_1 r_2 = -2r_1 r_2 \\ &= (-2) \times 29 = -58 \end{aligned}$$

답 -58

06

$P(p, q), Q(x, y)$ 라 하면

$$x=\frac{p}{4}, y=\frac{q}{4}$$

$$\therefore p=4x, q=4y \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 점 $P(p, q)$ 는 원 $(x-4)^2+(y-6)^2=20$ 위의 점이므로

$$(p-4)^2+(q-6)^2=20$$

$\textcircled{1}$ 을 위의 식에 대입하면

$$(4x-4)^2+(4y-6)^2=20$$

$$\therefore x^2+y^2-2x-3y+2=0$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-3y+2=0 \text{이므로}$$

$$a=-2, b=-3, c=2$$

$$\therefore a+b+c=-2+(-3)+2=-3$$

답 -3

05

점 $(-2, 5)$ 를 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있다. 즉, 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)이라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이므로 원의 방정식은

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-2, 5)$ 를 지나므로

$$(-2+r)^2+(5-r)^2=r^2$$

$$\therefore r^2-14r+29=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \left[\frac{D}{4}=7^2-1 \times 29=20>0 \right]$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 근을 r_1, r_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$r_1 r_2=29$$

또한, 두 원의 중심의 좌표는 $(-r_1, r_1), (-r_2, r_2)$ 이므로

② 원과 직선의 위치 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.098-104

$$17 \quad (1) -4 < k < 4 \quad (2) k = \pm 4 \quad (3) k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

$$18 \quad a > 2\sqrt{2} \quad 19 \quad 2x-y+5=0$$

$$20 \quad x^2+y^2+\frac{4}{3}y-1=0 \quad 21 \quad -17 \leq k \leq 3$$

$$22 \quad 7 \quad 23 \quad 2\sqrt{10} \quad 24 \quad 4 \quad 25 \quad -66$$

$$26 \quad -6 \quad 27 \quad 6 \quad 28 \quad 45 \quad 29 \quad \frac{6}{5}$$

$$30 \quad 324 \quad 31 \quad x^2+y^2+5y=0 \quad 32 \quad 6$$

$$33 \quad 2$$

17

$y = -x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 8$ 에 대입하면

$$x^2 + (-x + k)^2 = 8$$

$$\therefore 2x^2 - 2kx + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 8) = -k^2 + 16$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면

$$-k^2 + 16 > 0, k^2 - 16 < 0$$

$$\therefore -4 < k < 4$$

(2) 원과 직선이 접하면

$$-k^2 + 16 = 0, k^2 = 16$$

$$\therefore k = \pm 4$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면

$$-k^2 + 16 < 0, k^2 - 16 > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

답 (1) $-4 < k < 4$ (2) $k = \pm 4$ (3) $k < -4$ 또는 $k > 4$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = -x + k$, 즉 $x + y - k = 0$ 사이의

거리를 d 라 하면 $d = \frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$ 이고 원의 반지름

의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나면

$$d < 2\sqrt{2}, \text{ 즉 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore -4 < k < 4$$

(2) 원과 직선이 접하면

$$d = 2\sqrt{2}, \text{ 즉 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore k = \pm 4$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으면

$$d > 2\sqrt{2}, \text{ 즉 } \frac{|k|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

18

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(a, 1)$ 이므로 두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2 + 1^2}$ 이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 1이므로 두 원이 서로 만나지 않으려면 $2 + 1 < \sqrt{a^2 + 1}$ 이어야 한다.

즉, $\sqrt{a^2 + 1} > 3$ 에서

$$a^2 + 1 > 9, a^2 - 8 > 0$$

$$(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) > 0$$

$$\therefore a < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } a > 2\sqrt{2}$$

이때 a 는 양수이므로 구하는 a 의 값의 범위는

$$a > 2\sqrt{2}$$

답 $a > 2\sqrt{2}$

보충 설명

$\sqrt{a^2 + 1} < 2 - 1$ 일 때도 두 원은 만나지 않는다.

즉, $\sqrt{a^2 + 1} < 1$ 에서 $a^2 + 1 < 1 \therefore a^2 < 0$

그런데 위의 부등식을 만족시키는 양수 a 는 존재하지 않는다.

19

두 원 $x^2 + y^2 = 10$, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, 즉

$x^2 + y^2 - 10 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ 의 교점을 지나
는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 10 - (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20) = 0$$

$$4x - 2y + 10 = 0$$

$$\therefore 2x - y + 5 = 0$$

답 $2x - y + 5 = 0$

20

$(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$ 에서

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ 에서

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

두 원 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 + k(x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7) = 0$$

$$(k \neq -1) \quad \cdots \textcircled{9}$$

이라 하면 원 $\textcircled{9}$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$16 - 8k = 0 \quad \therefore k = 2$$

이것을 $\textcircled{9}$ 에 대입하여 정리하면

$$3x^2 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - 1 = 0$$

답 $x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y - 1 = 0$

21

원의 반지름의 길이를 r , 원의 중심 $(-2, 5)$ 와 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$r=2, d=\frac{|4 \times (-2) + 3 \times 5 + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|k+7|}{5}$$

(중심의 좌표)

이때 원이 직선과 만나므로 $d \leq r$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{|k+7|}{5} \leq 2 \text{에서}$$

$$|k+7| \leq 10, -10 \leq k+7 \leq 10$$

$$\therefore -17 \leq k \leq 3$$

답 $-17 \leq k \leq 3$

22

$$x^2+y^2-8x-6y+k=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25-k$$

즉, 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{25-k}$ ($k < 25$)이다.

이때 이 원이 x 축과 만나려면

$$\sqrt{25-k} \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 원이 y 축과 만나지 않으려면

$$\sqrt{25-k} < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $3 \leq \sqrt{25-k} < 4$ 이므로

$$9 \leq 25-k < 16, -16 \leq -k < -9$$

$$\therefore 9 < k \leq 16$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16의 7개이다.

답 7

다른 풀이

(i) 원 $x^2+y^2-8x-6y+k=0$ 이 x 축과 만나므로 원의 방정식에 $y=0$ 을 대입한 이차방정식 $x^2-8x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 16$$

(ii) 원 $x^2+y^2-8x-6y+k=0$ 이 y 축과 만나지 않으므로 원의 방정식에 $x=0$ 을 대입한 이차방정식 $y^2-6y+k=0$ 의 판별식을 D' 이라 하면

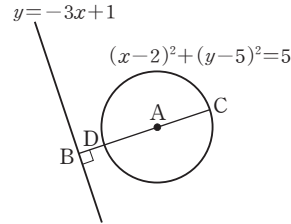
$$\frac{D'}{4} = 9-k < 0 \quad \therefore k > 9$$

(i), (ii)에서 $9 < k \leq 16$ 이므로 조건을 만족시키는 정수 k 는 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16의 7개이다.

23

$$x^2+y^2-4x-10y+24=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-5)^2=5$$

다음 그림과 같이 원의 중심을 A라 하고 점 A에서 직선 $y=-3x+1$ 에 내린 수선의 발을 B, 직선 AB가 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자.



원의 중심 A(2, 5)와 직선 $y=-3x+1$, 즉 $3x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \frac{|3 \times 2 + 5 - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

원 위의 점 P에서 직선 $y=-3x+1$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면

(i) 선분 PQ의 길이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 C, 점 B이므로 그 최댓값은

$$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

(ii) 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 D, 점 B이므로 그 최솟값은

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$$

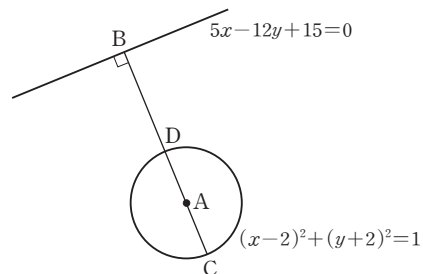
(i), (ii)에서 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{10}$ 이다.

답 $2\sqrt{10}$

24

$$x^2+y^2-4x+4y+7=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y+2)^2=1$$

다음 그림과 같이 원의 중심을 A라 하고 점 A에서 직선 $5x-12y+15=0$ 에 내린 수선의 발을 B, 직선 AB가 원과 만나는 두 점을 C, D라 하자.



원의 중심 $A(2, -2)$ 와 직선 $5x-12y+15=0$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \frac{|5 \times 2 - 12 \times (-2) + 15|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{49}{13}$$

원 위의 점 P에서 직선 $5x-12y+15=0$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면

(i) 선분 PQ의 길이가 최대가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 C, 점 B이므로 그 최댓값은

$$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} = \frac{49}{13} + 1 = \frac{62}{13}$$

(ii) 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치는 각각 점 D, 점 B이므로 그 최솟값은

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \frac{49}{13} - 1 = \frac{36}{13}$$

(i), (ii)에서 점 P와 직선 $5x-12y+15=0$ 사이의 거리 d 는 $\frac{36}{13} \leq d \leq \frac{62}{13}$

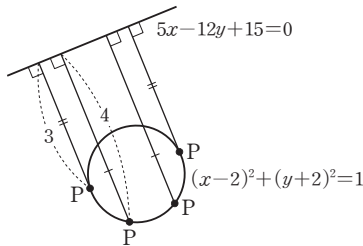
즉, 정수 d 는 3, 4이고 $d=3$ 인 점이 2개, $d=4$ 인 점이 2개 존재한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 P의 개수는 $2+2=4$

답 4

보충 설명

조건을 만족시키는 점 P는 오른쪽 그림과 같이 4개 존재한다.



25

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 3ax + 7y + 3$$

$$- \{x^2 + y^2 + (2b-5)x + (a+b)y + 4\} = 0$$

$$\therefore (-3a-2b+5)x + (7-a-b)y - 1 = 0$$

이 직선이 직선 $5x-y+2=0$ 과 일치해야 하므로

$$\frac{-3a-2b+5}{5} = \frac{7-a-b}{-1} = \frac{-1}{2} \text{에서}$$

$$-3a-2b+5 = -\frac{5}{2}, 7-a-b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 6a+4b=15, 2a+2b=13$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{11}{2}, b = 12$$

$$\therefore ab = \left(-\frac{11}{2}\right) \times 12 = -66$$

답 -66

26

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + k - (x^2 + y^2 + 4x + 4y) = 0$$

$$\therefore -8x - 6y + k = 0$$

이 직선이 점 $(-6, 7)$ 을 지나므로

$$6 + k = 0 \quad \therefore k = -6$$

답 -6

27

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 5x + ky - 6 - (x^2 + y^2 - 2x - 6y) = 0$$

$$-3x + (k+6)y - 6 = 0$$

$$\therefore y = \frac{3}{k+6}x + \frac{6}{k+6}$$

이 직선이 직선 $y = -4x + 1$ 에 수직이므로

$$\frac{3}{k+6} \times (-4) = -1$$

$$k+6=12 \quad \therefore k=6$$

답 6

28

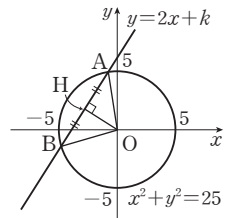
오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면

$$\overline{AB} = 8$$

원의 중심 O에서 직선 $y=2x+k$

에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 4$$



이때 원 $x^2+y^2=25$ 의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=5$ 이므로 직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{25 - 16} = 3 \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

한편, 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots ㉒$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } \frac{|k|}{\sqrt{5}} = 3 \text{이므로 } |k| = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore k^2 = 45$$

답 45

29

$x^2+y^2+(3a-2)x+4ay+a=0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$x^2+y^2-2x+a(3x+4y+1)=0$$

이 등식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x^2+y^2-2x=0, 3x+4y+1=0 \text{이어야 한다.}$$

즉, 주어진 원이 실수 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 두 점 P, Q는 원 $x^2+y^2-2x=0$, 즉 $(x-1)^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y+1=0$ 의 교점이다.

오른쪽 그림과 같이 원

$(x-1)^2+y^2=1$ 의 중심을

C라 하고 점 C(1, 0)에서 직선

$3x+4y+1=0$ 에 내린 수선의

발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

이때 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 반지름의 길이는 $\overline{CP}=1$ 이므로 직각삼각형 CPH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

30

서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O'의 두 교점을 A, B라 하면 직선 AB의 방정식은

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2x-8-(x^2+y^2+x-2y-5) &= 0 \\ \therefore -3x+2y-3 &= 0\end{aligned}$$

또한, 두 원 O, O'의 중심을 각각 O, O'이라 하면

$x^2+y^2-2x-8=0$ 에서 $(x-1)^2+y^2=9$ 이므로

원 O의 중심 O의 좌표는 (1, 0)이고, 반지름의 길이는 3이다.

이때 직선 OO'은 선분 AB를 수직이

등분하므로 선분 AB의 중점을 M이

라 하면

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= (\text{점 O와 직선 AB 사이의 거리}) \\ &= \frac{|-3 \times 1 + 2 \times 0 - 3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

직각삼각형 AOM에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{OM}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{81}{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

이때 $\overline{AB} = 2\overline{AM}$ 이므로 두 원의 공통현의 길이는

$$\begin{aligned}k &= 2 \times \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}} \\ \therefore 13k^2 &= 13 \times \left(\frac{18}{\sqrt{13}}\right)^2 = 324\end{aligned}$$

답 324

다른 풀이

원 O'을 이용하여 구할 수도 있다.

$$x^2+y^2+x-2y-5=0 \text{에서 } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4} \text{이}$$

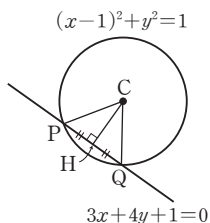
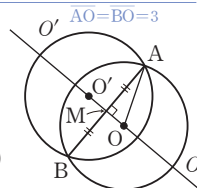
므로 원 O'의 중심 O'의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 이고, 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$ 이다. 즉,

이는 $\frac{5}{2}$ 이다. 즉,

$$\begin{aligned}\overline{O'M} &= (\text{점 O'과 직선 AB 사이의 거리}) \\ &= \frac{\left|-3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \times 1 - 3\right|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}\end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 AO'M에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \sqrt{\overline{AO'}^2 - \overline{O'M}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$



이때 $\overline{AB}=2\overline{AM}$ 이므로 두 원의 공통현의 길이는

$$k=2 \times \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore 13k^2 = 13 \times \left(\frac{18}{\sqrt{13}}\right)^2 = 324$$

31

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + 4kx - 10 + m(x^2 + y^2 - 10x + 6y + 2) = 0$$

$$(m \neq -1) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이라 하면 원 $\textcircled{7}$ 이 원점을 지나므로

$$-10 + 2m = 0 \quad \therefore m = 5$$

또한, 원 $\textcircled{7}$ 이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$8k - 5 - 19m = 0$$

$$8k = 100 \quad (\because m = 5)$$

$$\therefore k = \frac{25}{2}$$

$m = 5, k = \frac{25}{2}$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 50x - 10 + 5(x^2 + y^2 - 10x + 6y + 2) = 0$$

$$6x^2 + 6y^2 + 30y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 5y = 0$$

$$\text{답 } x^2 + y^2 + 5y = 0$$

32

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + 2y - 8 + k(x^2 + y^2 - ax - 4y + 8) = 0 \quad (k \neq -1)$$

$$\cdots \cdots \textcircled{7}$$

이라 하면 원 $\textcircled{7}$ 이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-5 + 5k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하여 정리하면

$$2x^2 + 2y^2 - ax - 2y = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 4}{16}$$

이 원의 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{a^2 + 4}{16} = \frac{5}{2}, a^2 = 36$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

33

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이므로 구하는 원의 중심은 공통현의 중점이다.

이때 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통현을 수직이등분하므로 공통현의 중점은 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 - (x^2 + y^2 - 2y - 9) = 0$$

$$-4x + 2y + 8 = 0$$

$$\therefore 2x - y - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5,$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 10$$

이므로 두 원의 중심 $(2, 0), (0, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1-0}{0-2}(x-2), y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\therefore x + 2y - 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 0$$

즉, 구하는 원의 중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로

$$a = 2, b = 0$$

$$\therefore a + b = 2 + 0 = 2$$

답 2

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.105~106

- | | | |
|--|--|-------------------|
| 07 ③ | 08 $1 - \sqrt{10} < k < 1 + \sqrt{10}$ | 09 $\frac{5}{2}$ |
| 10 22 | 11 52 | |
| 12 $a < -\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 또는 $a > \frac{4\sqrt{5}}{5}$ | 13 -2 | |
| 14 $\frac{9}{5}$ | 15 4 | 16 $\frac{27}{2}$ |
| 18 50 | 17 $3\sqrt{7}$ | |

07

- ㄱ. 원의 방정식 $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky - 2k - 1 = 0$ 에
 $x = -1, y = 0$ 을 대입하면
 $(-1)^2 + 0^2 - 2k \times (-1) - 4k \times 0 - 2k - 1 = 0$
 즉, k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로 주어진 원은 반드시 점 $(-1, 0)$ 을 지난다. (참)
- ㄴ. $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky - 2k - 1 = 0$ 에서
 $(x - k)^2 + (y - 2k)^2 = 5k^2 + 2k + 1$
 즉, 원의 중심의 좌표는 $(k, 2k)$ 이므로 원의 중심은 직선 $y = 2x$ 위에 있다. (참)
- ㄷ. $x^2 + y^2 - 2kx - 4ky - 2k - 1 = 0$ 에 $y = 0$ 을 대입하면
 $x^2 - 2kx - 2k - 1 = 0$
 원과 x 축의 교점의 x 좌표는 이 이차방정식의 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (-2k - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \geq 0$$
 즉, 주어진 원은 x 축과 접하거나 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)
- 따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

08

- $y = 3x - k$ 를 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 에 대입하면
 $x^2 + (3x - k)^2 - 2x - 4(3x - k) + 4 = 0$
 $\therefore 10x^2 - 2(3k + 7)x + k^2 + 4k + 4 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(3k + 7)\}^2 - 10(k^2 + 4k + 4)$$

$$= -k^2 + 2k + 9$$
 이때 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$ 이어야 하므로
 $-k^2 + 2k + 9 > 0$
 $k^2 - 2k - 9 < 0, (k - 1)^2 < 10$
 $-\sqrt{10} < k - 1 < \sqrt{10}$
 $\therefore 1 - \sqrt{10} < k < 1 + \sqrt{10}$

답 $1 - \sqrt{10} < k < 1 + \sqrt{10}$

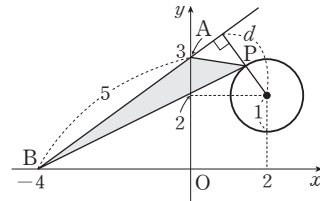
다른 풀이

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 이므로 원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$ 이고, 반지름의 길이는 1이다.
 원의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $y = 3x - k$, 즉 $3x - y - k = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \times 1 - 2 - k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{10}}$$
 이때 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < 1$ 이어야 하므로
 $\frac{|1 - k|}{\sqrt{10}} < 1, |1 - k| < \sqrt{10}$
 $-\sqrt{10} < k - 1 < \sqrt{10}$
 $\therefore 1 - \sqrt{10} < k < 1 + \sqrt{10}$

09

다음 그림과 같이 삼각형 PAB에서 선분 AB의 길이는 $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ 로 일정하므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때, 삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.



직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x - 4y + 12 = 0$$

원의 중심 $(2, 2)$ 와 직선 AB, 즉 $3x - 4y + 12 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 2 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$$

이때 원의 반지름의 길이는 1이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$$2 - 1 = 1$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

10

오른쪽 그림과 같이 점 P(3, 4)를 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 직선은 직선 OP에 수직인 직선이다.

이때 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므

로 직선 l의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 점 P(3, 4)를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$ 인 직선 l의 방정식은

$$y-4 = -\frac{3}{4}(x-3) \quad \therefore 3x+4y-25=0$$

한편, 오른쪽 그림과 같이 원 $(x-7)^2+(y-5)^2=1$ 의 중심을 C라 하고 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 C(7, 5)와 직선 l 사이의 거리는

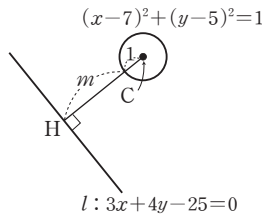
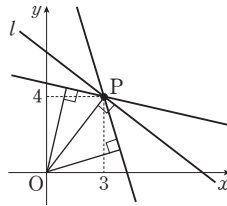
$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \frac{|3 \times 7 + 4 \times 5 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

즉, 원 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m = \overline{CH} - (\text{원의 반지름의 길이})$$

$$= \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m = 10 \times \frac{11}{5} = 22$$



답 22

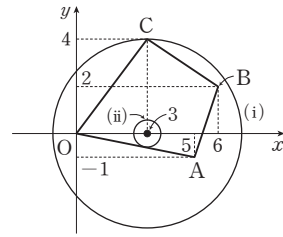
11

$$x^2 + y^2 - 6x + 10 = k \text{라 하면}$$

$$(x-3)^2 + y^2 = k-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 P는 사각형 OABC의 둘레 위의 점이므로 (3, 0)이 될 수 없다. 즉, $k-1 > 0$ 이므로 도형 ㉠은 중심의 좌표가 (3, 0)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k-1}$ 인 원이다.

또한, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 최대일 때 k가 최댓값을 갖고, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 최소일 때 k가 최솟값을 갖는다.



위의 그림에서

(i) 도형 ㉠이 점 C(3, 4)를 지날 때,

$$16 = k-1 \quad \therefore k=17$$

(ii) 도형 ㉠이 원점과 점 A(5, -1)을 지나는 직선에 접할 때, 원점과 점 A(5, -1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{5}x, \text{ 즉 } x+5y=0 \text{ 이므로 원의 중심 (3, 0)과 직선}$$

$$x+5y=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

즉, 도형 ㉠의 반지름의 길이가 $\frac{3}{\sqrt{26}}$ 이므로

$$\sqrt{k-1} = \frac{3}{\sqrt{26}}, k-1 = \frac{9}{26} \quad \therefore k = \frac{35}{26}$$

(i), (ii)에서 $M=17$, $m=\frac{35}{26}$ 이므로

$$M+26m = 17 + 26 \times \frac{35}{26} = 52$$

답 52

12

본문 p.095 한 걸음 더 참고

원 $x^2+y^2=4$ 는 중심의 좌표가 (0, 0), 반지름의 길이가 2이다.

또한, 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$ 은

$$(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 4$$

이므로 중심의 좌표가 $(-a, 2a)$, 반지름의 길이가 2이다.

이때 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5}|a|$$

두 원의 반지름의 길이가 2로 같으므로 두 원이 서로 만나지 않는 경우는 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때뿐이다.

따라서 두 원의 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합보다 커야 하므로

$$\sqrt{5}|a| > 2+2, |a| > \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore a < -\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } a > \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{답 } a < -\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } a > \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

13

$$x^2 + y^2 = 30 \text{에서 } x^2 + y^2 - 30 = 0$$

$$(x - 2a)^2 + y^2 = 14 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 4ax + 4a^2 - 14 = 0$$

이 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 30 - (x^2 + y^2 - 4ax + 4a^2 - 14) = 0$$

$$4ax - 4a^2 - 16 = 0$$

$$\therefore ax - a^2 - 4 = 0$$

이 직선이 점 $(-4, 3)$ 을 지나므로

$$-4a - a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0, (a + 2)^2 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

답 -2

14

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하자.

조건 ㉑에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$, 즉 $2\overline{BP} = \overline{AP}$ 이므로

$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$\text{즉, } 4\{x^2 + (y - 3)^2\} = (x - 3)^2 + y^2 \text{에서}$$

$$4(x^2 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

조건 ㉒에서 두 선분 AP, BP가 서로 수직이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

이때 이 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

즉, 이 원의 방정식은

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

조건 ㉑, ㉒를 만족시키는 점 P는 두 원 ㉑, ㉒의 두 교점이며 이 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 - (x^2 + y^2 - 3x - 3y) = 0$$

$$\therefore 5x - 5y + 9 = 0$$

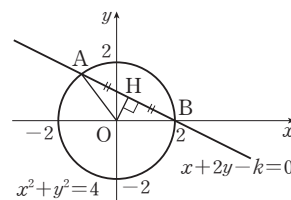
따라서 구하는 y절편은 $\frac{9}{5}$ 이다.

답 $\frac{9}{5}$

15

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면

$$\overline{AB} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$



원의 중심 O에서 직선

$x + 2y - k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 반지름의 길이는 $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ 이므로 직각삼각형 OAH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots \text{㉑}$$

한편, 원의 중심 O(0, 0)과 직선 $x + 2y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|0 + 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } \frac{|k|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

$$|k| = 2 \quad \therefore k^2 = 4$$

답 4

16

원과 직선의 두 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 직선 $x + y - 2 = 0$ 위의 점이므로

$$a + b - 2 = 0 \quad \therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

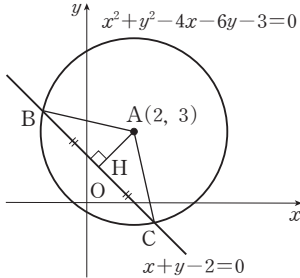
한편, $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

이 원의 중심을 A라 하면 A(2, 3)이고, 반지름의 길이는 4이다.

또한, 다음 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 B, C라 하면 직선 BC의 방정식은 $x+y-2=0$ 이고, 원의 중심 A에서 직선 $x+y-2=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|2+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{23}{2}} = \frac{\sqrt{46}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } r = \frac{\sqrt{46}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}a+b+r^2 &= 2 + \left(\frac{\sqrt{46}}{2}\right)^2 \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{27}{2}$

17

점 C의 좌표는 (3, 3)이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 = 16 \text{에서 } x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$$

이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14) = 0$$

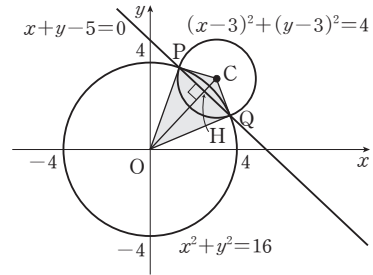
$$6x + 6y - 30 = 0 \quad \therefore x + y - 5 = 0$$

두 원의 중심을 이은 선분과 공통현은 수직으로 만나므로

$$\overline{PQ} \perp \overline{OC}$$

다음 그림과 같이 $\overline{OC}$ 와 $\overline{PQ}$ 의 교점을 H라 하면 $\overline{OH}$ 는 점 O와 직선 PQ, 즉 $x+y-5=0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



직각삼각형 POH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

따라서 사각형 POQC의 넓이는

$$\begin{aligned}2 \times \triangle OCP &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{PH}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{7}\end{aligned}$$

답 $3\sqrt{7}$

18

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = k \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 - k = 0$$

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 + m(x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 - k) = 0$$

(단, $m \neq -1$)

$$\therefore (m+1)x^2 + (m+1)y^2 + (8m+4)x - (4m+6)y$$

$$-km + 20m + 9 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

원 ㉠이 x 축, y 축에 동시에 접하려면

㉠에서 $|(\text{x의 계수})| = |(\text{y의 계수})|$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 8m+4 = -4m-6 \text{ 또는 } 8m+4 = 4m+6 \text{에서}$$

$$m = -\frac{5}{6} \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}$$

따라서 기울기가 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이고, 점 $(2, 2\sqrt{5})$ 를 지나는 접선의 방정식은 $y - 2\sqrt{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}(x - 2)$
 $\therefore y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{12\sqrt{5}}{5}$ $\leftarrow x + \sqrt{5}y = 12$

36

구하는 접선이 직선 $x - 2y + 4 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 에 수직
 이므로 접선의 기울기는 -2 이다. $-\frac{1}{2} \times (-2) = -1$
 이 접선의 방정식을 $y = -2x + k$ (k 는 상수)라 하면 원의 중심 $(1, -3)$ 과 직선 $y = -2x + k$, 즉 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로
 $\frac{|2 \times 1 + (-3) - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3$
 $\frac{|-1 - k|}{\sqrt{5}} = 3, |k + 1| = 3\sqrt{5}, k + 1 = \pm 3\sqrt{5}$
 $\therefore k = -1 \pm 3\sqrt{5}$
 $\therefore y = -2x - 1 \pm 3\sqrt{5}$

답 $y = -2x - 1 \pm 3\sqrt{5}$

다른 풀이

구하는 접선의 방정식을 $y = -2x + k$ (k 는 상수)라 하고
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ 에 대입하면
 $(x - 1)^2 + (-2x + k + 3)^2 = 9$
 $5x^2 - 2(2k + 7)x + k^2 + 6k + 10 = 9$
 $\therefore 5x^2 - 2(2k + 7)x + k^2 + 6k + 1 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = \{-(2k + 7)\}^2 - 5(k^2 + 6k + 1) = 0$
 $k^2 + 2k - 44 = 0 \quad \therefore k = -1 \pm 3\sqrt{5}$
 따라서 구하는 접선의 방정식은
 $y = -2x - 1 \pm 3\sqrt{5}$

37

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는
 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 원 $x^2 + y^2 = 15$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{15}$ 이므로 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{15} \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 2\sqrt{5}$$

이때 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{5}$ 가 x 축, y 축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면

$$A(-2\sqrt{15}, 0), B(0, 2\sqrt{5})$$

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{5}$ 가 x 축, y 축과 만나는 두 점을 각각 C,

D라 하면

$$C(2\sqrt{15}, 0), D(0, -2\sqrt{5})$$

$\therefore \square ADCB$

$$= \frac{1}{2} \times \{2\sqrt{15} - (-2\sqrt{15})\} \times \{2\sqrt{5} - (-2\sqrt{5})\}$$

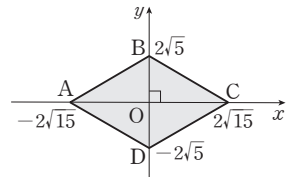
$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{15} \times 4\sqrt{5} = 40\sqrt{3}$$

답 $40\sqrt{3}$

보충 설명

두 대각선이 서로 직교하는
 사각형 ADCB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD}$$



38

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8 \text{에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

원의 중심을 C라 하면 $C(-1, 2)$

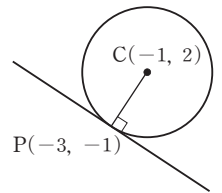
이고, 점 C와 점 P $(-3, -1)$ 을

지나는 직선 CP의 기울기는

$$\frac{-1 - 2}{-3 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

이때 구하는 접선은 직선 CP에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이고 점 P $(-3, -1)$ 을 지나는 접선의 방정식은



$$y - (-1) = -\frac{2}{3}\{x - (-3)\} \quad \therefore 2x + 3y + 9 = 0$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로

$$a+b=2+3=5$$

답 5

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 8 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$ 위의 점 $P(-3, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$(-3+1) \times (x+1) + (-1-2) \times (y-2) = 13$$

$$\therefore 2x + 3y + 9 = 0$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로

$$a+b=2+3=5$$

39

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + a = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5-a$$

즉, 이 원의 중심의 좌표는 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{5-a}$ 이다.

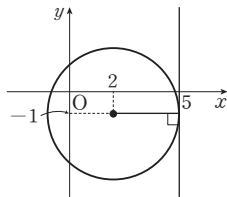
이때 점 $(5, b)$ 에서의 접선이 y 축

과 평행하므로 오른쪽 그림에서

$$2 + \sqrt{5-a} = 5, -1 = b$$

따라서 $a=-4, b=-1$ 이므로

$$ab = (-4) \times (-1) = 4$$



답 4

40

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$$

접선의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 점 $(1, -3)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y - (-3) = m(x-1) \quad \therefore mx - y - m - 3 = 0$$

원의 중심 $(3, -2)$ 와 직선 $mx - y - m - 3 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|3m + 2 - m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$|2m - 1| = \sqrt{m^2 + 1}, 4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1$$

$$3m^2 - 4m = 0, m(3m - 4) = 0$$

$$\therefore m = \frac{4}{3} \quad (\because m > 0)$$

따라서 $p=3, q=4$ 이므로 $p+q=3+4=7$

답 7

다른 풀이

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$(x_1-3)(x-3) + (y_1+2)(y+2) = 1 \quad \cdots \textcircled{A}$$

점점 (x_1, y_1) 이 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ 위에 있으므로

$$(x_1-3)^2 + (y_1+2)^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{B}$$

직선 $\textcircled{A}$ 이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-2(x_1-3) - (y_1+2) = 1$$

$$2x_1 + y_1 - 3 = 0 \quad \therefore y_1 = -2x_1 + 3 \quad \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$(x_1-3)^2 + (-2x_1+5)^2 = 1$$

$$5x_1^2 - 26x_1 + 33 = 0, (x_1-3)(5x_1-11) = 0$$

$$\therefore x_1 = 3 \text{ 또는 } x_1 = \frac{11}{5}$$

이것을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$x_1 = 3 \text{ 일 때, } y_1 = -3$$

$$x_1 = \frac{11}{5} \text{ 일 때, } y_1 = -\frac{7}{5}$$

즉, $\textcircled{A}$ 에서 접선의 방정식은

$$y = -3 \text{ 또는 } 4x - 3y - 13 = 0$$

따라서 기울기가 양수인 접선은 $4x - 3y - 13 = 0$ 이므로 그

$$\text{기울기는 } \frac{4}{3}, \text{ 즉 } p=3, q=4$$

$$\therefore p+q=3+4=7$$

41

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0 \text{에서}$$

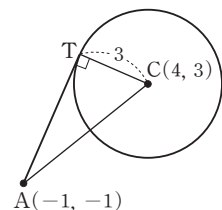
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C라 하면 $\overline{CT} \perp \overline{AT}$ 이므로

$\triangle CTA$ 는 $\angle CTA = 90^\circ$ 인

직각삼각형이다.



이때 $C(4, 3)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\{4 - (-1)\}^2 + \{3 - (-1)\}^2} = \sqrt{41}$$

원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{CT} = 3$$

따라서 직각삼각형 CTA에서

$$\begin{aligned}\overline{AT} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CT}^2} \\ &= \sqrt{41 - 9} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $4\sqrt{2}$

42

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C, 접점을 T라 하면

$$\overline{PT} = 3\sqrt{7}$$

$\overline{CT} \perp \overline{PT}$ 이므로 $\triangle CTP$ 는

$\angle CTP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 $C(3, 2)$ 이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 45} \quad \cdots \text{㉠}$$

원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{CT} = 3$$

따라서 직각삼각형 CTP에서

$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \sqrt{\overline{CT}^2 + \overline{PT}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (3\sqrt{7})^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \quad \cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\sqrt{a^2 - 6a + 45} = 6\sqrt{2}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$a^2 - 6a + 45 = 72, \quad a^2 - 6a - 27 = 0$$

$$(a+3)(a-9) = 0 \quad \therefore a = 9 \quad (\because a > 0)$$

답 9

43

점 $A(0, 6)$ 과 원

$$x^2 + y^2 = 16 \text{은 오른쪽}$$

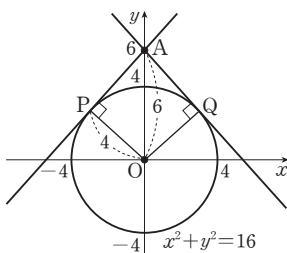
그림과 같으므로

$$\overline{AO} = 6, \quad \overline{OP} = 4$$

이때 $\triangle APO$ 는

$\angle APO = 90^\circ$ 인

직각삼각형이므로



$$\overline{AP} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

즉, 삼각형 APO의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{OP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \square APOQ = 2 \times \triangle APO$$

$$= 2 \times 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

답 $8\sqrt{5}$

44

두 원 $C: x^2 + (y-2)^2 = 4$, $C': (x-4)^2 + (y+4)^2 = 9$ 의

반지름의 길이는 각각 2, 3이고 중심을 각각 C, C'이라 하면

$$C(0, 2), C'(4, -4)$$

두 원의 중심 사이의 거리는

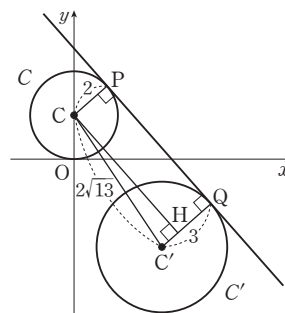
$$\overline{CC'} = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13} > 2+3$$

이므로 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

다음 그림과 같이 점 C에서 선분 C'Q에 내린 수선의 발을

H라 하면 $\overline{CP} = \overline{HQ}$ 이므로

$$\overline{C'H} = \overline{C'Q} - \overline{HQ} = 3 - 2 = 1$$



$\triangle CC'H$ 는 $\angle C'HC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \overline{CH} = \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{C'H}^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 1^2} = \sqrt{51}$$

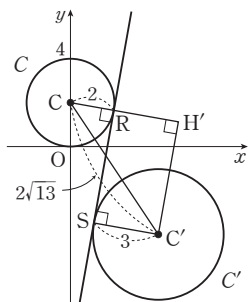
한편, 다음 그림과 같이 점 C'에서 직선 CR에 내린 수선의

발을 H'이라 하면 $\overline{C'S} = \overline{H'R}$ 이므로

$$\overline{CH'} = \overline{CR} + \overline{H'R}$$

$$= \overline{CR} + \overline{C'S}$$

$$= 2 + 3 = 5$$



$\triangle CC'H'$ 은 $\angle C'H'C=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{RS} &= \overline{H'C'} = \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{CH'}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 5^2} = 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 $\overline{PQ} = \sqrt{51}, \overline{RS} = 3\sqrt{3}$

45

중심의 좌표가 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2 \quad \cdots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $A(2, 5)$ 를 지나므로

$$(2-a)^2 + (5-b)^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 - 4a - 10b + 29 = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

또한, 원 $\textcircled{A}$ 이 점 $B(4, 1)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 - 8a - 2b + 17 = 0 \quad \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 에서 $2b = a^2 - 8a + 17$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하여 정리하면

$$4a^2 - 36a + 56 = 0, \quad a^2 - 9a + 14 = 0$$

$$(a-2)(a-7) = 0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=7$$

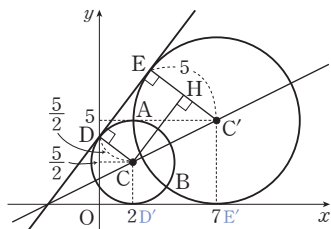
$\textcircled{B}$ 또는 $\textcircled{C}$ 에서

$$a=2 \text{ 일 때 } b=\frac{5}{2}, \quad a=7 \text{ 일 때 } b=5$$

즉, 두 점 A, B 에서 만나는 서로 다른 두 원의 중심을 각각

$C(2, \frac{5}{2}), C'(7, 5)$ 라 하면 각 원과 x 축 위에 있지 않은

접선의 접점 D, E 는 다음 그림과 같다.



두 원의 중심 사이의 거리는

$$\overline{CC'} = \sqrt{(7-2)^2 + \left(5-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

점 C 에서 선분 EC' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\triangle CCH'$ 는 $\angle C'HC=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{CH} = \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{C'H'}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(5-\frac{5}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$= 5 \quad \leftarrow \text{두 원의 중심 } C, C' \text{에서 } x \text{축에 내린 수선의 발을 각각 } D', E' \text{이라 하면}$$

$$\overline{DE} = \overline{D'E'} = 7 - 2 = 5$$

답 5

STEP 1

개념 마무리

본문 p.117

19 10 20 $\left(0, \frac{2-2\sqrt{2}}{3}\right)$

21 $\frac{1}{3} < a < 1$ 22 4 23 $\frac{20}{3}$

24 -14

19

구하는 접선은 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$ 에 수직이

므로 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

또한, 원 $x^2+y^2=5$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{5} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$$

따라서 두 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(5, 0), (-5, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |5 - (-5)| = 10$$

답 10

다른 풀이 1

접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식을

$$y = -\frac{1}{2}x + k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = -\frac{1}{2}x + k$, 즉

$$x+2y-2k=0 \text{ 사이의 거리는 반지름의 길이 } \sqrt{5} \text{와 같으므로}$$

$$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}, \quad |-2k|=5$$

$$2k=\pm 5 \quad \therefore k=\pm \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$$

다른 풀이 2

접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식을

$$y=-\frac{1}{2}x+k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하고}$$

$$x^2+y^2=5 \text{에 대입하면 } x^2+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=5$$

$$\therefore \frac{5}{4}x^2-kx+k^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-k)^2-4 \times \frac{5}{4} \times (k^2-5)=0$$

$$-4k^2+25=0, \quad k^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore k=\pm \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$$

20

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $A(-1, 1)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$-x+y=2 \quad \therefore l: x-y+2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

같은 방법으로 원 위의 점 $B(1, 1)$, $C(0, -\sqrt{2})$ 에서의 접선 m , n 의 방정식은 각각

$$x+y=2 \quad \therefore m: x+y-2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$0 \times x - \sqrt{2}y = 2 \quad \therefore n: y + \sqrt{2} = 0$$

두 직선 l , m 의 교점이 P 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x=0, y=2 \quad \therefore P(0, 2)$$

같은 방법으로 두 직선 m , n 의 교점 Q , 두 직선 n , l 의 교점 R 의 좌표를 각각 구하면

$$Q(2+\sqrt{2}, -\sqrt{2}), R(-2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

(4)

따라서 삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}}{3}, \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$\therefore \left(0, \frac{2-2\sqrt{2}}{3} \right)$$

(4)

$$\text{답 } \left(0, \frac{2-2\sqrt{2}}{3} \right)$$

단계	채점 기준	배점
(가)	세 접선 l , m , n 의 방정식을 각각 구한 경우	40%
(나)	세 점 P , Q , R 의 좌표를 각각 구한 경우	40%
(다)	삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표를 구한 경우	20%

21

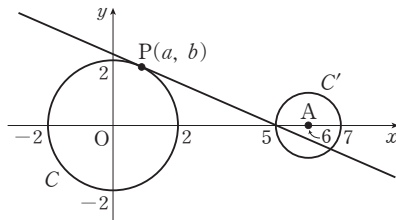
원 C 의 중심이 $O(0, 0)$, 반지름의 길이가 2이므로

$$C: x^2+y^2=4$$

원 C' 의 중심이 $A(6, 0)$, 반지름의 길이가 1이므로

$$C': (x-6)^2+y^2=1$$

원 C 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $b>0$ 일 때, 점 P 에서의 접선이 원 C' 과 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



원 $C: x^2+y^2=4$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=4 \quad \therefore ax+by-4=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $P(a, b)$ 는 원 $C: x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

직선 $\textcircled{1}$ 과 원 $C': (x-6)^2+y^2=1$ 이 두 점에서 만나려면 원 C' 의 중심 $A(6, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 원 C' 의 반지름의 길이보다 작아야 한다.

$$\text{즉, } \frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1 \text{에서}$$

$$\frac{|6a-4|}{2} < 1 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$|6a-4| < 2, \quad -2 < 6a-4 < 2$$

$$2 < 6a < 6 \quad \therefore \frac{1}{3} < a < 1$$

$$\text{답 } \frac{1}{3} < a < 1$$

22

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(0, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y-2=mx, \text{ 즉 } mx-y+2=0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|0-0+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

$$2=\sqrt{2m^2+2}, 2m^2+2=4$$

$$m^2=1 \quad \therefore m=\pm 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$x-y+2=0 \text{ 또는 } -x-y+2=0$$

직선 $x-y+2=0$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$x-0+2=0 \quad \therefore x=-2$$

직선 $-x-y+2=0$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$-x-0+2=0 \quad \therefore x=2$$

따라서 $k=-2$ 또는 $k=2$ 이므로

$$k^2=4$$

답 4

23

직선 $x+ay+b=0$ 이 원 $x^2+y^2=16$ 의 접선이므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x+ay+b=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 4와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|0+0+b|}{\sqrt{1^2+a^2}}=4 \text{에서}$$

$$|b|=4\sqrt{1+a^2}$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$b^2=16a^2+16 \quad \dots\dots ㉠$$

또한, 직선 $x+ay+b=0$ 이 점 $(-4, -1)$ 을 지나므로

$$-4-a+b=0 \quad \therefore b=a+4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(a+4)^2=16a^2+16$$

$$15a^2-8a=0, a(15a-8)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=\frac{8}{15}$$

$a=0$ 이면 ㉡에서 $b=4$ 이므로

접선의 방정식은 $x+4=0$, 즉 $x=-4$ 이다.

이때 원 $x^2+y^2=16$ 과 직선 $x=-4$ 의 접점의 좌표는 $(-4, 0)$ 이므로 제3사분면 위의 점이 아니다.

$$\text{따라서 } a=\frac{8}{15} \text{ 이므로 } b=\frac{68}{15} \quad (\because ㉡) \leftarrow P\left(-\frac{60}{17}, -\frac{32}{17}\right)$$

$$\therefore 4a+b=4 \times \frac{8}{15} + \frac{68}{15} = \frac{20}{3}$$

답 $\frac{20}{3}$

24

선분 AB는 두 원의 공통현이므로 두 원의 중심을 지나는 직선은 선분 AB를 수직이등분한다.

이때 직선 AB의 기울기는

$$\frac{11-7}{7-3}=1$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{7+11}{2}\right), \text{ 즉 } (5, 9)$$

즉, 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1 이고,

점 $(5, 9)$ 를 지나므로 직선의 방정식은

$$y-9=-(x-5) \quad \therefore x+y-14=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또한, 서로 다른 두 원이 모두 y 축에 접하므로 두 공통외접선

중 하나는 y 축이다. 즉, $x=0 \quad \dots\dots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $y=14$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(0, 14)$ 이므로 $a=0, b=14$

$$\therefore a-b=0-14=-14$$

답 -14

STEP

2

개념 마무리

본문 p.118

1 10시간

2 10

3 24π

4 $4\sqrt{2}$

5 $\frac{64}{5}$

6 -4

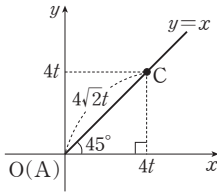
1

A 지점을 원점, 서쪽에서 동쪽으로의 방향을 x 축의 양의 방향, 남쪽에서 북쪽으로의 방향을 y 축의 양의 방향, 1km를

1로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 ㉞에서 태풍의 중심은 A 지점
으로부터 북동쪽 방향을 향해 움직이므로 직선 $y=x$ 위에 있다.

또한, 태풍이 시속 $4\sqrt{2}$ km로 이동하므로 발생한 지 t 시간 후의 태풍의 중심을 C라 하면 $C(4t, 4t)$ 이다.



조건 ㉞에서 완전한 원 모양의 태풍의 반지름의 길이는 시속 4 km로 증가하므로 발생한 지 t 시간 후의 태풍의 반지름의 길이는 $4t$ km이다.

즉, 태풍이 발생한 지 t 시간 후의 태풍의 가장자리를 나타내는 원의 방정식은

$$(x-4t)^2 + (y-4t)^2 = (4t)^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, B 지점을 좌표평면 위에 나타내면 점 $(40, 80)$ 이고 B 지점이 태풍의 영향권에 처음으로 들어오는 순간은 점 $(40, 80)$ 이 원 $\textcircled{7}$ 위에 있을 때이다.

$x=40, y=80$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$(40-4t)^2 + (80-4t)^2 = (4t)^2$$

$$t^2 - 60t + 500 = 0, (t-10)(t-50) = 0$$

$$\therefore t=10 \text{ 또는 } t=50$$

따라서 태풍이 발생한 시각으로부터 B 지점이 태풍의 영향권에 처음으로 들어오는 데까지 10시간이 걸린다.

답 10시간

2

세 점 $A(1, 3), B(2, 6), C(4, 2)$ 를 지나는 원의 중심을 $Q(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AQ} = \overline{BQ} = \overline{CQ} = (\text{원의 반지름의 길이})$$

$$\text{이때 } \overline{AQ}^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2,$$

$$\overline{BQ}^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2,$$

$$\overline{CQ}^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2 \text{에서}$$

$$\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2 + (b-3)^2 = (a-2)^2 + (b-6)^2$$

$$\therefore a+3b=15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BQ}^2 = \overline{CQ}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-6)^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2$$

$$\therefore a-2b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, b=4$

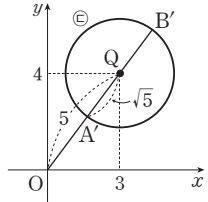
즉, 원의 중심이 $Q(3, 4)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원은

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

오른쪽 그림과 같이 원 $\textcircled{3}$ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리는 점 P의 위치가 각각 점 A'일 때 최솟값 $5-\sqrt{5}$, 점 B'일 때 최댓값 $5+\sqrt{5}$ 를 갖는다.



$$\therefore 5-\sqrt{5} \leq \overline{OP} \leq 5+\sqrt{5}$$

이때 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 정수인 $\overline{OP}$ 의 값으로 가능한 것은 3, 4, 5, 6, 7의 5개이고, 원 $\textcircled{3}$ 은 지름 A'B'에 대하여 대칭이므로 원 위의 점 중 이를 만족시키는 점 P의 개수는

$$2 \times 5 = 10$$

답 10

3

구하는 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)이라 하면 조건 ㉞에서 이 원은 x 축, y 축에 동시에 접하므로 원의 중심의 위치에 따라 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 (r, r) 이고, 조건 ㉞에서 점 (r, r) 은

$$\text{곡선 } y=x^2-3x-1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$r=r^2-3r-1, r^2-4r-1=0$$

$$\therefore r=2+\sqrt{5} \quad (\because r>0)$$

(ii) 원의 중심이 제2사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이고, 조건 ㉞에서

$$\text{점 } (-r, r) \text{은 곡선 } y=x^2-3x-1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$r=r^2+3r-1, r^2+2r-1=0$$

$$\therefore r=-1+\sqrt{2} \quad (\because r>0)$$

(iii) 원의 중심이 제3사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(-r, -r)$ 이고, 조건 ㉞에서

$$\text{점 } (-r, -r) \text{은 곡선 } y=x^2-3x-1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$-r=r^2+3r-1, r^2+4r-1=0$$

$$\therefore r=-2+\sqrt{5} \quad (\because r>0)$$

(iv) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이고, 조건 ㉞에서

점 $(r, -r)$ 은 곡선 $y = x^2 - 3x - 1$ 위의 점이므로

$$-r = r^2 - 3r - 1, r^2 - 2r - 1 = 0$$

$$\therefore r = 1 + \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

(i)~(iv)에서 모든 원의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} & \pi(2 + \sqrt{5})^2 + \pi(-1 + \sqrt{2})^2 + \pi(-2 + \sqrt{5})^2 + \pi(1 + \sqrt{2})^2 \\ &= \{(9 + 4\sqrt{5}) + (3 - 2\sqrt{2}) + (9 - 4\sqrt{5}) + (3 + 2\sqrt{2})\}\pi \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

답 24π

4

주어진 원의 중심의 좌표를 (a, b) , 반지름의 길이를 r ($r > 0$)

이라 하면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

이때 이 원이

점 $A(0, 2)$ 를 지나므로

$$a^2 + (2 - b)^2 = r^2 \quad \cdots \text{㉠}$$

점 $B(4, -2)$ 도 지나므로

$$(4 - a)^2 + (-2 - b)^2 = r^2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a^2 + (2 - b)^2 = (4 - a)^2 + (-2 - b)^2$$

$$-4b + 4 = -8a + 4b + 20$$

$$8a - 8b = 16, a - b = 2$$

$$\therefore b = a - 2 \quad \cdots \text{㉢}$$

한편, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 에서 $y = 0$ 을 대입하면

$$(x - a)^2 + b^2 = r^2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

이때 두 점 A, B를 지나는 원이 x 축과 만나는 두 점 P, Q의

x 좌표를 각각 α, β 라 하면 이차방정식

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로 이차방정}$$

식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = a^2 + b^2 - r^2$$

$$\therefore \overline{PQ} = |\beta - \alpha| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{4a^2 - 4(a^2 + b^2 - r^2)}$$

$$= 2\sqrt{r^2 - b^2} = 2\sqrt{a^2 - 4b + 4} \quad (\because \text{㉢})$$

$$= 2\sqrt{a^2 - 4(a - 2) + 4} \quad (\because \text{㉢})$$

$$= 2\sqrt{(a - 2)^2 + 8}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

다른 풀이

두 점 $A(0, 2), B(4, -2)$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+(-2)}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 0)$$

즉, 두 점 A, B는 x 축 위의 점

$(2, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

두 점 A, B를 지나는 원 중에

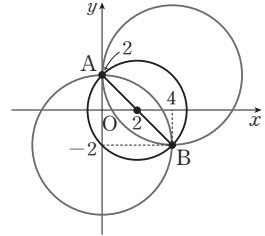
서 x 축에 의해 생기는 현의 길

이가 가장 짧은 것은 $\overline{AB}$ 를

지름으로 하는 원이므로

$\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-2)^2} = 4\sqrt{2}$$



5

점 $A(2, 6)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 8$ 에 접선을 그었을 때의 접점의

좌표를 (a, b) 라 하면 접점은 원 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 8 \quad \cdots \text{㉠}$$

또한, 접선의 방정식은 $ax + by = 8$ 이고, 이 직선이 점

$A(2, 6)$ 을 지나므로

$$2a + 6b = 8, a + 3b = 4$$

$$\therefore a = 4 - 3b \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(4 - 3b)^2 + b^2 = 8, 10b^2 - 24b + 8 = 0$$

$$5b^2 - 12b + 4 = 0, (b - 2)(5b - 2) = 0$$

$$\therefore b = \frac{2}{5} \text{ 또는 } b = 2$$

㉡에서 $b = \frac{2}{5}$ 일 때 $a = \frac{14}{5}$, $b = 2$ 일 때 $a = -2$ 이므로

$B(-2, 2), C\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 라 하자.

두 점 $A(2, 6), B(-2, 2)$

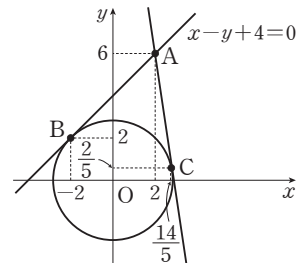
를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 6 = \frac{2-6}{-2-2}(x-2)$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

점 $C\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 와 직선

$x - y + 4 = 0$ 사이의 거리는



$$\frac{\left| \frac{14}{5} - \frac{2}{5} + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{32}{5\sqrt{2}}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \frac{32}{5\sqrt{2}} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{(2+2)^2 + (6-2)^2} \times \frac{32}{5\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{32}{5\sqrt{2}} = \frac{64}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{64}{5}$

6

$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 의 중심의 좌표는 $(2, -4)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

$$\frac{y-2}{x+2} = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$y-2 = k(x+2) \quad \therefore y = k(x+2) + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, 직선 $\textcircled{2}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 2)$ 를 지나고 원 위의 한 점을 지나는 직선이다.

이때 k 의 값은 직선 $\textcircled{2}$ 의 기울기
이므로 오른쪽 그림과 같이 직선
 $\textcircled{2}$ 이 원 $\textcircled{1}$ 에 접할 때 최댓값 또
는 최솟값을 갖는다.

직선 $\textcircled{2}$ 이 원 $\textcircled{1}$ 에 접할 때 원 $\textcircled{1}$
의 중심 $(2, -4)$ 와 직선 $\textcircled{2}$ 사이
의 거리가 원의 반지름의 길이 2
와 같으므로

$$\frac{|2k+4+2k+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \frac{|4k+6|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$$

$$|4k+6| = 2\sqrt{k^2+1}, |2k+3| = \sqrt{k^2+1}$$

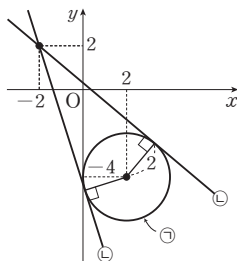
양변을 제곱하여 정리하면

$$3k^2 + 12k + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이때 직선 $\textcircled{2}$ 의 기울기 k 의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 합은
이차방정식 $\textcircled{3}$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계
에 의하여

$$M+m = -\frac{12}{3} = -4$$

답 -4



04. 도형의 이동

1 평행이동

기본 + 필수연습

본문 pp.122-125

01 (1) $(-3, 1)$ (2) $(-6, 14)$

02 (1) $4x-9y+50=0$ (2) $y=x^2-6x-6$

03 (1) $(-8, 5)$ (2) $(-4, 1)$

04 10

05 4

06 4

07 1

08 -8

09 (1) 6 (2) 10

10 1

01

(1) 점 $(-10, 5)$ 를 x 축의 방향으로 7만큼, y 축의 방향으로
-4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-10+7, 5-4), \text{ 즉 } (-3, 1)$$

(2) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-2, y+6)$ 에 의하여

점 $(-4, 8)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-4-2, 8+6), \text{ 즉 } (-6, 14)$$

답 (1) $(-3, 1)$ (2) $(-6, 14)$

02

(1) 직선 $4x-9y-3=0$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의
방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$4(x+2)-9(y-5)-3=0$$

$$\therefore 4x-9y+50=0$$

(2) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+1, y-4)$ 는 x 축의 방향으로
1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동하는 것이므로
구하는 포물선의 방정식은

$$y+4=(x-1)^2-4(x-1)-7$$

$$\therefore y=x^2-6x-6$$

답 (1) $4x-9y+50=0$ (2) $y=x^2-6x-6$

다른 풀이

(2) $y=x^2-4x-7=(x-2)^2-11$ 이므로 이 포물선을 x 축
의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한
포물선의 방정식은

$$y+4=\{(x-1)-2\}^2-11$$

$$=(x-3)^2-11=x^2-6x-2$$

$$\therefore y=x^2-6x-6$$

03

- (1) 점 $(-2, 6)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(10, -3)$ 이라 하면
 $-2+a=10, 6+b=-3 \quad \therefore a=12, b=-9$
 즉, 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 12만큼, y 축의 방향으로 -9 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 (x, y) 가 옮겨지는 점의 좌표는
 $(x+12, y-9)$
 이 점이 점 $(4, -4)$ 와 일치하므로
 $x+12=4, y-9=-4$
 $\therefore x=-8, y=5$
 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-8, 5)$ 이다.
- (2) 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-3, y+4)$ 는 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 점 $A(x, y)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는 $(x-3, y+4)$
 이 점이 점 $(-7, 5)$ 와 일치하므로
 $x-3=-7, y+4=5$
 $\therefore x=-4, y=1$
 따라서 점 A 의 좌표는 $(-4, 1)$ 이다.
- 답 (1) $(-8, 5)$ (2) $(-4, 1)$

다른 풀이

- (1) 구하는 점은 점 $(10, -3)$ 을 점 $(-2, 6)$ 으로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(4, -4)$ 가 옮겨지는 점이다.
 점 $(10, -3)$ 을 점 $(-2, 6)$ 으로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 -12 만큼, y 축의 방향으로 9 만큼 평행이동하는 것이므로 구하는 점의 좌표는
 $(4-12, -4+9)$, 즉 $(-8, 5)$

04

- 점 $(a, 3)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 $b-1$ 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(a-3, 3+(b-1))$, 즉 $(a-3, b+2)$
 이 점이 점 $(3, 6)$ 과 일치하므로
 $a-3=3, b+2=6$
 $\therefore a=6, b=4$
 $\therefore a+b=6+4=10$

답 10

05

- 점 $(1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼, y 축의 방향으로 $3p$ 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(1-p, -2+3p)$
 이 점이 직선 $y=-2x+4$ 위에 있으므로
 $-2+3p=-2(1-p)+4$
 $-2+3p=2p+2$
 $\therefore p=4$

답 4

06

- 점 $(2, -1)$ 을 점 $(3, -4)$ 로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 직선 $3x+ay+b=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은
 $3(x-1)+a(y+3)+b=0$
 $\therefore 3x+ay+3a+b-3=0$
 이 직선이 직선 $3x+2y+5=0$ 과 일치하므로
 $a=2, 3a+b-3=5$
 $\therefore a=2, b=2$
 $\therefore a+b=2+2=4$

답 4

07

- 직선 $y=kx+4$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+3=k(x-2)+4$
 $\therefore y=kx-2k+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이때 원 $x^2-8x+y^2-6y+24=0$, 즉
 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(4, 3)$ 이고, 직선
 $\textcircled{1}$ 이 이 원의 중심을 지나므로
 $3=4k-2k+1, 2k=2$
 $\therefore k=1$

답 1

08

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-4, y+6)$ 은 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $4x+2y+k=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은

$$4(x+4)+2(y-6)+k=0$$

$$\therefore 4x+2y+k+4=0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2+y^2=20$ 과 한 점에서 만나므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|0+0+k+4|}{\sqrt{4^2+2^2}}=2\sqrt{5} \text{에서 } \frac{|k+4|}{2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$|k+4|=20, k+4=\pm 20$$

$$\therefore k=-24 \text{ 또는 } k=16$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-24+16=-8$$

답 -8

09

$$(1) x^2+y^2+2x-4y-3=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=8$$

이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\{(x-a)+1\}^2+\{(y-b)-2\}^2=8$$

$$\therefore (x-a+1)^2+(y-b-2)^2=8$$

이 원이 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=c$ 와 일치하므로

$$-a+1=-3, -b-2=4, 8=c$$

따라서 $a=4, b=-6, c=8$ 이므로

$$a+b+c=4+(-6)+8=6$$

$$(2) \text{포물선 } y=-2x^2+4x-7 \text{을 } x \text{축의 방향으로 } a \text{만큼, } y \text{축}$$

의 방향으로 b 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-b=-2(x-a)^2+4(x-a)-7$$

$$\therefore y=-2x^2+(4a+4)x-2a^2-4a+b-7$$

이 포물선이 포물선 $y=-2x^2-4x+5$ 와 일치하므로

$$4a+4=-4, -2a^2-4a+b-7=5$$

따라서 $a=-2, b=12$ 이므로

$$a+b=-2+12=10$$

답 (1) 6 (2) 10

★다른 풀이

$$(1) \text{원 } x^2+y^2+2x-4y-3=0, \text{ 즉 } (x+1)^2+(y-2)^2=8$$

의 중심의 좌표는 $(-1, 2)$ 이고 원

$$(x-3)^2+(y+4)^2=c \text{의 중심의 좌표는 } (3, -4) \text{이다.}$$

즉, 주어진 평행이동에 의하여 점 $(-1, 2)$ 가 점 $(3, -4)$

로 옮겨졌으므로 $a=4, b=-6$

또한, 원은 평행이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$$c=8$$

$$\therefore a+b+c=4+(-6)+8=6$$

$$(2) y=-2x^2+4x-7=-2(x-1)^2-5$$

이므로 포물선 $y=-2x^2+4x-7$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(1, -5) \text{이고}$$

$$y=-2x^2-4x+5=-2(x+1)^2+7$$

이므로 포물선 $y=-2x^2-4x+5$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-1, 7) \text{이다.}$$

즉, 주어진 평행이동에 의하여 점 $(1, -5)$ 가 점 $(-1, 7)$

로 옮겨졌으므로 $a=-2, b=12$

$$\therefore a+b=-2+12=10$$

10

$$x^2+y^2-8x+10y+37=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=4$$

원 $(x-4)^2+(y+5)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\{(x-a)-4\}^2+\{(y-b)+5\}^2=4$$

$$\therefore \{x-(a+4)\}^2+\{y-(b-5)\}^2=4$$

이 원의 중심의 좌표는 $(a+4, b-5)$ 이고 원의 중심이

제2사분면 위에 있으므로

$$a+4<0, b-5>0$$

$$\therefore a<-4, b>5 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

또한, 평행이동한 원이 x 축, y 축에 동시에 접하였으므로 원

의 중심의 x 좌표, y 좌표의 절댓값과 원의 반지름의 길이는 같다.

$$\text{즉, } |a+4|=|b-5|=2 \text{에서}$$

$$-(a+4)=b-5=2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore a=-6, b=7$$

$$\therefore a+b=-6+7=1$$

답 1

01 (10, -2)	02 6	03 16
04 1	05 -2	06 $\frac{3}{2}$

01

점 A(-3, 2a-1)을 점 A'(2, 7)로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2a+8만큼 평행이동하는 것이고, 점 B(b, 5)를 점 B'(5, 3)으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -b+5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.

두 평행이동이 일치하므로

$$5 = -b + 5, -2a + 8 = -2 \quad \therefore a = 5, b = 0$$

따라서 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이므로 점 (5, 0)이 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(5+5, 0-2), \text{ 즉 } (10, -2)$$

답 (10, -2)

02

점 A(6, -2)를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점 B는

$$B(6+6, -2+a), \text{ 즉 } B(12, -2+a)$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{2} \overline{OB} \text{에서 } 2\overline{OA} = \overline{OB} \text{이므로}$$

$$2\sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{12^2 + (-2+a)^2}$$

양변을 제곱하면

$$4 \times \{6^2 + (-2)^2\} = 12^2 + (-2+a)^2$$

$$160 = 144 + 4 - 4a + a^2$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

03

직선 $y = ax + b$ 를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y + 1 = a(x - 2) + b \quad \therefore y = ax - 2a + b - 1$$

이 직선과 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 이 서로 수직이므로

$$a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \leftarrow \text{수직인 두 직선의 기울기의 곱은 } -1 \text{이다.}$$

$$\therefore a = 2$$

또한, 직선 $y = 2x + b - 5$ 와 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 이 y축 위의

점에서 만나므로 두 직선의 y절편이 같아야 한다.

$$\text{즉, } b - 5 = 3 \text{에서 } b = 8$$

$$\therefore ab = 2 \times 8 = 16$$

답 16

04

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 ①의 중심 (-1, -2)를 원 ②의 중심 (-4, -1)로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.

즉, 이 평행이동에 의하여 직선 $l: 3x + 4y - 1 = 0$ 이 옮겨지는 직선 l' 의 방정식은

$$3(x+3) + 4(y-1) - 1 = 0$$

$$\therefore l': 3x + 4y + 4 = 0$$

평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l' 위의 한 점

(0, -1)과 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 0 + 4 \times (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

답 1

05

원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

이 원에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을

$y=x+k$ (k 는 상수)라 하자.

원의 중심 (3, 2)와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|3-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

$$|k+1|=2\sqrt{2} \quad \therefore k=-1\pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x-y-1+2\sqrt{2}=0 \text{ 또는 } x-y-1-2\sqrt{2}=0$$

따라서 $a=-1+2\sqrt{2}$, $b=-1-2\sqrt{2}$ 또는 $a=-1-2\sqrt{2}$, $b=-1+2\sqrt{2}$ 이므로

$$a+b=-2$$

답 -2

다른 풀이

원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 1인 두 직선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 평행이동한 원에 접하는 두 직선 $x-y+a=0$, $x-y+b=0$ 과 일치한다.

원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=1 \times x \pm \sqrt{4 \times \sqrt{1^2+1}} \quad \leftarrow \text{본문 p.107 개념08 참고}$$

$$\therefore y=x+2\sqrt{2}, y=x-2\sqrt{2}$$

이 두 직선을 각각 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=(x-3)+2\sqrt{2}, y-2=(x-3)-2\sqrt{2}$$

$$\therefore y=x-1+2\sqrt{2}, y=x-1-2\sqrt{2}$$

따라서 $a=-1+2\sqrt{2}$, $b=-1-2\sqrt{2}$ 또는 $a=-1-2\sqrt{2}$, $b=-1+2\sqrt{2}$ 이므로

$$a+b=-2$$

06

$$f(x)=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$$

이므로 이차함수 $y=2(x-2)^2-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동하면

$$y-2a=2\{(x-a)-2\}^2-3$$

$$\therefore y=2(x-a-2)^2+2a-3$$

즉, 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a+2, 2a-3)$ 이고, 이 그래프가 x 축에 접하려면 꼭짓점의 y 좌표가 0이어야 하므로

$$2a-3=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2a$ 만큼 평행이동하면

$$y-2a=2(x-a)^2-8(x-a)+5$$

$$\therefore y=2x^2-4(a+2)x+2a^2+10a+5$$

이 이차함수의 그래프가 x 축에 접하므로 x 에 대한 이차방정식 $2x^2-4(a+2)x+2a^2+10a+5=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D=0$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4}=4(a+2)^2-2(2a^2+10a+5)=0$$

$$-4a+6=0, 4a=6$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

2 대칭이동

기본 + 필수연습

본문 pp.131~139

11 (1) $(-10, -5)$ (2) $(10, 5)$ (3) $(10, -5)$
(4) $(-5, 10)$

12 (1) $x^2+y^2+4x-2y-6=0$
(2) $x^2+y^2-4x+2y-6=0$
(3) $x^2+y^2-4x-2y-6=0$
(4) $x^2+y^2-2x-4y-6=0$

13 $y=x+12$

14 $x-2y+2=0$

15 (1) -2 (2) $5, 9$

16 -6

17 (1) 3 (2) 2

18 80

19 $6x-2y+15=0$

20 -5

21 $3x-2y+16=0$

22 풀이 참조

23 (1) 7 (2) 35

24 $-\frac{1}{2}$

25 (1) 11 (2) 29

26 -14 27 $\sqrt{10}$

28 $7\sqrt{2}$ 29 $\frac{27\sqrt{2}}{40}$

11

(1) x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 y 좌표의 부호만 바뀌므로

$$(-10, -5)$$

(2) y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x 좌표의 부호만 바뀌므로

$$(10, 5)$$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x 좌표, y 좌표의 부호가 각각 바뀌므로

$$(10, -5)$$

(4) 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x 좌표, y 좌표가 서로 바뀌면서 부호도 각각 바뀌므로

$$(-5, 10)$$

답 (1) $(-10, -5)$ (2) $(10, 5)$

(3) $(10, -5)$ (4) $(-5, 10)$

12

(1) x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$x^2 + (-y)^2 + 4x + 2 \times (-y) - 6 = 0, \text{ 즉}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0 \text{이다.}$$

(2) y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

x 대신 $-x$ 를 대입하면

$$(-x)^2 + y^2 + 4 \times (-x) + 2y - 6 = 0, \text{ 즉}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0 \text{이다.}$$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

x 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$(-x)^2 + (-y)^2 + 4 \times (-x) + 2 \times (-y) - 6 = 0, \text{ 즉}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 6 = 0 \text{이다.}$$

(4) 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

x 대신 $-y$, y 대신 $-x$ 를 대입하면

$$(-y)^2 + (-x)^2 + 4 \times (-y) + 2 \times (-x) - 6 = 0, \text{ 즉}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 6 = 0 \text{이다.}$$

답 (1) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$

(3) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 6 = 0$

(4) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 6 = 0$

13

직선 $y=x-2$ 위의 두 점

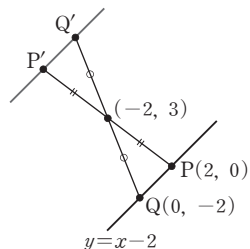
$(2, 0)$, $(0, -2)$ 를 각각 P,

Q라 하고, 두 점 P, Q를 점

$(-2, 3)$ 에 대하여 대칭이

동한 점을 각각 $P'(a, b)$,

$Q'(c, d)$ 라 하자.



두 선분 PP' , QQ' 의 중점이 모두 점 $(-2, 3)$ 이므로

$$\frac{2+a}{2} = -2, \frac{0+b}{2} = 3 \quad \therefore a = -6, b = 6$$

$$\frac{0+c}{2} = -2, \frac{-2+d}{2} = 3 \quad \therefore c = -4, d = 8$$

$$\therefore P'(-6, 6), Q'(-4, 8)$$

직선 $P'Q'$ 의 방정식은

$$y - 6 = \frac{8-6}{-4-(-6)} \{x - (-6)\}$$

$$\therefore y = x + 12$$

구하는 직선은 직선 $P'Q'$ 과 일치하므로 대칭이동한 직선의

방정식은 $y = x + 12$ 이다.

답 $y = x + 12$

다른 풀이

직선 $y=x-2$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 점 $(-2, 3)$ 에 대

하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점

이 점 $(-2, 3)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2} = -2, \frac{y+y'}{2} = 3$$

$$\therefore x = -x' - 4, y = -y' + 6$$

이때 점 $P(x, y)$ 는 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$$-y' + 6 = (-x' - 4) - 2 \quad \therefore y' = x' + 12$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = x + 12$ 이다.

14

직선 $y=2x$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=-x+2$ 에

대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

선분 PP' 의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 은 직선 $y=-x+2$ 위

에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2} + 2$$

$$\therefore x + y = -x' - y' + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 PP' 과 직선 $y=-x+2$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \times (-1) = -1 \quad \leftarrow \text{수직인 두 직선의 기울기의 곱은 } -1 \text{이다.}$$

$$\therefore x - y = x' - y' \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x = -y' + 2, y = -x' + 2$$

이때 점 $P(x, y)$ 는 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$-x' + 2 = 2(-y' + 2)$$

$$\therefore x' - 2y' + 2 = 0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x - 2y + 2 = 0$ 이다.

답 $x - 2y + 2 = 0$

15

- (1) 점 $(7, k)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-7, k)$$

점 $(-7, k)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-5, k+3)$$

점 $(-5, k+3)$ 이 직선 $x + 3y + 2 = 0$ 위에 있으므로

$$-5 + 3(k+3) + 2 = 0, \quad 3k + 6 = 0$$

$$\therefore k = -2$$

- (2) 점 $A(k-1, 6)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B 는

$$B(1-k, -6)$$

점 B 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 C 는

$$C(-6, 1-k)$$

선분 BC 의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{\{-6 - (1-k)\}^2 + \{1-k - (-6)\}^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(k-7)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(k-7)^2 = 4, \quad k-7 = \pm 2$$

$$\therefore k = 5 \text{ 또는 } k = 9$$

답 (1) -2 (2) $5, 9$

16

점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P 는

$$P(a, -b)$$

점 (a, b) 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 Q 는

$$Q(-a, b)$$

점 (a, b) 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 은

$$R(-a, -b)$$

따라서 삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a-a-a}{3}, \frac{-b+b-b}{3}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{a}{3}, -\frac{b}{3}\right)$$

이 점이 점 $(4, -2)$ 와 일치하므로

$$-\frac{a}{3} = 4, \quad -\frac{b}{3} = -2$$

$$\therefore a = -12, \quad b = 6$$

$$\therefore a + b = -12 + 6 = -6$$

답 -6

17

- (1) 직선 $3x - 4y + 1 = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-3x + 4y + 1 = 0 \quad \therefore 3x - 4y - 1 = 0$$

이 직선이 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 16$ 의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(a, 2)$ 를 지나야 하므로

$$3a - 4 \times 2 - 1 = 0, \quad 3a - 9 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

- (2) 중심의 좌표가 $(3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

이 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(y-3)^2 + (x-1)^2 = r^2$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$(-1-1)^2 + (3-3)^2 = r^2$$

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

답 (1) 3 (2) 2

다른 풀이

- (2) 중심의 좌표가 $(3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이는 r 이므로 이 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$(-1-1)^2 + (3-3)^2 = r^2$$

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

18

직선 $x - 2y = 9$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y - 2x = 9 \quad \therefore 2x - y + 9 = 0$$

이 직선이 원 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = k$ 에 접하므로 원의 중심 $(3, -5)$ 와 직선 $2x - y + 9 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$ 와 같아야 한다.

$$\frac{|2 \times 3 - (-5) + 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{k}$$

$$\sqrt{k} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore k = 80$$

답 80

19

직선 $6x + 2y - 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$6(x-4) + 2(y+7) - 5 = 0$$

$$\therefore 6x + 2y - 15 = 0$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$6 \times (-x) + 2y - 15 = 0$$

$$\therefore 6x - 2y + 15 = 0$$

답 $6x - 2y + 15 = 0$

20

$$y = -x^2 + 8x + 3k - 1$$

$$= -(x-4)^2 + 3k + 15$$

이 포물선을 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y - 4 = -(x-4)^2 + 3k + 15$$

$$\therefore y = -(x-4)^2 + 3k + 19$$

이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = -(x-4)^2 + 3k + 19$$

$$\therefore y = (x-4)^2 - 3k - 19$$

따라서 $f(x) = (x-4)^2 - 3k - 19$ 이고

함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최솟값 $-3k-19$ 를 가지므로

$$-3k - 19 = -4, -3k = 15$$

$$\therefore k = -5$$

답 -5

21

점 $(-2, 5)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y = m(x+2) + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y - 10 = m\{(x+3)+2\} + 5 \quad \therefore y = mx + 5m + 15$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y = -mx + 5m + 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $2x - 3y + 10 = 0$, 즉 $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$ 과 서로 수직이므로

$$(-m) \times \frac{2}{3} = -1 \quad \therefore m = \frac{3}{2}$$

따라서 처음 직선의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서

$$y = \frac{3}{2}(x+2) + 5 \quad \therefore 3x - 2y + 16 = 0$$

답 $3x - 2y + 16 = 0$

22

(1) 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동하면

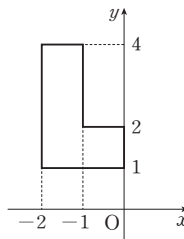
$$f(x, -y) = 0$$

방정식 $f(x, -y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$f(x+1, -(y-2)) = 0$$

$$\therefore f(x+1, -y+2) = 0$$

따라서 방정식 $f(x+1, -y+2) = 0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동하면

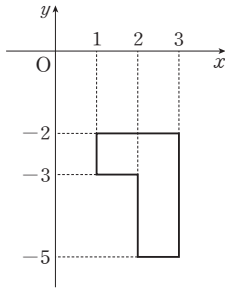
$$f(-x, y) = 0$$

방정식 $f(-x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$f(-(x-2), y+3)=0$$

$$\therefore f(-x+2, y+3)=0$$

따라서 방정식 $f(-x+2, y+3)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



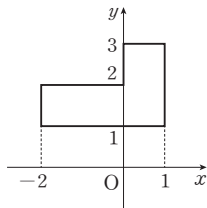
- (3) 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$f(y-2, x)=0$$

따라서 방정식 $f(y-2, x)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



- (4) 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동하면

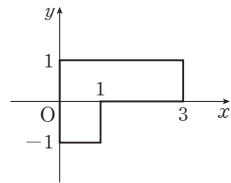
$$f(-y, -x)=0$$

방정식 $f(-y, -x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$f(-y, -(x-1))=0$$

$$\therefore f(-y, -x+1)=0$$

따라서 방정식 $f(-y, -x+1)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

23

- (1) 점 (a, b) 는 두 점 $(2, -5)$, $(0, -7)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$a=\frac{2+0}{2}, b=\frac{-5-7}{2}$$

$$\therefore a=1, b=-6$$

$$\therefore a-b=1-(-6)=7$$

- (2) $x^2+y^2-4x-10y=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y-5)^2=29$$

$$x^2+y^2+16x+2y+c=0$$

$$(x+8)^2+(y+1)^2=65-c$$

이때 두 원의 반지름의 길이가 같아야 하므로 $\leftarrow$ 원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.

$$29=65-c \quad \therefore c=36$$

또한, 두 원이 점 (a, b) 에

대하여 대칭이므로 점

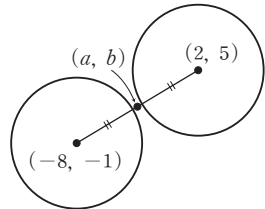
(a, b) 는 두 원의 중심

$(2, 5)$, $(-8, -1)$ 을 이

은 선분의 중점이다.

$$\text{즉, } a=\frac{2-8}{2}=-3, b=\frac{5-1}{2}=2 \text{ 이므로}$$

$$a+b+c=-3+2+36=35$$



답 (1) 7 (2) 35

24

점 $A(2, 3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-3=m(x-2) \quad \therefore y=mx-2m+3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 위의 점 $(3, m+3)$ 을 B 라 하고, 두 점 A, B 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 각각 $A'(a, b)$, $B'(c, d)$ 라 하자.

두 선분 AA', BB'의 중점이 모두 점 (0, 1)이므로

$$\frac{2+a}{2}=0, \frac{3+b}{2}=1 \quad \therefore a=-2, b=-1$$

$$\frac{3+c}{2}=0, \frac{(m+3)+d}{2}=1 \quad \therefore c=-3, d=-m-1$$

즉, A'(-2, -1), B'(-3, -m-1)이고, 직선 ㉠을 점 (0, 1)에 대하여 대칭이동한 직선은 직선 A'B'이므로 이 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{-m-1-(-1)}{-3-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore mx-y+2m-1=0$$

또한, 직선 $mx-y+2m-1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$mx+y+2m-1=0$$

이 직선이 다시 점 A(2, 3)을 지나므로

$$2m+3+2m-1=0$$

$$4m=-2 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

다른 풀이

점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-3=m(x-2)$$

이 직선을 점 (0, 1)에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

x 대신 $-x$, y 대신 $2-y$ 를 대입하면

$$2-y-3=m(-x-2)$$

$$\therefore mx-y+2m-1=0$$

이 직선을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$mx+y+2m-1=0$$

이 직선이 다시 점 A(2, 3)을 지나므로

$$2m+3+2m-1=0$$

$$4m=-2 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

25

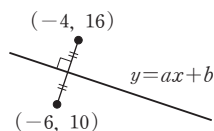
(1) 두 점 (-6, 10), (-4, 16)을

이은 선분의 중점

$$\left(\frac{-6-4}{2}, \frac{10+16}{2}\right), \text{ 즉}$$

(-5, 13)이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$$13=-5a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



두 점 (-6, 10), (-4, 16)을 지나는 직선과 직선

$y=ax+b$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{16-10}{-4-(-6)} \times a = -1$$

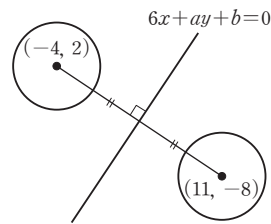
$$\therefore 3a = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{3}, b = \frac{34}{3}$$

$$\therefore a+b = -\frac{1}{3} + \frac{34}{3} = 11$$

(2) $x^2+y^2+8x-4y+4=0$ 에서

$$(x+4)^2+(y-2)^2=16$$



두 원의 중심 (-4, 2), (11, -8)을 이은 선분의 중점

$$\left(\frac{-4+11}{2}, \frac{2-8}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{7}{2}, -3\right) \text{이 직선}$$

$6x+ay+b=0$ 위에 있으므로

$$21-3a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원의 중심을 지나는 직선과 직선 $6x+ay+b=0$, 즉

$$y = -\frac{6}{a}x - \frac{b}{a} \text{가 서로 수직이므로}$$

$$\frac{-8-2}{11-(-4)} \times \left(-\frac{6}{a}\right) = -1 \quad \therefore \frac{4}{a} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -4, b = -33$$

$$\therefore a-b = -4 - (-33) = 29$$

답 (1) 11 (2) 29

26

$x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=10$$

원의 중심 (2, -1)을 직선 $y=x+2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 (2, -1), (a, b)를 이은 선분의 중점

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \text{가 직선 } y=x+2 \text{ 위에 있으므로}$$

$$\frac{-1+b}{2} = \frac{2+a}{2} + 2 \quad \therefore a-b = -7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 점 $(2, -1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $y=x+2$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{b-(-1)}{a-2} \times 1 = -1$$

$$b+1=-a+2 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-3, b=4$$

즉, 원 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$ 을 직선 $y=x+2$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-4)^2=10 \quad \leftarrow \text{원을 대칭이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않는다.}$$

이때 이 원이 직선 $3x+4y+k=0$ 과 접하므로 원의 중심 $(-3, 4)$ 와 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같다.

$$\frac{|3 \times (-3) + 4 \times 4 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|k+7|}{5} = \sqrt{10}, |k+7| = 5\sqrt{10}$$

$$k+7 = \pm 5\sqrt{10}$$

$$\therefore k = -7 \pm 5\sqrt{10}$$

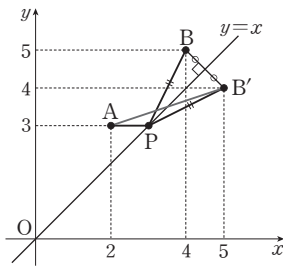
따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-7+5\sqrt{10} + (-7-5\sqrt{10}) = -14$$

답 -14

27

점 $B(4, 5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(5, 4)$



이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (4-3)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

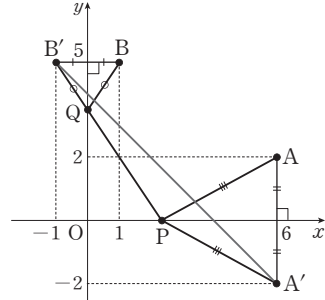
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.

답 $\sqrt{10}$

28

점 $A(6, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(-6, -2)$

점 $B(1, 5)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(-1, 5)$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(-1-6)^2 + \{5-(-2)\}^2}$$

$$= 7\sqrt{2}$$

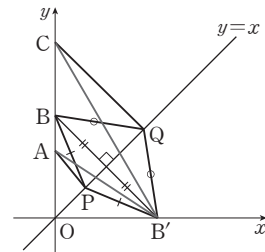
따라서 구하는 최솟값은 $7\sqrt{2}$ 이다.

답 $7\sqrt{2}$

29

점 $B(0, 3)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$B'(3, 0)$



이때 $\overline{PB} = \overline{PB'}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BQ} + \overline{QC} = \overline{AP} + \overline{PB'} + \overline{B'Q} + \overline{QC}$$

$$\geq \overline{AB'} + \overline{B'C}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BQ} + \overline{QC}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q는 직선 AB' , 직선 $B'C$ 가 각각 직선 $y=x$ 와 만나는 점이다.

직선 AB'의 방정식은

$$y = \frac{0-2}{3-0}x + 2 \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + 2$$

이 직선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$x = -\frac{2}{3}x + 2, \frac{5}{3}x = 2$$

$$\therefore x = \frac{6}{5} \quad \therefore P\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

또한, 직선 B'C의 방정식은

$$y = \frac{5-0}{0-3}x + 5 \quad \therefore y = -\frac{5}{3}x + 5$$

이 직선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$x = -\frac{5}{3}x + 5, \frac{8}{3}x = 5$$

$$\therefore x = \frac{15}{8} \quad \therefore Q\left(\frac{15}{8}, \frac{15}{8}\right)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{15}{8} - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{8} - \frac{6}{5}\right)^2} = \frac{27\sqrt{2}}{40}$$

답 $\frac{27\sqrt{2}}{40}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.140~142

- | | | | |
|------------------|--------------------------|------------------|------|
| 07 $\frac{4}{3}$ | 08 -7 | 09 $\frac{1}{6}$ | 10 ③ |
| 11 $2\sqrt{2}$ | 12 14 | 13 $3\sqrt{2}$ | 14 ⑤ |
| 15 7 | 16 10 | 17 $2x-3y+25=0$ | |
| 18 8 | 19 9 | 20 $(-8, -6)$ | |
| 21 $6+4\sqrt{2}$ | 22 $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ | 23 $5\sqrt{2}$ | |

07

점 B의 y 좌표가 2이므로 점 B의 좌표를 $(a, 2)$ 라 하면

조건 (가)에서 두 직선 OA, OB는 서로 수직이므로

$$\frac{4}{a} \times \frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a = -8$$

즉, B $(-8, 2)$ 이고, 조건 (나)에서 두 점 B, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

C $(2, -8)$

이때 직선 AC의 방정식은

$$y = \frac{-8-4}{2-1}(x-1) + 4$$

$$\therefore y = -12x + 16$$

이 직선의 x 절편은 $0 = -12x + 16$ 에서 $x = \frac{4}{3}$

따라서 구하는 직선 AC의 x 절편은 $\frac{4}{3}$ 이다.

답 $\frac{4}{3}$

08

점 A $(4, -3)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - (-3) = m(x - 4)$$

$$\therefore mx - y - 4m - 3 = 0$$

이 직선을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$m \times (-y) - (-x) - 4m - 3 = 0 \quad \text{[} x \text{ 대신 } -y, y \text{ 대신 } -x \text{를 대입한다.]}$$

$$\therefore x - my - 4m - 3 = 0$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x - my - 4m - 3 = 0 \quad \text{[} x \text{ 대신 } -x \text{를 대입한다.]}$$

$$\therefore x + my + 4m + 3 = 0$$

이 직선이 다시 점 A $(4, -3)$ 을 지나므로

$$4 - 3m + 4m + 3 = 0, m + 7 = 0$$

$$\therefore m = -7$$

답 -7

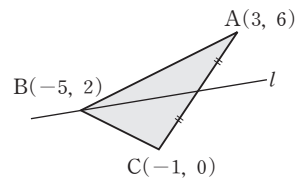
09

직선 $kx + y - 5k - 2 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 l 의 방정식은

$$-kx + y - 5k - 2 = 0 \quad \therefore l: kx - y + 5k + 2 = 0$$

$kx - y + 5k + 2 = 0$ 에서 $(x+5)k - y + 2 = 0$ 이므로 직선 l 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 B $(-5, 2)$ 를 지난다.

한편, 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표는 A $(3, 6)$, B $(-5, 2)$, C $(-1, 0)$ 이므로 다음 그림과 같이 직선 l 은 삼각형 ABC의 한 꼭짓점 B를 지나는 직선이다.



직선 l 이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하므로 직선 l 은 변

AC의 중점 $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, 즉 $(1, 3)$ 을 지난다.

즉, $k-3+5k+2=0$ 이므로 $6k-1=0$

$$\therefore k=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

10

ㄱ. 원 $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-y)^2+(-x)^2-2\times(-y)+2\times(-x)-7=0$$

$$\therefore x^2+y^2-2x+2y-7=0$$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치한다.

ㄴ. 직선 $2x-2y-3=0$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2\times(-y)-2\times(-x)-3=0$$

$$\therefore 2x-2y-3=0$$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치한다.

ㄷ. 포물선 $y=x^2+3$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-x=(-y)^2+3$$

$$\therefore x=-y^2-3$$

즉, 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치하지 않는다.

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

11

$C: x^2+y^2-2ax-4ay+5a^2-1=0$ 에서

$$C: (x-a)^2+(y-2a)^2=1$$

즉, 원 C 의 중심의 좌표는 $(a, 2a)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

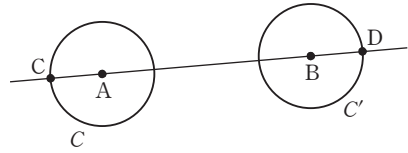
원 C 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원 C' 의 방정식은

$$(y-a)^2+(x-2a)^2=1$$

$$\therefore C': (x-2a)^2+(y-a)^2=1$$

즉, 원 C' 의 중심의 좌표는 $(2a, a)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

다음 그림과 같이 두 원 C, C' 의 중심을 각각 A, B 라 하고, 직선 AB 가 두 원 C, C' 과 만나는 점 중 선분 AB 위의 점이 아닌 점을 각각 C, D 라 하면 원 C 위의 점과 원 C' 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 선분 CD 의 길이와 같다.



$A(a, 2a), B(2a, a)$ 이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(2a-a)^2+(a-2a)^2}=\sqrt{2}a (\because a>0)$$

이때 $\overline{CD}=6$ 이므로

$$\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{BD}=6$$

$$1+\sqrt{2}a+1=6, \sqrt{2}a=4$$

$$\therefore a=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

12

직선 $y=-\frac{1}{2}x-3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하면

$$y=-\frac{1}{2}(x-a)-3$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$x=-\frac{1}{2}(y-a)-3, \text{ 즉 } 2x+y+6-a=0$$

$$\therefore l: 2x+y+6-a=0$$

(ㄱ)

직선 l 이 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$ 와 접하려면 원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 l 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|2\times(-1)+3+6-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

(ㄴ)

$$|a-7|=5, a-7=\pm 5$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=12$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2+12=14$$

(ㄷ)

답 14

단계	채점 기준	배점
(ㄱ)	직선 l 의 방정식을 구한 경우	40%
(ㄴ)	직선과 원의 위치 관계를 이용하여 식을 세운 경우	40%
(ㄷ)	모든 상수 a 의 값 및 그 합을 구한 경우	20%

13

$$C: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$C: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

원 C 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$$\{(x-1)+1\}^2 + \{(y+1)-3\}^2 = 9$$

$$\therefore x^2 + (y-2)^2 = 9$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$y^2 + (x-2)^2 = 9$$

$$\therefore C': (x-2)^2 + y^2 = 9$$

즉, 두 원 C, C' 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하면

$$C_1(-1, 3), C_2(2, 0)$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 선분 C_1C_2 에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

삼각형 AC_1C_2 는

$$\overline{AC_1} = \overline{AC_2} = 3 \text{인 이등변삼각형이고}$$

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{0 - 3\}^2} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{C_1M} = \frac{1}{2} \overline{C_1C_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 AC_1M 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AC_1}^2 - \overline{C_1M}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

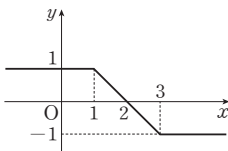
이므로 두 원 C, C' 의 서로 다른 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 3\sqrt{2}$$

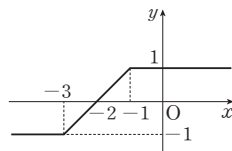
답 $3\sqrt{2}$

14

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 [그림 3]과 같고, [그림 3]의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 [그림 4]와 같다.

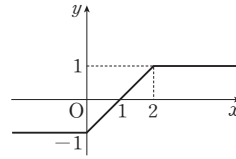


[그림 3]

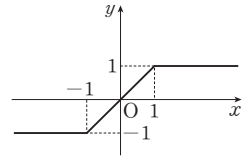


[그림 4]

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 [그림 5]와 같고, [그림 5]의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 [그림 6]과 같다.

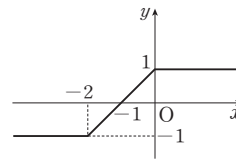


[그림 5]

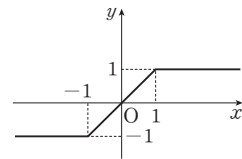


[그림 6]

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 [그림 7]과 같고, [그림 7]의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 [그림 8]과 같다.



[그림 7]



[그림 8]

따라서 [그림 2]에 대한 설명으로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

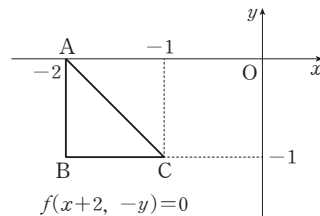
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$f(x+2, -y)=0$$

즉, 방정식 $f(x+2, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x+2, -y)=0$ 이 나타내는 도형의 꼭짓점을 위의 그림과 같이 A, B, C로 정하면 도형 위의 점과 원점 사

이의 거리는 $B(-2, -1)$ 에서 최댓값을 갖고, $C(-1, -1)$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$\therefore M = \overline{OB}$$

$$= \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5},$$

$$m = \overline{OC}$$

$$= \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore M^2 + m^2 = 5 + 2 = 7$$

답 7

16

도형을 평행이동 또는 대칭이동하면 모양과 크기는 변하지 않고, 점은 점으로 옮겨지므로 구하는 점은 네 점 $A(0, 4)$, $B(1, 3)$, $C(2, 4)$, $D(1, 5)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 두 대각선의 교점이 주어진 도형의 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 점과 일치한다.

정사각형 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점은 선분 AC 의 중점이고 그 좌표는 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$ 이다.

한편, 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$f(-y, x)=0$$

방정식 $f(-y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$f(-(y+3), x-2)=0$$

$$\therefore f(-y-3, x-2)=0$$

즉, 점 $(1, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 1)$

점 $(4, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -1)$

점 $(4, -1)$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(6, -4)$$

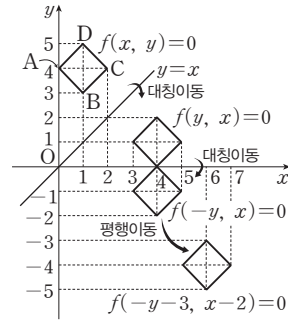
따라서 방정식 $f(-y-3, x-2)=0$ 이 나타내는 도형의 두 대각선의 교점은 점 $(6, -4)$ 이므로

$$a=6, b=-4 \quad \therefore a-b=6-(-4)=10$$

답 10

보충 설명

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 정사각형 $ABCD$ 를 실제로 이동하면 다음 그림과 같다.



다른 풀이

정사각형 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점은 선분 AC 의 중점이고 그 좌표는 $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$, 즉 $(1, 4)$ 이다.

이 점이 주어진 이동에 의하여 점 (a, b) 로 옮겨지므로

$$-b-3=1, a-2=4$$

$$\therefore a=6, b=-4$$

$$\therefore a-b=6-(-4)=10$$

17

어떤 도형이 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 도형이 직선 $2x+3y-1=0$ 과 일치하였으므로 처음 도형 역시 직선이다.

처음 직선을 l 이라 하고 직선 l 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선을 m , 직선 m 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선을 n , 직선 n 을 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 p 라 하면 $p: 2x+3y-1=0$ 이므로 직선 p 에서부터 직선 n , 직선 m , 직선 l 이 되도록 반대로 이동하면 직선 l 의 방정식을 얻을 수 있다.

(i) 직선 p 를 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 직선 n 의 방정식 직선 $2x+3y-1=0$ 위의 임의의 점의 좌표를 (a, b) 라 하고, 점 (a, b) 를 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x, y) 라 하자.

$$\text{두 점 } (a, b), (x, y) \text{를 이은 선분의 중점 } \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b+y}{2}\right)$$

가 점 $(2, 1)$ 과 일치하므로

$$\frac{a+x}{2}=2, \frac{b+y}{2}=1$$

$$\therefore a=4-x, b=2-y \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (a, b) 는 직선 $2x+3y-1=0$ 위에 있으므로

$$2a+3b-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 직선 n 의 방정식은

$$2(4-x)+3(2-y)-1=0$$

$$\therefore n: 2x+3y-13=0$$

(ii) 직선 n 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선 m 의 방정식

직선 $2x+3y-13=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$2 \times (-x) + 3y - 13 = 0$$

$$\therefore m: 2x-3y+13=0$$

(iii) 직선 m 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선 l 의 방정식

직선 $2x-3y+13=0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$$2(x+3)-3(y-2)+13=0$$

$$\therefore l: 2x-3y+25=0$$

따라서 처음 도형의 방정식은 $2x-3y+25=0$ 이다.

$$\text{답 } 2x-3y+25=0$$

다른 풀이

어떤 도형이 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 옮겨지는 도형이 직선 $2x+3y-1=0$ 과 일치하였으므로 처음 도형 역시 직선이다.

처음 직선을 l 이라 하고, 직선 l 의 방정식을

$$ax+by+c=0 \quad (a, b, c \text{는 상수}) \text{이라 하자.}$$

$l: f(x, y)=0$ 이라 할 때, 각 이동에 따른 도형의 방정식을 순서대로 나타내면

$$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-3, y+2)=0$$

$$\longrightarrow f(-x-3, y+2)=0$$

$$\longrightarrow f(-4+x-3, 2-y+2)=0$$

한편, 도형의 방정식 $f(x-7, -y+4)=0$ 에서

$$a(x-7)+b(-y+4)+c=0$$

$$\therefore ax-by-7a+4b+c=0$$

이 직선이 직선 $2x+3y-1=0$ 과 일치하므로

$$a=2, b=-3, -7a+4b+c=-1 \quad \therefore c=25$$

따라서 처음 도형의 방정식은

$$2x-3y+25=0$$

18

두 점 A, B를 점 P에 대하여 대칭

이동한 점이 각각 A', B'이므로

$\triangle APB, \triangle A'PB'$ 에서

$$\overline{AP}=\overline{A'P}, \overline{BP}=\overline{B'P},$$

$\angle APB=\angle A'PB'$ (맞꼭지각)

이므로

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ (SAS 합동)

즉, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ 이므로 두 직선 AB, A'B'의 기울기는 서로 같다.

직선 AB의 방정식 $x-3y+2=0$ 에서 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 이므로

직선 A'B'의 방정식 $y=ax+b$ 에서

$$a=\frac{1}{3}$$

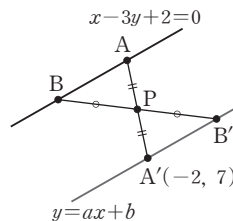
또한, 점 A'(-2, 7)은 직선 A'B' 위에 있으므로

$$7=-2a+b \text{에서}$$

$$b-\frac{2}{3}=7 \left(\because a=\frac{1}{3} \right)$$

$$\therefore b=\frac{23}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{1}{3}+\frac{23}{3}=8$$



답 8

19

두 이차함수의 그래프가 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭이면 각 그래프의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이므로 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이다.

$$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \text{이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $(-1, 2)$

$$y=-x^2+6x+5=-(x-3)^2+14 \text{이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $(3, 14)$

점 $P(a, b)$ 는 두 점 $(-1, 2), (3, 14)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$a=\frac{-1+3}{2}=1, b=\frac{2+14}{2}=8$$

$$\therefore a+b=1+8=9$$

답 9

20

모눈종이를 접은 선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하자.

모눈종이를 반으로 접었더니 점 $(4, 0)$ 이 점 $(-2, 2)$ 와 일치하였으므로 점 $(4, 0)$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동한 점이 점 $(-2, 2)$ 이다.

두 점 $(4, 0)$, $(-2, 2)$ 를 이은 선분의 중점

$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(1, 1)$ 은 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$$1=a+b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 두 점 $(4, 0)$, $(-2, 2)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{2-0}{-2-4} \times a = -1 \quad \therefore -\frac{1}{3}a = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

즉, 모눈종이를 접은 선의 방정식은 $y=3x-2$ 이다.

한편, 점 $(4, -10)$ 을 직선 $y=3x-2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q) 라 하면 두 점 $(4, -10)$, (p, q) 를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+p}{2}, \frac{-10+q}{2}\right)$ 는 직선 $y=3x-2$ 위에 있으므로

$$\frac{-10+q}{2} = 3 \times \frac{4+p}{2} - 2$$

$$\therefore 3p-q = -18 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

또한, 두 점 $(4, -10)$, (p, q) 를 지나는 직선과 직선 $y=3x-2$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{q-(-10)}{p-4} \times 3 = -1$$

$$\therefore p+3q = -26 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $p=-8$, $q=-6$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-8, -6)$ 이다.

답 $(-8, -6)$

21

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.

$$C: x^2+y^2-4x-12=0 \text{에서}$$

$$C: (x-2)^2+y^2=16$$

이므로 원 C 의 중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

점 $(2, 0)$ 을 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(k, 0)$ 이라 하면 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$ 을 이은 선분의 중점이 직선 $x=a$ 위에 있으므로

$$\frac{2+k}{2} = a \quad \therefore k = 2a-2$$

즉, 원 C 를 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(2a-2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원이므로 그 방정식은

$$\{x-(2a-2)\}^2+y^2=16$$

이 원이 원 C 의 중심 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$\{2-(2a-2)\}^2=16, (2-a)^2=4$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

한편, 원 C 를 직선 $y=-x+b$ 에 대하여 대칭이동한 원이 원 C 와 접하므로 직선 $y=-x+b$ 가 원 C 의 접선이다.

즉, 원 C 의 중심 $(2, 0)$ 과 직선 $x+y-b=0$ 사이의 거리가 원 C 의 반지름의 길이 4와 같으므로

$$(*) \frac{|2+0-b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4, |b-2| = 4\sqrt{2}$$

$$b-2 = \pm 4\sqrt{2}$$

$$\therefore b = 2+4\sqrt{2} (\because b>0)$$

$$\therefore a+b = 4 + (2+4\sqrt{2}) = 6+4\sqrt{2}$$

답 $6+4\sqrt{2}$

다른 풀이

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.

$$C: x^2+y^2-4x-12=0 \text{에서}$$

$$C: (x-2)^2+y^2=16$$

이므로 원 C 의 중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

원 C 를 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하면 원 C' 의 중심은 x 축 위의 점이다. 원 C' 의 중심의 좌표를 $(k, 0)$ 이라 하면 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(a, 0)$ 이므로

$$a = \frac{2+k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 C' 이 원 C 의 중심을 지나므로 두 점 $(2, 0)$, $(k, 0)$ 을 이은 선분의 길이는 원 C' 의 반지름의 길이와 같다.

이때 두 원 C, C' 의 반지름의 길이는 4로 같으므로 두 점 $(2, 0), (k, 0)$ 을 이은 선분의 길이도 4이다.

즉, $|k-2|=4$ 이므로 $k-2=\pm 4$

$\therefore k=6$ 또는 $k=-2$

k 의 값을 ㉠에 대입하면

$k=6$ 일 때, $a=\frac{2+6}{2}=4$

$k=-2$ 일 때, $a=\frac{2+(-2)}{2}=0$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.

다음은 (*)와 같다.

22

대칭이동에 의하여 도형의 크기나 모양은 변하지 않으므로 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동으로 바꾸어 생각해도 된다.

원 $O: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ 를 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이동한 원이 O' 이므로 두 원 O, O' 의 중심을 각각 C, C' 이라 하면 두 점 C, C' 이 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다.

$C(4, 3)$ 이고 $C'(a, b)$ 라 하면 선분 CC' 의 중점

$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$ 가 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$\frac{3+b}{2} = 2 \times \frac{4+a}{2} \quad \therefore 2a-b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 CC' 과 직선 $y=2x$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-4} \times 2 = -1 \quad \therefore a+2b=10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0, b=5 \quad \therefore C'(0, 5)$$

$$\therefore O': x^2 + (y-5)^2 = 2$$

한편, 원 O 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 O'' 이라 하고 원 O 위의 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'' 이라 하면 원 O 위의 한 점 A , 원 O' 위의 한 점 B , x 축 위의 한 점 P 에 대하여

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A''P} + \overline{PB}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 원 O' 위의 한 점과 원 O'' 위의 한 점 사이의 거리의 최솟값이다.

오른쪽 그림과 같이 선분 $C'C''$

이 두 원 O', O'' 과 만나는 점

을 각각 Q, R 이라 하면

$\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 선분

QR 의 길이와 같다.

이때 $C'(0, 5), C''(4, -3)$

이므로

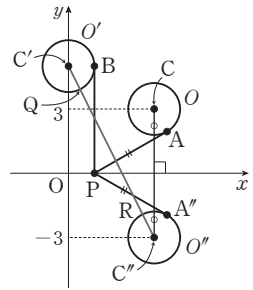
$$\begin{aligned} \overline{C'C''} &= \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} \\ &= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

또한, 두 원 O', O'' 의 반지름의 길이는 모두 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{QR} &= \overline{C'C''} - \overline{C'Q} - \overline{RC''} \\ &= 4\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ 이다.

답 $4\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$



23

점 $A(-1, 5)$ 와 직선

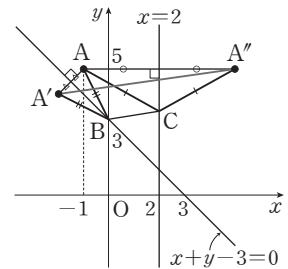
$x+y-3=0$ 위의 점 B , 직

선 $x=2$ 위의 점 C 에 대하여

세 점 A, B, C 를 꼭짓점

으로 하는 삼각형 ABC 가

존재하는 경우는 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 A 를 직선 $x+y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을

A' , 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'' 이라 하면

$$\overline{AB} = \overline{A'B}, \quad \overline{AC} = \overline{A''C}$$

이므로

$$\begin{aligned} (\text{삼각형 } ABC \text{의 둘레의 길이}) &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ &= \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{A''C} \\ &\geq \overline{A'A''} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) 점 A' 의 좌표를 (a, b) 라 하면

선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right)$ 가 직선

$x+y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{-1+a}{2} + \frac{5+b}{2} - 3 = 0$$

$$\therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

직선 AA'과 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-(-1)} \times (-1) = -1$$

$$\therefore a-b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4 \quad \therefore A'(-2, 4)$$

(ii) 점 A를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점이 A''이므로

$$A''(5, 5) \quad \text{--- } 2 \times 2 - (-1)$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &\geq \overline{A'A''} \quad (\because \textcircled{c}) \\ &= \sqrt{\{5-(-2)\}^2 + \{5-4\}^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

답 $5\sqrt{2}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.143

- 1 20 2 $\frac{11}{2}$ 3 32 4 16
5 ③

1

좌표평면 위의 점 A(-4, -1)을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점이 B이므로

$$B(-4+m, -1)$$

이때 x축의 방향으로만 평행이동하였으므로 선분 AB는 x축에 평행하다.

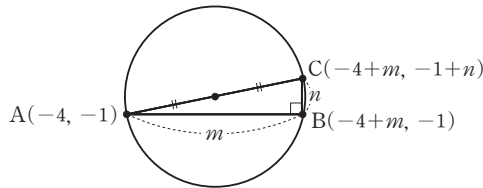
또한, 점 B(-4+m, -1)을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이 C이므로

$$C(-4+m, -1+n)$$

이때 y축의 방향으로만 평행이동하였으므로 선분 BC는 y축에 평행하다.

즉, 다음 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 두 변 AB, BC가 이루는 각의 크기가 90° 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형

ABC의 외접원이다.



직각삼각형 ABC의 외심은 빗변 AC의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-4+(-4+m)}{2}, \frac{-1+(-1+n)}{2} \right)$$

$$\therefore \left(-4+\frac{m}{2}, -1+\frac{n}{2} \right)$$

이 점이 점 (1, 0)과 일치하므로

$$-4+\frac{m}{2}=1, -1+\frac{n}{2}=0$$

$$\therefore m=10, n=2$$

$$\therefore mn=10 \times 2=20$$

답 20

다른 풀이

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 P라 하면

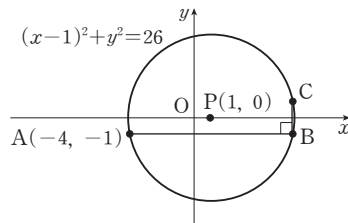
$$P(1, 0)$$

이때 점 A(-4, -1)은 원 위의 점이므로 원의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\{(1-(-4))\}^2 + \{0-(-1)\}^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

즉, 세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은 $(x-1)^2 + y^2 = 26$

이므로 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 평행이동한 점 중 원 위의 점이므로

$$B(6, -1) \quad \leftarrow \text{점 B의 y좌표는 -1이므로 } (x-1)^2 + y^2 = 26 \text{에 } y=-1 \text{을 대입하면 } (x-1)^2 = 25 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=6$$

같은 방법으로 점 C는 점 B를 y축의 방향으로 평행이동한 점 중 원 위의 점이므로

$$C(6, 1) \quad \leftarrow \text{점 C의 x좌표는 6이므로 } (x-1)^2 + y^2 = 26 \text{에 } x=6 \text{을 대입하면 } y^2 = 1 \quad \therefore y=-1 \text{ 또는 } y=1$$

따라서 $m=10, n=2$ 이므로

$$mn=10 \times 2=20$$

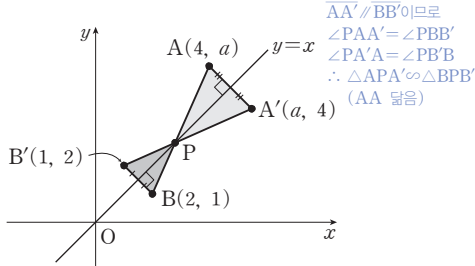
2

두 점 $A(4, a)$, $B(2, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A' , B' 이므로

$$A'(a, 4), B'(1, 2)$$

두 직선 AA' , BB' 은 각각 직선 $y=x$ 와 서로 수직이므로 두 직선 AA' , BB' 은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA' , BPB' 은 서로 닮음이다. $\sphericalangle$



한편, 두 삼각형 APA' , BPB' 의 넓이의 비가 $9:4$ 이므로 두 삼각형 APA' , BPB' 의 닮음비는 $3:2$ 이다.

$$\therefore \overline{AA'} : \overline{BB'} = 3 : 2$$

$$\overline{AA'} = \sqrt{(a-4)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2}(a-4) \quad (\because a > 4),$$

$$\overline{BB'} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2} \text{에서}$$

$$\sqrt{2}(a-4) : \sqrt{2} = 3 : 2$$

$$2\sqrt{2}(a-4) = 3\sqrt{2}, a-4 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{11}{2}$$

$$\text{답 } \frac{11}{2}$$

다른 풀이1

두 점 $A(4, a)$, $B(2, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A' , B' 이므로

$$A'(a, 4), B'(1, 2)$$

두 직선 AA' , BB' 은 각각 직선 $y=x$ 와 서로 수직이므로 두 직선 AA' , BB' 은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA' , BPB' 은 서로 닮음이고, 두 삼각형의 넓이의 비가 $9:4$ 이므로 두 삼각형의 닮음비는 $3:2$ 이다.

$$\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$$

즉, 점 P 는 선분 AB 를 $3:2$ 로 내분하는 점이므로 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 2 + 2 \times 4}{3+2}, \frac{3 \times 1 + 2 \times a}{3+2} \right) \quad \therefore P\left(\frac{14}{5}, \frac{2a+3}{5} \right)$$

두 직선 AB , $A'B'$ 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 직선 AB , $A'B'$ 의 교점 P 는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$$\text{즉, } \frac{14}{5} = \frac{2a+3}{5} \text{이므로 } a = \frac{11}{2}$$

다른 풀이2

두 점 $A(4, a)$, $B(2, 1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이 각각 A' , B' 이므로

$$A'(a, 4), B'(1, 2)$$

두 직선 AA' , BB' 은 각각 직선 $y=x$ 와 서로 수직이므로 두 직선 AA' , BB' 은 서로 평행하다.

즉, 두 삼각형 APA' , BPB' 은 서로 닮음이고, 두 삼각형의 넓이의 비가 $9:4$ 이므로 두 삼각형의 닮음비는 $3:2$ 이다.

따라서 점 A 와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리,

점 B 와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리의 비도 $3:2$ 이므로

$$\frac{|4-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} : \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3 : 2$$

$$2|4-a| = 3, |4-a| = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{11}{2} \quad (\because a > 4)$$

3

포물선 $y=x^2-3x-1$ 위의 두 점 $A(a, a^2-3a-1)$,

$B(b, b^2-3b-1)$ ($a \neq b$)이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이라 하자.

직선 AB 는 직선 $y=x$ 와 서로 수직이므로 직선 AB 의 기울기는 -1 이다. 즉,

$$\frac{a^2-3a-1-(b^2-3b-1)}{a-b} = -1$$

$$(a^2-b^2)-3(a-b) = -(a-b)$$

$$(a-b)(a+b)-2(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-2)=0$$

$$\therefore a+b-2=0 \quad (\because a \neq b)$$

$$\therefore b = -a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2-3a-1+b^2-3b-1}{2} \right)$$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{a^2-3a-1+b^2-3b-1}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore a^2-4a+b^2-4b-2=0$$

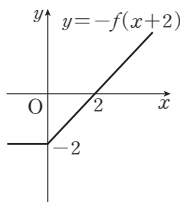
①을 위의 식에 대입하면

$$\begin{aligned}
 a^2 - 4a + (-a+2)^2 - 4(-a+2) - 2 &= 0 \\
 a^2 - 4a + a^2 - 4a + 4 + 4a - 8 - 2 &= 0 \\
 a^2 - 2a - 3 &= 0, (a+1)(a-3) = 0 \\
 \therefore a &= -1, b = 3 \text{ 또는 } a = 3, b = -1 \quad (\because \textcircled{1}) \\
 \text{따라서 } A &(-1, 3), B(3, -1) \text{ 또는 } A(3, -1), B(-1, 3) \\
 \text{이므로} \\
 d^2 &= \overline{AB}^2 \\
 &= (-1-3)^2 + \{3-(-1)\}^2 = 32
 \end{aligned}$$

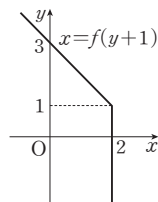
답 32

4

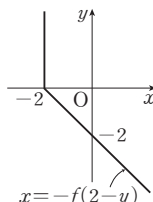
- (i) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면
 $-y=f(x)$
 이것을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
 $-y=f(x+2) \quad \therefore y=-f(x+2)$
 즉, $y=-f(x+2)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.
- (ii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
 $x=f(y)$
 이것을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
 $x=f(y+1)$
 즉, $x=f(y+1)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.
- (iii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면
 $-y=f(-x) \quad \therefore y=-f(-x)$
 이것을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
 $x=-f(-y)$
 이것을 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
 $x=-f(-(y-2)) \quad \therefore x=-f(2-y)$
 즉, $x=-f(2-y)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 1]

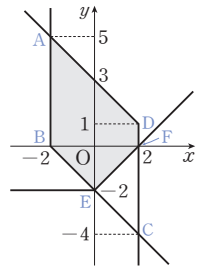


[그림 2]



[그림 3]

따라서 세 도형 $y=-f(x+2)$,
 $x=f(y+1)$, $x=-f(2-y)$ 로 둘러싸인 두 도형 중 넓이가 더 큰 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 도형과 같으므로 구하는 넓이는
 ─ 평행사변형 ABCD의 넓이
 $5 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2$
 ─ 삼각형 ECF의 넓이
 $= 20 - 4 = 16$



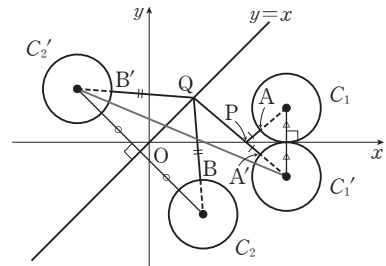
답 16

5

원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1' , 원 C_2 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_2' 이라 하면

$$C_1': (x-8)^2 + (y+2)^2 = 4,$$

$$C_2': (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$$



위의 그림과 같이 원 C_1 위의 점 A 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' , 원 C_2 위의 점 B 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 두 점 A' , B' 은 각각 원 C_1' , 원 C_2' 위의 점이고

$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{QB} = \overline{Q'B'}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 는 네 점 A' , P , Q , B' 이 두 원 C_1' , C_2' 의 중심 $(8, -2)$, $(-4, 3)$ 을 이은 선분 위에 있을 때 최솟값을 갖고, 두 원 C_1' , C_2' 의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(-4-8)^2 + \{3-(-2)\}^2} - 2 - 2$$

$$= 13 - 4 = 9$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 9이다.

답 ③

II. 집합과 명제

05. 집합

1 집합

기본 + 필수연습

본문 pp.148~151

01 $\neg, \subset$ 02 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$

03 (1) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2) $\{x|x=3n+1, n=0, 1, 2, \dots, 33\}$

04 $\neg, \subset, \supset, n(A)=15, n(C)=3, n(D)=0$

05 $S=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 06 64

07 $B*(A*B)=\{5, 13, 26, 34, 101, 109, 170, 178\}$

08 $\supset$ 09 10 10 5

01

ㄱ. '우리 반에서 안경을 쓴 사람의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

ㄴ. '높다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄷ. '5보다 작은 정수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이고, 이 집합의 원소는 4, 3, 2, ...이다.

ㄹ. '가깝다'의 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

02

(1) 2는 자연수이므로 $2 \in \mathbb{N}$

(2) $-\frac{1}{2}$ 은 정수가 아닌 유리수이므로 $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

(3) $2-\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 $2-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(4) 0은 실수이므로 $0 \in \mathbb{R}$

답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$

03

(1) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2) $\{x|x=3n+1, n=0, 1, 2, \dots, 33\}$

답 (1) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

(2) $\{x|x=3n+1, n=0, 1, 2, \dots, 33\}$

다른 풀이

(2) $\{x|x=3n-2, n=1, 2, 3, \dots, 34\}$

04

ㄱ. $A=\{4, 8, 12, \dots, 60\}$ 은 유한집합이고, $n(A)=15$ 이다.

ㄴ. 양의 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

ㄷ. $x^2-2x-3 < 0$ 에서 $(x+1)(x-3) < 0$

$\therefore -1 < x < 3$

즉, $C=\{0, 1, 2\}$ 이므로 유한집합이고, $n(C)=3$ 이다.

ㄹ. $x^2+1=0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않는다.

즉, $D=\emptyset$ 이므로 유한집합이고 $n(D)=0$ 이다.

따라서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이고,

$n(A)=15, n(C)=3, n(D)=0$ 이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, $n(A)=15, n(C)=3, n(D)=0$

05

두 집합 $A=\{3, 5, 7, 9\}$, $B=\{3, 4, 5\}$ 에 대하여

$x \in A, y \in B$ 일 때, $x-y$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	3	4	5
3	0	-1	-2
5	2	1	0
7	4	3	2
9	6	5	4

$\therefore S=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

답 $S=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

06

두 집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$ 에 대하여 $x \in A, y \in B$

일 때, $xy(x+y)$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	2	3
1	$1 \times 2 \times (1+2)=6$	$1 \times 3 \times (1+3)=12$
2	$2 \times 2 \times (2+2)=16$	$2 \times 3 \times (2+3)=30$

$$\therefore S = \{6, 12, 16, 30\}$$

따라서 집합 S의 모든 원소의 합은

$$6+12+16+30=64$$

답 64

07

두 집합 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2x-1 | x \in A\}$ 에 대하여

$B = \{1, 3\}$ 이므로 $a \in A$, $b \in B$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은 다음 표와 같다.

$a \backslash b$	1	3
1	$1^2 + 1^2 = 2$	$1^2 + 3^2 = 10$
2	$2^2 + 1^2 = 5$	$2^2 + 3^2 = 13$

$$\therefore A * B = \{2, 5, 10, 13\}$$

또한, $b \in B$, $c \in A * B$ 일 때, $b^2 + c^2$ 의 값은 다음 표와 같다.

$b \backslash c$	2	5	10	13
1	$1^2 + 2^2 = 5$	$1^2 + 5^2 = 26$	$1^2 + 10^2 = 101$	$1^2 + 13^2 = 170$
3	$3^2 + 2^2 = 13$	$3^2 + 5^2 = 34$	$3^2 + 10^2 = 109$	$3^2 + 13^2 = 178$

$$\therefore B * (A * B) = \{5, 13, 26, 34, 101, 109, 170, 178\}$$

$$\text{답 } B * (A * B) = \{5, 13, 26, 34, 101, 109, 170, 178\}$$

08

$$\neg. n(\{0, 1, \{0, 1, 3\}, 5\}) = 4, n(\{0, 1, 3, 5, 7\}) = 5$$

이므로

$$n(\{0, 1, \{0, 1, 3\}, 5\}) - n(\{0, 1, 3, 5, 7\}) = 4 - 5 = -1 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. n(\{a, b\}) = 2, n(\{a, \emptyset\}) = 2 \text{이므로}$$

$$n(\{a, b\}) = n(\{a, \emptyset\}) \text{ (참)}$$

ㄷ. 두 자리 자연수 중 3의 배수는

$$3 \times 4, 3 \times 5, 3 \times 6, \dots, 3 \times 33 \text{이므로}$$

$$n(\{x | x \text{는 두 자리 자연수 중 3의 배수}\}) = 30 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

09

집합 $A = \{-i, i, 1\}$ 에 대하여 $x \in A$, $y \in A$ 일 때, $x+y$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	$-i$	i	1
$-i$	$-2i$	0	$1-i$
i	0	$2i$	$1+i$
1	$1-i$	$1+i$	2

$$\text{즉, } B = \{1-i, 1+i, -2i, 2i, 0, 2\} \text{이므로 } n(B) = 6$$

또한, $x \in A$, $y \in A$ 일 때, xy 의 값은 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	$-i$	i	1
$-i$	-1	1	$-i$
i	1	-1	i
1	$-i$	i	1

$$\text{즉, } C = \{-i, i, -1, 1\} \text{이므로 } n(C) = 4$$

$$\therefore n(B) + n(C) = 6 + 4 = 10$$

답 10

10

$x+2y=8$ 을 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 3), (4, 2), (6, 1)$ 이므로

$$n(A) = 3$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 2a\} \text{이므로}$$

$$n(B) = 2a$$

$$\text{이때 } n(B) - n(A) = 7 \text{이므로}$$

$$2a - 3 = 7, 2a = 10$$

$$\therefore a = 5$$

답 5

STEP 1 개념 마무리

본문 p.152

01 3

02 ②

03 80

04 ②

05 7

06 3

01

ㄱ. 10보다 크고 12보다 작은 짝수는 없으므로 공집합이다.
 ㄴ. '2000보다 큰 수의 모임'은 그 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

'잘한다', '가깝다', '많다'와 같은 조건은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 ㄴ, ㄷ, ㄹ은 집합이 아니다.

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ의 2개이고,

공집합인 것은 ㄱ의 1개이므로

$$m=2, n=1 \quad \therefore m+n=3$$

답 3

02

$$\neg. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$$

$$\angle. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \notin M$$

$$\text{ㄷ. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin M$$

$$\text{ㄹ. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$$

따라서 집합 M 의 원소인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

03

집합 $A = \{l, m, n\}$ 에 대하여 l, m, n 은 서로 다른 자연수이므로 $l < m < n$ 이라 하자.

$$B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in A, a \neq b\} \text{에서}$$

$$B = \{l + m, l + n, m + n\} = \{6, 12, 14\}$$

이때 $l + m < l + n < m + n$ 이므로

$$\begin{cases} l + m = 6 & \cdots \text{㉠} \\ l + n = 12 & \cdots \text{㉡} \\ m + n = 14 & \cdots \text{㉢} \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면

$$2(l + m + n) = 32$$

$$\therefore l + m + n = 16 \quad \cdots \text{㉣}$$

㉠, ㉡, ㉢을 ㉣에 각각 대입하여 풀면

$$l = 2, m = 4, n = 10$$

$$\therefore lmn = 2 \times 4 \times 10 = 80$$

답 80

04

① $\{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 유한집합이다.

② $(x-1)(x-2) \leq 0$ 에서 $1 \leq x \leq 2$

이때 1보다 크거나 같고 2보다 작거나 같은 실수는 무수히 많으므로 무한집합이다.

③ 절댓값이 0보다 작은 실수는 없다.

즉, $\emptyset$ 이므로 유한집합이다.

④ $\{(0, 0)\}$ 이므로 유한집합이다.

⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이므로 유한집합이다.

답 ②

05

$x \in A$ 일 때, $(x+2)(x+11)$ 의 값이 6의 배수가 되는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x+2$ 가 6의 배수인 경우

$$x = 4, 10, 16$$

(ii) $x+11$ 이 6의 배수인 경우

$$x = 1, 7, 13, 19$$

(iii) $x+2$ 가 2의 배수이고, $x+11$ 이 3의 배수인 경우

$x+2$ 가 2의 배수가 되도록 하는 x 는

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$$

이 중에서 $x+11$ 이 3의 배수가 되도록 하는 x 를 구하면

$$x = 4, 10, 16$$

(iv) $x+2$ 가 3의 배수이고, $x+11$ 이 2의 배수인 경우

$x+2$ 가 3의 배수가 되도록 하는 x 는

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$$

이 중에서 $x+11$ 이 2의 배수가 되도록 하는 x 를 구하면

$$x=1, 7, 13, 19$$

(i) ~ (iv)에서

$$x=1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$$

각각의 x 에 대하여 집합 B 가 6의 배수인 원소를 가지므로 그 개수는 7이다.

답 7

06

$$A = \{z \mid z = i^n, n \text{은 자연수}\}$$

$$= \{i, -1, -i, 1\}$$

이므로 $z \in A$ 이면

$$z^2 = 1 \text{ 또는 } z^2 = -1$$

이때 $z_1 \in A, z_2 \in A$ 이면 $z_1^2 = 1$ 또는 $z_1^2 = -1$ 이고,

$z_2^2 = 1$ 또는 $z_2^2 = -1$ 이므로 $z_1^2 + z_2^2$ 의 값은 다음 표와 같다.

$z_1^2 \backslash z_2^2$	1	-1
1	2	0
-1	0	-2

즉, $B = \{-2, 0, 2\}$ 이므로 $n(B) = 3$

답 3

보충 설명

i 의 거듭제곱의 성질 |

$$i^{4n-3} = i, i^{4n-2} = -1, i^{4n-1} = -i, i^{4n} = 1 \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

2 집합 사이의 포함 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.157~164

$$11 \quad (1) \subset (2) \not\subset$$

$$12 \quad 8$$

$$13 \quad \text{풀이 참조}$$

$$14 \quad (1) 8 \quad (2) 8 \quad (3) 4$$

$$15 \quad \neg, \supset$$

$$16 \quad \neg, \supset, \supset, \supset$$

$$17 \quad -2$$

$$18 \quad 3$$

$$19 \quad 5$$

$$20 \quad 2$$

$$21 \quad 1$$

$$22 \quad 7$$

$$23 \quad 8$$

$$24 \quad 16$$

$$25 \quad 480$$

$$26 \quad 128$$

$$27 \quad 8$$

$$28 \quad 24$$

$$29 \quad 7$$

$$30 \quad 31$$

11

$$(1) \quad (x+2)(x-4) \leq 0 \text{에서 } -2 \leq x \leq 4$$

$$\text{즉, } \{x \mid (x+2)(x-4) \leq 0\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\} \text{이므로}$$

$$\{-2, 3\} \subset \{x \mid (x+2)(x-4) \leq 0\}$$

$$(2) \quad x(x^2-1)=0 \text{에서 } x(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{즉, } \{x \mid x(x^2-1)=0\} = \{-1, 0, 1\} \text{에서}$$

$$0 \in \{x \mid x(x^2-1)=0\} \text{이지만 } 0 \notin \{1, 2\} \text{이므로}$$

$$\{x \mid x(x^2-1)=0\} \not\subset \{1, 2\}$$

답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$

12

두 집합 A, B 가 서로 같은 집합이므로 두 집합의 모든 원소가 같다.

$$\text{즉, } a+2=3, 6=b-1 \text{이므로}$$

$$a=1, b=7$$

$$\therefore a+b=1+7=8$$

답 8

13

(1) 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 짝수인 자연수}\} = \{2, 4\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}$ 의 4개이다.

(2) 집합 $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에서 집합 B 의 진부분집합은 $\emptyset, \{0\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{0, \emptyset\}, \{0, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 의 7개이다.

$$2^3 - 1$$

답 풀이 참조

14

$$\text{집합 } A = \{1, 2, 3, 6\} \text{이므로}$$

$$n(A) = 4$$

(1) 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

(2) 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

- (3) 1은 반드시 원소로 갖고, 2는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1-1}=2^2=4$$

답 (1) 8 (2) 8 (3) 4

15

집합 A 의 원소는 $\emptyset, -2, 0, 2, \{0\}, \{0, 2\}$ 이다.

ㄱ. $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\{\emptyset\} \subset A \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $\{0, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로

$$\{\{0, 2\}\} \subset A \text{ (참)}$$

ㄷ. $\{-2, 0, 2\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{-2, 0, 2\} \notin A \text{ (거짓)}$$

$\leftarrow -2, 0, 2$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{-2, 0, 2\} \subset A$

ㄹ. $0, \{0\}$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\{0, \{0\}\} \subset A \text{ (참)}$$

ㅁ. $\{-2, 0\}$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{\emptyset, \{-2, 0\}\} \not\subset A \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

16

집합 $f(A) = \{X \mid X \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합을 원소로 갖는 집합이므로 $X \subset A$ 이면 $X \in f(A)$ 이다.

집합 $A = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$ 에 대하여

ㄱ. $\emptyset \subset A$ 이므로 $\emptyset \in f(A)$ (참)

ㄴ. $\emptyset \in A$ 이므로 $\{\emptyset\} \subset A$

$$\therefore \{\emptyset\} \in f(A) \text{ (참)}$$

ㄷ. $a \in A$ 이므로 $\{a\} \subset A$

$$\therefore \{a\} \in f(A) \text{ (참)}$$

ㄹ. $a \notin f(A), b \notin f(A)$ 이므로 $\{a, b\} \not\subset f(A)$ (거짓)

ㅁ. $A \subset A$ 이므로 $A \in f(A)$

$$\therefore \{A\} \subset f(A) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ

보충 설명

ㄹ. $\{a, b\} \subset A$ 이므로 $\{a, b\} \in f(A)$

또한, $\{a, b\} \in f(A)$ 이므로 $\{\{a, b\}\} \subset f(A)$

17

$A \subset B$ 이므로 $1 \in A$ 에서 $1 \in B$ 이다.

즉, $a^2 - 3 = 1$ 또는 $7 - a = 1$ 이므로

$$a^2 - 3 = 1 \text{에서 } a^2 = 4$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$$7 - a = 1 \text{에서 } a = 6$$

(i) $a = -2$ 일 때,

$$A = \{1, 3\}, B = \{1, 3, 9\} \text{이므로}$$

$$A \subset B$$

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$A = \{1, 11\}, B = \{1, 3, 5\} \text{이므로}$$

$$A \not\subset B$$

(iii) $a = 6$ 일 때,

$$A = \{1, 19\}, B = \{1, 3, 33\} \text{이므로}$$

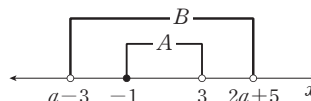
$$A \not\subset B$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 -2 이다.

답 -2

18

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a - 3 < -1, 3 \leq 2a + 5$ 이므로

$$a - 3 < -1 \text{에서 } a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3 \leq 2a + 5 \text{에서}$$

$$2a \geq -2 \quad \therefore a \geq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -1 \leq a < 2$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

답 3

19

$$A = \{x \mid x^2 + x - 6 \leq 0\} \text{에서}$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0, (x + 3)(x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2$$

$$\therefore A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$$

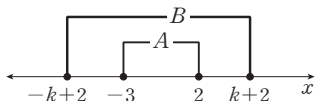
$$B = \{x \mid |x-2| \leq k\} \text{에서}$$

$$|x-2| \leq k, -k \leq x-2 \leq k$$

$$\therefore -k+2 \leq x \leq k+2$$

$$\therefore B = \{x \mid -k+2 \leq x \leq k+2\}$$

이때 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } -k+2 \leq -3, 2 \leq k+2 \text{이므로}$$

$$-k+2 \leq -3 \text{에서 } k \geq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2 \leq k+2 \text{에서 } k \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } k \geq 5$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 5이다.

답 5

20

$A=B$ 이면 $A \subset B$, 즉 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 의 원소이므로 $4 \in A$ 에서 $4 \in B$ 이다.

$$\text{즉, } a^2-5=4 \text{ 또는 } a+2=4 \text{이므로}$$

$$a^2-5=4 \text{에서 } a^2=9$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

$$a+2=4 \text{에서 } a=2$$

$$(i) a = -3 \text{일 때,}$$

$$A = \{-6, 4, 17\}, B = \{-1, 4, 7\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(ii) a = 3 \text{일 때,}$$

$$A = \{0, 4, 17\}, B = \{4, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(iii) a = 2 \text{일 때,}$$

$$A = \{-1, 4, 7\}, B = \{-1, 4, 7\} \text{이므로}$$

$$A = B$$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은 2이다.

답 2

다른 풀이

$A=B$ 이면 $B \subset A$, 즉 집합 B 의 모든 원소가 집합 A 의 원소이므로 $7 \in B$ 에서 $7 \in A$ 이다.

$$\text{즉, } a-3=7 \text{ 또는 } 2a^2-1=7 \text{이므로}$$

$$a-3=7 \text{에서 } a=10$$

$$2a^2-1=7 \text{에서 } 2a^2=8, a^2=4$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$$(i) a=10 \text{일 때,}$$

$$A = \{4, 7, 199\}, B = \{7, 12, 95\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(ii) a = -2 \text{일 때,}$$

$$A = \{-5, 4, 7\}, B = \{-1, 0, 7\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(iii) a=2 \text{일 때,}$$

$$A = \{-1, 4, 7\}, B = \{-1, 4, 7\} \text{이므로}$$

$$A = B$$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$ 를 만족시키는 상수 a 의 값은 2이다.

21

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로

$$A = B$$

$$0 \in B \text{에서 } 0 \in A \text{이므로}$$

$$a=0 \text{ 또는 } \frac{b}{a}=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } b=0$$

$$\text{그런데 } a \neq 0 \text{이므로 } b=0$$

$$\therefore A = \{a, 0, 4\}, B = \{a^2, 4a, 0\}$$

$$4 \in A \text{에서 } 4 \in B \text{이므로}$$

$$a^2=4 \text{ 또는 } 4a=4$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } a = 1$$

$$(i) a = -2 \text{일 때,}$$

$$A = \{-2, 0, 4\}, B = \{-8, 0, 4\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(ii) a = 2 \text{일 때,}$$

$$A = \{0, 2, 4\}, B = \{0, 4, 8\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

$$(iii) a = 1 \text{일 때,}$$

$$A = \{0, 1, 4\}, B = \{0, 1, 4\} \text{이므로}$$

$$A = B$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 a 의 값은 1이다.

$$\therefore a=1$$

$$\therefore a-b=1-0=1$$

답 1

22

$A=B$ 에서 $x+1 \neq x+5$ 이므로

$$x+1=x^2-1 \text{ 또는 } x+1=3x-1$$

$$x+1=x^2-1 \text{에서}$$

$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$$x+1=3x-1 \text{에서 } 2x=2$$

$$\therefore x=1$$

(i) $x=-1$ 일 때,

$$A=\{-2, -1, 0\}, B=\{-4, 0, 4\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

(ii) $x=2$ 일 때,

$$A=\{3, 5, 7\}, B=\{3, 5, 7\} \text{이므로}$$

$$A=B$$

(iii) $x=1$ 일 때,

$$A=\{0, 2, 3\}, B=\{0, 2, 6\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

(i), (ii), (iii)에서 $A=B$ 를 만족시키는 실수 x 의 값은 2이고, 이때 집합 A 의 원소 중 가장 큰 수는 7이다.

답 7

23

집합 A 의 원소 중에서 3의 배수는 3, 6, 9이고, 10의 약수는 1, 2, 5, 10이다.

따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 3, 6, 9는 반드시 원소로 갖고, 1, 2, 5, 10은 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{10-3-4}=2^3=8$$

답 8

24

집합 A 에 대하여 $1 \in X, 2 \in X, 13 \notin X$ 를 만족시키는 집합 A 의 부분집합 X 의 개수는 집합 $\{3, 5, 7, 11\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4=16$$

답 16

25

집합 $A=\{x|x \text{는 } 1 \leq x \leq 9 \text{인 자연수}\}$ 에 대하여

$$A=\{1, 2, 3, \dots, 9\} \text{이므로 } n(A)=9$$

또한, 집합 A 의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 소수인 2, 3, 5, 7 중 적어도 1개를 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^9-2^{9-4}=512-32=480$$

답 480

26

$$A=\{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 6 \text{의 양의 배수}\}$$

$$=\{6, 12, 18\}$$

$$B=\{x|x \text{는 } 20 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$$

$$=\{2, 4, 6, \dots, 20\}$$

이때 $A \subset X \subset B$ 이므로 집합 X 는

집합 $B=\{2, 4, 6, \dots, 20\}$ 의 부분집합 중에서 6, 12, 18을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$2^{10-3}=2^7=128$$

답 128

27

$$2x^2 - 3x - 9 \leq 0 \text{에서}$$

$$(2x+3)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq 3$$

$$\therefore A = \{x \mid 2x^2 - 3x - 9 \leq 0, x \text{는 정수}\}$$

$$= \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{또한, } x^2 - 2x - 3 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$$

$$= \{-1, 3\}$$

이때 $B \subset X \subset A$ 이므로 집합 X 는

집합 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 의 부분집합 중에서 $-1, 3$ 을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 $B \subset X \subset A$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는

$$2^{5-2} = 2^3 = 8$$

답 8

28

$n(A) = m$ 이라 하면

$$k = 4m \text{ (단, } m \leq 7, m \text{은 자연수)} \quad \dots\dots \textcircled{*}$$

이때 $A \subset X \subset B$ 이므로 집합 X 는

집합 $B = \{2, 4, 6, \dots, 30\}$ 의 부분집합 중에서 $\underbrace{4, 8, 12, \dots, k}_{m\text{개}}$ 를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{15-m} = 512 = 2^9$$

$$\text{즉, } 15 - m = 9 \text{이므로 } m = 6$$

$$\therefore k = 4 \times 6 = 24 \text{ (} \because \textcircled{*} \text{)}$$

답 24

보충 설명

(*)에서 $A \subset B$ 이므로 $k \leq 30$

이때 $k = 4m$ 이므로 $4m \leq 30$

$$\therefore m \leq 7.5 \times \times \times$$

이때 m 은 자연수이므로 $m \leq 7$ 이다.

29

조건 (가), (나)에서 x 와 $\frac{12}{x}$ 가 모두 자연수이므로 집합 A 는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합이다.

12의 양의 약수

또한, 조건 (나)에서 $1 \in A$ 이면 $12 \in A$, $2 \in A$ 이면 $6 \in A$, $3 \in A$ 이면 $4 \in A$ 이므로 1과 12, 2와 6, 3과 4는 각각 어느 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A 의 원소이어야 한다.

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3 - 1 = 7$$

답 7

보충 설명

조건을 만족시키는 집합 A 는

$\{1, 12\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 6, 12\}, \{1, 3, 4, 12\},$
 $\{2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 의 7개이다.

30

조건 (가)에서 집합 B 는 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합이고, 조건 (나)에서 $1 \notin B, 2 \notin B, 3 \notin B$ 이다.

따라서 구하는 집합 B 의 개수는 집합 $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^5 - 1 = 31$$

답 31

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.165~166

07 ②	08 ④	09 ②	10 9
11 $2 < k \leq 3$	12 48	13 6	14 7
15 8	16 5	17 80	18 16

07

집합 A 의 원소는 $\emptyset, 0, \{\emptyset\}, \{\emptyset, 1\}$ 이다.

① 1은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{\emptyset, 1\} \not\subset A \text{ (거짓)}$$

② $\emptyset, 0$ 은 집합 A 의 원소이므로

$$\{\emptyset, 0\} \subset A \text{ (참)}$$

③ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \not\subset A \text{ (거짓)}$$

- ④ $\{\emptyset, 1\}$ 은 집합 A 의 원소이므로
 $\{\emptyset, 1\} \in A$ (거짓)
 ⑤ $\{\emptyset\}$ 은 집합 A 의 원소이므로
 $\{\{\emptyset\}\} \subset A$ (거짓)
 따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

08

- 집합 $A = \{\emptyset, 0, 1\}$ 에 대하여
 $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{1\}, \{\emptyset, 0\}, \{\emptyset, 1\}, \{0, 1\}, \{\emptyset, 0, 1\}\}$
 $\neg. \emptyset \in P(A)$ (참)
 $\neg. \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset P(A)$ (참)
 $\neg. \{\emptyset, 0\}$ 은 집합 $P(A)$ 의 원소가 아니므로
 $\{\emptyset, 0\} \not\subset P(A)$ (거짓)
 $\neg. \{\emptyset\} \in P(A)$ 이므로 $\{\{\emptyset\}\} \subset P(A)$ (참)
 따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

답 ④

다른 풀이

집합 $P(A)$ 의 원소를 다 구할 필요 없이 집합 $P(A)$ 가 집합 A 의 부분집합을 원소로 갖는 집합임을 이용하여 참, 거짓을 판별해 보자.

- $\neg. \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$
 $\therefore \emptyset \in P(A)$ (참)
 $\neg. \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset P(A)$ (참)
 $\neg. \neg$ 에서 $\emptyset \in P(A)$
 그런데 $0 \notin P(A)$ 이므로 $\{\emptyset, 0\} \not\subset P(A)$ (거짓)
 $\neg. \emptyset \in A$ 이므로 $\{\emptyset\} \subset A$
 즉, $\{\emptyset\} \in P(A)$ 이므로 $\{\{\emptyset\}\} \subset P(A)$ (참)

09

집합 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 $a \in A, b \in A$ 일 때,
 $a+b, ab$ 의 값은 각각 다음 표와 같다.

$\langle a+b \text{의 값} \rangle$

$a \backslash b$	-1	0	1	2
-1	-2	-1	0	1
0	-1	0	1	2
1	0	1	2	3
2	1	2	3	4

$\langle ab \text{의 값} \rangle$

$a \backslash b$	-1	0	1	2
-1	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0
1	-1	0	1	2
2	-2	0	2	4

- $\therefore B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\},$
 $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$
 $\therefore A \subset C \subset B$

답 ②

10

- $A \subset B$ 이므로 $5 \in A$ 에서 $5 \in B$
 즉, $3-a=5$ 또는 $b+5=5$ 이어야 한다.
 $3-a=5$ 에서 $a=-2$
 $b+5=5$ 에서 $b=0$
 (i) $a=-2$ 일 때,

$$A = \{-1, 5\}, B = \{1, 5, b+5\}$$

이때 $A \subset B$ 이므로 $-1 \in A$ 에서 $-1 \in B$
 즉, $b+5=-1$ 이어야 하므로 $b=-6$
 $\therefore a+b=-2+(-6)=-8$

- (ii) $b=0$ 일 때,

$$A = \{5, a+1\}, B = \{1, 3-a, 5\}$$

이때 $a \neq 4$ 이고 $A \subset B$ 이므로 $(a+1) \in A$ 에서
 $(a+1) \in B$
 즉, $a+1=1$ 또는 $a+1=3-a$ 이어야 한다.
 따라서 $a=0$ 또는 $a=1$ 이므로
 $a+b=0+0=0$ 또는 $a+b=1+0=1$

- (i), (ii)에서

$a+b$ 의 최댓값 M 은 1, 최솟값 m 은 -8 이므로
 $M-m=1-(-8)=9$

답 9

11

- $x^2-x-12 \leq 0$ 에서
 $(x+3)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 4$
 $\therefore A = \{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$

$$|x-1| < k \text{에서 } -k < x-1 < k$$

$$\therefore -k+1 < x < k+1$$

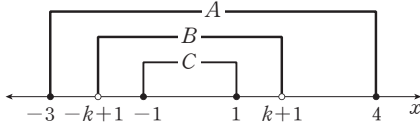
$$\therefore B = \{x \mid -k+1 < x < k+1\}$$

$$x^2 \leq 1 \text{에서 } x^2 - 1 \leq 0$$

$$(x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$$

$$\therefore C = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

이때 $C \subset B \subset A$ 가 성립하도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } -3 \leq -k+1 < -1, 1 < k+1 \leq 4 \text{이므로}$$

$$-3 \leq -k+1 < -1 \text{에서 } -4 \leq -k < -2$$

$$\therefore 2 < k \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$1 < k+1 \leq 4 \text{에서 } 0 < k \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 실수 k 의 값의 범위는

$$2 < k \leq 3$$

답 $2 < k \leq 3$

12

$$A_{25} = \{x \mid x \text{는 } \sqrt{25} \text{ 이하의 홀수}\} = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\} \\ = \{1, 3, 5\}$$

이때 $A_n \subset A_{25}$ 이라면 $\sqrt{n} < 7$ 이어야 하므로
 $n < 49$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

답 48

보충 설명

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_8 = \{1\},$$

$$A_9 = A_{10} = A_{11} = \dots = A_{24} = \{1, 3\},$$

$$A_{25} = A_{26} = A_{27} = \dots = A_{48} = \{1, 3, 5\},$$

$$A_{49} = A_{50} = A_{51} = \dots = A_{80} = \{1, 3, 5, 7\}$$

13

$$A = B \text{이면 } A \subset B \text{ 이므로}$$

$$3 \in A \text{에서 } 3 \in B$$

$$\text{즉, } 3^2 = b \text{ 이므로 } b = 9$$

$$\therefore B = \{x \mid x^2 = 9, x \text{는 실수}\} = \{3, -3\}$$

$$\text{또한, } A = B \text{ 이면 } B \subset A \text{ 이므로 } -3 \in B \text{에서 } -3 \in A$$

$$\text{즉, } a = -3 \text{ 이므로}$$

$$a + b = -3 + 9 = 6$$

답 6

14

$$x^2 - x - 6 = 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore B = \{-2, 3\}$$

$$\text{이때 } A = B \text{ 이므로}$$

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이 $-2, 3$ 이므로 둘 중 하나는 중근이다.

$$A = \{x \mid x^3 + ax^2 + bx + c = 0\} = \{-2, 3\}$$

$$\therefore x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)^2(x-3)$$

$$\text{또는 } x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)(x-3)^2$$

$$(i) \ x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)^2(x-3) \text{ 일 때,}$$

$$c = -12 \text{ 이므로 } c > 0 \text{인 조건을 만족시키지 않는다.}$$

$$(ii) \ x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)(x-3)^2 \text{ 일 때,}$$

$$c = 18$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x^3 + ax^2 + bx + c = (x+2)(x-3)^2 \text{ 이므로}$$

$$Q(x) = x - 3$$

$$\therefore Q(10) = 10 - 3 = 7$$

답 7

15

집합 A 의 부분집합 중 2 또는 4는 원소로 갖고 5는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수에서 2, 4, 5를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

이때 집합 A 의 원소의 개수는 n 이므로

$$2^{n-1} - 2^{n-3} = 96$$

$$2^2 \times 2^{n-3} - 2^{n-3} = 96, 4 \times 2^{n-3} - 2^{n-3} = 96$$

$$3 \times 2^{n-3} = 96, 2^{n-3} = 32, 2^{n-3} = 2^5$$

$$\text{즉, } n-3=5 \text{ 이므로 } n=8$$

답 8

16

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 짝수는 적어도 하나 원소로 갖고, 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않는 부분집합을 B 라 하자.

- (i) $2 \in B, 4 \notin B$ 일 때,
 $2 \in B$ 이고 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로 $1 \notin B, 3 \notin B$
 따라서 집합 B 로 가능한 경우는 $\{2\}, \{2, 5\}$ 의 2가지이다.
- (ii) $2 \notin B, 4 \in B$ 일 때,
 $4 \in B$ 이고 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로 $3 \notin B, 5 \notin B$
 따라서 집합 B 로 가능한 경우는 $\{4\}, \{1, 4\}$ 의 2가지이다.
- (iii) $2 \in B, 4 \in B$ 일 때,
 연속된 두 자연수는 원소로 갖지 않아야 하므로 $1 \notin B, 3 \notin B, 5 \notin B$
 따라서 집합 B 로 가능한 경우는 $\{2, 4\}$ 의 1가지이다.
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합 B 의 개수는 $2+2+1=5$

답 5

17

조건 (가)에서 $n(B)=2$ 이므로 집합 A 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하여 집합 B 의 원소로 정하면 가능한 집합 B 의 개수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그 각각의 집합 B 에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 집합 C 의 개수는

$$2^{5-2} = 2^3 = 8 \quad (\because n(A)=5, n(B)=2)$$

따라서 조건을 만족시키는 두 집합 B, C 의 순서쌍 (B, C) 의 개수는

$$10 \times 8 = 80$$

답 80

단계	채점 기준	배점
(가)	조건 (가)를 만족시키는 집합 B 의 개수를 구한 경우	40%
(나)	조건 (가)를 만족시키는 어떤 집합 B 에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 집합 C 의 개수를 구한 경우	40%
(다)	두 집합 B, C 의 순서쌍 (B, C) 의 개수를 구한 경우	20%

18

조건 (가)에서 x 와 $10-x$ 가 모두 자연수이므로 $x \geq 1, 10-x \geq 1$ 에서 $1 \leq x \leq 9$

즉, 집합 A 는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 부분집합이다. 또한, 조건 (가)에서 $1 \in A$ 이면 $9 \in A, 2 \in A$ 이면 $8 \in A, 3 \in A$ 이면 $7 \in A, 4 \in A$ 이면 $6 \in A$ 이고 $5 \in A$ 이면 $5 \in A$ 이므로 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 각각 어느 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A 의 원소이어야 하고 5도 집합 A 의 원소가 될 수 있다.

이때 조건 (나)에서 집합 A 는 원소의 개수가 홀수이므로 5는 반드시 집합 A 의 원소이어야 한다.

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^4 = 16$$

답 16

보충 설명

조건을 만족시키는 집합 A 는

$\{5\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 6\},$
 $\{1, 2, 5, 8, 9\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}, \{1, 4, 5, 6, 9\},$
 $\{2, 3, 5, 7, 8\}, \{2, 4, 5, 6, 8\}, \{3, 4, 5, 6, 7\},$
 $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}, \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\},$
 $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 의 16개이다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.167

1 28 2 ③ 3 10 4 24
 5 256 6 32

1

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여 $M(X) \geq 3$ 을 만족시키는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $M(X)=3$ 일 때,

$3 \in X, 4 \notin X, 5 \notin X$ 이어야 하므로 집합 X 의 개수는

$$2^{5-1-2} = 2^2 = 4$$

집합 X 의 가장 큰 원소가 3이므로 3보다 큰 4, 5는 X 의 원소가 될 수 없다.

(ii) $M(X)=4$ 일 때,

$4 \in X, 5 \notin X$ 이어야 하므로 집합 X 의 개수는
 $2^{5-1-1}=2^3=8$ 집합 X 의 가장 큰 원소가 4이므로
4보다 큰 5는 X 의 원소가 될 수 없다.

(iii) $M(X)=5$ 일 때,

$5 \in X$ 이어야 하므로 집합 X 의 개수는
 $2^{5-1}=2^4=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$4+8+16=28$$

답 28

다른 풀이

$M(X) \geq 3$ 을 만족시키려면 집합 A 의 부분집합 X 는 3 이상의 원소를 적어도 하나 원소로 가져야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 집합 X 는 집합 A 의 부분집합에서 3 이상의 원소를 하나도 원소로 갖지 않는 집합, 즉 $\{1, 2\}$ 의 부분집합을 제외한 것과 같다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

2

ㄱ. $3^1=3, 3^2=9, 3^3=27, 3^4=81, 3^5=243, \dots$ 이므로

$$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$$

$$\therefore 1 \in A(3) \text{ (참)}$$

ㄴ. $6^1=6, 6^2=36, 6^3=216, \dots$ 이므로

$$A(6)=\{6\}$$

이때 ㄱ에서 $A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$ 이므로

$$A(6) \not\subset A(3) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $3^3=27$ 이므로 $A(27)=A(7)$

이때 $7^1=7, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=16807, \dots$ 이므로

$$A(3^3)=\{1, 3, 7, 9\}=A(3)$$

즉, $A(3^n)=A(3)$ 을 만족시키는 1보다 큰 자연수 n 이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

보충 설명

$A(3^n)=A(3)$ 을 만족시키는 자연수 n 은
 $n=2k-1$ (k 는 자연수)이다.

3

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 합이 10 이상이 되려면 그 집합은 적어도 3개 이상의 원소를 가져야 하므로 다음과 같이 나누어 부분집합을 구할 수 있다.

(i) 원소가 3개인 부분집합 원소가 1개일 때, 원소의 합의 최댓값은 5
원소가 2개일 때, 원소의 합의 최댓값은 4+5=9

원소의 합이 10 이상인 부분집합은 $\{1, 4, 5\}$,
 $\{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ 의 4개

(ii) 원소가 4개인 부분집합

원소가 4개인 부분집합은 모두 원소의 합이 10 이상이므로 $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$,
 $\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$ 의 5개

(iii) 원소가 5개인 부분집합

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 1개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$$4+5+1=10$$

답 10

다른 풀이

집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 모든 원소의 합을 S 라 하면

$$S=1+2+3+4+5=15$$

(i) 부분집합의 원소의 합이 10일 때,

$10=S-5$ 이므로 이 부분집합은 집합 A 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 합이 5가 되는 수들을 제외한 원소들의 집합으로 생각할 수 있다.

즉, 이 부분집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 합이 5인 부분집합의 개수와 같다.

이때 원소의 합이 5인 부분집합은 $\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}$ 이므로 원소의 합이 10인 부분집합은 3개이다.

(ii) 부분집합의 원소의 합이 11일 때,

$11=S-4$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면

원소의 합이 4인 부분집합은 $\{1, 3\}, \{4\}$ 이므로 원소의 합이 11인 부분집합은 2개이다.

(iii) 부분집합의 원소의 합이 12일 때,

$12=S-3$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면

원소의 합이 3인 부분집합은 $\{1, 2\}, \{3\}$ 이므로 원소의 합이 12인 부분집합은 2개이다.

(iv) 부분집합의 원소의 합이 13 또는 14일 때,

$13=S-2, 14=S-1$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 생각하면 원소의 합이 2 또는 1인 부분집합은 $\{2\}, \{1\}$ 이므로 원소의 합이 13 또는 14인 부분집합은 2개이다.

06. 집합의 연산

1 집합의 연산

기본 + 필수연습

본문 pp.174~178

- 01 (1) {2, 4, 6, 12} (2) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12}
 (3) {1, 3, 5, 7, 9, 11} (4) {8, 10}
- 02 32 03 {3, 4, 7, 8}
- 04 $\neg$, $\subset$, $\supset$ 05 1 06 {2, 9, 12}
- 07 6 08 $\neg$, $\subset$, $\supset$ 09 7
- 10 $1 < k \leq 6$ 11 4 12 32 13 4

01

$U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 이므로

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

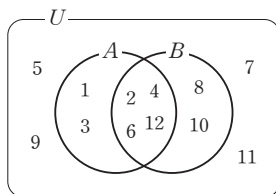
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

- (1) $A \cap B = \{2, 4, 6, 12\}$
 (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 (3) $B^C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
 (4) $B - A = \{8, 10\}$

답 (1) {2, 4, 6, 12} (2) {1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12}
 (3) {1, 3, 5, 7, 9, 11} (4) {8, 10}

보충 설명

벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



02

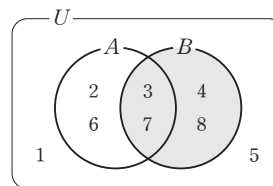
집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 집합 $\{3, 5\}$ 와 서로소인 집합의 개수는 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로 $\leftarrow$ 집합 $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
 $2^{7-2} = 2^5 = 32$

답 32

03

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(A \cup B)^C = \{1, 5\}$,

$A - B = \{2, 6\}$, $B - A = \{4, 8\}$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

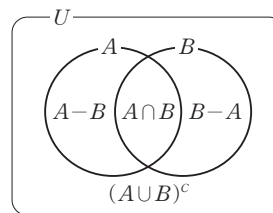


$\therefore B = \{3, 4, 7, 8\}$

답 {3, 4, 7, 8}

보충 설명

벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 집합은 다음과 같다.



04

- $\neg$. $(A \cap B) \subset A$ 이므로
 $A \cup (A \cap B) = A$ (참)
 $\vdash$. $(B - A) \cap A = \emptyset$ 이므로
 $(B - A) \not\subset A$ (거짓)
 $\vdash$. $B \cup \emptyset = B$ (참)
 $\vdash$. $\emptyset^C = U$ (참)
 따라서 항상 옳은 것은 $\neg$, $\vdash$, $\supset$ 이다.

답 $\neg$, $\vdash$, $\supset$

05

$A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 $2 \in A$

즉, $a^2 + a = 2$ 이므로 $a^2 + a - 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2$ 또는 $a = 1$

(i) $a = -2$ 일 때,

$A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 1, 2\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 2\}$

(ii) $a = 1$ 일 때,

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$

(i), (ii)에서 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 1, 2\}$ 이므로
 $A \cup B = \{-2, 1, 2\}$
 따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은
 $-2 + 1 + 2 = 1$

답 1

06

$(A - B) \subset A$ 에서 $5 \in A$ 이므로 $a^2 - 4 = 5$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3$ 또는 $a = -3$

(i) $a = 3$ 일 때,

$A = \{3, 5, 9, 12\}$, $B = \{2, 9, 12\}$ 이므로

$A - B = \{3, 5\}$

(ii) $a = -3$ 일 때,

$A = \{3, 5, 9, 12\}$, $B = \{3, 6, 8\}$ 이므로

$A - B = \{5, 9, 12\}$

(i), (ii)에서 $B = \{2, 9, 12\}$

답 $\{2, 9, 12\}$

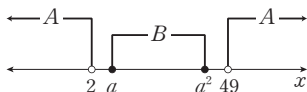
07

$A = \{x \mid (x-2)(x-49) > 0\} = \{x \mid x < 2 \text{ 또는 } x > 49\}$

a 가 자연수이므로 $a \leq a^2$ 에서

$B = \{x \mid (x-a)(x-a^2) \leq 0\}$
 $= \{x \mid a \leq x \leq a^2\}$

이때 두 집합 A, B 가 서로소, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 이 되기 위해서는
 는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $a \geq 2$, $a^2 \leq 49$ 를 동시에 만족시켜야 하므로

$a \geq 2$, $-7 \leq a \leq 7 \quad \therefore 2 \leq a \leq 7$

따라서 구하는 자연수 a 는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 6

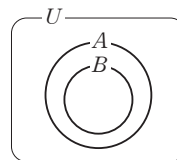
08

두 집합 A^c, B 가 서로소이므로 $A^c \cap B = \emptyset$

즉, $B - A = \emptyset$ 에서 $A \cap B = B$ 이므로

$B \subset A$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $B - A = \emptyset$ (참)

ㄴ. $A \cap B = B$ (거짓)

ㄷ. $B \subset A$ (참)

ㄹ. $B \subset A$ 이므로 $A \cup B = A$ (거짓)

ㅁ. $A^c \cup B \neq U$ (거짓)

ㅂ. ㄷ에서 $A \cup B = A$ 이므로

$(A \cup B)^c = A^c$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅂ

09

$A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$ 이다.

(i) $B = \emptyset$ 인 경우

방정식 $mx = x + 3$, 즉 $(m-1)x = 3$ 의 해가 존재하지
 않아야 한다.

이 방정식이 $0 \times x = 3$ 의 꼴일 때 해가 없으므로

$m = 1$

(ii) $B \neq \emptyset$ 인 경우 $\leftarrow m \neq 1$ 일 때, $mx = x + 3$ 은 일차방정식이므로 $n(B) = 10$ 이다.

$B = \{1\}$ 일 때, $m = 4$

$B = \{3\}$ 일 때, $3m = 6 \quad \therefore m = 2$

(i), (ii)에서 모든 실수 m 의 값의 합은

$1 + 4 + 2 = 7$

답 7

10

$A \cup C = C$ 에서 $A \subset C$

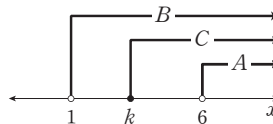
$B \cap C = C$ 에서 $C \subset B$

$\therefore A \subset C \subset B$

이때 $A = \{x \mid 7 - x < 1\} = \{x \mid x > 6\}$,

$B = \{x \mid 3x + 1 > 4\} = \{x \mid x > 1\}$, $C = \{x \mid x \geq k\}$ 이므로

$A \subset C \subset B$ 하려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore 1 < k \leq 6$

답 $1 < k \leq 6$

보충 설명

$k=1$ 이면 $1 \notin B$, $1 \in C$ 이므로 $C \not\subset B$

$k=6$ 이면 $6 \in C$, $6 \notin A$ 이므로 $A \subset C$

11

$(A-B) \cup X = X$ 에서 $(A-B) \subset X$

$\therefore \{-2\} \subset X$ ㉠

$B^c \cap X = X$ 에서 $X \subset B^c$

$\therefore X \subset \{-2, 2, 3\}$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\{-2\} \subset X \subset \{-2, 2, 3\}$

이를 만족시키는 집합 X 는 집합 $\{-2, 2, 3\}$ 의 부분집합 중에서 -2 를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

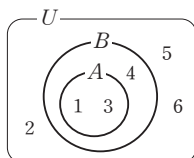
따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{3-1} = 2^2 = 4$$

답 4

12

세 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $A \subset B$ 이므로 $A \cap X = B \cap X$ 를 만족시키려면

$(B-A) \not\subset X$

이때 $B-A = \{4\}$ 이므로 집합 X 는 집합 U 의 부분집합 중에서 4 를 반드시 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

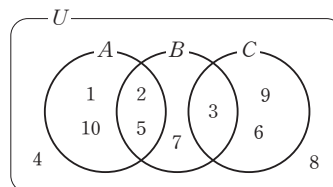
$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

답 32

13

$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로

$A = \{1, 2, 5, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{3, 6, 9\}$ 이고, 이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$A \cap C = \emptyset$ 이므로 $(A \cap C) \cup X = \emptyset \cup X = X$

즉, $(A \cap B) \cup X = (A \cap C) \cup X$ 에서 $(A \cap B) \cup X = X$

이므로

$(A \cap B) \subset X$

$\therefore \{2, 5\} \subset X$ ㉠

또한, 집합 X 는 집합 A 의 부분집합이므로

$X \subset A$

$\therefore X \subset \{1, 2, 5, 10\}$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\{2, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 5, 10\}$

이를 만족시키는 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 5, 10\}$ 의 부분집합 중에서 $2, 5$ 를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{4-2} = 2^2 = 4$$

답 4

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.179-180

01 2	02 369	03 5	04 4
05 ④	06 ③	07 14	08 12
09 ①	10 6	11 128	12 8

01

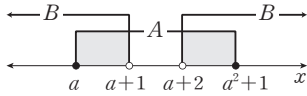
모든 자연수 a 에 대하여 $a^2 + 1 > a$ 이므로

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x^2 - (a^2 + a + 1)x + a^3 + a \leq 0\} \\ &= \{x \mid x^2 - (a^2 + a + 1)x + a(a^2 + 1) \leq 0\} \\ &= \{x \mid (x - a)\{x - (a^2 + 1)\} \leq 0\} \\ &= \{x \mid a \leq x \leq a^2 + 1\} \end{aligned}$$

또한, 모든 자연수 a 에 대하여 $a + 1 < a + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid x^2 - (2a + 3)x + (a + 1)(a + 2) > 0\} \\ &= \{x \mid \{x - (a + 1)\}\{x - (a + 2)\} > 0\} \\ &= \{x \mid x < a + 1 \text{ 또는 } x > a + 2\} \end{aligned}$$

이때 자연수 a 에 대하여 $a < a+1 < a+2$ 이므로
 $A \cap B = \{x \mid 2 \leq x < 3 \text{ 또는 } 4 < x \leq 5\}$ 를 만족시키기 위해
 서는 $A \cap B$ 가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $a=2$, $a+1=3$, $a+2=4$, $a^2+1=5$ 이므로
 $a=2$

답 2

02

집합 B 의 원소는 모두 자연수의 제곱수이고,
 $(A \cap B) \subset B$ 에서 $\{c, d\} \subset B$ 이므로 c, d 는 자연수의 제곱
 수이다.

이때 $c+d=25$ 이므로 $c+d=9+16=3^2+4^2$ 의 경우만
 가능하다.

$$\therefore A \cap B = \{c, d\} = \{9, 16\}$$

한편, $(A \cap B) \subset A$ 에서 $9 \in A$, $16 \in A$ 이고

$(A \cap B) \subset B$ 에서 $9 \in B$, $16 \in B$ 이므로

$$\sqrt{9} \in A, \sqrt{16} \in A \quad \therefore 3 \in A, 4 \in A$$

즉, $A = \{3, 4, 9, 16\}$, $B = \{9, 16, 81, 256\}$ 이므로

$$A \cup B = \{3, 4, 9, 16, 81, 256\}$$

따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은

$$3+4+9+16+81+256=369$$

답 369

03

두 집합 A, B 가 서로소가 아니므로 $A \cap B \neq \emptyset$ 이다.

$x^2-1 \in A$ 에서 $x^2-1 \in B$ 이면 A, B 는 서로소가 아니므로

(i) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3$ 에서

$$x=\sqrt{3} \text{ 또는 } x=-\sqrt{3}$$

그런데 x 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x^2-1=x+1$ 일 때, $x^2-x-2=0$ 에서

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$x=-1$ 일 때, $A=\{0, 1, 5\}$, $B=\{0, 2\}$ 에서

$A \cap B = \{0\}$ 이므로 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

$x=2$ 일 때, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3\}$ 에서

$A \cap B = \{3\}$ 이므로 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

한편, $x+1 \in B$ 에서 $x+1 \in A$ 이면 A, B 는 서로소가 아니
 므로

(iii) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때,

$A=\{-1, 1, 5\}$, $B=\{1, 2\}$ 에서

$A \cap B = \{1\}$ 이므로 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

(iv) $x+1=5$, 즉 $x=4$ 일 때,

$A=\{1, 5, 15\}$, $B=\{2, 5\}$ 에서

$A \cap B = \{5\}$ 이므로 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

(v) $x+1=x^2-1$ 일 때,

(ii)에 의하여 $x=-1$ 또는 $x=2$

(i)~(v)에서 구하는 정수 x 의 값은 $-1, 2, 0, 4$ 이므로 그 합은
 $-1+2+0+4=5$

답 5

04

$$A_1 = \{x \mid 3 \leq x \leq 18\}, A_2 = \{x \mid 7 \leq x \leq 40\},$$

$$A_3 = \{x \mid 11 \leq x \leq 62\}, \dots, A_n = \{x \mid 4n-1 \leq x \leq 22n-4\}$$

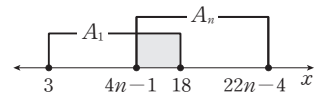
이므로 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ 이 성립하려면

$A_1 \cap A_n \neq \emptyset$ 이어야 한다.

즉, 오른쪽 그림에서

$$4n-1 \leq 18, 4n \leq 19$$

$$\therefore n \leq \frac{19}{4}$$



따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 4이다.

답 4

보충 설명

$$A_1 = \{x \mid 3 \leq x \leq 18\}, A_2 = \{x \mid 7 \leq x \leq 40\},$$

$$A_3 = \{x \mid 11 \leq x \leq 62\}, A_4 = \{x \mid 15 \leq x \leq 84\},$$

$$A_5 = \{x \mid 19 \leq x \leq 106\} \text{이므로}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \emptyset, A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \emptyset$$

$$\{x \mid 15 \leq x \leq 18\}$$

05

$$45=3^2 \times 5 \text{이므로}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 45 \text{와 서로소인 수}\}$$

$$= \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수도 아니고 } 5 \text{의 배수도 아닌 수}\}$$

이때 $A = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$ 이므로

$$A^c = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수가 아닌 수}\}$$

$$B^c = \{x | x \text{는 } 5 \text{의 배수가 아닌 수}\}$$

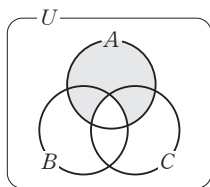
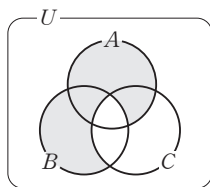
$$\therefore C = A^c \cap B^c$$

답 ④

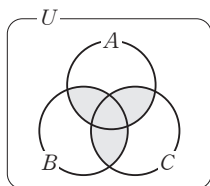
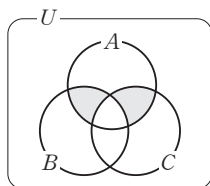
06

①~⑤의 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 각각 다음 그림과 같다.

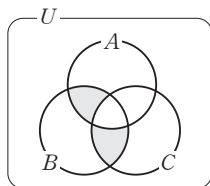
① $\{A \cup (B - C)\} - (B \cap C)$ ② $\{A \cup (B \cap C)\} - (B \cap C)$



③ $\{A \cap (B \cup C)\} - (B \cap C)$ ④ $\{A \cap (B \cup C)\} \cup (B \cap C)$



⑤ $\{B \cap (A \cup C)\} - (A \cap C)$



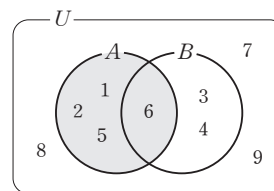
따라서 주어진 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ③이다.

답 ③

07

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, A \cap B = \{6\}, A^c \cap B = \{3, 4\},$$

$A^c \cap B^c = \{7, 8, 9\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.

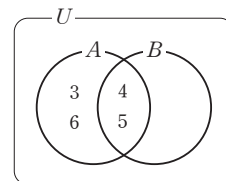


따라서 $A = \{1, 2, 5, 6\}$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 5 + 6 = 14$

답 14

08

조건 ㉞에서 $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $A^c \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ 이므로 집합 A 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



조건 ㉞를 만족시키는 집합 X 에 대하여 $a \in X$ 라 하면

$$X = \{a\}$$

(i) $a \in (A - B)$, 즉 $a \in \{3, 6\}$ 일 때,

$$A \cup X = \{3, 4, 5, 6\} \text{이므로}$$

$$(A \cup X) - B = \{3, 6\}$$

즉, 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수는 2이다.

(ii) $a \in (A \cap B)$, 즉 $a \in \{4, 5\}$ 일 때,

$$A \cup X = \{3, 4, 5, 6\} \text{이므로}$$

$$(A \cup X) - B = \{3, 6\}$$

즉, 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수는 2이다.

(iii) $a \in (B - A)$ 일 때,

$$A \cup X = \{3, 4, 5, 6, a\} \text{이므로}$$

$$(A \cup X) - B = \{3, 6\}$$

즉, 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수는 2이다.

(iv) $a \in (A^c \cap B^c)$ 일 때,

$$A \cup X = \{3, 4, 5, 6, a\} \text{이므로}$$

$$(A \cup X) - B = \{3, 6, a\}$$

즉, 집합 $(A \cup X) - B$ 의 원소의 개수는 3이다.

(i)~(iv)에서 조건 ㉞를 만족시키려면 $A^c \cap B^c = \emptyset$ 이어야 하므로 $A^c \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ 에서

$$B = \{1, 2, 4, 5\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

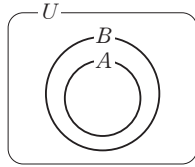
$$1 + 2 + 4 + 5 = 12$$

답 12

09

서로 다른 두 집합 A, B 에 대하여 집합 $A-B, B-A$ 는 항상 서로소이므로 $(A-B) \subset (B-A)$ 를 만족시키기 위해서는 $A-B=\emptyset$ 이어야 한다.

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



- ① $A \subset B$
- ② $B-A \neq \emptyset$ 일 때, $B \not\subset A$
- ③ $A \neq \emptyset$ 일 때, $A \cap B = A \neq \emptyset$
- ④ $B \neq U$ 일 때, $A \cup B = B \neq U$
- ⑤ $B=U$ 일 때, $A \cup B = U$

따라서 항상 성립하는 것은 ①이다.

답 ①

10

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$,
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$

이때 $(A \cap B) - X = \emptyset$ 이므로

$(A \cap B) \subset X$

또한, $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

즉, 집합 X 는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

그런데 집합 X 의 모든 원소의 합이 29이고,

$1+2+3+6=12$ 이므로 1, 2, 3, 6을 제외한 집합 X 의 원소의 합은 17이 되어야 한다.

이때 4, 8, 9, 12, 18, 24 중에서 몇 개의 수를 선택하여 그 합이 17이 되는 경우는 8, 9를 선택하는 경우뿐이므로

$X = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$

따라서 집합 X 의 원소의 개수는 6이다.

답 6

단계	채점 기준	배점
(가)	두 집합 $A \cap B, A \cup B$ 의 원소를 구한 경우	20%
(나)	집합 X 의 연산과 포함 관계에 대한 조건을 이용하여 집합 X 가 반드시 갖는 원소를 찾은 경우	40%
(다)	집합 X 의 모든 원소의 합에 대한 조건을 이용하여 집합 X 를 구하고, 그 원소의 개수를 구한 경우	40%

11

$A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$,

$B = \{x | x^2 \leq 25, x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$A \cup C = B \cup C$ 에서 $\{2, 3, 5, 7\} \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup C$ 이므로 집합 C 는 두 집합 $\{2, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 공통인 원소 2, 3, 5를 제외한 나머지 원소 1, 4, 7을 반드시 원소로 가져야 한다.

즉, 집합 C 는 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 의 부분집합 중에서 1, 4, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 C 의 개수는

$$2^{10-3} = 2^7 = 128$$

답 128

12

$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

$C = \{5, 10, 15, 20\}$

조건 (가)에서 $X - A = \emptyset$ 이므로

$X \subset A$ ㉠

조건 (나)에서 X 는 B 와 서로소이므로

$X \cap B = \emptyset$ ㉡

㉠, ㉡에서 $X \subset (A - B) = \{5, 7, 8, 9, 10\}$

한편, 조건 (다)에서 $n(X \cap C) = 2$ 이므로 $X \cap C = \{5, 10\}$

즉, 집합 X 는 집합 $\{5, 7, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합 중에서 5, 10을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는

$$2^{5-2} = 2^3 = 8$$

답 8

2 집합의 연산 법칙

기본 + 필수연습

본문 pp.183~186

14 $\{2, 5, 7\}$

15 (1) $\{6\}$ (2) $\{1, 2, 5, 6\}$ (3) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (4) $\{1, 2\}$

16 (1) A (2) B 17 18 18 16

19 12 20 28 21 22 22 5

23 ㄴ, ㄷ

14

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= \{2, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$= \{2, 5, 7\}$$

답 {2, 5, 7}

다른 풀이

$$A \cap B = \{2, 5\}, A \cap C = \{5, 7\} \text{이므로}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 5\} \cup \{5, 7\}$$

$$= \{2, 5, 7\}$$

15

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 4\}$$

$$(1) A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= U - (A \cup B)$$

$$= \{6\}$$

$$(2) A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= U - (A \cap B)$$

$$= \{1, 2, 5, 6\}$$

$$(3) (B^c - A)^c = (B^c \cap A^c)^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= B \cup A \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= A \cup B \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(4) A \cap (A - B^c)^c = A \cap \{A \cap (B^c)^c\}^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= A \cap (A \cap B)^c$$

$$= A - (A \cap B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= \{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4\}$$

$$= \{1, 2\}$$

답 (1) {6} (2) {1, 2, 5, 6} (3) {1, 2, 3, 4, 5} (4) {1, 2}

다른 풀이

$$(4) A \cap (A - B^c)^c = A \cap \{A \cap (B^c)^c\}^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= A \cap (A \cap B)^c$$

$$= A \cap (A^c \cup B^c) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= \emptyset \cup (A - B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= A - B$$

$$= \{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4, 5\}$$

$$= \{1, 2\}$$

16

$$(1) (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A$$

$$(2) \{A - (B - A^c)^c\} \cup (B - A)$$

$$= \{A - (B \cap A)^c\} \cup (B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= \{A \cap (B \cap A)\} \cup (B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= \{A \cap (A \cap B)\} \cup (B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$= \{(A \cap A) \cap B\} \cup (B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{결합법칙}$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \quad \leftarrow \text{교환법칙}$$

$$= B \cap (A \cup A^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= B \cap U = B$$

답 (1) A (2) B

17

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{이므로}$$

$$(B^c - A)^c - B = (B^c \cap A^c)^c \cap B^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= (B \cup A) \cap B^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙}$$

$$= (B \cap B^c) \cup (A \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙}$$

$$= \emptyset \cup (A - B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질}$$

$$= A - B$$

$$= \{8, 10\}$$

따라서 집합 $(B^c - A)^c - B$ 의 모든 원소의 합은

$$8 + 10 = 18$$

답 18

18

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \{1, 2\} \text{이}$$

므로

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\
&= (A - B) \cup (B - A) \\
&= (A \cup B) - (A \cap B) \quad \leftarrow \text{대칭차집합의 성질} \\
&= \{3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 6\} \\
&= \{4, 5, 7\}
\end{aligned}$$

따라서 구하는 원소의 합은

$$4 + 5 + 7 = 16$$

답 16

19

A_k 는 자연수 k 의 배수인 자연수의 집합이므로

$$\begin{aligned}
A_4 \cap (A_3 \cup A_2) &= (A_4 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_2) \\
&= A_{12} \cup A_4 \\
&\quad \leftarrow \begin{array}{l} 4, 2 \text{의 최소공배수} \\ 4, 3 \text{의 최소공배수} \end{array} \\
&= A_4
\end{aligned}$$

따라서 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ 의 원소 중에서 4의 배수는 12개이므로 구하는 원소의 개수는 12이다.

답 12

20

$$\begin{aligned}
A_{12} \cap A_8 &= A_{24} \text{이므로 } A_m \subset (A_{12} \cap A_8) \text{에서} \\
A_m &\subset A_{24} \quad \leftarrow 12, 8 \text{의 최소공배수}
\end{aligned}$$

즉, m 은 24의 배수이므로 m 의 최솟값은 24이다.

$$(A_{16} \cup A_{12}) \subset A_n \text{에서}$$

$$A_{16} \subset A_n, A_{12} \subset A_n$$

즉, n 은 16의 약수이면서 12의 약수이므로 n 은 16과 12의 공약수이다. 이 중에서 n 의 최댓값은 16과 12의 최대공약수인 4이다.

따라서 m 의 최솟값과 n 의 최댓값의 합은

$$24 + 4 = 28$$

답 28

21

50 이하의 자연수 n 에 대하여 다음 두 조건이 성립해야 한다.

(i) $A_n \cap A_2 = A_{2n}$ 에서 $2n$ 은 n 과 2의 최소공배수이므로 n 은 홀수이다.

(ii) 50이 집합 $A_2 - A_n$ 의 원소이므로 n 은 50의 약수가 아니다. $\leftarrow 50 \notin A_n$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 50 이하의 자연수 중에서 50의 약수 1, 2, 5, 10, 25, 50이 아닌 홀수이므로 그 개수는

$$\begin{aligned}
25 - 3 &= 22 \\
&\quad \leftarrow \begin{array}{l} 1, 5, 25 \\ \text{홀수의 개수} \end{array}
\end{aligned}$$

답 22

22

$$\begin{aligned}
A \star B &= (A \cup B) \cap (A \cup B^c) \\
&= A \cup (B \cap B^c) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\
&= A \cup \emptyset = A,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \star A &= (A \cup A) \cap (A \cup A^c) \\
&= A \cap U \\
&= A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (A \star B) \star A &= A \star A \\
&= A \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5\}
\end{aligned}$$

따라서 집합 $(A \star B) \star A$ 의 원소의 개수는 5이다.

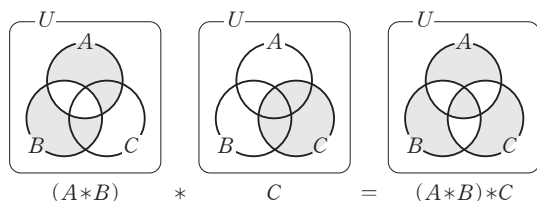
답 5

23

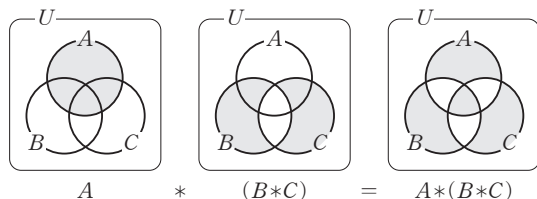
$$\begin{aligned}
\neg, A \star A^c &= (A \cup A^c) - (A \cap A^c) \\
&= U - \emptyset \\
&= U \text{ (거짓)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vdash, A^c \star B^c &= (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\
&= (A \cap B)^c - (A \cup B)^c \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\
&= (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \quad \leftarrow \text{교환법칙} \\
&= (A \cup B) - (A \cap B) \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\
&= A \star B \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄷ, $(A \star B) \star C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



또한, $A*(B*C)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore (A*B)*C = A*(B*C) \text{ (참)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

보충 설명

ㄷ. $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는 대칭차집합이므로 연산 $*$ 에 대한 결합법칙 $(A*B)*C = A*(B*C)$ 가 성립함을 알 수 있다.

STEP 1 개념 마무리

본문 p.187

- 13 16 14 ② 15 ① 16 ㄴ, ㄷ
17 ③ 18 ㄱ

13

집합 A 는 자연수를 6으로 나눈 나머지의 집합이므로 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $B = \{1, 5\}$ 이고

$$\begin{aligned} (B^c \cup C) \cap B &= (B^c \cap B) \cup (C \cap B) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= \emptyset \cup (B \cap C) \quad \leftarrow \text{교환법칙} \\ &= B \cap C \\ &= \{5\} \end{aligned}$$

이므로 집합 C 는 집합 A 의 부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 C 의 개수는

$$2^{6-1-1} = 2^4 = 16$$

답 16

14

$$\begin{aligned} \neg. (A-B)^c \cap A &= (A \cap B^c)^c \cap A \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= (A^c \cup B) \cap A \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \quad \leftarrow \text{교환법칙} \\ &= A \cap B \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \quad \leftarrow \text{차집합의 성질} \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= \{A \cap (A^c \cup C^c)\} \cap B \quad \leftarrow \text{교환법칙, 결합법칙} \\ &= \{(A \cap A^c) \cup (A \cap C^c)\} \cap B \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= \{\emptyset \cup (A \cap C^c)\} \cap B \\ &= (A \cap C^c) \cap B \\ &= A \cap (B \cap C^c) \quad \leftarrow \text{교환법칙, 결합법칙} \\ &= A \cap (B - C) \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \{A \cup (A^c \cap B)\} \cap \{A \cap (A \cup B)\} &= \{(A \cup A^c) \cap (A \cup B)\} \cap A \quad \leftarrow \text{분배법칙} \\ &= \{U \cap (A \cup B)\} \cap A \\ &= (A \cup B) \cap A = A \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

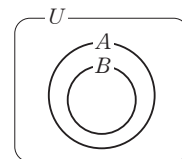
답 ②

15

$$\begin{aligned} \{A \cap (A \cup B^c)^c\} \cup (A \cap B) &= \{A \cap (A^c \cap B)\} \cup (A \cap B) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\ &= \{(A \cap A^c) \cap B\} \cup (A \cap B) \quad \leftarrow \text{결합법칙} \\ &= (\emptyset \cap B) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B \end{aligned}$$

즉, $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$ 이다.

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A \cap B = B$ (참)

ㄴ. $B \subset A$ 이므로 $A^c \subset B^c$ (참)

ㄷ. $A - B \neq \emptyset$ (거짓)

ㄹ. $A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c$

이때 ㄷ에서 $A - B \neq \emptyset$ 이므로 $A^c \cup B \neq U$ (거짓)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

16

ㄱ. A_3 은 3의 배수인 자연수의 집합이고, A_4 는 4의 배수인 자연수의 집합이므로 $A_3 \cap A_4 = A_{12}$

$\therefore A_3 \cap A_4 \neq A_6$ (거짓)

ㄴ. B_2 는 2와 서로소인 자연수의 집합이므로 홀수의 집합이다.
최대공약수가 1인 두 자연수

또한, A_2 는 2의 배수인 자연수의 집합이므로 짝수의 집합이다.

$\therefore A_2 \cup B_2 = \{x | x \text{는 자연수}\}$ (참)

ㄷ. B_2 는 홀수의 집합이고 B_3 은 3과 서로소인 자연수의 집합이므로

$$B_2 \cap B_3 = \{1, 5, 7, 11, \dots\}$$

또한, B_6 은 6과 서로소인 자연수의 집합이고 $6 = 2 \times 3$ 이므로 B_6 은 2와 서로소이면서 3과 서로소인 자연수의 집합이다.

즉, $B_6 = \{1, 5, 7, 11, \dots\}$ 이므로

$$B_2 \cap B_3 = B_6 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

17

$$\neg. A \triangle U = (A - U) \cup (U - A)$$

$$= \emptyset \cup A^c$$

$$= A^c \text{ (참)}$$

$$\neg. B \triangle (B - A) = \{B - (B - A)\} \cup \{(B - A) - B\}$$

$$= (A \cap B) \cup \emptyset$$

$$= A \cap B$$

즉, $A \cap B = \emptyset$ 이면 두 집합 A, B 는 서로소이므로

$A \neq B$ (거짓)

$$\neg. A \triangle A = (A - A) \cup (A - A)$$

$$= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$A \triangle A \triangle A = (A \triangle A) \triangle A$$

$$= \emptyset \triangle A$$

$$= (\emptyset - A) \cup (A - \emptyset)$$

$$= \emptyset \cup A = A$$

$$A \triangle A \triangle A \triangle A = (A \triangle A \triangle A) \triangle A$$

$$= A \triangle A = \emptyset$$

⋮

즉, 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\underbrace{A \triangle A \triangle A \triangle \dots \triangle A}_{A \text{가 } n \text{개}} = \begin{cases} A & (n \text{이 홀수}) \\ \emptyset & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore \underbrace{A \triangle A \triangle A \triangle \dots \triangle A}_{A \text{가 } 99 \text{개}} = A \text{ (참)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

18

$$X \odot Y = X^c - Y$$

$$= X^c \cap Y^c$$

$$= (X \cup Y)^c$$

$$\neg. A \odot B = (A \cup B)^c = (B \cup A)^c = B \odot A \text{ (참)}$$

$$\neg. (A \odot B)^c = \{(A \cup B)^c\}^c = A \cup B$$

$$A^c \odot B^c = (A^c \cup B^c)^c = A \cap B$$

$$\therefore (A \odot B)^c \neq A^c \odot B^c \text{ (거짓)}$$

$$\neg. (A \odot B) \odot C = (A \cup B)^c \odot C$$

$$= \{(A \cup B)^c \cup C\}^c$$

$$= (A \cup B) \cap C^c$$

$$= (A \cup B) - C$$

$$A \odot (B \odot C) = A \odot (B \cup C)^c$$

$$= \{A \cup (B \cup C)^c\}^c$$

$$= A^c \cap (B \cup C)$$

$$= (B \cup C) \cap A^c$$

$$= (B \cup C) - A$$

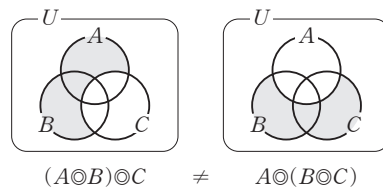
$$\therefore (A \odot B) \odot C \neq A \odot (B \odot C) \text{ (거짓)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

보충 설명

ㄷ을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



3 유한집합의 원소의 개수

기본 + 필수연습

본문 pp.190~193

24 6	25 (1) 8 (2) 9 (3) 3 (4) 17		
26 (1) 5 (2) 16	27 14	28 21	
29 42	30 13	31 9	32 4
33 130			

24

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 20 + 15 - 29 = 6 \end{aligned}$$

답 6

25

$$\begin{aligned} (1) \quad n(B^c) &= n(U) - n(B) \\ &= 35 - 27 = 8 \\ (2) \quad n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 21 + 27 - 30 = 18 \\ \therefore n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 27 - 18 = 9 \\ (3) \quad n(A \cap B^c) &= n(A - B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 21 - 18 = 3 \\ (4) \quad A^c \cup B^c &= (A \cap B)^c \text{에서} \\ n(A^c \cup B^c) &= n((A \cap B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ &= 35 - 18 = 17 \end{aligned}$$

답 (1) 8 (2) 9 (3) 3 (4) 17

26

$$\begin{aligned} (1) \quad n(A - B^c) &= n(A \cap (B^c)^c) \\ &= n(A \cap B) = 13 \\ \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 32 + 21 - 13 = 40 \end{aligned}$$

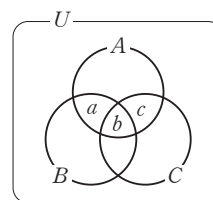
$$\begin{aligned} \therefore n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 45 - 40 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (C - A) \cup (C - B) &= (C \cap A^c) \cup (C \cap B^c) \\ &= C \cap (A^c \cup B^c) \\ &= C \cap (A \cap B)^c \\ &= C - (A \cap B) \\ n(A \cap C) &= n(A) + n(C) - n(A \cup C) \\ &= 15 + 18 - 28 = 5 \\ n((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= n(A \cap (B \cup C)) \\ &= n(A) - n(A - (B \cup C)) \\ &= 15 - 3 \\ &= 12 \\ \therefore n(A \cap B \cap C) &= n(A \cap B) + n(A \cap C) \\ &\quad - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= 9 + 5 - 12 = 2 \\ \therefore n((C - A) \cup (C - B)) &= n(C - (A \cap B)) \\ &= n(C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 18 - 2 = 16 \end{aligned}$$

답 (1) 5 (2) 16

다른 풀이

(2) 다음 벤 다이어그램과 같이 집합 $A \cap (B \cup C)$ 의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c 라 하자.

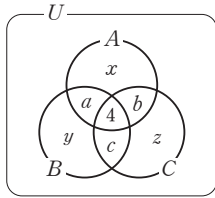


$$\begin{aligned} n(A \cap (B \cup C)) &= n(A) - n(A - (B \cup C)) \\ &= 15 - 3 = 12 \\ \therefore a + b + c &= 12 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ n(A \cap B) &= 9 \text{이므로} \\ a + b &= 9 \quad \cdots \textcircled{㉡} \\ n(A \cap C) &= n(A) + n(C) - n(A \cup C) \\ &= 15 + 18 - 28 = 5 \\ \therefore b + c &= 5 \quad \cdots \textcircled{㉢} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{을 연립하여 풀면 } c &= 3 \\ \text{이것을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } b &= 2 \\ \therefore n(A \cap B \cap C) &= b = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore n((C-A) \cup (C-B)) &= n(C - (A \cap B)) \\ &= n(C) - n(A \cap B \cap C) \\ &= 18 - 2 = 16\end{aligned}$$

27

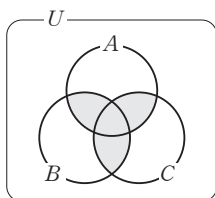
세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, x, y, z 라 하자.



$$\begin{aligned}n(A \cap B \cap C) &= 4 \text{ 이므로} \\ n(A \cup B \cup C) &= n(U) = 40 \text{ 에서} \\ a + b + c + x + y + z + 4 &= 40 \\ \therefore a + b + c + x + y + z &= 36 \quad \text{.....㉑} \\ n(A) &= 21, n(B) = 17, n(C) = 20 \text{ 이므로} \\ a + b + x + 4 &= 21 \quad \therefore a + b + x = 17 \quad \text{.....㉒} \\ c + a + y + 4 &= 17 \quad \therefore c + a + y = 13 \quad \text{.....㉓} \\ b + c + z + 4 &= 20 \quad \therefore b + c + z = 16 \quad \text{.....㉔} \\ \text{㉒} + \text{㉓} + \text{㉔} \text{ 을 하면} \\ a + b + c + (a + b + c + x + y + z) &= 46 \\ a + b + c + 36 &= 46 \quad (\because \text{㉑}) \\ \therefore a + b + c &= 10 \\ \therefore n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) &= a + b + c + 4 \\ &= 10 + 4 = 14\end{aligned}$$

다른 풀이

$U = A \cup B \cup C$ 이므로
 $n(A \cup B \cup C) = n(U) = 40$
 집합 $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned}\therefore n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) &= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ &\quad - 2 \times n(A \cap B \cap C) \quad (*) \\ &= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 8 \quad \text{.....㉕}\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}40 &= 21 + 17 + 20 - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + 4 \\ \therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) &= 62 - 40 = 22\end{aligned}$$

㉕에서

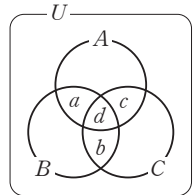
$$n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) = 22 - 8 = 14$$

보충 설명

오른쪽 벤 다이어그램과 같이

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ 의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d 라 하면 (*)에서

$$\begin{aligned}n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) &= a + b + c + d \\ &= (a + d) + (b + d) + (c + d) - 2d \\ &= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ &\quad - 2 \times n(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$



28

방문객 전체의 집합을 U , 안경을 착용한 경험이 있는 방문객의 집합을 A , 렌즈를 착용한 경험이 있는 방문객의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 17, n(B) = 15, n(A^c \cap B^c) = 7$$

이때

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 30 - 7 = 23\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 17 + 15 - 23 = 9\end{aligned}$$

안경을 착용한 경험이 없거나 렌즈를 착용한 경험이 없는 방문객의 집합은 $A^c \cup B^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A^c \cup B^c) &= n((A \cap B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ &= 30 - 9 = 21 \end{aligned}$$

따라서 구하는 방문객 수는 21이다.

답 21

29

학생 전체의 집합을 U , 두 동아리 A, B에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B 라 하자.

조건 ㉞에서 두 동아리 A, B 중 어느 것도 가입하지 않은 학생은 없으므로

$$A^c \cap B^c = \emptyset, \text{ 즉 } (A \cup B)^c = \emptyset$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 100$$

또한, 조건 ㉝에서 $n(A) = 66, n(B) = 58$ 이므로 동아리 A에만 가입한 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 100 - 58 = 42 \end{aligned}$$

답 42

30

학생 전체의 집합을 U , 케이팝을 좋아하는 학생의 집합을 A , 힙합을 좋아하는 학생의 집합을 B , 발라드를 좋아하는 학생의 집합을 C 라 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 200, n(A) = 90, n(B) = 75, \\ n(A \cap B) &= 38, n(C - (A \cup B)) = 60 \end{aligned}$$

이때 케이팝, 힙합, 발라드 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생의 집합은 $(A \cup B \cup C)^c$ 이고

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup B) + n(C - (A \cup B)) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C - (A \cup B)) \\ &= 90 + 75 - 38 + 60 = 187 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} n((A \cup B \cup C)^c) &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= 200 - 187 = 13 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 13이다.

답 13

31

$$\begin{aligned} n(B) &= n(B - A) + n(A \cap B) \text{에서} \\ n(A \cap B) &= 12 \text{이고, } (B - A) \subset A^c \text{이므로} \\ n(B) &\leq n(A^c) + n(A \cap B) \\ &= n(U) - n(A) + n(A \cap B) \\ &= 33 - 24 + 12 = 21 \end{aligned}$$

$$\therefore M = 21$$

또한, $B \subset A$, 즉 $A \cap B = B$ 일 때, $n(B)$ 가 최소이므로

$$m = 12$$

$$\therefore M - m = 21 - 12 = 9$$

답 9

32

$$n(A \cap B) = 10, n(A \cap B \cap C) = 5 \text{이므로}$$

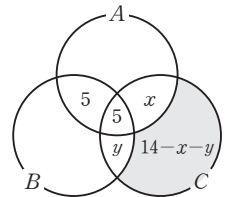
$$n((A \cap B) - C) = 5$$

또한, $n((A \cap C) - B) = x, n((B \cap C) - A) = y$ 라 하면

$$n(C) = 19 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} n(C - (A \cup B)) &= 19 - (5 + x + y) \\ &= 14 - x - y \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

오른쪽 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내면 ㉞은 색칠한 부분의 원소의 개수이다.



이때 ㉞이 최소가 되려면 x, y 가 각각 최대가 되어야 한다.

그런데 $n(A) = 14$ 이므로 x 의 최댓값은

$$14 - 5 - 5 = 4$$

또한, $n(B) = 16$ 이므로 y 의 최댓값은

$$16 - 5 - 5 = 6$$

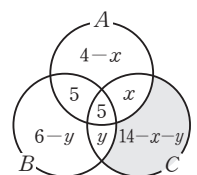
㉞에서 $n(C - (A \cup B))$ 의 최솟값은

$$14 - 4 - 6 = 4$$

답 4

보충 설명

모든 집합의 원소의 개수는 항상 0보다 크거나 같으므로 오른쪽 벤 다이어그램에서



$$x \geq 0, 4 - x \geq 0, y \geq 0, 6 - y \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6$$

학생 전체의 집합을 U , 수학 경시대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 A , 영어 경시대회에 참가 신청을 한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=300, n(A)=124, n(B)=173$$

이때 어느 것에도 참가 신청을 하지 않은 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \\ &= 300 - 124 - 173 + n(A \cap B) \\ &= 3 + n(A \cap B) \quad \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

$(A \cap B) \subset A$ 이고 $(A \cap B) \subset B$ 이므로
 $n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$ 에서
 $n(A \cap B) \leq 124 \quad \cdots \text{㉡}$

또한, $n(A \cup B) \leq n(U)$ 이므로
 $n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq n(U)$ 에서
 $124 + 173 - n(A \cap B) \leq 300$

$$\therefore n(A \cap B) \geq -3$$

그런데 집합의 원소의 개수는 0보다 크거나 같으므로
 $n(A \cap B) \geq 0 \quad \cdots \text{㉢}$

㉡, ㉢에서 $0 \leq n(A \cap B) \leq 124$ 이므로

㉠에서 $0 \leq n(A^c \cap B^c) - 3 \leq 124$

$$\therefore 3 \leq n(A^c \cap B^c) \leq 127$$

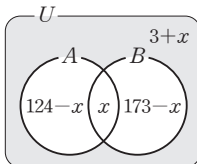
따라서 $M=127, m=3$ 이므로

$$M+m=127+3=130$$

답 130

보충 설명

$n(A \cap B) = x$ 라 하고 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내 보자.



즉, $x \geq 0, 124 - x \geq 0, 173 - x \geq 0$ 이므로
 $0 \leq x \leq 124$

$$\therefore 3 \leq 3 + x \leq 127$$

19 27	20 29	21 5	22 13
23 21	24 16		

19

$$A \cap B^c = A - B = A \text{이므로 } A \subset B^c$$

$$\therefore A \cap B = \emptyset$$

따라서 두 집합 A, B 는 서로소이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) \\ &= 11 + 16 = 27 \end{aligned}$$

답 27

20

$$\begin{aligned} n(A^c \cup B^c) &= n((A \cap B)^c) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ \therefore n(A \cap B) &= n(U) - n(A^c \cup B^c) \\ &= 50 - 43 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } (A-B) \cup (B-A) &= (A \cup B) - (A \cap B) \text{이므로} \\ n((A-B) \cup (B-A)) &= n((A \cup B) - (A \cap B)) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 36 - 7 = 29 \end{aligned}$$

답 29

21

학생 전체의 집합을 U , 세 문제 A, B, C 를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(U)=22, n(A)=11, n(B)=9, n(C)=15,$$

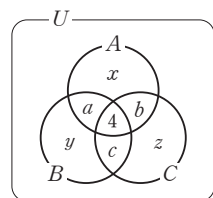
$$n(A \cap B \cap C)=4$$

이때 한 문제도 맞히지 못한 학생은 없으므로

$$(A \cup B \cup C)^c = \emptyset \quad \therefore A \cup B \cup C = U$$

오른쪽 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, x, y, z 라 하자.

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(U) = 22 \text{에서} \\ a + b + c + x + y + z + 4 &= 22 \end{aligned}$$



$$\therefore a+b+c+x+y+z=18 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

$$n(A)=11, n(B)=9, n(C)=15 \text{이므로}$$

$$a+b+x+4=11 \quad \therefore a+b+x=7 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

$$c+a+y+4=9 \quad \therefore c+a+y=5 \quad \cdots \textcircled{㉓}$$

$$b+c+z+4=15 \quad \therefore b+c+z=11 \quad \cdots \textcircled{㉔}$$

㉒+㉓+㉔을 하면

$$a+b+c+(a+b+c+x+y+z)=23$$

$$a+b+c+18=23 \quad (\because \textcircled{㉑})$$

$$\therefore a+b+c=5$$

이때 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생의 집합은

$$\{(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\} - (A \cap B \cap C) \text{이고,}$$

이 집합의 원소의 개수는 $a+b+c$ 이다.

따라서 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생 수는 5이다.

답 5

다른 풀이

학생 전체의 집합을 U , 세 문제 A, B, C를 맞힌 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(U)=22, n(A)=11, n(B)=9, n(C)=15,$$

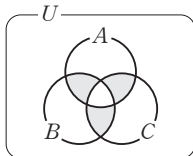
$$n(A \cap B \cap C)=4$$

이때 한 문제도 맞히지 못한 학생은 없으므로

$$(A \cup B \cup C)^c = \emptyset \quad \therefore A \cup B \cup C = U$$

또한, 세 문제 중 두 문제만 맞힌 학생의 집합은

$$\{(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\} - (A \cap B \cap C)$$



이므로

$$\begin{aligned} n(\{(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\} - (A \cap B \cap C)) \\ = n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{㉕}$$

이때

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) \\ = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

이므로

$$22 = 11 + 9 + 15 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 4$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 17$$

㉕에서 구하는 학생 수는

$$17 - 3 \times 4 = 5$$

22

학생 전체의 집합을 U , 핸드볼을 신청한 학생의 집합을 A , 플로어볼을 신청한 학생의 집합을 B , 소프트볼을 신청한 학생의 집합을 C 라 하면

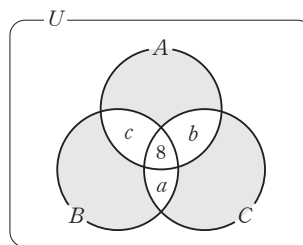
$$n(U)=40, n(A)=25, n(B)=22, n(C)=28,$$

$$n(A \cap B \cap C)=8$$

이때 학생들은 적어도 한 가지를 신청했으므로

$$(A \cup B \cup C)^c = \emptyset \quad \therefore A \cup B \cup C = U$$

다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c 라 하자.



$$n(A \cup B \cup C) = n(U) = 40 \text{이고}$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) \\ = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

이므로

$$40 = 25 + 22 + 28 - (8 + c) - (8 + a) - (8 + b) + 8$$

$$40 = 59 - (a + b + c) \quad \therefore a + b + c = 19$$

세 가지 중 오직 한 가지만 신청한 학생 수는 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) - n((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \\ = 40 - (a + b + c + 8) \\ = 40 - 27 = 13 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 13이다.

답 13

23

조건 ㉔에서

$$\begin{aligned} B \cap (A \cup B^c) &= (B \cap A) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= A \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

$$\therefore n(A \cap B) \neq 0 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

이때 $(A-B) \subset B^c$ 에서

$$\begin{aligned} n(A-B) &\leq n(B^c) \\ &= n(U) - n(B) \\ &= n(U) - \{n(B-A) + n(A \cap B)\} \\ &= 35 - \{13 + n(A \cap B)\} \quad (\because \text{조건 (가), (다)}) \\ &= 22 - n(A \cap B) \end{aligned}$$

따라서 $n(A-B)$ 가 최댓값을 가지려면 $n(A \cap B)$ 가 최솟값을 가져야 한다. 이때 ㉠에서 $n(A \cap B) \neq 0$ 이므로 $n(A \cap B) = 1$ 일 때, $n(A-B)$ 는 최댓값 21을 갖는다.

답 21

24

학생 전체의 집합을 U , 두 소설 A, B를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$$n(U) = 28, n(B-A) = 12$$

이때 두 소설 A, B를 모두 읽은 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고 $B=U$, $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이므로

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(B) - n(B-A) \\ &\leq n(U) - n(B-A) \\ &= 28 - 12 = 16 \end{aligned}$$

따라서 두 소설 A, B를 모두 읽은 학생 수의 최댓값은 16이다.

답 16

STEP 2 개념 마무리

본문 p.195

- | | | | |
|-------|------|------|-------|
| 1 729 | 2 72 | 3 30 | 4 112 |
| 5 ⑤ | 6 16 | | |

1

$A \cup B = U$ 이므로

$$\begin{aligned} S(A \cup B) &= S(U) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

또한, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ 이므로

$$S(A \cap B) = 1 + 3 + 5 = 9$$

집합 $A-B$ 의 원소의 합을 a 라 하면

$$S(A) = a + 9$$

집합 $B-A$ 의 원소의 합을 b 라 하면

$$S(B) = b + 9$$

㉠에서

$$S(A \cup B) = a + b + 9 = 45$$

$$\therefore b = 36 - a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(A)S(B) &= (a+9)(b+9) \\ &= (a+9)(45-a) \quad (\because \textcircled{㉡}) \\ &= -a^2 + 36a + 405 \\ &= -(a^2 - 36a + 18^2 - 18^2) + 405 \\ &= -(a-18)^2 + 729 \end{aligned}$$

따라서 $S(A)S(B)$ 의 값은 $a=18$ 일 때 최대이고 최댓값은 729이다.

답 729

보충 설명

(1) $S(A)S(B)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 두 집합 A, B를 구해 보자.

$S(A)S(B)$ 의 값은 $a=18$, $b=36-a=18$ 일 때 최대이고, $(A \cap B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로 두 집합 A, B가 $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때, $S(A)S(B)$ 의 값은 최대이다.

(2) 본문 p.222의 개념15에서 '산술평균과 기하평균'의 관계를 이용하면 다음과 같이 풀 수도 있다.

두 집합 A, B의 원소는 모두 양수이므로

$$S(A) > 0, S(B) > 0$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} S(A) + S(B) &\geq 2\sqrt{S(A)S(B)} \\ &\quad (\text{단, 등호는 } S(A)=S(B) \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} S(A) + S(B) &= S(A \cup B) + S(A \cap B) \\ &= 45 + 9 = 54 \end{aligned}$$

이므로

$$2\sqrt{S(A)S(B)} \leq 54$$

$$\sqrt{S(A)S(B)} \leq 27$$

$$\therefore S(A)S(B) \leq 729$$

따라서 $S(A)S(B)$ 의 최댓값은 729이다.

2

집합 $A_n \cap A_3$ 은 n 과 3의 공배수의 집합이고 $A_n \cap A_3 = A_{3n}$ 에서 n 과 3의 최소공배수가 $3n$ 이므로 자연수 n 은 3과 서로소이다.

$120 \in A_n^C$ 에서 $120 \notin A_n$ 이므로 120은 n 의 배수가 아니다. 즉, n 은 120의 약수가 아니다.

따라서 n 은 3과 서로소이면서 120의 약수가 아니다.

(i) 120 이하의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 40이고,

3은 소수이므로 3과 서로소인 수의 개수는

$$120 - 40 = 80$$

(ii) $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 3과 서로소이면서 120의 약수인 수의 개수는 $2^3 \times 5$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(3+1) \times (1+1) = 8$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$80 - 8 = 72$$

답 72

3

$$(A-B) \cup (B-A) = B-A \text{이므로}$$

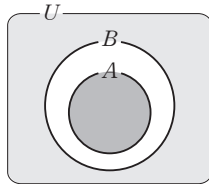
$$(A-B) \subset (B-A)$$

그런데 $A-B$ 와 $B-A$ 는 서로소이므로

$$A-B = \emptyset \quad \therefore A \subset B$$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $n(A) = n(A^C - B)$ 이므로 그림에서 색칠한 두 부분의 원소의 개수는 서로 같다.



또한, $n(U) = 10$ 이므로

$$n(A) + n(A^C - B) \leq 10$$

$$2 \times n(A) \leq 10 \quad \therefore n(A) \leq 5$$

한편, $\{1, 2\} \subset A$ 이므로 집합 A 의 원소의 합 $S(A)$ 가 최대가 되려면 집합 A 는 집합 U 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 5이고, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합이며, 1, 2를 제외한 나머지 세 원소는 최대한 큰 값이어야 한다.

따라서 $S(A)$ 는 $A = \{1, 2, 8, 9, 10\}$ 일 때 최대이고, 그댓값은

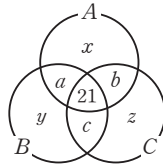
이때 $A = B$ 이다.

$$1 + 2 + 8 + 9 + 10 = 30$$

답 30

4

세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 x, y, z, a, b, c 라 하자.



$$n(A \cap B \cap C) = 21, n(A \cup B \cup C) = 77 \text{이므로}$$

$$x + y + z + a + b + c + 21 = 77$$

$$\therefore x + y + z + a + b + c = 56 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \triangle B) + n(B \triangle C) + n(C \triangle A) &= n((A \cup B) - (A \cap B)) + n((B \cup C) - (B \cap C)) \\ &\quad + n((C \cup A) - (C \cap A)) \\ &= (x + b + y + c) + (y + a + z + b) + (x + a + z + c) \\ &= 2(x + y + z + a + b + c) \\ &= 2 \times 56 \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 112 \end{aligned}$$

답 112

5

$$\neg. n(A \cap B \cap C) = 0 \text{이면}$$

$$n(B \cap C) = 2 \text{에서 } n(A^C \cap B \cap C) = 2$$

이때 $n(B-A) = 1$ 이므로

$n(B-A) \geq n(A^C \cap B \cap C)$ 를 만족시키지 않는다.

$$\therefore n(A \cap B \cap C) \neq 0 \quad (\text{참})$$

$$\neg. n(A \cap B \cap C) = 2 \text{이면}$$

$$n(B \cap C) = n(A \cap B \cap C) + n(A^C \cap B \cap C) \text{에서}$$

$$2 = 2 + n(A^C \cap B \cap C) \text{이므로}$$

$$n(A^C \cap B \cap C) = 0$$

$$\text{이때 } n(C-A) = n(A^C \cap B \cap C) + n(A^C \cap B^C \cap C)$$

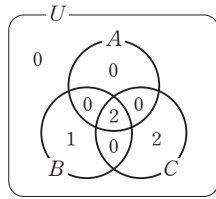
이므로

$$2 = 0 + n(A^C \cap B^C \cap C)$$

$$\therefore n(A^C \cap B^C \cap C) = 2$$

또한, $n(B-A) = 1, n(U) = 5$ 이므로

각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{aligned}\therefore n(C) &= n(A \cap B \cap C) + n(A^c \cap B^c \cap C) \\ &= 2 + 2 = 4 \text{ (참)}\end{aligned}$$

ㄷ. $n(B \cap C) = 2$ 이므로 ㄱ에 의하여

$$n(A \cap B \cap C) = 1 \text{ 또는 } n(A \cap B \cap C) = 2$$

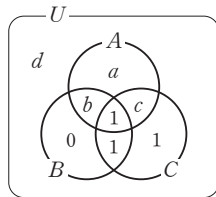
(i) $n(A \cap B \cap C) = 1$ 일 때,

$$n(B \cap C) = 2 \text{에서 } n(A^c \cap B \cap C) = 1$$

$$n(B - A) = 1 \text{에서 } n(A^c \cap B \cap C^c) = 0$$

$$n(C - A) = 2 \text{에서 } n(A^c \cap B^c \cap C) = 1$$

즉, 다음 벤 다이어그램과 같이 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d 라 하면



$$n(A) = a + b + c + 1, n(B) = b + 2, n(C) = c + 3$$

이때 $n(U) = 5$ 이므로

$$a + b + c + d + 3 = 5 \quad \therefore a + b + c + d = 2$$

$n(A) \times n(B) \times n(C)$ 의 값이 최대가 되기 위해서는 $a = d = 0, b = 1, c = 1$ 또는 $a = d = 0, b = 2, c = 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned}n(A) \times n(B) \times n(C) &= 3 \times 4 \times 3 = 36 \\ n(A) \times n(B) \times n(C) &= 3 \times 4 \times 3 = 36\end{aligned}$$

$$n(A) \times n(B) \times n(C) = 36$$

또한, $n(A) \times n(B) \times n(C)$ 의 값이 최소가 되기 위해서는 $a = b = c = 0, d = 2$ 이어야 하므로

$$n(A) \times n(B) \times n(C) = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

(ii) $n(A \cap B \cap C) = 2$ 일 때,

$$n(A) = 2, n(B) = 3, n(C) = 4 \text{이므로}$$

$$n(A) \times n(B) \times n(C) = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

(i), (ii)에서 $n(A) \times n(B) \times n(C)$ 의 최댓값은 36, 최솟값은 6이므로 그 합은

$$36 + 6 = 42 \text{ (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

6

$$\begin{aligned}(C - A) \cap (C - B) &= (C \cap A^c) \cap (C \cap B^c) \\ &= C \cap (A^c \cap B^c) = C \cap (A \cup B)^c \\ &= C - (A \cup B)\end{aligned}$$

$$\therefore n((C - A) \cap (C - B)) = n(C - (A \cup B))$$

$$n(A) = 12, n(B) = 9, n(A \cap B) = 5 \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 9 - 5 = 16$$

(i) $n(C - (A \cup B))$ 가 최대일 때,

$$n(U) = 30, n(A \cup B) = 16, n(C) = 18 \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) + n(C) \geq n(U)$$

따라서 $A \cup B \cup C = U$ 일 때 $n(C - (A \cup B))$ 가 최대
이므로 구하는 최댓값은

$$M = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 16 = 14$$

(ii) $n(C - (A \cup B))$ 가 최소일 때,

$$n(A \cup B) = 16, n(C) = 18 \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) \leq n(C)$$

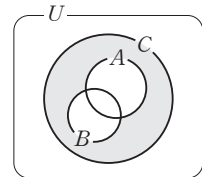
따라서 $(A \cup B) \subset C$ 일 때

$$n(C - (A \cup B)) \text{가 최소이므로}$$

구하는 최솟값은

$$m = n(C) - n(A \cup B) = 18 - 16 = 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } M + m = 14 + 2 = 16$$

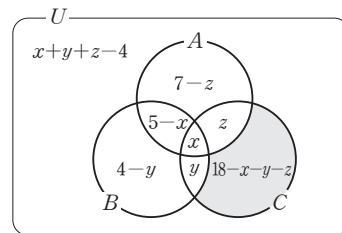


답 16

다른 풀이

$$n(A \cap B \cap C) = x, n((B \cap C) - A) = y,$$

$n((A \cap C) - B) = z$ 라 하고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



집합의 원소의 개수는 0보다 크거나 같으므로

$$0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 7, 4 \leq x + y + z \leq 18$$

따라서 $n\{(C - A) \cap (C - B)\} = 18 - x - y - z$ 의 값은

$x + y + z = 4$ 일 때 최댓값 $M = 14$ 를 갖고,

$x = 5, y = 4, z = 7$ 일 때 최솟값 $m = 2$ 를 갖는다.

$$\therefore M + m = 14 + 2 = 16$$

07. 명제

1 명제와 조건

기본 + 필수연습

본문 pp.201~205

- 01 $\neg$ (거짓), $\neg$ (참) 02 풀이 참조
 03 (1) $\{1, 3, 5\}, \{1\}$ (2) $2x-1 \geq 3, \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 04 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 05 (1) 거짓 (2) 참 06 풀이 참조
 07 4 08 3 09 4 10 3
 11 $-3 \leq a \leq 2$

01

- ㄱ. '아름답다'의 기준이 명확하지 않아 참인지 거짓인지 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ㄴ. $36 = 2^2 \times 3^2$ 에서 36의 약수의 개수는 $3 \times 3 = 9$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ㄷ. 홀수와 홀수의 곱은 항상 홀수이므로 참인 명제이다.
 ㄹ. x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 따라서 명제는 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$ (거짓), $\neg$ (참)

보충 설명

- ㄷ. 두 홀수를 각각 $2m+1, 2n+1$ (m, n 은 정수)이라 하면

$$(2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

$$= 2(2mn + m + n) + 1$$
 이므로 두 홀수의 곱은 항상 홀수이다.
 ㄹ. $x > -1$ 인 실수 x 에 대하여 참이고,
 $x \leq -1$ 인 실수 x 에 대하여 거짓이다.

02

- (1) 21은 소수가 아니다.
 $21 = 3 \times 7$ 이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
 (2) 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.
 정삼각형의 이웃하는 두 변의 길이는 같으므로 주어진 명제가 참이다. 즉, 그 부정은 거짓이다.
 (3) $2+3=5$
 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

(4) $5 > 8$

주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

답 풀이 참조

03

- 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 (1) $P = \{1, 3, 5\}, Q = \{1\}$
 (2) $\sim q : 2x-1 \geq 3$
 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^C 이므로
 $Q^C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

답 (1) $\{1, 3, 5\}, \{1\}$

(2) $2x-1 \geq 3, \{2, 3, 4, 5, 6\}$

04

- 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{1, 2, 3, 6\}, Q = \{1, 3, 5, 7\}$
 (1) 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은 $P \cap Q$ 이므로
 $P \cap Q = \{1, 3\}$
 (2) 조건 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^C \cup Q^C$ 이므로
 $P^C \cup Q^C = (P \cap Q)^C$
 $= \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

답 (1) $\{1, 3\}$ (2) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

05

- (1) $2x+3 < x+10$ 에서 $x < 7$
 $x=10$ 이면 $x > 7$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다. $\leftarrow 23 < 20$
 (2) $x^2+4x+3=0$ 에서 $(x+3)(x+1)=0$
 $x=-3$ 이면 $(x+3)(x+1)=0$ 이므로 주어진 명제는 참이다. $\leftarrow x=-1$ 일 때에도 $(x+3)(x+1)=0$ 이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

06

(1) 어떤 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 < 0$ 이다.

모든 실수 x, y 에 대하여

$$x^2 \geq 0, y^2 \geq 0 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 \geq 0$$

따라서 주어진 명제는 참이다. 즉, 그 부정은 거짓이다.

(2) 모든 자연수 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 > 0$ 이다.

$$x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ 에서 } (x+1)^2 > 0$$

따라서 주어진 명제의 부정은 참이다.

답 풀이 참조

07

$$p: x^2 - 3x - 28 > 0 \text{ 에서 } (x+4)(x-7) > 0$$

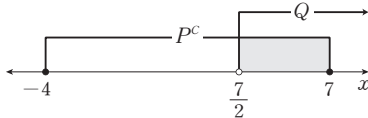
$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 7$$

$$q: 2x - 7 > 0 \text{ 에서 } x > \frac{7}{2}$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid x < -4 \text{ 또는 } x > 7\}, Q = \left\{x \mid x > \frac{7}{2}\right\}$$

이때 $P^C = \{x \mid -4 \leq x \leq 7\}$ 이므로 두 집합 P^C, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은

$$P^C \cap Q = \left\{x \mid \frac{7}{2} < x \leq 7\right\}$$

이므로 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합, 즉 집합 $P^C \cap Q$ 의 원소 중 정수는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

답 4

08

$$p: x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ 에서 } (x-1)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

$$q: x^2 - 7x + 10 < 0 \text{ 에서 } (x-2)(x-5) < 0$$

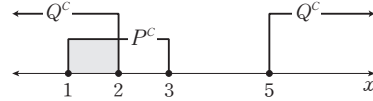
$$\therefore 2 < x < 5$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 조건 ' p 또는 q '의 부정의 진리집합 S 는

$$S = (P \cup Q)^C = P^C \cap Q^C$$

이때 $P = \{x \mid x < 1 \text{ 또는 } x > 3\}, Q = \{x \mid 2 < x < 5\}$ 이므로

$$P^C = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}, Q^C = \{x \mid x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 5\}$$



즉, $S = P^C \cap Q^C = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ 이므로 집합 S 의 원소 중 가장 큰 수는 2, 가장 작은 수는 1이다.

따라서 구하는 합은

$$2 + 1 = 3$$

답 3

09

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^C \cup Q^C$ 이다.

이때 $P = \{x \mid x \neq 2\}$ 이므로 $P^C = \{2\}$ 이고,

집합 $P^C \cup Q^C$ 의 원소의 개수가 1이므로

$$P^C \cup Q^C = \{2\}$$

$$\therefore Q^C = \{2\} \text{ 또는 } Q^C = \emptyset$$

즉, $Q = \{x \mid x^2 - 4x + a > 0\}$ 에서

$Q^C = \{x \mid x^2 - 4x + a \leq 0\}$ 이므로

이차부등식 $x^2 - 4x + a \leq 0$ 의 해는 $x=2$ 하나뿐이거나 해가 없어야 한다.

(i) 이차부등식 $x^2 - 4x + a \leq 0$ 의 해가 $x=2$ 일 때,

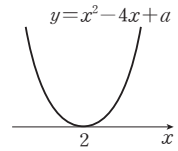
이차함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프

는 아래로 볼록하므로 이차방정식

$x^2 - 4x + a = 0$ 이 중근 $x=2$ 를 가

져야 한다.

$$\text{즉, } 2^2 - 4 \times 2 + a = 0 \text{ 에서 } a = 4$$



(ii) 이차부등식 $x^2 - 4x + a \leq 0$ 의 해가 없을 때,

$f(x) = x^2 - 4x + a$ 라 하면 이차함

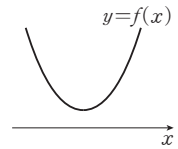
수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그

림과 같아야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 판

별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - a < 0 \quad \therefore a > 4$$



(i), (ii)에서 $a \geq 4$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 최솟값은 4이다.

답 4

10

명제 '모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 - 4kx + 5k > 0$ 이다.'가 거짓 이려면 이 명제의 부정 '어떤 실수 x 에 대하여

$2x^2 - 4kx + 5k \leq 0$ 이다.'는 참이어야 한다.

$f(x) = 2x^2 - 4kx + 5k$ 라 하면 이차함 수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, 이차방정식 $2x^2 - 4kx + 5k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 2 \times 5k \geq 0$$

$$4k^2 - 10k \geq 0, 2k(2k - 5) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq \frac{5}{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

답 3

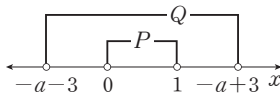
11

$$|x + a| < 3 \text{에서 } -3 < x + a < 3$$

$$\therefore -a - 3 < x < -a + 3$$

$P = \{x | 0 < x < 1\}$, $Q = \{x | -a - 3 < x < -a + 3\}$ 이라 하자.

$0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|x + a| < 3$ 이 성립하려면 $P \cap Q = P$, 즉 $P \subset Q$ 이어야 한다.



따라서 $-a - 3 \leq 0$ 이고 $1 \leq -a + 3$ 이어야 하므로 $-3 \leq a \leq 2$

답 $-3 \leq a \leq 2$

STEP 1

개념 마무리

본문 p.206

01 ④

02 ③

03 11

04 ④

05 37

06 $-3 < a < 4$

01

①, ②, ③, ⑤ 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

④ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

답 ④

보충 설명

① 마름모에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 사다리꼴에 포함된다. 즉, 마름모는 사다리꼴이므로 참인 명제이다.

② 모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| + 1 > 0$ 이다. 즉, $|x| + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

③ 2보다 큰 모든 짝수는 2로 나누어떨어지므로 소수가 아니다. 즉, 2를 제외한 모든 소수는 홀수이므로 참인 명제이다.

⑤ 16의 약수 중에서 16은 8의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.

02

세 실수 x, y, z 에 대하여 조건

$$(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$$

의 부정은

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0$$

즉, ' $x = y$ 또는 $y = z$ 또는 $z = x$ '이거나 ' x, y, z 중 서로 같은 것이 적어도 한 쌍 있다'라고 할 수 있다.

따라서 주어진 조건의 부정과 서로 같은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ③

보충 설명

ㄱ. $x = 0, y = 1, z = 2$ 일 때,

$$xyz = 0 \text{이지만 } (x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$$

ㄴ. $x = 1, y = 1, z = 2$ 일 때,

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0 \text{이지만 } x = y \neq z$$

ㄴ. $x = 1, y = 2, z = 3$ 일 때,

x, y, z 중 서로 다른 것이 적어도 한 쌍 있지만

$$(x - y)(y - z)(z - x) \neq 0$$

03

전체집합을 U , 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$U = \{(x, y) | 0 \leq x < 4, 0 \leq y < 4, x, y \text{는 정수}\}$$

$$= \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \dots, (3, 3)\}$$

$$p: x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\therefore P = \{(x, y) | x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0, x, y \text{는 정수}\}$$

$$= \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$\text{또한, } q: x - y = 1 \text{에서}$$

$$Q = \{(x, y) | x - y = 1, x, y \text{는 정수}\}$$

$$= \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$$

한편, 조건 ' $\sim p$ 이고 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P^C \cap Q^C = (P \cup Q)^C$$

이때

$$P \cup Q = \{(1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

이므로 조건 ' $\sim p$ 이고 $\sim q$ '를 만족시키는 x, y 의 순서쌍

(x, y) 의 개수는

$$n(P^C \cap Q^C) = n(U) - n(P \cup Q)$$

$$= 4 \times 4 - 5 = 11$$

답 11

다른 풀이

$$p: x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0 \text{에서 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

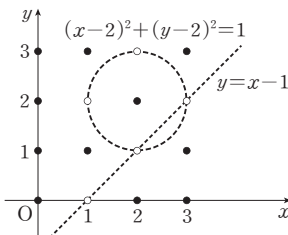
즉, 조건 p 를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 를 좌표평면 위에 나타내면 원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 위의 점이다.

$$\text{또한, } q: x - y = 1 \text{에서 } y = x - 1$$

즉, 조건 q 를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 를 좌표평면 위에 나타내면 직선 $y = x - 1$ 위의 점이다.

따라서 조건 ' $\sim p$ 이고 $\sim q$ '를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 를 좌표평면 위에 나타내면 원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 위의 점도 아니고 직선 $y = x - 1$ 위의 점도 아니다.

이때 x, y 는 $0 \leq x < 4, 0 \leq y < 4$ 인 정수이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 가 나타내는 점은 다음 그림의 11개이다.



04

$$P = \{x | x \geq 2\}, Q = \{x | x < -1\} \text{이므로}$$

$$P^C = \{x | x < 2\}, Q^C = \{x | x \geq -1\}$$

$$\therefore P^C \cap Q^C = \{x | -1 \leq x < 2\}$$

답 ④

05

$$p: x^2 + 1 < k \text{에서 } x^2 < k - 1$$

$$\therefore -\sqrt{k-1} < x < \sqrt{k-1}$$

$$q: |x-4| \leq 2 \text{에서 } -2 \leq x-4 \leq 2$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 6$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -\sqrt{k-1} < x < \sqrt{k-1}\},$$

$$Q = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$$

(가)

명제 '어떤 실수 x 에 대하여 $\sim p$ 그리고 q 이다.'가 참이므로 $P^C \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 한다.

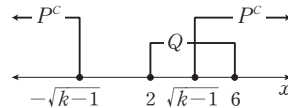
(나)

$$\text{이때 } P^C = \{x | x \leq -\sqrt{k-1} \text{ 또는 } x \geq \sqrt{k-1}\} \text{이고,}$$

$$k \geq 2 \text{이므로 } -\sqrt{k-1} < 0$$

$$P^C \cap Q \neq \emptyset \text{이므로 두 집합 } P^C, Q \text{를 수직선 위에 나타내면}$$

다음 그림과 같아야 한다.



즉, $\sqrt{k-1} \leq 6$ 이어야 하므로 양변을 제곱하면

$$k-1 \leq 36 \quad \therefore k \leq 37$$

$$\text{이때 } k \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq k \leq 37$$

따라서 구하는 실수 k 의 최댓값은 37이다.

(다)

답 37

단계	채점 기준	배점
(가)	두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 구한 경우	30%
(나)	주어진 명제가 참이 되도록 하는 진리집합 사이의 관계를 구한 경우	30%
(다)	실수 k 의 최댓값을 구한 경우	40%

06

두 조건 p, q 를 각각 $p: x^2+x-2 \leq 0$,

$q: x^2+2ax+a^2-4 < 0$ 이라 하고, 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$x^2+x-2 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 1$$

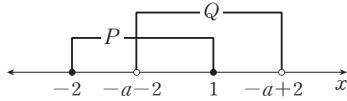
$$x^2+2ax+a^2-4 < 0 \text{에서 } (x+a-2)(x+a+2) < 0$$

$$\therefore -a-2 < x < -a+2$$

$$\therefore P = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}, Q = \{x \mid -a-2 < x < -a+2\}$$

즉, $x^2+x-2 \leq 0$ 을 만족시키는 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2+2ax+a^2-4 < 0$ 이 성립하려면 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 한다.

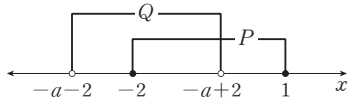
(i) $-a-2 \geq -2$, 즉 $a \leq 0$ 일 때,



$$-a-2 < 1 \text{이어야 하므로 } a > -3$$

$$\therefore -3 < a \leq 0$$

(ii) $-a-2 < -2$, 즉 $a > 0$ 일 때,



$$-a+2 > -2 \text{이어야 하므로 } a < 4$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는

$$-3 < a < 4$$

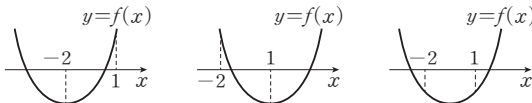
답 $-3 < a < 4$

다른 풀이

$x^2+x-2 \leq 0$, 즉 $-2 \leq x \leq 1$ 인 어떤 실수 x 에 대하여

$x^2+2ax+a^2-4 < 0$ 이 성립해야 하므로

$f(x) = x^2+2ax+a^2-4$ 라 하면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 세 그림 중 하나이어야 한다.



즉, $f(-2) < 0$ 또는 $f(1) < 0$ 이어야 한다.

(i) $f(-2) < 0$ 에서

$$a^2-4a < 0, a(a-4) < 0 \therefore 0 < a < 4$$

(ii) $f(1) < 0$ 에서

$$a^2+2a-3 < 0, (a+3)(a-1) < 0 \therefore -3 < a < 1$$

(i), (ii)에서 $-3 < a < 4$

2 명제 사이의 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.210-216

12 (1) 거짓, 반례: -2 (2) 참

13 풀이 참조 14 (1) 충분조건 (2) 필요조건

15 ㄷ, ㄱ 16 (1) -2 (2) 6 17 4

18 $-3 < a < -1$ 또는 $a > 1$ 19 5

20 -2 21 7 22 ㄴ, ㄷ

23 ㄴ, ㄷ, ㄹ 24 25 25 6 26 7

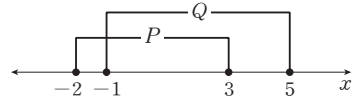
27 ㄷ, ㄹ 28 A, C

12

주어진 명제의 가정을 p , 결론을 q 라 하고, p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(1) ' $p: -2 \leq x \leq 3$ ', ' $q: -1 \leq x \leq 5$ '에서

$$P = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}, Q = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$$



이때 $-2 \in P$ 이지만 $-2 \notin Q$ 이므로 $P \not\subset Q$

따라서 주어진 명제는 거짓이고, 그 반례는 $x = -2$ 이다.

(2) ' $p: x^2+y^2=0$ ', ' $q: x+y=0$ '에서

$$P = \{(x, y) \mid x^2+y^2=0\}, Q = \{(x, y) \mid x+y=0\}$$

이때 $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ 이므로

$x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이므로

$$P = \{(0, 0)\}$$

또한, $x=0$ 이고 $y=0$ 일 때, $x+y=0$ 이므로

$$(0, 0) \in Q \therefore P \subset Q$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓, 반례: -2 (2) 참

보충 설명

(1)에서 $-2 \leq x < -1$ 인 모든 x 의 값은 이 명제의 반례가 된다.

13

- (1) 역: x 가 3의 배수이면 x 는 9의 배수이다. (거짓)
 (반례) $x=3$ 이면 x 는 3의 배수이지만 9의 배수는 아니다.
 대우: x 가 3의 배수가 아니면 x 는 9의 배수가 아니다.
 (참)
- (2) 역: x, y 가 모두 짝수이면 $x+y$ 는 짝수이다. (참)
 대우: x 가 홀수 또는 y 가 홀수이면 $x+y$ 는 홀수이다.
 (거짓)
 (반례) $x=1, y=1$ 이면 x, y 가 모두 홀수이지만 $x+y=2$ 이므로 짝수이다.

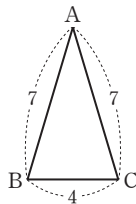
답 풀이 참조

보충 설명

- (1)에서 주어진 명제의 가정을 p , 결론을 q 라 하고, p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $'p: x$ 가 9의 배수이다.', $'q: x$ 가 3의 배수이다.'에서
 $P = \{9, 18, 27, 36, \dots\}, Q = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$
 이때 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 따라서 그 대우도 참이다.

14

- (1) $p: 2x+3 < 5$ 에서 $x < 1$,
 $q: -\frac{1}{2}x+1 > 0$ 에서 $x < 2$
 따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ($q \Rightarrow p$ 의 반례)
 $x = \frac{3}{2}$ 이면 $-\frac{1}{2}x+1 = \frac{1}{4} > 0$ 이지만
 $2x+3 = 6 > 5$ 이다.
- (2) $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ($p \Rightarrow q$ 의 반례)
 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.



답 (1) 충분조건 (2) 필요조건

15

- 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이고,
 명제 $\sim r \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow r$ 이 참이다.
 ㄱ. 두 명제 $\sim r \rightarrow q, q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 명제 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
 ㄴ. 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 참이다.
 ㄷ. 명제 $\sim q \rightarrow r$ 은 참이다.
 ㄹ. 두 명제 $p \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow r$ 이 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 이 참이다.
 따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

16

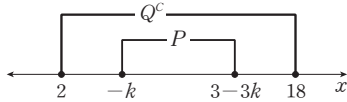
- 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x \leq a\}, Q = \{x | x < -1 \text{ 또는 } 3 < x < 6\}$
- (1) 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.
-
- 따라서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $a < -1$ 이어야 하므로 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.
- (2) 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $Q \subset P$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.
-
- 따라서 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $a \geq 6$ 이어야 하므로 정수 a 의 최솟값은 6 이다.

답 (1) -2 (2) 6

17

- 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $p: 3k-1 \leq 2-x \leq k+2$ 에서 $-k \leq x \leq 3-3k$ 이므로
 $P = \{x | -k \leq x \leq 3-3k\}$
 $q: x < 2$ 또는 $x > 18$ 에서 $\sim q: 2 \leq x \leq 18$ 이므로
 $\sim q$ 의 진리집합은 $Q^C = \{x | 2 \leq x \leq 18\}$

명제 'p이면 ~q이다.'가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $2 \leq -k$ 이고 $3-3k \leq 18$ 이어야 한다.

$$2 \leq -k \text{에서 } k \leq -2 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

$$3-3k \leq 18 \text{에서 } k \geq -5 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } -5 \leq k \leq -2$$

따라서 명제 'p이면 ~q이다.'가 참이 되도록 하는 정수 k 는 $-5, -4, -3, -2$ 의 4개이다.

답 4

18

명제 (가)에서

두 조건 p, q 를 각각 $p: x > 0, q: x - a^2 + 1 < 0$ 이라 하고, 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid x > 0\}$$

또한, $x - a^2 + 1 < 0$ 에서 $x < a^2 - 1$ 이므로

$$Q = \{x \mid x < a^2 - 1\}$$

이때 명제 (가)가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 하므로

$$a^2 - 1 > 0, (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \cdots \textcircled{㉑}$$

명제 (나)에서

두 조건 r, s 를 각각 $r: (x+3)(x+a+3) \leq 0, s: x < 0$ 이라 하고, 두 조건 r, s 의 진리집합을 각각 R, S 라 하면

$$R = \{x \mid (x+3)(x+a+3) \leq 0\},$$

$$S = \{x \mid x < 0\}$$

(i) $a > 0$ 일 때,

$$R = \{x \mid -a-3 \leq x \leq -3\}$$

이므로 $R \subset S$ 이다.

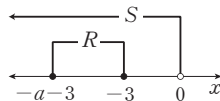
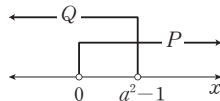
따라서 $a > 0$ 인 모든 실수 a 에

대하여 명제 (나)는 참이 된다.

(ii) $a = 0$ 일 때,

$$R = \{-3\}$$

따라서 $a = 0$ 일 때 명제 (나)는 참이 된다.



(iii) $a < 0$ 일 때,

$$R = \{x \mid -3 \leq x \leq -a-3\}$$

이므로 명제 (나)가 참이 되려면

$R \subset S$ 이어야 한다.

즉, $-a-3 < 0$ 이어야 하므로

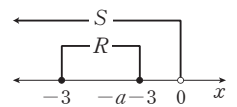
$$a > -3 \quad \therefore -3 < a < 0$$

(i), (ii), (iii)에서 명제 (나)가 참이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a > -3 \quad \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 두 명제 (가), (나)가 모두 참이 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-3 < a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$



답 $-3 < a < -1$ 또는 $a > 1$

19

주어진 명제가 참이므로 그 대우

' $a \leq k$ 이고 $b \leq 2$ 이면 $a+b \leq 7$ 이다.'

도 역시 참이다.

즉, $a \leq k$ 이고 $b \leq 2$ 이면 $a+b \leq k+2$ 이고 대우가 참이므로 $k+2 \leq 7$ 이다.

$$\therefore k \leq 5$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 5이다.

답 5

20

$$q: |x-a| \leq 2 \text{에서 } -2 \leq x-a \leq 2$$

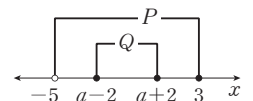
$$\therefore a-2 \leq x \leq a+2$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid -5 < x \leq 3\}, Q = \{x \mid a-2 \leq x \leq a+2\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 의 역은 $q \rightarrow p$ 이고 이것이 참이 되려면

$Q \subset P$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-5 < a - 2$ 이고 $a + 2 \leq 3$ 이어야 한다.
 $-5 < a - 2$ 에서 $a > -3$, $a + 2 \leq 3$ 에서 $a \leq 1$
 $\therefore -3 < a \leq 1$

따라서 명제 $p \rightarrow q$ 의 역이 참이 되게 하는 모든 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1$ 이므로 그 합은
 $-2 + (-1) + 0 + 1 = -2$

답 -2

21

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우가 거짓이므로 명제 $p \rightarrow q$ 도 거짓이다.

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P 의 원소이지만 집합 Q 의 원소는 아닌 것, 즉 집합 $P - Q$ 의 원소이므로
 $X = P - Q = \{1, 2, 3\}$

따라서 집합 X 의 진부분집합의 개수는 $2^3 - 1 = 7$

답 7

22

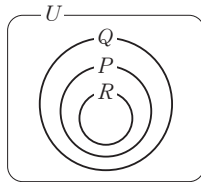
p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q$

$\therefore P \subset Q$ ㉠

p 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow p$

$\therefore R \subset P$ ㉡

㉠, ㉡에서 $R \subset P \subset Q$ 이므로 세 집합 P, Q, R 을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $R \subset Q$ 이지만 $Q \subset R$ 인지 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $P \cap Q = P$ 이고,

$R \subset P$ 이므로 $P^c \subset R^c$

$\therefore (P \cap Q)^c \subset R^c$ (참)

ㄷ. $P \cup Q = Q$ 이고,

$R \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset R^c$

$\therefore (P \cup Q)^c \subset R^c$ (참)

ㄹ. $P^c \cap R^c = (P \cup R)^c = P^c$ 이고,

$P \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset P^c$

$\therefore Q^c \subset (P^c \cap R^c)$

즉, $Q^c \subset (P^c \cap R^c)$ 이지만 $(P^c \cap R^c) \subset Q^c$ 인지 알 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

23

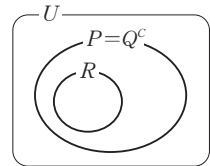
p 는 $\sim q$ 이기 위한 필요충분조건이므로

$p \iff \sim q \quad \therefore P = Q^c$ ㉠

$\sim r$ 은 q 이기 위한 필요조건이므로

$q \Rightarrow \sim r$, 즉 $r \Rightarrow \sim q \quad \therefore R \subset Q^c$ ㉡

㉠, ㉡에서 $R \subset Q^c = P$ 이므로 세 집합 P, Q, R 을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $R \subset Q^c$ 에서 $Q \subset R^c$

$\therefore Q \not\subset R$ (거짓)

ㄴ. $R \subset P$ 에서 $P^c \subset R^c$ (참)

ㄷ. $R \subset P$ 에서 $P \cap R = R$ (참)

ㄹ. $P = Q^c$ 에서 $P \cup Q = Q^c \cup Q = U$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

24

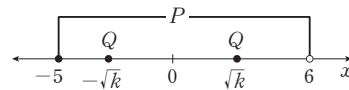
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

$q: x^2 = k$ 에서 $x = \pm\sqrt{k}$ (k 는 자연수)이므로

$Q = \{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\}$

이때 $Q \subset P$ 이어야 하므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 다음과 같아야 한다.



즉, $-5 \leq -\sqrt{k} < 0$ 이어야 하므로

$0 < \sqrt{k} \leq 5 \quad \therefore 0 < k \leq 25$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는

1, 2, 3, ..., 25의 25개이다.

답 25

25

$p: 3|x-2| < 9-2x$ 에서

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-3(x-2) < 9-2x \text{이므로}$$

$$-3x+6 < 9-2x$$

$$-x < 3 \quad \therefore x > -3$$

그런데 $x < 2$ 이므로 $-3 < x < 2$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$3(x-2) < 9-2x \text{이므로}$$

$$3x-6 < 9-2x$$

$$5x < 15 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 3$

(i), (ii)에서 $-3 < x < 3$

즉, 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -3 < x < 3\}, Q = \{x | a < x < b\}$$

이때 p 가 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$ 이다.

따라서 $a=-3, b=3$ 이므로

$$b-a=3-(-3)=6$$

답 6

보충 설명

절댓값의 성질을 이용하여 연립부등식으로 풀 수도 있다.

$$3|x-2| < 9-2x \text{에서 } |x-2| < 3-\frac{2}{3}x$$

$$-3+\frac{2}{3}x < x-2 < 3-\frac{2}{3}x$$

$$-3+\frac{2}{3}x < x-2 \text{에서 } x > -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x-2 < 3-\frac{2}{3}x \text{에서 } x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $-3 < x < 3$

26

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 이라 하면

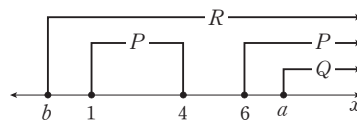
$$P = \{x | 1 \leq x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6\}, Q = \{x | x \geq a\},$$

$$R = \{x | x \geq b\}$$

q 는 p 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P$, r 은 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset R$

$$\therefore Q \subset P \subset R$$

이때 세 집합 P, Q, R 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $b \leq 1, a \geq 6$ 이어야 하므로 a 의 최솟값은 6, b 의 최댓값은 1이다.

따라서 구하는 합은

$$6+1=7$$

답 7

27

명제 $p \rightarrow \sim r$ 의 역이 참이므로 $\sim r \Rightarrow p$ 이고,

명제 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우가 참이므로 $q \Rightarrow \sim r$ 이다.

즉, $q \Rightarrow \sim r \Rightarrow p$ 이므로

$$Q \subset R^c \subset P$$

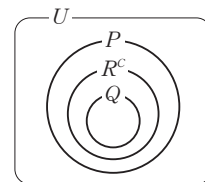
ㄱ. $Q \subset P$ 이지만 $P \subset Q$ 인지 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $R^c \subset P$ 이지만 $P \subset R$ 인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $Q \subset P$ (참)

ㄹ. $R^c \subset P$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.



답 ㄷ, ㄹ

28

네 조건 p, q, r, s 를 각각

$p: A$ 가 범인이다., $q: B$ 가 범인이다.

$r: C$ 가 범인이다., $s: D$ 가 범인이다.

라 하면

(ㄱ)에서 $s \Rightarrow p$

(ㄴ)에서 $\sim r \Rightarrow \sim p$ 이므로 $p \Rightarrow r$

(ㄷ)에서 $\sim s \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow s$

따라서 $q \Rightarrow s \Rightarrow p \Rightarrow r$ 이다.

(i) A 가 범인일 때,

C 도 범인이므로 범인이 두 명이 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

- (ii) B가 범인일 때,
D, A, C도 범인이므로 네 명 모두가 범인이 되어 조건 ㉞에 모순이다.
- (iii) C가 범인일 때,
C 한 사람만 범인이므로 조건 ㉞에 모순이다.
- (iv) D가 범인일 때,
A, C도 범인이므로 범인이 세 명이 되어 조건 ㉞에 모순이다.
- (i)~(iv)에서 범인은 A, C이다.

답 A, C

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.217~218

07 64	08 ①	09 13	10 5
11 28	12 ③, ⑤	13 2	14 ⑤
15 12	16 ③	17 ③	

07

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 $P \subset Q^c$ 이므로 $Q \subset P^c$ 이다.
 $P = \{x | x \text{는 소수}\}$ 에서 $P = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 집합 Q 는
 집합 $P^c = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 의 부분집합이다.
 따라서 집합 Q 의 개수는
 $2^6 = 64$

답 64

08

ㄱ. $P - Q = \emptyset$ 에서 $P \subset Q$ 이므로
 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
 ㄴ. ㄱ에서 $P \subset Q$ 이므로 $P \cup Q = Q$
 이때 $P \cup Q = U$ 이므로 $Q = U$
 모든 집합은 전체집합의 부분집합이므로
 $P^c \subset Q$
 즉, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 는 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 $P \subset Q$ 이고, $P \neq Q$ 이므로
 $Q \not\subset P$
 즉, 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 ㄹ. ㄴ에서 $Q = U$ 이고, $P \neq \emptyset$ 이므로
 $P^c \neq U \quad \therefore Q \not\subset P^c$
 즉, 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 거짓이다.
 따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

09

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 $P^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
 $Q = \{3, 6, 9\}$
 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례는 집합 P^c 의 원소
 이지만 집합 Q 의 원소는 아닌 것, 즉 집합 $P^c - Q$ 의 원소이
 므로
 $P^c - Q = \{1, 5, 7\}$ 에서 구하는 합은
 $1 + 5 + 7 = 13$

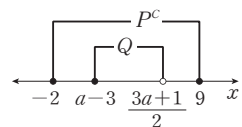
답 13

10

$p: x^2 - 7x - 18 > 0$ 에서 $(x+2)(x-9) > 0$
 $\therefore x < -2$ 또는 $x > 9$
 $q: 2a - 7 \leq 2x - 1 < 3a$ 에서 $2a - 6 \leq 2x < 3a + 1$
 $\therefore a - 3 \leq x < \frac{3a+1}{2}$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 9\}$ 이므로
 $P^c = \{x | -2 \leq x \leq 9\}$, $Q = \left\{x \left| a - 3 \leq x < \frac{3a+1}{2} \right.\right\}$

이때 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되
 려면 $Q \subset P^c$ 이어야 하므로 두
 집합 P^c, Q 를 수직선 위에 나타
 내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-2 \leq a - 3$ 이고, $\frac{3a+1}{2} \leq 9$ 이어야 하므로

$$a \geq 1 \text{이고, } a \leq \frac{17}{3} \quad \therefore 1 \leq a \leq \frac{17}{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

11

조건 $x^2 - 3x < 0$ 의 진리집합을 P 라 하면

$$x(x-3) < 0 \text{에서 } 0 < x < 3$$

$$\therefore P = \{1, 2\}$$

명제 '집합 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $x^2 - 3x < 0$ 이다.'가 참이 되려면 집합 A 가 집합 P 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

$$A = \{1\} \text{ 또는 } A = \{2\} \text{ 또는 } A = \{1, 2\}$$

명제 '집합 B 의 어떤 원소 x 에 대하여 $x \in A$ 이다.'가 참이 되려면 $A \cap B \neq \emptyset$ 이어야 한다.

(i) $A = \{1\}$ 일 때,

집합 B 는 1을 반드시 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

(ii) $A = \{2\}$ 일 때,

집합 B 는 2를 반드시 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

(iii) $A = \{1, 2\}$ 일 때,

집합 B 는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이다.

1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 U 의 부분집합 B 의 개수는

$$2^{4-1-1} = 2^2 = 4$$

2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 U 의 부분집합 B 의 개수는

$$2^{4-1-1} = 2^2 = 4$$

1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합 B 의 개수는

$$2^{4-2} = 2^2 = 4$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$8 + 8 + (4 + 4 + 4) = 28$$

답 28

12

① 명제 : 두 실수 x, y 에 대하여 $xy > 0$ 이면 $x > 0, y > 0$ 이다. (거짓)

(반례) $x = -1, y = -1$ 이면 $xy = 1 > 0$ 이지만 $x < 0, y < 0$ 이다.

역 : 두 실수 x, y 에 대하여 $x > 0, y > 0$ 이면 $xy > 0$ 이다. (참)

② 명제 : 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$ 이다. (참)

역 : 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = B$ 이면 $A \subset B$ 이다. (참)

③ 명제 : $\triangle ABC$ 가 정삼각형이면 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다. (참)

역 : $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\triangle ABC$ 가 정삼각형이다. (거짓)
(반례) $\overline{AB} = \overline{AC} = 4, \overline{BC} = 3$ 이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이지만 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이 아닌 이등변삼각형이다.

④ 명제 : 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다. (거짓)

(반례) 한 변의 길이가 4인 정사각형과 가로, 세로의 길이가 각각 2, 8인 직사각형의 넓이는 모두 16으로 같지만 합동이 아니다.

역 : 두 직사각형이 합동이면 두 직사각형의 넓이는 같다. (참)

⑤ 명제 : $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 이면 대응변의 길이가 같고, 대응각의 크기가 같으므로 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 이다. (참)

역 : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 이면 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 이다. (거짓)

(반례) $\triangle ABC$ 가 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고, $\triangle DEF$ 가 한 변의 길이가 2인 정삼각형이면 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 이지만 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 는 합동이 아니다.

따라서 명제는 참이고 그 역은 거짓인 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

13

$$p : x^2 + 7x + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x+5)(x+2) = 0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = -2$$

$$q: x^2 + 5x + 4 < 0 \text{에서}$$

$$(x+4)(x+1) < 0 \quad \therefore -4 < x < -1$$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 이라 하면

$$P = \{-5, -2\}, Q = \{x \mid -4 < x < -1\},$$

$$R = \{x \mid x > a-5\}$$

이때 명제 $p \rightarrow r$ 이 거짓이므로 $P \not\subset R$

명제 $q \rightarrow r$ 의 대우가 참이므로 명제 $q \rightarrow r$ 도 참이다.

$$\therefore Q \subset R$$

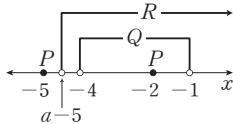
즉, 세 집합 P, Q, R 을 수직선 위에

나타내면 오른쪽 그림과 같아

야 하므로

$$-5 \leq a-5 \leq -4 \quad \therefore 0 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.



답 2

14

$$\textcircled{1} p: \frac{1}{ab} < 3, q: ab \geq \frac{1}{3} \text{에서 } p \not\Rightarrow q, q \not\Rightarrow p \text{이므로}$$

p 는 q 이기 위한 충분조건도, 필요조건도 아니다.

($p \rightarrow q$ 의 반례)

$$a=1, b=-1 \text{이면 } \frac{1}{ab} < 3 \text{이지만 } ab < \frac{1}{3} \text{이다.}$$

($q \rightarrow p$ 의 반례)

$$a=1, b=\frac{1}{3} \text{이면 } ab \geq \frac{1}{3} \text{이지만 } \frac{1}{ab} = 3 \text{이다.}$$

$$\textcircled{2} p: a+b=ab, q: \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{에서}$$

$ab \neq 0$ 이므로 $a+b=ab$ 의 양변을 ab 로 나누면

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \therefore p \Rightarrow q$$

또한, $ab \neq 0$ 이므로 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 의 양변에 ab 를 곱하면

$$a+b=ab \quad \therefore q \Rightarrow p$$

즉, $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\textcircled{3} p: a > 0, b > 0, q: |a+b| = |a| + |b| \text{에서}$$

$a > 0, b > 0$ 이면 $|a|=a, |b|=b, |a+b|=a+b$ 이므로

$$|a+b| = |a| + |b| \quad \therefore p \Rightarrow q$$

그런데 $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

($q \rightarrow p$ 의 반례)

$a=b=-1$ 이면 $|a+b| = |a| + |b|$ 이지만 $a < 0, b < 0$ 이다.

$$\textcircled{4} p: a^3 > b^3, q: |a| > |b| \text{에서 } p \not\Rightarrow q, q \not\Rightarrow p \text{이므로}$$

p 는 q 이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니다.

($p \rightarrow q$ 의 반례)

$a=1, b=-2$ 이면 $a^3 > b^3$ 이지만 $|a| < |b|$ 이다.

($q \rightarrow p$ 의 반례)

$a=-2, b=1$ 이면 $|a| > |b|$ 이지만 $a^3 < b^3$ 이다.

$$\textcircled{5} p: a \text{ 또는 } b \text{가 무리수}, q: a+b \text{는 무리수에서}$$

명제 $q \rightarrow p$ 의 대우

‘ a, b 가 모두 유리수이면 $a+b$ 는 유리수이다.’

가 참이므로 $q \Rightarrow p$

그런데 $p \not\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

($p \rightarrow q$ 의 반례)

$a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$ 이면 a 또는 b 가 무리수이지만 $a+b=0$ 은 무리수가 아니다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

15

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid a < x \leq 3a+2\},$$

$$Q = \left\{ x \mid x < 2a-1 \text{ 또는 } x \geq \frac{2a^2+1}{3} \right\},$$

$$Q^c = \left\{ x \mid 2a-1 \leq x < \frac{2a^2+1}{3} \right\}$$

이때 조건 q 의 진리집합 Q 가 전체집합이 아니므로 Q^c 는 공집합이 아니다. 즉,

$$2a-1 < \frac{2a^2+1}{3} \text{에서 } 6a-3 < 2a^2+1$$

$$a^2-3a+2 > 0, (a-1)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < 1 \text{ 또는 } a > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

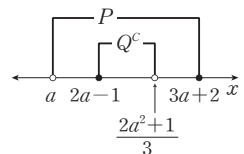
또한, $\sim p$ 가 q 이기 위한 충분조건이므로

$$P^c \subset Q \quad \therefore Q^c \subset P$$

즉, 두 집합 P, Q^c 을 수직선 위에

나타내면 오른쪽 그림과 같아야

하므로



$a < 2a - 1, \frac{2a^2 + 1}{3} \leq 3a + 2$ 이어야 한다.

(i) $a < 2a - 1$ 에서 $a > 1$

(ii) $\frac{2a^2 + 1}{3} \leq 3a + 2$ 에서

$$2a^2 + 1 \leq 9a + 6, 2a^2 - 9a - 5 \leq 0$$

$$(2a + 1)(a - 5) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq a \leq 5$$

(i), (ii)에서 $1 < a \leq 5$ ㉔

㉓, ㉔의 공통부분은

$$2 < a \leq 5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 3, 4, 5이므로 구하는
합은

$$3 + 4 + 5 = 12$$

답 12

16

$p \rightarrow q$ 가 참이므로 $p \Rightarrow q \quad \therefore P \subset Q$ ㉑

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $\sim p \Rightarrow q \quad \therefore P^c \subset Q$ ㉒

$\sim r \rightarrow p$ 가 참이므로 $\sim r \Rightarrow p \quad \therefore R^c \subset P$ ㉓

㉑, ㉒에서 $(P \cup P^c) \subset Q$ 이므로 $U = Q$ ㉔

㉑, ㉓에서 $R^c \subset P \subset Q$

ㄱ. ㉒에서 $P^c \subset Q$ (참)

ㄴ. ㉓에서 $R^c \subset P$ 이므로 $P^c \subset R$ 이지만 $R \subset P^c$ 인지 알 수
없다.

즉, $R - P^c = \emptyset$ 인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. ㉔에서 $(R^c \cup P^c) \subset U = Q$ (참)

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㉓

17

네 조건 p, q, r, s 를 다음과 같이 정하자.

p : 여학생보다 남학생이 더 선호하는 프로그램이다.

q : 학교 밖에서 진행되는 프로그램이다.

r : 외부 교사가 운영하는 프로그램이다.

s : 체육 영역의 프로그램이다.

각 조사 결과는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(㉑): $p \Rightarrow q$, (㉒): $r \Rightarrow q$, (㉓): $s \Rightarrow p$

이때 $s \Rightarrow p, p \Rightarrow q$ 에서 $s \Rightarrow q$

각 명제의 대우도 참이므로

$\sim q \Rightarrow \sim p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim p \Rightarrow \sim s, \sim q \Rightarrow \sim s$

또한, 추론한 내용을 p, q, r, s 를 이용하여 명제로 나타내면
다음과 같다.

$$\textcircled{1} s \rightarrow \sim r$$

$$\textcircled{2} \sim r \rightarrow \sim q$$

$$\textcircled{3} \sim q \rightarrow \sim s$$

$$\textcircled{4} p \rightarrow s$$

$$\textcircled{5} p \rightarrow \sim r$$

따라서 항상 옳은 것은 ㉓이다.

답 ㉓

3 명제의 증명

기본 + 필수연습

본문 pp.224-231

29 풀이 참조 30 5

31~36 풀이 참조

37 (1) 121 (2) 23

38 $\frac{1}{5}, x=4$

39 2

40 $2\sqrt{2}$

41 18

42 6

43 34 m

44 (1) 72 (2) 6

45 25

29

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$$

$$= a + 2\sqrt{ab} + b - (a + b)$$

$$= 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\text{즉, } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq (\sqrt{a+b})^2 \text{에서}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0, \sqrt{a+b} \geq 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

(단, 등호는 $ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$ 일 때 성립)

답 풀이 참조

30

$4a > 0, \frac{1}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \times \frac{1}{a}}$$

$$= 2 \times 2 = 4$$

(단, 등호는 $4a = \frac{1}{a}$, 즉 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

즉, $4a + \frac{1}{a} + 1 \geq 4 + 1 = 5$ 이므로

구하는 최솟값은 5이다.

답 5

31

주어진 명제의 대우

‘두 실수 x, y 에 대하여 $x \leq 2, y \leq 2$ 이면 $x + y \leq 4$ 이다.’

가 참임을 보이면 된다.

$x \leq 2, y \leq 2$ 이므로

$x + y \leq 2 + 2 = 4$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

32

주어진 명제의 대우

‘세 양의 정수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 가 모두 홀수이면

$a^2 + b^2 + c^2$ 은 홀수이다.’

가 참임을 보이면 된다.

a, b, c 가 모두 홀수이므로

$a = 2l - 1, b = 2m - 1, c = 2n - 1$ (l, m, n 은 자연수)

로 나타낼 수 있다. 즉,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2l - 1)^2 + (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2$$

$$= 4l^2 - 4l + 1 + 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 - 4n + 1$$

$$= 2(2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 2n^2 - 2n + 1) + 1$$

이때 $2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 2n^2 - 2n + 1$ 은 자연수이므로

$a^2 + b^2 + c^2$ 은 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

33

주어진 명제의 결론을 부정하여 p 가 3의 배수가 아니라고 가정하면 $p = 3k - 2$ 또는 $p = 3k - 1$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있다.

(i) $p = 3k - 2$ 일 때,

$$8p^2 + 1 = 8(3k - 2)^2 + 1$$

$$= 3(24k^2 - 32k + 11)$$

(ii) $p = 3k - 1$ 일 때,

$$8p^2 + 1 = 8(3k - 1)^2 + 1$$

$$= 3(24k^2 - 16k + 3)$$

(i), (ii)에서 $8p^2 + 1$ 은 3의 배수이다.

이때 3의 배수 중에서 소수는 3뿐이고 $8p^2 + 1 > 3$ 이므로 $8p^2 + 1$ 은 소수가 아니다. 즉, $8p^2 + 1$ 이 소수라는 가정에 모순이다.

따라서 1보다 큰 자연수 p 에 대하여 $8p^2 + 1$ 이 소수이면 p 는 3의 배수이다.

답 풀이 참조

34

주어진 명제의 결론을 부정하여 m, n 중 적어도 하나가 홀수라 가정하자.

(i) m 은 짝수, n 은 홀수일 때,

$$m = 2a, n = 2b - 1 \text{ (} a, b \text{는 자연수)로 나타내면}$$

$$m^2 + n^2 = (2a)^2 + (2b - 1)^2 = 4a^2 + 4b^2 - 4b + 1$$

$$= 4(a^2 + b^2 - b) + 1$$

(ii) m 은 홀수, n 은 짝수일 때,

$$m = 2a - 1, n = 2b \text{ (} a, b \text{는 자연수)로 나타내면}$$

$$m^2 + n^2 = (2a - 1)^2 + (2b)^2 = 4a^2 - 4a + 1 + 4b^2$$

$$= 4(a^2 + b^2 - a) + 1$$

(iii) m, n 모두 홀수일 때,

$$m = 2a - 1, n = 2b - 1 \text{ (} a, b \text{는 자연수)로 나타내면}$$

$$m^2 + n^2 = (2a - 1)^2 + (2b - 1)^2$$

$$= 4a^2 - 4a + 4b^2 - 4b + 2$$

$$= 4(a^2 + b^2 - a - b) + 2$$

(i), (ii), (iii)에서 $m^2 + n^2$ 은 4의 배수가 아니므로 $m^2 + n^2$ 이 4의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 두 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 이 4의 배수이면 m, n 은 모두 짝수이다.

답 풀이 참조

35

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca} \\
 &= \frac{1}{2}(2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}) \\
 &= \frac{1}{2}\{(a-2\sqrt{ab}+b)+(b-2\sqrt{bc}+c) \\
 &\quad + (c-2\sqrt{ca}+a)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\} \geq 0 \\
 \therefore \quad & a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \\
 & \text{(단, 등호는 } \sqrt{a}-\sqrt{b}=0, \sqrt{b}-\sqrt{c}=0, \sqrt{c}-\sqrt{a}=0, \\
 & \text{즉 } a=b=c \text{일 때 성립)} \\
 (2) \quad & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \\
 &= 2(a+b) - (a+2\sqrt{ab}+b) \\
 &= a-2\sqrt{ab}+b \\
 &= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \\
 & \text{즉, } (\sqrt{2(a+b)})^2 \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \text{에서} \\
 & \sqrt{2(a+b)} > 0, \sqrt{a}+\sqrt{b} > 0 \text{이므로} \\
 & \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b} \\
 & \text{(단, 등호는 } \sqrt{a}-\sqrt{b}=0, \text{ 즉 } a=b \text{일 때 성립)} \\
 & \text{답 풀이 참조}
 \end{aligned}$$

36

$$\begin{aligned}
 & (a^2+b^2+1)-(ab+a+b) \\
 &= a^2+b^2+1-ab-a-b \\
 &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2 \times 1 - 2ab - 2a - 2b) \\
 &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\} \geq 0 \\
 \therefore \quad & a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \\
 & \text{(단, 등호는 } a-b=0, a-1=0, b-1=0, \text{ 즉 } a=b=1 \text{일} \\
 & \text{때 성립)} \\
 & \text{답 풀이 참조}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 & a \text{에 대한 이차방정식 } a^2+b^2+1=ab+a+b, \text{ 즉} \\
 & a^2-(b+1)a+b^2-b+1=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면} \\
 & D = \{-(b+1)\}^2 - 4(b^2-b+1) \\
 &= -3b^2+6b-3 = -3(b-1)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } (b-1)^2 \geq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 모든 실수 b 에 대하여 $D \leq 0$ 이다.

따라서 모든 실수 a, b 에 대하여

$$a^2-(b+1)a+b^2-b+1 \geq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

즉, $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$ 가 성립한다.

또한, ㉠에서 등호는 $b=1$ 일 때 성립하므로 $b=1$ 을 이차부등식 ㉡에 대입하면

$$a^2-2a+1=(a-1)^2 \geq 0$$

즉, 등호는 $a=b=1$ 일 때 성립한다.

37

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left(4a+\frac{1}{a}\right)\left(9a+\frac{16}{a}\right) = 36a^2+64+9+\frac{16}{a^2} \\
 &= 36a^2+\frac{16}{a^2}+73 \quad \dots\dots ㉠ \\
 & 0 \text{이 아닌 실수 } a \text{에 대하여 } a^2 > 0 \text{이므로 산술평균과 기하} \\
 & \text{평균의 관계에 의하여} \\
 & 36a^2+\frac{16}{a^2} \geq 2\sqrt{36a^2 \times \frac{16}{a^2}} \\
 &= 2 \times 6 \times 4 = 48 \\
 & \left(\text{단, 등호는 } 36a^2=\frac{16}{a^2}, \text{ 즉 } a=\pm\frac{\sqrt{6}}{3} \text{일 때 성립}\right) \\
 & ㉠에서 (주어진 식) $\geq 48+73=121$ 이므로 구하는 최솟값은 121이다. \\
 (2) \quad & x^2+\frac{49}{x^2-9}=x^2-9+\frac{49}{x^2-9}+9 \quad \dots\dots ㉡ \\
 & x>3 \text{에서 } x^2-9>0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계} \\
 & \text{에 의하여} \\
 & x^2-9+\frac{49}{x^2-9} \geq 2\sqrt{(x^2-9) \times \frac{49}{x^2-9}} \\
 &= 2 \times 7 = 14 \\
 & \left(\text{단, 등호는 } x^2-9=\frac{49}{x^2-9}, \text{ 즉 } x=4 \text{일 때 성립}\right) \\
 & ㉡에서 (주어진 식) $\geq 14+9=23$ 이므로 구하는 최솟값은 23이다.
 \end{aligned}$$

답 (1) 121 (2) 23

38

$$x>3 \text{에서 } x-3>0, x^2-3x+1>0$$

즉, $\frac{x-3}{x^2-3x+1} > 0$ 이므로 $\frac{x^2-3x+1}{x-3}$ 이 최소일 때,

$\frac{x-3}{x^2-3x+1}$ 은 최대이다.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-3x+1}{x-3} &= \frac{x(x-3)+1}{x-3} = x + \frac{1}{x-3} \\ &= x-3 + \frac{1}{x-3} + 3 \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x-3 + \frac{1}{x-3} &\geq 2\sqrt{(x-3) \times \frac{1}{x-3}} = 2 \\ \left(\text{단, 등호는 } x-3 &= \frac{1}{x-3}, \text{ 즉 } x=4 \text{일 때 성립} \right)\end{aligned}$$

㉠에서 $x=4$ 일 때 $\frac{x^2-3x+1}{x-3}$ 은 최솟값 $2+3=5$ 를 가지

므로 $\frac{x-3}{x^2-3x+1}$ 의 최댓값은 $\frac{1}{5}$ 이다.

답 $\frac{1}{5}, x=4$

39

$\frac{3}{a} > 0, \frac{2}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a} = \frac{2}{b} \text{일 때 성립} \right)$$

$$\text{이때 } \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 12 \text{이므로 } 12 \geq 2\sqrt{\frac{6}{ab}} \quad \therefore 6 \geq \sqrt{\frac{6}{ab}}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 36 \geq \frac{6}{ab} \quad \therefore ab \geq \frac{1}{6}$$

$$\therefore 2a+3b = ab \times \frac{2a+3b}{ab} = ab \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} \right) = 12ab$$

$$\geq 12 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $2a+3b$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

다른 풀이

$$(2a+3b) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} \right) = 12 + \frac{9b}{a} + \frac{4a}{b} \quad \dots\dots ㉠$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{9b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 12$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9b}{a} = \frac{4a}{b}, \text{ 즉 } \frac{3}{a} = \frac{2}{b} \text{일 때 성립} \right)$$

이때 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 12$ 이므로 ㉠에서

$$12(2a+3b) \geq 12+12=24$$

$$\therefore 2a+3b \geq 2 \quad \left(\text{단, 등호는 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $2a+3b$ 의 최솟값은 2이다.

40

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+3b \geq 2\sqrt{3ab} \quad \left(\text{단, 등호는 } a=3b \text{일 때 성립} \right)$$

$$\text{이때 } a+3b=4 \text{이므로 } 4 \geq 2\sqrt{3ab} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{3b})^2 &= a + 2\sqrt{3ab} + 3b \\ &= 4 + 2\sqrt{3ab} \\ &\leq 4 + 4 = 8 \quad (\because ㉠)\end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{3b} \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a=2, b=\frac{2}{3} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 구하는 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

답 $2\sqrt{2}$

41

반원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{OD} = 3\sqrt{2}$

직사각형 ABCD의 가로 길이를 $2x$

($0 < x < 3\sqrt{2}$), 세로 길이를 y

($0 < y < 3\sqrt{2}$)라 하면 직각삼각형

OCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$x^2 + y^2 = 18$$

이때 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

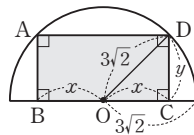
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} \quad \left(\text{단, 등호는 } x^2 = y^2, \text{ 즉 } x=y \text{일 때 성립} \right) \\ &= 2xy \quad (\because x > 0, y > 0)\end{aligned}$$

$$\text{이때 } x^2 + y^2 = 18 \text{이므로}$$

$$2xy \leq 18 \quad \left(\text{단, 등호는 } x=y=3 \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 18이다.

답 18



42

직선 AB의 기울기를 k ($k < 0$)라 하면 이 직선이 점 P(3, 1)을 지나므로 직선의 방정식은

$$y-1=k(x-3) \quad \therefore y=kx-3k+1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A\left(3-\frac{1}{k}, 0\right), B(0, -3k+1)$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \left(3-\frac{1}{k}\right)(-3k+1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-9k - \frac{1}{k} + 6\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$-9k > 0$, $-\frac{1}{k} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$-9k + \left(-\frac{1}{k}\right) \geq 2\sqrt{-9k \times \left(-\frac{1}{k}\right)} \\ = 2 \times 3 = 6$$

$$\left(\text{단, 등호는 } -9k = -\frac{1}{k}, \text{ 즉 } k = -\frac{1}{3} \text{일 때 성립}\right)$$

⑦에서

$$\triangle OAB \geq \frac{1}{2} \times (6+6) = 6$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 6이다.

답 6

다른 풀이

두 점 A, B의 좌표를 각각 A(a, 0), B(0, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \leftarrow x\text{-절편이 } a, y\text{-절편이 } b \text{인 직선의 방정식}$$

이 직선이 점 P(3, 1)을 지나므로

$$\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$a > 0, b > 0$ 에서 $\frac{3}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{1}{b}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{a} = \frac{1}{b} \text{일 때 성립}\right)$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } 1 \geq 2\sqrt{\frac{3}{ab}}, \text{ 즉 } 2\sqrt{\frac{3}{ab}} \leq 1 \text{의 양변을 제곱하면}$$

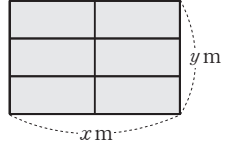
$$\frac{12}{ab} \leq 1 \quad \therefore ab \geq 12 \quad (\because ab > 0)$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}ab \geq 6 \quad (\text{단, 등호는 } a=6, b=2 \text{일 때 성립})$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 6이다.

43

오른쪽 그림과 같이 큰 직사각형의 가로, 세로의 길이를 x m, y m라 하면 줄 전체의 길이가 144 m이므로



$$4x + 3y = 144 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x + 3y \geq 2\sqrt{4x \times 3y} = 4\sqrt{3xy}$$

(단, 등호는 $4x = 3y$ 일 때 성립)

⑨에서

$$144 \geq 4\sqrt{3xy}, \sqrt{3xy} \leq 36$$

$$3xy \leq 1296 \quad \therefore xy \leq 432$$

(단, 등호는 $x=18, y=24$ 일 때 성립)

즉, 큰 직사각형 모양의 구역 전체의 넓이는 $x=18, y=24$ 일 때 최대가 된다.

이때 작은 직사각형의 가로, 세로의 길이는 $\frac{x}{2}=9$ (m), $\frac{y}{3}=8$ (m)이므로 작은 직사각형 하나의 둘레의 길이는

$$2 \times (9+8) = 34 \text{ (m)}$$

답 34 m

44

(1) a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 1^2 \right\} \{ (\sqrt{2}a)^2 + b^2 \} \geq \left(\frac{a}{2} + b \right)^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}a, \text{ 즉 } b = 4a \text{일 때 성립}\right)$$

$$\text{이때 } \frac{a}{2} + b = 9 \text{이므로}$$

$$\frac{9}{8}(2a^2 + b^2) \geq 81$$

$$\therefore 2a^2 + b^2 \geq 72 \quad (\text{단, 등호는 } a=2, b=8 \text{일 때 성립})$$

따라서 $2a^2 + b^2$ 의 최솟값은 72이다.

(2) a, b, c 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\star (1^2 + 1^2 + 2^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \sqrt{a} = \sqrt{b} = \frac{\sqrt{c}}{2} \text{일 때 성립}\right)$$

$$\therefore 6(a+b+c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$$

이때 $a+b+c=6$ 이므로

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2 \leq 36$$

이때 $\sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0, \sqrt{c} > 0$ 이므로

$$0 < \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c} \leq 6$$

(단, 등호는 $a=1, b=1, c=4$ 일 때 성립)

따라서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c}$ 의 최댓값은 6이다.

답 (1) 72 (2) 6

45

a, b 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{3^2 + (-4)^2\}(a^2 + b^2) \geq (3a - 4b)^2$$

(단, 등호는 $3b = -4a$ 일 때 성립)

$$25(a^2 + b^2) \geq (3a - 4b)^2$$

$$\therefore \frac{(3a - 4b)^2}{a^2 + b^2} \leq 25 \quad (\because a^2 + b^2 > 0)$$

따라서 구하는 최댓값은 25이다.

답 25

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.232~233

18 풀이 참조 19 풀이 참조 20 ④ 21 ⑤

22 9 23 $\frac{25}{4}$ 24 8 25 4

26 $\frac{17}{4}$ 27 ⑤

18

주어진 명제의 대우

‘두 자연수 x, y 에 대하여 xy 가 홀수이면 $x^2 + y^2$ 은

짝수이다.’

가 참임을 보이면 된다.

xy 가 홀수이면 x, y 는 모두 홀수이므로

$x=2m+1, y=2n+1$ (m, n 은 음이 아닌 정수)로 나타낼 수 있다. 이때

$$x^2 + y^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2$$

$$= 2(2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1)$$

이므로 $x^2 + y^2$ 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

$$\therefore \textcircled{㉞} : \text{홀수}, \textcircled{㉟} : \text{짝수}, \textcircled{㉡} : 2m^2 + 2m + 2n^2 + 2n + 1$$

답 풀이 참조

19

주어진 명제의 결론을 부정하여 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이라 하자.

(i) $a \neq 0, b = 0$ 이면

$$a + b\sqrt{2} = a \text{에서 } a \neq 0 \text{이므로}$$

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{이라는 가정에 모순이다.}$$

(ii) $a = 0, b \neq 0$ 이면

$$a + b\sqrt{2} = b\sqrt{2} \text{에서 } b \neq 0 \text{이므로}$$

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{이라는 가정에 모순이다.}$$

(iii) $a \neq 0, b \neq 0$ 이면

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{에서 } \sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

이때 a, b 가 유리수이므로 $-\frac{a}{b}$ 도 유리수이다.

즉, (무리수) = (유리수)가 되어 모순이다.

(i), (ii), (iii)에서 두 유리수 a, b 에 대하여 $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면

$a = 0$ 이고 $b = 0$, 즉 $a = b = 0$ 이다.

답 풀이 참조

20

$$(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^2 - \left(\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{3}$$

$$= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{3}$$

$$= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)}{3}$$

$$= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3} \geq 0$$

$$(\because (a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0)$$

이때 $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq 0$, $\frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}} \geq 0$ 이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}$ 가 성립한다.

단, 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉

$a=b=c$ 일 때 성립한다.

$\therefore$ (가) : $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$,

(나) : $\geq$, (다) : $a=b=c$

답 ④

21

가. $a \geq b \geq 0$ 이므로 $\sqrt{a-b} \geq 0$, $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geq 0$

$$\begin{aligned} & \text{이때 } (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ &= (a-b) - (a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b) \\ &= 2\sqrt{a}\sqrt{b}-2b \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a-b} \geq \sqrt{a}-\sqrt{b}$

(단, 등호는 $a=b$ 또는 $b=0$ 일 때 성립) (참)

나. (i) $|a| \geq |b|$ 일 때,

$$\begin{aligned} & |a+b| \geq 0, |a|-|b| \geq 0 \text{이므로} \\ & |a+b|^2 - (|a|-|b|)^2 \\ &= (a+b)^2 - (a^2-2|a||b|+b^2) \\ &= a^2+2ab+b^2 - (a^2-2|ab|+b^2) \\ &= 2(|ab|+ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq -ab) \\ & \therefore |a+b| \geq |a|-|b| \end{aligned}$$

(ii) $|a| < |b|$ 일 때,

$$\begin{aligned} & |a+b| > 0, |a|-|b| < 0 \\ & \therefore |a+b| > |a|-|b| \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $|a+b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$ 이고 $ab \leq 0$ 일 때 성립) (참)

다. (i) $|a| \geq |b|$ 일 때,

$$\begin{aligned} & |a-b| \geq 0, |a|-|b| \geq 0 \text{이므로} \\ & |a-b|^2 - (|a|-|b|)^2 \\ &= (a-b)^2 - (a^2-2|a||b|+b^2) \\ &= a^2-2ab+b^2 - (a^2-2|ab|+b^2) \\ &= 2(|ab|-ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq ab) \\ & \therefore |a-b| \geq |a|-|b| \end{aligned}$$

(ii) $|a| < |b|$ 일 때,

$|a-b| > 0$, $|a|-|b| < 0$ 이므로

$|a-b| > |a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$ 이고 $ab \geq 0$ 일 때 성립) (참)

따라서 가, 나, 다 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이

$$\begin{aligned} & \text{나. } |a| = |a+b+(-b)| \\ & \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b| \end{aligned}$$

$\therefore |a+b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$ 이고 $ab \leq 0$ 일 때 성립) (참)

22

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + 3 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \times \frac{a}{c}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } c=a \text{일 때 성립})$$

$$\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } b=c \text{일 때 성립})$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2+2+2=6$$

(단, 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립)

㉠에서 (주어진 식) $\geq 6+3=9$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

(다)

답 9

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식을 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + 3$ 으로 정리한 경우	40%
(나)	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, $\frac{c}{a} + \frac{a}{c}$, $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 의 최솟값을 구한 경우	40%
(다)	주어진 식의 최솟값을 구한 경우	20%

23

$a+b=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} &= (a+b) \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} \right) = 4 + \frac{a}{4b} + \frac{4b}{a} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{a}{4b} + \frac{4b}{a} + \frac{17}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\frac{a}{4b} > 0, \frac{4b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{a}{4b} + \frac{4b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{4b} \times \frac{4b}{a}} = 2 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{4b} = \frac{4b}{a}, \text{ 즉 } a=4b \text{ 일 때 성립} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{에서 (주어진 식)} &\geq 2 + \frac{17}{4} = \frac{25}{4} \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } a = \frac{4}{5}, b = \frac{1}{5} \text{ 일 때 성립} \right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

답 $\frac{25}{4}$

보충 설명

다음과 같이 잘못 풀지 않도록 주의한다.

$a > 0, b > 0$ 에서 $\frac{4}{a} > 0, \frac{1}{4b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \times \frac{1}{4b}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, $\frac{4}{a} + \frac{1}{4b}$ 의 값은 $\sqrt{ab}$ 가 최대일 때 최소가 된다.

한편, 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\text{이때 } a+b=1 \text{이므로 } \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 구하는 최솟값은 4이다.

이와 같이 오답이 나오는 이유는 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 등호가 성립할 조건이 각각

$$\textcircled{2} : \frac{4}{a} = \frac{1}{4b}, \text{ 즉 } a = \frac{16}{17}, b = \frac{1}{17} \text{ 일 때}$$

$$\textcircled{3} : a = b = \frac{1}{2} \text{ 일 때}$$

으로 서로 다르기 때문이다.

이와 같이 산술평균과 기하평균의 관계를 활용하여 최댓값 또는 최솟값을 구하는 문제를 풀 때에는 등호가 성립할 조건이 일치하는 경우에만 함께 활용할 수 있음에 주의한다.

24

$x = a + \frac{1}{b}, y = b + \frac{1}{a}$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \left(a + \frac{1}{b} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{a} \right)^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2} \right) + \left(b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) + \left(\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2} \right)\end{aligned}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \times \frac{1}{a^2}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } a=1 \text{ 일 때 성립})$$

$$\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b} \times \frac{2b}{a}} = 4 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$b^2 + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{b^2 \times \frac{1}{b^2}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } b=1 \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2 + 4 + 2 = 8 \quad (\text{단, 등호는 } a=b=1 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8이다.

답 8

25

오른쪽 그림과 같이 직사각형의

나머지 꼭짓점을 각각 D, E, F라

하면

($\triangle ABC$ 의 넓이)

= ($\triangle ABE$ 의 넓이) + ($\triangle BCE$ 의 넓이)

$$\text{에서 } \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 6 \times a + \frac{1}{2} \times 8 \times b$$

$$\therefore 3a + 4b = 24$$

$$\text{즉, } \frac{8}{a} + \frac{6}{b} = \frac{6a+8b}{ab} = \frac{2(3a+4b)}{ab} = \frac{48}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 $\frac{8}{a} + \frac{6}{b}$ 의 값이 최소하려면 ab 의 값이 최대이어야 한다.

한편, $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

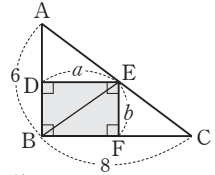
$$3a + 4b \geq 2\sqrt{3a \times 4b} \quad (\text{단, 등호는 } 3a=4b \text{ 일 때 성립})$$

$$4\sqrt{3ab} \leq 24, \sqrt{3ab} \leq 6, 3ab \leq 36$$

$$\therefore ab \leq 12 \quad (\text{단, 등호는 } a=4, b=3 \text{ 일 때 성립})$$

$\textcircled{1}$ 에서

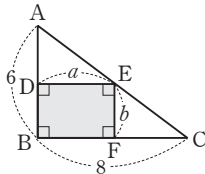
$$\frac{8}{a} + \frac{6}{b} \geq \frac{48}{12} = 4$$



따라서 $\frac{8}{a} + \frac{6}{b}$ 의 최솟값은 4이다.

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 나머지 꼭짓점을 각각 D, E, F라 하면 두 삼각형 ADE와 EFC는 닮음이다.



즉, $\overline{AD} : \overline{DE} = \overline{EF} : \overline{FC}$ 이므로

$$6-b : a = b : 8-a, ab = (6-b)(8-a)$$

$$ab = 48 - 6a - 8b + ab$$

$$\therefore 6a + 8b = 48 \quad \dots\dots ㉠$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$6a + 8b \geq 2\sqrt{48ab} \quad (\text{단, 등호는 } 6a = 8b \text{ 일 때 성립})$$

$$\text{㉠에서 } 48 \geq 2\sqrt{48ab} \quad \therefore 6 \geq \sqrt{3ab}$$

양변을 제곱하면

$$36 \geq 3ab \quad \therefore ab \leq 12 \quad (\text{단, 등호는 } a=4, b=3 \text{ 일 때 성립})$$

$\dots\dots ㉡$

$$\frac{8}{a} + \frac{6}{b} = \frac{6a+8b}{ab} \geq \frac{48}{12} = 4 \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$

따라서 $\frac{8}{a} + \frac{6}{b}$ 의 최솟값은 4이다.

26

a, b 는 실수이고 $\frac{25}{4a^2} = \left(\frac{5}{2a}\right)^2, \frac{36}{b^2} = \left(\frac{6}{b}\right)^2$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2) \left\{ \left(\frac{5}{2a}\right)^2 + \left(\frac{6}{b}\right)^2 \right\} \geq \left(a \times \frac{5}{2a} + b \times \frac{6}{b}\right)^2$$

(단, 등호는 $\frac{6a}{b} = \frac{5b}{2a}$ 일 때 성립)

이때 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로

$$4 \left(\frac{25}{4a^2} + \frac{36}{b^2} \right) \geq \left(\frac{5}{2} + 6 \right)^2 = \left(\frac{17}{2} \right)^2$$

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{36}{b^2} \geq \left(\frac{17}{4} \right)^2$$

$$\therefore \sqrt{\frac{25}{4a^2} + \frac{36}{b^2}} \geq \frac{17}{4}$$

(단, 등호는 $a^2 = \frac{20}{17}, b^2 = \frac{48}{17}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{17}{4}$ 이다.

답 $\frac{17}{4}$

27

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\overline{BC} = x, \overline{CD} = y$ 라 하면

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$$x + y > 2\sqrt{5} \quad \dots\dots ㉠$$

또한, $\overline{BD}$ 는 직각삼각형 BCD의 빗변이므로

$$x^2 + y^2 = 20$$

x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$(x + y)^2 \leq 40, -2\sqrt{10} \leq x + y \leq 2\sqrt{10}$$

$$\therefore 2\sqrt{5} < x + y \leq 2\sqrt{10} \quad (\because \text{㉠})$$

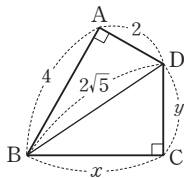
따라서 사각형 ABCD의 둘레의 길이의 범위는

$$6 + 2\sqrt{5} < 2 + 4 + x + y \leq 6 + 2\sqrt{10}$$

이므로 구하는 최댓값은 $6 + 2\sqrt{10}$ 이다.

$x = \sqrt{10}, y = \sqrt{10}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

답 ㉡



STEP 2 개념 마무리

본문 p.234

- | | | | |
|------------------------------|------|------|-----|
| 1 11 | 2 18 | 3 16 | 4 ㉢ |
| 5 $-\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$ | 6 16 | | |

1

(i) $a = -3$ 일 때, $f(x) = 9$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq -1$$

(ii) $a \neq -3$ 일 때,

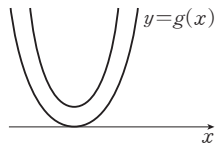
$g(x) = f(x) + 1$ 이라 하면 모든

실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -1$,

즉 $g(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 한다.



이때

$$g(x) = f(x) + 1$$

$$= (a+3)x^2 + 2(a+3)x + 10$$

이므로

$$\textcircled{1} \quad a+3 > 0 \text{에서 } a > -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{이차방정식 } g(x) = 0, \text{ 즉}$$

$$(a+3)x^2 + 2(a+3)x + 10 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - 10(a+3) \leq 0$$

$$a^2 - 4a - 21 \leq 0, (a+3)(a-7) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } -3 < a \leq 7$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -3 \leq a \leq 7$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-3, -2, -1, \dots, 7$ 의 11개이다.

답 11

2

명제 '직선 l 위의 어떤 점 P 에 대하여 $\angle APB > 90^\circ$ 이다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정 '직선 l 위의 모든 점 P 에 대하여 $\angle APB \leq 90^\circ$ 이다.'는 참이다.

(가)

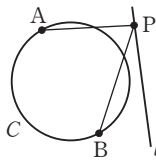
이때 두 점 A, B 와 직선 l 위의 점 P 에 대하여 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C 를 생각하자.

$\angle APB > 90^\circ$ 이면 점 P 는 원 C 의 내부에 있고

$\angle APB = 90^\circ$ 이면 점 P 는 원 C 위에 있고

$\angle APB < 90^\circ$ 이면 점 P 는 원 C 의 외부에 있다.

즉, 명제 '직선 $l: y = -2x + k$ 위의 모든 점 P 에 대하여 $\angle APB \leq 90^\circ$ 이다.'가 참이려면 직선 l 은 원 C 와 접하거나 원 C 와 만나지 않아야 한다.



(나)

두 점 $A(-3, 3), B(7, -7)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 C 의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{3+(-7)}{2} \right), \text{ 즉 } (2, -2)$$

원 C 의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(7+3)^2 + (-7-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

원 C 의 중심 $(2, -2)$ 와 직선 $y = -2x + k$, 즉 $2x + y - k = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이보다 크거나 같아야 하므로

$$\frac{|2 \times 2 - 2 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \geq 5\sqrt{2}, |2 - k| \geq 5\sqrt{10}$$

$$\therefore k \geq 2 + 5\sqrt{10} \quad (\because k \text{는 자연수})$$

이때 $17 < 2 + 5\sqrt{10} < 18$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 18이다.

(다)

답 18

단계	채점 기준	배점
(가)	이용할 수 있는 참인 명제를 찾은 경우	20%
(나)	명제가 참이 될 조건을 밝힌 경우	40%
(다)	자연수 k 의 최솟값을 구한 경우	40%

3

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$ 이어야 한다.

$$p: \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-10}} = -\sqrt{\frac{x+5}{x-10}} \text{에서}$$

$$x+5 \geq 0, x-10 < 0 \quad \therefore -5 \leq x < 10$$

$$\therefore P = \{x \mid -5 \leq x < 10\}$$

$$q: x^2 - 5x - nx + 5n < 0 \text{에서}$$

$$(x-5)(x-n) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n < 5$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{의 해는 } n < x < 5$$

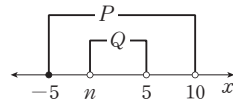
$$\therefore Q = \{x \mid n < x < 5\}$$

이때 $Q \subset P$ 가 되도록 두 집합

P, Q 를 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-5 \leq n < 5$$



(ii) $n = 5$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{은 } (x-5)^2 < 0 \text{이므로 조건을 만족시키는 } x \text{의 값은 없다.}$$

$$\therefore Q = \emptyset$$

이때 항상 $Q \subset P$ 이므로 $n = 5$ 일 때 조건을 만족시킨다.

(iii) $n > 5$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{의 해는 } 5 < x < n$$

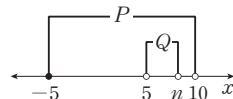
$$\therefore Q = \{x \mid 5 < x < n\}$$

이때 $Q \subset P$ 가 되도록 두 집합

P, Q 를 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$5 < n \leq 10$$



(i), (ii), (iii)에서 $-5 \leq n \leq 10$ 이므로 정수 n 은 $-5, -4, -3, \dots, 10$ 의 16개이다.

답 16

보충 설명

음수의 제곱근의 성질 | a, b 가 실수일 때,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 이면 } a > 0, b < 0 \text{ 또는 } a = 0, b \neq 0$$

4

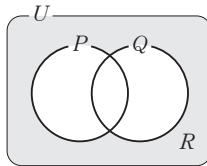
명제 $\sim q \longrightarrow p$ 가 참이라면 $Q^C \subset P$, 즉 $Q^C - P = \emptyset$ 이어야 한다.

즉, 주어진 명제가 거짓임을 보이는 반례를 원소로 갖는 집합 R 은

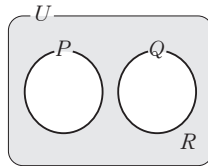
$$R = Q^C - P = Q^C \cap P^C$$

또한, $P - Q \neq \emptyset$ 이고, $R \neq \emptyset$ 이므로 세 집합 P, Q, R 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $P \cap Q \neq \emptyset$ 일 때,



(ii) $P \cap Q = \emptyset$ 일 때,



ㄱ. (i), (ii)에서 $R \subset P^C$ (참)

ㄴ. (i), (ii)에서 $R \subset Q^C$ 이고,

$$P - Q \neq \emptyset \text{ 이므로 } R \neq Q^C$$

또한, $R \neq \emptyset$ 에서 $Q^C \neq \emptyset$

$$\therefore Q^C \not\subset R \text{ (거짓)}$$

ㄷ. ㄱ에서 $R \subset P^C$

(i), (ii)에서 $R \subset Q^C$

$$\text{즉, } R \subset (P^C \cup Q^C) \text{ 이므로}$$

$$R \subset (P \cap Q)^C \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

5

$$x^2 + y^2 - xy + ay + 2 > 0 \text{ 에서}$$

$$\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3}{4}y^2 + ay + 2 > 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + ay + 2 > 0$$

위의 부등식이 모든 실수 x, y 에 대하여 성립하고,

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ 이므로 } \frac{3}{4}y^2 + ay + 2 > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이차방정식 $\frac{3}{4}y^2 + ay + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times 2 = a^2 - 6 < 0, a^2 < 6$$

$$\therefore -\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$$

답 $-\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$

다른 풀이

주어진 부등식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - yx + y^2 + ay + 2 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - yx + y^2 + ay + 2 = 0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1 = (-y)^2 - 4 \times 1 \times (y^2 + ay + 2) < 0$$

$$3y^2 + 4ay + 8 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또한, ②이 모든 실수 y 에 대하여 성립하므로 y 에 대한 이차

방정식 $3y^2 + 4ay + 8 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (2a)^2 - 3 \times 8 < 0$$

$$4a^2 - 24 < 0, a^2 - 6 < 0$$

$$\therefore -\sqrt{6} < a < \sqrt{6}$$

6

$$(x - y)^2 = A \text{라 하면}$$

$$\frac{(x + y)^4}{(x - y)^2} = \frac{\{(x + y)^2\}^2}{A} = \frac{\{(x - y)^2 + 4xy\}^2}{A}$$

$$= \frac{(A + 4)^2}{A} \quad (\because xy = 1)$$

$$= \frac{A^2 + 8A + 16}{A} = A + 8 + \frac{16}{A} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x \neq y$ 이므로 $A > 0$, $\frac{16}{A} > 0$ 이다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$A + \frac{16}{A} \geq 2\sqrt{A \times \frac{16}{A}} = 8$$

$$\left(\text{단, 등호는 } A = \frac{16}{A}, \text{ 즉 } A = 4 \text{일 때 성립} \right)$$

①에서 (주어진 식) $\geq 8 + 8 = 16$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

답 16

III. 함수와 그래프

08. 함수

1 함수

기본 + 필수연습

본문 pp.243-253

- 01 (1) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$,
공역: $\{1, 2, 3\}$, 치역: $\{1, 2, 3\}$
(2) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
공역: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역: $\{1, 3, 7, 9\}$
- 02 (1) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \text{는 실수}\}$
(2) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \leq -4\}$
(3) 정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,
치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$
- 03 (1) $f \neq g$ (2) $f = g$ 04 ㄴ
- 05 (1) ㄱ, ㄴ, ㄷ (2) ㄱ, ㄴ, ㄷ (3) ㄴ (4) ㄷ
- 06 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ
- 07 ㄱ, ㄴ 08 3 09 4 10 7
- 11 6 12 $-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}$ 13 -2 14 36
- 15 3 16 27 17 ㄱ, ㄴ, ㄷ
- 18 풀이 참조 19 1 20 5 21 8, 20
- 22 5 23 $-1 < m < 1$
- 24 (1) $a = \frac{1}{2}, b = -1$ (2) $a = -3, b = 4$
- 25 7 26 6 27 40 28 9
- 29 48

01

- (1) 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응
하므로 함수이고, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역과 치역은 모두 $\{1, 2, 3\}$ 이다.
- (2) 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응
하므로 함수이고, 정의역은 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 공역은 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역은 $\{1, 3, 7, 9\}$ 이다.
- 답 (1) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$,
공역: $\{1, 2, 3\}$, 치역: $\{1, 2, 3\}$
(2) 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,
공역: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 치역: $\{1, 3, 7, 9\}$

02

- (1) 함수 $y = 4 - x$ 의 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$,
치역은 $\{y|y \text{는 실수}\}$ 이다.
- (2) 함수 $y = -(2x - 3)^2 - 4$ 의 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$,
치역은 $\{y|y \leq -4\}$ 이다.
- (3) 함수 $y = -\frac{2}{x}$ 의 정의역은 $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,
치역은 $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이다.
- 답 (1) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \text{는 실수}\}$
(2) 정의역: $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역: $\{y|y \leq -4\}$
(3) 정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$, 치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

03

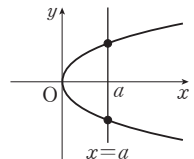
- (1) $f(1) = 1 + 1 = 2, g(1) = -1^2 + 1 = 0$ 이므로
 $f(1) \neq g(1) \therefore f \neq g$
- (2) (i) $f(-1) = -|-1| + 2 = 1,$
 $g(-1) = -(-1)^2 + 2 = 1$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$
(ii) $f(0) = 2, g(0) = 2$ 이므로
 $f(0) = g(0)$
(iii) $f(1) = -1 + 2 = 1, g(1) = -1^2 + 2 = 1$ 이므로
 $f(1) = g(1)$
(i), (ii), (iii)에서 $f = g$

답 (1) $f \neq g$ (2) $f = g$

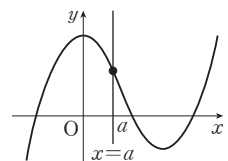
04

실수 전체의 집합에서 정의된 함수의 그래프이라면 정의역의 임의의 원소 a 에 대하여 y 축에 평행한 직선 $x = a$ 를 그었을 때, 그래프가 직선 $x = a$ 와 오직 한 점에서 만나야 한다.

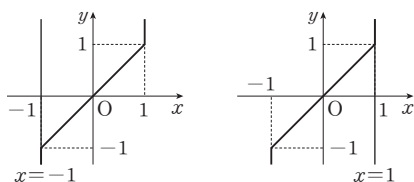
- ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $a > 0$ 인 임의의 실수 a 에 대하여 직선 $x = a$ 와 두 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



- ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 임의의 실수 a 에 대하여 직선 $x = a$ 와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.



ㄷ. 다음 그림과 같이 직선 $x=-1$ 또는 직선 $x=1$ 과 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.



따라서 함수의 그래프인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

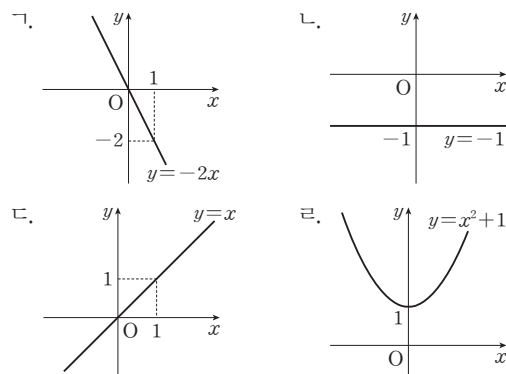
05

- (1) 일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 과 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.
- (2) 일대일대응은 일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.
- (3) 항등함수는 정의역의 모든 원소 x ($x=1, 2, 3, 4$)에 대하여 $y=x$ 가 성립해야 하므로 그 그래프는 ㄴ이다.
- (4) 상수함수는 치역의 원소가 1개이어야 하므로 그 그래프는 ㄷ이다.

답 (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ (3) ㄴ (4) ㄷ

06

각 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



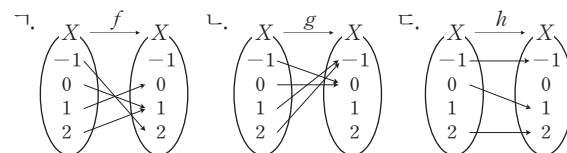
- (1) 일대일함수의 그래프는 치역의 임의의 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 과 오직 한 점에서 만나므로 ㄱ, ㄷ이다.

- (2) 일대일대응은 일대일함수 중에서 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄷ이다.
- (3) 항등함수는 그 그래프가 직선 $y=x$ 인 함수이므로 ㄷ이다.
- (4) 상수함수는 치역의 원소가 1개, 즉 그 그래프가 x 축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄱ, ㄷ (3) ㄷ (4) ㄴ

07

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 ㄷ은 X 의 원소 1에 대응하는 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X 에서 X 로의 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

08

집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 $f(-1)=0 \in X$,

$f(0)=-1 \in X$ 이므로 f 가 X 에서 X 로의 함수가 되기 위해서는 $f(1) \in X$ 이어야 한다.

(i) $f(1)=-1$ 일 때,

$$f(1)=2a-2=-1 \text{에서}$$

$$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

(ii) $f(1)=0$ 일 때,

$$f(1)=2a-2=0 \text{에서}$$

$$2a=2 \quad \therefore a=1$$

(iii) $f(1)=1$ 일 때,

$$f(1)=2a-2=1 \text{에서}$$

$$2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은 $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$

답 3

09

두 집합 $X = \{0, 2, 4\}$, $Y = \{1, 5\}$ 에 대하여 $f(0) = 5 \in Y$ 이므로 f 가 X 에서 Y 로의 함수가 되기 위해서는 $f(2) \in Y$, $f(4) \in Y$ 이어야 한다.

(i) $f(2) = 1$ 일 때,

$$f(2) = 2^2 - 2a + 5 = 1 \text{에서}$$

$$9 - 2a = 1 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{이면}$$

$$f(4) = 5 \in Y \text{이므로 } f \text{는 } X \text{에서 } Y \text{로의 함수이다.}$$

(ii) $f(2) = 5$ 일 때,

$$f(2) = 2^2 - 2a + 5 = 5 \text{에서}$$

$$9 - 2a = 5 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 2x + 5 \text{이면}$$

$$f(4) = 13 \notin Y \text{이므로 } f \text{는 } X \text{에서 } Y \text{로의 함수가 아니다.}$$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a 의 값은 4이다.

답 4

다른 풀이

f 가 X 에서 Y 로의 함수가 되기 위해서는

$$f(2) \in Y, f(4) \in Y \text{이어야 한다.}$$

(i) $f(4) = 1$ 일 때,

$$f(4) = 4^2 - 4a + 5 = 1 \text{에서}$$

$$21 - 4a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 5x + 5 \text{이면}$$

$$f(2) = -1 \notin Y \text{이므로 } f \text{는 } X \text{에서 } Y \text{로의 함수가 아니다.}$$

(ii) $f(4) = 5$ 일 때,

$$f(4) = 4^2 - 4a + 5 = 5 \text{에서}$$

$$21 - 4a = 5 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{이면}$$

$$f(2) = 1 \in Y \text{이므로 } f \text{는 } X \text{에서 } Y \text{로의 함수이다.}$$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a 의 값은 4이다.

10

정의역이 $X = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 이므로

$$f(1) = (3^1, \text{ 즉 } 3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 3$$

$$f(2) = (3^2, \text{ 즉 } 9 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 2$$

$$f(3) = (3^3, \text{ 즉 } 27 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 6$$

$$f(4) = (3^4, \text{ 즉 } 81 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 4$$

$$f(5) = (3^5, \text{ 즉 } 243 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 5$$

$$f(6) = (3^6, \text{ 즉 } 729 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 1$$

$$f(7) = (3^7, \text{ 즉 } 2187 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 3$$

$\vdots$

즉, 함수 f 의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 구하는 합은

$$6 + 1 = 7$$

답 7

다른 풀이

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 이용하여 $f(4), f(5), f(6), \dots$ 의 값을 구할 수 있다.

$$f(4) = (3^4, \text{ 즉 } 3^2 \times 3^2 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$$

$$= (2 \times 2, \text{ 즉 } 4 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 4$$

$$f(5) = (3^5, \text{ 즉 } 3^2 \times 3^3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$$

$$= (2 \times 6, \text{ 즉 } 12 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 5$$

$$f(6) = (3^6, \text{ 즉 } 3^3 \times 3^3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$$

$$= (6 \times 6, \text{ 즉 } 36 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 1$$

$$f(7) = (3^7, \text{ 즉 } 3^6 \times 3^1 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지})$$

$$= (1 \times 3, \text{ 즉 } 3 \text{을 } 7 \text{로 나눈 나머지}) = 3$$

$\vdots$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 구하는 합은

$$6 + 1 = 7$$

보충 설명

함수 f 의 치역을 S 라 하면 어떤 자연수를 7로 나눈 나머지로 가능한 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

$$S \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

이때 임의의 자연수 x 에 대하여 3^x 은 7의 배수가 될 수 없으므로

$$0 \notin S$$

$$\therefore S \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

또한,

$$3^7 = 3 \times 3^6 = 3 \times (7 + 2)^3$$

$$= 3 \times (7^3 + 3 \times 7^2 \times 2 + 3 \times 7 \times 2^2 + 2^3)$$

$$= 3 \times \{7 \times (7^2 + 3 \times 7 \times 2 + 3 \times 2^2) + 7 + 1\}$$

$$= 7 \times (3 \times 7^2 + 3^2 \times 7 \times 2 + 3^2 \times 2^2 + 3) + 3$$

에서 3^7 을 7로 나눈 나머지는 3을 7로 나눈 나머지와 같다.

즉, $f(1) = f(7)$ 이고, 같은 방법으로

$$f(2) = f(8), f(3) = f(9), \dots$$

따라서 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값만 구해도

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{임을 알 수 있다.}$$

11

정의역이 $X=\{1, 3\}$ 인 두 함수 f, g 의 치역이 서로 같으므로 $f(1)=g(1), f(3)=g(3)$ 또는 $f(1)=g(3), f(3)=g(1)$ 이다.

(i) $f(1)=g(1), f(3)=g(3)$ 일 때,

$$1+2a+b=b+3a, 9+6a+b=3b+3a \text{이므로}$$

$$a=1, 3a-2b=-9$$

$$\therefore a=1, b=6$$

(ii) $f(1)=g(3), f(3)=g(1)$ 일 때,

$$1+2a+b=3b+3a, 9+6a+b=b+3a \text{이므로}$$

$$a+2b=1, 3a=-9$$

$$\therefore a=-3, b=2$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=1, b=6$ 이므로

$$ab=1 \times 6=6$$

답 6

12

$f(x)=ax^2+b$ ($a \neq 0$)라 하면 함수 f 의 치역이 $\{y \mid -1 \leq y \leq 5\}$ 이므로 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 , 최댓값은 5 이다.

(i) $a > 0$ 일 때,

이차함수 $y=ax^2+b$ 의

그래프는 아래로 볼록하므

로 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형

은 오른쪽 그림과 같다.

즉, $f(0)=-1, f(3)=5$ 이므로

$$b=-1, 9a+b=5$$

$$\therefore a=\frac{2}{3}, b=-1$$

$$\therefore a+b=\frac{2}{3}+(-1)=-\frac{1}{3}$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

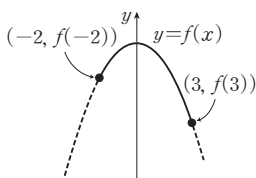
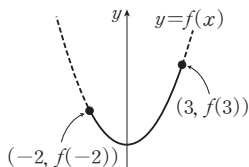
이차함수 $y=ax^2+b$ 의

그래프는 위로 볼록하므로

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형

은 오른쪽 그림과 같다.



즉, $f(0)=5, f(3)=-1$ 이므로

$$b=5, 9a+b=-1$$

$$\therefore a=-\frac{2}{3}, b=5$$

$$\therefore a+b=-\frac{2}{3}+5=\frac{13}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 값은 $-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}$ 이다.

답 $-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}$

13

$$x^2-2x-3=0 \text{에서 } (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore X=\{x \mid x^2-2x-3=0\}=\{-1, 3\}$$

즉, 두 함수 f, g 의 정의역은 $X=\{-1, 3\}$ 이고, 두 함수 f, g 가 서로 같은 함수이므로 $f(-1)=g(-1), f(3)=g(3)$ 이 성립한다.

$$f(-1)=g(-1) \text{에서 } 1-a+b=-1$$

$$\therefore a-b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3)=g(3) \text{에서 } 9+3a+b=7$$

$$\therefore 3a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-2$$

$$\therefore a+b=0+(-2)=-2$$

답 -2

14

두 함수 $f(x)=x^3-5x, g(x)=-x^2+3x+b$ 에 대하여 $f=g$ 이므로 $f(-2)=g(-2), f(a)=g(a)$ 가 성립한다.

$$f(-2)=g(-2) \text{에서 } 2=-10+b$$

$$\therefore b=12$$

$$f(a)=g(a) \text{에서}$$

$$a^3-5a=-a^2+3a+12$$

$$a^3+a^2-8a-12=0 \quad \leftarrow -2 \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & -12 \\ & -2 & 2 & 12 \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 \\ & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$(a+2)^2(a-3)=0 \quad \leftarrow -2 \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 0 \\ & -2 & 6 & \\ \hline 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a \neq -2)$$

$$\therefore ab=3 \times 12=36$$

답 36

15

두 함수 $f(x)=2x^2+3x+1$, $g(x)=x+5$ 에 대하여 $f=g$ 가 되기 위해서는 정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 한다.

즉, $2x^2+3x+1=x+5$ 에서

$$2x^2+2x-4=0, x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 두 함수 f, g 의 정의역 X 는 집합 $\{-2, 1\}$ 의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^2-1=3$

답 3

보충 설명

부분집합의 개수 | 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 에 대하여

- (1) 집합 A 의 부분집합의 개수 : 2^n
- (2) 집합 A 의 진부분집합의 개수 : 2^n-1
- (3) 집합 A 의 원소 중에서 특정한 원소 k 개를 원소로 갖는 (원소로 갖지 않는) 부분집합의 개수 : 2^{n-k} (단, $k < n$)
- (4) 집합 A 의 원소 중에서 특정한 원소 k 개 중 적어도 하나를 원소로 갖는 부분집합의 개수 : 2^n-2^{n-k} (단, $k < n$)

16

주어진 등식의 양변에 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$f(1+1)=f(1)f(1) \quad \therefore f(2)=3 \times 3=9$$

주어진 등식의 양변에 $x=2, y=1$ 을 대입하면

$$f(2+1)=f(2)f(1) \quad \therefore f(3)=9 \times 3=27$$

주어진 등식의 양변에 $x=3, y=2$ 를 대입하면

$$f(3+2)=f(3)f(2) \quad \therefore f(5)=27 \times 9=243$$

또한, 주어진 등식의 양변에 $x=3, y=-2$ 를 대입하면

$$f(1)=f(3)f(-2) \text{ 이므로}$$

$$3=27f(-2) \quad \therefore f(-2)=\frac{1}{9}$$

$$\therefore f(5) \times f(-2)=243 \times \frac{1}{9}=27$$

답 27

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(5) \times f(-2) &= f(5+(-2)) \\ &= f(3) \\ &= f(1) \times f(1) \times f(1) \\ &= 3^3=27 \end{aligned}$$

17

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. ㉑의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \text{ 이므로 } f(0)=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉑의 양변에 $y=-x$ 를 대입하면

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$

ㄴ에서 $f(0)=0$ 이므로 $f(-x)+f(x)=0$ (참)

$$\text{ㄷ. } f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$$

$$f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=3f(x)$$

$$f(4x)=f(3x+x)=f(3x)+f(x)=4f(x)$$

$\vdots$

$$\therefore f(nx)=nf(x) \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

$$\therefore f(ax+by)=f(ax)+f(by)$$

$$=af(x)+bf(y) \text{ (단, } a, b \text{는 자연수)}$$

(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

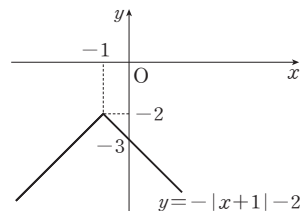
18

$$(1) y=-|x+1|-2$$

$$= \begin{cases} (x+1)-2 & (x < -1) \\ -(x+1)-2 & (x \geq -1) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1 & (x < -1) \\ -x-3 & (x \geq -1) \end{cases}$$

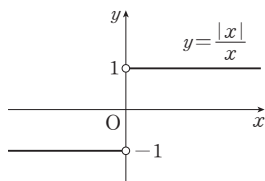
따라서 $y=-|x+1|-2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$(2) y=\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{-x}{x} & (x < 0) \\ \frac{x}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $y = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



(3) (i) $y < 0$ 일 때,

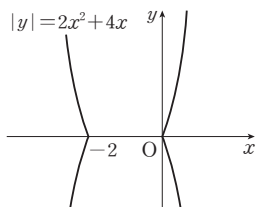
$$-y = 2x^2 + 4x \text{에서}$$

$$y = -2x^2 - 4x = -2(x+1)^2 + 2$$

(ii) $y \geq 0$ 일 때,

$$y = 2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$$

(i), (ii)에서 $|y| = 2x^2 + 4x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

★ 다른 풀이

(3) $|y| = 2x^2 + 4x$ 의 그래프는 $y = 2x^2 + 4x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분만 그린 후, 이 그래프를 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.

19

(i) $x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $y = -2x + 1$

(ii) $x \geq 0, y < 0$ 일 때,

$$-y = -2x + 1 \text{에서 } y = 2x - 1$$

(iii) $x < 0, y \geq 0$ 일 때, $y = 2x + 1$

(iv) $x < 0, y < 0$ 일 때,

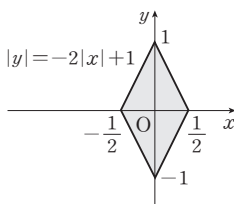
$$-y = 2x + 1 \text{에서 } y = -2x - 1$$

(i)~(iv)에서

$|y| = -2|x| + 1$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$



답 1

★ 다른 풀이

$|y| = -2|x| + 1$ 의 그래프는 $y = -2x + 1$ 의 그래프에서 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 그린 후, 이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것과 같다.

20

함수 $y = ||x-3| - |x+2||$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때, $x-3 < 0, x+2 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ||x-3| - |x+2|| \\ &= |-(x-3) + (x+2)| = 5 \end{aligned}$$

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때, $x-3 < 0, x+2 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ||x-3| - |x+2|| \\ &= |-(x-3) - (x+2)| = |-2x+1| \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -2 \leq x < \frac{1}{2} \text{일 때 } y = -2x+1,$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 3 \text{일 때 } y = 2x-1 \text{이다.}$$

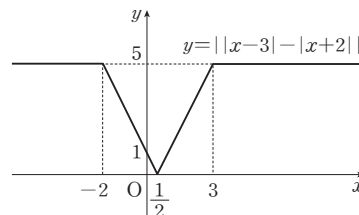
(iii) $x \geq 3$ 일 때, $x-3 \geq 0, x+2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ||x-3| - |x+2|| \\ &= |x-3 - (x+2)| = 5 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$y = ||x-3| - |x+2|| = \begin{cases} 5 & (x < -2) \\ -2x+1 & (-2 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x-1 & (\frac{1}{2} \leq x < 3) \\ 5 & (x \geq 3) \end{cases}$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 0이므로

$$M=5, m=0$$

$$\therefore M+m=5+0=5$$

답 5

21

함수 $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$)가 일대일대응이므로 f 의 치역은 $Y=\{y \mid -8 \leq y \leq 6\}$ 과 일치한다.

(i) $a > 0$ 일 때,

일차함수 $f(x)=ax+b$ 는 x 의 값이 커질 때 $f(x)$ 의 값도 커지므로

$$f(-2)=-8, f(5)=6$$

$$\text{즉, } -2a+b=-8, 5a+b=6$$

이므로

$$a=2, b=-4$$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+(-4)^2=20$$

(ii) $a < 0$ 일 때,

일차함수 $f(x)=ax+b$ 는 x 의 값이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 작아지므로

$$f(-2)=6, f(5)=-8$$

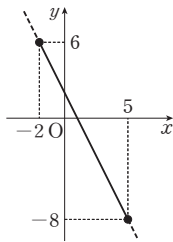
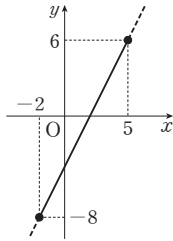
$$\text{즉, } -2a+b=6, 5a+b=-8$$

이므로

$$a=-2, b=2$$

$$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$$

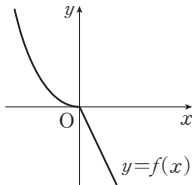
(i), (ii)에서 구하는 값은 8, 20이다.



답 8, 20

22

$x < 0$ 일 때, $f(x)=x^2$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이 되려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x \geq 0$ 일 때 직선 $y=(k^2-6k)x$ 의 기울기는 음수가 되어야 하므로

$$k^2-6k < 0, k(k-6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6$$

따라서 함수 f 가 일대일대응이 되도록 하는 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

23

$$f(x)=m|x-2|+x-2 \text{에서}$$

(i) $x < 2$ 일 때,

$$f(x)=-m(x-2)+x-2$$

$$=(1-m)x+2m-2$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$f(x)=m(x-2)+x-2$$

$$=(m+1)x-2m-2$$

(i), (ii)에서 함수 f 가 일대일대응이 되려면 $x < 2$ 일 때와 $x \geq 2$ 일 때의 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

$$\text{따라서 } (1-m)(m+1) > 0 \text{이므로}$$

$$(m-1)(m+1) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 1$$

답 $-1 < m < 1$

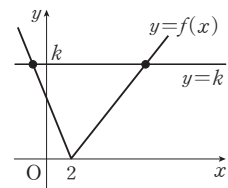
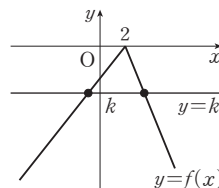
보충 설명

이 문제의 함수

$$f(x)=m|x-2|+x-2$$

$$= \begin{cases} (1-m)x+2m-2 & (x < 2) \\ (m+1)x-2m-2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

와 같이 함수가 구간에 따라 서로 다른 두 일차함수로 정의된 경우, 각 일차함수의 그래프의 기울기의 부호가 다르면 그래프와 직선 $y=k$ (k 는 실수)가 만나지 않거나 두 점에서 만나는 경우가 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 될 수 없다.



24

(1) 함수 f 는 항등함수이므로

$$f(-2) = -2, f(3) = 3$$

$$f(-2) = 4a - 4 = -2$$

$$4a = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$f(3) = 3b + 6 = 3$$

$$3b = -3 \quad \therefore b = -1$$

(2) 함수 f 는 상수함수이므로

$$f(1) = f(2) = f(5)$$

$$f(1) = f(2) \text{에서 } 1 + a + b = 4 + 2a + b$$

$$\therefore a = -3$$

$$f(1) = f(5) \text{에서 } 1 + a + b = 2$$

$$\therefore a + b = 1$$

$$a = -3 \text{을 위의 식에 대입하면 } b = 4$$

$$\text{답 (1) } a = \frac{1}{2}, b = -1 \quad (2) a = -3, b = 4$$

25

함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ 가 항등함수가 되려면

정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } x^3 - 5x^2 + 7x = x \text{에서}$$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0, x(x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 함수 f 의 정의역 X 는 집합 $\{0, 2, 3\}$ 의 부분집합 중에서 공집합이 아닌 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^3 - 1 = 7$$

답 7

26

함수 g 는 항등함수이므로

$$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3$$

$$\therefore f(2) = g(2) = h(2) = 2$$

또한, $h(2) = 2$ 이고 함수 h 는 상수함수이므로

$$h(1) = 2, h(2) = 2, h(3) = 2$$

$$\text{즉, } g(1) + h(1) = f(1) \text{에서}$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

이때 함수 f 는 일대일대응이고 $f(2) = 2, f(1) = 3$ 이므로

$$f(3) = 1$$

$$\therefore f(3) + g(3) + h(3) = 1 + 3 + 2 = 6$$

답 6

27

(i) X 에서 Y 로의 함수의 개수

집합 X 의 원소 0, 1, 2, 3에 대응할 수 있는 집합 Y 의 원소는 4, 5의 2개씩이므로

$$a = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^4} = 16$$

(ii) X 에서 Z 로의 일대일대응의 개수

집합 X 의 원소 0에 대응할 수 있는 집합 Z 의 원소는 6, 7, 8, 9의 4개,

집합 X 의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Z 의 원소는 0에 대응한 원소를 제외한 3개,

집합 X 의 원소 2에 대응할 수 있는 집합 Z 의 원소는 0, 1에 대응한 원소를 제외한 2개,

집합 X 의 원소 3에 대응할 수 있는 집합 Z 의 원소는 0, 1, 2에 대응한 원소를 제외한 1개이므로

$$b = \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!} = 24$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a + b = 16 + 24 = 40$$

답 40

28

집합 $X = \{-2, 0, 2\}$ 에서 X 로의 함수 f 에 대하여 $f(-2), f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-2, 0, 2$ 의 3개씩이다.

이때 함수 f 가 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여

$$f(-x) = f(x) \text{를 만족시키므로}$$

$$f(-2) = f(2)$$

즉, $f(2)$ 의 값은 $f(-2)$ 의 값과 같다.

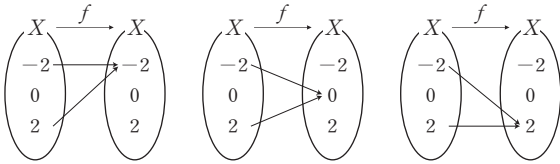
따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$3 \times 3 \times 1 = 9$$

답 9

보충 설명

정의역 X 의 원소 -2 , 2 에 대응할 수 있는 공역의 원소는 다음 그림과 같이 -2 , 0 , 2 의 3개이다.



29

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 으로의 일대일대응 f 에 대하여 $f(1)f(5) < 0$ 을 만족시키려면

$$f(1) > 0, f(5) < 0 \text{ 또는 } f(1) < 0, f(5) > 0$$

(i) $f(1) > 0, f(5) < 0$ 일 때,

$f(1) > 0$ 이어야 하므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3의 2개이고,

$f(5) < 0$ 이어야 하므로 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-3, -1$ 의 2개이다.

집합 X 의 나머지 세 원소 2, 3, 4는 각각 $f(1), f(5)$ 의 값을 제외한 집합 Y 의 나머지 세 원소에 하나씩 대응되어야 하므로 일대일대응 f 의 개수는

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(ii) $f(1) < 0, f(5) > 0$ 일 때,

$f(1) < 0$ 이어야 하므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 $-3, -1$ 의 2개이고,

$f(5) > 0$ 이어야 하므로 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3의 2개이다.

집합 X 의 나머지 세 원소 2, 3, 4는 각각 $f(1), f(5)$ 의 값을 제외한 집합 Y 의 나머지 세 원소에 하나씩 대응되어야 하므로 일대일대응 f 의 개수는

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 일대일대응 f 의 개수는

$$24 + 24 = 48$$

답 48

STEP 1

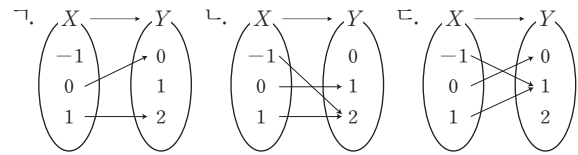
개념 마무리

본문 pp.254~256

01 ⑤	02 4	03 12	04 $\frac{15}{8}$
05 6	06 4	07 $\frac{1}{2}$	08 ③
09 126	10 ㄴ	11 4	12 ②
13 5	14 1	15 10	16 14
17 18	18 18		

01

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



이때 ㄱ은 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

02

정의역이 실수 전체의 집합인 이차함수

$$y = x^2 - 4x + a$$

$$= (x-2)^2 + a-4$$

에 대하여 함수 $y = x^2 - 4x + a$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$1 \leq x \leq 4 \text{에서 } a-4 \leq y \leq a \text{이다.}$$

이때 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$ 에서 집합

$Y = \{y \mid 1 \leq y \leq 8\}$ 로의 대응 $y = x^2 - 4x + a$ 가 함수이려면

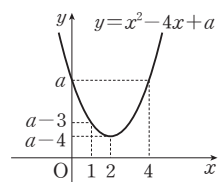
$1 \leq a-4 \leq y \leq a \leq 8$ 이 성립해야 하므로

$$a-4 \geq 1 \text{에서 } a \geq 5 \text{이고 } a \leq 8$$

$$\therefore 5 \leq a \leq 8$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 5, 6, 7, 8의 4개이다.

답 4



03

$f(3)=a-3, f(6)=a-6, f(9)=a-9$ 이므로

함수 f 의 치역은

$$\{a-3, a-6, a-9\}$$

함수 f 의 치역이 정의역과 같으므로

$$\{a-3, a-6, a-9\} = \{3, 6, 9\}$$

이때 $a-9 < a-6 < a-3$ 이므로

$$a-9=3, a-6=6, a-3=9$$

$$\therefore a=12$$

답 12

04

$a < 0$ 이므로 함수 $y=ax^2+bx+2$ 의 그래프는 위로 볼록하고 y 축과의 교점의 y 좌표는 2이다.

$$f(x)=ax^2+bx+2$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+2$$

라 하면 함수 f 의

정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$,

치역은 $\{y \mid -4 \leq y \leq 4\}$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$$\text{즉, } -\frac{b^2}{4a} > 0 \text{에서 } b > 0 \quad (\because a < 0)$$

이때 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 4$ 에서 최댓값 4를 가져야 하므로

$$-\frac{b^2}{4a}+2=4 \quad \therefore 8a=-b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $f(4)=-4$ 이어야 하므로

$$16a+4b+2=-4 \quad \therefore 8a+2b+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$-b^2+2b+3=0, b^2-2b-3=0$$

$$(b+1)(b-3)=0 \quad (*) \quad \therefore b=3 \quad (\because b > 0)$$

$$b=3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a=-\frac{9}{8}$$

$$\therefore a+b=-\frac{9}{8}+3=\frac{15}{8}$$

답 $\frac{15}{8}$

보충 설명

(*)에서 $b=-1$ 또는 $b=3$ 이므로

(i) $b=-1$ 일 때,

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a=-\frac{1}{8}$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{8}x^2-x+2$$

$$=-\frac{1}{8}(x+4)^2+4$$

그런데 이 함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x \leq 4$ 에서 최댓값 4를

갖지 않으므로 조건을 만족

시키지 않는다.

(ii) $b=3$ 일 때,

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a=-\frac{9}{8}$$

$$\therefore f(x)=-\frac{9}{8}x^2+3x+2$$

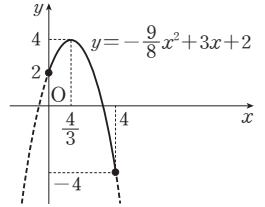
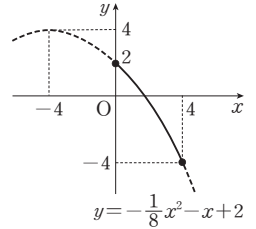
$$=-\frac{9}{8}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+4$$

이 함수의 그래프는 오른쪽

그림과 같이 $0 \leq x \leq 4$ 에서

최댓값 4를 가지므로 조건을

만족시킨다.



05

정의역이 $X=\{1, 3\}$ 인 두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$,

$g(x)=|x-2|$ 가 서로 같으므로

$$f(1)=g(1), f(3)=g(3)$$

$$f(1)=-1+a+b, g(1)=1 \text{이므로}$$

$$-1+a+b=1 \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3)=-9+3a+b, g(3)=1 \text{이므로}$$

$$-9+3a+b=1 \quad \therefore 3a+b=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-2$$

$$\therefore a-b=4-(-2)=6$$

답 6

06

두 함수 $f(x)=x^2-3x-4$, $g(x)=-2x+2$ 가 서로 같은 함수이려면 정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)=g(x)$ 이어야 한다.

$$x^2-3x-4=-2x+2 \text{에서}$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

이때 X 의 원소가 2개이므로 이차방정식 $ax^2+bx+12=0$ 의 해가 $x=-2$ 또는 $x=3$ 이어야 한다.

해가 $x=-2$ 또는 $x=3$ 이고 x^2 의 계수가 a 인 이차방정식은 $a(x+2)(x-3)=0$

$$a(x^2-x-6)=0 \quad \therefore ax^2-ax-6a=0$$

이 이차방정식이 $ax^2+bx+12=0$ 과 일치하므로

$$b=-a, 12=-6a$$

따라서 $a=-2$, $b=2$ 이므로

$$b-a=2-(-2)=4$$

답 4

07

$0 \leq x < 1$ 에서 $f(x)=x^2$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이고,

$-1 \leq x < 0$ 에서 $f(x)=-x$ 이므로

$$f\left(\frac{7}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}+2\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

같은 방법으로

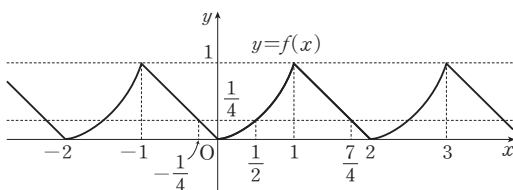
$$f(3000)=f(2998)=f(2996)=\cdots=f(0)=0$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f(3000)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

보충 설명

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



08

$$f(xy)=f(x)f(y) \quad \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$ 을 대입하면

$$f(1)=\{f(1)\}^2$$

$$f(1)\{f(1)-1\}=0$$

그런데 $f(1) \neq 0$ 이므로

$$f(1)=1 \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉠의 양변에 $y=\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$f(1)=f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ㄱ에서 $f(1)=1$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)} \quad (\because f(x) \neq 0) \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } f(x^n)=f(x^{n-1}) \times f(x) \quad \leftarrow f(x^n)=f(x^{n-1} \times x)=f(x^{n-1}) \times f(x)$$

$$=f(x^{n-2}) \times \{f(x)\}^2$$

$$=f(x^{n-3}) \times \{f(x)\}^3$$

$\vdots$

$$=\{f(x)\}^n \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

보충 설명

(*)에서 $f(x)=0$ 을 만족시키는 양수 x 가 존재한다고 하면

$$\frac{f(1)}{=1} = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서 } 1=0 \text{이 되어 모순이다.}$$

따라서 모든 양수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이다.

09

$$f(x-y)=f(x)-f(y) \quad \cdots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=0$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(-y)=f(0)-f(y), f(-y)=-f(y) \quad (\because f(0)=0)$$

$$\therefore f(y)=-f(-y) \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉠의 양변에 y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$f(x+y)=f(x)-f(-y)$$

$$=f(x)+f(y) \quad (\because \textcircled{2})$$

따라서

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2f(1)$$

$$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3f(1)$$

$$f(4)=f(3+1)=f(3)+f(1)=4f(1)$$

⋮

$$f(n)=nf(1) \text{ (} n \text{은 자연수)}$$

이므로

$$f(42)=42f(1)=42 \times 3=126$$

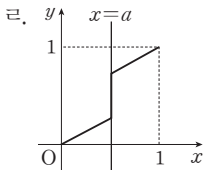
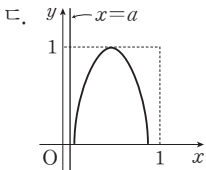
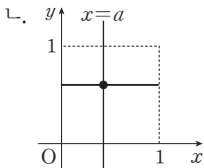
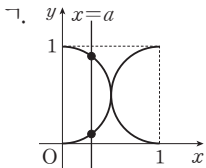
답 126

10

주어진 그래프가 집합 $X=\{x|0 \leq x \leq 1\}$ 에서 집합

$Y=\{y|0 \leq y \leq 1\}$ 로의 함수의 그래프이라면 $0 \leq a \leq 1$ 인 임

의 실수 a 에 대하여 y 축에 평행한 직선 $x=a$ 를 그었을 때, 그래프가 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나야 한다.



ㄱ은 두 점에서 만나는 경우가 존재하고,

ㄷ은 만나지 않는 경우가 존재하며,

ㄹ은 무수히 많은 점에서 만나는 경우가 존재한다.

따라서 함수의 그래프인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

11

$$2|y|=-|x|+a \text{에서 } |y|=-\frac{1}{2}|x|+\frac{a}{2}$$

(i) $x \geq 0, y \geq 0$ 일 때,

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$$

(ii) $x \geq 0, y < 0$ 일 때,

$$-y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2} \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$$

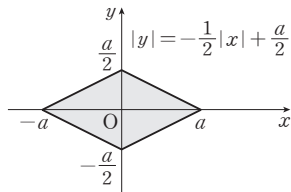
(iii) $x < 0, y \geq 0$ 일 때,

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$$

(iv) $x < 0, y < 0$ 일 때,

$$-y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2} \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$$

(i)~(iv)에서 a 는 양수이므로 $|y|=-\frac{1}{2}|x|+\frac{a}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times 2a \times a = 16$$

$$a^2=16 \quad \therefore a=4 \text{ (} \because a>0 \text{)}$$

답 4

보충 설명

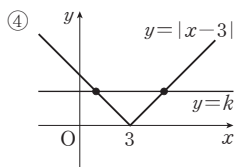
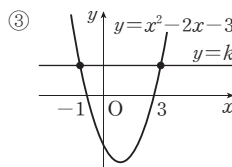
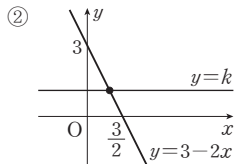
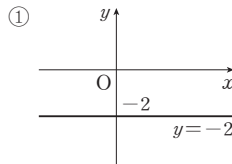
$2|y|=-|x|+a$, 즉 $|y|=-\frac{1}{2}|x|+\frac{a}{2}$ 의 그래프는

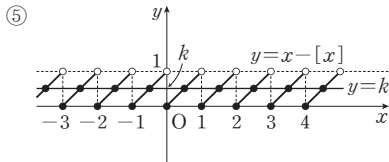
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$ 의 그래프에서 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 그린 후,

이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것과 같다.

12

일대일함수의 그래프이라면 치역의 임의의 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 를 그었을 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나야 한다.





따라서 일대일함수인 것은 ②이다.

답 ②

다른 풀이

실수 전체의 집합에서 함수 f 가 일대일함수하려면 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 즉 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 를 만족시켜야 한다.

① $f(x) = -2$ 에서 $1 \neq 2$ 이지만 $f(1) = f(2) = -2$ 이므로 일대일함수가 아니다.

② $f(x) = 3 - 2x$ 에서 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면

$$3 - 2x_1 = 3 - 2x_2$$

즉, $x_1 = x_2$ 이므로 일대일함수이다.

③ $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 에서 $-1 \neq 3$ 이지만

$$f(-1) = f(3) = 0 \text{이므로 일대일함수가 아니다.}$$

④ $f(x) = |x - 3|$ 에서 $2 \neq 4$ 이지만 $f(2) = f(4) = 1$ 이므로 일대일함수가 아니다.

⑤ $f(x) = x - [x]$ 에서 $0 \neq 1$ 이지만 $f(0) = f(1) = 0$ 이므로 일대일함수가 아니다.

13

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x \\ &= (x-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

즉, $x \geq a$ 에서 함수 $f(x)$ 가 일대일대응하려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$a \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 치역은 $\{y \mid y \geq a\}$ 이어야 하므로

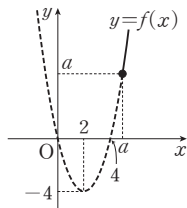
$$f(a) = a$$

$$\text{즉, } a^2 - 4a = a \text{에서}$$

$$a^2 - 5a = 0, a(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = 5$$



답 5

14

함수 $f(x)$ 가 항등함수가 되려면 정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 가 성립해야 한다.

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-x^2 + 2 = x \text{에서}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$(x+1)^2 - 7 = x \text{에서}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x \geq 2)$$

(i), (ii)에서 정의역 X 의 원소는 $-2, 1, 2$ 이므로 그 합은 $-2 + 1 + 2 = 1$

답 1

15

함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 정의역 $X = \{1, 4\}$ 에서 항등함수이므로 $f(1) = 1, f(4) = 4$ 가 성립한다.

$$f(1) = 1 + a + b = 1 \text{에서}$$

$$a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(4) = 16 + 4a + b = 4 \text{에서}$$

$$4a + b = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 4$$

(㉠)

또한, 함수 $g(x) = -x^3 + 4x^2 + cx$ 가 정의역 $X = \{1, 4\}$ 에서 상수함수이므로 $g(1) = g(4)$ 가 성립한다.

$$\text{즉, } -1 + 4 + c = -64 + 64 + 4c \text{에서}$$

$$3 + c = 4c \quad \therefore c = 1$$

(㉡)

따라서 세 점 P, Q, R은

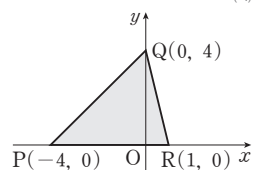
$$P(-4, 0), Q(0, 4), R(1, 0)$$

이므로 삼각형 PQR은 오른쪽

그림과 같고 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

(㉢)



답 10

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 f 가 항등함수임을 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한 경우	40%
(나)	함수 g 가 상수함수임을 이용하여 c 의 값을 구한 경우	40%
(다)	삼각형 PQR의 넓이를 구한 경우	20%

16

조건 (가)에서 f 가 항등함수이므로

$$f(x) = x \quad \therefore f(4) = 4$$

조건 (나)에서 $f(x)g(x) + 2h(x) = 24$ 이므로

$$xg(x) + 2h(x) = 24 \quad \cdots \textcircled{1}$$

조건 (가)에서 g 가 상수함수이므로 다음과 같이 $g(x)$ 의 값에 따라 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $g(x) = 2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2x + 2h(x) = 24 \text{이므로}$$

$$h(x) = -x + 12$$

$$\therefore h(2) = 10, h(4) = 8, h(6) = 6, h(8) = 4,$$

$$h(10) = 2$$

함숫값이 모두 집합 X 의 원소이므로 h 는 X 에서 X 로의 함수이다.

(ii) $g(x) = 4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4x + 2h(x) = 24 \text{이므로}$$

$$h(x) = -2x + 12$$

그런데 $h(6) = 0$ 은 집합 X 의 원소가 아니므로 h 는 X 에서 X 로의 함수가 아니다.

(iii) $g(x) = 6$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 6x + 2h(x) = 24 \text{이므로}$$

$$h(x) = -3x + 12$$

그런데 $h(4) = 0$ 은 집합 X 의 원소가 아니므로 h 는 X 에서 X 로의 함수가 아니다.

(iv) $g(x) = 8$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 8x + 2h(x) = 24 \text{이므로}$$

$$h(x) = -4x + 12$$

그런데 $h(4) = -4$ 는 집합 X 의 원소가 아니므로 h 는 X 에서 X 로의 함수가 아니다.

(v) $g(x) = 10$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 10x + 2h(x) = 24 \text{이므로}$$

$$h(x) = -5x + 12$$

그런데 $h(4) = -8$ 은 집합 X 의 원소가 아니므로 h 는 X 에서 X 로의 함수가 아니다.

$$(i) \sim (v) \text{에서 } g(x) = 2, h(4) = 8$$

$$\therefore f(4) + g(4) + h(4) = 4 + 2 + 8 = 14$$

답 14

17

조건 (가)에서 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합

$Y = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 함수 f 가 일대일함수이므로 X 의 각 원소에 대한 함숫값은 모두 다른 값이 되어야 한다.

또한, 조건 (나)에서 $f(1) = b$ 이므로 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 b 를 제외한 a, c, d, e 중 하나이다.

그런데 조건 (다)에서 $f(2) \neq c$ 이므로

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, d, e 의 3개,

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, c, d, e 중에서 $f(2)$ 의 값을 제외한 3개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 a, c, d, e 중에서 $f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2개이므로

조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

답 18

18

조건 (나)에서 정의역 A 의 어떤 원소 n 에 대하여

$$f(n+2) - f(n) = 4$$

이고 함수 f 의 공역이 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$f(n+2) = 5, f(n) = 1$ 인 경우만 가능하다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$f(1) = 1, f(3) = 5$$

조건 (가)에서 f 가 일대일대응이므로 집합 A 의 나머지 원소 2, 3, 4에 대하여

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3개,

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중에서 $f(2)$ 의 값을 제외한 2개,

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4 중에서 $f(2), f(4)$ 의 값을 제외한 1개이므로

일대일대응 f 의 개수는

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$f(2)=1, f(4)=5$$

(i)과 같은 방법으로 일대일대응 f 의 개수는

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

(iii) $n=3$ 일 때,

$$f(3)=1, f(5)=5$$

(i)과 같은 방법으로 일대일대응 f 의 개수는

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 일대일대응 f 의 개수는

$$6 + 6 + 6 = 18$$

답 18

2 합성함수

기본 + 필수연습

본문 pp.260~267

30 (1) 1 (2) 2

31 (1) $(f \circ f)(x) = 9x + 20$

(2) $(g \circ f)(x) = 8x^2 + 8x + 1$

32 3 33 11 34 4 35 -3

36 7 37 2 38 -2

39 (1) 0 (2) 4 40 $f\left(\frac{x-1}{6}\right) = 2x + 17$

41 11 42 (1) $f^{25}(x) = x + 75$ (2) 186

43 6 44 (1) e (2) a 45 4

46 (1) 풀이 참조 (2) 3 47 $\frac{4}{3}$

30

(1) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = 1$

(2) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$

답 (1) 1 (2) 2

31

(1) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x+5)$

$$= 3(3x+5) + 5$$

$$= 9x + 20$$

(2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1)$

$$= 2(2x+1)^2 - 1$$

$$= 2(4x^2 + 4x + 1) - 1$$

$$= 8x^2 + 8x + 1$$

답 (1) $(f \circ f)(x) = 9x + 20$

(2) $(g \circ f)(x) = 8x^2 + 8x + 1$

32

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4 & (0 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{에서}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \times \frac{3}{2} + 4 = 1 \text{이므로}$$

$$(f \circ f)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f(1) = -2 \times 1 + 4 = 2$$

또한, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ 이고

$$(f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3$$

이므로

$$(f \circ f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = f\left((f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right)\right) = f(3) = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore (f \circ f)\left(\frac{3}{2}\right) + (f \circ f \circ f)\left(\frac{5}{2}\right) = 2 + 1 = 3$$

답 3

33

19보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17의 7개이므로

$$f(19) = 7$$

$$(f \circ f)(19) = f(f(19)) = f(7) \text{에서}$$

7보다 작은 소수는 2, 3, 5의 3개이므로

$$f(7) = 3$$

$$\therefore (f \circ f)(19) = 3$$

$$(f \circ f \circ f)(19) = f((f \circ f)(19)) = f(3) \text{에서}$$

3보다 작은 소수는 2의 1개이므로

$$f(3) = 1$$

$$\therefore (f \circ f \circ f)(19) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(19) + (f \circ f)(19) + (f \circ f \circ f)(19) \\ = 7 + 3 + 1 = 11 \end{aligned}$$

답 11

34

$$\begin{aligned} (g \circ f)(2) &= 0 \text{에서} \\ (g \circ f)(2) &= g(f(2)) = g(a-4) \\ &= (a-4)^2 - b \\ \therefore (a-4)^2 - b &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ (f \circ g)(\sqrt{2}) &= 1 \text{에서} \\ (f \circ g)(\sqrt{2}) &= f(g(\sqrt{2})) = f(2-b) \\ &= a - 2(2-b) \\ &= a - 4 + 2b \\ \therefore a - 4 + 2b &= 1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \text{에서 } a - 4 &= 1 - 2b \text{이므로 이것을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ (1 - 2b)^2 - b &= 0, 4b^2 - 5b + 1 = 0 \\ (4b - 1)(b - 1) &= 0 \\ \therefore b &= 1 \quad (\because b \text{는 정수}) \\ \text{이것을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \\ a - 4 + 2 \times 1 &= 1 \quad \therefore a = 3 \\ \therefore a + b &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

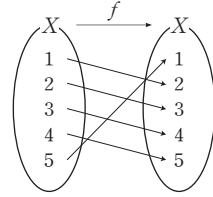
35

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x + a, g(x) = ax + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + 4) \\ &= 4(ax + 4) + a \\ &= 4ax + 16 + a \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(4x + a) \\ &= a(4x + a) + 4 \\ &= 4ax + a^2 + 4 \\ (f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{이므로} \\ 4ax + 16 + a &= 4ax + a^2 + 4 \\ \text{즉, } 16 + a &= a^2 + 4 \text{에서} \\ a^2 - a - 12 &= 0, (a+3)(a-4) = 0 \\ \therefore a &= -3 \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

답 -3

36

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 가
 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=5) \\ x+1 & (x \neq 5) \end{cases}$ 이므로 함수 f 는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned} \text{이때 } f \circ g &= g \circ f \text{이므로} \\ (f \circ g)(1) &= (g \circ f)(1) \text{에서} \\ f(g(1)) &= g(f(1)), f(3) = g(2) \quad (\because g(1) = 3) \\ \therefore g(2) &= 4 \\ (f \circ g)(2) &= (g \circ f)(2) \text{에서} \\ f(g(2)) &= g(f(2)), f(4) = g(3) \\ \therefore g(3) &= 5 \\ (f \circ g)(3) &= (g \circ f)(3) \text{에서} \\ f(g(3)) &= g(f(3)), f(5) = g(4) \\ \therefore g(4) &= 1 \\ (f \circ g)(4) &= (g \circ f)(4) \text{에서} \\ f(g(4)) &= g(f(4)), f(1) = g(5) \\ \therefore g(5) &= 2 \\ \therefore g(3) + g(5) &= 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

답 7

37

$$\begin{aligned} g \circ (h \circ f) &= (g \circ h) \circ f \text{이므로} \\ (g \circ (h \circ f))(k) &= ((g \circ h) \circ f)(k) \\ &= (g \circ h)(f(k)) = (g \circ h)(2k-1) \\ &= (2k-1)^2 - 2(2k-1) + 5 \\ &= 4k^2 - 8k + 8 \\ \text{즉, } 4k^2 - 8k + 8 &= 13 \text{에서 } 4k^2 - 8k - 5 = 0 \\ (2k+1)(2k-5) &= 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k = \frac{5}{2} \\ \text{따라서 모든 실수 } k \text{의 값의 합은 } &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2 \end{aligned}$$

답 2

38

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f \text{이므로} \\ (h \circ (g \circ f))(a) &= ((h \circ g) \circ f)(a) \\ &= (h \circ g)(f(a)) = (h \circ g)(2a+3) \\ &= (2a+3)^2 - 3(2a+3) + 8 \\ &= 4a^2 + 6a + 8 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4a^2 + 6a + 8 < 18 \text{에서 } 4a^2 + 6a - 10 < 0$$

$$2a^2 + 3a - 5 < 0, (2a+5)(a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{5}{2} < a < 1$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 의 최솟값은 -2 이다.

답 -2

39

$$(1) (f \circ h)(x) = f(h(x)) = \frac{1}{2}h(x) + 1 \text{이므로}$$

$$(f \circ h)(x) = g(x) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}h(x) + 1 = -x^2 + 5$$

$$\therefore h(x) = -2x^2 + 8$$

$$\therefore h(2) = -2 \times 2^2 + 8 = 0$$

$$(2) (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \text{이므로}$$

$$(h \circ f)(x) = g(x) \text{에서}$$

$$h\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -x^2 + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = t \text{로 놓으면 } x = 2t - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$h(t) = -(2t-2)^2 + 5 = -4t^2 + 8t + 1$$

$$\text{즉, } h(x) = -4x^2 + 8x + 1 \text{이므로}$$

$$h(0) = 1$$

$$\therefore (g \circ h)(0) = g(h(0))$$

$$= g(1) = -1^2 + 5 = 4$$

답 (1) 0 (2) 4

다른 풀이

$$(1) (f \circ h)(2) = f(h(2)) = g(2) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}h(2) + 1 = -2^2 + 5 = 1$$

$$\therefore h(2) = 0$$

$$(2) \textcircled{1} \text{의 양변에 } x = -2 \text{를 대입하면}$$

$$h(0) = -(-2)^2 + 5 = 1$$

$$\therefore (g \circ h)(0) = g(h(0))$$

$$= g(1) = -1^2 + 5 = 4$$

40

$$f\left(\frac{2x-5}{4}\right) = 6x + 4 \text{에서}$$

$$\frac{2x-5}{4} = t \text{로 놓으면}$$

$$2x - 5 = 4t \quad \therefore x = 2t + \frac{5}{2}$$

$$\text{이것을 } f\left(\frac{2x-5}{4}\right) = 6x + 4 \text{에 대입하면}$$

$$f(t) = 6\left(2t + \frac{5}{2}\right) + 4$$

$$= 12t + 19$$

$$\text{위의 식에 } t = \frac{x-1}{6} \text{을 대입하면}$$

$$f\left(\frac{x-1}{6}\right) = 12 \times \frac{x-1}{6} + 19$$

$$= 2x + 17$$

$$\text{답 } f\left(\frac{x-1}{6}\right) = 2x + 17$$

41

$$(f \circ g)(x) = 2\{g(x)\}^2 - 1 \text{에서}$$

$$f(g(x)) = 2\{g(x)\}^2 - 1$$

$$\text{이때 } g(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$f(t) = 2t^2 - 1 \quad \therefore f(x) = 2x^2 - 1$$

g 는 일차함수이므로 $g(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라 하면

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 1)$$

$$= a(2x^2 - 1) + b$$

$$= 2ax^2 - a + b$$

$$2 - \{g(x)\}^2 = 2 - (ax + b)^2$$

$$= -a^2x^2 - 2abx - b^2 + 2$$

$$\text{이때 } (g \circ f)(x) = 2 - \{g(x)\}^2 \text{에서}$$

$$2ax^2 - a + b = -a^2x^2 - 2abx - b^2 + 2$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$2a = -a^2, 0 = -2ab, -a + b = -b^2 + 2$$

$$2a = -a^2 \text{에서 } a^2 + 2a = 0$$

$$a(a+2) = 0 \quad \therefore a = -2 \quad (\because a \neq 0)$$

$$a = -2 \text{이면 } -2ab = 0 \text{에서}$$

$$4b = 0 \quad \therefore b = 0$$

이때 $a = -2, b = 0$ 은 $-a + b = -b^2 + 2$ 를 만족시킨다.

$$\therefore g(x) = -2x$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 1, g(x) = -2x$ 이므로

$$f(3) + g(3) = 17 + (-6) = 11$$

답 11

42

$$(1) f^1(x) = f(x) = x + 3$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x))$$

$$= f(x+3) = (x+3) + 3 = x+6$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f(x+6) = (x+6) + 3 = x+9$$

$\vdots$

따라서 자연수 n 에 대하여 $f^n(x) = x + 3n$

$$\therefore f^{25}(x) = x + 3 \times 25 = x + 75$$

$$(2) f^{60}(x) = x + 3 \times 60 = x + 180 \text{이므로}$$

$$f^{60}(6) = 6 + 180 = 186$$

답 (1) $f^{25}(x) = x + 75$ (2) 186

43

$$f^1(1) = f(1) = 2 \text{이고}$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 3$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 1$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(1) = 2$$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $63 = 3 \times 21$ 이므로

$$f^{63}(1) = f^3(1) = 1$$

또한, $f^1(3) = f(3) = 1$ 이고

$$f^2(3) = (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) = f(1) = 2$$

$$f^3(3) = (f \circ f^2)(3) = f(f^2(3)) = f(2) = 3$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(3) = 1$$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(3)$ 의 값은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $64 = 3 \times 21 + 1$ 이므로

$$f^{64}(3) = f^1(3) = 1$$

한편, $f(4) = 4$ 이므로 자연수 n 에 대하여

$$f^n(4) = 4 \quad \therefore f^{65}(4) = 4$$

$$\therefore f^{63}(1) + f^{64}(3) + f^{65}(4) = 1 + 1 + 4 = 6$$

답 6

44

직선 $y=x$ 를 이용하여 점선과 y 축이 만나는 점의 y 좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

$$(1) f(c) = d, f(d) = e \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(c) = f(f(c))$$

$$= f(d) = e$$

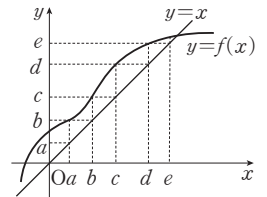
$$(2) f(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(t)) = d$$

$$\text{이때 } f(c) = d \text{이므로 } f(t) = c$$

$$\text{또한, } f(b) = c \text{이므로 } t = b$$

따라서 $f(x) = b$ 를 만족시키는 x 의 값은 a 이므로 구하는 x 의 값은 a 이다.



답 (1) e (2) a

45

주어진 그래프에서 $f(0)=3, f(1)=2, f(2)=4, f(3)=1, f(4)=0$ 이므로

$$f^1(1) = f(1) = 2$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 4$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(4) = 0$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(0) = 3$$

$$f^5(1) = (f \circ f^4)(1) = f(f^4(1)) = f(3) = 1$$

$$f^6(1) = (f \circ f^5)(1) = f(f^5(1)) = f(1) = 2$$

$\vdots$

따라서 $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(1)$ 의 값은 2, 4, 0, 3, 1이 이
순서대로 반복된다.

이때 $567=5 \times 113 + 2$ 이므로

$$f^{567}(1)=f^2(1)=4$$

답 4

46

$$(1) f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ -2x+4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x+2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x-2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

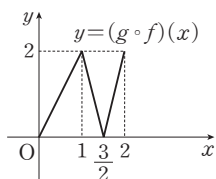
$$= \begin{cases} -2f(x)+2 & (0 \leq f(x) < 1) \\ 2f(x)-2 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(x+1)-2 & (0 \leq x < 1) \\ 2(-2x+4)-2 & (1 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ -2(-2x+4)+2 & (\frac{3}{2} < x \leq 2) \end{cases}$$

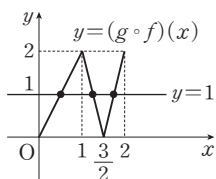
$f(x)=1$ 을
만족시키는
 x 의 값

$$= \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -4x+6 & (1 \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ 4x-6 & (\frac{3}{2} < x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의
그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 방정식 $(g \circ f)(x)=1$ 의 실근
의 개수는 함수 $y=(g \circ f)(x)$
의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점
의 개수와 같으므로 3이다.



답 (1) 풀이 참조 (2) 3

다른 풀이

(2) $(g \circ f)(x)=1$, 즉 $g(f(x))=1$ 에서
 $-2f(x)+2=1$ 또는 $2f(x)-2=1$
 $\therefore f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{2}$

(i) $f(x)=\frac{1}{2}$ 일 때,

$$-2x+4=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{7}{4}$$

(ii) $f(x)=\frac{3}{2}$ 일 때,

$$x+1=\frac{3}{2} \text{ 또는 } -2x+4=\frac{3}{2}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 방정식 $(g \circ f)(x)=1$ 의 실근의 개수는 3이다.

47

$$f(x) = -2|x|+5 = \begin{cases} 2x+5 & (x < 0) \\ -2x+5 & (x \geq 0) \end{cases},$$

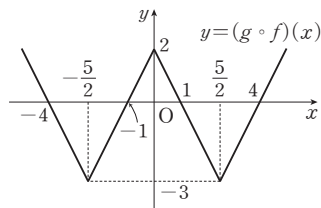
$$g(x) = |x|-3 = \begin{cases} -x-3 & (x < 0) \\ x-3 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -f(x)-3 & (f(x) < 0) \\ f(x)-3 & (f(x) \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(2x+5)-3 & (x < -\frac{5}{2}) \\ 2x+5-3 & (-\frac{5}{2} \leq x < 0) \\ -2x+5-3 & (0 \leq x \leq \frac{5}{2}) \\ -(-2x+5)-3 & (x > \frac{5}{2}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x-8 & (x < -\frac{5}{2}) \\ 2x+2 & (-\frac{5}{2} \leq x < 0) \\ -2x+2 & (0 \leq x \leq \frac{5}{2}) \\ 2x-8 & (x > \frac{5}{2}) \end{cases}$$

즉, 함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $x < -\frac{5}{2}$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = -2x - 8 \text{ 이므로}$$

$$-2x - 8 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}x = -\frac{15}{2} \quad \therefore x = -3$$

(ii) $-\frac{5}{2} \leq x < 0$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = 2x + 2 \text{ 이므로}$$

$$2x + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{5}{2} \quad \therefore x = -\frac{5}{3}$$

(iii) $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = -2x + 2 \text{ 이므로}$$

$$-2x + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \quad \therefore x = 1$$

(iv) $x > \frac{5}{2}$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = 2x - 8 \text{ 이므로}$$

$$2x - 8 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{15}{2} \quad \therefore x = 5$$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은

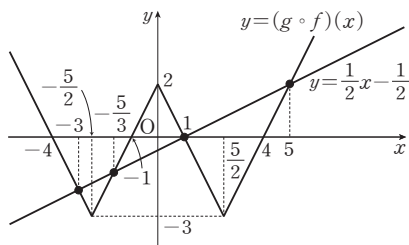
$$-3 + \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 + 5 = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

보충 설명

방정식 $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 의 실근은 함수 $y = (g \circ f)(x)$

의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



STEP 1 개념 마무리

본문 pp.268-269

19	18	20	4	21	16	22	6
23	$k=0$ 또는 $k>4$	24	$-\frac{1}{4}$	25	2		
26	$\frac{14}{9}$	27	13	28	5	29	-3
30	4						

19

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(a)$$

$$= 2a^2 - 3a$$

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(a-2)$$

$$= 2(a-2)^2 - 4(a-2) + a = 2a^2 - 11a + 16$$

이때 $(f \circ f)(0) = (f \circ f)(1)$ 이므로

$$2a^2 - 3a = 2a^2 - 11a + 16$$

$$8a = 16 \quad \therefore a = 2$$

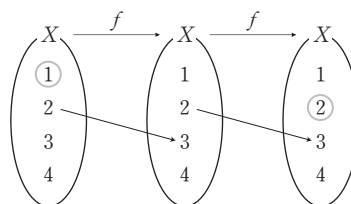
따라서 $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ 이므로

$$f(4) = 2 \times 4^2 - 4 \times 4 + 2 = 18$$

답 18

20

함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이라면 집합 X 의 모든 원소가 집합 X 의 모든 원소에 각각 하나씩 대응되어야 한다. 이때 $f(2)=3$ 이므로 함수 $f \circ f$ 를 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



또한, 함수 f 가 일대일대응이고 $f(2)=3$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 가능한 것은 1, 2, 4의 3개이다.

(i) $f(1)=1$ 이면

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 1 \neq 2$$

(ii) $f(1)=2$ 이면

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 3 \neq 2$$

(iii) $f(1)=4$ 이면

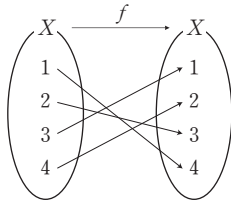
$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 2$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)=4, f(2)=3, f(4)=2$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로 $f(3)=1$
 $\therefore (f \circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=4$

답 4

보충 설명

함수 f 의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



21

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^2 + 8x - 7 \\ &= -2(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

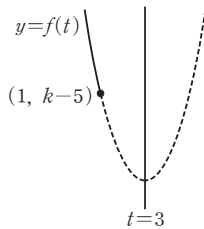
즉, 함수 $y=g(x)$ 의 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이므로 $g(x)=t$ 로 놓으면 합성함수 $y=(f \circ g)(x)=f(g(x))$, 즉 $y=f(t)$ 의 정의역은 $\{t|t \leq 1\}$ 이고

$$\begin{aligned} y=f(t) &= t^2 - 6t + k \\ &= (t-3)^2 + k - 9 \end{aligned}$$

따라서 정의역이 $\{t|t \leq 1\}$ 인 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 합성함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 치역은 $\{y|y \geq k-5\}$ 이다.

이때 합성함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 최솟값이 11이므로

$$k-5=11 \quad \therefore k=16$$



답 16

22

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x-3, g(x) = x^2+2x \text{에서} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x-3) \\ &= (2x-3)^2 + 2(2x-3) \\ &= 4x^2 - 8x + 3 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2+2x) \\ &= 2(x^2+2x) - 3 \\ &= 2x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

즉, 방정식 $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ 에서

$$4x^2 - 8x + 3 = 2x^2 + 4x - 3$$

$$2x^2 - 12x + 6 = 0 \quad \therefore x^2 - 6x + 3 = 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 모든 실근의 합은 이차 방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다.

답 6

보충 설명

이차방정식 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 = 6 > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

따라서 두 실근은 $x = 3 \pm \sqrt{6}$ 이므로 구하는 합은 $3 + \sqrt{6} + (3 - \sqrt{6}) = 6$

23

$(f \circ g)(x) = |x^2 - 4|, h(x) = -x + 3$ 이고

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= ((f \circ g) \circ h)(x) \\ &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= (f \circ g)(-x+3) \\ &= |(-x+3)^2 - 4| \\ &= |x^2 - 6x + 5| \end{aligned}$$

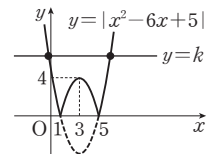
즉, 방정식 $|x^2 - 6x + 5| = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y = |x^2 - 6x + 5|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이때 $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= |x^2 - 6x + 5| \\ &= \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & (x < 1 \text{ 또는 } x > 5) \\ -x^2 + 6x - 5 & (1 \leq x \leq 5) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 함수 $y = |x^2 - 6x + 5|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 k 의 값 또는 k 의 값의 범위는

$k=0$ 또는 $k > 4$



답 $k=0$ 또는 $k > 4$

보충 설명

함수 $y = |x^2 - 6x + 5|$ 의 그래프는 함수 $y = x^2 - 6x + 5$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

24

조건 ㉗의 $(f \circ g)(x) = \{g(x) - 1\}^2 + 4$ 에서

$$f(g(x)) = \{g(x) - 1\}^2 + 4$$

이때 $g(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^2 + 4 \\ &= t^2 - 2t + 5 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 5$$

또한, $g(x) = ax + b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)이므로

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 2x + 5) \\ &= a(x^2 - 2x + 5) + b \\ &= ax^2 - 2ax + 5a + b \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} 2\{g(x)\}^2 + \frac{3}{2} &= 2(ax+b)^2 + \frac{3}{2} \\ &= 2a^2x^2 + 4abx + 2b^2 + \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

조건 ㉘에서 $\textcircled{7} = \textcircled{8}$ 이므로

$$ax^2 - 2ax + 5a + b = 2a^2x^2 + 4abx + 2b^2 + \frac{3}{2}$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 2a^2, -2a = 4ab, 5a + b = 2b^2 + \frac{3}{2}$$

$$a = 2a^2 \text{에서 } 2a^2 - a = 0$$

$$a(2a - 1) = 0 \quad a = \frac{1}{2} \quad (\because a \neq 0)$$

$$a = \frac{1}{2} \text{을 } -2a = 4ab \text{에 대입하면}$$

$$-1 = 2b \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

또한, $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 은 $5a + b = 2b^2 + \frac{3}{2}$ 을 만족시킨다.

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

25

$$f(x) = -x + 4, g(x) = \begin{cases} 3-x & (x \leq 2) \\ x-1 & (x > 2) \end{cases} \text{에서}$$

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로

$$h(f(x)) = g(x)$$

$$\therefore h(-x+4) = \begin{cases} 3-x & (x \leq 2) \\ x-1 & (x > 2) \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$-x+4=t$ 로 놓으면 $x=4-t$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} h(t) &= \begin{cases} 3-(4-t) & (4-t \leq 2) \\ (4-t)-1 & (4-t > 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} t-1 & (t \geq 2) \\ -t+3 & (t < 2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore h(3) = 3-1=2$$

답 2

다른 풀이

(*)에서 $\textcircled{7}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$h(3) = 3-1=2$$

26

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2x-1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f^1\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} f^2\left(\frac{1}{2}\right) &= (f \circ f^1)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(f^1\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) \\ &= -2 \times 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3\left(\frac{1}{2}\right) &= (f \circ f^2)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(1) \\ &= 2 \times 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4\left(\frac{1}{2}\right) &= (f \circ f^3)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(1) \\ &= 2 \times 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$\vdots$

즉, $n \neq 1$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $f^n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ 이므로

$$f^{55}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{또한, } f^1\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(\frac{1}{9}\right) = -2 \times \frac{1}{9} + 1 = \frac{7}{9}$$

$$\begin{aligned} f^2\left(\frac{1}{9}\right) &= (f \circ f^1)\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(f^1\left(\frac{1}{9}\right)\right) = f\left(\frac{7}{9}\right) \\ &= 2 \times \frac{7}{9} - 1 = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^3\left(\frac{1}{9}\right) &= (f \circ f^2)\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{9}\right)\right) = f\left(\frac{5}{9}\right) \\
 &= 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9} \\
 f^4\left(\frac{1}{9}\right) &= (f \circ f^3)\left(\frac{1}{9}\right) = f\left(f^3\left(\frac{1}{9}\right)\right) = f\left(\frac{1}{9}\right) \\
 &= -2 \times \frac{1}{9} + 1 = \frac{7}{9} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

즉, $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n\left(\frac{1}{9}\right)$ 의 값은 $\frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}$ 이 이 순

서대로 반복된다.

이때 $56 = 3 \times 18 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f^{56}\left(\frac{1}{9}\right) &= f^2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{5}{9} \\
 \therefore f^{55}\left(\frac{1}{9}\right) &+ f^{56}\left(\frac{1}{9}\right) = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{14}{9}$

27

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (-1 \leq x < 0) \\ -2x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f^1\left(\frac{1}{4}\right) &= f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \times \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{2} \\
 f^2\left(\frac{1}{4}\right) &= (f \circ f^1)\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(f^1\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0 \\
 f^3\left(\frac{1}{4}\right) &= (f \circ f^2)\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f(0) \\
 &= -2 \times 0 + 1 = 1 \\
 f^4\left(\frac{1}{4}\right) &= (f \circ f^3)\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f(1) \\
 &= -2 \times 1 + 1 = -1 \\
 f^5\left(\frac{1}{4}\right) &= (f \circ f^4)\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f(-1) \\
 &= 2 \times (-1) + 1 = -1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}, f^2\left(\frac{1}{4}\right) = 0, f^3\left(\frac{1}{4}\right) = 1,$$

$$f^4\left(\frac{1}{4}\right) = f^5\left(\frac{1}{4}\right) = f^6\left(\frac{1}{4}\right) = \dots = -1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 &f\left(\frac{1}{4}\right) + f^2\left(\frac{1}{4}\right) + f^3\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + f^n\left(\frac{1}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2} + 0 + 1 + (n-3) \times (-1) \\
 &= -n + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } -n + \frac{9}{2} \leq -8 \text{에서 } n \geq \frac{25}{2} = 12.5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 13이다.

답 13

28

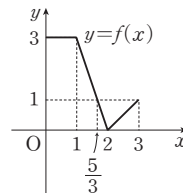
$(f \circ f)(a) = 3$, 즉 $f(f(a)) = 3$ 에서 $f(a) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 3$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그

림과 같으므로

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\text{즉, } 0 \leq f(a) \leq 1 \text{이므로 } \frac{5}{3} \leq a \leq 3$$



따라서 실수 a 의 최댓값은 $M=3$, 최솟값은 $m=\frac{5}{3}$ 이므로

$$Mm = 3 \times \frac{5}{3} = 5$$

답 5

보충 설명

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

두 점 $(1, 3)$, $(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{0-3}{2-1}(x-1) \quad \therefore y = -3x+6$$

두 점 $(2, 0)$, $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-0 = \frac{1-0}{3-2}(x-2) \quad \therefore y = x-2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3 & (0 \leq x < 1) \\ -3x+6 & (1 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

이때 $0 \leq f(a) \leq 1$ ($0 \leq a \leq 3$)이라 하면

(i) $1 \leq a < 2$ 일 때,

$$0 \leq -3a+6 \leq 1 \quad \therefore \frac{5}{3} \leq a \leq 2$$

그런데 $1 \leq a < 2$ 이므로 $\frac{5}{3} \leq a < 2$

(ii) $2 \leq a \leq 3$ 일 때,

$$0 \leq a-2 \leq 1 \quad \therefore 2 \leq a \leq 3$$

(i), (ii)에서 $0 \leq f(a) \leq 1$ 을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는

$$\frac{5}{3} \leq a \leq 3$$

29

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 8 & (x < 0) \\ x + 8 & (x \geq 0) \end{cases}, g(x) = x + 6 \text{에서}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 6$$

$$= \begin{cases} (x^2 - 2ax + 8) + 6 & (x < 0) \\ (x + 8) + 6 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-a)^2 - a^2 + 14 & (x < 0) \\ x + 14 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이때 $a \geq 0$ 이면 합성함수

$y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 치역은

$\{y \mid y \geq 14\}$ 이다.

즉, 조건을 만족시키지 않으므

로 $a < 0$ 이어야 한다.

$a < 0$ 일 때, 합성함수 $g \circ f$ 의

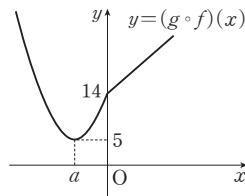
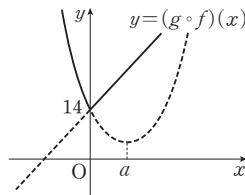
치역이 $\{y \mid y \geq 5\}$ 이라면 합성

함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프

가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

따라서 $-a^2 + 14 = 5$ 이므로

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$



답 -3

30

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x - 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$(f \circ f)(x) = f(x)$, 즉 $f(f(x)) = f(x)$ 에서

$f(x) = t$ 로 놓으면 $f(t) = t$

(i) $0 \leq t < 1$ 일 때,

$$-2t + 2 = t, 3t = 2 \quad \therefore t = \frac{2}{3}$$

(ii) $1 \leq t \leq 2$ 일 때,

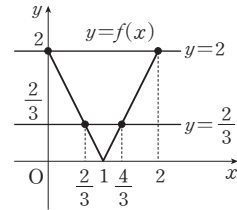
$$2t - 2 = t \quad \therefore t = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) = \frac{2}{3}$ 또는 $f(x) = 2$ 이므로

방정식 $(f \circ f)(x) = f(x)$, 즉 $f(x) = \frac{2}{3}$ 또는 $f(x) = 2$ 의

실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$, $y = 2$ 가 만나

는 점의 x 좌표와 같다.



$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 = 4$$

답 4

다른 풀이

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (0 \leq x < 1) \\ 2x - 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f \circ f)(x)$$

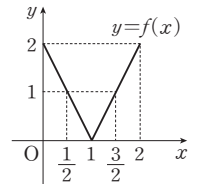
$$= f(f(x))$$

$$= \begin{cases} -2f(x) + 2 & (0 \leq f(x) < 1) \\ 2f(x) - 2 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}$$

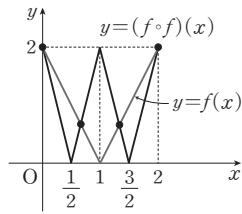
$$= \begin{cases} 2(-2x + 2) + 2 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ -2(-2x + 2) + 2 & (\frac{1}{2} < x < 1) \\ -2(2x - 2) + 2 & (1 \leq x < \frac{3}{2}) \\ 2(2x - 2) - 2 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(-2x + 2) + 2 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ -2(-2x + 2) + 2 & (\frac{1}{2} < x < 1) \\ -2(2x - 2) + 2 & (1 \leq x < \frac{3}{2}) \\ 2(2x - 2) - 2 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -4x + 2 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 4x - 2 & (\frac{1}{2} < x < 1) \\ -4x + 6 & (1 \leq x < \frac{3}{2}) \\ 4x - 6 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$



따라서 두 함수 $y=(f \circ f)(x)$, $y=f(x)$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)$ 에서

$$-4x+2=-2x+2 \quad \therefore x=0$$

(ii) $\frac{1}{2} < x < 1$ 일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)$ 에서

$$4x-2=-2x+2 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

(iii) $1 \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)$ 에서

$$-4x+6=2x-2 \quad \therefore x=\frac{4}{3}$$

(iv) $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)$ 에서

$$4x-6=2x-2 \quad \therefore x=2$$

(i)~(iv)에서 구하는 모든 실근은

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$ 이므로 그 합은

$$0+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2=4$$

보충 설명

방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)$ 의 실근과 방정식 $f(x)=x$ 의 실근은 같은 것일까?

$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(x)$ 에서 $f(x)=t$ 로 놓으면

$f(t)=t$ 이므로 $f(x)=x$ 와 같다고 생각할 수 있다.

그러나 $f(k)=t$ ($k \neq t$)를 만족시키는 k 에 대하여

$f(f(k))=f(t)=t$ 이므로 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)$ 는

$x=t$ 이외에 $x=k$ 를 근으로 갖는다.

즉, 방정식 $(f \circ f)(x)=f(x)$ 의 실근과 방정식 $f(x)=x$ 의 실근이 같지 않을 수 있음에 주의하자.

3 역함수

기본 + 필수연습

본문 pp.274~280

48 (1) 2 (2) 17

49 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

50 (1) 4 (2) 2 51 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

52 $-2 < a < 2$

53 3

54 -3

55 5

56 3

57 10

58 0

59 -5

60 (1) c (2) a

61 a

62 $\sqrt{2}$

63 10

64 21

48

(1) $f^{-1}(7)=a$ 에서 $f(a)=7$ 이므로

$$2a+3=7 \quad \therefore a=2$$

(2) $f^{-1}(a)=7$ 에서 $f(7)=a$ 이므로

$$a=2 \times 7 + 3 = 17$$

답 (1) 2 (2) 17

49

(1) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2-x$ 를 x 에 대하여 풀면

$$-x=y-2 \quad \therefore x=-y+2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=-x+2$

(2) 주어진 함수는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\frac{2}{3}x=y+\frac{1}{3} \quad \therefore x=\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

답 (1) $y=-x+2$ (2) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

50

(1) $(f \circ g^{-1})^{-1}(4)=(g \circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$

$$=g(3)=4$$

$$\begin{aligned}
 (2) ((f \circ g)^{-1} \circ f)(1) &= (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(1) \\
 &= (g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f))(1) \\
 &= g^{-1}(1) = 2 \quad \text{— 집합 } X \text{에서의 항등함수}
 \end{aligned}$$

답 (1) 4 (2) 2

51

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표와 같으므로

$$7x-1=x, 6x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ 이다.

답 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

52

$f(x)=a|x+4|+2x+1$ 에서

(i) $x < -4$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -a(x+4)+2x+1 \\
 &= (2-a)x-4a+1
 \end{aligned}$$

(ii) $x \geq -4$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a(x+4)+2x+1 \\
 &= (2+a)x+4a+1
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 가 일대일대응이어야 하므로 $x < -4$ 일 때와 $x \geq -4$ 일 때의 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $(2-a)(2+a) > 0$ 이므로

$$(a+2)(a-2) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

따라서 $-2 < a < 2$ 일 때 함수 f 의 역함수가 존재한다.

답 $-2 < a < 2$

53

$g(x)=ax+2, h(x)=bx-2$ 라 하면 집합

$X=\{x|0 \leq x \leq 5\}$ 에서 집합 $Y=\{y|2 \leq y \leq 13\}$ 로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \leq x < 2) \\ h(x) & (2 \leq x \leq 5) \end{cases} \text{의 역함수가 존재하므로 } f \text{는 일대}$$

일대응이고 $f(0)=2$ 이다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $h(5)=13, g(2)=h(2)$ 가 성립해야 한다.

$h(5)=13$ 에서

$$5b-2=13 \quad \therefore b=3$$

$g(2)=h(2)$ 에서

$$2a+2=2b-2$$

이때 $b=3$ 이므로

$$2a+2=4 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore ab=1 \times 3=3$$

답 3

보충 설명

함수 f 가 일대일대응이므로 두 직선 $y=g(x), y=h(x)$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\therefore ab > 0$$

이때 $f(0)=g(0)=2$ 이고 함수 f 의 치역이

$Y=\{y|2 \leq y \leq 13\}$ 이므로 $a > 0, b > 0$ 인 경우만 가능하다.

54

$(f \circ g^{-1})(-7)=f(g^{-1}(-7))$ 에서

$g^{-1}(-7)=k$ 라 하면 $g(k)=-7$ 이므로

$$3k-1=-7 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(-7)=f(-2)$$

$$=-2 \times |-2|+1$$

$$=-4+1=-3$$

답 -3

55

$f^{-1}(3)=5$ 이므로 $f(5)=3$

$$\therefore f(3)=f(f(5))$$

$$=(f \circ f)(5)=5$$

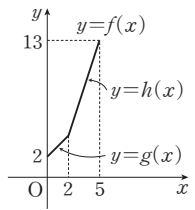
답 5

다른 풀이

$$(f \circ f)(3)=f(f(3))=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(3)=k$ 라 하고 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(k)=3$$



함수 f 의 역함수가 존재하므로 f 는 일대일대응이고,
 $f(k)=3$ 에서 $k=5$ ($\because f^{-1}(3)=5$)
 $\therefore f(3)=5$

56

$g(2)=2 \times 2 - 1 = 3$ 이므로
 $(f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(3)$
 $f^{-1}(3) = m$ 이라 하면 $f(m) = 3$ 이므로
 $-2m + 5 = 3 \quad \therefore m = 1$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(3) = 1$
 한편, $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2))$ 에서
 $g^{-1}(2) = n$ 이라 하면 $g(n) = 2$
 $x < 1$ 일 때, $g(x) = 3x - 2 < 1$
 $x \geq 1$ 일 때, $g(x) = 2x - 1 \geq 1$
 즉, $g(n) \geq 1$ 이므로 $n \geq 1$ 이고 $g(n) = 2$ 에서
 $2n - 1 = 2 \quad \therefore n = \frac{3}{2}$
 $\therefore (f \circ g^{-1})(2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \times \frac{3}{2} + 5 = 2$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)(2) + (f \circ g^{-1})(2) = 1 + 2 = 3$

답 3

57

$(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(0) = (f \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1})(0)$
 $= (f \circ g^{-1})(0)$
 $= f(g^{-1}(0))$
 이때 $g^{-1}(0) = k$ 라 하면 $g(k) = 0$ 이므로
 $-k + 3 = 0 \quad \therefore k = 3$
 $\therefore (f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(0) = f(3)$
 $= 3^2 + 1 = 10$

답 10

58

$g(-1) = 2 \times (-1) + 3 = 1$ 이므로
 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = (f^{-1} \circ g)(-1)$
 $= f^{-1}(g(-1))$
 $= f^{-1}(1)$

이때 $f^{-1}(1) = m$ 이라 하면 $f(m) = 1$ 이므로
 $2m^2 - 1 = 1, m^2 = 1 \quad \therefore m = 1$ ($\because m \geq 0$)
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = f^{-1}(1) = 1$
 한편, $(g \circ f^{-1})^{-1}(3) = (f \circ g^{-1})(3) = f(g^{-1}(3))$
 이때 $g^{-1}(3) = n$ 이라 하면 $g(n) = 3$ 이므로
 $2n + 3 = 3 \quad \therefore n = 0$
 $\therefore (g \circ f^{-1})^{-1}(3) = f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) + (g \circ f^{-1})^{-1}(3) = 1 + (-1) = 0$

답 0

보충 설명

(*)에서 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = (f^{-1} \circ g)(-1) = k$ 라 하면
 $(f \circ (f^{-1} \circ g))(-1) = f(k)$
 $\therefore g(-1) = f(k)$
 즉, $1 = 2k^2 - 1$ 에서 $k = 1$ ($\because k \geq 0$)
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(-1) = k = 1$

59

$(f^{-1} \circ g)^{-1} \circ h = f$ 에서
 $((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ h)(-2) = f(-2)$
 $= -2 \times (-2) + 1$
 $= 5$
 즉, $(f^{-1} \circ g)^{-1}(h(-2)) = 5$ 에서
 $h(-2) = (f^{-1} \circ g)(5) = f^{-1}(g(5)) = f^{-1}(11)$
 이때 $f^{-1}(11) = k$ 라 하면 $f(k) = 11$ 에서
 $-2k + 1 = 11 \quad \therefore k = -5$
 $\therefore h(-2) = f^{-1}(11) = -5$

답 -5

다른 풀이

$(f^{-1} \circ g)^{-1} \circ h = f$ 에서
 $g^{-1} \circ f \circ h = f$
 즉, $g \circ (g^{-1} \circ f \circ h) = g \circ f$ 에서
 $f \circ h = g \circ f$
 또한, $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g \circ f$ 에서
 $h = f^{-1} \circ g \circ f$
 $\therefore h(-2) = (f^{-1} \circ g \circ f)(-2)$
 $= f^{-1}(g(f(-2)))$
 $= f^{-1}(g(5))$
 $= f^{-1}(11)$

이때 $f^{-1}(11)=k$ 라 하면 $f(k)=11$ 이므로
 $-2k+1=11 \quad \therefore k=-5$
 $\therefore h(-2)=f^{-1}(11)=-5$

60

직선 $y=x$ 를 이용하여 점선과 y 축이 만나는 점의 y 좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

(1) $f^{-1}(d)=k$ 라 하면

$$f(k)=d \text{이므로 } k=c$$

$$\therefore f^{-1}(d)=c$$

(2) $(f \circ f)^{-1}(c)=(f^{-1} \circ f^{-1})(c)$

$$=f^{-1}(f^{-1}(c))$$

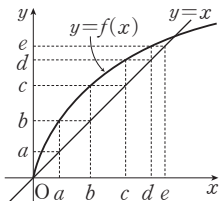
이때 $f^{-1}(c)=l$ 이라 하면 $f(l)=c$ 이므로 $l=b$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(b)$$

또한, $f^{-1}(b)=m$ 이라 하면 $f(m)=b$ 이므로 $m=a$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(c)=f^{-1}(b)=a$$

답 (1) c (2) a



61

직선 $y=x$ 를 이용하여 점선과 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

$$(f \circ f)(k)=f(f(k))=c \text{에서}$$

$f(k)=l$ 이라 하면

$$f(l)=c \text{이므로 } l=d$$

즉, $f(k)=d$ 이므로 $k=e$ 이다.

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(s)=e$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(s)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(s)))=e \text{에서}$$

$f^{-1}(f^{-1}(s))=m$ 이라 하면

$$f^{-1}(m)=e, \text{ 즉 } f(e)=m \text{이므로 } m=d$$

$$\therefore f^{-1}(f^{-1}(s))=d$$

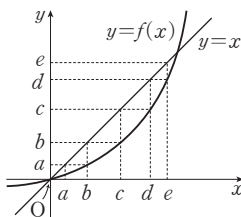
$f^{-1}(s)=n$ 이라 하면

$$f^{-1}(n)=d, \text{ 즉 } f(d)=n \text{이므로 } n=c$$

$$\therefore f^{-1}(s)=c$$

따라서 $f(c)=s$ 이므로 $s=b$

$$\therefore f(s)=f(b)=a$$



다른 풀이

$$(f \circ f)(k)=f(f(k))=c \text{에서}$$

$$f(k)=d \quad \therefore k=e$$

$$\text{즉, } (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(s)=e \text{에서}$$

$$(f \circ (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}))(s)=f(e)$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(s)=d$$

또한, $(f \circ (f^{-1} \circ f^{-1}))(s)=f(d)=c$ 이므로

$$f^{-1}(s)=c$$

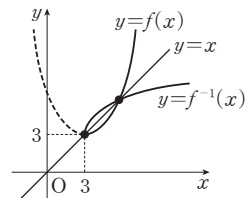
따라서 $f(c)=s$ 이므로 $s=b$

$$\therefore f(s)=f(b)=a$$

62

$$f(x)=x^2-6x+12=(x-3)^2+3 \quad (x \geq 3)$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



즉, 두 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-6x+12=x$, 즉

$$x^2-7x+12=0 \text{의 두 실근이므로}$$

$$(x-3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 P(3, 3), Q(4, 4) 또는 P(4, 4), Q(3, 3)이므로

$$PQ=\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

63

점 (3, 7)이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(3)=7, f^{-1}(3)=7$$

$$f(3)=7 \text{에서 } 7=3(a^2-1)+b$$

$$\therefore 3a^2+b=10 \quad \cdots \textcircled{7}$$

답 a

또한, $f^{-1}(3)=7$, 즉 $f(7)=3$ 에서

$$3=7(a^2-1)+b$$

$$\therefore 7a^2+b=10 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=0, b=10$$

$$\therefore a+b=0+10=10$$

답 10

다른 풀이

일차함수 $y=f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가

점 $(3, 7)$ 을 지나므로

$$f^{-1}(3)=7 \quad \therefore f(7)=3$$

즉, 일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(7, 3)$ 을 지난다.

또한, 일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 7)$ 을 지나므로

두 점 $(3, 7), (7, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-7=\frac{3-7}{7-3}(x-3)$$

$$\therefore y=-x+10 \quad \therefore f(x)=-x+10$$

이 함수식이 $f(x)=(a^2-1)x+b$ 와 일치하므로

$$a^2-1=-1, b=10 \quad \therefore a=0, b=10$$

$$\therefore a+b=0+10=10$$

보충 설명

일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 모두 직선 $y=x$ 위의 점이 아닌 점 $(3, 7)$ 을 지나므로 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 일치한다.

따라서 $f(x)=-x+10, f^{-1}(x)=-x+10$ 이다.

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, -1), (6, 6)$ 이다.

한편, 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{\{6-(-1)\}^2+\{6-(-1)\}^2}=7\sqrt{2}$$

점 $(0, 3)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2} \times 7\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{21}{2}$$

따라서 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$2S=2 \times \frac{21}{2}=21$$

답 21

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.281~282

31 -1	32 -1	33 $\frac{3}{2}$	34 6
35 4	36 3	37 -1	38 ④
39 ⑤	40 7	41 -1	42 0

64

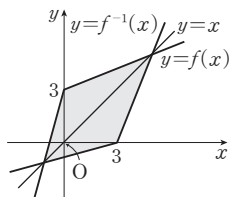
$$f(x)=\begin{cases} 4x+3 & (x<0) \\ \frac{1}{2}x+3 & (x\geq 0) \end{cases} \quad \text{에서}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로 교점의 x 좌표는

$$x<0 \text{ 일 때, } 4x+3=x \text{ 에서 } x=-1$$

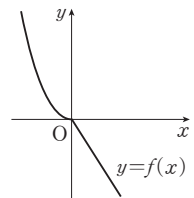
$$x\geq 0 \text{ 일 때, } \frac{1}{2}x+3=x \text{ 에서 } x=6$$



31

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ (a-1)x+a^2-1 & (x\geq 0) \end{cases}$$

에서 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 가 일대일대응이어야 하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(0)=0$ 이고 직선 $y=(a-1)x+a^2-1$ 의 기울기는 음수이어야 하므로

$$a-1<0, a^2-1=0$$

$$a^2-1=0 \text{ 에서 } (a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-1 (\because a<1)$$

답 -1

32

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & (x < 1) \\ 2x^2 - 1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$x < 1 \text{ 일 때, } f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 < 1$$

$$x \geq 1 \text{ 일 때, } f(x) = 2x^2 - 1 \geq 1$$

$$f^{-1}(7) = k \text{ 라 하면 } f(k) = 7$$

$$\text{즉, } f(k) \geq 1 \text{ 이므로 } k \geq 1 \text{ 이고 } f(k) = 7 \text{ 에서}$$

$$2k^2 - 1 = 7, k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 \quad (\because k \geq 1)$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(7) = 2 \text{ 이므로 } f^{-1}(7) + f(t) = -1 \text{ 에서}$$

$$2 + f(t) = -1 \quad \therefore f(t) = -3$$

$$\text{즉, } f(t) < 1 \text{ 이므로 } t < 1 \text{ 이고 } f(t) = -3 \text{ 에서}$$

$$-t^2 + 2t = -3, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1 \quad (\because t < 1)$$

답 -1

33

$$f^{-1}(3) = 5 \text{ 에서 } f(5) = 3$$

$$g^{-1}(3) = k \text{ 라 하면 } g(k) = 3$$

$$\therefore g(k) = f(5)$$

$$\text{그런데 } g(x) = f(4x-1) \text{ 이므로}$$

$$g(k) = f(4k-1) = f(5)$$

이때 함수 f 는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

$$\text{즉, } 4k-1 = 5 \text{ 에서 } k = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$g^{-1}(3) = k = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이

$$g(x) = f(4x-1) \text{ 에서 } y = g(x) \text{ 로 놓으면}$$

$$y = f(4x-1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = f(4y-1)$$

$$\text{즉, } f^{-1}(x) = 4y-1 \text{ 에서 } \leftarrow f^{-1} \circ f = I$$

$$y = \frac{1}{4} \{f^{-1}(x) + 1\}$$

$$\text{따라서 } g^{-1}(x) = \frac{1}{4} \{f^{-1}(x) + 1\} \text{ 이므로}$$

$$g^{-1}(3) = \frac{1}{4} \{f^{-1}(3) + 1\} = \frac{1}{4} \times (5 + 1) = \frac{3}{2}$$

34

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & (x < 3) \\ x-1 & (x \geq 3) \end{cases} \text{에서}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 f 는 일대일대응이다.

즉, f 의 역함수가 존재하고

$$(f \circ g)(x) = x \text{ 이므로}$$

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

또한, $x < 3$ 일 때 $f(x) = 2x-4 < 2$ 이고,

$x \geq 3$ 일 때 $f(x) = x-1 \geq 2$ 이다.

$$(i) g(0) = a \text{ 라 하면 } f(a) = 0$$

$$\text{즉, } f(a) < 2 \text{ 이므로 } a < 3 \text{ 이고 } f(a) = 0 \text{ 에서}$$

$$2a-4 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore g(0) = 2$$

$$(ii) g(3) = b \text{ 라 하면 } f(b) = 3$$

$$\text{즉, } f(b) \geq 2 \text{ 이므로 } b \geq 3 \text{ 이고 } f(b) = 3 \text{ 에서}$$

$$b-1 = 3 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore g(3) = 4$$

(i), (ii)에서

$$g(0) + g(3) = 2 + 4 = 6$$

답 6

다른 풀이 1

함수 f 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

이때 $(f \circ g)(x) = x$ 이므로

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

(i) $x < 3$ 일 때,

$$y = 2x-4 \text{ 라 하면 } y < 2 \text{ 이고 } x = \frac{y}{2} + 2$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 서로 바꾸면 } y = \frac{x}{2} + 2$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 2 \quad (x < 2)$$

(ii) $x \geq 3$ 일 때,

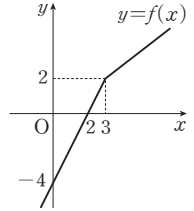
$$y = x-1 \text{ 이라 하면 } y \geq 2 \text{ 이고 } x = y+1$$

$$x \text{ 와 } y \text{ 를 서로 바꾸면 } y = x+1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = x+1 \quad (x \geq 2)$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & (x < 2) \\ x+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

$$\therefore g(0) + g(3) = \left(\frac{0}{2} + 2\right) + (3+1) = 2 + 4 = 6$$



다른 풀이2

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x \text{ 이므로}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x) - 4 & (g(x) < 3) \\ g(x) - 1 & (g(x) \geq 3) \end{cases}$$

(i) $g(x) < 3$ 일 때,

$$2g(x) - 4 = x, \quad 2g(x) = x + 4$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad (x < 2)$$

$$\frac{1}{2}x + 2 < 3 \text{에서 } \frac{1}{2}x < 1 \quad \therefore x < 2$$

(ii) $g(x) \geq 3$ 일 때,

$$g(x) - 1 = x \quad \therefore g(x) = x + 1 \quad (x \geq 2)$$

$$x + 1 \geq 3 \text{에서 } x \geq 2$$

(i), (ii)에서 $g(0) + g(3) = 2 + 4 = 6$

35

$$f(1) = 2 \text{에서 } f^{-1}(2) = 1 \text{이고}$$

$$f(3) = 1 \text{에서 } f^{-1}(1) = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(2) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(2) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(2)) \\ &= f^{-1}(1) = 3 \end{aligned}$$

또한, $g(3) = 1$ 이고, $g(1) = 3$ 에서 $g^{-1}(3) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} ((f \circ g)^{-1} \circ g)(3) &= (g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(3) \\ &= g^{-1}(f^{-1}(g(3))) \\ &= g^{-1}(f^{-1}(1)) \\ &= g^{-1}(3) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(2) + ((f \circ g)^{-1} \circ g)(3) = 3 + 1 = 4$$

답 4

36

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(x) &= ((f^{-1} \circ f) \circ f^{-1})(x) \\ &= f^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 5x - 4$$

이때 $(f \circ f^{-1} \circ f)^{-1}(k) = 11$ 에서

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1} \circ f)^{-1}(k) &= (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(k) \\ &= ((f^{-1} \circ f) \circ f^{-1})(k) \\ &= f^{-1}(k) = 5k - 4 \end{aligned}$$

즉, $5k - 4 = 11$ 이므로

$$5k = 15 \quad \therefore k = 3$$

답 3

다른 풀이

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1} \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(x) \\ &= 5x - 4 \end{aligned}$$

이므로 $(f \circ f^{-1} \circ f)^{-1}(k) = 11$ 에서

$$5k - 4 = 11 \quad \therefore k = 3$$

37

$h^{-1}(6) = k$ 라 하면 $h(k) = 6$ 이므로

$$6 - 3k = 6 \quad \therefore k = 0 \quad \therefore h^{-1}(6) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (g^{-1} \circ f \circ h^{-1})(6) &= ((g^{-1} \circ f) \circ h^{-1})(6) \\ &= (f^{-1} \circ g)^{-1}(h^{-1}(6)) \\ &= (f^{-1} \circ g)^{-1}(0) \end{aligned}$$

이때 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(0) = l$ 이라 하면

$$(f^{-1} \circ g)(l) = 0$$

(i) $l < 1$ 일 때,

$$(f^{-1} \circ g)(l) = 2l + 2 = 0 \quad \therefore l = -1$$

(ii) $l \geq 1$ 일 때,

$$(f^{-1} \circ g)(l) = 3l + 1 = 0 \quad \therefore l = -\frac{1}{3}$$

그런데 $l \geq 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $l = -1$

$$\begin{aligned} \therefore (g^{-1} \circ f \circ h^{-1})(6) &= (f^{-1} \circ g)^{-1}(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

또한, $(f^{-1} \circ g)^{-1}(7) = m$ 이라 하면

$$(f^{-1} \circ g)(m) = 7$$

(iii) $m < 1$ 일 때,

$$(f^{-1} \circ g)(m) = 2m + 2 = 7 \quad \therefore m = \frac{5}{2}$$

그런데 $m < 1$ 을 만족시키지 않는다.

(iv) $m \geq 1$ 일 때,

$$(f^{-1} \circ g)(m) = 3m + 1 = 7 \quad \therefore m = 2$$

(iii), (iv)에서 $m = 2$

$$\begin{aligned} \therefore (h \circ g^{-1} \circ f)(7) &= (h \circ (g^{-1} \circ f))(7) \\ &= (h \circ (f^{-1} \circ g)^{-1})(7) \\ &= h((f^{-1} \circ g)^{-1}(7)) \\ &= h(2) = 6 - 3 \times 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (g^{-1} \circ f \circ h^{-1})(6) + (h \circ g^{-1} \circ f)(7) \\ = -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

답 -1

38 본문 p.273 한 걸음 더 참고

$g(2-3x)$ 에서 $h(x)=2-3x$ 라 하자.

$y=2-3x$ 라 하고 x 에 대하여 풀면

$$3x = -y + 2 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

즉, $g(2-3x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$ 의 역함수는

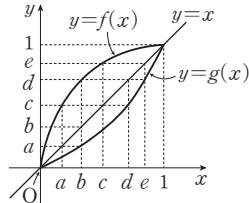
$$\begin{aligned} (g \circ h)^{-1}(x) &= (h^{-1} \circ g^{-1})(x) \\ &= h^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= h^{-1}(f(x)) \\ &= -\frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $g(2-3x)$ 의 역함수는 $-\frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}$ 이다.

답 ④

39

직선 $y=x$ 를 이용하여 점선과 y 축이 만나는 점의 y 좌표를 구하면 다음 그림과 같다.



$g(b)=a$ 에서 $g^{-1}(a)=b$ 이므로

$$\begin{aligned} (g \circ f^{-1})^{-1}(a) &= (f \circ g^{-1})(a) \\ &= f(g^{-1}(a)) \\ &= f(b) = d \end{aligned}$$

또한, $g(d)=c$ 에서 $g^{-1}(c)=d$, $g(e)=d$ 에서 $g^{-1}(d)=e$ 이므로

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g \circ g)^{-1}(a) &= (g^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(a) \\ &= g^{-1}(g^{-1}(f(a))) \\ &= g^{-1}(g^{-1}(c)) \\ &= g^{-1}(d) = e \end{aligned}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})^{-1}(a) + (f^{-1} \circ g \circ g)^{-1}(a) = d + e$$

답 ⑤

40

$y=f(x-3)+2$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$$x = f(y-3) + 2$$

즉, $f(y-3) = x-2$ 에서

$$g(f(y-3)) = g(x-2)$$

이때 두 함수 f, g 는 서로 역함수 관계이므로 $\leftarrow g \circ f = I$

$$y-3 = g(x-2)$$

$$\therefore y = g(x-2) + 3$$

따라서 함수 $y=f(x-3)+2$ 의 역함수의 그래프는 함수

$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것과 같으므로

$$m=2, n=3$$

$$\therefore 2m+n=2 \times 2 + 3 = 7$$

답 7

41

일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -5)$ 를 지나므로

$$f(x) = a(x-3) - 5 \quad (a \neq 0 \text{인 상수})$$

라 할 수 있다.

$$f(x) = ax - 3a - 5 \text{에서}$$

$y = ax - 3a - 5$ 라 하고 x 에 대하여 풀면

$$ax = y + 3a + 5 \quad \therefore x = \frac{1}{a}y + 3 + \frac{5}{a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{1}{a}x + 3 + \frac{5}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + 3 + \frac{5}{a}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로

$$f(x) = f^{-1}(x) \text{에서}$$

$$ax - 3a - 5 = \frac{1}{a}x + 3 + \frac{5}{a}$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = \frac{1}{a}, -3a - 5 = 3 + \frac{5}{a}$$

위의 두 식을 연립하면

$$-3a - 5 = 5a + 3 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = -x - 2$ 이므로

$$f(-4) + f(1) = 2 + (-3) = -1$$

답 -1

다른 풀이 1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -5)$ 를 지나므로

$$f(3) = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 $f^{-1}(3)=-5$ 에서

$$f(-5)=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $y=f(x)$ 는 일차함수이므로

$$f(x)=ax+b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3a+b=-5, \textcircled{2} \text{에서 } -5a+b=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-2$

따라서 $f(x)=-x-2$ 이므로

$$f(-4)+f(1)=2+(-3)=-1$$

다른 풀이 2

일차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -5)$ 를 지나므로

$$f(x)=ax-3a-5 \quad (a \neq 0 \text{인 상수}) \text{라 하면}$$

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))$$

$$=a(ax-3a-5)-3a-5$$

$$=a^2x-3a^2-8a-5$$

$$f=f^{-1} \text{에서 } (f \circ f)(x)=(f \circ f^{-1})(x)=x \text{이므로}$$

$$a^2x-3a^2-8a-5=x$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a^2=1, -3a^2-8a-5=0$$

(i) $a^2=1$ 에서

$$a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

(ii) $-3a^2-8a-5=0$ 에서

$$3a^2+8a+5=0, (3a+5)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-\frac{5}{3} \text{ 또는 } a=-1$$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 이므로 $f(x)=-x-2$

$$\therefore f(-4)+f(1)=2+(-3)=-1$$

42

$$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1 \quad (x \geq -1)$$

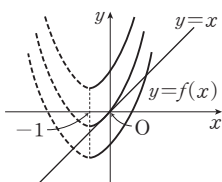
$x \geq -1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그

래프는 꼭짓점의 좌표가

$(-1, k-1)$ 이고 아래로 볼록

한 이차함수의 그래프의 일부분

이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 만나려면 방정식 $f(x)=x$ 가 $x \geq -1$ 에서 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=x \text{에서}$$

$$x^2+2x+k=x \quad \therefore x^2+x+k=0$$

이 이차방정식이 $x \geq -1$ 에서 실근을 가지려면

$g(x)=x^2+x+k$ 라 할 때, 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프가

$x \geq -1$ 에서 x 축과 만나야 한다.

$$\text{이때 } g(x)=x^2+x+k=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$k-\frac{1}{4} \leq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

답 0

보충 설명

함수 $g(x)=x^2+x+k \quad (x \geq -1)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌

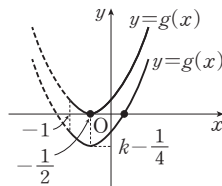
$$\text{표는 } \left(-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{4}\right) \text{이므로}$$

$$k-\frac{1}{4} \leq 0 \text{ 즉, } k \leq \frac{1}{4} \text{이면 함수}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같이 $x \geq -1$ 에서 반드시 x 축

과 만난다.



또한, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{1}{2}$ 이므로

로 k 의 값의 범위에 따라 교점의 개수는 다음과 같이 달라진다.

(i) $k=\frac{1}{4}$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축은 $x=-\frac{1}{2}$ 인 한 점에서

만난다.

(ii) $0 < k < \frac{1}{4}$ 이면 함수

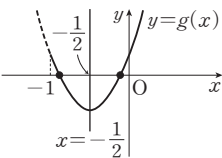
$$\frac{g(-1)}{g(-1)} = k \geq 0$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 함수

$y=g(x)$ 의 그래프와 x 축은

서로 다른 두 점에서 만난다.



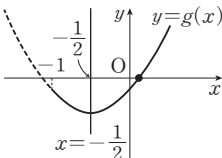
(iii) $k < 0$ 이면 함수 $y=g(x)$ 의

$$\frac{g(-1)}{g(-1)} = k < 0$$

그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프

와 x 축은 한 점에서 만난다.



STEP 2 개념 마무리

본문 p.283

- 1 10 2 7 3 200 4 12
5 ⑤ 6 $(3-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}), (0, 2), (2, 0)$

1

정의역이 $\{a, b\}$ 이고 계수가 실수인 두 이차함수 f, g 에 대하여 $f=g$ 가 성립하므로

$$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$$

따라서 정의역의 두 원소 a, b 는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$ 의 두 근이다.

방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $x^2+(p+1)x+p-1=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=-p-1, ab=p-1$$

그런데 $a^2+b^2=7$ 이므로 $(a+b)^2-2ab=7$ 에서

$$(-p-1)^2-2(p-1)=7$$

$$p^2=4 \quad \therefore p=-2 \text{ 또는 } p=2$$

(i) $p=-2$ 일 때,

$$a+b=1, ab=-3, a^2+b^2=7 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= 1 \times \{7 - (-3)\} = 10 \end{aligned}$$

(ii) $p=2$ 일 때,

$$a+b=-3, ab=1, a^2+b^2=7 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= (-3) \times (7-1) = -18 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 a^3+b^3 의 최댓값은 10이다.

답 10

2

함수 f 가 X 에서 X 로의 일대일대응이므로

$$\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

조건 ㉞에서

$$f(2)-f(3)=f(5)$$

$$\therefore f(2)=f(3)+f(5) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(4)-f(1)=f(5)$$

$$\therefore f(4)=f(1)+f(5) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉞에서 $f(2)>f(3), f(2)>f(5)$ 이고,

조건 ㉞에서 $f(1)<f(2)<f(4)$ 이므로

$$f(3)<f(2)<f(4), f(5)<f(2)<f(4)$$

즉, $f(2)=4, f(4)=5$ 이므로

$$\{f(1), f(3), f(5)\} = \{1, 2, 3\}$$

그런데 ㉞에서 $f(4)=f(1)+f(5)$ 이므로

$$f(1)=2, f(5)=3 \text{ 또는 } f(1)=3, f(5)=2$$

(i) $f(1)=2, f(5)=3$ 일 때,

$$f(2)=4, f(3)=1 \text{이므로}$$

$$f(3)+f(5)=f(2)$$

즉, ㉞을 만족시킨다.

(ii) $f(1)=3, f(5)=2$ 일 때,

$$f(2)=4, f(3)=1 \text{이므로}$$

$$f(3)+f(5)=3 \neq f(2)$$

즉, ㉞을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$f(1)=2, f(2)=4, f(3)=1, f(4)=5, f(5)=3$$

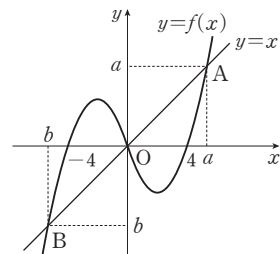
$$\therefore f(2)+f(5)=4+3=7$$

답 7

3

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-4x & (x<0) \\ x^2-4x & (x\geq 0) \end{cases} \text{의 그래프는 다음 그림과 같다.}$$



정의역이 $X=\{a, b, 0\}$ 인 함수 $f(x)$ 가 항등함수이므로

$f(a)=a, f(b)=b$ 가 성립해야 한다.

(i) $f(a)=a$ 일 때,

$$a>0 \text{이므로 } f(a)=a^2-4a \text{에서}$$

$$a^2-4a=a, a^2-5a=0$$

$$a(a-5)=0 \quad \therefore a=5 \quad (\because a>0)$$

(ii) $f(b)=b$ 일 때,

$$b < 0 \text{ 이므로 } f(b) = -b^2 - 4b \text{에서}$$

$$-b^2 - 4b = b, \quad b^2 + 5b = 0$$

$$b(b+5)=0 \quad \therefore b = -5 \quad (\because b < 0)$$

(i), (ii)에서 $a=5, b=-5$

따라서 $A(5, 5), B(-5, -5)$ 이므로

$$l = \sqrt{(-5-5)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{200}$$

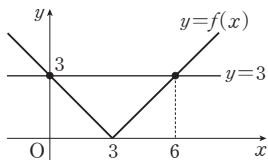
$$\therefore l^2 = 200$$

답 200

4

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} -x+3 & (x < 3) \\ x-3 & (x \geq 3) \end{cases}$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$(f \circ f \circ f)(x) = 3 \text{에서}$$

$$f((f \circ f)(x)) = 3$$

$$(f \circ f)(x) = k \text{라 하면}$$

$$f(k) = 3$$

이때 위의 그림에서 $k=0$ 또는 $k=6$

$$\therefore (f \circ f)(x) = 0 \text{ 또는 } (f \circ f)(x) = 6$$

(i) $(f \circ f)(x) = 0$, 즉 $f(f(x)) = 0$ 일 때,

$$f(x) = l \text{이라 하면 } f(l) = 0$$

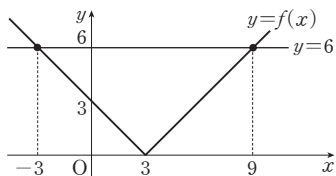
위의 그림에서 $l=3$

$$f(x) = 3 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=6$$

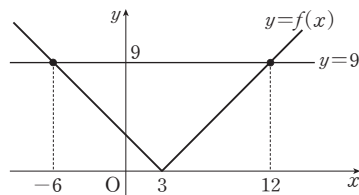
(ii) $(f \circ f)(x) = 6$, 즉 $f(f(x)) = 6$ 일 때,

$$f(x) = m \text{이라 하면 } f(m) = 6$$



위의 그림에서 $m=-3$ 또는 $m=9$

$$\therefore f(x) = -3 \text{ 또는 } f(x) = 9$$



그런데 위의 그림에서 $f(x) = -3$ 을 만족시키는 x 는 없

으므로 $f(x) = 9$ 를 만족시키는 x 의 값은

$$x = -6 \text{ 또는 } x = 12$$

(i), (ii)에서 방정식 $(f \circ f \circ f)(x) = 3$ 의 해는

$$x=0 \text{ 또는 } x=6 \text{ 또는 } x=-6 \text{ 또는 } x=12$$

따라서 구하는 모든 x 의 값의 합은

$$0+6+(-6)+12=12$$

답 12

다른 풀이

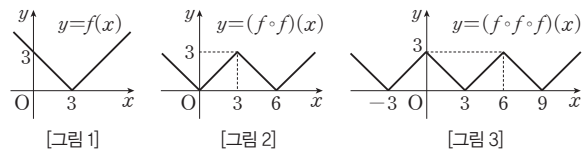
방정식 $(f \circ f \circ f)(x) = 3$ 의 해는 함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프를 그려서 풀 수 있다.

함수 $f(x) = |x-3|$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

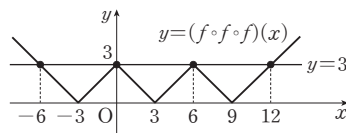
또한, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = |f(x)-3|$ 이므로 함수

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x) - 3$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 [그림 2]와 같다.

같은 방법으로 함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프는 함수 $y = (f \circ f)(x) - 3$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 [그림 3]과 같다.



이때 함수 $y = (f \circ f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 은 다음 그림과 같이 네 점 $(-6, 3), (0, 3), (6, 3), (12, 3)$ 에서 만난다.



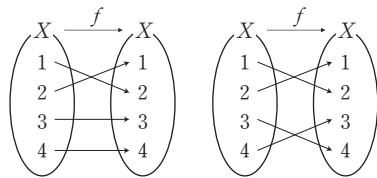
따라서 방정식 $(f \circ f \circ f)(x) = 3$ 의 해는

$$x = -6 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 6 \text{ 또는 } x = 12$$

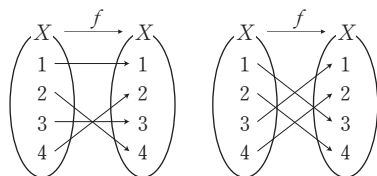
이므로 그 합은
 $-6+0+6+12=12$

5

- ㄱ. 함수 f 가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
 조건 ㉞에서 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여
 $(f \circ f)(x) = x$ 이므로 집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.
 $\therefore f(3) = f^{-1}(3)$ (참)
- ㄴ. 조건 ㉞에서 집합 X 의 어떤 원소 x 에 대하여 $f(x) = 2x$
 이므로 집합 X 의 원소 중 $f(x) = 2x$ 를 만족시키는 원소
 x 가 적어도 하나 존재한다.
 즉, $f(1) = 2$ 와 $f(2) = 4$ 중 적어도 하나는 성립해야 하므
 로 $f(1) = 3$ 이면 반드시 $f(2) = 4$ 이어야 한다. (참)
- ㄷ. 조건 ㉞에서 $f(1) = 2$ 와 $f(2) = 4$ 중 적어도 하나는 성립
 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.
 (i) $f(1) = 2$ 이고 $f(2) \neq 4$ 일 때,
 조건 ㉞에서 $(f \circ f)(1) = 1$ 이므로
 $f(f(1)) = f(2) = 1$
 또한, 조건 ㉞에서
 $f(3) = 3, f(4) = 4$ 또는 $f(3) = 4, f(4) = 3$
 이므로 가능한 함수 f 는 다음과 같이 2개이다.



- (ii) $f(2) = 4$ 이고 $f(1) \neq 2$ 일 때,
 조건 ㉞에서 $(f \circ f)(2) = 2$ 이므로
 $f(f(2)) = f(4) = 2$
 또한, 조건 ㉞에서
 $f(1) = 1, f(3) = 3$ 또는 $f(1) = 3, f(3) = 1$
 이므로 가능한 함수 f 는 다음과 같이 2개이다.



- (iii) $f(1) = 2$ 이고 $f(2) = 4$ 일 때,
 조건 ㉞를 만족시키지 않는다.
 (i), (ii), (iii)에서 가능한 함수 f 의 개수는 4이다. (참)
 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이

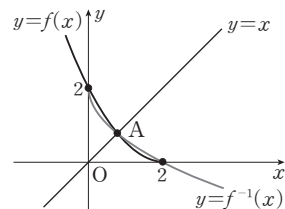
- ㄱ. 함수 f 가 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $(f^{-1} \circ (f \circ f))(x) = f^{-1}(x)$
 따라서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로 $f(3) = f^{-1}(3)$ (참)

6

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 \quad (x \leq 2)$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프
 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프
 와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점을 A라 하
 면 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 점 A와
 두 점 $(0, 2), (2, 0)$ 의 세 개이다.

이때 점 A의 x 좌표는 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = x$, 즉

$x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 실근 중 $x \leq 2$ 인 값이다.

이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 에서

$$x = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{5} \quad (\because x \leq 2)$$

$$\therefore A(3 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$(3 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}), (0, 2), (2, 0)$ 이다.

답 $(3 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}), (0, 2), (2, 0)$

09. 유리식과 유리함수

1 유리식

기본 + 필수연습

본문 pp.290~297

- 01 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ 02 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{x+3}{x-1}$
- 03 (1) $\frac{x-2}{2x-1}$ (2) $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$
- 04 $\frac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$
- 05 (1) $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ (2) $a+1$ 06 $\frac{24}{25}$
- 07 4 08 2 09 48
- 10 (1) $\frac{60}{(x-4)(x+26)}$ (2) $\frac{40}{21}$ 11 18
- 12 $\frac{36}{55}$ 13 (1) $\frac{x+2}{x+4}$ (2) $\frac{10x+3}{7x+2}$ 14 13
- 15 (1) 322 (2) 3 16 4 17 11
- 18 (1) $\frac{16}{15}$ (2) $\frac{23}{3}$ 19 1

01

다항식이 아닌 유리식은 분모가 일차 이상의 다항식이므로
ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

02

$$(1) \frac{2}{x^2-x-2} = \frac{2}{(x+1)(x-2)},$$

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} \text{ 이므로}$$

두 식을 통분하면

$$\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}, \frac{(x-2)(3x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$(2) \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{x+3}{x-1}$$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{x+3}{x-1}$

03

$$(1) \frac{x}{x+3} + \frac{4x-9}{2x^2+5x-3} - \frac{x-1}{2x-1}$$

$$= \frac{x}{x+3} + \frac{4x-9}{(x+3)(2x-1)} - \frac{x-1}{2x-1}$$

$$= \frac{x(2x-1)}{(x+3)(2x-1)} + \frac{4x-9}{(x+3)(2x-1)} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(2x-1)}$$

$$= \frac{2x^2-x+4x-9-(x^2+2x-3)}{(x+3)(2x-1)}$$

$$= \frac{x^2+x-6}{(x+3)(2x-1)}$$

$$= \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(2x-1)}$$

$$= \frac{x-2}{2x-1}$$

$$(2) \frac{x^2+9x+18}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+3x-18}{x^2+x-2} \times \frac{x^2-7x+12}{2x^2+8x+6}$$

$$= \frac{(x+3)(x+6)}{(x+2)(x-3)} \times \frac{(x+2)(x-1)}{(x+6)(x-3)}$$

$$\times \frac{(x-3)(x-4)}{2(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$$

답 (1) $\frac{x-2}{2x-1}$ (2) $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+1)(x-3)}$

04

$$\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{x} - \frac{2x+5}{x+2} + \frac{x+4}{x+3}$$

$$= \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(2 + \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+2)(x+3) - x(x-1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{6x+6}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$$

답 $\frac{6(x+1)}{x(x-1)(x+2)(x+3)}$

05

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{x}{2x^2-3x+1} - \frac{x}{2x^2+3x+1} + \frac{2}{4x^2-1} \\
 &= \frac{x}{(x-1)(2x-1)} - \frac{x}{(x+1)(2x+1)} \\
 &\quad + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \\
 &= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1} \right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \\
 &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\
 &= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} \\
 (2) \quad & \frac{a}{1-\frac{1}{a+1}} = \frac{a}{\frac{(a+1)-1}{a+1}} \\
 &= \frac{a}{\frac{a}{a+1}} \\
 &= \frac{a(a+1)}{a} = a+1 \\
 &\quad \text{답 (1) } \frac{2}{(x+1)(x-1)} \quad (2) \quad a+1
 \end{aligned}$$

06

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = k \quad (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x=4k, y=3k$$

$$\therefore \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2 \times 4k \times 3k}{(4k)^2 + (3k)^2} = \frac{24k^2}{25k^2} = \frac{24}{25}$$

답 $\frac{24}{25}$

07

$$\begin{aligned}
 \frac{7x-1}{x^3-1} &= \frac{a}{x-1} - \frac{bx-3}{x^2+x+1} \text{의 우변을 통분하여 정리하면} \\
 \frac{a}{x-1} - \frac{bx-3}{x^2+x+1} &= \frac{a(x^2+x+1) - (bx-3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 &= \frac{(a-b)x^2 + (a+b+3)x + a-3}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{7x-1}{x^3-1} = \frac{(a-b)x^2 + (a+b+3)x + a-3}{x^3-1} \text{이 } x \text{에 대}$$

한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a-b=0, a+b+3=7, a-3=-1$$

따라서 $a=2, b=2$ 이므로

$$ab=2 \times 2=4$$

답 4

08

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} \text{의 우변을 통분하여 정리하면}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} \\
 &= \frac{ax(x+1) + b(x-1)(x+1) + cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\
 &= \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x^3-x}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{x^3-x} = \frac{(a+b+c)x^2 + (a-c)x - b}{x^3-x} \text{가 } x \text{에 대한 항}$$

등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b+c=0, a-c=0, -b=1$$

$$-b=1 \text{에서 } b=-1 \text{이므로 두 식 } a+c-1=0, a-c=0 \text{을}$$

연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2}, b=-1, c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a-b+c = \frac{1}{2} - (-1) + \frac{1}{2} = 2$$

답 2

09

$$\frac{a}{(x^2+x+1)^2} + \frac{b}{(x^2-x+1)^2} = \frac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2} \text{의 좌변을}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{(x^2+x+1)^2} + \frac{b}{(x^2-x+1)^2} \\
 &= \frac{a(x^2-x+1)^2 + b(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2} \\
 &= \frac{a(x^4-2x^3+3x^2-2x+1) + b(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)}{(x^4+x^2+1)^2} \\
 &= \frac{(a+b)x^4 - 2(a-b)x^3 + 3(a+b)x^2 - 2(a-b)x + a+b}{(x^4+x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b=4, a-b=0, 3(a+b)=c$$

두 식 $a+b=4, a-b=0$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=2$

$$\therefore c=3(a+b)=3 \times 4=12$$

$$\therefore abc=2 \times 2 \times 12=48$$

답 48

다른 풀이

$$\frac{a}{(x^2+x+1)^2} + \frac{b}{(x^2-x+1)^2} = \frac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2} \text{의 좌변을}$$

통분하면

$$\frac{a(x^2-x+1)^2+b(x^2+x+1)^2}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{4x^4+cx^2+4}{(x^4+x^2+1)^2}$$

분모가 같으므로 분자끼리 비교하면

$$a(x^2-x+1)^2+b(x^2+x+1)^2=4x^4+cx^2+4$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에

$$x=0 \text{을 대입하면 } a+b=4 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } a+9b=8+c \quad \cdots \textcircled{B}$$

$$x=-1 \text{을 대입하면 } 9a+b=8+c \quad \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C}-\textcircled{B} \text{에서 } 8a-8b=0 \quad \therefore a=b=2 \quad (\because \textcircled{A})$$

이것을 $\textcircled{B}$ 에 대입하여 풀면 $c=12$

$$\therefore abc=2 \times 2 \times 12=48$$

10

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{(x-1)-(x-4)} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) \\ &\quad + \frac{6}{(x+2)-(x-1)} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &\quad + \frac{6}{(x+5)-(x+2)} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{6}{(x+26)-(x+23)} \left(\frac{1}{x+23} - \frac{1}{x+26} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+23} - \frac{1}{x+26} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+26} \right) \\ &= 2 \times \frac{x+26-(x-4)}{(x-4)(x+26)} \\ &= 2 \times \frac{30}{(x-4)(x+26)} \\ &= \frac{60}{(x-4)(x+26)} \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3-1} \times \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5-3} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \frac{4}{7-5} \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{4}{21-19} \times \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{60}{(x-4)(x+26)} \quad (2) \frac{40}{21}$$

11

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+6)} + \frac{3}{(x+6)(x+12)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{2}{4} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} \right) \\ &\quad + \frac{3}{6} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+12} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+12} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+12} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x+12-x}{x(x+12)}$$

$$= \frac{6}{x(x+12)}$$

$$\text{즉, } \frac{6}{x(x+12)} = \frac{b}{x(x+a)} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로}$$

$$a=12, b=6$$

$$\therefore a+b=12+6=18$$

답 18

12

$$f(x)=x^2-1=(x-1)(x+1) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

(단, $x \neq -1, x \neq 1$)

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \frac{1}{f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(10)} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{72}{55} = \frac{36}{55}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{36}{55}$

13

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &\frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\
 &= \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{x+2}{x+4}
 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3x+1}{x}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{x}{3x+1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{2(3x+1)+x}{3x+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{7x+2}{3x+1}} \\
 &= 1 + \frac{3x+1}{7x+2} = \frac{7x+2+(3x+1)}{7x+2} \\
 &= \frac{10x+3}{7x+2}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{x+2}{x+4}$ (2) $\frac{10x+3}{7x+2}$

다른 풀이

(1) 분자, 분모에 각각 $(x+2)(x+3)(x+4)$ 를 곱하면
(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) \times (x+2)(x+3)(x+4)}{\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \times (x+2)(x+3)(x+4)} \\
 &= \frac{(x+2)\{(x+4)-(x+3)\}}{(x+4)\{(x+3)-(x+2)\}} \\
 &= \frac{x+2}{x+4}
 \end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
 \frac{25}{81} &= \frac{1}{\frac{81}{25}} = \frac{1}{3 + \frac{6}{25}} \\
 &= \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{25}{6}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{6}}}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=4, c=6$ 이므로

$$a+b+c=3+4+6=13$$

답 13

15

(1) $x^2-7x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면
 $x=0$ 이면 $0-7 \times 0+1 \neq 0$

$$x-7+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=7$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
 &= 7^3 - 3 \times 7 = 322
 \end{aligned}$$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ 에서

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$$\therefore a=b=c$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} + \frac{3b}{c+a} \\
 &= \frac{a}{a+a} + \frac{2a}{a+a} + \frac{3a}{a+a} \\
 &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3
 \end{aligned}$$

답 (1) 322 (2) 3

16

$x^2+4x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면
 $x=0$ 이면 $0+4 \times 0-1 \neq 0$

$$x+4-\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore 4+x=\frac{1}{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{A},$$

$$x-\frac{1}{x}=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{4 + \frac{1}{4+x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{x}}} \quad (\because \textcircled{7}) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{4+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} \quad (\because \textcircled{7}) \\
&= \frac{1}{x} - x = -\left(x - \frac{1}{x}\right) \\
&= -(-4) \quad (\because \textcircled{7}) \\
&= 4
\end{aligned}$$

답 4

17

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - xy - 8y^2}{x^2 - xy + y^2} &= -2 \text{의 양변에 } x^2 - xy + y^2 \text{을 곱하면} \\
x^2 - xy - 8y^2 &= -2(x^2 - xy + y^2) \\
3x^2 - 3xy - 6y^2 &= 0, \quad x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\
(x+y)(x-2y) &= 0 \\
\therefore x &= 2y \quad (\because xy > 0) \quad \leftarrow xy > 0 \text{이므로 } x, y \text{의 부호는 일치한다.} \\
&\quad \text{따라서 } x+y=0, \text{ 즉 } x=-y \text{가 될 수 없다.} \\
\therefore \frac{2x+7y}{3x-5y} &= \frac{2 \times 2y+7y}{3 \times 2y-5y} = \frac{11y}{y} = 11
\end{aligned}$$

답 11

18

$$\begin{aligned}
(x+y):(y+z):(z+x) &= 4:7:5 \text{이므로} \\
\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{5} &= k \quad (k \neq 0) \text{로 놓으면} \\
x+y &= 4k \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
y+z &= 7k \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
z+x &= 5k \quad \dots\dots \textcircled{3} \\
\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(x+y+z) &= 16k \\
\therefore x+y+z &= 8k \\
\text{위의 식에 } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 각각 대입하면} \\
z &= 4k, \quad x = k, \quad y = 3k \\
(1) \quad \frac{yz+zx}{xy+yz} &= \frac{12k^2+4k^2}{3k^2+12k^2} = \frac{16k^2}{15k^2} = \frac{16}{15} \\
(2) \quad \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} &= \frac{k^3+27k^3+64k^3}{12k^3} = \frac{92k^3}{12k^3} = \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{16}{15}$ (2) $\frac{23}{3}$

19

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} &= k \text{에서} \\
b+c &= ak \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
c+a &= bk \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
a+b &= ck \quad \dots\dots \textcircled{3} \\
\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(a+b+c) &= (a+b+c)k \\
(i) \quad a+b+c &\neq 0 \text{일 때, } k=2 \\
(ii) \quad a+b+c &= 0 \text{일 때,} \quad \left[\begin{array}{l} c+a=-b \text{ 또는 } a+b=-c \text{를 각각 } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에} \\ \text{대입해도 } k=-1 \text{을 구할 수 있다.} \end{array} \right. \\
b+c &= -a \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서} \\
-a &= ak \quad \therefore k = -1 \quad (\because a \neq 0) \\
(i), (ii) \text{에서 구하는 모든 실수 } k \text{의 값의 합은} \\
2 + (-1) &= 1
\end{aligned}$$

답 1

다른 풀이

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} &= k \text{에서} \\
(i) \quad a+b+c &= 0 \text{일 때,} \\
\frac{-a}{a} = \frac{-b}{b} = \frac{-c}{c} &= -1 \\
\therefore k &= -1 \\
(ii) \quad a+b+c &\neq 0 \text{일 때,} \\
\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} &= \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2 \\
\therefore k &= 2 \\
(i), (ii) \text{에서 구하는 모든 실수 } k \text{의 값의 합은} \\
-1 + 2 &= 1
\end{aligned}$$

STEP 1

개념 마무리

본문 p.298

01 24	02 4	03 7	04 10
05 1	06 75		

01

$$\begin{aligned}
m &\neq -4, \quad m \neq 4 \text{이므로} \\
\frac{4m+16}{m^2-16} &= \frac{4(m+4)}{(m+4)(m-4)} = \frac{4}{m-4} \\
\text{위의 식의 값이 정수가 되어야 하므로}
\end{aligned}$$

$m-4$ 의 값이 될 수 있는 것은

m 은 정수이므로 $m-4$ 도 정수이다.
 $-4, -2, -1, 1, 2, 4 \leftarrow m-4 = \pm(4의 약수)$

$\therefore m=0, 2, 3, 5, 6, 8$

따라서 모든 정수 m 의 값의 합은

$$0+2+3+5+6+8=24$$

답 24

02

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x} - \frac{b}{x-1} - \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a(x-1)^2}{x(x-1)^2} - \frac{bx(x-1)}{x(x-1)^2} - \frac{cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^2-2ax+a-(bx^2-bx)-cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(a-b)x^2-(2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{x-2}{x(x-1)^2} = \frac{(a-b)x^2-(2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2} \text{가 } x \text{에 대}$$

한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a-b=0, 2a-b+c=-1, a=-2$$

따라서 $a=-2, b=-2, c=1$ 이므로

$$abc=(-2) \times (-2) \times 1=4$$

답 4

03

$$\langle A, B \rangle = \frac{A-B}{AB} = \frac{1}{B} - \frac{1}{A}$$

이므로

$$\langle x+3, x+1 \rangle + \langle x+5, x+3 \rangle + \langle x+7, x+5 \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\langle x+a, x+1 \rangle = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉠} = \textcircled{㉡}$ 이므로

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a}$$

$$\therefore a=7$$

답 7

04

$$\begin{aligned} \frac{14}{31} &= \frac{1}{\frac{31}{14}} = \frac{1}{2 + \frac{3}{14}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{14}{3}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 - \frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

따라서 $p=2, q=5, r=3$

$$\therefore p+q+r=2+5+3=10$$

답 10

05

$abc=1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{c \times a}{c \times (ab+a+1)} + \frac{ac \times b}{ac \times (bc+b+1)} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{ca}{abc+ca+c} + \frac{abc}{abc \times c + abc+ca} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{ca}{1+ca+c} + \frac{1}{c+1+ca} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{ca+c+1}{ca+c+1} = 1 \end{aligned}$$

답 1

06

$$\text{조건 (가)에서 } \frac{3a+b}{3} = \frac{2b+c}{4} = \frac{2c}{5} = k \ (k>0) \text{로 놓으면}$$

a, b, c 가 자연수이므로 $k>0$

$$3a+b=3k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2b+c=4k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$2c=5k \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $c=\frac{5}{2}k$ 이므로 이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$2b + \frac{5}{2}k = 4k, 2b = \frac{3}{2}k \quad \therefore b = \frac{3}{4}k$$

이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$3a + \frac{3}{4}k = 3k, 3a = \frac{9}{4}k \quad \therefore a = \frac{3}{4}k$$

$$\text{따라서 } a:b:c = \frac{3}{4}k : \frac{3}{4}k : \frac{5}{2}k = 3:3:10 \text{이므로}$$

$a=3n, b=3n, c=10n$ (n 은 자연수)으로 놓을 수 있다.

즉, 세 자연수 a, b, c 의 최소공배수는 $3 \times 10 \times n$ 이므로
 조건 ㄴ에서 $30n=90 \quad \therefore n=3$
 $\therefore a=9, b=9, c=30$
 $\therefore 3a+2b+c=27+18+30=75$

답 75

다른 풀이

$3+4+5 \neq 0$ 이므로 조건 ㄱ의 식에서 가비의 리를 이용하면

$$\frac{3a+b}{3} = \frac{2b+c}{4} = \frac{2c}{5} = \frac{3a+3b+3c}{12} = \frac{a+b+c}{4}$$

즉, $2b+c=a+b+c$ 에서 $a=b$ 이므로

$$\frac{4a}{3} = \frac{2c}{5} = k \quad (k > 0) \text{로 놓으면 } a=b=\frac{3}{4}k, c=\frac{5}{2}k$$

따라서 $a:b:c = \frac{3}{4}k : \frac{3}{4}k : \frac{5}{2}k = 3:3:10$ 이므로

$a=3n, b=3n, c=10n$ (n 은 자연수)으로 놓을 수 있다.

즉, 세 자연수 a, b, c 의 최소공배수는 $3 \times 10 \times n$ 이므로

조건 ㄴ에서 $30n=90 \quad \therefore n=3$

$\therefore a=9, b=9, c=30$

$\therefore 3a+2b+c=27+18+30=75$

2 유리함수

기본 + 필수연습

본문 pp.304~313

20 (1) $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{4} \text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x \mid x \text{는 실수}\}$

(3) $\{x \mid x \neq -2 \text{인 실수}\}$

21 ㄱ, ㄷ, ㄹ

22 풀이 참조

23 $y = \frac{x-2}{2x+4}$

24 -12 25 ㄱ, ㄷ

26 $-\frac{5}{4}$

27 6

28 $-\frac{1}{2}$

29 (1) 3 (2) 3

30 9

31 81

32 ㄱ, ㄷ

33 $-\frac{16}{5}$

34 14

35 $\frac{15}{4}$

36 $k < 0$ 또는 $0 < k < \frac{1}{9}$ 또는 $k > 1$

37 $\frac{31}{16}$

38 (1) $f^{60}(x) = x$ (2) 5

39 $\frac{1}{21}$

40 3

41 1

42 $2\sqrt{10}$

20

(1) $-4x+5 \neq 0$ 에서 $x \neq \frac{5}{4}$ 이므로 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x \mid x \neq \frac{5}{4} \text{인 실수}\right\}$ 이다.

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $2x^2+3 \neq 0$ 이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \text{는 실수}\}$ 이다.

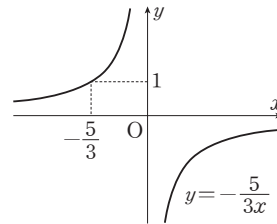
(3) $x+2 \neq 0$ 에서 $x \neq -2$ 이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x \mid x \neq -2 \text{인 실수}\}$ 이다.

답 (1) $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{4} \text{인 실수}\right\}$ (2) $\{x \mid x \text{는 실수}\}$

(3) $\{x \mid x \neq -2 \text{인 실수}\}$

21

함수 $y = -\frac{5}{3x}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄴ. 함수 $y = -\frac{5}{3x}$ 의 정의역은

$\{x \mid x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

22

(1) 함수 $y = -\frac{1}{x-2} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로

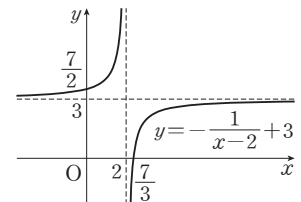
3만큼 평행이동한 것이

므로 그 그래프는 오른

쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x \mid x \neq 2 \text{인 실수}\}$, 치역은

$\{y \mid y \neq 3 \text{인 실수}\}$, 점근선의 방정식은 $x=2, y=3$ 이다.



$$(2) y = \frac{3x+4}{x+1} = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 3 \text{이므로 주어진}$$

함수의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

-1만큼, y 축의 방향으로

3만큼 평행이동한 것이고,

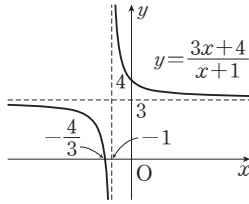
그 그래프는 오른쪽 그림

과 같다.

따라서 정의역은

$\{x | x \neq -1 \text{인 실수}\}$, 치역은 $\{y | y \neq 3 \text{인 실수}\}$, 점근선

의 방정식은 $x = -1, y = 3$ 이다.



답 풀이 참조

23

$y = \frac{-4x-2}{2x-1}$ 를 x 에 대하여 풀면

$$(2x-1)y = -4x-2, 2xy - y = -4x-2$$

$$(2y+4)x = y-2$$

$$\therefore x = \frac{y-2}{2y+4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{x-2}{2x+4}$$

$$\text{답 } y = \frac{x-2}{2x+4}$$

24

$$y = \frac{-x+1}{x-3} = \frac{-(x-3)-2}{x-3} = -\frac{2}{x-3} - 1$$

한편, 함수 $y = \frac{2x}{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼,

y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{2(x-a)}{x-a+1} + b$$

$$= \frac{2(x-a+1)-2}{x-a+1} + b$$

$$= -\frac{2}{x-a+1} + 2 + b$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = -\frac{2}{x-3} - 1$ 의 그래프와 일치

하므로

$$-a+1 = -3, 2+b = -1$$

따라서 $a=4, b=-3$ 이므로

$$ab = 4 \times (-3) = -12$$

답 -12

25

$$\neg. y = -\frac{1}{3x+3} = -\frac{1}{3(x+1)}$$

즉, 함수 $y = -\frac{1}{3x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{3x}$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$$\sqcup. y = -\frac{x-1}{3x+6} = -\frac{(x+2)-3}{3(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}$$

즉, 함수 $y = -\frac{x-1}{3x+6}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼

평행이동한 것이다.

$$\sqsubset. y = \frac{x+1}{6-6x} = \frac{(x-1)+2}{-6(x-1)} = -\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{6}$$

즉, 함수 $y = \frac{x+1}{6-6x}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{3x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{6}$ 만큼

평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의하여 함수 $y = -\frac{1}{3x}$ 의 그래프와 겹쳐

지는 것은 $\neg, \sqcup$ 이다.

답 $\neg, \sqcup$

26

$$f(0) = \frac{a}{b} = 1 \quad \therefore a = b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{-2x+a}{x+b} = \frac{-2(x+b)+2b+a}{x+b} = \frac{2b+a}{x+b} - 2$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -b, y = -2$$

$$\therefore b = 1$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a = 1$ 이므로

$$f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$$

$$\therefore f(3) = \frac{-2 \times 3 + 1}{3 + 1} = -\frac{5}{4}$$

답 $-\frac{5}{4}$

다른 풀이

함수 $f(x) = \frac{-2x+a}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -b, y = -2$$

따라서 $b=1$ 이므로 $f(x) = \frac{-2x+a}{x+1}$

또한, $f(0)=1$ 이므로 $a=1 \quad \therefore f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$

$$\therefore f(3) = \frac{-2 \times 3 + 1}{3 + 1} = -\frac{5}{4}$$

27

$$y = \frac{bx-1}{ax-6} = \frac{\frac{b}{a}(ax-6) + \frac{6b}{a} - 1}{ax-6} = \frac{\frac{6b}{a} - 1}{ax-6} + \frac{b}{a}$$

이므로 유리함수 $y = \frac{bx-1}{ax-6}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{6}{a}, y = \frac{b}{a}$$

이때 함수 $y = \frac{bx-1}{ax-6}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq 3 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y | y \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이므로

$$\frac{6}{a} = 3, \frac{b}{a} = 2$$

따라서 $a=2, b=4$ 이므로

$$a+b=2+4=6$$

다른 풀이

유리함수 $y = \frac{bx-1}{ax-6}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{6}{a}, y = \frac{b}{a}$$

이때 함수 $y = \frac{bx-1}{ax-6}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq 3 \text{인 실수}\}$,

치역은 $\{y | y \neq 2 \text{인 실수}\}$ 이므로

$$\frac{6}{a} = 3, \frac{b}{a} = 2$$

따라서 $a=2, b=4$ 이므로

$$a+b=2+4=6$$

답 6

28

$$f(x) = \frac{bx}{ax+1} = \frac{\frac{b}{a}(ax+1) - \frac{b}{a}}{ax+1} = -\frac{\frac{b}{a}}{ax+1} + \frac{b}{a}$$

이므로 유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{1}{a}, y = \frac{b}{a}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 정의역과 치역이 같으므로

$$-\frac{1}{a} = \frac{b}{a} \quad \therefore b = -1$$

또한, 두 점근선의 교점 $(-\frac{1}{a}, \frac{b}{a})$, 즉 점 $(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a})$ 이

직선 $y=3x+4$ 위의 점이므로

$$-\frac{1}{a} = -\frac{3}{a} + 4, \frac{2}{a} = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

다른 풀이

유리함수 $f(x) = \frac{bx}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{1}{a}, y = \frac{b}{a}$$

$$-\frac{1}{a} = \frac{b}{a} \text{에서 } b = -1$$

두 점근선의 교점 $(-\frac{1}{a}, \frac{-1}{a})$ 이 직선 $y=3x+4$ 위의 점이

므로

$$-\frac{1}{a} = -\frac{3}{a} + 4, \frac{2}{a} = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$

29

$$(1) y = \frac{bx-1}{3-ax} = \frac{-bx+1}{ax-3}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}(ax-3) + 1 - \frac{3b}{a}}{ax-3} = \frac{1 - \frac{3b}{a}}{ax-3} - \frac{b}{a}$$

이므로 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{3}{a}, y = -\frac{b}{a}$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점

$(\frac{3}{a}, -\frac{b}{a})$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{3}{a}=3, -\frac{b}{a}=-2 \quad \therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

$$(2) y=\frac{-6x+5}{3x-3}=\frac{-2(3x-3)-1}{3x-3}=-\frac{1}{3(x-1)}-2$$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=1, y=-2$$

따라서 두 점근선의 교점 (1, -2)는 두 직선 $y=x+a$,

$$y=-x+b$$
의 교점이므로

$$-2=1+a, -2=-1+b$$

$$\therefore a=-3, b=-1$$

$$\therefore ab=(-3) \times (-1)=3$$

답 (1) 3 (2) 3

30

$$y=\frac{3x+b}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+b}{x+a}=\frac{-3a+b}{x+a}+3$$

이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=3$$

이때 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-a, 3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a=3, c=3$$

또한, 함수 $y=\frac{3x+b}{x+3}$ 의 그래프가 점 (3, 2)를 지나므로

$$2=\frac{3 \times 3+b}{3+3}, 12=b+9$$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b+c=3+3+3=9$$

답 9

31

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=4, y=1$ 이므로 그래프의 식은

$$y=\frac{k}{x-4}+1 \quad (k \neq 0)$$

이때 유리함수의 그래프가 점 (0, 2)를 지나므로

$$2=\frac{k}{-4}+1 \quad \therefore k=-4$$

$$\therefore y=\frac{-4}{x-4}+1=\frac{-4+(x-4)}{x-4}=\frac{x-8}{x-4}$$
이므로

$$a=-8, b=1, c=-4$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=(-8)^2+1^2+(-4)^2=81$$

답 81

32

유리함수 $y=\frac{c}{ax+b}+d$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{b}{a}, y=d$$

이므로 주어진 그래프에서

$$-\frac{b}{a}<0, d>0$$

또한, 함수 $y=\frac{c}{ax}$ 의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로

$$\frac{c}{a}<0$$

$$\neg. -\frac{b}{a}<0 \text{에서 } \frac{b}{a}>0 \text{이므로 } ab>0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \frac{c}{a}<0 \text{에서 } ac<0 \text{ (거짓)}$$

$$\square. \text{ 함수 } y=\frac{c}{ax+b}+d \text{의 그래프와 } y \text{축의 교점의 } y \text{좌표가}$$

$$0 \text{보다 크므로 } \frac{c}{b}+d>0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \square$ 이다.

답 $\neg, \square$

33

$$y=\frac{2x-4}{x-5}=\frac{2(x-5)+6}{x-5}=\frac{6}{x-5}+2$$

이므로 함수 $y=\frac{2x-4}{x-5}$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수

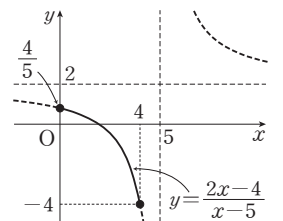
$$y=\frac{2x-4}{x-5}$$
의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로

$$x=0 \text{일 때 최댓값 } \frac{4}{5},$$

$$x=4 \text{일 때 최솟값 } -4 \text{를 갖는다.}$$

$$\therefore M=\frac{4}{5}, m=-4 \text{이므로}$$



$$M+m=\frac{4}{5}+(-4)=-\frac{16}{5}$$

$$\text{답 } -\frac{16}{5}$$

34

$$y=\frac{-x+k}{x+3}=\frac{-(x+3)+3+k}{x+3}=\frac{3+k}{x+3}-1$$

이므로 함수 $y=\frac{-x+k}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{3+k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k > -3$ 에서 $k+3 > 0$

이므로 $-2 \leq x < 0$ 에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

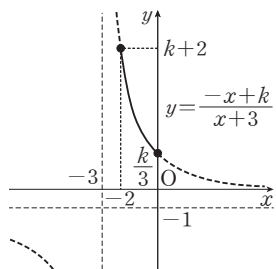
따라서 $x=0$ 일 때 최솟값 2를 가지므로

$$\frac{k}{3}=2 \quad \therefore k=6$$

또한, $x=-2$ 일 때 최댓값 M 을 가지므로

$$M=k+2=8$$

$$\therefore k+M=6+8=14$$



답 14

35

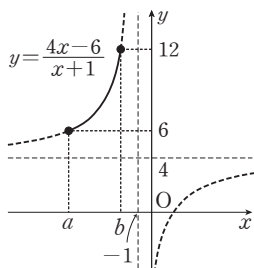
$$y=\frac{4x-6}{x+1}=\frac{4(x+1)-10}{x+1}=-\frac{10}{x+1}+4$$

이므로 함수 $y=\frac{4x-6}{x+1}$ 의 그래프는 함수 $y=-\frac{10}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a \leq x \leq b$ 에서 함수

$$y=\frac{4x-6}{x+1}$$
이 최댓값 12, 최솟값 6을 가지려면 주어진 함수의

그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하고 $x=a$ 일 때 최솟값 6, $x=b$ 일 때 최댓값 12를 갖는다.



$$\text{즉, } \frac{4a-6}{a+1}=6 \text{에서}$$

$$4a-6=6a+6, 2a=-12$$

$$\therefore a=-6$$

$$\text{또한, } \frac{4b-6}{b+1}=12 \text{에서}$$

$$4b-6=12b+12, 8b=-18$$

$$\therefore b=-\frac{9}{4}$$

$$\therefore b-a=-\frac{9}{4}-(-6)=\frac{15}{4}$$

$$\text{답 } \frac{15}{4}$$

36

$$y=\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3(x+1)-1}{x+1}=-\frac{1}{x+1}+3$$

또한, $y=kx+4k+2=k(x+4)+2$ 에서

직선 $y=kx+4k+2$ 는 기울기 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, 2)$ 를 지난다.

즉, 함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$ 의 그래

프와 직선 $y=kx+4k+2$ 는

오른쪽 그림과 같다.

(i) $k=0$ 일 때,

직선 $y=kx+4k+2$, 즉

$y=2$ 는 점근선 $y=3$ 과

평행하므로 함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$ 의 그래프와 한 점 $(0, 2)$ 에

서 만난다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때,

함수 $y=\frac{3x+2}{x+1}$ 의 그래프와 직선 $y=kx+4k+2$ 가 서로

다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식

$$\frac{3x+2}{x+1}=kx+4k+2, \text{ 즉 } kx^2+(5k-1)x+4k=0 \text{이}$$

서로 다른 두 근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(5k-1)^2-4 \times k \times 4k > 0$$

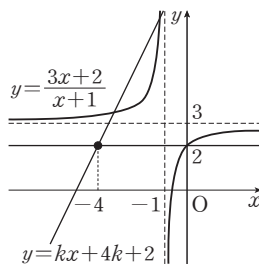
$$9k^2-10k+1 > 0, (k-1)(9k-1) > 0$$

$$\therefore k < \frac{1}{9} \text{ 또는 } k > 1$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는

$$k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < \frac{1}{9} \text{ 또는 } k > 1$$

$$\text{답 } k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < \frac{1}{9} \text{ 또는 } k > 1$$



37

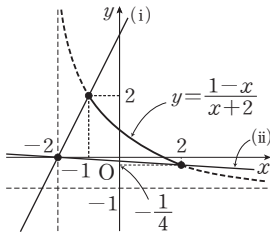
$$y = \frac{1-x}{x+2} = \frac{-(x+2)+3}{x+2} = \frac{3}{x+2} - 1$$

또한, $y = mx + 2m = m(x+2)$ 에서

직선 $y = mx + 2m$ 은 기울기 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.

이때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = \frac{1-x}{x+2}$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 2m$ 이 만나야 한다.

따라서 함수 $y = \frac{1-x}{x+2}$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 2m$ 은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y = mx + 2m$ 이 점 $(-1, 2)$ 를 지날 때,

$$2 = -m + 2m \quad \therefore m = 2$$

(ii) 직선 $y = mx + 2m$ 이 점 $(2, -\frac{1}{4})$ 을 지날 때,

$$-\frac{1}{4} = 2m + 2m, \quad 4m = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore m = -\frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서 함수 $y = \frac{1-x}{x+2}$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 2m$

이 만나도록 하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{16} \leq m \leq 2$$

따라서 실수 m 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$2 + \left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{31}{16}$$

답 $\frac{31}{16}$

38

$$(1) f^2(x) = f(f^1(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{-1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{\frac{-x}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

$$\star f^4(x) = f(f^3(x)) = f(x)$$

$$f^5(x) = f(f^4(x)) = f(f(x)) = f^2(x)$$

$$f^6(x) = f(f^5(x)) = f(f^2(x)) = f^3(x) = x$$

⋮

따라서 $n = 1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(x)$ 는

$$f(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f^2(x) = \frac{-1}{x-1}, \quad f^3(x) = x$$

가 이 순서대로 반복되므로

$$f^{60}(x) = f^{3 \times 20}(x) = x$$

$$(2) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{에서 } f^1\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$f^2\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(f^1\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5$$

$$f^3\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(f^2\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = f(5) = \frac{2}{3}$$

$$f^4\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(f^3\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$f^5\left(-\frac{1}{5}\right) = f\left(f^4\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{2}$$

⋮

따라서 $n = 1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n\left(-\frac{1}{5}\right)$ 의 값은

$-\frac{3}{2}, 5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{5}$ 이 이 순서대로 반복되므로

$$f^{50}\left(-\frac{1}{5}\right) = f^{4 \times 12 + 2}\left(-\frac{1}{5}\right) = f^2\left(-\frac{1}{5}\right) = 5$$

답 (1) $f^{60}(x) = x$ (2) 5

다른 풀이

$$(2) f(x) = \frac{x-1}{x+1} \text{이므로}$$

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} = -\frac{1}{x}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{-x+1}{x}} = \frac{-x-1}{x-1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{-x-1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{-x-1}{x-1} - 1}{\frac{-x-1}{x-1} + 1} = \frac{\frac{-2x}{x-1}}{\frac{-2}{x-1}} = x$$

따라서 $f^{4k-3}(x) = f(x)$, $f^{4k-2}(x) = f^2(x)$,
 $f^{4k-1}(x) = f^3(x)$, $f^{4k}(x) = x$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 이므로

$$f^{50}(x) = f^{4 \times 13 - 2}(x) = f^2(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\therefore f^{50}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{5}} = 5$$

39

$$f(x) = \frac{x}{1-2x} \text{ 이므로}$$

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{2x}{1-2x}} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-4x}{1-2x}} = \frac{x}{1-4x}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{1-4x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-4x}}{1 - \frac{2x}{1-4x}} = \frac{\frac{x}{1-4x}}{\frac{1-6x}{1-4x}} = \frac{x}{1-6x}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{1-6x}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{1-6x}}{1 - \frac{2x}{1-6x}} = \frac{\frac{x}{1-6x}}{\frac{1-8x}{1-6x}} = \frac{x}{1-8x}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{10}(x) = \frac{x}{1-20x}$$

이때 $f^{10}(a) = 1$ 에서

$$\frac{a}{1-20a} = 1, a = 1-20a$$

$$21a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{21}$$

40

$$y = \frac{ax+1}{4x-3} \text{ 을 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(4x-3) = ax+1$$

$$4xy - 3y = ax + 1, (4y-a)x = 3y + 1$$

$$\therefore x = \frac{3y+1}{4y-a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{3x+1}{4x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4x-a}$$

이때 $f = f^{-1}$ 이므로 $\frac{ax+1}{4x-3} = \frac{3x+1}{4x-a}$

$$\therefore a = 3$$

답 3

다른 풀이 1

$f = f^{-1}$ 에서 유리함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점근선의 교점이 직선 $y = x$ 위에 존재한다.

$$y = \frac{ax+1}{4x-3} = \frac{\frac{a}{4}(4x-3) + \frac{3}{4}a+1}{4x-3} = \frac{\frac{3}{4}a+1}{4x-3} + \frac{a}{4}$$

에서 점근선의 방정식은 $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{a}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = 3$$

다른 풀이 2

함수 $f(x) = \frac{ax+1}{4x-3}$ 의 역함수는 $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4x-a}$

이때 $f = f^{-1}$ 이므로 $\frac{ax+1}{4x-3} = \frac{3x+1}{4x-a}$

$$\therefore a = 3$$

41

$$f(x) = \frac{4}{x-a} + b \text{에서 조건 (나)에 의하여}$$

$$(f \circ f)(x) = x \text{ 이므로 } f(x) = f^{-1}(x)$$

$$y = \frac{4}{x-a} + b \text{를 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$(y-b)(x-a) = 4, xy - ay - bx + ab = 4$$

$$(y-b)x = ay + 4 - ab \quad \therefore x = \frac{ay + 4 - ab}{y-b}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{ax + 4 - ab}{x-b}$$

답 $\frac{1}{21}$

$$\begin{aligned}\therefore f^{-1}(x) &= \frac{ax+4-ab}{x-b} \\ &= \frac{a(x-b)+4}{x-b} = \frac{4}{x-b} + a\end{aligned}$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \text{에서 } \frac{4}{x-a} + b = \frac{4}{x-b} + a$$

$$\therefore a=b$$

$$\text{한편, 조건 ㉞에서 } f(0)=1 \text{이므로 } \frac{4}{-a} + b = 1$$

$$\text{이 식에 } a=b \text{를 대입하면 } \frac{4}{-a} + a = 1$$

$$4 - a^2 = -a \quad \therefore a^2 - a - 4 = 0 \quad \leftarrow D = (-1)^2 - 4 \times (-4) = 17 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 합은 1이다.

답 1

다른 풀이

$$\text{함수 } f(x) = \frac{4}{x-a} + b = \frac{b(x-a)+4}{x-a} = \frac{bx-ab+4}{x-a} \text{의}$$

$$\text{역함수는 } f^{-1}(x) = \frac{ax-ab+4}{x-b}$$

$$\text{조건 ㉞에서 } (f \circ f)(x) = x \text{이므로 } f(x) = f^{-1}(x)$$

$$\text{즉, } \frac{bx-ab+4}{x-a} = \frac{ax-ab+4}{x-b} \text{이므로}$$

$$a=b$$

$$\text{한편, 조건 ㉞에서 } f(0)=1 \text{이므로 } \frac{4}{-a} + b = 1$$

$$\text{이 식에 } a=b \text{를 대입하면 } \frac{4}{-a} + a = 1$$

$$4 - a^2 = -a \quad \therefore a^2 - a - 4 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 합은 1이다.

42

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 2$$

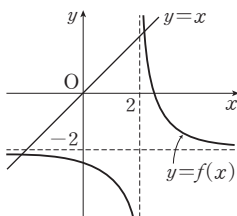
에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 함수 $y=f(x)$,

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 두 교점 P, Q는 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 두 점 P, Q는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점이다.



함수 $y = \frac{5-2x}{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를

(a, a) 라 하면

$$\frac{5-2a}{a-2} = a$$

$$5-2a = a^2-2a, a^2=5$$

$$\therefore a = -\sqrt{5} \text{ 또는 } a = \sqrt{5}$$

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 두 교점의 좌표는 $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ 이므로

$$PQ = \sqrt{\{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})\}^2 + \{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})\}^2} = 2\sqrt{10}$$

답 $2\sqrt{10}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.314-315

07 ㄱ, ㄴ	08 $k < 0$ 또는 $0 < k \leq 2$	09 ④
10 -2	11 ⑤	12 1
13 제1사분면	14 $\frac{3}{4}$	15 $-\frac{18}{5}$
16 2	17 $\frac{1}{2}$	18 6

07

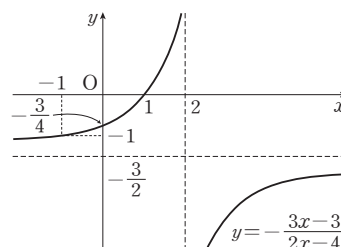
$$\begin{aligned}y &= -\frac{3x-3}{2x-4} = -\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+3}{2x-4} \\ &= -\frac{3}{2(x-2)} - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

즉, 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = -\frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것

이고, 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-\frac{3}{2}$ 이므로 그 그래프는

다음 그림과 같다.



ㄱ. 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = -\frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동
한 것이다. (참)

ㄴ. 주어진 함수의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄷ. $x = -1$ 일 때, $y = -\frac{3 \times (-1) - 3}{2 \times (-1) - 4} = -1$

즉, 정의역이 $\{x | x \geq -1, x \neq 2\}$ 이면 치역은

$\left\{y \mid y \geq -1 \text{ 또는 } y < -\frac{3}{2}\right\}$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

08

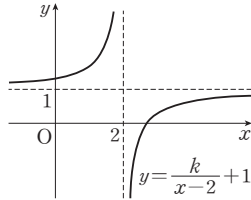
함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방
으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $k < 0$ 일 때,

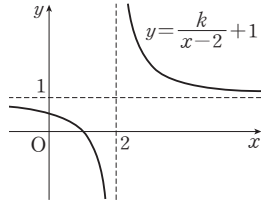
①의 그래프는 오른쪽 그림
과 같으므로 k 의 값에 관계
없이 항상 제3사분면을 지
나지 않는다.

$\therefore k < 0$



(ii) $k > 0$ 일 때,

①의 그래프가 제3사분면
을 지나지 않으려면 오른쪽
그림과 같이 $x=0$ 일 때,
 $y \geq 0$ 이어야 한다.



즉, $\frac{k}{-2} + 1 \geq 0$ 이므로 $k \leq 2$

$\therefore 0 < k \leq 2$

(i), (ii)에서 구하는 상수 k 의 값의 범위는

$k < 0$ 또는 $0 < k \leq 2$

답 $k < 0$ 또는 $0 < k \leq 2$

09

$$y = \frac{1}{2x-8} + 3 = \frac{1}{2(x-4)} + 3$$

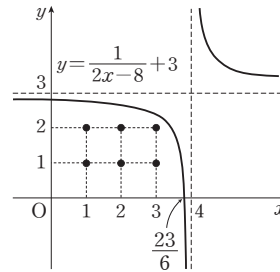
즉, 함수 $y = \frac{1}{2x-8} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{1}{2x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동
한 것이고, 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=3$ 이다.

또한, 함수 $y = \frac{1}{2x-8} + 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의
좌표는

$$\frac{1}{2x-8} + 3 = 0, 2x-8 = -\frac{1}{3} \quad \therefore x = \frac{23}{6} \quad -3 < \frac{23}{6} < 4$$

곡선 $y = \frac{1}{2x-8} + 3$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형은 다음
그림과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)$

의 6개이다.

답 ④

보충 설명

$f(x) = \frac{1}{2x-8} + 3$ 이라 하면

$$f(1) = \frac{1}{2 \times 1 - 8} + 3 = 3 - \frac{1}{6}, \quad -2 < 3 - \frac{1}{6} < 3 \text{이므로 } (1, 1), (1, 2)$$

$$f(2) = \frac{1}{2 \times 2 - 8} + 3 = 3 - \frac{1}{4}, \quad -2 < 3 - \frac{1}{4} < 3 \text{이므로 } (2, 1), (2, 2)$$

$$f(3) = \frac{1}{2 \times 3 - 8} + 3 = 3 - \frac{1}{2}, \quad -2 < 3 - \frac{1}{2} < 3 \text{이므로 } (3, 1), (3, 2)$$

따라서 조건을 만족시키는 점의 좌표는

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)$

의 6개이다.

10

$$f(x) = \frac{2x+k-6}{x-3} = \frac{2(x-3)+k}{x-3} = \frac{k}{x-3} + 2$$

즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=3$,
 $y=2$ 이다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것
이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식은
 $x=3+2, y=2-1$, 즉 $x=5, y=1$ 이고, 이 두 직선의 교점의 좌표는 $(5, 1)$ 이다.

점 $(5, 1)$ 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있으므로

$$1 = \frac{k}{5-3} + 2, \frac{k}{2} = -1 \quad \therefore k = -2$$

답 -2

11

$$f(x)=0, \text{ 즉 } \frac{4}{x-a}-4=0 \text{에서}$$

$$\frac{4}{x-a}=4, x-a=1$$

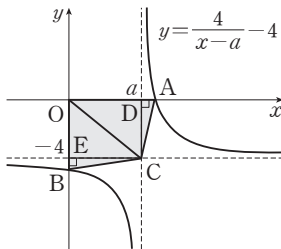
$$\therefore x=a+1 \quad \therefore A(a+1, 0)$$

$$\text{또한, } f(0)=\frac{4}{-a}-4 \text{이므로 } B\left(0, -\frac{4}{a}-4\right)$$

함수 $y=\frac{4}{x-a}-4$ ($a>1$)의 그래프의 두 점근선의 방정식

은 $x=a, y=-4$ 이므로 $C(a, -4)$

이때 다음 그림과 같이 점 C에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하면 $\square OBCA$ 의 넓이는 두 삼각형 OCA , OCB 의 넓이의 합과 같다.



$$\therefore \square OBCA = \triangle OCA + \triangle OCB$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{CD} + \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{CE}$$

$$= \frac{1}{2} \times (a+1) \times 4 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{a}+4\right) \times a$$

$$= 4a+4$$

$$\text{즉, } 4a+4=24 \text{에서 } 4a=20$$

$$\therefore a=5$$

답 ⑤

12

$$y = \frac{x-3}{2x-8} = \frac{\frac{1}{2}(2x-8)+1}{2x-8}$$

$$= \frac{1}{2x-8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2(x-4)} + \frac{1}{2}$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=4, y=\frac{1}{2}$$

이때 두 점근선의 교점 $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 이 두 직선 $y=x+a$,

$y=-x+b$ 의 교점이므로

$$\frac{1}{2} = 4+a \quad \therefore a = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2} = -4+b \quad \therefore b = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a+b = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 1$$

답 1

다른 풀이

함수 $y=\frac{x-3}{2x-8}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=4, y=\frac{1}{2}$$

즉, 함수 $y=\frac{x-3}{2x-8}$ 의 그래프가 두 직선 $y=\pm(x-4)+\frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

$$y=x-4+\frac{1}{2}=x-\frac{7}{2} \quad \therefore a=-\frac{7}{2}$$

$$y=-x+4+\frac{1}{2}=-x+\frac{9}{2} \quad \therefore b=\frac{9}{2}$$

$$\therefore a+b = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 1$$

13

$$f(x) = \frac{ax-b}{x-c} = \frac{a(x-c)-b+ac}{x-c} = \frac{ac-b}{x-c} + a$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=c, y=a$$

이때 주어진 그래프에서 $a<0, c>0$

또한, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 y 축은 x 축보다 위쪽에서 만나므로

$$f(0) = \frac{b}{c} > 0 \quad \therefore b > 0 (\because c > 0)$$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서

(i) $a < 0$ 이므로 그래프는 위로 볼록하다.

(ii) $a < 0, b > 0$ 이므로 축의 방정식은

$$x = -\frac{b}{2a} > 0$$

즉, 축은 y 축의 오른쪽에 위치한다.

(iii) $c > 0$ 이므로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 y 축

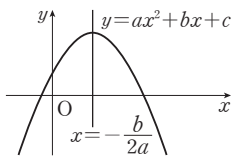
의 교점은 원점보다 위쪽에 위치한다.

(i), (ii), (iii)에서 이차함수

$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은

제1사분면 위에 존재한다.



답 제1사분면

14

$$y = \frac{ax+b}{x+3} = \frac{a(x+3)-3a+b}{x+3} = \frac{-3a+b}{x+3} + a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -3, y = a \quad \therefore a = -2$$

함수 $y = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프가 점 $(-4, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \frac{-4a+b}{-1}$$

$$\therefore -4a+b=1$$

위의 식에 $a = -2$ 를 대입하면 $-4 \times (-2) + b = 1$

$$8+b=1 \quad \therefore b=-7$$

$$\therefore y = \frac{-3a+b}{x+3} + a = \frac{-3 \times (-2) - 7}{x+3} - 2$$

$$= -\frac{1}{x+3} - 2$$

즉, 함수 $y = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동

한 것이므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에

서 주어진 함수의 그래프

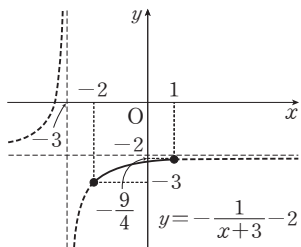
는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는

$x=1$ 일 때 최댓값 M ,

$x=-2$ 일 때 최솟값 m 을

찾는다.



$$M = -\frac{1}{1+3} - 2 = -\frac{9}{4},$$

$$m = -\frac{1}{-2+3} - 2 = -3$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \left(-\frac{9}{4}\right) \div (-3) = \frac{3}{4}$$

(다)

답 $\frac{3}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $y = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프의 점근선의 방정식을 구하여 a 의 값을 구한 경우	30%
(나)	함수 $y = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프가 지나는 점을 이용하여 b 의 값을 구한 경우	30%
(다)	$-2 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = \frac{ax+b}{x+3}$ 의 그래프를 그리고, 최댓값 M , 최솟값 m 을 각각 구한 후, $\frac{M}{m}$ 의 값을 구한 경우	40%

15

$f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$ 라 하면

$$f(x) = \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2(x+1)-4}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 2$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

또한, $g(x)=ax, h(x)=bx$ 라 하면 두 함수 $y=g(x),$

$y=h(x)$ 의 그래프는 모두 원점을 지나는 직선이다.

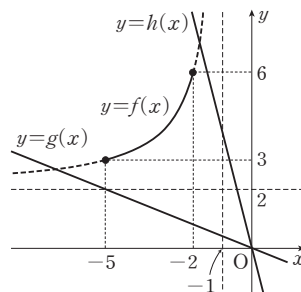
따라서 $-5 \leq x \leq -2$ 에서 부등식 $ax \leq \frac{2x-2}{x+1} \leq bx$ 가 항

상 성립하려면 이 범위에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 직선

$y=g(x), y=h(x)$ 사이에 존재해야 한다.

이때 $f(-5)=3, f(-2)=6$ 이므로 세 함수 $y=f(x),$

$y=g(x), y=h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=h(x)$, 즉 함수 $y=bx$ 의 그래프가 점 $(-2, 6)$ 을 지날 때, b 의 값이 최대이므로
 $-2b=6, b=-3$
 $\therefore M=-3$

(ii) 직선 $y=g(x)$, 즉 함수 $y=ax$ 의 그래프가 점 $(-5, 3)$ 을 지날 때, a 의 값이 최소이므로
 $-5a=3, a=-\frac{3}{5}$
 $\therefore m=-\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서

$$M+m=-3+\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{18}{5}$$

답 $-\frac{18}{5}$

16

$$y=\frac{-x+2}{x+1}=\frac{-(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}-1$$

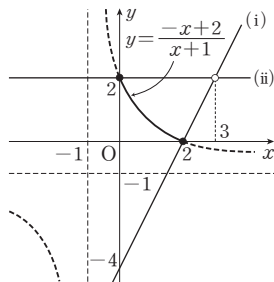
즉, 함수 $y=\frac{-x+2}{x+1}$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

한편, $\frac{y-2}{x-3}=k$ 라 하면

$$y-2=k(x-3) \quad \therefore y=k(x-3)+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, k 는 점 $(3, 2)$ 를 지나는 직선 $\textcircled{1}$ 의 기울기이다.

이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=\frac{-x+2}{x+1}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,
 기울기 k 는 최대이므로
 $0=-k+2 \quad \therefore k=2$
 $\therefore M=2$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지날 때,
 기울기 k 는 최소이므로
 $2=-3k+2, 3k=0 \quad \therefore k=0$
 $\therefore m=0$

(i), (ii)에서 $M+m=2+0=2$

답 2

17

$$f^2(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$$

$$=\frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

따라서 $f^{2k-1}(x)=f(x), f^{2k}(x)=x$ ($k=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$f^{375}(x)=f^{2 \times 188 - 1}(x)=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

이때 $g(-3)=a$ 라 하면 $f^{375}(a)=-3$ 이므로

$$\frac{a+1}{a-1}=-3, a+1=-3a+3$$

$$4a=2 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(-3)=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

$g=(f^{375})^{-1}=(f^{-1})^{375}$ 이므로 $g(-3)=(f^{-1})^{375}(-3)$ 이다.

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=-3 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-3, \text{ 즉 } f^{-1}(-3)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{2} \text{에서 } x=-3 \text{이므로}$$

$$f(-3)=\frac{1}{2}, \text{ 즉 } f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=-3$$

$$\therefore (f^{-1})^2(-3)=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=-3$$

따라서 자연수 n 에 대하여 $(f^{-1})^n(-3)$ 의 값은 $\frac{1}{2}$, -3 이
 이 순서대로 반복되고, $375=2 \times 187 + 1$ 이므로
 $g(-3) = (f^{375})^{-1}(-3) = (f^{-1})^{375}(-3)$

$$= f^{-1}(-3) = \frac{1}{2}$$

보충 설명

$$\begin{aligned} (f^{375})^{-1} &= \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)^{-1}}_{375\text{개}} \\ &= \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{375\text{개}} \\ &= (f^{-1})^{375} \end{aligned}$$

18

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프
 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$,
 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 그 접점은 직선 $y=x$ 위에
 있다.

즉, $f(a)=a$ 에서 $\frac{3a-9}{a+b}=a$

$$3a-9=a^2+ab$$

$$\therefore a^2+(b-3)a+9=0 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

이때 조건을 만족시키는 실수 a 가 단 한 개 존재하므로 a 에
 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D=(b-3)^2-4 \times 1 \times 9=0\text{에서}$$

$$(b-3)^2=36, b-3=\pm 6$$

$$\therefore b=9 \quad (\because b \neq -3)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a^2+6a+9=0, (a+3)^2=0$$

$$\therefore a=-3$$

$$\therefore a+b=-3+9=6$$

답 6

다른 풀이

함수 $f(x)=\frac{3x-9}{x+b}$ 의 역함수는

$$f^{-1}(x)=\frac{-bx-9}{x-3}$$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 인 점
 에서 접하므로 $f(a)=f^{-1}(a)$ 에서

$$\frac{3a-9}{a+b}=\frac{-ab-9}{a-3}$$

$$(3a-9)(a-3)=(a+b)(-ab-9)$$

$$3a^2-18a+27+a^2b+9a+ab^2+9b=0$$

이것을 a 에 대하여 정리하면

$$(b+3)a^2+(b^2-9)a+9b+27=0$$

$$(b+3)a^2+(b-3)(b+3)a+9(b+3)=0$$

$$\therefore a^2+(b-3)a+9=0 \quad (\because b \neq -3) \quad \dots\dots\text{㉡}$$

이때 조건을 만족시키는 실수 a 가 단 한 개 존재하므로 a 에
 대한 이차방정식 ㉡의 판별식을 D 라 하면

$$D=(b-3)^2-4 \times 1 \times 9=0\text{에서}$$

$$(b-3)^2=36, b-3=\pm 6$$

$$\therefore b=9 \quad (\because b \neq -3)$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$a^2+6a+9=0, (a+3)^2=0$$

$$\therefore a=-3$$

$$\therefore a+b=-3+9=6$$

STEP 2

개념 마무리

본문 p.316

1 $\frac{14}{31}$

2 ④

3 6

4 8

5 0

6 72

1

1학년의 남녀 학생 수를 각각 $5a$, $4a$ (a 는 자연수), 2학년의
 남녀 학생 수를 각각 $4b$, $3b$ (b 는 자연수), 3학년의 남녀 학
 생 수를 각각 $8c$, $7c$ (c 는 자연수)라 하면 전체 남녀 학생 수
 는 다음 표와 같다.

	남자	여자	합계
1학년	$5a$	$4a$	$9a$
2학년	$4b$	$3b$	$7b$
3학년	$8c$	$7c$	$15c$
전체 학생	$5a+4b+8c$	$4a+3b+7c$	$9a+7b+15c$

이때 이 학교의 전체 남학생과 여학생 수의 비가 $11:9$ 이므로

$$(5a+4b+8c):(4a+3b+7c)=11:9$$

$$9(5a+4b+8c)=11(4a+3b+7c)$$

$$45a+36b+72c=44a+33b+77c$$

$$\therefore a+3b=5c \quad \dots\dots\text{㉢}$$

한편, 1학년과 3학년 전체 학생 수의 비가 7 : 10이므로

$$9a : 15c = 7 : 10$$

$$10 \times 9a = 7 \times 15c, 90a = 105c$$

$$6a = 7c \quad \therefore \frac{a}{7} = \frac{c}{6}$$

$$\frac{a}{7} = \frac{c}{6} = k \ (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 7k, c = 6k \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ①에 대입하면

$$7k + 3b = 5 \times 6k, 3b = 23k$$

$$\therefore b = \frac{23}{3}k$$

따라서 전체 여학생 수에 대한 3학년 여학생 수의 비는

$$\begin{aligned} \frac{7c}{4a+3b+7c} &= \frac{7 \times 6k}{4 \times 7k + 3 \times \frac{23}{3}k + 7 \times 6k} \\ &= \frac{42k}{28k + 23k + 42k} = \frac{42k}{93k} = \frac{14}{31} \end{aligned}$$

답 $\frac{14}{31}$

2

조건 (가)에서 $\frac{k}{a+2} - \frac{k}{a} = -1$ 이므로

$$\frac{k}{a+2} - \frac{k}{a} = -2, \frac{-2k}{a(a+2)} = -2$$

$$\therefore k = a(a+2)$$

즉, $f(a) = \frac{k}{a} = a+2, f(a+2) = \frac{k}{a+2} = a$ 이므로

$$P(a, a+2), Q(a+2, a)$$

$$\therefore R(-a, -a-2), S(-a-2, -a) \ (\because \text{조건 (나)})$$

이때 직선 PS의 기울기는

$$\frac{a+2 - (-a)}{a - (-a-2)} = 1$$

이므로 $\overline{PQ} \perp \overline{PS}$ 가 되어 $\square PQRS$ 는 직사각형이다.

$$\therefore \square PQRS = \overline{PS} \times \overline{PQ}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(-a-2-a)^2 + \{-a-(a+2)\}^2} \\ &\quad \times \sqrt{(a+2-a)^2 + \{a-(a+2)\}^2} \\ &= \sqrt{(2a+2)^2 + (2a+2)^2} \times \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= (2a+2)\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \\ &= 8a+8 \end{aligned}$$

조건 (나)에서 $8a+8=8\sqrt{5}$

$$a+1=\sqrt{5} \quad \therefore a=\sqrt{5}-1$$

$$\therefore k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1) \times (\sqrt{5}+1)=4$$

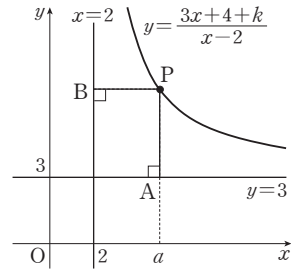
답 ④

3

$$y = \frac{3x+4+k}{x-2} = \frac{3(x-2)+10+k}{x-2} = \frac{k+10}{x-2} + 3$$

즉, 함수 $y = \frac{3x+4+k}{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{k+10}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $x=2, y=3$ 이다.

다음 그림과 같이 함수 $y = \frac{3x+4+k}{x-2} \ (x>2)$ 의 그래프 위의 점 P에서 점근선 $y=3$ 에 내린 수선의 발을 A, 점근선 $x=2$ 에 내린 수선의 발을 B라 하자.



점 P의 x 좌표를 $a \ (a>2)$ 라 하면

$$P\left(a, \frac{k+10}{a-2} + 3\right), A(a, 3), B\left(2, \frac{k+10}{a-2} + 3\right)$$

즉, $\overline{PA} = \left(\frac{k+10}{a-2} + 3\right) - 3 = \frac{k+10}{a-2}, \overline{PB} = a-2$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \frac{k+10}{a-2} + a-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a>2, k>0$ 이므로 $\frac{k+10}{a-2} > 0, a-2 > 0$

①에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PB} &= \frac{k+10}{a-2} + a-2 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{k+10}{a-2} \times (a-2)} \\ &= 2\sqrt{k+10} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\frac{k+10}{a-2} = a-2$ 일 때 성립)

그런데 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값이 8이어야 하므로
 $2\sqrt{k+10}=8, \sqrt{k+10}=4$
 $k+10=16 \quad \therefore k=6$

답 6

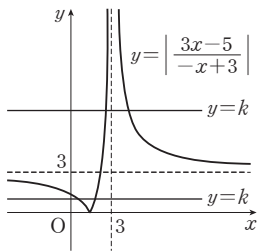
4

$$y = \frac{3x-5}{-x+3} = \frac{-3(-x+3)+4}{-x+3}$$

$$= \frac{4}{-x+3} - 3 = -\frac{4}{x-3} - 3$$

이므로 함수 $y = \frac{3x-5}{-x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = -\frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=0$ 의 교점의

개수는 1이므로

$$N(0)=1$$

(ii) 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의

개수는 2이므로

$$N(1)=2$$

(iii) 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점의

개수는 2이므로

$$N(2)=2$$

(iv) 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=3$ 의 교점의

개수는 1이므로

$$N(3)=1$$

(v) 함수 $y = \left| \frac{3x-5}{-x+3} \right|$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 의 교점의

개수는 2이므로

$$N(4)=2$$

(i)~(v)에서

$$N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+N(4)$$

$$=1+2+2+1+2=8$$

답 8

보충 설명

$$N(k) = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k=0 \text{ 또는 } k=3) \\ 2 & (0 < k < 3 \text{ 또는 } k > 3) \end{cases}$$

5

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식이

$x=-1, y=1$ 이므로

$$f(x) = \frac{k}{x+1} + 1 \quad (k < 0)$$

라 하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로 $\leftarrow$ 점 $(0, -3)$ 을 대입해도 k 의 값을 구할 수 있다.

$$0 = \frac{k}{4} + 1 \quad \therefore k = -4$$

$$\therefore f(x) = -\frac{4}{x+1} + 1 = \frac{x-3}{x+1} = f^1(x) \text{이므로}$$

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = \frac{\frac{-2x-6}{x+1}}{\frac{2x-2}{x+1}} = \frac{-x-3}{x-1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{-x-3}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{-x-3}{x-1} - 3}{\frac{-x-3}{x-1} + 1} = \frac{\frac{-4x}{x-1}}{\frac{-4}{x-1}} = x$$

따라서 $f^{3k-2}(x) = f(x), f^{3k-1}(x) = f^2(x), f^{3k}(x) = x$

$(k=1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$f^{1000}(x) = f^{3 \times 334 - 2}(x) = f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

$$f^{1001}(x) = f^{3 \times 334 - 1}(x) = f^2(x) = \frac{-x-3}{x-1}$$

$$\therefore f^{1000}(0) + f^{1001}(0) = -3 + 3 = 0$$

답 0

다른 풀이

유리함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 두 점근선의 방정식이

$$x=-1, y=1 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=\frac{k}{x+1}+1 \quad (k<0)$$

라 하자.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{k}{4}+1 \quad \therefore k=-4$$

$$\text{즉, } f(x)=-\frac{4}{x+1}+1=\frac{x-3}{x+1} \text{에서}$$

$$f^1(0)=-3$$

$$f^2(0)=f(f^1(0))=f(-3)=3$$

$$f^3(0)=f(f^2(0))=f(3)=0$$

$$f^4(0)=f(f^3(0))=f(0)=-3$$

⋮

따라서 자연수 n 에 대하여 $f^n(0)$ 의 값은 $-3, 3, 0$ 이 이 순

서대로 반복되므로

$$f^{1000}(0)=f^{3 \times 333+1}(0)=f^1(0)=-3$$

$$f^{1001}(0)=f^{3 \times 333+2}(0)=f^2(0)=3$$

$$\therefore f^{1000}(0)+f^{1001}(0)=-3+3=0$$

6

함수 $y=\frac{x-2a}{x+2}$ 에서 $y=0$ 일 때 $x=2a$, $x=0$ 일 때 $y=-a$

이므로

$$A(2a, 0), B(0, -a)$$

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(-a, 0), D(0, 2a)$$

이때 $a>0$ 이고 $\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{(-a)^2+a^2}=a\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\therefore a=4$$

따라서 $A(8, 0), B(0, -4),$

$C(-4, 0), D(0, 8)$ 이므로

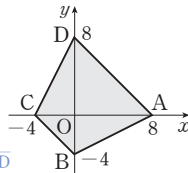
사각형 ABCD의 넓이는

$$\triangle ACD + \triangle ABC \quad \overline{AC} \perp \overline{BD} \text{이므로}$$

$$\square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \quad \square ABCD = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 + \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

$$= 48 + 24 = 72$$



답 72

10. 무리식과 무리함수

1 무리식

기본 + 필수연습

본문 pp.320-322

01 (1) $x \geq 8$ (2) $x \geq 8$ (3) $x > -\frac{5}{6}$ (4) $-9 \leq x < \frac{1}{2}$

02 (1) -4 (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

03 (1) $-2a-b+2c$ (2) $-2x-1$

04 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 05 -14 06 $-2\sqrt{3}$ 07 9

01

(1) $x-8 \geq 0$ 이므로 $x \geq 8$

(2) $3x-1 \geq 0, \frac{1}{2}x-4 \geq 0$ 이므로

$$x \geq \frac{1}{3}, x \geq 8 \quad \therefore x \geq 8$$

(3) $6x+5 > 0$ 이므로 $x > -\frac{5}{6}$

(4) $x+9 \geq 0, 3-6x > 0$ 이므로

$$x \geq -9, x < \frac{1}{2} \quad \therefore -9 \leq x < \frac{1}{2}$$

답 (1) $x \geq 8$ (2) $x \geq 8$

(3) $x > -\frac{5}{6}$ (4) $-9 \leq x < \frac{1}{2}$

02

(1) $(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2})$

$$=(\sqrt{x-2})^2-(\sqrt{x+2})^2$$

$$=(x-2)-(x+2)=-4$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$

$$+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$$

$$=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$$

$$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

답 (1) -4 (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

03

(1) $a-c < 0, c-b > 0, a < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(c-b)^2} + \sqrt{a^2} &= |a-c| + |c-b| + |a| \\ &= -(a-c) + (c-b) - a \\ &= -2a - b + 2c\end{aligned}$$

(2) $1-x \geq 0, x+2 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x+2)^2} &= |1-x| - |x+2| \\ &= (1-x) - (x+2) \\ &= -2x - 1\end{aligned}$$

답 (1) $-2a-b+2c$ (2) $-2x-1$

04

$x = \sqrt{6}$ 일 때, $x+2 > 0, x-2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} &= \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})} \\ &= \frac{(x+2) + 2\sqrt{x^2-4} + (x-2)}{(x+2) - (x-2)} \\ &= \frac{2x + 2\sqrt{x^2-4}}{4} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}\end{aligned}$$

위의 식에 $x = \sqrt{6}$ 을 대입하면

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

05

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1} = 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$x = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} &= \frac{(\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{x+4\sqrt{x}+4+x-4\sqrt{x}+4}{x-4} \\ &= \frac{2x+8}{x-4}\end{aligned}$$

위의 식에 $x = 2 - \sqrt{3}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{2(2-\sqrt{3})+8}{(2-\sqrt{3})-4} &= \frac{12-2\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(12-2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= -30+16\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $a = -30, b = 16$ 이므로

$$a+b = -30+16 = -14$$

답 -14

06

$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 일 때, $x > 0, y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{x+2\sqrt{xy}+y+x-2\sqrt{xy}+y}{x-y} \\ &= \frac{2x+2y}{x-y} = \frac{2(x+y)}{x-y} \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

이때

$$x+y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{3},$$

$$x-y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} = -1$$

이므로 ㉠에서 구하는 값은

$$\frac{2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}$

07

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}&f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(99) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9\end{aligned}$$

답 9

STEP 1 개념 마무리

본문 p.323

- 01 7 02 ④ 03 $2n$ 04 5
05 $2\sqrt{5}-2$ 06 $3-2\sqrt{3}$ 07 0

01

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{ax^2+2ax+6}$ 의 값이 실수가 되려면 $ax^2+2ax+6 \geq 0$ 이어야 한다.

(i) $a=0$ 일 때,

$6 \geq 0$ 이므로 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

$a > 0$ 이고, 이차방정식 $ax^2+2ax+6=0$ 의 판별식을

D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로 $\leftarrow$ 이차부등식 $ax^2+2ax+6 \geq 0$ 이
항상 성립하려면 $a > 0, D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a \leq 0, a(a-6) \leq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 6 \quad (\because a > 0)$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a \leq 6$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.

답 7

02

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+\sqrt{ab}} + \frac{1}{b+\sqrt{ab}} &= \frac{b+\sqrt{ab}+a+\sqrt{ab}}{(a+\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})} \\ &= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab+(a+b)\sqrt{ab}+ab} \\ &= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}(a+b+2\sqrt{ab})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+\sqrt{ab}} + \frac{1}{b+\sqrt{ab}} &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

03

자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+2n} < \sqrt{n^2+2n+1} \text{이므로}$$

$$n < \sqrt{n^2+2n} < n+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{즉, } f(\sqrt{n^2+2n}) = n \text{이므로}$$

$$g(\sqrt{n^2+2n}) = \sqrt{n^2+2n} - n$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2n}{g(\sqrt{n^2+2n})} &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} - n} \\ &= \frac{2n(\sqrt{n^2+2n} + n)}{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)} \\ &= \frac{2n(\sqrt{n^2+2n} + n)}{(n^2+2n) - n^2} \\ &= \sqrt{n^2+2n} + n \end{aligned}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $2n < \sqrt{n^2+2n} + n < 2n+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2n}{g(\sqrt{n^2+2n})}\right) &= f(\sqrt{n^2+2n} + n) \\ &= 2n \end{aligned}$$

답 $2n$

04

$$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \text{에서 } x+3 \geq 0, x-1 < 0 \text{이므로}$$

$$x \geq -3, x < 1 \quad \therefore -3 \leq x < 1$$

따라서 $x+3 \geq 0, x-2 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} &= |x+3| + |x-2| \\ &= (x+3) - (x-2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 5

05

$a=2-\sqrt{2}, b=1-\sqrt{5}$ 일 때,

$$a+b = (2-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{5}) = 3-\sqrt{2}-\sqrt{5} < 0,$$

$$a-b = (2-\sqrt{2}) - (1-\sqrt{5}) = 1-\sqrt{2}+\sqrt{5} > 0 \quad \leftarrow \sqrt{2} > 1, \sqrt{5} > 2$$

이므로

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a-b)^2} &= |a+b| + |a-b| \\
&= -(a+b) + (a-b) \\
&= -2b \\
&= -2(1-\sqrt{5}) \\
&= 2\sqrt{5}-2
\end{aligned}$$

답 $2\sqrt{5}-2$

06

$$a=2+\sqrt{3} \text{에서 } a-2=\sqrt{3}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2-4a+4=3 \quad \therefore a^2-4a+1=0$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{6}{a^3-4a^2-3a+2} &= \frac{6}{a(a^2-4a+1)-4a+2} \\
&= \frac{6}{-4a+2} = \frac{3}{-2a+1} \\
&= \frac{3}{-2(2+\sqrt{3})+1} = \frac{3}{-3-2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3(3-2\sqrt{3})}{-(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})} \\
&= 3-2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

답 $3-2\sqrt{3}$

07

$$\sqrt{a} = \frac{1-x}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$a = \frac{(1-x)^2}{4} = \frac{x^2-2x+1}{4} \text{이므로}$$

$$a+x = \frac{x^2+2x+1}{4} = \frac{(x+1)^2}{4} \geq 0,$$

$$a-x+2 = \frac{x^2-6x+9}{4} = \frac{(x-3)^2}{4} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x+2} &= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(x-3)^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2}(|x+1| - |x-3|) \\
&= \frac{1}{2}\{x+1+(x-3)\} \quad (\because -1 \leq x \leq 1) \\
&= \frac{1}{2}(2x-2) = x-1
\end{aligned}$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-2 \leq x-1 \leq 0$ 이므로 주어진 식의 최댓값은 0이다.

답 0

2 무리함수

기본 + 필수연습

본문 pp.328-335

08 풀이 참조

09 5

10 $\neg, \wedge, \vee$ 11 $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3} \quad (x \geq 1)$

12 -5

13 5

14 10

15 2

16 풀이 참조 17 (1) -1 (2) 5

18 $\frac{86}{5}$

19 (1) $-\frac{1}{8} < k \leq 0$ (2) $k = -\frac{1}{8}$ 또는 $k > 0$

(3) $k < -\frac{1}{8}$

20 1

21 130

22 $\sqrt{2}$

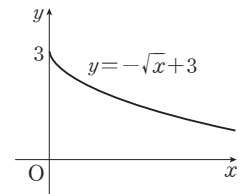
23 5

24 (1) 21 (2) 23

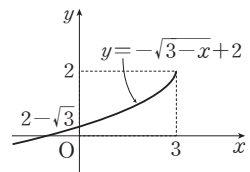
25 4

08

(1) 함수 $y = -\sqrt{x} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프인 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$, 치역은 $\{y | y \leq 3\}$ 이다.



(2) $y = -\sqrt{3-x} + 2 = -\sqrt{-(x-3)} + 2$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프인 함수 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 정의역은 $\{x | x \leq 3\}$, 치역은 $\{y | y \leq 2\}$ 이다.



답 풀이 참조

09

무리함수 $y=a\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동하면

$$y=a\sqrt{x-2}-4$$

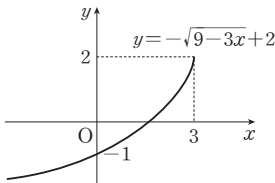
이때 이 함수의 그래프가 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1=a\sqrt{1}-4 \quad \therefore a=5$$

답 5

10

$y=-\sqrt{9-3x}+2=-\sqrt{3(x-3)}+2$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\sqrt{9-3x} \geq 0$ 에서 $-\sqrt{9-3x}+2 \leq 2$ 이므로 치역은

$\{y|y \leq 2\}$ 이다. (참)

ㄴ. $x=0$ 을 $y=-\sqrt{9-3x}+2$ 에 대입하면

$$y=-\sqrt{9}+2=-3+2=-1$$

즉, y 축과의 교점의 y 좌표는 -1 이다. (참)

ㄷ. 그래프는 함수 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄹ. 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

11

함수 $y=\sqrt{2-3x}+1$ 의 치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이다.

$y=\sqrt{2-3x}+1$ 을 x 에 대하여 풀면

$$y-1=\sqrt{2-3x}$$

$$(y-1)^2=2-3x, 3x=2-(y-1)^2$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3}(y-1)^2+\frac{2}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3} \quad (x \geq 1)$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3} \quad (x \geq 1)$$

12

함수 $y=\sqrt{2x+7}-4$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y=\sqrt{-2x+7}-4 \quad \therefore y=-\sqrt{-2x+7}+4$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y=-\sqrt{-2(x-m)+7}+4+n$$

$$\therefore y=-\sqrt{-2x+2m+7}+4+n$$

이 함수의 그래프가 $y=-\sqrt{-2x+3}+1$ 의 그래프와 일치하므로

$$2m+7=3, 4+n=1 \quad \therefore m=-2, n=-3$$

$$\therefore m+n=-2+(-3)=-5$$

답 -5

13

함수 $y=\sqrt{6-3x}-1$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y=\sqrt{6+3x}-1$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y=\sqrt{3(x-a)+6}-1+b$$

$$=\sqrt{3(x-a+2)}+b-1$$

이 함수의 정의역은 $\{x|x \geq a-2\}$ 이고, 치역은

$\{y|y \geq b-1\}$ 이므로

$$a-2=1, b-1=1 \quad \therefore a=3, b=2$$

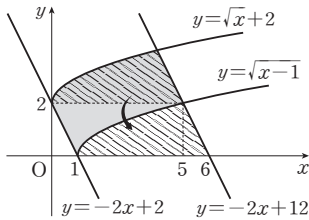
$$\therefore a+b=3+2=5$$

답 5

14

함수 $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

두 함수 $y=\sqrt{x-1}$, $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프와 두 직선 $y=-2x+2$, $y=-2x+12$ 를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 빗금친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 밑변의 길이, 높이가 각각 5, 2인 평행사변형의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는 $5 \times 2 = 10$

답 10

15

주어진 함수의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식은

$$y = \sqrt{a(x-1)} - 2$$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \sqrt{-a} - 2, \sqrt{-a} = 2$$

$$-a = 4 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = \sqrt{-4(x-1)} - 2$ 이므로

$$f(-3) = \sqrt{16} - 2 = 2$$

답 2

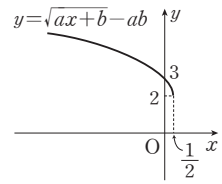
16

함수 $y = -\frac{4}{x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$ 이므로

$$a = -2, b = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \sqrt{ax+b} - ab = \sqrt{-2x+1} + 2 \\ &= \sqrt{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)} + 2 \end{aligned}$$

따라서 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} - ab$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

17

(1) 함수 $y = -\sqrt{3+x} + a$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

즉, $-2 \leq x \leq 6$ 에서

주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과

같다. 주어진 함수는

$x = -2$ 일 때, 최댓값 1을 가지므로

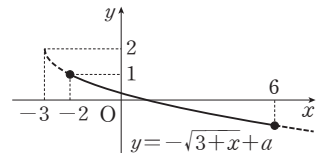
$$1 = -\sqrt{3+(-2)} + a, 1 = -1 + a \quad \therefore a = 2$$

$$1 = -\sqrt{3+(-2)} + a, 1 = -1 + a \quad \therefore a = 2$$

따라서 주어진 함수는 $y = -\sqrt{3+x} + 2$ 이고, 이 함수는

$x = 6$ 일 때, 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$$-\sqrt{3+6} + 2 = -\sqrt{9} + 2 = -1$$



(2) 함수 $y = -\sqrt{-2x+a} + 7 = -\sqrt{-2\left(x - \frac{a}{2}\right)} + 7$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로

7만큼 평행이동한 것이다.

이때 $x = -1$ 에서 최댓값

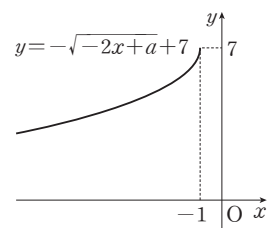
을 가지므로 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $x = \frac{a}{2} = -1$ 에서 최댓값 7을 가지

므로

$$a = -2, M = 7$$

$$\therefore a + M = -2 + 7 = 5$$

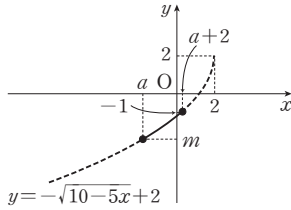


답 (1) -1 (2) 5

18

함수 $y = -\sqrt{10-5x}+2 = -\sqrt{-5(x-2)}+2$ 의 그래프는
함수 $y = -\sqrt{-5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의
방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같
으므로 $a \leq x \leq a+2$ 에서 $x=a+2$ 일 때 최댓값 -1 을 갖
고, $x=a$ 일 때 최솟값 m 을 갖는다.



즉, $-1 = -\sqrt{10-5(a+2)}+2$ 에서
 $\sqrt{-5a}=3$ 의 양변을 제곱하면

$$-5a=9 \quad \therefore a=-\frac{9}{5}$$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x \mid -\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}\right\}$ 이고,

$x=-\frac{9}{5}$ 일 때, 최솟값 m 을 가지므로

$$m = -\sqrt{10-5 \times \left(-\frac{9}{5}\right)}+2 = -\sqrt{19}+2$$

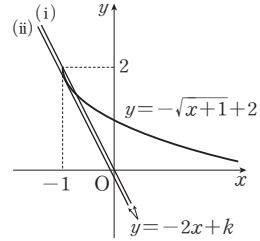
$$\begin{aligned} \therefore a+(m-2)^2 &= -\frac{9}{5} + (-\sqrt{19}+2-2)^2 \\ &= -\frac{9}{5} + 19 = \frac{86}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{86}{5}$

19

함수 $y = -\sqrt{x+1}+2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프
를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동
한 것이고, 직선 $y = -2x+k$ 는 기울기가 -2 이고 y 절편이 k
이다.

이때 함수 $y = -\sqrt{x+1}+2$ 의 그래프와 직선 $y = -2x+k$ 의
위치 관계는 다음 그림의 두 직선 (i), (ii)를 기준으로 경우를
나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y = -2x+k$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지날 때,

$$2 = 2 + k \quad \therefore k = 0$$

(ii) 직선 $y = -2x+k$ 가 함수 $y = -\sqrt{x+1}+2$ 의 그래프에
접할 때,

$$-2x+k = -\sqrt{x+1}+2$$

$$2x-k+2 = \sqrt{x+1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $(2x-k+2)^2 = x+1$

$$4x^2 + (8-4k)x + k^2 - 4k + 4 = x + 1$$

$$\therefore 4x^2 + (7-4k)x + k^2 - 4k + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (7-4k)^2 - 4 \times 4 \times (k^2 - 4k + 3) = 0$$

$$8k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{8}$$

(1) 직선 $y = -2x+k$ 가 직선 (i)과 일치하거나 두 직선 (i)과

(ii) 사이에 있어야 하므로

$$-\frac{1}{8} < k \leq 0$$

(2) 직선 $y = -2x+k$ 가 직선 (i)보다 위쪽에 있거나 직선

(ii)와 일치해야 하므로

$$k = -\frac{1}{8} \text{ 또는 } k > 0$$

(3) 직선 $y = -2x+k$ 가 직선 (ii)보다 아래쪽에 있어야 하
므로

$$k < -\frac{1}{8}$$

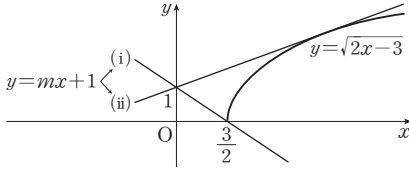
$$\text{답 (1) } -\frac{1}{8} < k \leq 0$$

$$(2) k = -\frac{1}{8} \text{ 또는 } k > 0$$

$$(3) k < -\frac{1}{8}$$

20

함수 $y = \sqrt{2x-3} = \sqrt{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = mx + 1$ 은 기울기가 m 이고 y 절편이 1이다.
이때 함수 $y = \sqrt{2x-3}$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 1$ 의 위치 관계는 다음 그림의 두 직선 (i), (ii)를 기준으로 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y = mx + 1$ 이 점 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지날 때,

$$0 = \frac{3}{2}m + 1 \quad \therefore m = -\frac{2}{3}$$

(ii) 직선 $y = mx + 1$ 이 함수 $y = \sqrt{2x-3}$ 의 그래프에 접할 때,

그림에서 직선의 기울기가 양수이므로 $m > 0$

$mx + 1 = \sqrt{2x-3}$ 의 양변을 제곱하면

$$(mx + 1)^2 = 2x - 3$$

$$m^2x^2 + 2mx + 1 = 2x - 3$$

$$\therefore m^2x^2 + 2(m-1)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - 4m^2 = 0$$

$$3m^2 + 2m - 1 = 0, (3m-1)(m+1) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{3} \quad (\because m > 0)$$

두 함수의 그래프가 만나려면 직선 $y = mx + 1$ 은 직선 (i) 또는 직선 (ii)와 일치하거나 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$$-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$$

따라서 실수 m 의 최댓값은 $a = \frac{1}{3}$, 최솟값은 $b = -\frac{2}{3}$ 이므로
 $a - b = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$

답 1

21

$f(x) = \sqrt{a(x-2)} + b$ 에서

$f(5) = 10, f(10) = 5$ ($\because f^{-1}(5) = 10$)이므로

$$\sqrt{3a+b} = 10, \sqrt{8a+b} = 5$$

위의 식의 양변을 각각 제곱하면

$$3a+b=100, 8a+b=25$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = -15, b = 145$$

$$\therefore a+b = -15+145 = 130$$

답 130

22

함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$

의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$

의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과

같이 직선 $y = x$ 위에 존재하므로

두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의

그래프의 교점은 함수 $y = f(x)$ 의

그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$\sqrt{x-1} + 1 = x$ 에서 $\sqrt{x-1} = x-1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x-1 = (x-1)^2, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 교점 P, Q의 좌표는 (1, 1), (2, 2)이므로

$$PQ = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

23

함수 $f(x) = 3\sqrt{2x+4} + k$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$

의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른

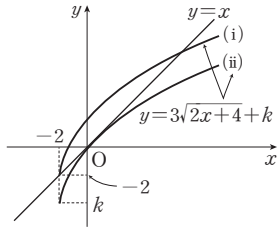
두 점에서 만나려면 다음 그림과 같이 무리함수 $y = f(x)$ 의

그래프가 직선 $y = x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉,

함수 $y = 3\sqrt{2x+4} + k$ 의 그래프가 곡선 (i)과 일치하거나 두

곡선 (i)과 (ii) 사이에 존재해야 한다.

두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



(i) 함수 $y=3\sqrt{2x+4}+k$ 의 그래프가 점 $(-2, -2)$ 를 지날 때,

$$-2=3\sqrt{2 \times (-2)+4}+k \quad \therefore k=-2$$

(ii) 함수 $y=3\sqrt{2x+4}+k$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 접할 때,

$$3\sqrt{2x+4}+k=x \text{에서 } 3\sqrt{2x+4}=x-k$$

$$\text{위의 식의 양변을 제곱하면 } 9(2x+4)=(x-k)^2$$

$$\therefore x^2-2(k+9)x+k^2-36=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+9)\}^2-(k^2-36)=0$$

$$18k+117=0 \quad \therefore k=-\frac{13}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{13}{2} < k \leq -2$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4, -3, -2$ 의 5개이다.

답 5

24

(1) 정의역이 $\{x|x>0\}$ 인 함수 $f(x)=\sqrt{3x+1}$ 은 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

이때 $(f \circ g)(x)=x$ 를 만족시키는 함수 g 는 함수 f 의 역함수이다.

$$(g \circ g)(5)=g(g(5)) \text{에서}$$

$$g(5)=a \text{라 하면 } f(a)=5$$

$$\text{즉, } \sqrt{3a+1}=5 \text{에서 } 3a+1=25 \quad \therefore a=8$$

$$\therefore g(5)=8$$

$$g(8)=b \text{라 하면 } f(b)=8$$

$$\text{즉, } \sqrt{3b+1}=8 \text{에서 } 3b+1=64 \quad \therefore b=21$$

$$\therefore g(8)=21$$

$$\therefore (g \circ g)(5)=g(g(5))=g(8)=21$$

$$(2) (f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=(g^{-1} \circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$$

$$f(3)=\frac{2 \times 3+1}{3-2}=7 \text{이므로}$$

$$g^{-1}(f(3))=g^{-1}(7)$$

$$\text{이때 } g^{-1}(7)=a \text{라 하면 } g(a)=7$$

$$\text{즉, } \sqrt{2a+3}=7 \text{에서 } 2a+3=49 \quad \therefore a=23$$

$$\therefore g^{-1}(7)=23$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(f(3))=g^{-1}(7)=23$$

답 (1) 21 (2) 23

25

$$\text{함수 } f(x)=\begin{cases} \sqrt{-2x} & (x < -\frac{1}{2}) \\ 1-\sqrt{2x+1} & (x \geq -\frac{1}{2}) \end{cases} \text{에 대하여}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=40 \text{에서 } (f \circ f)^{-1}(a)=40$$

$$\therefore (f \circ f)(40)=a$$

$$f(40)=1-\sqrt{2 \times 40+1}=1-9=-8,$$

$$f(-8)=\sqrt{-2 \times (-8)}=4$$

$$\text{이므로 } (f \circ f)(40)=f(-8)=4$$

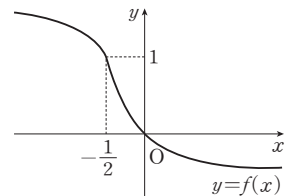
$$\therefore a=4$$

답 4

보충 설명

$$\text{함수 } f(x)=\begin{cases} \sqrt{-2x} & (x < -\frac{1}{2}) \\ 1-\sqrt{2x+1} & (x \geq -\frac{1}{2}) \end{cases} \text{의 그래프는}$$

다음 그림과 같고 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.



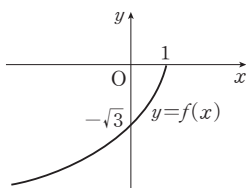
함수 $f(x)$ 는 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $f \circ f$ 도 일대일대응이다.

즉, 함수 $f \circ f$ 도 역함수가 존재한다.

08 ③	09 -24	10 $-2 \leq k \leq 2$	
11 0	12 풀이 참조	13 17	14 16
15 3	16 3	17 4	18 $\frac{1}{8}$
19 5			

08

$f(x) = -\sqrt{3-3x} = -\sqrt{-3(x-1)}$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



- ㄱ. $3-3x \geq 0$ 에서 $x \leq 1$ 이므로 정의역은 $\{x | x \leq 1\}$ 이고,
 $\sqrt{3-3x} \geq 0$ 에서 $-\sqrt{3-3x} \leq 0$ 이므로 치역은 $\{y | y \leq 0\}$ 이다. (참)
 ㄴ. 그래프는 함수 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

- ㄷ. 함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ ($x \leq 0$)의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면

$$x = -\frac{1}{3}y^2 \quad (x \leq 0, y \leq 0) \quad \therefore y^2 = -3x$$

이때 $y = \pm\sqrt{-3x}$ 이고 $y \leq 0$ 이므로

$$y = -\sqrt{-3x}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y = -\sqrt{-3(x-1)} = -\sqrt{3-3x} \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

09

무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
 $y = \sqrt{a(x-3)+b}+c-1$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = \sqrt{a(x-3)+b}+c-1$$

$$\therefore y = -\sqrt{ax-3a+b}-c+1$$

이 함수의 그래프가 $y = -\sqrt{-3x+7}+5$ 의 그래프와 일치하므로

$$a = -3, -3a+b=7, -c+1=5$$

따라서 $a = -3, b = -2, c = -4$ 이므로

$$abc = (-3) \times (-2) \times (-4) = -24$$

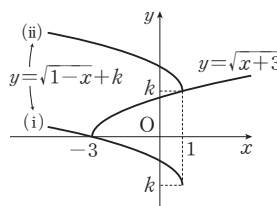
답 -24

10

함수 $y = \sqrt{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고,

함수 $y = \sqrt{1-x}+k = \sqrt{-(x-1)}+k$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이므로

두 함수 $y = \sqrt{x+3}$, $y = \sqrt{1-x}+k$ 의 그래프가 만나려면 다음 그림과 같이 함수 $y = \sqrt{1-x}+k$ 의 그래프가 곡선 (i) 또는 곡선 (ii)와 일치하거나 두 곡선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



- (i) 함수 $y = \sqrt{1-x}+k$ 의 그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = \sqrt{1-(-3)}+k$$

$$0 = 2+k$$

$$\therefore k = -2$$

- (ii) 점 $(1, k)$ 가 함수 $y = \sqrt{x+3}$ 의 그래프 위의 점일 때,

$$k = \sqrt{1+3} = 2$$

- (i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k \leq 2$$

답 $-2 \leq k \leq 2$

11

함수 $y=\sqrt{2-x}+3=\sqrt{-(x-2)}+3$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또한, 이차함수 $y=-(x-a)^2+7$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(a, 7)$ 인 포물선이다.

함수 $y=f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 $x=2$ 에서의 함수값이 서로 같아야 하므로 이차함수 $y=-(x-a)^2+7$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나야 한다.

즉, $3=-(2-a)^2+7$ 에서

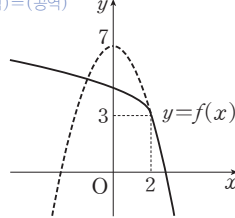
$$(2-a)^2=4, a^2-4a=0$$

$$a(a-4)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=4$$

(i) $a=0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

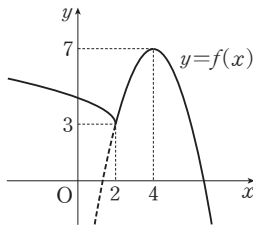
- (i) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
(ii) (치역)=(공역)



(ii) $a=4$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 일대일대응이 아니다.

$x_1 \neq x_2$ 인데 $f(x_1)=f(x_2)$ 인 두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 상수 a 의 값은 0이다.

답 0

12

$$y=\frac{-bx+c}{x+a}=\frac{-b(x+a)+c+ab}{x+a}=\frac{c+ab}{x+a}-b$$

즉, 함수 $y=\frac{-bx+c}{x+a}$ 의

그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-a, y=-b \text{ 이므로}$$

$$-a>0, -b>0$$

$$\therefore a<0, b<0$$

또한, 함수 $y=\frac{-bx+c}{x+a}$ 의 그래프의 y 절편이 음수이므로

$$\frac{c}{a}<0 \quad \therefore c>0 (\because a<0)$$

$$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

에서 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는

함수 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축

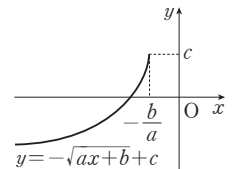
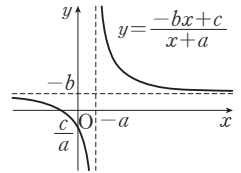
의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0, -\frac{b}{a}<0, c>0$ 이므로

로 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$

의 그래프의 개형은 오른쪽 그림

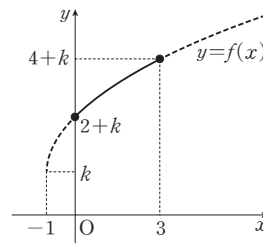
과 같다.



답 풀이 참조

13

$f(x)=2\sqrt{x+1}+k$ 라 하면 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $f(x)$ 는

$x=3$ 에서 최댓값 $M=f(3)=4+k$ 를 갖고,

$x=0$ 에서 최솟값 $m=f(0)=2+k$ 를 갖는다.

$M+m=40$ 에서

$$(4+k)+(2+k)=40, 2k=34$$

$$\therefore k=17$$

답 17

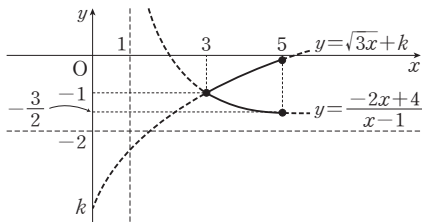
14

$$y = \frac{-2x+4}{x-1} = \frac{-2(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 2$$

즉, 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1, y=-2$ 이고, $3 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 의

그래프는 다음 그림과 같다.



$3 \leq x \leq 5$ 에서 두 함수 $y = \frac{-2x+4}{x-1}$ 와 $y = \sqrt{3x+k}$ 의 그래

프가 한 점에서 만나면서 k 의 값이 최대하려면 위의 그림과 같이 함수 $y = \sqrt{3x+k}$ 의 그래프가 점 $(3, -1)$ 을 지나야 한다.

즉, $-1 = \sqrt{3 \times 3 + k}$ 에서 $-1 = 3 + k$

$$\therefore k = -4$$

따라서 $M = -4$ 이므로 $M^2 = 16$ 이다.

답 16

15

무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표가 2이므로 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 점 $(2, 2)$ 를 지난다.

즉, $\sqrt{2a} = 2$ 에서 $2a = 4$ $\therefore a = 2$

함수 $y = \sqrt{ax+b}$, 즉 $y = \sqrt{2x+b}$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 접하므로

$\sqrt{2x+b} = x$ 의 양변을 제곱하면

$$2x+b = x^2, x^2 - 2x - b = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times (-b) = 0, 1+b=0 \quad \therefore b = -1$$

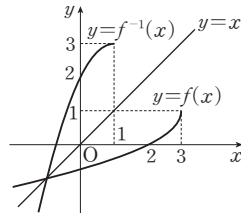
$$\therefore a-b = 2 - (-1) = 3$$

답 3

16

무리함수 $f(x) = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프와 그 역함수

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$f(x) = -\sqrt{a(x-3)}+1 \quad (a < 0) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

무리함수의 그래프의 시작점의 좌표가 $(3, 1)$ 이다.

이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\sqrt{-a}+1, \sqrt{-a} = 1 \quad \therefore a = -1$$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$f(x) = -\sqrt{-(x-3)}+1 = -\sqrt{-x+3}+1$$

따라서 $b = 3, c = 1$ 이므로

$$a+b+c = -1+3+1 = 3$$

답 3

다른 풀이

주어진 그래프로부터 $k < 0$ 인 상수 k 에 대하여

$$f^{-1}(x) = k(x-1)^2 + 3 \quad (x \leq 1)$$

이라 할 수 있다.

함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = k+3 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -(x-1)^2 + 3$$

이때 $(f^{-1})^{-1} = f$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 함수 $f^{-1}(x)$ 의 역함수이다.

$$y = -(x-1)^2 + 3 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 = -y+3$$

$$x-1 = -\sqrt{-y+3} \quad (\because x \leq 1)$$

$$\therefore x = -\sqrt{-y+3}+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\sqrt{-x+3}+1 \quad (x \leq 3)$$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{-x+3}+1 \quad (x \leq 3)$$

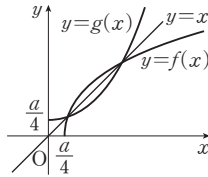
즉, $a = -1, b = 3, c = 1$ 이므로

$$a+b+c = -1+3+1 = 3$$

17

방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $f(x)=\sqrt{4x-a}$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이



직선 $y=x$ 위에 존재하므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

즉, $x=\sqrt{4x-a}$ 에서 $x^2=4x-a$

$$\therefore x^2-4x+a=0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-a>0 \quad \therefore a<4 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

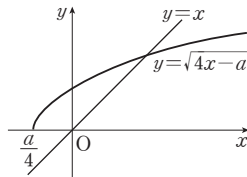
이때 오른쪽 그림과 같이

$$\frac{a}{4}<0\text{이면 함수 }y=\sqrt{4x-a}$$

의 그래프와 직선 $y=x$ 는 한 점에서만 만나므로

$$a\geq 0 \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

따라서 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $0\leq a<4$ 이므로 조건을 만족시키는 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

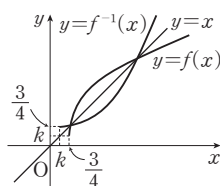


답 4

18

함수 $f(x)=\sqrt{4x-3}+k$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 서로 다른 두 점에서 만난다.



즉, 구하는 두 교점의 좌표를

(α, α) , (β, β) 라 할 수 있다.

$$\sqrt{4x-3}+k=x \text{에서 } \sqrt{4x-3}=x-k \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $4x-3=x^2-2kx+k^2$

$$\therefore x^2-2(k+2)x+k^2+3=0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2(k+2), \alpha\beta=k^2+3 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

또한, 두 교점 (α, α) , (β, β) 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=6$$

$$\text{이때 } (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$6=\{2(k+2)\}^2-4(k^2+3) \quad (\because \textcircled{2})$$

$$4(k^2+4k+4)-4k^2-12-6=0 \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

$$16k-2=0, 16k=2 \quad \therefore k=\frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$

단계	채점 기준	배점
(가)	두 교점의 좌표를 (α, α) , (β, β) 로 나타낸 경우	20%
(나)	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 를 k 에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(다)	$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 를 이용하여 k 에 대한 방정식을 구한 경우	30%
(라)	k 의 값을 구한 경우	20%

19

$x\geq -1$ 에서 $(f^{-1}\circ g)(x)=5x$, 즉 $f^{-1}(g(x))=5x$ 이므로 $g(x)=f(5x)$

$$\begin{aligned} \therefore g\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(\frac{15}{2}\right) \\ &= \sqrt{2\times\frac{15}{2}}+10 \\ &= \sqrt{25}=5 \end{aligned}$$

답 5

- 1 $(\sqrt{2}-1)^n$ 2 $27\sqrt{3}$ 3 ③ 4 $0 < k < \frac{1}{2}$
 5 $\sqrt{2}$ 6 2

1

$$x = \left\{ \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{2} \right\}^2 \text{에서}$$

$$\sqrt{2}+1=a, \sqrt{2}-1=b \text{로 놓으면}$$

$$ab = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2-1=1 \text{이므로}$$

$$x-1 = \left(\frac{a^n+b^n}{2} \right)^2 - 1$$

$$= \frac{a^{2n}+b^{2n}+2(ab)^n}{4} - 1$$

$$= \frac{a^{2n}+b^{2n}+2}{4} - 1$$

$$= \frac{a^{2n}+b^{2n}-2}{4}$$

$$= \frac{a^{2n}+b^{2n}-2(ab)^n}{4} = \left(\frac{a^n-b^n}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x}-\sqrt{x-1} &= \sqrt{\left(\frac{a^n+b^n}{2} \right)^2} - \sqrt{\left(\frac{a^n-b^n}{2} \right)^2} \\ &= \left| \frac{a^n+b^n}{2} \right| - \left| \frac{a^n-b^n}{2} \right| \\ &= \frac{a^n+b^n}{2} - \left(\frac{a^n-b^n}{2} \right) \leftarrow a > b > 0 \text{이므로 } a^n - b^n > 0 \\ &= \frac{a^n+b^n-a^n+b^n}{2} \\ &= b^n = (\sqrt{2}-1)^n \end{aligned}$$

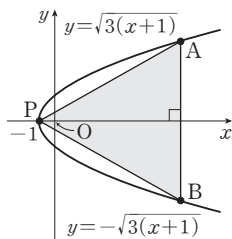
답 $(\sqrt{2}-1)^n$

2

무리함수 $y = \sqrt{k(x+1)}$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{3k} \quad \therefore k = 3$$

즉, 두 함수 $y = \sqrt{3(x+1)}$,
 $y = -\sqrt{3(x+1)}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 축에 대하여 대칭이다.



또한, x 축 위의 점 $P(-1, 0)$ 에 대하여 $\triangle APB$ 가 정삼각형이므로 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB}$ 이다.

이때 점 A의 좌표를 (a, b) ($a > -1$, $b > 0$)라 하면 점 B의 좌표는 $(a, -b)$ 이므로

$$\overline{PA} = \overline{AB} \text{에서 } \overline{PA}^2 = \overline{AB}^2$$

$$(a+1)^2 + b^2 = 4b^2 \quad \therefore (a+1)^2 = 3b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 점 A (a, b) 가 함수 $y = \sqrt{3(x+1)}$ 의 그래프 위에 있으므로

$$b = \sqrt{3(a+1)} \quad \therefore b^2 = 3(a+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } (a+1)^2 = 9(a+1)$$

$$a^2 - 7a - 8 = 0, (a+1)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > -1)$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b^2 = 3 \times (8+1) = 27 \quad \therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = 2b = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

따라서 정삼각형 APB의 한 변의 길이가 $6\sqrt{3}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{3})^2 = 27\sqrt{3}$$

답 $27\sqrt{3}$

다른 풀이

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle APB$ 는 정삼각형이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \overline{PH} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

이때 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(a, \sqrt{3(a+1)})$,

$(a, -\sqrt{3(a+1)})$ ($a > -1$)이라 하면

$$\overline{AB} = 2\sqrt{3(a+1)}, \overline{PH} = a+1 \text{이므로 } \textcircled{3} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3(a+1)} = a+1, 3\sqrt{a+1} = a+1$$

$$a^2 - 7a - 8 = 0, (a+1)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > -1)$$

따라서 정삼각형 APB의 한 변의 길이가

$$\overline{AB} = 2\sqrt{3 \times (8+1)} = 6\sqrt{3} \text{이므로 구하는 넓이는}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{3})^2 = 27\sqrt{3}$$

보충 설명

점 $P(-1, 0)$ 은 x 축 위의 점이면서 두 함수

$y = \sqrt{3(x+1)}$, $y = -\sqrt{3(x+1)}$ 의 그래프의 교점이다. 이때

두 그래프가 x 축에 대하여 대칭이므로 $\triangle ABP$ 가 정삼각형이려면 두 점 A, B도 x 축에 대하여 대칭이어야 한다.

따라서 A (a, b) 이면 B $(a, -b)$ 이다.

3

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ 이므로

$$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차함수 $\textcircled{1}$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4=\frac{1}{4}a+\frac{9}{2}, \quad \frac{1}{4}a=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=-2$$

$$\text{즉, } f(x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}=-2x^2+2x+4 \text{이므로}$$

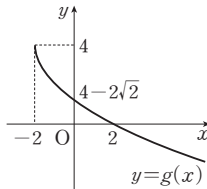
$$b=2, c=4$$

$$\therefore g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$$

ㄱ. 함수 $g(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq -2\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \leq 4\}$ 이다. (참)

ㄴ. $g(0)=-2\sqrt{2}+4 > 0$ 이므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)



ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 에서

$$-2x^2+2x+4=0$$

$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore \alpha=-1, \beta=2 (\because \alpha < \beta)$$

즉, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은

$$g(-1)=-2+4=2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

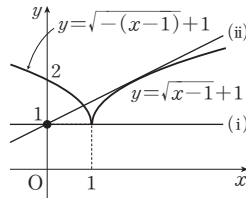
4

$y=\sqrt{|x-1|}+1$ 에서

$x \geq 1$ 일 때 $y=\sqrt{x-1}+1$,

$x < 1$ 일 때 $y=\sqrt{-(x-1)}+1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=kx+1$ 은 항상 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 직선

$y=kx+1$ 이 함수 $y=\sqrt{|x-1|}+1$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나려면 두 직선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y=kx+1$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지날 때,

$$k=0$$

(ii) 직선 $y=kx+1$ 이 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$ 의 그래프와 접할 때,

$$\sqrt{x-1}+1=kx+1 \text{에서 } \sqrt{x-1}=kx$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x-1=k^2x^2 \quad \therefore k^2x^2-x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4k^2=0, (1+2k)(1-2k)=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{2} (\because k > 0)$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } 0 < k < \frac{1}{2}$$

5

함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}=\sqrt{-\frac{1}{2}(x+2)}$ 의 그래프는 함수

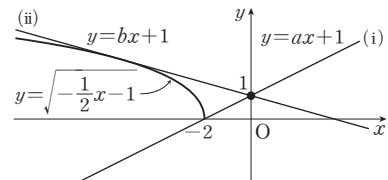
$y=\sqrt{-\frac{1}{2}x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

한편, 두 직선 $y=ax+1, y=bx+1$ 은 항상 점 $(0, 1)$ 을 지나

므로 $x \leq -2$ 에서 부등식 $ax+1 \leq \sqrt{-\frac{1}{2}x-1} \leq bx+1$ 이

항상 성립하려면 함수 $y=\sqrt{-\frac{1}{2}x-1}$ 의 그래프와 두 직선

$y=ax+1, y=bx+1$ 은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=ax+1$ 이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때,

기울기 a 가 최소이므로

$$0=-2a+1, a=\frac{1}{2} \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(7)

(ii) 직선 $y = bx + 1$ 이 함수 $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x - 1}$ 의 그래프와 접할 때,

기울기 b 가 최대이므로 $bx + 1 = \sqrt{-\frac{1}{2}x - 1}$ 의 양변을 제곱하면

$$b^2x^2 + 2bx + 1 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$b^2x^2 + \left(2b + \frac{1}{2}\right)x + 2 = 0$$

$$\therefore 2b^2x^2 + (4b + 1)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (4b + 1)^2 - 4 \times 2b^2 \times 4 = 0$$

$$16b^2 + 8b + 1 - 32b^2 = 0, 16b^2 - 8b - 1 = 0$$

$$b = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 16 \times (-1)}}{16}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore b = \frac{1 - \sqrt{2}}{4} \quad (\because b < 0) \quad \therefore M = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} 2m - 4M &= 2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1 - \sqrt{2}}{4} \\ &= 1 - (1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	a 의 최솟값 m 을 구한 경우	40%
(나)	b 의 최댓값 M 을 구한 경우	40%
(다)	$2m - 4M$ 의 값을 구한 경우	20%

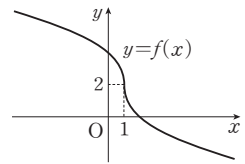
6

함수 $y = \sqrt{-3x + a} + 2 = \sqrt{-3\left(x - \frac{a}{3}\right)} + 2$ 의 그래프는

함수 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또한, 함수 $y = -\sqrt{3x - 3} + 2 = -\sqrt{3(x - 1)} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이 되려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $y = \sqrt{-3\left(x - \frac{a}{3}\right)} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프와 일치해야 하므로

$$\frac{a}{3} = 1 \text{에서 } a = 3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x + 3} + 2 & (x < 1) \\ -\sqrt{3x - 3} + 2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이때 $x < 1$ 에서 $f(x) > 2$, $x \geq 1$ 에서 $f(x) \leq 2$ 이다.

$$f^{-1}(-1) = p \text{라 하면 } f(p) = -1$$

$$f(p) < 2 \text{이므로 } p \geq 1$$

$$\text{즉, } -\sqrt{3p - 3} + 2 = -1 \text{에서}$$

$$\sqrt{3p - 3} = 3, 3p - 3 = 9 \quad \text{--- } p \geq 1 \text{이므로 } f(x) = -\sqrt{3x - 3} + 2 \text{에 } x = p \text{를 대입}$$

$$3p = 12 \quad \therefore p = 4$$

$$f^{-1}(5) = q \text{라 하면 } f(q) = 5$$

$$f(q) > 2 \text{이므로 } q < 1$$

$$\text{즉, } \sqrt{-3q + 3} + 2 = 5 \text{에서}$$

$$\sqrt{-3q + 3} = 3, -3q + 3 = 9 \quad \text{--- } q < 1 \text{이므로 } f(x) = \sqrt{-3x + 3} + 2 \text{에 } x = q \text{를 대입}$$

$$-3q = 6 \quad \therefore q = -2$$

$$\therefore f^{-1}(-1) + f^{-1}(5) = 4 + (-2) = 2$$

답 2

보충 설명

다음과 같은 방법으로 a 의 값을 구할 수도 있다.

$f(1) = -\sqrt{3 \times 1 - 3} + 2 = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면 함수 $y = \sqrt{-3x + a} + 2$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나야 한다.

$$\text{즉, } 2 = \sqrt{-3 + a} + 2 \text{이므로 } a = 3$$