

THE 개념
블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L



I. 지수함수와 로그함수

01. 지수

1 거듭제곱과 거듭제곱근

기본 + 필수연습

본문 pp.014~019

01 (1) ± 3 (2) 6

02 (1) 9 (2) 0.3 (3) -2 (4) $\frac{3}{2}$

03 (1) 2 (2) 3 (3) 11 (4) 2

04 $\sqrt[4]{10} < \sqrt[8]{120}$ 05 $\neg, \sqsubset$ 06 $-\sqrt[3]{2}$

07 4 08 5 09 10

10 (1) 9 (2) 9 11 1 12 5

13 $\sqrt[6]{7} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{3}$ 14 $2(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})$

15 13

01

(1) 81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=81$ 이므로

$$x^4-81=0, (x^2-9)(x^2+9)=0$$

$$(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$$

$$\therefore x=\pm 3 \text{ 또는 } x=\pm 3i$$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 이다.

(2) 216의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=216$ 이므로

$$x^3-216=0, (x-6)(x^2+6x+36)=0$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x=-3\pm 3\sqrt{3}i$$

따라서 216의 세제곱근 중 실수인 것은 6이다.

답 (1) ± 3 (2) 6

02

(1) $\sqrt[3]{729}=\sqrt[3]{9^3}=9$

(2) $\sqrt[4]{0.0081}=\sqrt[4]{(0.3)^4}=0.3$

(3) $\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

(4) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}=\frac{3}{2}$

답 (1) 9 (2) 0.3 (3) -2 (4) $\frac{3}{2}$

03

(1) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}$
 $=\sqrt[3]{2 \times 2^2}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{\frac{729}{9}}=\sqrt[4]{81}$
 $=\sqrt[4]{3^4}=3$

(3) $(\sqrt[8]{121})^4=\sqrt[8]{121^4}=\sqrt[8]{11^8}=11$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=\sqrt[9]{512}=\sqrt[9]{2^9}=2$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 11 (4) 2

04

4, 8의 최소공배수가 8이므로

$$\sqrt[4]{10}=\sqrt[8]{10^2}=\sqrt[8]{100}$$

이때 $100 < 120$ 이므로

$$\sqrt[8]{100} < \sqrt[8]{120} \quad \therefore \sqrt[4]{10} < \sqrt[4]{120}$$

답 $\sqrt[4]{10} < \sqrt[4]{120}$

05

ㄱ. $(-5)^4=625$ 이므로 -5 는 625의 네제곱근 중 하나이다.
 (참)

ㄴ. 0의 세제곱근은 0이다. (거짓)

ㄷ. -1 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-1$ 이므로

$$x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -1 의 세제곱근 중 실수인 것은 -1 뿐이다. (참)

ㄹ. n 이 짝수일 때, -5 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

06

$a^5=2^{10}$ 에서 $a=\sqrt[5]{2^{10}}=2^2=4$

$a=4$ 의 제곱근은 -2 또는 2

$$\therefore b=-2 (\because b < 0)$$

이때 $b = -2$ 의 세제곱근 중 실수인 것을 x 라 하면

$$\begin{aligned} x^3 &= -2 \quad (*) \\ \therefore x &= \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

답 $-\sqrt[3]{2}$

보충 설명

(*)의 방정식 $x^3 = -2$ 에서

$$x^3 + 2 = 0$$

$$(x + \sqrt[3]{2})\{x^2 - \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2\} = 0$$

이때 $x^2 - \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로

$$x + \sqrt[3]{2} = 0 \text{에서 } x = -\sqrt[3]{2}$$

07

$$\frac{3}{2} \text{의 제곱근 중 실수인 것은 2개이므로 } f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2} \text{의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 } f_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$-\frac{1}{2}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$$f_4\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$-\frac{3}{2}$ 의 다섯제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$f_5\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

$-\frac{5}{2}$ 의 여섯제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$$f_6\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f_2\left(\frac{3}{2}\right) + f_3\left(\frac{1}{2}\right) + f_4\left(-\frac{1}{2}\right) + f_5\left(-\frac{3}{2}\right) + f_6\left(-\frac{5}{2}\right) \\ = 2 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4 \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이

(i) n 이 홀수일 때,

x 의 값에 관계없이 항상 $f_n(x) = 1$ 이므로

$$f_3\left(\frac{1}{2}\right) = f_5\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

(ii) n 이 짝수일 때,

$x > 0$ 이면 $f_n(x) = 2$, $x < 0$ 이면 $f_n(x) = 0$ 이므로

$$f_2\left(\frac{3}{2}\right) = 2, f_4\left(-\frac{1}{2}\right) = f_6\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} f_2\left(\frac{3}{2}\right) + f_3\left(\frac{1}{2}\right) + f_4\left(-\frac{1}{2}\right) + f_5\left(-\frac{3}{2}\right) + f_6\left(-\frac{5}{2}\right) \\ = 2 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4 \end{aligned}$$

*08

(i) n 이 홀수일 때,

$n^2 - 4n$ 의 값에 관계없이 항상 $n^2 - 4n$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$f(3) = f(5) = 1$$

(ii) $n = 4$ 일 때,

$n^2 - 4n = 4^2 - 4 \times 4 = 0$ 이고 0의 네제곱근은 0뿐이므로

$$f(4) = 1$$

(iii) $n = 6$ 일 때,

$n^2 - 4n = 6^2 - 4 \times 6 = 12 > 0$ 이고 양수의 여섯제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$$f(6) = 2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

답 5

09

(i) $b < 0$, 즉 $b = -2$ 또는 $b = -1$ 일 때,

$\sqrt[n]{b}$ 가 실수이려면 a 는 홀수이어야 하므로 집합 C 의 원소가 될 수 있는 것은

$$\sqrt[3]{-2}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[7]{-2}, \sqrt[3]{-1} = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[7]{-1} = -1$$

의 4개이다.

(ii) $b = 0$ 일 때,

집합 C 의 원소가 될 수 있는 것은

$$\sqrt[2]{0} = \sqrt[3]{0} = \sqrt[5]{0} = \sqrt[7]{0} = 0 \text{의 1개이다.}$$

(iii) $b > 0$, 즉 $b = 1$ 또는 $b = 2$ 일 때,

a 의 값에 관계없이 항상 $\sqrt[n]{b}$ 가 실수이므로 집합 C 의 원소가 될 수 있는 것은

$$\sqrt[2]{1} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[5]{1} = \sqrt[7]{1} = 1, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[7]{2}$$

의 5개이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$n(C) = 4 + 1 + 5 = 10$$

답 10

10

$$\begin{aligned}
 (1) & (\sqrt[3]{5})^3 + \sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{64} \\
 &= \sqrt[3]{5^3} + \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[4]{2^4} - \sqrt[3]{2^6} \\
 &= 5 + 3 \times 2 - 2 = 9 \\
 (2) & \sqrt[3]{128} \times \sqrt[6]{32} + \frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2^7} \times \sqrt[6]{2^5} + \sqrt[3]{\frac{250}{2}} \\
 &= \sqrt[6]{2^7 \times 2^5} + \sqrt[3]{125} \\
 &= \sqrt[6]{2^{12}} + \sqrt[3]{5^3} \\
 &= 2^2 + 5 = 9
 \end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) 9

11

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}} \div \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{12\sqrt{x^5}}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[4]{6\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[3]{12x^2}} \\
 &= \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[24]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}} \times \frac{\sqrt[24]{x^5}}{\sqrt[6]{x^2}} \\
 &= \frac{\sqrt[24]{x^5}}{\sqrt[24]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^2}} \\
 &= \sqrt[24]{\frac{x^5}{x}} \times \sqrt[6]{\frac{x}{x^2}} \\
 &= \sqrt[24]{x^4} \times \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \\
 &= \sqrt[6]{x} \times \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = 1
 \end{aligned}$$

답 1

12

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[3]{a^2b} \div \sqrt[6]{a^3b^2} \times \sqrt[12]{a^7b^6} = \sqrt[3]{a^2b} \times \frac{1}{\sqrt[6]{a^3b^2}} \times \sqrt[12]{a^7b^6} \\
 &= \sqrt[12]{(a^2b)^4} \times \frac{1}{\sqrt[12]{(a^3b^2)^2}} \times \sqrt[12]{a^7b^6} \\
 &= \sqrt[12]{(a^2b)^4 \times \frac{1}{(a^3b^2)^2} \times a^7b^6} \\
 &= \sqrt[12]{a^8b^4 \times \frac{1}{a^6b^4} \times a^7b^6} \\
 &= \sqrt[12]{a^9b^6} = \sqrt[4]{a^3b^2}
 \end{aligned}$$

따라서 $m=3, n=2$ 이므로

$$m+n=3+2=5$$

답 5

13

$$\sqrt[6]{\sqrt{7}} = \sqrt[12]{7}$$

4, 6, 12의 최소공배수는 12이므로

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}, \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}, \sqrt[6]{\sqrt{7}} = \sqrt[12]{7}$$

이때 $7 < 8 < 9$ 이므로

$$\sqrt[12]{7} < \sqrt[12]{8} < \sqrt[12]{9}$$

$$\therefore \sqrt[6]{\sqrt{7}} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{3}$$

답 $\sqrt[6]{\sqrt{7}} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{3}$

14

2와 3의 최소공배수는 6이므로

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

이때 $8 < 9$ 이므로

$$\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} \quad \therefore \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \quad \dots\dots\text{㉠}$$

3과 5의 최소공배수는 15이므로

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243}, \sqrt[5]{6} = \sqrt[15]{6^3} = \sqrt[15]{216}$$

이때 $243 > 216$ 이므로

$$\sqrt[15]{243} > \sqrt[15]{216} \quad \therefore \sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{6} \quad \dots\dots\text{㉡}$$

5와 2의 최소공배수는 10이므로

$$\sqrt[5]{6} = \sqrt[10]{6^2} = \sqrt[10]{36}, \sqrt{2} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10]{32}$$

이때 $36 > 32$ 이므로

$$\sqrt[10]{36} > \sqrt[10]{32} \quad \therefore \sqrt[5]{6} > \sqrt{2} \quad \dots\dots\text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$|\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}| + |\sqrt[3]{3} - \sqrt[5]{6}| + |\sqrt[5]{6} - \sqrt{2}|$$

$$= -(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[5]{6}) + (\sqrt[5]{6} - \sqrt{2})$$

$$= 2(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})$$

답 $2(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})$

15

$$\sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{54} = \sqrt[6]{54}$$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{4^2 \times 3} = \sqrt[3]{48} = \sqrt[6]{48}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{5^3\sqrt{10}} &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3 \times 10}} \\ &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{1250}} = \sqrt[12]{1250}\end{aligned}$$

6과 12의 최소공배수는 12이므로

$$\sqrt[6]{54} = \sqrt[12]{54^2} = \sqrt[12]{2916}, \quad \sqrt[6]{48} = \sqrt[12]{48^2} = \sqrt[12]{2304}$$

이때 $1250 < 2304 < 2916$ 이므로

$$\sqrt[12]{1250} < \sqrt[12]{2304} < \sqrt[12]{2916}$$

$$\therefore \sqrt[4]{5^3\sqrt{10}} < \sqrt[4]{4\sqrt{3}} < \sqrt[4]{3\sqrt{2}}$$

즉, $a = \sqrt[4]{5^3\sqrt{10}}, b = \sqrt[4]{3\sqrt{2}}$ 이므로

$$a^3 = (\sqrt[4]{5^3\sqrt{10}})^3 = (\sqrt[12]{1250})^3 = \sqrt[4]{1250},$$

$$b^3 = (\sqrt[4]{3\sqrt{2}})^3 = (\sqrt[12]{2916})^3 = \sqrt[4]{2916}$$

이때 $5^4 = 625, 6^4 = 1296, 7^4 = 2401, 8^4 = 4096$ 이므로

$$5 < a^3 < 6, 7 < b^3 < 8$$

따라서 a^3 보다 크고 b^3 보다 작은 자연수는 6, 7이므로 그 합은

$$6 + 7 = 13$$

답 13

STEP 1

개념 마무리

본문 p.020

01 6

02 ①

03 10

04 576

05 5

06 6

01

1의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 1$ 에서

$$x^4 - 1 = 0, (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm i$$

1의 네제곱근 중 실수인 것은 -1 또는 1 이므로

$$a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

-125 의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3 = -125$ 에서

$$y^3 + 125 = 0, (y + 5)(y^2 - 5y + 25) = 0$$

$$\therefore y = -5 \text{ 또는 } y = \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

-125 의 세제곱근 중 실수인 것은 -5 이므로

$$b = -5$$

따라서 $a - b$ 의 값은

$$-1 - (-5) = 4 \text{ 또는 } 1 - (-5) = 6$$

이므로 $a - b$ 의 최댓값은 6이다.

답 6

02

$-n^2 + 9n - 18 = -(n - 3)(n - 6)$ 이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각해 보자.

(i) $-(n - 3)(n - 6) > 0$ 일 때,

$$(n - 3)(n - 6) < 0 \text{에서 } 3 < n < 6$$

이때 양수 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수인 것이 존재하려면 n 이 짝수이어야 하므로

$$n = 4$$

(ii) $-(n - 3)(n - 6) = 0$ 일 때,

$$n = 3 \text{ 또는 } n = 6$$

$-n^2 + 9n - 18$, 즉 0의 n 제곱근은 항상 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-(n - 3)(n - 6) < 0$ 일 때,

$$(n - 3)(n - 6) > 0 \text{에서 } n < 3 \text{ 또는 } n > 6$$

그런데 $2 \leq n \leq 11$ 이므로 $2 \leq n < 3$ 또는 $6 < n \leq 11$

이때 음수 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수인 것이 존재하려면 n 이 홀수이어야 하므로

$$n = 7, 9, 11$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은

$$4 + 7 + 9 + 11 = 31$$

답 ①

보충 설명

a 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재할 조건 | 실수 a 와 2 이상의 자연수 n 에 대하여 a 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 $a > 0$ 일 때 n 은 짝수, $a < 0$ 일 때 n 은 홀수이어야 한다.

또한, $a = 0$ 일 때 a 의 n 제곱근은 0뿐이므로 0의 n 제곱근 중 음의 실수는 존재하지 않는다.

03

(i) n 이 홀수일 때,

a 의 값에 관계없이 항상 $f_n(a) = 1$ 이므로

$$f_3(5) = f_5(3) = f_7(1) = \cdots = 1$$

(ii) n 이 짝수일 때,

$a > 0$ 이면 $f_n(a) = 2$ 이므로

$$f_2(6) = f_4(4) = f_6(2) = 2$$

$a = 0$ 이면 $f_n(a) = 1$ 이므로

$$f_8(0) = 1$$

$a < 0$ 이면 $f_n(a) = 0$ 이므로

$$f_{10}(-2) = f_{12}(-4) = f_{14}(-6) = \cdots = 0$$

(i), (ii)에서

$$f_2(6) + f_3(5) + f_4(4) + f_5(3) + f_6(2) + f_7(1) + f_8(0) \\ = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10$$

또한, $f_9(-1) = 1, f_{10}(-2) = 0$ 이므로

$$f_2(6) + f_3(5) + f_4(4) + \cdots + f_m(8-m) = 11$$

이 되도록 하는 자연수 m 의 최댓값은 10이다.

$$\begin{aligned} f_{11}(-3) &= 10 \text{이므로 } m=11 \text{일 때} \\ f_2(6) + f_3(5) + f_4(4) + \cdots + f_m(8-m) &= 12 \end{aligned}$$

답 10

04

$$a^3 = 3 \text{에서 } a = \sqrt[3]{3}$$

4의 네제곱근 중 실수인 것을 p 라 하면

$$p^4 = 4 \text{에서 } p = -\sqrt[4]{4} \text{ 또는 } p = \sqrt[4]{4}$$

$$\therefore b = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt{ab})^{12} &= (\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2})^{12} = (6\sqrt{3} \times \sqrt{2})^{12} \\ &= 6^{12} \times 3^{12} \times 2^{12} = 3^2 \times 2^6 \\ &= 9 \times 64 = 576 \end{aligned}$$

답 576

05

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^4 \sqrt{a^6 \sqrt{a}}}}{\sqrt[6]{a^4 \sqrt{a^4 \sqrt{a}}}} &= \frac{\sqrt{a} \times \sqrt[8]{a} \times \sqrt[48]{a}}{\sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a} \times \sqrt[48]{a}} = \frac{24\sqrt{a^{12} \times a^3}}{24\sqrt{a^4 \times a}} \\ &= \frac{24\sqrt{a^{15}}}{24\sqrt{a^5}} = 24\sqrt{a^{10}} = 12\sqrt{a^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sqrt{a^4 \sqrt{a^6 \sqrt{a}}}}{\sqrt[6]{a^4 \sqrt{a^4 \sqrt{a}}}} \times \sqrt[4]{ab^3} \div \sqrt[12]{b^7} &= \frac{12\sqrt{a^5} \times \sqrt[12]{a^3 b^9} \div \sqrt[12]{b^7}}{12\sqrt{b^7}} \\ &= 12\sqrt{a^8 b^2} = 6\sqrt{a^4 b} \end{aligned}$$

따라서 $m=4, n=1$ 이므로

$$m+n = 4+1 = 5$$

답 5

06

$$\sqrt[6]{12}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{8}, \sqrt{2} \text{에서}$$

6, 3, 4, 2의 최소공배수가 12이므로

$$\sqrt[6]{12} = \sqrt[12]{12^2} = \sqrt[12]{144}, \sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4} = \sqrt[12]{1296},$$

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}, \sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

이때 $64 < 144 < 512 < 1296$ 이므로

$$\sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{144} < \sqrt[12]{512} < \sqrt[12]{1296}$$

$$\therefore \sqrt{2} < \sqrt[6]{12} < \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{6}$$

즉, $(x - \sqrt[6]{12})(x - \sqrt[3]{6}) > 0$ 에서

$$x < \sqrt[6]{12} \text{ 또는 } x > \sqrt[3]{6}$$

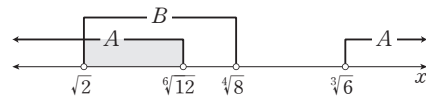
$$\therefore A = \{x \mid x < \sqrt[6]{12} \text{ 또는 } x > \sqrt[3]{6}\}$$

또한, $(x - \sqrt[4]{8})(x - \sqrt{2}) < 0$ 에서

$$\sqrt{2} < x < \sqrt[4]{8}$$

$$\therefore B = \{x \mid \sqrt{2} < x < \sqrt[4]{8}\}$$

따라서 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $A \cap B = \{x \mid \sqrt{2} < x < \sqrt[6]{12}\}$ 이므로

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt[6]{12}$$

$$\therefore \frac{b^6}{a^2} = \frac{(\sqrt[6]{12})^6}{(\sqrt{2})^2} = \frac{12}{2} = 6$$

답 6

2 지수의 확장

기본 + 필수연습

본문 pp.025-032

16 (1) $a^{\frac{1}{7}}$ (2) $a^{\frac{3}{2}}$ (3) $a^{-\frac{7}{4}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}}$

17 (1) 9 (2) 9 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{1}{2}$

18 (1) 24 (2) $6-4\sqrt{2}$ 19 $\frac{41}{5}$ 20 $\frac{3}{4}$

21 19 22 $\frac{2}{3}$ 23 8

24 (1) 24 (2) 2 25 36 26 9

27 (1) 4 (2) $\sqrt{6}$ (3) $8\sqrt{3}$ (4) $30\sqrt{3}$ 28 $\frac{3}{8}$

29 $8\sqrt{5}$ 30 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{3}{13}$ 31 $\sqrt{5}$

32 5 33 (1) 4 (2) 0 34 12

35 125 36 $\frac{1}{3}$

16

$$(1) \sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}$$

$$(2) \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{4}}} = a^{-\frac{7}{4}}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt[8]{a^{-2}}} = \frac{1}{a^{-\frac{2}{8}}} = \frac{1}{a^{-\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}}$$

답 (1) $a^{\frac{1}{7}}$ (2) $a^{\frac{3}{2}}$ (3) $a^{-\frac{7}{4}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}}$

17

$$\begin{aligned} (1) 3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}} &= 3^{2\sqrt{2}} \times (3^2)^{1-\sqrt{2}} \\ &= 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{2-2\sqrt{2}} \\ &= 3^{2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})} \\ &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 81^{\frac{1}{4}} \div 27^{-\frac{1}{3}} &= (3^4)^{\frac{1}{4}} \div (3^3)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 3 \div 3^{-1} \\ &= 3^{1-(-1)} = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{5} \\ &= 5^{\frac{3}{2}-1} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) (2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2} &= (2^{\sqrt{3}} \times 2^2)^{\sqrt{3}-2} \\ &= (2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2} \\ &= 2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \\ &= 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) 9 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{1}{2}$

18

$$\begin{aligned} (1) 32^{\frac{1}{3}} \times 108^{\frac{1}{3}} \div (16^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (2^5)^{\frac{1}{3}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}} \div \left\{ (2^4)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3 \div 2^{4 \times (-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3 \div 2^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})} \times 3 \\ &= 2^3 \times 3 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}} \times (2-\sqrt{2})^{1-\sqrt{3}} &= (2-\sqrt{2})^{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})} \\ &= (2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 \\ &= 6 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 (1) 24 (2) $6-4\sqrt{2}$

19

$$\begin{aligned} &(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) \left(9^{\frac{1}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}} \right) + \left(5^{\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= (3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) \left\{ (3^2)^{\frac{1}{3}} + (3 \times 2)^{\frac{1}{3}} + (2^2)^{\frac{1}{3}} \right\} + \left(5^{\frac{1}{2}} + 5^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= (3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}) \left\{ \underbrace{\left(3^{\frac{1}{3}} \right)^2}_{\substack{\downarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ = a^3-b^3}} + 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + \left(2^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \left(5^{\frac{1}{2}} \right)^2 + 2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{2}} + \left(5^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \right\} \\ &= (3^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{\frac{1}{3}})^3 + (5+2 \times 5^0+5^{-1}) \\ &= 3-2+5+2+\frac{1}{5} = \frac{41}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{41}{5}$

20

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \div \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} \times \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^k &= a^{\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} \times a^{\frac{k}{6}}} \\ &= a^{\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{k}{6}} = a^{\frac{1}{24}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{k}{6} = \frac{1}{24} \text{에서}$$

$$18-20+4k=1, 4k=3 \quad \therefore k=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

21

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^3 \sqrt{a}}{a^5 \sqrt{a}}} &= \left\{ \frac{a \times a^{\frac{1}{3}}}{(a \times a^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \frac{a^{1+\frac{1}{3}}}{(a^{1+\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{a^{\frac{4}{3}}}{(a^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{3}{5}}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{4}{3}-\frac{3}{5}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(a^{\frac{11}{15}} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{30}} \end{aligned}$$

따라서 $m=30, n=11$ 이므로

$$m-n=30-11=19$$

답 19

22

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{a})^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \div (3\sqrt{a}\sqrt{b^{3\sqrt{2}}})^2 \\
 &= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\sqrt{2}} \times (a^{-1}b^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \div \left\{\left(ab^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2 \\
 &= a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} b^{\sqrt{2}} \div \left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 \\
 &= a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times a^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} b^{\sqrt{2}} \div a^{\frac{2}{3}} b^{\sqrt{2}} \\
 &= a^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{2}{3}} b^{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = a^{-\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{2}{3}$, $n = 0$ 이므로

$$n - m = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

23

$$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{12}}$$

$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}$, 즉 $5^{\frac{5}{12}}$ 이 자연수 N 의 n 제곱근이라 하면

$$N = \left(5^{\frac{5}{12}}\right)^n$$

이때 N 이 자연수이므로 n 은 12의 배수이어야 한다.

즉, $2 \leq n \leq 100$ 에서

$$n = 12, 24, 36, \dots, 96$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 8이다.

답 8

다른 풀이

$$(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{12}}$$

$$= (5^5)^{\frac{1}{12}} = (5^{10})^{\frac{1}{24}} = (5^{15})^{\frac{1}{36}} = \dots = (5^{40})^{\frac{1}{96}}$$

즉, $(\sqrt[4]{5^5})^{\frac{1}{3}}$ 은 5^5 의 12제곱근, 5^{10} 의 24제곱근, 5^{15} 의 36제곱근, ..., 5^{40} 의 96제곱근이다.

따라서 구하는 자연수 n 은 12, 24, 36, ..., 96의 8개이다.

24

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 6^{2a+1} &= 6^{2a} \times 6 = (6^a)^2 \times 6 \\
 &= 2^2 \times 6 \quad (\because 6^a = 2) \\
 &= 24
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 10^{b+1} = 40 \text{에서}$$

$$10^b \times 10 = 40 \quad \therefore 10^b = 4$$

이때 $2^a = 10$ 이므로

$$(2^a)^b = 10^b = 4, \quad 2^{ab} = 2^2$$

$$\therefore ab = 2$$

답 (1) 24 (2) 2

25

$$2^{a+b} = 243 = 3^5, \quad 2^{a-b} = 3 \text{에서}$$

$$2^{a+b} \times 2^{a-b} = 3^5 \times 3$$

$$2^{2a} = 3^6 \quad \therefore 2^a = 3^3$$

이때 $2^{a+b} = 3^5$, 즉 $2^a \times 2^b = 3^5$ 이므로

$$3^3 \times 2^b = 3^5 \quad \therefore 2^b = 3^2 \leftarrow 2^{a+b} \div 2^{a-b} = 3^5 \div 3$$

즉, $2^{2b} = 3^4$ 이므로 $2^b = 3^2$ 으로 구할 수도 있다.

$$\therefore 2^a + 2^b = 3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36$$

답 36

26

$$3^{a-1} = 2 \text{에서 } \frac{3^a}{3} = 2$$

$$\therefore 3^a = 6$$

이때 $6^{2b} = 5$ 이므로

$$(3^a)^{2b} = 5, \quad \text{즉 } 3^{2ab} = 5$$

$$\therefore 5^{\frac{1}{ab}} = (3^{2ab})^{\frac{1}{ab}} = 3^2 = 9$$

답 9

다른 풀이

본문 p.040의 개념04에서 '로그의 밑의 변환'을 배우면

다음과 같이 풀 수도 있다.

$$3^{a-1} = 2 \text{에서 } 3^a = 6 \quad \therefore a = \log_3 6$$

$$6^{2b} = 5 \text{에서 } b = \frac{1}{2} \log_6 5$$

$$\therefore ab = \log_3 6 \times \frac{1}{2} \log_6 5$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 6 \times \frac{\log_3 5}{\log_3 6}$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 5$$

$$\therefore 5^{\frac{1}{ab}} = 5^{\frac{2}{\log_3 5}} = 5^{2 \log_3 3} = 5^{\log_3 3^2} = 3^2 = 9$$

27

$$(1) (x+x^{-1})^2 = (x-x^{-1})^2 + 4xx^{-1} \\ = (2\sqrt{3})^2 + 4 = 16$$

이때 $x > 1$ 에서 $x+x^{-1} > 0$ 이므로
 $x+x^{-1} = 4$

$$(2) (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} \\ = 4 + 2 = 6 \quad (\because (1))$$

이때 $x > 1$ 에서 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0$ 이므로
 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

$$(3) x^2 + x^{-2} = (x+x^{-1})^2 - 2xx^{-1} \\ = 4^2 - 2 = 14 \quad (\because (1)) \\ \therefore (x^2 - x^{-2})^2 = (x^2 + x^{-2})^2 - 4x^2x^{-2} \\ = 14^2 - 4 = 192$$

이때 $x > 1$ 에서 $x^2 > x^{-2}$, 즉 $x^2 - x^{-2} > 0$ 이므로
 $x^2 - x^{-2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

$$(4) x^3 - x^{-3} = (x - x^{-1})^3 + 3xx^{-1}(x - x^{-1}) \\ = (2\sqrt{3})^3 + 3 \times 1 \times 2\sqrt{3} \\ = 24\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \\ = 30\sqrt{3}$$

답 (1) 4 (2) $\sqrt{6}$ (3) $8\sqrt{3}$ (4) $30\sqrt{3}$

다른 풀이

$$(3) x^2 - x^{-2} = (x+x^{-1})(x-x^{-1}) \\ = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad (\because (1))$$

$$(4) x^3 - x^{-3} = (x - x^{-1})(x^2 + xx^{-1} + x^{-2}) \quad \leftarrow a^3 - b^3 \\ = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ = 2\sqrt{3} \times (14 + 1) = 30\sqrt{3} \quad (\because (*))$$

28

$$\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 2, \text{ 즉 } a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{이므로}$$

$$a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} \\ = 2^2 + 2 = 6$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^3 + 3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) \\ = 2^3 + 3 \times 1 \times 2 = 14$$

따라서 구하는 식의 값은

$$\frac{a + a^{-1}}{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} + 2} = \frac{6}{14 + 2} = \frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

다른 풀이

$$\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하면

$$a - 2 + \frac{1}{a} = 4 \quad \therefore a + a^{-1} = 6$$

또한, ①의 양변을 세제곱하면

$$a\sqrt{a} - \frac{1}{a\sqrt{a}} - 3\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 8$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3 \times 2 = 8$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 14$$

따라서 구하는 식의 값은

$$\frac{a + a^{-1}}{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} + 2} = \frac{6}{14 + 2} = \frac{3}{8}$$

29

$$x = 5^{\frac{1}{6}} + 5^{-\frac{1}{6}} \text{에서}$$

$$x^2 - 4 = \left(5^{\frac{1}{6}} + 5^{-\frac{1}{6}}\right)^2 - 4 = 5^{\frac{1}{3}} + 2 + 5^{-\frac{1}{3}} - 4 \\ = 5^{\frac{1}{3}} - 2 + 5^{-\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{6}} - 5^{-\frac{1}{6}}\right)^2$$

이므로

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\left(5^{\frac{1}{6}} - 5^{-\frac{1}{6}}\right)^2} = 5^{\frac{1}{6}} - 5^{-\frac{1}{6}}$$

$$\therefore (x + \sqrt{x^2 - 4})^3 = \left(5^{\frac{1}{6}} + 5^{-\frac{1}{6}} + 5^{\frac{1}{6}} - 5^{-\frac{1}{6}}\right)^3 \\ = \left(2 \times 5^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 2^3 \times 5^{\frac{1}{2}} \\ = 8\sqrt{5}$$

답 $8\sqrt{5}$

다른 풀이

$$(x + \sqrt{x^2 - 4})^3 \text{에서}$$

$$x + \sqrt{x^2 - 4} = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 - 4}}{2} = \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2}{2}$$

$$\text{이때 } x + 2 = 5^{\frac{1}{6}} + 5^{-\frac{1}{6}} + 2 = \left(5^{\frac{1}{12}} + 5^{-\frac{1}{12}}\right)^2,$$

$$x - 2 = 5^{\frac{1}{6}} + 5^{-\frac{1}{6}} - 2 = \left(5^{\frac{1}{12}} - 5^{-\frac{1}{12}}\right)^2 \text{에서}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{\left(5^{\frac{1}{12}} + 5^{-\frac{1}{12}}\right)^2} + \sqrt{\left(5^{\frac{1}{12}} - 5^{-\frac{1}{12}}\right)^2} \\ = 5^{\frac{1}{12}} + 5^{-\frac{1}{12}} + 5^{\frac{1}{12}} - 5^{-\frac{1}{12}} = 2 \times 5^{\frac{1}{12}}$$

이므로

$$\frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2}{2} = \frac{(2 \times 5^{\frac{1}{12}})^2}{2} = 2 \times 5^{\frac{1}{6}}$$

$$\therefore (x + \sqrt{x^2 - 4})^3 = \left(2 \times 5^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 8 \times 5^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{5}$$

30

(1) 분자, 분모에 각각 3^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{(3^x + 3^{-x}) \times 3^x}{(3^x - 3^{-x}) \times 3^x} \\ &= \frac{3^{2x} + 1}{3^{2x} - 1} \\ &= \frac{4 + 1}{4 - 1} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{3^x - 27^{-x}}{3^{-3x} + 27^x} = \frac{3^x - 3^{-3x}}{3^{-3x} + 3^{3x}}$$

분자, 분모에 각각 3^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{(3^x - 3^{-3x}) \times 3^x}{(3^{-3x} + 3^{3x}) \times 3^x} = \frac{3^{2x} - 3^{-2x}}{3^{-2x} + 3^{4x}} \\ &= \frac{3^{2x} - \frac{1}{3^{2x}}}{\frac{1}{3^{2x}} + (3^{2x})^2} \\ &= \frac{4 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 4^2} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{65}{4}} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{3}{13}$

31

등식 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{2}{3}$ 의 좌변의 분자, 분모에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{(a^{2x} - 1) \times a^x}{(a^{2x} + 1) \times a^x} = \frac{2}{3} \text{에서 } \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$3a^{2x} - 3 = 2a^{2x} + 1 \quad \therefore a^{2x} = 5$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a^x = (a^{2x})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

다른 풀이

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$3(a^x - a^{-x}) = 2(a^x + a^{-x})$$

$$\therefore a^x = 5a^{-x}$$

양변에 a^x 을 곱하면 $a^{2x} = 5$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a^x = (a^{2x})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

32

$$\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$$

분자, 분모에 각각 2^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^x}{(2^x + 2^{-x}) \times 2^x} &= \frac{2^{4x} + 2^{-2x}}{2^{2x} + 1} = \frac{(2^2)^{2x} + (2^2)^{-x}}{(2^2)^x + 1} \\ &= \frac{4^{2x} + 4^{-x}}{4^x + 1} \end{aligned}$$

이때 $4^x = 3 - 2\sqrt{2}$ 이고

$$\begin{aligned} 4^{-x} &= \frac{1}{4^x} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} &= \frac{4^{2x} + 4^{-x}}{4^x + 1} \\ &= \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2 + (3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2}) + 1} \\ &= \frac{20 - 10\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{10(2 - \sqrt{2})}{2(2 - \sqrt{2})} = 5 \end{aligned}$$

답 5

다른 풀이

$$\begin{aligned} \frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} &= \frac{(2^3)^x + (2^3)^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{(2^x)^3 + (2^{-x})^3}{2^x + 2^{-x}} \\ &= \frac{(2^x + 2^{-x})(2^{2x} - 2^x \times 2^{-x} + 2^{-2x})}{2^x + 2^{-x}} \\ &= 2^{2x} - 1 + 2^{-2x} = (2^2)^x - 1 + (2^2)^{-x} \\ &= 4^x - 1 + 4^{-x} = 4^x - 1 + \frac{1}{4^x} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} - 1 + 3 + 2\sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

33

$$(1) 15^x = 27 \text{에서 } 15 = 27^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$135^y = 81 \text{에서 } 135 = 81^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } 9 = 3^{\frac{4}{y} - \frac{3}{x}}$$

$$\text{이때 } 9 = 3^2 \text{이므로 } \frac{4}{y} - \frac{3}{x} = 2$$

$$\therefore \frac{8}{y} - \frac{6}{x} = 2 \left(\frac{4}{y} - \frac{3}{x} \right) = 2 \times 2 = 4$$

(2) $3^x=9^y=27^z=k$ ($k>0$)로 놓으면

$$3^x=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9^y=k \text{에서 } 9=k^{\frac{1}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$27^z=k \text{에서 } 27=k^{\frac{1}{z}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \div \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$3 \times 9 \div 27 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} \quad \therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 1 \leftarrow k^0 = 1 \text{이므로}$$

$$\text{이때 } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

답 (1) 4 (2) 0

34

$$a^x=7 \text{에서 } a=7^{\frac{1}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^{2y}=7 \text{에서 } b=7^{\frac{1}{2y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$c^{3z}=7 \text{에서 } c=7^{\frac{1}{3z}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \times \textcircled{㉢} \text{을 하면 } abc = 7^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}}$$

이때 $abc=49=7^2$ 이므로

$$7^2 = 7^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \right) = 6 \times 2 = 12$$

답 12

35

펌프의 1분당 회전수가 N 으로 일정하다고 하면

$$S = NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}} \text{에서}$$

$$Q=24, H=5 \text{일 때, } S_1 = N \times 24^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{3}{4}}$$

$$Q=12, H=10 \text{일 때, } S_2 = N \times 12^{\frac{1}{2}} \times 10^{-\frac{3}{4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_1}{S_2} &= \frac{N \times 24^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{3}{4}}}{N \times 12^{\frac{1}{2}} \times 10^{-\frac{3}{4}}} \\ &= \left(\frac{24}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{5}{10} \right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{5}{4} \text{이므로 } 100k = 100 \times \frac{5}{4} = 125$$

답 125

36

전류의 세기가 I_0 ($I_0>0$)으로 일정하므로

$$B = \frac{kI_0r^2}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \text{에서}$$

$$B_1 = \frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{kI_0 \times 9r_1^2}{2(9x_1^2+9r_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{9kI_0r_1^2}{2 \times 9^{\frac{3}{2}}(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = 9^{1-\frac{3}{2}} \times \frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}B_1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{B_2}{B_1} = \frac{\frac{1}{3}B_1}{B_1} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.033-034

07 ④	08 -26	09 60	10 6
11 8	12 $\frac{3}{5}$	13 16	14 90
15 $\frac{35}{6}$	16 $\frac{25}{23}$	17 256	18 72
19 2.07배			

07

$$\begin{aligned} \neg. 4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}} &= (2^2)^{1-\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}} \\ &= 2^{2-2\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}} \\ &= 2^{2-2\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})} \\ &= 2^3 \neq 2^{\sqrt{3}} \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \sqrt[3]{8} \times \frac{2^{\sqrt{2}}}{2^{1+\sqrt{2}}} &= \sqrt[3]{2^3} \times 2^{\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})} \\ &= 2 \times 2^{-1} \\ &= 2^{1+(-1)} \\ &= 2^0 = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄷ. } (2^{\sqrt{3}+1})^{2\sqrt{3}-2} &= 2^{(\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-2)} \\
&= 2^{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2} = 2^4 \neq 2^6 \text{ (거짓)} \\
\text{ㄹ. } 2^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1} &= 2^{\sqrt{2}} \times (2^{-1})^{\sqrt{2}-1} \\
&= 2^{\sqrt{2}} \times 2^{-\sqrt{2}+1} \\
&= 2^{\sqrt{2}+(-\sqrt{2}+1)} \\
&= 2^1 = 2 \text{ (참)}
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

08

$$\begin{aligned}
3^{\frac{1}{4}} &= A \text{라 하면} \\
(1+3^{\frac{3}{2}})(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}})(1-3^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}) \\
&= (1+A^6)(1-A^2)(1+A+A^2)(1-A+A^2) \\
&= (1+A^6)(1+A)(1-A+A^2)(1-A)(1+A+A^2) \\
&= (1+A^6)(1+A^3)(1-A^3) \\
&= (1+A^6)(1-A^6) = 1-A^{12} \\
&= 1-(3^{\frac{1}{4}})^{12} = 1-3^3 = -26
\end{aligned}$$

답 -26

09

$$\begin{aligned}
\text{다항식 } f(x) &= x^3 - 4 \text{가 } x - \sqrt{a} \text{로 나누어떨어지므로} \\
f(\sqrt{a}) &= 0, \text{ 즉 } (\sqrt{a})^3 - 4 = 0 \text{에서} \\
a^{\frac{3}{2}} &= 4 \quad \therefore a = 4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} \\
\text{따라서 다항식 } f(x) &\text{를 } x - \sqrt{a^3} \text{으로 나눈 나머지는} \\
f(\sqrt{a^3}) &= (\sqrt{a^3})^3 - 4 = a^{\frac{9}{2}} - 4 \\
&= \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} - 4 \\
&= 2^6 - 4 = 60
\end{aligned}$$

답 60

보충 설명

나머지정리 |

1. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$R = f(a)$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $bx+c$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$R = f\left(-\frac{c}{b}\right)$$

10

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3^{-2}}{8}\right)^{\frac{12}{n}} &= (3^{-2} \times 2^{-3})^{\frac{12}{n}} \\
&= 3^{-\frac{24}{n}} \times 2^{-\frac{36}{n}}
\end{aligned}$$

이때 2와 3은 서로소이므로 조건을 만족시키기 위해서는 2의

지수 $-\frac{36}{n}$ 과 3의 지수 $-\frac{24}{n}$ 가 모두 자연수가 되어야 한다.

즉, $-n$ 은 36과 24의 공약수이므로

$-n=1, 2, 3, 4, 6, 12 \leftarrow 36 \text{과 } 24 \text{의 최대공약수인 } 12 \text{의 약수이다.}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 n 은

$-1, -2, -3, -4, -6, -12$ 의 6개이다.

답 6

11

$$\begin{aligned}
27^{\frac{1}{m}} &= k \times 64^{\frac{1}{n}} \text{에서} \\
k &= \frac{27^{\frac{1}{m}}}{64^{\frac{1}{n}}} = \frac{(3^3)^{\frac{1}{m}}}{(2^6)^{\frac{1}{n}}} = \frac{3^{\frac{3}{m}}}{2^{\frac{6}{n}}} = 3^{\frac{3}{m}} \times 2^{-\frac{6}{n}}
\end{aligned}$$

이때 2와 3은 서로소이므로 위의 식을 만족시키는 자연수 k 가

존재하기 위해서는 3의 지수 $\frac{3}{m}$ 과 2의 지수 $-\frac{6}{n}$ 이 모두

자연수가 되어야 한다.

따라서 m 은 3의 양의 약수인 1, 3 중 하나이고, $-n$ 은 6의

양의 약수인 1, 2, 3, 6 중 하나이므로 n 은 $-1, -2, -3, -6$ 중 하나이다.

따라서 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

답 8

12

$$\begin{aligned}
2^{ab-2a+b} &= 2^{ab} \times 2^{-2a} \times 2^b \\
&= (2^a)^b \times (2^a)^{-2} \times 2^b \\
&= 5^b \times 5^{-2} \times 2^b \quad (\because 2^a = 5) \\
&= 5^b \times 2^b \times 5^{-2} = 10^b \times 5^{-2} \\
&= 15 \times 5^{-2} \quad (\because 10^b = 15) \\
&= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

13

$$\begin{aligned}
 15^b &= 5 \text{에서 } 15 = 5^{\frac{1}{b}} \text{이므로} \\
 15 \div 5 &= 5^{\frac{1}{b}} \div 5 = 5^{\frac{1}{b}-1} = 5^{\frac{1-b}{b}} \\
 \text{즉, } 3 &= 5^{\frac{1-b}{b}} \text{이므로} \\
 3^{\frac{4a}{1-b}} &= \left(5^{\frac{1-b}{b}}\right)^{\frac{4a}{1-b}} = 5^{\frac{4a}{b}} \\
 &= \left(5^{\frac{1}{b}}\right)^{4a} = 15^{4a} \quad (\because 5^{\frac{1}{b}} = 15) \\
 &= (15^a)^4 = 2^4 \quad (\because 15^a = 2) \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 3 &= \frac{15}{5} = \frac{15}{15^b} = 15^{1-b} \text{이므로} \\
 3^{\frac{4a}{1-b}} &= (15^{1-b})^{\frac{4a}{1-b}} \\
 &= 15^{4a} \\
 &= (15^a)^4 \\
 &= 2^4 = 16
 \end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{81} = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} \text{에서} \\
 x^3 - 27x &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^3 - 27\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)\left\{\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^2 - 27\right\} \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)\left(3^{\frac{4}{3}} + 2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{8}{3}} - 27\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)\left(3^{\frac{4}{3}} + 2 \times 3^2 + 3^{\frac{8}{3}} - 27\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)\left(3^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{8}{3}} - 9\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)\left\{\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2 - 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} + \left(3^{\frac{4}{3}}\right)^2\right\} \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{4}{3}}\right)^3 \quad \leftarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \\
 &= 3^2 + 3^4 \\
 &= 9 + 81 = 90
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 x^3 - 27x &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^3 - 27\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right)^3 - 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right) \\
 &= \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{4}{3}}\right)^3 \quad \leftarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3 \\
 &= 3^2 + 3^4 \\
 &= 9 + 81 = 90
 \end{aligned}$$

답 16

답 90

15

$$\begin{aligned}
 \text{등식 } \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= 5 \text{의 좌변의 분자, 분모에 각각 } 2^x \text{을 곱하면} \\
 \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^x}{(2^x - 2^{-x}) \times 2^x} &= \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x} - 1} = 5 \\
 2^{2x} + 1 &= 5 \times 2^{2x} - 5 \\
 4 \times 2^{2x} &= 6 \quad \therefore 2^{2x} = \frac{3}{2} \\
 \text{이때 } \frac{8^x + 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} \text{이므로 분자, 분모에 각각 } 2^x \text{을} \\
 &\text{곱하면} \\
 \frac{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^x}{(2^x - 2^{-x}) \times 2^x} &= \frac{2^{4x} + 2^{-2x}}{2^{2x} - 1} = \frac{(2^{2x})^2 + (2^{2x})^{-1}}{2^{2x} - 1} \\
 &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{35}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{35}{6}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{35}{6}$

16

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} \text{의 분자, 분모에 각각 } a^x \text{을 곱하면} \\
 f(x) &= \frac{(a^x + a^{-x}) \times a^x}{(a^x - a^{-x}) \times a^x} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} \\
 \text{이때 } f(a) &= \frac{a^{2a} + 1}{a^{2a} - 1} = \frac{5}{3} \text{에서} \\
 3a^{2a} + 3 &= 5a^{2a} - 5, \quad 2a^{2a} = 8 \\
 \therefore a^{2a} &= 4 \\
 \text{또한, } f(\beta) &= \frac{a^{2\beta} + 1}{a^{2\beta} - 1} = \frac{7}{5} \text{에서} \\
 5a^{2\beta} + 5 &= 7a^{2\beta} - 7, \quad 2a^{2\beta} = 12 \\
 \therefore a^{2\beta} &= 6 \\
 \therefore f(a+\beta) &= \frac{a^{2(a+\beta)} + 1}{a^{2(a+\beta)} - 1} \\
 &= \frac{a^{2a} \times a^{2\beta} + 1}{a^{2a} \times a^{2\beta} - 1} \\
 &= \frac{4 \times 6 + 1}{4 \times 6 - 1} = \frac{25}{23}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{25}{23}$

17

$$108^x = 3 \text{에서 } 108 = 3^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{12^y} = 27 \text{에서 } \frac{1}{12} = 27^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{3}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \text{을 하면 } 9 = 3^{\frac{1}{x} + \frac{3}{y}}$$

$$\text{이때 } 9 = 3^2 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\text{한편, } \textcircled{㉢} \text{을 } \frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{2z} = 1 \text{에 대입하면}$$

$$2 - \frac{1}{2z} = 1, \frac{1}{2z} = 1 \quad \therefore z = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a^z = 16 \text{에서 } a^{\frac{1}{2}} = 16 \text{이므로}$$

$$a = 16^2 = 256$$

답 256

18

$$729^a = 64^b = k^c = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$729^a = t \text{에서 } t^{\frac{1}{a}} = 729 = 3^6 \text{이므로 } t^{\frac{2}{a}} = (3^6)^2 = 3^{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$64^b = t \text{에서 } t^{\frac{1}{b}} = 64 = 2^6 \text{이므로 } t^{\frac{3}{b}} = (2^6)^3 = 2^{18} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$k^c = t \text{에서 } t^{\frac{1}{c}} = k \text{이므로 } t^{\frac{6}{c}} = k^6 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \text{을 하면 } t^{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} = 3^{12} \times 2^{18} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{6}{c} \text{이므로 } t^{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} = t^{\frac{6}{c}}$$

$$\text{즉, } \textcircled{㉣}, \textcircled{㉢} \text{에서 } 3^{12} \times 2^{18} = k^6$$

$$\text{따라서 } (3^2 \times 2^3)^6 = k^6 \text{이므로}$$

$$k = 3^2 \times 2^3 = 9 \times 8 = 72 \quad (\because k > 0)$$

답 72

19

농산물 A의 연평균 가격 상승률을 P_A 라 하면
10년 동안 3000원에서 6000원으로 올랐으므로

$$P_A = \sqrt[10]{\frac{6000}{3000}} - 1 = 2^{\frac{1}{10}} - 1$$

농산물 B의 연평균 가격 상승률을 P_B 라 하면
10년 동안 2000원에서 8000원으로 올랐으므로

$$P_B = \sqrt[10]{\frac{8000}{2000}} - 1 = 4^{\frac{1}{10}} - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{P_B}{P_A} &= \frac{4^{\frac{1}{10}} - 1}{2^{\frac{1}{10}} - 1} = \frac{(2^{\frac{1}{10}} - 1)(2^{\frac{1}{10}} + 1)}{2^{\frac{1}{10}} - 1} \\ &= 2^{\frac{1}{10}} + 1 = 1.07 + 1 \quad (\because 1.07^{10} = 2 \text{에서 } 2^{\frac{1}{10}} = 1.07) \\ &= 2.07 \end{aligned}$$

따라서 최근 10년 동안 농산물 B의 연평균 가격 상승률은
농산물 A의 연평균 가격 상승률의 2.07배이다.

답 2.07배

STEP 2 개념 마무리

본문 p.035

- | | | | |
|-----------------|-------------------|-------|-----|
| 1 44 | 2 $\sqrt[8]{2^9}$ | 3 118 | 4 ② |
| 5 $2\sqrt{5}+1$ | 6 $\sqrt{3}$ | | |

1

$2 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2 + n + 1 > 0$

즉, $n^2 + n + 1$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀수이면 1개
이고, n 이 짝수이면 2개이다.

$$\therefore f(n) = \begin{cases} 1 & (n=3, 5, 7, 9) \\ 2 & (n=2, 4, 6, 8, 10) \end{cases}$$

또한, $n^2 - 10n + 21 = (n-3)(n-7)$ 이므로 다음과 같이
경우를 나누어 생각해 보자.

(i) $(n-3)(n-7) > 0$, 즉 $n < 3$ 또는 $n > 7$ 일 때, $\leftarrow 2 \leq n < 3 \text{ 또는 } 7 < n \leq 10$

양수 $n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀
수이면 1개, n 이 짝수이면 2개이므로

$$g(9) = 1, g(2) = g(8) = g(10) = 2$$

(ii) $(n-3)(n-7) = 0$, 즉 $n = 3$ 또는 $n = 7$ 일 때,

$n^2 - 10n + 21$, 즉 0의 n 제곱근은 0뿐이므로

$$g(3) = g(7) = 1$$

(iii) $(n-3)(n-7) < 0$, 즉 $3 < n < 7$ 일 때,

음수 $n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 n 이 홀
수이면 1개, n 이 짝수이면 존재하지 않으므로

$$g(5) = 1, g(4) = g(6) = 0$$

$$\text{(i), (ii), (iii)에서 } g(n) = \begin{cases} 0 & (n=4, 6) \\ 1 & (n=3, 5, 7, 9) \\ 2 & (n=2, 8, 10) \end{cases}$$

따라서 $f(n)=g(n)=1$ 을 만족시키는 n 의 값은 3, 5, 7, 9
이고, $f(n)=g(n)=2$ 를 만족시키는 n 의 값은 2, 8, 10이
므로 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은
 $3+5+7+9+2+8+10=44$

답 44

2

함수 $f(x)=2\sqrt{x}$ 에 대하여

$$f(2)=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}},$$

$$(f \circ f)(3)=f(f(3))=2\sqrt{2\sqrt{3}}$$

$$=2^{1+\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}},$$

$$(f \circ f \circ f)(18)=f(f(f(18)))=2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{18}}}$$

$$=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \times 18^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{7}{4}} \times (2 \times 3^2)^{\frac{1}{8}}$$

$$=2^{\frac{7}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{\frac{15}{8}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \frac{f(2) \times (f \circ f)(3)}{(f \circ f \circ f)(18)} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{15}{8}} \times 3^{\frac{1}{4}}}$$

$$=2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{15}{8}}$$

$$=2^{\frac{9}{8}} = 8\sqrt[8]{2^9}$$

답 $8\sqrt[8]{2^9}$

3

본문 p.013 한 걸음 더 참고

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{-108} = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{-108}, \sqrt[3]{a^2 b} = -\sqrt[3]{-108}$$

양변을 세제곱하면

$$(\sqrt[3]{a^2 b})^3 = (-\sqrt[3]{-108})^3$$

$$\therefore a^2 b = (-1)^3 \times (\sqrt[3]{-108})^3 = (-1) \times (-108) = 108$$

$$\text{즉, } b = \frac{108}{a^2} = \frac{2^2 \times 3^3}{a^2} \text{이고 } b \text{는 자연수이므로}$$

a^2 은 $2^2 \times 3^3$ 의 약수이다.

$$(i) a=1, \text{ 즉 } a^2=1 \text{일 때,}$$

$$b = \frac{108}{1^2} = 108 \text{이므로}$$

$$a+b=1+108=109$$

$$(ii) a=2, \text{ 즉 } a^2=4 \text{일 때,}$$

$$b = \frac{108}{2^2} = 27 \text{이므로}$$

$$a+b=2+27=29$$

$$(iii) a=3, \text{ 즉 } a^2=9 \text{일 때,}$$

$$b = \frac{108}{3^2} = 12 \text{이므로}$$

$$a+b=3+12=15$$

$$(iv) a=2 \times 3, \text{ 즉 } a^2=2^2 \times 3^2 \text{일 때,}$$

$$b = \frac{108}{2^2 \times 3^2} = 3 \text{이므로}$$

$$a+b=6+3=9$$

(i)~(iv)에서 $a+b$ 의 최댓값은 109, 최솟값은 9이므로 최댓
값과 최솟값의 합은

$$109+9=118$$

답 118

4

m, n 이 모두 자연수이므로 $A>0, B>0, C>0$ 이고

$$A = \sqrt[3]{m\sqrt{n}} = m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{6}} = (m^4 n^2)^{\frac{1}{12}}$$

$$B = \sqrt{n\sqrt[3]{m}} = n^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{6}} = (m^2 n^6)^{\frac{1}{12}}$$

$$C = \sqrt{\sqrt{mn}} = (mn)^{\frac{1}{4}} = (m^3 n^3)^{\frac{1}{12}}$$

2, 3, 4, 6의 최소공배수가
12이므로 지수를 $\frac{1}{12}$ 로 묶는다.

$$(i) \frac{A}{B} = \left(\frac{m^4 n^2}{m^2 n^6} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{m^2}{n^4} \right)^{\frac{1}{12}}$$

이때 $1 < m < n$ 에서

$$1 < m^2 < n^2 < n^4 \text{이므로}$$

$$0 < \frac{m^2}{n^4} < 1 \quad \therefore \frac{A}{B} < 1$$

$$\therefore A < B$$

$$(ii) \frac{A}{C} = \left(\frac{m^4 n^2}{m^3 n^3} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{12}}$$

이때 $1 < m < n$ 이므로

$$0 < \frac{m}{n} < 1 \quad \therefore \frac{A}{C} < 1$$

$$\therefore A < C$$

$$(iii) \frac{B}{C} = \left(\frac{m^2 n^6}{m^3 n^3} \right)^{\frac{1}{12}} = \left(\frac{n^3}{m} \right)^{\frac{1}{12}}$$

이때 $1 < m < n$ 에서

$$1 < m < n < n^3 \text{이므로}$$

$$\frac{n^3}{m} > 1 \quad \therefore \frac{B}{C} > 1$$

$$\therefore C < B$$

(i), (ii), (iii)에서 $A < C < B$

답 ②

보충 설명

두 수 또는 두 식의 대소 관계 |

(1) 차를 이용하는 방법

$$\textcircled{1} A-B>0 \iff A>B$$

$$\textcircled{2} A-B=0 \iff A=B$$

$$\textcircled{3} A-B<0 \iff A<B$$

(2) 제곱의 차를 이용하는 방법 (단, $A>0, B>0$)

$$\textcircled{1} A^2-B^2>0 \iff A>B$$

$$\textcircled{2} A^2-B^2=0 \iff A=B$$

$$\textcircled{3} A^2-B^2<0 \iff A<B$$

(3) 비를 이용하는 방법 (단, $A>0, B>0$)

$$\textcircled{1} \frac{A}{B}>1 \iff A>B$$

$$\textcircled{2} \frac{A}{B}=1 \iff A=B$$

$$\textcircled{3} \frac{A}{B}<1 \iff A<B$$

이 문제에서는 '(3) 비를 이용하는 방법'으로 대소를 비교하였다.

5

$$9^x-3^{x+1}=-1 \text{에서 } 3^{2x}-3 \times 3^x+1=0$$

양변을 3^x 으로 나누면

$$3^x-3+\frac{1}{3^x}=0 \quad \therefore 3^x+3^{-x}=3$$

이때 $3^x>1$ 이므로 $3^x-3^{-x}>0$

$$\therefore 3^x-3^{-x}=\sqrt{(3^x+3^{-x})^2-4}=\sqrt{3^2-4}=\sqrt{5}$$

또한, $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2 \times 3^x \times 3^{-x}=3^2-2=7$ 이고

$$\begin{aligned} 27^x-27^{-x} &= 3^{3x}-3^{-3x} \\ &= (3^x-3^{-x})^3+3 \times 3^x \times 3^{-x} \times (3^x-3^{-x}) \\ &= (\sqrt{5})^3+3 \times 1 \times \sqrt{5} \\ &= 5\sqrt{5}+3\sqrt{5}=8\sqrt{5} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{27^x-27^{-x}+4}{9^x+9^{-x}-3}=\frac{8\sqrt{5}+4}{7-3}=2\sqrt{5}+1$$

답 $2\sqrt{5}+1$

단계	채점 기준	배점
(가)	3^x+3^{-x} 의 값을 구한 경우	30%
(나)	곱셈 공식의 변형을 이용하여 3^x-3^{-x} , 9^x+9^{-x} , 27^x-27^{-x} 의 값을 각각 구한 경우	50%
(다)	주어진 식의 값을 구한 경우	20%

6

조건 (가)에서 $3^x \times 3^y=9^z$ 이므로 $3^{x+y}=3^{2z}$

$$\therefore x+y=2z \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

조건 (나)에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$ ($k>0$)로 놓으면

$$a=k^x, b=k^y, c=k^z$$

$$\begin{aligned} \therefore ab &= k^x \times k^y \\ &= k^{x+y} = k^{2z} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= c^2 \quad \dots\dots\textcircled{8} \end{aligned}$$

$$\frac{a+3b}{2c}=\frac{a}{2c}+\frac{3b}{2c} \text{에서 } \frac{a}{2c}>0, \frac{3b}{2c}>0 \text{이므로}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{a}{2c}+\frac{3b}{2c} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{2c} \times \frac{3b}{2c}}=2\sqrt{\frac{3ab}{4c^2}}=2\sqrt{\frac{3ab}{4ab}} \quad (\because \textcircled{8}) \\ &=2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3} \quad (\text{단, 등호는 } a=3b \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a+3b}{2c}$ 의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

답 $\sqrt{3}$

다른 풀이

조건 (가)에서 $3^x \times 3^y=9^z$ 이므로 $3^{x+y}=3^{2z}$

$$x+y=2z \quad \therefore z=\frac{x+y}{2} \quad \dots\dots\textcircled{9}$$

조건 (나)에서 $a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$ ($k>0$)로 놓으면

$$a=k^x, b=k^y, c=k^z$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a+3b}{2c} &= \frac{k^x+3k^y}{2k^z} = \frac{k^x+3k^y}{2k^{\frac{x+y}{2}}} \quad (\because \textcircled{9}) \\ &= \frac{1+3k^{\frac{y-x}{2}}}{2k^{\frac{y-x}{2}}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{분자와 분자에 } k^{-\frac{y-x}{2}} \text{을 곱한다.} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}} + \frac{3}{2} \times k^{\frac{y-x}{2}} \end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}} > 0, \frac{3}{2} \times k^{\frac{y-x}{2}} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}} + \frac{3}{2} \times k^{\frac{y-x}{2}} &\geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k^{\frac{y-x}{2}}}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times k^{\frac{y-x}{2}}\right)} \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3} \quad (\text{단, 등호는 } k^{\frac{y-x}{2}}=\frac{1}{3} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a+3b}{2c}$ 의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

02. 로그

1 로그

기본 + 필수연습

본문 pp.042-051

01 (1) $6 = \log_{\sqrt{3}} 9$ (2) $-3 = \log_{\frac{1}{7}} 343$

(3) $\frac{3}{2} = \log_{81} 729$

02 (1) $6^1 = 6$ (2) $(\sqrt{5})^4 = 25$ (3) $(0.04)^2 = 0.0016$

03 (1) $x < \frac{11}{3}$ (2) $-5 < x < -1$ 또는 $-1 < x < 0$

04 (1) 3 (2) 2

05 (1) 2 (2) 4

06 (1) $\frac{35}{4}$ (2) $\sqrt{6}$

07 3

08 4

09 18

10 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) -1

11 $\frac{1}{4}$

12 125

13 (1) -36 (2) 1

14 36

15 81

16 (1) 3 (2) $5\sqrt{5}$

17 14

18 $C < A < B$

19 3

20 9

21 $\frac{17}{3}$

22 50

23 $\frac{6}{5}$

24 4

25 113

26 192

27 146

01

(1) $(\sqrt[3]{3})^6 = 9 \iff 6 = \log_{\sqrt{3}} 9$

(2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = 343 \iff -3 = \log_{\frac{1}{7}} 343$

(3) $81^{\frac{3}{2}} = 729 \iff \frac{3}{2} = \log_{81} 729$

답 (1) $6 = \log_{\sqrt{3}} 9$ (2) $-3 = \log_{\frac{1}{7}} 343$ (3) $\frac{3}{2} = \log_{81} 729$

02

(1) $\log_6 6 = 1 \iff 6^1 = 6$

(2) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \iff (\sqrt{5})^4 = 25$

(3) $\log_{0.04} 0.0016 = 2 \iff (0.04)^2 = 0.0016$

답 (1) $6^1 = 6$ (2) $(\sqrt{5})^4 = 25$ (3) $(0.04)^2 = 0.0016$

03

(1) 진수의 조건에 의하여 $11 - 3x > 0$ 이므로

$$3x < 11 \quad \therefore x < \frac{11}{3}$$

(2) 밑의 조건에 의하여 $-x > 0$, $-x \neq 1$ 이므로

$$x < 0, x \neq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에 의하여 $2x + 10 > 0$ 이므로

$$2x > -10 \quad \therefore x > -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$-5 < x < -1 \text{ 또는 } -1 < x < 0$$

답 (1) $x < \frac{11}{3}$ (2) $-5 < x < -1$ 또는 $-1 < x < 0$

04

(1) $\log_3 10 + \log_3 \frac{9}{5} - \log_3 \frac{2}{3}$

$$= \log_3 \left(\frac{10 \times \frac{9}{5}}{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

(2) $\log_2 \sqrt{2} + \log_5 5\sqrt{5} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} + \log_5 5^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

답 (1) 3 (2) 2

05

(1) $\log_2 \frac{1}{3} \times \log_3 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{3} \times \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 3}$

$$= \log_2 3^{-1} \times \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 3}$$

$$= -\log_2 3 \times \frac{(-2 \log_2 2)}{\log_2 3}$$

$$= (-1) \times (-2) = 2$$

(2) $\log_2 96 - \frac{1}{\log_6 2} = \log_2 96 - \log_2 6$

$$= \log_2 (96 \div 6)$$

$$= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

답 (1) 2 (2) 4

06

$$(1) \log_4 \sqrt{8} + \log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^4$$

$$= \frac{3}{4} + 8 = \frac{35}{4}$$

$$(2) (\sqrt{2})^{1+\log_2 3} = 2^{\frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 3)}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \log_2 6} = 2^{\log_2 6^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

답 (1) $\frac{35}{4}$ (2) $\sqrt{6}$

07

$$\log_{x-1} (12+4x-x^2) \text{에 대하여}$$

$$(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1 \text{에서 } x-1 > 0, x-1 \neq 1 \text{이어야 하므로}$$

$$x > 1, x \neq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{진수}) > 0 \text{에서 } 12+4x-x^2 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$x^2 - 4x - 12 < 0, (x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$1 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 6$$

$$\text{따라서 조건을 만족시키는 정수 } x \text{는 } 3, 4, 5 \text{의 3개이다.}$$

답 3

08

$$\log_{|a-2|} (5-a), \log_{|a-2|} (a+3) \text{에 대하여}$$

$$(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1 \text{에서 } |a-2| > 0, |a-2| \neq 1 \text{이어야 하므로}$$

$$|a-2| > 0 \text{에서 } a \neq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|a-2| \neq 1 \text{에서 } a \neq 1 \text{이고 } a \neq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(\text{진수}) > 0 \text{에서 } 5-a > 0, a+3 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-3 < a < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 동시에 만족시키는 정수 } a \text{는 } -2, -1, 0, 4 \text{의 4개이다.}$$

답 4

09

$$\log_{a-3} (x^2+2ax+8a) \text{에 대하여}$$

$$(\text{밑}) > 0, (\text{밑}) \neq 1 \text{에서 } a-3 > 0, a-3 \neq 1 \text{이어야 하므로}$$

$$a > 3, a \neq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{진수}) > 0 \text{에서 모든 실수 } x \text{에 대하여 이차부등식}$$

$$x^2+2ax+8a > 0 \text{이 항상 성립해야 하므로 이차방정식}$$

$$x^2+2ax+8a=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때, } D < 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 8a < 0, a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 3 < a < 4 \text{ 또는 } 4 < a < 8$$

$$\text{따라서 조건을 만족시키는 정수 } a \text{는 } 5, 6, 7 \text{이므로 그 합은}$$

$$5+6+7=18$$

답 18

10

$$(1) 2\log_{10} \sqrt[3]{5} - \log_{10} \frac{50}{3} + \log_{10} \sqrt[3]{4} - \log_{10} 6$$

$$= \log_{10} 5^{\frac{2}{3}} - \log_{10} \frac{50}{3} + \log_{10} 2^{\frac{2}{3}} - \log_{10} 6$$

$$= \log_{10} 5^{\frac{2}{3}} + \log_{10} 2^{\frac{2}{3}} - \left(\log_{10} \frac{50}{3} + \log_{10} 6 \right)$$

$$= \log_{10} (5 \times 2)^{\frac{2}{3}} - \log_{10} \left(\frac{50}{3} \times 6 \right)$$

$$= \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} - \log_{10} 10^2$$

$$= \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

$$(2) \log_3 (\log_7 49) - \log_3 (\log_2 64)$$

$$= \log_3 (\log_7 7^2) - \log_3 (\log_2 2^6)$$

$$= \log_3 2 - \log_3 6$$

$$= \log_3 (2 \div 6)$$

$$= \log_3 \frac{1}{3}$$

$$= \log_3 3^{-1} = -1$$

답 (1) $-\frac{4}{3}$ (2) -1

11

$$\log_6 \sqrt{2} = x, \log_6 2\sqrt{3} = y \text{라 하면}$$

$$\log_6 12 = \log_6 (2\sqrt{3})^2 = 2\log_6 2\sqrt{3} = 2y \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= x^2 + y^2 - x \times 2y \\
 &= x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \\
 &= (\log_6 \sqrt{2} - \log_6 2\sqrt{3})^2 \\
 &= \left(\log_6 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \left(\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 \\
 &= (\log_6 6^{-\frac{1}{2}})^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

12

$$\begin{aligned}
 P &= \log_5 \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \log_5 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \\
 &\quad + \cdots + \log_5 \left(1 - \frac{1}{125} \right) \\
 &= \log_5 \frac{1}{2} + \log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{3}{4} + \cdots + \log_5 \frac{124}{125} \\
 &= \log_5 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{124}{125} \right) \\
 &= \log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3
 \end{aligned}$$

따라서 $P = -3$ 이므로

$$5^{-P} = 5^3 = 125$$

답 125

13

$$\begin{aligned}
 (1) \log_4 27 \times \log_3 \frac{1}{25} \times \log_5 64 \\
 &= \frac{\log_2 27}{\log_2 4} \times \frac{\log_2 \frac{1}{25}}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 64}{\log_2 \sqrt{5}} \\
 &= \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \times \frac{\log_2 5^{-2}}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 2^6}{\log_2 5^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{3 \log_2 3}{2 \log_2 2} \times \frac{-2 \log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{6 \log_2 2}{\frac{1}{2} \log_2 5} \\
 &= \frac{3}{2} \times (-2) \times 12 = -36 \\
 (2) (\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 - \log_9 8) \\
 &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2} \right) \left(\frac{\log_3 2^2}{\log_3 3} - \frac{\log_3 2^3}{\log_3 3^2} \right) \\
 &= (\log_2 3 + \log_2 3) \left(2 \log_3 2 - \frac{3}{2} \log_3 2 \right) \\
 &= 2 \log_2 3 \times \frac{1}{2} \log_3 2 \\
 &= 2 \log_2 3 \times \frac{1}{2 \log_2 3} = 1
 \end{aligned}$$

답 (1) -36 (2) 1

14

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{\log_{25} a}{\log_5 a} = 1 \text{에서}$$

$a \neq 1$ 이므로

$$\log_a 2 + \log_a 3 + \frac{\log_a 5}{\log_a 25} = 1$$

$$\log_a (2 \times 3) + \frac{\log_a 5}{\log_a 5^2} = 1$$

$$\log_a 6 + \frac{\log_a 5}{2 \log_a 5} = 1$$

$$\log_a 6 + \frac{1}{2} = 1, \text{ 즉 } \log_a 6 = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = 6 \quad \therefore a = 6^2 = 36$$

답 36

15

$$\log_a \sqrt{c} = \log_{\sqrt{b}} a \text{에서}$$

$$\log_a \sqrt{c} = \frac{1}{\log_a \sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{2} \log_a c = \frac{2}{\log_a b}$$

이때 $\log_a b = 18$ 이므로

$$\frac{1}{2} \log_a c = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \quad \therefore \log_a c = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{18}{\frac{2}{9}} = 81$$

답 81

16

$$\begin{aligned}
 (1) \log_3 24 \times \log_4 24 - \log_2 \sqrt{3} - \log_9 512 \\
 &= \log_3 (3 \times 2^3) \times \log_{2^2} (3 \times 2^3) - \log_2 3^{\frac{1}{2}} - \log_{3^2} 2^9 \\
 &= (\log_3 3 + \log_3 2^3) \times \frac{1}{2} (\log_2 3 + \log_2 2^3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{9}{2} \log_3 2 \\
 &= \frac{1}{2} (1 + 3 \log_3 2) (\log_2 3 + 3) - \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{9}{2} \log_3 2 \\
 &= \frac{1}{2} (\log_2 3 + 3 + 3 \log_3 2 \times \log_2 3 + 9 \log_3 2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{9}{2} \log_3 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(6 + \log_2 3 + 9\log_3 2) - \frac{1}{2}\log_2 3 - \frac{9}{2}\log_3 2 \\
&= 3 + \frac{1}{2}\log_2 3 + \frac{9}{2}\log_3 2 - \frac{1}{2}\log_2 3 - \frac{9}{2}\log_3 2 \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$(2) 8^{\log_3 \sqrt{45} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_8 81} \text{에 대하여}$$

$$\begin{aligned}
&\log_2 \sqrt{45} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_8 81 \\
&= \log_2 3\sqrt{5} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_2 3^4 \\
&= \log_2 3\sqrt{5} + \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_2 \sqrt[3]{3^4} \quad \left[= \frac{4}{3}\log_2 3 = \log_2 3^{\frac{4}{3}} \right] \\
&= \log_2 \left(\frac{3\sqrt{5} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^4}} \right) \\
&= \log_2 \left(3\sqrt{5} \times \frac{1}{3} \right) \\
&= \log_2 \sqrt{5} \\
&\therefore (\text{주어진 식}) = 8^{\log_2 \sqrt{5}} \\
&= 2^{3\log_2 \sqrt{5}} = 2^{\log_2 5\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}
\end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) $5\sqrt{5}$

17

$$a = \log_2 3, b = \log_3 7, c = \log_7 9 \text{이므로}$$

$$ab = \log_2 3 \times \log_3 7 = \log_2 7$$

$$abc = \log_2 3 \times \log_3 7 \times \log_7 9 = \log_2 9$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1+ab}{1+a+abc} &= \frac{\log_2 2 + \log_2 7}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 9} \\
&= \frac{\log_2 (2 \times 7)}{\log_2 (2 \times 3 \times 9)} = \frac{\log_2 14}{\log_2 54} \\
&= \log_{54} 14 = \log_{54} N
\end{aligned}$$

$$\therefore N = 14$$

답 14

18

$$A = 2^{\log_3 4^{-1}} = 2^{2^{-1}} = 2^1 = 2$$

$$\begin{aligned}
B &= \log_2 \left(\frac{4\log_3 16}{\log_9 16} \right) = \log_2 \left(\frac{4\log_3 16}{\log_{3^2} 16} \right) \\
&= \log_2 \left(\frac{4\log_3 16}{\frac{1}{2}\log_3 16} \right) \\
&= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \log_{\sqrt{3}} 3 + \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3 + \log_2 2^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore C < A < B$$

답 $C < A < B$

19

$$2^x = 3^y = 24 \text{에서 로그의 정의에 의하여}$$

$$x = \log_2 24, y = \log_3 24$$

$$\begin{aligned}
\therefore (x-3)(y-1) &= (\log_2 24 - 3)(\log_3 24 - 1) \\
&= (\log_2 24 - \log_2 8)(\log_3 24 - \log_3 3) \\
&= \log_2 3 \times \log_3 8 \\
&= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3
\end{aligned}$$

답 3

20

$$15^x = 16, 60^y = 32 \text{에서 로그의 정의에 의하여}$$

$$x = \log_{15} 16, y = \log_{60} 32 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{y} - \frac{4}{x} &= \frac{5}{\log_{60} 32} - \frac{4}{\log_{15} 16} \\
&= 5\log_{32} 60 - 4\log_{16} 15 \\
&= 5\log_{2^5} 60 - 4\log_{2^4} 15 \\
&= \log_2 60 - \log_2 15 \\
&= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2
\end{aligned}$$

$$\therefore 3^{\frac{5}{y} - \frac{4}{x}} = 3^2 = 9$$

답 9

다른 풀이

$$15^x = 16 \text{에서 } 15 = 16^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{4}{x}} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$60^y = 32 \text{에서 } 60 = 32^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{5}{y}} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } 4 = 2^{\frac{5}{y} - \frac{4}{x}}$$

$$\text{이때 } 4 = 2^2 \text{이므로 } \frac{5}{y} - \frac{4}{x} = 2$$

$$\therefore 3^{\frac{5}{y} - \frac{4}{x}} = 3^2 = 9$$

21

세 양수 a, b, c 는 1이 아니므로

$$\sqrt{a}=b^3=c^2\text{에서}$$

$$a^{\frac{1}{2}}=b^3=c^2 \quad \therefore b=a^{\frac{1}{6}}, c=a^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a$$

$$= \log_a a^{\frac{1}{6}} + \log_{a^{\frac{1}{6}}} a^{\frac{1}{4}} + \log_{a^{\frac{1}{4}}} a$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + 4 = \frac{17}{3}$$

답 $\frac{17}{3}$

22

이차방정식 $x^2 - 10x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\log_5 a, \log_5 \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 a + \log_5 \beta = 10, \log_5 a \times \log_5 \beta = 2$$

$$\therefore \log_a a\beta + \log_\beta a\beta$$

$$= \frac{\log_5 a\beta}{\log_5 a} + \frac{\log_5 a\beta}{\log_5 \beta}$$

$$= \log_5 a\beta \left(\frac{1}{\log_5 a} + \frac{1}{\log_5 \beta} \right)$$

$$= \log_5 a\beta \times \frac{\log_5 a + \log_5 \beta}{\log_5 a \times \log_5 \beta}$$

$$= (\log_5 a + \log_5 \beta) \times \frac{\log_5 a + \log_5 \beta}{\log_5 a \times \log_5 \beta}$$

$$= \frac{(\log_5 a + \log_5 \beta)^2}{\log_5 a \times \log_5 \beta}$$

$$= \frac{10^2}{2} = 50$$

답 50

23

이차방정식 $x^2 - 8x + 8 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = 8$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 8^2 - 4 \times 8 = 32$$

이때 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha - \beta = 4\sqrt{2}$

$$\therefore \frac{1}{\log_a(\alpha - \beta)} + \frac{1}{\log_\beta(\alpha - \beta)} = \log_{\alpha - \beta} \alpha + \log_{\alpha - \beta} \beta$$

$$= \log_{\alpha - \beta} \alpha\beta$$

$$= \log_{4\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{\frac{5}{2}}} 2^3 = \frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

24

이차방정식 $x^2 - 5x + 2k - 2 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 5, \log_2 a \times \log_2 b = 2k - 2$$

$$\log_2 a + \log_2 b = 5 \text{에서 } \log_2 ab = 5$$

즉, 로그의 정의에 의하여

$$ab = 2^5 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a + b = 12$ 이므로 $b = 12 - a$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a(12 - a) = 32, a^2 - 12a + 32 = 0$$

$$(a - 4)(a - 8) = 0 \quad \therefore a = 4 \text{ 또는 } a = 8$$

$$\therefore \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{cases} \log_2 a = 2 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} \log_2 a = 3 \\ \log_2 b = 2 \end{cases}$$

따라서 $\log_2 a \times \log_2 b = 6$ 이므로

$$2k - 2 = 6, 2k = 8$$

$$\therefore k = 4$$

답 4

25

$$\log_2 8 = 3, \log_2 16 = 4 \text{이므로 } 3 < \log_2 10 < 4$$

즉, $\log_2 10$ 의 정수 부분이 3이므로 $n = 3$

따라서 $\log_2 10$ 의 소수 부분은

$$\log_2 10 - 3 = \log_2 10 - \log_2 8 = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$\therefore \alpha = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$\therefore 4(3^n + 2^\alpha) = 4 \times (3^3 + 2^{\log_2 \frac{5}{4}}) = 4 \times \left(27 + \frac{5}{4} \right)$$

$$= 4 \times \frac{113}{4} = 113$$

답 113

26

$$\log_3 3 = 1, \log_3 9 = 2 \text{이므로}$$

$$1 < \log_3 8 < 2$$

즉, $\log_3 8$ 의 정수 부분은 1이므로 $n=1$

따라서 $x=2\log_3 8 - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} 3^{x+2} &= 3^{2\log_3 8 - 1 + 2} \\ &= 3^{\log_3 8^2 + 1} = 3^{\log_3 64 + \log_3 3} \\ &= 3^{\log_3 192} = 192 \end{aligned}$$

답 192

27

$$\log_{12} 1 = 0, \log_{12} 12 = 1, \log_{12} 144 = 2, \log_{12} 1728 = 3$$

이므로

$$(i) 2 \leq n < 12 \text{일 때, } f(n) = 0$$

$$(ii) 12 \leq n < 144 \text{일 때, } f(n) = 1$$

$$(iii) 144 \leq n \leq 150 \text{일 때, } f(n) = 2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(150) \\ = 0 \times 10 + 1 \times 132 + 2 \times 7 \\ = 146 \end{aligned}$$

답 146

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.052-054

01 7	02 78	03 63	04 21
05 7	06 60	07 30	08 $\frac{25}{12}$
09 ③	10 8	11 ④	12 25
13 ⑤	14 10	15 0	16 4
17 -8	18 63		

01

$\log_{(a+3)^2} (x^2 - 2ax + 30 + a)$ 에 대하여

(밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 에서 $(a+3)^2 > 0$, $(a+3)^2 \neq 1$ 이어야 하므로

$$(a+3)^2 > 0 \text{에서 } a+3 \neq 0 \quad \therefore a \neq -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(a+3)^2 \neq 1 \text{에서 } a \neq -4 \text{이고 } a \neq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(진수) >0 에서 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$x^2 - 2ax + 30 + a > 0 \text{이 항상 성립해야 하므로 이차방정식}$$

$x^2 - 2ax + 30 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (30 + a) < 0$$

$$a^2 - a - 30 < 0, (a+5)(a-6) < 0$$

$$\therefore -5 < a < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 a 는 $-1, 0, 1, \cdots, 5$ 의 7개이다.

답 7

02

$3\log_n 4 = k$ (k 는 자연수)라 하면

$$\log_n 4 = \frac{k}{3}$$

이므로 로그의 정의에 의하여

$$n^{\frac{k}{3}} = 4 \quad \therefore n = 4^{\frac{3}{k}} = 2^{\frac{6}{k}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이므로 $\frac{6}{k}$ 도 자연수이어야 한다.

즉, k 는 6의 양의 약수이므로

$$k = 1, 2, 3, 6$$

$$(i) k=1 \text{일 때, } n=2^6=64$$

$$(ii) k=2 \text{일 때, } n=2^3=8$$

$$(iii) k=3 \text{일 때, } n=2^2=4$$

$$(iv) k=6 \text{일 때, } n=2^1=2$$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은 $64 + 8 + 4 + 2 = 78$

답 78

03

$$\begin{aligned} \log_4 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log_4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_4 \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ + \cdots + \log_4 \left(1 + \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

$$= \log_4 \frac{2}{1} + \log_4 \frac{3}{2} + \log_4 \frac{4}{3} + \cdots + \log_4 \frac{a+1}{a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log_4 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{a+1}{a} \right) \\
 &= \log_4 (a+1) \\
 &\text{즉, } \log_4 (a+1) = 3 \text{이므로 로그의 정의에 의하여} \\
 &a+1 = 4^3, a+1 = 64 \\
 &\therefore a = 63
 \end{aligned}$$

답 63

04

576을 소인수분해하면 $576 = 2^6 \times 3^2$ 이므로 576의 약수의 개수는

$$(6+1) \times (2+1) = 21$$

이다. 576의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21}$ 이라 하면

$$a_1 a_{21} = a_2 a_{20} = a_3 a_{19} = \dots = a_{10} a_{12} = 576, a_{11} = 24$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_{24} a_1 + \log_{24} a_2 + \log_{24} a_3 + \dots + \log_{24} a_{21} \\
 &= \log_{24} (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{21}) \\
 &= \log_{24} (a_1 a_{21} \times a_2 a_{20} \times a_3 a_{19} \times \dots \times a_{10} a_{12} \times a_{11}) \\
 &= \log_{24} (576^{10} \times 24) = \log_{24} (24^{20} \times 24^1) \\
 &= \log_{24} 24^{21} = 21
 \end{aligned}$$

답 21

보충 설명

소인수분해를 이용하여 양의 약수의 곱 구하기 | 자연수 N 이 $N = a^m \times b^n$ (a, b 는 서로 다른 소수, m, n 은 자연수)으로 소인수분해 될 때, N 의 모든 양의 약수의 곱은

$$N^{\frac{\text{양의 약수의 개수}}{2}} = N^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}$$

05

$ab = 64$ 의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_2 ab = \log_2 64 \text{에서 } \log_2 ab = \log_2 2^6$$

$$\therefore \log_2 a + \log_2 b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 \frac{b^2}{a} = 9 \text{에서 } 2\log_2 b - \log_2 a = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\log_2 a = X, \log_2 b = Y$ 로 놓으면

$$\textcircled{1} \text{에서 } X + Y = 6$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 2Y - X = 9$$

두 식을 연립하여 풀면 $X = 1, Y = 5$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_2 a^2 b &= 2\log_2 a + \log_2 b \\
 &= 2X + Y \\
 &= 2 \times 1 + 5 = 7
 \end{aligned}$$

답 7

다른 풀이

$$\log_2 \frac{b^2}{a} = 9 \text{에서 로그의 정의에 의하여 } \frac{b^2}{a} = 2^9$$

$$\therefore b^2 = a \times 2^9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$ab = 64 \text{이고, } b > 0 \text{이므로}$$

$$a = \frac{64}{b} = \frac{2^6}{b} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$b^2 = \frac{2^6}{b} \times 2^9, b^3 = 2^{15} = (2^5)^3$$

$$\therefore b = 2^5, a = \frac{2^6}{b} = \frac{2^6}{2^5} = 2$$

$$\therefore \log_2 a^2 b = \log_2 (2^2 \times 2^5) = \log_2 2^7 = 7$$

06

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_6 x} + \frac{1}{\log_{12} x} + \frac{1}{\log_{25} x} = \frac{2}{\log_k x} \text{에서}$$

$$\log_x 2 + \log_x 6 + \log_x 12 + \log_x 25 = 2\log_x k$$

$$\log_x (2 \times 6 \times 12 \times 25) = \log_x k^2$$

$$\text{즉, } \log_x (2^4 \times 3^2 \times 5^2) = \log_x k^2 \text{이므로}$$

$$2^4 \times 3^2 \times 5^2 = k^2$$

$$\therefore k = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \quad (\because k > 0, k \neq 1)$$

답 60

07

$$\frac{\log_c b}{\log_a b} = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{\log_b a}{\log_b c} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \leftarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \log_b c = \frac{1}{\log_a c}$$

$$\log_b c = 2\log_b a, \log_b c = \log_b a^2$$

$$\therefore c = a^2$$

$$\frac{\log_b c}{\log_a c} = \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{1}{3} \text{이므로 } \leftarrow \log_a c = \frac{1}{\log_c a}, \log_b c = \frac{1}{\log_c b}$$

$$\log_c b = 3\log_c a, \log_c b = \log_c a^3$$

$$\therefore b = a^3$$

이때 a, b, c 는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$$a = 2, b = a^3 = 8, c = a^2 = 4$$

$$\therefore a + 2b + 3c = 2 + 2 \times 8 + 3 \times 4 = 30$$

답 30

08

$\log_a c : \log_b c = 3 : 4$ 에서

$$3 \log_b c = 4 \log_a c$$

$$\frac{3}{\log_c b} = \frac{4}{\log_c a} \text{이므로 } 3 \log_c a = 4 \log_c b$$

$$\log_c a^3 = \log_c b^4 \quad \therefore a^3 = b^4$$

즉, $b = a^{\frac{3}{4}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_a b + \log_b a &= \log_a a^{\frac{3}{4}} + \log_{a^{\frac{3}{4}}} a \\ &= \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{25}{12}$

09

$\log_2 3 = a, \log_3 5 = b$ 에서

$$ab = \log_2 3 \times \log_3 5 = \log_2 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{12} \sqrt{90} &= \frac{1}{2} \log_{12} 90 = \frac{\log_2 90}{2 \log_2 12} \\ &= \frac{\log_2 (2 \times 3^2 \times 5)}{2 \log_2 (2^2 \times 3)} = \frac{1 + 2 \log_2 3 + \log_2 5}{2(2 + \log_2 3)} \\ &= \frac{1 + 2a + ab}{2(2 + a)} = \frac{ab + 2a + 1}{2a + 4} \end{aligned}$$

답 ③

10

두 점 $A(-1, \log_2 a), B(1, \log_4 b)$ 를 지나는 직선 AB가

직선 $y = -\frac{1}{2}x + 5$ 에 수직이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

$$\therefore, \frac{\log_4 b - \log_2 a}{1 - (-1)} = 2 \text{에서}$$

$$\log_4 b - \log_2 a = 4, \log_4 b - \log_4 a^2 = 4$$

$$\log_4 \frac{b}{a^2} = 4 \quad \therefore \frac{b}{a^2} = 4^4 = 2^8$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 b - 2 \log_2 a &= \log_2 \frac{b}{a^2} \\ &= \log_2 2^8 = 8 \end{aligned}$$

답 8

보충 설명

└ 공통수학2 p.062 참고

두 직선의 위치 관계 | 두 직선 $y = mx + n, y = m'x + n'$ 의

위치 관계는 다음과 같다.

(1) 평행하다. $\Leftrightarrow m = m', n \neq n'$

(2) 일치한다. $\Leftrightarrow m = m', n = n'$

(3) 한 점에서 만난다. $\Leftrightarrow m \neq m'$

(4) 수직이다. $\Leftrightarrow mm' = -1$

11

세 양수 a, b, c 에 대하여

$$\frac{1}{\log_{a+b} c} + \frac{1}{\log_{a-b} c} = 2 \text{이므로}$$

$$\log_c (a+b) + \log_c (a-b) = 2$$

$$\log_c (a+b)(a-b) = 2$$

즉, $\log_c (a^2 - b^2) = 2$ 이므로 로그의 정의에 의하여

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

답 ④

보충 설명

로그가 정의될 조건에서 (밑) >0 , (밑) $\neq 1$ 이므로

$$\log_{a-b} c \text{에서 } a > b, a \neq b + 1$$

이때 $a > b$ 에서 $a \neq b$ 이고, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이 될 수 없으므로 보기 ①은 제외된다.

또한, b 는 빗변의 길이가 될 수 없으므로 보기 ③도 제외된다.

12

$\frac{b}{a} = 8$ 의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 8, \log_2 b - \log_2 a = 3$$

$$\therefore \log_2 a - \log_2 b = -3 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$a^{\log_4 b} = \sqrt[8]{128}$ 의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_2 a^{\log_4 b} = \log_2 \sqrt[8]{128}, \log_4 b \times \log_2 a = \log_2 2^{\frac{7}{8}}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 b \times \log_2 a = \frac{7}{8}$$

$$\therefore \log_2 a \times \log_2 b = \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2\} \\ = 2\{(\log_2 a - \log_2 b)^2 + 2 \times \log_2 a \times \log_2 b\} \\ = 2 \times \left\{(-3)^2 + 2 \times \frac{7}{4}\right\} \quad (\because \textcircled{I}, \textcircled{L}) \\ = 25 \end{aligned}$$

답 25

13

$$a^5 = b^3 \text{에서 } b = a^{\frac{5}{3}} \quad \therefore A = \log_a b = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$$

$$b^3 = c^2 \text{에서 } c = b^{\frac{3}{2}} \quad \therefore B = \log_b c = \log_b b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$a^5 = c^2 \text{에서 } a = c^{\frac{2}{5}} \quad \therefore C = \log_c a = \log_c c^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore C < B < A$$

답 ⑤

14

$85^x = 64$, $17^y = 8$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = \log_{85} 64, y = \log_{17} 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{6}{x} - \frac{3}{y} &= \frac{6}{\log_{85} 64} - \frac{3}{\log_{17} 8} \\ &= 6 \log_{64} 85 - 3 \log_8 17 \\ &= 6 \log_{2^6} 85 - 3 \log_{2^3} 17 \\ &= \log_2 85 - \log_2 17 \\ &= \log_2 \frac{85}{17} = \log_2 5 \end{aligned}$$

따라서 한 자리 자연수 a , b 에 대하여 $\log_2 5 = \log_a b$ 이므로

$$a=2, b=5$$

$$\therefore ab = 2 \times 5 = 10$$

답 10

15

a, b, c 는 1이 아닌 양수이고, x, y, z 는 0이 아닌 실수이므로 $a^x = b^y = c^z = k$ ($k > 0, k \neq 1$)라 하면 로그의 정의에 의하여

$$x = \log_a k, y = \log_b k, z = \log_c k$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} &= \frac{1}{\log_a k} + \frac{3}{\log_b k} + \frac{5}{\log_c k} \\ &= \log_k a + 3 \log_k b + 5 \log_k c \\ &= \log_k a + \log_k b^3 + \log_k c^5 \\ &= \log_k ab^3c^5 \\ &= \log_k 1 \quad (\because ab^3c^5 = 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

다른 풀이

a, b, c 는 1이 아닌 양수이고, x, y, z 는 0이 아닌 실수이므로 $a^x = b^y = c^z = k$ ($k > 0, k \neq 1$)라 하면

$$a^x = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$b^y = k \text{에서 } b = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$c^z = k \text{에서 } c = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②, ③을 $ab^3c^5 = 1$ 에 대입하면

$$k^{\frac{1}{x}} \times \left(k^{\frac{1}{y}}\right)^3 \times \left(k^{\frac{1}{z}}\right)^5 = 1, k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{3}{y}} \times k^{\frac{5}{z}} = 1$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z}} = 1$$

이때 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 0$$

16

이차방정식 $x^2 - x \log_3 18 + k = 0$ 의 한 근이 $\log_3 2$ 이므로 다른 한 근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 2 + \alpha = \log_3 18 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$\alpha \times \log_3 2 = k \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①에서

$$\alpha = \log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

이것을 ②에 대입하면 $2 \times \log_3 2 = k$

$$\therefore k = 2 \log_3 2 = \log_3 4$$

$$\therefore 3^k = 3^{\log_3 4} = 4$$

답 4

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - x \log_3 18 + k = 0$ 의 한 근이 $\log_3 2$ 이므로
이 이차방정식에 $x = \log_3 2$ 를 대입하면

$$(\log_3 2)^2 - \log_3 2 \times \log_3 18 + k = 0$$

$$(\log_3 2)^2 - \log_3 2 \times \log_3 (3^2 \times 2) + k = 0$$

$$(\log_3 2)^2 - \log_3 2 \times (\log_3 3^2 + \log_3 2) + k = 0$$

$$(\log_3 2)^2 - \log_3 2 \times (2 + \log_3 2) + k = 0$$

$$(\log_3 2)^2 - 2 \log_3 2 - (\log_3 2)^2 + k = 0$$

$$k - 2 \log_3 2 = 0$$

$$\therefore k = 2 \log_3 2 = \log_3 4$$

$$\therefore 3^k = 3^{\log_3 4} = 4$$

17

$\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$ 이므로 $2 < \log_2 7 < 3$

즉, $\log_2 7$ 의 정수 부분이 2이므로

$$n = 2, a = \log_2 7 - 2$$

따라서 이차방정식 $2x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 2, $\log_2 7 - 2$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{p}{2} = 2 + (\log_2 7 - 2), \quad \frac{q}{2} = 2(\log_2 7 - 2)$$

$$-\frac{p}{2} = 2 + (\log_2 7 - 2), \quad \text{즉} \quad -\frac{p}{2} = \log_2 7 \text{에서}$$

$$p = -2 \log_2 7$$

$$\frac{q}{2} = 2(\log_2 7 - 2), \quad \text{즉} \quad \frac{q}{2} = 2 \log_2 7 - 4 \text{에서}$$

$$q = 4 \log_2 7 - 8$$

$$\therefore 2p + q = 2 \times (-2 \log_2 7) + (4 \log_2 7 - 8)$$

$$= -4 \log_2 7 + 4 \log_2 7 - 8$$

$$= -8$$

답 -8

18

두 자리 자연수 n 에 대하여 $10 \leq n < 100$ 이고,

$$\log_4 4 = 1, \log_4 16 = 2, \log_4 64 = 3, \log_4 256 = 4,$$

$\log_5 5 = 1, \log_5 25 = 2, \log_5 125 = 3$ 이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $10 \leq n < 16$ 일 때,

$$1 < \log_4 n < 2, \quad 1 < \log_5 n < 2$$

즉, $\log_4 n$ 과 $\log_5 n$ 의 정수 부분은 1로 같다.

(ii) $16 \leq n < 25$ 일 때,

$$2 \leq \log_4 n < 3, \quad 1 < \log_5 n < 2$$

즉, $\log_4 n$ 과 $\log_5 n$ 의 정수 부분은 각각 2, 1로 같지 않다.

(iii) $25 \leq n < 64$ 일 때,

$$2 < \log_4 n < 3, \quad 2 \leq \log_5 n < 3$$

즉, $\log_4 n$ 과 $\log_5 n$ 의 정수 부분은 2로 같다.

(iv) $64 \leq n < 100$ 일 때,

$$3 \leq \log_4 n < 4, \quad 2 < \log_5 n < 3$$

즉, $\log_4 n$ 과 $\log_5 n$ 의 정수 부분은 각각 3, 2로 같지 않다.

(i)~(iv)에서 $\log_4 n$ 의 정수 부분과 $\log_5 n$ 의 정수 부분이 같도록 하는 n 의 값의 범위는 $10 \leq n < 16$, $25 \leq n < 64$ 이므로 두 자리 자연수 n 의 최댓값은 63이다.

답 63

2 상용로그

기본 + 필수연습

본문 pp.058-064

28 (1) $\frac{3}{4}$ (2) -4 (3) $\frac{3}{2}$

29 (1) 2.6222 (2) 4.6222 (3) -0.3778

30 (1) 정수 부분 : 2, 소수 부분 : 0.0755

(2) 정수 부분 : -5, 소수 부분 : 0.0755

31 (1) 15자리 (2) 27자리

32 (1) 1.68 (2) -0.4 (3) 0.59

33 $3a + 4$ 34 $\frac{a - 3b + 3}{2a}$ 35 0.058

36 368 37 (1) 21자리 (2) 18째 자리

38 11째 자리 39 (1) 19자리 (2) 7 40 5

41 149 42 6

28

(1) $\log \sqrt[4]{1000} = \log_{10} 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

(2) $\log 0.0001 = \log_{10} \frac{1}{10000}$
 $= \log_{10} 10^{-4}$
 $= -4$

$$(3) \log 10\sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} \\ = \frac{3}{2}$$

답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) -4 (3) $\frac{3}{2}$

29

$$(1) \log 419 = \log (4.19 \times 10^2) \\ = \log 4.19 + \log 10^2 \\ = 0.6222 + 2 = 2.6222$$

$$(2) \log 41900 = \log (4.19 \times 10^4) \\ = \log 4.19 + \log 10^4 \\ = 0.6222 + 4 = 4.6222$$

$$(3) \log 0.419 = \log (4.19 \times 10^{-1}) \\ = \log 4.19 + \log 10^{-1} \\ = 0.6222 - 1 = -0.3778$$

답 (1) 2.6222 (2) 4.6222 (3) -0.3778

30

$$(1) \log 119 = \log (1.19 \times 10^2) \\ = \log 1.19 + \log 10^2 \\ = 2 + 0.0755$$

즉, $\log 119$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 0.0755이다.

$$(2) \log 0.0000119 = \log (1.19 \times 10^{-5}) \\ = \log 1.19 + \log 10^{-5} \\ = -5 + 0.0755$$

즉, $\log 0.0000119$ 의 정수 부분은 -5 , 소수 부분은 0.0755이다.

답 (1) 정수 부분 : 2, 소수 부분 : 0.0755
(2) 정수 부분 : -5 , 소수 부분 : 0.0755

31

$$(1) \log 3^{30} = 30 \log 3 = 30 \times 0.4771 = 14.313$$

즉, $\log 3^{30}$ 의 정수 부분은 14이므로 3^{30} 은 15자리 자연수이다.

$$(2) \log 21^{20} = 20 \log 21 \\ = 20 (\log 3 + \log 7) \\ = 20 \times (0.4771 + 0.8451) = 26.444$$

즉, $\log 21^{20}$ 의 정수 부분은 26이므로 21^{20} 은 27자리 자연수이다.

답 (1) 15자리 (2) 27자리

32

$$(1) \log 48 = \log (2^4 \times 3) \\ = \log 2^4 + \log 3 \\ = 4 \log 2 + \log 3 \\ = 4 \times 0.30 + 0.48 = 1.68$$

$$(2) \log 0.4 = \log \frac{4}{10} \\ = \log 2^2 - \log 10 \\ = 2 \log 2 - 1 \\ = 2 \times 0.30 - 1 = -0.4$$

$$(3) \log \sqrt{15} = \log (3 \times 5)^{\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{2} \log \left(\frac{3 \times 10}{2} \right) \\ = \frac{1}{2} (\log 3 + \log 10 - \log 2) \\ = \frac{1}{2} (\log 3 + 1 - \log 2) \\ = \frac{1}{2} \times (0.48 + 1 - 0.30) = 0.59$$

답 (1) 1.68 (2) -0.4 (3) 0.59

33

$$\log 0.2 = a \text{에서}$$

$$\log \frac{2}{10} = a, \log 2 - 1 = a$$

즉, $\log 2 = a + 1$ 이므로

$$\log 80 = \log (2^3 \times 10) \\ = \log 2^3 + \log 10 \\ = 3 \log 2 + 1 \\ = 3(a + 1) + 1 \\ = 3a + 4$$

답 $3a + 4$

34

★ $\log 5 = b$ 에서

$$\log \frac{10}{2} = b, \quad 1 - \log 2 = b$$

즉, $\log 2 = 1 - b$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_9 24 &= \frac{\log 24}{\log 9} = \frac{\log (2^3 \times 3)}{\log 3^2} \\ &= \frac{3\log 2 + \log 3}{2\log 3} \\ &= \frac{3(1-b) + a}{2a} \\ &= \frac{a-3b+3}{2a} \end{aligned}$$

답 $\frac{a-3b+3}{2a}$

35

$$\log x = -1.2366 = -2 + 0.7634$$

상용로그표에서 $\log 5.8 = 0.7634$ 이므로

$$\begin{aligned} \log x &= \log 10^{-2} + \log 5.8 \\ &= \log (10^{-2} \times 5.8) \\ &= \log 0.058 \end{aligned}$$

따라서 x 의 값은 0.058이다.

답 0.058

36

$$\log x^2 = 2 \log x = 3.0882 \text{에서}$$

$$\log x = \frac{1}{2} \times 3.0882 = 1.5441 = 1 + 0.5441$$

□ $x > 0$ 이므로 $\log x$ 를 정의할 수 있다.

상용로그표에서 $\log 3.5 = 0.5441$ 이므로

$$\begin{aligned} \log x &= \log 10 + \log 3.5 = \log (10 \times 3.5) = \log 35 \\ \therefore x &= 35 \end{aligned}$$

$$\text{또한, } \log \sqrt{y} = \frac{1}{2} \log y = -0.2388 \text{에서}$$

$$\log y = 2 \times (-0.2388) = -0.4776 = -1 + 0.5224$$

□ $y > 0$ 이므로 $\log y$ 를 정의할 수 있다.

상용로그표에서 $\log 3.33 = 0.5224$ 이므로

$$\begin{aligned} \log y &= \log 10^{-1} + \log 3.33 \\ &= \log (10^{-1} \times 3.33) \\ &= \log 0.333 \end{aligned}$$

$$\therefore y = 0.333$$

$$\therefore x + 1000y = 35 + 333 = 368$$

답 368

37

(1) 5^{30} 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log 5^{30} &= 30 \log 5 = 30 \log \frac{10}{2} \\ &= 30(\log 10 - \log 2) \\ &= 30 \times (1 - 0.3010) \\ &= 20.97 = 20 + 0.97 \end{aligned}$$

즉, $\log 5^{30}$ 의 정수 부분이 20이므로 5^{30} 은 21자리 자연수이다.

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{25}$ 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{5}\right)^{25} &= \log 5^{-25} = -25 \log \frac{10}{2} \\ &= -25(\log 10 - \log 2) \\ &= -25 \times (1 - 0.3010) \\ &= -17.475 = -18 + 0.525 \end{aligned}$$

즉, $\log \left(\frac{1}{5}\right)^{25}$ 의 정수 부분이 -18이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{25}$ 은 소수점 아래 18째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 21자리 (2) 18째 자리

38

$\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{12}\right)^{10} &= \log 12^{-10} = -10 \log (2^2 \times 3) \\ &= -10(2 \log 2 + \log 3) \\ &= -10 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771) \\ &= -10 \times 1.0791 = -10.791 \\ &= (-10 - 1) + (1 - 0.791) \\ &= -11 + 0.209 \end{aligned}$$

즉, $\log\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ 의 정수 부분이 -11 이므로 $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ 은 소수점 아래 11째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 11째 자리

39

(1) 5^{27} 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log 5^{27} &= 27 \log 5 \\ &= 27 \log \frac{10}{2} \\ &= 27(\log 10 - \log 2) \\ &= 27 \times (1 - 0.3010) \\ &= 18.873 = 18 + 0.873\end{aligned}$$

즉, $\log 5^{27}$ 의 정수 부분이 18이므로 5^{27} 은 19자리 자연수이다.

(2) $\log 5^{27} = 18 + 0.873$ 에서 $\log 5^{27}$ 의 소수 부분이 0.873이고,

$$\log 7 = 0.8451, \log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0.9030 \text{이므로}$$

$\log 7 < 0.873 < \log 8$

$$\log 7 + 18 < 18.873 < \log 8 + 18$$

즉, $\log 7 + \log 10^{18} < \log 5^{27} < \log 8 + \log 10^{18}$ 이므로

$$\log(7 \times 10^{18}) < \log 5^{27} < \log(8 \times 10^{18})$$

$$\therefore 7 \times 10^{18} < 5^{27} < 8 \times 10^{18}$$

따라서 5^{27} 의 최고 자리의 숫자는 7이다.

답 (1) 19자리 (2) 7

40

$\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{2}{3}\right)^{30} &= 30(\log 2 - \log 3) = 30 \times (0.3010 - 0.4771) \\ &= 30 \times (-0.1761) = -5.283 \\ &= -6 + 0.717\end{aligned}$$

즉, $\log\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ 의 소수 부분은 0.717이다.

이때

$$\begin{aligned}\log 5 &= \log \frac{10}{2} \\ &= 1 - \log 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.6990, \\ \log 6 &= \log(2 \times 3) \\ &= \log 2 + \log 3 \\ &= 0.3010 + 0.4771 = 0.7781\end{aligned}$$

이므로

$$\log 5 < 0.717 < \log 6$$

각 변에 -6 을 더하면

$$-6 + \log 5 < -6 + 0.717 < -6 + \log 6$$

즉, $\log 10^{-6} + \log 5 < \log\left(\frac{2}{3}\right)^{30} < \log 10^{-6} + \log 6$ 이므로

$$\log(5 \times 10^{-6}) < \log\left(\frac{2}{3}\right)^{30} < \log(6 \times 10^{-6})$$

$$\therefore 5 \times 10^{-6} < \left(\frac{2}{3}\right)^{30} < 6 \times 10^{-6}$$

따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{30}$ 의 소수점 아래에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 숫자는 5이다.

답 5

41

$$y = 10 \log \frac{x}{k} \text{에서 } y = 10(\log x - \log k) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = \frac{1}{10^5} \text{일 때 } y = 70 \text{이므로}$$

$$70 = 10\left(\log \frac{1}{10^5} - \log k\right)$$

$$7 = -5 - \log k$$

$$\therefore \log k = -12$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = 10(\log x + 12)$$

$x = 800$ 일 때, y 의 값을 구하면

$$\begin{aligned}y &= 10(\log 800 + 12) \\ &= 10(3 \log 2 + \log 100 + 12) \\ &= 10 \times (3 \times 0.3 + 2 + 12) \quad (\because \log 2 = 0.3) \\ &= 10 \times 14.9 = 149\end{aligned}$$

따라서 음향출력이 800W일 때, 음향파워레벨은 149dB이다.

답 149

42

$W=15$, $S=186$, $N=a$ 일 때,
 $C=75$ 이므로

$$75=15 \times \log_2 \left(1 + \frac{186}{a}\right)$$

$$5=\log_2 \left(1 + \frac{186}{a}\right)$$

로그의 정의에 의하여

$$1 + \frac{186}{a} = 2^5 = 32$$

$$\frac{186}{a} = 31 \quad \therefore a = 6$$

답 6

STEP 1

개념 마무리

본문 p.065

- 19 $\frac{a-b+1}{2}$ 20 434 21 $10^{\frac{9}{2}}$ 22 $\frac{31}{6}$
 23 7 24 ④

19

$$\log 6 = a \text{에서 } \log 2 + \log 3 = a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log 15 = b \text{에서 } \log \left(\frac{3 \times 10}{2}\right) = b$$

$$\therefore \log 3 + 1 - \log 2 = b \quad \cdots \textcircled{2}$$

① - ②을 하면

$$(\log 2 + \log 3) - (\log 3 + 1 - \log 2) = a - b$$

$$2\log 2 - 1 = a - b, \quad 2\log 2 = a - b + 1$$

$$\therefore \log 2 = \frac{a - b + 1}{2}$$

답 $\frac{a-b+1}{2}$

20

$$\log x - \log 4240 = -0.9899 \text{이고}$$

상용로그표에서 $\log 4.24 = 0.6274$ 이므로

$$\log 4240 = \log (4.24 \times 10^3)$$

$$= \log 4.24 + \log 10^3$$

$$= 0.6274 + 3 = 3.6274$$

$$\therefore \log x = \log 4240 - 0.9899$$

$$= 3.6274 - 0.9899$$

$$= 2.6375 = 2 + 0.6375$$

상용로그표에서 $\log 4.34 = 0.6375$ 이므로

$$\log x = \log 10^2 + \log 4.34 = \log (10^2 \times 4.34)$$

$$= \log 434$$

$$\therefore x = 434$$

답 434

21

$$\log x - \log x^3 = \log x - 3\log x$$

$$= -2\log x = n \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

또한, $100 \leq x < 1000$ 에서

$$\log 100 = \log 10^2 = 2, \quad \log 1000 = \log 10^3 = 3 \text{이므로}$$

$$2 \leq \log x < 3$$

$$\therefore -6 < -2\log x \leq -4$$

이때 ①에서 $-2\log x$ 가 정수이므로

$$-2\log x = -5 \quad \text{또는} \quad -2\log x = -4$$

$$\text{즉, } \log x = \frac{5}{2} \quad \text{또는} \quad \log x = 2$$

$$\therefore x = 10^{\frac{5}{2}} \quad \text{또는} \quad x = 10^2$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{5}{2}} \times 10^2 = 10^{\frac{5}{2} + 2} = 10^{\frac{9}{2}}$$

답 $10^{\frac{9}{2}}$

22

$5 < \log x < 6$ 에서 $\log x$ 의 정수 부분은 5이다.

$$\text{즉, } \log x = 5 + \underbrace{\alpha}_{\log x \text{의 소수 부분}} \quad (0 < \alpha < 1) \text{라 하면}$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

이때 $0 < \alpha < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} < 1$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}$ 이다.

이때 $\log x$ 와 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$\alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \log x = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$$

답 $\frac{31}{6}$

23

n^{50} 이 34자리 자연수이므로 $\log n^{50}$ 의 정수 부분은 33이다.

즉, $33 \leq \log n^{50} < 34$ 이므로

$$33 \leq 50 \log n < 34$$

$$\therefore 0.66 \leq \log n < 0.68 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, $\frac{1}{n^{10}}$ 에 상용로그를 취하면

$$\log \frac{1}{n^{10}} = \log n^{-10} = -10 \log n$$

이고, $\textcircled{1}$ 에서 $-6.8 < -10 \log n \leq -6.6$ 이므로 $\log \frac{1}{n^{10}}$ 의

정수 부분은 -7 이다.

따라서 $\frac{1}{n^{10}}$ 은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌

숫자가 나타나므로

$$k=7$$

답 7

24

절대 등급이 4.8, 광도가 L 인 별을 A , 절대 등급이 1.3, 광도가 kL 인 별을 B 라 하면 $M_A=4.8$, $L_A=L$, $M_B=1.3$, $L_B=kL$ 이므로

$$4.8 - 1.3 = -2.5 \log \left(\frac{L}{kL} \right)$$

$$3.5 = -2.5 \log \frac{1}{k}, \quad 3.5 = 2.5 \log k$$

$$\log k = \frac{7}{5} \quad \therefore k = 10^{\frac{7}{5}}$$

답 ④

STEP 2 개념 마무리

본문 p.066

1 12	2 32	3 17	4 3
5 3	6 29		

1

$\log_a b = \frac{k}{2}$ 에서 로그의 정의에 의하여 $b = a^{\frac{k}{2}}$

즉, $b^2 = a^k$ 이므로

$$A_k = \left\{ \frac{b}{a} \mid b^2 = a^k, a \text{와 } b \text{는 } 2 \text{ 이상 } 100 \text{ 이하의 자연수} \right\}$$

(i) $k=3$ 일 때,

$b^2 = a^3$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2^2, 2^3), (3^2, 3^3), (4^2, 4^3)$

이므로 $A_3 = \{2, 3, 4\}$

$$\therefore n(A_3) = 3$$

(ii) $k=4$ 일 때,

$b^2 = a^4$, 즉 $b = a^2$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 2^2), (3, 3^2), (4, 4^2), \dots, (9, 9^2), (10, 10^2)$

이므로 $A_4 = \{2, 3, 4, \dots, 9, 10\}$

$$\therefore n(A_4) = 9$$

(i), (ii)에서

$$n(A_3) + n(A_4) = 3 + 9 = 12$$

답 12

2

$$\log_2 x^{\log_2 a} + \log_2 x^{\log_2 b}$$

$$= \log_2 a \times \log_2 x + \log_2 b \times \log_2 x$$

$$= (\log_2 a + \log_2 b) \times \log_2 x$$

$$= \log_2 ab \times \log_2 x$$

(가)

$\log_2 ab \times \log_2 x = 8 \log_2 x$ 에서 $x \neq 1$, 즉 $\log_2 x \neq 0$ 이므로 양변을 $\log_2 x$ 로 나누면

$$\log_2 ab = 8$$

로그의 정의에 의하여

$$ab = 2^8$$

이때 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{2^8} = 2 \times 2^4 = 32$$

(단, 등호는 $a = b = 2^4$ 일 때 성립)

따라서 $a + b$ 의 최솟값은 32이다.

답 32

단계	채점 기준	배점
(가)	로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한 경우	30%
(나)	로그의 정의를 이용하여 ab 의 값을 구한 경우	30%
(다)	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $a + b$ 의 최솟값을 구한 경우	40%

3

조건 (가)에서 $\log_5 x + 3 \log_5 y + 2 \log_5 z = 67$ 이므로

$$\log_5 xy^3z^2 = 67$$

$$\therefore xy^3z^2 = 5^{67} \quad \dots\dots\text{㉠}$$

조건 (나)에서 $x^3 = y^2 = z^5$ 이므로

$$y = x^{\frac{3}{2}}, z = x^{\frac{3}{5}}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x \times \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^3 \times \left(x^{\frac{3}{5}}\right)^2 = 5^{67}$$

$$x^{1+\frac{9}{2}+\frac{6}{5}} = 5^{67}, x^{\frac{67}{10}} = 5^{67}, x^{\frac{1}{10}} = 5$$

$$\therefore x = 5^{10}, y = (5^{10})^{\frac{3}{2}} = 5^{15}, z = (5^{10})^{\frac{3}{5}} = 5^6$$

$$\therefore 2 \log_5 x + \log_5 y - 3 \log_5 z$$

$$= 2 \log_5 5^{10} + \log_5 5^{15} - 3 \log_5 5^6$$

$$= 2 \times 10 + 15 - 3 \times 6 = 17$$

답 17

보충 설명

조건 (나)의 $x^3 = y^2 = z^5$ 에서 세 양수 x, y, z 중 하나가 1이 되면 나머지도 모두 1이어야 하므로 이는 조건 (가)에 모순이다.

$$\therefore x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$$

4

조건 (가)에서 $2 \leq \log a < 3$ 이므로

$$\log a = 2 + g(a) \quad (\text{단, } 0 \leq g(a) < 1)$$

조건 (나)에서 $g(a) = f(b) + \frac{1}{3}$ 이고,

$f(b)$ 는 정수, $0 \leq g(a) < 1$ 이므로

$$f(b) = 0, g(a) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log a = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \log b = g(b) \quad (\text{단, } 0 \leq g(b) < 1)$$

$\log b = g(b) = 0$ 이면 $b = 1$
그런데 $b > 1$ 이므로 모순이다.
 $\therefore g(b) \neq 0$

조건 (다)에서 $g(b) = 2g(a)$ 이므로

$$g(b) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \therefore \log b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \log ab = \log a + \log b = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3$$

답 3

보충 설명

상용로그의 정수 부분과 소수 부분의 응용 |

(1) $\log A$ 의 정수 부분이 n 이다.

$$\Leftrightarrow \log A = n + a \quad (\text{단, } 0 \leq a < 1)$$

$$\Leftrightarrow n \leq \log A < n + 1$$

$$\Leftrightarrow A = a \times 10^n \quad (\text{단, } 1 \leq a < 10)$$

$$\Leftrightarrow 10^n \leq A < 10^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow [\log A] = n$$

(2) $\log A$ 와 $\log B$ 의 소수 부분이 같다.

$$\Leftrightarrow A \text{와 } B \text{의 숫자 배열이 같다.}$$

$$\Leftrightarrow \log A - \log B = k \quad (k \text{는 정수}) \text{이므로 } \frac{A}{B} = 10^k$$

$$\Leftrightarrow \log A - [\log A] = \log B - [\log B]$$

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

5

$\frac{a^2}{b}$ 은 8자리 자연수이므로 $\log \frac{a^2}{b}$ 의 정수 부분은 7이다.

$$\text{즉, } 7 \leq \log \frac{a^2}{b} < 8 \text{에서}$$

$$7 \leq 2 \log a - \log b < 8 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

또한, $\frac{a}{b^2}$ 는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌

숫자가 나타나므로 $\log \frac{a}{b^2}$ 의 정수 부분은 -2 이다.

$$\text{즉, } -2 \leq \log \frac{a}{b^2} < -1 \text{에서}$$

$$-2 \leq \log a - 2 \log b < -1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①+②을 하면

$$5 \leq 3 \log a - 3 \log b < 7$$

$$\frac{5}{3} \leq \log a - \log b < \frac{7}{3}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{3} \leq \log \frac{a}{b} < \frac{7}{3} \text{이므로 } \log \frac{a}{b} \text{의 정수 부분은 } 1 \text{ 또는 } 2$$

이다.

따라서 $n=1$ 또는 $n=2$ 이므로 구하는 합은

$$1+2=3$$

답 3

6

연간 방문객이 10년 전에는 100만 명이었고 매년 $p\%$ 씩 꾸준히 증가하여 현재는 1260만 명이 되었으므로

$$100 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{10} = 1260$$

$$\left(1 + \frac{p}{100} \right)^{10} = 12.6$$

위의 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{10} = \log 12.6$$

$$10 \log \left(1 + \frac{p}{100} \right) = 1 + \log 1.26$$

$$10 \log \left(1 + \frac{p}{100} \right) = 1.1 \quad (\because \log 1.26 = 0.1)$$

$$\log \left(1 + \frac{p}{100} \right) = 0.11$$

이때 $\log 1.29 = 0.11$ 이므로

$$1 + \frac{p}{100} = 1.29, \quad \frac{p}{100} = 0.29 \quad \therefore p = 29$$

답 29

보충 설명

일정하게 변화하는 양 | 초기량 A 가 매년 $r\%$ 씩 일정하게 증가 또는 감소할 때 n 년 후의 양은 다음과 같다.

$$(1) \text{증가} : A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

$$(2) \text{감소} : A \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

03. 지수함수

1 지수함수

기본 + 필수연습

본문 pp.073-082

01 $\neg, \perp, \equiv$ 02 $\perp, \supset, \equiv$ 03 풀이 참조

$$04 (1) \sqrt{25} > 0.2^{-0.5} \quad (2) \left(\frac{32}{243} \right)^{\frac{5}{2}} < \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{25}{9}}$$

05 최댓값 : 82, 최솟값 : 4 06 56 07 $-\frac{1}{2}$

08 16 09 12 10 20 11 -1

12 2 13 -1 14 $\neg, \perp, \equiv$ 15 16

16 24 17 $B < A < C$

18 $1 < \frac{1}{c} < a < b$ 19 $A < C < B$

20 135 21 $\frac{1}{3}$ 22 1

23 (1) 최댓값 : 25, 최솟값 : 9 (2) $2\sqrt{3}$

24 $\frac{1}{2}$ 25 -27

01

$\neg. y = (\sqrt[3]{4})^x$ 은 지수함수이다.

$\perp. y = \frac{1}{2^{-3x}}$ 에서 $y = (2^{-3x})^{-1} = 2^{3x} = 8^x$ 이므로 지수함수이다.

$\supset. y = \sqrt{x}$ 는 무리함수이다.

$\equiv. y = \frac{1}{3} \times 2^x$ 에서 $y = 2^{\log_2 \frac{1}{3}} \times 2^x = 2^{x - \log_2 3}$ 이므로 지수함수이다.

따라서 지수함수인 것은 $\neg, \perp, \equiv$ 이다.

답 $\neg, \perp, \equiv$

02

$\neg. 치역$ 은 양의 실수 전체의 집합이다. (거짓)

$\perp. f(1) = \frac{1}{5}$ 이므로 그래프는 점 $\left(1, \frac{1}{5} \right)$ 을 지난다. (참)

$\supset. 그래프$ 는 제1, 2사분면은 지나고 제3, 4사분면은 지나지 않는다. (참)

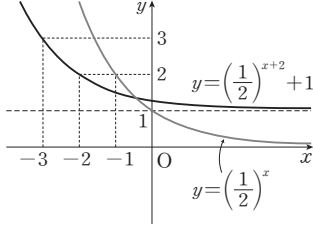
$\equiv. x$ 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 $\perp, \supset, \equiv$ 이다.

답 $\perp, \supset, \equiv$

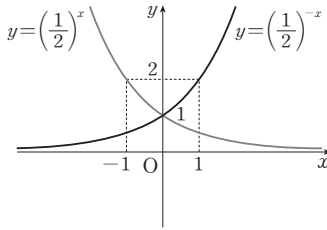
03

- (1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 1$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



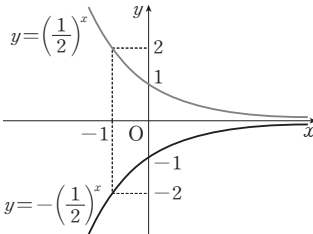
따라서 치역은 $\{y | y > 1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 1$ 이다.

- (2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



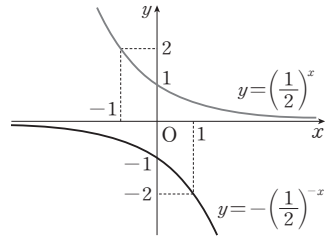
따라서 치역은 $\{y | y > 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.

- (3) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.

- (4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.

답 풀이 참조

04

- (1) $\sqrt{25} = 5$, $0.2^{-0.5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-0.5} = 5^{0.5}$

이때 $1 > 0.5$ 이고, 함수 $y = 5^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$5^1 > 5^{0.5} \quad \therefore \sqrt{25} > 0.2^{-0.5}$$

- (2) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{25}{2}}$, $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{25}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{25}{3}}$

이때 $\frac{25}{2} > \frac{25}{3}$ 이고, 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{25}{2}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{25}{3}} \quad \therefore \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{5}{2}} < \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{25}{9}}$$

답 (1) $\sqrt{25} > 0.2^{-0.5}$ (2) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{5}{2}} < \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{25}{9}}$

05

$f(x) = 3^{2x} + 1 = 9^x + 1$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다. (밑)>1

따라서 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 에서

$x = 2$ 일 때 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(2) = 3^{2 \times 2} + 1 = 81 + 1 = 82$$

$x = \frac{1}{2}$ 일 때 최소이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{2 \times \frac{1}{2}} + 1 = 3 + 1 = 4$$

답 최댓값 : 82, 최솟값 : 4

06

지수함수 $y=a^x$ 의 그래프가 점 $(2, b)$ 를 지나므로

$$b=a^2$$

위의 식에 $b=8a-7$ 을 대입하면

$$8a-7=a^2, a^2-8a+7=0$$

$$(a-1)(a-7)=0 \quad \therefore a=7 \quad (\because a>1)$$

즉, $b=7^2=49$ 이므로

$$a+b=7+49=56$$

답 56

07

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프가 두 점 $(a, m), (b, n)$ 을 지나므로

$$m=\left(\frac{1}{4}\right)^a, n=\left(\frac{1}{4}\right)^b$$

$$\therefore mn=\left(\frac{1}{4}\right)^a \times \left(\frac{1}{4}\right)^b = \left(\frac{1}{4}\right)^{a+b}$$

이때 $mn=2$ 이므로

$$2=\left(\frac{1}{4}\right)^{a+b}, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{4}\right)^{a+b}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a+b=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

08

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$ 에서 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:4$ 이므로 두 점 B, C의 x 좌표를 각각 $p, 4p$ ($p>0$)라 하면

$$a^p=2^{4p}, a^p=(2^4)^p \quad \therefore a=2^4=16$$

답 16

09

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-n=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}, y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}+n$$

$$\therefore y=2^{m-x}+n$$

.....㉠

$$\text{한편, } y=4\left(\frac{1}{2^x}-\frac{5}{2}\right)=4\times 2^{-x}-10=2^{2-x}-10 \quad \text{.....㉡}$$

두 그래프 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$m-x=2-x, n=-10$$

따라서 $m=2, n=-10$ 이므로

$$m-n=2-(-10)=12$$

답 12

10

함수 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y+5=5^{x+1}$$

$$\therefore y=5^{x+1}-5$$

이 그래프가 점 $(0, m)$ 을 지나므로

$$m=5^{0+1}-5=0$$

또한, 이 그래프가 점 $(1, n)$ 을 지나므로

$$n=5^{1+1}-5=20$$

$$\therefore m+n=0+20=20$$

답 20

11

$$f(x)=\frac{1}{7}\times 7^{-x}+k=\frac{1}{7}\times \left(\frac{1}{7}\right)^x+k$$

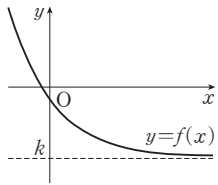
$$=\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1}+k$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $f(0)\leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{7}+k\leq 0 \quad \therefore k\leq -\frac{1}{7}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.



답 -1

12

함수 $y=2^{4-2x}-1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b=2^{4-2(x-a)}-1$$

$$\therefore y=2^{2a+4-2x}+b-1$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2^{2a+4+2x}+b-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{한편, } y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}+3=2^{2x}+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

두 그래프 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$2a+4+2x=2x, \quad b-1=3$$

따라서 $a=-2, b=4$ 이므로

$$a+b=-2+4=2$$

답 2

13

함수 $y=a^x+3$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=a^{-x}+3 \quad \therefore y=-a^{-x}-3$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-(-1)=-a^{-(x-4)}-3$$

$$\therefore y=-a^{-x+4}-4$$

이때 $a^0=1$ 이므로 함수 $y=-a^{-x+4}-4$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(4, -5)$ 를 지난다. (*)

따라서 $p=4, q=-5$ 이므로

$$p+q=4+(-5)=-1$$

답 -1

보충 설명

(*)에서 함수 $y=-a^{-x+4}-4=-a^{-(x-4)}-4$ 의 그래프는 함수 $y=a^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, 항상 점 $(0, 1)$ 을 지난다. 점 $(0, 1) \rightarrow$ 점 $(0, -1)$
 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다. 점 $(0, -1) \rightarrow$ 점 $(4, -5)$

14

ㄱ. $y=2^{-3x}=8^{-x}$ 이므로 $y=8^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y=2^{-3x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}=8^{-(x-1)}=2$ 이므로 $y=8^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-2$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=2 \times 8^x=8^{\frac{1}{3}} \times 8^x=8^{x+\frac{1}{3}}$ 이므로 $y=8^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼 평행이동하면 $y=2 \times 8^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

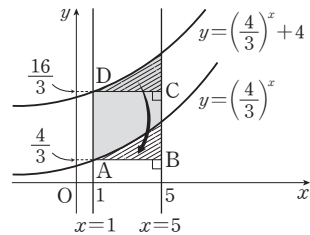
ㄹ. $y=-4^{2x}+3=-16^x+3$ 이므로 $y=8^x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐지지 않는다.

따라서 $y=8^x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15

함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x+4$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같다.



즉, 두 함수 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x, y=\left(\frac{4}{3}\right)^x+4$ 의 그래프와 두 직선 $x=1, x=5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 점 A는 직선 $x=1$ 과 곡선 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 의 교점이므로

$$A\left(1, \frac{4}{3}\right)$$

점 D는 직선 $x=1$ 과 곡선 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x+4$ 의 교점이므로

$$D\left(1, \frac{16}{3}\right)$$

따라서 구하는 넓이는

$$(5-1) \times \left(\frac{16}{3} - \frac{4}{3} \right) = 4 \times 4 = 16$$

답 16

16

곡선 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} + 6$ 은 곡선 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

따라서 곡선 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ 위의 점 $(0, 1)$ 을 x 축의 방향으로

3만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 점은 곡선

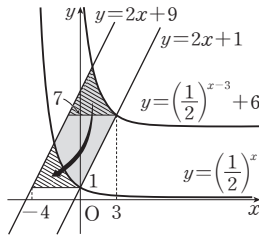
$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} + 6 \text{ 위의 점 } (3, 7) \text{ 이 된다.}$$

한편, 점 $(3, 7)$ 은 직선 $y = 2x + 1$ 위의 점이므로 이 점은

곡선 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} + 6$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 의 교점이다.

두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} + 6$ 과 두 직선 $y = 2x + 1$,

$y = 2x + 9$ 를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 밑변의 길이가 4, 높이가 $7 - 1 = 6$ 인 평행사변형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$4 \times 6 = 24$$

답 24

17

세 수 A, B, C 의 밑을 $\frac{1}{5}$ 로 나타내면

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \sqrt[3]{0.04} = \left(\frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$C = \sqrt[8]{0.2^3} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{8}}$$

이때 $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ 이고, 함수 $y = \left(\frac{1}{5} \right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{8}}$$

$$\therefore B < A < C$$

답 $B < A < C$

18

두 함수 $y = a^x$, $y = b^x$ 은 모두 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$a > 1, b > 1$$

또한, $x > 0$ 에서 곡선 $y = b^x$ 이 곡선 $y = a^x$ 보다 y 축에 가까우므로

$$1 < a < b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 두 함수 $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a} \right)^x$, $y = c^x$ 은 모두 x 의 값이

증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$0 < \frac{1}{a} < 1, 0 < c < 1$$

또한, $x < 0$ 에서 곡선 $y = a^{-x}$ 이 곡선 $y = c^x$ 보다 y 축에 가까우므로

$$0 < \frac{1}{a} < c < 1 \quad \therefore 1 < \frac{1}{c} < a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } 1 < \frac{1}{c} < a < b$$

답 $1 < \frac{1}{c} < a < b$

19

세 수 A, B, C 의 밑을 a 로 나타내면

$$A = {}^{n+1}\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n+1}} = a^{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$B = {}^n\sqrt{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}} = a^{1 + \frac{1}{n}}$$

$$C = {}^{n+1}\sqrt{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+1}} = a^{1 + \frac{1}{n+1}}$$

이때 $a > 1$ 이므로 함수 $y = a^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

즉, 세 수 A, B, C 에 대하여 지수가 클수록 더 큰 수이다.

(i) A, B 의 대소 비교

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

($\because n \geq 2$)

$$\text{즉, } 1 - \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} \text{ 이므로}$$

$$a^{1 - \frac{1}{n+1}} < a^{1 + \frac{1}{n}} \quad \therefore A < B$$

(ii) B, C 의 대소 비교

$$1 + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \quad (\because n \geq 2)$$

$$\text{즉, } 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \text{ 이므로}$$

$$a^{1 + \frac{1}{n}} > a^{1 + \frac{1}{n+1}} \quad \therefore C < B$$

(iii) A, C 의 대소 비교

$$1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{2}{n+1} < 0 \quad (\because n \geq 2)$$

$$\text{즉, } 1 - \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n+1} \text{ 이므로}$$

$$a^{1 - \frac{1}{n+1}} < a^{1 + \frac{1}{n+1}} \quad \therefore A < C$$

(i), (ii), (iii)에서 $A < C < B$

답 $A < C < B$

다른 풀이

$n=2$ 일 때에도 세 수 A, B, C 의 대소 관계는 유지된다.

세 수 A, B, C 에 $n=2$ 를 대입하면

$$A = a^{\frac{2}{3}}, B = a^{\frac{3}{2}}, C = a^{\frac{4}{3}}$$

이때 $\frac{2}{3} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ 이고, $a > 1$ 이므로 함수 $y = a^x$ 에서 x 의 값

이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\text{즉, } a^{\frac{2}{3}} < a^{\frac{4}{3}} < a^{\frac{3}{2}} \text{ 이므로}$$

$$A < C < B$$

보충 설명

$n \geq 2$ 이므로 다음과 같이 세 수 A, B, C 의 지수의 대소를 비교할 수 있다.

$$\frac{n}{n+1} < 1, \frac{n+1}{n} > 1, \frac{n+2}{n+1} > 1$$

$$\text{이때 } \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$$

20

$f(x) = -x^2 - 4x - 3$ 이라 하면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} + 1 \text{에서 } 0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1 \text{이므로 } f(x) \text{가 최소}$$

일 때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} + 1$ 은 최대이고, $f(x)$ 가 최대일 때

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} + 1$ 은 최소이다.

한편, $-3 \leq x \leq 0$ 이고,

$$f(x) = -x^2 - 4x - 3$$

$$= -(x+2)^2 + 1$$

이므로 $f(x)$ 는

$$x=0 \text{일 때 최솟값 } f(0) = -3,$$

$$x=-2 \text{일 때 최댓값 } f(-2) = 1$$

을 갖는다.

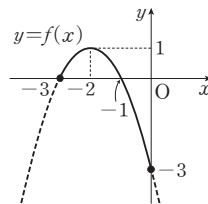
$$\text{즉, 함수 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} + 1 \text{은}$$

$$x=0 \text{일 때 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 1 = 9,$$

$$x=-2 \text{일 때 최솟값 } \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } M=9, m=\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$10Mm = 10 \times 9 \times \frac{3}{2} = 135$$



답 135

21

$f(x) = x^2 - 4x + 9$ 라 하면 $y = a^{f(x)}$ 에서

$0 < (\text{밑}) = a < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 함수 $y = a^{f(x)}$ 는 최대이다.

한편, $f(x) = x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $f(2) = 5$ 를 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $x=2$ 일 때 최댓값 a^5 을 가지므로

$$a^5 = \frac{1}{243}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

22

$g(x)=2-x$ 라 하면 $f(x)=a^{g(x)}+b$ 이고, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $0 \leq 2-x \leq 3$ 이므로 $0 \leq g(x) \leq 3$

(i) $a > 1$ 일 때,

$f(x)=a^{g(x)}+b$ 에서 (밑) >1 이므로 $g(x)$ 가 최대일 때 $f(x)$ 는 최댓값 5, $g(x)$ 가 최소일 때 $f(x)$ 는 최솟값 -2 를 갖는다. 즉,

$$a^3+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}, \quad a^0+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉒} \text{에서 } 1+b=-2 \quad \therefore b=-3$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉑} \text{에 대입하면 } a^3-3=5$$

$$a^3=8 \quad \therefore a=2$$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때,

$f(x)=a^{g(x)}+b$ 에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로 $g(x)$ 가 최소일 때 $f(x)$ 는 최댓값 5, $g(x)$ 가 최대일 때 $f(x)$ 는 최솟값 -2 를 갖는다. 즉,

$$a^0+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}, \quad a^3+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉓} \text{에서 } 1+b=5 \quad \therefore b=4$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉔} \text{에 대입하면 } a^3+4=-2$$

$$a^3=-6 \quad \therefore a=-\sqrt[3]{6}$$

이때 $a > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=-3$, 즉 $f(x)=2^{2-x}-3$ 이므로 $f(0)=2^2-3=1$

답 1

23

$$(1) y=-25^x+2 \times 5^{x+1}$$

$$=-(5^x)^2+10 \times 5^x$$

$$5^x=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } 5^0 \leq 5^x \leq 5^1$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 5$$

이때 주어진 함수는

$$y=-t^2+10t$$

$$=-(t-5)^2+25$$

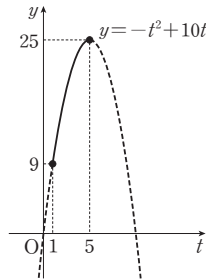
이므로

$t=5$ 일 때 최댓값

$$-0^2+25=25,$$

$t=1$ 일 때 최솟값

$$-(-4)^2+25=9 \text{를 갖는다.}$$



$$(2) y=3^x+3^{1-x}=3^x+\frac{3}{3^x}$$

$3^x=t \quad (t>0)$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y=t+\frac{3}{t}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{3}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{3}{t}}=2\sqrt{3}$$

(단, 등호는 $t=\frac{3}{t}$, 즉 $t=\sqrt{3}$ 일 때 성립)
 $x=\frac{1}{2}$

따라서 함수 $y=3^x+3^{1-x}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 (1) 최댓값 : 25, 최솟값 : 9 (2) $2\sqrt{3}$

24

$$y=-9^x+3^{x+a}+2$$

$$=-(3^x)^2+3^a \times 3^x+2$$

$3^x=t \quad (t>0)$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y=-t^2+3^a \times t+2$$

$$=-\left(t-\frac{3^a}{2}\right)^2+\frac{3^{2a}}{4}+2$$

이때 $\frac{3^a}{2} > 0$ 이므로 $t > 0$ 일 때,

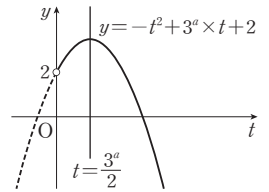
$$t=\frac{3^a}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{3^{2a}}{4}+2 \text{를}$$

갖는다.

$$\text{따라서 } \frac{3^{2a}}{4}+2=\frac{11}{4} \text{에서 } \frac{3^{2a}}{4}=\frac{3}{4}$$

$$3^{2a}=3, \quad 2a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$



답 $\frac{1}{2}$

25

$$y=4^x+4^{-x}-10(2^x+2^{-x})$$

$$=(2^x)^2+(2^{-x})^2-10(2^x+2^{-x})$$

$$=(2^x+2^{-x})^2-2-10(2^x+2^{-x})$$

$$=(2^x+2^{-x})^2-10(2^x+2^{-x})-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

이때 $2^x+2^{-x}=t$ 로 놓으면

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $2^x=2^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t\geq 2$$

따라서 주어진 함수는

$$y=4^x+4^{-x}-10(2^x+2^{-x})$$

$$=t^2-10t-2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$=(t-5)^2-27 \quad (\text{단}, t\geq 2)$$

이므로 $t=5$ 에서 최솟값 -27 을 갖는다.

답 -27

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.083-084

01 3	02 ②	03 8	04 9
05 -2	06 $\frac{2}{3}\log_2 3$	07 6	08 1
09 $A < B < C$	10 ④	11 2	
12 3			

01

$f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)에서

$$3f(-1)+f(1)=4\text{이므로}$$

$$3\times a^{-1}+a=4$$

양변에 a 를 곱하면 $3+a^2=4a$

$$a^2-4a+3=0, (a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a\neq 1)$$

따라서 $f(x)=3^x$ 이므로

$$f(-3)\times f(4)=3^{-3}\times 3^4=3^{-3+4}=3$$

답 3

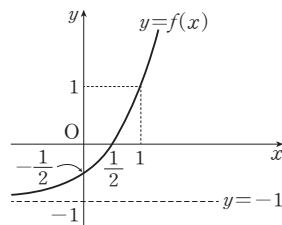
02

$$f(x)=2^{2x-1}-1$$

$$=2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-1$$

$$=4^{x-\frac{1}{2}}-1$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)=2^{2\times 1-1}-1=1$ 이므로 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나지만 점근선의 방정식은 $y=-1$ 이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ 이다. (참)

$x_1\neq x_2$ 이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 의 대우

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 (밑) $=4>1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. 즉, $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

03

$$f(x)=\left(a^2+6a+\frac{19}{2}\right)^x \text{에서 } a^2+6a+\frac{19}{2}=1 \text{이면}$$

$f(x)=1$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a^2+6a+\frac{19}{2}\neq 1$$

또한, $a^2+6a+\frac{19}{2}=(a+3)^2+\frac{1}{2}>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 지수함수이다.

이때 $f(0)=1$ 이므로 모든 음의 실수 x 에 대하여 $f(x)>1$ 을 만족시키려면 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 감소해야 한다.

$$\text{즉, } 0 < a^2+6a+\frac{19}{2} < 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a^2+6a+\frac{19}{2} < 1, a^2+6a+\frac{17}{2} < 0$$

$$\therefore -3-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -3+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \leftarrow \begin{matrix} a^2+6a+\frac{17}{2}=0 \text{의 근은 근의 공식에 의하여} \\ a=-3\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a 는 -3 이므로

$$f(x)=\left\{(-3)^2+6\times(-3)+\frac{19}{2}\right\}^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\therefore f(a)=f(-3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$$

답 8

04

점 B의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

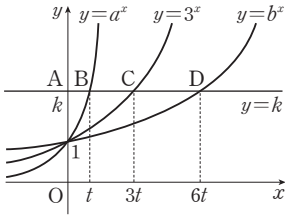
$$B(t, k), \overline{AB} = t$$

$$\overline{BC} = 2\overline{AB} = 2t \text{이므로}$$

$$C(3t, k)$$

$$\overline{CD} = 3\overline{AB} = 3t \text{이므로}$$

$$D(6t, k)$$



이때 세 점 B, C, D는 각각 세 함수 $y=a^x$, $y=3^x$, $y=b^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$a^t = k, 3^{3t} = k, b^{6t} = k$$

$$\text{즉, } a^t = 3^{3t} \text{에서 } a^t = 27^t \text{이므로}$$

$$a = 27$$

$$\text{또한, } b^{6t} = 3^{3t} \text{에서 } (b^2)^{3t} = 3^{3t} \text{이므로}$$

$$b^2 = 3$$

$$\therefore \frac{a}{b^2} = \frac{27}{3} = 9$$

답 9

다른 풀이

함수 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점 B의 y 좌표가 k 이므로

$$\text{점 B의 } x\text{좌표는 } a^x = k \text{에서 } x = \log_a k$$

$$\therefore B(\log_a k, k)$$

같은 방법으로 $C(\log_3 k, k)$, $D(\log_b k, k)$ 이므로

$$\overline{AB} = \log_a k, \overline{AC} = \log_3 k, \overline{AD} = \log_b k$$

$$\text{이때 } \overline{BC} = 2\overline{AB} \text{에서 } \overline{AC} = 3\overline{AB} \text{이므로}$$

$$\log_3 k = 3\log_a k$$

$$\text{즉, } \log_3 k = \log_{a^{\frac{1}{3}}} k \text{에서 } a^{\frac{1}{3}} = 3 \text{이므로}$$

$$a = 3^3 = 27$$

$$\text{또한, } \overline{CD} = 3\overline{AB} \text{에서 } \overline{AD} = 6\overline{AB} \text{이므로}$$

$$\log_b k = 6\log_a k$$

$$\text{즉, } \log_b k = \log_{a^{\frac{1}{6}}} k \text{에서 } a^{\frac{1}{6}} = b \text{이므로}$$

$$b^2 = a^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\therefore \frac{a}{b^2} = \frac{27}{3} = 9$$

05

함수 $y=3^{x-a}+b$ 의 그래프가 점 $A(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3^{-1-a} + b \quad \therefore b = -3^{-1-a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 함수 $y=3^{x-a}+b$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $y=b$ 이다.

즉, 점 $A(-1, 0)$ 과 직선 $y=b$ 사이의 거리가 1이므로

$$|b-0|=1 \text{에서 } b = \pm 1$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } b = -3^{-1-a} < 0 \text{이므로}$$

$$b = -1$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-1 = -3^{-1-a}, 1 = 3^{-1-a}$$

$$3^0 = 3^{-1-a}, 0 = -1-a \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore a+b = -1 + (-1) = -2$$

답 -2

06

두 함수 $f(x) = \frac{2^x}{3}$, $g(x) = 2^x - 2$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점은 각각

$$A(0, \frac{1}{3}), B(0, -1)$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점 C의 x 좌표를 k 라 하면

$$\frac{2^k}{3} = 2^k - 2 \text{에서 } \frac{2}{3} \times 2^k = 2$$

$$2^k = 3, \text{ 즉 } k = \log_2 3 \text{이므로}$$

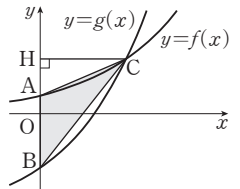
$$C(\log_2 3, \frac{1}{3}) \quad \text{---} \quad \frac{2^{\log_2 3}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \log_2 3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

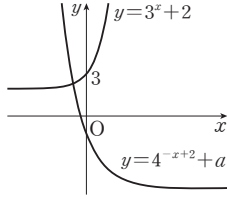
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} &= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{3} - (-1) \right\} \times \log_2 3 \\ &= \frac{2}{3} \log_2 3 \end{aligned}$$



답 $\frac{2}{3} \log_2 3$

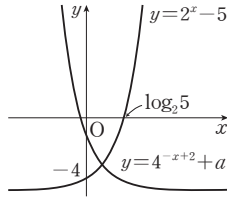
07

- (i) 곡선 $y=4^{-x+2}+a$ 가 곡선 $y=3^x+2$ 와 제2사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $y=4^{-x+2}+a$ 에서 $x=0$ 일 때, $y < 3$ 이어야 하므로
 $4^2+a < 3 \quad \therefore a < -13$

- (ii) 곡선 $y=4^{-x+2}+a$ 가 곡선 $y=2^x-5$ 와 제4사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $y=4^{-x+2}+a$ 에서 $x=0$ 일 때, $y > -4$ 이어야 하므로
 $4^2+a > -4 \quad \therefore a > -20 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$

또한, 곡선 $y=2^x-5$ 와 x 축이 만나는 점의 좌표는 $(\log_2 5, 0)$

즉, $y=4^{-x+2}+a$ 에서 $x=\log_2 5$ 일 때, $y < 0$ 이어야 하므로

$$4^{-\log_2 5+2}+a < 0, \quad \frac{16}{25}+a < 0$$

$$\therefore a < -\frac{16}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } -20 < a < -\frac{16}{25}$$

- (i), (ii)에서 $-20 < a < -13$ 이므로 정수 a 는 $-19, -18, -17, -16, -15, -14$ 의 6개이다.

답 6

08

직선 $x=k$ 가 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=-2^x$ 의 그래프와 만나

는 점은 각각 $A\left(k, \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$, $B(k, -2^k)$ 이다.

한편, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$ 에서 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=-2^x$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 점 C는 직선 AO 위의 점 이므로 두 점 A, C는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore C\left(-k, -\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(a, -\frac{8}{3}\right)$ 이므로

$$a = \frac{k+k-k}{3} = \frac{k}{3}, \quad \leftarrow \text{세 점 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \text{을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 } \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$-\frac{8}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{3} = -\frac{2^k}{3}$$

$$\text{즉, } 2^k=8 \text{이므로 } 2^k=2^3 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore a = \frac{3}{3} = 1$$

답 1

보충 설명

두 함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면, 원점을 지나는 직선과 각 함수의 그래프가 만나는 점도 서로 원점에 대하여 대칭이다.

09

$f(x)=2^x-1$ 이므로

$$2^a-1=f(a), \quad 2^b-1=f(b)$$

또한, $f(0)=0$ 이므로 세 수 A, B, C를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = \frac{2^a-1}{a} = \frac{f(a)}{a} = \frac{f(a)-f(0)}{a-0}$$

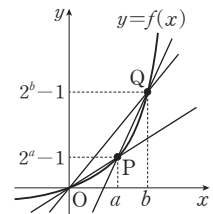
$$B = \frac{2^b-1}{b} = \frac{f(b)}{b} = \frac{f(b)-f(0)}{b-0}$$

$$C = \frac{2^b-2^a}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

즉, A는 직선 OP의 기울기, B는 직선 OQ의 기울기, C는 직선 PQ의 기울기를 나타낸다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$A < B < C$$



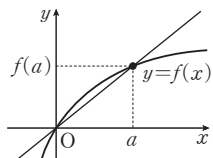
답 $A < B < C$

보충 설명

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 원점을 지날 때,

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{f(a)}{a}$$

는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기를 나타낸다.



10

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m < \left(\frac{1}{a}\right)^n < b^n < b^m \text{에서 } a \neq 1, b \neq 1$$

이때 자연수 n 에 대하여 $\left(\frac{1}{a}\right)^n < b^n$ 이므로

$$\frac{1}{a} < b$$

즉, 두 양수 a, b 에 대하여

$$0 < \frac{1}{a} < b < 1 \text{ 또는 } 0 < \frac{1}{a} < 1 < b \text{ 또는 } 1 < \frac{1}{a} < b$$

(i) $0 < \frac{1}{a} < b < 1$ 일 때,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m < \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{에서 } 0 < (\text{밑}) = \frac{1}{a} < 1 \text{이므로 } m > n,$$

$$b^n < b^m \text{에서 } 0 < (\text{밑}) = b < 1 \text{이므로 } n > m$$

즉, 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n 은 존재하지 않는다.

(ii) $0 < \frac{1}{a} < 1 < b$ 일 때,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m < \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{에서 } 0 < (\text{밑}) = \frac{1}{a} < 1 \text{이므로 } m > n,$$

$$b^n < b^m \text{에서 } (\text{밑}) = b > 1 \text{이므로 } n < m$$

즉, $m > n$ 인 두 자연수 m, n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(iii) $1 < \frac{1}{a} < b$ 일 때,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m < \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{에서 } (\text{밑}) = \frac{1}{a} > 1 \text{이므로 } m < n,$$

$$b^n < b^m \text{에서 } (\text{밑}) = b > 1 \text{이므로 } n < m$$

즉, 조건을 만족시키는 두 자연수 m, n 은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $0 < \frac{1}{a} < 1 < b, m > n$

ㄱ. $m > n$ (참)

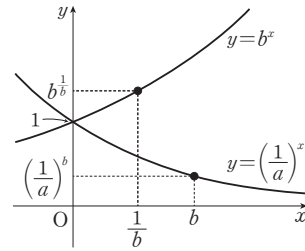
ㄴ. $0 < \frac{1}{a} < 1 < b$ 에서 $a > 1, b > 1$ 이지만 $a > b$ 인지 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. $0 < \frac{1}{a} < 1$ 에서 $a > 1$ 이므로 함수 $y = a^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $0 < \frac{1}{a} < 1 < a$ 이므로

$$a^{\frac{1}{a}} < a^a \text{ (참)}$$

ㄹ. $0 < \frac{1}{a} < 1 < b$ 이므로 두 함수 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x, y = b^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $b > 1$ 에서 $0 < \frac{1}{b} < b$ 이므로 $\left(\frac{1}{a}\right)^b < b^{\frac{1}{b}}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

11

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고, $1 \leq x \leq 4$ 에서

$$-5 \leq f(x) \leq -1$$

(i) $a > 1$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$$

에서 (밑) > 1 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때, $(g \circ f)(x)$ 는 최댓값 32를 가진다. 즉,

$$a^{-1} = 32 \quad \therefore a = \frac{1}{32}$$

그런데 $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$ 에서 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최소일 때, $(g \circ f)(x)$ 는 최댓값 32를 가진다. 즉,

$$a^{-5} = 32 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

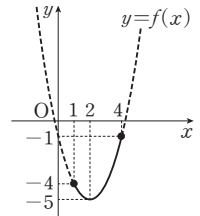
$$\therefore (g \circ f)(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 가지므로 그 최솟값은

$$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

(i), (ii)에서 구하는 최솟값은 2이다.

답 2



12

$2^{2k-x} > 0$, $2^{2k+x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^{2k-x} + 2^{2k+x} \geq 2\sqrt{2^{2k-x} \times 2^{2k+x}} = 2\sqrt{2^{4k}}$$

(단, 등호는 $2^{2k-x} = 2^{2k+x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

이때 함수 $y = 2^{2k-x} + 2^{2k+x}$ 의 최솟값이 128이므로

$$2\sqrt{2^{4k}} = 128, 2^{1+2k} = 2^7$$

$$\text{즉, } 1+2k=7 \text{이므로 } 2k=6 \quad \therefore k=3$$

답 3

2 지수함수의 활용

기본 + 필수연습

본문 pp.088-094

26 (1) $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=3$

27 (1) $x=3$ (2) $x=3$ 또는 $x=4$

28 (1) $x > 3$ (2) $x \leq 6$

29 (1) $0 \leq x \leq 1$ (2) $1 \leq x \leq 3$ 30 -2

31 3 32 -6 33 -3

34 $\frac{1}{18} < a \leq \frac{1}{6}$ 35 $a \geq 4$

36 (1) $x=-1, y=-1$ (2) $-\frac{2}{3} < x < 6$

37 $x=2, y=3$ 38 10

39 (1) $x=0$ 또는 $x=3$ (2) $1 < x < 6$

40 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$ 41 $-3 < x \leq 5$

42 3개 이상 43 2 44 30년 후

26

(1) $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$ 에서 $2^{2x} = 2^{-x+9}$

즉, $2x = -x+9$ 이므로

$3x=9 \quad \therefore x=3$

(2) $125 \times 5^{x^2} = 5^{4x}$ 에서 $5^{x^2+3} = 5^{4x}$

즉, $x^2+3=4x$ 이므로

$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=3$ (2) $x=1$ 또는 $x=3$

27

(1) $4^x + 2^{x+3} - 128 = 0$ 에서 $(2^x)^2 + 8 \times 2^x - 128 = 0$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 + 8t - 128 = 0, (t+16)(t-8) = 0$

$\therefore t=8$ ($\because t > 0$)

따라서 $2^x = 8 = 2^3$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$x=3$

(2) $3^{x-4} = x^{x-4}$ ($x > 0$)에서

(i) 밑이 같으면 $x=3$

(ii) 지수가 0이면 $x-4=0 \quad \therefore x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=3$ 또는 $x=4$

답 (1) $x=3$ (2) $x=3$ 또는 $x=4$

28

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} < 4$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

이때 $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이므로

$x-5 > -2 \quad \therefore x > 3$

(2) $5^{x-1} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{7-2x}$ 에서 $5^{x-1} \geq 5^{2x-7}$

이때 $(\text{밑}) = 5 > 1$ 이므로

$x-1 \geq 2x-7 \quad \therefore x \leq 6$

답 (1) $x > 3$ (2) $x \leq 6$

29

(1) $6 \times \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 2$ 에서

$6 \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$

즉, $6 \times \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 \leq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$6t^2 - 8t + 2 \leq 0, \quad 3t^2 - 4t + 1 \leq 0$$

$$(3t-1)(t-1) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 1$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 1, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0 \text{이므로}$$

주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq 1 \quad \leftarrow 0 < (\text{밑}) = \frac{1}{3} < 1 \text{이므로 부등호 방향 반대로}$$

$$(2) \quad x^{2x+5} \geq x^{3x+2} \quad (x > 0) \text{에서}$$

$$(i) \quad 0 < x < 1 \text{일 때,}$$

$$2x+5 \leq 3x+2 \text{이므로 } x \geq 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

$$(ii) \quad x = 1 \text{일 때,}$$

$$(\text{좌변}) = (\text{우변}) = 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

$$(iii) \quad x > 1 \text{일 때,}$$

$$2x+5 \geq 3x+2 \text{이므로 } x \leq 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 \leq x \leq 3$$

$$\text{답 (1) } 0 \leq x \leq 1 \quad (2) \quad 1 \leq x \leq 3$$

30

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 9 = 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 9 = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 9 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$t \text{에 대한 이차방정식 } \textcircled{1} \text{의 두 근은 } \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha, \left(\frac{1}{3}\right)^\beta \text{이다.}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \times \left(\frac{1}{3}\right)^\beta = 9$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = -2$$

답 -2

31

$$25^x - k \times 5^{x+1} + 25 = 0 \text{에서}$$

$$(5^x)^2 - 5k \times 5^x + 25 = 0$$

$$5^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 5kt + 25 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$

이 양의 실근과 0보다 작거나 같은 근을 하나씩 갖거나 양의
(두 근의 곱) ≤ 0
중근을 가져야 한다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\textcircled{1} \text{의 두 근의 곱}) = 25 > 0 \quad \text{두 근의 부호가 같다.}$$

이므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 양의 중근을 가져야 한다.

★(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$D = (-5k)^2 - 4 \times 25$$

$$= 25k^2 - 100 = 0$$

$$\text{즉, } k^2 = 4 \text{이므로 } k = \pm 2$$

$$(ii) \quad (\textcircled{1} \text{의 두 근의 합}) = 5k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k = 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$t^2 - 10t + 25 = 0, \quad (t - 5)^2 = 0$$

$$\therefore t = 5$$

$$\text{즉, } 5^\alpha = 5 \text{이므로 } \alpha = 1$$

$$\therefore k + \alpha = 2 + 1 = 3$$

답 3

32

곡선 $y = 9^x - 4 \times 3^x$ 과 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $9^x - 4 \times 3^x = k$, 즉 $(3^x)^2 - 4 \times 3^x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 에 대한 방정식 $(3^x)^2 - 4 \times 3^x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

★(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-k) = 4 + k > 0$$

$$\therefore k > -4$$

(ii) (㉠의 두 근의 합) $= 4 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

(iii) (㉠의 두 근의 곱) $= -k > 0 \quad \therefore k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 $-4 < k < 0$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는 $-3, -2, -1$ 이므로 그 합은

$$-3 + (-2) + (-1) = -6$$

답 -6

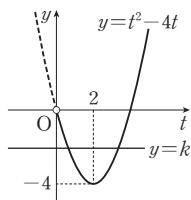
다른 풀이

$$y = 9^x - 4 \times 3^x = (3^x)^2 - 4 \times 3^x \text{에서}$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } y = t^2 - 4t$$

이때 곡선 $y = 9^x - 4 \times 3^x$ 과 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4 \quad (t > 0)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉, $-4 < k < 0$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합은 $-3 + (-2) + (-1) = -6$



33

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x - 30 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + 125 \leq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - 30 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + 125 \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 30t + 125 \leq 0, \quad (t-5)(t-25) \leq 0$$

$$\therefore 5 \leq t \leq 25$$

$$\text{즉, } 5 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 25 \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$\therefore -2 \leq x \leq -1$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 $-2, -1$ 이므로 그 합은 $-2 + (-1) = -3$

답 -3

34

$$3^{2x} - (2a+8) \times 3^x + 16a \leq 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - (2a+8) \times 3^x + 16a \leq 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - (2a+8)t + 16a \leq 0, \quad (t-2a)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 2a \leq t \leq 8 \quad (\because a < 4)$$

즉, $2a \leq 3^x \leq 8$ 에서 $3^1 < 8 < 3^2$ 이므로 조건을 만족시키는

정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이어야 한다.

따라서 $3^{-2} < 2a \leq 3^{-1}$ 이므로

$$\frac{1}{9} < 2a \leq \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{1}{18} < a \leq \frac{1}{6}$$

$$\text{답 } \frac{1}{18} < a \leq \frac{1}{6}$$

35

$$4^x + 2^{x+1} + a - 4 > 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 + 2 \times 2^x + a - 4 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t + a - 4 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

★모든 실수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 모든 양수

t 에 대하여 부등식 ㉡이 성립해야 한다.

$$f(t) = t^2 + 2t + a - 4$$

$$= (t+1)^2 + a - 5$$

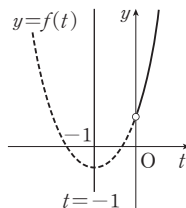
라 하면 $t > 0$ 에서 이차함수 $y = f(t)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하

므로 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(0) = a - 4 \geq 0$ 에서

$$a \geq 4$$



$$\text{답 } a \geq 4$$

36

$$(1) 0.2^{x+y} = 25 \text{에서 } 5^{-x-y} = 5^2 \text{이므로}$$

$$-x-y=2 \quad \therefore x=-y-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠을 $2^x + 2^y = 1$ 에 대입하면

$$2^{-y-2} + 2^y = 1$$

$$\frac{1}{4 \times 2^y} + 2^y = 1$$

이때 $2^y=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$\frac{1}{4t}+t=1$$

양변에 $4t$ 를 곱하면

$$1+4t^2=4t, 4t^2-4t+1=0$$

$$(2t-1)^2=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } 2^y=\frac{1}{2}=2^{-1} \text{이므로 } y=-1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $x=-1$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$x=-1, y=-1$$

$$(2) \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} < \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1} \text{에서}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x+2}$$

$$\text{즉, } x+4 > -2x+2 \text{이므로}$$

$$3x > -2 \quad \therefore x > -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{또한, } 2^{x-2} < \sqrt{2^{x+2}} \text{에서}$$

$$2^{x-2} < 2^{\frac{x+2}{2}}$$

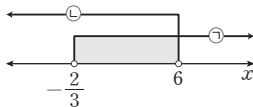
$$\text{즉, } x-2 < \frac{x+2}{2} \text{이므로}$$

$$2x-4 < x+2 \quad \therefore x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡에서 주어진 연립부

등식의 해는

$$-\frac{2}{3} < x < 6$$



$$\text{답 (1) } x=-1, y=-1 \quad (2) \quad -\frac{2}{3} < x < 6$$

37

$$\begin{cases} 2^x+2 \times 3^y=58 \\ 3 \times 2^x-3^y=-15 \end{cases} \text{에서}$$

$2^x=X, 3^y=Y$ ($X>0, Y>0$)로 놓으면

$$\begin{cases} X+2Y=58 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3X-Y=-15 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

㉠+2×㉡을 하면

$$7X=28 \quad \therefore X=4$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$4+2Y=58 \quad \therefore Y=27$$

따라서 $2^x=4=2^2, 3^y=27=3^3$ 이므로

주어진 연립방정식의 해는 $x=2, y=3$

$$\text{답 } x=2, y=3$$

38

$$2^x-2^{\frac{x}{2}+1}-8 \leq 0 \text{에서 } \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2-2 \times 2^{\frac{x}{2}}-8 \leq 0$$

$$2^{\frac{x}{2}}=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t-8 \leq 0, (t+2)(t-4) \leq 0$$

$$\therefore 0 < t \leq 4 \quad (\because t>0)$$

$$\text{즉, } 2^{\frac{x}{2}} \leq 4 \text{에서 } 2^{\frac{x}{2}} \leq 2^2 \text{이므로}$$

$$\frac{x}{2} \leq 2 \quad \therefore x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } 5^{x+2}-5^{1-x} > 0 \text{에서}$$

$$25 \times 5^x - \frac{5}{5^x} > 0$$

$$5^x=k \quad (k>0) \text{로 놓으면}$$

$$25k - \frac{5}{k} > 0, 5k - \frac{1}{k} > 0$$

양변에 k 를 곱하면

$$5k^2-1 > 0 \quad (\because k>0)$$

$$(\sqrt{5}k+1)(\sqrt{5}k-1) > 0 \quad \therefore k > \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\because k>0)$$

$$\text{즉, } 5^x > \frac{1}{\sqrt{5}} \text{에서 } 5^x > 5^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$x > -\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

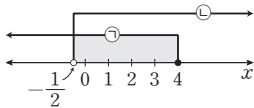
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -\frac{1}{2} < x \leq 4 \text{이므로}$$

조건을 만족시키는 정수 x 는

0, 1, 2, 3, 4이다.

따라서 그 합은

$$0+1+2+3+4=10$$



$$\text{답 } 10$$

39

$$(1) (x+1)^{x^2}=(x+1)^{3x} \quad (x>-1) \text{에서 밑이 같으므로}$$

(i) 지수가 같을 때,

$$x^2=3x, x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

(ii) 밑이 1일 때,

$$x+1=1 \quad \therefore x=0$$

이때 (좌변)=(우변)=1이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$(2) x^{6x-7} > x^{x^2+x-13} \quad (x>0) \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$6x-7 < x^2+x-13, \quad x^2-5x-6 > 0$$

$$(x+1)(x-6) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 6$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x=1$ 일 때,

(좌변)=(우변)=1이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$6x-7 > x^2+x-13, \quad x^2-5x-6 < 0$$

$$(x+1)(x-6) < 0 \quad \therefore -1 < x < 6$$

그런데 $x > 1$ 이므로

$$1 < x < 6$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 6$$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=3$ (2) $1 < x < 6$

40

$(x+6)^{2-3x} = (3x)^{2-3x} \quad (x>0)$ 에서 지수가 같으므로

(i) 밑이 같을 때,

$$x+6=3x, \quad 2x=6 \quad \therefore x=3$$

(ii) 지수가 0일 때,

$$2-3x=0, \quad 3x=2 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=3$$

답 $x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

41

$(x+3)^{x^2-4x} \leq (x+3)^{10-x} \quad (x>-3)$ 에서

(i) $0 < x+3 < 1$, 즉 $-3 < x < -2$ 일 때,

$$x^2-4x \geq 10-x, \quad x^2-3x-10 \geq 0$$

$$(x+2)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 5$$

그런데 $-3 < x < -2$ 이므로

$$-3 < x < -2$$

(ii) $x+3=1$, 즉 $x=-2$ 일 때,

(좌변)=(우변)=1이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x+3 > 1$, 즉 $x > -2$ 일 때,

$$x^2-4x \leq 10-x, \quad x^2-3x-10 \leq 0$$

$$(x+2)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 5$$

그런데 $x > -2$ 이므로 $-2 < x \leq 5$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x \leq 5$$

답 $-3 < x \leq 5$

42

마스크를 쓰지 않았을 때 흡입하는 미세먼지의 양을 A 라 하자. 마스크를 n 개 쓰고 흡입하는 미세먼지의 양이 마스크를 쓰지 않았을 때 흡입하는 미세먼지의 양의 $\frac{1}{125}$ 배 이하가 되려면

$$A\left(1-\frac{80}{100}\right)^n \leq \frac{1}{125}A, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \frac{1}{125}$$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3$ 이고, $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{5} < 1$ 이므로 $n \geq 3$ 이다.

따라서 흡입하는 미세먼지의 양을 마스크를 쓰지 않았을 때 흡입하는 미세먼지의 양의 $\frac{1}{125}$ 배 이하로 줄이려면 KF 80 등급의 보건용 마스크를 적어도 3개 이상 겹쳐 써야 한다.

답 3개 이상

43

$a > 0$ 에서 $0 < 2^{-\frac{2}{a}} < 1$ 이므로 $1-2^{-\frac{2}{a}} > 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{Q(4)}{Q(2)} &= \frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})} = \frac{1-(2^{-\frac{2}{a}})^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}} \\ &= \frac{(1+2^{-\frac{2}{a}})(1-2^{-\frac{2}{a}})}{1-2^{-\frac{2}{a}}} = 1+2^{-\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

즉, $\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$ 에서 $1+2^{-\frac{2}{a}} = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2} = 2^{-1}, \quad -\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a=2$$

답 2

다른 풀이

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2} \text{에서 } 2Q(4) = 3Q(2) \text{이므로}$$

$$2Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{4}{a}}\right) = 3Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{2}{a}}\right)$$

$$2^{-\frac{2}{a}} = t \text{로 놓으면 } a > 0 \text{이므로 } 0 < t < 1 \text{이고,}$$

$$2Q_0(1 - t^2) = 3Q_0(1 - t)$$

$$2(1 - t^2) = 3(1 - t), \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t - 1)(t - 1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < t < 1)$$

$$\text{즉, } 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \text{에서 } -\frac{2}{a} = -1 \text{이므로 } a = 2$$

44

반감기가 5년인 코발트(^{60}Co) 1024g의 n 년 후의 질량은

$$1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} (\text{g})$$

반감기가 30년인 세슘(^{137}Cs) 32g의 n 년 후의 질량은

$$32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}} (\text{g})$$

n 년 후 두 방사성 물질의 질량이 같아지려면

$$1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{5}} = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}$$

$$2^{10} \times 2^{-\frac{n}{5}} = 2^5 \times 2^{-\frac{n}{30}}$$

$$2^{10-\frac{n}{5}} = 2^{5-\frac{n}{30}}$$

$$\text{즉, } 10 - \frac{n}{5} = 5 - \frac{n}{30} \text{이므로 } n = 30$$

따라서 두 방사성 물질의 질량이 같아지는 것은 지금으로부터 30년 후이다.

답 30년 후

보충 설명

반감기 | 반감기란 어떤 특정 방사성 물질의 질량이 방사성 붕괴에 의하여 원래의 질량의 반으로 줄어드는 데 걸리는 시간이다. 이것은 주위의 물리적, 화학적 조건에 전혀 관계없이 물질의 핵종에 따라 고유한 값을 지닌다.

반감기가 T 년인 어떤 방사성 물질의 처음 질량이 M_0 일 때, n 년 후 남아 있는 방사성 물질의 질량을 $M(n)$ 이라 하면 다음 식이 성립한다.

$$M(n) = M_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{T}}$$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.095-096

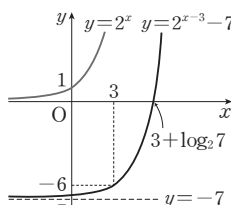
13 4	14 0	15 $\frac{17}{9}$	16 9
17 3	18 1	19 $k < -4$	20 4
21 2	22 27	23 26	24 10
25 5년			

13

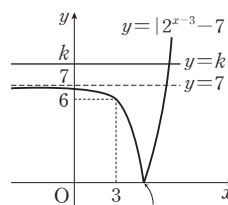
방정식 $|2^{x-3} - 7| = k$ 의 실근의 개수는 함수 $y = |2^{x-3} - 7|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

함수 $y = 2^{x-3} - 7$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이므로 [그림 1]과 같다.

즉, 함수 $y = |2^{x-3} - 7|$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 방정식 $|2^{x-3} - 7| = k$ 가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 10보다 작은 정수 k 는 0, 7, 8, 9의 4개이다.

답 4

14

$$(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1 \text{이므로}$$

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$$

$$\text{즉, } (\sqrt{5} + 2)^x + (\sqrt{5} - 2)^x = 8 \text{에서}$$

$$(\sqrt{5} + 2)^x + \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^x} = 8$$

$$(\sqrt{5} + 2)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{1}{t} = 8$$

양변에 t 를 곱하여 정리하면

$$t^2 - 8t + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 t 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $(\sqrt{5}+2)^\alpha, (\sqrt{5}+2)^\beta$ 이다.
 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\sqrt{5}+2)^\alpha \times (\sqrt{5}+2)^\beta = 1$
 즉, $(\sqrt{5}+2)^{\alpha+\beta} = 1$ 이므로
 $\alpha + \beta = 0$

답 0

15

$3^{2x+1} - 3^{x+2} + 5 = 0$ 에서
 $3 \times (3^x)^2 - 9 \times 3^x + 5 = 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $3t^2 - 9t + 5 = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 t 에 대한 이차방정식
 ㉠의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이다.
 이차방정식 ㉠의 근과 계수의 관계에 의하여
 $3^\alpha + 3^\beta = 3, 3^\alpha \times 3^\beta = \frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{9^\alpha + 9^\beta}{3^\alpha + 3^\beta} &= \frac{(3^\alpha + 3^\beta)^2 - 2 \times 3^\alpha \times 3^\beta}{3^\alpha + 3^\beta} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times \frac{5}{3}}{3} = \frac{9 - \frac{10}{3}}{3} \\ &= \frac{\frac{17}{3}}{3} = \frac{17}{9} \end{aligned}$$

답 $\frac{17}{9}$

16

$16^x - 8 \times 4^x + a^2 - 9 = 0$ 에서
 $(4^x)^2 - 8 \times 4^x + a^2 - 9 = 0$
 $4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 8t + a^2 - 9 = 0$ ㉠
 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 t 에 대한 이차
 방정식 ㉠이 양의 실근과 0보다 작거나 같은 근을 하나씩 갖
 거나 양의 중근을 가져야 한다.

(i) ㉠이 양의 실근과 0보다 작거나 같은 근을 하나씩 가질 때,

① 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면
 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - (a^2 - 9) = 25 - a^2 > 0$$

즉, $(a+5)(a-5) < 0$ 이므로 $-5 < a < 5$

② (㉠의 두 근의 곱) $= a^2 - 9 \leq 0$

즉, $(a+3)(a-3) \leq 0$ 이므로 $-3 \leq a \leq 3$

①, ②에서 $-3 \leq a \leq 3$

(ii) ㉠이 양의 중근을 가질 때,

③ 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4^2 - (a^2 - 9) = 25 - a^2 = 0$$

즉, $a^2 = 25$ 이므로 $a = \pm 5$

④ (㉠의 두 근의 합) $= 8 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

⑤ (㉠의 두 근의 곱) $= a^2 - 9 > 0$

즉, $(a+3)(a-3) > 0$ 이므로 $a < -3$ 또는 $a > 3$

③, ④, ⑤에서 $a = -5$ 또는 $a = 5$

(i), (ii)에서 $a = -5$ 또는 $-3 \leq a \leq 3$ 또는 $a = 5$ 이므로
 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-5, -3, -2, -1, 0, 1, 2,$
 $3, 5$ 의 9개이다.

답 9

다른 풀이

$16^x - 8 \times 4^x + a^2 - 9 = 0$ 에서 $(4^x)^2 - 8 \times 4^x + a^2 - 9 = 0$

$4^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - 8t - 9 = -a^2$

즉, 주어진 방정식이 오직 하나

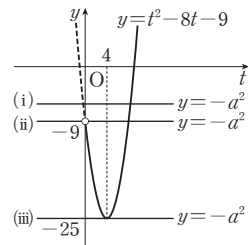
의 실근을 가지려면 함수

$y = t^2 - 8t - 9 = (t-4)^2 - 25$

의 그래프와 직선 $y = -a^2$ 이 오

른쪽 그림과 같이 오직 한 점에

서 만나야 한다.



(i) $-9 < -a^2 \leq 0$ 일 때,

$0 \leq a^2 < 9$ 에서 조건을 만족시키는 정수 a 는

$-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

(ii) $-a^2 = -9$ 일 때,

$a^2 = 9$ 에서 조건을 만족시키는 정수 a 는

$-3, 3$ 의 2개이다.

(iii) $-a^2 = -25$ 일 때,

$a^2 = 25$ 에서 조건을 만족시키는 정수 a 는

$-5, 5$ 의 2개이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 정수 a 의 개수는

$5 + 2 + 2 = 9$

17

두 함수 $y=4^x$, $y=2^{x+1}$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는
 $4^x=2^{x+1}$ 에서 $2^{2x}=2^{x+1}$

$$2x=x+1 \quad \therefore x=1$$

따라서 주어진 두 함수의 그래프는

오른쪽 그림과 같고

$$A(k, 4^k), B(k, 2^{k+1})$$

(i) $k < 1$ 일 때,

$$2^{k+1} > 4^k \text{이므로}$$

$$\overline{AB}=48 \text{에서 } 2^{k+1}-4^k=48$$

$$4^k-2^{k+1}+48=0$$

$$(2^k)^2-2 \times 2^k+48=0$$

$$2^k=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t+48=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-48=-47<0$$

이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 은 실근을 갖지 않는다.

즉, $k < 1$ 일 때 $\overline{AB}=48$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $k > 1$ 일 때,

$$4^k > 2^{k+1} \text{이므로}$$

$$\overline{AB}=48 \text{에서 } 4^k-2^{k+1}=48$$

$$(2^k)^2-2 \times 2^k-48=0$$

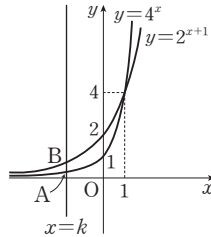
$$2^k=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t-48=0, \ (t+6)(t-8)=0$$

$$\therefore t=8 \ (\because t>0)$$

$$\text{즉, } 2^k=8=2^3 \text{이므로 } k=3$$

(i), (ii)에서 $k=3$



답 3

18

$$f(x)=|6x+8| \text{이므로 } 5^{f(x)} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \text{에서}$$

$$5^{|6x+8|} \leq 5^{-2x}$$

$$\text{이때 (밑)=5>1이므로 } |6x+8| \leq -2x$$

$$6x+8=0 \text{에서 } x=-\frac{4}{3}$$

(i) $x < -\frac{4}{3}$ 일 때,

$$-6x-8 \leq -2x \text{에서 } -4x \leq 8$$

$$\therefore x \geq -2$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{4}{3} \text{이므로 } -2 \leq x < -\frac{4}{3}$$

(ii) $x \geq -\frac{4}{3}$ 일 때,

$$6x+8 \leq -2x \text{에서 } 8x \leq -8$$

$$\therefore x \leq -1$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{4}{3} \text{이므로 } -\frac{4}{3} \leq x \leq -1$$

(i), (ii)에서 $-2 \leq x \leq -1$ 이므로

$$M=-1, m=-2$$

$$\therefore M-m=-1-(-2)=1$$

답 1

19

(i) 집합 $A=\{x|3^x \leq 81\}$ 에서

$$3^x \leq 81, 3^x \leq 3^4$$

$$\text{이때 (밑)=3>1이므로}$$

$$x^2 \leq 4, x^2-4 \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$\therefore A=\{x|-2 \leq x \leq 2\}$$

(ii) 집합 $B=\{x|2^{1-x} > (\sqrt{2})^{\frac{k}{2}}\}$ 에서

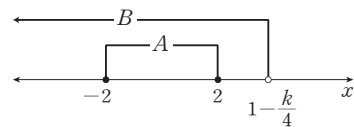
$$2^{1-x} > (\sqrt{2})^{\frac{k}{2}}, 2^{1-x} > 2^{\frac{k}{4}}$$

$$\text{이때 (밑)=2>1이므로}$$

$$1-x > \frac{k}{4} \quad \therefore x < 1-\frac{k}{4}$$

$$\therefore B=\left\{x \mid x < 1-\frac{k}{4}\right\}$$

(i), (ii)에서 $A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, } 1-\frac{k}{4} > 2 \text{이어야 하므로 } k < -4$$

답 $k < -4$

20

$$4^{f(x)} - 2^{1+f(x)} < 8 \text{에서}$$

$$\{2^{f(x)}\}^2 - 2 \times 2^{f(x)} - 8 < 0$$

$$2^{f(x)} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 8 < 0, (t+2)(t-4) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 4$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 4$

$$\text{즉, } 0 < 2^{f(x)} < 4 \text{이므로 } 0 < 2^{f(x)} < 2^2$$

이때 (밑)=2 > 1이므로

$$f(x) < 2, \text{ 즉 } x^2 - x - 4 < 2$$

$$x^2 - x - 6 < 0, (x+2)(x-3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

답 4

21

$$4^x - k \times 2^{x+1} + 9 \geq 2^{x+1} \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 2(k+1) \times 2^x + 9 \geq 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(k+1)t + 9 \geq 0$$

이때 $f(t) = t^2 - 2(k+1)t + 9$ 라 하면

$$f(t) = \{t - (k+1)\}^2 + 9 - (k+1)^2$$

즉, 이차함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 축은 직선 $t = k+1$ 이므로 모든 양수 t 에 대하여 $f(t) \geq 0$ 이 성립하는 경우는 다음 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $k+1 > 0$, 즉 $k > -1$ 일 때,

$f(t)$ 는 $t = k+1$ 일 때 최솟값

$9 - (k+1)^2$ 을 가지므로

모든 양수 t 에 대하여

$f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

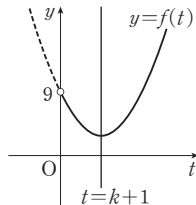
$9 - (k+1)^2 \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $k^2 + 2k - 8 \leq 0$ 에서

$$(k+4)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq k \leq 2$$

그런데 $k > -1$ 이므로 $-1 < k \leq 2$



(ii) $k+1 \leq 0$, 즉 $k \leq -1$ 일 때,

$$f(0) = 9 > 0 \text{이므로}$$

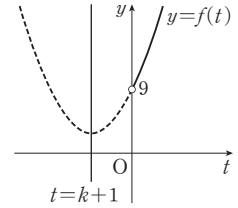
모든 양수 t 에 대하여

$f(t) \geq 0$ 이 항상 성립한다.

$$\therefore k \leq -1$$

(i), (ii)에서 $k \leq 2$

따라서 구하는 정수 k 의 최댓값은 2이다.



답 2

22

$$4^x = X, 4^y = Y \ (X > 0, Y > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2^x = \sqrt{X}, 2^y = \sqrt{Y}$$

$$\begin{cases} 4^x + 4^y = 24 \\ 2^{x+y} = \sqrt{2^7} \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 4^x + 4^y = 24 \\ 2^x \times 2^y = \sqrt{2^7} \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{cases} X + Y = 24 \\ \sqrt{XY} = \sqrt{2^7} \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} X + Y = 24 \\ XY = 128 \end{cases}$$

(가)

즉, X, Y 는 이차방정식 $t^2 - 24t + 128 = 0$ 의 두 양의 실근이므로

$$(t-8)(t-16) = 0 \text{에서 } t=8 \text{ 또는 } t=16$$

$$\therefore X=8, Y=16 \text{ 또는 } X=16, Y=8$$

(나)

(i) $X=8, Y=16$ 일 때,

$$4^x = 8, 4^y = 16 \text{이므로}$$

$$2^{2x} = 2^3, 2^{2y} = 2^4$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = 2$$

(ii) $X=16, Y=8$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로

$$x = 2, y = \frac{3}{2}$$

(다)

$$(i), (ii) \text{에서 } x^3 y^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times 2^3 = \frac{27}{8} \times 8 = 27$$

(라)

답 27

단계	채점 기준	배점
(가)	$4^x = X, 4^y = Y$ 로 치환하여 연립방정식을 나타낸 경우	30%
(나)	X, Y 를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하고 X, Y 의 값을 각각 구한 경우	30%
(다)	경우를 나누어 x, y 의 값을 각각 구한 경우	30%
(라)	$x^3 y^3$ 의 값을 구한 경우	10%

23

$(x^2 - 3x + 3)^{2x-7} = 1$ 에서

$1=1^a$ 또는 $1=b^0$ ($b \neq 0$, a, b 는 실수)이므로 주어진 방정식이 성립하려면 $(x^2 - 3x + 3)^{2x-7}$ 의 밑이 1이거나 지수가 0이어야 한다.

(i) 밑이 1일 때,

$$x^2 - 3x + 3 = 1, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(ii) 지수가 0일 때,

$$2x - 7 = 0 \quad \therefore x = \frac{7}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{7}{2}$$

$$\therefore 4S = 4 \times \left(1 + 2 + \frac{7}{2}\right) = 26$$

답 26

24

금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 15년이 지난 시점에서
의 기대자산은 초기자산의 3배, 즉 $3w_0$ 이므로
 $W_0 = w_0$, $W = 3w_0$, $t = 15$ 를 주어진 식에 대입하면

$$3w_0 = \frac{w_0}{2} \cdot 10^{15a} (1 + 10^{15a})$$

$$6 = 10^{15a} (1 + 10^{15a}) \quad (\because w_0 > 0)$$

$$(10^{15a})^2 + 10^{15a} - 6 = 0$$

$$10^{15a} = X \quad (X > 0) \text{로 놓으면}$$

$$X^2 + X - 6 = 0, (X+3)(X-2) = 0$$

$$\therefore X = 2 \quad (\because X > 0)$$

$$\therefore 10^{15a} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 30년이 지난 시점에서
의 기대자산이 초기자산의 k 배, 즉 kw_0 이므로
 $W_0 = w_0$, $W = kw_0$, $t = 30$ 을 주어진 식에 대입하면

$$kw_0 = \frac{w_0}{2} \cdot 10^{30a} (1 + 10^{30a})$$

$$\therefore k = \frac{(10^{15a})^2}{2} \{1 + (10^{15a})^2\} \quad (\because w_0 > 0)$$

$$= \frac{2^2}{2} \times (1 + 2^2) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 2 \times 5 = 10$$

답 10

25

신제품 가격을 a 원이라 할 때, 구매 후 n 년이 지났을 때의 중고 가격은

$$a \times (1 - 0.25)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n a$$

이 중고 가격이 신제품 가격의 $\frac{243}{1024}$ 배 이하가 되려면

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n a \leq \frac{243}{1024} a$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{243}{1024} \quad (\because a > 0)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^5 \text{에서 } 0 < \left(\frac{3}{4}\right) < 1 \text{이므로 } n \geq 5$$

따라서 이 제품의 중고 가격이 처음으로 신제품 가격의 $\frac{243}{1024}$ 배 이하가 되는 것은 구매 후 5년이 지났을 때이다.

답 5년

STEP 2 개념 마무리

본문 p.097

1 4

2 ④

3 ③

4 15

5 $\frac{3}{2}$

1

함수 $y = a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = a^{-x}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = a^{-(x-b)} \quad \therefore y = a^{-x+b}$$

$$\therefore g(x) = a^{-x+b}$$

이때 조건 ②에서 함수 $y = a^x$ 의 그래프와 $y = a^{-x+b}$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(1) = g(1)$$

$$a^1 = a^{-1+b}, 1 = -1+b \quad \leftarrow \text{조건 ③을 만족시키려면 } a \neq 1 \text{이다.}$$

$$\therefore b = 2 \quad \therefore g(x) = a^{-x+2}$$

또한, 조건 ㄴ에서 $f(3)=16g(3)$ 이므로

$$a^3=16 \times a^{-1}, a^4=16$$

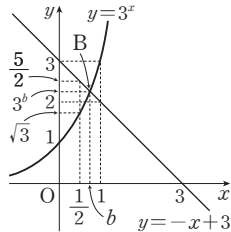
$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore a+b=2+2=4$$

답 4

2

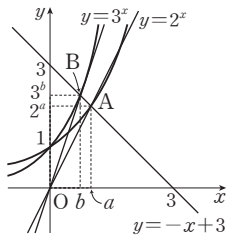
ㄱ. $x=\frac{1}{2}$ 일 때, $3^x < -x+3$ 이고, $x=1$ 일 때, $3^x > -x+3$
 $\sqrt{3} < \frac{5}{2}$ $3 > 2$
 이므로 함수 $y=3^x$ 의 그래프와 직선 $y=-x+3$ 의 교점
 의 x 좌표는 다음 그림과 같이 $\frac{1}{2} < x < 1$ 에 존재한다.



$$\therefore \frac{1}{2} < b < 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 두 점 A, B는 각각 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 위에 있으므로
 $A(a, 2^a)$, $B(b, 3^b)$

즉, 직선 OA의 기울기는 $\frac{2^a}{a}$, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3^b}{b}$
 이다.



이때 $0 < b < a$ 이므로 위의 그림에서

$$\frac{2^a}{a} < \frac{3^b}{b} \quad \therefore \frac{3^b}{b} - \frac{2^a}{a} > 0$$

위 식의 양변에 ab 를 곱하면

$$a \times 3^b - b \times 2^a > 0 \quad (\because ab > 0) \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. 두 점 A, B는 모두 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로 직
 선 AB의 기울기는 직선 $y=-x+3$ 의 기울기와 같다.

$$\text{즉, } \frac{3^b - 2^a}{b - a} = -1 \text{ 이므로}$$

$$a - b = 3^b - 2^a \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이

점 (1, 2)는 곡선 $y=2^x$ 과 직선 $y=-x+3$ 위에 있으므로
 $A(1, 2)$

이때 점 A의 x 좌표는 a 이므로 $a=1$ ㉠

점 B의 x 좌표는 b 이고, 점 B는 곡선 $y=3^x$ 위에 있으므로
 $B(b, 3^b)$

이 점은 직선 $y=-x+3$ 위에 있으므로

$$3^b = -b + 3 \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

$$\therefore a \times 3^b - b \times 2^a$$

$$= 1 \times (-b + 3) - b \times 2 \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡})$$

$$= -b + 3 - 2b$$

$$= -3b + 3$$

$$= -3(b - 1) > 0 \quad (\because b < 1) \quad (\text{거짓})$$

$$\text{ㄷ. (좌변)} = a - b = 1 - b \quad (\because \textcircled{㉠})$$

$$(\text{우변}) = 3^b - 2^a = (-b + 3) - 2 \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡})$$

$$= 1 - b$$

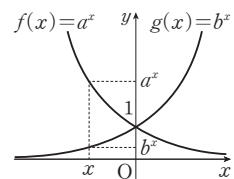
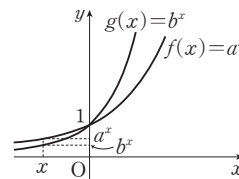
$$\therefore a - b = 3^b - 2^a \quad (\text{참})$$

3

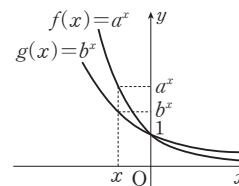
1이 아닌 두 양수 a, b ($a < b$)에 대하여 다음과 같이 세 가
 지 경우가 존재하고 각 경우에 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$
 의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $1 < a < b$ 일 때,

(ii) $0 < a < 1 < b$ 일 때,

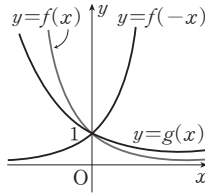


(iii) $0 < a < b < 1$ 일 때,



ㄱ. (i), (ii), (iii)에서 $x < 0$ 일 때, $a^x > b^x$ 이므로
 $f(x) > g(x) \quad \therefore f(x) - g(x) > 0$ (참)

ㄴ. $0 < a < b < 1$ 일 때, 두 함수
 $y = f(-x)$, $y = g(x)$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같다. 즉, $x > 0$
 일 때 $f(-x) > g(x)$ 가 성립하
 지만 $0 < a < 1$ 이다. (거짓)



ㄷ. $ab=1$ 에서 $b = \frac{1}{a}$ 이므로 $g(x) = b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

$$\begin{aligned} \therefore f(a) - g(-b) &= f(a) - g\left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= a^a - \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{a}} = a^a - a^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

그런데 두 양수 a , b 에 대하여 $a \neq 1$, $b \neq 1$ 이고

$$0 < a < b \text{이므로 } 0 < a < \frac{1}{a} \quad (\because ab=1)$$

$$\therefore 0 < a < 1 < \frac{1}{a}$$

또한, $0 < a < 1$ 이면 함수 $y=f(x)$ 는 x 의 값이 증가할
 때 y 의 값은 감소하므로

$$a^a > a^{\frac{1}{a}}$$

$$\therefore f(a) - g(-b) = a^a - a^{\frac{1}{a}} > 0 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

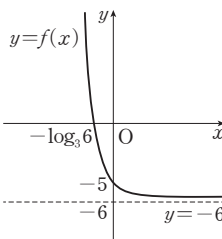
4

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6$ 이라 하면

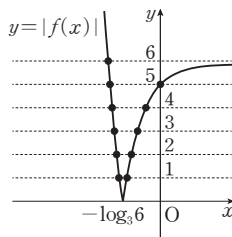
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축의 방

향으로 -6 만큼 평행이동한 것
 이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를
 이용하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그
 래프를 그린 후, 자연수 n 의 값에
 따라 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프
 와 직선 $y=n$ 이 만나는 점을 나
 타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (1 \leq n < 6) \\ 1 & (n \geq 6) \end{cases}$$

이때 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 20$ 에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 \times 5 = 10 < 20 \text{이므로}$$

$$n \geq 6$$

따라서

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_n$$

$$= 2 \times 5 + 1 \times (n-5) = 20 \text{이므로}$$

$$10 + n - 5 = 20 \quad \therefore n = 15$$

답 15

5

$$2^x + 2p - \frac{q}{2^{x-2}} < 0 \text{에서}$$

$$2^x + 2p - \frac{4q}{2^x} < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t + 2p - \frac{4q}{t} < 0$$

이 식의 양변에 t ($t > 0$)를 곱하면

$$t^2 + 2pt - 4q < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$0 < x < 2$ 에서 부등식 ①이 항상 성립하려면 $1 < t < 4$ 에서

$$0 < x < 2 \text{에서 } 2^0 < 2^x < 2^2$$

부등식 ②이 항상 성립해야 한다.

$f(t) = t^2 + 2pt - 4q$ 라 하면 이차

함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 한다.

즉, $1 < t < 4$ 에서 항상 $f(t) < 0$

이려면 $f(1) \leq 0$, $f(4) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(1) = 1 + 2p - 4q \leq 0 \text{에서}$$

$$p - 2q \leq -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$f(4) = 16 + 8p - 4q \leq 0 \text{에서}$$

$$2p - q \leq -4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{을 하면 } 3p - 3q \leq -\frac{9}{2}$$

즉, $q - p \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $q - p$ 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 $\frac{3}{2}$

04. 로그함수

1 로그함수

기본 + 필수연습

본문 pp.105~115

01 ㄱ, ㄷ 02 ㄱ, ㄴ, ㄷ 03 풀이 참조

04 (1) $\log_{\sqrt{6}} 3 > \log_{36} 4$ (2) $\log_{\frac{1}{8}} 512 > \log_{\frac{1}{2}} 10$

05 최댓값 : 29, 최솟값 : 28

06 -2 07 0 08 81 09 4

10 -1 11 2 12 -18 13 2

14 ㄴ, ㄷ, ㄹ 15 8 16 9

17 $\frac{9}{2}$ 18 3 19 $A < C < B$

20 $C < A < B$ 21 2 22 $-\frac{8}{3}$

23 19 24 4

25 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 7 (2) 10

26 4 27 4

01

ㄱ. $y = \log x$ 는 로그함수이다. ← 10을 밑으로 하는 로그함수이다.

ㄴ. $y = \log_{\frac{1}{6}} 36$ 에서 $y = \log_{6^{-1}} 6^2 = -2$ 이므로 상수함수이다.

ㄷ. $y = \log_5 x^{\frac{1}{2}}$ 에서 $y = \frac{1}{2} \log_5 x = \log_{25} x$ 이므로 로그함수이다.

ㄹ. $y = x^2 \log_3 4$ 에서 $y = (\log_3 4)x^2$ 이므로 이차함수이다.

따라서 로그함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

02

ㄱ. 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

ㄴ. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^y$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ (참)

ㄷ. 그래프는 제1, 4사분면을 지난다. (참)

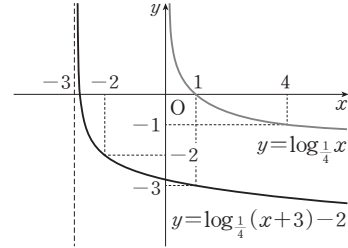
ㄹ. x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 $0 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

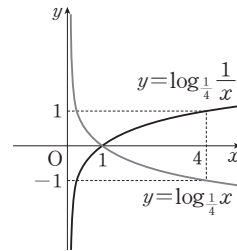
03

(1) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x+3) - 2$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



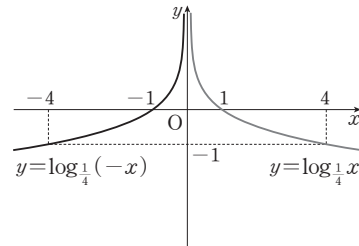
따라서 정의역은 $\{x | x > -3\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

(2) $y = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



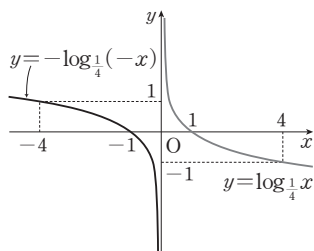
따라서 정의역은 $\{x | x > 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.

(3) $y = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.

(4) $y = -\log_{\frac{1}{4}}(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 정의역은 $\{x | x < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

답 풀이 참조

04

$$(1) \log_{\sqrt{6}} 3 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 3 = 2 \log_6 3 = \log_6 9,$$

$$\log_{36} 4 = \log_{6^2} 2^2 = \log_6 2$$

이때 $9 > 2$ 이고, 함수 $y = \log_6 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_6 9 > \log_6 2$$

$$\therefore \log_{\sqrt{6}} 3 > \log_{36} 4$$

$$(2) \log_{\frac{1}{8}} 512 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^3} 2^9 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

이때 $8 < 10$ 이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 > \log_{\frac{1}{2}} 10$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{8}} 512 > \log_{\frac{1}{2}} 10$$

$$\text{답 (1) } \log_{\sqrt{6}} 3 > \log_{36} 4 \quad (2) \log_{\frac{1}{8}} 512 > \log_{\frac{1}{2}} 10$$

05

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 30$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소한다. $\frac{3}{2} - 0 < (\text{일}) < 1$

따라서 $0 \leq x \leq 6$ 에서

$x=0$ 일 때 최대이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(0) = \log_{\frac{1}{3}}(0+3) + 30 = \log_{3^{-1}} 3 + 30$$

$$= -1 + 30 = 29$$

$x=6$ 일 때 최소이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(6) = \log_{\frac{1}{3}}(6+3) + 30 = \log_{\frac{1}{3}} 9 + 30$$

$$= \log_{3^{-1}} 3^2 + 30 = -2 + 30 = 28$$

답 최댓값 : 29, 최솟값 : 28

06

함수 $y = \log_a x$ 의 그래프가 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \log_a 4 \text{에서 } a^{-2} = 4$$

$$\frac{1}{a^2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

로그함수의 밑 a 는 $a > 0, a \neq 1$

또한, 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프가 점 $(16, b)$ 를 지나므로

$$b = \log_a 16 \text{에서 } a^b = 16$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b = 16 \quad (\because a = \frac{1}{2})$$

$$2^{-b} = 2^4, -b = 4 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

답 -2

07

$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 라 하면 함수 $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프에서

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} = a$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2} = b$$

$$f(2) = \log_{\frac{1}{5}} 2 = c$$

$$\therefore a + 2b + 4c = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} + 2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2} + 4 \log_{\frac{1}{5}} 2$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \log_{\frac{1}{5}} 2^4$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 16\right)$$

$$= \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$$

답 0

08

두 함수 $y = \log_a x$ 와 $y = \log_3 x$ 의 그래프는 모두 점 $(1, 0)$

을 지나므로 $A(1, 0)$

두 점 B, C의 x 좌표가 모두 9이므로

$$B(9, \log_a 9), C(9, 2)$$

$$\therefore \overline{BC} = 2 - \log_a 9 \quad (\because a > 3)$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times (2 - \log_a 9) \times (9 - 1) = 2$$

$$2 - \log_a 9 = \frac{1}{2}, \log_a 9 = \frac{3}{2}$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 9 \quad \therefore a^3 = 9^2 = 81$$

답 81

09

함수 $y = \log_a x$ ($a > 1$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - b = \log_a (x + 3)$$

$$\therefore y = \log_a (x + 3) + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = 2 \log_4 (2x + 6) + 1$$

$$= 2 \log_4 2(x + 3) + 1$$

$$= 2 \log_4 2 + 2 \log_4 (x + 3) + 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 2 \log_{2^2} (x + 3) + 1$$

$$= \log_2 (x + 3) + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

두 그래프 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$a = 2, b = 2$$

$$\therefore ab = 2 \times 2 = 4$$

답 4

10

함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5 (x - a)$$

이 그래프와 $y = \log_b x$ 의 그래프가 점 $(9, 2)$ 에서 만나므로 두 그래프는 모두 점 $(9, 2)$ 를 지난다.

(i) $y = \log_5 (x - a)$ 에 $x = 9, y = 2$ 를 대입하면

$$2 = \log_5 (9 - a) \text{에서 } 5^2 = 9 - a$$

$$25 = 9 - a \quad \therefore a = -16$$

(ii) $y = \log_b x$ 에 $x = 9, y = 2$ 를 대입하면

$$2 = \log_b 9 \text{에서 } b^2 = 9$$

$$\therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

(i), (ii)에서 $a + 5b = -16 + 5 \times 3 = -16 + 15 = -1$

답 -1

11

함수 $y = \log_7 \frac{x}{7}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y = f(x)$ 이므로

$$f(x) = \log_7 \frac{1}{7} (x - a) + b$$

$$y = \log_7 \frac{1}{7} (x - a) + b \text{에서}$$

$$y - b = \log_7 \frac{1}{7} (x - a), 7^{y-b} = \frac{1}{7} (x - a)$$

$$x - a = 7^{y-b+1} \quad \therefore x = 7^{y-b+1} + a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 7^{x-b+1} + a$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 7^{x-b+1} + a$$

이때 $f^{-1}(x) = 7^{x-3} + 2$ 이므로

$$a = 2, b = 4$$

$$\therefore \log_a b = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

답 2

다른 풀이

$$f(x) = \log_7 \frac{1}{7} (x - a) + b \text{에서}$$

$$f(a+1) = b-1, f(a+7) = b$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = 7^{x-3} + 2$ 이므로

$$f^{-1}(b-1) = a+1 \text{에서}$$

$$7^{b-4} + 2 = a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(b) = a+7 \text{에서}$$

$$7^{b-3} + 2 = a+7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$7^{b-4} (7-1) = 6, 7^{b-4} = 1 \quad \therefore b = 4$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$a+1 = 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore \log_a b = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

12

함수 $y = \log_5 15x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5 15(x+2) - 1$$

$$y = \log_5 15(x+2) - \log_5 5$$

$$\therefore y = \log_5(3x+6)$$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_5(-3x+6), y = -\log_5(-3x+6)$$

$$\therefore y = \log_{\frac{1}{5}}(-3x+6)$$

이 식이 $y = \log_{\frac{1}{5}}(ax+b)$ 와 같으므로

$$a = -3, b = 6 \quad \therefore ab = (-3) \times 6 = -18$$

답 -18

13

함수 $y = \log_{\frac{1}{4}}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 $\log_{\frac{1}{4}}a$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_{\frac{1}{4}}(x+2) + \log_{\frac{1}{4}}a$$

$$\therefore y = \log_{\frac{1}{4}}a(x+2)$$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_{\frac{1}{4}}a(x+2), y = -\log_{\frac{1}{4}}a(x+2)$$

$$\therefore y = \log_4a(x+2)$$

이 그래프가 점 (6, 2)를 지나므로

$$2 = \log_4a(6+2), 2 = \log_48a$$

$$4^2 = 8a, 16 = 8a \quad \therefore a = 2$$

답 2

14

ㄱ. $y = \log_2(x-10)+10$ 의 그래프는 $y = \log_2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 10만큼, y 축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이므로 $y = \log_3x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)-3 = -\log_3(x+3)-3$ 이므로 $y = \log_3x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3)-3$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y = \log_{27}x^3 = \log_3x^3 = \log_3x$ 이므로 $y = \log_3x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{ㄹ. } y = -\log_3(-x+1)+3$$

$$= -\log_3\{- (x-1)\} + 3$$

이므로 $y = \log_3x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y = -\log_3(-x+1)+3$ 의 그래프와 겹쳐진다.

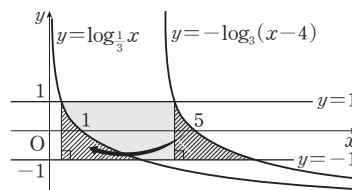
따라서 $y = \log_3x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

15

$$y = -\log_3(x-4) = \log_{\frac{1}{3}}(x-4)$$

즉, 함수 $y = -\log_3(x-4)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



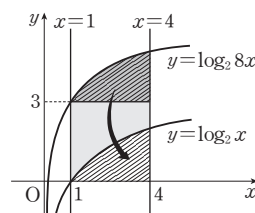
따라서 구하는 도형의 넓이는 가로 길이가 4, 세로 길이가 $1 - (-1) = 2$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로 $4 \times 2 = 8$

답 8

16

$$y = \log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x = \log_2 x + 3$$

즉, 함수 $y = \log_2 8x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 가로 길이가 $4-1=3$, 세로 길이가 3인 정사각형의 넓이와 같으므로 $3 \times 3 = 9$

답 9

17

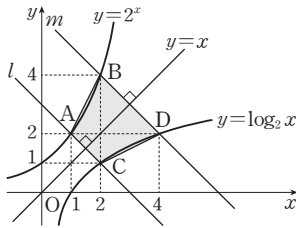
두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 에 대하여

직선 $x=1$ 과 곡선 $y=2^x$ 의 교점 A의 좌표는 (1, 2),

직선 $y=2$ 와 곡선 $y=\log_2 x$ 의 교점 D의 좌표는 (4, 2)이다.

두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 B, D는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, 두 점 A, C도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$\therefore B(2, 4)$, $C(2, 1)$



따라서 $\overline{AD}$ 와 $\overline{BC}$ 의 교점을 H라 하면 사각형 ABDC의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle ADB + \triangle ACD &= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{BH} + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{HC} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times (\overline{BH} + \overline{HC}) \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times (4-1) \times (4-1) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

18

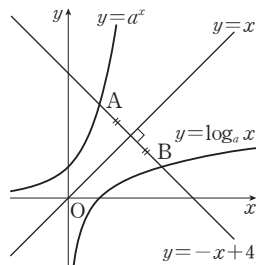
두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A가 직선 $y=-x+4$ 위에 있으므로 점 A의 x 좌표를 k 라 하면

$A(k, 4-k)$

두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$B(4-k, k)$



$$\overline{AB}=2\sqrt{2} \text{이므로 } \overline{AB}^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\{(4-k)-k\}^2 + \{k-(4-k)\}^2 = 8$$

$$2(2k-4)^2 = 8, \quad k^2 - 4k + 4 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, \quad (k-1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=3$$

(i) $k=1$ 일 때,

$A(1, 3)$, $B(3, 1)$

이때 점 A(1, 3)은 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로 $a=3$

(ii) $k=3$ 일 때,

$A(3, 1)$, $B(1, 3)$

이때 점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 크므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$

답 3

19

세 수 A, B, C의 밑을 3으로 나타내면

$$A = \frac{2}{\log_5 3} = 2 \log_3 5 = \log_3 25$$

$$B = \frac{\log_2 42}{\log_2 3} = \log_3 42$$

$$C = \log_{\sqrt{3}} 6 = \log_{(\sqrt{3})^2} 6^2 = \log_3 36$$

이때 $25 < 36 < 42$ 이고, 함수 $y=\log_3 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 25 < \log_3 36 < \log_3 42$$

$$\therefore A < C < B$$

답 $A < C < B$

20

$a < b < 1$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a a > \log_a b > \log_a 1 \quad (\because 0 < a < 1)$$

$$\therefore 0 < \log_a b < 1$$

$a < b < 1$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a > \log_b b > \log_b 1 \quad (\because 0 < b < 1)$$

$$\therefore \log_b a > 1$$

$a < 1$ 의 양변에 밑이 c 인 로그를 취하면

$$\log_c a < \log_c 1 \quad (\because c > 1)$$

$$\therefore \log_c a < 0$$

따라서 $\log_c a < 0 < \log_a b < 1 < \log_b a$ 이므로

$$\log_c a < \log_a b < \log_b a$$

$$\therefore C < A < B$$

답 $C < A < B$

21

$$7 \log_{\frac{1}{7}} 2 = \log_{\frac{1}{7}} 2^7 = \log_{\frac{1}{7}} 128,$$

$$\frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 16 = \log_{\frac{1}{7}} (2^4)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{7}} 2$$

이때 $128 > 2$ 이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{7}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{7}} 128 < \log_{\frac{1}{7}} 2 \quad \therefore 7 \log_{\frac{1}{7}} 2 < \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 16$$

$$\text{즉, } M = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 16, m = 7 \log_{\frac{1}{7}} 2 \text{이므로}$$

$$M - m = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{7}} 16 - 7 \log_{\frac{1}{7}} 2$$

$$= \log_{\frac{1}{7}} 2 - \log_{\frac{1}{7}} 128$$

$$= \log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{128} = \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{64}$$

$$= \log_{7^{-1}} 64^{-1} = \log_7 64$$

이때 $7^2 < 64 < 7^3$ 에서 $\log_7 49 = 2$, $\log_7 343 = 3$ 이므로

$$2 < \log_7 64 < 3$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 n 의 값은 2이다.

답 2

22

$f(x) = -3x^2 + 6x + a$ 라 하면 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 에서

$0 < (\text{밑}) = \frac{1}{3} < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 $\log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는 최소이다.

한편, $f(x) = -3x^2 + 6x + a = -3(x-1)^2 + a + 3$ 이므로

$$0 < f(x) \leq a + 3 \quad \text{--- } f(x) \text{는 } \log_{\frac{1}{3}} f(x) \text{의 진수이므로 } f(x) > 0$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는 $f(x) = a + 3$ 일 때 최솟값

$$\log_{\frac{1}{3}} (a + 3) = 1 \text{을 가지므로}$$

$$a + 3 = \frac{1}{3} \quad \therefore a = -\frac{8}{3}$$

답 $-\frac{8}{3}$

23

$f(x) = x^2 - px + 2q$ 라 하면 $y = \log_{\frac{1}{6}} f(x)$ 에서

$0 < (\text{밑}) = \frac{1}{6} < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 $\log_{\frac{1}{6}} f(x)$ 는 최대이다.

한편,

$$f(x) = x^2 - px + 2q$$

$$= x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2q$$

$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + 2q$$

이므로 $x = \frac{p}{2}$ 일 때 $f(x)$ 는 최솟값 $-\frac{p^2}{4} + 2q$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } x = \frac{p}{2} = 4 \text{에서 } p = 8$$

$$\frac{p^2}{4} < 8q \text{이므로 } -\frac{p^2}{4} + 2q > 0$$

즉, 진수의 조건을 만족한다.

$$\text{또한, } \log_{\frac{1}{6}} \left(-\frac{p^2}{4} + 2q\right) = -1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{6}} (-16 + 2q) = -1 \quad (\because p = 8)$$

$$2q - 16 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}, \quad 2q - 16 = 6$$

$$2q = 22 \quad \therefore q = 11$$

$$\therefore p + q = 8 + 11 = 19$$

답 19

24

$y = \log_3 (7 - 2^x) + \log_3 (2^x - 1)$ 에서 진수의 조건에서

$$7 - 2^x > 0, \quad 2^x - 1 > 0$$

$$\therefore 1 < 2^x < 7$$

$$2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } 1 < t < 7 \text{이고}$$

$$y = \log_3 (7 - 2^x) + \log_3 (2^x - 1)$$

$$= \log_3 (7 - t) + \log_3 (t - 1)$$

$$= \log_3 (7 - t)(t - 1)$$

$$= \log_3 (-t^2 + 8t - 7)$$

$f(t) = -t^2 + 8t - 7$ 이라 하면 $y = \log_3 f(t)$ 에서

(밑) = 3 > 1이므로 $f(t)$ 가 최대일 때 $\log_3 f(t)$ 도 최대이다.

한편, $1 < t < 7$ 이고, $f(t) = -t^2 + 8t - 7 = -(t - 4)^2 + 9$

이므로 $f(t)$ 는 $t = 4$ 일 때 최댓값 $f(4) = 9$ 를 갖는다.

이때 $t = 4$, 즉 $2^x = 4$ 에서 $x = 2$ 이고, 최댓값은 $\log_3 9 = 2$ 이다.

따라서 $a = 2$, $b = 2$ 이므로

$$ab = 2 \times 2 = 4$$

답 4

25

$$(1) y = \left(\log_{\frac{1}{5}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{5}} x^4 + 10$$

$$= \left(\log_{\frac{1}{5}} x\right)^2 + 4\log_{\frac{1}{5}} x + 10$$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$1 \leq x \leq 5 \text{에서 } \log_{\frac{1}{5}} 1 \geq \log_{\frac{1}{5}} x \geq \log_{\frac{1}{5}} 5$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 0$$

이때 주어진 함수는

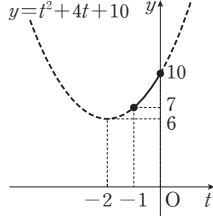
$$y = t^2 + 4t + 10 = (t+2)^2 + 6$$

이므로

$$t=0 \text{일 때 최댓값 } 2^2 + 6 = 10,$$

$$t=-1 \text{일 때 최솟값 } 1^2 + 6 = 7$$

을 갖는다.



$$(2) y = \log_2 64x + \log_x 16$$

$$= (\log_2 2^6 + \log_2 x) + \log_x 2^4$$

$$= \log_2 x + 4\log_x 2 + 6$$

$$= \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} + 6$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$\text{주어진 함수는 } y = t + \frac{4}{t} + 6$$

이때 $x > 1$ 에서 $\log_2 x > 0$, 즉 $t > 0$, $\frac{1}{t} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t + \frac{4}{t} + 6 \geq 2\sqrt{t \times \frac{4}{t}} + 6 = 10$$

(단, 등호는 $t = \frac{4}{t}$, 즉 $t = 2$ 일 때 성립)

따라서 함수 $y = \log_2 64x + \log_x 16$ 의 최솟값은 10이다.

답 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 7 (2) 10

26

$$y = \log x^{\log x} - 6 \log 10x$$

$$= (\log x)^2 - 6(\log 10 + \log x)$$

$$= (\log x)^2 - 6 \log x - 6$$

$\log x = t$ 로 놓으면 $10 \leq x \leq 10000$ 에서

$$\log 10 \leq \log x \leq \log 10000 \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 6t - 6 = (t-3)^2 - 15$$

이므로

$t=1$ 일 때 최댓값

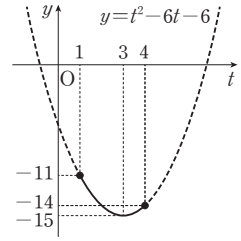
$$M = (-2)^2 - 15 = -11,$$

$t=3$ 일 때 최솟값

$$m = 0^2 - 15 = -15$$

를 갖는다.

$$\therefore M - m = -11 - (-15) = 4$$



답 4

27

$x > 1, y > 1$ 에서 $\log_3 x > 0, \log_3 y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_3 x + \log_3 y \geq 2\sqrt{\log_3 x \times \log_3 y}$$

(단, 등호는 $\log_3 x = \log_3 y$, 즉 $x = y$ 일 때 성립)

$$\log_3 xy \geq 2\sqrt{\log_3 x \times \log_3 y}$$

$$\log_3 81 \geq 2\sqrt{\log_3 x \times \log_3 y} \quad (\because xy = 81)$$

$$\log_3 3^4 \geq 2\sqrt{\log_3 x \times \log_3 y}$$

$$2 \geq \sqrt{\log_3 x \times \log_3 y}$$

$$\therefore \log_3 x \times \log_3 y \leq 4$$

따라서 $\log_3 x \times \log_3 y$ 의 최댓값은 4이다.

답 4

다른 풀이

$$xy = 81 \text{에서 } y = \frac{81}{x} \text{이므로}$$

$$\log_3 x \times \log_3 y$$

$$= \log_3 x \times \log_3 \frac{81}{x}$$

$$= \log_3 x \times (\log_3 81 - \log_3 x)$$

$$= -(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x > 1$ 에서 $\log_3 x > 0$ 이고,

$$y > 1 \text{에서 } \frac{81}{x} > 1, x < 81 \quad \therefore \log_3 x < 4$$

이므로 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$0 < t < 4$$

①에서

$$\log_3 x \times \log_3 y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$$

이므로

$\log_3 x \times \log_3 y$ 는 최댓값 4를 갖는다.

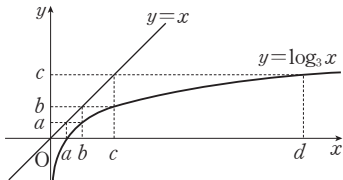
STEP 1

개념 마무리

본문 pp.116~118

01 23	02 ⑤	03 24	04 24
05 2	06 ㄱ	07 3	08 ⑤
09 18	10 7	11 375	12 7
13 ③	14 $A < B < C$	15 -4	
16 1	17 2	18 246	

01



위의 그림에서

$$\log_3 a = 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

$$\log_3 b = a, \text{ 즉 } \log_3 b = 1 \text{ 이므로 } b = 3$$

$$\log_3 c = b, \text{ 즉 } \log_3 c = 3 \text{ 이므로 } c = 3^3$$

$$\log_3 d = c, \text{ 즉 } \log_3 d = 27 \text{ 이므로 } d = 3^{27}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{bc}{d} = \log_{3^{-1}} \frac{3 \times 3^3}{3^{27}} = \log_{3^{-1}} 3^{-23} = 23$$

답 23

02

$f(x) = \log_a x$ ($a > 1$)에 대하여

$$\neg. f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{x}$$

$$= \log_a x - \log_a x = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \left\{f\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2 = \left(\log_a \frac{x}{3}\right)^2 = (\log_a x - \log_a 3)^2$$

$$\left\{f\left(\frac{3}{x}\right)\right\}^2 = \left(\log_a \frac{3}{x}\right)^2$$

$$= (\log_a 3 - \log_a x)^2 = (\log_a x - \log_a 3)^2$$

$$\therefore \left\{f\left(\frac{x}{3}\right)\right\}^2 = \left\{f\left(\frac{3}{x}\right)\right\}^2 \text{ (참)}$$

$$\neg. f(x+1) - f(x) = \log_a(x+1) - \log_a x$$

$$= \log_a \frac{x+1}{x} = \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} f(x+2) - f(x+1) &= \log_a(x+2) - \log_a(x+1) \\ &= \log_a \frac{x+2}{x+1} = \log_a \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{ 이므로 } 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{x+1}$$

또한, (밑) $= a > 1$ 이므로

$$\log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right) > \log_a \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

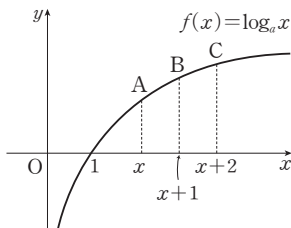
$$\therefore f(x+1) - f(x) > f(x+2) - f(x+1) \text{ (참)}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

다른 풀이

$a > 1$ 일 때, 함수 $f(x) = \log_a x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄷ. $x > 0$ 에 대하여

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = f(x+1) - f(x)$$

$$(\text{직선 BC의 기울기}) = f(x+2) - f(x+1)$$

이때 직선 AB의 기울기가 직선 BC의 기울기보다 크므로

$$f(x+1) - f(x) > f(x+2) - f(x+1) \text{ (참)}$$

03

점 $A(a, b)$ 는 함수 $y = \log_9(x+2)$ 의 그래프 위에 있으므로

$$b = \log_9(a+2) \quad \therefore 9^b = a+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $B(b, a)$ 는 함수 $y = 3^x + 4$ 의 그래프 위에 있으므로

$$a = 3^b + 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$9^b = 3^b + 6, (3^b)^2 - 3^b - 6 = 0$$

$$3^b = t \text{ } (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t-3)(t+2) = 0 \quad \therefore t = 3 \text{ } (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 3^b = 3 \text{ 이므로 } b = 1$$

$$\text{이것을 ㉡에 대입하면 } a = 3 + 4 = 7$$

따라서 $A(7, 1)$, $B(1, 7)$ 이므로

$$AB = \sqrt{(1-7)^2 + (7-1)^2} = 6\sqrt{2}$$

한편, 선분 AB의 중점을 C라 하면

$$C\left(\frac{7+1}{2}, \frac{1+7}{2}\right), \text{ 즉 } C(4, 4) \text{ 이므로}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

삼각형 OAB는 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{OC} \perp \overline{AB}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 24$$

답 24

다른 풀이 공통수학2 p.072 한 걸음 더 참고

A(7, 1), B(1, 7)이므로 삼각형 OAB의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \times |49 - 1| = 24$$

04

조건 ㉞에서 곡선 $y=f(x)$, 즉 $y=\log_6(ax-b)-4$ 의 점

근선의 방정식은 $x=\frac{1}{5}$ 이므로

$$\frac{1}{5}a-b=0 \quad \therefore a=5b \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

조건 ㉝에서 곡선 $y=\log_6(ax-b)-4$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 곡선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하면

$$g(x) = \log_6\{a(x+2)-b\}-4+2$$

이 곡선이 점 (0, 0)을 지나므로

$$\log_6(2a-b)-2=0, \log_6(2a-b)=2$$

$$\therefore 2a-b=36 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉞, ㉝를 연립하여 풀면

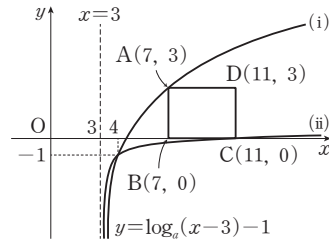
$$a=20, b=4$$

$$\therefore a+b=20+4=24$$

답 24

05

$y=\log_a(x-3)-1$ ($a>1$)은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 다음 그림과 같이 함수 $y=\log_a(x-3)-1$ 의 그래프가 점 A를 지날 때 a 는 최솟값 m 을 갖고, 점 C를 지날 때 a 는 최댓값 M 을 갖는다.



(i) 곡선 $y=\log_a(x-3)-1$ 이 점 A(7, 3)을 지날 때,

$$\log_a 4 - 1 = 3 \text{ 에서 } \log_a 4 = 4$$

$$\text{즉, } a^4 = 4 \text{ 이므로 } m^4 = 4$$

(ii) 곡선 $y=\log_a(x-3)-1$ 이 점 C(11, 0)을 지날 때,

$$\log_a 8 - 1 = 0 \text{ 에서 } \log_a 8 = 1$$

$$\text{즉, } a = 8 \text{ 이므로 } M = 8$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } \frac{M}{m^4} = \frac{8}{4} = 2$$

답 2

06

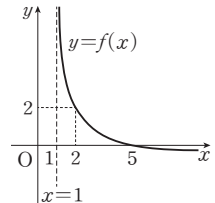
$$f(x) = \log_2 \frac{4}{x-1}$$

$$= \log_2 4 - \log_2(x-1)$$

$$= -\log_2(x-1) + 2$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 2$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

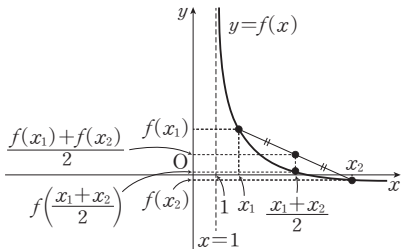
즉, $1 < x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x-1} = -\log_2 \frac{4}{x-1}$$

이므로 두 함수 $y=\log_2 \frac{4}{x-1}$, $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x-1}$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다. (거짓)

ㄹ. 1보다 큰 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 이다. (거짓)

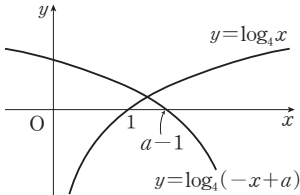


따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

07

$y=\log_4(-x+a)=\log_4\{-(x-a)\}$
 이므로 함수 $y=\log_4(-x+a)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 두 함수의 그래프가 제1사분면에서 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $a-1 > 1$ 이어야 하므로 $a > 2$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 3이다.

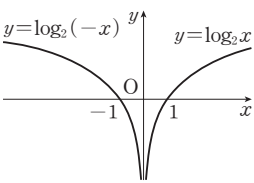
답 3

08 본문 p.103 한 걸음 더 참고

ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{2}}5x=-\log_2 5x=-\log_2 x-\log_2 5$
 이므로 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 $-\log_2 5$ 만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}5x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{ㄴ. } y=\log_4 x^2=\log_2 |x|=\begin{cases} \log_2 x & (x>0) \\ \log_2(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여도 겹쳐지지 않는다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } y &= \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4x+1} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} (4x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 (4x+1) = \log_2 4 \left(x + \frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2 \left(x + \frac{1}{4}\right) + \log_2 4 = \log_2 \left(x + \frac{1}{4}\right) + 2 \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_{\sqrt{2}} \sqrt{4x+1}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{ㄹ. } y=7 \times 2^x = 2^{\log_2 7} \times 2^x = 2^{x+\log_2 7}$$

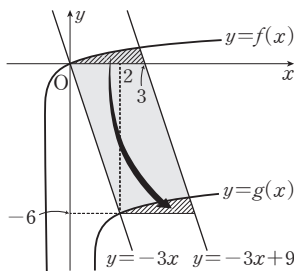
이므로 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 $-\log_2 7$ 만큼 평행이동하면 함수 $y=7 \times 2^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

09

$f(x)=\log_8(x+1)$, $g(x)=\log_8(x-1)-6$ 에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -6)$ 이 된다.
 한편, 점 $(2, -6)$ 은 직선 $y=-3x$ 위의 점이므로 이 점은 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=-3x$ 의 교점이다.
 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $y=-3x$, $y=-3x+9$ 를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 밑변의 길이가 3, 높이가 $0 - (-6) = 6$ 인 평행사변형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$3 \times 6 = 18$$

답 18

10

점 A는 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 y 축의 교점이므로

$$A(0, 1)$$

점 B의 y 좌표가 1이므로

$$1 = \log_2 x \text{에서}$$

$$x = 2$$

$$\text{즉, } B(2, 1) \text{이므로 } \overline{AB} = 2 - 0 = 2$$

두 점 B, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(1, 2)$$

점 D의 y 좌표가 2이므로

$$2 = \log_2 x \text{에서}$$

$$x = 4 \quad \therefore D(4, 2)$$

두 점 D, E는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$E(2, 4)$$

점 F의 y 좌표가 4이므로

$$4 = \log_2 x \text{에서}$$

$$x = 16$$

$$\text{즉, } F(16, 4) \text{이므로 } \overline{EF} = 16 - 2 = 14$$

$$\therefore \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{14}{2} = 7$$

답 7

11

점 $A(a, b)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \log_{\frac{1}{5}} a, \text{ 즉 } \left(\frac{1}{5}\right)^b = a$$

이때 $y=f^{-1}(x)$ 는 $y=f(x)$ 의 역함수이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\text{따라서 } A(a, b), B\left(\frac{3}{2}, a\right) \text{에서 } b = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2b}{a^2} &= \frac{2b}{\left(\frac{1}{5}\right)^{2b}} \\ &= -\frac{3}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} \left(\because b = \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 3 \times 5^3 = 375$$

답 375

12

$$y = a^x + k \text{라 하면 } y - k = a^x$$

$$\text{양변에 밑이 } a \text{인 로그를 취하면 } x = \log_a (y - k)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_a (x - k)$$

즉, 두 함수 $f(x) = a^x + k$, $g(x) = \log_a (x - k)$ 는 서로 역함수 관계이고, (밑) $=a > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가하므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위에 있다.

$$A(m, m), B(n, n) \ (m \neq n) \text{이라 하면 직선 } y = -x + 6$$

이 선분 AB를 수직이등분하므로 $\overline{AB}$ 의 중점

$$\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}\right) \text{은 직선 } y = -x + 6 \text{ 위의 점이다. 즉,}$$

$$\frac{m+n}{2} = -\frac{m+n}{2} + 6$$

$$\therefore m+n=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

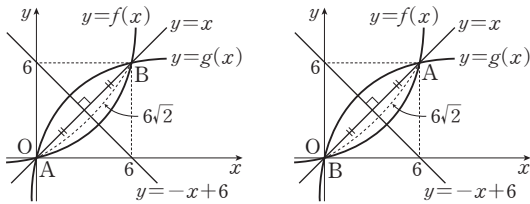
$$\text{또한, } \overline{AB} = 6\sqrt{2} \text{이므로 } \sqrt{2(m-n)^2} = 6\sqrt{2} \text{에서}$$

$$(m-n)^2 = 36 \quad \therefore m-n = \pm 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \begin{cases} m+n=6 \\ m-n=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} m+n=6 \\ m-n=-6 \end{cases} \text{이므로}$$

$$m=6, n=0 \text{ 또는 } m=0, n=6$$

따라서 다음 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점 $A(6, 6)$, $B(0, 0)$ 또는 $A(0, 0)$, $B(6, 6)$ 에서 만난다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 A, B를 지나므로
 $f(0)=0, f(6)=6$
 $f(0)=a^0+k=0$ 에서 $k=-1$
 $f(6)=a^6+k=6$ 에서 $a^6-1=6$ ($\because k=-1$)
 $\therefore a^6=7$

답 7

13

$a < b < 1$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면
 $\log_b a > \log_b b > \log_b 1$ ($\because 0 < b < 1$), 즉
 $\log_b a > 1$ ㉠
 $\therefore A > 1$
 ㉠의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면
 $\log_b (\log_b a) < \log_b 1$, 즉 $\log_b (\log_b a) < 0$ 이므로
 $B < 0$
 한편, $C = (\log_b a)^2 = A^2$ 이고 $A > 1$ 에서 $A^2 > A$ 이므로
 $C > A$
 $\therefore B < A < C$

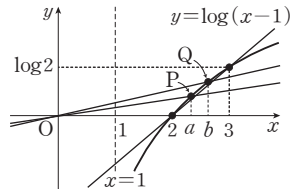
답 ③

다른 풀이

세 수 A, B, C의 대소 관계는 $0 < a < b < 1$ 을 만족시키는 모든 a, b 에 대하여 항상 성립하므로
 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 을 대입하여도 성립한다.
 $A = \log_b a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{-1}} 2^{-2} = 2$
 $B = \log_b (\log_b a) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -1$
 $C = (\log_b a)^2 = 2^2 = 4$
 $\therefore B < A < C$

14

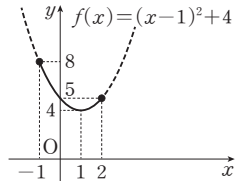
$f(x) = \log(x-1)$ 이므로
 $f(a) = \log(a-1), f(b) = \log(b-1)$
 또한,
 $f(2) = \log(2-1) = 0, f(3) = \log(3-1) = \log 2$
 이므로 세 수 A, B, C를 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $A = \frac{1}{a} \log(a-1) = \frac{f(a)}{a} = \frac{f(a)-0}{a-0}$
 $B = \frac{1}{b} \log(b-1) = \frac{f(b)}{b} = \frac{f(b)-0}{b-0}$
 $C = \log 2 = \frac{\log 2 - 0}{3-2} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$
 즉, A는 직선 OP의 기울기, B는 직선 OQ의 기울기, C는 두 점 (2, f(2))와 (3, f(3))을 지나는 직선의 기울기와 같다.
 따라서 다음 그림에서 세 직선의 기울기를 비교하면
 $A < B < C$



답 $A < B < C$

15

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ 라 하면 $y = \log_{\frac{1}{4}} f(x)$ 에서
 $0 < (\text{밑}) = \frac{1}{4} < 1$ 이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 $\log_{\frac{1}{4}} f(x)$ 는 최대이고, $f(x)$ 가 최대일 때 $\log_{\frac{1}{4}} f(x)$ 는 최소이다.
 한편, $f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $4 \leq f(x) \leq 8$
 따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} f(x)$ 는
 $f(x) = 4$ 일 때 최댓값
 $M = \log_{\frac{1}{4}} 4 = \log_{4^{-1}} 4 = -1,$
 $f(x) = 8$ 일 때 최솟값
 $m = \log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = -\frac{3}{2}$ 을 갖는다.
 $\therefore M + 2m = -1 + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -4$



답 -4

16

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{6}{x}, g(x) = 3x^2 - 12x + 24 \text{ 이므로}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{6}{3x^2 - 12x + 24}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x^2 - 4x + 8}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 4x + 8)$$

$$= \log_2 (x^2 - 4x + 8) - 1$$

$$h(x) = x^2 - 4x + 8 \text{ 이라 하면 } y = \log_2 h(x) - 1 \text{ 에서}$$

(밑) = 2 > 1 이므로 $h(x)$ 가 최소일 때 함수 $(f \circ g)(x)$ 도 최소이다.

$$\text{한편, } h(x) = x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \text{ 이므로}$$

$$h(x) \geq 4$$

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $h(x) = 4$ 일 때 최솟값

$$\log_2 4 - 1 = \log_2 2^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ 을 갖는다.}$$

답 1

17

$$y = \log_9 (2^x + 4) - \log_{\frac{1}{9}} (2^{-x} + 1)$$

$$= \log_9 (2^x + 4) + \log_9 (2^{-x} + 1)$$

$$= \log_9 (2^x + 4)(2^{-x} + 1)$$

$$= \log_9 (1 + 2^x + 4 \times 2^{-x} + 4)$$

$$= \log_9 (2^x + 2^{2-x} + 5)$$

$$f(x) = 2^x + 2^{2-x} + 5 \text{ 라 하면 } y = \log_9 f(x) \text{ 에서 (밑) } = 9 > 1$$

이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 $\log_9 f(x)$ 도 최소이다.

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(x) = 2^x + 2^{2-x} + 5$$

$$\geq 2\sqrt{2^x \times 2^{2-x}} + 5$$

$$= 2 \times 2 + 5 = 9$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{2-x}$, 즉 $x = 1$ 일 때 성립)

따라서 $x = 1$, 즉 $f(x) = 9$ 일 때 함수 $\log_9 f(x)$ 는 최솟값

$$\log_9 9 = 1 \text{ 을 가지므로}$$

$$a = 1, m = 1$$

$$\therefore a + m = 1 + 1 = 2$$

답 2

18

$y = 9x^{-2 + \log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 y = \log_3 9 + \log_3 x^{-2 + \log_3 x}$$

$$= 2 + (-2 + \log_3 x) \times \log_3 x$$

$$= (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x + 2$$

$$\log_3 x = t \text{ 로 놓으면 } \frac{1}{3} \leq x \leq 3 \text{ 에서}$$

$$\log_3 \frac{1}{3} \leq \log_3 x \leq \log_3 3 \quad \therefore -1 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$\log_3 y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

이므로 $\log_3 y$ 는 $t = -1$ 일 때 최댓값 $(-2)^2 + 1 = 5$,

$t = 1$ 일 때 최솟값 $0^2 + 1 = 1$ 을 갖는다.

$$\log_3 y = 5 \text{ 에서 } y = 3^5 \quad \therefore M = 243$$

$$\log_3 y = 1 \text{ 에서 } y = 3 \quad \therefore m = 3$$

$$\therefore M + m = 243 + 3 = 246$$

답 246

2 로그함수의 활용

기본 + 필수연습

본문 pp.123-129

28 (1) $x = 13$ (2) $x = 2$

29 (1) $x = \frac{1}{64}$ 또는 $x = 1$ (2) $x = 3$

30 $x = 2$ 또는 $x = 8$

31 (1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ (2) $20 < x \leq 40$

32 $4 \leq x \leq 8$ 33 $0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > 16$ 34 16

35 16 36 52

37 최댓값 : 9999, 최솟값 : 101

38 8 39 5

40 (1) $x = 27, y = 625$ 또는 $x = 81, y = 125$

(2) $9 < x \leq 16$

41 9 42 150 m 43 3

28

(1) $\log_{\frac{1}{2}} (x+3) = -4$ 에서

$$x+3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, x+3 = 16 \quad \therefore x = 13$$

(2) 진수의 조건에서

$$11x+3>0, x-1>0 \quad \therefore x>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_5(11x+3)=2+\log_5(x-1) \text{에서}$$

로그의 밑을 5로 같게 하면

$$\log_5(11x+3)=\log_5 25+\log_5(x-1)$$

$$\log_5(11x+3)=\log_5 25(x-1)$$

$$11x+3=25(x-1), 11x+3=25x-25$$

$$14x=28 \quad \therefore x=2 \quad (\because \textcircled{1})$$

답 (1) $x=13$ (2) $x=2$

29

(1) 진수의 조건에서

$$x>0, x^6>0 \quad \therefore x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2+\log_2 x^6=0, \text{ 즉 } (\log_2 x)^2+6\log_2 x=0 \text{에서}$$

$$\log_2 x=t \text{로 놓으면 } t^2+6t=0$$

$$t(t+6)=0 \quad \therefore t=-6 \text{ 또는 } t=0$$

따라서 $\log_2 x=-6$ 또는 $\log_2 x=0$ 이므로

$$x=\frac{1}{64} \text{ 또는 } x=1$$

$x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=1$ 은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

(2) 밑과 진수의 조건에서

$$x^2-1>0, x^2-1 \neq 1, 5-x>0, 5-x \neq 1, x-2>0$$

$$\therefore 2<x<4 \text{ 또는 } 4<x<5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{x^2-1}(x-2)=\log_{5-x}(x-2) \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면

$$x^2-1=5-x, x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(ii) 진수가 1이면

$$x-2=1 \quad \therefore x=3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=3 \quad (\because \textcircled{1})$$

답 (1) $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=1$ (2) $x=3$

30

진수의 조건에서 $x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$x^{\log_5 x}=\frac{x^4}{8} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_5 x}=\log_2 \frac{x^4}{8}$$

$$(\log_2 x)^2=\log_2 x^4-\log_2 8$$

$$\text{즉, } (\log_2 x)^2-4\log_2 x+3=0 \text{에서}$$

$$\log_2 x=t \text{로 놓으면 } t^2-4t+3=0$$

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=8$$

$x=2$ 또는 $x=8$ 은 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=2$ 또는 $x=8$

31

(1) 진수의 조건에서

$$2x+1>0 \quad \therefore x>-\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(2x+1)<2 \text{에서 } \log_2(2x+1)<\log_2 4$$

이때 (밑)=2>1이므로

$$2x+1<4 \quad \therefore x<\frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

(2) 진수의 조건에서

$$x-10>0, x-20>0 \quad \therefore x>20 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log(x-10)+\log(x-20)\leq 2+\log 6 \text{에서}$$

$$\log(x-10)(x-20)\leq \log 100+\log 6$$

$$\log(x^2-30x+200)\leq \log 600$$

이때 (밑)=10>1이므로

$$x^2-30x+200\leq 600$$

$$x^2-30x-400\leq 0, (x+10)(x-40)\leq 0$$

$$\therefore -10\leq x\leq 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$20<x\leq 40$$

답 (1) $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ (2) $20<x\leq 40$

32

진수의 조건에서

$$x > 0, x^5 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 \leq 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 \leq 0$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0, (t-2)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 3$$

즉, $2 \leq \log_2 x \leq 3$ 이고 (밑)=2 > 1이므로

$$2^2 \leq x \leq 2^3 \quad \therefore 4 \leq x \leq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 \leq x \leq 8$$

답 $4 \leq x \leq 8$

33

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x^{\log_2 x} > 16x^3$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} > \log_2 16x^3 \quad (\because \text{밑})=2 > 1)$$

$$(\log_2 x)^2 > \log_2 16 + \log_2 x^3$$

$$(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 > 0$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t - 4 > 0, (t+1)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 4$$

즉, $\log_2 x < -1$ 또는 $\log_2 x > 4$ 이고 (밑)=2 > 1이므로

$$x < 2^{-1} \text{ 또는 } x > 2^4$$

$$\therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 16$$

답 $0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 16$

34

진수의 조건에서 $3x+2 > 0, 4-x > 0$

$$\therefore -\frac{2}{3} < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 (3x+2) + \log_2 (4-x) = \log_2 a \text{에서}$$

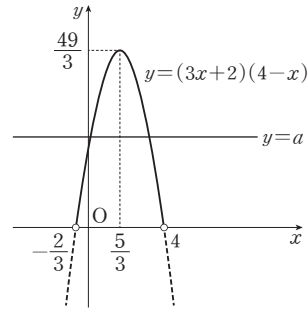
$$\log_2 (3x+2)(4-x) = \log_2 a$$

$$(3x+2)(4-x) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

주어진 방정식을 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 ①의 범위에서 이차방정식 ②이 실근을 가져야 한다.

즉, 다음 그림과 같이 $-\frac{2}{3} < x < 4$ 에서 곡선

$y = (3x+2)(4-x)$ 와 직선 $y = a$ 가 만나야 한다.



$$y = (3x+2)(4-x) = -3\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{49}{3} \text{이므로}$$

$$0 < a \leq \frac{49}{3}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 1, 2, 3, ..., 16의 16개이다.

답 16

35

진수의 조건에서 $a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\log_{\frac{1}{2}} a + 3)^2 - (2 \log_{\frac{1}{2}} a + 6) = 0$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} a)^2 + 4 \log_{\frac{1}{2}} a + 3 = 0$$

$\log_{\frac{1}{2}} a = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4t + 3 = 0, (t+3)(t+1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = -1$$

즉, $\log_{\frac{1}{2}} a = -3$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} a = -1$ 이므로

$$a = 2 \text{ 또는 } a = 8$$

$a = 2$ 또는 $a = 8$ 은 ①을 만족시키므로 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$2 \times 8 = 16$$

답 16

36

방정식 $(\log_3 x)^2 + 6 = k \log_3 x$ 의 두 근 α, β 의 비가 $1:3$ 이므로 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ 라 하면 로그의 진수의 조건에서 $\alpha > 0$

$(\log_3 x)^2 + 6 = k \log_3 x$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 6 = kt, t^2 - kt + 6 = 0$

이 이차방정식의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 3\alpha$ 이고, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 3\alpha = k \text{에서}$$

$$\log_3 \alpha + \log_3 3 + \log_3 \alpha = k$$

$$2 \log_3 \alpha + 1 = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_3 \alpha)(\log_3 3\alpha) = 6 \text{에서}$$

$$(\log_3 \alpha)(1 + \log_3 \alpha) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $\log_3 \alpha = s$ 로 놓으면

$$s(1+s) = 6, s^2 + s - 6 = 0$$

$$(s+3)(s-2) = 0 \quad \therefore s = -3 \text{ 또는 } s = 2$$

(i) $s = -3$, 즉 $\log_3 \alpha = -3$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $2 \times (-3) + 1 = k$, 즉 $k = -5$ 이므로 $k < 0$ 을 만족시킨다.

$$\text{이때 } \log_3 \alpha = -3 \text{이므로 } \alpha = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(ii) $s = 2$, 즉 $\log_3 \alpha = 2$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $2 \times 2 + 1 = k$, 즉 $k = 5$ 이므로 $k < 0$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{1}{27}, k = -5$ 이므로

$$\alpha k^2 = \frac{1}{27} \times (-5)^2 = \frac{25}{27}$$

따라서 $p = 27, q = 25$ 이므로

$$p + q = 27 + 25 = 52$$

답 52

37

진수의 조건에서 $a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

부등식 $x^2 + (2 \log a - 6)x + 1 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2 + (2 \log a - 6)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (\log a - 3)^2 - 1 < 0, (\log a)^2 - 6 \log a + 8 < 0$$

$\log a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 < 0, (t-2)(t-4) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 4$$

즉, $2 < \log a < 4$ 이고 (밑) = 10 > 1이므로

$$10^2 < a < 10^4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$10^2 < a < 10^4$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 $10^4 - 1 = 9999$, 최솟값은

$$10^2 + 1 = 101 \text{이다.}$$

답 최댓값 : 9999, 최솟값 : 101

38

$$(\log_8 x)^2 - \log_8 \frac{x^2}{a} \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_8 x)^2 - 2 \log_8 x + \log_8 a \geq 0$$

$$\log_8 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t + \log_8 a \geq 0$$

이때 모든 양수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t 에 대하여 이차방정식 $t^2 - 2t + \log_8 a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - \log_8 a \leq 0, \log_8 a \geq 1$$

$$\therefore a \geq 8 \quad (\because (\text{밑}) = 8 > 1)$$

따라서 조건을 만족시키는 양수 a 의 최솟값은 8이다.

답 8

39

진수의 조건에서 $a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$(\log_5 a - 1)x^2 + 2(\log_5 a - 1)x - \log_5 a < 0 \text{에서}$$

(i) $\log_5 a = 1$, 즉 $a = 5$ 일 때,

주어진 부등식은 $-1 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $\log_5 a \neq 1$, 즉 $a \neq 5$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

이차방정식

$$(\log_5 a - 1)x^2 + 2(\log_5 a - 1)x - \log_5 a = 0$$

의 판별식을 D 라 할 때, $\log_5 a - 1 < 0$, $D < 0$ 이어야 한다.

$$\log_5 a - 1 < 0 \text{에서 } a < 5 \quad (\because (\text{밑}) = 5 > 1) \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\frac{D}{4} = (\log_5 a - 1)^2 + (\log_5 a - 1)(\log_5 a) < 0 \text{에서}$$

$\log_5 a = t$ 로 놓으면

$$(t-1)^2 + t(t-1) < 0, (t-1)(2t-1) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < 1$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} < \log_5 a < 1 \text{이고 } (\text{밑}) = 5 > 1 \text{이므로}$$

$$5^{\frac{1}{2}} < a < 5^1 \text{에서 } \sqrt{5} < a < 5 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{L}, \textcircled{E} \text{에서 } \sqrt{5} < a < 5$$

(i), (ii)에서 $\sqrt{5} < a \leq 5$

$\sqrt{5} < a \leq 5$ 는 $\textcircled{L}$ 을 만족시키므로 구하는 실수 a 의 최댓값은 5이다.

답 5

40

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$, $y > 0$ $\dots\dots \textcircled{A}$

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_5 y = 7 \\ \log_3 x \times \log_5 y = 12 \end{cases} \text{에서}$$

$\log_3 x = X$, $\log_5 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X + Y = 7 \\ XY = 12 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$X = 3, Y = 4 \text{ 또는 } X = 4, Y = 3$$

$$\text{즉, } \log_3 x = 3, \log_5 y = 4 \text{ 또는 } \log_3 x = 4, \log_5 y = 3$$

이므로

$$x = 3^3 = 27, y = 5^4 = 625 \text{ 또는 } x = 3^4 = 81, y = 5^3 = 125$$

이때 $x = 27, y = 625$ 또는 $x = 81, y = 125$ 는 $\textcircled{A}$ 을 만족시키므로 주어진 연립방정식의 해이다.

(2) 진수의 조건에서

$$x > 0, x - 6 > 0, \log_2 x > 0 \quad \therefore x > 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) \geq -2 \text{에서}$$

$$-\log_2(\log_2 x) \geq -2$$

$$\log_2(\log_2 x) \leq 2$$

$$\log_2(\log_2 x) \leq \log_2 4$$

이때 $(\text{밑}) = 2 > 1$ 이므로

$$\log_2 x \leq 4, \log_2 x \leq \log_2 16$$

$$\therefore x \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또한, $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}}(x-6) < -3$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}} x(x-6) < -3$$

$$-\log_3 x(x-6) < -3$$

$$\log_3 x(x-6) > 3$$

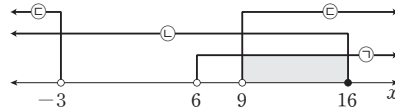
$$\log_3 x(x-6) > \log_3 27$$

이때 $(\text{밑}) = 3 > 1$ 이므로

$$x(x-6) > 27, x^2 - 6x - 27 > 0$$

$$(x+3)(x-9) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 9 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$



$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서 주어진 연립부등식의 해는 $9 < x \leq 16$

$$\text{답 (1) } x = 27, y = 625 \text{ 또는 } x = 81, y = 125$$

$$(2) 9 < x \leq 16$$

41

진수의 조건에서

$$x > 0, |x-3| > 0, \frac{1}{2}x + 3 > 0$$

$$\therefore 0 < x < 3, x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x < \log_2 x - 4 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 < 0, (t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 4$$

$$\text{즉, } 1 < \log_2 x < 4 \text{이고 } (\text{밑}) = 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2^1 < x < 2^4 \quad \therefore 2 < x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

또한, $\log_3 |x-3| \leq \log_3 \left(\frac{1}{2}x + 3 \right)$ 에서 $(\text{밑}) = 3 > 1$ 이므로

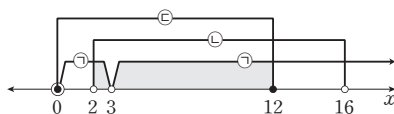
$$|x-3| \leq \frac{1}{2}x + 3$$

$$-\frac{1}{2}x - 3 \leq x - 3 \leq \frac{1}{2}x + 3$$

(i) $-\frac{1}{2}x-3 \leq x-3$ 에서 $x \geq 0$

(ii) $x-3 \leq \frac{1}{2}x+3$ 에서 $x \leq 12$

(i), (ii)에서 $0 \leq x \leq 12$ ㉠



㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 연립부등식의 해는

$2 < x < 3, 3 < x \leq 12$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 4, 5, 6, ..., 12의 9개이다.

답 9

42

수면에 비치는 햇빛의 양을 A 라 하면, 수면으로부터 5m씩 내려갈 때마다 햇빛의 양이 8%씩 감소하므로 수면으로부터 x m인 깊이에서의 햇빛의 양은

$$A \times \left(1 - \frac{8}{100}\right)^{\frac{x}{5}}$$

이때 식물성 플랑크톤은 수면에 비치는 햇빛의 양의 6% 이상이 도달하는 깊이까지만 살 수 있으므로

$$A \times \left(1 - \frac{8}{100}\right)^{\frac{x}{5}} \geq A \times \frac{6}{100}$$

$$\left(1 - \frac{8}{100}\right)^{\frac{x}{5}} \geq \frac{6}{100}$$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 - \frac{8}{100}\right)^{\frac{x}{5}} \geq \log \frac{6}{100}$$

$$\frac{x}{5} \log \left(1 - \frac{8}{100}\right) \geq \log 6 - \log 100$$

$$\frac{x}{5} \log 0.92 \geq \log 6 - 2$$

$$\frac{x}{5} (\log 9.2 - 1) \geq \log 2 + \log 3 - 2$$

$$\frac{x}{5} (0.96 - 1) \geq 0.3 + 0.5 - 2$$

$$(\because \log 2 = 0.3, \log 3 = 0.5, \log 9.2 = 0.96)$$

$$-0.008x \geq -1.2 \quad \therefore x \leq 150$$

따라서 이 식물성 플랑크톤이 살 수 있는 깊이는 최대 150m이다.

답 150 m

43

$$\log C_A = 3 - \log V_0 + \log W_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log C_B = 3 - \log \frac{1}{9} V_0 + \log \frac{1}{27} W_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$\log C_A - \log C_B$$

$$= -\log V_0 + \log \frac{1}{9} V_0 + \log W_0 - \log \frac{1}{27} W_0$$

$$\log \frac{C_A}{C_B} = \log \frac{1}{9} - \log \frac{1}{27} = \log 3$$

$$\text{따라서 } \frac{C_A}{C_B} = 3, \text{ 즉 } C_A = 3C_B \text{이므로}$$

$$k=3$$

답 3

STEP 1 개념 마무리

본문 p.130

19 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{1}{2}$ 20 $\frac{1}{8}$

21 $\frac{2}{5} < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$ 22 6

23 46 24 9 25 5년

19

진수의 조건에서

$$|x| > 0, 2|x| + 3 > 0$$

$$\therefore x \neq 0$$

$$\log_2 |x| + \log_2 (2|x| + 3) = 1 \text{에서}$$

(i) $x > 0$ 일 때,

$$\log_2 x + \log_2 (2x + 3) = 1$$

$$\log_2 x(2x + 3) = \log_2 2$$

$$x(2x + 3) = 2, 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x = \frac{1}{2}$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$\log_2(-x) + \log_2(-2x+3) = 1$$

$$\log_2 x(2x-3) = \log_2 2$$

$$x(2x-3) = 2, \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(x-2)(2x+1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

다른 풀이

$$\log_2 |x| + \log_2 (2|x|+3) = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 |x|(2|x|+3) = \log_2 2, \quad |x|(2|x|+3) = 2$$

$$2|x|^2 + 3|x| - 2 = 0, \quad (|x|+2)(2|x|-1) = 0$$

이때 $|x| > 0$ 이므로

$$2|x| - 1 = 0, \quad |x| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{1}{2}$ 은 진수의 조건을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

20

$f(x) = x^2 + 3x + 5$ 라 하면

$f(x)$ 를 $x - \log_2 a$ 로 나눈 나머지는

$$f(\log_2 a) = (\log_2 a)^2 + 3\log_2 a + 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $x - \log_2 8a$ 로 나눈 나머지는

$$\begin{aligned} f(\log_2 8a) &= (\log_2 8a)^2 + 3\log_2 8a + 5 \\ &= (3 + \log_2 a)^2 + 3(3 + \log_2 a) + 5 \\ &= (\log_2 a)^2 + 9\log_2 a + 23 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①과 ②이 서로 같으므로

$$(\log_2 a)^2 + 3\log_2 a + 5 = (\log_2 a)^2 + 9\log_2 a + 23$$

$$6\log_2 a = -18, \quad \log_2 a = -3$$

$$\therefore a = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{답 } \frac{1}{8}$$

21

본문 p.122 한 걸음 더 참고

밑과 진수의 조건에서

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad 4 - x^2 > 0, \quad 5x - 2 > 0$$

$$\therefore \frac{2}{5} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_x(4 - x^2) < \log_x(5x - 2) \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$4 - x^2 > 5x - 2, \quad x^2 + 5x - 6 < 0$$

$$(x+6)(x-1) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 1$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x > 1$ 일 때,

$$4 - x^2 < 5x - 2, \quad x^2 + 5x - 6 > 0$$

$$(x+6)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -6 \text{ 또는 } x > 1$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 1$

(i), (ii)에서 $0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ $\cdots \textcircled{2}$

①, ②을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{2}{5} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

$$\text{답 } \frac{2}{5} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

22

$$x^2 - (\log_3 27a)x + \log_3 a^3 \leq 0 \text{에서}$$

$$x^2 - (3 + \log_3 a)x + 3\log_3 a \leq 0$$

$$(x-3)(x-\log_3 a) \leq 0$$

이때 $0 < a < 27$ 에서

$$\log_3 a < \log_3 27, \quad \text{즉 } \log_3 a < 3$$

이므로 주어진 부등식의 해는

$$\log_3 a \leq x \leq 3$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2이려면

$$1 < \log_3 a \leq 2, \quad \log_3 3^1 < \log_3 a \leq \log_3 3^2$$

이때 (밑)=3 > 1이므로

$$3 < a \leq 9$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 는 4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

$$\text{답 } 6$$

23

진수의 조건에서 $\log_4(\log_8 x) > 0$

$$\log_8 x > 1 \quad \therefore x > 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 \{\log_4(\log_8 x)\} \leq 1 \text{에서}$$

$$\log_2 \{\log_4(\log_8 x)\} \leq \log_2 2$$

이때 (밑) $= 2 > 1$ 이므로

$$\log_4(\log_8 x) \leq 2, \text{ 즉 } \log_4(\log_8 x) \leq \log_4 16$$

이때 (밑) $= 4 > 1$ 이므로

$$\log_8 x \leq 16, \text{ 즉 } \log_8 x \leq \log_8 8^{16}$$

이때 (밑) $= 8 > 1$ 이므로

$$x \leq 8^{16} \quad \therefore x \leq 2^{48} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$8 < x \leq 2^{48}$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 최댓값은 2^{48} , 최솟값은 9이므로

$$M = 2^{48}, m = 9$$

$$\therefore \log_2 M - \log_3 m = \log_2 2^{48} - \log_3 9$$

$$= 48 - 2 = 46$$

답 46

24

$$A = \{x \mid x^2 - 6x + 8 \leq 0\} \text{에서}$$

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0, (x-2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$B = \{x \mid 4 - (\log_2 x - k)^2 \geq 0\} \text{에서}$$

$$4 - (\log_2 x - k)^2 \geq 0, (\log_2 x - k)^2 \leq 4$$

$$-2 \leq \log_2 x - k \leq 2, k - 2 \leq \log_2 x \leq k + 2$$

$$\therefore 2^{k-2} \leq x \leq 2^{k+2} \quad (\because (\text{밑}) = 2 > 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 진수의 조건에서 $x > 0$ 이고 모든 정수 k 에 대하여

$2^{k-2} > 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 은 집합 B 의 부등식의 해이다.

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $A \cap B \neq \emptyset$ 이려면

$$2^{k+2} \geq 2 \text{이고 } 2^{k-2} \leq 4 \text{이어야 한다.}$$

$$2^{k+2} \geq 2 \text{에서 } k+2 \geq 1 \quad \therefore k \geq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$2^{k-2} \leq 4 \text{에서 } k-2 \leq 2 \quad \therefore k \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } -1 \leq k \leq 4$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 9$$

답 9

25

첫 해의 부품 A의 질량을 a , 가격을 b 라 하면

$$n \text{년 후 부품 A의 질량은 } a \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)^n = a \times 0.9^n,$$

$$\text{가격은 } b \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)^n = b \times 1.2^n$$

n 년 후 부품 A의 단위질량당 가격이 첫 해의 4배 이상이 되려면

$$\frac{b \times 1.2^n}{a \times 0.9^n} \geq 4 \times \frac{b}{a}, \left(\frac{1.2}{0.9}\right)^n \geq 4$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n(\log 4 - \log 3) \geq \log 4$$

$$n \geq \frac{\log 4}{\log 4 - \log 3}, n \geq \frac{2 \log 2}{2 \log 2 - \log 3}$$

$$n \geq \frac{2 \times 0.30}{2 \times 0.30 - 0.48} \quad (\because \log 2 = 0.30, \log 3 = 0.48)$$

$$n \geq \frac{0.6}{0.12} = 5$$

따라서 5년 후부터 부품 A의 단위질량당 가격이 첫 해의 4배 이상이 된다.

답 5년

STEP 2 개념 마무리

본문 p.131

$$1 \quad \frac{1}{16} < a < 3$$

$$2 \quad -1$$

$$3 \quad 12$$

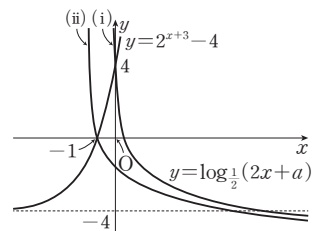
$$4 \quad \textcircled{4}$$

$$5 \quad 10$$

$$6 \quad \frac{1}{100} \leq x < 10$$

1

함수 $y = 2^{x+3} - 4$ 의 그래프는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



두 함수 $y=2^{x+3}-4$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$ 의 그래프가 제2사분면에서 만나려면 위의 그림과 같이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$ 의 그래프가 두 곡선 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$ 의 그래프가 점 (0, 4)를 지날 때,

$$4=\log_{\frac{1}{2}}a \text{에서 } a=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(ii) $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+a)$ 의 그래프가 점 (-1, 0)을 지날 때,

$$0=\log_{\frac{1}{2}}(-2+a) \text{에서 } a-2=1 \quad \therefore a=3$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{16} < a < 3$

$$\text{답 } \frac{1}{16} < a < 3$$

2

함수 $y=\log_3 \frac{x}{9}$, 즉 $y=\log_3 x-2$ 의 그래프를 직선 $y=a$

에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$2a-y=\log_3 x-2, \quad -y=\log_3 x-2-2a$$

$$\therefore y=-\log_3 x+2+2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $y=\frac{1}{3^x}$, 즉 $y=3^{-x}$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이동한 그래프의 식은

$$x=3^{-y}, \quad -y=\log_3 x$$

$$\therefore y=-\log_3 x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②이 일치해야 하므로

$$2+2a=0 \quad \therefore a=-1$$

답 -1

보충 설명

직선에 대한 대칭이동 | 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을

(1) 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식

$$\Leftrightarrow f(2a-x, y)=0 \quad \leftarrow f(x_1, y_1)=0 \text{에서 } \frac{x+x_1}{2}=a, y=y_1$$

(2) 직선 $y=b$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식

$$\Leftrightarrow f(x, 2b-y)=0 \quad \leftarrow f(x_2, y_2)=0 \text{에서 } x=x_2, \frac{y+y_2}{2}=b$$

3

조건 (가)에서 점 A(a, b)가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위에 있으므로

$$b=\log_2(a+2)+k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, 점 A(a, b)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B(b, a)

조건 (나)에서 점 B(b, a)는 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있으므로

$$a=4^{b+k}+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서

$$b-k=\log_2(a+2), \quad 2^{b-k}=a+2$$

$$\therefore a=2^{b-k}-2$$

이것을 ②에 대입하면

$$2^{b-k}-2=4^{b+k}+2$$

$$4^k \times 4^b - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0$$

$$4^k \times (2^b)^2 - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0$$

$$2^b = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$4^k \times t^2 - 2^{-k} \times t + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나 존재하므로 t에 대한 이차방정식 ③도 오직 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\textcircled{3} \text{의 두 근의 곱}) = \frac{4}{4^k} = 4^{1-k} > 0$$

즉, 이차방정식 ③의 판별식을 D라 할 때, D=0이어야 하므로

$$D=2^{-2k}-4 \times 4^k \times 4=0$$

$$4^{-k}-4^{k+2}=0, \quad 4^{-k}=4^{k+2}$$

$$\text{즉, } -k=k+2 \text{에서}$$

$$2k=-2 \quad \therefore k=-1$$

이것을 ③에 대입하면

$$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0, \quad \frac{1}{4}(t-4)^2=0$$

$$\therefore t=4$$

즉, $2^b=4$ 에서 $b=2$ 이므로 $k=-1$, $b=2$ 를 ②에 대입하면

$$a=4^{2+(-1)}+2=6$$

$$\therefore a \times b = 6 \times 2 = 12$$

답 12

보충 설명

조건 (가)에서 점 A가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위에 있으므로 점 A(a, b)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B(b, a)는 함수 $y=\log_2(x+2)+k$ 의 역함수, 즉 함수 $y=2^{x-k}-2$ 의 그래프 위의 점이다.

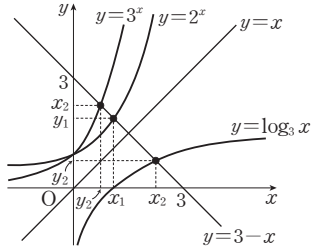
따라서 주어진 조건 (가), (나)를 다시 나타내면

$$(가): a=2^{b-k}-2, \quad (나): a=4^{b+k}+2$$

이고, 위의 조건을 만족시키는 점 A(a, b)가 오직 하나 존재함을 이용하여 문제를 풀 수도 있다.

4

두 함수 $y=\log_3 x$, $y=3^x$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점 (x_2, y_2) 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 (y_2, x_2) 는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있다.



ㄱ. 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 직선 $y=3-x$ 위에 있으므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1 \quad \therefore y_2 - x_1 = y_1 - x_2 \text{ (참)}$$

ㄴ. 위의 그림에서 $x_1 > y_2, x_2 > y_1$ 이므로

$$(x_1 - y_2)(x_2 - y_1) > 0 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 직선 $y=3-x$ 위에 있으므로

$$y_1 = 3 - x_1, y_2 = 3 - x_2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - x_2 y_2 &= x_1(3 - x_1) - x_2(3 - x_2) \\ &= 3x_1 - x_1^2 - 3x_2 + x_2^2 \\ &= 3(x_1 - x_2) - (x_1^2 - x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)\{3 - (x_1 + x_2)\} \end{aligned}$$

이때 $x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 > 3$ 이므로

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 > 0 \quad \begin{matrix} x_1=1, y_1=2 \text{이고} \\ x_2 > y_1=0 \text{이므로} \\ x_1 + x_2 > x_1 + y_1 = 3 \end{matrix}$$

$$\therefore x_1 y_1 > x_2 y_2 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

5

$$\log_2 x^2 + \log_2 y^2 = \log_2 (x+y+5)^2 \text{에서}$$

$$\log_2 x^2 y^2 = \log_2 (x+y+5)^2$$

$$x^2 y^2 = (x+y+5)^2$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$xy = x+y+5, xy - x - y = 5$$

$$(x-1)(y-1) = 6$$

x 와 y 는 양의 정수이므로

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x-1=3 \\ y-1=2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x-1=6 \\ y-1=1 \end{cases}$$

즉, 주어진 방정식을 만족시키는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 7), (3, 4), (4, 3), (7, 2)$

따라서 $x+2y$ 의 최솟값은 $x=4, y=3$ 일 때이므로

$$x+2y=4+2 \times 3=10$$

답 10

6

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$[\log x]^2 + 2[\log x] - 3 < 0 \text{에서}$$

$$[\log x] = t \text{ (} t \text{는 정수)로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t - 3 < 0, (t+3)(t-1) < 0$$

$$\therefore -3 < t < 1$$

이때 t 는 정수이므로

$$t = -2, -1, 0$$

(i) $t = -2$, 즉 $[\log x] = -2$ 일 때,

$$-2 \leq \log x < -1 \quad \therefore \frac{1}{100} \leq x < \frac{1}{10}$$

(ii) $t = -1$, 즉 $[\log x] = -1$ 일 때,

$$-1 \leq \log x < 0 \quad \therefore \frac{1}{10} \leq x < 1$$

(iii) $t = 0$, 즉 $[\log x] = 0$ 일 때,

$$0 \leq \log x < 1 \quad \therefore 1 \leq x < 10$$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{1}{100} \leq x < 10$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{100} \leq x < 10$$

$$\text{답 } \frac{1}{100} \leq x < 10$$

단계	채점 기준	배점
(가)	$[\log x] = t$ 로 치환한 부등식을 만족시키는 정수 t 의 값을 구한 경우	30%
(나)	t 의 값에 따라 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 구한 경우	50%
(다)	주어진 부등식의 해를 구한 경우	20%

II. 삼각함수

05. 삼각함수의 정의

1 일반각과 호도법

기본 + 필수연습

본문 pp.139~144

01 (1) $360^\circ \times n + 110^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 200^\circ$

(3) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 240^\circ$

02 (1) 제2사분면 (2) 제1사분면 (3) 제4사분면

(4) 제3사분면

03 (1) $\frac{3}{2}\pi$ (2) $-\frac{4}{3}\pi$ (3) 144° (4) -165°

04 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (2) $2n\pi + \frac{7}{5}\pi$ (3) $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

(4) $2n\pi + \frac{5}{3}\pi$

05 $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

06 $l=16\pi, S=80\pi$

07 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면 08 ④

09 제1사분면, 제3사분면 10 $\frac{7}{10}\pi, \frac{9}{10}\pi$

11 $\frac{7}{6}\pi$ 12 $\frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$

13 (1) 8 (2) 12 14 48 15 $\frac{9}{2}$

01

(1) $830^\circ = 360^\circ \times 2 + 110^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 110^\circ$

(2) $2000^\circ = 360^\circ \times 5 + 200^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 200^\circ$

(3) $-290^\circ = 360^\circ \times (-1) + 70^\circ$ 이므로

$360^\circ \times n + 70^\circ$

(4) $-480^\circ = 360^\circ \times (-2) + 240^\circ$ 이므로

$360^\circ \times n + 240^\circ$

답 (1) $360^\circ \times n + 110^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 200^\circ$

(3) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 240^\circ$

02

(1) $520^\circ = 360^\circ \times 1 + 160^\circ$

따라서 520° 는 제2사분면의 각이다.

(2) $1520^\circ = 360^\circ \times 4 + 80^\circ$

따라서 1520° 는 제1사분면의 각이다.

(3) $-760^\circ = 360^\circ \times (-3) + 320^\circ$

따라서 -760° 는 제4사분면의 각이다.

(4) $-1200^\circ = 360^\circ \times (-4) + 240^\circ$

따라서 -1200° 는 제3사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제1사분면

(3) 제4사분면 (4) 제3사분면

03

(1) $270^\circ = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$

(2) $-240^\circ = -240 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{3}\pi$

(3) $\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$

(4) $-\frac{11}{12}\pi = -\frac{11}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -165^\circ$

답 (1) $\frac{3}{2}\pi$ (2) $-\frac{4}{3}\pi$ (3) 144° (4) -165°

04

(1) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{17}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{7}{5}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{7}{5}\pi$

(3) $-\frac{5}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{3}{4}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

(4) $-\frac{19}{3}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{5}{3}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{5}{3}\pi$

답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (2) $2n\pi + \frac{7}{5}\pi$

(3) $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$ (4) $2n\pi + \frac{5}{3}\pi$

05

두 각 $\theta, 4\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$4\theta - \theta = 2n\pi + \pi$ (단, n 은 정수)

$$3\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{3} < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{3} < \frac{2n}{3}\pi < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=0 \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=2$$

이것을 ⑦에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \pi \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

06

반지름의 길이가 10, 중심각의 크기가 $\frac{8}{5}\pi$ 인 부채꼴의 호의

길이 l 과 넓이 S 는

$$l = 10 \times \frac{8}{5}\pi = 16\pi,$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{8}{5}\pi = 80\pi$$

$$\text{답 } l=16\pi, S=80\pi$$

다른 풀이

반지름의 길이를 r 이라 하면

$$r=10, l=16\pi \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 16\pi = 80\pi$$

07

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사

분면은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

답 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

08

$$\textcircled{1} -730^\circ = 360^\circ \times (-3) + 350^\circ \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{2} -\frac{\pi}{6} = 2\pi \times (-1) + \frac{11}{6}\pi \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{3} -\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{4}\pi \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{4} 1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ \quad \leftarrow \text{제2사분면}$$

$$\textcircled{5} -80^\circ = 360^\circ \times (-1) + 280^\circ \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

따라서 동경이 위치하는 사분면이 다른 하나는 ④이다.

답 ④

09

주어진 그림에서

$$360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 45^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 135^\circ \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$180^\circ \times n < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 22.5^\circ \text{ 또는}$$

$$180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 67.5^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 22.5^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 67.5^\circ$$

즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 202.5^\circ \text{ 또는}$$

$$360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 247.5^\circ$$

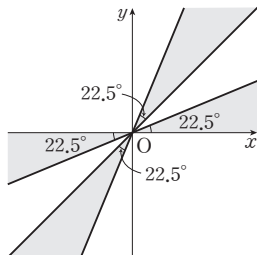
즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제1사분면, 제3사분면이다.

답 제1사분면, 제3사분면

보충 설명

각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다. (단, 경계선은 제외한다.)



10

두 각 θ , 9θ 를 나타내는 두 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로 $\theta + 9\theta = 2n\pi + \pi$ (단, n 은 정수)

$$10\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{n}{5}\pi + \frac{\pi}{10} < \pi, \quad \frac{2}{5}\pi < \frac{n}{5}\pi < \frac{9}{10}\pi$$

$$\therefore 2 < n < \frac{9}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$ 또는 $n=4$

이것을 ①에 대입하면

$$\theta = \frac{7}{10}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{9}{10}\pi$$

$$\text{답 } \frac{7}{10}\pi, \frac{9}{10}\pi$$

11

두 각 θ , 7θ 를 나타내는 두 동경이 원점에 대하여 대칭이므로 두 동경은 일직선 위에 있고 방향이 반대이다.

즉, $7\theta - \theta = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이므로

$$6\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\pi < \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi < \frac{n}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi \quad \therefore \frac{5}{2} < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{답 } \frac{7}{6}\pi$$

12

두 각 θ , 5θ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$6\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{12} < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{12}\pi < \frac{n}{3}\pi < \frac{17}{12}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{4} < n < \frac{17}{4}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=2 \text{ 또는 } n=3 \text{ 또는 } n=4$$

이것을 ①에 대입하면

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{17}{12}\pi$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$$

13

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$(1) \theta = \frac{\pi}{4}, S = 8\pi \text{이므로 } S = \frac{1}{2}r^2\theta \text{에서}$$

$$8\pi = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\pi}{4}, \quad r^2 = 64 \quad \therefore r = 8 \quad (\because r > 0)$$

(2) $\theta=2$, $S=36$ 이므로 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 에서

$$36=\frac{1}{2}\times r^2\times 2, r^2=36 \quad \therefore r=6 \quad (\because r>0)$$

따라서 호의 길이는 $l=r\theta$ 에서

$$6\times 2=12$$

답 (1) 8 (2) 12

14

두 부채꼴 AOB, COD의 중심각의 크기를 θ , 두 부채꼴 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 하면

$S_1-S_2=108$ 에서

$$\frac{1}{2}\times 12^2\times \theta-\frac{1}{2}\times 6^2\times \theta=108$$

$$72\theta-18\theta=108, 54\theta=108 \quad \therefore \theta=2$$

따라서 호 AB의 길이는 $12\times 2=24$ 이고, 호 CD의 길이는

$6\times 2=12$ 이므로 색칠한 도형의 둘레의 길이는

$$6\times 2+24+12=48$$

답 48

15

부채꼴의 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이를 l 이라 하면

$$2r+l=10 \quad \therefore l=10-2r \quad (0<r<5)$$

이때 부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}r(10-2r)=-r^2+5r=-\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

즉, $r=\frac{5}{2}$ 일 때 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

이때 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 에서

$$\frac{25}{4}=\frac{1}{2}\times \left(\frac{5}{2}\right)^2\times \theta \quad \therefore \theta=2$$

$$\therefore r+\theta=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

다른 풀이

부채꼴의 호의 길이를 l 이라 하면 $r>0$, $l>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r+l\geq 2\sqrt{2rl} \quad (\text{단, 등호는 } 2r=l \text{ 일 때 성립}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $2r+l=10$ 이므로 $10\geq 2\sqrt{2rl}$, 즉 $5\geq \sqrt{2rl}$

$$\text{양변을 제곱하면 } 25\geq 2rl \quad \therefore rl\leq \frac{25}{2}$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}rl\leq \frac{1}{2}\times \frac{25}{2}=\frac{25}{4}$$

따라서 부채꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

이때 $\textcircled{1}$ 에서 등호가 성립하는 조건은 $2r=l=5$, 즉

$$r=\frac{5}{2}, l=5 \text{ 일 때이다.}$$

$$l=r\theta \text{에서 } 5=\frac{5}{2}\times \theta \quad \therefore \theta=2$$

$$\therefore r+\theta=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.145~146

01 ⑤	02 ④	03 ④	04 3
05 58	06 $\frac{30}{7}\pi$	07 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	08 ⑤
09 $\frac{17}{12}\pi$	10 3	11 $\frac{\pi}{3}$	12 $4a$

01

$$\textcircled{1} \frac{11}{3}\pi=2\pi\times 1+\frac{5}{3}\pi \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{2} -\frac{13}{3}\pi=2\pi\times (-3)+\frac{5}{3}\pi \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{3} 1020^\circ=360^\circ\times 2+300^\circ \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{4} -60^\circ=360^\circ\times (-1)+300^\circ \quad \leftarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{5} -660^\circ=360^\circ\times (-2)+60^\circ \quad \leftarrow \text{제1사분면}$$

$$\text{이때 } \frac{5}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi\times \frac{180^\circ}{\pi}=300^\circ$$

따라서 동경의 위치가 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

02

$$\neg. 3(\text{라디안}) = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi} \quad (\text{참})$$

ㄴ. $-874^\circ = 360^\circ \times (-3) + 206^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다. (거짓)

$$\text{ㄷ. } \frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi, -\frac{15}{4}\pi \text{를 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, ㄷ 이다.

답 ④

03

θ 가 제4사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{3}{2}\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 각 변에 2를 곱하면

$$2 \times 2n\pi + 3\pi < 2\theta < 2 \times 2n\pi + 4\pi$$

$$\therefore 2\pi(2n+1) + \pi < 2\theta < 2\pi(2n+1) + 2\pi$$

즉, 2θ 는 제3사분면의 각 또는 제4사분면의 각이다. $\dots\dots \textcircled{2}$

①의 각 변에 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$n\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < n\pi + \pi$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$2k\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \pi$$

즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$(2k+1)\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < (2k+1)\pi + \pi$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{7}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + 2\pi$$

즉, $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각 또는 제4사분면의 각이다.

$\dots\dots \textcircled{3}$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 모두 존재할 수 있는 사분면은 제4사분면이다.

답 ④

04

3θ 가 제1사분면의 각이므로

$$2k\pi < 3\theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

각 변에 $\frac{4}{3}$ 를 곱하면

$$\frac{8k}{3}\pi < 4\theta < \frac{8k}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi$$

(i) $k=3l$ (l 은 정수)일 때,

$$8l\pi < 4\theta < 8l\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore 2\pi \times 4l < 4\theta < 2\pi \times 4l + \frac{2}{3}\pi$$

이때 4θ 가 제2사분면의 각이므로

$$2\pi \times 4l + \frac{\pi}{2} < 4\theta < 2\pi \times 4l + \frac{2}{3}\pi$$

위의 부등식의 각 변을 4로 나누면

$$2l\pi + \frac{\pi}{8} < \theta < 2l\pi + \frac{\pi}{6}$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $k=3l+1$ (l 은 정수)일 때,

$$8l\pi + \frac{8}{3}\pi < 4\theta < 8l\pi + \frac{10}{3}\pi$$

$$\therefore 2(4l+1)\pi + \frac{2}{3}\pi < 4\theta < 2(4l+1)\pi + \frac{4}{3}\pi$$

이때 4θ 가 제2사분면의 각이므로

$$2(4l+1)\pi + \frac{2}{3}\pi < 4\theta < 2(4l+1)\pi + \pi$$

위의 부등식의 각 변을 4로 나누면

$$\frac{1}{2}(4l+1)\pi + \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{1}{2}(4l+1)\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 2l\pi + \frac{2}{3}\pi < \theta < 2l\pi + \frac{3}{4}\pi$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $k=3l+2$ (l 은 정수)일 때,

$$8l\pi + \frac{16}{3}\pi < 4\theta < 8l\pi + 6\pi$$

$$\therefore 2(4l+2)\pi + \frac{4}{3}\pi < 4\theta < 2(4l+2)\pi + 2\pi$$

이때 4θ 가 제2사분면의 각이므로 이 범위에서 조건을 만족시키는 θ 가 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 θ 는 제1사분면의 각 또는 제2사분면의 각이므로

$$m+n=3$$

답 3

05

$\frac{n}{3}\pi$ 가 제2사분면의 각이려면

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{n}{3}\pi < 2k\pi + \pi \quad (\text{단, } k \text{는 정수})$$

$$\therefore 6k + \frac{3}{2} < n < 6k + 3$$

이때 n 은 자연수이므로 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$n=6k+2$$

즉, $k=8$ 일 때 50 이하의 자연수 n 의 값이 최대이므로

$$M=6 \times 8 + 2 = 50$$

또한, $\frac{n}{5}\pi$ 가 제4사분면의 각이려면

$$2t\pi + \frac{3}{2}\pi < \frac{n}{5}\pi < 2t\pi + 2\pi \quad (\text{단, } t \text{는 정수})$$

$$\therefore 10t + \frac{15}{2} < n < 10t + 10$$

이때 n 은 자연수이므로 음이 아닌 정수 t 에 대하여

$$n=10t+8 \text{ 또는 } n=10t+9$$

즉, $t=0$, $n=10t+8$ 일 때 50 이하의 자연수 n 의 값이 최소이므로

$$m=10 \times 0 + 8 = 8$$

$$\therefore M+m=50+8=58$$

답 58

06

각 θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로

$$8\theta - \theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{7}\pi \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < 2\pi \text{이므로 } \pi < \frac{2n}{7}\pi < 2\pi$$

$$\therefore \frac{7}{2} < n < 7$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=4 \text{ 또는 } n=5 \text{ 또는 } n=6 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

①을 각각 ②에 대입하면

$$\theta = \frac{8}{7}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{10}{7}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{12}{7}\pi$$

따라서 구하는 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{8}{7}\pi + \frac{10}{7}\pi + \frac{12}{7}\pi = \frac{30}{7}\pi$$

답 $\frac{30}{7}\pi$

07

두 각 θ , 7θ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이므로

$$7\theta + \theta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$8\theta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \theta = \frac{4n+3}{16}\pi \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \frac{\pi}{2} < \frac{4n+3}{16}\pi < \pi$$

$$8 < 4n+3 < 16, \quad 5 < 4n < 13$$

$$\therefore \frac{5}{4} < n < \frac{13}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$ 또는 $n=3$

(i) $n=2$ 일 때,

$n=2$ 를 ①에 대입하면

$$\theta = \frac{4 \times 2 + 3}{16}\pi = \frac{11}{16}\pi \text{이므로}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{7}{16}\pi\right) = \sin\left(\frac{11}{16}\pi - \frac{7}{16}\pi\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$= 45^\circ$

(ii) $n=3$ 일 때,

$n=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{4 \times 3 + 3}{16} \pi = \frac{15}{16} \pi \text{이므로}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{7}{16} \pi\right) = \sin\left(\frac{15}{16} \pi - \frac{7}{16} \pi\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

(i), (ii)에서 모든 $\sin\left(\theta - \frac{7}{16} \pi\right)$ 의 값의 곱은

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

보충 설명

두 각 α, β 가 나타내는 두 동경이 원점에 대하여 대칭이면

$$\alpha - \beta = 2k\pi + \pi \quad (\text{단, } k \text{는 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

두 각 β, γ 가 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면

$$\beta + \gamma = 2l\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } l \text{는 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때 두 각 α, γ 가 나타내는 두 동경은 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이므로

㉠+㉡을 하면

$$\alpha + \gamma = 2(k+l)\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \alpha + \gamma = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{는 정수})$$

08

점 P의 x 좌표를 a ($a>0$)라 하면 점 P는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표는

$$P(a, a+1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 각 θ 와 7θ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로

$$7\theta - \theta = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{는 정수})$$

$$6\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또한, 점 P는 제1사분면 위의 점이므로

$$0 < \frac{n}{3}\pi < \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

$$\therefore 0 < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{3}$$

한편, ㉠에서 직선 OP의 기울기는

$$\tan \theta = \frac{a+1}{a} \text{이므로}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{a+1}{a}, \text{ 즉 } \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{a} \text{에서}$$

$$(\sqrt{3}-1)a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

답 ㉡

09

두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 에 대하여

$x_1+x_2=0, y_1=y_2$ 이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 절댓값이 같고 부호는 반대이고, 두 점 P, Q의 y 좌표는 같으므로 두 점 P, Q는 y 축에 대하여 대칭이다.

즉, 두 각 θ 와 11θ 를 나타내는 두 동경은 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 11\theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{는 정수})$$

$$12\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{12}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \pi < \frac{2n+1}{12}\pi < \frac{3}{2}\pi$$

$$12 < 2n+1 < 18, 11 < 2n < 17$$

$$\therefore \frac{11}{2} < n < \frac{17}{2}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=6 \text{ 또는 } n=7 \text{ 또는 } n=8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 각각 ㉡에 대입하면

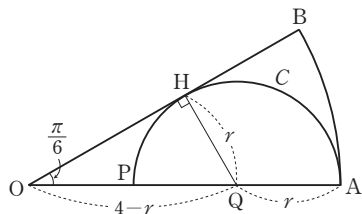
$$\theta = \frac{13}{12}\pi, \theta = \frac{15}{12}\pi = \frac{5}{4}\pi, \theta = \frac{17}{12}\pi$$

따라서 각 θ 의 크기의 최댓값은 $\frac{17}{12}\pi$ 이다.

답 $\frac{17}{12}\pi$

10

다음 그림과 같이 반원 C 의 중심을 Q , 반지름의 길이를 r 이라 하고, 반원 C 와 선분 OB 의 접점을 H 라 하자.



$$\begin{aligned}\overline{OA} &= 4, \overline{QA} = r, \\ \overline{OQ} &= \overline{OA} - \overline{QA} = 4 - r, \\ \overline{QH} &= \overline{QA} = r\end{aligned}$$

이고, 부채꼴 AOB 의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 직각삼각형

OQH 에서

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{r}{4-r}, \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{r}{4-r}$$

$$2r = 4 - r, \quad 3r = 4 \quad \therefore r = \frac{4}{3}$$

따라서

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi, \quad S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi$$

이므로

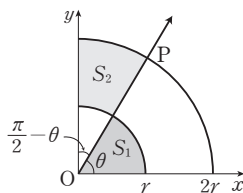
$$\frac{2S_1}{S_2} = \frac{2 \times \frac{4}{3}\pi}{\frac{8}{9}\pi} = 3$$

답 3

11

S_1 은 반지름의 길이가 r 이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이이므로

$$S_1 = \frac{1}{2}r^2\theta$$



동경 OP 와 y 축 사이의 각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2} \times (2r)^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{1}{2} \times r^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{3}{2}r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\end{aligned}$$

이때 $S_1 : S_2 = 2 : 3$ 이므로 $2S_2 = 3S_1$

$$\therefore 3r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{3}{2}r^2\theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\theta}{2}, \quad \frac{3}{2}\theta = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

12

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = a^2 \text{에서 } l = \frac{2a^2}{r}$$

부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + \frac{2a^2}{r}$$

이때 $r > 0$, $a^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r + \frac{2a^2}{r} \geq 2\sqrt{2r \times \frac{2a^2}{r}} = 4a \quad (\because a > 0)$$

(단, 등호는 $r = a$ 일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $4a$ 이다.

답 $4a$

2 삼각함수

기본 + 필수연습

본문 pp.150-155

16 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{4}{3}$

17 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(2) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

(4) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

18 $-\frac{4}{5}$ 19 (1) $\frac{2}{\sin \theta \cos \theta}$ (2) $2 \sin \theta \cos \theta$

20 $-\frac{3}{8}$ 21 $\frac{156}{85}$ 22 $\frac{1}{4}$

23 $\tan \theta - 2 \cos \theta$ 24 $\sin \theta$

25 $-\sin \theta + \cos \theta$ 26 $-\frac{3}{5}$

27 $-\frac{23}{17}$ 28 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 29 (1) 40 (2) $\frac{23}{27}$

30 $\frac{13}{12}$ 31 $x^2 - 3x + 1 = 0$

16

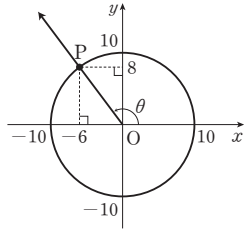
선분 OP의 길이는

$$OP = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

$$(1) \sin \theta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$



답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{4}{3}$

17

$$(1) \theta = 680^\circ = 360^\circ \times 1 + 320^\circ \text{에서}$$

각 θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$(2) \theta = -170^\circ = 360^\circ \times (-1) + 190^\circ \text{에서}$$

각 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$(3) \theta = \frac{20}{7}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{6}{7}\pi \text{에서}$$

각 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$(4) \theta = \frac{3}{8}\pi \text{에서 각 } \theta \text{는 제1사분면의 각이므로}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$$

답 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

(2) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

(3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

(4) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

18

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}, 4\cos \theta = 3\sin \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{4}\sin \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{3}{4}\sin \theta\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \frac{9}{16}\sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{25}{16}\sin^2 \theta = 1 \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

이때 각 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

답 $-\frac{4}{5}$

다른 풀이

각 θ 가 제3사분면의 각이고 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ 이므로

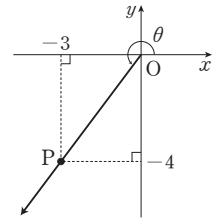
점 P의 좌표를 $(-3, -4)$ 라 하고

동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$OP = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$



19

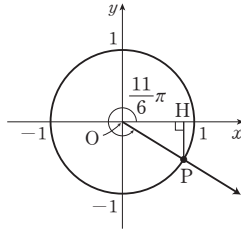
$$\begin{aligned} (1) & \frac{\tan \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\tan \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{\tan \theta(1 - \cos \theta) + \tan \theta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2\tan \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\tan \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{2\sin \theta}{\cos \theta \sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (1 + \sin \theta - \cos \theta)(1 - \sin \theta + \cos \theta) \\ &= \{1 + (\sin \theta - \cos \theta)\}\{1 - (\sin \theta - \cos \theta)\} \\ &= 1 - (\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= 1 - (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 1 - (1 - 2\sin \theta \cos \theta) \\ &= 2\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{2}{\sin \theta \cos \theta}$ (2) $2\sin \theta \cos \theta$

20

오른쪽 그림과 같이 $\frac{11}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OHP에서



$$\overline{OP}=1, \angle POH=2\pi-\frac{11}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \overline{PH}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \overline{OH}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 점 P가 제4사분면 위의 점이므로

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } \sin\theta=-\frac{1}{2}, \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{\frac{2}{4}}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{8}$$

답 $-\frac{3}{8}$

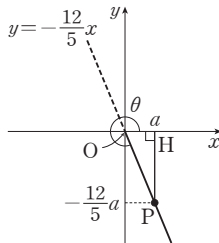
21

점 P는 직선 $y=-\frac{12}{5}x$ 위의

점이므로 양수 a 에 대하여

$P\left(a, -\frac{12}{5}a\right)$ 라 하고, 점 P에서

x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림과 같다.



직각삼각형 OHP에서 $\overline{OH}=a, \overline{PH}=\frac{12}{5}a$ 이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{a^2+\left(\frac{12}{5}a\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{25}a^2}=\frac{13}{5}a \quad (\because a>0)$$

$$\text{따라서 } \sin\theta=\frac{-\frac{12}{5}a}{\frac{13}{5}a}=-\frac{12}{13}, \cos\theta=\frac{a}{\frac{13}{5}a}=\frac{5}{13},$$

$$\tan\theta=\frac{-\frac{12}{5}a}{a}=-\frac{12}{5}$$

$$\frac{\tan\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{-\frac{12}{5}}{-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}}=\frac{\frac{12}{5}}{-\frac{17}{13}}=-\frac{156}{85}$$

답 $\frac{156}{85}$

22

직선 $y=-1$ 이 원 $x^2+y^2=2$ 와 만나는 점 A의 좌표를 구하면

$$x^2+(-1)^2=2, x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$$

이때 점 A는 제3사분면 위의 점이므로

$$A(-1, -1)$$

직선 $y=-1$ 이 원 $x^2+y^2=3$ 과 만나는 점 B의 좌표를 구하면

$$x^2+(-1)^2=3, x^2=2 \quad \therefore x=\pm\sqrt{2}$$

이때 점 B는 제3사분면 위의 점이므로

$$B(-\sqrt{2}, -1)$$

점 A(-1, -1)에 대하여 동경 OA가 나타내는 각의 크기가 α 이므로

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 B(-√2, -1)에 대하여 동경 OB가 나타내는 각의 크기가 β 이므로

$$\tan\beta=\frac{-1}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \cos^2\alpha \times \tan^2\beta=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

23

각 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta + \cos \theta| &= -\sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt{(\tan \theta - \cos \theta)^2} \\ &= -(\sin \theta + \cos \theta) - (-\sin \theta) + \tan \theta - \cos \theta \\ &= -\sin \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta - \cos \theta \\ &= \tan \theta - 2\cos \theta \end{aligned}$$

답 $\tan \theta - 2\cos \theta$

24

$\cos \theta \tan \theta \neq 0$ 이고

$$\sqrt{\cos \theta \tan \theta} = -\sqrt{\cos \theta} \sqrt{\tan \theta} \text{이므로}$$

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\begin{aligned} \therefore |1 + \sin \theta| - |\cos \theta - 1| + \sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= 1 + \sin \theta - (-\cos \theta + 1) + (-\cos \theta) \\ &= 1 + \sin \theta + \cos \theta - 1 - \cos \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

답 $\sin \theta$

25

$\sin \theta \tan \theta > 0$ 이면 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 각 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i) 각 θ 가 제1사분면의 각일 때,

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{에서 } \frac{\tan \theta}{\cos \theta} > 0 \text{이므로 조건을}$$

만족시키지 않는다.

(ii) 각 θ 가 제4사분면의 각일 때,

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{에서 } \frac{\tan \theta}{\cos \theta} < 0$$

(i), (ii)에서 각 θ 는 제4사분면의 각이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \\ \therefore |\sin \theta| - |\tan \theta| + \sqrt{(\cos \theta - \tan \theta)^2} \\ &= -\sin \theta - (-\tan \theta) + (\cos \theta - \tan \theta) \\ &= -\sin \theta + \tan \theta + \cos \theta - \tan \theta \\ &= -\sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

답 $-\sin \theta + \cos \theta$

26

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{225}{289}$$

이때 각 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= -\frac{15}{17} \\ \text{즉, } \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = -\frac{15}{8} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta} &= -\frac{17}{15} - \left(-\frac{8}{15}\right) \\ &= -\frac{17}{15} + \frac{8}{15} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 $-\frac{3}{5}$

27

$$\sin \theta + 4\cos \theta + 4 = 0 \text{에서}$$

$$\sin \theta = -4\cos \theta - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta = 16\cos^2 \theta + 32\cos \theta + 16$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 이므로 이를 위의 식에 대입하면

$$1 - \cos^2 \theta = 16\cos^2 \theta + 32\cos \theta + 16$$

$$17\cos^2 \theta + 32\cos \theta + 15 = 0$$

$$(\cos \theta + 1)(17\cos \theta + 15) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -1 \text{ 또는 } \cos \theta = -\frac{15}{17} \quad (*)$$

이때 각 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{15}{17}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \sin \theta = -4 \times \left(-\frac{15}{17}\right) - 4 = -\frac{8}{17}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{8}{17} + \left(-\frac{15}{17}\right) = -\frac{23}{17}$$

답 $-\frac{23}{17}$

보충 설명

$\cos \theta = -1$ 일 때, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta + (-1)^2 = 1, \sin^2 \theta = 0 \quad \therefore \sin \theta = 0$$

즉, 각 θ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하면 점 P의 좌표가 P(-1, 0)이므로 각 θ 를 일반각으로 나타내면

$$\theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

따라서 각 θ 는 제3사분면의 각이 아니므로 (*)에서 제3사분면의 각 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값으로 가능한 것은 $-\frac{15}{17}$ 이다.

28

$$\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = 4 \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) - \sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = 4$$

$$\frac{\sin \theta + \sin^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 4$$

$$\frac{2\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 4, 2\sin^2 \theta = 4 - 4\sin^2 \theta$$

$$6\sin^2 \theta = 4 \quad \therefore \sin^2 \theta = \frac{2}{3}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\frac{2}{3} + \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 각 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0 \quad \therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{답 } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

29

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{7}{18} = \frac{16}{9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

즉, $\sin \theta + \cos \theta > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 30(\sin \theta + \cos \theta) = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

$$(2) \sin \theta - \cos \theta = \frac{2}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{18}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \frac{5}{18} \times \frac{2}{3} = \frac{23}{27} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } 40 \quad (2) \frac{23}{27}$$

30

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos^2 \theta \times \cos \theta + \sin^2 \theta \times \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \left[\begin{array}{l} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \end{array} \right] \\ &= \frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{4}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{4}{9}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{13}{27}}{-\frac{4}{9}} = \frac{13}{12}$$

$$\text{답 } \frac{13}{12}$$

31

이차방정식 $3x^2 - \sqrt{15}x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{3}, \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

한편, $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차

방정식은 $x^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}\right)x + 1 = 0$ 이고

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 이다.

답 $x^2 - 3x + 1 = 0$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.156~157

13 $\cos^2 \theta$	14 6	15 ⑤	16 $\frac{5}{8}$
17 ②	18 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	19 $2 + \sqrt{3}$	20 $-\frac{\sqrt{7}}{4}$
21 $-\frac{39}{16}$	22 $-\sqrt{2}$	23 -1	24 $\frac{\sqrt{61}}{6}$

13

점 A의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이므로

$$\overline{OB} = \cos \theta, \overline{AB} = \sin \theta$$

직각삼각형 OBC에서

$$\overline{OC} = \overline{OB} \times \cos \theta = \cos^2 \theta$$

직각삼각형 OCD에서

$$\overline{OD} = \overline{OC} \times \cos \theta = \cos^3 \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} &= \frac{\cos^3 \theta}{\cos \theta} \\ &= \cos^2 \theta \quad (\because \cos \theta \neq 0) \end{aligned}$$

답 $\cos^2 \theta$

다른 풀이

점 A의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이므로

$$\overline{OB} = \cos \theta, \overline{AB} = \sin \theta$$

직각삼각형 OBC에서

$$\overline{OC} = \overline{OB} \times \cos \theta = \cos^2 \theta$$

$\triangle OCD \sim \triangle OAB$ 이므로

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

$$\text{이때 } \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\cos^2 \theta}{1} = \cos^2 \theta \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \cos^2 \theta$$

14

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{a^2 + (2\sqrt{a+1})^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 4} \\ &= \sqrt{(a+2)^2} = a+2 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sin \theta = \frac{2\sqrt{a+1}}{a+2} \text{이므로}$$

$$\frac{2\sqrt{a+1}}{a+2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, 8\sqrt{a+1} = \sqrt{7}(a+2)$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$64(a+1) = 7(a+2)^2$$

$$64a + 64 = 7a^2 + 28a + 28$$

$$7a^2 - 36a - 36 = 0, (7a+6)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

15

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\tan \theta} \text{에서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$\text{이때 } \sin \theta \cos \theta \neq 0 \text{이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이므로 $\tan \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore |\tan \theta - \sin \theta| + \sqrt{\cos^2 \theta} - \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= -(\tan \theta - \sin \theta) + (-\cos \theta) - \{-(\cos \theta - \sin \theta)\} \\ &= -\tan \theta + \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta - \sin \theta \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$

답 ⑤

보충 설명

음수의 제곱근의 성질 | 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0$

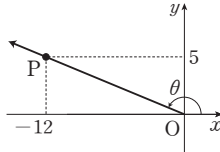
(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $a > 0, b < 0$

16

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 각 θ 가 제 2사분면의 각이고 $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

이므로 점 P의 좌표를 $(-12, 5)$

라 하면 동경 OP가 나타내는 작은 θ 이고, 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $OP = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$ 이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta(4 \tan \theta + 1)} &= \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13} \times \left\{ 4 \times \left(-\frac{5}{12} \right) + 1 \right\}} \\ &= \frac{\frac{5}{13}}{\frac{8}{13}} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{8}$

다른 풀이

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta(4 \tan \theta + 1)} &= \frac{\tan \theta}{4 \tan \theta + 1} \\ &= \frac{-\frac{5}{12}}{4 \times \left(-\frac{5}{12} \right) + 1} \\ &= \frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{2}{3}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

17

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1 - \sin \theta} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} &= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta)}{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{(1 + \sin \theta \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}{1 - \sin \theta \cos \theta} \\ &= 1 + \sin \theta \cos \theta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

18

$\sin \theta + \cos \theta \tan \theta = -1$ 에서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

$$\sin \theta + \sin \theta = -1, 2 \sin \theta = -1$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

또한, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

19

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sqrt{3} \text{에서}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$

$$(\sqrt{3}-1)\sin \theta = (\sqrt{3}+1)\cos \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $2+\sqrt{3}$

다른 풀이

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sqrt{3} \text{에서 } \cos \theta = 0 \text{이면}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta} = \sqrt{3}$$

즉, $1=\sqrt{3}$ 이 되어 모순이므로 $\cos \theta \neq 0$

따라서 주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 $\cos \theta$ 로 나누면

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1}$$

$$\text{즉, } \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta - 1} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\tan \theta + 1 = \sqrt{3} \tan \theta - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-1)\tan \theta = \sqrt{3}+1$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$$

20

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

이때 각 θ 는 제 4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$

즉, $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

답 $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

21

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\cos \theta} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) &= \frac{1}{\cos \theta} \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{9}\right) \right\}}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} \\ &= -\frac{13}{\frac{27}{81}} = -\frac{39}{16} \end{aligned}$$

답 $-\frac{39}{16}$

22

이차방정식 $2x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = a^2$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{2} = a^2$$

$$\therefore a^2 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = -a > 0$$

즉, $a < 0$ 이므로 ㉡에서

$$a = -\sqrt{2}$$

답 $-\sqrt{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 합과 곱을 각각 구한 경우	30%
(나)	삼각함수 사이의 관계를 이용하여 a^2 의 값을 구한 경우	40%
(다)	조건을 만족시키는 상수 a 의 값을 구한 경우	30%

23

$$\sin \theta + \cos \theta = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1, \quad 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ 또는 } \cos \theta = 0$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{cases} \sin \theta = 0 \\ \cos \theta = -1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} \sin \theta = -1 \\ \cos \theta = 0 \end{cases}$$

이때 $f(n) = \sin^n \theta + \cos^n \theta$ 에서

$$f(n) = (-1)^n$$

$$\therefore f(n) = \begin{cases} -1 & (\text{단, } n \text{이 홀수}) \\ 1 & (\text{단, } n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2099)$$

$$= -1 + 1 + (-1) + \cdots + (-1)$$

$$= -1$$

답 -1

24

직선 AB의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{f(\sin \theta) - f(\cos \theta)}{\sin \theta - \cos \theta} &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \sin \theta + \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

이때

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{25}{72} \left(\because \sin \theta \cos \theta = \frac{25}{72} \right)$$

$$= \frac{36 + 25}{36} = \frac{61}{36}$$

이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{61}}{6}$$

따라서 ㉠에서 직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{61}}{6}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{61}}{6}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.158

1 $\frac{41}{20}$

2 $\frac{1}{2}$

3 8

4 $\cos^2 \theta$

5 $\frac{7}{5}$

6 π

1

조건 ㉞에서 $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{6}$

$$\therefore \beta = \alpha - \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$$

조건 ㉝에서 각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$ 에서 $0 < \alpha + \beta < 4\pi$ 이므로

$$0 < 2n\pi + \frac{3}{2}\pi < 4\pi \quad \therefore -\frac{3}{4} < n < \frac{5}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=0$ 일 때,

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$$

① $\beta = \alpha - \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$\alpha + \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\pi, \quad 2\alpha = \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{5}{6}\pi, \quad \beta = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

② $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$\alpha + \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\pi, \quad 2\alpha = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

①, ②에서

$$\alpha = \frac{5}{6}\pi, \quad \beta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{5}{6}\pi$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\text{이것을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \alpha + \beta = 2\pi + \frac{3}{2}\pi$$

③ $\beta = \alpha - \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$\alpha + \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi + \frac{3}{2}\pi, \quad 2\alpha = \frac{11}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{11}{6}\pi, \quad \beta = \frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$$

④ $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$ 일 때,

$$\alpha + \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi + \frac{3}{2}\pi, \quad 2\alpha = \frac{10}{3}\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{5}{3}\pi, \quad \beta = \frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

③, ④에서

$$\alpha = \frac{11}{6}\pi, \quad \beta = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } \alpha = \frac{5}{3}\pi, \quad \beta = \frac{11}{6}\pi$$

(i), (ii)에서

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{의 최댓값은 } \alpha = \frac{5}{6}\pi, \quad \beta = \frac{2}{3}\pi \text{일 때 } M = \frac{5}{4},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{의 최솟값은 } \alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{5}{6}\pi \text{일 때 } m = \frac{4}{5}$$

$$\therefore M + m = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{41}{20}$$

답 $\frac{41}{20}$

2

반지름의 길이가 5, 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 4개의 호의 길이의 합은

$$4 \times 5\theta = 20\theta$$

반지름의 길이가 3인 부채꼴 4개의 중심각의 크기의 합이

$$2\pi - 4\theta \text{이므로 이 4개의 부채꼴의 호의 길이의 합은}$$

$$3 \times (2\pi - 4\theta) = 6\pi - 12\theta$$

또한, 길이가 $5 - 3 = 2$ 인 선분이 8개 있으므로 이 8개의 선분의 길이의 합은

$$2 \times 8 = 16$$

따라서 주어진 도형의 바깥쪽 둘레의 길이는

$$20\theta + (6\pi - 12\theta) + 16 = 6\pi + 8\theta + 16$$

즉, $6\pi + 8\theta + 16 = 6\pi + 20$ 에서

$$8\theta = 4 \quad \therefore \theta = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

3

두 부채꼴 A, B의 반지름의 길이를 각각 a , b 라 하면

$$\text{부채꼴 A의 호의 길이는 } a \times \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi a,$$

$$\text{부채꼴 A의 넓이는 } \frac{1}{2} \times a \times \frac{3}{4}\pi a = \frac{3}{8}\pi a^2$$

부채꼴 B 의 호의 길이는 $b \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}b$,

부채꼴 B 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times b \times \frac{\pi}{4}b = \frac{\pi}{8}b^2$

이때 두 부채꼴 A, B 의 호의 길이의 합이 4π 이므로

$$\frac{3}{4}\pi a + \frac{\pi}{4}b = 4\pi \text{에서 } 3a + b = 16$$

$\therefore b = 16 - 3a$ $-b > 0$ 이므로 $0 < a < \frac{16}{3}$ 이다.

또한, 두 부채꼴 A, B 의 넓이의 합은

$$\frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\pi}{8}(16 - 3a)^2 \quad (\because b = 16 - 3a)$$

$$= \frac{\pi}{8}(3a^2 + 9a^2 - 96a + 256)$$

$$= \frac{\pi}{8}(12a^2 - 96a + 256)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \left(a^2 - 8a + \frac{64}{3} \right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi \left\{ (a - 4)^2 + \frac{16}{3} \right\}$$

즉, $a = 4, b = 16 - 3 \times 4 = 4$ 일 때 두 부채꼴 A, B 의 넓이의 합은 최소이므로 구하는 두 부채꼴 A, B 의 반지름의 길이의 합은

$$a + b = 4 + 4 = 8$$

답 8

4

$f\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = x$ 에서 $A = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ 로 놓으면

$$A^2 = \frac{1-x}{x}, \quad A^2x = 1 - x$$

$$x(A^2 + 1) = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{A^2 + 1}$$

즉, $f(A) = \frac{1}{A^2 + 1}$ 이므로

$$f(\tan \theta) = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \cos^2 \theta$$

답 $\cos^2 \theta$

5

이차방정식 $5x^2 - 8x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta - \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \frac{8}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2\sin \theta = \frac{8}{5} \quad \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad \frac{16}{25} + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{k}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{k}{5}, \quad \frac{7}{25} = \frac{k}{5}$$

$$\therefore k = \frac{7}{5}$$

답 $\frac{7}{5}$

6

$$\begin{cases} x = 3\cos \theta - 1 \\ y = 3\sin \theta + 2 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} x + 1 = 3\cos \theta \\ y - 2 = 3\sin \theta \end{cases} \text{이므로}$$

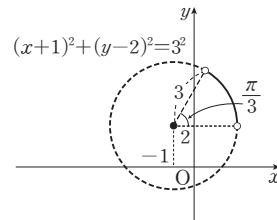
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\therefore (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형은 다음

그림과 같이 중심이 $(-1, 2)$ 이고, 반지름의 길이가 3, 중심

각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴의 호이다.



따라서 점 P 가 나타내는 도형의 길이는

$$3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$$

답 π

06. 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 그래프

기본 + 필수연습

본문 pp.166~172

01 5	02~05 풀이 참조	06 14π
07 $-2\sqrt{3}$	08 8π	09 -8
10 $\frac{7}{2}$		
11 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$	12 6	13 1
14 $\neg$		

01

$f(x-3)=f(x+3)$ 에서

$x-3=t$ 로 놓으면 $x=t+3$ 이므로

$f(t)=f(t+6)$

따라서 $f(-18)=f(-12)=f(-6)=f(0)=3$,

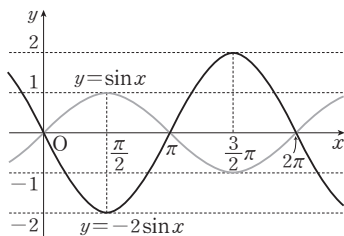
$f(21)=f(15)=f(9)=f(3)=2$ 이므로

$f(-18)+f(21)=3+2=5$

답 5

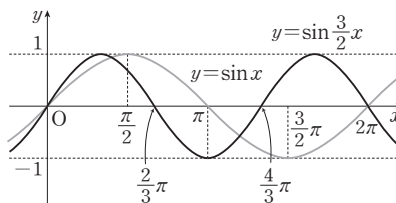
02

- (1) 함수 $y=-2\sin x$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 2배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$, 주기는 2π 이다.

- (2) 함수 $y=\sin \frac{3}{2}x$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.

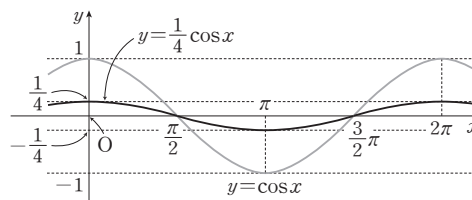


따라서 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi$ 이다.

답 풀이 참조

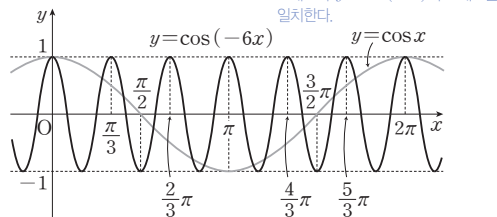
03

- (1) 함수 $y=\frac{1}{4}\cos x$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



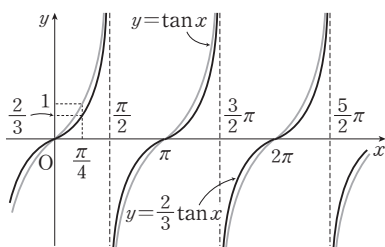
따라서 치역은 $\{y \mid -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}\}$, 주기는 2π 이다.

- (2) 함수 $y=\cos(-6x)$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 $\frac{1}{6}$ 배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



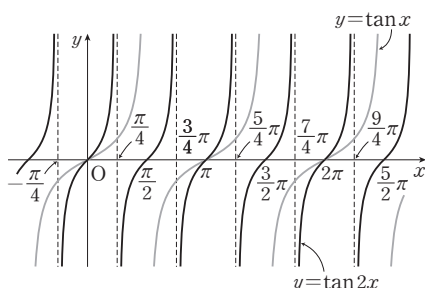
따라서 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{|-6|} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

- (3) 함수 $y=\frac{2}{3}\tan x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 π 이다.

- (4) 함수 $y=\tan 2x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.

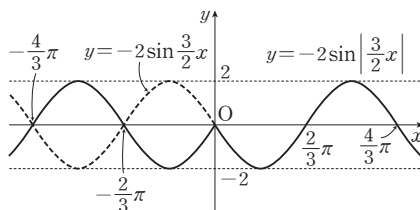


따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

답 풀이 참조

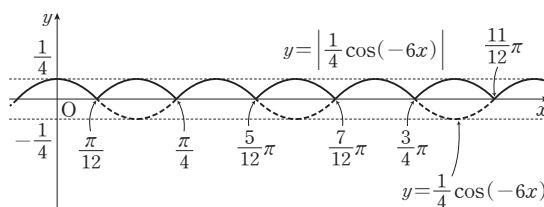
04

- (1) 함수 $y=-2\sin\left|\frac{3}{2}x\right|$ 의 그래프는 $y=-2\sin\frac{3}{2}x$ 의 그래프에서 $x\geq 0$ 인 부분만 남기고, $x<0$ 인 부분은 $x>0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



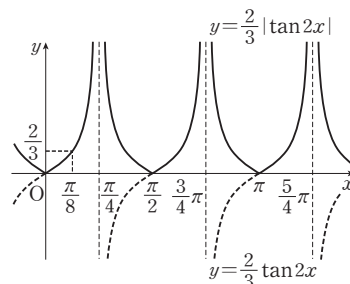
따라서 치역은 $\{y|-2\leq y\leq 2\}$ 이고, 주기는 없다.

- (2) 함수 $y=\left|\frac{1}{4}\cos(-6x)\right|$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{4}\cos(-6x)$ 의 그래프에서 $y\geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y<0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\left\{y\left|0\leq y\leq \frac{1}{4}\right.\right\}$ 이고, 주기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

- (3) 함수 $y=\frac{2}{3}|\tan 2x|$ 의 그래프는 $y=\frac{2}{3}\tan 2x$ 의 그래프에서 $y\geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y<0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y\geq 0\}$ 이고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

답 풀이 참조

다른 풀이

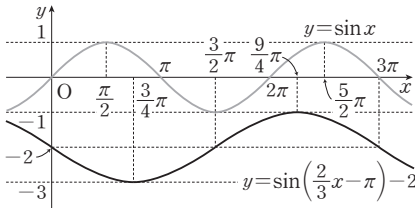
- (1) 함수 $y=-2\sin\left|\frac{3}{2}x\right|$ 의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
- (i) $y=\sin\frac{3}{2}x$ 의 그래프에서 $x\geq 0$ 인 부분만 남기고, $x<0$ 인 부분은 $x>0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 $y=\sin\left|\frac{3}{2}x\right|$ 의 그래프를 그린다.
- (ii) (i)의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 2배 하여 $y=-2\sin\left|\frac{3}{2}x\right|$ 의 그래프를 그린다.
- (2) 함수 $y=\frac{1}{4}\cos(-6x)$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 $\frac{1}{6}$ 배, y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배 한 것이다.
- (3) 함수 $y=\frac{2}{3}|\tan 2x|$ 의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $y=\tan 2x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동하여 $y=|\tan 2x|$ 의 그래프를 그린다.

(ii) (i)의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 배 하여 $y=\frac{2}{3}|\tan 2x|$ 의 그래프를 그린다.

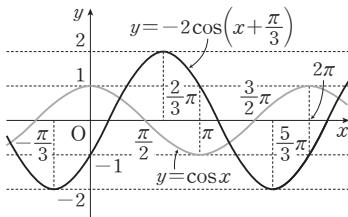
05

(1) $y=\sin\left(\frac{2}{3}x-\pi\right)-2=\sin\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)-2$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 배 한 후, x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



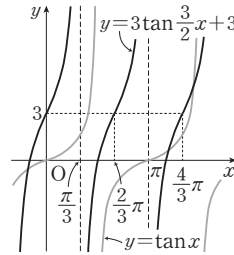
따라서 최댓값은 -1 , 최솟값은 -3 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ 이다.

(2) $y=-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하고 y 축의 방향으로 2배 한 후, x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고, 주기는 2π 이다.

(3) $y=3\tan\frac{3}{2}x+3$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 배, y 축의 방향으로 3배 한 후, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

답 풀이 참조

06

함수 $y=-2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-4=-2\cos 3\left\{\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right\}+1$$

$$\therefore y=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+5$$

따라서 $f(x)=-2\cos 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+5$ 이므로

$$M=|-2|+5=7, m=-|-2|+5=3,$$

$$a=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore aMm=\frac{2}{3}\pi \times 7 \times 3=14\pi$$

답 14π

07

함수 $y=6\sin\frac{x}{3}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{9}$ 만큼,

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-a=6\sin\frac{1}{3}\left\{x-\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right\}$$

$$\therefore y = 6 \sin \frac{1}{3} \left(x + \frac{\pi}{9} \right) + a$$

즉, $y = 6 \sin \frac{1}{3} \left(x + \frac{\pi}{9} \right) + a$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{8}{9}\pi, \sqrt{3} \right)$ 을 지나므로

$$\sqrt{3} = 6 \sin \frac{1}{3} \left(\frac{8}{9}\pi + \frac{\pi}{9} \right) + a, \sqrt{3} = 6 \sin \frac{\pi}{3} + a$$

$$\sqrt{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + a, \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + a$$

$$\therefore a = -2\sqrt{3}$$

답 $-2\sqrt{3}$

08

$$f(x) = a \tan(bx + c) + d = a \tan b \left(x + \frac{c}{b} \right) + d$$

이때 $b < 0$ 이고, 주기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\frac{\pi}{-b} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore b = -4$$

또한, 함수 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼,

y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - (-1) = a \tan b \left(x - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\therefore y = a \tan b \left(x - \frac{\pi}{8} \right) - 1$$

즉, $y = a \tan b \left(x - \frac{\pi}{8} \right) - 1$ 의 그래프가

$y = a \tan b \left(x + \frac{c}{b} \right) + d$ 의 그래프와 같으므로

$$d = -1, \frac{c}{b} = -\frac{\pi}{8} + \frac{n}{4}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{8} + \frac{n}{4}\pi \text{에서 } \frac{c}{-4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{n}{4}\pi \quad (\because b = -4)$$

$$\therefore c = \frac{\pi}{2} - n\pi$$

이때 $0 < c < \pi$ 이므로 $n = 0$ 일 때 $c = \frac{\pi}{2}$

즉, $f(x) = a \tan \left(-4x + \frac{\pi}{2} \right) - 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = a \tan \left(-4 \times \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) - 1$$

$$= a \tan \frac{\pi}{4} - 1$$

$$= a - 1$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 3$ 이므로

$$a - 1 = 3 \text{에서 } a = 4$$

$$\therefore abcd = 4 \times (-4) \times \frac{\pi}{2} \times (-1) = 8\pi$$

답 8π

09

함수 $y = a \cos \left(bx + \frac{\pi}{2} \right) + c$ 에서 $a > 0$ 이고, 주어진 그래프

에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$$a + c = 4, -a + c = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, c = 2$

주어진 그래프에서 주기가 $\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = \pi$ 이고 $b < 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-b} = \pi \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore abc = 2 \times (-2) \times 2 = -8$$

답 -8

10

함수 $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ 에서 $a > 0$ 이고, 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 2이므로

$$a + d = 4, -a + d = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, d = 3$

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \sin \left(\frac{1}{2}x + c \right) + 3$$

$f(0) = 4$ 에서

$$4 = \sin c + 3, \sin c = 1$$

$$\therefore c = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < c < \pi)$$

따라서 $f(x) = \sin \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) + 3$ 이므로

$$f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin \frac{\pi}{6} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

답 $\frac{7}{2}$

11

함수 $f(x) = a \tan(bx + c)$ 에서 $b > 0$ 이고, 주어진 그래프에서 주기는 $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = a \tan\left(\frac{3}{2}x + c\right) = a \tan\frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{3}c\right)$$

즉, 주어진 그래프는 $y = a \tan\frac{3}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 $-\frac{2}{3}c$ 만큼 평행이동한 것이고, x 축과 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 만나므로

$$-\frac{2}{3}c = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수}) \quad \therefore c = -\frac{\pi}{2} - n\pi$$

$$-\pi < c < 0 \text{이므로 } n = 0 \text{일 때 } c = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{즉, } f(x) = a \tan\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \tan\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a \tan\frac{\pi}{4} = a$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3} \text{이므로}$$

$$a = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{8}{3} \tan\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{5}{9}\pi\right) = \frac{8}{3} \tan\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{9}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3} \tan\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} \tan\frac{\pi}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

12

$$f(x) = a|\sin bx| + c \text{에서}$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 3이고, $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore f(x) = a|\sin 3x| + c$$

$$f\left(\frac{13}{18}\pi\right) = 2 \text{이므로}$$

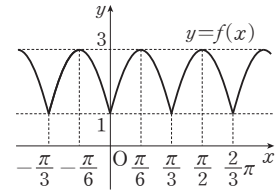
$$a\left|\sin \frac{13}{6}\pi\right| + c = 2, \quad a\left|\sin \frac{\pi}{6}\right| + c = 2$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + c = 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 + 1 = 6$$



답 6

13

함수 $f(x) = a|\tan bx| + c$ 의 최솟값이 2이므로

$a > 0, c = 2 \leftarrow a < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다.

함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

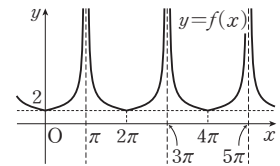
$$\therefore f(x) = a\left|\tan \frac{x}{2}\right| + 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \text{이므로}$$

$$a\left|\tan \frac{\pi}{4}\right| + 2 = 3$$

$$a + 2 = 3 \quad \therefore a = 1$$

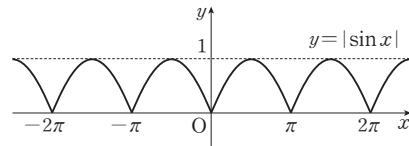
$$\therefore abc = 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1$$



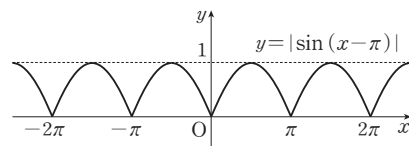
답 1

14

함수 $f(x) = |\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 주기는 π 이다.

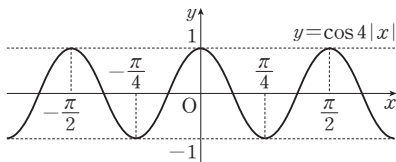


ㄱ. 함수 $y = |\sin(x - \pi)|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 것이므로 주기는 π 이다.



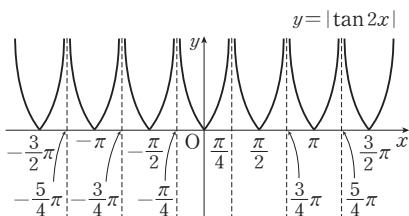
ㄴ. 함수 $y = \cos|x|$ 의 주기는 2π 이므로 함수

$y = \cos 4|x|$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이다.



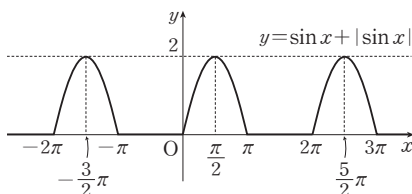
ㄷ. 함수 $y = |\tan x|$ 의 주기는 π 이므로 함수 $y = |\tan 2x|$

의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



ㄹ. 함수 $y = \sin x + |\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고,

주기는 2π 이다. $\begin{cases} \sin x \geq 0 \text{ 이면 } y = 2\sin x \\ \sin x < 0 \text{ 이면 } y = 0 \end{cases}$



따라서 함수 $f(x) = |\sin x|$ 와 주기가 같은 함수는 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.173-174

01 9	02 ④	03 ③	04 $\frac{5}{3}\pi$
05 $\frac{\pi}{4}$	06 -3	07 $\pi-6$	08 $\frac{\sqrt{3}}{4}$
09 ⑤	10 17	11 ②	12 8

01

함수 $y = \cos \frac{2}{3}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$$

이고, 함수 $y = \tan \frac{3}{a}x$ 의 주기는

$$\frac{\pi}{\left|\frac{3}{a}\right|} = \frac{|a|\pi}{3}$$

이때 두 함수의 주기가 같으므로

$$3\pi = \frac{|a|\pi}{3} \text{에서 } |a| = 9$$

$\therefore a = 9$ ($\because a > 0$)

답 9

02

함수 $f(x)$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+p)$ 를 만족시키는 최소의 양수 p 는 함수 $f(x)$ 의 주기이고, 주어진 함수의 주기는 다음과 같다.

① 함수 $y = \sin x$ 의 주기가 2π 이므로

함수 $f(x) = 2\sin \pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\pi} = 2$$

② 함수 $y = \cos x$ 의 주기가 2π 이므로

함수 $f(x) = 2\cos \sqrt{2}\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}$$

③ 함수 $y = \tan x$ 의 주기가 π 이므로

함수 $f(x) = \tan \frac{\sqrt{2}}{2}\pi x$ 의 주기는

$$\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} = \sqrt{2}$$

④ 함수 $y = \cos x$ 의 주기가 2π 이므로

함수 $f(x) = 4\cos 2\sqrt{2}\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{2\sqrt{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑤ 함수 $y = \sin x$ 의 주기가 2π 이므로

함수 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \sqrt{2}\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{2}$$

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 ④이다.

답 ④

03

$$f(x) = 2 \tan \left(\frac{3}{2} \pi - 3x \right) - 1$$

$$= 2 \tan \left\{ -3 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right\} - 1$$

① 치역은 실수 전체의 집합이다. (참)

② 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$f(x) = f \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = f \left(x + \frac{2}{3} \pi \right) = f(x + \pi) = \dots$$

즉, $f(x) = f(x + \pi)$ 가 성립한다. (참)

③ 함수 $y = 2 \tan 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼,

y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 2 \tan 3 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - 1$$

이것을 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = 2 \tan 3 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - 1$$

$$\therefore y = -2 \tan 3 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 1$$

$$= -2 \tan \left(3x - \frac{3}{2} \pi \right) + 1$$

$$= 2 \tan \left(\frac{3}{2} \pi - 3x \right) + 1$$

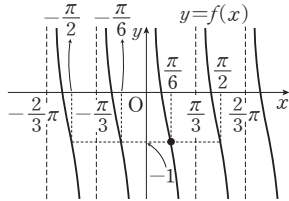
$\tan(-x) = -\tan x$

이 식은 함수 $f(x)$ 와 같지 않다. (거짓)

④ 그래프는 오른쪽 그림과

같이 점 $\left(\frac{\pi}{6}, -1 \right)$ 에

대하여 대칭이다. (참)



⑤ 그래프의 점근선의 방정식은 정수 n 에 대하여

$$\frac{3}{2} \pi - 3x = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \frac{1-n}{3} \pi \quad (\text{참})$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

04

함수 $y = \tan(ax + b) - 3$ 의 주기가 4π 이고, $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 4\pi \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

함수 $y = \tan \left(\frac{1}{4} x + b \right) - 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{1}{4} x + b = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$x = 4m\pi + 2\pi - 4b$$

$$\text{즉, } 4m + 2\pi - 4b = 4n\pi + \frac{\pi}{3} \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$b = \frac{5}{12} \pi + (m - n)\pi$$

$$\text{이때 } 0 < b < \pi \text{이므로 } m - n = 0 \text{일 때 } b = \frac{5}{12} \pi$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{5}{12} \pi}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{3} \pi$$

답 $\frac{5}{3} \pi$

05

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 는 주기가 8이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 8 \text{에서 } b = \frac{\pi}{4}$$

조건 (다)에서 최댓값은 8, 최솟값은 -2 이고, $a > 0$ 이므로

$$a + c = 8, \quad -a + c = -2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 5, \quad c = 3$$

$$\therefore f(x) = 5 \sin \left(\frac{\pi}{4} x + k \right) + 3$$

$$\text{조건 (가)에서 } f(2) = \frac{11}{2} \text{이므로}$$

$$5 \sin \left(\frac{\pi}{2} + k \right) + 3 = \frac{11}{2}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + k \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + k = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq k < 0, \text{ 즉 } 0 \leq \frac{\pi}{2} + k < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore k = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore ab + kc = 5 \times \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3} \right) \times 3$$

$$= \frac{5}{4} \pi - \pi = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

06

함수 $y=3\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3\tan\left\{\frac{\pi}{2}-2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right\}-1+3$$

$$\therefore y=3\tan\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)+2$$

이것을 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=3\tan\left\{\frac{2}{3}\pi-2(-x)\right\}+2$$

$$\therefore y=3\tan\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+2$$

따라서 위의 함수의 주기는 $a=\frac{\pi}{2}$ 이고 점근선의 방정식은

$$2x+\frac{2}{3}\pi=m\pi+\frac{\pi}{2} \quad (m \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$2x=m\pi-\frac{\pi}{6} \quad \therefore x=\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{12}$$

$$\text{즉, } \frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{12}=bn\pi+c \quad (n \text{은 정수}) \text{이므로}$$

$$b=\frac{1}{2} \quad (\because b>0)$$

$$\frac{m}{2}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{n}{2}\pi+c \text{에서 } c=\frac{(m-n)}{2}\pi-\frac{\pi}{12}$$

$$\text{이때 } -\frac{\pi}{2}<c<0 \text{이므로 } m-n=0 \text{일 때 } c=-\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \frac{ab}{c}=\frac{\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{12}}=-3$$

답 -3

07

주어진 함수의 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고, $a<0$ 이므로

$$-a+d=2, \quad a+d=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3, \quad d=-1$$

$$\text{주기가 } 2\times\left\{\frac{4}{3}\pi-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=4\pi \text{이고, } b>0 \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{b}=4\pi \text{에서 } b=\frac{1}{2}$$

이때 함수 $y=-3\cos\left(\frac{1}{2}x+c\right)-1$ 의 그래프가

점 $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ 를 지나므로

$$-\frac{5}{2}=-3\cos c-1, \quad \cos c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore c=\frac{\pi}{3} \quad (\because 0\leq c\leq\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} \therefore a+2b+3c+4d &= -3+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\pi}{3}+4\times(-1) \\ &= \pi-6 \end{aligned}$$

답 $\pi-6$

08

함수 $y=\tan x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, c\right)$ 를 지나므로

$$\tan\frac{\pi}{6}=c \quad \therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

한편, $y=a\sin bx$ 의 그래프에서 함수 $y=a\sin bx$ 의 주기가 π 이고, $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$$

즉, 함수 $y=a\sin 2x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 을 지나므로

$$a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore a=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{c}{ab}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

09

함수 $f(x)$ 가 주기가 p 인 주기함수이면

$f(x+np)=f(x)$ 를 만족시키는 정수 n 이 존재한다.

ㄱ. 함수 $y=\sin x$ 의 주기가 2π 이므로 함수

$$f(x)=\sin 2x+1 \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\therefore f(x+n\pi)=f(x)$$

따라서 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키는 정수 n 은 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $y=\tan x$ 의 주기가 π 이므로 함수

$$f(x)=\tan \frac{\pi}{2}x \text{의 주기는 } \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$$

$$\therefore f(x+2n)=f(x)$$

$n=1$ 일 때, $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다.

ㄷ. 함수 $f(x)=|\cos x|$ 의 주기가 π 이므로 함수

$$f(x)=|\cos \pi x| \text{의 주기는 } \frac{\pi}{\pi}=1$$

$$\therefore f(x+n)=f(x)$$

$n=2$ 일 때, $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다.

ㄹ. 함수 $y=\sin x$ 의 주기가 2π 이므로 함수

$$f(x)=\sin 3\pi x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore f\left(x+\frac{2}{3}n\right)=f(x)$$

$n=3$ 일 때, $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시킨다.

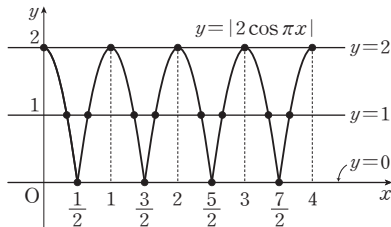
그러므로 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ⑤

10

함수 $y=|2\cos \pi x|$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 0이고 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$ 이다.

즉, $0 \leq x < 4$ 에서 함수 $y=|2\cos \pi x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 y 좌표가 정수이므로

$y=0, 1, 2$

(i) 함수 $y=|2\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y=0$ 의 교점의 개수는

4

(ii) 함수 $y=|2\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수는

8

(iii) 함수 $y=|2\cos \pi x|$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점의 개수는

5

(i), (ii), (iii)에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는

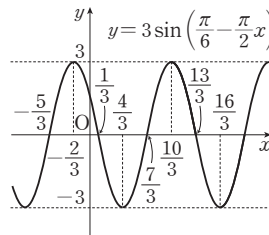
$$4+8+5=17$$

답 17

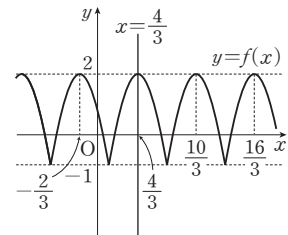
11

함수 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right)$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분은 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

ㄱ. $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq 3 \left| \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right) \right| \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq 3 \left| \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x\right) \right| - 1 \leq 2$$

따라서 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 2\}$ 이다. (참)

ㄴ. [그림 2]에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{4}{3}$ 에 대

하여 대칭이므로 $f\left(\frac{4}{3}+x\right)=f\left(\frac{4}{3}-x\right)$ (참)

ㄷ. [그림 2]에서 함수 $y=f(x)$ 의 주기는 $\frac{10}{3}-\frac{4}{3}=2$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 p 는 2의 배수이다.

따라서 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 100 이하의 자연 수 p 의 개수는 $\frac{100}{2}=50$ 이다. (거짓)
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } f\left(\frac{4}{3}+x\right) &= 3 \left| \sin \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3} + x \right) \right\} \right| - 1 \\ &= 3 \left| \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \\ &= 3 \left| \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \\ &= 3 \left| -\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \end{array} \right\} \\ &= 3 \left| -\cos \frac{\pi}{2}x \right| - 1 \\ &= 3 \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right| - 1 \\ f\left(\frac{4}{3}-x\right) &= 3 \left| \sin \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{3} - x \right) \right\} \right| - 1 \\ &= 3 \left| \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \\ &= 3 \left| \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \\ &= 3 \left| -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \end{array} \right\} \\ &= 3 \left| -\cos \left(-\frac{\pi}{2}x \right) \right| - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \\ \cos(-x) = \cos x \end{array} \right\} \\ &= 3 \left| \cos \frac{\pi}{2}x \right| - 1 \\ \therefore f\left(\frac{4}{3}+x\right) &= f\left(\frac{4}{3}-x\right) \text{ (참)} \end{aligned}$$

12

함수 $f(x) = |a \cos bx + c|$ 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{3}\pi, |b| = 3$$

$$\therefore b = -3 \text{ 또는 } b = 3$$

이때 $f(0)=1$ 이므로 $|a+c|=1$

$$\therefore a+c=-1 \text{ 또는 } a+c=1$$

따라서 $a+c=1, b=3$ 일 때,

$a+b+c$ 는 최댓값을 가지므로

$$M = 1 + 3 = 4$$

또한, $a+c=-1, b=-3$ 일 때,

$a+b+c$ 는 최솟값을 가지므로

$$m = -1 + (-3) = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4) = 8$$

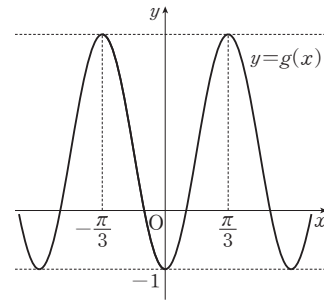
답 8

보충 설명

$g(x) = a \cos bx + c$ 라 하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $a+c=-1$ 일 때,

$g(0)=-1$ 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 $b=-3$ 일 때와 $b=3$ 일 때의 그래프는 일치한다.

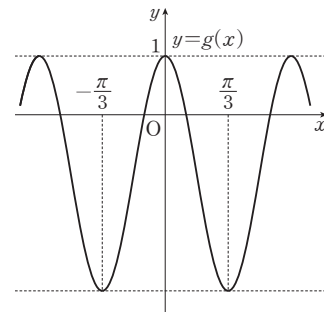


이때 $a+b+c$ 의 값은

$$-1 + (-3) = -4 \text{ 또는 } -1 + 3 = 2$$

(ii) $a+c=1$ 일 때,

$g(0)=1$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 $b=-3$ 일 때와 $b=3$ 일 때의 그래프는 일치한다.



이때 $a+b+c$ 의 값은

$$1 + (-3) = -2 \text{ 또는 } 1 + 3 = 4$$

(i), (ii)에서 $M=4, m=-4$ 이다.

2 삼각함수의 성질

기본 + 필수연습

본문 pp.179~183

15 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) 0

16 (1) -0.4540 (2) 0.4540 (3) 2.1445 17 1

18 -7 19 $\frac{16}{25}$ 20 $\frac{91}{2}$ 21 1

22 -1

23 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 9, 최솟값: 2

24 0

25 (1) 최댓값: 6, 최솟값: -3

(2) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: -1

26 $3\sqrt{3}+5$ 27 $\frac{1}{4}$

15

(1) $\sin \frac{7}{6}\pi = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\tan \left(-\frac{7}{4}\pi \right) = -\tan \frac{7}{4}\pi$

$= -\tan \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right)$

$= -\left(-\tan \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \sin \frac{7}{6}\pi - \tan \left(-\frac{7}{4}\pi \right)$

$= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

(2) $\sin (-210^\circ) = -\sin 210^\circ$

$= -\sin (180^\circ + 30^\circ)$

$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 600^\circ = \cos (360^\circ + 240^\circ)$

$= \cos 240^\circ$

$= \cos (180^\circ + 60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\therefore \sin (-210^\circ) + \cos 600^\circ = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right)$

$= 0$

답 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) 0

16

(1) $\sin (-27^\circ) = -\sin 27^\circ$

$= -\sin (90^\circ - 63^\circ)$

$= -\cos 63^\circ = -0.4540$

(2) $\cos (-297^\circ) = \cos 297^\circ$

$= \cos (360^\circ - 63^\circ)$

$= \cos 63^\circ = 0.4540$

(3) $\tan 245^\circ = \tan (180^\circ + 65^\circ)$

$= \tan 65^\circ = 2.1445$

답 (1) -0.4540 (2) 0.4540 (3) 2.1445

17

$$\frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)\tan^2(\pi - \theta)} + \frac{1}{\sin(2\pi + \theta)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$$= \frac{-\sin \theta}{\sin \theta \times \tan^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta \times \sin \theta}$$

$$= -\frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$= -\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \left(\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right)$$

$$= 1$$

답 1

18

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(-\theta) = -\frac{6}{5}$ 에서

$-\sin \theta - \sin \theta = -\frac{6}{5}$

$-2\sin \theta = -\frac{6}{5} \quad \therefore \sin \theta = \frac{3}{5}$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \cos \theta = -\frac{4}{5} \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & 3 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{4}{\tan \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right)} \\ &= \frac{3}{\tan \theta} + 4 \tan \theta = \frac{3}{-\frac{3}{4}} + 4 \times \left(-\frac{3}{4} \right) \\ &= -4 + (-3) = -7 \end{aligned}$$

답 -7

19

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\pi - \theta) \sin \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right)}{\tan \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right)} \times \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin(2\pi - \theta) \tan^2(\pi + \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta \times (-\cos \theta)}{\frac{1}{\tan \theta}} \times \frac{\sin \theta}{-\sin \theta \tan^2 \theta} \\ &= (-\sin \theta \cos \theta) \times \tan \theta \times \left(-\frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= \sin \theta \cos \theta \times \frac{1}{\tan \theta} \\ &= \sin \theta \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left(\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \end{aligned}$$

이때 원점 O와 점 P(4, -3)을
지나는 동경 OP가 나타내는 각의
크기가 θ 이므로

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \cos^2 \theta = \left(\frac{4}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

답 $\frac{16}{25}$

20

$$\begin{aligned} & \sin(90^\circ - \theta^\circ) = \cos \theta^\circ, \cos(90^\circ - \theta^\circ) = \sin \theta^\circ \text{ 이므로} \\ & \cos 89^\circ = \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ \\ & \sin 88^\circ = \sin(90^\circ - 2^\circ) = \cos 2^\circ \end{aligned}$$

$$\cos 87^\circ = \cos(90^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ$$

$$\sin 86^\circ = \sin(90^\circ - 4^\circ) = \cos 4^\circ$$

$\vdots$

$$\cos 47^\circ = \cos(90^\circ - 43^\circ) = \sin 43^\circ$$

$$\sin 46^\circ = \sin(90^\circ - 44^\circ) = \cos 44^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore & \cos^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ \\ &= (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 3^\circ + \cos^2 87^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &\quad + \cos^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ \\ &= (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 3^\circ + \sin^2 3^\circ) + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) \\ &\quad + \cos^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ \\ &= \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{44\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1^2 \\ &= 1 \times 44 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{91}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{91}{2}$

21

$$\tan(90^\circ - \theta^\circ) = \frac{1}{\tan \theta^\circ} \text{ 이므로}$$

$$\tan 1^\circ = \tan(90^\circ - 89^\circ) = \frac{1}{\tan 89^\circ}$$

$$\tan 2^\circ = \tan(90^\circ - 88^\circ) = \frac{1}{\tan 88^\circ}$$

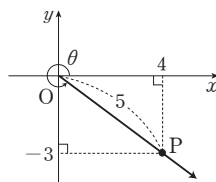
$$\tan 3^\circ = \tan(90^\circ - 87^\circ) = \frac{1}{\tan 87^\circ}$$

$\vdots$

$$\tan 44^\circ = \tan(90^\circ - 46^\circ) = \frac{1}{\tan 46^\circ}$$

$$\begin{aligned} \therefore & \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 89^\circ \\ &= \frac{1}{\tan 89^\circ} \times \frac{1}{\tan 88^\circ} \times \cdots \times \frac{1}{\tan 46^\circ} \times \tan 45^\circ \\ &\quad \times \tan 46^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \\ &= \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

답 1



다른 풀이

$$\sin(90^\circ - \theta^\circ) = \cos \theta^\circ \text{이므로}$$

$$\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 89^\circ$$

$$= \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \times \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \times \frac{\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} \times \cdots \times \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ}$$

$$= \frac{\cos 89^\circ}{\cos 1^\circ} \times \frac{\cos 88^\circ}{\cos 2^\circ} \times \frac{\cos 87^\circ}{\cos 3^\circ} \times \cdots \times \frac{\cos 1^\circ}{\cos 89^\circ}$$

$$= 1$$

22

$$5\theta = \pi \text{이므로}$$

$$\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 8\theta + \cos 9\theta$$

$$= \cos(5\theta - 2\theta) + \cos(5\theta - \theta) + \cos 5\theta$$

$$+ \cos(10\theta - 2\theta) + \cos(10\theta - \theta)$$

$$= \cos(\pi - 2\theta) + \cos(\pi - \theta) + \cos \pi$$

$$+ \cos(2\pi - 2\theta) + \cos(2\pi - \theta)$$

$$= -\cos 2\theta - \cos \theta + \cos \pi + \cos 2\theta + \cos \theta$$

$$= \cos \pi = -1$$

답 -1

23

$$(1) y = 2\cos x + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 5$$

$$= 2\cos x + 3\cos x + 5$$

$$= 5\cos x + 5$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-5 \leq 5\cos x \leq 5$$

$$\therefore 0 \leq 5\cos x + 5 \leq 10$$

따라서 최댓값은 10, 최솟값은 0이다.

$$(2) y = |3 - 4\cos x| + 2 \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고, } y = |3 - 4t| + 2$$

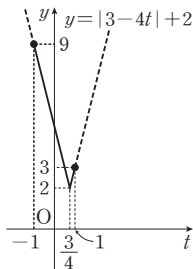
$$\text{즉, } -1 \leq t \leq 1 \text{에서}$$

$$y = |3 - 4t| + 2 \text{의 그래프는}$$

오른쪽 그림과 같으므로

$$t = -1 \text{일 때 최댓값 } 9,$$

$$t = \frac{3}{4} \text{일 때 최솟값 } 2 \text{를 갖는다.}$$



답 (1) 최댓값 : 10, 최솟값 : 0

(2) 최댓값 : 9, 최솟값 : 2

다른 풀이

$$(2) y = |3 - 4\cos x| + 2 \text{에서}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-4 \leq -4\cos x \leq 4, -1 \leq 3 - 4\cos x \leq 7$$

$$0 \leq |3 - 4\cos x| \leq 7$$

$$\therefore 2 \leq |3 - 4\cos x| + 2 \leq 9$$

24

$$y = a|\cos 2x - 3| + b \text{에서}$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-4 \leq \cos 2x - 3 \leq -2, 2 \leq |\cos 2x - 3| \leq 4$$

$$\therefore 2a + b \leq a|\cos 2x - 3| + b \leq 4a + b \quad (\because a > 0)$$

이때 주어진 함수의 최댓값이 6, 최솟값이 2이므로

$$4a + b = 6, 2a + b = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -2$$

$$\therefore a + b = 2 + (-2) = 0$$

답 0

25

$$(1) y = -2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) - 2\cos^2\theta + 4\sin(\pi + \theta) + 2$$

$$= -2\cos^2\theta - 2\cos^2\theta - 4\sin\theta + 2$$

$$= -4\cos^2\theta - 4\sin\theta + 2$$

$$= -4(1 - \sin^2\theta) - 4\sin\theta + 2$$

$$= 4\sin^2\theta - 4\sin\theta - 2$$

이때 $\sin\theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = 4t^2 - 4t - 2 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 3$$

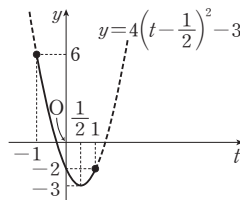
$$\text{즉, } -1 \leq t \leq 1 \text{에서}$$

$$y = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 3 \text{의 그래프}$$

는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t = -1 \text{일 때 최댓값 } 6,$$

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때 최솟값 } -3 \text{을 갖는다.}$$



(2) $y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = \frac{2t}{t+3} = \frac{2(t+3)-6}{t+3} = -\frac{6}{t+3} + 2$$

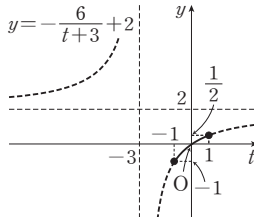
즉, $-1 \leq t \leq 1$ 에서

$$y = -\frac{6}{t+3} + 2 \text{의 그래프}$$

는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t=1 \text{일 때 최댓값 } \frac{1}{2},$$

$t=-1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.



답 (1) 최댓값 : 6, 최솟값 : -3

(2) 최댓값 : $\frac{1}{2}$, 최솟값 : -1

26

$y = \frac{1-2\tan x}{\tan x - 2}$ 에서 $\tan x = t$ 로 놓으면

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 이므로 $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ 이고,

$$y = \frac{1-2t}{t-2} = \frac{-2(t-2)-3}{t-2} = -\frac{3}{t-2} - 2$$

즉, $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ 에서

$$y = -\frac{3}{t-2} - 2 \text{의 그래프는}$$

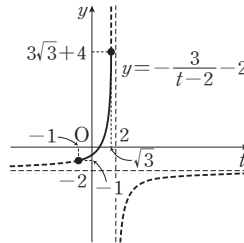
오른쪽 그림과 같으므로 $t = \sqrt{3}$

일 때 최댓값 $3\sqrt{3}+4$, $t = -1$

일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

따라서 $M = 3\sqrt{3}+4$, $m = -1$ 이므로

$$M - m = 3\sqrt{3}+4 - (-1) = 3\sqrt{3}+5$$



답 $3\sqrt{3}+5$

27

$$y = 2\cos^2 x + 3\sin x + k - 1$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + k - 1$$

$$= -2\sin^2 x + 3\sin x + k + 1$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = -2t^2 + 3t + k + 1$$

$$= -2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right) + k + 1$$

$$= -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + k + \frac{17}{8}$$

즉, $-1 \leq t \leq 1$ 에서

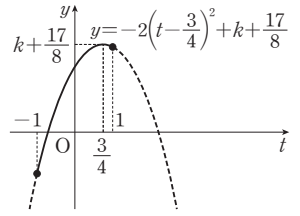
$$y = -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + k + \frac{17}{8}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $t = \frac{3}{4}$ 일 때 최댓

값 $k + \frac{17}{8}$ 을 갖는다.

따라서 $k + \frac{17}{8} = \frac{19}{8}$ 에서 $k = \frac{1}{4}$



답 $\frac{1}{4}$

STEP 1

개념 마무리

본문 p.184

13 $\frac{17}{10}$

14 $\frac{99}{2}$

15 $\frac{4}{3}$

16 -4

17 ②

18 $-\frac{5}{6}$

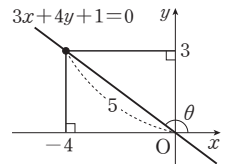
13

직선 $3x + 4y + 1 = 0$ 의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이므로

$$\tan \theta = -\frac{3}{4}$$

삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}$$



$$\therefore \frac{\sin(3\pi - \theta) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} + \frac{\cos(\theta - \pi)}{1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)}$$

$$= \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{-\cos \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - \cos \theta - \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{-\cos \theta (\sin^2 \theta + 1)}{\cos^2 \theta} = -\frac{\sin^2 \theta + 1}{\cos \theta}$$

$$= -\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1}{-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{34}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{17}{10}$$

답 $\frac{17}{10}$

14

$A=P_0$, $B=P_{100}$ 이라 하고,

$\angle P_{n-1}OP_n = \theta$ ($n=1, 2, 3, \dots, 100$)라 하면

$$100\theta = \frac{\pi}{2}$$

$\angle P_nOA = n\theta$ 이므로 $P_n(\cos n\theta, \sin n\theta)$

따라서 $f(n) = \sin n\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} & \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \dots + \{f(99)\}^2 \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 99\theta \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 50\theta \\ & \quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 49\theta\right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 48\theta\right) \\ & \quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 47\theta\right) + \dots + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \dots + \sin^2 50\theta \\ & \quad + \cos^2 49\theta + \cos^2 48\theta + \cos^2 47\theta + \dots + \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ & \quad + \dots + (\sin^2 49\theta + \cos^2 49\theta) + \sin^2 50\theta \\ &= 1 \times 49 + \sin^2 \frac{\pi}{4} \left(\because 50\theta = \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 49 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{99}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{99}{2}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \dots + \{f(99)\}^2$ 을 사인함수로 나타낸 경우	40%
(나)	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ 를 이용하여 식을 변형한 경우	40%
(다)	삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한 경우	20%

15

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - ax\right) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(ax + \frac{\pi}{6}\right)\right\} = \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned} y &= 2a \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) + a \cos\left(\frac{\pi}{3} - ax\right) + b \\ &= 2a \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) + a \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) + b \\ &= 3a \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) + b \end{aligned}$$

이 함수의 주기가 6π 이므로

$$\frac{2\pi}{|a|} = 6\pi \text{에서 } |a| = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because a > 0)$$

이때 $-1 \leq \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 에서

$$-3a + b \leq 3a \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right) + b \leq 3a + b \quad (\because a > 0)$$

이 함수의 최댓값이 5이므로

$$3a + b = 5$$

$a = \frac{1}{3}$ 을 위의 식에 대입하면

$$3 \times \frac{1}{3} + b = 5, \quad 1 + b = 5 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore ab = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

16

$$y = a \cos^2 x + a \sin x + b$$

$$= a(1 - \sin^2 x) + a \sin x + b$$

$$= -a \sin^2 x + a \sin x + a + b$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = -at^2 + at + a + b = -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b$$

$$f(t) = -a\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}a + b \text{라 하면}$$

(i) $a > 0$ 일 때,

$y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $f(t)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}a + b = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

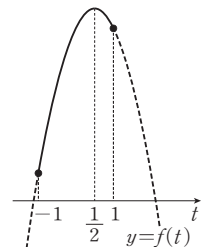
$f(t)$ 의 최솟값은

$$f(-1) = -a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 4, \quad b = 5$$

$$\therefore ab = 4 \times 5 = 20$$



(ii) $a < 0$ 일 때,

$y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과
같으므로 $f(t)$ 의 최댓값은

$$f(-1) = -a + b = 10 \quad \cdots \textcircled{\ominus}$$

$f(t)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{\ominus}$$

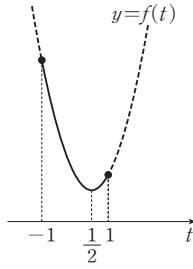
②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 6$$

$$\therefore ab = -4 \times 6 = -24$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 ab 의 값의 합은

$$20 + (-24) = -4$$



답 -4

17

$$f(x) = x^2 - 2x \cos \theta + 2 \sin^2 \theta$$

$$= (x - \cos \theta)^2 - \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta$$

$$= (x - \cos \theta)^2 + 2 - 3 \cos^2 \theta \quad \left(\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \right)$$

즉, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$(\cos \theta, 2 - 3 \cos^2 \theta)$$

꼭짓점과 원점 사이의 거리를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\cos^2 \theta + (2 - 3 \cos^2 \theta)^2}$$

$$= \sqrt{9 \cos^4 \theta - 11 \cos^2 \theta + 4}$$

이때 $\cos^2 \theta = t$ 로 놓으면 $0 \leq t \leq 1$ 이고,

$$l = \sqrt{9t^2 - 11t + 4} = \sqrt{9\left(t - \frac{11}{18}\right)^2 + \frac{23}{36}}$$

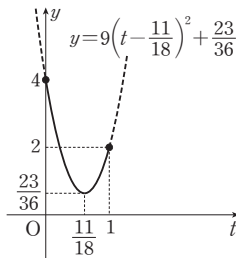
$0 \leq t \leq 1$ 에서 함수

$$y = 9\left(t - \frac{11}{18}\right)^2 + \frac{23}{36}$$

는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t=0 \text{일 때 최댓값 } 4, t=\frac{11}{18}$$

$$\text{일 때 최솟값 } \frac{23}{36} \text{을 갖는다.}$$



따라서 l 은 $t=0$ 일 때 최댓값 $\sqrt{4}=2$, $t=\frac{11}{18}$ 일 때 최솟값

$$\sqrt{\frac{23}{36}} = \frac{\sqrt{23}}{6} \text{을 가지므로 } y=f(x) \text{의 그래프의 꼭짓점과 원}$$

점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값의 합은

$$2 + \frac{\sqrt{23}}{6}$$

답 ②

18

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$$y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} - 2 = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} + 3}{\frac{\sin x}{\cos x} + 2} - 2$$

$$= \frac{2 \tan x + 3}{\tan x + 2} - 2$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고,

$$y = \frac{2t + 3}{t + 2} - 2 = -\frac{1}{t + 2}$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서 함수

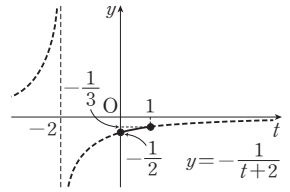
$$y = -\frac{1}{t + 2}$$

오른쪽 그림과 같으므로

$$t=1 \text{일 때 최댓값 } M = -\frac{1}{3},$$

$$t=0 \text{일 때 최솟값 } m = -\frac{1}{2} \text{을 갖는다.}$$

$$\therefore M + m = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{6}$$



답 $-\frac{5}{6}$

3 삼각방정식과 삼각부등식

기본 + 필수연습

본문 pp.188-193

$$28 \quad x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

$$29 \quad x = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{12}\pi$$

$$30 \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

$$31 \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < 2\pi \quad 32 \quad 2\pi$$

$$33 \quad \frac{13}{6}\pi \quad 34 \quad (1) -4 \leq a \leq 5 \quad (2) 5$$

$$35 \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \quad 36 \quad \textcircled{4} \quad 37 \quad 4\pi$$

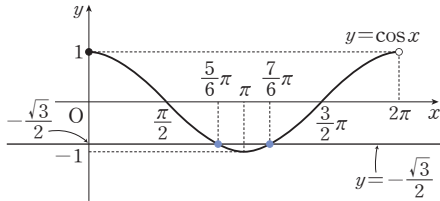
$$38 \quad \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \quad 39 \quad 2\pi$$

28

$2\cos x + \sqrt{3} = 0$ 에서

$$2\cos x = -\sqrt{3} \quad \therefore \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

주어진 방정식의 해는 함수 $y = \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



따라서 구하는 해는

$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

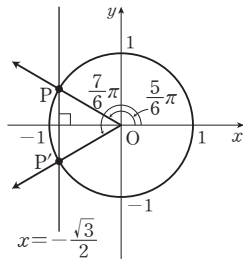
$$\text{답 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi$$

다른 풀이

단위원을 이용하여 방정식의 해를 구할 수도 있다.

단위원과 직선 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 만나는 두 점을 P, P'이라 할 때,

방정식 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 두 동경 OP, OP'이 나타내는 각이다.



따라서 구하는 해는

$$\theta = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

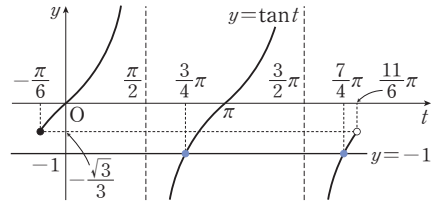
29

$x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$

주어진 방정식은 $\tan t = -1$

함수 $y = \tan t$ ($-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$)의 그래프와 직선 $y = -1$ 은 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y = \tan t$ ($-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$)의 그래프와 직선

$y = -1$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ 이고, $t = x - \frac{\pi}{6}$ 이므로

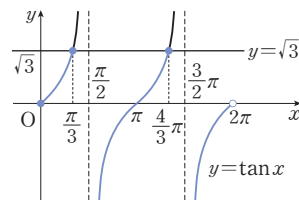
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{12}\pi$$

$$\text{답 } x = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{12}\pi$$

30

주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프가 직선 $y = \sqrt{3}$ 과 만나거나 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이다.



따라서 구하는 해는

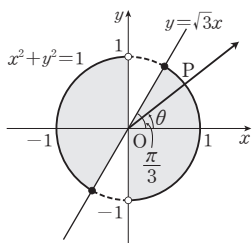
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

$$\text{답 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$$

다른 풀이

단위원을 이용하여 부등식의 해를 구할 수도 있다.

원점을 지나는 직선 중 다음 그림의 색칠한 도형을 지나는 직선이 단위원과 만나는 점을 P라 할 때, 부등식 $\tan \theta \leq \sqrt{3}$ 의 해는 동경 OP가 나타내는 각의 범위이다.



따라서 구하는 해는

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

31

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

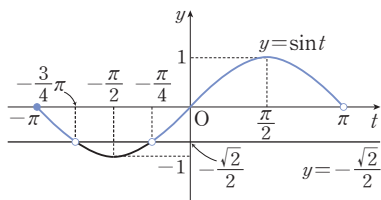
$$-\pi \leq x - \pi < \pi \quad \therefore -\pi \leq t < \pi$$

주어진 부등식은 $-\sqrt{2}\sin t < 1$ 에서

$$\sin t > -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\pi \leq t < \pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y = \sin t$ ($-\pi \leq t < \pi$)의 그래프가 직선

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 t 의 값의 범위는

$$-\pi \leq t < -\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } -\frac{\pi}{4} < t < \pi$$

이고, $t = x - \pi$ 이므로

$$-\pi \leq x - \pi < -\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } -\frac{\pi}{4} < x - \pi < \pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < 2\pi$$

$$\text{답 } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < 2\pi$$

보충 설명

$\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$ 이므로

부등식 $-\sqrt{2}\sin(x - \pi) < 1$ 에서

$$\sqrt{2}\sin x < 1 \quad \therefore \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, 부등식 $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해를 구해도 된다.

32

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 3$$

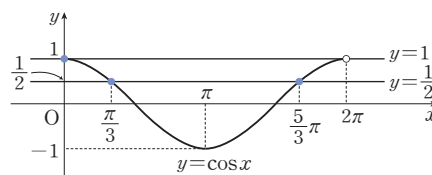
$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선 $y = \frac{1}{2}$,

$y = 1$ 은 다음 그림과 같다.



$$\cos x = \frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

$$\cos x = 1 \text{에서 } x = 0$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$0 + \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$

답 2π

보충 설명

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은

두 점에서 만난다.

이 두 교점의 x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \alpha + \beta = 2\pi$$

교점은 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이다.

또한, $\cos x = 1$ 에서 $x = 0$ 이므로 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\alpha + \beta + 0 = 2\pi$$

33

$\cos(\pi \sin x) = 0$ 에서 $\pi \sin x = t$ 로 놓으면

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-\pi \leq t \leq \pi$$

주어진 방정식은 $\cos t = 0$ 이고 이를 만족시키는 t 의 값은

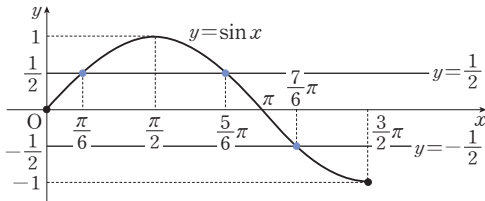
$$t = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2} \quad (\because -\pi \leq t \leq \pi)$$

즉, $\pi \sin x = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi \sin x = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



$\sin x = -\frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{7}{6}\pi$

$\sin x = \frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi$$

답 $\frac{13}{6}\pi$

34

(1) $4\sin^2 x - 4\cos x - a = 0$ 에서

$$4(1 - \cos^2 x) - 4\cos x = a$$

$$\therefore -4\cos^2 x - 4\cos x + 4 = a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = -4\cos^2 x - 4\cos x + 4$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 가져야 한다.

$y = -4\cos^2 x - 4\cos x + 4$ 에서

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고,}$$

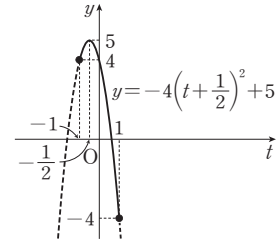
$$y = -4t^2 - 4t + 4$$

$$= -4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 5$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$-4 \leq a \leq 5$$



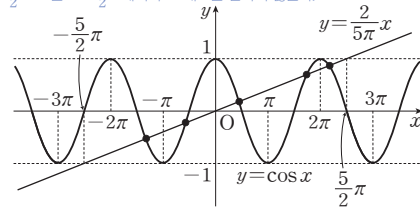
(2) 방정식 $\cos x = \frac{2}{5\pi}x$ 의 실근의 개수는 함수 $y = \cos x$ 의

그래프와 직선 $y = \frac{2}{5\pi}x$ 의 교점의 개수와 같다.

직선 $y = \frac{2}{5\pi}x$ 는 두 점 $(-\frac{5}{2}\pi, -1)$, $(\frac{5}{2}\pi, 1)$ 을 지

나므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

$x < -\frac{5}{2}\pi$ 또는 $x > \frac{5}{2}\pi$ 에서 두 그래프는 만나지 않는다.



따라서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{5\pi}x$ 의 교

점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 (1) $-4 \leq a \leq 5$ (2) 5

다른 풀이

(1) $4\sin^2 x - 4\cos x - a = 0$ 에서

$$4(1 - \cos^2 x) - 4\cos x = a$$

$$4\cos^2 x + 4\cos x + a - 4 = 0$$

이때 $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓으면

$$4t^2 + 4t + a - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(t) = 4t^2 + 4t + a - 4$ 라 하면

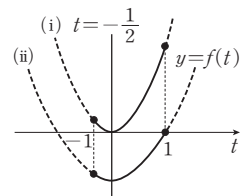
$$f(t) = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + a - 5$$

이므로 t 에 대한 방정식 $\textcircled{1}$ 이

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 실근을 가지

려면 이차함수 $y = f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같이

(i) 또는 (ii)와 같거나 (i)과 (ii)



사이에 존재해야 한다.

$$(i) f\left(-\frac{1}{2}\right) = a - 5 = 0 \quad \therefore a = 5$$

$$(ii) f(1) = 4 + 4 + a - 4 = 0$$

$$4 + a = 0 \quad \therefore a = -4$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위는 $-4 \leq a \leq 5$

35

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos x \leq 1$, 즉 $\cos^2 x > 0$ 이므로

$(\sin x + \cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) < 0$ 의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누면

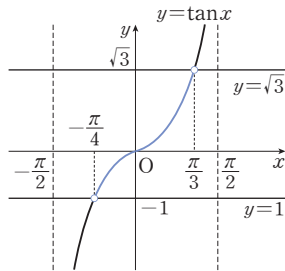
$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3}\right) < 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -1 < \tan x < \sqrt{3}$$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선

$y = -1$, $y = \sqrt{3}$ 은 다음 그림과 같다.



부등식 $-1 < \tan x < \sqrt{3}$ 의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = -1$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y = \sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 구하는 해는

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\text{답 } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$$

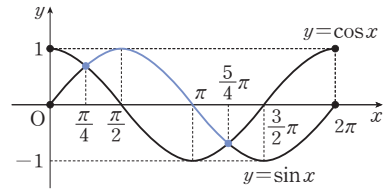
36

$y = \sin x$, $y = \cos x$ 는 모두 주기가 2π 인 함수이므로 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때의 연립부등식의 해를 구해 보자.

(i) $\sin x \geq \cos x$

부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 만나거나 $y = \cos x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 다음 그림에서 이 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$$



(ii) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x + 1 \geq 0$

$$2(1 - \sin^2 x) - \sqrt{3}\sin x + 1 \geq 0$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 \leq 0$$

$$(\sin x + \sqrt{3})(2\sin x - \sqrt{3}) \leq 0$$

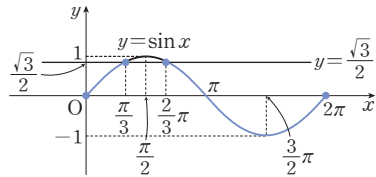
이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서 $\sin x + \sqrt{3} > 0$ 이므로

$$2\sin x - \sqrt{3} \leq 0 \quad \therefore \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

부등식 $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가

직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나거나 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 다음 그림에서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{2}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$$



(i), (ii)에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때의 주어진 연립부등식의 해는

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 x 의 값으로 가능한 것은 ④ $\frac{3}{4}\pi$ 이다.

답 ④

37

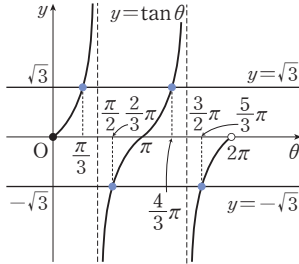
이차방정식 $x^2 - 2x + \tan^2 \theta - 2 = 0$ 이 중근을 가지려면 이
이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - (\tan^2 \theta - 2) = 0$$

$$\tan^2 \theta - 3 = 0, (\tan \theta + \sqrt{3})(\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan \theta = -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan \theta = \sqrt{3}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$,
 $y = \sqrt{3}$ 은 다음 그림과 같다.



$$\tan \theta = -\sqrt{3} \text{에서 } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \text{에서 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = 4\pi$$

답 4π

38

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이
차방정식 $6x^2 + (4\cos \theta)x + \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할
때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2 \theta - 6\sin \theta < 0$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 6\sin \theta < 0$$

$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 > 0$$

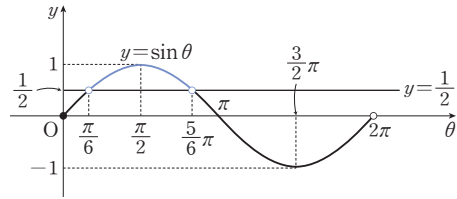
$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) > 0$$

이때 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 에서 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은

다음 그림과 같다.



부등식 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 θ 의 값의 범위이므로 조건을

만족시키는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

39

이차방정식 $x^2 - 2x\cos \theta + 1 - \sin \theta = 0$ 의 두 근이 α, β 이
므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2\cos \theta, \alpha\beta = 1 - \sin \theta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 \text{에서 } (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2 \text{이므로}$$

$$(2\cos \theta)^2 - 2(1 - \sin \theta) = 2$$

$$4\cos^2 \theta - 2 + 2\sin \theta = 2$$

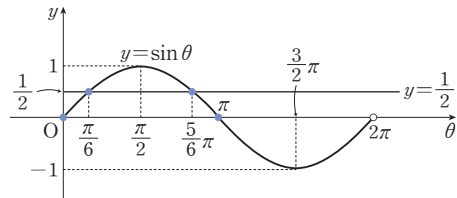
$$4(1 - \sin^2 \theta) - 4 + 2\sin \theta = 0$$

$$2\sin^2 \theta - \sin \theta = 0, \sin \theta(2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은

다음 그림과 같다.



$\sin \theta = 0$ 에서 $\theta = 0$ 또는 $\theta = \pi$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$0 + \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \pi = 2\pi$$

답 2π

STEP 1

개념 마무리

본문 p.194

19 3π

20 4π

21 12

22 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

23 -3

24 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

19

$\sqrt{3}\tan x + 2\sin x = 0$ 에서

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 즉 $\sin x = \tan x \cos x$ 이므로

$\sqrt{3}\tan x + 2\tan x \cos x = 0$

$\tan x(\sqrt{3} + 2\cos x) = 0$

$\therefore \tan x = 0$ 또는 $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

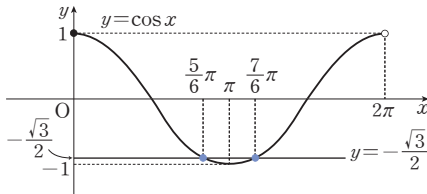
(i) $\tan x = 0$ 일 때,

$x = 0$ 또는 $x = \pi$ ($\because 0 \leq x < 2\pi$)

(ii) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때,

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 다음 그림과 같다.



즉, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

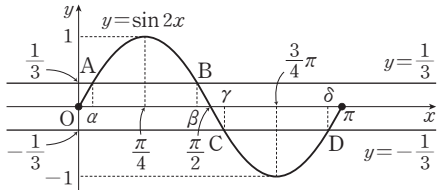
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$0 + \frac{5}{6}\pi + \pi + \frac{7}{6}\pi = 3\pi$

답 3π

20

함수 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



두 점 A, B는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

두 점 C, D는 직선 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore \gamma + \delta = \frac{3}{2}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2}$

두 점 B, C는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 $\rightarrow$ 두 점 A, D도 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 $\alpha + \delta = \pi$

$\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \beta + \gamma = \pi \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서

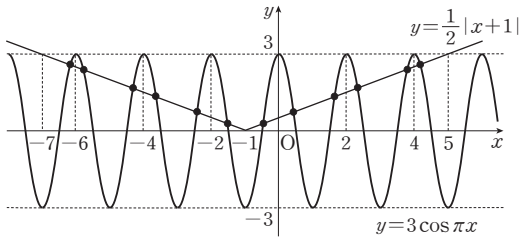
$\alpha + 3\beta + 3\gamma + \delta = (\alpha + \beta) + 2(\beta + \gamma) + (\gamma + \delta)$
 $= \frac{\pi}{2} + 2 \times \pi + \frac{3}{2}\pi = 4\pi$

답 4π

21

방정식 $3\cos \pi x = \frac{1}{2}|x+1|$ 의 실근은 함수 $y = 3\cos \pi x$ 의 그래프와 함수 $y = \frac{1}{2}|x+1|$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

함수 $y = 3\cos \pi x$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3, 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이고, 함수 $y = \frac{1}{2}|x+1|$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$ 에서 아래로 뾰족하면서 두 점 $(-7, 3)$, $(5, 3)$ 을 지나므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y = 3 \cos \pi x$, $y = \frac{1}{2} |x+1|$ 의 그래프의 교점의 개수는 12이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 12이다.

답 12

22

$$4^{\cos^2 x} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sin x} - 2 > 0 \text{에서}$$

$$2^{2\cos^2 x} \times 2^{\sin x} - 2 > 0, \quad 2^{2\cos^2 x + \sin x} > 2$$

$$(\text{밑}) = 2 > 1 \text{이므로}$$

$$2\cos^2 x + \sin x > 1, \quad 2\cos^2 x + \sin x - 1 > 0$$

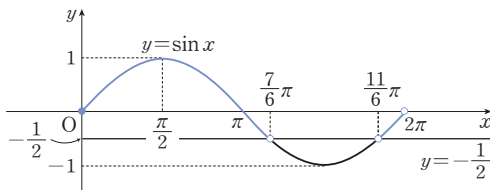
$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 > 0, \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은

다음 그림과 같다.



즉, 부등식 $\sin x > -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

그런데 ㉠에서 $\sin x \neq 1$ 이므로 $x \neq \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 \leq x < 2\pi$)

따라서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$

답 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

23

$\sin^2 \theta - 4 \sin \theta - k \geq 0$ 에서 $\sin \theta = t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이고 } t^2 - 4t - k \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$f(t) = t^2 - 4t - k$ 라 하면

$$f(t) = (t-2)^2 - k - 4$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = f(t)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 최솟값

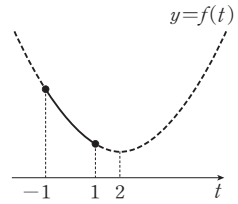
$$f(1) = -k-3 \text{을 갖는다.}$$

즉, 모든 실수 θ 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로

$$-k-3 \geq 0 \quad \therefore k \leq -3$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.



답 -3

24

이차방정식 $2x^2 + (2\sqrt{2}\sin \theta)x + \frac{3}{2}\cos \theta = 0$ 의 두 근을

α, β 라 할 때, 두 근이 모두 음수이려면 다음과 같아야 한다.

(i) 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을

D 라 할 때, $D \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\sin \theta)^2 - 3\cos \theta \geq 0$$

$$2\sin^2 \theta - 3\cos \theta \geq 0, \quad 2(1 - \cos^2 \theta) - 3\cos \theta \geq 0$$

$$2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 \leq 0$$

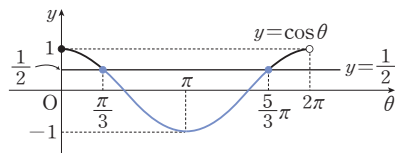
$$(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) \leq 0$$

이때 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 에서 $\cos \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\cos \theta - 1 \leq 0 \quad \therefore \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

은 다음 그림과 같다.



따라서 부등식 $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) 두 근의 합은 음수이므로

$$\alpha + \beta = -\sqrt{2}\sin\theta < 0$$

$$\therefore \sin\theta > 0 \quad \dots\dots\textcircled{A}$$

(iii) 두 근의 곱은 양수이므로

$$\alpha\beta = \frac{3}{4}\cos\theta > 0$$

$$\therefore \cos\theta > 0 \quad \dots\dots\textcircled{B}$$

Ⓐ, Ⓑ에서 θ 는 제1사분면의 각이다.

$$\text{즉, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\textcircled{C}$$

Ⓐ, Ⓑ에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.195

- | | | | |
|-------|--|------|-----|
| 1 12초 | 2 $\frac{8}{15}$ | 3 24 | 4 0 |
| 5 12 | 6 $\frac{5}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ | | |

1

물레방아의 반지름의 길이는 2m이고, 점 A가 점 P를 지나는 순간의 지면으로부터의 높이가 1m이므로 함수

$h(x) = a\sin b(x+9) + c$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 $2 \times 2 + 1 = 5$, 1이다.

즉, $|a| + c = 5$, $-|a| + c = 1$ 이므로

$$a + c = 5, -a + c = 1 \quad (\because a > 0)$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, c = 3$$

또한, $h(0) = 1$ 이므로 $a\sin 9b + c = 1$

$$2\sin 9b + 3 = 1, \sin 9b = -1$$

즉, $9b = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ (n 은 정수)이므로

$$b = \frac{3+4n}{18}\pi$$

그런데 $0 < b < \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$0 < \frac{3+4n}{18}\pi < \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{3}{4} < n < \frac{3}{4} \quad \therefore n = 0 \quad (\because n \text{은 정수})$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{6}$$

즉, $h(x) = 2\sin \frac{\pi}{6}(x+9) + 3$ 에서 함수 $h(x)$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \text{이므로 점 A가 점 P에서 출발하여 처음으로 다시}$$

점 P를 지날 때까지 걸리는 시간은 12초이다.

답 12초

2

$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ 로 놓으면

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$t = \frac{\sin\theta + 1}{-\cos\theta + 4}$ 로 놓으면

$$t = \frac{y+1}{-x+4}, y+1 = t(-x+4)$$

$$tx + y - 4t + 1 = 0 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

두 식 ①, ②을 모두 만족시키는 실수 θ 가 존재해야 하므로

①, ②의 그래프는 만나야 한다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 원 ①

과 직선 ②이 만나려면 원의

중심 (0, 0)과 직선 ② 사이

의 거리가 원의 반지름의 길

이인 1보다 작거나 같아야 하

므로

$$\frac{|-4t+1|}{\sqrt{t^2+1}} \leq 1$$

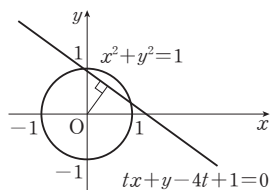
$$(-4t+1)^2 \leq t^2+1 \quad (\because \sqrt{t^2+1} > 0)$$

$$15t^2 - 8t \leq 0, t(15t-8) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq t \leq \frac{8}{15}$$

따라서 t 의 최댓값은 $\frac{8}{15}$ 이므로 구하는 최댓값은 $\frac{8}{15}$ 이다.

답 $\frac{8}{15}$



3

함수 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표는

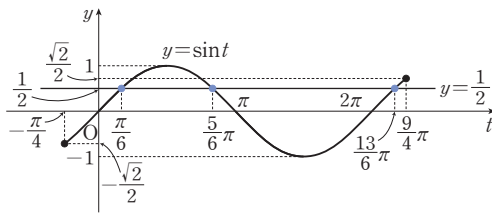
$$4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)=2 \text{에서 } \sin \frac{x-\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

이때 $\frac{x-\pi}{4}=t$ 로 놓으면 $0\leq x\leq 10\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{4}\leq \frac{x-\pi}{4}\leq \frac{9}{4}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{4}\leq t\leq \frac{9}{4}\pi$$

$$-\frac{\pi}{4}\leq t\leq \frac{9}{4}\pi \text{에서 함수 } y=\sin t \text{의 그래프와 직선 } y=\frac{1}{2}$$

은 다음 그림과 같다.



$\sin t = \frac{1}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{6}$ 또는 $t = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $t = \frac{13}{6}\pi$ 이고,

$t = \frac{x-\pi}{4}$ 이므로

$$\frac{x-\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{x-\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{x-\pi}{4} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{13}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{29}{3}\pi$$

즉, 곡선 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 와 직선 $y=2$ 의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{5}{3}\pi, 2\right), \left(\frac{13}{3}\pi, 2\right), \left(\frac{29}{3}\pi, 2\right)$$

곡선 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 위의 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거

리를 h 라 하면 함수 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 치역이

$\{y \mid -4\leq y\leq 4\}$ 이고, 점 P는 직선 $y=2$ 위의 점이 아니므로 $0 < h \leq 6$

이때 $\overline{AB}$ 의 최댓값은 $\frac{29}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = 8\pi$ 이므로

삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h \leq \frac{1}{2} \times 8\pi \times 6 = 24\pi$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 24π 이므로

$k=24$

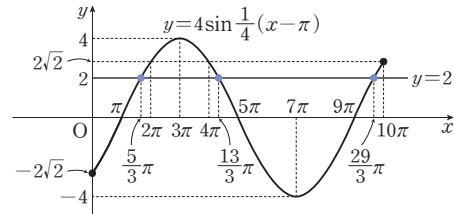
보충 설명

함수 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 최댓값, 최솟값은 각각 4, -4,

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$ 이고, 그래프는 곡선 $y=4\sin \frac{1}{4}x$ 를 x 축

의 방향으로 π 만큼 평행이동한 것이므로 $0\leq x\leq 10\pi$ 에서

함수 $y=4\sin \frac{1}{4}(x-\pi)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 다음 그림과 같다.



$\overline{AB}$ 는 두 점 A, B가 $\left(\frac{5}{3}\pi, 2\right), \left(\frac{29}{3}\pi, 2\right)$ 일 때 최대이므로

$$(\overline{AB} \text{의 최댓값}) = \frac{29}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = 8\pi$$

높이는 점 P가 점 $(7\pi, -4)$ 와 일치할 때 최대이므로

$$(h \text{의 최댓값}) = 2 - (-4) = 6$$

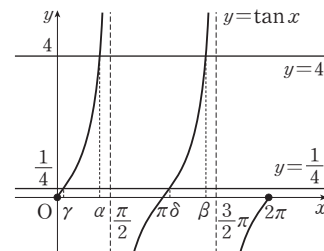
4

$0\leq x\leq 2\pi$ 에서 방정식 $\tan x=4$ 의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 의 두 교점의

x 좌표가 각각 α, β 이고, 방정식 $\tan x=\frac{1}{4}$ 의 서로 다른 두

실근이 γ, δ 이므로 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$

의 두 교점의 x 좌표가 각각 γ, δ 이다.



답 24

이때 $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$ 라 하면 $\beta = \pi + \alpha$, $\delta = \pi + \gamma$

또한, $\tan \alpha = 4$, $\tan \gamma = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \gamma} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

즉, $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma$ (n 은 정수)이므로

$$\alpha + \gamma = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

그런데 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \beta + \delta = (\pi + \alpha) + (\pi + \gamma)$$

$$= 2\pi + (\alpha + \gamma) = \frac{5}{2}\pi \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi$ 이므로

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \sin 3\pi = 0$$

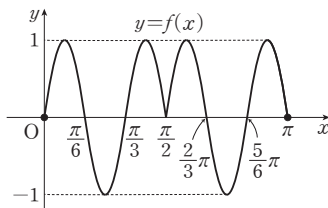
답 0

5

두 함수 $y = \sin 6x$, $y = -\sin 6x$ 의 주기는 모두

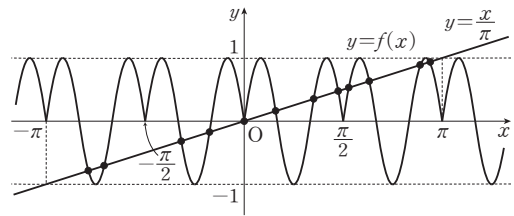
$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

이므로 조건 (나), (다)에 의하여 $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x) = \frac{x}{\pi}$ 의 실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 의 교점의 개수와 같다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이고, 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 는 두 점 $(\pi, 1)$, $(-\pi, -1)$ 을 지나므로 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{\pi}$ 의 교점의 개수는 12이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 12이다.

답 12

6

$$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \text{에서 } 0 < \cos x < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $0 < 2\cos x < 2$ 이고, 삼각형의 세 변의 길이가 1, 2, $2\cos x$ 이므로 가장 긴 변의 길이는 2이다.

삼각형이 될 조건에 의하여

(가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)

이므로

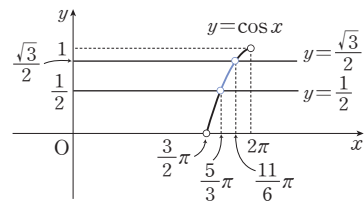
$$2 < 1 + 2\cos x \quad \therefore \cos x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

또한, 이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$$1^2 + (2\cos x)^2 < 2^2 \text{이어야 하므로 } 4\cos^2 x < 3$$

$$\cos^2 x < \frac{3}{4} \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢에서 } \frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선

$y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 위의 그림과 같으므로 구하는 x 의 값의 범위는

$$\frac{5}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{답 } \frac{5}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

07. 삼각함수의 활용

1 사인법칙과 코사인법칙

기본 + 필수연습

본문 pp.203-210

01 (1) 60° (2) 2

02 (1) $5\sqrt{2}$ (2) 1

03 (1) 5 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

04 45° 05 $\frac{24}{25}$

06 $\frac{5}{3}$

07 $4\sqrt{6}$

08 1

09 $\frac{\sqrt{15}}{6}$

10 $2+\sqrt{3}$

11 $3\sqrt{21}$

12 8

13 129

14 $\frac{1}{2}$

15 4

16 (1) 정삼각형

(2) $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

17 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형

18 $60\sqrt{3}\text{m}$ 19 30

01

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{2\sqrt{3} \sin 30^\circ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 90^\circ$ 이므로 $C=60^\circ$

(2) 사인법칙에 의하여 $2R = \frac{a}{\sin A}$ 이므로

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

답 (1) 60° (2) 2

02

(1) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$$R=5$$

사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} = 2R \sin A = 10 \sin 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

(2) 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = \sin A : \sin B : \sin C \text{이므로}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 5$$

즉, 양수 k에 대하여 $\sin A=5k$, $\sin B=4k$, $\sin C=5k$

이므로

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{5k}{5k} = 1$$

답 (1) $5\sqrt{2}$ (2) 1

03

(1) 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

$$= 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \frac{5}{9}$$

$$= 36 + 9 - 20 = 25$$

이때 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{25} = 5$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$= 49$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{49} = 7$

또한, 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{3 \sin 120^\circ}{7}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

답 (1) 5 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

04

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(3\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times (3+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 45^\circ$$

답 45°

05

사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin 150^\circ} = \frac{2}{\sin C} \text{이므로}$$

$$5 \sin C = 2 \sin 150^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin 150^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ \\ 5 \sin C &= 2 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \sin C = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

이때 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ 이므로

$$\cos^2 C = 1 - \sin^2 C = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

답 $\frac{24}{25}$

06

점 M은 변 BC의 중점이므로 양수 k에 대하여

$$\overline{BM} = \overline{CM} = k$$

삼각형 ABM에서 $\angle BMA = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \alpha} = \frac{10}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{k \sin \theta}{10}$$

삼각형 AMC에서 $\angle CMA = 180^\circ - \theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin(180^\circ - \theta)}, \quad \therefore \frac{k}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin \theta}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{k \sin \theta}{6}$$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{k \sin \theta}{6}}{\frac{k \sin \theta}{10}} = \frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

07

호 AB에 대한 원주각의 크기는 모두 같으므로

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \quad \therefore \frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \frac{8 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{6}$$

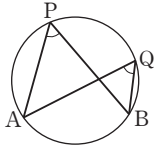
답 $4\sqrt{6}$

보충 설명

원주각의 성질 | 한 원에서 한 호에 대한

원주각의 크기는 모두 같다. 즉,

$$\angle APB = \angle AQB$$



08

$A + B + C = 180^\circ$ 이고 $A : B : C = 1 : 1 : 2$ 이므로

$$A = B = \frac{1}{1+1+2} \times 180^\circ = 45^\circ,$$

$$C = \frac{2}{1+1+2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a : b : c &= \sin 45^\circ : \sin 45^\circ : \sin 90^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : 1 = 1 : 1 : \sqrt{2} \end{aligned}$$

$a = k, b = k, c = \sqrt{2}k$ (k 는 양수)로 놓으면

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{k^2 + k^2}{(\sqrt{2}k)^2} = \frac{2k^2}{2k^2} = 1$$

답 1

09

조건 (가)에서 $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = 2 : 3 : 4$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$$

즉, 양수 k에 대하여

$$\sin A = 2k, \sin B = 3k, \sin C = 4k$$

이때 조건 (나)에서 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{9\sqrt{15}}{16}$ 이므로

$$2k + 3k + 4k = \frac{9\sqrt{15}}{16}, \quad 9k = \frac{9\sqrt{15}}{16} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

따라서 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}, \sin B = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \sin C = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin A \div \sin B \times \sin C &= \frac{\sin A \times \sin C}{\sin B} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{15}}{6}$

10

원의 중심을 O라 하면 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = \angle AOB : \angle BOC : \angle COA$$

$$= C : A : B \quad \leftarrow \text{중심각의 크기는 원주각의 크기에 정비례한다.}$$

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 1 : 2 : 3$ 이고, $A + B + C = 180^\circ$ 이므로 삼각형 ABC에서

$$A = \frac{2}{1+2+3} \times 180^\circ = 60^\circ, \quad B = \frac{3}{1+2+3} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$C = \frac{1}{1+2+3} \times 180^\circ = 30^\circ \quad (*)$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin 60^\circ : \sin 90^\circ : \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 2 : 1$$

$a = \sqrt{3}k, b = 2k, c = k$ (k 는 양수)로 놓으면

$$\frac{\widehat{BC} + \widehat{CA}}{\widehat{AB}} = \frac{a+b}{c} = \frac{\sqrt{3}k+2k}{k} = 2 + \sqrt{3}$$

답 2 + $\sqrt{3}$

다른 풀이

(*)에서 원의 반지름의 길이를 R 이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$a = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{3}R, \quad b = 2R \sin 90^\circ = 2R,$$

$$c = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$\therefore \frac{\widehat{BC} + \widehat{CA}}{\widehat{AB}} = \frac{a+b}{c} = \frac{\sqrt{3}R+2R}{R} = 2 + \sqrt{3}$$

11

$\widehat{AB} : \widehat{AC} = 3 : 1$ 이므로

$\widehat{AB} = 3k, \widehat{AC} = k$ (k 는 양수)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \widehat{BC}^2 &= k^2 + (3k)^2 - 2 \times k \times 3k \times \cos 60^\circ \\ &= k^2 + 9k^2 - 2 \times k \times 3k \times \frac{1}{2} = 7k^2 \end{aligned}$$

$\widehat{BC} > 0$ 이므로 $\widehat{BC} = \sqrt{7}k$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}k}{\sin 60^\circ} = 2 \times 7, \quad \frac{\sqrt{7}k}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 14 \quad \therefore k = \sqrt{21}$$

$$\therefore \widehat{AB} = 3k = 3\sqrt{21}$$

답 3 $\sqrt{21}$

12

$\angle BAD = \theta$ 라 하면

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle BCD + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \theta$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \widehat{BD}^2 &= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 25 + 49 + 2 \times 5 \times 7 \times \cos \theta \\ &= 74 + 70 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편, $\sin \theta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ 이므로 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49} \end{aligned}$$

이때 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\cos \theta = -\frac{1}{7}$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\widehat{BD}^2 = 74 + 70 \times \left(-\frac{1}{7}\right) = 64$$

$$\therefore \widehat{BD} = 8 \quad (\because \widehat{BD} > 0)$$

답 8

13

$\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점이 D이므로

$$\widehat{BD} : \widehat{CD} = \widehat{AB} : \widehat{AC}$$

$$= 10 : 15 = 2 : 3$$

$$\therefore \widehat{BD} = 2k, \widehat{CD} = 3k \quad (\text{단, } k \text{는 양수})$$

이때 $\angle BAD = \angle DAC = \theta$ 라 하면 삼각형 ABD에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{8^2 + 10^2 - (2k)^2}{2 \times 8 \times 10} \\ &= \frac{164 - 4k^2}{160} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또한, 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{8^2 + 15^2 - (3k)^2}{2 \times 8 \times 15} \\ &= \frac{289 - 9k^2}{240} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{164-4k^2}{160} = \frac{289-9k^2}{240}$$

$$240 \times (164-4k^2) = 160 \times (289-9k^2)$$

$$492-12k^2=578-18k^2, 6k^2=86$$

$$\text{즉, } k^2 = \frac{43}{3} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CD}^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 9 \times \frac{43}{3} = 129$$

답 129

14

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$2\sin A = 2\sqrt{3}\sin B = \sqrt{3}\sin C \text{에서}$$

$$2 \times \frac{a}{2R} = 2\sqrt{3} \times \frac{b}{2R} = \sqrt{3} \times \frac{c}{2R}$$

$$\therefore 2a = 2\sqrt{3}b = \sqrt{3}c$$

이때 $2a = 2\sqrt{3}b = \sqrt{3}c = k$ ($k > 0$)라 하면

$$a = \frac{k}{2}, b = \frac{k}{2\sqrt{3}}, c = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(\frac{k}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2}{2 \times \frac{k}{2\sqrt{3}} \times \frac{k}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\frac{k^2}{6}}{\frac{k^2}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

양수 k 에 대하여 $2\sin A = 2\sqrt{3}\sin B = \sqrt{3}\sin C = k$ 로

놓으면 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \frac{k}{2} : \frac{k}{2\sqrt{3}} : \frac{k}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 1 : 2$$

즉, 양수 l 에 대하여 $a = \sqrt{3}l$, $b = l$, $c = 2l$ 이므로 코사인법칙
에 의하여

$$\cos A = \frac{l^2 + (2l)^2 - (\sqrt{3}l)^2}{2 \times l \times 2l} = \frac{2l^2}{4l^2} = \frac{1}{2}$$

15

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 는 θ 의 값이 증가함에 따라
 y 의 값이 감소하므로 θ 가 최대일 때 $\cos \theta$ 의 값은 최소가 된
다. 즉, A 의 크기가 최대일 때 $\cos A$ 의 값은 최소가 된다.

$\overline{AC} = x$ ($x > 0$)로 놓으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에
의하여

$$\cos A = \frac{x^2 + 5^2 - 3^2}{2 \times x \times 5} = \frac{x^2 + 16}{10x} = \frac{x}{10} + \frac{8}{5x}$$

이때 $\frac{x}{10} > 0$, $\frac{8}{5x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에
의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{x}{10} + \frac{8}{5x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{10} \times \frac{8}{5x}} = \frac{4}{5} \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{10} = \frac{8}{5x} \text{ 일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 A 의 크기가 최대, 즉 $\cos A$ 의 값이 최소일 때 x 의
값은

$$\frac{x}{10} = \frac{8}{5x} \text{에서 } x^2 = 16 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

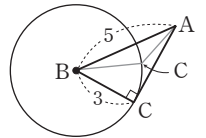
따라서 A 의 크기가 최대가 되도록 하는 $\overline{AC}$ 의 길이는 4이다.

답 4

보충 설명

삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = 3$ 이므로 점 C는 직선 AB 위에 있
지 않으면서 중심이 B이고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점
이다.

A 의 크기가 최대하려면 오른쪽 그림
과 같이 직선 AC가 이 원과 접해야
하므로



$$C = 90^\circ$$

즉, $\triangle ABC$ 는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

16

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인
법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

(1) $a \sin B = b \sin C = c \sin A$ 에서

$$a \times \frac{b}{2R} = b \times \frac{c}{2R} = c \times \frac{a}{2R}$$

$$\therefore ab = bc = ca$$

(i) $ab = bc$ 에서 $a = c$ ($\because b > 0$)

(ii) $ab = ca$ 에서 $b = c$ ($\because a > 0$)

(i), (ii)에서 $a = b = c$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{이므로}$$

$$\sin A \cos A = \sin B \cos B \text{에서}$$

$$\frac{a}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 - b^4, c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a + b)(a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2 (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a = b$ 인 이등변삼각형 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 (1) 정삼각형

(2) $a = b$ 인 이등변삼각형 또는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

17

이차함수 $y = (\sin C + \cos A)x^2 - 2x \cos B - \sin C$ 의 그래프와 직선 $y = -\cos A$ 가 오직 한 점에서 만나므로 이차방정식 $(\sin C + \cos A)x^2 - 2x \cos B - \sin C = -\cos A$, 즉 $(\sin C + \cos A)x^2 - 2x \cos B - \sin C + \cos A = 0$ 이 중근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \cos^2 B + (\sin C + \cos A)(\sin C - \cos A)$$

$$= \cos^2 B + (\sin^2 C - \cos^2 A) = 0$$

$$\therefore \cos^2 B + \sin^2 C = \cos^2 A$$

$$\text{이때 } \cos^2 B = 1 - \sin^2 B, \cos^2 A = 1 - \sin^2 A \text{이므로}$$

$$1 - \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \sin^2 A$$

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 - \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2$$

$$b^2 - c^2 = a^2 \quad \therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

18

삼각형 PAB 에서 $\angle PAB = 105^\circ$,

$\angle PBA = 45^\circ$ 이므로

$$\angle APB = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ)$$

$$= 30^\circ$$

이때 $\overline{AB} = 30\sqrt{2}$ m이므로 삼각형 PAB

에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 45^\circ} = \frac{30\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{30\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{30\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 60 \text{ (m)}$$

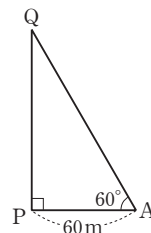
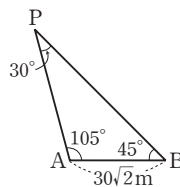
직각삼각형 APQ 에서

$\angle PAQ = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \times \tan 60^\circ$$

$$= 60 \times \sqrt{3} = 60\sqrt{3} \text{ (m)}$$

따라서 건물의 높이는 $60\sqrt{3}$ m이다.



답 $60\sqrt{3}$ m

19

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가

675π m²이므로 이 원의 반지름의

길이를 R m라 하면

$$\pi \times R^2 = 675\pi$$

$$R^2 = 675 \quad \therefore R = 15\sqrt{3}$$

즉, 삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

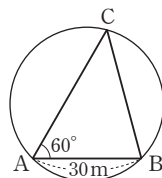
$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2 \times 15\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{BC} = 30\sqrt{3} \sin 60^\circ = 30\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 45 \text{ (m)}$$

이때 $\overline{AC} = k$ m (k 는 양수)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$45^2 = k^2 + 30^2 - 2 \times k \times 30 \times \cos 60^\circ$$

$$2025 = k^2 + 900 - 2 \times k \times 30 \times \frac{1}{2}$$



$$k^2 - 30k - 1125 = 0 \quad (*)$$

$$\therefore k = 15 + \sqrt{15^2 + 1125} \quad (\because k > 0)$$

$$= 15 + 15\sqrt{6}$$

따라서 두 지점 A와 C 사이의 거리는 $(15 + 15\sqrt{6})$ m이므로

$$a = 15, b = 15$$

$$\therefore a + b = 15 + 15 = 30$$

답 30

보충 설명

(*)에서 완전제곱식을 이용하여 k 의 값을 구할 수도 있다.

즉, $k^2 - 30k - 1125 = 0$ 에서

$$(k - 15)^2 = 1350, \quad k - 15 = \pm\sqrt{1350}$$

이때 $k > 0$ 이므로 $k = 15 + 15\sqrt{6}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.211-212

01 2	02 0	03 $8\sqrt{3}$	04 8
05 $100\sqrt{6}$	06 3	07 $\frac{\sqrt{21}}{3}$	08 $\sqrt{33}$
09 $\frac{2}{7}$	10 $\frac{11}{16}$	11 ⑤	12 $50\sqrt{3}$ m

01

$$4\cos^2 A - 5\sin A + 2 = 0 \text{에서}$$

$$4(1 - \sin^2 A) - 5\sin A + 2 = 0$$

$$4\sin^2 A + 5\sin A - 6 = 0$$

$$(4\sin A - 3)(\sin A + 2) = 0$$

이때 $-1 \leq \sin A \leq 1$ 에서 $\sin A + 2 > 0$ 이므로

$$\sin A = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin A} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{3}{\frac{3}{4}} = 2R \quad (\because \textcircled{1}) \quad \therefore R = 2$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

답 2

02

점 D는 변 BC를 $m:n$ 으로 내분하는 점이므로 양수 k 에 대하여 $\overline{BD} = mk, \overline{CD} = nk$

이때 삼각형 ABD에서 $\angle ADB = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{mk}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{mk \sin \theta}{4}$$

한편, 삼각형 ADC에서 $\angle ADC = 180^\circ - \theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{nk}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \beta = \frac{nk \sin \theta}{2}$$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{nk \sin \theta}{2}}{\frac{mk \sin \theta}{4}} = \frac{2n}{m}$$

$$\text{즉, } \frac{2n}{m} = 2 \text{이므로 } \frac{n}{m} = 1, \frac{m}{n} = 1$$

m, n 은 서로소인 두 자연수이므로 $m=1, n=1$ 이다.

$$\therefore m - n = 0$$

답 0

03

삼각형 EDC에서 $\angle EDC = 90^\circ, \angle DCE = 60^\circ$ 이므로 $\angle CED = 30^\circ$

이때 $\angle BAC = 30^\circ$ 이므로 네 점 A, B, C, E는 한 원 위에 있다. 즉, 이 원은 두 삼각형 ABC, ACE의 외접원이다.

이 원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin 30^\circ} = 2R, \quad \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R \quad \therefore R = 8$$

또한, 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

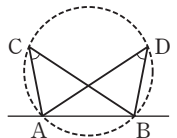
$$\therefore \overline{AE} = 2R \sin 60^\circ = 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

답 $8\sqrt{3}$

보충 설명

네 점이 한 원 위에 있을 조건 | 두 점

C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있을 때, $\angle ACB = \angle ADB$ 이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.



04

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}, \text{ 즉 } \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$\therefore \overline{AB} = 8 \sin C$$

이때 $0^\circ < C < 150^\circ$ 이므로
 $\stackrel{=180^\circ-30^\circ}{0 < \sin C \leq 1}$

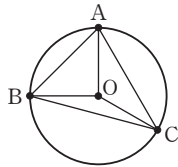
$$\therefore 0 < 8 \sin C \leq 8$$

따라서 $\sin C = 1$, 즉 $C = 90^\circ$ 일 때 변 AB의 길이의 최댓값은 8이다.

답 8

05

오른쪽 그림과 같이 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 원의 중심을 O라 하면 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로



$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = \angle AOB : \angle BOC : \angle COA$$

$$= C : A : B \leftarrow \text{중심각의 크기는 원주각의 크기에 정비례한다.}$$

$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 5 : 4 \text{ 이고, } A + B + C = 180^\circ \text{ 이므로}$$

삼각형 ABC에서

$$A = 180^\circ \times \frac{5}{3+5+4} = 75^\circ,$$

$$B = 180^\circ \times \frac{4}{3+5+4} = 60^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{3}{3+5+4} = 45^\circ$$

세 변 중에서 길이가 가장 긴 변은 a 이므로 나머지 두 변은 각각 b, c 이다.
 $\leftarrow \text{가장 큰 각의 대변이 가장 길다.}$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

이때 $R = 10$ 이므로

$$b = 2 \times 10 \times \sin 60^\circ = 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3},$$

$$c = 2 \times 10 \times \sin 45^\circ = 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore bc = 10\sqrt{3} \times 10\sqrt{2} = 100\sqrt{6}$$

답 $100\sqrt{6}$

06

오른쪽 그림과 같이 사각형

ABCD에서 선분 BD를 그으면

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{13} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

삼각형 ABD에서 $\overline{AD} = x \quad (x > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 1^2 + x^2 - 2 \times 1 \times x \times \cos 120^\circ \\ 13 &= 1 + x^2 - 2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

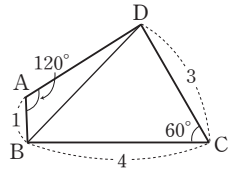
$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$

$$x^2 + x - 12 = 0, \quad (x+4)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

따라서 변 AD의 길이는 3이다.

답 3



07

$\overline{AD} = x \quad (x > 0)$ 라 하면

$$\angle ADB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (\sqrt{7})^2 &= x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \cos 120^\circ \\ 7 &= x^2 + 4 - 4x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

즉, 삼각형 ADC에서 $\overline{AD} = \overline{CD} = 1$ 이고, $\angle ADC = 60^\circ$ 이므로 $\triangle ADC$ 는 정삼각형이다.

따라서 $\angle ACD = 60^\circ$ 이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{21}}{3}$

08

한 원에서 길이가 같은 현에 대한 원주각의 크기는 같으므로
 $\overline{BC} = \overline{CD} = 3$ 에서

$$\angle BAC = \angle CAD$$

즉, $\overline{AC} = k$ ($k > 0$), $\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{6^2 + k^2 - 3^2}{2 \times 6 \times k} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

또한, 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{k^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times k \times 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\frac{6^2 + k^2 - 3^2}{2 \times 6 \times k} = \frac{k^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times k \times 4}$$

$$2(k^2 + 27) = 3(k^2 + 7)$$

$$2k^2 + 54 = 3k^2 + 21, \quad k^2 = 33$$

$$\therefore k = \sqrt{33} \quad (\because k > 0)$$

따라서 선분 AC의 길이는 $\sqrt{33}$ 이다.

답 $\sqrt{33}$

다른 풀이

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B + D = 180^\circ \quad \therefore D = 180^\circ - B$$

또한, $\overline{AC} = k$ ($k > 0$)라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} k^2 &= 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos B \\ &= 45 - 36 \cos B \quad \cdots \cdots \textcircled{A} \end{aligned}$$

또한, 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} k^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos D \\ &= 25 - 24 \cos D \\ &= 25 - 24 \cos (180^\circ - B) \\ &= 25 + 24 \cos B \quad \cdots \cdots \textcircled{B} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$45 - 36 \cos B = 25 + 24 \cos B$$

$$60 \cos B = 20$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{3}$$

이것을 ②에 대입하면

$$k^2 = 45 - 36 \times \frac{1}{3} = 33$$

$$\therefore k = \sqrt{33} \quad (\because k > 0)$$

따라서 선분 AC의 길이는 $\sqrt{33}$ 이다.

09

$$7a^2 = 5b^2 + 5c^2 \text{에서 } a^2 = \frac{5b^2 + 5c^2}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - \frac{5b^2 + 5c^2}{7}}{2bc} \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= \frac{\frac{2b^2 + 2c^2}{7}}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{7bc} \\ &= \frac{b}{7c} + \frac{c}{7b} = \frac{1}{7} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \end{aligned}$$

이때 $\frac{b}{c} > 0$, $\frac{c}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{1}{7} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \\ &\geq \frac{1}{7} \times 2 \sqrt{\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}} = \frac{1}{7} \times 2 = \frac{2}{7} \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{c} = \frac{c}{b}, \text{ 즉 } b = c \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 $\cos A$ 의 최솟값은 $\frac{2}{7}$ 이다.

답 $\frac{2}{7}$

10

삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 이므로

$$(\sin A + \sin B) : (\sin B + \sin C) : (\sin C + \sin A)$$

$$= (a + b) : (b + c) : (c + a)$$

$$= 5 : 6 : 7$$

따라서 양수 k 에 대하여

$$a + b = 5k \quad \cdots \cdots \textcircled{A},$$

$$b + c = 6k \quad \cdots \cdots \textcircled{B},$$

$$c + a = 7k \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C} \text{을 하면}$$

$$2(a + b + c) = 18k$$

$$\therefore a + b + c = 9k \quad \cdots \cdots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{A} \text{을 하면 } a = 3k, \textcircled{C} - \textcircled{D} \text{을 하면 } b = 2k,$$

$$\textcircled{C} - \textcircled{A} \text{을 하면 } c = 4k$$

이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right) &= \cos A \\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(2k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2 \times 2k \times 4k} = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{16}$

11

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$ 이므로
 $A+C=180^\circ-B$

$$\sin A = 2 \sin\left(\frac{A-B+C}{2}\right) \times \sin C \text{에서}$$

$$\begin{aligned}\sin A &= 2 \sin\left(\frac{180^\circ-2B}{2}\right) \times \sin C \\ &= 2 \sin(90^\circ-B) \times \sin C \\ &= 2 \cos B \times \sin C \quad \cdots \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑦에 ⑧, ⑨를 대입하면

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R}$$

$$a^2 = c^2 + a^2 - b^2$$

$$b^2 - c^2 = 0, (b+c)(b-c) = 0$$

$$\therefore b=c \quad (\because b>0, c>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ⑤

12

P가 강을 모두 건넌 때의 위치를 B, 그때의 Q의 위치를 C,
P가 강을 모두 건너는 데 걸리는 시간을 t 초라 하면

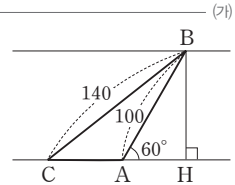
$$\overline{AB}=10t, \overline{AC}=6t$$

삼각형 BCA에서 $\angle CAB=120^\circ$, $\overline{BC}=140$ 이므로
코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}140^2 &= (10t)^2 + (6t)^2 - 2 \times 10t \times 6t \times \cos 120^\circ \\ &= 100t^2 + 36t^2 + 60t^2 \quad \cos 120^\circ = \cos(90^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= 196t^2 = (14t)^2\end{aligned}$$

$$14t = 140 \quad (\because t>0) \quad \therefore t=10$$

즉, $\overline{AB}=10t=100$ 이므로 오른
쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의
점 B에서 변 AC의 연장선 위에
내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{BH} = \overline{AB} \times \sin 60^\circ$$

$$= 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

따라서 강폭은 $50\sqrt{3}$ m이다.

(나)
 답 $50\sqrt{3}$ m

단계	채점 기준	배점
(가)	코사인법칙을 이용하여 P가 강을 모두 건너는 데 걸리는 시간을 구한 경우	50%
(나)	강폭을 구한 경우	50%

2 삼각형의 넓이

기본 + 필수연습

본문 pp.216~219

20 (1) 28 (2) $10\sqrt{2}$

21 $12\sqrt{5}$

22 (1) 8 (2) $135\sqrt{2}$

23 (1) 35 (2) 9

24 $14\sqrt{3}$

25 25π

26 $\frac{3\sqrt{14}}{4}$

27 $\frac{73\sqrt{3}}{12}$

28 2

29 $28\sqrt{3}$

20

$$(1) S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 14 \times \sin 150^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 14 \times \frac{1}{2} = 28$$

$$(2) S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (5+6+9) = 10\sqrt{2}$$

답 (1) 28 (2) $10\sqrt{2}$

다른 풀이

$$(2) \text{ 헤론의 공식을 이용하면 } s = \frac{5+6+9}{2} = 10 \text{ 이므로}$$

$$S = \sqrt{10 \times (10-5) \times (10-6) \times (10-9)} = 10\sqrt{2}$$

21

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

이므로

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$$

답 $12\sqrt{5}$

다른 풀이

$$\text{헤론의 공식을 이용하면 } s = \frac{8+9+7}{2} = 12 \text{ 이므로}$$

$$S = \sqrt{12 \times (12-8) \times (12-9) \times (12-7)} = 12\sqrt{5}$$

22

$$(1) S = \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin C = 8 \times 2 \times \sin 150^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$= 8 \times 2 \times \frac{1}{2} = 8$$

$$(2) \text{ 평행사변형 } ABCD \text{에서 } \overline{AB} = \overline{CD} = 15 \text{ 이므로}$$

$$S = \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin A$$

$$= 15 \times 18 \times \sin 45^\circ$$

$$= 15 \times 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 135\sqrt{2}$$

답 (1) 8 (2) $135\sqrt{2}$

23

$$(1) S = \frac{1}{2} \times 14 \times 10 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 10 \times \frac{1}{2} = 35$$

$$(2) S = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times 1 = 9$$

답 (1) 35 (2) 9

24

$\overline{AC} = k$ ($k > 0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$13^2 = 8^2 + k^2 - 2 \times 8 \times k \times \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$169 = 64 + k^2 - 16k \times \left(-\frac{1}{2}\right), k^2 + 8k - 105 = 0$$

$$(k+15)(k-7) = 0 \quad \therefore k = 7 \quad (\because k > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin (180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \end{aligned}$$

답 $14\sqrt{3}$

25

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면

$$30 = \frac{600}{4R}, 4R = 20 \quad \therefore R = 5$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times 5^2 = 25\pi$$

답 25π

26

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{9^2 + 10^2 - 13^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{15}$$

이므로

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{224}{225}$$

$$\therefore \sin C = \frac{4\sqrt{14}}{15} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = 12\sqrt{14}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 이라 하면

$$12\sqrt{14} = \frac{1}{2}r(9+10+13)$$

$$16r = 12\sqrt{14}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{14}}{4}$$

답 $\frac{3\sqrt{14}}{4}$

27

$\overline{AC}$ 를 그으면 삼각형 ADC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ \\ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\overline{AC} = x$ ($x > 0$)라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ \\ &= 25 - 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 37 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt{37} \quad (\because x > 0)$$

또한, $\overline{AB} = \overline{BC} = y$ ($y > 0$)라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{37})^2 = y^2 + y^2 - 2 \times y \times y \times \cos 120^\circ$$

$$37 = 2y^2 - 2y^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$3y^2 = 37 \quad \therefore y^2 = \frac{37}{3}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{111}}{3} \quad (\because y > 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times y \times y \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{111}}{3} \times \frac{\sqrt{111}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{37\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ADC + \triangle ABC$$

$$= 3\sqrt{3} + \frac{37\sqrt{3}}{12} = \frac{73\sqrt{3}}{12}$$

답 $\frac{73\sqrt{3}}{12}$

28

$$p+q=14 \text{ 이므로 } q=14-p$$

이때 사각형 ABCD의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}pq \sin 150^\circ = 12$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{2}p(14-p) \times \frac{1}{2} = 12, \quad 14p - p^2 = 48$$

$$p^2 - 14p + 48 = 0, \quad (p-6)(p-8) = 0$$

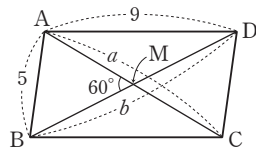
$$\therefore p=6, q=8 \text{ 또는 } p=8, q=6$$

따라서 $|p-q|$ 의 값은 2이다.

답 2

29

다음 그림과 같이 $\overline{AC} = a$ ($a > 0$), $\overline{BD} = b$ ($b > 0$)라 하고, 평행사변형의 두 대각선 AC와 BD의 교점을 M이라 하자.



$$\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{a}{2}, \quad \overline{BM} = \overline{DM} = \frac{b}{2} \quad \leftarrow \text{평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.}$$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$5^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} \times \cos 60^\circ$$

$$25 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab = 100 \quad \cdots \text{㉠}$$

또한, $\angle AMD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로 삼각형 AMD에서 코사인법칙에 의하여

$$9^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} \times \cos 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$81 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab = 324 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$2ab = 224 \quad \therefore ab = 112$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 112 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28\sqrt{3}$$

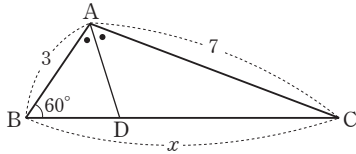
답 $28\sqrt{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.220-221

- 13 $\frac{21\sqrt{3}}{5}$ 14 12 15 $4\sqrt{3}+4\sqrt{6}$
 16 153 17 23 18 $4\sqrt{2}$ 19 ③
 20 16 21 $(14\sqrt{3}+12\sqrt{14})\text{m}^2$ 22 $16\sqrt{5}$
 23 27 24 $\frac{4}{15}$

13



$\overline{BC}=x$ ($x>0$)라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 60^\circ = \frac{3^2 + x^2 - 7^2}{2 \times 3 \times x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2 - 40}{6x}, \quad x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x+5)(x-8)=0 \quad \therefore x=8 \quad (\because x>0)$$

또한, $\angle BAD = \angle CAD$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

즉, $\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 7$ 이고 $\overline{BC}=8$ 이므로

$$\overline{CD} = \frac{7}{3+7} \times 8 = \frac{28}{5}$$

한편, 삼각형 ABC에서 $\angle ACB = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin \theta}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3 \sin 60^\circ}{7} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CD} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{28}{5} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{21\sqrt{3}}{5}$$

답 $\frac{21\sqrt{3}}{5}$

다른 풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{BC}=8$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

또한, $\angle BAD = \angle CAD$ 에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

즉, $\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 7$ 이므로 $\triangle ABD : \triangle ACD = 3 : 7$

$$\therefore \triangle ACD = \frac{7}{3+7} \times \triangle ABC = \frac{7}{10} \times 6\sqrt{3} = \frac{21\sqrt{3}}{5}$$

14

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=7k$, $\overline{BC}=8k$, $\overline{CA}=9k$ ($k>0$)라 하자.

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(8k)^2 + (9k)^2 - (7k)^2}{2 \times 8k \times 9k} = \frac{96k^2}{144k^2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because 0^\circ < C < 180^\circ)$$

이때 삼각형의 넓이가 $3\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 8k \times 9k \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$$

$$k^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad (\because k>0)$$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 각각 $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$ 이므로 이 삼각형의 둘레의 길이는

$$\frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} = 12$$

답 12

다른 풀이

삼각형의 세 변의 길이를 각각 $7k$, $8k$, $9k$ ($k>0$)라 하자.

헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{7k+8k+9k}{2} = 12k$ 이므로

삼각형의 넓이는

$$\sqrt{12k(12k-7k)(12k-8k)(12k-9k)}$$

$$= \sqrt{12k \times 5k \times 4k \times 3k}$$

$$= 12\sqrt{5}k^2$$

즉, $12\sqrt{5}k^2 = 3\sqrt{5}$ 이므로

$$k^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad (\because k>0)$$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 각각 $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$ 이므로 이 삼각형의 둘레의 길이는

$$\frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} = 12$$

15

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2 \times 4$$

$$\therefore \overline{BC} = 8 \sin 60^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

한편, 삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{CA} \times \overline{AB} \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{CA} \times \overline{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{CA} \times \overline{AB} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{3})^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \times \overline{CA} \times \overline{AB} \times \cos 60^\circ$$

$$48 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \times \overline{CA} \times \overline{AB} \times \frac{1}{2}$$

$$= \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{CA} \times \overline{AB}$$

$$= (\overline{CA} + \overline{AB})^2 - 3 \times \overline{CA} \times \overline{AB}$$

$$= (\overline{CA} + \overline{AB})^2 - 3 \times 16 \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= (\overline{CA} + \overline{AB})^2 - 48$$

즉, $(\overline{CA} + \overline{AB})^2 = 96$ 이므로

$$\overline{CA} + \overline{AB} = 4\sqrt{6} \quad (\because \overline{CA} + \overline{AB} > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$

16

삼각형 ABC의 넓이가 $18\sqrt{2}$ 이므로 $\angle ACB = \theta$ 라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin \theta = 18\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (\because 90^\circ < \theta < 180^\circ)$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = -\frac{1}{3}$$

이때 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \cos \theta$$

$$= 36 + 81 - 108 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 153$$

따라서 구하는 정사각형의 넓이는 153이다.

답 153

17

삼각형 ABC에서

$$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RA} = 3 : 1 \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = \frac{3}{4} \overline{AB}, \quad \overline{BQ} = \frac{3}{4} \overline{BC}, \quad \overline{CR} = \frac{3}{4} \overline{CA}$$

$$\overline{PB} = \frac{1}{4} \overline{AB}, \quad \overline{QC} = \frac{1}{4} \overline{BC}, \quad \overline{RA} = \frac{1}{4} \overline{CA}$$

이때 삼각형 APR의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{RA} \times \sin A &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \overline{AB} \times \frac{1}{4} \overline{CA} \times \sin A \\ &= \frac{3}{16} \times \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \sin A \\ &= \frac{3}{16} \triangle ABC \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\triangle BQP = \frac{3}{16} \triangle ABC, \quad \triangle CRQ = \frac{3}{16} \triangle ABC$$

이므로 $\triangle ABC = \triangle PQR + 3 \times \frac{3}{16} \triangle ABC$ 에서

$$\triangle PQR = \frac{7}{16} \triangle ABC$$

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 PQR의 넓이의 비는

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle PQR &= \triangle ABC : \frac{7}{16} \triangle ABC \\ &= 16 : 7 \end{aligned}$$

즉, $m = 16$, $n = 7$ 이므로

$$m + n = 16 + 7 = 23$$

답 23

18

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

삼각형 APQ의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$\overline{AP} = a$ ($a > 0$), $\overline{AQ} = b$ ($b > 0$)라 하면 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times a \times b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ab = 8\sqrt{3} \quad \therefore ab = 32 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$= a^2 + b^2 - 2 \times 32 \times \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{a})$$

$$= a^2 + b^2 - 32$$

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = a^2 + b^2 - 32$$

$$\geq 2\sqrt{a^2 b^2} - 32 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$= 2ab - 32 = 32 \quad (\because \textcircled{a})$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

답 $4\sqrt{2}$

19

ㄱ. $R=3$ 이면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = 2 \times 3 \quad \therefore a = 6 \sin A \quad (\text{참})$$

ㄴ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2 + 5^2 - a^2}{2 \times 3 \times 5} = \frac{34 - a^2}{30}$$

$$2 < a \leq \sqrt{19} \text{이므로 } \frac{1}{2} \leq \frac{34 - a^2}{30} < 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \cos A < 1$$

이때 A는 삼각형의 한 내각이므로 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이고,

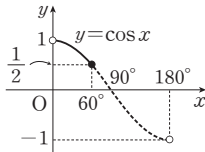
$0^\circ < x < 180^\circ$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$$0^\circ < A \leq 60^\circ$$

삼각형에서 내각의 크기가 클수록 그 대변의 길이가 길다.
따라서 A의 최댓값은 60° 이다. (참) 즉, $a = \sqrt{19}$ 일 때 A의 크기이다.



ㄷ. $a=7$ 일 때, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

다른 풀이

ㄷ. 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABC의 세 변의 길이는 각각 3, 5, 7이므로

$$s = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{\frac{15}{2} \times \left(\frac{15}{2} - 3\right) \times \left(\frac{15}{2} - 5\right) \times \left(\frac{15}{2} - 7\right)} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

20

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} ac \sin 30^\circ = 16$$

$$\frac{1}{2} ac \times \frac{1}{2} = 16$$

$$\therefore ac = 64 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos 30^\circ$$

$$= c^2 + a^2 - 2 \times 64 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= c^2 + a^2 - 64\sqrt{3}$$

$a^2 > 0, c^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$b^2 = c^2 + a^2 - 64\sqrt{3}$$

$$\geq 2\sqrt{a^2 c^2} - 64\sqrt{3} \quad (\text{단, 등호는 } a=c \text{ 일 때 성립})$$

$$= 2ac - 64\sqrt{3}$$

$$= 128 - 64\sqrt{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $a=c$ 일 때 b가 최솟이므로

$\because b > 0$ 이므로 b가 최솟일 때 b도 최솟이다.
 $ac = 64$ 에서 $a=c=8$ ($\because a > 0, c > 0$)

$$\therefore a+c = 8+8 = 16$$

답 16

21

$\overline{BD}$ 를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos 120^\circ$$

$$= 64 + 49 - 112 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 169$$

$$\therefore \overline{BD} = 13(\text{m}) \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

$\angle BCD = \theta$ 라 하면 삼각형 BCD에서
코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{9^2 + 10^2 - 13^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{15} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$$

$\therefore \square ABCD$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \frac{\sin 120^\circ}{2} + \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \sin \theta$$

$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$

$$= 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 45 \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = 14\sqrt{3} + 12\sqrt{14} \text{ (m}^2\text{)}$$

따라서 울타리 안쪽의 넓이는 $(14\sqrt{3} + 12\sqrt{14}) \text{ m}^2$ 이다.

답 $(14\sqrt{3} + 12\sqrt{14}) \text{ m}^2$

다른 풀이

(*)에서 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABD와 삼각형 BCD
의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABD의 세 변의 길이는 각각 7, 8, 13이므로

$$s = \frac{7+8+13}{2} = 14 \text{ 라 하면}$$

$$\triangle ABD = \sqrt{14 \times (14-7) \times (14-8) \times (14-13)} = 14\sqrt{3}$$

또한, 삼각형 BCD의 세 변의 길이는 각각 9, 10, 13이므로

$$s' = \frac{9+10+13}{2} = 16 \text{ 이라 하면}$$

$$\triangle BCD = \sqrt{16 \times (16-9) \times (16-10) \times (16-13)} = 12\sqrt{14}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= 14\sqrt{3} + 12\sqrt{14} \text{ (m}^2\text{)}$$

22

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\overline{BD}$ 를 그으면

$\angle ADB = \angle DBC = \theta$ ($\because$ 엇각)

$\overline{BD} = x$ ($x > 0$)라 하면

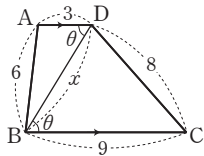
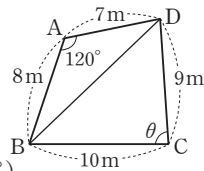
삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서
코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{x^2 + 3^2 - 6^2}{2 \times x \times 3} = \frac{x^2 + 9 - 8^2}{2 \times x \times 9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{x^2 - 27}{6x} = \frac{x^2 + 17}{18x}$$

$$x^2 = 49 \quad \therefore x = 7 \quad (\because x > 0)$$

(*)



이것을 ①에 대입하면

$$\cos \theta = \frac{7^2 + 3^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{21} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{21}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{21}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 7 \times \frac{8\sqrt{5}}{21} + \frac{1}{2} \times 7 \times 9 \times \frac{8\sqrt{5}}{21}$$

$$= 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$$

답 $16\sqrt{5}$

다른 풀이 1

(*)에서 헤론의 공식을 이용하여 삼각형 ABD와 삼각형 BCD
의 넓이를 구할 수 있다.

삼각형 ABD의 세 변의 길이는 각각 3, 6, 7이므로

$$s = \frac{3+6+7}{2} = 8 \text{ 이라 하면}$$

$$\triangle ABD = \sqrt{8 \times (8-3) \times (8-6) \times (8-7)} = 4\sqrt{5}$$

또한, 삼각형 BCD의 세 변의 길이는 각각 7, 8, 9이므로

$$s' = \frac{7+8+9}{2} = 12 \text{ 라 하면}$$

$$\triangle BCD = \sqrt{12 \times (12-7) \times (12-8) \times (12-9)} = 12\sqrt{5}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 16\sqrt{5}$$

다른 풀이 2

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D

에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 각

각 H, H'이라 하고 $\overline{BH} = a$ 라

하면 $\overline{HH'} = \overline{AD} = 3$,

$$\overline{H'C} = \overline{BC} - \overline{BH} - \overline{HH'}$$

$$= 9 - a - 3 = 6 - a$$

이때 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AH} = \overline{DH'}$

$\triangle ABH$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH}^2 = 6^2 - a^2$$

$\triangle DH'C$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

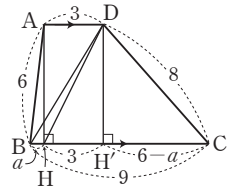
$$\overline{DH'}^2 = 8^2 - (6-a)^2$$

$$\text{즉, } 6^2 - a^2 = 8^2 - (6-a)^2 \text{ 에서}$$

$$\overline{AH} = \overline{DH'} \text{ 이면 } \overline{AH}^2 = \overline{DH'}^2$$

$$12a = 8 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

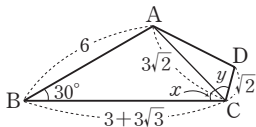
$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{320}{9}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$$



$$\begin{aligned}\therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AH} \\ &= \frac{1}{2} \times (3+9) \times \frac{8\sqrt{5}}{3} \quad \text{사다리꼴의 넓이 공식} \\ &= 16\sqrt{5}\end{aligned}$$

23

$\overline{AC}$ 를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{AC}^2 = 6^2 + (3+3\sqrt{3})^2 - 2 \times 6 \times (3+3\sqrt{3}) \times \cos 30^\circ$
 $= 36 + 36 + 18\sqrt{3} - 2 \times 6 \times (3+3\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 18$
 $\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{2} \quad (\because \overline{AC} > 0)$



$\angle ACB = x$, $\angle ACD = y$ 라 하면 삼각형 ABC에서
 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin x}$$

$$\therefore \sin x = \frac{6 \sin 30^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < x < 105^\circ$ 이므로 $x = 45^\circ$

즉, $x + y = 105^\circ$ 에서 $y = 60^\circ$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times (3+3\sqrt{3}) \times \sin 30^\circ$$

$$= (9+9\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sin 60^\circ$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \left(\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} + 6\sqrt{3}$$

따라서 $p = \frac{9}{2}$, $q = 6$ 이므로

$$pq = \frac{9}{2} \times 6 = 27$$

답 27

24

$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에
 의하여

$$(\sqrt{5})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$5 = a^2 + b^2 - 2ab \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 - ab = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABD에서 $A = 120^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$3^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ \quad \text{평행사변형의 이웃한 두 내각의 크기의 합은 } 180^\circ \text{이므로 } A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$9 = a^2 + b^2 - 2ab \times \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$2ab = 4 \quad \therefore ab = 2$$

평행사변형 ABCD의 넓이에서

$$ab \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 3 \times \sin \theta$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \sin \theta \quad (\because ab = 2) \quad \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

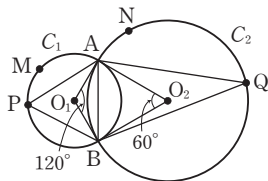
답 $\frac{4}{15}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.222

1 3 2 $\frac{20\sqrt{31}}{31}$ 3 ③ 4 109

1



두 원 C_1 , C_2 의 반지름의 길이를 각각 R_1 , R_2 라 하자.

원 C_1 에서 호 AB에 대한 중심각은 $\angle AO_1B = 120^\circ$ 이므로
 $\widehat{AMB}$ 위에 한 점 P를 잡으면

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AO_1B = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

원 C_1 에 내접하는 삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = 2R_1$$

$$\therefore R_1 = \frac{\overline{AB}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}$$

또한, 원 C_2 에서 호 AB에 대한 중심각은 $\angle AO_2B = 60^\circ$ 이

므로 $\widehat{ANB}$ 위에 한 점 Q를 잡으면

$$\angle AQB = \frac{1}{2} \angle AO_2B = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

원 C_2 에 내접하는 삼각형 AQB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = 2R_2$$

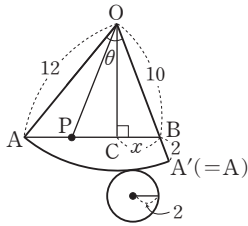
$$\therefore R_2 = \frac{\overline{AB}}{2\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{2 \times \frac{1}{2}} = \overline{AB}$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\left(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3$$

답 3

2

밑면의 반지름의 길이가 2, 모선의 길이가 12인 원뿔의 전개도는 다음 그림과 같다.



점 C는 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발과 같으므로 구하는 거리는 선분 BC의 길이이다.

$\angle AOA' = \theta$ 라 하면 옆면인 부채꼴 OAA'의 호의 길이와 밑면인 원의 둘레의 길이가 같으므로

$$12\theta = 2\pi \times 2 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

이때 $\overline{OB} = \overline{OA'} - \overline{A'B} = 12 - 2 = 10$ 이므로 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 12^2 + 10^2 - 2 \times 12 \times 10 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= 244 - 240 \times \frac{1}{2} = 124 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{31} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

이때 $\overline{BC} = x$ ($x > 0$)라 하면

직각삼각형 OAC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{OC}^2 &= \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2 = 12^2 - (2\sqrt{31} - x)^2 \\ &= -x^2 + 4\sqrt{31}x + 20 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

직각삼각형 OCB에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BC}^2 = 10^2 - x^2 = 100 - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } -x^2 + 4\sqrt{31}x + 20 = 100 - x^2$$

$$\therefore x = \frac{80}{4\sqrt{31}} = \frac{20\sqrt{31}}{31}$$

답 $\frac{20\sqrt{31}}{31}$

3

ㄱ. 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3x \times \frac{4}{x} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3x \times \frac{4}{x} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 x 의 값에 관계없이 항상 $3\sqrt{3}$ 으로 일정하다. (참)

ㄴ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (3x)^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \times 3x \times \frac{4}{x} \times \cos 60^\circ \\ &= 9x^2 + \frac{16}{x^2} - 24 \times \frac{1}{2} \\ &= 9x^2 + \frac{16}{x^2} - 12 \end{aligned}$$

이때 $9x^2 > 0$, $\frac{16}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의

관계에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 9x^2 + \frac{16}{x^2} - 12 \\ &\geq 2\sqrt{9x^2 \times \frac{16}{x^2}} - 12 \\ &= 24 - 12 = 12 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } 9x^2 = \frac{16}{x^2}, \text{ 즉 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 선분 AC의 길이의 최솟값은 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때

$\sqrt{12}$, 즉 $2\sqrt{3}$ 이다. (거짓)

ㄷ. $\overline{AB} + \overline{BC} = 3x + \frac{4}{x}$ 이고, $3x > 0$, $\frac{4}{x} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} &= 3x + \frac{4}{x} \\ &\geq 2\sqrt{3x \times \frac{4}{x}} = 4\sqrt{3} \\ \left(\text{단, 등호는 } 3x &= \frac{4}{x}, \text{ 즉 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 일 때 성립} \right) \\ \therefore \overline{AB} + \overline{BC} &\geq 4\sqrt{3} \\ &\quad (\text{단, 등호는 } \overline{AB} = \overline{BC} = 2\sqrt{3} \text{ 일 때 성립})\end{aligned}$$

또한, ㄴ에서 선분 AC의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

즉, 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소이려면

$\overline{AB} + \overline{BC}$, $\overline{CA}$ 가 모두 최솟값을 가질 때이므로 삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형일 때이다.

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$$3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

4

오른쪽 그림과 같이 선분 AC가 원 O와 만나는 점을 D라 하고, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle OAB = \theta$ 라 하면 원의 접선과 현이 이루는 각에 의하여

$$\angle DBC = \theta \text{이고, } \sin(\angle OAB) = \frac{1}{4} \text{에서 } \sin \theta = \frac{1}{4}$$

한편, 지름에 대한 원주각은 90° 이므로 $\angle ABD = 90^\circ$

즉, 직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \overline{AD} \sin \theta = 28 \times \frac{1}{4} = 7$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{28^2 - 7^2} = 7\sqrt{15}$$

또한, 직각삼각형 BHD에서

$$\overline{DH} = \overline{BD} \sin \theta = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

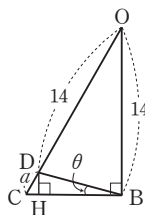
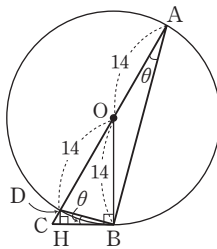
두 직각삼각형 CHD와 CBO는 닮음이고

닮음비가 $\frac{7}{4} : 14$, 즉 $1 : 8$ 이므로

$\overline{CD} = a$ ($a > 0$)라 하면

$$a : (a + 14) = 1 : 8$$

$$8a = a + 14, 7a = 14 \quad \therefore a = 2$$



$$\text{즉, } \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = 28 + 2 = 30$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AB} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 7\sqrt{15} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{105}{4} \sqrt{15}\end{aligned}$$

따라서 $p = 4$, $q = 105$ 이므로 $p + q = 4 + 105 = 109$

답 109

다른 풀이

(*)에서 $\angle DBC = \angle OAB = \theta$, $\angle BDC = 90^\circ + \theta$

$\overline{CD} = a$ ($a > 0$), $\overline{BC} = b$ ($b > 0$)라 하면 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \theta} &= \frac{b}{\sin(90^\circ + \theta)} \cdot \frac{1}{4} b = \frac{\sqrt{15}}{4} a \quad \left[\begin{array}{l} \sin \theta = \frac{1}{4}, 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{이므로} \\ \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{array} \right] \\ \therefore b &= \sqrt{15} a \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 원의 접선과 할선 사이의 비례 관계에 의하여

$$\overline{CD} \times \overline{CA} = \overline{CB}^2 \text{이므로}$$

$$a(a + 28) = b^2$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$a(a + 28) = 15a^2, a + 28 = 15a \quad (\because a > 0)$$

$$14a = 28 \quad \therefore a = 2$$

즉, 직각삼각형 ABD에서

$$\overline{BD} = \overline{AD} \sin \theta = 28 \times \frac{1}{4} = 7$$

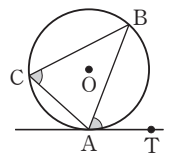
$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{28^2 - 7^2} = 7\sqrt{15}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AB} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times (28 + 2) \times 7\sqrt{15} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{105}{4} \sqrt{15}\end{aligned}$$

보충 설명

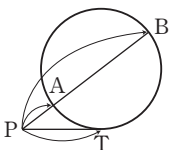
1. 원의 접선과 현이 이루는 각 | 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

$$\angle BAT = \angle ACB$$



2. 원의 접선과 할선 사이의 비례 관계 | 원 위의 한 점 T를 지나는 접선과 현 AB의 연장선이 한 점 P에서 만날 때,

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$$



III. 수열

08. 등차수열과 등비수열

1 등차수열

기본 + 필수연습

본문 pp.229~238

01 (1) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ (2) $a_n = 10^n - 1$

02 (1) $a_n = 8n - 26$ (2) $a_n = -7n + 35$

03 (1) 2 (2) 3 04 18

05 (1) 260 (2) 800

06 (1) $a_n = 2n - 6$ (2) $a_1 = 3, a_n = 4n - 7 (n \geq 2)$

07 (1) $a_n = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$ (2) 32 (3) 6 08 24

09 117 10 30 11 18 12 7

13 -35 14 160 15 14

16 (1) 220 (2) 1270 17 324 18 16

19 1200 20 595 21 714 22 6

23 -30 24 -54 25 -6 26 5

27 8

01

(1) $a_1 = -3$

$$a_2 = 1 = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a_4 = \frac{1}{9} = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

⋮

따라서 $a_n = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ 이다.

(2) $a_1 = 9 = 10 - 1$

$$a_2 = 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$$

$$a_3 = 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1$$

$$a_4 = 9999 = 10000 - 1 = 10^4 - 1$$

⋮

따라서 $a_n = 10^n - 1$ 이다.

답 (1) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ (2) $a_n = 10^n - 1$

02

(1) $a_n = -18 + (n-1) \times 8 = 8n - 26$

(2) 첫째항이 28, 공차가 -7인 등차수열이므로 일반항은

$$a_n = 28 + (n-1) \times (-7) = -7n + 35$$

답 (1) $a_n = 8n - 26$ (2) $a_n = -7n + 35$

03

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

(1) $a_5 = a + 4d = 5$ ㉠

$$a_{15} = a + 14d = 25$$
㉡

㉡ - ㉠을 하면 $10d = 20$

$\therefore d = 2$ ← ㉠에서 $a + 4 \times 2 = 5$, 즉 $a = -3$ 이다.

(2) $a_8 = a + 7d = 23$ ㉢

$$a_3 + a_6 = (a + 2d) + (a + 5d)$$

$$= 2a + 7d = 25$$
㉣

㉢ - ㉣을 하면 $a = 2$

$a = 2$ 를 ㉢에 대입하면 $2 + 7d = 23$ 에서

$$7d = 21 \quad \therefore d = 3$$

답 (1) 2 (2) 3

04

a 는 3과 b 의 등차중항이므로

$$a = \frac{3+b}{2}$$
에서 $2a = 3 + b$ ㉠

또한, b 는 a 와 15의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+15}{2}$$
에서 $2b = a + 15$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 7, b = 11$$

$$\therefore a + b = 7 + 11 = 18$$

답 18

05

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(1) S_{13} = \frac{13 \times (2+38)}{2} = 260$$

$$(2) S_{20} = \frac{20 \times \{2 \times 2 + (20-1) \times 4\}}{2} = 800$$

답 (1) 260 (2) 800

06

(1) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 5 \times 1 = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 5n - \{(n-1)^2 - 5(n-1)\} \\ &= 2n - 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\textcircled{㉠}$ 은 $\textcircled{㉡}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 6$$

(2) (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 5n + 6 - \{2(n-1)^2 - 5(n-1) + 6\} \\ &= 4n - 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\textcircled{㉢}$ 은 $\textcircled{㉣}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 3, a_n = 4n - 7 \quad (n \geq 2)$$

답 (1) $a_n = 2n - 6$

(2) $a_1 = 3, a_n = 4n - 7 \quad (n \geq 2)$

07

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

(1) $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ 에서

$$\begin{aligned} a + (a+2d) + (a+4d) &= 21 \\ \therefore 3a + 6d &= 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$a_5 + a_7 + a_9 = 51$ 에서

$$\begin{aligned} (a+4d) + (a+6d) + (a+8d) &= 51 \\ \therefore 3a + 18d &= 51 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, d = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$$

(2) (1)에서 $a_n = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$ 이므로

$$a_{13} = \frac{5}{2} \times 13 - \frac{1}{2} = 32$$

(3) (1)에서 $a_k = \frac{5}{2}k - \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{5}{2}k - \frac{1}{2} = \frac{29}{2}, \frac{5}{2}k = 15 \quad \therefore k = 6$$

답 (1) $a_n = \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}$ (2) 32 (3) 6

08

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$a_3 + a_5 = 36$ 에서

$$\begin{aligned} (a+2d) + (a+4d) &= 36, 2a+6d = 36 \\ \therefore a+3d &= 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

또한, $a_2 a_4 = 180$ 에서

$$(a+d)(a+3d) = 180 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $(a+d) \times 18 = 180$ 이므로

$$a+d = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 6, d = 4$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times 4 = 4n + 2$$

$a_n < 100$, 즉 $4n + 2 < 100$ 에서

$$n < \frac{98}{4} = 24.5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 24이다.

답 24

09

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d \neq 0$)라 하자.

$a_6 = -3$ 에서

$$a + 5d = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$|a_4| = |a_{10}| \text{에서 } |a+3d| = |a+9d|$$

$$\therefore a+3d = \pm(a+9d)$$

그런데 $a+3d = a+9d$ 이면 $6d=0$, 즉 $d=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\text{즉, } a+3d = -(a+9d) \text{이므로 } 2a+12d=0$$

$$\therefore a+6d=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-18$, $d=3$ 이므로

$$a_n = -18 + (n-1) \times 3 = 3n-21$$

$$a_n = 330 \text{에서}$$

$$3n-21=330, \quad 3n=351$$

$$\therefore n=117$$

답 117

다른 풀이

$$|a_4| = |a_{10}|, \text{ 즉 } a_4 = -a_{10} \text{에서 } a_4 + a_{10} = 0$$

이때 a_7 은 a_4 와 a_{10} 의 등차중항이므로

$$2a_7 = a_4 + a_{10}$$

$$\text{즉, } 2a_7 = 0 \text{이므로 } a_7 = 0$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_7 = a_6 + d \text{이고 } a_6 = -3 \text{이므로}$$

$$-3 + d = 0 \quad \therefore d = 3$$

$$\text{또한, } a_6 = a_1 + 5d \text{이므로}$$

$$a_1 + 5 \times 3 = -3 \quad \therefore a_1 = -18$$

$$\text{따라서 } a_n = -18 + (n-1) \times 3 = 3n-21 \text{이므로}$$

$$a_n = 330 \text{에서 } 3n-21=330, \quad 3n=351$$

$$\therefore n=117$$

10

세 양수 $3a-2$, $2a+4$, $2a^2-5$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2a+4$ 는 $3a-2$ 와 $2a^2-5$ 의 등차중항이다.

$$\text{즉, } 2(2a+4) = (3a-2) + (2a^2-5) \text{에서}$$

$$4a+8 = 2a^2+3a-7$$

$$2a^2-a-15=0, \quad (2a+5)(a-3)=0$$

$$\therefore a = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } a=3$$

$$(i) a = -\frac{5}{2} \text{일 때, 세 수는 } -\frac{19}{2}, -1, \frac{15}{2}$$

그런데 세 수는 모두 양수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) a=3 \text{일 때, 세 수는 } 7, 10, 13$$

세 수는 모두 양수이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 구하는 세 수는 7, 10, 13이므로 그 합은 30이다.

답 30

11

이차방정식의 두 근 α , β 에 대하여 α , β , $\alpha+\beta$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 β 는 α 와 $\alpha+\beta$ 의 등차중항이다.

$$\text{즉, } 2\beta = \alpha + (\alpha + \beta) \text{에서 } 2\beta = 2\alpha + \beta$$

$$\therefore \beta = 2\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\alpha\beta = 72 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉠을 ㉢에 대입하면

$$2\alpha^2 = 72, \quad \alpha^2 = 36$$

$$\therefore \alpha = -6 \text{ 또는 } \alpha = 6$$

$$\text{즉, } \alpha = -6, \beta = -12 \text{ 또는 } \alpha = 6, \beta = 12 \text{이므로 } \textcircled{B} \text{에서}$$

$$k = -6 + (-12) = -18 \text{ 또는 } k = 6 + 12 = 18$$

따라서 양수 k 의 값은 18이다.

답 18

12

등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면

합이 15이고 곱이 105이므로

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 105 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } 3a = 15 \quad \therefore a = 5$$

이것을 ㉢에 대입하면

$$(5-d) \times 5 \times (5+d) = 105$$

$$5(25-d^2) = 105, \quad 25-d^2 = 21, \quad d^2 = 4$$

$$\therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 2$$

$d = -2$ 이면 세 수는 차례대로 7, 5, 3이고, $d = 2$ 이면 세 수는 차례대로 3, 5, 7이다.

따라서 세 수 중 가장 큰 수는 7이다.

답 7

13

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 25, 제22항이 -59이므로

$$25 + (22-1) \times d = -59$$

$$25 + 21d = -59, 21d = -84$$

$$\therefore d = -4$$

이때 a_{15} 는 주어진 등차수열의 제16항이므로

$$a_{15} = 25 + (16-1) \times (-4) = -35$$

답 -35

14

13개의 수 $-4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}, 84$ 를 이 순서대로 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{13}$ 이라 하자.

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$b_1 = -4 \text{이고 } b_{13} = 84 \text{이므로}$$

$$84 = -4 + 12d, 12d = 88 \quad \therefore d = \frac{22}{3}$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_9 + a_{11}$$

$$= b_2 + b_4 + b_{10} + b_{12}$$

$$= (b_1 + d) + (b_1 + 3d) + (b_1 + 9d) + (b_1 + 11d)$$

$$= 4b_1 + 24d$$

$$= 4 \times (-4) + 24 \times \frac{22}{3}$$

$$= 160$$

답 160

다른 풀이

13개의 수 $-4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}, 84$ 를 이 순서대로 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{13}$ 이라 하자.

★수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 등차중항의 성질에 의하여

$$b_1 + b_{13} = b_2 + b_{12} = \dots = b_6 + b_8 = 2b_7$$

$$\text{이때 } b_1 + b_{13} = -4 + 84 = 80 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_{11} = b_2 + b_{12} = 80, a_3 + a_9 = b_4 + b_{10} = 80$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_9 + a_{11} = (a_1 + a_{11}) + (a_3 + a_9)$$

$$= 80 + 80 = 160$$

15

주어진 등차수열의 공차를 d (d 는 1이 아닌 자연수)라 하면 첫째항이 1이고 제 $(m+2)$ 항이 46이므로

$$1 + (m+1) \times d = 46$$

$$\therefore (m+1)d = 45 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

이때 m 이 자연수이므로 $m+1$ 과 d 는 모두 1이 아닌 자연수이다. 즉, $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 $m+1, d$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

$m+1$	3	5	9	15
d	15	9	5	3

따라서 조건을 만족시키는 m 의 최댓값은 $m+1=15$ 에서 $m=14$

답 14

16

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

(1) $a=3, d=7$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 7 = 7n - 4$$

$$\text{제 } k \text{항이 } 52 \text{이므로 } a_k = 7k - 4 = 52 \text{에서}$$

$$7k = 56 \quad \therefore k = 8$$

따라서 첫째항부터 제 8항까지의 합은

$$\frac{8 \times (3+52)}{2} = 220$$

(2) $a_2 + a_4 = 22$ 에서

$$(a+d) + (a+3d) = 22, 2a+4d = 22$$

$$\therefore a+2d = 11 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$a_8 + a_{12} = 120 \text{에서}$$

$$(a+7d) + (a+11d) = 120, 2a+18d = 120$$

$$\therefore a+9d = 60 \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -3, d = 7$$

따라서 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20 \times \{2 \times (-3) + (20-1) \times 7\}}{2} = 1270$$

답 (1) 220 (2) 1270

17

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 34, a_5 = a + 4d = 25$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a=37, d=-3$$

$$\therefore a_n=37+(n-1)\times(-3)=-3n+40$$

$a_n < 0$ 인 경우는 $-3n+40 < 0$ 에서

$$40 < 3n \quad \therefore n > 13. \times \times \times$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제13항까지 양수, 제14항부터 음수이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제13항까지의 합은

$$\frac{13 \times \{2 \times 37 + (13-1) \times (-3)\}}{2} = 247 \quad \leftarrow \begin{array}{l} a_{13}=10 \text{이므로} \\ 13 \times (37+1) \\ 2 \end{array} = 247$$

과 같이 구할 수도 있다.

또한, $a_{14} = -3 \times 14 + 40 = -2$ 이므로 제14항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{7 \times \{2 \times (-2) + (7-1) \times (-3)\}}{2} = -77 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{수열} \\ a_{14}, a_{15}, a_{16}, \dots, a_{20} \text{은} \\ \text{첫째항이 } a_{14}, \text{ 공차가} \\ -3 \text{인 등차수열이고} \\ \text{항수는 } 7 \text{이다.} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{20}| \\ = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{13}) \\ - (a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{20}) \\ = 247 - (-77) = 324 \end{aligned}$$

답 324

18

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 1이고, 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_7 + a_{10} = 7 \text{에서}$$

$$(1+d) + (1+6d) + (1+9d) = 7$$

$$3 + 16d = 7$$

$$16d = 4 \quad \therefore d = \frac{1}{4}$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = 46$ 에서

$$S_n = \frac{n \left\{ 2 \times 1 + (n-1) \times \frac{1}{4} \right\}}{2} = 46$$

$$\frac{n}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{4}(n-1) \right\} = 46, \quad \frac{1}{8}n^2 + \frac{7}{8}n = 46$$

$$n^2 + 7n = 368, \quad n^2 + 7n - 368 = 0$$

$$(n+23)(n-16) = 0$$

$$\therefore n = -23 \text{ 또는 } n = 16$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 16이다.

답 16

19

주어진 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 200 \text{에서}$$

$$10a + 45d = 200 \quad \therefore 2a + 9d = 40 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 600 \text{에서}$$

$$20a + 190d = 600 \quad \therefore 2a + 19d = 60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 11, d = 2$$

$$\therefore S_{30} = \frac{30 \times \{2 \times 11 + (30-1) \times 2\}}{2} = 1200$$

답 1200

★ 다른 풀이

$$S_{10} = 200, S_{20} = 600 \text{에서}$$

$$S_{20} - S_{10} = 600 - 200 = 400$$

이므로 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$, 즉 200, 400, $S_{30} - 600$ 은

공차가 $400 - 200 = 200$ 인 등차수열을 이룬다.

따라서 $S_{30} - 600 = 400 + 200 = 600$ 이므로

$$S_{30} = 600 + 600 = 1200$$

20

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

첫째항부터 제8항까지의 합이 -32 이므로

$$S_8 = \frac{8\{2a + (8-1)d\}}{2} = -32$$

$$\therefore 2a + 7d = -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제9항부터 제15항까지의 합이 77이므로

$$S_{15} - S_8 = 77 \quad \therefore -32 + 77 = 45 \text{에서}$$

$$S_{15} = \frac{15\{2a + (15-1)d\}}{2} = 45$$

$$\therefore a + 7d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -11, d = 2 \quad (*)$$

따라서 제16항부터 제32항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{32} - S_{15} &= \frac{32 \times \{2 \times (-11) + (32-1) \times 2\}}{2} - 45 \\ &= 640 - 45 = 595 \end{aligned}$$

답 595

다른 풀이

(*)에서 $a = -11$, $d = 2$ 이므로 이 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -11 + (n-1) \times 2 = 2n - 13$$

$$\therefore a_{16} = 19, a_{32} = 51$$

따라서 제 16 항부터 제 32 항까지의 합은

$$\frac{17 \times (19 + 51)}{2} = 595$$

항수는 $32 - 16 + 1 = 17$ 이다.

보충 설명

$m < n$ 인 두 자연수 m, n 에 대하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 제 m 항부터 제 n 항까지의 합은 첫째항이 a_m , 끝항이 a_n , 항수가 $n - m + 1$ 인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{(n - m + 1)(a_m + a_n)}{2}$$

21

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21 \text{에서}$$

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 21, 3a + 3d = 21$$

$$\therefore a + d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 140 \text{에서}$$

$$(a + 6d) + (a + 7d) + (a + 8d) + (a + 9d) + (a + 10d) = 140$$

$$5a + 40d = 140$$

$$\therefore a + 8d = 28 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 4, d = 3$

$$\therefore a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25} \quad (*)$$

$$= S_{25} - S_{13}$$

$$= \frac{25 \times \{2 \times 4 + (25 - 1) \times 3\}}{2}$$

$$- \frac{13 \times \{2 \times 4 + (13 - 1) \times 3\}}{2}$$

$$= 1000 - 286 = 714$$

답 714

보충 설명

(*)에서 $a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25}$ 는 첫째항이 a_{14} , 끝항이 a_{25} , 항수가 $25 - 14 + 1 = 12$ 인 등차수열의 합과 같으므로

$$a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{25}$$

$$= \frac{12(a_{14} + a_{25})}{2} = \frac{12(a + 13d + a + 24d)}{2}$$

$$= 6(2a + 37d)$$

$$= 6 \times (2 \times 4 + 37 \times 3) = 714$$

22

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1 = -16$ 이므로

$$a_{10} = a_1 + 9d = -16 + 9d = 11$$

$$9d = 27 \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore a_n = -16 + (n - 1) \times 3 = 3n - 19$$

$a_n > 0$ 인 경우는 $3n - 19 > 0$ 에서

$$3n > 19 \quad \therefore n > \frac{19}{3} = 6.\times\times\times$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제 6 항까지 음수이고, 제 7 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 6 항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore n = 6$$

답 6

다른 풀이

$a_1 = -16, d = 3$ 이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-16) + (n - 1) \times 3\}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{35}{2}n$$

$$= \frac{3}{2}\left(n^2 - \frac{35}{3}n\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(n - \frac{35}{6}\right)^2 - \frac{35^2}{24}$$

이때 $5 < \frac{35}{6} < 6$ 이고

$$\frac{35}{6} - 5 = \frac{5}{6}, 6 - \frac{35}{6} = \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} > \frac{1}{6} \text{이므로 } \frac{35}{6} \text{에 가장 가까운 자연수는 } 6 \text{이다.}$$

이므로 S_n 은 $n = 6$ 일 때, 최솟값

$$S_6 = \frac{3}{2} \times 6^2 - \frac{35}{2} \times 6 = -51 \text{을 갖는다.}$$

23

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1 = -10$ 이므로

$$S_3 = \frac{3\{2 \times (-10) + (3-1) \times d\}}{2}$$

$$= 3d - 30$$

$$S_8 = \frac{8\{2 \times (-10) + (8-1) \times d\}}{2}$$

$$= 28d - 80$$

$$S_3 = S_8 \text{에서 } 3d - 30 = 28d - 80 \text{이므로}$$

$$25d = 50 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = -10 + (n-1) \times 2 = 2n - 12$$

$a_n \geq 0$ 인 경우는 $2n - 12 \geq 0$ 에서

$$2n \geq 12 \quad \therefore n \geq 6$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제5항까지 음수이고, 제6항은 0, 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항 또는 제6항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$$S_5 = \frac{5 \times \{2 \times (-10) + (5-1) \times 2\}}{2} = -30$$

$$S_6 = \frac{6 \times \{2 \times (-10) + (6-1) \times 2\}}{2} = -30$$

답 -30

다른 풀이

$S_3 = S_8$ 이므로 $S_8 - S_3 = 0$ 에서

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

a_6 은 a_5 와 a_7 의 등차중항이면서 a_4 와 a_8 의 등차중항이므로
 $a_5 + a_7 = 2a_6$, $a_4 + a_8 = 2a_6$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$5a_6 = 0 \quad \therefore a_6 = 0$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1 = -10$ 이므로

$$a_6 = -10 + 5d = 0 \text{에서 } d = 2$$

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_5 = S_6 = \frac{6 \times \{2 \times (-10) + (6-1) \times 2\}}{2} = -30$$

24

첫째항이 a , 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = a + (n-1) \times 4$$

$$= 4n + a - 4$$

S_n 이 $n=5$ 일 때에만 최솟값을 가지므로

$a_5 < 0$, $a_6 > 0$ 이어야 한다.

$$a_5 = 4 \times 5 + a - 4 = 16 + a < 0$$

$$\therefore a < -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6 = 4 \times 6 + a - 4 = 20 + a > 0$$

$$\therefore a > -20 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -20 < a < -16$$

따라서 정수 a 로 가능한 값은 $-19, -18, -17$ 이므로 구하는 합은

$$-19 + (-18) + (-17) = -54$$

답 -54

다른 풀이

첫째항이 a , 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2a + 4(n-1)\}}{2}$$

$$= 2n^2 + (a-2)n$$

$$= 2\left(n + \frac{a-2}{4}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{8}$$

이때 S_n 이 $n=5$ 일 때에만 최솟값을 가지므로 $-\frac{a-2}{4}$ 에

가장 가까운 정수는 5뿐이다.

$$\text{즉, } \frac{9}{2} < -\frac{a-2}{4} < \frac{11}{2} \text{에서 } -20 < a < -16$$

따라서 정수 a 로 가능한 값은 $-19, -18, -17$ 이므로 구하는 합은

$$-19 + (-18) + (-17) = -54$$

보충 설명 1

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

(1) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때에만 최솟값을 갖는 경우

$$a_k < 0, a_{k+1} > 0$$

(2) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때에만 최댓값을 갖는 경우

$$a_k > 0, a_{k+1} < 0$$

보충 설명 2

S_n 이 $n=5$ 일 때에만 최솟값을 갖는다고 하였으므로

$$\frac{9}{2} < -\frac{a-2}{4} < \frac{11}{2} \text{에서 등호는 고려하지 않는다.}$$

만약 $\frac{9}{2} = -\frac{a-2}{4}$ 가 성립하면 n 에 대한 이차함수 $y = S_n$

의 그래프의 대칭성에 의하여 $S_4 = S_5$ 이므로 $n=5$ 일 때에만 최솟값을 갖는다는 조건에 모순이다.

25

$S_n = 2n^2 - 15n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 - 15 = -13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 15n - \{2(n-1)^2 - 15(n-1)\} \\ &= 4n - 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n - 17$$

따라서 $a_1 = -13$, $a_6 = 4 \times 6 - 17 = 7$ 이므로

$$a_1 + a_6 = -13 + 7 = -6$$

답 -6

26

$S_n = -2n^2 + 10n - 9$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 + 10 - 9 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -2n^2 + 10n - 9 - \{-2(n-1)^2 + 10(n-1) - 9\} \\ &= -4n + 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = -1, a_n = -4n + 12 \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = -1 < 0 \text{이고,}$$

$$n \geq 2 \text{일 때 } a_n \geq 0 \text{에서}$$

$$-4n + 12 \geq 0 \quad \therefore n \leq 3$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 2, 3이므로 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 3 = 5$$

답 5

27

$S_n = pn^2 + qn$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = p + q \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= pn^2 + qn - \{p(n-1)^2 + q(n-1)\} \\ &= 2pn - (p - q) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2pn - (p - q)$$

이때 $a_{10} - a_4 = 24$ 에서

$$\{20p - (p - q)\} - \{8p - (p - q)\} = 24$$

$$12p = 24 \quad \therefore p = 2$$

즉, $a_n = 4n - (2 - q)$ 이므로

$$a_2 + a_4 = 28 \text{에서}$$

$$\{8 - (2 - q)\} + \{16 - (2 - q)\} = 28$$

$$20 + 2q = 28 \quad \therefore q = 4$$

$$\therefore pq = 2 \times 4 = 8$$

답 8

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.239-240

01 90	02 7	03 8	04 $\frac{1}{6}$
05 21	06 8	07 98	08 755
09 723	10 7	11 99	12 23
13 ④			

01

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라 하자.

조건 ㉠에서 $a_5 + a_{10} = 0$ 이므로

$$(a + 4d) + (a + 9d) = 0, 2a + 13d = 0$$

$$\therefore a = -\frac{13}{2}d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

조건 ㉡에서 $|a_7| = |a_9| - 4$ 이므로

$$|a + 6d| = |a + 8d| - 4$$

㉠을 위의 식에 대입하면

$$\left| -\frac{13}{2}d + 6d \right| = \left| -\frac{13}{2}d + 8d \right| - 4$$

$$\left| -\frac{d}{2} \right| = \left| \frac{3}{2}d \right| - 4$$

이때 공차 d 는 양수이므로

$$\frac{d}{2} = \frac{3}{2}d - 4 \quad \therefore d = 4$$

이것을 ㉠에 대입하면 $a = -26$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = -26 + (n-1) \times 4 = 4n - 30$$

$$\therefore a_{30} = 4 \times 30 - 30 = 90$$

답 90

02

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1 = 25$ 이므로

$$a_5 = a_1 + 4d = 25 + 4d = 9, \quad 4d = -16$$

$$\therefore d = -4$$

$$\therefore a_n = 25 + (n-1) \times (-4) = -4n + 29$$

$a_n < 0$ 인 경우는 $-4n + 29 < 0$ 에서

$$4n > 29 \quad \therefore n > \frac{29}{4} = 7.25$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제7항까지 양수, 제8항부터 음수이므로

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots > |a_7|, \quad |a_8| < |a_9| < |a_{10}| < \dots$$

$$\text{이때 } |a_7| = |(-4) \times 7 + 29| = 1,$$

$$|a_8| = |(-4) \times 8 + 29| = 3 \text{이므로 } |a_n| \text{은 } n=7 \text{일 때 최}$$

솟값 1을 갖는다.
따라서 $|a_n|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 7이다.

답 7

03

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공차를 d ($d \geq 0$)라 하면 $a_3 \times a_{22} = a_7 \times a_8 + 10$ 에서

$$(a+2d)(a+21d) = (a+6d)(a+7d) + 10$$

$$a^2 + 23ad + 42d^2 = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$$

$$10ad = 10 \quad \therefore ad = 1 \quad \dots \dots \text{㉠}$$

이때 $ad = 1$ 에서 $d \neq 0$ 이므로 $a > 0, d > 0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_4 + a_6 = (a+3d) + (a+5d)$$

$$= 2a + 8d$$

$$\geq 2\sqrt{2a \times 8d}$$

(단, 등호는 $2a = 8d$, 즉 $a = 4d$ 일 때 성립)

$$= 2\sqrt{16ad}$$

$$= 2\sqrt{16 \times 1} \quad (\because \text{㉠})$$

$$= 2 \times 4 = 8$$

따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8이다.

답 8

04

이차방정식 $27x^2 - 12x + 1 = 0$ 에서

$$(3x-1)(9x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{1}{9}$$

따라서 $a_2 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{1}{9}$ 또는 $a_2 = \frac{1}{9}, a_6 = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{a_2} = 3, \frac{1}{a_6} = 9 \text{ 또는 } \frac{1}{a_2} = 9, \frac{1}{a_6} = 3$$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 등차수열이므로 $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_6}$ 은 이 순서대로

등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{1}{a_4}$ 은 $\frac{1}{a_2}$ 과 $\frac{1}{a_6}$ 의 등차중항이므로

$$\frac{2}{a_4} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_6}, \quad \frac{2}{a_4} = 12 \quad \therefore a_4 = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

다른 풀이 1

이차방정식 $27x^2 - 12x + 1 = 0$ 의 두 근이 a_2, a_6 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_2 + a_6 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}, \quad a_2 a_6 = \frac{1}{27}$$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 등차수열이므로 $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_6}$ 은 이 순서대로

등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{1}{a_4}$ 은 $\frac{1}{a_2}$ 과 $\frac{1}{a_6}$ 의 등차중항이므로

$$\frac{2}{a_4} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_6} = \frac{a_2 + a_6}{a_2 a_6} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{27}} = 12$$

$$\therefore a_4 = \frac{1}{6}$$

다른 풀이 2

이차방정식 $27x^2 - 12x + 1 = 0$ 의 두 근이

$$x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{1}{9} \text{ 이므로}$$

$$a_2 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{1}{9} \text{ 또는 } a_2 = \frac{1}{9}, a_6 = \frac{1}{3}$$

수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 이 등차수열이므로 이 수열의 공차를 d 라 하면

$$(i) a_2 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{1}{9} \text{ 일 때,}$$

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + d = 3, \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_1} + 5d = 9$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$d = \frac{3}{2}, \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} + 3d = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$(ii) a_2 = \frac{1}{9}, a_6 = \frac{1}{3} \text{ 일 때,}$$

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + d = 9, \frac{1}{a_6} = \frac{1}{a_1} + 5d = 3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$d = -\frac{3}{2}, \frac{1}{a_1} = \frac{21}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a_1} + 3d = \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_4 = \frac{1}{6}$$

05

삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + 11x + k = 0$ 의 세 근이 등차수열을 이루므로 세 근을 $a-d, a, a+d$ 라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(a-d) + a + (a+d) = 9$$

$$3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 $x=3$ 을 방정식에 대입하면

$$3^3 - 9 \times 3^2 + 11 \times 3 + k = 0$$

$$k - 21 = 0 \quad \therefore k = 21$$

답 21

보충 설명 1

등차수열을 이루는 수는 모든 수의 합이 첫째항 a 에 대한 식으로 표현되도록 놓으면 계산이 간단해진다.

(1) 등차수열을 이루는 세 수

$$\Rightarrow a-d, a, a+d$$

(2) 등차수열을 이루는 네 수

$$\Rightarrow a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

(3) 등차수열을 이루는 다섯 수

$$\Rightarrow a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

보충 설명 2

삼차방정식의 근과 계수의 관계 |

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

06

세 선분 $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{AB}$ 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\overline{AD} = a-d, \overline{CD} = a, \overline{AB} = a+d$ ($a > d > 0$)라 하자.

이때 두 삼각형 $\triangle ABD, \triangle ACB$ 가 닮음이므로

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AB} \text{에서}$$

$$(a+d) : (a-d)$$

$$= (2a-d) : (a+d)$$

$$(a+d)^2 = (a-d)(2a-d)$$

$$a^2 - 5ad = 0, a(a-5d) = 0$$

$$\therefore a = 5d \quad (\because a > 0)$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{AC} = 2a - d = 9d, \overline{BC} = 4\sqrt{5},$$

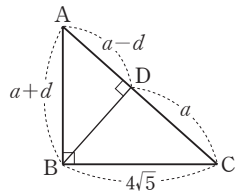
$$\overline{AB} = a + d = 6d \text{이므로 피타고라스 정리에 의하여}$$

$$81d^2 = 36d^2 + 80, 45d^2 = 80$$

$$d^2 = \frac{16}{9} \quad \therefore d = \frac{4}{3} \quad (\because d > 0)$$

$$a = 5d \text{이므로 } a = \frac{20}{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = a + d = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} = 8$$



답 8

다른 풀이

세 선분 $\overline{AD}, \overline{CD}, \overline{AB}$ 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\overline{AD} = a-d, \overline{CD} = a, \overline{AB} = a+d$ ($a > d > 0$)라 하자.

직각삼각형 BCD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD}^2 = (4\sqrt{5})^2 - a^2 = 80 - a^2$$

직각삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD}^2 = (a+d)^2 - (a-d)^2 = 4ad$$

즉, $80 - a^2 = 4ad$ 이므로

$$a^2 + 4ad - 80 = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

또한, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(4\sqrt{5})^2 + (a+d)^2 = (2a-d)^2$$

$$\therefore 3a^2 - 6ad - 80 = 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡ - ㉠을 하면

$$2a^2 - 10ad = 0, \quad 2a(a-5d) = 0$$

$$\therefore a = 5d \quad (\because a > 0) \quad \cdots \text{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$45d^2 = 80, \quad d^2 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore d = \frac{4}{3} \quad (\because d > 0), \quad a = \frac{20}{3} \quad (\because \text{㉢})$$

$$\therefore \overline{AB} = a + d = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} = 8$$

07

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항은 1이고 제 $(n+2)$ 항은 64이다.

$$\text{즉, } 1 + (n+1)d = 64 \text{이므로 } d = \frac{63}{n+1}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 이 모두 자연수가 되려면 d 는 자연수이어야 하므로 $n+1$ 은 63의 양의 약수이다.

$$d = \frac{63}{n+1} \text{을 만족시키는 } n+1, d \text{의 값과 그때의 } n \text{의 값을}$$

표로 나타내면 다음과 같다.

$n+1$	3	7	9	21	63
d	21	9	7	3	1
n	2	6	8	20	62

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2 + 6 + 8 + 20 + 62 = 98$$

답 98

보충 설명

두 수 a, b 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 수열 |

$a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 항수는 $(n+2)$ 이다.

이때 a 는 첫째항이고 b 는 제 $(n+2)$ 항이므로 이 등차수열의 공차를 d 라 하면

$$b = a + \{(n+2) - 1\} \times d = a + (n+1)d$$

08

3으로 나눈 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, \dots$$

5로 나눈 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은

$$8, 23, 38, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공차가 15인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} &= \frac{10 \times \{2 \times 8 + (10-1) \times 15\}}{2} \\ &= 755 \end{aligned}$$

답 755

보충 설명

자연수 n 으로 나눈 나머지가 a ($0 < a < n$)인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$a, a+n, a+2n, a+3n, \dots$$

이므로 첫째항이 a 이고 공차가 n 인 등차수열이 된다.

09

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 5는 첫째항이고, 236은 제 $(n+2)$ 항이므로

$$5 + (n+1)d = 236 \quad \therefore (n+1)d = 231 \quad \cdots \text{㉠}$$

이때 $231 = 3 \times 7 \times 11$ 이고 공차 d 는 50보다 작은 최대의 자연수이므로

$$d = 33$$

이것을 ㉠에 대입하면 $(n+1) \times 33 = 231$

$$n+1=7 \quad \therefore n=6$$

즉, 수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 은 공차가 $d=33$ 인 등차수열
이므로

$$a_1=5+33=38, a_6=236-33=203$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 &= \frac{6 \times (38+203)}{2} \\ &= 723 \end{aligned}$$

답 723

10

$$S_k = -16, S_{k+2} = -12 \text{에서}$$

$$S_{k+2} - S_k = a_{k+2} + a_{k+1} = 4$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 2이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫
째항을 a 라 하면

$$a_{k+2} + a_{k+1} = a + 2(k+1) + a + 2k = 4$$

$$2a + 4k + 2 = 4, a + 2k + 1 = 2$$

$$\therefore a = 1 - 2k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_k = -16 \text{에서 } \frac{k\{2a + 2(k-1)\}}{2} = -16$$

$$\therefore k(a + k - 1) = -16$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$k(1 - 2k + k - 1) = -16, k^2 = 16$$

$$\therefore k = 4 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a = 1 - 2 \times 4 = -7$$

$$\therefore a_{2k} = a_8 = a + 7 \times 2 = -7 + 7 \times 2 = 7$$

답 7

11

조건 (가)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 29 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 155 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠ + ㉡을 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ = 29 + 155 = 184 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$$

$$\text{즉, ㉢에서 } a_1 + a_n = \frac{184}{4} = 46 \text{이므로}$$

조건 (다)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 575$$

$$23n = 575 \quad \therefore n = 25$$

즉, 마지막 4개의 항은 $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$ 이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

㉠에서

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) = 29$$

$$\therefore 4a + 6d = 29 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

㉡에서

$$(a + 21d) + (a + 22d) + (a + 23d) + (a + 24d) = 155$$

$$\therefore 4a + 90d = 155 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$$a = 5, d = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 &= \frac{9 \times \left\{ 2 \times 5 + (9-1) \times \frac{3}{2} \right\}}{2} \\ &= 99 \end{aligned}$$

답 99

12

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 20a + 190d$$

$$S_8 = \frac{8(2a + 7d)}{2} = 8a + 28d$$

$$2S_{20} = S_8 \text{에서 } 2(20a + 190d) = 8a + 28d$$

$$40a + 380d = 8a + 28d, 32a = -352d$$

$$\therefore a = -11d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$a_n = -11d + (n-1)d = (n-12)d$$

$$a = a_1 > 0 \text{이므로 ㉢에서 } d < 0$$

이때 $a_n \geq 0$ 인 경우는 $(n-12)d \geq 0$ 에서 $d < 0$ 이므로

$$n-12 \leq 0 \quad \therefore n \leq 12$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제11항까지 양수이고,
제12항은 0, 제13항부터 음수이다.
따라서 S_n 이 최대가 되는 자연수 n 은 $n=11$ 또는 $n=12$
이므로 모든 자연수 n 의 값의 합은
 $11+12=23$

(다)
답 23

단계	채점 기준	배점
(가)	등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 할 때, $2S_{20}=S_8$ 을 이용하여 a 와 d 사이의 관계식을 구한 경우	40%
(나)	등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차 d 가 음수임을 확인한 경우	20%
(다)	조건을 만족시키는 자연수 n 의 값의 합을 구한 경우	40%

13

$S_n = -n^2 + 8n + 3$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -1 + 8 + 3 = 10 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^2 + 8n + 3 - \{-(n-1)^2 + 8(n-1) + 3\} \\ &= -2n + 9 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 10, a_n = -2n + 9 \quad (n \geq 2)$$

$\therefore a_1 = 10, a_3 = -2 \times 3 + 9 = 3$ 이므로

$$a_1 + a_3 = 13 \quad (\text{거짓})$$

$\therefore a_{2n} = -2 \times 2n + 9 = -4n + 9 \quad (n \geq 1)$ 이므로 수열 $\{a_{2n}\}$
은 공차가 -4 인 등차수열이다. (참) (*)

$\therefore a_n = -2n + 9 < 0$ 에서 $n > \frac{9}{2} = 4.5$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 에

서 처음으로 음수가 되는 항은 제5항이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

보충 설명

(*)에서

$$\begin{aligned} a_{2(n+1)} - a_{2n} &= \{-4(n+1) + 9\} - \{-4n + 9\} \\ &= -4 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_{2n}\}$ 의 공차는 -4 이다.

2 등비수열

기본 + 필수연습

본문 pp.246~254

28 (1) $a_n = -\frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ (2) $a_n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

29 (1) -3 (2) 2 30 $x=25, y=1$

31 (1) $2^{20} - 1$ (2) $\frac{1}{2^{11}} - 16$

32 (1) $a_n = (\sqrt{5})^{n-3}$ (2) 625 (3) 5

33 제10항 34 8 35 (1) 5 (2) 28

36 3 37 $\frac{91}{9}$ 38 499

39 (1) 12 (2) $\frac{4}{3}(3^6 - 1)$ 40 $-\frac{425}{4}$ 41 125

42 147 43 21 44 52 45 6

46 -7 47 687 48 $23\text{만 } 9\text{천 원}$

49 833

28

(1) $a_n = -\frac{1}{3} \times 9^{n-1}$

(2) 첫째항이 6 , 공비가 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로 일반항은

$$a_n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

답 (1) $a_n = -\frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ (2) $a_n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

29

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

(1) $a_2 = ar = 6 \quad \cdots \textcircled{㉠}$

$a_5 = ar^4 = -162 \quad \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면 $r^3 = -27$

$r^3 + 27 = 0, (r+3)(r^2 - 3r + 9) = 0$

$\therefore r = -3 \quad (\because r^2 - 3r + 9 > 0)$ + $\textcircled{㉠}$ 에서 $a \times (-3) = 6$,
즉 $a = -20$ 이다.

(2) $a = a_1 = \frac{1}{2}$ $\left(r - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$

$a_3 a_4 = a_5$ 에서 $ar^2 \times ar^3 = ar^4$

$\therefore a^2 r^5 = ar^4 \quad \cdots \textcircled{㉢}$

이때 $a_n > 0$ 이면 $a > 0, r > 0$ 이므로

㉠에서 $ar = 1$

$a = \frac{1}{2}$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{1}{2}r = 1 \quad \therefore r = 2$$

답 (1) -3 (2) 2

30

5는 x 와 y 의 등비중항이므로

$$5^2 = xy \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, y 는 5와 $\frac{1}{5}$ 의 등비중항이므로

$$y^2 = 5 \times \frac{1}{5} = 1 \quad \therefore y = 1 \quad (\because y > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x = 25$$

답 $x = 25, y = 1$

31

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$(1) S_{10} = \frac{3 \times (4^{10} - 1)}{4 - 1} = 4^{10} - 1 = 2^{20} - 1$$

$$(2) S_{15} = \frac{(-8) \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{15} \right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -16 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{15} \right\} = \frac{1}{2^{11}} - 16$$

답 (1) $2^{20} - 1$ (2) $\frac{1}{2^{11}} - 16$

32

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a > 0, r > 0$$

$$(1) \frac{a_3 a_8}{a_6} = 5 \text{에서}$$

$$\frac{ar^2 \times ar^7}{ar^5} = 5, \quad \frac{a^2 r^9}{ar^5} = 5$$

$$\therefore ar^4 = 5 \quad (\because a > 0, r > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_7 = 30 \text{에서}$$

$$ar^4 + ar^6 = ar^4(1 + r^2) = 30 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{5}, r = \sqrt{5} \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{5} \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^{n-3}$$

(2) (1)에서 $a_n = (\sqrt{5})^{n-3}$ 이므로

$$a_{11} = (\sqrt{5})^{11-3} = (\sqrt{5})^8 = 5^4 = 625$$

(3) (1)에서 $a_k = (\sqrt{5})^{k-3} = 5$ 이므로

$$5^{\frac{k-3}{2}} = 5$$

$$\frac{k-3}{2} = 1, k-3 = 2 \quad \therefore k = 5$$

답 (1) $a_n = (\sqrt{5})^{n-3}$ (2) 625 (3) 5

33

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$a_2 = 27 \text{에서 } ar = 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = \frac{1}{3} \text{에서 } ar^5 = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4 = \frac{1}{81}$$

$$r^4 - \frac{1}{81} = 0, \left(r + \frac{1}{3}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)\left(r^2 + \frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{3} \quad (\because r > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{3}a = 27$ 에서 $a = 81$ 이므로

$$a_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^{-n+5}$$

$$a_n < \frac{1}{100} \text{에서 } 3^{-n+5} < \frac{1}{100}$$

$$3^{n-5} > 100$$

이때 $3^4 = 81, 3^5 = 243$ 이므로

$$n-5 \geq 5 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 $a_n < \frac{1}{100}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 10이

므로 구하는 항은 제 10항이다.

답 제 10항

34

주어진 등비수열의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면 첫째항이 $\frac{1}{4}$,

제 $(n+2)$ 항이 16이므로

$$16 = \frac{1}{4} r^{n+1} \quad \therefore r^{n+1} = 64 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 등비수열의 모든 항의 곱이 1024이므로

$$\begin{aligned} 1024 &= \frac{1}{4} \times a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n \times 16 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} r \times \frac{1}{4} r^2 \times \dots \times \frac{1}{4} r^n \times 16 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \times 16 \times r^{1+2+3+\dots+n} \quad \left[\begin{array}{l} 1+2+3+\dots+n \text{ 첫째항이 } 1, \\ \text{공차가 } 1 \text{ 인 등차수열의 첫째항부터} \\ \text{제 } n \text{ 항까지의 합이므로} \\ \frac{n[2 \times 1 + (n-1) \times 1]}{2} \\ = \frac{n(n+1)}{2} \end{array} \right] \\ &= 2^{-2n-2} \times 2^4 \times r^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \leftarrow \\ &= 2^{-2n+2} \times (r^{n+1})^{\frac{n}{2}} \quad \leftarrow \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2^{-2n+2} \times 64^{\frac{n}{2}} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 2^{-2n+2} \times (2^6)^{\frac{n}{2}} \\ &= 2^{-2n+2} \times 2^{3n} \\ &= 2^{n+2} \end{aligned}$$

이때 $1024 = 2^{10}$ 이므로 $2^{10} = 2^{n+2}$ 에서

$$10 = n+2 \quad \therefore n = 8$$

답 8

35

(1) $x-1$ 은 $x-4$ 와 $3x+1$ 의 등비중항이므로

$$(x-1)^2 = (x-4)(3x+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 11x - 4$$

$$2x^2 - 9x - 5 = 0, (2x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad (\because x > 0)$$

(2) a 는 16과 1의 등비중항이므로

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

4는 $a-3$, 즉 1과 b 의 등차중항이므로

$$2 \times 4 = 1 + b \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore ab = 4 \times 7 = 28$$

답 (1) 5 (2) 28

36

다항식 $f(x) = x^2 + x + a$ 를 일차식 $x-1$, $x-3$, $x-6$ 으로 나누는 나머지는 순서대로

$$f(1) = a+2, f(3) = a+12, f(6) = a+42$$

따라서 세 수 $a+2$, $a+12$, $a+42$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a+12$ 는 $a+2$ 와 $a+42$ 의 등비중항이다.

$$\text{즉, } (a+12)^2 = (a+2)(a+42) \text{에서}$$

$$a^2 + 24a + 144 = a^2 + 44a + 84, 20a = 60$$

$$\therefore a = 3$$

답 3

보충 설명

나머지정리 | 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$R = f(a)$$

37

등비수열을 이루는 0이 아닌 서로 다른 세 수를

$$\frac{a}{r}, a, ar \quad (ar \neq 0) \text{이라 하자.}$$

세 수의 곱이 -1 이므로

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = -1$$

$$\text{즉, } a^3 = -1 \text{이므로 } a = -1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

또한, 세 수의 합이 $\frac{7}{3}$ 이므로

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{7}{3}$$

$$\text{즉, } a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{7}{3} \text{에서}$$

$$\frac{1}{r} + 1 + r = -\frac{7}{3} \quad (\because a = -1)$$

양변에 $3r$ 을 곱하면

$$3 + 3r + 3r^2 = -7r$$

$$3r^2 + 10r + 3 = 0, (3r+1)(r+3) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } r = -3$$

$$r = -\frac{1}{3} \text{ 일 때, 세 수는 } 3, -1, \frac{1}{3}$$

$$r = -3 \text{ 일 때, 세 수는 } \frac{1}{3}, -1, 3$$

따라서 세 수의 제곱의 합은

$$3^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 + 1 + \frac{1}{9} = \frac{91}{9}$$

답 $\frac{91}{9}$

다른 풀이

등비수열을 이루는 0이 아닌 서로 다른 세 실수를 a, b, c ($abc \neq 0$)라 하자.

b 는 a 와 c 의 등비중항이므로 $b^2 = ac$

세 수의 곱이 -1 이므로

$abc = b^3 = -1$ 에서 $b = -1$ ($\because b$ 는 실수)

$\therefore ac = 1$

한편, 세 수의 합이 $\frac{7}{3}$ 이므로

$a + b + c = a - 1 + c = \frac{7}{3}$ 에서 $a + c = \frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2(-a - c + 1) \quad \left. \begin{array}{l} b = -1, ac = 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{49}{9} - 2 \times \left(-\frac{10}{3} + 1\right) \\ &= \frac{49}{9} + \frac{14}{3} = \frac{91}{9} \end{aligned}$$

38

1회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$$27 \times \frac{2}{3}$$

2회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$$\left(27 \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

3회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$$\left\{27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} \times \frac{2}{3} = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\vdots$

n 회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$$27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

따라서 8회 시행 후 남아 있는 모든 선분의 길이의 합은

$$27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 3^3 \times \frac{2^8}{3^8} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

즉, $p = 243$, $q = 256$ 이므로

$$p + q = 243 + 256 = 499$$

답 499

39

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$(1) S_7 = \frac{a \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{129}{16} \text{에서}$$

$$\frac{2}{3}a \left(1 + \frac{1}{128}\right) = \frac{129}{16}, \quad \frac{2}{3}a \times \frac{129}{128} = \frac{129}{16}$$

$$\frac{1}{3}a = 4 \quad \therefore a_1 = a = 12$$

(2) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a > 0, r > 0$$

$$a = a_1 = \frac{8}{3} \text{이고 } \frac{a_6 - a_4}{a_5} = \frac{8}{3} \text{에서 } \frac{ar^5 - ar^3}{ar^4} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{r^2 - 1}{r} = \frac{8}{3}, \quad 3r^2 - 3 = 8r$$

$$3r^2 - 8r - 3 = 0, \quad (3r + 1)(r - 3) = 0$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore S_6 = \frac{\frac{8}{3} \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{4}{3}(3^6 - 1)$$

답 (1) 12 (2) $\frac{4}{3}(3^6 - 1)$

40

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{5}{4}$ 이고, 공비를 r 이라 하면 수열

$\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$r > 0$$

$$a_3 + a_5 = 25 \text{에서 } \frac{5}{4}r^2 + \frac{5}{4}r^4 = 25$$

$$\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r^4 = 5, \quad r^4 + r^2 - 20 = 0, \quad (r^2)^2 + r^2 - 20 = 0$$

$$(r^2 + 5)(r^2 - 4) = 0 \quad \therefore r^2 = 4 \quad (\because r^2 > 0)$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

따라서 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_8 = S$ 라 하면 S 는 첫째항

이 $\frac{5}{4}$ 이고 공비가 -2 인 등비수열의 첫째항부터 제 8항까지

의 합이므로

$$S = \frac{\frac{5}{4} \times \{1 - (-2)^8\}}{1 - (-2)} = \frac{5}{12} \times (1 - 2^8) = -\frac{425}{4}$$

답 $-\frac{425}{4}$

41

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하자.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 10 \text{에서}$$

$$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 10 \quad \cdots \text{㉑}$$

$$\text{또한, } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{a_9} + \frac{1}{a_8} + \cdots + \frac{1}{a_1} = 2$$

$$\frac{1}{ar^9} + \frac{1}{ar^8} + \frac{1}{ar^7} + \cdots + \frac{1}{a} = 2$$

이것은 첫째항이 $\frac{1}{ar^9}$, 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터

제 10 항까지의 합이므로

$$\frac{\frac{1}{ar^9}(r^{10}-1)}{r-1} = 2 \quad \cdots \text{㉒}$$

$$\text{㉑} \div \text{㉒} \text{을 하면 } a^2 r^9 = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 &= ar^2 \times ar^3 \times ar^4 \times ar^5 \times ar^6 \times ar^7 \\ &= a^6 r^{27} = (a^2 r^9)^3 = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

답 125

보충 설명

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 a , 공비가 r 이면

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} \text{이므로 수열 } \left\{\frac{1}{a_n}\right\} \text{도 등비수열이다.}$$

또한, $r=1$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 10$ 에서

$$10a_1 = 10 \quad \therefore a_1 = 1$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} = \frac{10}{a_1} = 10 \neq 2$$

즉, $r=1$ 이면 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $r \neq 1$ 이다.

42

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하자.

$$S_n = 21, S_{2n} = 63 \text{이므로}$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 21 \quad \cdots \text{㉑}$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1} = 63 \quad \cdots \text{㉒}$$

$$\text{㉒} \div \text{㉑} \text{을 하면 } r^n + 1 = 3 \text{이므로 } r^n = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{3n} &= \frac{a(r^{3n}-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1} \\ &= 21 \times (2^2 + 2 + 1) = 147 \end{aligned}$$

답 147

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 세 수 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 도 이 순서대로 공비가 r^n 인 등비수열을 이룬다.

이때 $S_n = 21, S_{2n}-S_n = 63-21=42$ 이므로 $r^n = 2$ 이다.

즉, $S_{3n}-S_{2n} = 42 \times 2 = 84$ 이므로

$$S_{3n} = S_{2n} + 84 = 63 + 84 = 147$$

43

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$S_{20} = 3S_{10} \text{에서 } r \neq 1 \text{이므로 } \leftarrow r=1 \text{이면}$$

$$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = 3 \times \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \quad \begin{array}{l} S_{10} = 10a, S_{20} = 20a \text{이므로} \\ S_{20} = 2S_{10} \text{이어야 한다.} \\ S_{20} = 3S_{10} \text{에서 } 2S_{10} = 3S_{10} \text{이 되어 } S_{10} = 0 \\ \text{이는 수열 } \{a_n\} \text{의 모든 항이 양수라는 조건을} \\ \text{만족시키지 않는다.} \end{array}$$

$$r^{20}-1 = 3(r^{10}-1)$$

$$(r^{10}-1)(r^{10}+1) = 3(r^{10}-1)$$

양변을 $r^{10}-1$ 로 나누면

$$r^{10}+1 = 3 \quad \therefore r^{10} = 2$$

$$\therefore \frac{S_{60}}{S_{20}} = \frac{\frac{a(r^{60}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}} = \frac{r^{60}-1}{r^{20}-1}$$

$$= \frac{2^6-1}{2^2-1} = \frac{63}{3} = 21$$

답 21

44

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \text{에서}$$

$$S_4 = \frac{a(r^4-1)}{r-1} = 4 \quad \cdots \text{㉑}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 12 \text{에서 } S_8 - S_4 = 12 \text{이므로}$$

$$S_8 = S_4 + 12 = 16$$

$$\therefore S_8 = \frac{a(r^8-1)}{r-1} = \frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1} = 16 \quad \cdots \text{㉒}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4+1)=16$ 에서

$$r^4+1=4 \quad \therefore r^4=3$$

구하는 값은 S_{12} 이므로

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{a(r^{12}-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^4-1)(r^8+r^4+1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^4-1)}{r-1} \times (r^8+r^4+1) \\ &= 4 \times (3^2+3+1) = 52 \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}) \end{aligned}$$

.....㉢

답 52

45

$S_n = 3^{n+1} - 3$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n+1} - 3 - (3^n - 3) = 3^{n+1} - 3^n \\ &= (3-1) \times 3^n = 2 \times 3^n \quad \dots\dots\textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^n$$

$$a_n > 500 \text{에서 } 2 \times 3^n > 500, \quad 3^n > 250$$

$$\text{이때 } 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729 \text{이므로 } n \geq 6$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

46

$S_n = 7^{n+1} + k$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 7^2 + k = 49 + k \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (7^{n+1} + k) - (7^n + k) \\ &= 7^{n+1} - 7^n = 6 \times 7^n \quad \dots\dots\textcircled{㉡} \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 한다.

$$\text{즉, } 49 + k = 42 \text{에서 } k = -7$$

답 -7

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이

$S_n = Ar^n + B$ (A, B 는 상수) 꼴일 때, $B = -A$ 이면 이 수열은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.

이때 $S_n = 7^{n+1} + k = 7 \times 7^n + k$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$$k = -7$$

47

$S_n = 2^{n-1} + 4$ 에서

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 + 4 = 5 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^{n-1} + 4) - (2^{n-2} + 4) \\ &= 2^{n-2} \quad \dots\dots\textcircled{㉡} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ㉠은 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = 5, \quad a_n = 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

$$= 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 \quad \leftarrow \text{첫째항이 2, 공비가 } 2^2=4 \text{인 등비수열의}$$

$$\text{첫째항부터 제5항까지의 합이다.}$$

$$= \frac{2 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{2 \times 1023}{3}$$

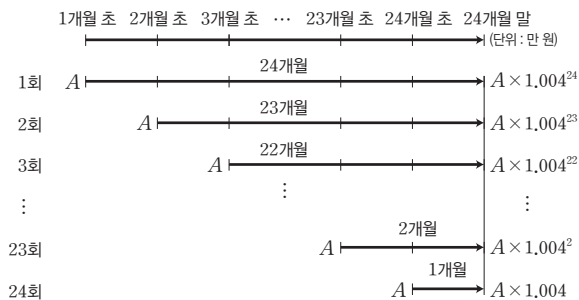
$$= 682$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 5 + 682 = 687$$

답 687

48

매월 초에 적립하는 금액을 A 만 원이라 하고 2년 후, 즉 24개월 말의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉, 24개월 말의 적립금의 원리합계를 S 만 원이라 하면

$$S = A \times 1.004 + A \times 1.004^2 + A \times 1.004^3 + \cdots + A \times 1.004^{24}$$

이것은 첫째항이 $A \times 1.004$, 공비가 1.004인 등비수열의 첫째항부터 제 24 항까지의 합과 같으므로

$$S = \frac{A \times 1.004 \times (1.004^{24} - 1)}{1.004 - 1} = \frac{A \times 1.004 \times 0.1}{0.004} = 25.1A$$

이때 등록금은 600만 원이므로

$$25.1A = 600 \quad \therefore A = 23.9043 \times \times \times$$

따라서 매월 적립해야 할 금액은 239043.×××원이고, 천 원 미만은 버리므로 23만 9천 원이다.

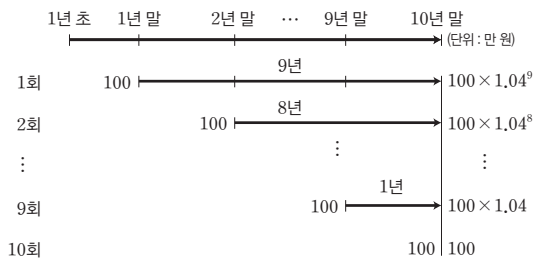
답 23만 9천 원

49

a 만 원을 연이율 4%로 10년 동안 예금할 때의 원리합계는

$$a(1+0.04)^{10} = 1.5a \text{ (만 원)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

매년 말에 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 10년 말의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



즉, 10년 말의 적립금의 원리합계는

$$100 + 100 \times 1.04 + 100 \times 1.04^2 + \cdots + 100 \times 1.04^9 = \frac{100 \times (1.04^{10} - 1)}{1.04 - 1} = \frac{100 \times (1.5 - 1)}{0.04} = 1250 \text{ (만 원)} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$ 이어야 하므로

$$1.5a = 1250 \quad \therefore a = \frac{1250}{1.5} = 833.3 \times \times \times \text{ (만 원)}$$

소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하므로

$$a = 833$$

답 833

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.255~256

14 $\frac{1}{128}$	15 20	16 1024	17 84
18 $x^2 - 11x + 28 = 0$	19 18	20 $\frac{\sqrt{3}}{256}$	
21 11	22 99	23 -16	24 48
25 30			

14

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a < 0$), 공비를 r 이라 하자.

$$a_3 a_5 = 8a_8 \text{에서}$$

$$ar^2 \times ar^4 = 8ar^7, \quad a^2 r^6 = 8ar^7$$

첫째항이 음수이므로 $a \neq 0$ 이고, $r = 0$ 이면

$$a_1 + |a_2| + |2a_3| = a_1 < 0 \text{에서 모순이므로 } r \neq 0 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a^2 r^6 = 8ar^7 \text{에서}$$

$$a = 8r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + |a_2| + |2a_3| = 0 \text{에서}$$

$$a + |ar| + |2ar^2| = 0$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$8r + |8r^2| + |16r^3| = 0$$

이때 $a = 8r < 0$ 에서 $r < 0$ 이므로

$$8r + 8r^2 - 16r^3 = 0, \quad 2r^3 - r^2 - r = 0$$

$$r(2r^2 - r - 1) = 0, \quad r(2r + 1)(r - 1) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \quad (\because r < 0), \quad a = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$\therefore a_{10} = ar^9 = -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{128}$$

답 $\frac{1}{128}$

15

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

조건 ㉞에서 $b_2 + b_4 + b_6 = 24$ 이므로

$$\log_2 a_2 + \log_2 a_4 + \log_2 a_6 = 24$$

$$\log_2 (a_2 a_4 a_6) = 24, \quad a_2 a_4 a_6 = 2^{24}$$

즉, $ar \times ar^3 \times ar^5 = 2^{24}$ 이므로

$$a^3 r^9 = 2^{24} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

조건 ㉝에서 $b_5 + b_7 + b_9 = 42$ 이므로

$$\log_2 a_5 + \log_2 a_7 + \log_2 a_9 = 42$$

$$\log_2 (a_5 a_7 a_9) = 42, \quad a_5 a_7 a_9 = 2^{42}$$

즉, $ar^4 \times ar^6 \times ar^8 = 2^{42}$ 이므로

$$a^3 r^{18} = 2^{42} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞} \div \textcircled{㉞}$ 을 하면

$$r^9 = 2^{42-24} = 2^{18} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞}$ 을 $\textcircled{㉞}$ 에 대입하면

$$a^3 \times 2^{18} = 2^{24}, \quad a^3 = 2^{24-18} = 2^6$$

$$\therefore a = 2^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞}, \textcircled{㉞}$ 에 의하여

$$a_{10} = ar^9 = 2^2 \times 2^{18} = 2^{2+18} = 2^{20}$$

$$\therefore b_{10} = \log_2 a_{10} = \log_2 2^{20} = 20$$

답 20

다른 풀이

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_n = ar^{n-1} \text{이므로}$$

$$b_n = \log_2 ar^{n-1} = \log_2 a + \log_2 r^{n-1}$$

$$= \log_2 a + (n-1)\log_2 r \quad \leftarrow \text{수열 } \{b_n\} \text{은 첫째항이 } \log_2 a, \text{ 공차가 } \log_2 r \text{인 등차수열임을 알 수 있다.}$$

조건 ㉞에서

$$b_2 + b_4 + b_6$$

$$= (\log_2 a + \log_2 r) + (\log_2 a + 3\log_2 r) + (\log_2 a + 5\log_2 r)$$

$$= 3\log_2 a + 9\log_2 r = 24$$

$$\therefore \log_2 a + 3\log_2 r = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

조건 ㉝에서

$$b_5 + b_7 + b_9$$

$$= (\log_2 a + 4\log_2 r) + (\log_2 a + 6\log_2 r) + (\log_2 a + 8\log_2 r)$$

$$= 3\log_2 a + 18\log_2 r = 42$$

$$\therefore \log_2 a + 6\log_2 r = 14 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞} - \textcircled{㉞}$ 을 하면

$$3\log_2 r = 6, \quad \log_2 r = 2 \quad \therefore r = 4$$

이것을 $\textcircled{㉞}$ 에 대입하면

$$\log_2 a + 3\log_2 4 = 8, \quad \log_2 a + 3 \times 2 = 8$$

$$\log_2 a = 2 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore b_{10} = \log_2 4 + (10-1)\log_2 4$$

$$= \log_2 2^2 + 9 \times \log_2 2^2$$

$$= 2 + 9 \times 2 = 20$$

16

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_5 a_9 = ar^4 \times ar^8 = (ar^6)^2 = a_7^2 = 16 \text{에서}$$

$$a_7 = 4 \quad (\because a_n > 0)$$

이때 $a_3 a_{11} = ar^2 \times ar^{10} = (ar^6)^2 = a_7^2 = 16$ 이므로

$$a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} = (a_3 a_{11}) \times (a_5 a_9) \times a_7$$

$$= 16 \times 16 \times 4$$

$$= 1024$$

답 1024

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 등비중항의 성질에 의하여

$$a_3 a_{11} = a_5 a_9 = a_7^2$$

$$a_5 a_9 = 16 \text{이므로 } a_7^2 = 16$$

이때 등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a_7 > 0 \quad \therefore a_7 = 4$$

$$\therefore a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} = (a_3 a_{11}) \times (a_5 a_9) \times a_7$$

$$= 16 \times 16 \times 4 = 1024$$

17

$$f(x) = \frac{k}{x} \text{이므로 } f(a) = \frac{k}{a}, f(b) = \frac{k}{b}, f(18) = \frac{k}{18}$$

$$f(a), f(b), f(18), \text{ 즉 } \frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{18} \text{가 이 순서대로 등비수}$$

열을 이루므로 $\frac{k}{b}$ 는 $\frac{k}{a}$ 와 $\frac{k}{18}$ 의 등비중항이다.

$$\text{즉, } \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \frac{k}{a} \times \frac{k}{18} \text{에서 } \left. \begin{array}{l} k \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$b^2 = 18a \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

이때 $2 < a < b < 18$ 이고 $18a = 2 \times 3^2 \times a$ 는 제곱수가 되어야 하므로 a 의 값으로 가능한 것은

$$a = 2^3 = 8 \quad (\because 2 < a < 18)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $b^2 = 18 \times 8 = 144$

$$\therefore b = 12 \quad (\because b \text{는 자연수})$$

$$\text{한편, } f(a) = 9 \text{에서 } \frac{k}{8} = 9 \quad \therefore k = 72$$

$$\therefore b + k = 12 + 72 = 84$$

답 84

18

이차방정식 $x^2 - 14x + 16 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 14, \quad \alpha\beta = 16 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

세 수 α, p, β 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2p = \alpha + \beta$$

$$2p = 14 \quad (\because \text{㉠}) \quad \therefore p = 7$$

세 수 α, q, β 는 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$q^2 = \alpha\beta$$

$$q^2 = 16 \quad (\because \text{㉠}) \quad \therefore q = 4 \quad (\because q > 0)$$

따라서 두 근이 p, q , 즉 7, 4이고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (7+4)x + 7 \times 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$\text{답 } x^2 - 11x + 28 = 0$$

19

$$A(0, k), D(k, 0) \text{에서 } \overline{AD} = \sqrt{2}k \quad \dots\dots\text{㉠}$$

$\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이고, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 이 등비수열의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$\overline{BC} = \sqrt{2}r, \quad \overline{CD} = \sqrt{2}r^2 \quad \text{--- } \overline{AB} = \sqrt{2} > 0 \text{이고 } \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD} \text{는 선분의 길이이므로 양수이다. 즉, 공비가 양수이다.}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \sqrt{2} + \sqrt{2}r + \sqrt{2}r^2 = \sqrt{2}(1 + r + r^2) \quad \dots\dots\text{㉡}$$

$$\text{㉠} = \text{㉡} \text{에서 } \sqrt{2}k = \sqrt{2}(1 + r + r^2) \text{이므로}$$

$$k = 1 + r + r^2 \quad \dots\dots\text{㉢}$$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이고 직선 AB의 기울기가 -1 이므로 직각삼각형 AHB에서

$$\overline{AH} = \overline{BH} = 1$$

따라서 B(1, $k-1$)이고, 점 B는 곡선 $y = 3^x + 9$ 위에 있으므로

$$k-1 = 3+9$$

$$\therefore k = 13$$

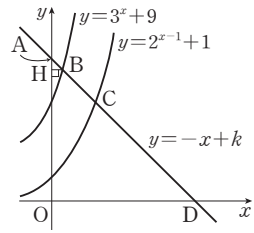
$$\text{이것을 ㉢에 대입하면 } 1 + r + r^2 = 13$$

$$r^2 + r - 12 = 0, \quad (r+4)(r-3) = 0$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = 2r^2 = 2 \times 3^2 = 18$$

답 18



20

정삼각형 OAB의 한 변의 길이가 32이므로

정삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 32^2 = 256\sqrt{3}$$

정삼각형 AA₁B₁의 넓이는 정삼각형 OAB의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이

므로

$$256\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = 64\sqrt{3}$$

a_n 의 정의에 의하여 정삼각형 A₁A₂B₂의 넓이가 a_1 이고 이는

정삼각형 AA₁B₁의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$a_1 = 64\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = 16\sqrt{3}$$

정삼각형 A₂A₃B₃의 넓이가 a_2 이고 이는 a_1 의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{4} \times a_1 = 16\sqrt{3} \times \frac{1}{4}$$

정삼각형 A₃A₄B₄의 넓이가 a_3 이고 이는 a_2 의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$a_3 = \frac{1}{4} \times a_2 = \left(16\sqrt{3} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = 16\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

⋮

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= 16\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \therefore a_7 &= 16\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{4^2 \times \sqrt{3}}{4^6} = \frac{\sqrt{3}}{4^4} = \frac{\sqrt{3}}{256}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{256}$

21

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7$$

$$= (2-1) + (2^2+1) + (2^3-1) + \cdots + (2^7-1)$$

$$= (2+2^2+2^3+\cdots+2^7)-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $2+2^2+2^3+\cdots+2^7$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 7항까지의 합이므로

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^7 = \frac{2 \times (2^7-1)}{2-1} = 2^8-2$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 &= (2^8-2)-1 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 2^8-3\end{aligned}$$

따라서 $a=8, b=3$ 이므로

$$a+b=8+3=11$$

답 11

22

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a>0$), 공비를 r ($r>0$)이라 하면

$$a_1 a_2 = a_{10} \text{에서 } a \times ar = ar^9$$

$$\therefore a = r^8 \quad (\because a>0, r>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_9 = 90 \text{에서 } a + ar^8 = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a + a^2 = 90, a^2 + a - 90 = 0$$

$$(a+10)(a-9) = 0 \quad \therefore a = 9 \quad (\because a>0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$r^8 = 9, r^4 = 3 \quad (\because r^4 > 0)$$

$$\therefore r^{20} = (r^4)^5 = 3^5 = 243$$

이때 수열 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 는 첫째항이 a , 공비가 r^2 인 등비수열이고, 수열 $a_1, -a_3, a_5, -a_7, a_9$ 는 첫째항이 a , 공비가 $-r^2$ 인 등비수열이므로 양수 k 에 대하여

$$\sqrt{(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)} = k$$

라 하면

$$\begin{aligned}k^2 &= (a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9) \\ &= \frac{a\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1} \times \frac{a\{(-r^2)^5-1\}}{-r^2-1} \\ &= \frac{a(r^{10}-1)}{r^2-1} \times \frac{a(r^{10}+1)}{r^2+1} \\ &= \frac{a^2(r^{20}-1)}{r^4-1} = \frac{9^2 \times (243-1)}{3-1} \\ &= 9^2 \times 11^2 = 99^2\end{aligned}$$

$$\therefore k = 99 \quad (\because k > 0)$$

답 99

23

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 2이고, 공비를 r 이라 하자.

$r=1$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=2$ 이므로

$$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=4>0$$

즉, 조건 ㉞를 만족시키지 않는다.

$$\therefore r \neq 1$$

또한, $r=-1$ 이면

$$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{11}-a_{11}=0$$

즉, 조건 ㉞를 만족시키지 않는다.

$$\therefore r \neq -1$$

$r \neq 1, r \neq -1$ 이면 $S_n = \frac{2(r^n-1)}{r-1}$ 이므로 조건 ㉞에서

$$\frac{2(r^{12}-1)}{r-1} - \frac{2(r^2-1)}{r-1} = 4 \times \frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$r^{12}-r^2=4(r^{10}-1)$$

$$r^2(r^{10}-1)=4(r^{10}-1)$$

$r \neq \pm 1$ 에서 $r^{10}-1 \neq 0$ 이므로

$$r^2=4$$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = 2$$

또한, 조건 ㉞에서

$$\begin{aligned}S_{12}-S_{10} &= a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11} \\ &= 2r^{10}(1+r) < 0\end{aligned}$$

$$\therefore r < -1$$

따라서 $r = -2$ 이므로

$$a_4 = 2 \times (-2)^3 = -16$$

답 -16

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면 조건 ㉞에서

$$S_{12}-S_{10}<0 \text{이므로}$$

$$S_{12}-S_{10}=a_{11}+a_{12}=2r^{10}+2r^{11}$$

$$=2r^{10}(1+r)<0$$

$$\therefore r<-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

조건 ㉞에서 $S_{12}-S_2=4S_{10}$ 이므로

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})-(a_1+a_2)$$

$$=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$

$$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{12}=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$

$$r^2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})=4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$$

$$\text{이때 } a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}\neq 0 \text{이므로}$$

$$r^2=4$$

그런데 ㉞에서 $r<-1$ 이므로 $r=-2$

$$\therefore a_4=2\times(-2)^3=-16$$

24

$\log_4 S_n - \log_4 S_{n-1} = 1$ 에서

$$\log_4 \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1, \frac{S_n}{S_{n-1}} = 4 \quad \therefore S_n = 4S_{n-1}$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1=a_1=3$, 공비가 4인 등비수열
이므로

$$S_n = 3 \times 4^{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \text{이므로}$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 3 \times 4^3 - 3 \times 4^2 = 192 - 48 = 144$$

$$\therefore \frac{a_4}{a_1} = \frac{144}{3} = 48$$

답 48

25

민성이가 2년째 말에 받을 금액은 첫째항이

48×1.006 (만 원), 공비가 1.006인 등비수열의 첫째항부터

제 24 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{48 \times 1.006 \times (1.006^{24} - 1)}{1.006 - 1}$$

$$= \frac{48 \times 1.006 \times 0.15}{0.006} \text{ (만 원)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

지우가 3년째 말에 받을 금액은 첫째항이

$a \times 1.006$ (만 원), 공비가 1.006인 등비수열의 첫째항부터

제 36 항까지의 합과 같으므로

3년은 36개월

$$\frac{a \times 1.006 \times (1.006^{36} - 1)}{1.006 - 1}$$

$$= \frac{a \times 1.006 \times 0.24}{0.006} \text{ (만 원)} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 ㉞=㉝이므로

$$48 \times 0.15 = a \times 0.24 \quad \therefore a = 30$$

답 30

STEP 2 개념 마무리

본문 p.257

1 ㉞

2 97

3 24

4 67

5 647

6 33개월 후

1

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b ($b \neq 0$), 공비를 r ($r \neq 0$)이라 하자.

ㄱ. $a_{n+1} = a_n + d$ 에서 $a_n - a_{n+1} = -d$

즉, 수열 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 $-d$, 공차가 0인 등차수열이다. (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n \times b_n\}$ 이 등비수열이면

$a_{n+1}b_{n+1} = k \times a_nb_n$ 을 만족시키는 상수 k 가 존재한다.

이때 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비가 r 이므로 $b_{n+1} = rb_n$ 에서

$$a_{n+1}rb_n = k \times a_nb_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{k}{r}a_n \quad (\because b_n \neq 0)$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열인 동시에 등비수열이 되어야 하므로 공차가 0이어야 한다. (참)

ㄷ. (반례) $b_n = 1$ 인 경우, 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 등차수열이지만

$b_1 = 1 \neq 0$ (거짓) 첫째항이 $a+1$, 공차가 d 인 등차수열이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㉞

2

등차수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 의 공차가 양수이고, 홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크므로 k 는 홀수이다.

즉, 홀수 k 에 대하여 주어진 등차수열의 홀수 번째 항들의 개

수는 $\frac{k+1}{2}$, 짝수 번째 항들의 개수는 $\frac{k-1}{2}$ 이다.

즉, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_k = 180$ 이므로
 $\frac{k+1}{2}(a_1 + a_k) = 180$

$\therefore (k+1)(a_1 + a_k) = 720 \quad \cdots \textcircled{㉑}$

또한, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{k-1} = 135$ 이므로
 $\frac{k-1}{2}(a_2 + a_{k-1}) = 135$

$\therefore (k-1)(a_2 + a_{k-1}) = 540 \quad \cdots \textcircled{㉒}$

이때 주어진 등차수열의 공차를 d ($d > 0$)라 하면
 $a_2 + a_{k-1} = (a_1 + d) + a_{k-1} = a_1 + (a_{k-1} + d) = a_1 + a_k$
 이므로

$(k-1)(a_1 + a_k) = 540 \quad (\because \textcircled{㉒}) \quad \cdots \textcircled{㉓}$

$\textcircled{㉑} - \textcircled{㉓}$ 을 하면

$2(a_1 + a_k) = 180 \quad \therefore a_1 + a_k = 90$

이것을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$90(k+1) = 720, k+1 = 8 \quad \therefore k = 7$

$\therefore a_1 + a_k + k = 90 + 7 = 97$

답 97

3

양수 k 에 대하여 $x^{\frac{2}{\alpha}} = y^{\frac{1}{\beta}} = z^{-\frac{1}{\gamma}} = k$ 로 놓으면

$x^2 = k^\alpha, y = k^\beta, z^{-1} = k^\gamma$

이때 α, β, γ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $k^\alpha, k^\beta, k^\gamma$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

즉, $(k^\beta)^2 = k^\alpha \times k^\gamma$ 에서

$y^2 = x^2 \times z^{-1} \quad \therefore y^2 = \frac{x^2}{z} \quad \cdots \textcircled{㉑}$

$x > 0, y > 0, z > 0$ 에서 $\frac{18z}{x^2} > 0, 8y^2 > 0$ 이므로 산술평균
 과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{18z}{x^2} + 8y^2 = \frac{18}{y^2} + 8y^2 \quad (\because \textcircled{㉑})$
 $\geq 2\sqrt{\frac{18}{y^2} \times 8y^2} = 24$
 (단, 등호는 $\frac{18}{y^2} = 8y^2$, 즉 $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{18z}{x^2} + 8y^2$ 의 최솟값은 24이다.

답 24

보충 설명

a, b, c 가 이 순서대로 공차가 d 인 등차수열을 이루는 경우
 양수 k 에 대하여 k^a, k^b, k^c 은 이 순서대로 공비가 k^d 인 등
 비수열을 이룬다.

예를 들어, a, b, c 가 이 순서대로 공차가 d 인 등차수열을 이
 루면 $2b = a + c$ 이고 $2^a, 2^b, 2^c$ 에서 $(2^b)^2 = 2^a \times 2^c$ 이 성립하
 므로 세 수 $2^a, 2^b, 2^c$ 은 이 순서대로 공비가 2^d 인 등비수열을
 이룬다.

4

조건 ㉑에서 a_7, a_8, a_k 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 이 수열의 공비를 r 이라 하면

$a_8 = a_7 r, a_k = a_7 r^2 \quad \cdots \textcircled{㉑}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)라 하면 조건 ㉒에서
 $a_n = a_1 + (n-1)d$ (a_1 은 정수, d 는 자연수)

또한, $a_8 - a_7 = d, a_k - a_8 = (k-8)d$ 이므로

이 식에 $\textcircled{㉑}$ 을 대입하면

$a_7 r - a_7 = d, a_7 r^2 - a_7 r = (k-8)d$

$a_7(r-1) = d, a_7(r-1)r = (k-8)d$

$\therefore dr = (k-8)d$

이때 $d \neq 0$ 이므로 $r = k-8 \quad \cdots \textcircled{㉒}$

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$a_k = a_7(k-8)^2$

이때 $a_k = 144 = 12^2$ 이므로

$a_7(k-8)^2 = 12^2 \quad \cdots \textcircled{㉓}$

조건 ㉒에서 a_7 과 $k-8$ 이 정수이므로 a_7 은 제곱수이어야
 한다. 12^2 의 약수 중 제곱수인 것은

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2, 12^2$

이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a_7 = 1^2$ 일 때,

$\textcircled{㉓}$ 에서 $(k-8)^2 = 12^2$ 이므로 $k = 20$ ($\because k > 8$)

(ii) $a_7 = 2^2$ 일 때,

$\textcircled{㉓}$ 에서 $(k-8)^2 = 6^2$ 이므로 $k = 14$ ($\because k > 8$)

(iii) $a_7 = 3^2$ 일 때,

$\textcircled{㉓}$ 에서 $(k-8)^2 = 4^2$ 이므로 $k = 12$ ($\because k > 8$)

(iv) $a_7 = 4^2$ 일 때,

$\textcircled{㉓}$ 에서 $(k-8)^2 = 3^2$ 이므로 $k = 11$ ($\because k > 8$)

(v) $a_7=6^2$ 일 때,

㉔에서 $(k-8)^2=2^2$ 이므로 $k=10$ ($\because k>8$)

(vi) $a_7=12^2$ 일 때,

㉔에서 $(k-8)^2=1$ 이므로 $k=9$ ($\because k>8$)

그런데 $k=9$ 이면 ㉔에서 $r=1$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0이다.

$\therefore k \neq 9$

(i)~(vi)에서 구하는 모든 k 의 값의 합은

$$20+14+12+11+10=67$$

답 67

5

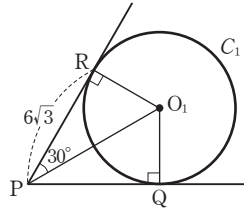
오른쪽 그림과 같이 원 C_1 의 중

심을 O_1 이라 하면 직각삼각형

RPO_1 에서

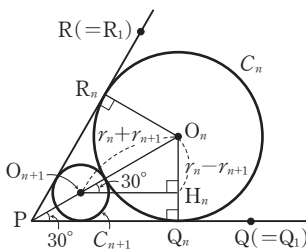
$$\overline{RO_1} = \overline{PR} \tan 30^\circ$$

$$= 6\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 6$$



즉, 원 C_1 의 반지름의 길이는 6이다. $\leftarrow r_1=6$

또한, 다음 그림과 같이 n 번째에 그려진 원 C_n 의 중심을 O_n , 반지름의 길이를 r_n 이라 하고, 원 C_n 과 두 선분 PQ, PR의 접점을 각각 Q_n , R_n 이라 하자.



점 O_{n+1} 에서 선분 O_nQ_n 에 내린 수선의 발을 H_n 이라 하면 직각삼각형 $O_nO_{n+1}H_n$ 에서

$$\overline{O_nO_{n+1}} = r_n + r_{n+1}, \quad \overline{O_nH_n} = r_n - r_{n+1}$$

이때 $\angle O_nO_{n+1}H_n = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{O_nH_n} = \overline{O_nO_{n+1}} \sin 30^\circ$$

$$r_n - r_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + r_{n+1}), \quad \frac{1}{2}r_n = \frac{3}{2}r_{n+1}$$

$$\therefore r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$$

즉, 수열 $\{r_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

첫째항부터 제 6 항까지의 합은

$$\frac{6 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right\} = 9 - \frac{1}{3^4} = \frac{728}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=728$ 이므로

$$q-p=728-81=647$$

답 647

6

매월 초에 50만 원씩 적립할 때 자연수 n 에 대하여 n 개월째 초의 적립금의 원리합계를 S 라 하면

$$S = 50 + 50 \times 1.01 + 50 \times 1.01^2 + \cdots + 50 \times 1.01^{n-1}$$

(만 원)

이것은 첫째항이 50, 공비가 1.01인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같으므로

$$S = \frac{50 \times (1.01^n - 1)}{1.01 - 1} = 5000 \times (1.01^n - 1) \text{ (만 원)}$$

이것이 2000만 원보다 크거나 같아야 하므로

$$5000 \times (1.01^n - 1) \geq 2000$$

$$1.01^n - 1 \geq 0.4, \quad 1.01^n \geq 1.4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 1.01 \geq \log 1.4$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 1.4}{\log 1.01} = \frac{0.1461}{0.0043} = 33. \times \times \times$$

이를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 34이므로 1개월 초에서 시작하여 34개월 초까지 적립하면 승용차를 살 수 있을 만큼 모르게 된다.

따라서 적어도 $34-1=33$ (개월 후)에 승용차를 살 수 있다.

답 33개월 후

보충 설명

매월 초에 적립하는 경우 마지막 금액을 적립하는 동시에 원하는 금액이 완성될 수 있다. 즉, 마지막 적립 금액에는 이자가 붙지 않으므로 어느 월초까지의 원리합계를 구해야 하고, 이와 같이 구하면 적립금의 원리합계의 첫째항은

50×1.01 (만 원)이 아니라 50만 원이다.

09. 수열의 합

1 합의 기호 Σ

기본 + 필수연습

본문 pp.262-265

- 01 (1) $\sum_{k=1}^7 \frac{1}{3k-2}$ (2) $\sum_{k=1}^6 (-3)^k$
 02 (1) 27 (2) 37 03 (1) 9 (2) 540
 04 $\sqcup, \sqsubset$ 05 26 06 (1) 16 (2) 9
 07 65 08 20 09 (1) 650 (2) $93\sqrt{2}$
 10 $\frac{3}{31}$

01

(1) 수열 $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = \frac{1}{3k-2}$$

$$\frac{1}{3k-2} = \frac{1}{19} \text{에서}$$

$$3k-2=19, 3k=21 \quad \therefore k=7$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{19} = \sum_{k=1}^7 \frac{1}{3k-2}$$

(2) 수열 $-3, 9, -27, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (-3)^k$$

$$(-3)^k = 729 \text{에서 } k=6$$

$$\therefore -3 + 9 - 27 + \dots + 729 = \sum_{k=1}^6 (-3)^k$$

답 (1) $\sum_{k=1}^7 \frac{1}{3k-2}$ (2) $\sum_{k=1}^6 (-3)^k$

02

$$\sum_{k=1}^8 2a_k = 3 \text{에서 } 2 \sum_{k=1}^8 a_k = 3 \quad \therefore \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{3}{2}$$

$$\text{또한, } \sum_{k=1}^8 (-b_k) = 7 \text{에서 } -\sum_{k=1}^8 b_k = 7$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 b_k = -7$$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^8 (4a_k - 3b_k) &= 4 \sum_{k=1}^8 a_k - 3 \sum_{k=1}^8 b_k \\ &= 4 \times \frac{3}{2} - 3 \times (-7) \\ &= 6 + 21 = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^8 2(a_k + b_k + 3) &= 2 \left(\sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=1}^8 b_k + \sum_{k=1}^8 3 \right) \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{2} - 7 + 3 \times 8 \right) \\ &= 2 \times \frac{37}{2} = 37 \end{aligned}$$

답 (1) 27 (2) 37

03

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k} - \sum_{k=2}^{21} \frac{1}{a_k} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{21}} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{21}} = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) \\ &\quad + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \\ &\cong, \sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n(n+3) \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{30} a_k &= \sum_{k=1}^{2 \times 15} a_k = 2 \times 15 \times (15+3) = 540 \end{aligned}$$

답 (1) 9 (2) 540

04

$$\neg. 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^n 2^k \text{ (거짓)}$$

$$\begin{aligned} \sqcup. \sum_{k=1}^9 a_k \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= (a_1 + a_4 + a_7) + (a_2 + a_5 + a_8) + (a_3 + a_6 + a_9) \\ &= \sum_{k=1}^3 a_{3k-2} + \sum_{k=1}^3 a_{3k-1} + \sum_{k=1}^3 a_{3k} \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqsubset. \sum_{k=1}^8 k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 8^3 \\ &= (2-1)^3 + (3-1)^3 + (4-1)^3 + \dots + (9-1)^3 \\ &= \sum_{i=2}^9 (i-1)^3 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n a_k$ 에서 변수인 k 는 i, j, l 등 다른 문자로 바꾸어도 무방하다.

$$\begin{aligned}
& \text{ㄹ. } \sum_{k=1}^{20} (a_k - a_{20-k}) \\
&= (a_1 - a_{19}) + (a_2 - a_{18}) + (a_3 - a_{17}) + \cdots + (a_{20} - a_0) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) \\
&\quad - (a_{19} + a_{18} + a_{17} + \cdots + a_0) \\
&= a_{20} - a_0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄹ} \\
&\text{이때 수열 } \{a_n\} \text{에서 } a_0 \neq a_{20} \text{이면} \\
&\textcircled{ㄹ} \text{에서 } \sum_{k=1}^{20} (a_k - a_{20-k}) \neq 0 \text{ (거짓)} \\
&\text{따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.}
\end{aligned}$$

답 ㄴ, ㄷ

05

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{10} \{(k+1)a_k - ka_{k+1}\} \\
&= (2a_1 - a_2) + (3a_2 - 2a_3) + (4a_3 - 3a_4) \\
&\quad + \cdots + (11a_{10} - 10a_{11}) \\
&= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) - 10a_{11} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 10a_{11} = 2 \times 385 - 10a_{11} \\
&= 770 - 10a_{11} \\
&\text{즉, } 770 - 10a_{11} = 510 \text{에서} \\
&10a_{11} = 260 \quad \therefore a_{11} = 26
\end{aligned}$$

답 26

06

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1) = 8 \text{에서} \\
& 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 1 = 8, \quad 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - 10 = 8 \\
& 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 18 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
& \sum_{k=1}^{10} (3a_k - b_k) = 20 \text{에서} \\
& 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 20 \\
& \text{위의 식에 } \textcircled{㉠} \text{을 대입하면} \\
& 27 - \sum_{k=1}^{10} b_k = 20 \quad \therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = 7 \\
& \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 9 + 7 = 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \sum_{k=1}^{17} (a_k + b_k)^2 = 50 \text{에서} \\
& \sum_{k=1}^{17} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) = 50 \\
& \therefore \sum_{k=1}^{17} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{17} a_k b_k + \sum_{k=1}^{17} b_k^2 = 50 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
& \sum_{k=1}^{17} (a_k - b_k)^2 = 14 \text{에서} \\
& \sum_{k=1}^{17} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) = 14 \\
& \therefore \sum_{k=1}^{17} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{17} a_k b_k + \sum_{k=1}^{17} b_k^2 = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\
& \textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} \text{을 하면} \\
& 4 \sum_{k=1}^{17} a_k b_k = 36 \\
& \therefore \sum_{k=1}^{17} a_k b_k = 9
\end{aligned}$$

답 (1) 16 (2) 9

07

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{10} a_k = 45, \quad \sum_{k=1}^{20} a_k = 60 \text{이므로} \\
& \sum_{k=11}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = 60 - 45 = 15 \\
& \sum_{k=1}^{10} b_k = 20, \quad \sum_{k=1}^{20} b_k = 30 \text{이므로} \\
& \sum_{k=11}^{20} b_k = \sum_{k=1}^{20} b_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 30 - 20 = 10 \\
& \therefore \sum_{k=11}^{20} (a_k + 2b_k + 3) = \sum_{k=11}^{20} a_k + 2 \sum_{k=11}^{20} b_k + \sum_{k=11}^{20} 3 \\
& \quad = 15 + 2 \times 10 + 3 \times \underbrace{10}_{20-11+1} = 65 \\
& \text{답 65}
\end{aligned}$$

08

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{10} (2a_n + 3) = \sum_{n=1}^9 (2a_n + k) \text{에서} \\
& 2 \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} 3 = 2 \sum_{n=1}^9 a_n + \sum_{n=1}^9 k \\
& 2 \left(\sum_{n=1}^{10} a_n - \sum_{n=1}^9 a_n \right) = 9k - 30 \\
& 2a_{10} = 9k - 30 \quad \therefore a_{10} = \frac{9}{2}k - 15 \\
& \text{이때 } a_{10} = 75 \text{이므로} \\
& \frac{9}{2}k - 15 = 75, \quad \frac{9}{2}k = 90 \\
& \therefore k = 90 \times \frac{2}{9} = 20
\end{aligned}$$

답 20

09

- (1) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4=10\text{에서 } a+3d=10 \quad \cdots\cdots\textcircled{㉠}$$

$$a_7-a_5=6\text{에서}$$

$$(a+6d)-(a+4d)=6, 2d=6 \quad \therefore d=3$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$a+9=10\text{이므로 } a=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k+1} &= (a_2+a_4+\cdots+a_{20})+(a_3+a_5+\cdots+a_{21}) \\ &= a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{21} \\ &= \sum_{k=1}^{21} a_k - a_1 \\ &= \frac{21 \times \{2 \times 1 + (21-1) \times 3\}}{2} - 1 \\ &= 651 - 1 = 650 \end{aligned}$$

- (2) 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 $a>0, r>0$

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = 12\text{에서}$$

$$\frac{ar^2 \times ar^7}{ar^5} = 12 \quad \therefore ar^4 = 12 \quad \cdots\cdots\textcircled{㉡}$$

$$a_5+a_7=36\text{에서}$$

$$ar^4+ar^6=36 \quad \therefore ar^4(1+r^2)=36 \quad \cdots\cdots\textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=3, r=\sqrt{2} \quad (\because a>0, r>0)$$

$$\text{즉, } a_n=3 \times (\sqrt{2})^{n-1}\text{이므로}$$

$$a_{2n}=3 \times (\sqrt{2})^{2n-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k} &= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2^k \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times (2^5-1)}{2-1} = 93\sqrt{2} \end{aligned}$$

첫째항이 $3\sqrt{2}$, 공비가 2인 등비수열의
첫째항부터 제5항까지의 합

답 (1) 650 (2) $93\sqrt{2}$

10

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항 a_1 이 양수, 공비가 음수이므로

- (i) $n=2m-1$ (m 은 자연수)일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1, -2a_1, 4a_1, -8a_1, \cdots$ 이므로 자연수 m 에 대하여 $a_{2m-1}>0, a_{2m}<0$ 이다.

$$a_{2m-1}>0\text{이므로}$$

$$|a_{2m-1}|+a_{2m-1}=2a_{2m-1}$$

- (ii) $n=2m$ (m 은 자연수)일 때,

$$a_{2m}<0\text{이므로}$$

$$|a_{2m}|+a_{2m}=0$$

- (i), (ii)에서

$$\sum_{k=1}^9 (|a_k|+a_k) = 2a_1+2a_3+2a_5+2a_7+2a_9$$

$$= 2 \sum_{m=1}^5 a_{2m-1} \quad \cdots\cdots\textcircled{㉣}$$

$$\text{이때 } a_n = a_1 \times (-2)^{n-1}\text{이므로}$$

$$a_{2m-1} = a_1 \times (-2)^{2m-2} = a_1 \times 4^{m-1}$$

㉣에서

$$\sum_{k=1}^9 (|a_k|+a_k) = 2 \sum_{m=1}^5 a_{2m-1} = 2 \sum_{m=1}^5 (a_1 \times 4^{m-1})$$

$$= 2a_1 \sum_{m=1}^5 4^{m-1}$$

$$= 2a_1 \times \frac{4^5-1}{4-1}$$

$$= 682a_1 = 66$$

$$\therefore a_1 = \frac{66}{682} = \frac{3}{31}$$

답 $\frac{3}{31}$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.266

01 192

02 16

03 370

04 230

05 29

06 $\frac{2^{17}-2}{5}$

01

자연수 n 에 대하여 2^n 은

$$2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, \cdots$$

이고 5로 나누었을 때의 나머지는 각각 2, 4, 3, 1, 2, 4,

$\cdots$, 즉 2, 4, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $77=4 \times 19+1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{77} a_k = (2+4+3+1) \times 19 + 2 = 192$$

답 192

02

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(k+1) &= f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(n) + f(n+1) \\ \sum_{k=2}^{n+1} f(k-2) &= f(0) + f(1) + f(2) \\ &\quad + \cdots + f(n-2) + f(n-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n f(k+1) - \sum_{k=2}^{n+1} f(k-2) \\ &= f(n) + f(n+1) - f(0) - f(1) \\ &= n^2 + n + \{(n+1)^2 + (n+1)\} - 0 - 2 \\ &= 2n^2 + 4n\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2n^2 + 4n = 576 \text{에서}$$

$$n^2 + 2n - 288 = 0$$

$$(n+18)(n-16) = 0$$

$$\therefore n = 16 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 16

03

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = n^2 + cn \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}a_8 &= \sum_{k=1}^4 a_{2k} - \sum_{k=1}^3 a_{2k} \\ &= (4^2 + 4c) - (3^2 + 3c) = 7 + c\end{aligned}$$

$$\text{이때 } a_8 = 10 \text{이므로 } 7 + c = 10$$

$$\therefore c = 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 3n^2 - 6n, \quad \sum_{k=1}^n a_{2k} = n^2 + 3n$$

한편,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_{2k-1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k\end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = (3n^2 - 6n) + (n^2 + 3n) = 4n^2 - 3n$$

위의 식의 양변에 $n = 10$ 을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 4 \times 10^2 - 3 \times 10 = 370$$

답 370

다른 풀이

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = cn^2 - 6n \text{에서}$$

$$a_1 = c - 6,$$

$$\begin{aligned}a_{2n-1} &= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} \\ &= cn^2 - 6n - \{c(n-1)^2 - 6(n-1)\} \\ &= cn^2 - 6n - (cn^2 - 2cn + c - 6n + 6) \\ &= 2cn - c - 6 \quad (\text{단, } n \geq 2)\end{aligned}$$

또한, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = n^2 + cn$ 에서

$$a_2 = 1 + c,$$

$$\begin{aligned}a_{2n} &= \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} \\ &= n^2 + cn - \{(n-1)^2 + c(n-1)\} \\ &= n^2 + cn - (n^2 - 2n + 1 + cn - c) \\ &= 2n + c - 1 \quad (\text{단, } n \geq 2)\end{aligned}$$

이때 $a_8 = 10$ 이므로

$$2 \times 4 + c - 1 = 10, \quad c + 7 = 10 \quad \therefore c = 3$$

$$\therefore a_{2n-1} = 6n - 9, \quad a_{2n} = 2n + 2 \quad (\text{단, } n \geq 1)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6k - 9 + 2k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (8k - 7) \\ &= 8 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 7 \quad \left[\begin{array}{l} \text{첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의} \\ \text{첫째항부터 제10항까지의 합} \end{array} \right] \\ &= 8 \times \frac{10 \times (2 \times 1 + 9 \times 1)}{2} - 7 \times 10 \\ &= 440 - 70 = 370\end{aligned}$$

04

$$S_n = {}_{n+2}C_3 = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{이므로}$$

(i) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\textcircled{1}$ 은 $\textcircled{2}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geq 1)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{20} (a_{k+1} - a_k) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{20}) \\
 &= a_{21} - a_1 \\
 &= \frac{21 \times 22}{2} - 1 = 230
 \end{aligned}$$

답 230

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=1}^{20} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{20} a_k \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{21} a_k - a_1 \right) - \sum_{k=1}^{20} a_k \\
 &= S_{21} - S_1 - S_{20} \\
 &= {}_{23}C_3 - {}_3C_3 - {}_{22}C_3 \\
 &= {}_{22}C_2 - {}_3C_3 \quad (\because {}_{22}C_2 + {}_{22}C_3 = {}_{23}C_3) \\
 &= \frac{22 \times 21}{2} - 1 = 230
 \end{aligned}$$

보충 설명

조합의 수 ${}_nC_r$ |

$$(1) {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \leq r \leq n)$$

$$(2) {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)$$

05

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 2 = a + 2n - 2$$

$$\sum_{k=1}^m a_{k+1} = 240 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m a_{k+1} &= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{m+1} \\
 &= \frac{m(a_2 + a_{m+1})}{2} \\
 &= \frac{m(2a + 2 + 2m)}{2} \quad \leftarrow a_2 = a + 2, a_{m+1} = a + 2m \\
 &= m(a + 1 + m) = 240 \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m (a_k + m) = 360 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m (a_k + m) &= \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m m \\
 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + m^2 \\
 &= \frac{m(a_1 + a_m)}{2} + m^2 \\
 &= \frac{m(2a + 2m - 2)}{2} + m^2 \quad \leftarrow a_1 = a, a_m = a + 2m - 2 \\
 &= m(a + m - 1) + m^2 = 360 \quad \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 2m - m^2 = -120$$

$$\text{즉, } m^2 - 2m - 120 = 0 \text{에서}$$

$$(m+10)(m-12) = 0$$

$$\therefore m = 12 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$12(a+1+12) = 240, a+13 = 20$$

$$\therefore a = 7$$

따라서 $a_n = 2n + 5, m = 12$ 이므로

$$a_m = a_{12} = 2 \times 12 + 5 = 29$$

답 29

다른 풀이

$$\sum_{k=1}^m a_{k+1} = 240, \sum_{k=1}^m (a_k + m) = 360 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^m a_{k+1} - \sum_{k=1}^m (a_k + m) = 240 - 360 = -120 \quad \cdots \textcircled{3}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^m a_{k+1} - \sum_{k=1}^m (a_k + m) &= \sum_{k=1}^m (a_{k+1} - a_k - m) = \sum_{k=1}^m (2 - m) \\
 &= (2 - m) \times m = 2m - m^2
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } 2m - m^2 = -120, m^2 - 2m - 120 = 0$$

$$(m+10)(m-12) = 0$$

$$\therefore m = 12 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

$$\text{한편, } \sum_{k=1}^{12} (a_k + 12) = 360 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} 12 &= 360 \\
 \underbrace{\sum_{k=1}^{12} a_k}_{\text{첫째항이 } a, \text{ 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 12항까지의 합}} + 12 \times 12 &= 360 \\
 \frac{12(2a + 11 \times 2)}{2} + 12 \times 12 &= 360
 \end{aligned}$$

$$6(2a + 22) = 216, 2a + 22 = 36$$

$$2a = 14 \quad \therefore a = 7$$

$$\therefore a_{12} = 7 + 11 \times 2 = 29$$

06

$$\sum_{k=1}^{16} a_k$$

$$\begin{aligned}
 &= (-2)^1 \sin \frac{\pi}{2} + (-2)^2 \sin \pi + (-2)^3 \sin \frac{3}{2}\pi \\
 &\quad + \cdots + (-2)^{16} \sin 8\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-2)^1 \times 1 + (-2)^2 \times 0 + (-2)^3 \times (-1) + (-2)^4 \times 0 \\
&\quad + (-2)^5 \times 1 + \cdots + (-2)^{16} \times 0 \\
&= -2 + 2^3 - 2^5 + 2^7 - 2^9 + 2^{11} - 2^{13} + 2^{15} \\
&= \frac{-2 \times \{1 - (-4)^8\}}{1 - (-4)} = \frac{2^{17} - 2}{5} \quad \text{첫째항이 } -2, \text{ 공비가 } -4 \text{인 등비수열의} \\
&\quad \text{첫째항부터 제8항까지의 합} \\
&\quad \text{답 } \frac{2^{17} - 2}{5}
\end{aligned}$$

2 자연수의 거듭제곱의 합

기본 + 필수연습

본문 pp.269~272

11 (1) -105 (2) 546 (3) 4950

12 (1) 284 (2) 1500

13 6

14 7

15 14

16 (1) 420 (2) 140

17 156

18 1302

19 1635

20 $\frac{3^{24}-1}{12}$

21 2720

11

$$\begin{aligned}
(1) \sum_{k=1}^{15} (-2k+9) &= -2 \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 9 \\
&= -2 \times \frac{15 \times 16}{2} + 9 \times 15 \\
&= -240 + 135 = -105
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \sum_{k=1}^7 (3k-1)(k+2) &= \sum_{k=1}^7 (3k^2+5k-2) \\
&= 3 \sum_{k=1}^7 k^2 + 5 \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 2 \\
&= 3 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 5 \times \frac{7 \times 8}{2} - 2 \times 7 \\
&= 420 + 140 - 14 = 546
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \sum_{k=1}^{10} k(k-1)(2k-1) &= \sum_{k=1}^{10} (2k^3-3k^2+k) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{10} k^3 - 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\
&= 2 \times \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - 3 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \\
&= 6050 - 1155 + 55 = 4950
\end{aligned}$$

답 (1) -105 (2) 546 (3) 4950

12

(1) 수열 $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= (n+1)^2 \\
\therefore \sum_{k=1}^8 (k+1)^2 &= \sum_{k=1}^8 (k^2+2k+1) \\
&= \sum_{k=1}^8 k^2 + 2 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 1 \\
&= \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 2 \times \frac{8 \times 9}{2} + 8 \\
&= 204 + 72 + 8 = 284
\end{aligned}$$

(2) 수열 $1^2 \times 2, 2^2 \times 3, 3^2 \times 4, 4^2 \times 5, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= n^2(n+1) \\
\therefore \sum_{k=1}^8 k^2(k+1) &= \sum_{k=1}^8 (k^3+k^2) \\
&= \sum_{k=1}^8 k^3 + \sum_{k=1}^8 k^2 \\
&= \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\
&= 1296 + 204 = 1500
\end{aligned}$$

답 (1) 284 (2) 1500

다른 풀이

$$\begin{aligned}
(1) \sum_{k=1}^8 (k+1)^2 &= \sum_{k=2}^9 k^2 = \sum_{k=1}^9 k^2 - 1 \\
&= \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 1 = 285 - 1 = 284
\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n (k^2+2k) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2-2k) \\
&= \sum_{k=1}^n (k^2+2k) - \left\{ \sum_{k=1}^n (k^2-2k) - (n^2-2n) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \{ (k^2+2k) - (k^2-2k) \} + (n^2-2n) \\
&= \sum_{k=1}^n 4k + (n^2-2n) = 4 \sum_{k=1}^n k + (n^2-2n) \\
&= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n^2 - 2n \\
&= 3n^2
\end{aligned}$$

즉, $3n^2 = 108$ 에서 $n^2 = 36$

이때 n 은 자연수이므로 $n=6$

답 6

14

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 (k^3 - ak) &= \sum_{k=1}^8 k^3 - a \sum_{k=1}^8 k \\ &= \left(\frac{8 \times 9}{2}\right)^2 - a \times \frac{8 \times 9}{2} \\ &= 36^2 - 36a \\ &= 36(36 - a)\end{aligned}$$

즉, $36(36 - a) = 1044$ 이므로

$$36 - a = 29 \quad \therefore a = 7$$

답 7

15

이차방정식 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha + 1)(\beta + 1) + (\alpha + 2)(\beta + 2) + (\alpha + 3)(\beta + 3) \\ + \cdots + (\alpha + 7)(\beta + 7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^7 (\alpha + k)(\beta + k) \\ &= \sum_{k=1}^7 \{k^2 + (\alpha + \beta)k + \alpha\beta\} \\ &= \sum_{k=1}^7 (k^2 - 4k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^7 k^2 - 4 \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 2 \\ &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 4 \times \frac{7 \times 8}{2} - 2 \times 7 \\ &= 140 - 112 - 14 = 14\end{aligned}$$

답 14

16

$$\begin{aligned}(1) \sum_{k=1}^7 \left\{ \sum_{n=1}^k \left(\sum_{m=1}^n 5 \right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^7 \left(\sum_{n=1}^k 5n \right) = \sum_{k=1}^7 \left(5 \sum_{n=1}^k n \right) \\ &= \sum_{k=1}^7 \left\{ 5 \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} = \sum_{k=1}^7 \left(\frac{5}{2} k^2 + \frac{5}{2} k \right) \\ &= \frac{5}{2} \sum_{k=1}^7 k^2 + \frac{5}{2} \sum_{k=1}^7 k \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + \frac{5}{2} \times \frac{7 \times 8}{2} = 350 + 70 = 420\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{m=1}^n mn \right) &= \sum_{n=1}^5 \left(n \sum_{m=1}^n m \right) \\ &\quad \text{n을 상수로 생각한다.} \\ &= \sum_{n=1}^5 \left\{ n \times \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{2} n^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 n^3 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 n^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \\ &= \frac{225}{2} + \frac{55}{2} = 140\end{aligned}$$

답 (1) 420 (2) 140

17

$\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\}$ 에서

$$\sum_{j=1}^n (i+j) = \sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = in + \frac{n(n+1)}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\} &= \sum_{i=1}^m \left\{ in + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n \sum_{i=1}^m i + \sum_{i=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn}{2} (m+n+2)\end{aligned}$$

이때 $m+n=11, mn=24$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\} &= \frac{mn}{2} (m+n+2) \\ &= \frac{24}{2} \times (11+2) = 156\end{aligned}$$

답 156

18

$\sum_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n 2^{k+n-1} \right)$ 에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 2^{k+n-1} &= \sum_{k=1}^n (2^{n-1} \times 2^k) \\ &= 2^{n-1} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n-1} \times \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} \times (2^{n+1} - 2) \\ &= 4^n - 2^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n 2^{k+n-1} \right) &= \sum_{n=1}^5 (4^n - 2^n) \\
&= \sum_{n=1}^5 4^n - \sum_{n=1}^5 2^n \\
&= \frac{4 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} - \frac{2 \times (2^5 - 1)}{2 - 1} \\
&= \frac{4}{3} \times 1023 - 2 \times 31 \\
&= 1364 - 62 = 1302
\end{aligned}$$

답 1302

19

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = 1^2 + 2 = 3$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= n^2 + 2n - \{ (n-1)^2 + 2(n-1) \} \\
&= 2n + 1
\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n + 1$ ($n \geq 1$)이므로

$$a_{4k-2} = 2(4k-2) + 1 = 8k - 3$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^5 k^2 a_{4k-2} &= \sum_{k=1}^5 k^2 (8k - 3) \\
&= \sum_{k=1}^5 (8k^3 - 3k^2) = 8 \sum_{k=1}^5 k^3 - 3 \sum_{k=1}^5 k^2 \\
&= 8 \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - 3 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \\
&= 1800 - 165 = 1635
\end{aligned}$$

답 1635

20

$$\sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1 \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = 3^1 - 1 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} \\
&= 3^{n-1}(3 - 1) = 2 \times 3^{n-1}
\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)이므로

$$a_{2k+1} = 2 \times 3^{2k}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{a_{2k+1}}{27} &= \sum_{k=1}^{12} \frac{2 \times 3^{2k}}{27} = \frac{2}{27} \sum_{k=1}^{12} 9^k \\
&= \frac{2}{27} \times \frac{9 \times (9^{12} - 1)}{9 - 1} \\
&= \frac{3^{24} - 1}{12}
\end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{3^{24} - 1}{12}$$

21

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = n^2 + n \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$\frac{a_1}{2} = 1^2 + 1 = 2 \quad \therefore a_1 = 4$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} \\
&= n^2 + n - \{ (n-1)^2 + (n-1) \} \\
&= 2n
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2n(n+1)$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n(n+1)$ ($n \geq 1$)

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} 2k(k+1) = \sum_{k=1}^{15} (2k^2 + 2k) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{15} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{15} k \\
&= 2 \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + 2 \times \frac{15 \times 16}{2} \\
&= 2480 + 240 \\
&= 2720
\end{aligned}$$

답 2720

STEP 1

개념 마무리

본문 p.273

07 65

08 91

09 3025

10 9

11 35

12 ⑤

13 1127

07

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^9 (x-k)^2 &= \sum_{k=1}^9 (x^2 - 2xk + k^2) \\ &= \sum_{k=1}^9 x^2 - 2x \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 k^2 \\ &= 9x^2 - 2x \times \frac{9 \times 10}{2} + \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\ &= 9x^2 - 90x + 285 \\ &= 9(x-5)^2 + 60\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^9 (x-k)^2$ 은 $x=5$ 일 때 최솟값 60을 갖는다.

즉, $p=5$, $q=60$ 이므로

$$p+q=5+60=65$$

답 65

08

점 $(n, 2n)$ 과 직선 $y = -\frac{3}{4}x + 4$, 즉 $3x + 4y - 16 = 0$

사이의 거리 a_n 은

$$a_n = \frac{|3n + 8n - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|11n - 16|}{5}$$

$$n=1\text{일 때, } a_1 = \frac{|11-16|}{5} = 1\text{이고}$$

$$n \geq 2\text{일 때, } a_n = \frac{11n-16}{5} \text{이다. } \leftarrow n \geq 2\text{일 때 } 11n-16 > 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{10} \frac{11k-16}{5}$$

$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{10} \frac{11k-16}{5} - \frac{11-16}{5} \right)$$

$$= 1 + \frac{11}{5} \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} \frac{16}{5} + 1$$

$$= 1 + \frac{11}{5} \times \frac{10 \times 11}{2} - \frac{16}{5} \times 10 + 1$$

$$= 2 + 121 - 32 = 91$$

답 91

단계	채점 기준	배점
(가)	a_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸 경우	30%
(나)	절댓값의 부호에 유의하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k$ 로 나타낸 경우	40%
(다)	수열의 합을 구한 경우	30%

보충 설명 1

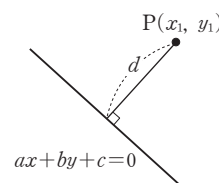
점과 직선 사이의 거리 |

점 $P(x_1, y_1)$ 과

직선 $ax + by + c = 0$

사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



보충 설명 2

거리는 항상 음수가 아님에 유의하여 계산해야 한다.

거리임을 고려하지 않고 절댓값 기호 없이 계산할 경우,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{11k-16}{5} &= \frac{11}{5} \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} \frac{16}{5} \\ &= \frac{11}{5} \times \frac{10 \times 11}{2} - \frac{16}{5} \times 10 \\ &= 121 - 32 = 89\end{aligned}$$

로 오답이 된다.

09

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k^2$$

$$\begin{aligned}&= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) + (2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2) \\ &\quad + (3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 10^2) + \cdots + 10^2\end{aligned}$$

이때 1^2 은 1번, 2^2 은 2번, 3^2 은 3번, ..., 10^2 은 10번 더해지므로

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k^2$$

$$= 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 3 + \cdots + 10^2 \times 10$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 = 3025$$

답 3025

10 본문 p.268 한 걸음 더 참고

$$1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + n \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \sum_{k=1}^n \{(n+1)k - k^2\}$$

$$= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(n+1 - \frac{2n+1}{3} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
&\stackrel{\text{㉑}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 165 \text{에서} \\
&n(n+1)(n+2) = 6 \times 165 \\
&\quad = 9 \times 10 \times 11 \\
&\therefore n=9
\end{aligned}$$

답 9

11

이차방정식 $x^2 - 8x + 7 = 0$ 의 두 근이 m, n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=8, mn=7 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{q=1}^n (p+q) \right\} \text{에서} \\
&\sum_{q=1}^n (p+q) = \sum_{q=1}^n p + \sum_{q=1}^n q = np + \frac{n(n+1)}{2} \\
&\therefore \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{q=1}^n (p+q) \right\} \\
&= \sum_{p=1}^m \left\{ np + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
&= n \sum_{p=1}^m p + \sum_{p=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\
&= \frac{mn}{2} (m+n+2) \\
&= \frac{7}{2} \times (8+2) \quad (\because \text{㉑}) \\
&= 35
\end{aligned}$$

답 35

12

$$\begin{aligned}
\text{ㄱ. } \sum_{k=1}^n (2k-2) &= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 \\
&= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\
&= n^2 + n - 2n \\
&= n^2 - n \quad (\text{참})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ㄴ. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \\
1+2+3+\cdots+k &= \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \text{이므로} \\
\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{1+2+3+\cdots+k} &= \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{\frac{k(k+1)}{2}} \\
&= \frac{2k+1}{3} \\
\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{1+2+3+\cdots+k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{3} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3}n \\
&= \frac{n(n+2)}{3} \quad (\text{참}) \\
\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 2^{l+k} \right) \text{에서} \\
\sum_{l=1}^k 2^{l+k} &= 2^k \sum_{l=1}^k 2^l = 2^k \times \frac{2(2^k-1)}{2-1} = 2^{2k+1} - 2^{k+1} \\
\therefore \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 2^{l+k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n (2^{2k+1} - 2^{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^n 2^{2k+1} - \sum_{k=1}^n 2^{k+1} \\
&= \frac{8(4^n-1)}{4-1} - \frac{4(2^n-1)}{2-1} \\
&= \frac{8}{3} \times 4^n - \frac{8}{3} - 2^{n+2} + 4 \\
&= \frac{2^{2n+3}}{3} - 2^{n+2} + \frac{4}{3} \quad (\text{참})
\end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

13

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n - 3 \text{에서}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = 1^2 - 2 - 3 = -4 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= n^2 - 2n - 3 - \{ (n-1)^2 - 2(n-1) - 3 \} \\
&= 2n - 3 \quad \cdots \cdots \text{㉒}
\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 ①은 ②에 $n=1$ 을 대입한 값과 다르므로

$$a_1 = -4, a_n = 2n - 3 \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} &= a_1 a_2 + \sum_{k=2}^{10} a_k a_{k+1} \\ &= a_1 a_2 + \sum_{k=1}^9 a_{k+1} a_{k+2} \quad \left(\sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_{k+1} \right) \\ &= -4 \times (2 \times 2 - 3) + \sum_{k=1}^9 \{2(k+1) - 3\} \{2(k+2) - 3\} \\ &= -4 + \sum_{k=1}^9 (2k-1)(2k+1) \\ &= -4 + \sum_{k=1}^9 (4k^2 - 1) = -4 + 4 \sum_{k=1}^9 k^2 - \sum_{k=1}^9 1 \\ &= -4 + 4 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 9 \\ &= -4 + 1140 - 9 = 1127 \end{aligned}$$

답 1127

보충 설명

$\sum_{k=1}^n a_k = S_n = n^2 - 2n - 3$ 에서 S_n 은 n 에 대한 이차식이고 상수항이 0이 아니므로 수열 $\{a_n\}$ 은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} = a_1 a_2 + \sum_{k=2}^{10} a_k a_{k+1}$ 과 같이 $a_1 a_2$ 를 따로 계산해야 한다.

3 여러 가지 수열의 합

기본 + 필수연습

본문 pp.277~281

22 $\frac{56}{45}$	23 6	24 (1) $\frac{30}{11}$ (2) $\frac{200}{161}$
25 45	26 $1 + \log_7 5$	27 1020
28 -3	29 3	30 70
31 4		
32 (1) 제 417 항 (2) $\frac{5}{9}$	33 165	

22

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \frac{4}{(k+1)(k+3)} \\ = 2 \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 2 \times \frac{28}{45} = \frac{56}{45} \end{aligned}$$

답 $\frac{56}{45}$

23

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{16} \frac{3}{\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k-2}} \\ = 3 \sum_{k=1}^{16} \frac{\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k-2}}{(\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k-2})(\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k-2})} \\ = \sum_{k=1}^{16} (\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k-2}) \\ = (\sqrt{4} - 1) + (\sqrt{7} - \sqrt{4}) + (\sqrt{10} - \sqrt{7}) + \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{46}) \\ = -1 + \sqrt{49} = -1 + 7 = 6 \end{aligned}$$

답 6

24

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{3}{\sum_{k=1}^n 2k} \\ &= \frac{3}{n(n+1)} = 3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= 3 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 3 \times \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{30}{11} \end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{(2n+1)^2 - 2^2} \\ &= \frac{4}{(2n-1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\
&= \left\{ \left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{23} \right) \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{21} - \frac{1}{23} \\
&= \frac{200}{161}
\end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{30}{11} \quad (2) \frac{200}{161}$$

25

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^7 \frac{a}{k^2 + 4k + 3} \\
&= \sum_{k=1}^7 \frac{a}{(k+1)(k+3)} \\
&= \frac{a}{2} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{a}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\
&= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\
&= \frac{14}{45} a
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{14}{45}a$ 가 정수가 되도록 하는 자연수 a 의 최솟값은 45이다.

답 45

26

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{48} \log_7 \frac{\sqrt{k^2+2k}}{k} \text{에서} \\
&\frac{\sqrt{k^2+2k}}{k} = \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}} \quad (\because k > 0) \text{이므로}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{48} \log_7 \frac{\sqrt{k^2+2k}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{48} \log_7 \frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k}} \\
&= \log_7 \frac{\sqrt{3}}{1} + \log_7 \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} + \log_7 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \log_7 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \\
&\quad + \cdots + \log_7 \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{47}} + \log_7 \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{48}} \\
&= \log_7 \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{47}} \times \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{48}} \right) \\
&= \log_7 \left(\frac{\sqrt{49} \times \sqrt{50}}{1 \times \sqrt{2}} \right) = \log_7 (7 \times 5) \\
&= 1 + \log_7 5
\end{aligned}$$

답 $1 + \log_7 5$

27

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log_4 \left(1 + \frac{1}{x+3} \right) = \log_4 \frac{x+4}{x+3} \text{이므로} \\
\sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n \log_4 \frac{k+4}{k+3} \\
&= \log_4 \frac{5}{4} + \log_4 \frac{6}{5} + \log_4 \frac{7}{6} + \cdots + \log_4 \frac{n+4}{n+3} \\
&= \log_4 \left(\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \cdots \times \frac{n+4}{n+3} \right) \\
&= \log_4 \frac{n+4}{4} \\
&= \log_4 (n+4) - 1
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \log_4 (n+4) - 1 = 4 \text{이므로}$$

$$\log_4 (n+4) = 5, \quad n+4 = 4^5 = 1024$$

$$\therefore n = 1020$$

답 1020

28

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{26} (-1)^k \log_3 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{26} (-1)^k \log_3 \frac{1}{k(k+1)} \\
&= -\log_3 \frac{1}{1 \times 2} + \log_3 \frac{1}{2 \times 3} - \log_3 \frac{1}{3 \times 4} + \log_3 \frac{1}{4 \times 5} \\
&\quad - \cdots - \log_3 \frac{1}{25 \times 26} + \log_3 \frac{1}{26 \times 27} \\
&= \log_3 (1 \times 2) + \log_3 \frac{1}{2 \times 3} + \log_3 (3 \times 4) + \log_3 \frac{1}{4 \times 5} \\
&\quad + \cdots + \log_3 (25 \times 26) + \log_3 \frac{1}{26 \times 27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log_3 \left(1 \times 2 \times \frac{1}{2 \times 3} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4 \times 5} \right. \\
 &\quad \left. \times \cdots \times 25 \times 26 \times \frac{1}{26 \times 27} \right) \\
 &= \log_3 \frac{1}{27} = -3
 \end{aligned}$$

답 -3

29

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1, 공차가 2이므로 일반항 a_n 은 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$

한편, $b_n = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}$ 에서

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{b_k} &= \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} \\
 &= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) \quad \leftarrow a_{k+1} - a_k = 2 \text{ (공차)} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{a_{25}} - \sqrt{a_{24}}) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{a_{25}} - \sqrt{a_1})
 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$, $a_{25} = 2 \times 25 - 1 = 49$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} (\sqrt{a_{25}} - \sqrt{a_1}) \\
 &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{49} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2} \times (7 - 1) = 3
 \end{aligned}$$

답 3

30

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\
 &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\
 &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\
 \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\
 &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

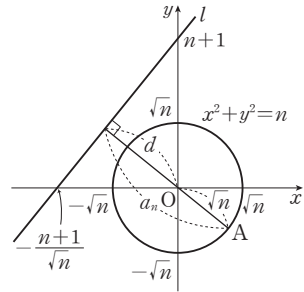
이때 $\sum_{k=1}^n a_k = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sqrt{n+2} - \sqrt{2} &= 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{n+2} = 6\sqrt{2} \\
 n+2 &= 72 \quad \therefore n = 70
 \end{aligned}$$

답 70

31

다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = n$ 의 중심 $(0, 0)$ 을 지나고 직선 $l: y = \sqrt{n}x + n + 1$, 즉 $\sqrt{n}x - y + n + 1 = 0$ 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점 중에서 직선 l 과 거리가 먼 점을 A라 하자.



원 $x^2 + y^2 = n$ 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최댓값 a_n 은 점 A와 직선 l 사이의 거리이다.

즉, a_n 은 원점과 직선 l 사이의 거리 d 와 원의 반지름의 길이 $\sqrt{n}$ 을 더한 것과 같다.

이때 자연수 n 에 대하여

$$d = \frac{|\sqrt{n} \times 0 - 1 \times 0 + n + 1|}{\sqrt{(\sqrt{n})^2 + (-1)^2}} = \frac{|n+1|}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

이므로

$$a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\
 &= \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) \\
 &= \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4
 \end{aligned}$$

답 4

보충 설명

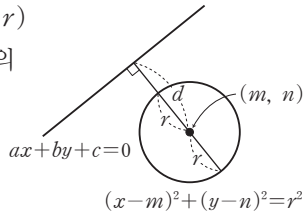
원 위의 점과 직선 사이의 거리 |

원의 반지름의 길이를 r 이라 하고, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라 할 때, 원 $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ 위의 한 점

과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리의 최댓값은 $d+r$, 최솟값은 $d-r$ 이다. (단, $d>r$)

이때 원의 중심과 직선 사이의 거리는

$$d = \frac{|am+bn+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



32

주어진 수열을

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \dots$$

와 같이 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면 제 n 군의 항의 개수는 n 이므로 제 1 군부터 제 n 군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

또한, 제 n 군의 k 번째 항은 $\frac{k}{n+1}$ 이다.

$$(1) \frac{11}{30} = \frac{k}{n+1} \text{에서 } k=11, n=29$$

즉, $\frac{11}{30}$ 은 제 29 군의 11 번째 항이므로

$$\sum_{k=1}^{28} k + 11 = \frac{28 \times 29}{2} + 11 = 406 + 11 = 417$$

따라서 $\frac{11}{30}$ 은 제 417 항이다.

$$(2) \sum_{k=1}^7 k = \frac{7 \times 8}{2} = 28, \sum_{k=1}^8 k = \frac{8 \times 9}{2} = 36 \text{이므로 제 33 항은}$$

제 8 군의 5 번째 항이다.

$$\text{따라서 제 33 항은 } \frac{5}{8+1} = \frac{5}{9}$$

답 (1) 제 417 항 (2) $\frac{5}{9}$

33

제 m 행에는 m 개의 자연수를 나열하였으므로 제 $(m-1)$ 행까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{m(m-1)}{2}$$

즉, 제 m 행의 수는 왼쪽부터 차례대로

$$\frac{m(m-1)}{2} + 1, \frac{m(m-1)}{2} + 2, \frac{m(m-1)}{2} + 3, \dots$$

이므로

$$f(m, n) = \frac{m(m-1)}{2} + n$$

$$\therefore f(18, 12) = \frac{18 \times 17}{2} + 12 = 153 + 12 = 165$$

답 165

STEP 1 개념 마무리

본문 p.282

14 33	15 $\frac{8}{5}$	16 $\frac{175}{132}$	17 $2 + \log 3$
18 84	19 5	20 -134	

14

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 2이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}} \\ &= \frac{1}{a_{2k+1}-a_{2k-1}} \left(\frac{1}{a_{2k-1}} - \frac{1}{a_{2k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_{2k-1}} - \frac{1}{a_{2k+1}} \right) (\because a_{2k+1}-a_{2k-1}=2 \times 2=4) \\ &\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{a_{2k-1}} - \frac{1}{a_{2k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} \right) + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{a_{19}} - \frac{1}{a_{21}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{21}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+40} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{40}{a_1(a_1+40)} = \frac{10}{a_1(a_1+40)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{10}{a_1(a_1+40)} = \frac{2}{45} \text{에서}$$

$$a_1(a_1+40)=225, a_1^2+40a_1-225=0$$

$$(a_1-5)(a_1+45)=0 \quad \therefore a_1=5 (\because a_1>0)$$

$$\therefore a_{15}=5+14 \times 2=33$$

답 33

15

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2} \\ &= \frac{2n+3}{\sum_{m=1}^{n+1} m^2} = \frac{2n+3}{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}} \\ &= \frac{6}{(n+1)(n+2)} \\ \therefore \sum_{k=2}^{13} a_k &= \sum_{k=2}^{13} \frac{6}{(k+1)(k+2)} \\ &= 6 \sum_{k=2}^{13} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 6 \times \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{15} \right) \right\} \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right) = 6 \times \frac{4}{15} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{5}$

16

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x + n^2 + 2n = 0$ 의 두 근이

a_n, b_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = 2, \quad a_n b_n = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} &= \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\ &= \frac{2}{n^2 + 2n} = \frac{2}{n(n+2)} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \right) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{175}{132} \end{aligned}$$

답 $\frac{175}{132}$

17

$$a_n = 10^n + \frac{10^{n+1}}{5n} = 10^n \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 10^n \times \frac{n+2}{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log a_n &= \log 10^n + \log \frac{n+2}{n} \\ &= n + \log \frac{n+2}{n} \end{aligned}$$

이때 자연수 n 에 대하여 $1 < \frac{n+2}{n} < 10$ 이므로

$$0 < \log \frac{n+2}{n} < 1$$

따라서 $\log a_n$ 의 소수 부분은 $f(a_n) = \log \frac{n+2}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{23} f(a_k) &= \sum_{k=1}^{23} \log \frac{k+2}{k} \\ &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \log \frac{6}{4} \\ &\quad + \cdots + \log \frac{24}{22} + \log \frac{25}{23} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \cdots \times \frac{24}{22} \times \frac{25}{23} \right) \\ &= \log \left(\frac{24 \times 25}{1 \times 2} \right) \\ &= \log 300 = 2 + \log 3 \end{aligned}$$

답 $2 + \log 3$

18

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{2}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ &= \sqrt{2n+1} - 1 \\ &\approx, \sqrt{2n+1} - 1 = 12 \text{에서 } \sqrt{2n+1} = 13 \\ 2n+1 &= 169, \quad 2n = 168 \\ \therefore n &= 84 \end{aligned}$$

답 84

19

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \sqrt{n+1} \text{에서}$$

$$a_n + \frac{1}{a_n} = 2\sqrt{n+1}, \quad a_n^2 - 2\sqrt{n+1}a_n + 1 = 0 \quad (\because a_n > 1)$$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$a_n = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{(n+1)-1} \\ = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$$

$$\therefore a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \quad \text{또는} \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

이때 $a_n > 1$ 이므로

$$a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{35} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{36}-\sqrt{35}) \\ &= \sqrt{36} - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

답 5

보충 설명

자연수 n 에 대하여 $n+1 < n+2\sqrt{n}+1$ 이므로

$$(\sqrt{n+1})^2 < (\sqrt{n}+1)^2$$

이때 $\sqrt{n+1} > 0$, $\sqrt{n}+1 > 0$ 이므로

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n}+1 \quad \therefore \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1$$

따라서 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 이면 $a_n > 1$ 이라는 조건에 모순이다.

20

제 n 행의 왼쪽 끝에 적힌 수를 b_n 이라 하면

$$b_1 = 100 = 100 - 0$$

$$b_2 = 99 = 100 - 1$$

$$b_3 = 97 = 100 - (1+2)$$

$$b_4 = 94 = 100 - (1+2+3)$$

$\vdots$

$$b_n = 100 - \sum_{k=1}^{n-1} k = 100 - \frac{n(n-1)}{2}$$

이때 a_n 은 첫째항이 b_n 이고 공차가 -1 인 등차수열의 첫째 항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n\{2b_n - (n-1)\}}{2} \\ &= \frac{n\{200 - n(n-1) - (n-1)\}}{2} \\ &= \frac{n(201 - n^2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a_{13} = \frac{13 \times (201 - 13^2)}{2} = 208,$$

$$a_{12} = \frac{12 \times (201 - 12^2)}{2} = 342 \text{이므로}$$

$$a_{13} - a_{12} = 208 - 342 = -134$$

답 -134

다른 풀이

$$a_2 - a_1 = 98 - (100 - 99) = 98 - 1$$

$$a_3 - a_2 = 95 - 2 \times 2 = 95 - 2^2$$

$$a_4 - a_3 = 91 - 3 \times 3 = 91 - 3^2$$

$\vdots$

즉, 제 13행의 오른쪽 끝에 적힌 수를 X 라 하면

$$a_{13} - a_{12} = X - 12^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편,

$$X = 100 - (2 + 3 + \cdots + 13)$$

$$= 101 - (1 + 2 + 3 + \cdots + 13)$$

$$= 101 - \frac{13 \times 14}{2} = 10$$

$$\text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } a_{13} - a_{12} = 10 - 12^2 = -134$$

STEP

2 개념 마무리

본문 p.283

1 522

2 -2

3 375

4 725

5 4

6 159

1

두 점 A_n 의 x 좌표를 a_n 이라 하면

2, a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$, a_6 , 2^8 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 + 2^8 = \frac{8 \times (2 + 2^8)}{2}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 + 258 = 1032$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 = 774$$

한편, 점 B_n 의 x 좌표와 y 좌표를 각각 b_n, c_n 이라 하면 점 B_n 은 곡선 $y = \log_2 x$ 의 위의 점이므로

$$c_n = \log_2 b_n \quad \therefore b_n = 2^{c_n}$$

이때 1, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, 8$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 2, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_6, 2^8$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이 수열의 공비를 r 이라 하면

$$2^8 = 2r^7 \text{에서 } r = 2$$

$$\therefore b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_6 = \frac{4 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} = 252$$

따라서 $l_n = a_n - b_n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 l_n &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_6 - b_6) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_6) \\ &= 774 - 252 = 522 \end{aligned}$$

답 522

보충 설명

세 점 B_1, B_2, B_3 의 y 좌표 c_1, c_2, c_3 이 등차수열을 이루므로

$$2c_2 = c_1 + c_3$$

$$\text{즉, } 2^{2c_2} = 2^{c_1 + c_3} \text{에서 } (2^{c_2})^2 = 2^{c_1} \times 2^{c_3}$$

$$\therefore b_2^2 = b_1 \times b_3 \quad (\because b_n = 2^{c_n})$$

따라서 b_1, b_2, b_3 는 등비수열을 이룬다.

같은 방법으로 1, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_6, 8$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 2, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_6, 2^8$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$$\text{실제로 } B_1(2^2, 2), B_2(2^3, 3), B_3(2^4, 4), \dots, B_6(2^7, 7)$$

이므로 점 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_6$ 의 y 좌표 2, 3, 4, $\dots, 7$ 은 등차수열, 점 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_6$ 의 x 좌표 $2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^7$ 은 등비수열을 이룬다.

2

조건 (가)에서 $a_2 = -3a_1, a_3 = 9a_1, a_4 = -27a_1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= a_1 + (-3a_1) + 9a_1 + (-27a_1) = -20a_1 \end{aligned}$$

조건 (나)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+4} = a_n + 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^8 a_k &= \sum_{k=1}^4 a_{k+4} = \sum_{k=1}^4 (a_k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^4 a_k + 4 = -20a_1 + 4 \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned} \sum_{k=9}^{12} a_k &= \sum_{k=5}^8 a_{k+4} = -20a_1 + 8 \\ \sum_{k=13}^{16} a_k &= \sum_{k=9}^{12} a_{k+4} = -20a_1 + 12 \\ \sum_{k=17}^{20} a_k &= \sum_{k=13}^{16} a_{k+4} = -20a_1 + 16 \\ \sum_{k=21}^{24} a_k &= \sum_{k=17}^{20} a_{k+4} = -20a_1 + 20 \end{aligned}$$

또한, $a_{25} = a_{21} + 1 = a_{17} + 2 = \cdots = a_1 + 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} a_k &= \sum_{k=1}^4 a_k + \sum_{k=5}^8 a_k + \sum_{k=9}^{12} a_k + \sum_{k=13}^{16} a_k + \sum_{k=17}^{20} a_k + \sum_{k=21}^{24} a_k + a_{25} \\ &= -20a_1 \times 6 + \underbrace{4 + 8 + 12 + 16 + 20}_{4 \times (1+2+3+4+5)} + a_1 + 6 \\ &= -119a_1 + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 6 = -119a_1 + 66 \end{aligned}$$

즉, $-119a_1 + 66 = 304$ 이므로

$$-119a_1 = 238 \quad \therefore a_1 = -2$$

답 -2

3

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} (2k+1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{25} \right) \\ = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{25} \right) \\ + 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{25} \right) \\ + 7 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{25} \right) \\ \vdots \\ + 51 \times \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \times 1 + (3+5) \times \frac{1}{2} + (3+5+7) \times \frac{1}{3} \\
 (*) \quad &+ \cdots + (3+5+7+\cdots+51) \times \frac{1}{25} \\
 &= 3+4+5+\cdots+27
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 값은 첫째항이 3, 끝항이 27이고 항의 개수가 25인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{25 \times (3+27)}{2} = 375$$

답 375

보충 설명

(*)에서

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{25} \frac{1}{k} \left\{ \sum_{n=1}^k (2n+1) \right\} &= \sum_{k=1}^{25} \frac{1}{k} \left\{ 2 \times \frac{k(k+1)}{2} + k \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{25} \frac{1}{k} (k^2 + 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^{25} (k+2) \\
 &= \frac{25 \times 26}{2} + 50 = 375
 \end{aligned}$$

4

기울기가 1이고 y 절편이 양수인 원 $x^2 + y^2 = \frac{n^2}{2}$ 의 접선의 방정식은

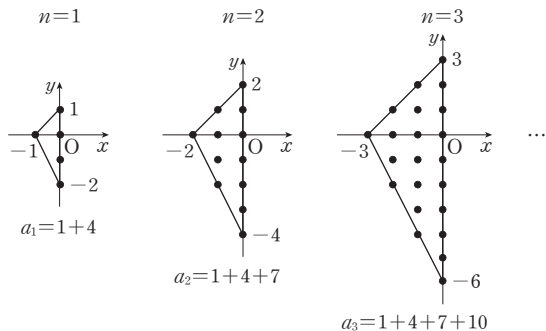
$$y = x + \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1} \quad \therefore y = x + n$$

직선 $y = x + n$ 이 x 축, y 축과 만나는 점 A_n , B_n 의 좌표는 $A_n(-n, 0)$, $B_n(0, n)$

이때 점 A_n 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x - 2n \quad \therefore C_n(0, -2n)$$

삼각형 $A_n C_n B_n$ 의 내부와 경계의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n 을 차례대로 구하면



즉,

$$a_1 = 1 + 4$$

$$a_2 = 1 + 4 + 7$$

$$a_3 = 1 + 4 + 7 + 10$$

$\vdots$

이므로

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (3k-2) \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=1}^{n+1} 2 \\
 &= 3 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2(n+1)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 \right) \\
 &= \frac{3}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{5}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \\
 &= \frac{1155}{2} + \frac{275}{2} + 10 \\
 &= 725
 \end{aligned}$$

답 725

보충 설명

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 | 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하

고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

5

$a_1 = S_1 = 2$, $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ ($k \geq 1$)이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{14} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{14} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{14} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{S_{14}} - \frac{1}{S_{15}} \right) \\
 &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{15}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{15}}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^{14} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{15}} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{S_{15}} = \frac{1}{4} \quad \therefore S_{15} = 4$$

답 4

6

$256 \times 3^n = 2^8 \times 3^n$ 의 양의 약수의 개수는

$$(8+1) \times (n+1) = 9n+9$$

즉, $a_n = 9n+9$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{9k+9} + \sqrt{9(k+1)+9}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= \frac{1}{3} \{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\} \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{n+2}-1) \end{aligned}$$

이때 $f(n)$ 의 값이 자연수가 되려면

$$\frac{1}{3}(\sqrt{n+2}-1) = p \quad (p \text{는 자연수}) \text{이어야 하므로}$$

$$\sqrt{n+2}-1 = 3p, \quad \sqrt{n+2} = 3p+1$$

$$\therefore n = (3p+1)^2 - 2$$

$$(i) \quad p=1 \text{일 때, } n=4^2-2=14$$

$$(ii) \quad p=2 \text{일 때, } n=7^2-2=47$$

$$(iii) \quad p=3 \text{일 때, } n=10^2-2=98$$

$$(iv) \quad p=4 \text{일 때, } n=13^2-2=167$$

$\vdots$

$$\therefore n=14, 47, 98, 167, \cdots$$

따라서 100 이하의 모든 음이 아닌 정수 n 의 값의 합은

$$14+47+98=159$$

답 159

10. 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의

기본 + 필수연습

본문 pp.289-297

01 (1) 2 (2) 27

02 (1) -19 (2) $\frac{5}{256}$

03 92

04 20

05 (1) -11 (2) 8

06 7

07 6

08 (1) 25 (2) $126\sqrt{2}$

09 33

10 제9항

11 7

12 36

13 11

14 13

15 9

16 19

17 40

18 746

19 8

20 162

21 272

22 230

23 (1) $a_1=165, a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+20 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$

(2) $\frac{275}{9}$

01

(1) $a_2 = (-1) \times a_1 + 5 = (-1) \times 2 + 5 = 3$

$$a_3 = (-1)^2 \times a_2 + 5 = 1 \times 3 + 5 = 8$$

$$a_4 = (-1)^3 \times a_3 + 5 = (-1) \times 8 + 5 = -3$$

따라서 제5항을 구하면

$$a_5 = (-1)^4 \times a_4 + 5 = 1 \times (-3) + 5 = 2$$

(2) $a_3 = a_1 \times a_2 = 1 \times 3 = 3, a_4 = a_2 \times a_3 = 3 \times 3 = 9$

따라서 제5항을 구하면

$$a_5 = a_3 \times a_4 = 3 \times 9 = 27$$

답 (1) 2 (2) 27

02

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공차가 -3인 등차수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-3) = -3n + 11$$

따라서 제10항을 구하면

$$a_{10} = -3 \times 10 + 11 = -19$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 10, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

일반항 a_n 은

$$a_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 제 10 항을 구하면

$$a_{10} = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 10 \times \frac{1}{512} = \frac{5}{256}$$

답 (1) -19 (2) $-\frac{5}{256}$

03

$a_{n+1} = a_n + 2n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입
한 후, 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 4$$

$$a_4 = a_3 + 6$$

⋮

$$\begin{aligned} &+) a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ \hline a_n &= a_1 + \{2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1)\} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$ 이므로 제 10 항은

$$a_{10} = 2 + \sum_{k=1}^9 2k = 2 + 2 \times \frac{9 \times 10}{2} = 92$$

답 92

04

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입
한 후, 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{2}{1} a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2} a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3} a_3$$

⋮

$$\begin{aligned} &\times) a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1}\right) \\ &= n a_1 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 제 20 항은

$$a_{20} = 20 \times 1 = 20$$

답 20

05

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} - a_n = -1$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3,
공차가 -1인 등차수열이므로

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-1) = -n + 4$$

$$\therefore a_{15} = -15 + 4 = -11$$

(2) $a_1 = 15$, $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째
항이 15인 등차수열이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라
하면

$$a_n = 15 + (n-1)d$$

$$\text{이때 } a_{12} = -7 \text{이므로}$$

$$15 + 11d = -7, 11d = -22$$

$$\therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 15 + (n-1) \times (-2) = -2n + 17$$

$$\text{즉, } a_k = 1 \text{에서 } -2k + 17 = 1$$

$$2k = 16 \quad \therefore k = 8$$

답 (1) -11 (2) 8

06

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$
은 등차수열이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d
라 하면

$$a_2 = -11 \text{에서 } a + d = -11 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_4 = -7 \text{에서 } a + 3d = -7 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -13, d = 2$$

$$\text{즉, } a_n = -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15 \text{이므로}$$

$$2n - 15 > 0 \text{에서 } 2n > 15$$

$$\therefore n > \frac{15}{2} = 7.5$$

따라서 $n \geq 8$ 이면 $a_n > 0$ 이므로 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 최소가 되도록
하는 자연수 n 의 값은 7이다.

답 7

보충 설명

모든 항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d
라 할 때, 다음이 성립한다.

(1) $a < 0$, $d > 0$ 일 때,

$\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n 에 대하여

$$a_n < 0, a_{n+1} > 0 \text{이다.}$$

(2) $a > 0, d < 0$ 일 때,

$\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 n 에 대하여
 $a_n > 0, a_{n+1} < 0$ 이다.

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -13 , 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k - 15) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 15n \\ &= n^2 - 14n \\ &= (n-7)^2 - 49 \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 7이다.

07

$a_{n+2} = a_n + 4$ 이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 과 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 각각 공차가 4인 등차수열이다.

$a_1 = 1, a_2 = p$ 이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 p , 공차가 4인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} + \sum_{k=1}^5 a_{2k} \\ &= \frac{5 \times \{2 \times 1 + (5-1) \times 4\}}{2} + \frac{5 \times \{2p + (5-1) \times 4\}}{2} \\ &= 45 + 5p + 40 \\ &= 5p + 85 \end{aligned}$$

즉, $5p + 85 = 115$ 이므로

$$5p = 30 \quad \therefore p = 6$$

답 6

08

(1) $a_1 = 9, \sqrt{3}a_{n+1} = a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9,

공비가 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 9 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = 3^2 \times 3^{-\frac{1}{2}(n-1)} = 3^{-\frac{n}{2} + \frac{5}{2}}$$

$$a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \text{에서 } 3^{-\frac{k}{2} + \frac{5}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 3^{-10} \text{이므로}$$

$$-\frac{k}{2} + \frac{5}{2} = -10 \quad \therefore k = 25$$

(2) $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_2 = 4\sqrt{2} \text{에서 } ar = 4\sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_5 = 32\sqrt{2} \text{에서 } ar^4 = 32\sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2\sqrt{2}, r = 2 \quad (\because r \text{은 실수}) \quad \text{--- } a_n \text{은 실수이므로}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $2\sqrt{2}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \frac{2\sqrt{2} \times (2^6 - 1)}{2 - 1} = 126\sqrt{2}$$

답 (1) 25 (2) $126\sqrt{2}$

09

$$\log_5 a_{n+1} = 1 + \log_5 a_n \text{에서 } \log_5 a_{n+1} - \log_5 a_n = 1$$

$$\log_5 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{25}$, 공비가 5인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{1}{25} \times 5^{n-1} = 5^{n-3}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{11} &= 5^{-2} \times 5^{-1} \times 5^0 \times \cdots \times 5^8 \\ &= 5^{(-2)+(-1)+0+\cdots+8} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } (-2) + (-1) + 0 + \cdots + 8 = \frac{11 \times (-2+8)}{2} = 33$$

첫째항이 -2 , 제11항이 8인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합

이므로

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{11} &= 5^{(-2)+(-1)+0+\cdots+8} \\ &= 5^{33} = 5^k \end{aligned}$$

$$\therefore k = 33$$

답 33

10

이차방정식 $ax^2 - 2\sqrt{3}a_{n+1}x + 3a_{n+2} = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{3}a_{n+1})^2 - 3a_n a_{n+2} = 0$$

$$3a_{n+1}^2 - 3a_n a_{n+2} = 0 \quad \therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{a_4}{a_3} = \frac{9}{3} = 3$ 인 등비수열이므로

$$a_3 = 3 \text{에서 } a_1 \times 3^2 = 3 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2} \text{이므로}$$

$$a_8 = 3^6 = 729, a_9 = 3^7 = 2187$$

따라서 조건을 만족시키는 항은 제9항이다.

답 제9항

11

$a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} + n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 6을 차례대로 대입한 후, 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = 2^2 + 1$$

$$a_3 - a_2 = 2^3 + 2$$

$$a_4 - a_3 = 2^4 + 3$$

$\vdots$

$$+) a_7 - a_6 = 2^7 + 6$$

$$a_7 - a_1 = (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^7)$$

$$+ (1 + 2 + 3 + \cdots + 6)$$

$$\therefore a_7 = a_1 + \sum_{k=1}^6 2^{k+1} + \sum_{k=1}^6 k$$

$$= a_1 + \frac{4 \times (2^6 - 1)}{2 - 1} + \frac{6 \times 7}{2}$$

$$= a_1 + 273$$

즉, $a_7 = 280$ 에서 $a_1 + 273 = 280$ 이므로

$$a_1 = 7$$

답 7

12

$a_{n+1} - a_n = -2n + 9$ 이므로 $a_{n+1} - a_n < 0$ 인 경우는

$$-2n + 9 < 0 \text{에서 } 2n > 9 \quad \therefore n > \frac{9}{2} = 4.5$$

따라서 $a_1 < a_2 < \cdots < a_5 > a_6 > a_7 > \cdots$ 이므로 a_n 은 $n=5$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$a_{n+1} = a_n - 2n + 9$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입한 후, 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 - 2 \times 1 + 9$$

$$a_3 = a_2 - 2 \times 2 + 9$$

$$a_4 = a_3 - 2 \times 3 + 9$$

$$+) a_5 = a_4 - 2 \times 4 + 9$$

$$a_5 = \frac{20}{a_1=20} + (7+5+3+1) = 36$$

답 36

다른 풀이

$a_{n+1} - a_n = -2n + 9$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후, 변끼리 더하면

$$a_2 - a_1 = -2 \times 1 + 9$$

$$a_3 - a_2 = -2 \times 2 + 9$$

$$a_4 - a_3 = -2 \times 3 + 9$$

$\vdots$

$$+) a_n - a_{n-1} = -2(n-1) + 9$$

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (-2k + 9)$$

$$= -2 \times \frac{n(n-1)}{2} + 9(n-1)$$

$$= -n^2 + 10n - 9$$

$$= -(n-5)^2 + 16$$

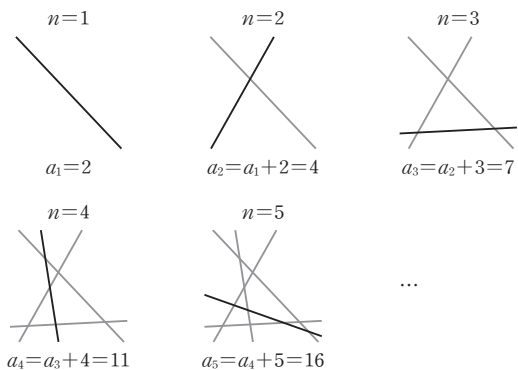
이때 $a_1 = 20$ 이므로

$$a_n = -(n-5)^2 + 36$$

따라서 a_n 은 $n=5$ 일 때 최댓값 36을 갖는다.

13

평면 위의 서로 다른 n 개의 직선에 의하여 나누어지는 영역의 개수의 최댓값 a_n 을 차례대로 구하면



$$\therefore a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후, 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 + 1 + 1 \\
 a_3 &= a_2 + 2 + 1 \\
 a_4 &= a_3 + 3 + 1 \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_{n-1} + (n-1) + 1 \\
 a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\
 &= 2 + \frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \quad (\because a_1 = 2) \\
 &= \frac{n^2 + n + 2}{2}
 \end{aligned}$$

즉, $a_k = 67$ 에서 $\frac{k^2 + k + 2}{2} = 67$ 이므로

$$k^2 + k + 2 = 134, \quad k^2 + k - 132 = 0$$

$$(k+12)(k-11) = 0 \quad \therefore k = 11 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 11

보충 설명

평면에 직선을 그어 나누어진 영역의 개수가 최대가 되려면 어느 두 직선도 서로 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않아야 한다. 이때 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$ 개의 새로운 영역이 생긴다.

14

$a_{n+1} = 3^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후, 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 3a_1 \\
 a_3 &= 3^2 a_2 \\
 a_4 &= 3^3 a_3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= 3^{n-1} a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \cdots \times 3^{n-1} \\
 &= 81 \times 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \quad (\because a_1 = 81) \\
 &= 3^4 \times 3^{\frac{n-1}{2}n} = 3^{4+\frac{n(n-1)}{2}} = 3^{\frac{n^2-n+8}{2}}
 \end{aligned}$$

즉, $\log_3 a_k = 82$ 에서 $\log_3 3^{\frac{k^2-k+8}{2}} = 82$ 이므로

$$\frac{k^2 - k + 8}{2} = 82, \quad k^2 - k + 8 = 164$$

$$k^2 - k - 156 = 0, \quad (k+12)(k-13) = 0$$

$$\therefore k = 13 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 13

15

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후, 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \\
 a_3 &= \frac{2}{3} a_2 \\
 a_4 &= \frac{3}{4} a_3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= \frac{n-1}{n} a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \right) \\
 &= \frac{4}{n} \quad (\because a_1 = 4)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^8 \frac{k}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{8 \times 9}{2} = 9$$

답 9

16

$$(n+1)^2 a_{n+1} = n(n+2) a_n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입한 후, 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1 \times 3}{2 \times 2} a_1 \\
 a_3 &= \frac{2 \times 4}{3 \times 3} a_2 \\
 a_4 &= \frac{3 \times 5}{4 \times 4} a_3 \\
 &\vdots \\
 a_n &= \frac{(n-1) \times (n+1)}{n \times n} a_{n-1} \\
 a_n &= a_1 \times \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \\
 &\quad \times \cdots \times \frac{(n-1) \times (n+1)}{n \times n} \\
 &= 4 \times \frac{n+1}{2n} \quad (\because a_1 = 4) \\
 &= \frac{2(n+1)}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } a_k &= \frac{40}{19} \text{에서 } \frac{2(k+1)}{k} = \frac{40}{19} \text{이므로} \\ 40k &= 38(k+1), \quad 2k = 38 \quad \therefore k = 19 \end{aligned}$$

답 19

17

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수}) \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례대로}$$

대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_6 = a_5 + 1 = 1 + 1 = 2$$

⋮

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 제 4항부터 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{21} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \sum_{k=4}^{21} a_k \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + 9(a_4 + a_5) \\ &= 6 + 3 + 4 + 9 \times \frac{(21-4+1) \div 2 = 9}{(2+1)} = 40 \end{aligned}$$

답 40

18

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \geq 65) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n < 65) \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례대로}$$

대입하면

$$a_2 = a_1 - 3 = 88 - 3 = 85$$

$$a_3 = a_2 - 3 = 85 - 3 = 82$$

$$a_4 = a_3 - 3 = 82 - 3 = 79$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{즉, } a_n &= 88 + (n-1) \times (-3) = -3n + 91 \quad (a_n \geq 65) \text{에서} \\ -3n + 91 &\geq 65, \quad -3n \geq -26 \end{aligned}$$

$$\therefore n \leq \frac{26}{3} = 8.\times\times\times$$

$$\text{따라서 } a_8 = -3 \times 8 + 91 = 67 \geq 65,$$

$$a_9 = -3 \times 9 + 91 = 64 < 65 \text{이므로}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}a_9 = \frac{1}{2} \times 64 = 32 = 2^5$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}a_{10} = \frac{1}{2} \times 32 = 16 = 2^4$$

⋮

$$\therefore a_n = \begin{cases} -3n + 91 & (1 \leq n \leq 8) \\ 2^{15-n} & (n \geq 9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{14} a_k &= \sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=9}^{14} a_k \\ &= \sum_{k=1}^8 (-3k + 91) + \sum_{k=9}^{14} 2^{15-k} \quad \left[\begin{array}{l} k-8=t \text{로 놓으면 } k=t+8 \\ 2^{15-k} = 2^{7-t} = 2^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \end{array} \right] \\ &= -3 \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 91 + \sum_{t=1}^6 \left\{ 2^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \right\} \\ &= -3 \times \frac{8 \times 9}{2} + 91 \times 8 + 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= -108 + 728 + 126 = 746 \end{aligned}$$

답 746

보충 설명

$a_1 = 88 \geq 65$ 이고, $a_{n+1} = a_n - 3$ ($a_n \geq 65$)이므로 $a_m \geq 65$ 를 만족시키는 자연수 m 에 대하여 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$, a_{m+1} 은 첫째항이 88, 공차가 -3인 등차수열이다.

이때 $a_m \geq 65$ 에서

$$\begin{aligned} a_m &= 88 + (m-1) \times (-3) \\ &= -3m + 91 \geq 65 \end{aligned}$$

$$3m \leq 26 \quad \therefore m \leq \frac{26}{3} = 8.\times\times\times$$

$$\therefore a_8 = -3 \times 8 + 91 = 67 \geq 65,$$

$$a_9 = a_8 - 3 = 67 - 3 = 64 < 65$$

또한, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ ($a_n < 65$)이므로 수열 $a_9, a_{10}, a_{11}, \dots$ 은

첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} -3n + 91 & (1 \leq n \leq 8) \\ 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-9} & (n \geq 9) \end{cases} \quad \text{또는} \\ &= \begin{cases} -3n + 91 & (1 \leq n \leq 9) \\ 2^6 \times 2^{9-n} = 2^{15-n} & (n \geq 10) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3n + 91 & (1 \leq n \leq 9) \\ 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} & (n \geq 10) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -3n + 91 & (1 \leq n \leq 9) \\ 2^5 \times 2^{10-n} = 2^{15-n} & (n \geq 10) \end{cases} \end{aligned}$$

19

$a_1=1$ 에서 $a_4=a_1+1=2$ 이므로

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 4 \text{를 대입하면}$$

$$a_{3n+1}=a_n+1$$

$$a_{11}=2a_4+1=2 \times 2+1=5$$

$$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$$

$$a_{13}=a_4+1=2+1=3$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$$

답 8

20

$S_{n+1}=3S_n-4$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+2}=3S_{n+1}-4 \text{이므로}$$

$$S_{n+2}-S_{n+1}=3S_{n+1}-4-(3S_n-4)$$

$$=3(S_{n+1}-S_n)$$

이때 $S_{n+2}-S_{n+1}=a_{n+2}$, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 이므로

$$a_{n+2}=3a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\text{㉑}$$

한편, $S_{n+1}=3S_n-4$ 의 n 에 1을 대입하면

$$S_2=3S_1-4=3 \times 3-4=5 \quad (\because S_1=3)$$

$$\therefore a_1+a_2=5$$

$$\text{이때 } a_1=S_1=3 \text{이므로 } a_2=2 \quad \dots\dots\text{㉒}$$

㉑, ㉒에서 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1=3, a_n=2 \times 3^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_6=2 \times 3^4=162$$

답 162

다른 풀이

$S_{n+1}=3S_n-4$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$S_2=3S_1-4=3 \times 3-4=5 \quad (\because S_1=3)$$

$$S_3=3S_2-4=3 \times 5-4=11$$

$$S_4=3S_3-4=3 \times 11-4=29$$

$$S_5=3S_4-4=3 \times 29-4=83$$

$$S_6=3S_5-4=3 \times 83-4=245$$

$$\therefore a_6=S_6-S_5=245-83=162$$

21

$4S_n=na_{n+1}$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$4S_{n+1}=(n+1)a_{n+2} \text{이므로}$$

$$4S_{n+1}-4S_n=(n+1)a_{n+2}-na_{n+1}$$

이때 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 이므로

$$4a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}-na_{n+1}$$

$$(n+4)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+2}=\frac{n+4}{n+1}a_{n+1} \quad \dots\dots\text{㉑}$$

한편, $4S_n=na_{n+1}$ 의 n 에 1을 대입하면

$$4S_1=a_2$$

이때 $S_1=a_1=2$ 이므로

$$a_2=4a_1=4 \times 2=8 \quad \dots\dots\text{㉒}$$

따라서 ㉑의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-2$ 를 차례대로 대입한 후, 변끼리 곱하면

$$a_3=\frac{5}{2}a_2$$

$$a_4=\frac{6}{3}a_3$$

$$a_5=\frac{7}{4}a_4$$

$$\vdots$$

$$\times \left) a_n=\frac{n+2}{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n=a_2 \times \left(\frac{5}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{7}{4} \times \dots \times \frac{n}{n-3} \times \frac{n+1}{n-2} \times \frac{n+2}{n-1} \right)$$

$$=8 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 3 \times 4} \quad (\because \text{㉒})$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore a_{10}-a_7=\frac{10 \times 11 \times 12}{3} - \frac{7 \times 8 \times 9}{3}$$

$$=440-168=272$$

답 272

22

$8S_n=a_n^2+4a_n-5$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$8S_{n+1}=a_{n+1}^2+4a_{n+1}-5 \text{이므로}$$

$$8S_{n+1}-8S_n=a_{n+1}^2+4a_{n+1}-5-(a_n^2+4a_n-5)$$

$$=a_{n+1}^2+4a_{n+1}-a_n^2-4a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 이므로

$$8a_{n+1} = a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} - a_n^2 - 4a_n$$

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 - 4a_{n+1} - 4a_n = 0$$

$$(a_{n+1}^2 - a_n^2) - 4(a_{n+1} + a_n) = 0$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - 4(a_{n+1} + a_n) = 0$$

$$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 4) = 0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 양수이므로

$$a_{n+1} + a_n \neq 0$$

$$\text{즉, } a_{n+1} - a_n - 4 = 0 \text{이므로}$$

$$a_{n+1} - a_n = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또한, $8S_n = a_n^2 + 4a_n - 5$ 의 n 에 1을 대입하면

$$8S_1 = a_1^2 + 4a_1 - 5$$

이때 $S_1 = a_1$ 이므로

$$8a_1 = a_1^2 + 4a_1 - 5$$

$$a_1^2 - 4a_1 - 5 = 0, (a_1 + 1)(a_1 - 5) = 0$$

$$\therefore a_1 = 5 \quad (\because a_1 > 0) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이므로

$$S_{10} = \frac{10 \times \{2 \times 5 + (10-1) \times 4\}}{2} = 230$$

$$S_n = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

답 230

23

(1) 1일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_1 L은 435L에서

$\frac{2}{3}$ 를 버리고 20L를 새로 넣은 양이므로

$$a_1 = 435 \times \frac{1}{3} + 20 = 165$$

$(n+1)$ 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L은

n 일 후 수족관에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{2}{3}$ 를 버리고

20L를 새로 넣은 양이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 20 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) (1)에서 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 20$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로

대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 + 20$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + 20$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}a_1 + 20 \right) + 20$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^2 a_1 + \frac{1}{3} \times 20 + 20$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 + 20$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^2 a_1 + \frac{1}{3} \times 20 + 20 \right\} + 20$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^3 a_1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times 20 + \frac{1}{3} \times 20 + 20$$

$\vdots$

$$\therefore a_6 = \left(\frac{1}{3} \right)^5 a_1 + \left(\frac{1}{3} \right)^4 \times 20 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 \times 20 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times 20 + \frac{1}{3} \times 20 + 20$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^5 \times 165 + 20 \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \quad (\because a_1 = 165)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^5 \times 165 + 20 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{275}{9}$$

답 (1) $a_1 = 165, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 20 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

$$(2) \frac{275}{9}$$

★ 다른 풀이

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 20$ 에서 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3}(a_n - \alpha)$ 로 놓으면

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}\alpha \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}\alpha = 20 \quad \therefore \alpha = 30$$

$$\therefore a_{n+1} - 30 = \frac{1}{3}(a_n - 30)$$

즉, 수열 $\{a_n - 30\}$ 은 첫째항이

$$a_1 - 30 = 165 - 30 = 135$$

이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 30 = 135 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 135 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + 30 = 5 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-4} + 30$$

$$\therefore a_6 = 5 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 30 = \frac{275}{9}$$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.298-299

- 01 ④ 02 -84 03 6 04 $\frac{1}{2^{33}}$
 05 15 06 2 07 30 08 46
 09 928 10 51
 11 (1) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 50$ ($n=1, 2, 3, \dots$) (2) 4일 후
 12 825

01

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ 에서 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 = 10, a_3 = 10 + 2d = 4 \text{이므로}$$

$$2d = -6 \quad \therefore d = -3$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 10 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 13$$

$$\therefore a_{10} = -3 \times 10 + 13 = -17 \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=2}^n a_{k-1}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

$$- (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

$$= a_n$$

$$= -3n + 13 \text{ (}\therefore \text{ㄱ) (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^7 a_k = \sum_{k=1}^7 (-3k + 13) \text{ (}\therefore \text{ㄱ)}$$

$$= -3 \times \frac{7 \times 8}{2} + 13 \times 7$$

$$= -84 + 91 = 7 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

02

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 = p$, 공차가 6인 등차수열이므로

$$S_n = \frac{n\{2p + 6(n-1)\}}{2} = 35$$

$$\therefore n(p + 3n - 3) = 35 \quad \dots \dots \textcircled{1} \leftarrow \text{정수 조건이 주어진 부정방정식}$$

이때 p 는 정수이고, n 은 자연수이므로 n 은 35의 양의 약수이어야 한다.

(i) $n=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } p + 3 - 3 = 35 \text{이므로 } p = 35$$

(ii) $n=5$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } p + 15 - 3 = 7 \text{이므로 } p = -5$$

(iii) $n=7$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } p + 21 - 3 = 5 \text{이므로 } p = -13$$

(iv) $n=35$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } p + 105 - 3 = 1 \text{이므로 } p = -101$$

(i)~(iv)에서 모든 정수 p 의 값의 합은

$$35 + (-5) + (-13) + (-101) = -84$$

답 -84

보충 설명

정수 조건이 주어진 부정방정식은

(일차식) $\times$ (일차식) = (정수) 꼴로 변형한 후, 약수와 배수의 성질을 이용하여 곱해서 정수가 되는 두 일차식의 값을 구한다.

03

$2\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}$ 에서

$$\log_2 a_{n+1}^2 = \log_2 a_n a_{n+2}$$

즉, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 가 성립하므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^m a_k = \frac{3\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m - 1\right\}}{\frac{4}{3} - 1} = 9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m - 1\right\}$$

$$\sum_{k=1}^m a_k > 36 \text{에서 } 9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^m - 1\right\} > 36$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^m - 1 > 4, \left(\frac{4}{3}\right)^m > 5$$

$$\text{이때 } \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243} < 5, \left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{729} > 5 \text{이므로}$$

$\sum_{k=1}^m a_k > 36$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값은 6이다.

답 6

04

$a_{n+1}=a_n \cos \frac{n}{3}\pi$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1 \cos \frac{\pi}{3}=1 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad (\because a_1=1)$$

$$a_3=a_2 \cos \frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$a_4=a_3 \cos \pi=-\frac{1}{4} \times (-1)=\frac{1}{4}$$

$$a_5=a_4 \cos \frac{4}{3}\pi=\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

$$a_6=a_5 \cos \frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}=-\frac{1}{16}$$

$$a_7=a_6 \cos 2\pi=-\frac{1}{16} \times 1=-\frac{1}{16}$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_{n+6}=-\frac{1}{16}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이고, $50=6 \times 8 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{50} &= -\frac{1}{16}a_{44} = \left(-\frac{1}{16}\right)^2 a_{38} = \left(-\frac{1}{16}\right)^3 a_{32} = \dots \\ &= \left(-\frac{1}{16}\right)^8 a_2 = \frac{1}{2^{32}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{33}} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2^{33}}$

05

$a_{n+1}-a_n=2n-14$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로

대입한 후, 변끼리 더하면

$$a_2-a_1=2 \times 1-14$$

$$a_3-a_2=2 \times 2-14$$

$$a_4-a_3=2 \times 3-14$$

$\vdots$

$$+) \quad a_n - a_{n-1} = 2(n-1) - 14$$

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-14)$$

$$= 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 14(n-1)$$

$$= n^2 - 15n + 14$$

$$\therefore a_n = a_1 + n^2 - 15n + 14$$

이때 $a_1=36$ 이므로 $a_n=n^2-15n+50$

즉, $a_k=6$ 에서 $k^2-15k+50=6$ 이므로

$$k^2-15k+44=0, (k-4)(k-11)=0$$

$$\therefore k=4 \text{ 또는 } k=11$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$4+11=15$$

답 15

06

$a_{n+1}=(n+2)a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로

대입한 후, 변끼리 곱하면

$$a_2=3a_1$$

$$a_3=4a_2$$

$$a_4=5a_3$$

$\vdots$

$$\times) \quad a_n = (n+1)a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n+1)$$

$$= 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+1) \quad (\because a_1=2)$$

$$= (n+1)!$$

이때 $a_4=5!=120$ 이므로 4 이상의 자연수 k 에 대하여 a_k 는 모두 30으로 나누어떨어진다.

즉, S_{2020} 을 30으로 나눈 나머지는 $a_1+a_2+a_3$ 을 30으로 나눈 나머지와 같다.

$$a_1+a_2+a_3=2!+3!+4!$$

$$=2+6+24=32$$

이것을 30으로 나눈 나머지는 2이므로 구하는 나머지도 2이다.

답 2

07

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2-3a_n} & (n \text{이 홀수}) \\ 1+a_n & (n \text{이 짝수}) \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례}$$

대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{2-3a_1} = \frac{2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1+a_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2-3a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 1$$

$$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$$

⋮

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1이 이 순서대로 반복된다.

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \\ &\vdots \\ &= a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40} \\ &= 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{40} a_n = 10 \times 3 = 30$$

답 30

08

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n^2 + n - 2)(n^2 + n) \text{에서}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n-1)(n+2)n(n+1)$$

.....㉠

㉠의 n 에 $n-1$ 을 대입하면

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$$

$$= (n-2)(n+1)(n-1)n$$

.....㉡

㉠-㉡을 하면

$$na_n = n(n-1)(n+1)\{(n+2)-(n-2)\}$$

$$\therefore a_n = 4(n-1)(n+1) \text{ (단, } n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{4(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{8} \times \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = \frac{9}{55} \end{aligned}$$

따라서 $p=55$, $q=9$ 이므로

$$p-q=55-9=46$$

답 46

09

$$S_{n+1} = \frac{4n}{n+1} S_n \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차례대로}$$

대입한 후, 변끼리 곱하면

$$S_2 = \frac{4 \times 1}{2} S_1$$

$$S_3 = \frac{4 \times 2}{3} S_2$$

$$S_4 = \frac{4 \times 3}{4} S_3$$

⋮

$$\begin{aligned} \times \Big) S_n &= \frac{4(n-1)}{n} S_{n-1} \\ S_n &= S_1 \times \left\{ \frac{4 \times 1}{2} \times \frac{4 \times 2}{3} \times \frac{4 \times 3}{4} \times \cdots \times \frac{4(n-1)}{n} \right\} \\ &= S_1 \times \underbrace{(4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4)}_{(n-1)\text{개}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \right) \\ &= 2 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{n} \quad (\because S_1=2) \\ &= \frac{2^{2n-1}}{n} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } a_5 + a_6 = S_6 - S_4 = \frac{2^{11}}{6} - \frac{2^7}{4} = \frac{1024}{3} - 32 = \frac{928}{3}$$

이므로

$$3(a_5 + a_6) = 3 \times \frac{928}{3} = 928$$

답 928

10

$$a_n = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \text{의 } n \text{에 } n+1 \text{을 대입하면}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}$$

$$S_{n+1} - S_n = \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}$$

) 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n > 0$

$$\therefore \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = \sqrt{4} = 2$ 이므로 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열이다.

$$\text{즉, } \sqrt{S_n} = 2 + (n-1) \times 1 = n+1 \text{이므로}$$

$$S_n = (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 + a_8 + a_9 &= S_9 - S_6 \\ &= 10^2 - 7^2 = 51 \end{aligned}$$

답 51

11

- (1) $(n+1)$ 일 후 아침에 약을 복용하기 전 몸 안에 흡수되지 않고 남아 있는 약의 양 a_{n+1} mg은 n 일 후 몸 안에 흡수되지 않고 남아 있는 약 a_n mg과 그날 아침에 복용한 약 100mg의 50%이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 100)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 50 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(가)

- (2) 1일 후 몸 안에 흡수되지 않고 남아 있는 약의 양 a_1 mg은 처음 복용한 약 520mg의 50%이므로

$$a_1 = \frac{1}{2} \times 520 = 260$$

(나)

- (1)에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 50$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 50 = \frac{1}{2} \times 260 + 50 = 180$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 50 = \frac{1}{2} \times 180 + 50 = 140$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 50 = \frac{1}{2} \times 140 + 50 = 120$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 50 = \frac{1}{2} \times 120 + 50 = 110$$

- 따라서 몸 안에 남아 있는 약의 양이 120mg 이하가 되는 날은 처음 복용한 날로부터 4일 후이다.

(다)

$$\text{답 (1)} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 50 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) 4일 후

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 조건을 파악하여 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한 경우	40%
(나)	수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항 a_1 의 값을 구한 경우	30%
(다)	(1)에서 구한 관계식을 이용하여 각 항을 나열하거나 일반항을 구하여 $a_n \leq 120$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구한 경우	30%

다른 풀이

$$(2) \quad a_1 = \frac{1}{2} \times 520 = 260 \text{이고,}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 50 \text{에서 } a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha) \text{로 놓으면}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 50 \quad \therefore \alpha = 100$$

$$\therefore a_{n+1} - 100 = \frac{1}{2}(a_n - 100)$$

즉, 수열 $\{a_n - 100\}$ 은 첫째항이

$$a_1 - 100 = 260 - 100 = 160$$

이고, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 100 = 160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 100$$

이때 n 일 후, 몸 안에 남아 있는 약의 양이 120mg 이하가 되려면 $a_n \leq 120$ 에서

$$160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 100 \leq 120$$

$$160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 20, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$n-1 \geq 3 \quad \therefore n \geq 4$$

따라서 몸 안에 남아 있는 약의 양이 120mg 이하가 되는 날은 처음 복용한 날로부터 4일 후이다.

12

주어진 모양의 도형을 만드는 데 사용된 성냥개비의 개수 a_n 을 차례대로 구하면

$$[\text{도형 1}] \text{에서 } a_1 = 6$$

$$[\text{도형 2}] \text{에서 } a_2 = a_1 + 9 = 15$$

$$[\text{도형 3}] \text{에서 } a_3 = a_2 + 12 = 27$$

$$[\text{도형 4}] \text{에서 } a_4 = a_3 + 15 = 42$$

$\vdots$

$$[\text{도형 } n] \text{에서 } a_n = a_{n-1} + 3n + 3 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

위의 식을 변끼리 더하면

$$a_n = 6 + 9 + 12 + 15 + \dots + (3n + 3)$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k + 3)$$

$$= 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n \right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{9}{2} \times \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 825$$

답 825

2 수학적 귀납법

기본 + 필수연습

본문 pp.301~303

24~28 풀이 참조

24

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, (\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이 등식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\ = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

25

$$(1^2+1) \times 1! + (2^2+1) \times 2! + \dots + (n^2+1) \times n! \\ = n \times (n+1)! \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (1^2+1) \times 1! = 2, (\text{우변}) = 1 \times (1+1)! = 2$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$(1^2+1) \times 1! + (2^2+1) \times 2! + \dots + (k^2+1) \times k! \\ = k \times (k+1)!$$

이 등식의 양변에 $\{(k+1)^2+1\} \times (k+1)!$ 을 더하면
 $(1^2+1) \times 1! + (2^2+1) \times 2! + \dots + (k^2+1) \times k! + \{(k+1)^2+1\} \times (k+1)!$

$$= k \times (k+1)! + \{(k+1)^2+1\} \times (k+1)!$$

$$= (k^2+3k+2) \times (k+1)!$$

$$= (k+1) \times (k+2)!$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

26

(i) $n=1$ 일 때,

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

따라서 $n=1$ 일 때 $n(n+1)(2n+1)$ 은 6의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $n(n+1)(2n+1)$ 이 6의 배수라고 가정하면

$$k(k+1)(2k+1) = 6N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

$$= (k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= (k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$= (k+1)(2k^2+k) + (k+1)(6k+6)$$

$$= k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2$$

$$= 6N + 6(k+1)^2$$

$$= 6\{N + (k+1)^2\}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $n(n+1)(2n+1)$ 은 6의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $n(n+1)(2n+1)$ 은 6의 배수이다.

답 풀이 참조

27

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots \text{㉡}$$

이때

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

이므로

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

㉡에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

28

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{a+b}{2}, (\text{우변}) = \frac{a+b}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \frac{a^k + b^k}{2}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{a+b}{2}$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} &\leq \frac{a^k + b^k}{2} \times \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + ab^k + a^k b}{4} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} a^{k+1} + b^{k+1} - ab^k - a^k b &= a^k(a-b) - b^k(a-b) \\ &= (a-b)(a^k - b^k) \end{aligned}$$

이고, $a-b$ 와 $a^k - b^k$ 은 부호가 서로 같거나 0이므로

$$(a-b)(a^k - b^k) \geq 0$$

즉, $a^{k+1} + b^{k+1} \geq ab^k + a^k b$ 이므로

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} &\leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + ab^k + a^k b}{4} \\ &\leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1} + a^{k+1} + b^{k+1}}{4} \\ &= \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

STEP 1

개념 마무리

본문 p.304

13 ㉤

14~15 풀이 참조

16 ㉤

13

ㄱ. 조건 (가)에서 $p(3)$ 이 참이므로 조건 (나)에서

$$p(2 \times 3 + 1) = p(7)$$

즉, $p(7)$ 도 참이다. (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 $p(3)$, ㄱ에서 $p(7)$ 이 참이므로 조건 (다)에서

$$p(3 + 7) = p(10)$$

즉, $p(10)$ 도 참이다. (참)

ㄷ. 조건 (가)에서 $p(3)$, ㄴ에서 $p(10)$ 이 참이므로 조건 (라)에서

$$p(3 + 10) = p(13)$$

즉, $p(13)$ 도 참이다. (참)

ㄹ. ㄱ에서 $p(7)$ 이 참이므로 조건 (나)에서

$$p(2 \times 7 + 1) = p(15)$$

즉, $p(15)$ 도 참이다.

이때 ㄴ에서 $p(10)$ 이 참이므로 조건 (다)에서

$$p(10 + 15) = p(25)$$

따라서 $p(25)$ 도 참이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 모두 항상 참이다.

답 ㉤

14

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 = 6, (\text{우변}) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m k(k+1)(k+2) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$$

이 등식의 양변에 $(m+1)(m+2)(m+3)$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2) &= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4} \\ &\quad + (m+1)(m+2)(m+3) \\ &= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3) + 4(m+1)(m+2)(m+3)}{4} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{4} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

15

(i) $n=1$ 일 때,

$$4^1 - 1 = 3$$

따라서 $n=1$ 일 때 $4^n - 1$ 은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $4^k - 1$ 이 3의 배수라고 가정하면

$$4^k - 1 = 3N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times (4^k - 1) + 3 \\ &= 4 \times 3N + 3 \\ &= 3(4N + 1) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $4^n - 1$ 은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $4^n - 1$ 은 3의 배수이다.

답 풀이 참조

16

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{4}{3}$$

이므로 $n=2$ 일 때 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2k+1}{k+1} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이때

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2} &= \frac{(2k+1)(k+2) - 2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$\textcircled{2}$ 에서

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하므로 주어진 부등식이 성립한다.

$$\text{즉, } p = \frac{3}{2}, f(k) = \frac{2(k+1)}{k+2} \text{이므로}$$

$$8p \times f(10) = 8 \times \frac{3}{2} \times \frac{2 \times 11}{12} = 22$$

답 ⑤

STEP 2

개념 마무리

본문 p.305

1 17

2 ⑤

3 $1 + \sqrt[3]{2}$

4 34

5 1026

6 55

1

$3a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ 의 양변을 a_na_{n+1} 로 나누면

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3$$

이때 $\frac{1}{a_n} = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} - b_n = 3$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$ 이고 공차가 3인 등차

수열이므로

$$b_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n-1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3n-1}$$

(가)

$$\begin{aligned} \therefore a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_ka_{k+1} \\ &= \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3k+2} \right) = \frac{k}{6k+4} \end{aligned}$$

즉, $\frac{k}{6k+4} > \frac{16}{100}$ 에서 $100k > 96k + 64$ 이므로

$$4k > 64 \quad \therefore k > 16$$

(나)

따라서 자연수 k 의 최솟값은 17이다.

(다)

답 17

단계	채점 기준	배점
(가)	수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 경우	50%
(나)	조건을 만족시키는 k 의 값의 범위를 구한 경우	40%
(다)	자연수 k 의 최솟값을 구한 경우	10%

2

$p \neq 0$ 이므로 $pa_{n+1} = qa_n + r$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{q}{p}a_n + \frac{r}{p} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\textcircled{1}$ 에서 $p=q$ 이면 $a_{n+1} = a_n + \frac{r}{p}$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 $\frac{r}{p}$ 인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $\textcircled{1}$ 을 $a_{n+1} - a = \frac{q}{p}(a_n - a)$ 로 놓으면

$$a_{n+1} = \frac{q}{p}a_n + a - \frac{q}{p}a$$

$$\text{즉, } a - \frac{q}{p}a = \frac{r}{p} \text{에서 } a(p-q) = r$$

$$\therefore a = \frac{r}{p-q} \quad (\because p \neq q)$$

따라서 수열 $\{a_n - a\}$, 즉 $\left\{a_n - \frac{r}{p-q}\right\}$ 은 공비가 $\frac{q}{p}$ 인 등비수열이다. (참)

ㄷ. $r = p - q$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{q}{p}a_n + \frac{p-q}{p} = \frac{q}{p}(a_n - 1) + 1$$

$$\therefore a_{n+1} - 1 = \frac{q}{p}(a_n - 1)$$

즉, 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 공비가 $\frac{q}{p}$ 인 등비수열이므로

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \times \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

이때 $a_1 = 1$, 즉 $a_1 - 1 = 0$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n - 1 = 0 \quad \therefore a_n = 1$$

$$\therefore a_5 = 1 \quad (\text{참})$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

3

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2) \\ \sqrt[3]{2}a_n & (a_n < 2) \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례대로}$$

대입하면

$$a_2 = \sqrt[3]{2} \times a_1 = \sqrt[3]{2} \quad (\because a_1 = 1)$$

$$a_3 = \sqrt[3]{2} \times a_2 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$$

$$a_4 = \sqrt[3]{2} \times a_3 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = 2$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \times a_4 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_6 = \sqrt[3]{2} \times a_5 = \sqrt[3]{2} \times 1 = \sqrt[3]{2}$$

⋮

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n=4k-3) \\ \sqrt[3]{2} & (n=4k-2) \\ \sqrt[3]{4} & (n=4k-1) \\ 2 & (n=4k) \end{cases} \quad (k \text{는 자연수})$$

이때 $121 = 4 \times 31 - 3$, $122 = 4 \times 31 - 2$ 이므로

$$a_{121} + a_{122} = 1 + \sqrt[3]{2}$$

답 $1 + \sqrt[3]{2}$

4

$a_5=1$ 이므로 $a_4=0$ 또는 $a_4=2$
 $\frac{a_4+1=1}{\frac{a_4}{2}=1}$
 이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이므로 $a_4=0$ 은 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a_4=2$ 이므로

$$\frac{a_3=1}{\frac{a_3+1=2}{\frac{a_3}{2}=2}} \text{ 또는 } \frac{a_3=4}{\frac{a_3}{2}=2}$$

(i) $a_3=1$ 일 때,

$$\frac{a_2=0}{\frac{a_2+1=1}{\frac{a_2}{2}=1}} \text{ 또는 } \frac{a_2=2}{\frac{a_2}{2}=1}$$

이때 $a_2=0$ 은 조건을 만족시키지 않으므로

$$a_2=2$$

즉, $a_1=1$ 또는 $a_1=4$ 이다.

(ii) $a_3=4$ 일 때,

$$\frac{a_2=3}{\frac{a_2+1=4}{\frac{a_2}{2}=4}} \text{ 또는 } \frac{a_2=8}{\frac{a_2}{2}=4}$$

① $a_2=3$ 일 때,

$$\frac{a_1=2}{\frac{a_1+1=3}{\frac{a_1}{2}=3}} \text{ 또는 } \frac{a_1=6}{\frac{a_1}{2}=3}$$

이때 $a_1=2$ 는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \frac{a_1=20}{a_1=20} \text{ [만 } a_2=10 \text{ 이어야 한다.]}$
 $\therefore a_1=6$

② $a_2=8$ 일 때,

$$\frac{a_1=7}{\frac{a_1+1=8}{\frac{a_1}{2}=8}} \text{ 또는 } \frac{a_1=16}{\frac{a_1}{2}=8}$$

①, ②에서

$$a_1=6 \text{ 또는 } a_1=7 \text{ 또는 } a_1=16$$

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은

$$1+4+6+7+16=34$$

답 34

5

$n \geq 2$ 에서 $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$ 이므로

$$4a_na_{n+1}=(S_{n+1}-S_{n-1})^2-4^n \text{에서}$$

$$4a_na_{n+1}=(a_{n+1}+a_n)^2-4^n$$

$$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4^n$$

$$a_{n+1}^2+2a_na_{n+1}+a_n^2=4a_na_{n+1}+4^n$$

$$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}+a_n^2=4^n$$

$$\therefore (a_{n+1}-a_n)^2=2^{2n}$$

이때 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} > a_n$ 이므로

$$a_{n+1}-a_n=2^n \text{ (단, } n=2, 3, 4, \dots)$$

$a_{n+1}-a_n=2^n$ 의 n 에 2, 3, 4, ..., 9를 차례대로 대입한 후, 변끼리 더하면

$$a_3-a_2=2^2$$

$$a_4-a_3=2^3$$

$$a_5-a_4=2^4$$

$\vdots$

$$+ \frac{a_{10}-a_9=2^9}{\phantom{a_{10}-a_2=2^2+2^3+2^4+\dots+2^9}}$$

$$a_{10}-a_2=2^2+2^3+2^4+\dots+2^9$$

$$= \sum_{k=2}^9 2^k = \frac{2^2 \times (2^8-1)}{2-1} = 2^{10}-4$$

이때 $a_2=6$ 이므로

$$a_{10}=2^{10}-4+a_2=2^{10}-4+6=2^{10}+2=1026$$

답 1026

6

여자 또는 남자가 임의로 구성된 사람 n 명을 일렬로 세울 때, 여자끼리는 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수 a_n 은 처음 세우는 사람의 성별에 따라서 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) 첫 번째로 남자를 세우는 경우

두 번째로 세우는 사람은 여자 또는 남자 모두 가능하다. 따라서 나머지 $(n-1)$ 명을 여자끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수와 같으므로

$$a_{n-1}$$

(ii) 첫 번째로 여자를 세우는 경우

두 번째로 세우는 사람은 반드시 남자여야 하고, 세 번째로 세우는 사람은 여자 또는 남자 모두 가능하다.

즉, 나머지 $(n-2)$ 명을 여자끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수와 같으므로

$$a_{n-2}$$

(i), (ii)에서 n 명을 일렬로 세우는 방법의 수 a_n 은

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \text{ (단, } n \geq 3) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 n 에 3, 4, 5, ..., 8을 차례대로 대입하면

$$a_3=a_2+a_1=3+2=5 \text{ (} \because a_1=2, a_2=3)$$

$$a_4=a_3+a_2=5+3=8$$

$$a_5=a_4+a_3=8+5=13$$

$$a_6=a_5+a_4=13+8=21$$

$$a_7=a_6+a_5=21+13=34$$

$$a_8=a_7+a_6=34+21=55$$

답 55

