THE 개념

블랙라벨

정답과 해설

BLACKLABEL

I. 함수의 극한과 연속

01. 함수의 극한

1 함수의 극한

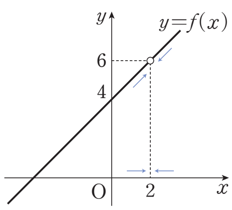
기본 + 필수연습 본문 pp.014~020

01 (1) 6 (2) 3 (3) ∞ (4) $-\infty$
02 (1) 2 (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) 1
03 (1) 1 (2) ∞
04 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.
05 7 **06** 5 **07** 9
08 (1) 2 (2) 1 (3) 존재하지 않는다. (4) 1 **09** 6
10 2 **11** -4 **12** $\frac{7}{5}$ **13** 2
14 5

01

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}$이라 하면 $x\neq2$일 때

$f(x)=\dfrac{(x+4)(x-2)}{x-2}=x+4$

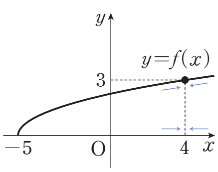


이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 6에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=6$$

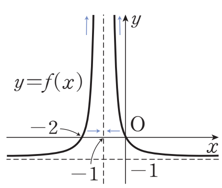
(2) $f(x)=\sqrt{x+5}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x의 값이 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to4}\sqrt{x+5}=3$$

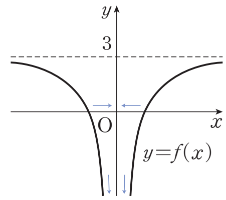
(3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-1}\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-1\right\}=\infty$$

(4) $f(x)=-\dfrac{1}{|x|}+3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

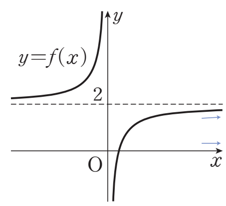
$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{|x|}+3\right)=-\infty$$

답 (1) 6 (2) 3 (3) ∞ (4) $-\infty$

02

(1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$이라 하면

$f(x)=-\dfrac{1}{x}+2$



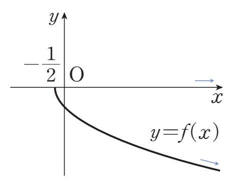
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2$$

(2) $f(x)=-\sqrt{1+2x}$라 하면

$f(x)=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}$

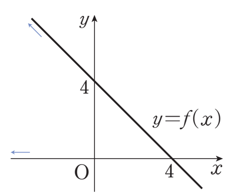


이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to\infty}(-\sqrt{1+2x})=-\infty$$

(3) $f(x)=4-x$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



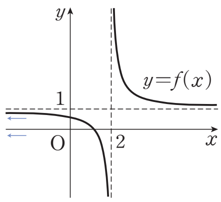
그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질

때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x\to-\infty}(4-x)=\infty$$

(4) $f(x)=\dfrac{1-x}{2-x}$라 하면

$$f(x)=\frac{2-x-1}{2-x}$$
$$=\frac{1}{x-2}+1$$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{2-x}=1$$

답 (1) 2 (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) 1

03

(1) x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=1$

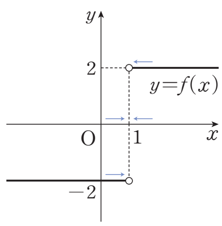
(2) x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로 $\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)=\infty$

답 (1) 1 (2) ∞

04

(1) $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x-1}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$$



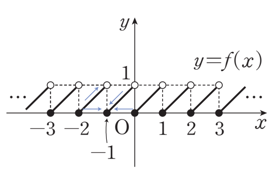
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=2$, $\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=-2$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$, 즉

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2|x-1|}{x-1}$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $f(x)=x-[x]$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)=1$

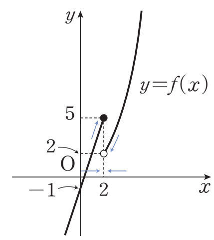
따라서 $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)$,

즉 $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x-[x])$의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.

05

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2+}f(x)=2$$

또한, x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to2-}f(x)=5$$

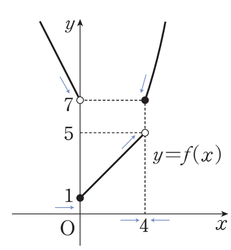
$$\therefore\ \lim_{x\to2+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=2+5=7$$

답 7

06

$$f(x)=\begin{cases}-2x+7 & (x<0)\\ x+1 & (0\le x<4)\\ x^2-6x+15 & (x\ge4)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-2x+7 & (x<0)\\ x+1 & (0\le x<4)\\ (x-3)^2+6 & (x\ge4)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 7에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 0-} f(x)=7$

x의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 5에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 4-} f(x)=5$

x의 값이 4보다 크면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 7에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 4+} f(x)=7$

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x)+\lim_{x \to 4-} f(x)-\lim_{x \to 4+} f(x)$

$=7+5-7=5$

답 5

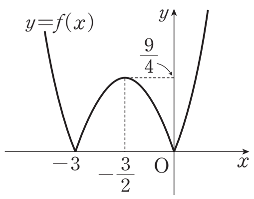
07

$f(x)=|x^2+3x|$

$=|x(x+3)|$

$=\begin{cases} x(x+3) & (x<-3 \text{ 또는 } x \ge 0) \\ -x(x+3) & (-3 \le x < 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

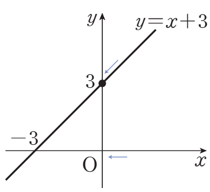


(i) $x \longrightarrow 0+$일 때,

$f(x)=x(x+3)$이므로

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to 0+} \frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x \to 0+} (x+3)$

함수 $y=x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x \longrightarrow 0+$일 때, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

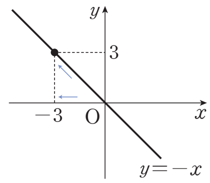
$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}=3$

(ii) $x \longrightarrow -3+$일 때,

$f(x)=-x(x+3)$이므로

$\lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x \to -3+} \frac{-x(x+3)}{x+3}=\lim_{x \to -3+} (-x)$

함수 $y=-x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x \longrightarrow -3+$일 때,

$\lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}$의 값은 3에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}=3$

(i), (ii)에서

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}=3\times3=9$

답 9

다른 풀이

본문 p.023의 **개념06**에서 '함수의 극한에 대한 성질'을 배우면 다음과 같이 풀 수도 있다.

$x<-3$ 또는 $x \ge 0$일 때 $f(x)=x(x+3)$,

$-3 \le x < 0$일 때 $f(x)=-x(x+3)$이므로

$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to 0+} \frac{x(x+3)}{x}$

$=\lim_{x \to 0+} (x+3)$

$=0+3=3$

$\lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x \to -3+} \frac{-x(x+3)}{x+3}$

$=\lim_{x \to -3+} (-x)$

$=-(-3)=3$

$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \to -3+} \frac{f(x)}{x+3}$

$=3\times3=9$

08

(1) $x \longrightarrow 0+$일 때 $f(x) \longrightarrow 2$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x)=2$

(2) $x \longrightarrow 2-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x)=1$

(3) $x \longrightarrow 1+$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$

$x \longrightarrow 1-$일 때 $f(x) \longrightarrow 0$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=0$

따라서 $\lim_{x \to 1+} f(x) \ne \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(4) $x \longrightarrow 3+$일 때 $f(x) \longrightarrow 1$이므로

$\lim_{x \to 3+} f(x)=1$

$x \longrightarrow 3-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 3-} f(x)=1$

따라서 $\lim_{x \to 3+} f(x)=\lim_{x \to 3-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x \to 3} f(x)=1$

답 (1) 2 (2) 1 (3) 존재하지 않는다. (4) 1

09

$x \longrightarrow 1+$일 때 $f(x) \longrightarrow 2$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x)=2$

$x \longrightarrow 0-$일 때 $f(x)=4$이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x)=4$

$t=x+1$로 놓으면

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x+1)=\lim_{t \to 2-} f(t)=0$

$\therefore \lim_{x \to 1+} f(x)+\lim_{x \to 0-} f(x)-\lim_{x \to 1-} f(x+1)$

$=2+4-0=6$

답 6

10

$x>\frac{1}{2}$일 때,

$\frac{4x^2-1}{|2x-1|}=\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x-1}=2x+1$이므로

$$f(x)=\begin{cases} k & \left(x\le\frac{1}{2}\right) \\ \frac{4x^2-1}{|2x-1|} & \left(x>\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} k & \left(x\le\frac{1}{2}\right) \\ 2x+1 & \left(x>\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$의 극한값, 즉 $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$의 값이 존재하려면

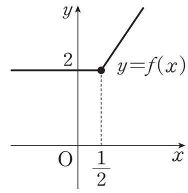
$\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x)$이어야 한다. 이때

$\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}+} (2x+1)=2$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}-} k=k$

이므로 $\lim_{x \to \frac{1}{2}+} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}-} f(x)$에서

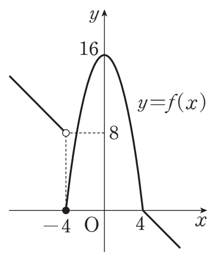
$k=2$



답 2

11

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x \to -4+} f(x)=\lim_{x \to -4+} (16-x^2)=0$

$\lim_{x \to -4-} f(x)=\lim_{x \to -4-} (4-x)=8$

즉, $\lim_{x \to -4+} f(x)\neq\lim_{x \to -4-} f(x)$

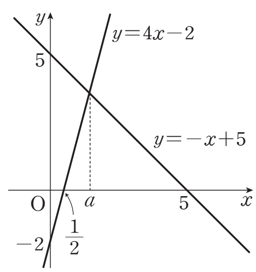
이므로 $\lim_{x \to -4} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a=-4$

답 -4

12

두 함수 $y=4x-2$, $y=-x+5$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$x=a$에서의 극한값이 존재하기 위해서는 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 서로 같아야 하므로 a는 두 함수의 그래프의 교점의 x좌표이어야 한다.

즉, $4x-2=-x+5$에서 $5x=7$ $\therefore x=\frac{7}{5}$

$\therefore a=\frac{7}{5}$

답 $\frac{7}{5}$

다른 풀이

$x=a$에서의 극한값이 존재하려면 $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$ 이어야 한다.

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} (-x+5) = -a+5$

$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a-} (4x-2) = 4a-2$

이므로

$-a+5=4a-2 \qquad \therefore a=\frac{7}{5}$

13

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x \to 0+} f(f(x)) = \lim_{t \to 1-} f(t) = 0$

$x \longrightarrow -2-$일 때 $t=1$이므로

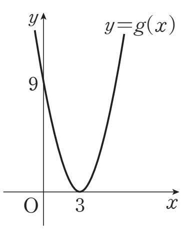
$\lim_{x \to -2-} f(f(x)) = f(1) = 2$

$\therefore \lim_{x \to 0+} f(f(x)) + \lim_{x \to -2-} f(f(x)) = 0+2=2$

답 2

14

함수 $g(x)=x^2-6x+9$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+} g(f(x))$에서

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 1+$일 때, $t=1$이므로

$\lim_{x \to 1+} g(f(x)) = g(1)$

$= 1-6+9=4$

$\lim_{x \to 3-} f(g(x))$에서 $g(x)=s$로 놓으면

$x \longrightarrow 3-$일 때 $s \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x \to 3-} f(g(x)) = \lim_{s \to 0+} f(s) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1+} g(f(x)) + \lim_{x \to 3-} f(g(x)) = 4+1=5$

답 5

STEP 1 개 념 마 무 리

본문 pp.021~022

01 ②	**02** -6	**03** 2	**04** 2
05 2	**06** -1	**07** ①	**08** 1
09 4	**10** 2	**11** 5	

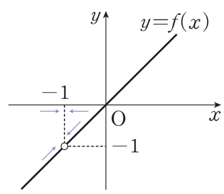
01

ㄱ. $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$라 하면

$x \neq -1$일 때,

$f(x)=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$

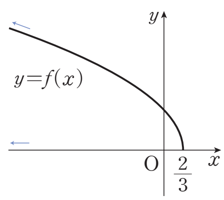
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+x}{x+1} = -1$

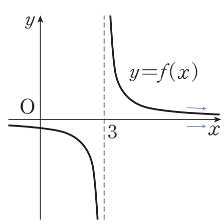
ㄴ. $f(x)=\sqrt{2-3x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2-3x} = \infty$

ㄷ. $f(x)=\frac{1}{x-3}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



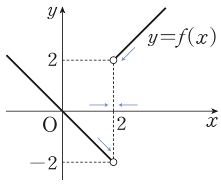
그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-3} = 0$

ㄹ. $f(x)=\frac{x^2-2x}{|x-2|}$라 하면

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x(x-2)}{-(x-2)} & (x<2) \\ \frac{x(x-2)}{x-2} & (x>2) \end{cases} = \begin{cases} -x & (x<2) \\ x & (x>2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x \to 2+} f(x)=2$,

$\lim_{x \to 2-} f(x)=-2$

즉, $\lim_{x \to 2+} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|} \neq \lim_{x \to 2-} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$이므로

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

02

$f(x)=\dfrac{|x-2|(x+a)}{x-2}$에서

(i) $x>2$일 때,

$|x-2|=x-2$이므로

$f(x)=\dfrac{(x-2)(x+a)}{x-2}=x+a$

$\therefore \lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2+} (x+a)=a+2$

(ii) $x<2$일 때,

$|x-2|=-(x-2)$이므로

$f(x)=\dfrac{-(x-2)(x+a)}{x-2}=-(x+a)$

$\therefore \lim_{x \to 2-} f(x)=\lim_{x \to 2-} \{-(x+a)\}=-a-2$

(i), (ii)에서

$\lim_{x \to 2-} f(x)-\lim_{x \to 2+} f(x)=-a-2-(a+2)$

$=-2a-4$

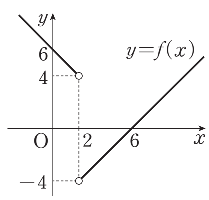
즉, $-2a-4=8$에서 $2a=-12$

$\therefore a=-6$

답 -6

보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



03

곡선 $y=-x^2+6x+2$와 직선 $y=2x+k$가 만나는 점의 개수 $f(k)$는 방정식 $-x^2+6x+2=2x+k$, 즉 $x^2-4x+k-2=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2-4x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(k-2)=6-k$

이므로 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $f(k)=0$일 때,

$\dfrac{D}{4}<0$이어야 하므로 $6-k<0$ $\quad \therefore k>6$

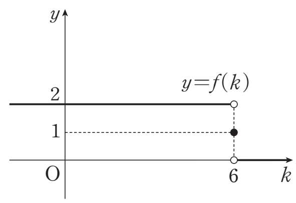
(ii) $f(k)=1$일 때,

$\dfrac{D}{4}=0$이어야 하므로 $6-k=0$ $\quad \therefore k=6$

(iii) $f(k)=2$일 때,

$\dfrac{D}{4}>0$이어야 하므로 $6-k>0$ $\quad \therefore k<6$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$k+2=t$로 놓으면 $k \longrightarrow 4+$일 때 $t \longrightarrow 6+$이므로

$\therefore \lim_{k \to 4+} f(k+2)=\lim_{t \to 6+} f(t)=0$

또한, $k \longrightarrow 6-$일 때 $f(k)=2$이므로

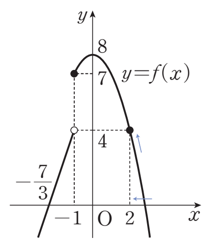
$\lim_{k \to 6-} f(k)=2$

$\therefore \lim_{k \to 4+} f(k+2)+\lim_{k \to 6-} f(k)=0+2=2$

답 2

04

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x \to 2+} f(x)=4$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a는 2이다.

답 2

다른 풀이

(ⅰ) $a<-1$일 때,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(3x+7)=3a+7$

즉, $3a+7=4$에서 $a=-1$

그런데 $a<-1$이므로 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a\geq-1$일 때,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-x^2+8)=-a^2+8$

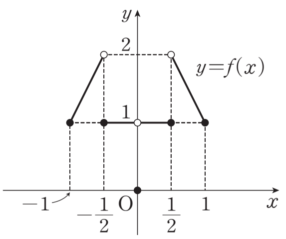
즉, $-a^2+8=4$에서 $a^2-4=0$

$\therefore a=2$ ($\because a\geq-1$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 실수 a는 2이다.

05

정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, $-1\leq x\leq1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x\longrightarrow0-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=1$

$x\longrightarrow-1+$일 때 $f(x)\longrightarrow1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x)=1+1=2$

답 2

다른 풀이

$-x=t$로 놓으면

$x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow0+$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{t\to0+}f(-t)=\lim_{t\to0+}f(t)=1$ ← $f(-x)=f(x)$ 성립

$x\longrightarrow-1+$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{t\to1-}f(-t)=\lim_{t\to1-}f(t)=1$ ← $f(-x)=f(x)$ 성립

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x)=1+1=2$

06

주어진 그래프에서 $\lim_{x\to2+}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{x\to a-}|g(x)|=-1$에서

$\lim_{x\to a-}|g(x)|=1$

(ⅰ) $\lim_{x\to a-}g(x)=-1$일 때,

$a=-1$

(ⅱ) $\lim_{x\to a-}g(x)=1$일 때,

$a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$-1+0=-1$

답 -1

07

ㄱ. 주어진 그래프에서

$\lim_{x\to1+}f(x)=3$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

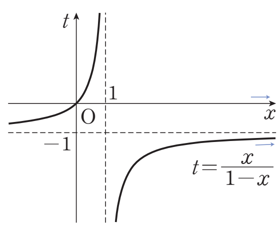
$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\dfrac{x}{1-x}=t$로 놓으면

$t=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+1}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-1$

이므로 함수 $t=\dfrac{x}{1-x}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x\longrightarrow\infty$일 때 $t\longrightarrow-1-$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\lim_{t\to-1-}f(t)=0$ (참)

ㄷ. $-2<a<2$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않으려면

$\lim_{x\to a+}f(x)\neq\lim_{x\to a-}f(x)$이어야 한다. 이를 만족시키는

정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

08

$\lim\limits_{x\to0}\{g(x)\}^2$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2$이다.

$x-1=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow-1+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2&=\lim_{x\to0+}\{f(x-1)\}^2\\&=\lim_{t\to-1+}\{f(t)\}^2\\&=\lim_{t\to-1+}(t^2+t-a)^2=a^2\end{aligned}$$

$x+1=s$로 놓으면 $x\longrightarrow0-$일 때 $s\longrightarrow1-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2&=\lim_{x\to0-}\{f(x+1)\}^2\\&=\lim_{s\to1-}\{f(s)\}^2\\&=\lim_{s\to1-}(s^2+s-a)^2=(2-a)^2\end{aligned}$$

즉, $a^2=(2-a)^2$에서

$a^2=a^2-4a+4,\ 4a=4$

$\therefore\ a=1$

답 1

09

$$f(x)=\begin{cases}x(x-1) & (|x|>1)\\ -x^2+ax+b & (|x|\le1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x(x-1) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -x^2+ax+b & (-1\le x\le1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 극한값이 존재해야 하므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 각각 존재해야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)$

이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to-1+}(-x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to-1-}x(x-1)$

$-a+b-1=2$

$\therefore\ a-b=-3$ ······㉠

또한, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to1+}x(x-1)=\lim\limits_{x\to1-}(-x^2+ax+b)$

$0=a+b-1$

$\therefore\ a+b=1$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$\therefore\ b-2a=2-2\times(-1)=4$

답 4

10

$\lim\limits_{x\to1-}f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow2-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to2-}f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to1+}f(-x)$에서 $-x=s$로 놓으면

$x\longrightarrow1+$일 때 $s\longrightarrow-1-$이므로

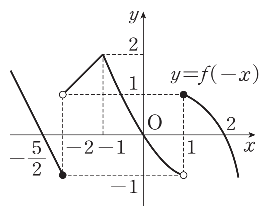
$\lim\limits_{x\to1+}f(-x)=\lim\limits_{s\to-1-}f(s)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1-}f(f(x))+\lim\limits_{x\to1+}f(-x)=1+1=2$

답 2

보충 설명

함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



$\therefore\ \lim\limits_{x\to1+}f(-x)=1$

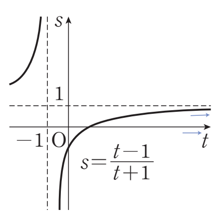
11

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$에서 $\dfrac{t-1}{t+1}=s$로 놓으면

$s=\dfrac{t-1}{t+1}=\dfrac{t+1-2}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}$

이므로 함수 $s=\dfrac{t-1}{t+1}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



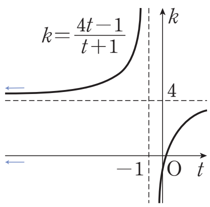
즉, $t\longrightarrow\infty$일 때 $s\longrightarrow1-$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)=\lim\limits_{s\to1-}f(s)=2$

$\lim\limits_{t\to-\infty}f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $\dfrac{4t-1}{t+1}=k$로 놓으면

$k=\dfrac{4t-1}{t+1}=\dfrac{4(t+1)-5}{t+1}=4-\dfrac{5}{t+1}$

이므로 함수 $k=\dfrac{4t-1}{t+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $t \longrightarrow -\infty$일 때 $k \longrightarrow 4+$

이므로

$$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{k\to4+} f(k)=3$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$$

답 5

2 함수의 극한에 대한 성질

기본 + 필수연습 본문 pp.026~031

15 (1) 14 (2) $\dfrac{45}{17}$ **16** (1) 9 (2) 0 (3) $\dfrac{19}{4}$

17 (1) 4 (2) 6 (3) 12 **18** (1) 0 (2) 4 (3) ∞

19 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) 22 **20** 4 **21** -3

22 21 **23** $-\dfrac{3}{4}$ **24** -1 **25** 1

26 $\dfrac{7}{2}$ **27** $\dfrac{\pi}{4}$ **28** 16

15

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-3g(x)\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty} f(x)-3\lim_{x\to\infty} g(x)$

$=5-3\times(-3)=14$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)g(x)}{-f(x)+4g(x)}$

$\displaystyle=\frac{3\lim_{x\to\infty} f(x)\times\lim_{x\to\infty} g(x)}{-\lim_{x\to\infty} f(x)+4\lim_{x\to\infty} g(x)}$

$\displaystyle=\frac{3\times5\times(-3)}{-5+4\times(-3)}=\frac{45}{17}$

답 (1) 14 (2) $\dfrac{45}{17}$

16

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(3x^2-2x+1)$

$\displaystyle=3\lim_{x\to2} x^2-2\lim_{x\to2} x+\lim_{x\to2} 1$

$=3\times2^2-2\times2+1=9$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-2)(10+5x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}(x-2)\times\lim_{x\to-2}(10+5x)$

$\displaystyle=\left(\lim_{x\to-2} x-\lim_{x\to-2} 2\right)\left(\lim_{x\to-2} 10+5\lim_{x\to-2} x\right)$

$=(-2-2)\times\{10+5\times(-2)\}=(-4)\times0=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{2x^2+1}{7-x}=\frac{\lim_{x\to3}(2x^2+1)}{\lim_{x\to3}(7-x)}$

$\displaystyle=\frac{2\lim_{x\to3} x^2+\lim_{x\to3} 1}{\lim_{x\to3} 7-\lim_{x\to3} x}=\frac{19}{4}$

답 (1) 9 (2) 0 (3) $\dfrac{19}{4}$

17

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2} x^2=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}(x-1)(x-2)=(-2)\times(-3)=6$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)}{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-2} 2(\sqrt{x+11}+3)=12$

답 (1) 4 (2) 6 (3) 12

18

(1) $x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{2x^2+3x-4}=\lim_{t\to\infty}\frac{-5t-4}{2t^2-3t-4}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{5}{t}-\frac{4}{t^2}}{2-\frac{3}{t}-\frac{4}{t^2}}=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}=4$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+7}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-6+\frac{7}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\infty$

답 (1) 0 (2) 4 (3) ∞

19

(1) $x=-t$로 놓으면 $x\longrightarrow-\infty$일 때 $t\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$$
$$=\lim_{t\to\infty}(-t^3-2t^2-5t-1)$$
$$=\lim_{t\to\infty}t^3\left(-1-\frac{2}{t}-\frac{5}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)=-\infty$$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}-x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{3}=\infty$$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+22x+1}-\sqrt{x^2-22x+1})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+22x+1}-\sqrt{x^2-22x+1})(\sqrt{x^2+22x+1}+\sqrt{x^2-22x+1})}{\sqrt{x^2+22x+1}+\sqrt{x^2-22x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{44x}{\sqrt{x^2+22x+1}+\sqrt{x^2-22x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{44}{\sqrt{1+\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{22}{x}+\frac{1}{x^2}}}=22$$

답 (1) $-\infty$ (2) ∞ (3) 22

20

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left\{1-\frac{1}{(2x-1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{(2x-1)^2-1}{(2x-1)^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{4x}{(2x-1)^2}=4$$

답 4

21

$x-2=t$로 놓으면 $x\longrightarrow2$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=5$$

즉, $x\longrightarrow0$일 때 함수 $\frac{f(x)}{x}$가 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2+3f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x+\frac{3f(x)}{x}}{2x-\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{5\lim_{x\to0}x+3\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}{2\lim_{x\to0}x-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}}$$
$$=\frac{5\times0+3\times5}{2\times0-5}=-3$$

답 -3

22

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)}{(2x-3)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{x+2}\times\frac{2x-3}{g(x)}\times\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2\right\}$$

$x\longrightarrow1$일 때 세 함수 $\frac{f(x)}{x+2}$, $\frac{2x-3}{g(x)}$, $\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2$이 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)}{(2x-3)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+2}\times\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{g(x)}\times\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2$$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{g(x)}{2x-3}}=\frac{\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{2x-3}}=\frac{1}{3}$

$$=7\times\frac{1}{3}\times(-3)^2=21$$

답 21

23

$\lim_{x\to\infty}xf(x)=2$, $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{x^2}=0$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2xf(x)g(x)-g(x)}{xf(x)-4g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2xf(x)\times\dfrac{g(x)}{x^2}-\dfrac{g(x)}{x^2}}{\dfrac{xf(x)}{x^2}-\dfrac{4g(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)\times\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{x^2}-4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{2\times2\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}}{0-4\times\dfrac{1}{2}}=-\frac{3}{4}$$

답 $-\frac{3}{4}$

24

$\frac{f(x)-1}{x+1}=h_1(x)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to1}h_1(x)=2$

$f(x)=(x+1)h_1(x)+1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\{(x+1)h_1(x)+1\}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}h_1(x)+\lim_{x\to1}1$$
$$=2\times2+1=5$$

또한, $f(x)+4g(x)=h_2(x)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to1}h_2(x)=1$

$g(x)=\frac{1}{4}h_2(x)-\frac{1}{4}f(x)$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{4}h_2(x)-\frac{1}{4}f(x)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to1}h_2(x)-\frac{1}{4}\lim_{x\to1}f(x)$$
$$=\frac{1}{4}\times1-\frac{1}{4}\times5=-1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{10g(x)+f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}f(x)}{10\lim\limits_{x\to1}g(x)+\lim\limits_{x\to1}f(x)}$$
$$=\frac{5}{10\times(-1)+5}=-1$$

답 -1

25

$f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{3}$

이때 $\lim\limits_{x\to0}h(x)=2$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)}{f(x)}=0$ ……㉠

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{8g(x)-f(x)}{2f(x)-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{8\times\dfrac{f(x)-h(x)}{3}-f(x)}{2f(x)-\dfrac{f(x)-h(x)}{3}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{5f(x)-8h(x)}{3}}{\dfrac{5f(x)+h(x)}{3}}=\lim_{x\to0}\frac{5f(x)-8h(x)}{5f(x)+h(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{5-\dfrac{8h(x)}{f(x)}}{5+\dfrac{h(x)}{f(x)}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}5-8\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)}{f(x)}}{\lim\limits_{x\to0}5+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{5-8\times0}{5+0}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{5}{5}=1$$

답 1

다른 풀이

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-3g(x)\}=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3g(x)}{f(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\left\{1-\frac{3g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$1-\frac{3g(x)}{f(x)}=k(x)$로 놓으면 $x\longrightarrow0$일 때 $k(x)$는 수렴하고, $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1-k(x)}{3}$이므로 $x\longrightarrow0$일 때 $\frac{g(x)}{f(x)}$도 수렴한다.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{8g(x)-f(x)}{2f(x)-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{8g(x)}{f(x)}-1}{2-\dfrac{g(x)}{f(x)}}=\frac{8\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}-\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}2-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{f(x)}}$$
$$=\frac{\dfrac{8}{3}-1}{2-\dfrac{1}{3}}=\frac{\dfrac{5}{3}}{\dfrac{5}{3}}=1$$

26

$2f(x)-5g(x)=h(x)$로 놓으면

$g(x)=\frac{2f(x)-h(x)}{5}$

이때 $\lim_{x\to\infty} h(x)=7$이고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3\times\dfrac{2f(x)-h(x)}{5}}{2\times\dfrac{2f(x)-h(x)}{5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{14f(x)+3h(x)}{5}}{\dfrac{4f(x)-2h(x)}{5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14f(x)+3h(x)}{4f(x)-2h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\dfrac{3h(x)}{f(x)}}{4-\dfrac{2h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}14+3\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}}{\lim_{x\to\infty}4-2\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{14+3\times 0}{4-2\times 0}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{7}{2}$$

답 $\frac{7}{2}$

다른 풀이

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$는 $x \longrightarrow \infty$일 때 $f(x) \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-5g(x)\}=7$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-5g(x)}{f(x)}=0,\ \lim_{x\to\infty}\left\{2-\frac{5g(x)}{f(x)}\right\}=0$$

$2-\dfrac{5g(x)}{f(x)}=k(x)$로 놓으면 $x \longrightarrow \infty$일 때 $k(x)$는 수렴하고, $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{2-k(x)}{5}$이므로 $x \longrightarrow \infty$일 때 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$도 수렴한다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{3g(x)}{f(x)}}{\dfrac{2g(x)}{f(x)}}=\frac{\lim_{x\to\infty}4-3\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}}{2\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{4-3\times\dfrac{2}{5}}{2\times\dfrac{2}{5}}=\frac{\dfrac{14}{5}}{\dfrac{4}{5}}=\frac{7}{2}$$

27

점 $\mathrm{P}(t,\sqrt{2t})$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 H이므로 △OPH는 빗변의 길이가

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$

인 직각삼각형이다.

이때 이 직각삼각형의 빗변은 외접원의 지름과 일치하므로 삼각형 OPH의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$2r=\sqrt{t^2+2t}$

즉, $r=\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{2}$이므로 삼각형 OPH의 외접원의 넓이는

$$f(t)=\pi\times\left(\frac{\sqrt{t^2+2t}}{2}\right)^2=\frac{t^2+2t}{4}\pi$$

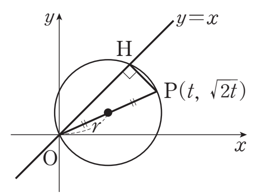
$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{t^2+2t}{4}\pi}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t}{4t^2}\pi$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{t}}{4}\pi=\frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

보충 설명

삼각형 OPH와 그 외접원은 다음 그림과 같다.



28

$\mathrm{P}(t,\sqrt{6t+8})$, $\mathrm{Q}(t,\sqrt{3t-1})$이므로

$A(t)=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{6t+8})^2}=\sqrt{t^2+6t+8}$

$B(t)=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t-1})^2}=\sqrt{t^2+3t-1}$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{24}{A(t)-B(t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24}{\sqrt{t^2+6t+8}-\sqrt{t^2+3t-1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}{(\sqrt{t^2+6t+8}-\sqrt{t^2+3t-1})(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}{3t+9}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24\left(\sqrt{1+\frac{6}{t}+\frac{8}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}}\right)}{3+\frac{9}{t}}$$

$$=\frac{24\times(1+1)}{3}=16$$

답 16

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.032~033

12 ①	**13** -1	**14** 0	**15** -48
16 2	**17** -1	**18** 6	**19** ②
20 54	**21** 13		

12

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$=\alpha\beta$$

즉, $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재한다. (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<a)\\ 1 & (x\ge a)\end{cases}$이라 하면

$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=1^2=1$, $\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$에서

$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=1$

그런데 $\lim_{x\to a+}f(x)=1$, $\lim_{x\to a-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=\frac{1}{x-a}$이라 하면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}(x-a)^2=0$이고

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(x-a)=0$이지만

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

13

$$\lim_{x\to a}\frac{2x^2-9x-5}{3x^2-12x-15}=\lim_{x\to a}\frac{(2x+1)(x-5)}{3(x+1)(x-5)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2x+1}{3(x+1)}\qquad\cdots\cdots㉠$$

이때 ㉠의 값이 존재하지 않으려면 $\frac{k}{0}$ (k는 0이 아닌 실수)

꼴이어야 하므로 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}3(x+1)=0$에서 $3(a+1)=0$

$\therefore a=-1$

답 -1

14

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$이므로

$f(1)=\alpha$, $g(1)=\beta$ (α, β는 실수)라 하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}g(x)$$

$$=\alpha+\beta=4\qquad\cdots\cdots㉠$$

$\lim_{x\to1}\{(x-2)f(x)+3xg(x)\}$

$=\lim_{x\to1}(x-2)f(x)+\lim_{x\to1}3xg(x)$

$=\lim_{x\to1}(x-2)\times\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to1}3x\times\lim_{x\to1}g(x)$

$=-\alpha+3\beta=12\qquad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=0$, $\beta=4$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=0$, $\lim_{x\to1}g(x)=4$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}g(x)=0\times4=0$

답 0

보충 설명

$f(x)$가 다항함수일 때, 임의의 실수 a에 대하여 $x\longrightarrow a$일 때의 $f(x)$의 극한값은 $x=a$에서의 함숫값과 같다.

즉, 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

15

$\lim_{x\to 2}(x^2-3x)g(x)$

$=\lim_{x\to 2}\left\{(2x+1)f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\times\frac{x^2-3x}{2x+1}\right\}$ ← 주어진 식을 $x\longrightarrow 2$일 때 각각 수렴하는 함수들의 곱으로 나타낸다.

$x\longrightarrow 2$일 때 세 함수 $(2x+1)f(x)$, $\frac{g(x)}{f(x)}$, $\frac{x^2-3x}{2x+1}$가

각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}(x^2-3x)g(x)$

$=\lim_{x\to 2}(2x+1)f(x)\times\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{2x+1}$

$=10\times 12\times\left(-\frac{2}{5}\right)=-48$

답 -48

16

$2f(x)-3g(x)=h(x)$로 놓으면

$f(x)=\frac{1}{2}\{3g(x)+h(x)\}$

이때 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-3$이고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{1}{2}\{3g(x)+h(x)\}+g(x)}{3\times\frac{1}{2}\{3g(x)+h(x)\}-g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\frac{4h(x)}{g(x)}}{7+\frac{3h(x)}{g(x)}}$

$=\frac{\lim_{x\to\infty}14+4\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}}{\lim_{x\to\infty}7+3\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}}$

$=\frac{14+4\times 0}{7+3\times 0}=2$

답 2

17

$\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2-x+a}{x^2+(1-a)x-a}$에서 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 (분자) $\longrightarrow 0$, 즉 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 분자, 분모를 각각 인수분해하면

$\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2-x+a}{x^2+(1-a)x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+1)(x-1)}{(x-a)(x+1)}$

$=\lim_{x\to a}(x-1)$

$=a-1$

즉, $a-1=2a$이므로 $a=-1$

답 -1

18

이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 두 실근이 α, β $(\alpha>\beta)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-3$

이때 $\alpha-\beta>0$이므로

$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{6^2-4\times(-3)}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ ······㉠

$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{3x}(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x}(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta})(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta})}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta}{x}}}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{1+1}=6$

답 6

19

$A=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x+1}{4x^3-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4-\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{0+0+0}{4-0}=0$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x})(\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x})}{x(\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{5+2x}+\sqrt{5-2x}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$C=\lim_{x\to \infty}\frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{\sqrt{2x}}$$
$$=\lim_{x\to \infty}\frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{2x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$
$$=\lim_{x\to \infty}\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2x}+\sqrt{2x^2-2x}}$$
$$=\lim_{x\to \infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x}}+\sqrt{2-\frac{2}{x}}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$\therefore\ A<C<B$ ← $B=\frac{4\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{80}}{10}>C=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{50}}{10}$

답 ②

20

곡선 $y=\frac{2t}{x}$와 직선 $y=-\frac{1}{t}x+3$의 교점의 x좌표는

$\frac{2t}{x}=-\frac{1}{t}x+3$에서 $2t^2=-x^2+3tx$

$x^2-3tx+2t^2=0,\ (x-t)(x-2t)=0$

$\therefore\ x=t$ 또는 $x=2t$

즉, $A(t,\ 2),\ B(2t,\ 1)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{t^2+2^2}=\sqrt{t^2+4},\ \overline{OB}=\sqrt{(2t)^2+1^2}=\sqrt{4t^2+1}$

$$\therefore\ \lim_{t\to 1+}\frac{\overline{OB}-\overline{OA}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4}}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{(\sqrt{4t^2+1}-\sqrt{t^2+4})(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{3t^2-3}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{3(t+1)(t-1)}{(t-1)(\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4})}$$
$$=\lim_{t\to 1+}\frac{3(t+1)}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2+4}}$$
$$=\frac{3\times 2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $k=\frac{3\sqrt{5}}{5}$이므로

$30\times k^2=30\times\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2=54$

답 54

21

$\overline{PA}=\overline{QB}=t\ (0<t<3)$라 하면

$P(3-t,\ 0),\ Q(0,\ 2+t)$

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{2+t}{3-t}x+(2+t)$ ……㉠

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+2$ ……㉡

두 직선 PQ와 AB의 교점 R의 좌표는

연립방정식 $\begin{cases} ㉠ \\ ㉡ \end{cases}$의 해와 같으므로

$-\frac{2+t}{3-t}x+(2+t)=-\frac{2}{3}x+2,\ \left(\frac{2+t}{3-t}-\frac{2}{3}\right)x=t$

$\frac{3(2+t)-2(3-t)}{3(3-t)}x=t,\ \frac{5t}{3(3-t)}x=t$

$\therefore\ x=\frac{9-3t}{5}$

이것을 ㉡에 대입하면

$y=-\frac{2}{3}\times\frac{3(3-t)}{5}+2=\frac{2(t-3)}{5}+2=\frac{2t+4}{5}$

$\therefore\ R\left(\frac{9-3t}{5},\ \frac{2t+4}{5}\right)$

이때 두 점 P, Q는 각각 두 점 A, B에 한없이 가까워지므로

$t\longrightarrow 0+$일 때 점 R이 한없이 가까워지는 점의 x좌표와

y좌표는 각각

$\lim_{t\to 0+}\frac{9-3t}{5}=\frac{9}{5},\ \lim_{t\to 0+}\frac{2t+4}{5}=\frac{4}{5}$

따라서 $a=\frac{9}{5},\ b=\frac{4}{5}$이므로

$5(a+b)=5\times\left(\frac{9}{5}+\frac{4}{5}\right)=13$

답 13

다른 풀이

A(3, 0), B(0, 2), P(p, 0), Q(0, q)이므로

$\overline{PA}=3-p$, $\overline{QB}=q-2$ ($\because$ $0<p<3$, $q>2$)

이때 $\overline{PA}=\overline{QB}$이므로 $3-p=q-2$

$\therefore$ $q=5-p$ ……㉢

직선 AB의 방정식을 l_1, 직선 PQ의 방정식을 l_2라 하면

$l_1 : y=-\frac{2}{3}x+2$

$l_2 : y=-\frac{q}{p}x+q$

두 직선 l_1, l_2의 교점이 점 R이므로 점 R의 x좌표는

$-\frac{2}{3}x+2=-\frac{q}{p}x+q$, $\left(\frac{q}{p}-\frac{2}{3}\right)x=q-2$

$\frac{3q-2p}{3p}x=q-2$ $\quad\therefore$ $x=\frac{3p(q-2)}{3q-2p}$ ……㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$x=\frac{3p(5-p-2)}{3(5-p)-2p}$

$=\frac{3p(3-p)}{15-5p}=\frac{3p(3-p)}{5(3-p)}=\frac{3p}{5}$

이때 점 P는 점 A에 한없이 가까워지므로

$p \longrightarrow 3-$일 때 $x \longrightarrow \frac{9}{5}$

한편, 점 R(a, b)는 직선 l_1 위의 점이므로

$p \longrightarrow 3-$, 즉 $x \longrightarrow \frac{9}{5}$일 때 $y \longrightarrow \frac{4}{5}$

따라서 $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{4}{5}$이므로

$5(a+b)=5\times\left(\frac{9}{5}+\frac{4}{5}\right)=13$

3 함수의 극한의 응용

기본+필수연습 본문 pp.036~039

29 (1) 2 (2) 11		**30** 2	
31 (1) 0 (2) 45		**32** -3	**33** 5
34 -6	**35** -4	**36** 5	**37** 4
38 $\frac{1}{2}$			

29

(1) $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2-x-a)=0$이므로

$2^2-2-a=0$ $\quad\therefore$ $a=2$

(2) $x \longrightarrow 5$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 5}(\sqrt{x+a}-4)=0$이므로

$\sqrt{5+a}-4=0$, $5+a=16$ $\quad\therefore$ $a=11$

답 (1) 2 (2) 11

30

주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면

$\frac{1}{2}x+2<\frac{f(x)}{x}<x+2$ ← $x>0$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+2\right)=0+2=2$, $\lim_{x\to 0}(x+2)=0+2=2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

답 2

31

(1) $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}(ax^2+bx+2)=0$이므로

$a-b+2=0$ $\quad\therefore$ $b=a+2$ ……㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to -1}\frac{ax^2+(a+2)x+2}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(ax+2)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(ax+2)=-a+2$

따라서 $-a+2=4$이므로

$a=2-4=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2+2=0$

$\therefore$ $ab=(-2)\times 0=0$

(2) $x \longrightarrow -3$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -3}(3-\sqrt{ax+b})=0$이므로

$3-\sqrt{-3a+b}=0$, $3=\sqrt{-3a+b}$

$9=-3a+b$ $\quad$ $\therefore b=3a+9$ $\quad$ ……㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+3x}{3-\sqrt{ax+3a+9}}$$

$$=\lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)(3+\sqrt{ax+3a+9})}{(3-\sqrt{ax+3a+9})(3+\sqrt{ax+3a+9})}$$

$$=\lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)(3+\sqrt{ax+3a+9})}{-ax-3a}$$

$$=\lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)(3+\sqrt{ax+3a+9})}{-a(x+3)}$$

$$=\lim_{x \to -3} \frac{x(3+\sqrt{ax+3a+9})}{-a}$$

$$=\frac{(-3)\times 6}{-a}=\frac{18}{a}$$

따라서 $\frac{18}{a}=2$이므로 $a=\frac{18}{2}=9$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=3\times 9+9=36$

$\therefore a+b=9+36=45$

답 (1) 0 (2) 45

32

$x=-t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+ax}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x}$$

$$=\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t^2+3}-at}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t}$$

$$=\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}}-a}{\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+3}=\frac{1-a}{3+3}=\frac{1-a}{6}$$

따라서 $\frac{1-a}{6}=\frac{2}{3}$이므로

$1-a=4$ $\quad$ $\therefore a=-3$

답 -3

33

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2}=-9$에서 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 -9인 삼차함수임을 알 수 있으므로

$f(x)=x^3-9x^2+ax+b$ (a, b는 상수) $\quad$ ……㉠

라 하자.

또한, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=10$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x)=0$에서 $f(1)=0$이므로

$1-9+a+b=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore b=-a+8$ $\quad$ ……㉡

$\therefore f(x)=x^3-9x^2+ax-a+8$

이때 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-9	a	$-a+8$
		1	-8	$a-8$
	1	-8	$a-8$	0

$f(x)=(x-1)(x^2-8x+a-8)$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2-8x+a-8)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1}(x^2-8x+a-8)$$

$$=1-8+a-8=a-15$$

즉, $a-15=10$이므로 $a=25$

$a=25$를 ㉡에 대입하면

$b=-25+8=-17$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+25x-17$이므로

$f(2)=8-36+50-17=5$

답 5

34

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3}=0$에서 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수임을 알 수 있다.

또한, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=4$에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 0} f(x)=0$에서 $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

$f(x)=x(ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(ax+b)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)=b=4$

$\therefore\ f(x)=x(ax+4)$

이때 방정식 $f(x)=2x$의 한 근이 1이므로 $f(1)=2$에서

$a+4=2\qquad\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=x(-2x+4)=-2x^2+4x$이므로

$f(3)=-18+12=-6$

답 -6

35

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=8$에서 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\qquad\therefore\ f(0)=0\qquad\cdots\cdots$㉠

또한, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{x-4}=8$에서 $x\longrightarrow 4$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0\qquad\therefore\ f(4)=0\qquad\cdots\cdots$㉡

이때 $f(x)$는 삼차함수이고 ㉠, ㉡을 만족시키므로

$f(x)=x(x-4)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하자.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-4)(ax+b)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-4)(ax+b)=-4b$

즉, $-4b=8$이므로 $b=-2\qquad\cdots\cdots$㉢

(ii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x(x-4)(ax+b)}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 4}x(ax+b)=4(4a+b)$

$=4(4a-2)$ ($\because$ ㉢)

$=16a-8$

즉, $16a-8=8$에서 $16a=16\qquad\therefore\ a=1$

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-4)(x-2)$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-4)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}x(x-4)=2\times(-2)=-4$

답 -4

36

$5x-1<(x^2+1)f(x)<5x+2$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$\dfrac{5x-1}{x^2+1}<f(x)<\dfrac{5x+2}{x^2+1}$ ← 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$x>0$일 때, 각 변에 x를 곱하면

$\dfrac{x(5x-1)}{x^2+1}<xf(x)<\dfrac{x(5x+2)}{x^2+1}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x-1)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x}{x^2+1}=5$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x+2)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x}{x^2+1}=5$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=5$

답 5

보충 설명

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)$의 값은 함수 $xf(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때 $xf(x)$의 값이므로 $x>0$일 때만 살펴보면 된다.

37

$|f(x)|<3$에서

$-3<f(x)<3$

각 변에 $4x^2$을 더한 후 각 변을 x^2+5로 나누면

$\dfrac{4x^2-3}{x^2+5}<\dfrac{f(x)+4x^2}{x^2+5}<\dfrac{4x^2+3}{x^2+5}$ ($\because\ x^2+5>0$)

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3}{x^2+5}=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3}{x^2+5}=4$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+4x^2}{x^2+5}=4$

답 4

다른 풀이

$|f(x)|<3$에서 $-3<f(x)<3$이다.

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+4x^2}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x^2}+4}{1+\dfrac{5}{x^2}}=\dfrac{4}{1}=4$

38

$\left[\dfrac{x}{4}\right]$는 $\dfrac{x}{4}$보다 크지 않은 최대의 정수이므로

$$\frac{x}{4}-1<\left[\frac{x}{4}\right]\le\frac{x}{4}$$

$x>0$일 때, 각 변에 $\dfrac{2}{x}$를 곱하면

$$\frac{2}{x}\left(\frac{x}{4}-1\right)<\frac{2}{x}\left[\frac{x}{4}\right]\le\frac{2}{x}\times\frac{x}{4}$$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\left(\frac{x}{4}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}$,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\times\frac{x}{4}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\left[\frac{x}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

답 $\dfrac{1}{2}$

✦다른 풀이

$\left[\dfrac{x}{4}\right]=\dfrac{x}{4}-\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\left[\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\left(\frac{x}{4}-\alpha\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2\alpha}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

STEP 1 개 념 마 무 리 본문 pp.040~041

22 11	**23** 10	**24** 23	**25** -7
26 $a=1$, $b=\dfrac{5}{2}$		**27** 48	**28** 52
29 12	**30** $\dfrac{6}{7}$	**31** $\dfrac{1}{4}$	**32** 3
33 $\dfrac{1}{3}$			

22

$$x^3-ax^2+bx-ab=x^2(x-a)+b(x-a)$$
$$=(x-a)(x^2+b)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-x-2}{x^3-ax^2+bx-ab}=\lim_{x\to a}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-a)(x^2+b)}=\frac{1}{2}$$

$x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a}(x+1)(x-2)=0$에서 $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+b)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+b}=\frac{-3}{1+b}$$

즉, $\dfrac{-3}{1+b}=\dfrac{1}{2}$에서 $1+b=-6$ $\quad\therefore\ b=-7$

$\therefore\ ab=(-1)\times(-7)=7$

(ii) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+b)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+b}=\frac{3}{4+b}$$

즉, $\dfrac{3}{4+b}=\dfrac{1}{2}$에서 $4+b=6$ $\quad\therefore\ b=2$

$\therefore\ ab=2\times2=4$

(i), (ii)에서 ab의 값으로 가능한 것은 7 또는 4이므로 구하는 합은

$7+4=11$

답 11

23

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}(\sqrt{x^3-2x}-x\sqrt{x-a})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^3-2x}-x\sqrt{x-a})(\sqrt{x^3-2x}+x\sqrt{x-a})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x^3-2x}+x\sqrt{x-a})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-2x}{\sqrt{x^4-x^3-2x^2+2x}+x\sqrt{x^2-(a+1)x+a}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}+\sqrt{1-\dfrac{a+1}{x}+\dfrac{a}{x^2}}}$$
$$=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\dfrac{a}{2}=5$이므로 $a=10$

답 10

24

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{ax+b}-4}=c$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분자) $\longrightarrow 0$이고

0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) ⟶ 0이다. c는 자연수이므로 $c \neq 0$

즉, $\lim_{x \to 2}(\sqrt{ax+b}-4)=0$에서

$\sqrt{2a+b}-4=0$, $\sqrt{2a+b}=4$

$2a+b=16 \quad \therefore b=-2a+16 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{\sqrt{ax-2a+16}-4}$$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{ax-2a+16}+4)}{(\sqrt{ax-2a+16}-4)(\sqrt{ax-2a+16}+4)}$$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{ax-2a+16}+4)}{a(x-2)}$$

$$=\lim_{x \to 2}\frac{\sqrt{ax-2a+16}+4}{a}$$

$$=\frac{4+4}{a}=\frac{8}{a}$$

$\therefore \frac{8}{a}=c \quad \cdots\cdots ㉡$

한편, a, b는 모두 자연수이므로 ㉠에서

$-2a+16 \geq 1$, $2a \leq 15 \quad \therefore a \leq \frac{15}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)를 모두 구하면

$(1, 14, 8)$, $(2, 12, 4)$, $(4, 8, 2)$

따라서 $a+b+c$의 최댓값은

$1+14+8=23$

답 23

25

$\lim_{x \to b}\frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{x^3-b^3}=4$에서 $x \to b$일 때 (분모) ⟶ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) ⟶ 0이다.

즉, $\lim_{x \to b}(\sqrt[3]{x+a}-1)=0$에서

$\sqrt[3]{b+a}-1=0 \quad \therefore \sqrt[3]{a+b}=1$

이때 a, b는 모두 실수이므로 $a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$$\lim_{x \to b}\frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{x^3-b^3}$$

$(A^{\frac{1}{3}}-1)(A^{\frac{2}{3}}+A^{\frac{1}{3}}+1)=A-1$

$$=\lim_{x \to b}\frac{(\sqrt[3]{x+a}-1)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}{(x^3-b^3)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

$$=\lim_{x \to b}\frac{x+a-1}{(x^3-b^3)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

$$=\lim_{x \to b}\frac{x-b}{(x-b)(x^2+bx+b^2)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

($\because$ ㉠에서 $a-1=-b$)

$$=\lim_{x \to b}\frac{1}{(x^2+bx+b^2)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)^2}+\sqrt[3]{a+b}+1}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\times\frac{1}{3} \ (\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{9b^2}$$

즉, $\frac{1}{9b^2}=4$에서 $b^2=\frac{1}{36} \quad \therefore b=\pm\frac{1}{6}$

(i) $b=-\frac{1}{6}$일 때, ㉠에서 $a=\frac{7}{6}$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{7}{6}}{-\frac{1}{6}}=-7$$

(ii) $b=\frac{1}{6}$일 때, ㉠에서 $a=\frac{5}{6}$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=5$$

(i), (ii)에서 $\frac{a}{b}$의 최솟값은 -7이다.

답 -7

26

$a \leq 0$이면 $\lim_{x \to \infty}\{\sqrt{x^2+7x+3}-(ax+b)\}=\infty$이므로 극한값이 존재한다는 조건에 모순이다.

$\therefore a>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$$\lim_{x \to \infty}\{\sqrt{x^2+7x+3}-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{\{\sqrt{x^2+7x+3}-(ax+b)\}\{\sqrt{x^2+7x+3}+(ax+b)\}}{\sqrt{x^2+7x+3}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{(x^2+7x+3)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+7x+3}+ax+b}$$

$$=\lim_{x \to \infty}\frac{(1-a^2)x^2+(7-2ab)x+3-b^2}{\sqrt{x^2+7x+3}+ax+b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 극한값이 존재하려면 분자의 이차항의 계수가 0이어야 하므로 ← (분자의 차수)=(분모의 차수)이어야 0이 아닌 극한값이 존재한다.

$1-a^2=0$, $a^2=1 \quad \therefore a=1$ ($\because$ ㉠)

이것을 ㉡에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(7-2b)x+3-b^2}{\sqrt{x^2+7x+3}+x+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7-2b+\frac{3-b^2}{x}}{\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}=\frac{7-2b}{2}$$

따라서 $\frac{7-2b}{2}=1$이므로

$7-2b=2,\ 2b=5 \qquad \therefore\ b=\frac{5}{2}$

답 $a=1,\ b=\frac{5}{2}$

27

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{x^2-x-6}=2$에서 $f(x+1)$은 이차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x)$도 이차항의 계수가 2인 이차함수임을 알 수 있다.

한편, $\lim_{x\to-2}\frac{f(x-1)}{x^2-x-6}=4$에서 $x\longrightarrow -2$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-2}f(x-1)=0$에서 $f(-3)=0$이므로

$f(x)=2(x+3)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x-1)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-1-a)}{(x+2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-1-a)}{x-3}$$

$$=\frac{2(-3-a)}{-5}=\frac{2a+6}{5}$$

즉, $\frac{2a+6}{5}=4$에서 $2a+6=20$

$\therefore\ a=7$

따라서 $f(x)=2(x+3)(x-7)$이므로

$f(-5)=2\times(-2)\times(-12)=48$

답 48

28

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-6x}{x^2-9}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-6x}{x^2-9}$, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-6x}{x^2-9}$의 값도 존재한다.

즉, $x\longrightarrow -3$ 또는 $x\longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

$\therefore\ \lim_{x\to-3}\{f(x)-6x\}=0,\ \lim_{x\to3}\{f(x)-6x\}=0$

이때 $f(x)$가 다항함수이고, $f(x)-6x$는 $x+3$, $x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)-6x=(x+3)(x-3)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)

라 할 수 있다. (가)

$$\lim_{x\to\infty}(2x-5-\sqrt{f(x)})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-5-\sqrt{f(x)})(2x-5+\sqrt{f(x)})}{2x-5+\sqrt{f(x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-20x+25-f(x)}{2x-5+\sqrt{f(x)}}$$

이고, 위의 값이 존재하려면 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차함수이어야 한다. $-(*)$

따라서 $f(x)-6x=4(x+3)(x-3)$이므로

$f(x)=4(x+3)(x-3)+6x$ (나)

$\therefore\ f(4)=4\times7\times1+6\times4=52$ (다)

답 52

단계	채점 기준	배점
(가)	$\frac{0}{0}$ 꼴의 함수의 극한을 이용하여 $f(x)$의 꼴을 구한 경우	40%
(나)	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한을 이용하여 $f(x)$를 구한 경우	40%
(다)	$f(4)$의 값을 구한 경우	20%

보충 설명

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 함수의 극한값이 존재하려면

(분자의 차수)<(분모의 차수)이거나 (극한값)=0

(분자의 차수)=(분모의 차수)이어야 한다. (극한값)=(분자, 분모의 최고차항의 계수의 비)

$(*)$에서 (분자의 차수)<(분모의 차수)일 수 없으므로 극한값이 존재하려면 분자, 분모 모두 일차식이 되어야 하고 이에 따라 $f(x)$는 이차항의 계수가 4인 이차함수이어야 한다.

29

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)+\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x)}-\lim_{x\to2}|f(x)-k|$의 값이 존재하려면 각각의 극한값이 존재해야 한다.

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)\times\lim_{x\to-1+} g(x)=-g(-1)$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)\times\lim_{x\to-1-} g(x)=0$에서

$g(-1)=0$ ……㉠

또한, $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow0+$일 때

$f(x)\longrightarrow0+$이므로 $g(x)\longrightarrow0$이다.

$\therefore\ g(0)=0$ ……㉡ ← $g(x)$는 다항함수

이때 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x+1)$이다.

한편, $\lim_{x\to2}|f(x)-k|$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to2+}|f(x)-k|=|1-k|$, $\lim_{x\to2-}|f(x)-k|=|2-k|$에서

$|1-k|=|2-k|$

이때 $1-k\neq2-k$이므로 $1-k=-(2-k)$

$1-k=-2+k\quad\therefore\ k=\frac{3}{2}$

$\therefore\ g(2k)=g(3)=3\times4=12$

답 12

30

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}$의 값은 다음과 같이 x의 값의 범위를 나누어 구할 수 있다.

(i) $x^2+3x-10>0$, 즉 $x<-5$ 또는 $x>2$일 때,

$x^2+2x-8\le f(x)\le2x^2-2x-4$에서

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}\le\frac{f(x)}{x^2+3x-10}\le\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}$$

이때

$$\lim_{x\to2+}\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2+}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2+}\frac{x+4}{x+5}=\frac{6}{7},$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2+}\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2+}\frac{2(x+1)}{x+5}=\frac{6}{7}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$$

(ii) $x^2+3x-10<0$, 즉 $-5<x<2$일 때,

$x^2+2x-8\le f(x)\le2x^2-2x-4$에서

$$\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}\le\frac{f(x)}{x^2+3x-10}\le\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}$$

이때

$$\lim_{x\to2-}\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2-}\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2-}\frac{2(x+1)}{x+5}=\frac{6}{7},$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2-}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2-}\frac{x+4}{x+5}=\frac{6}{7}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$

답 $\frac{6}{7}$

31

$\sqrt{4x^2+x}<f(x)<2x+k$에서

$\sqrt{4x^2+x}-2x<f(x)-2x<k$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4},$$

$\lim_{x\to\infty}k=k$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\frac{1}{4}\le\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}\le k$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}$의 값이 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

답 $\frac{1}{4}$

32

이차함수 $y=3x^2-4x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y=3x^2-4x+2+a$이므로

$g(x)=3x^2-4x+2+a$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이에 함수 $y=h(x)$의 그래프가 존재하므로

$3x^2-4x+2<h(x)<3x^2-4x+2+a$ ($\because$ $a>0$)

각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{3x^2-4x+2}{x^2}<\frac{h(x)}{x^2}<\frac{3x^2-4x+2+a}{x^2}$$

이때 $-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x+2}{x^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2+4t+2}{t^2}=3,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x+2+a}{x^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2+4t+2+a}{t^2}=3$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x^2}=3$$

답 3

33

$[9x^2+2x]$는 $9x^2+2x$보다 크지 않은 최대의 정수이므로

$9x^2+2x-1<[9x^2+2x]\le 9x^2+2x$

$x>\frac{-1+\sqrt{10}}{9}$일 때, ← $9x^2+2x-1>0$에서 $x<\frac{-1-\sqrt{10}}{9}$ 또는 $x>\frac{-1+\sqrt{10}}{9}$
$9x^2+2x>0$에서 $x<-\frac{2}{9}$ 또는 $x>0$

$\sqrt{9x^2+2x-1}<\sqrt{[9x^2+2x]}\le\sqrt{9x^2+2x}$

$\therefore$ $\sqrt{9x^2+2x-1}-3x<\sqrt{[9x^2+2x]}-3x\le\sqrt{9x^2+2x}-3x$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-1}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-1}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x}-3x)(\sqrt{9x^2+2x}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}=\frac{1}{3}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{[9x^2+2x]}-3x)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

다른 풀이

$[9x^2+2x]=9x^2+2x-\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{[9x^2+2x]}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x-\alpha}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-\alpha}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-\alpha}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-\alpha}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\alpha}{\sqrt{9x^2+2x-\alpha}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+3}$$
$$=\frac{1}{3}$$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.042

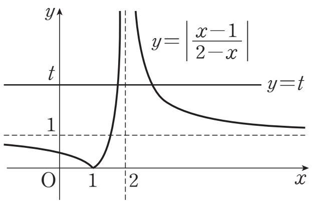
1 5	**2** 8	**3** 27	**4** 8
5 4	**6** 6		

1

$$y=\frac{x-1}{2-x}=\frac{-x+1}{x-2}=\frac{-(x-2)-1}{x-2}=-\frac{1}{x-2}-1$$

이므로 함수 $y=\frac{x-1}{2-x}$의 그래프는 함수 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프는 함수 $y=\frac{x-1}{2-x}$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(i) $t<0$일 때,

함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 0이므로 $f(t)=0$

(ii) $t=0$일 때,

함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로 $f(t)=1$

(iii) $0<t<1$일 때,

함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(iv) $t=1$일 때,

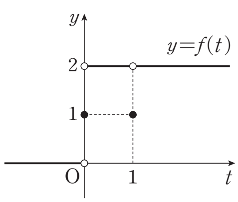
함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로 $f(t)=1$

(v) $t>1$일 때,

함수 $y=\left|\frac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(i)~(v)에서

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=1)\\ 2 & (0<t<1 \text{ 또는 } t>1)\end{cases}$$



따라서 $\lim_{t\to0+}f(t)=2$,

$\lim_{t\to1+}f(t)=2$, $f(1)=1$이므로

$\lim_{t\to0+}f(t)+\lim_{t\to1+}f(t)+f(1)=2+2+1=5$

답 5

2

$\lim_{x\to1}(x+2)f(x)g(x)=12$이고 $\lim_{x\to1}(x+2)=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)g(x)&=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)g(x)}{x+2}\\&=\frac{\lim_{x\to1}(x+2)f(x)g(x)}{\lim_{x\to1}(x+2)}\\&=\frac{12}{3}=4\end{aligned}$$

또한, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)h(x)}{5x-1}=3$이고 $\lim_{x\to1}(5x-1)=4$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}f(x)h(x)&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)h(x)}{5x-1}\times(5x-1)\right\}\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)h(x)}{5x-1}\times\lim_{x\to1}(5x-1)\\&=3\times4=12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{x\to1}f(x)\{h(x)-g(x)\}\\&=\lim_{x\to1}\{f(x)h(x)-f(x)g(x)\}\\&=\lim_{x\to1}f(x)h(x)-\lim_{x\to1}f(x)g(x)\\&=12-4=8\end{aligned}$$

답 8

3

$P(a,\ b)$ $(a>0,\ \ b>0)$라 하면 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점
점 P는 제1사분면 위의 점
$P(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=5$

이 접선이 점 $A(0,\ t)$를 지나므로 $bt=5$

$\therefore\ b=\frac{5}{t}$

또한, 점 P는 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=5$, 즉 $a^2+\left(\frac{5}{t}\right)^2=5$에서

$a^2=5-\frac{25}{t^2}$ $\qquad\therefore\ a=\sqrt{5-\frac{25}{t^2}}$ $(\because\ a>0)$

$\therefore\ P\left(\sqrt{5-\frac{25}{t^2}},\ \frac{5}{t}\right)$

점 Q는 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로

$Q\left(-\sqrt{5-\frac{25}{t^2}},\ \frac{5}{t}\right)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5-\frac{25}{t^2}}\times\frac{5}{t}$$
$$=\sqrt{\frac{5t^2-25}{t^2}}\times\frac{5}{t}$$
$$=\frac{5\sqrt{5t^2-25}}{t^2}$$
$$\therefore \lim_{t\to 5}\frac{t^2S(t)-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5\sqrt{5t^2-25}-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5(\sqrt{5t^2-25}-10)(\sqrt{5t^2-25}+10)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t^2-25)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t+5)(t-5)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t+5)}{\sqrt{5t^2-25}+10}$$
$$=\frac{25\times 10}{20}=\frac{25}{2}$$
즉, $p=2$, $q=25$이므로

$p+q=2+25=27$

답 27

다른 풀이

직선 OP와 x축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 점 P는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위의 점이므로

$P(\sqrt{5}\cos\theta,\ \sqrt{5}\sin\theta)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\cos\theta\times\sqrt{5}\sin\theta$$
$$=5\cos\theta\sin\theta \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\angle AOP=\frac{\pi}{2}-\theta$이고, 직각삼각형 AOP에서

$\overline{OP}=\sqrt{5}$, $\overline{OA}=t$이므로 $\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{t^2-5}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{5}}{t} \qquad \therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{t}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{t^2-5}}{t} \qquad \therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{t^2-5}}{t}$$

이것을 ㉠에 대입하면 $S(t)=\frac{5\sqrt{5t^2-25}}{t^2}$

$$\therefore \lim_{t\to 5}\frac{t^2S(t)-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5\sqrt{5t^2-25}-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5(\sqrt{5t^2-25}-10)(\sqrt{5t^2-25}+10)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t^2-25)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t+5)(t-5)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{25(t+5)}{\sqrt{5t^2-25}+10}$$
$$=\frac{25\times 10}{20}=\frac{25}{2}$$

즉, $p=2$, $q=25$이므로

$p+q=2+25=27$

보충 설명

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=r^2$

4

조건 ㈎에서 $x \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$

조건 ㈏에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$에서 $f(1)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=x(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식) $\cdots\cdots$ ㉡

라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x-1)g(x)$$
$$=-g(0)=4$$

$\therefore g(0)=-4$ $\cdots\cdots$ ㉢

한편, ㉡에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)\{f(x)-1\}g(f(x))$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(f\circ f)(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)-1\}g(f(x))}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}}_{\text{조건 (나)}}\times\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-1\}g(f(x))}{x+1}$$
$$=4\times\frac{\{f(1)-1\}g(f(1))}{2}$$
$=2\times(-1)\times g(0)$ ($\because$ ㉠)

$=(-2)\times(-4)$ ($\because$ ㉢)

$=8$

답 8

5

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\neq0$이면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고,

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이때 $f(a)=0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 a이다.

(ⅰ) $a=\alpha$인 경우

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha-\beta)-1}{(\alpha-\beta)+1}$$

이므로 $\frac{(\alpha-\beta)-1}{(\alpha-\beta)+1}=\frac{3}{5}$에서

$5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$, $2(\alpha-\beta)=8$

$\therefore\ \alpha-\beta=4$

(ⅱ) $a=\beta$인 경우

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)}$$
$$=\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\alpha)-1}{(x-\alpha)+1}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)-1}{(\beta-\alpha)+1}$$

이므로 $\frac{(\beta-\alpha)-1}{(\beta-\alpha)+1}=\frac{3}{5}$에서

$5(\beta-\alpha)-5=3(\beta-\alpha)+3$, $2(\beta-\alpha)=8$

$\therefore\ \beta-\alpha=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\alpha-\beta=4$ 또는 $\alpha-\beta=-4$이므로

$|\alpha-\beta|=4$

답 4

6

조건 (가)에서 $x>1$이면

$$2a\left(1-\frac{1}{x}\right)<f(x)<a(x^2-1)$$
$$2a\times\frac{x-1}{x}<f(x)<a(x^2-1)$$

각 변을 x^2-1로 나누면

$\frac{2a}{x(x+1)}<\frac{f(x)}{x^2-1}<a$ ($\because$ $x>1$일 때, $x^2-1>0$)

이때 $\lim_{x\to1+}\frac{2a}{x(x+1)}=a$이고, $\lim_{x\to1+}a=a$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}=a$$

조건 (나)에 의하여 $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$이므로

$a=2$

한편, $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 $x\longrightarrow1+$일 때 (분모) $\longrightarrow0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$에서 $f(1)=0$

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-k)$ (k는 상수) ······㉠

라 하면 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-k)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x-k}{x+1}=\frac{1-k}{2}$$

즉, $\frac{1-k}{2}=2$에서 $1-k=4$ $\quad\therefore\ k=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $f(x)=(x-1)(x+3)$이므로

$f(3)=2\times6=12$ $\quad\therefore\ \frac{f(3)}{a}=\frac{12}{2}=6$

답 6

02. 함수의 연속

1 함수의 연속

기본 + 필수연습 본문 pp.048~054

01 (1) 불연속 (2) 연속

02 (1) $[-2,\ 5]$ (2) $\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$ (3) $(-\infty,\ \infty)$

(4) $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

03 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 7)\cup(7,\ \infty)$

(3) $[-1,\ \infty)$

04 10	**05** 3	**06** ㄷ	**07** -8
08 3	**09** 32	**10** -1	**11** 2
12 10	**13** 1	**14** 6	

01

(1) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$은 $x=-1$에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(2) 함수 $f(x)$에 대하여

(i) $f(-1)=-1$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(-1)=-1,$

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{1}{x}=-1$

이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=-1$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

답 (1) 불연속 (2) 연속

02

(1) $[-2,\ 5]$ (2) $\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$

(3) 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty,\ \infty)$

(4) 주어진 함수의 정의역은 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이므로

$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

답 (1) $[-2,\ 5]$ (2) $\left[-\frac{1}{2},\ \infty\right)$

(3) $(-\infty,\ \infty)$ (4) $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$

03

(1) 함수 $f(x)=-2$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{5}{x-7}+3$은 $x\neq7$일 때, 즉

$(-\infty,\ 7)\cup(7,\ \infty)$에서 연속이다.

(3) 함수 $f(x)=-\sqrt{x+1}$은 $x+1\geq0$일 때, 즉 구간

$[-1,\ \infty)$에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 7)\cup(7,\ \infty)$ (3) $[-1,\ \infty)$

보충 설명

(1) 다항함수 $y=f(x)$ ⇨ 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속

(2) 유리함수 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ⇨ $g(x)\neq0$인 x에서 연속

(3) 무리함수 $y=\sqrt{f(x)}$ ⇨ $f(x)\geq0$인 x에서 연속

04

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-2$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

이어야 한다.

이때 $f(-2)=a-12$이고,

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}x=-2$$

이므로

$-2=a-12 \qquad \therefore\ a=10$

답 10

05

(i) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=2$

$x\longrightarrow0$일 때의 극한을 조사하면

$\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=1,\ \lim_{x\to0-}f(x)=1$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=1$

이때 $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ⅱ) $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$

$x \longrightarrow 1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to1+} f(x)=2,\ \lim_{x\to1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1+} f(x) \neq \lim_{x\to1-} f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ⅲ) $x=2$에서의 함숫값은 $f(2)=2$

$x \longrightarrow 2$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to2+} f(x)=1,\ \lim_{x\to2-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to2} f(x)=1$

이때 $\lim_{x\to2} f(x) \neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ⅳ) $x=3$에서의 함숫값은 $f(3)=2$

$x \longrightarrow 3$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to3+} f(x)=2,\ \lim_{x\to3-} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x)=2$

즉, $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0,\ x=1,\ x=2$에서 불연속이고, $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로

$a=3,\ b=1 \qquad \therefore\ ab=3\times1=3$

답 3

06

ㄱ. $x=-1$에서의 함숫값은

$f(-1)-g(-1)=1-2=-1$

$x \longrightarrow -1$일 때의 극한을 조사하면

$$\lim_{x\to-1+} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x\to-1+} f(x) - \lim_{x\to-1+} g(x) = -1-1=-2$$

$$\lim_{x\to-1-} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x\to-1-} f(x) - \lim_{x\to-1-} g(x) = 1-1=0$$

$\therefore \lim_{x\to-1+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x\to-1-} \{f(x)-g(x)\}$

즉, 극한값 $\lim_{x\to-1} \{f(x)-g(x)\}$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $x=-1$에서의 함숫값은

$f(-1)g(-1)=1\times2=2$

$x \longrightarrow -1$일 때의 극한을 조사하면

$$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x) = \lim_{x\to-1+} f(x) \times \lim_{x\to-1+} g(x) = (-1)\times1=-1$$

$$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x) = \lim_{x\to-1-} f(x) \times \lim_{x\to-1-} g(x) = 1\times1=1$$

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x\to-1-} f(x)g(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. $x=-1$에서의 함숫값은

$g(f(-1))=g(1)=1$

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow -1+$일 때 $t \longrightarrow -1+$이고,

$x \longrightarrow -1-$일 때 $t=1$이므로

$x \longrightarrow -1$일 때의 극한을 조사하면

$\lim_{x\to-1+} g(f(x)) = \lim_{t\to-1+} g(t)=1,$

$\lim_{x\to-1-} g(f(x))=g(1)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1} g(f(x))=1$

즉, $\lim_{x\to-1} g(f(x))=g(f(-1))$이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

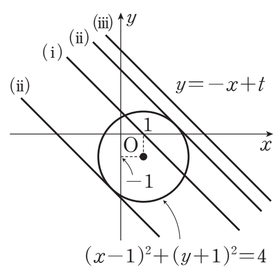
따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

07

원 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$의 중심의 좌표는 $(1,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 2이다.

이때 원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 $y=-x+t$, 즉 $x+y-t=0$ 사이의 거리를 d라 하면



$$d=\frac{|1-1-t|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t|}{\sqrt2}$$

(ⅰ) $d<2$일 때, 교점의 개수가 2이므로

$\frac{|t|}{\sqrt2}<2$에서 $|t|<2\sqrt2 \qquad \therefore\ -2\sqrt2<t<2\sqrt2$

(ⅱ) $d=2$일 때, 교점의 개수가 1이므로

$\frac{|t|}{\sqrt2}=2$에서 $|t|=2\sqrt2 \qquad \therefore\ t=\pm2\sqrt2$

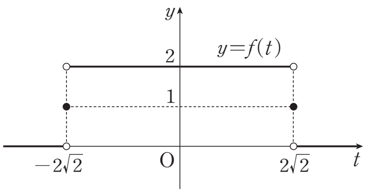
(iii) $d>2$일 때, 교점의 개수가 0이므로

$\frac{|t|}{\sqrt{2}}>2$에서 $|t|>2\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ t<-2\sqrt{2}$ 또는 $t>2\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2\sqrt{2} \text{ 또는 } t>2\sqrt{2}) \\ 1 & (t=-2\sqrt{2} \text{ 또는 } t=2\sqrt{2}) \\ 2 & (-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2\sqrt{2}$, $t=2\sqrt{2}$에서 불연속이므로 조건을 만족시키는 모든 t의 값의 곱은

$(-2\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}=-8$

답 -8

08

a의 값의 범위에 따라 $f(a)$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $a=0$일 때,

$2ax^2+2(a-3)x-(a-3)=0$에서

$-6x+3=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(0)=1$

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차방정식 $2ax^2+2(a-3)x-(a-3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2+2a(a-3)=3(a-1)(a-3)$

① $\frac{D}{4}<0$, 즉 $1<a<3$일 때,

실근이 존재하지 않으므로 $f(a)=0$

② $\frac{D}{4}=0$, 즉 $a=1$ 또는 $a=3$일 때,

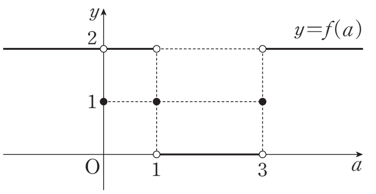
중근을 가지므로 $f(a)=1$

③ $\frac{D}{4}>0$, 즉 $a<1$ 또는 $a>3$일 때,

서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(a)=2$

(i), (ii)에서 $f(a)=\begin{cases} 0 & (1<a<3) \\ 1 & (a=0 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } a=3) \\ 2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1 \text{ 또는 } a>3) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(a)$는 $a=0$, $a=1$, $a=3$에서 불연속이므로 조건을 만족시키는 a의 값의 개수는 3이다.

답 3

09

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$에서 $2a+b=0$

$\therefore\ b=-2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}f(x)&=\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{a}{4}\end{aligned}$$

즉, $\frac{a}{4}=2$이므로 $a=8$

이것을 ㉡에 대입하면

$b=(-2)\times 8=-16$

$\therefore\ 2a-b=2\times 8-(-16)=32$

답 32

10

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$이어야 한다.

이때 $f(a)=-a^2+a+2$이고,

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-3x+a)=a^2-2a$,

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(-x^2+x+2)=-a^2+a+2$

이므로 $a^2-2a=-a^2+a+2$에서

$2a^2-3a-2=0$, $(2a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 2=-1$

답 -1

11

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=0$, $x=3$에서 각각 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$이어야 한다.

이때 $f(0)=4$이고,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(ax^2+b)=b$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} 4=4$

이므로 $b=4$ ……㉠

또한, 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x)=f(3)$이어야 한다.

이때 $f(3)=-14$이고,

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(-14)=-14$,

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}(ax^2+b)=9a+b$

이므로 $9a+b=-14$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

$a=-2$

따라서 $0<x<3$에서 $f(x)=-2x^2+4$이므로

$f(1)=-2+4=2$

답 2

12

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x+2}-16}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x\geq -2$인 모든 실수 x에서 연속이면

$x=2$에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$에서

$f(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x+2}-16}{x-2}$ ……㉠

㉠에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}-16)=0$에서

$2a-16=0$ $\quad\therefore\ a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(2)&=\lim_{x\to 2}\frac{8\sqrt{x+2}-16}{x-2}\\&=8\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=8\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=8\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\\&=8\times\frac{1}{4}=2\end{aligned}$$

$\therefore\ a+f(2)=8+2=10$

답 10

13

$x\neq 0$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{|1+x|-|1-x|}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$에서

$$\begin{aligned}f(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{|1+x|-|1-x|}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x}{(1+x)-(1-x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+2)}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{2}=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

답 1

14

$x \neq -3,\ x \neq 5$일 때,

$$f(x)=\frac{(x+3)(x^2+ax+b)}{(x+3)(x-5)}=\frac{x^2+ax+b}{x-5}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=-3,\ x=5$에서 각각 연속이다.

$f(-3)=\lim_{x\to -3} f(x)$에서

$$-2=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+ax+b}{x-5},\quad -2=\frac{9-3a+b}{-8}$$

$\therefore\ 3a-b=-7$ ……㉠

또한, $f(5)=\lim_{x\to 5} f(x)$에서

$$f(5)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+ax+b}{x-5}$$

위의 식에서 $x \longrightarrow 5$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 5}(x^2+ax+b)=0$에서 $25+5a+b=0$

$\therefore\ 5a+b=-25$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-5$

$$\therefore\ f(5)=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x+1)(x-5)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}(x+1)=6$$

답 6

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.055~056

01	⑤	**02**	9	**03**	6	**04**	ㄱ
05	ㄱ, ㄴ, ㄷ	**06**	$\frac{15}{2}$	**07**	3	**08**	16
09	-5	**10**	-2	**11**	$\frac{1}{4}$	**12**	1

01

① $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

이므로 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 정의되지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

② $f(2)=1$이고,

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x-2)=0$

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

③ $f(2)=1$이고,

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$\therefore\ \lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

④ $f(2)=2\times 0=0$

$2\le x<3$에서 $0\le x-2<1$이므로 $[x-2]=0$

즉, $2\le x<3$에서

$f(x)=x[x-2]=x\times 0=0$

이므로 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} 0=0$ ……㉠

$1\le x<2$에서 $-1\le x-2<0$이므로 $[x-2]=-1$

즉, $1\le x<2$에서

$f(x)=x[x-2]=x\times(-1)=-x$

이므로 $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(-x)=-2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

⑤ $f(2)=4$이고,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 $x=2$에서 연속인 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

02

$$f(x)=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7}{x-\cfrac{8}{x}}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7}{\cfrac{x^2-8}{x}}}}$$

$$=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7x}{x^2-8}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{\cfrac{x^3-15x}{x^2-8}}}$$

$$=\cfrac{1}{x-\cfrac{2x^2-16}{x^3-15x}}=\cfrac{1}{\cfrac{x^4-17x^2+16}{x^3-15x}}$$

$$=\frac{x^3-15x}{x^4-17x^2+16}$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x^2-8=0$, $x^3-15x=0$, $x^4-17x^2+16=0$이 되는 x의 값에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

(i) $x=0$

(ii) $x^2-8=0$에서 $x=\pm2\sqrt{2}$

(iii) $x^3-15x=0$에서 $x(x^2-15)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{15}$

(iv) $x^4-17x^2+16=0$에서

$(x^2-1)(x^2-16)=0$

$\therefore$ $x=\pm1$ 또는 $x=\pm4$

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은

0, ±1, $\pm2\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{15}$, ±4의 9개이다.

답 9

03

(i) $f(-2)=0$이고,

$\lim_{x\to-2+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-2-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to-2}f(x)\neq f(-2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

(ii) $f(-1)=0$이고,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(iii) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iv) $f(1)=1$이고,

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(v) $f(2)=0$이고,

$\lim_{x\to2+}f(x)=0$, $\lim_{x\to2-}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

(i)~(v)에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이고, $x=-1$, $x=1$에서 극한값이 존재하지 않으므로

$m=4$, $n=2$

$\therefore$ $m+n=4+2=6$

답 6

04

ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to0}f(x)$는 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $f(1)f(0)=(-1)\times1=-1$

$x-1=t$로 놓으면

$x\longrightarrow1+$일 때 $t\longrightarrow0+$이고,

$x\longrightarrow1-$일 때 $t\longrightarrow0-$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{t\to0+}f(t)$$
$$=1\times1=1$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{t\to0-}f(t)$$
$$=(-1)\times2=-2$$

$\therefore$ $\lim_{x\to1+}f(x)f(x-1)\neq\lim_{x\to1-}f(x)f(x-1)$

즉, 극한값 $\lim_{x\to1} f(x)f(x-1)$이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $f(f(-1))=f(1)=-1$

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow -1$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to-1} f(f(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1} f(f(x))\neq f(f(-1))$

즉, 함수 $f(f(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

05

ㄱ. $f(1)+g(1)=0+3=3$이고,

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)=3+0=3$$

따라서 $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $f(1)g(1)=0\times3=0$이고,

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1} f(x)\times\lim_{x\to1} g(x)=3\times0=0$$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}=\dfrac{f(1)+a}{g(1)+b}$이다.

이때 $\dfrac{f(1)+a}{g(1)+b}=\dfrac{a}{b+3}$이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx}=\frac{\lim_{x\to1} f(x)+a}{\lim_{x\to1} g(x)+b}=\frac{a+3}{b}$$

즉, $\dfrac{a+3}{b}=\dfrac{a}{b+3}$이므로

$(a+3)(b+3)=ab,\ ab+3a+3b+9=ab$

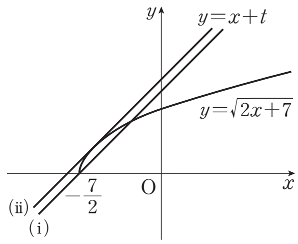
$3a+3b=-9 \qquad \therefore a+b=-3$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

06

두 함수 $y=\sqrt{2x+7}$, $y=x+t$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수는 다음 그림의 두 직선 (ⅰ), (ⅱ)를 기준으로 경우를 나누어 생각할 수 있다.



(ⅰ) 직선 $y=x+t$가 점 $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$을 지날 때,

$0=-\dfrac{7}{2}+t \qquad \therefore t=\dfrac{7}{2}$

(ⅱ) 직선 $y=x+t$가 함수 $y=\sqrt{2x+7}$의 그래프에 접할 때,

$\sqrt{2x+7}=x+t$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2x+7=(x+t)^2,\ 2x+7=x^2+2tx+t^2$

$\therefore x^2+2(t-1)x+t^2-7=0$

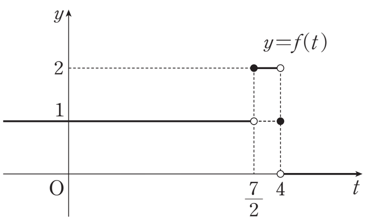
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(t-1)^2-(t^2-7)=0$

$-2t+8=0 \qquad \therefore t=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(t)=\begin{cases} 0\ (t>4) \\ 1\ \left(t<\dfrac{7}{2}\ \text{또는}\ t=4\right) \\ 2\ \left(\dfrac{7}{2}\le t<4\right) \end{cases}$이므로 함수

$y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{7}{2}$, $t=4$에서 불연속이므로 조건을 만족시키는 모든 t의 값의 합은

$\dfrac{7}{2}+4=\dfrac{15}{2}$

답 $\dfrac{15}{2}$

07

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이려면

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)$이어야 하므로

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^3-ax+1}{2x-1}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x \longrightarrow \frac{1}{2}$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (4x^3-ax+1)=0$에서

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+1=0 \qquad \therefore a=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^3-3x+1}{2x-1}$$
$$=\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x-1)^2}{2x-1}$$
$$=\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x+1)(2x-1)=0$$

$\therefore b=0$

$\therefore a+b=3+0=3$

답 3

08

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & (|x| \neq 2) \\ 4 & (|x|=2) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & (x \neq -2\text{이고 } x \neq 2) \\ 4 & (x=-2 \text{ 또는 } x=2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 불연속이려면 $x=-2$에서는 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -2} f(x)=f(-2)$이어야 하므로

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(가)

㉠에서 $x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} (x^2+ax+b)=0$에서 $4-2a+b=0$

$\therefore b=2a-4 \quad \cdots\cdots ㉡$

(나)

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+2a-4}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x \to -2} \frac{(x+a-2)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x \to -2} \frac{x+a-2}{x-2}$$
$$=\frac{a-4}{-4}$$

즉, $\frac{a-4}{-4}=4$이므로

$a-4=-16 \qquad \therefore a=-12$

이것을 ㉡에 대입하면

$b=2\times(-12)-4=-28$

$\therefore a-b=-12-(-28)=16$

(다)

답 16

단계	채점 기준	배점
(가)	함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속임을 이용하여 식을 세운 경우	40 %
(나)	극한의 성질을 이용하여 a, b의 관계식을 구한 경우	30 %
(다)	두 상수 a, b의 값을 각각 구한 후 $a-b$의 값을 구한 경우	30 %

보충 설명

$a=-12$, $b=-28$을 함수식에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-12x-28}{x^2-4} & (|x| \neq 2) \\ 4 & (|x|=2) \end{cases}$$ 이므로

$$\lim_{x \to 2} f(x)=\lim_{x \to 2} \frac{x^2-12x-28}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-14)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x \to 2} \frac{x-14}{x-2}$$
$$=-\infty$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

09

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=f(2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} f(-x) = \lim_{t\to 2} f(t)$$

└ $-x=t$로 치환

$$= f(2) \ (\because ㉠)$$

$$= f(-2)$$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to-2+} f(x) = \lim_{x\to-2-} f(x) = f(-2)$ ……㉡

따라서 $\lim_{x\to 2-} f(x) = 2\lim_{x\to-2+} f(x) + 5$에서

$f(2) = 2f(-2) + 5$ ($\because$ ㉠, ㉡)

이고, 조건 (나)에 의하여 $f(2)=f(-2)$이므로

$f(-2) = 2f(-2) + 5$

$\therefore f(-2) = -5$

답 -5

10

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키므로 $f(0)=f(4)$에서

$-2 = 16 + 4a + b$ $\quad \therefore 4a + b = -18$ ……㉠

또한, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x) = f(1)$이다.

이때 $f(1) = 1 + a + b$,

$\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$,

$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-} (3x - 2) = 1$

이므로 $1 + a + b = 1$ $\quad \therefore a + b = 0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=6$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & (0 \le x < 1) \\ x^2 - 6x + 6 & (1 \le x \le 4) \end{cases}$이고,

$678 = 4 \times 169 + 2$이므로

$f(678) = f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 6 = -2$

답 -2

11

$(x-3)f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}$에서

$x \ne 3$일 때, $f(x) = \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}\right)$

이때 함수 $f(x)$가 $x>1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to3} f(x) = f(3)$이므로

$$f(3) = \lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x-1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3} \times \frac{x-1-2}{2(x-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3} \times \frac{x-3}{x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to3}\frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

12

$(x^2-1)f(x) = x^4 + ax + b$에서

$(x+1)(x-1)f(x) = x^4 + ax + b$이므로

$x=-1$일 때,

$0 = 1 - a + b$

$\therefore a - b = 1$ ……㉠

$x=1$일 때,

$0 = 1 + a + b$

$\therefore a + b = -1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

즉, $(x^2-1)f(x) = x^4 - 1$이므로

$x \ne 1$, $x \ne -1$일 때, $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$

이때 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1)$이므로

$$f(-1) = \lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-1}(x^2+1) = 2$$

$\therefore a + b + f(-1) = -1 + 2 = 1$

답 1

2 연속함수의 성질

기본 + 필수연습 본문 pp.061~066

15 ㄱ, ㄴ
16 (1) $(-\infty,\ \infty)$
(2) $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 4)$, $(4,\ \infty)$
17 (1) 최댓값 : $\frac{9}{4}$, 최솟값 : -4
(2) 최댓값 : 8, 최솟값 : $\frac{1}{2}$
18 ④ **19** ㄱ, ㄷ **20** ㄱ, ㄴ **21** $\frac{5}{2}$
22 15 **23** ㄱ, ㄴ **24** 11 **25** 3
26 4

15

ㄱ. $f(x)-g(x)=x-x^2$은 다항함수이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x)=x\times x^2=x^3$은 다항함수이므로 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄹ. $\frac{1}{f(x)g(x)}=\frac{1}{x\times x^2}=\frac{1}{x^3}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{1}{f(x)g(x)}$은 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

16

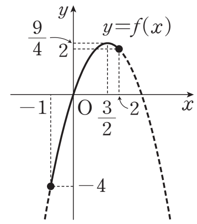
(1) 함수 $f(x)=-x^3-4x+1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.
즉, 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

(2) 함수 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-3x-4}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-4)}$는 유리함수이므로 $x\neq-1$, $x\neq4$인 모든 실수 x에서 연속이다.
즉, 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 4)$, $(4,\ \infty)$에서 연속이다.

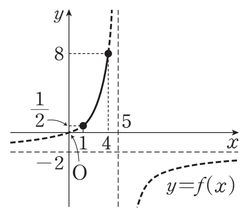
답 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 4)$, $(4,\ \infty)$

17

(1) 함수 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$, $x=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.



(2) 함수 $f(x)=\frac{2x}{5-x}$는 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 8, $x=1$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.



답 (1) 최댓값 : $\frac{9}{4}$, 최솟값 : -4
(2) 최댓값 : 8, 최솟값 : $\frac{1}{2}$

18

$f(x)=x^3-x^2-7x-10$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고,
$f(0)=-10<0$, $f(1)=-17<0$, $f(2)=-20<0$,
$f(3)=-13<0$, $f(4)=10>0$, $f(5)=55>0$ $f(3)f(4)<0$
이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(3,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3-x^2-7x-10=0$의 실근 α가 속하는 구간은 $(3,\ 4)$이다.

답 ④

19

ㄱ. 함수 $\frac{1}{3}f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
함수 $\frac{1}{3}f(x)-g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

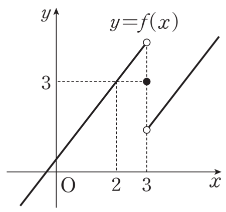
ㄴ. (반례) $f(x)=x$, $g(x)=1$이라 하면

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $x=1$에서 연속이지만

함수 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}=\dfrac{x}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)g(x)=f(x)\times g(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄹ. (반례)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이지만 함수 $f(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

20

ㄱ. $\{f(x)\}^2=f(x)\times f(x)$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이고 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)-g(x)\}=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x\ge 0) \end{cases}$이라 하면

$f(x)g(x)=0$이므로 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

보충 설명

ㄷ. 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,

$g(x)=\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$이므로 $f(a)=0$이면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 정의되지 않는다.

21

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이고, $x=0$에서 연속이어야 한다.

이때 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} \dfrac{3-x}{x^2+k-1} & (x<0) \\ \dfrac{5-x}{x^2+k} & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{5}{k}$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{5-x}{x^2+k}=\frac{5}{k}$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0-}\frac{3-x}{x^2+k-1}=\frac{3}{k-1}$

이므로 $\dfrac{5}{k}=\dfrac{3}{k-1}$

$5k-5=3k$, $2k=5$

$\therefore\ k=\dfrac{5}{2}$

따라서 함수 $g(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{3}{2} & (x<0) \\ x^2+\dfrac{5}{2} & (x\ge 0) \end{cases}$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이므로 $k=\dfrac{5}{2}$는 조건을 만족시킨다.

답 $\dfrac{5}{2}$

22

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$f(x)g(x)=\begin{cases} (x^2+ax+b)(3x-2) & (x<1) \\ (x^2+ax+b)(-x+1) & (x\ge 1) \end{cases}$에서

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times 0=0$이고,

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}\{(x^2+ax+b)(-x+1)\}$

$=(1+a+b)\times 0=0$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}\{(x^2+ax+b)(3x-2)\}$

$=(1+a+b)\times 1=a+b+1$

이므로 $0=a+b+1$

$\therefore\ a+b=-1$ ⋯⋯㉠

또한, $f(2)=3$에서 $4+2a+b=3$이므로

$2a+b=-1$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-1$

따라서 $f(x)=x^2-1$이므로

$f(4)=4^2-1=15$

답 15

다른 풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $f(1)=0$이어야 한다.

$f(1)=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ ⋯⋯㉠

또한, $f(2)=4+2a+b=3$에서

$2a+b=-1$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-1$

따라서 $f(x)=x^2-1$이므로

$f(4)=4^2-1=15$

23

ㄱ. 두 함수 $f(x)=2x-7,\ g(x)=\dfrac{2}{x-3}$는 닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 연속이다.

즉, 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $f(g(x))=f\left(\dfrac{2}{x-3}\right)$

$$=2\times\frac{2}{x-3}-7=\frac{4}{x-3}-7$$

이므로 함수 $f(g(x))$는 닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 연속이다.

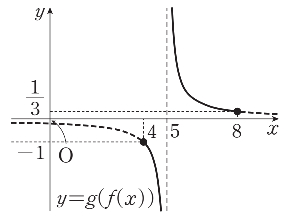
즉, 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(g(x))$는 닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. $g(f(x))=g(2x-7)$

$$=\frac{2}{(2x-7)-3}=\frac{2}{2x-10}=\frac{1}{x-5}$$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=5$에서 불연속이다.

닫힌구간 $[4,\ 8]$에서 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(f(x))$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



따라서 조건을 만족시키는 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

24

$f(x)=2x^2-6x+k$라 하면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=2\times(-1)^2-6\times(-1)+k=k+8$,

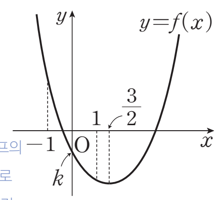
$f(1)=2-6+k=k-4$

이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{3}{2}$이므로 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$(k+8)(k-4)<0$

$\therefore\ -8<k<4$



따라서 정수 k는 $-7,\ -6,\ -5,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 3$의 11개이다.

답 11

25

$g(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(0)=f(0)-0=2-0=2>0$

$g(1)=f(1)-1=3-1=2>0$

$g(2)=f(2)-2=-2-2=-4<0$

$g(3)=f(3)-3=-5-3=-8<0$

$g(4)=f(4)-4=7-4=3>0$

$g(5)=f(5)-5=-6-5=-11<0$

이므로 $g(0)g(1)>0$, $g(1)g(2)<0$, $g(2)g(3)>0$, $g(3)g(4)<0$, $g(4)g(5)<0$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)-x=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)-x=0$은 열린구간 $(0,\ 5)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3

26

$f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또한, $f(x)=f(-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ -1)$, $(-4,\ -3)$에서도 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

답 4

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.067~068

13 ㄱ	**14** ③	**15** 0	**16** 14
17 0	**18** 8	**19** 40	**20** 6
21 25	**22** 10	**23** ①	**24** 3

13

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $g(x)=\{f(x)+g(x)\}-f(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $f(x)+g(x)=2x-a$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x-a}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. (반례) $f(x)=g(x)=\dfrac{1}{x-1}$이라 하면 두 함수 $f(x)$, $f(x)+g(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 $x=2$에서 연속이지만

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}=\frac{1}{\frac{1-(x-1)}{x-1}}=\frac{1}{\frac{2-x}{x-1}}=\frac{x-1}{2-x}$$

이므로 함수 $f(g(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 항상 연속인 함수인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

14

ㄱ. (반례) $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<a)\\ 1 & (x\geq a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ -1 & (x\geq a)\end{cases}$이라 하면

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)=-1$,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=-1$

이므로 두 함수 $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=\begin{cases}2 & (x<a)\\ 1 & (x\geq a)\end{cases}$이라 하면

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)=0$,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=0$

이므로 두 함수 $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\{g(x)\}^2=\begin{cases} 4 & (x<a) \\ 1 & (x\ge a) \end{cases}$ 은 $x=a$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 두 함수 $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$,

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x\to a}\{f(x)\}^2 &= \lim_{x\to a}\left\{f(x)g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\} \\ &= \lim_{x\to a} f(x)g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \\ &= f(a)g(a)\times\frac{f(a)}{g(a)} \\ &= \{f(a)\}^2 \end{aligned}$$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

한편, $f(x)\{f(x)-g(x)\}=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)$이고 두 함수 $\{f(x)\}^2$, $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$도 $x=a$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

15

함수 $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2-ax+4}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 이차방정식 $x^2-ax+4=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times4<0$에서 $a^2-16<0$

$(a+4)(a-4)<0$ $\quad\therefore -4<a<4$ ……㉠

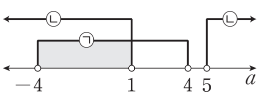
한편, $f(1)>0$에서 $\frac{1-a}{5-a}>0$

이 부등식의 양변에 $(5-a)^2$을 곱하면

$(5-a)(1-a)>0$, $(a-1)(a-5)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>5$ ……㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-4<a<1$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 0이다.

답 0

16

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$,

$\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=f(1)-g(1)$

이어야 한다.

$f(x)+g(x)=\begin{cases} x^2+2x+b+1 & (x<1) \\ -6x+a+5 & (x\ge1) \end{cases}$에서

$f(1)+g(1)=a-1$이고,

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}(-6x+a+5)=a-1$,

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}(x^2+2x+b+1)=b+4$

이므로 $a-1=b+4$

$\therefore a-b=5$ ……㉠

$f(x)-g(x)=\begin{cases} -x^2-6x+1-b & (x<1) \\ 8x+a-5 & (x\ge1) \end{cases}$에서

$f(1)-g(1)=a+3$이고,

$\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1+}(8x+a-5)=a+3$,

$\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1-}(-x^2-6x+1-b)=-b-6$

이므로 $a+3=-b-6$

$\therefore a+b=-9$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-7$

$\therefore ab=(-2)\times(-7)=14$

답 14

17

합성함수 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{x\to1-} g(f(x))=g(f(1))$

$$\begin{aligned} g(f(1)) &= g(4a) \\ &= (4a)^2-3\times4a+3 \\ &= 16a^2-12a+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1+} g(f(x)) &= \lim_{x\to1+} g(x^2-x+4a)=g(4a) \\ &= 16a^2-12a+3 \end{aligned}$$

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{x\to 1-} g(3x+a^2)=g(3+a^2)$
$=(3+a^2)^2-3(3+a^2)+3$
$=a^4+6a^2+9-9-3a^2+3$
$=a^4+3a^2+3$

즉, $16a^2-12a+3=a^4+3a^2+3$에서
$a^4-13a^2+12a=0,\ a(a+4)(a-1)(a-3)=0$
$\therefore\ a=-4$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$-4+0+1+3=0$

답 0

18

함수 $f(g(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=0,\ x=2$에서 연속이다.

(i) $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{x\to 0-} f(g(x))=f(g(0))$
$f(g(0))=f(0)$이고, $g(x)=t$로 놓으면
$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로
$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=f(0)$
$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로
$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=f(1)$
$\therefore\ f(0)=f(1)$

(ii) $x=2$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{x\to 2-} f(g(x))=f(g(2))$
$f(g(2))=f(1)$이고, $g(x)=t$로 놓으면
$x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로
$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=f(1)$
$x \longrightarrow 2-$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로
$\lim_{x\to 2-} f(g(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=f(2)$
$\therefore\ f(1)=f(2)$

(i), (ii)에서 $f(0)=f(1)=f(2)$
이때 $f(0)=2,\ f(1)=a+b+3,\ f(2)=4a+2b+10$이므로
$a+b+3=2,\ 4a+2b+10=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=2$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$이므로
$f(3)=3^3-3\times3^2+2\times3+2=8$

답 8

19

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면
$x=a$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)g(a)$

이때 $f(x)g(x)=\begin{cases}(x^2-6)(x-2a-5) & (x\le a)\\ (2x+2)(x-2a-5) & (x>a)\end{cases}$에서

$f(a)g(a)=(a^2-6)(a-2a-5)=(a^2-6)(-a-5)$이고,
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}\{(2x+2)(x-2a-5)\}$
$=(2a+2)(-a-5)$
$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}\{(x^2-6)(x-2a-5)\}$
$=(a^2-6)(-a-5)$

이므로 $(2a+2)(-a-5)=(a^2-6)(-a-5)$
$(-a-5)(2a+2-a^2+6)=0$
$(a+5)(a^2-2a-8)=0$
$(a+5)(a+2)(a-4)=0$
$\therefore\ a=-5$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=4$
따라서 모든 실수 a의 값의 곱은
$(-5)\times(-2)\times4=40$

답 40

다른 풀이

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때와 불연속일 때로 나누어 구한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,
두 함수 $f(x),\ g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때 $f(a)=a^2-6$이고,
$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(2x+2)=2a+2$,
$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-6)=a^2-6$
이므로 $2a+2=a^2-6$
$a^2-2a-8=0,\ (a+2)(a-4)=0$
$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=4$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면
$g(a)=0$이어야 하므로
$a-2a-5=0,\ -a-5=0$
$\therefore\ a=-5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은
$(-2)\times4\times(-5)=40$

20

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

(i) $x=0$에서 연속이므로

$f(0)g(0)=(-3)\times b=-3b$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=(-3)\times b=-3b$,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=1\times b=b$

에서 $-3b=b$ $\quad\therefore\ b=0$ $\quad\cdots\cdots$㉠

(ii) $x=2$에서 연속이므로

$f(2)g(2)=3\times(8+2a+b)=6a+3b+24$,

$\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)=3\times(8+2a+b)=6a+3b+24$,

$\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)=(-3)\times(8+2a+b)$

$=-6a-3b-24$

에서 $6a+3b+24=-6a-3b-24$이므로

$6a+24=-6a-24$ ($\because$ ㉠)

$12a=-48$ $\quad\therefore\ a=-4$

(i), (ii)에서 $g(x)=2x^2-4x$이므로

$g(3)=2\times3^2-4\times3=6$

답 6

21

다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x}=4$에서 $f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 4인 일차식이므로 $f(x)-x^2=4x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+4x+a$

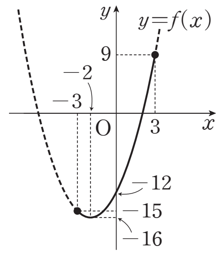
$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=8$에서 $x\longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2} f(x)=0$에서 $f(2)=0$이므로

$4+8+a=0$ $\quad\therefore\ a=-12$

$\therefore\ f(x)=x^2+4x-12=(x+2)^2-16$

따라서 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $M=f(3)=9$, $x=-2$일 때 최솟값 $m=f(-2)=-16$을 갖는다.



$\therefore\ M-m=9-(-16)=25$

답 25

22

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$에서

$f(0)=b$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(-x^2+2x+b)=b$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(x+a)=a$

$\therefore\ a=b$ $\quad\cdots\cdots$㉠

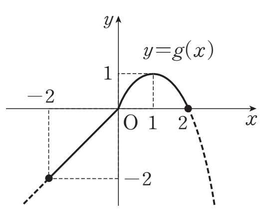
이때 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수

$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<0) \\ -x^2+2x+a & (x\ge 0)\end{cases}$가 최댓값 c, 최솟값 1을

가지므로 함수 $f(x)-a=\begin{cases} x & (x<0) \\ -x^2+2x & (x\ge 0)\end{cases}$는 닫힌구간

$[-2, 2]$에서 최댓값 $c-a$, 최솟값 $1-a$를 갖는다.

$g(x)=f(x)-a$라 하면 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $c-a=1$, 최솟값은 $1-a=-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=3$, $c=4$

㉠에서 $a=b$이므로 $b=3$

$\therefore\ a+b+c=3+3+4=10$

답 10

23

$f(x)=|2x-1|-\frac{1}{x}-2$라 하면 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 연속이고

$f(1)=-2<0,\ f(2)=\frac{1}{2}>0,$ ← $f(1)f(2)<0$

$f(3)=\frac{8}{3}>0,\ f(4)=\frac{19}{4}>0,$

$f(5)=\frac{34}{5}>0,\ f(6)=\frac{53}{6}>0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

답 ①

24

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=3$에서 $x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-2}f(x)=0$에서 $f(-2)=0$ ⋯⋯㉠

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)}{x-2}=4$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x-1)=0$에서 $f(1)=0$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=(x+2)(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항함수)라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)g(x)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(x-1)g(x)=-3g(-2)$$

즉, $-3g(-2)=3$에서 $g(-2)=-1$ ⋯⋯㉢

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-2)g(x-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+1)g(x-1)=3g(1)$$

즉, $3g(1)=4$에서 $g(1)=\frac{4}{3}$ ⋯⋯㉣

㉢, ㉣에서 $g(-2)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. ⋯⋯㉤

따라서 ㉠, ㉡, ㉤에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3,\ 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3

보충 설명

$f(x)=(x+2)(x-1)g(x)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 방정식 $g(x)=0$의 실근이다.

$g(-2)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖고, 그 실근을 α $(-2<\alpha<1)$라 하면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3,\ 2)$에서 $x=-2,\ x=1,\ x=\alpha$를 실근으로 가지므로 적어도 3개의 실근을 갖는다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.069

1 ④	**2** 8	**3** -1	**4** 2
5 4	**6** ②		

1

ㄱ. $x-2=t$로 놓으면 함수 $f(t)$는 $t=-1$에서 연속이므로 함수 $f(x-2)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)=g(x)$라 하면

$g(1)=f(1)f(-1)=0\times1=0$

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)$$

$$=\lim_{x\to1+}f(x)\times\underbrace{\lim_{x\to1+}f(-x)}_{x \longrightarrow 1+\text{일 때 } -x \longrightarrow -1-}$$

$$=(-1)\times1=-1$$

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)f(-x)$$

$$=\lim_{x\to1-}f(x)\times\underbrace{\lim_{x\to1-}f(-x)}_{x \longrightarrow 1-\text{일 때 } -x \longrightarrow -1+}$$

$$=0\times1=0$$

이때 $\lim_{x\to1+}g(x)\neq\lim_{x\to1-}g(x)$이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $f(f(3))=f(1)=0$

$f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 3+$일 때 $t \longrightarrow 1+$이고,

$x \longrightarrow 3-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=-1$$

$$\lim_{x\to3-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$$

이때 $\lim_{x \to 3+} f(f(x)) \neq \lim_{x \to 3-} f(f(x))$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

2

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$

이때 $f(1)=a$이고,

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-bx^2+b^2x-4) = b^2-b-4$,

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (1-3x) = -2$

이므로 $a=-2$, $b^2-b-4=-2$

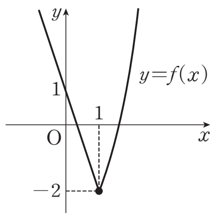
$b^2-b-4=-2$에서 $b^2-b-2=0$

$(b+1)(b-2)=0 \qquad \therefore b=-1$ 또는 $b=2$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

(i) $b=-1$일 때,

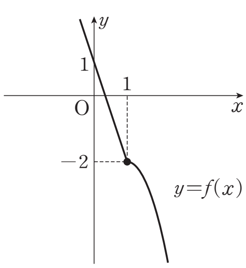
$x>1$에서 $f(x)=x^2+x-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

(ii) $b=2$일 때,

$x>1$에서 $f(x)=-2x^2+4x-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

(i), (ii)에서 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

답 8

보충 설명

이 문제의 함수 $f(x)$와 같이 구간에 따라 함수식이 다른 연속함수가 일대일대응이 되기 위해서는 x의 값이 커질 때, 함숫값은 항상 커지거나 항상 작아져야 한다.

3

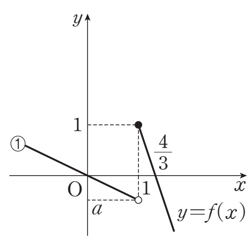
합성함수 $(g \circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

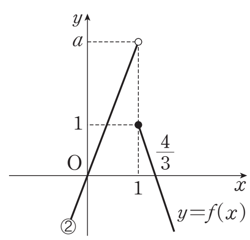
$\lim_{x \to 1+} g(f(x)) = \lim_{x \to 1-} g(f(x)) = g(f(1)) \qquad \cdots\cdots ㉠$

이어야 한다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

(i) $a<0$일 때, (ii) $a \geq 0$일 때,





$g(f(1))=g(1)$

$=2^1+2^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x \to 1+} g(f(x)) = \lim_{t \to 1-} g(t)$

$=2^1+2^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

(i) $a<0$일 때,

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow a+$이므로

$\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = \lim_{t \to a+} g(t) = 2^a+2^{-a}$

(ii) $a \geq 0$일 때,

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow a-$이므로

$\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = \lim_{t \to a-} g(t) = 2^a+2^{-a}$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = 2^a+2^{-a}$

㉠에서

$2^{a}+2^{-a}=\frac{5}{2}$, $2^{a}+\frac{1}{2^{a}}=\frac{5}{2}$

$2^{a}=s\ (s>0)$로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^{2}+2=5s$

$2s^{2}-5s+2=0$, $(2s-1)(s-2)=0$

$\therefore\ s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

즉, $2^{a}=\frac{1}{2}$ 또는 $2^{a}=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-1)\times1=-1$

답 -1

다른 풀이

합성함수 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(f(1))$

이어야 한다.

이때 $g(f(x))=\begin{cases}2^{ax}+2^{-ax} & (x<1)\\ 2^{-3x+4}+2^{3x-4} & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$g(f(1))=2+2^{-1}=\frac{5}{2}$이고,

$$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1+}(2^{-3x+4}+2^{3x-4})=2+2^{-1}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{x\to1-}(2^{ax}+2^{-ax})=2^{a}+2^{-a}$$

이므로 $2^{a}+2^{-a}=\frac{5}{2}$

$2^{a}=s\ (s>0)$로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^{2}+2=5s$

$2s^{2}-5s+2=0$, $(2s-1)(s-2)=0$

$\therefore\ s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

즉, $2^{a}=\frac{1}{2}$ 또는 $2^{a}=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-1)\times1=-1$

4

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=a$에서 연속이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$f(a)f(a-a)=f(a)\times f(0)=-6f(a)$

$x\longrightarrow a+$일 때
$x-a\longrightarrow 0+$

$$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x-a)=f(a)\times(-6)=-6f(a)$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a-}f(x-a)=f(a)\times3=3f(a)$$

$x\longrightarrow a-$일 때
$x-a\longrightarrow 0-$

즉, $-6f(a)=3f(a)$에서

$f(a)=0$

이때 $a<0$이므로

$a^{2}+4a+3=0$, $(a+3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=-1$ ……㉠

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)f(0-a)=f(0)\times f(-a)=-6f(-a)$

$$\lim_{x\to0+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(x-a)=(-6)\times f(-a)=-6f(-a)$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{x\to0-}f(x-a)=3\times f(-a)=3f(-a)$$

즉, $-6f(-a)=3f(-a)$에서

$f(-a)=0$

이때 $-a>0$이므로

$-2a-6=0$ $\quad\therefore\ a=-3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$

(ii) $a=0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$, 즉 $\{f(x)\}^{2}$이 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\{f(0)\}^{2}=(-6)^{2}=36$

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^{2}=\lim_{x\to0+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(x)=(-6)^{2}=36$$

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^{2}=\lim_{x\to0-}f(x)\times\lim_{x\to0-}f(x)=3^{2}=9$$

이때 $\lim_{x\to0+}\{f(x)\}^{2}\neq\lim_{x\to0-}\{f(x)\}^{2}$이므로 함수 $\{f(x)\}^{2}$은 $x=0$에서 불연속이다.

$\therefore\ a \neq 0$

(iii) $a>0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)f(0-a)=f(0)\times f(-a)=-6f(-a)$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} f(x-a)$$
$$=(-6)\times f(-a)=-6f(-a)$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to 0-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} f(x-a)$$
$$=3\times f(-a)=3f(-a)$$

즉, $-6f(-a)=3f(-a)$에서

$f(-a)=0$

이때 $-a<0$이므로

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$ ······ ㉢

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$f(a)f(a-a)=f(a)\times f(0)=-6f(a)$

$x \longrightarrow a+$일 때 $x-a \longrightarrow 0+$

$$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a+} f(x)\times\lim_{x\to a+} f(x-a)$$
$$=f(a)\times(-6)=-6f(a)$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=\lim_{x\to a-} f(x)\times\lim_{x\to a-} f(x-a)$$
$$=f(a)\times 3=3f(a)$$

$x \longrightarrow a-$일 때 $x-a \longrightarrow 0-$

즉, $-6f(a)=3f(a)$에서

$f(a)=0$

이때 $a>0$이므로

$2a-6=0\qquad \therefore\ a=3$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 $a=3$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 $a=-3$ 또는 $a=3$의 2개이다.

답 2

5

이차함수 $y=x^2-2x+t+1$의 그래프와 직선 $y=tx-1$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+t+1=tx-1$에서

$x^2-(t+2)x+t+2=0$ ······ ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(t+2)^2-4(t+2)=(t+2)(t-2)$

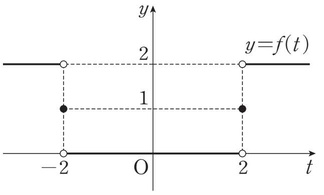
$D>0$, 즉 $t<-2$ 또는 $t>2$일 때, 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(t)=2$

$D=0$, 즉 $t=-2$ 또는 $t=2$일 때, 중근을 가지므로 $f(t)=1$

$D<0$, 즉 $-2<t<2$일 때, 허근을 가지므로 $f(t)=0$

$$\therefore\ f(t)=\begin{cases} 2 & (t<-2 \text{ 또는 } t>2) \\ 1 & (t=-2 \text{ 또는 } t=2) \\ 0 & (-2<t<2) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $f(t)$가 $t=-2$, $t=2$에서 불연속이므로

함수 $(t^2-a)f(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $t=-2$, $t=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $t=-2$에서 연속일 때,

$(4-a)f(-2)=4-a$

$$\lim_{t\to -2+}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to -2+}(t^2-a)\times\lim_{t\to -2+} f(t)$$
$$=(4-a)\times 0=0$$

$$\lim_{t\to -2-}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to -2-}(t^2-a)\times\lim_{t\to -2-} f(t)$$
$$=(4-a)\times 2=8-2a$$

즉, $4-a=0=8-2a$에서 $a=4$

(ii) $t=2$에서 연속일 때,

$(4-a)f(2)=4-a$

$$\lim_{t\to 2+}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to 2+}(t^2-a)\times\lim_{t\to 2+} f(t)$$
$$=(4-a)\times 2=8-2a$$

$$\lim_{t\to 2-}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to 2-}(t^2-a)\times\lim_{t\to 2-} f(t)$$
$$=(4-a)\times 0=0$$

즉, $4-a=8-2a=0$에서 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=4$

답 4

다른 풀이

$(*)$에서 $f(t)=\begin{cases} 2 & (t<-2 \text{ 또는 } t>2) \\ 1 & (t=-2 \text{ 또는 } t=2) \\ 0 & (-2<t<2) \end{cases}$ 이므로 함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=2$에서 불연속이다.

$g(t)=t^2-a$라 하면 함수 $g(t)$는 모든 실수 t에서 연속이고 함수 $f(t)$가 $t=-2$, $t=2$에서 불연속이므로 함수 $g(t)f(t)$, 즉 함수 $(t^2-a)f(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $g(-2)=0$, $g(2)=0$이어야 한다.

$4-a=0 \qquad \therefore a=4$

6

ㄱ. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$f(-1)=2>0$, $f(0)=-3<0$,

$f(1)=4>0$, $f(2)=1>0$

이므로 $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)>0$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-2x$라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(-1)=2+2=4>0$, $g(0)=-3<0$,

$g(1)=4-2=2>0$, $g(2)=1-4=-3<0$

이므로 $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$, $g(1)g(2)<0$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)-2x=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)+x^2$이라 하면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$h(-1)=2+1=3>0$, $h(0)=-3<0$,

$h(1)=4+1=5>0$, $h(2)=1+4=5>0$

이므로 $h(-1)h(0)<0$, $h(0)h(1)<0$, $h(1)h(2)>0$

이때 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)+x^2=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

Ⅱ. 미분

03. 미분계수와 도함수

1 미분계수

기본 + 필수연습 본문 pp.076~084

01 (1) 5 (2) 2 **02** (1) -3 (2) -12
03 -4 **04** 연속이지만 미분가능하지 않다.
05 (1) -5 (2) $\sqrt{3}$ **06** 2
07 (1) $\frac{6}{5}$ (2) 0 (3) -12 **08** 9 **09** 2
10 (1) 1 (2) -1 **11** 23 **12** $\frac{1}{5}$
13 6 **14** 4 **15** ㄴ
16 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다.
(2) 연속이고 미분가능하다.
17 5 **18** ㄱ, ㄴ, ㄷ

01

(1) 함수 $f(x)=5x-7$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{(5\times1-7)-\{5\times(-2)-7\}}{3}=\frac{-2-(-17)}{3}=5$$

(2) 함수 $f(x)=2x^2+4x$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{(2\times1^2+4\times1)-\{2\times(-2)^2+4\times(-2)\}}{3}=\frac{6-0}{3}=2$$

답 (1) 5 (2) 2

02

(1) $f'(-1)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{-3(-1+\Delta x)-4\}-(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x}=-3$

(2) $f'(-1)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{3(-1+\Delta x)^2-6(-1+\Delta x)\}-9}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(\Delta x)^2-12\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} (3\Delta x-12)=-12$

답 (1) -3 (2) -12

다른 풀이

(1) $f'(-1)=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{(-3x-4)-(-1)}{x+1}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{-3x-3}{x+1}=\lim_{x \to -1} \frac{-3(x+1)}{x+1}=-3$

(2) $f'(-1)=\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{(3x^2-6x)-9}{x+1}$

$=\lim_{x \to -1} \frac{3(x+1)(x-3)}{x+1}$

$=\lim_{x \to -1} 3(x-3)$

$=3\times(-4)=-12$

03

$f(x)=-x^3+2x^2$이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{-(2+\Delta x)^3+2(2+\Delta x)^2\}-(-2^3+2\times 2^2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(\Delta x)^3-4(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \{-(\Delta x)^2-4\Delta x-4\}=-4$

답 -4

04

(i) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+} x^2=0,$

$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-} x=0$

즉, $\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{x}=\lim_{x \to 0+} x=0,$

$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0-} \frac{x}{x}=\lim_{x \to 0-} 1=1$

즉, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$이므로

미분계수 $f'(0)=\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<0) \\ x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$은 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

05

(1) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 $a-1$에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{f(a+1)-f(a-1)}{(a+1)-(a-1)}$

$=\frac{\{(a+1)^2+5(a+1)+4\}-\{(a-1)^2+5(a-1)+4\}}{2}$

$=\frac{4a+10}{2}=2a+5$

따라서 $2a+5=-5$이므로

$2a=-10 \quad \therefore a=-5$

(2) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 0에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{24-0}{3}=8$

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^3-(a+\Delta x)\}-(a^3-a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+3a(\Delta x)^2+(3a^2-1)\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(\Delta x)^2+3a\Delta x+3a^2-1\}$$
$$=3a^2-1$$

따라서 $8=3a^2-1$이므로 $3a^2=9,\ a^2=3$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

답 (1) -5 (2) $\sqrt{3}$

06

함수 $f(x)=x^2+4ax+a$에서

x의 값이 $2-k$에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(2-k)}{2-(2-k)}=\frac{f(2)-f(2-k)}{k}$$

x의 값이 2에서 $2+k$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+k)-f(2)}{(2+k)-2}=\frac{f(2+k)-f(2)}{k}$$

이때 $\dfrac{f(2)-f(2-k)}{k}+\dfrac{f(2+k)-f(2)}{k}=0$, 즉

$\dfrac{f(2+k)-f(2-k)}{k}=0$에서

$\underbrace{f(2+k)=f(2-k)}_{(*)}$이므로

$(2+k)^2+4a(2+k)+a=(2-k)^2+4a(2-k)+a$

$k^2+4k+4+8a+4ak+a=k^2-4k+4+8a-4ak+a$

$8k+8ak=0,\ 8k(1+a)=0$

그런데 $k>0$이므로 $1+a=0$ $\quad\therefore\ a=-1$

$\therefore\ f(x)=x^2-4x-1$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-4(3+\Delta x)-1\}-(3^2-4\times 3-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$

답 2

다른 풀이

(*)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 것을 이용하면 함수 $f(x)$의 식을 쉽게 구할 수 있다.

$x^2+4ax+a=(x+2a)^2-4a^2+a$이므로

$-2a=2\quad\therefore\ a=-1$

이것을 다시 $f(x)$의 식에 대입하면

$f(x)=x^2-4x-1$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-4(3+\Delta x)-1\}-(3^2-4\times 3-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$

07

(1) (주어진 식)$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{3h}}_{h\to 0\text{일 때 }3h\to 0}\times\dfrac{3}{5}$

$=\dfrac{3}{5}f'(a)=\dfrac{3}{5}\times 2=\dfrac{6}{5}$

(2) (주어진 식)$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\times h\right\}$

$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}}_{h\to 0\text{일 때 }h^3\to 0}\times\lim_{h\to 0}h$

$=f'(a)\times 0=2\times 0=0$

(3) (주어진 식)

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)+f(a)-f(a+4h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{h}$

$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}}_{h\to 0\text{일 때 }-2h\to 0}\times(-2)$

$\quad-\underbrace{\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{4h}}_{h\to 0\text{일 때 }4h\to 0}\times 4$

$=-2f'(a)-4f'(a)=-6f'(a)$

$=-6\times 2=-12$

답 (1) $\dfrac{6}{5}$ (2) 0 (3) -12

08

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$
$$=2f'(1)=6$$

$\therefore\ f'(1)=3$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)$$
$$=f'(1)+2f'(1)$$
$$=3f'(1)=3\times3=9$$

답 9

09

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$에서 $h\longrightarrow0$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{h\to0}\{f(a+2h)-f(a)-g(h)\}=0$에서

$\lim\limits_{h\to0}g(h)=0$ ← 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 연속이다. 즉, $\lim\limits_{h\to0}f(a+2h)=f(a)$이다.

이때 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 연속이다.

$\therefore\ \lim\limits_{h\to0}g(h)=g(0)=0$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)+g(0)}{h}\quad(\because\ g(0)=0)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=2f'(a)-g'(0)$$
$$=2-g'(0)\quad(\because\ f'(a)=1)$$

즉, $2-g'(0)=0$에서 $g'(0)=2$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=g'(0)=2$$

답 2

10

(1) (주어진 식)

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x-1}{f(x)-f(1)}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}\times(1^2+1+1)$$
$$=\frac{1}{3}\times3=1$$

(2) (주어진 식)

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x^2-1)f(1)}{x^2-1}-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x^2-1}-\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}}_{x\,\longrightarrow\,1\text{일 때 }x^2\,\longrightarrow\,1}$$
$$=f(1)-f'(1)$$
$$=2-3=-1$$

답 (1) 1 (2) -1

11

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+7}{x^2-9}=5$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)+7\}=0$에서

$f(3)=-7$ ······㉠

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+7}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}\quad(\because\ ㉠)$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=f'(3)\times\frac{1}{6}=5$$

$\therefore\ f'(3)=30$ ······㉡

$\therefore\ f(3)+f'(3)=-7+30=23\ (\because\ ㉠,\ ㉡)$

답 23

12

$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)-1}{x+2} = -8$에서 $x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} \{f(x)-1\}=0$에서 $f(-2)=1$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{f(x)-1}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = f'(-2) = -8$$

또한, $\lim_{x \to -2} \frac{g(x)+4}{x+2} = \frac{1}{2}$에서 $x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -2} \{g(x)+4\}=0$에서 $g(-2)=-4$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{g(x)+4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = g'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{xg(-2)+2g(x)}{xf(-2)+2f(x)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\frac{xg(-2)+2g(x)}{x+2}}{\frac{xf(-2)+2f(x)}{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\frac{xg(-2)+2g(-2)-2g(-2)+2g(x)}{x+2}}{\frac{xf(-2)+2f(-2)-2f(-2)+2f(x)}{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\frac{(x+2)g(-2)}{x+2}+2\times\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}}{\frac{(x+2)f(-2)}{x+2}+2\times\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}}$$

$$= \frac{g(-2)+2g'(-2)}{f(-2)+2f'(-2)}$$

$$= \frac{-4+2\times\frac{1}{2}}{1+2\times(-8)}$$

$$= \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

13

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy^2+x^2y$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0+0$, $f(0)=2f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2)+f(h)+2h^2+4h-f(2)}{h} \ (\because ㉠)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 2h + 4 \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 4 \ (\because f(0)=0)$$

$$= f'(0)+4$$

$$= 2+4 = 6$$

답 6

다른 풀이

$f(0)=0$을 구한 후, 본문 p.087의 **개념06**에서 '도함수'를 배우면 다음과 같이 $f'(x)$를 구해서 풀 수도 있다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)+f(h)+xh^2+x^2h-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)+xh^2+x^2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + xh + x^2 \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + x^2 \ (\because f(0)=0)$$

$$= f'(0)+x^2$$

$$= 2+x^2$$

$\therefore f'(2)=2+2^2=6$

14

$f(x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)-4xy$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+f(0)-0$, $f(0)=3f(0)$

$\therefore f(0)=0$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+f(1)+f(h)-4h-f(1)}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f(h)-4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{2f(h)}{h}-4\right\}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-4\ (\because f(0)=0)$$

$$=2f'(0)-4=4$$

즉, $2f'(0)-4=4$이므로

$2f'(0)=8 \qquad \therefore f'(0)=4$

$$\therefore f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4h)+f(4)+f(h)-16h-f(4)}{h}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4h)+f(h)-16h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(4h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-16$$

$$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(4h)-f(0)}{4h}}_{h\to 0\text{이면 }4h\to 0}\times 4$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-16\ (\because f(0)=0)$$

$$=4f'(0)+f'(0)-16$$

$$=5f'(0)-16=5\times 4-16=4$$

답 4

다른 풀이

$f(0)=0$을 구한 후, 본문 p.087의 **개념06**에서 '도함수'를 배우면 다음과 같이 $f'(x)$를 구해서 풀 수도 있다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(xh)+f(x)+f(h)-4xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(xh)+f(h)-4xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(xh)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}-4x$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(xh)-f(0)}{xh}\times x\right\}$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-4x\ (\because f(0)=0)$$

$$=\{f'(0)-4\}x+f'(0) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $f'(1)=4$이므로 ㉡에 $x=1$을 대입하면

$4=f'(0)-4+f'(0)$, $2f'(0)-4=4$

$\therefore f'(0)=4$

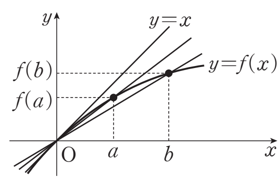
이 식을 다시 ㉡에 대입하여 정리하면

$f'(x)=4$

$\therefore f'(4)=4$

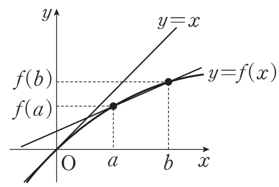
15

ㄱ. $f(0)=0$이므로 $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$은 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기이고, $\dfrac{f(b)}{b}=\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}$은 원점과 점 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다. 이 두 직선의 기울기를 비교하면



$\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$ (거짓)

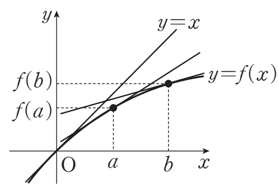
ㄴ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고 이 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

$\therefore f(b)-f(a)<b-a\ (\because b-a>0)$ (참)

ㄷ. 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크고, 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로



$f'(b)<f'(a)<1$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

16

(1) $f(x)=(x+1)|x|$

$$=\begin{cases}-x(x+1) & (x<0)\\ x(x+1) & (x\geq 0)\end{cases}$$

(ⅰ) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} x(x+1)=0$,

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-} \{-x(x+1)\}=0$

즉, $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+} \frac{x(x+1)}{x}$

$=\lim_{x\to0+} (x+1)=1$

$\lim_{x\to0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-} \frac{-x(x+1)}{x}$

$=\lim_{x\to0-} \{-(x+1)\}=-1$

즉, $\lim_{x\to0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이므로 미분계수 $f'(0)=\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) $f(x)=x^2[x]$

$=\begin{cases} -x^2 & (-1\le x<0) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$

(ⅰ) $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+} 0=0$,

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-} (-x^2)=0$

즉, $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim_{x\to0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+} \frac{0}{x}=0$,

$\lim_{x\to0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-} \frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to0-} (-x)=0$

즉, $\lim_{x\to0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이므로 미분계수 $f'(0)=\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

답 (1) 연속이지만 미분가능하지 않다.
(2) 연속이고 미분가능하다.

17

(ⅰ) $x=-1$에서 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $x=0$에서 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅲ) $x=1$에서 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 1의 2개이고, 미분가능하지 않은 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이므로

$a=2$, $b=3$　　$\therefore a+b=2+3=5$

답 5

18

ㄱ. $x=0$, $x=2$에서

$\lim_{x\to0+} f(x)\neq\lim_{x\to0-} f(x)$, $\lim_{x\to2+} f(x)\neq\lim_{x\to2-} f(x)$

이므로 극한값 $\lim_{x\to0} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 0, 2의 2개이다. (참)

ㄴ. $x=1$에서 $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

또한, ㄱ에서 극한값 $\lim_{x\to0} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 0, 1, 2의 3개이다. (참)

ㄷ. $x=-1$에서 $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

그런데 $x=-1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$가 연속이지만 미분가능하지 않은 x의 값의 개수는 -1의 1개이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

STEP 1 **개념 마무리** 본문 pp.085~086

01 -9	**02** 3	**03** ③	**04** -8
05 -4	**06** 8	**07** 10	**08** 25
09 5	**10** ⑤	**11** ⑤	**12** ①

01

함수 $f(x)=x^2+ax$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$
$$=\frac{(16+4a)-(1+a)}{3}$$
$$=\frac{15+3a}{3}=5+a$$

즉, $5+a=2$이므로 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-3x$이므로 함수 $f(x)$의 $x=-3$에서의 미분계수는

$$f'(-3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-3+\Delta x)-f(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-3+\Delta x)^2-3(-3+\Delta x)\}-\{(-3)^2-3\times(-3)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-9\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-9)=-9$$

답 -9

02

함수 $f(x)=(x-2a)(x-2b)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{(b-2a)\times(-b)-(-a)\times(a-2b)}{b-a}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{b-a}=-a-b$$

함수 $f(x)$의 $x=2a$에서의 미분계수는

$$f'(2a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2a+\Delta x)-f(2a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2a-2b+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2a-2b+\Delta x)$$
$$=2a-2b$$

따라서 $-a-b=2a-2b$이므로

$b=3a$ $\quad\therefore \dfrac{b}{a}=3$

답 3

보충 설명

본문 p.091의 **개념09**에서 '함수의 곱의 미분법'을 배우면 $f'(2a)$의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(x)=(x-2a)(x-2b)$에서

$f'(x)=1\times(x-2b)+(x-2a)\times 1=2x-2a-2b$이므로

$f'(2a)=4a-2a-2b=2a-2b$

03

ㄱ. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}}_{h\to 0\text{일 때 } -h\to 0}$$
$$=f'(a)$$

ㄴ. $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\times h^2\right\}$$
$$=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}}_{h\to 0\text{일 때 } h^3\to 0}\times\lim_{h\to 0}h^2$$
$$=f'(a)\times 0=0$$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to -2a}\frac{f(x+3a)-f(a)}{x+2a}$에서 $x+2a=h$로 놓으면

$x=h-2a$이고, $x\longrightarrow -2a$일 때 $h\longrightarrow 0$이므로

$$\lim_{x\to -2a}\frac{f(x+3a)-f(a)}{x+2a}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-2a+3a)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

따라서 $f'(a)$의 값과 항상 같은 값을 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

04

$f(0)=a\ (a\neq 0)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{f(x)+5x}=\frac{f(0)}{f(0)}=\frac{a}{a}=1\neq 3$이므로 $f(0)=0$이다.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{f(x)+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-1}{\frac{f(x)}{x}+5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-1}{\frac{f(x)-f(0)}{x}+5}$$

$$=\frac{f'(0)-1}{f'(0)+5}=3$$

즉, $f'(0)-1=3f'(0)+15$이므로

$2f'(0)=-16 \qquad \therefore f'(0)=-8$

답 -8

05

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times 3$$

$$=3f'(2)=-6$$

$\therefore f'(2)=-2$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{2h+h^2}\times(2+h)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+\boxed{2h+h^2})-f(2)}{\boxed{2h+h^2}}\times\lim_{h\to 0}(2+h)$$ ← $h \longrightarrow 0$일 때 $2h+h^2 \longrightarrow 0$

$$=f'(2)\times 2=(-2)\times 2=-4$$

답 -4

06

조건 (가)의 식 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)-g(h)}{h}=2$에서

$h \longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(2+2h)-f(2)-g(h)\}=0$에서 $g(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)-g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)-g(h)+g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2-\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=2f'(2)-g'(0)=2$$

이때 조건 (나)에서 $f'(2)=5$이므로

$2f'(2)-g'(0)=2$에서 $2\times 5-g'(0)=2$

$\therefore g'(0)=8$

답 8

07

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}=f(3)+7$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\times(-1)$$

$$=-f'(3)$$

이므로 $-f'(3)=f(3)+7$

$\therefore f'(3)+f(3)=-7 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, $\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)f(x)-f(3)}{x-3}=-3$에서

$$\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)f(x)-(4-x)f(3)+(4-x)f(3)-f(3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(4-x)\{f(x)-f(3)\}}{x-3}-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)f(3)}{x-3}$$

$$=1\times f'(3)-f(3)$$

$$=f'(3)-f(3)$$

이므로 $f'(3)-f(3)=-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f'(3)=-5,\ f(3)=-2$

$\therefore f'(3)f(3)=(-5)\times(-2)=10$

답 10

08

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=\{f(0)\}^2$, $f(0)\{f(0)-1\}=0$

$\therefore f(0)=1$ ($\because f(x)>0$)

$$f'(10)=\lim_{h\to0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(10)f(h)-f(10)}{h} \ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(10)\{f(h)-1\}}{h}$$

$$=f(10)\times\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \ (\because f(0)=1)$$

$$=f(10)f'(0)$$

즉, $\dfrac{f'(10)}{f(10)}=f'(0)=5$이므로

$$\left\{\frac{f'(10)}{f(10)}\right\}^2=5^2=25$$

답 25

09

점 $(1,\ 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(1)=3$

한편, 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{7-8}{5-1}=-\dfrac{1}{4}$이므로 곡선

$y=f(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기는 4이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1

$\therefore f'(1)=4$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$

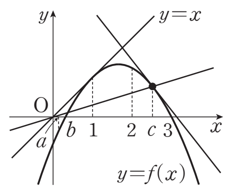
$$=2f'(1)-f(1)$$

$$=2\times4-3=5$$

답 5

10

ㄱ. $\dfrac{f(c)}{c}=\dfrac{f(c)-0}{c-0}$은 원점과 점 $(c,\ f(c))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 점 $(c,\ f(c))$에서의 접선의 기울기이다.

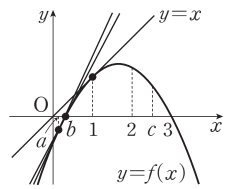


두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{f(c)}{c}>f'(c)$

$\therefore f(c)>cf'(c)$ (거짓)

ㄴ. $f'(a)$, $f'(b)$는 각각 점 $(a,\ f(a))$, 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기이고,



$f(1)=\dfrac{f(1)-0}{1-0}$은 원점과 점 $(1,\ f(1))$을 지나는 직선의 기울기이다.

세 직선의 기울기를 비교하면

$f'(a)>f'(b)>f(1)$ (참)

ㄷ. $0<a<b$이고, ㄴ에서 $f'(a)>f'(b)>f(1)>0$이므로

$af'(b)<bf'(a)$

위의 식의 양변을 ab로 나누면

$\dfrac{f'(b)}{b}<\dfrac{f'(a)}{a}$ ($\because ab>0$) (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

11

ㄱ. $F(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{hf(1+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}f(1+h)=f(1)$$

($\because$ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속)

즉, 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $F(x)=(x-1)^2f(x)$라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2f(1+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\{hf(1+h)\}=0$$

즉, 함수 $(x-1)^2f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $F(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2f(x)}$이라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{1}{1+h^2f(1+h)}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{-h^2f(1+h)}{1+h^2f(1+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-hf(1+h)}{1+h^2f(1+h)}=0$$

즉, 함수 $\dfrac{1}{1+(x-1)^2f(x)}$은 $x=1$에서 미분가능하다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 $x=1$에서 미분가능한 함수이다.

답 ⑤

보충 설명

함수 $F(x)$가 $x=1$에서 미분가능한 함수임을 보이는 것은 $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$임을 확인하는 과정이다.

위의 계산에서는 미분계수의 정의를 이용하여 $F'(1)$이 실제로 존재함을 보인 것으로 우미분계수와 좌미분계수가 각각 존재하고 그 값이 서로 같음을 확인하는 것과 같은 의미이며 결국 $F(x)$가 $x=1$에서 미분가능함을 보인 것이다.

12

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$에서 $f'(1)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$에서 $f'(1)=2$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times2f'(1)=f'(1)=2$$ (거짓)

ㄷ. $f(x)=|x-2|$이면

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$h\geq0$이면 $|h|-|-h|=h-h=0$
$h<0$이면 $|h|-|-h|=-h-(-h)=0$

으로 그 값이 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

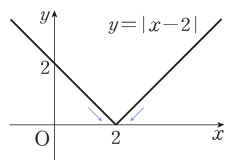
보충 설명

ㄷ에서 함수 $f(x)=|x-2|$에 대하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|-|-h|}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|-|-h|}{h}=0$$

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=0$



으로 그 값이 존재하지만 오른쪽 그림과 같이 $x=2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값이 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지만 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$의 값이 존재한다고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 것은 아님에 주의한다.

2 도함수

기본 + 필수연습 본문 pp.093~101

19 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=-4$ (3) $f'(x)=6x^2$

20 (1) $y'=0$ (2) $y'=-8$ (3) $y'=x-1$

21 (1) $y'=3x^2-10x+2$ (2) $y'=-3x^2+2x+17$ (3) $y'=-5(x-3)^4$

22 (1) -7 (2) $-\dfrac{17}{2}$ **23** -731 **24** 45

25 12 **26** 8 **27** 7 **28** 2

29 -19 **30** 8 **31** 114 **32** 0

33 1 **34** 6 **35** 66 **36** 8

37 (1) -8 (2) -63 **38** 15 **39** 15

19

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-3-(-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{-4(x+h)+1\}-(-4x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-4h}{h}=-4$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)^3+5\}-(2x^3+5)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2)=6x^2$

답 (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)=-4$ (3) $f'(x)=6x^2$

20

(1) $y'=(-100)'=0$

(2) $y'=(-8x+13)'=-8(x)'+(13)'$

$=(-8)\times 1+0=-8$

(3) $y'=\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}\right)'$

$=\frac{1}{2}(x^2)'-(x)'+\left(\frac{1}{3}\right)'$

$=\frac{1}{2}\times 2x-1+0=x-1$

답 (1) $y'=0$ (2) $y'=-8$ (3) $y'=x-1$

21

(1) $y'=\{(x^2-4x-2)(x-1)\}'$

$=(x^2-4x-2)'(x-1)+(x^2-4x-2)(x-1)'$

$=(2x-4)(x-1)+(x^2-4x-2)$

$=2x^2-6x+4+x^2-4x-2$

$=3x^2-10x+2$

(2) $y'=\{(x+1)(x+3)(-x+5)\}'$

$=(x+1)'(x+3)(-x+5)$

$+(x+1)(x+3)'(-x+5)$

$+(x+1)(x+3)(-x+5)'$

$=(x+3)(-x+5)+(x+1)(-x+5)$

$+(x+1)(x+3)\times(-1)$

$=(-x^2+2x+15)+(-x^2+4x+5)$

$-(x^2+4x+3)$

$=-3x^2+2x+17$

(3) $y'=\{(-x+3)^5\}'$

$=5(-x+3)^4\times(-x+3)'$

$=5(-x+3)^4\times(-1)=-5(x-3)^4$

답 (1) $y'=3x^2-10x+2$ (2) $y'=-3x^2+2x+17$

(3) $y'=-5(x-3)^4$

22

(1) 함수 $2f(x)+3g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$2f'(1)+3g'(1)=2\times 1+3\times(-3)=-7$

(2) 함수 $\frac{f(x)g(x)}{2}$의 $x=1$에서의 미분계수는

$\frac{1}{2}\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}$

$=\frac{1}{2}\times\{1\times(-2)+5\times(-3)\}=-\frac{17}{2}$

답 (1) -7 (2) $-\frac{17}{2}$

23

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-3-2h)-f(-3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3-2h)-f(-3)+f(-3)-f(-3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-3-2h)-f(-3)}{-2h}\times(-2)$

$-\lim_{h\to 0}\frac{f(-3-h)-f(-3)}{-h}\times(-1)$

$=-2f'(-3)+f'(-3)=-f'(-3)$

$f(x)=2x^5-3x^3+2x+1$에서

$f'(x)=10x^4-9x^2+2$이므로

$f'(-3)=10\times(-3)^4-9\times(-3)^2+2=731$

따라서 구하는 값은

$-f'(-3)=-731$

답 -731

24

$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$에서

$f(-1)=1-1+(-1)^2+\cdots+(-1)^9=0$

또한, $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+9x^8$이므로

$f'(1)=1+2+3+\cdots+9=45$

$\therefore\ f(-1)+f'(1)=0+45=45$

답 45

25

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-9x^2+8x$

점 $(a,\ b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(a)=a^4-3a^3+4a^2+2=b$ ······㉠

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 12이므로

$f'(a)=4a^3-9a^2+8a=12$

$4a^3-9a^2+8a-12=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & -9 & 8 & -12 \\ & & 8 & -2 & 12 \\ \hline & 4 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(a-2)(\underbrace{4a^2-a+6}_{4\left(a-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{95}{16}>0})=0$

$\therefore\ a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$b=2^4-3\times2^3+4\times2^2+2=10$

$\therefore\ a+b=2+10=12$

답 12

26

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$에서

$a+4+b+2=0$

$\therefore\ a+b=-6$ ······㉠

또한,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

이므로 $f'(1)=4$

이때 $f'(x)=3ax^2+8x+b$이므로

$3a+8+b=4$

$\therefore\ 3a+b=-4$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-7$

$\therefore\ a-b=1-(-7)=8$

답 8

27

$f(x)=x^3-ax+b$라 하자.

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 5)$를 지나므로

$5=-8+2a+b$

$\therefore\ 2a+b=13$ ······㉠

또한, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 5)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{6}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는 6이다.

이때 $f'(x)=3x^2-a$이고 $f'(-2)=6$이므로

$12-a=6$

$\therefore\ a=6$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore\ a+b=6+1=7$

답 7

28

조건 ㈎에서 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈏의 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(0)}{x-3}=-6$에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 3}\{f(x)-f(0)\}=0$에서

$f(3)=f(0)$이므로

$27+9a+3b+c=c,\ 27+9a+3b=0$

$\therefore\ 3a+b=-9$ ……㉠

또한,

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(0)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=f'(3)$$

에서 $f'(3)=-6$이므로

$27+6a+b=-6$

$\therefore\ 6a+b=-33$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ b=15$

따라서 $f'(x)=3x^2-16x+15$이므로

$f'(1)=3-16+15=2$

답 2

29

$f(x)=x^{10}-x^9$이라 하면

$f(-1)=(-1)^{10}-(-1)^9=1-(-1)=2$

이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}-x^9-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=f'(-1)$$

이때 $f'(x)=10x^9-9x^8$이므로

$$f'(-1)=10\times(-1)^9-9\times(-1)^8$$
$$=-10-9=-19$$

답 -19

다른 풀이

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}-x^9-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}(10x^9-9x^8)$$
$$=10\times(-1)^9-9\times(-1)^8$$
$$=-10-9=-19$$

30

$\lim_{x\to 1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+a}{x-1}=b$에서 $x\longrightarrow 1$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+a)=0$에서

$1-2+1-2+1+a=0$ $\quad\therefore\ a=1$ (*)

$f(x)=x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5$이라 하면

$f(1)=1-2+1-2+1=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=b$$

이때 $f'(x)=9x^8-16x^7+7x^6-12x^5+5x^4$이므로

$f'(1)=9-16+7-12+5=-7$ $\quad\therefore\ b=-7$

$\therefore\ a-b=1-(-7)=8$

답 8

다른 풀이

(*)에서 $a=1$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(9x^8-16x^7+7x^6-12x^5+5x^4)$$
$$=9-16+7-12+5=-7=b$$

$\therefore\ a-b=1-(-7)=8$

31

$\lim_{x\to 3}\frac{x^n+2x-87}{x-3}=k$에서 $x\longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to 3}(x^n+2x-87)=0$에서

$3^n+2\times 3-87=0$

$3^n=81$ $\quad\therefore\ n=4$ (*)

$f(x)=x^4+2x$라 하면 $f(3)=87$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4+2x-87}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$$

이때 $f'(x)=4x^3+2$이므로

$k=f'(3)=4\times 3^3+2=108+2=110$

$\therefore\ n+k=4+110=114$

답 114

다른 풀이

$(*)$에서 $n=4$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to3}\frac{x^4+2x-87}{x-3}=\lim_{x\to3}(4x^3+2)=108+2=110$$

즉, $k=110$이므로

$n+k=4+110=114$

32

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$-a+b=-4 \qquad \therefore\ b=a-4 \qquad \cdots\cdots㉠$

또한, $x=-1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^3+b-(-4)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{ax^3+a}{x+1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to-1+}\frac{a(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}a(x^2-x+1)=3a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}&=\lim_{x\to-1-}\frac{6x+2-(-4)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{6x+6}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}\frac{6(x+1)}{x+1}=6\end{aligned}$$

따라서 $3a=6$에서 $a=2$, $b=-2$ $(\because ㉠)$

$\therefore\ a+b=2+(-2)=0$

답 0

다른 풀이

$f'(x)=\begin{cases}6 & (x<-1)\\ 3ax^2 & (x>-1)\end{cases}$이고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to-1+}f'(x)=\lim_{x\to-1-}f'(x)$

즉, $\lim_{x\to-1+}3ax^2=6$이므로

$3a=6$에서 $a=2$, $b=-2$ $(\because ㉠)$

$\therefore\ a+b=2+(-2)=0$

33

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$(2+b)\times(2-1)=a\times(2-2)$

$2+b=0 \qquad \therefore\ \underline{b=-2}_{(*)}$

또한, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to2+}\frac{(x+b)(x-1)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}\ (\because\ b=-2)\\&=\lim_{x\to2+}(x-1)=1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{a(2-x)}{x-2}=-a$$

즉, $1=-a$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\le2)\\ (x-2)(x-1) & (x>2)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}f(1)+f(3)&=(1-2)+(3-2)\times(3-1)\\&=-1+2=1\end{aligned}$$

답 1

다른 풀이

$$\begin{aligned}f'(x)&=\begin{cases}a\times(-1) & (x<2)\\ (x-1)+(x+b) & (x>2)\end{cases}\\&=\begin{cases}-a & (x<2)\\ 2x+b-1 & (x>2)\end{cases}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$

즉, $\lim_{x\to2+}(2x+b-1)=-a$이므로

$b+3=-a \qquad \therefore\ a=-b-3$

이때 $(*)$에서 $b=-2$이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x-2 & (x\le2)\\ (x-2)(x-1) & (x>2)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}f(1)+f(3)&=(1-2)+(3-2)\times(3-1)\\&=-1+2=1\end{aligned}$$

34

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\ne0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)=2$에서 $c=2$이고 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면

$(2x-3)(2ax+b)-4(ax^2+bx+2)-1=0$

$\therefore\ -(6a+2b)x-3b-9=0$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$6a+2b=0,\ -3b-9=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2$이므로

$f(4)=4^2-3\times4+2$

$=16-12+2=6$

답 6

35

$f(x)=2x^3+3x^2-xf'(1)$에서 $f'(1)$은 상수이므로

$f'(1)=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=2x^3+3x^2-ax$

$\therefore\ f'(x)=6x^2+6x-a$

즉, $f'(1)=12-a$이므로 $a=12-a$

$2a=12 \qquad \therefore\ a=6$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x-6$이므로

$f'(3)=6\times3^2+6\times3-6=66$

답 66

다른 풀이

$f(x)=2x^3+3x^2-xf'(1)$에서

$f'(x)=6x^2+6x-f'(1)$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=6+6-f'(1),\ 2f'(1)=12 \qquad \therefore\ f'(1)=6$

따라서 $f'(x)=6x^2+6x-6$이므로

$f'(3)=6\times3^2+6\times3-6=66$

36

$f(x)=px^2+qx+r$ ($p\neq0,\ p,\ q,\ r$은 상수)이라 하면

$f'(x)=2px+q$

조건 (가)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=4$에서 $x\longrightarrow1$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이므로

$p+q+r=2$ ⋯⋯㉠

또한, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=4 \qquad \therefore\ 2p+q=4$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $q=4-2p,\ r=p-2$ ⋯⋯㉢

$\therefore\ f(x)=px^2+(4-2p)x+p-2,\ f'(x)=2px+4-2p$

조건 (나)의 등식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하면

$x(2px+4-2p)=px^2+(4-2p)x+p-2+x^2+a$

$\therefore\ 2px^2+(4-2p)x=(p+1)x^2+(4-2p)x+p-2+a$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$2p=p+1,\ 0=p-2+a$

두 식을 연립하여 풀면 $p=1,\ a=1$

$p=1$을 ㉢에 대입하면 $q=2,\ r=-1$

따라서 $f(x)=x^2+2x-1$이므로

$f(2)=2^2+2\times2-1=7$

$\therefore\ a+f(2)=1+7=8$

답 8

37

(1) 다항식 x^6+ax^3+bx를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^6+ax^3+bx=(x+2)^2Q(x)$ ⋯⋯㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$64-8a-2b=0$

$\therefore\ 4a+b=32$ ⋯⋯㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+3ax^2+b=2(x+2)Q(x)+(x+2)^2Q'(x)$

위의 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$-192+12a+b=0$

$\therefore\ 12a+b=192$ ⋯⋯㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=20,\ b=-48$

$\therefore\ 2a+b=2\times20-48=-8$

(2) 다항식 $x^9+4x^6+8x^2-12$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면

$x^9+4x^6+8x^2-12=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ ⋯⋯㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+4+8-12=-a+b \qquad \therefore\ a-b=1$ ⋯⋯㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^8+24x^5+16x=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$9-24-16=a$ $\quad\therefore\ a=-31,\ b=-32$ ($\because$ ㉡)

따라서 $R(x)=-31x-32$이므로

$R(1)=-31-32=-63$

답 (1) -8 (2) -63

38

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-a\}=0$에서 $f(2)=a$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\therefore\ f'(2)=4$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $bx+3$이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ ⋯⋯㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2b+3$ $\quad\therefore\ a=2b+3$ ⋯⋯㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=b$

$\therefore\ b=4,\ a=11$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ a+b=11+4=15$

답 15

39

$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\ge1)\end{cases}$, $g(x)=ax+b$에서

$f(x)g(x)=\begin{cases}ax+b & (x<1)\\ (2x-1)(ax+b) & (x\ge1)\end{cases}$

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이때

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$=a+b$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\{f(x)g(x)\}'=\begin{cases}a & (x<1)\\ 2(ax+b)+a(2x-1) & (x>1)\end{cases}$

$=\begin{cases}a & (x<1)\\ 4ax-a+2b & (x>1)\end{cases}$

이고, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1+}\{f(x)g(x)\}'=\lim_{x\to1-}\{f(x)g(x)\}'$

즉, $4a-a+2b=a$에서 $a+b=0$ ⋯⋯㉠

이때 $g(2)=5$이므로 $2a+b=5$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-5$

(i), (ii)에서 $g(x)=5x-5$이므로

$g(4)=5\times4-5=15$

답 15

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\ge1)\end{cases}$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않고 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다.

즉, $g(1)=0$이므로 $a+b=0$ ⋯⋯㉠

이때 $g(2)=5$이므로 $2a+b=5$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=-5$

따라서 $g(x)=5x-5$이므로

$g(4)=5\times4-5=15$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.102~103

13 50	**14** $\frac{15}{2}$	**15** 73	**16** 56
17 8	**18** 28	**19** $\frac{1}{2}$	**20** 9
21 24	**22** -15	**23** 4	**24** 5
25 10	**26** 2		

13

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a$

즉, $4a^3-12a^2+12a=4$이므로

$a^3-3a^2+3a-1=0$

$(a-1)^3=0 \qquad \therefore\ a=1$

이때 $f(a)=b$이므로

$a^4-4a^3+6a^2+4=b$

위의 식에 $a=1$을 대입하면

$1-4+6+4=b \qquad \therefore\ b=7$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+7^2=50$

답 50

14

$f(x)=x^3-5x+4,\ g(x)=2x^2-6$에서

$f(2)=2^3-5\times2+4=2,\ g(2)=2\times2^2-6=2$

또한, $f'(x)=3x^2-5,\ g'(x)=4x$이므로

$f'(2)=3\times2^2-5=7,\ g'(2)=4\times2=8$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-g(2-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+g(2)-g(2-h)}{2h}\\&\hspace{14em}(\because\ f(2)=g(2))\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{g(2-h)-g(2)\}}{2h}\\&=\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right.\\&\hspace{6em}\left.-\lim_{h\to0}\frac{g(2-h)-g(2)}{-h}\times(-1)\right\}\\&=\frac{1}{2}\{f'(2)+g'(2)\}\\&=\frac{1}{2}\times(7+8)=\frac{15}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{15}{2}$

15

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=7$에서 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=7$

$g(x)=xf(x)+2x\{f(x)\}^2$에서

$g'(x)=f(x)+xf'(x)+2\{f(x)\}^2+4xf(x)f'(x)$

$$\begin{aligned}\therefore\ g'(1)&=f(1)+f'(1)+2\{f(1)\}^2+4f(1)f'(1)\\&=2+7+2\times2^2+4\times2\times7\\&=2+7+8+56=73\end{aligned}$$

답 73

16

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f(3)=-2,\ f'(3)=5$

$g(x)=(x^3-x^2+x-1)f(x)$에서

$g'(x)=(3x^2-2x+1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)f'(x)$

$$\begin{aligned}\therefore\ g'(3)&=(27-6+1)f(3)+(27-9+3-1)f'(3)\\&=22\times(-2)+20\times5\\&=-44+100=56\end{aligned}$$

답 56

17

조건 (가)의 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)g(x)-6}{x+1}=4$에서 $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)g(x)-6\}=0$에서

$f(-1)g(-1)=6$

이때 조건 (나)에서 $f(-1)=2$이므로

$g(-1)=3$

한편, 조건 (가)에서 $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$h(-1)=f(-1)g(-1)=6$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{f(x)g(x)-6}{x+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}\\&=h'(-1)\end{aligned}$$

$\therefore\ h'(-1)=4$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$h'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$

$4=(-4)\times3+2\times g'(-1)$ ($\because$ 조건 (나))

$4=-12+2g'(-1)$

$2g'(-1)=16$

$\therefore\ g'(-1)=8$

답 8

18

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-n)$에서

$$\begin{aligned}f'(x)=&(x-2)(x-3)\times\cdots\times(x-n)\\&+(x-1)(x-3)\times\cdots\times(x-n)\\&+(x-1)(x-2)(x-4)\times\cdots\times(x-n)+\cdots\\&+(x-1)(x-2)(x-3)\times\cdots\times\{x-(n-1)\}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(2)&=1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(2-n)\\&=(-1)^{n-2}\times1\times2\times\cdots\times(n-2)\end{aligned}$$

즉, $f'(n)=f'(2)(n^2-14n+43)$에서

$(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times1$

$=(-1)^{n-2}\times1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n^2-14n+43)$

$\therefore\ n-1=(-1)^{n-2}\times(n^2-14n+43)$ ……㉠

(i) n이 홀수일 때,

$(-1)^{n-2}=-1$이므로 ㉠에서

$n-1=-(n^2-14n+43)$

$n^2-13n+42=0$

$(n-6)(n-7)=0$

이때 n은 홀수이므로 $n=7$

(ii) n이 짝수일 때,

$(-1)^{n-2}=1$이므로 ㉠에서

$n-1=n^2-14n+43$

$n^2-15n+44=0$

$(n-4)(n-11)=0$

이때 n은 짝수이므로 $n=4$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 곱은

$7\times4=28$

답 28

19

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^n+x^2+2x+8}{x^2-4}=a$에서 $x\longrightarrow-2$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^n+x^2+2x+8)=0$에서

$(-2)^n+(-2)^2+2\times(-2)+8=0$

$(-2)^n=-8\qquad\therefore\ \underline{n=3}_{(*)}$

$f(x)=x^3+x^2+2x$라 하면 $f(-2)=-8$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-2}\frac{x^3+x^2+2x+8}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to-2}\left\{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\frac{1}{x-2}\right\}\\&=-\frac{1}{4}f'(-2)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=3x^2+2x+2$이므로

$$\begin{aligned}a&=-\frac{1}{4}f'(-2)\\&=-\frac{1}{4}\times\{3\times(-2)^2+2\times(-2)+2\}\\&=-\frac{1}{4}\times10=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ n+a=3+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이

$(*)$에서 $n=3$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^3+x^2+2x+8}{x^2-4}&=\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+2x+2}{2x}\\&=\frac{10}{-4}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

즉, $a=-\frac{5}{2}$이므로 $n+a=3+\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$

20

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}=\frac{1}{4}$에서 $x\longrightarrow-1$일 때

(분자) $\longrightarrow$ 0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^n+x^5+x^2+1)=0$에서

$(-1)^n+(-1)^5+(-1)^2+1=0$

$\therefore \underbrace{(-1)^n=-1}_{n\text{은 홀수이다.}}$ ……㉠

$f(x)=x^n+x^5+x^2$이라 하면

$$\begin{aligned}f(-1)&=(-1)^n+(-1)^5+(-1)^2\\&=-1+(-1)+1\ (\because ㉠)\\&=-1\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{\overbrace{(x+1)(x^2-x+1)}^{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{f(x)-f(-1)}\\&=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{x+1}{f(x)-f(-1)}\times(x^2-x+1)\right\}\\&=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}\times(x^2-x+1)\right\}\\&=\frac{3}{f'(-1)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\therefore f'(-1)=12$

이때 $f'(x)=nx^{n-1}+5x^4+2x$이므로

$$\begin{aligned}f'(-1)&=n\times\underbrace{(-1)^{n-1}}_{㉠\text{에서 }n\text{이 홀수이므로 }(-1)^{n-1}=1}+5\times(-1)^4+2\times(-1)\\&=n+3\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

따라서 $n+3=12$이므로 $n=9$

답 9

다른 풀이

로피탈의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}&=\lim_{x\to-1}\frac{3x^2}{nx^{n-1}+5x^4+2x}\\&=\frac{3}{n\times(-1)^{n-1}+3}\\&=\frac{3}{n+3}\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

즉, $\frac{3}{n+3}=\frac{1}{4}$이므로

$n+3=12 \qquad \therefore n=9$

21

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 연속함수이다.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x<0)\\x^3+bx^2+cx & (0\le x<2)\\-2x+d & (x\ge2)\end{cases}$$

에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서 $a=0$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$-4+d=8+4b+2c$

$\therefore 4b+2c-d=-12$ ……㉠

한편, $f'(x)=\begin{cases}-2 & (x<0)\\3x^2+2bx+c & (0<x<2)\\-2 & (x>2)\end{cases}$에서 함수

$f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}f'(x)$에서 $c=-2$

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$에서

$-2=12+4b+c \qquad \therefore b=-3\ (\because c=-2)$

㉠에 $b=-3$, $c=-2$를 대입하여 풀면 $d=-4$

$\therefore a-bcd=0-(-3)\times(-2)\times(-4)=24$

답 24

22

$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} & (x<2)\\x^2-2bx-4 & (x\ge2)\end{cases}$에서 $x<2$일 때,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\frac{(x^2+ax+3)-(4+2a+3)}{x-2}\\&=\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}\\&=\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}\\&=x+a+2\end{aligned}$$

$\therefore g(x)=\begin{cases}x+a+2 & (x<2)\\x^2-2bx-4 & (x\ge2)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2-}g(x)=g(2)$에서 $-4b=a+4$

$\therefore a+4b=-4$ ……㉠

한편, $g'(x)=\begin{cases}1 & (x<2)\\2x-2b & (x>2)\end{cases}$이고, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x \to 2+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 2-} g'(x)$에서

$4-2b=1$

$\therefore\ b=\frac{3}{2},\ a=-10\ (\because\ ㉠)$

$\therefore\ ab=(-10)\times\frac{3}{2}=-15$

답 -15

23

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하면

$f'(x)$의 최고차항은 nx^{n-1}이다.

$f(x)=1$이라 하면 $f'(x)=0$
즉, $0=2x^3+2ax^2-4b$에 모순이다.

조건 ㈎에서 $f'(x)f(x)$의 최고차항은 $nx^{n-1}\times x^n=nx^{2n-1}$

이고 이것이 $2x^3$과 같아야 하므로

$n=2$ ㈎

즉, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+p$

조건 ㈏의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(2)=-f'(2)$에서 $f'(2)=0$이므로

$4+p=0\qquad \therefore\ p=-4$

$\therefore\ f(x)=x^2-4x+q,\ f'(x)=2x-4$

$f(x)$와 $f'(x)$를 조건 ㈎의 등식에 대입하면

$(2x-4)(x^2-4x+q)=2x^3+2ax^2-4b$ ㈏

$2x^3-12x^2+(2q+16)x-4q=2x^3+2ax^2-4b$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$-12=2a$에서 $a=-6$

$2q+16=0$에서 $q=-8$

$-4q=-4b$에서 $b=-8$

$\therefore\ f(x)=x^2-4x-8$

또한, $b-a=-8-(-6)=-2$이므로

$f(b-a)=f(-2)=4+8-8=4$ ㈐

답 4

단계	채점 기준	배점
㈎	조건 ㈎를 이용하여 다항함수 $f(x)$의 차수를 구한 경우	30%
㈏	조건 ㈏를 만족시키는 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$를 미정계수를 이용하여 나타낸 후, 조건 ㈎의 등식에 대입한 경우	40%
㈐	항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구한 후, 함수식을 완성하고 함숫값을 구한 경우	30%

24

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+1$이므로

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+2x+1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=3$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=2$ ……㉢

$g(x)=xf(x)$라 하면 곡선 $y=xf(x)$, 즉 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $g'(1)$이다.

이때 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)=3+2=5\ (\because\ ㉡, ㉢)$

답 5

25

다항식 x^9-x+7을 $(x+1)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

삼차식으로 나누었으므로
나머지는 이차 이하의 다항식

$x^9-x+7=(x+1)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+7=a+b+c$

$\therefore\ a+b+c=7$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+1+7=a-b+c$

$\therefore\ a-b+c=7$ ……㉢

㉡, ㉢에서 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$9x^8-1=2(x+1)(x-1)Q(x)+(x+1)^2Q(x)+(x+1)^2(x-1)Q'(x)+2ax+b$$

위의 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$9-1=-2a\ (\because\ b=0)$

$\therefore\ a=-4$

㉡ 또는 ㉢에 $a=-4$, $b=0$을 대입하면 $c=11$

따라서 $R(x)=-4x^2+11$이므로

$$R\left(\frac{1}{2}\right)=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+11=10$$

답 10

26

$g(x)=(x^n+a)f(x)$라 하면

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 0) \\ x-2 & (x>0) \end{cases}$이므로

$$g(x)=\begin{cases} (x^n+a)(x^2+1) & (x\le 0) \\ (x^n+a)(x-2) & (x>0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0+} g(x)=-2a$, $\lim_{x\to 0-} g(x)=a$, $g(0)=a$이므로

$-2a=a \qquad \therefore a=0$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} x^n(x^2+1) & (x\le 0) \\ x^n(x-2) & (x>0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x^{n+2}+x^n & (x\le 0) \\ x^{n+1}-2x^n & (x>0) \end{cases}$$

즉, $g'(x)=\begin{cases} (n+2)x^{n+1}+nx^{n-1} & (x<0) \\ (n+1)x^n-2nx^{n-1} & (x>0) \end{cases}$이고,

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0-} g'(x)$이어야 한다.

(i) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0+}(2x-2)=-2$

$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}(3x^2+1)=1$

즉, $\lim_{x\to 0+} g'(x)\ne\lim_{x\to 0-} g'(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $n\ge 2$일 때,

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0+}\{(n+1)x^n-2nx^{n-1}\}=0$

$\lim_{x\to 0-} g'(x)=\lim_{x\to 0-}\{(n+2)x^{n+1}+nx^{n-1}\}=0$

즉, $\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0-} g'(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$, 즉 $(x^n+a)f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 최솟값은 2이다.

답 2

STEP 2 개념 마무리

본문 p.104

1 ①	**2** 1	**3** -24	**4** 118
5 12	**6** 58		

1

$f(x)=x^2|x-1|$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $h \longrightarrow 0+$일 때, ㉠에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+2h)^2\times 2h-(1-3h)^2\times 3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\{2(1+2h)^2-3(1-3h)^2\}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(-19h^2+26h-1)=-1$$

(ii) $h \longrightarrow 0-$일 때, ㉠에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+2h)^2\times(-2h)-(1-3h)^2\times(-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\{-2(1+2h)^2+3(1-3h)^2\}$$
$$=\lim_{h\to 0-}(19h^2-26h+1)=1$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$
$$\ne\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

이므로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$의 값은 존재하지 않는다.

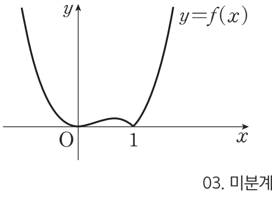
답 ①

보충 설명

$f(x)=x^2|x-1|$에서

$$f(x)=\begin{cases} -x^2(x-1) & (x<1) \\ x^2(x-1) & (x\ge 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $x=1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.
따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)$$
$$=2f'(1)+3f'(1)=5f'(1)$$

로 계산할 수 없다.
즉, 절댓값 기호 또는 가우스 기호가 포함된 함수의 미분계수를 구할 때는 먼저 평균변화율의 극한값의 존재 여부를 확인해야 한다.

2

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$이다.
이때

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3h)g(0)-f(0)g(-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3h)g(0)-f(0)g(0)+f(0)g(0)-f(0)g(-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3h)g(0)-f(0)g(0)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(0)g(-3h)-f(0)g(0)}{h}$$
$$=g(0)\times\lim_{h\to0}\frac{f(3h)-f(0)}{3h}\times3-f(0)\times\lim_{h\to0}\frac{g(-3h)-g(0)}{-3h}\times(-3)$$
$$=3f'(0)g(0)+3f(0)g'(0)$$

즉, $3f'(0)g(0)+3f(0)g'(0)=3$이므로
$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=1$

답 1

3

조건 (나)의 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면
$f(1)=f(5)$ ……㉠
$f'(1)=f'(5)$ ……㉡

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+f(5+3h)-2f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(5+3h)-f(5)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(5+3h)-f(5)}{h}$$
$$=f'(1)+\lim_{h\to0}\frac{f(5+3h)-f(5)}{3h}\times3$$
$$=f'(1)+3f'(5)$$
$$=f'(1)+3f'(1)\ (\because ㉡)$$
$$=4f'(1)$$

조건 (가)의 $f(x)=3x^2-12x+4\ (0\le x<4)$에서
$f'(x)=6x-12\ (0<x<4)$이므로
$f'(1)=6-12=-6$
$\therefore$ (주어진 식)$=4f'(1)=4\times(-6)=-24$

답 -24

4

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\le x<b) \\ n+f(x) & (x\ge b)\end{cases}$ 에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=b$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to a+}g(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)$,
$\lim_{x\to b+}g(x)=\lim_{x\to b-}g(x)=g(b)$에서
$m-f(a)=f(a)$, $n+f(b)=m-f(b)$
$\therefore m=2f(a)$, $n=m-2f(b)$ ……㉠

한편, $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a<x<b) \\ f'(x) & (x>b)\end{cases}$ 이고, 함수 $g(x)$가
$x=a$, $x=b$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to a+}g'(x)=\lim_{x\to a-}g'(x)$, $\lim_{x\to b+}g'(x)=\lim_{x\to b-}g'(x)$에서
$-f'(a)=f'(a)$, $f'(b)=-f'(b)$
$\therefore f'(a)=f'(b)=0$

이때 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$=3(x^2+2x-3)$

$=3(x+3)(x-1)$

이므로 $a=-3$, $b=1$ ($\because$ $a<b$)

이를 ㉠에 대입하면

$m=2f(-3)=2\times(-27+27+27)=54$,

$n=m-2f(1)=54-2\times(1+3-9)=64$

$\therefore$ $m+n=54+64=118$

답 118

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$-q=2$, $-2r=-10$

$\therefore$ $q=-2$, $r=5$ $\quad\therefore$ $f(x)=px^2-2x+5$

이때 조건 ㈏에서 $f(1)=4$이므로

$p-2+5=4$ $\quad\therefore$ $p=1$

따라서 $f(x)=x^2-2x+5$이고 $f'(x)=2x-2$이므로

$f(3)+f'(3)=(9-6+5)+(6-2)$

$=8+4=12$

답 12

5

(i) $f(x)$가 상수함수일 때,

조건 ㈎에서 좌변의 식이 상수이고 우변의 식은 일차식이므로 등식이 성립하지 않는다. ← $f(x)=c$ (c는 상수)라 하면 $f'(x)=0$ 즉, $-2c=2x-10$이므로 모순이다.

(ii) $f(x)$가 일차함수일 때,

조건 ㈏에서 $f(1)=4$이므로

$f(x)=a(x-1)+4$ $(a\neq0)$라 하면

$f'(x)=a$

$f(x)$와 $f'(x)$를 조건 ㈎의 등식에 대입하면

$ax-2\{a(x-1)+4\}=2x-10$

$-ax+2a-8=2x-10$

$\therefore$ $a=-2$, $2a-8=-10$

위의 두 식을 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차함수가 아니다.

(iii) $f(x)$가 이차 이상의 다항함수일 때,

2 이상의 자연수 n에 대하여 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\neq0)$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}이다.

이때 조건 ㈎의 좌변의 최고차항이 $2x$와 같아야 하므로

$(an-2a)x^n\neq2x$ ($\because$ $n\geq2$인 자연수)

$(an-2a)x^n=0$에서 $an-2a=0$

$a(n-2)=0$ $\quad\therefore$ $n=2$ ($\because$ $a\neq0$)

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=px^2+qx+r$ (p, q, r은 상수, $p\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2px+q$

$f(x)$와 $f'(x)$를 조건 ㈎의 등식에 대입하면

$x(2px+q)-2(px^2+qx+r)=2x-10$

$-qx-2r=2x-10$

6

조건 ㈏에서 $g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 $g(x)=(x-1)^2Q(x)+2$이므로

$g'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

$\therefore$ $g(1)=2$, $g'(1)=0$

조건 ㈎에서 $f(x)=(x-2)^3g(x)+ax+b$, 즉

$f'(x)=3(x-2)^2g(x)+(x-2)^3g'(x)+a$이므로

$f(1)=(-1)^3\times g(1)+a+b$

$=-2+a+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=3\times(-1)^2\times g(1)+(-1)^3\times g'(1)+a$

$=6+a$

조건 ㈐의 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=3$에서 $x\longrightarrow1$일 때

(분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(1)=g(1)$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)$

$=6+a$

따라서 $6+a=3$에서 $a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $-5+b=2$ $\quad f(1)=g(1)=2$

$\therefore$ $b=7$

$\therefore$ $a^2+b^2=(-3)^2+7^2=58$

답 58

04. 도함수의 활용(1)

1 접선의 방정식

기본 + 필수연습

본문 pp.109~114

01 (1) $y=-3x+3$ (2) $y=-31x+58$

02 $y=\frac{1}{11}x-\frac{101}{11}$

03 $y=4x+18$ 또는 $y=4x-14$

04 $y=-x+1$ **05** 0 **06** $\frac{8}{13}$

07 6 **08** $y=5x-\frac{7}{4}$ **09** 6

10 -26 **11** $\frac{2}{3}$ **12** -2 **13** 56

14 (1) 256 (2) -1, 3

01

(1) $f(x)=x^3-6x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6$

점 $(-1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=-3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-6=-3\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=-3x+3$

(2) $f(x)=-x^4+x+10$이라 하면

$f'(x)=-4x^3+1$

점 $(2,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-31$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(-4)=-31(x-2)$

$\therefore\ y=-31x+58$

답 (1) $y=-3x+3$ (2) $y=-31x+58$

02

$f(x)=-x^3+x-3$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+1$

점 $(2,\ -9)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-11$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{11}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-(-9)=\frac{1}{11}(x-2)$

$\therefore\ y=\frac{1}{11}x-\frac{101}{11}$

답 $y=\frac{1}{11}x-\frac{101}{11}$

03

$f(x)=x^3-8x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-8$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-8a+2)$라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(a)=3a^2-8=4$

$3a^2=12,\ a^2=4 \qquad \therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

이때 $f(-2)=10$, $f(2)=-6$이므로 접점의 좌표는 $(-2,\ 10)$ 또는 $(2,\ -6)$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-10=4\{x-(-2)\}$ 또는 $y-(-6)=4(x-2)$

$\therefore\ y=4x+18$ 또는 $y=4x-14$

답 $y=4x+18$ 또는 $y=4x-14$

04

$f(x)=x^3-4x+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-4a+3)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(a)=3a^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^3-4a+3)=(3a^2-4)(x-a)$ ……㉠

접선 ㉠이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1-(a^3-4a+3)=(3a^2-4)\times(-a)$

$2a^3=2,\ a^3=1$

$\therefore\ a=1$ ($\because$ a는 실수)

이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-(x-1)$

$\therefore\ y=-x+1$

답 $y=-x+1$

05

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$f'(x)=2x+a$

점 $(4,\ 7)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(4)=7$에서 $16+4a+b=7$

$\therefore\ 4a+b=-9$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ 7)$에서의 접선의 기울기는

$f'(4)=2\times4+a=a+8$이므로 점 $(4,\ 7)$에서의 접선의 방정식은

$y-7=(a+8)(x-4)$

$\therefore\ y=(a+8)x-4a-25$

이 접선이 점 $(5,\ 4b)$를 지나므로

$4b=5(a+8)-4a-25$

$\therefore\ a-4b=-15$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-3+3=0$

답 0

06

$f(x)=-x^3-4x^2+6x-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2-8x+6$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=-3-8+6=-5$이므로 접선 l의 방정식은

$y-(-1)=-5(x-1)$

$\therefore\ 5x+y-4=0$

따라서 원점과 직선 $l: 5x+y-4=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{26}}$ $\qquad\therefore\ d^2=\dfrac{16}{26}=\dfrac{8}{13}$

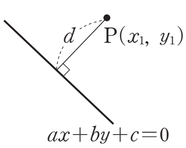
답 $\dfrac{8}{13}$

보충 설명

점과 직선 사이의 거리 |

(1) 점 $P(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



(2) 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

07

$f(x)=ax^3+bx^2+x$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+1$

점 $(2,\ 10)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=10$에서 $8a+4b+2=10$

$\therefore\ 2a+b=2$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 10)$에서의 접선이 직선 $y=\dfrac{1}{7}x+5$와 수직이므로

$f'(2)=-7$에서 $12a+4b+1=-7$

$12a+4b=-8$ $\quad\therefore\ 3a+b=-2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=10$

$\therefore\ a+b=-4+10=6$

답 6

08

$f(x)=3x^2-4x+5$라 하면

$f'(x)=6x-4$

접점의 좌표를 $(a,\ 3a^2-4a+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=6a-4$

이때 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{37-12}{4-(-1)}=5$이므로

$6a-4=5,\ 6a=9$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{23}{4}\right)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-\dfrac{23}{4}=5\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore\ y=5x-\dfrac{7}{4}$

답 $y=5x-\dfrac{7}{4}$

09

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3+2$라 하면

$f'(x)=x^3+3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=a^3+3a^2$

이때 접선의 방정식이 $y=4x+k$이므로

$a^3+3a^2=4$

$a^3+3a^2-4=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$(a-1)(a^2+4a+4)=0$

$(a-1)(a+2)^2=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

접점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-2)=4\{x-(-2)\}\qquad \therefore\ y=4x+6$

$\therefore\ k=6$

(ii) $a=1$일 때,

접점의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{13}{4}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{13}{4}=4(x-1)\qquad \therefore\ y=4x-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ k=-\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에서 k의 최댓값은 6이다.

답 6

10

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+6+1=10$

점 B의 x좌표를 $a\ (a\neq-1)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$3a^2-6a+1=10,\ 3a^2-6a-9=0$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a\neq-1)$

이때 $f(3)=3^3-3^3+3+1=4$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

즉, 점 B에서의 접선의 방정식은

$y-4=10(x-3)\qquad \therefore\ y=10x-26$

따라서 점 B에서의 접선의 y절편은 -26이다.

답 -26

11

$f(x)=-x^3+4$라 하면

$f'(x)=-3x^2$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^3+4)$라 하면 접선의 기울기가 $f'(a)=-3a^2$이므로 접선의 방정식은

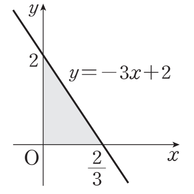
$y-(-a^3+4)=-3a^2(x-a)$

$\therefore\ y=-3a^2x+2a^3+4\qquad \cdots\cdots ㉠$

접선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=2a^3+4,\ a^3=-1\qquad \therefore\ a=-1\ (\because\ a$는 실수)

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=-3x+2$이고, 이 직선은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times2=\dfrac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

12

$f(x)=-x^3+3x^2-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t^2-2)$라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=-3t^2+6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+3t^2-2)=(-3t^2+6t)(x-t)$

$\therefore\ y=(-3t^2+6t)x+2t^3-3t^2-2\qquad \cdots\cdots ㉠$

접선 ㉠이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=2t^3-3t^2-2,$

$2t^3-3t^2+1=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$(t-1)(2t^2-t-1)=0$

$(2t+1)(t-1)^2=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=1$

이때 접선의 기울기가 양수인 경우는

$-3t^2+6t>0$에서 $3t(t-2)<0$

즉, $0<t<2$이어야 하므로 $t=1$

이것을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3x-3$이고, 이 직선이 점 $(a,\ -9)$를 지나므로

$-9=3a-3,\ 3a=-6\qquad \therefore\ a=-2$

답 -2

13

$f(x)=x^2-4x+1$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-4a+1)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(a)=2a-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-4a+1)=(2a-4)(x-a)$

$\therefore\ y=(2a-4)x-a^2+1$

이 접선이 점 $(-2,\ 11)$을 지나므로

$11=(2a-4)\times(-2)-a^2+1$

$\therefore\ a^2+4a+2=0$ ······㉠

두 접점의 x좌표를 각각 a_1, a_2라 하면 이차방정식 ㉠의 두 실근은 a_1, a_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=-4,\ a_1a_2=2$

이때 두 접선의 기울기는 각각 $2a_1-4$, $2a_2-4$이므로

$$\begin{aligned}m_1m_2&=(2a_1-4)(2a_2-4)\\&=4a_1a_2-8(a_1+a_2)+16\\&=4\times2-8\times(-4)+16\\&=56\end{aligned}$$

답 56

보충 설명

실수 a에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-2=2>0$

즉, 이차방정식 ㉠의 두 근은 서로 다른 실수이므로 서로 다른 두 접점이 존재한다. 따라서 기울기의 곱을 근과 계수의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

14

(1) $f(x)=x^3-ax^2$, $g(x)=3x^2+2bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2-2ax$, $g'(x)=6x+2b$

$f(4)=g(4)=0$에서

$f(4)=64-16a=0$ $\therefore\ a=4$ ······㉠

$g(4)=48+8b+c=0$ ······㉡

또한, $f'(4)=g'(4)$에서 $48-8a=24+2b$

$16=24+2b$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ b=-4$

이것을 ㉡에 대입하면 $c=-16$

$\therefore\ abc=4\times(-4)\times(-16)=256$

(2) $f(x)=-x^4+2x^3+1$, $g(x)=x^2+2ax+4$라 하면

$f'(x)=-4x^3+6x^2$, $g'(x)=2x+2a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$ $\therefore\ y=2x$

직선 $y=2x$가 곡선 $y=g(x)$의 접선이므로 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2at+4)$라 하면

$2=2t+2a=\frac{t^2+2at+2}{t-1}$ $\leftarrow f'(1)=g'(t)=\frac{g(t)-2}{t-1}$

$2=2t+2a$에서 $a=-t+1$ ······㉠

$\frac{t^2+2at+2}{t-1}=2$에 ㉠을 대입하면

$\frac{-t^2+2t+2}{t-1}=2$, $-t^2+2t+2=2t-2$

$t^2=4$ $\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-1$ ($\because$ ㉠)

답 (1) 256 (2) -1, 3

다른 풀이

(2) $f(x)=-x^4+2x^3+1$이라 하면 $f'(x)=-4x^3+6x^2$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$ $\therefore\ y=2x$ ······㉡

$g(x)=x^2+2ax+4$라 하면 $g'(x)=2x+2a$

접선 ㉡과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2at+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=2t+2a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2at+4)=(2t+2a)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t+2a)x-t^2+4$ ······㉢

두 직선 ㉡, ㉢이 일치하므로

$2t+2a=2$ ······㉣, $-t^2+4=0$ ······㉤

㉤에서 $t^2=4$이므로 $t=-2$ 또는 $t=2$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-1$ ($\because$ ㉣)

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.115~116

01 2	**02** -10	**03** $y=x$	**04** 1
05 -1	**06** $\frac{\sqrt{5}}{10}$	**07** -3	**08** 108
09 1	**10** 2	**11** $\frac{1}{3}<a<3$	
12 15			

01

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+7$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9$

$=-3(x-2)^2+3$

즉, 접선의 기울기는 $x=2$에서 최댓값 3을 갖는다. 이때

$f(2)=-8+24-18+7=5$

이므로 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=3(x-2)\qquad \therefore\ y=3x-1$

즉, $m=3,\ n=-1$이므로

$m+n=3+(-1)=2$

답 2

02

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x,\ g(x)=ax^2+bx$라 하면

$f'(x)=-x^2+\frac{1}{3}x+2,\ g'(x)=2ax+b$

두 곡선이 점 $(2,\ 2)$에서 만나므로

$g(2)=2$에서

$4a+2b=2\qquad \therefore\ 2a+b=1\qquad \cdots\cdots㉠$

또한, $x=2$에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로

$f'(2)g'(2)=-1$에서

$\left(-\frac{4}{3}\right)\times(4a+b)=-1\qquad \therefore\ 4a+b=\frac{3}{4}\qquad \cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{8},\ b=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{\frac{5}{4}}{-\frac{1}{8}}=-10$

답 -10

03

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=-2x+3$이므로

$f'(1)=-2$

또한, 점 $(1,\ f(1))$은 접선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로

$f(1)=1$

$\therefore\ f'(1)=-2,\ f(1)=1\qquad \cdots\cdots㉠$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-2$이므로

$g'(1)=3$

또한, 점 $(1,\ g(1))$은 접선 $y=3x-2$ 위에 있으므로

$g(1)=1$

$\therefore\ g'(1)=3,\ g(1)=1\qquad \cdots\cdots㉡$

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1)g(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=(-2)\times1+1\times3\ (\because\ ㉠,\ ㉡)$

$=1$

따라서 점 $(1,\ f(1)g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(1)g(1)=x-1$

$y-1=x-1\ (\because\ ㉠,\ ㉡)\qquad \therefore\ y=x$

답 $y=x$

04

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

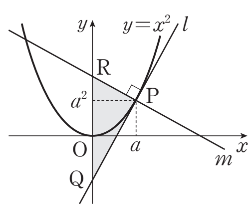
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)\qquad \therefore\ y=2ax-a^2$

이때 직선 m은 점 P를 지나고 직선 l에 수직이므로 직선 m의 방정식은

$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$

다음 그림과 같이 두 직선 $l,\ m$이 y축과 만나는 점을 각각 Q, R이라 하면



$\mathrm{Q}(0,\ -a^2),\ \mathrm{R}\left(0,\ a^2+\frac{1}{2}\right)$

이때 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형, 즉 △PQR의 넓이가 $\frac{5}{4}$이므로

$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times a\times\left\{a^2+\frac{1}{2}-(-a^2)\right\}=\frac{5}{4}$ ($\because$ $a>0$)

$a^3+\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$

$4a^3+a-5=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & 1 & -5 \\ & & 4 & 4 & 5 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$(a-1)(4a^2+4a+5)=0$

$\therefore$ $a=1$ ($\because$ $\underbrace{4a^2+4a+5}_{=(2a+1)^2+4}>0$)

답 1

05

조건 (가)의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g(3)=10f(3)+9$ ······㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g'(3)=6f(3)+10f'(3)$ ······㉡

한편, 조건 (나)에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(3)-g(3)=0$

$\therefore$ $f(3)=g(3)$ ······㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $f(3)=g(3)=-1$

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)+g(3)-g(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim\limits_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)=2$ ······㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $f'(3)=\frac{4}{9}$, $g'(3)=-\frac{14}{9}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{14}{9}(x-3)$ ($\because$ $g(3)=-1$)

$\therefore$ $y=-\frac{14}{9}x+\frac{11}{3}$

즉, $a=-\frac{14}{9}$, $b=\frac{11}{3}$이므로

$3a+b=3\times\left(-\frac{14}{9}\right)+\frac{11}{3}=-\frac{14}{3}+\frac{11}{3}=-1$

답 -1

보충 설명

치환을 이용하여 다음과 같이 풀 수도 있다.

조건 (나)에서 $x\longrightarrow3$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(3)-g(3)=0$

이때 $f(x)-g(x)=h(x)$로 놓으면

$h(3)=f(3)-g(3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=h'(3)=2$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$f'(3)-g'(3)=2$

06

$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+8x-1$에서 $f'(x)=3x^2-9x+8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-9a+8$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(a+1,\ f(a+1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a+1)=3(a+1)^2-9(a+1)+8$

$=3a^2-3a+2$ ······㉡

두 점 P, Q에서의 두 접선이 서로 평행하므로

$f'(a)=f'(a+1)$에서 $3a^2-9a+8=3a^2-3a+2$

$6a-6=0$ $\therefore$ $a=1$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하면 $f'(1)=f'(2)=2$

$f(1)=1-\frac{9}{2}+8-1=\frac{7}{2}$, $f(2)=8-18+16-1=5$

이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$, $(2,\ 5)$이다.

이때 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{7}{2}=2(x-1)$ $\therefore$ $2x-y+\frac{3}{2}=0$

따라서 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l과 점 $\mathrm{Q}(2,\ 5)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|2\times2-5+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{10}$

보충 설명

평행한 두 직선 사이의 거리 | 평행한 두 직선

$$l: ax+by+c=0,\ m: ax+by+c'=0\ (c\neq c')$$

사이의 거리는 직선 l 위의 한 점 P와 직선 m 사이의 거리와 같다.

직선 l 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에 대하여 $ax_1+by_1=-c$이므로 점 P와 직선 m 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

07

$f(x)=x^3-6x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6$

$x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=3\times2^2-6=12-6=6$

기울기가 6인 접선의 접점 중 x좌표가 2가 아닌 점을 $\mathrm{P}(t,\ t^3-6t+2)\ (t\neq2)$라 하면 $f'(t)=6$에서

$3t^2-6=6,\ 3t^2=12$

$t^2=4\qquad\therefore\ t=-2\ (\because\ t\neq2)$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 6)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

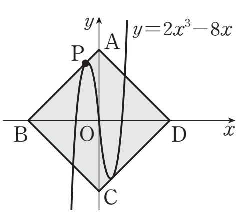
$y-6=6\{x-(-2)\}\qquad\therefore\ y=6x+18$

즉, 이 직선의 x절편은 -3이다.

답 -3

08

$f(x)=2x^3-8x$라 하면 $f'(x)=6x^2-8$



선분 AB와 곡선 $y=f(x)$의 접점을 $\mathrm{P}(t,\ 2t^3-8t)\ (t<0)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=6t^2-8$

이때 □ABCD는 정사각형이므로 직선 AB, 직선 CD의 기울기는 1이다.

즉, $6t^2-8=1$에서

$6t^2=9\qquad\therefore\ t=-\frac{\sqrt{6}}{2}\ (\because\ t<0)$

(가)

따라서 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)$이므로 점 P에서의 접선, 즉 직선 AB의 방정식은

$y-\frac{5\sqrt{6}}{2}=x-\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\qquad\therefore\ y=x+3\sqrt{6}$

(나)

점 A는 직선 AB와 y축의 교점이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 3\sqrt{6})$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times(2\times3\sqrt{6})^2$$
$$=108$$

(다)

답 108

단계	채점 기준	배점
(가)	접선의 기울기를 이용하여 접점의 x좌표를 구한 경우	40 %
(나)	정사각형 ABCD의 한 변을 포함하는 직선의 방정식을 구한 경우	40 %
(다)	정사각형 ABCD의 넓이를 구한 경우	20 %

09

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-ax+b$에서 $f'(x)=x^2-2x-a$

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(1)=1-2-a=2\qquad\therefore\ a=-3$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+b,\ f'(x)=x^2-2x+3$

즉, $f(1)=\frac{1}{3}-1+3+b=b+\frac{7}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(b+\frac{7}{3}\right)=2(x-1)\qquad\therefore\ y=2x+b+\frac{1}{3}$

이 접선이 점 $\left(0,\ \frac{13}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{13}{3}=b+\frac{1}{3}\qquad \therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=-3+4=1$

답 1

10

$f(x)=3x^3$이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 3t^3)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=9t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)\qquad \therefore\ y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3\qquad \therefore\ a=\frac{2}{3}t\qquad$ ……㉠

이때 $a=\frac{2}{3}t>0$이므로 $t>0$

한편, 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(s,\ 3s^3)$이라 하면 접선의 기울기가 $f'(s)=9s^2$이므로 접선의 방정식은

$y-3s^3=9s^2(x-s)\qquad \therefore\ y=9s^2x-6s^3$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=-6s^3\qquad$ ……㉡

이때 $a=-6s^3>0$이므로 $s<0$

두 접선이 서로 평행하므로

$9t^2=9s^2,\ t^2=s^2$

$\therefore\ t=-s\ (\because\ t>0,\ s<0)\qquad$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\frac{2}{3}t=6t^3$이므로

$2t=18t^3,\ 9t^3-t=0$

$t(3t+1)(3t-1)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ t>0)$

㉠에서 $a=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이므로

$9a=9\times\frac{2}{9}=2$

답 2

다른 풀이

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자.

점 P의 좌표를 $(t,\ 3t^3)$이라 하면 곡선 $y=3x^3$은 원점에 대하여 대칭이고, 접선의 기울기가 같은 두 접점도 원점에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $(-t,\ -3t^3)$이다.

$f(x)=3x^3$이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ 3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)\qquad \therefore\ y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3\qquad$ ……㉣

점 $\mathrm{Q}(-t,\ -3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3t^3)=9t^2\{x-(-t)\}\qquad \therefore\ y=9t^2x+6t^3$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=6t^3\qquad$ ……㉤

㉣에 ㉤을 대입하면

$9t^2\times 6t^3-6t^3=0$

$6t^3(3t+1)(3t-1)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0,\ t>0)$

이것을 ㉤에 대입하면 $a=6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

$\therefore\ 9a=9\times\frac{2}{9}=2$

11

$f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

점 $(a,\ 5)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+5)$라 하면 접선의 기울기가 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+5)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+5$

이 직선이 점 $(a,\ 5)$를 지나므로

$5=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+5$

$2t^3-3(a+1)t^2+6at=0$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $2t^2-3(a+1)t+6a=0\qquad$ ……㉠

이때 접선이 오직 하나만 존재하려면 이차방정식 ㉠은 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) ㉠이 $t=0$을 중근으로 가질 때,

$-3(a+1)=0,\ 6a=0$ ← ㉠이 $2t^2=0$이어야 한다.

그런데 위의 두 조건을 모두 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠이 실근을 갖지 않을 때,

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=9(a+1)^2-48a<0$

$9a^2-30a+9<0,\ 3a^2-10a+3<0$

$(3a-1)(a-3)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<a<3$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3}<a<3$

답 $\frac{1}{3}<a<3$

12

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+a$

$g(x)=-2x^3+3x-2$에서 $g'(x)=-6x^2+3$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 모두 점 P를 지나므로

$f(-1)=g(-1)$에서

$1-a+b=-3\qquad \therefore\ a-b=4\qquad$ ……㉠

점 P에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$에서

$-2+a=-3\qquad \therefore\ a=-1,\ b=-5$ (∵ ㉠)

$\therefore\ f(x)=x^2-x-5$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$x^2-x-5=-2x^3+3x-2$에서

$2x^3+x^2-4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -4 & -3 \\ & & -2 & 1 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+1)(2x^2-x-3)=0$

$(x+1)^2(2x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

점 P의 x좌표가 -1이므로 점 Q의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 $k=\frac{3}{2}$이므로

$10k=10\times\frac{3}{2}=15$

답 15

2 평균값 정리

기본+필수연습 본문 pp.120~123

15 $\frac{5}{3}$	**16** $\frac{1}{2}$	**17** $\frac{16}{3}$	**18** 16
19 0	**20** 0	**21** 2	**22** 4
23 8	**24** $\frac{7}{3}$		

15

함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$은 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하며

$f(-1)=f(3)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2x-5$이므로

$f'(c)=3c^2-2c-5=0$에서

$(c+1)(3c-5)=0$

$\therefore\ c=\frac{5}{3}$ (∵ $-1<c<3$)

답 $\frac{5}{3}$

16

함수 $f(x)=4x^2-x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$인 실수 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=8x-1$이므로 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$에서

$\frac{4-1}{1-0}=8c-1,\ 8c=4$

$\therefore\ c=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

17

함수 $f(x)=-2x^3+kx^2+3$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(0)=f(2)$이어야 하므로

$3=-16+4k+3,\ 4k=16 \qquad \therefore\ k=4$

따라서 함수 $f(x)=-2x^3+4x^2+3$은 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-6x^2+8x$이므로

$f'(c)=-6c^2+8c=0$

$-2c(3c-4)=0 \qquad \therefore\ c=\frac{4}{3}\ (\because\ 0<c<2)$

$\therefore\ k+c=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

답 $\frac{16}{3}$

18

함수 $f(x)=(x+2)(x-3)^2$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$(-a+2)(-a-3)^2=(a+2)(a-3)^2$

$-a^3-4a^2+3a+18=a^3-4a^2-3a+18$

$2a^3-6a=0,\ 2a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

즉, 함수 $f(x)$는 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

이때

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x-3)^2+2(x+2)(x-3) \\ &=(x-3)(3x+1) \end{aligned}$$

이므로

$f'(c)=(c-3)(3c+1)=0$

$\therefore\ c=-\frac{1}{3}\ (\because\ -\sqrt{3}<c<\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(3c)&=f(-1) \\ &=(-1+2)\times(-1-3)^2 \\ &=16 \end{aligned}$$

답 16

19

함수 $f(x)=ax^3+bx\ (a\neq0)$에서 $f(1)=3,\ f(2)=0$

이므로

$a+b=3,\ 8a+2b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=4$

$\therefore\ f(x)=-x^3+4x$

함수 $f(x)=-x^3+4x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+4$에서 $f'(c)=-3c^2+4=0$

$c^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \left(\because\ 0<c<2\right)$

따라서 $ab+\sqrt{3}c=(-1)\times4+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=-2$이므로

$$\begin{aligned} f(ab+\sqrt{3}c)&=f(-2) \\ &=-(-2)^3+4\times(-2)=0 \end{aligned}$$

답 0

20

함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{16-(-4)}{5}=\frac{20}{5}=4$

인 실수 c가 열린구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다. 이때

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x+1)(x-2)+(x+1)^2 \\ &=3x^2-3 \end{aligned}$$

이므로 $f'(c)=3c^2-3=4$에서

$3c^2=7,\ c^2=\frac{7}{3} \qquad \therefore\ c=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$

이때 $-2<-\frac{\sqrt{21}}{3}<-1,\ 1<\frac{\sqrt{21}}{3}<2$이므로 구하는 실수 c의 값은 $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$이다.

따라서 모든 실수 c의 값의 합은 0이다.

답 0

21

$g(x)=(x^2-4x-5)f(x)$에서 두 함수 $y=x^2-4x-5$, $y=f(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 닫힌구간 $[1, 5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(1, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $g(1)=(1-4-5)\times f(1)=-8$,

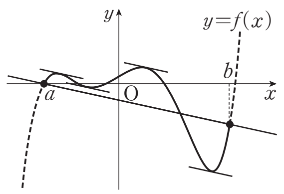
$g(5)=(25-20-5)\times f(5)=0$이므로

$g'(c)=\dfrac{g(5)-g(1)}{5-1}=\dfrac{8}{4}=2$

답 2

22

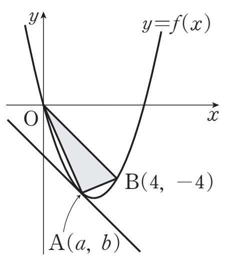
닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c의 개수는 다음 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 실수 c의 개수는 4이다.



답 4

23

$f(x)=x^2-5x$라 하면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, b)$에서의 접선이 선분 OB와 평행할 때, 선분 OB와 점 A 사이의 거리가 최대이므로 △OAB의 넓이도 최대가 된다.



즉, 점 $A(a, b)$에서의 접선의 기울기는 직선 OB의 기울기와 같아야 한다.

$f'(x)=2x-5$이므로 점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-5$

이때 직선 OB의 기울기는 $\dfrac{-4-0}{4-0}=-1$이므로

$2a-5=-1$에서 $a=2$

따라서 $b=f(2)=2^2-5\times2=-6$이므로

$a-b=2-(-6)=8$

답 8

다른 풀이

$f(x)=x^2-5x$라 할 때, △OAB의 넓이가 최대이려면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, b)$에서의 접선의 기울기가 직선 OB의 기울기와 같아야 한다.

이때 평균값 정리의 활용에 의하여 점 A의 x좌표는 선분 OB의 중점의 x좌표와 같으므로

$a=\dfrac{0+4}{2}=2$

따라서 $b=f(2)=2^2-5\times2=-6$이므로

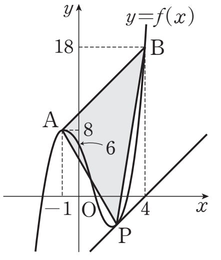
$a-b=2-(-6)=8$

보충 설명

이 문제는 **THE 개념** 블랙라벨 공통수학 1의 p.153 2번 문항과 동일한 문항으로, 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계, 이차방정식의 판별식을 이용하여 풀 수도 있지만 도함수를 이용하면 이처럼 조금 더 간단하게 풀 수 있다.

24

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 하면 다음 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, a^3-2a^2-5a+6)$에서의 접선이 선분 AB와 평행할 때, 선분 AB와 점 P 사이의 거리가 최대이므로 △ABP의 넓이도 최대가 된다.



즉, 점 P에서의 접선의 기울기는 직선 AB의 기울기와 같아야 한다.

$f'(x)=3x^2-4x-5$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-4a-5$

이때 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{18-8}{4-(-1)}=\dfrac{10}{5}=2$이므로

$3a^2-4a-5=2$에서

$3a^2-4a-7=0$, $(a+1)(3a-7)=0$

$\therefore a=\dfrac{7}{3}$ ($\because -1<a<4$)

답 $\dfrac{7}{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.124

13 10 **14** ③ **15** 6 **16** 37

17 $y=-x+\frac{7}{4}$

13

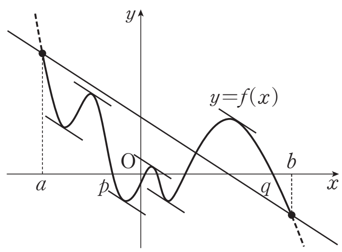
$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c_1)$에서

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c_1)$ ($\because$ $a\neq b$)

곡선 $y=f(x)$에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c_1)$을 만족시키는 c_1의 개수는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같다.

즉, 다음 그림과 같이 상수 c_1의 개수는 6이다.

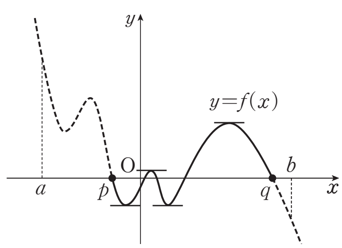
$\therefore$ $m=6$



또한, $f'(c_2)=0$을 만족시키는 c_2의 개수는 x축과 평행한 접선의 개수와 같다.

즉, 다음 그림과 같이 상수 c_2의 개수는 4이다.

$\therefore$ $n=4$



$\therefore$ $m+n=6+4=10$

답 10

14

$f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

ㄱ. $f(1)=f(2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$인 실수 x가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{3-(-2)}{2}=\frac{5}{2}$이므로

평균값 정리에 의하여 $f'(x)=\frac{5}{2}$인 실수 x가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 열린구간 $(-1, 1)$은 열린구간 $(-1, 2)$에 포함되므로 $f'(x)=\frac{5}{2}$인 실수 x가 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x)-4x$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

$g(-1)=f(-1)+4=2$,

$g(1)=f(1)-4=-1$,

$g(2)=f(2)-8=-5$

즉, $g(-1)>g(1)>g(2)$이므로 $g'(x)=0$인 실수 x가 열린구간 $(-1, 2)$에 존재하지 않을 수도 있다. (거짓)

(반례) $g(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{7}{6}x+\frac{2}{3}$

$g'(x)=-x^2-\frac{1}{3}x-\frac{7}{6}<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-2$ ($\because$ $f(1)=2$)

인 실수 c가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에서 $|f'(c)|\leq 4$이므로

$|f(2)-2|\leq 4$, $-4\leq f(2)-2\leq 4$

$\therefore$ $-2\leq f(2)\leq 6$

따라서 $f(2)$의 최댓값은 6이다.

답 6

16

함수 $f(x)=x^3-5x^2+4x+3$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ ……㉠

인 실수 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $f'(x)=3x^2-10x+4$이므로 ㉠에서

$$\frac{-3-3}{3-0}=3c^2-10c+4$$

$$3c^2-10c+6=0 \qquad \therefore\ c=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$$

이때 $0<\frac{5-\sqrt{7}}{3}<1,\ 2<\frac{5+\sqrt{7}}{3}<3$이므로

$$M=\frac{5+\sqrt{7}}{3},\ m=\frac{5-\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore\ (M-m)^2=\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}-\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2$$

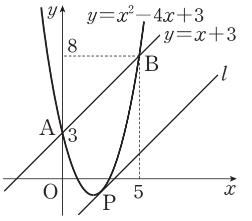
$$=\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$$

따라서 $p=9,\ q=28$이므로
$p+q=9+28=37$

답 37

다른 풀이

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$의 교점의 x좌표는
$x^2-4x+3=x+3$에서
$x^2-5x=0,\ x(x-5)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$



오른쪽 그림과 같이 곡선과 직선의 두 교점을 각각 $\mathrm{A}(0,\ 3)$, $\mathrm{B}(5,\ 8)$이라 하면 곡선 $y=x^2-4x+3$ 위의 점 P에서의 접선 l이 직선 $y=x+3$과 평행하므로 평균값 정리의 활용에 의하여 점 P의 x좌표는 선분 AB의 중점의 x좌표, 즉 $\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}$와 같다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$이므로 점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad \therefore\ y=-x+\frac{7}{4}$$

17

$f(x)=x^2-4x+3$이라 하면 $f'(x)=2x-4$
점 P의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 이 점에서의 접선 l의 기울기는
$f'(t)=2t-4$
한편, 점 P에서의 접선 l과 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$이 서로 평행하므로

$$2t-4=1 \qquad \therefore\ t=\frac{5}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$이다.
이때 접선 l에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로
점 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore\ y=-x+\frac{7}{4}$$

답 $y=-x+\frac{7}{4}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.125

1 2 **2** $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$
3 $-6<m<-\frac{1}{4}$ **4** $\sqrt{5}-1$ **5** 64
6 12

1

$f(x)=4x^2+k$에서 $f'(x)=8x$
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점을 각각 $\mathrm{P}(t,\ 4t^2+k)$, $\mathrm{Q}(s,\ 4s^2+k)$ $(t\neq s)$라 하자.
점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=8t$
점 Q에서의 접선의 기울기는 $f'(s)=8s$
이때 두 접선이 서로 수직이므로 $8t\times 8s=-1$

$$64ts=-1 \qquad \therefore\ ts=-\frac{1}{64} \qquad \cdots\cdots㉠$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(4t^2+k)=8t(x-t)$

$\therefore\ y=8tx-4t^2+k$ ……㉡

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-(4s^2+k)=8s(x-s)$

$\therefore\ y=8sx-4s^2+k$

두 직선의 교점의 x좌표는

$8tx-4t^2+k=8sx-4s^2+k$에서

$8x(t-s)-4(t^2-s^2)=0$

$4(t-s)\{2x-(t+s)\}=0$

$\therefore\ x=\dfrac{t+s}{2}$ ($\because$ $t\neq s$)

이것을 ㉡에 대입하면 교점의 y좌표는

$y=8t\times\dfrac{t+s}{2}-4t^2+k$

$\quad=4ts+k$

$\quad=-\dfrac{1}{16}+k$ ($\because$ ㉠)

이때 두 직선의 교점 $\left(\dfrac{t+s}{2},\ -\dfrac{1}{16}+k\right)$가 x축 위에 있으므로

$-\dfrac{1}{16}+k=0\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ 32k=32\times\dfrac{1}{16}=2$

답 2

2

$f(x)=x(x+1)(ax+1)$에서 $f(x)$는 삼차함수이므로

$a\neq0$

$f'(x)=(x+1)(ax+1)+x(ax+1)+ax(x+1)$

$\qquad=3ax^2+2(a+1)x+1$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(-1)=3a-2a-2+1=a-1$

이때 접선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선을 m이라 하면 직선 m의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a-1}(x+1)$ (단, $a\neq0$, $a\neq1$)

$a=1$이면 직선 m은 y축과 평행하므로 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만날 수 없다.

직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x(x+1)(ax+1)=-\dfrac{1}{a-1}(x+1)$, 즉

$(x+1)\left\{x(ax+1)+\dfrac{1}{a-1}\right\}=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때 $x=-1$이 이 방정식의 한 실근이므로 이차방정식

$x(ax+1)+\dfrac{1}{a-1}=0$, 즉

$\underbrace{(a^2-a)x^2+(a-1)x+1=0}_{(*)}$ $(a\neq0,\ a\neq1)$ ……㉠

이 $x\neq-1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(a^2-a)>0$

$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}<a<1$

이때 $a\neq0$이므로 실수 a의 값의 범위는

$-\dfrac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

답 $-\dfrac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

보충 설명

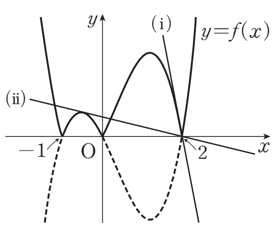
$(*)$에서 $g(x)=(a^2-a)x^2+(a-1)x+1$이라 하면

$g(-1)=(a^2-a)-(a-1)+1$

$\qquad=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$

즉, $g(-1)\geq1$이므로 방정식 $g(x)=0$은 $x=-1$을 해로 갖지 않는다.

3



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $m<0$이고, 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 두 직선 (i), (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 곡선 $y=-x(x+1)(x-2)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서 접할 때,

$h(x)=-x(x+1)(x-2)=-x^3+x^2+2x$라 하면

$h'(x)=-3x^2+2x+2$

$\therefore\ h'(2)=-12+4+2=-6$

$\therefore\ m=-6$

(ii) 함수 $y=g(x)$의 그래프가 곡선 $y=x(x+1)(x-2)$ 위의 $-1<x<0$인 어떤 점에서 접할 때, 접점의 x좌표는 방정식 $x(x+1)(x-2)=g(x)$의 중근이므로

$x(x+1)(x-2)=m(x-2)$에서

$x(x+1)(x-2)-m(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+x-m)=0$

이때 이차방정식 $x^2+x-m=0$이 $-1<x<0$인 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-m)=0$

$1+4m=0\qquad \therefore\ m=-\frac{1}{4}$ (*)

(i), (ii)에서 실수 m의 값의 범위는 $-6<m<-\frac{1}{4}$

답 $-6<m<-\frac{1}{4}$

보충 설명

(*)와 같이 $m=-\frac{1}{4}$이면 이차방정식 $x^2+x-m=0$, 즉

$x^2+x+\frac{1}{4}=0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0\qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2}$ (중근)

즉, $-1<x<0$인 중근을 갖는다는 조건을 만족시킨다.

4

$f(x)=x^2+2$라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t)$

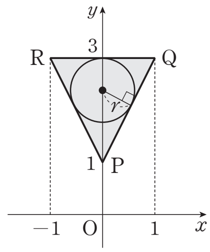
$\therefore\ y=2tx-t^2+2$

이 접선이 점 P$(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-t^2+2,\ t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

즉, 두 접점 Q, R의 좌표는 각각 $(1,\ 3)$, $(-1,\ 3)$이므로 △PQR은 오른쪽 그림과 같다.



이때 △PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$ ······㉠

△PQR의 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면 △PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\times(\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PQ})=\frac{r}{2}\times(2+\sqrt{5}+\sqrt{5})$

$=(1+\sqrt{5})r$ ······㉡

㉠=㉡에서 $(1+\sqrt{5})r=2$이므로

$r=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

따라서 내접원의 지름의 길이는

$2r=\sqrt{5}-1$

답 $\sqrt{5}-1$

보충 설명

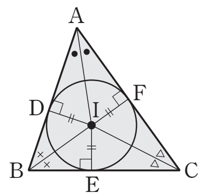
삼각형의 내접원과 넓이 |

삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC$

$+\triangle ICA$

$=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$



5

$f(x)=(x-1)^2$, $g(x)=-x^2+6x-15$라 하면

$f'(x)=2(x-1)$, $g'(x)=-2x+6$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 공통인 접선의 접점의 좌표를 각각 $(t,\ (t-1)^2)$, $(s,\ -s^2+6s-15)$ $(t\neq s)$라 하자.

두 곡선의 접점이 서로 다르다.

$f'(t)=g'(s)$이므로

$2(t-1)=-2s+6\qquad \therefore\ s=4-t$ ······㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ (t-1)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t-1)^2=2(t-1)(x-t)$

$\therefore\ y=2(t-1)x-t^2+1$

이 직선이 점 $(s,\ -s^2+6s-15)$를 지나므로

$$-s^2+6s-15=2(t-1)s-t^2+1$$
$$-s^2+6s-15=2ts-2s-t^2+1$$
$$t^2-s^2-2ts+8s-16=0$$
$$(t+s)(t-s)-2s(t-4)-16=0$$
$$4(2t-4)+2(t-4)^2-16=0\ (\because ㉠)$$
$$2t^2-8t=0,\ 2t(t-4)=0$$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=4$

$\therefore \begin{cases} t=0 \\ s=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} t=4 \\ s=0 \end{cases}$ $(\because ㉡)$

(i) $t=0,\ s=4$일 때,
$f(0)=1,\ g(4)=-7$이므로 두 접점의 좌표는
$\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{C}(4,\ -7)$

(ii) $t=4,\ s=0$일 때,
$f(4)=9,\ g(0)=-15$이므로 두 접점의 좌표는
$\mathrm{D}(4,\ 9),\ \mathrm{B}(0,\ -15)$

(i), (ii)에서 □ABCD는 평행사변형이므로 구하는 넓이는
$4\times16=64$

답 64

6

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 닫힌 구간 $[x-1,\ x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1,\ x+2)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$$

인 실수 c가 열린구간 $(x-1,\ x+2)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $x\longrightarrow\infty$이면 $c\longrightarrow\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}$$
$$=3\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}$$
$$=3\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=3\lim_{x\to\infty}f'(x)$$
$$=3\times4=12$$

답 12

05. 도함수의 활용(2)

1 함수의 증가와 감소

기본 + 필수연습 본문 pp.130~133

01 (1) 증가 (2) 감소
02 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가,
구간 $(-\infty,\ -1],\ [1,\ \infty)$에서 감소
03 (1) 구간 $(-\infty,\ -1],\ [2,\ \infty)$에서 증가,
구간 $[-1,\ 2]$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{3}],\ [0,\ \sqrt{3}]$에서 증가,
구간 $[-\sqrt{3},\ 0],\ [\sqrt{3},\ \infty)$에서 감소
04 $\frac{1}{2}$ **05** 10 **06** $-\frac{4}{3}$ **07** 12
08 $a\le-\frac{15}{2}$ **09** -24 **10** $-\sqrt{2}$

01

(1) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$$
$$=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$
$$=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<0$$

$\therefore\ f(x_1)<f(x_2)$
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가한다.

(2) $x_1<x_2\le-2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1{}^2+4x_1)-(x_2{}^2+4x_2)$$
$$=(x_1{}^2-x_2{}^2)+4(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\underbrace{(x_1+x_2+4)}_{x_1+2<0,\ x_2+2\le0\text{에서 } x_1+x_2+4<0}>0$$

$\therefore\ f(x_1)>f(x_2)$
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -2]$에서 감소한다.

답 (1) 증가 (2) 감소

02

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-1,\ 1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가하고,
구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 감소한다.

답 구간 $[-1,\ 1]$에서 증가,
구간 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ \infty)$에서 감소

03

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$에서
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-12	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[2,\ \infty)$에서 증가하고, 구간 $[-1,\ 2]$에서 감소한다.

(2) $f(x)=-x^4+6x^2+1$에서
$f'(x)=-4x^3+12x=-4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	10	$\searrow$	1	$\nearrow$	10	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{3}]$, $[0,\ \sqrt{3}]$에서 증가하고, 구간 $[-\sqrt{3},\ 0]$, $[\sqrt{3},\ \infty)$에서 감소한다.

답 (1) 구간 $(-\infty,\ -1]$, $[2,\ \infty)$에서 증가,
구간 $[-1,\ 2]$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty,\ -\sqrt{3}]$, $[0,\ \sqrt{3}]$에서 증가,
구간 $[-\sqrt{3},\ 0]$, $[\sqrt{3},\ \infty)$에서 감소

04

$f(x)=4x^3-3x+1$에서
$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$에서 감소한다.

따라서 양수 k의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 $\dfrac{1}{2}$

05

$f(x)=-x^3+ax^2+(a^2-6a)x+2$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+a^2-6a$
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=a^2-(-3)\times(a^2-6a)=4a^2-18a\le 0$

$2a(2a-9)\le 0 \qquad \therefore\ 0\le a\le \dfrac{9}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이므로 그 합은
$0+1+2+3+4=10$

답 10

06

$f(x)=x^3+3x^2+24|x-3a|+5$에서
(i) $x-3a\ge 0$, 즉 $x\ge 3a$일 때,
$f(x)=x^3+3x^2+24(x-3a)+5$에서
$f'(x)=3x^2+6x+24$
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=9-3\times 24=-63<0$

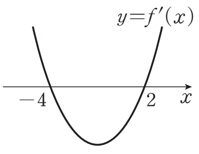
$x \geq 3a$에서 $f'(x)>0$이므로 a의 값에 관계없이 항상 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x-3a<0$, 즉 $x<3a$일 때,

$f(x)=x^3+3x^2-24(x-3a)+5$에서

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x<3a$에서 함수 $f(x)$가 증가하려면 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$3a \leq -4 \qquad \therefore a \leq -\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a \leq -\frac{4}{3}$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

07

함수 $f(x)$가 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 항상 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

$f(x)=ax^3+bx^2+2x+4$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+2$

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-6a\leq 0$

$\therefore b^2 \leq 6a \qquad \cdots\cdots ㉠$

한편, $-3<a<3$이고 $f(x)$는 삼차함수이므로 $a\neq 0$

$\therefore -3<a<0$ 또는 $0<a<3 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$

의 12개이다.

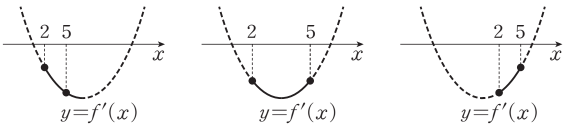
$a=-2$ 또는 $a=-1$일 때, 정수 b는 존재하지 않는다.
$a=1$일 때, $b=0, \pm 1, \pm 2$
$a=2$일 때, $b=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

답 12

08

$f(x)=x^3+ax^2+5$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2, 5]$에서 감소하려면 다음 그림과 같이 $2<x<5$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.



$\therefore f'(2)\leq 0$, $f'(5)\leq 0$

$f'(2)\leq 0$에서

$3\times 2^2+2a\times 2\leq 0$, $4a+12\leq 0$

$\therefore a\leq -3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(5)\leq 0$에서

$3\times 5^2+2a\times 5\leq 0$, $10a+75\leq 0$

$\therefore a\leq -\frac{15}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $a\leq -\frac{15}{2}$

답 $a\leq -\frac{15}{2}$

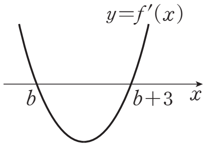
09

$f(x)=2x^3-3x^2+ax-4$에서

$f'(x)=6x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(b, b+3)$에서 감소하므로 $b<x<b+3$에서 $f'(x)\leq 0$이고, 두 열린구간 $(-\infty, b)$와 $(b+3, \infty)$에서 증가하므로 $x<b$, $x>b+3$에서 $f'(x)\geq 0$이다.

즉, 오른쪽 그림과 같이 $f'(b)=0$, $f'(b+3)=0$이므로 이차방정식 $f'(x)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여



$b+(b+3)=1$, $b(b+3)=\frac{a}{6}$

$\therefore b=-1$, $a=-12$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-4$이므로

$f(2)=16-12-24-4=-24$

답 -24

10

$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+2ax^2+(2-a^2)x$에서

$f'(x)=-2x^2+4ax+2-a^2$

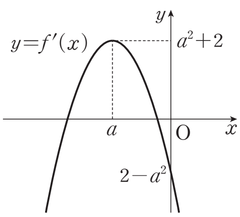
$\quad=-2(x^2-2ax+a^2-a^2)+2-a^2$

$\quad=-2(x-a)^2+a^2+2$

함수 $f(x)$가 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키면 열린구간 $(0, \infty)$에서 감소해야 하므로 $x\ge0$에서 $f'(x)\le0$이다.

(i) $a<0$일 때,

조건을 만족시키려면 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $f'(0)\le0$이어야 한다.

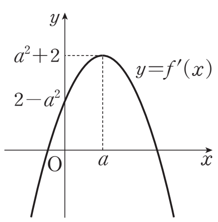


$f'(0)\le0$에서 $2-a^2\le0$, $a^2\ge2$

$\therefore\ a\le-\sqrt{2}\ (\because\ a<0)$

(ii) $a\ge0$일 때,

$f'(a)=a^2+2\ge2>0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii)에서 $a\le-\sqrt{2}$이므로 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다.

답 $-\sqrt{2}$

STEP 1 개념 마무리 본문 p.134

01 -1	**02** -24	**03** $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$	**04** 12
05 -5	**06** 5		

01

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x^2-9x$에서

$f'(x)=x^2-8x-9=(x+1)(x-9)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=9$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	9	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{14}{3}$	↘	-162	↗

즉, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[9, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-1, 9]$에서 감소하므로 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, a]$에서 증가하려면 $a\le-1$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 최댓값은 -1이다.

답 -1

02

$f(x)=-2x^3-ax^2+4ax+5$에서

$f'(x)=-6x^2-2ax+4a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2+24a\le0$

$a(a+24)\le0\qquad\therefore\ -24\le a\le0$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 최솟값은 -24이다.

답 -24

03

$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+2ax^2+(a+3)x+b$에서

$f'(x)=2x^2+4ax+(a+3)$

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-2(a+3)\le0$

$4a^2-2a-6\le 0$, $2(a+1)(2a-3)\le 0$

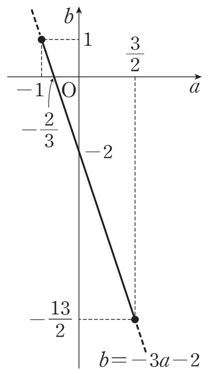
$\therefore\ -1\le a\le \frac{3}{2}$ ……㉠

조건 (나)에서

$f(1)=\frac{2}{3}+2a+a+3+b=\frac{5}{3}$

$\therefore\ b=-3a-2$ ……㉡

즉, ㉠, ㉡에서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 1)$, $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{13}{2}\right)$을 이은 선분이다.



따라서 구하는 도형의 길이는

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{13}{2}-1\right)^2}$

$=\frac{5\sqrt{10}}{2}$

답 $\frac{5\sqrt{10}}{2}$

04

조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b는 상수)이라 할 수 있으므로

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3b\le 0$ ……㉠

$g(x)=f'(x)-f'(1)$이라 하면

$g(x)=3x^2+2ax-3-2a$

조건 (다)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)-f'(1)\ge 0$, 즉 $g(x)\ge 0$이므로 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+3(3+2a)\le 0$

$a^2+6a+9\le 0$, $(a+3)^2\le 0$

$\therefore\ a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면

$9-3b\le 0$ $\quad\therefore\ b\ge 3$ ……㉡

즉, $f(x)=x^3-3x^2+bx+3$에서

$f(3)=27-27+3b+3=3b+3$

이때 ㉡에 의하여

$3b+3\ge 3\times 3+3=12$

따라서 $f(3)=3b+3$의 최솟값은 12이다.

답 12

05

$f(x)=x^4-8x^2$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(k,\ k+2)$에서 감소하므로 $\underbrace{k+2\le -2}_{(k,\ k+2)\subset(-\infty,\ -2)}$ 또는 $\underbrace{k=0}_{(k,\ k+2)\subset(0,\ 2)}$이다.

$\therefore\ k\le -4$ 또는 $k=0$ ……㉠

조건 (나)에서 $f'(k-1)f'(k+2)>0$이므로

$f'(k-1)>0$, $f'(k+2)>0$ 또는

$f'(k-1)<0$, $f'(k+2)<0$

(i) $f'(k-1)>0$, $f'(k+2)>0$일 때,

① $-2<k-1<0$이고 $k+2>2$이므로

$-1<k<1$, $k>0$

$\therefore\ 0<k<1$

② $k-1>2$이므로 $k>3$

①, ②에서 $0<k<1$ 또는 $k>3$

(ii) $f'(k-1)<0$, $f'(k+2)<0$일 때,

③ $k-1<-2$이고 $0<k+2<2$이므로

$k<-1$, $-2<k<0$

$\therefore\ -2<k<-1$

④ $k+2<-2$이므로 $k<-4$

③, ④에서 $-2<k<-1$ 또는 $k<-4$

(i), (ii)에서

$k<-4$ 또는 $-2<k<-1$ 또는 $0<k<1$ 또는 $k>3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $k<-4$이므로 정수 k의 최댓값은 -5이다.

답 -5

06

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(a+\frac{1}{2},\ a+\frac{3}{2}\right)$에서 증가하려면

$a+\frac{1}{2}<x<a+\frac{3}{2}$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$-4\leq a+\frac{1}{2}\leq -2$ 또는 $0\leq a+\frac{1}{2}\leq 3$ $\Longleftrightarrow$ $-3\leq a+\frac{3}{2}\leq -1$ 또는 $1\leq a+\frac{3}{2}\leq 4$

$\therefore\ -\frac{9}{2}\leq a\leq -\frac{5}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{5}{2}$

따라서 정수 a는 $-4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 5

보충 설명

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↗		↘		↗		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-4,\ -1)$, $(0,\ 4)$에서 증가하고, 구간 $(-1,\ 0)$, $(4,\ 6)$에서 감소한다.

2 함수의 극대와 극소

기본 + 필수연습 본문 pp.138~140

11 (1) 극댓값 : $\frac{26}{3}$, 극솟값 : -2

(2) 극댓값 : 7, 극솟값 : 5

12 -12 **13** 34 **14** 7 **15** 51

16 ㄹ

11

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-2$에서

$f'(x)=x^2+4x=x(x+4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{26}{3}$	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극댓값 $\frac{26}{3}$, $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.

(2) $f(x)=2x^4-4x^2+7$에서

$f'(x)=8x^3-8x$

$=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↗	7	↘	5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 7, $x=-1$과 $x=1$에서 극솟값 5를 갖는다.

답 (1) 극댓값 : $\frac{26}{3}$, 극솟값 : -2

(2) 극댓값 : 7, 극솟값 : 5

12

$f(x)=-2x^3+3x^2-ax+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6x-a$

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$

따라서 $-6\times(-1)^2+6\times(-1)-a=0$이므로

$-12-a=0$ $\quad\therefore\ a=-12$

답 -12

보충 설명

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

13

$f(x)=x^3+ax^2+bx+7$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 2를 가지므로

$f'(1)=0,\ f(1)=2$

$f'(1)=0$에서

$3+2a+b=0 \qquad \therefore\ 2a+b=-3 \qquad$ ……㉠

$f(1)=2$에서

$1+a+b+7=2 \qquad \therefore\ a+b=-6 \qquad$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-9$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-9x+7,$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	34	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 34를 갖는다.

답 34

14

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수, $a>0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad$ ……㉠

이때 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $x=0,\ x=2$이므로

$f'(x)=3ax(x-2)=3ax^2-6ax$

㉠에서 $2b=-6a,\ c=0$

$\therefore\ 3a+b=0 \qquad$ ……㉡

또한, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 9, $x=2$에서 극솟값 5를 가지므로

$f(0)=9$에서 $d=9$

$f(2)=5$에서 $8a+4b+2c+d=5$

$8a+4b+9=5$ ($\because\ c=0,\ d=9$)

$\therefore\ 2a+b=-1 \qquad$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+9$이므로

$f(1)=1-3+9=7$

답 7

15

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극값을 가지므로

$f'(-2)=0$에서 $12-4a+b=0$

$\therefore\ 4a-b=12 \qquad$ ……㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기가 -15이므로 $f'(3)=-15$에서

$27+6a+b=-15$

$\therefore\ 6a+b=-42 \qquad$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-24$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-24x+c$이므로 $f(1)=4$에서

$1-3-24+c=4 \qquad \therefore\ c=30$

$\therefore\ a-b+c=-3-(-24)+30=51$

답 51

16

$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $b,\ c,\ e$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗		↗	극대	↘

ㄱ. $b<x<c$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
$\therefore\ f(b)<f(c)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이므로 닫힌구간 $[a,\ f]$에서 극값을 1개 갖는다. (거짓)

ㄷ. $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄹ. $a<x<b$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
즉, $a<x_1<x_2<b$이면 $f(x_1)<f(x_2)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄹ뿐이다.

답 ㄹ

STEP 1 **개념 마무리** 본문 p.141

07 10	**08** 5	**09** 2	**10** -24
11 65	**12** -2	**13** ③	

07

$f(x)=2x^3-3ax^2+5a$에서
$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$
이때 함수 $f(x)$는 극솟값을 가지므로 $a\neq0$이다.
$a=0$이면 $f'(x)=6x^2$
즉, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.
(i) $a<0$일 때,
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$-a^3+5a$	↘	$5a$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로
$5a=a$ $\quad\therefore a=0$
이때 $a<0$이므로 모순이다.
(ii) $a>0$일 때,
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$5a$	↘	$-a^3+5a$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로
$-a^3+5a=a$, $a^3-4a=0$
$a(a+2)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2$ ($\because a>0$)
(i), (ii)에서 $f(x)=2x^3-6x^2+10$이고, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 구하는 극댓값은
$f(0)=10$

답 10

08

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서
$f'(x)=4x^3-4x^2-8x=4x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-\frac{5}{3}$	↗	a	↘	$a-\frac{32}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 각각 극솟값 $a-\frac{5}{3}$, $a-\frac{32}{3}$를 갖고 $x=0$에서 극댓값 a를 갖는다.
이때 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합이 $\frac{8}{3}$이므로
$\left(a-\frac{5}{3}\right)+\left(a-\frac{32}{3}\right)+a=\frac{8}{3}$
$3a-\frac{37}{3}=\frac{8}{3}$, $3a=15$
$\therefore a=5$

답 5

09

$f(x)=ax^3+3ax^2+7$에서
$f'(x)=3ax^2+6ax=3ax(x+2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$
$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4a+7$	↘	7	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $4a+7$, $x=0$에서 극솟값 7을 갖는다.
이때 극댓값과 극솟값의 차가 8이고, $a>0$이므로
$(4a+7)-7=8$, $4a=8$
$\therefore a=2$

답 2

10

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

점 $(0,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(0)=1 \quad \therefore\ d=1$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=c$이므로 접선의 방정식은

$y-1=c(x-0)$

$\therefore\ y=cx+1$

이 직선이 직선 $y=15x+1$과 일치하므로

$c=15$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 8을 가지므로

$f(1)=8,\ f'(1)=0$

$\therefore\ a+b+c+d=8,\ 3a+2b+c=0$

위의 식에 $c=15$, $d=1$을 대입하여 정리하면

$a+b=-8,\ 3a+2b=-15$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-9$

즉, $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$이므로

(가)

$f'(x)=3x^2-18x+15$

$\quad =3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

(나)

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극솟값을 가지므로 구하는 극솟값은

$f(5)=5^3-9\times5^2+15\times5+1=-24$

(다)

답 -24

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 완성한 경우	50%
(나)	함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타낸 경우	30%
(다)	함수 $f(x)$의 극솟값을 구한 경우	20%

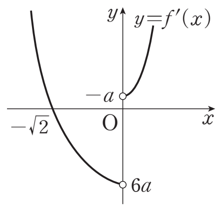
11

$f(x)=\begin{cases} a(6x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq0) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} a(6-3x^2) & (x<0) \\ 3x^2-a & (x>0) \end{cases}$

(i) $a<0$일 때,

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-\sqrt{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖는다.

$f(-\sqrt{2})=a(-6\sqrt{2}+2\sqrt{2})=-4\sqrt{2}a$이므로

$-4\sqrt{2}a=\sqrt{2}$

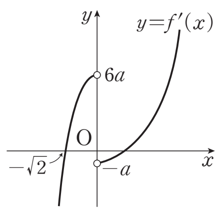
$\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

즉, $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}(6x-x^3) & (x<0) \\ x^3+\dfrac{1}{4}x & (x\geq0) \end{cases}$이므로

$f(4)=64+1=65$

(ii) $a>0$일 때,

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

그런데 $f(0)=0\neq\sqrt{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(4)$의 값은 65이다.

답 65

12

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 4이므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $x=-2$, $x=4$이다.

$\therefore\ f'(x)=3(x+2)(x-4)$

$\qquad\qquad =3x^2-6x-24$

㉠에서 $2a=-6$, $b=-24$이므로

$a=-3$, $b=-24$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2-24x-3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값이 c이므로 $f(-2)=c$에서

$c=(-2)^3-3\times(-2)^2-24\times(-2)-3$

$\ =25$

$\therefore\ a+b+c=-3+(-24)+25=-2$

답 -2

13

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$h'(x)=0$, 즉 $f'(x)=g'(x)$에서

$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	e	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 극소이다.

답 ③

보충 설명

(1) 부등식 $h'(x)>0$, 즉 $f'(x)>g'(x)$의 해는 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 함수 $y=g'(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$x<b$ 또는 $c<x<e$

(2) 부등식 $h'(x)<0$, 즉 $f'(x)<g'(x)$의 해는 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 함수 $y=g'(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$b<x<c$ 또는 $x>e$

3 함수의 그래프

기본 + 필수연습 본문 pp.147~154

17 풀이 참조 **18** 풀이 참조

19 최댓값 : 12, 최솟값 : $-\frac{3}{2}$

20 최댓값 : $\frac{17}{16}$, 최솟값 : -38

21 (1) $0<k\le\frac{15}{4}$ (2) $2<a<\frac{5}{2}$ **22** -4

23 12

24 $a<-\frac{4}{3}$ 또는 $-\frac{4}{3}<a<-1$ 또는 $a>0$

25 10 **26** 2 **27** 2 **28** 28

29 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ **30** 72 **31** 4 cm^3

32 $\frac{40}{3}\pi\ \text{cm}^3$

17

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x+2$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12$

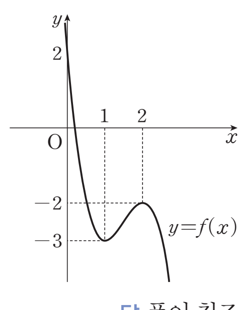
$\qquad =-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	-2	↘

또한, $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

18

$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x^3-8$에서

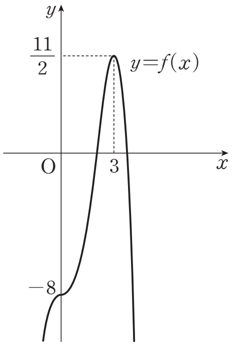
$f'(x)=-2x^3+6x^2=-2x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗	-8	↗	$\frac{11}{2}$	↘

또한, $f(0)=-8$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

19

$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+2$에서

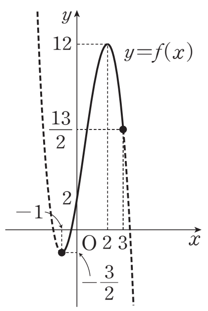
$f'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	↗	12	↘	$\frac{13}{2}$

또한, $f(0)=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 12, $x=-1$에서 최솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다.



답 최댓값 : 12, 최솟값 : $-\frac{3}{2}$

20

$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x-2$에서

$f'(x)=4x^3-6x^2-22x+12$

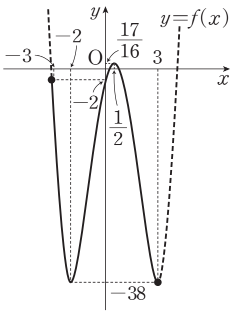
$\quad\quad=2(x+2)(2x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

구간 $[-3,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0
$f(x)$	-2	↘	-38	↗	$\frac{17}{16}$	↘	-38

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{17}{16}$, $x=-2$와 $x=3$에서 최솟값 -38을 갖는다.



답 최댓값 : $\frac{17}{16}$, 최솟값 : -38

21

(1) $f(x)=kx^3+kx^2+(5-k)x+2\ (k\neq0)$에서

$f'(x)=3kx^2+2kx+5-k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k(5-k)\leq0$

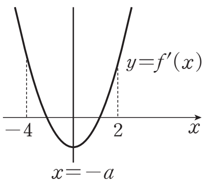
$4k^2-15k\leq0,\ k(4k-15)\leq0$

이때 $k\neq0$이므로 $0<k\leq\frac{15}{4}$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x-3$에서

$f'(x)=x^2+2ax+4$

$-4<x<2$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 모두 존재하려면 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 모두 -4와 2 사이에 존재해야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-4>0,\ (a+2)(a-2)>0$

$\therefore\ a<-2$ 또는 $a>2$

(ii) $f'(-4)>0$에서 $16-8a+4>0,\ 20-8a>0$

$\therefore\ a<\frac{5}{2}$

$f'(2)>0$에서 $4+4a+4>0,\ \ 8+4a>0$

$\therefore\ a>-2$

(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$-4<-a<2 \qquad \therefore\ -2<a<4$

(i), (ii), (iii)에서 $2<a<\frac{5}{2}$

답 (1) $0<k\le\frac{15}{4}$ (2) $2<a<\frac{5}{2}$

22

점 A에서의 접선의 방정식을 $y=-17x+k$ (k는 상수)라 하면 삼차방정식 $f(x)-(-17x+k)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x),\ y=-17x+k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=-5,\ x=2$는 모두 이 방정식의 근이다.

또한, $x=-5$인 점에서 두 함수 $y=f(x),\ y=-17x+k$의 그래프가 서로 접하므로

$f(x)-(-17x+k)=(x-2)(x+5)^2$

으로 나타낼 수 있다.

즉, $f(x)=(x-2)(x+5)^2-17x+k$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+5)^2+2(x-2)(x+5)-17\\&=3x^2+16x-12\\&=(x+6)(3x-2)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{2}{3}$에서 극솟값을 가지므로

$a=-6,\ b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ ab=(-6)\times\frac{2}{3}=-4$

답 -4

23

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=-1,\ x=b$는 모두 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근이다.

또한, $x=-1$인 점에서 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 서로 접하므로

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(x+1)^2(x-b)\\&=x^3+(2-b)x^2+(1-2b)x-b\end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다.

이때 $f(x)=x^3+ax$가 이차항을 갖지 않고, $g(x)$는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항을 갖지 않는다. 즉,

$y=g(x)$는 직선의 방정식이다.

$2-b=0 \qquad \therefore\ b=2$

점 B에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면 같은 방법으로

$$\begin{aligned}f(x)-h(x)&=(x-2)^2(x-c)\\&=x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c\end{aligned}$$

로 나타낼 수 있고 $f(x)-h(x)$도 이차항을 갖지 않으므로

$4+c=0 \qquad \therefore\ c=-4$

이때 $f(b)+f(c)=-80$이므로

$$\begin{aligned}f(2)+f(-4)&=8+2a+(-64-4a)\\&=-56-2a=-80\end{aligned}$$

$2a=24 \qquad \therefore\ a=12$

답 12

다른 풀이

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$

점 $\mathrm{A}(-1,\ -1-a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$이므로 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-(-1-a)=(3+a)(x+1)$

$\therefore\ y=(3+a)x+2$

이 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+ax=(3+a)x+2$에서

$x^3-3x-2=0,\ (x+1)^2(x-2)=0$

-1	1	0	-3	-2
		-1	1	2
	1	-1	-2	0

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$

한편, 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12+a$이므로

점 B에서의 접선의 방정식은

$y-(8+2a)=(12+a)(x-2)$

$\therefore\ y=(12+a)x-16$

이 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+ax=(12+a)x-16$에서

$x^3-12x+16=0,\ (x-2)^2(x+4)=0$

2	1	0	-12	16
		2	4	-16
	1	2	-8	0

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 점 C의 좌표는 $(-4,\ -64-4a)$

이때 $f(b)+f(c)=-80$이므로

$8+2a+(-64-4a)=-80$

$2a=24 \qquad \therefore\ a=12$

24

$f(x)=-\dfrac{3}{4}x^4-(2a-2)x^3+\dfrac{15}{2}ax^2-6ax$에서

$f'(x)=-3x^3-3(2a-2)x^2+15ax-6a$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$-3x^3-3(2a-2)x^2+15ax-6a=0$에서

$x^3+(2a-2)x^2-5ax+2a=0$

$(x-2)(x^2+2ax-a)=0$

2	1	$2a-2$	$-5a$	$2a$
		2	$4a$	$-2a$
	1	$2a$	$-a$	0

$\therefore\ x=2$ 또는 $x^2+2ax-a=0$

즉, 이차방정식 $x^2+2ax-a=0$이 $x=2$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=2$가 이차방정식 $x^2+2ax-a=0$의 근이 아니므로

$4+4a-a\neq0 \qquad \therefore\ a\neq-\dfrac{4}{3}$

이차방정식 $x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2+a>0,\ a(a+1)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a<-\dfrac{4}{3}$ 또는 $-\dfrac{4}{3}<a<-1$ 또는 $a>0$

답 $a<-\dfrac{4}{3}$ 또는 $-\dfrac{4}{3}<a<-1$ 또는 $a>0$

25

$f(x)=3x^4+4(3-a)x^3+6ax^2-48x$에서

$f'(x)=12x^3+12(3-a)x^2+12ax-48$

$\qquad=12(x-1)\{x^2+(4-a)x+4\}$

1	1	$3-a$	a	-4
		1	$4-a$	4
	1	$4-a$	4	0

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 $x=1$을 근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 중근 또는 허근을 가질 때,

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-a)^2-4\times4\le0$

$a^2-8a\le0,\ a(a-8)\le0$

$\therefore\ 0\le a\le8$

(ii) 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+(4-a)+4=0$에서 $a=9$

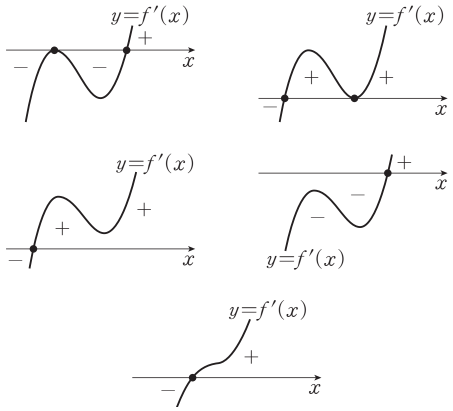
(i), (ii)에서 $0\le a\le8$ 또는 $a=9$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, …, 8, 9의 10개이다.

답 10

보충 설명

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않을 때, 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 중 하나이다.



따라서 방정식 $f'(x)=0$은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

26

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 $a+4$를 가지므로

$a+4=6 \qquad \therefore\ a=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=3$일 때 최솟값 $a=2$를 갖는다.

답 2

27

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b-54a$	↗	b	↘	$b-2a$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 b를 가지므로

$b=4$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 $b-54a$를 가지므로

$4-54a=-23,\ 54a=27$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ ab=\dfrac{1}{2}\times4=2$

답 2

28

$f(x)=x^3-ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{a}{3}$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-a^3+2$	↗	$\frac{5}{27}a^3+2$	↘	$-a^3+2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{a}{3}$에서 최댓값 $\dfrac{5}{27}a^3+2$를 가지므로

$\dfrac{5}{27}a^3+2=7,\ \dfrac{5}{27}a^3=5,\ a^3=27$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a$는 실수$)$

이때 함수 $f(x)$의 최솟값은

$m=-a^3+2=-3^3+2=-25$

$\therefore\ a-m=3-(-25)=28$

답 28

29

$y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

이므로 곡선 $y=-x^2+2x+3$이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-1,\ 3$이다.

곡선 $y=-x^2+2x+3$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $\frac{-1+3}{2}=1$
점 P의 좌표를
$(1-t,\ -(t+2)(t-2))\ (0<t<2)$
라 하면 점 Q의 좌표는
$(1+t,\ -(t+2)(t-2))$
삼각형 POQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2t\times\{-(t+2)(t-2)\}$$
$$=-t^3+4t$$
$$S'(t)=-3t^2+4$$
$$=-3\left(t^2-\frac{4}{3}\right)$$
$$=-3\left(t+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\because$ $0<t<2$)

$0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 극대이면서 최대이므로
삼각형 POQ의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

답 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

30

곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=-x+19$의 교점의 x좌표는
$2x^2=-x+19$에서
$2x^2+x-19=0\qquad\therefore\ x=\frac{-1\pm3\sqrt{17}}{4}$
즉, 제1사분면에서 곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=-x+19$는
$x=\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}$인 점에서 만나고 점 D의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 커야 하므로
$0<t<\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}$
두 점 A, D의 y좌표가 같으므로 점 D의 x좌표는
$2t^2=-x+19$에서
$x=-2t^2+19$
$\therefore\ \overline{AB}=2t^2,\ \overline{AD}=(-2t^2+19)-t=-2t^2-t+19$
직사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\overline{AB}\times\overline{AD}$$
$$=2t^2\times(-2t^2-t+19)$$
$$=-4t^4-2t^3+38t^2$$
$$f'(t)=-16t^3-6t^2+76t$$
$$=-2t(8t+19)(t-2)$$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ $\left(\because\ 0<t<\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}\right)$

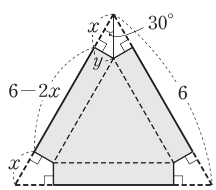
$0<t<\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은
$f(2)=72$

답 72

31



오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 사각형의 한 변의 길이를 x cm $(0<x<3)$라 하면 사각형은 한 내각의 크기가 30°인 합동인 두 직각삼각형으로 나뉜다.
삼각기둥의 높이를 y cm라 하면

$$y=x\tan30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

이때 상자의 밑면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2$ cm^2이므로 상자의 부피를 $V(x)$ cm^3라 하면

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2\times\frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{x}{4}(6-2x)^2$$
$$=x^3-6x^2+9x$$

$\therefore V'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because 0<x<3$)

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

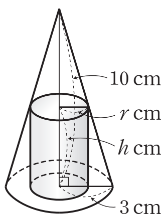
따라서 함수 $V(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은

$V(1)=4$ (cm^3)

답 $4\ \text{cm}^3$

32

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm ($0<r<3$), 높이를 h cm라 하면



$10:3=(10-h):r$에서

$30-3h=10r \quad \therefore h=10-\frac{10}{3}r$

원기둥의 부피를 $V(r)$ cm^3라 하면

$$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2\left(10-\frac{10}{3}r\right)$$
$$=\pi\left(-\frac{10}{3}r^3+10r^2\right)$$

$\therefore V'(r)=\pi(-10r^2+20r)=-10\pi r(r-2)$

$V'(r)=0$에서 $r=2$ ($\because 0<r<3$)

$0<r<3$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(r)$은 $r=2$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은

$V(2)=\frac{40}{3}\pi$ (cm^3)

답 $\frac{40}{3}\pi\ \text{cm}^3$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.155~157

14 ① **15** ② **16** $1\le a\le 4$ **17** 17
18 $-9\le k<0$ **19** 17 **20** 19
21 -7 **22** -3 **23** 6 **24** 5
25 $y=-8x+1$ **26** 4 **27** -6
28 5 **29** 8 **30** $\frac{27}{2}$

14

사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

답 ①

15

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 0, 1이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0, 1)$에서 감소한다.
$\therefore f(0)>f(1)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $-1<x<0$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 0)$에서 감소한다.

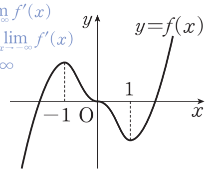
$\therefore\ f(-1)>f(0)=0$

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 0보다 크다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \infty$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

16

$f(x)=3x^3+(a+2)x^2+ax-4$에서

$f'(x)=9x^2+2(a+2)x+a$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. 즉, 모든 실수 x에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-9a\leq 0$

$a^2-5a+4\leq 0,\ (a-1)(a-4)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq a\leq 4$

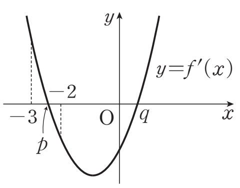
답 $1\leq a\leq 4$

17

$f(x)=2x^3+6x^2+ax+10$에서

$f'(x)=6x^2+12x+a$

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-3<x<-2$에서 한 실근을 갖고, $x>0$에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

(ⅰ) $f'(-3)>0$에서

$54-36+a>0,\ 18+a>0 \qquad \therefore\ a>-18$ ……㉠

$f'(-2)<0$에서

$24-24+a<0 \qquad \therefore\ a<0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-18<a<0$

(ⅱ) $f'(0)<0$에서 $a<0$

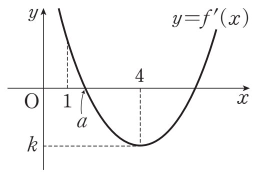
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-18<a<0$이므로 조건을 만족시키는 정수 a는 $-17,\ -16,\ -15,\ \cdots,\ -1$의 17개이다.

답 17

18

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀐다.

또한, $a\geq 1$이 되려면 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f'(1)\geq 0$에서

$9+k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -9$ ……㉠

또한, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\therefore\ k<0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 실수 k의 값의 범위는 $-9\leq k<0$이다.

답 $-9\leq k<0$

19

$f(x)=-x^3+2tx^2-t^2x$에서

$f'(x)=-3x^2+4tx-t^2=-(x-t)(3x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=t$ 또는 $x=\frac{t}{3}$

(ⅰ) $t<0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	t	$\cdots$	$\frac{t}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 열린구간 $(-4,\ 4)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면 $t\leq -4$이어야 한다.

이때 $|t|\leq 15$이므로 조건을 만족시키는 정수 t는 $-4,\ -5,\ -6,\ \cdots,\ -15$의 12개이다.

(ⅱ) $t=0$일 때,

$f(x)=-x^3$에서 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 극솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $t>0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{t}{3}$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 열린구간 $(-4,\ 4)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않으려면

$\frac{t}{3}\geq 4\qquad \therefore\ t\geq 12$

이때 $|t|\leq 15$이므로 조건을 만족시키는 정수 t는 $12,\ 13,\ 14,\ 15$의 4개이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 t의 개수는

$12+1+4=17$

답 17

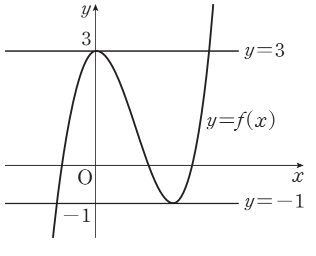
20

조건 (나)에서 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

또한, 조건 (가)에서 $f(0)=3,\ f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고, $x>0$에서 극솟값 -1을 갖는다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ ($a,\ b$는 상수)이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$이므로 $b=0$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+3,\ f'(x)=3x^2+2ax$

$f'(x)=0$에서 $3x^2+2ax=0$

$x(3x+2a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $f(0)=3$이므로 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-1$

$\left(-\frac{2}{3}a\right)^3+a\times\left(-\frac{2}{3}a\right)^2+3=-1$

$-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+3=-1,\ \frac{4}{27}a^3=-4$

$a^3=-27,\ (a+3)(a^2-3a+9)=0$

$\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(4)=4^3-3\times 4^2+3=19$

답 19

21 본문 p.144 한 걸음 더 참고

점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$에서의 접선 l이 점 $\mathrm{B}(5,\ -9)$를 지나므로 접선 l, 즉 직선 AB의 방정식은

$y-3=\frac{-9-3}{5-(-1)}(x+1)\qquad \therefore\ y=-2x+1$

삼차방정식 $f(x)-(-2x+1)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x),\ y=-2x+1$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=-1,\ x=5$는 모두 이 방정식의 근이다.

또한, $x=-1$인 점에서 두 함수 $y=f(x),\ y=-2x+1$의 그래프가 서로 접하므로

$f(x)-(-2x+1)=p(x+1)^2(x-5)$ ($p\neq 0$인 상수)

로 나타낼 수 있다.

즉, $f(x)=p(x+1)^2(x-5)-2x+1$이므로

$f'(x)=2p(x+1)(x-5)+p(x+1)^2-2$

$\quad\ =3p(x+1)(x-3)-2$

점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(5)=36p-2$이므로 접선 m의 방정식은

$y-(-9)=(36p-2)(x-5)$

$\therefore\ y=(36p-2)(x-5)-9$

직선 m과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$p(x+1)^2(x-5)-2x+1=(36p-2)(x-5)-9$에서

$p(x+1)^2(x-5)-(36p-2)(x-5)-2(x-5)=0$

$(x-5)\{p(x+1)^2-(36p-2)-2\}=0$

$p(x-5)(x^2+2x-35)=0,\ p(x-5)^2(x+7)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=5$

따라서 점 C의 x좌표는 -7이므로

$a=-7$

답 -7

22

$f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^3-2(a+3)x^2+4ax$에서

$f'(x)=4x^3+8x^2-4(a+3)x+4a$

$\quad=4(x-1)(x^2+3x-a)$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 $x=1$을 근으로 가져야 한다.

(ⅰ) 이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 중근 또는 허근을 가질 때, 판별식을 D라 하면

$D=9+4a\le 0 \qquad \therefore\ a\le -\frac{9}{4}$

(ⅱ) 이차방정식 $x^2+3x-a=0$이 $x=1$을 근으로 가질 때,

$1+3-a=0 \qquad \therefore\ a=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\le -\frac{9}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 조건을 만족시키는 음의 정수 a의 최댓값은 -3이다.

답 -3

23

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^3+3ax^2+4$에서

$f'(x)=2x^3+3ax^2+6ax=x(2x^2+3ax+6a)$

사차함수 $f(x)$의 극값이 하나뿐이려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

(ⅰ) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근을 갖거나 삼중근을 가질 때,

① 이차방정식 $2x^2+3ax+6a=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-48a=0$

$3a(3a-16)=0 \qquad \therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{16}{3}$

② 이차방정식 $2x^2+3ax+6a=0$이 $x=0$을 근으로 가져야 하므로

$6a=0 \qquad \therefore\ a=0$

①, ②에서 $a=0$ 또는 $a=\frac{16}{3}$

(ⅱ) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때, 이차방정식 $2x^2+3ax+6a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-48a<0$

$3a(3a-16)<0 \qquad \therefore\ 0<a<\frac{16}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $0\le a\le \frac{16}{3}$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개이다.

답 6

24

조건 (가)에서 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 α, 4, β $(\alpha<4<\beta)$라 하고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	4	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대 12	↘	극소	↗

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4뿐이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=-4$

이때 $g(x)=f(x)+4$라 하면

$g(\alpha)=f(\alpha)+4=0,\ g(\beta)=f(\beta)+4=0$ ……㉠

$g'(x)=f'(x)$에서

$g'(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ g'(\beta)=f'(\beta)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-4$

이때 $f(4)=12$이므로

$(4-\alpha)^2(4-\beta)^2-4=12$

$\therefore\ (4-\alpha)^2(4-\beta)^2=16$ ……㉢

한편,

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$\quad=2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)$

에서 $f'(4)=0$이므로

$2(4-\alpha)(4-\beta)(8-\alpha-\beta)=0$

$8-\alpha-\beta=0\ (\because\ \alpha<4<\beta)$

$\therefore\ \beta=8-\alpha$ ……㉣

㉣을 ㉢에 대입하여 정리하면

$(4-\alpha)^4=16$, $(4-\alpha)^4=(\pm2)^4$

$4-\alpha=2$ 또는 $4-\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=2$ 또는 $\alpha=6$

이때 $\alpha<4$이므로 $\alpha=2$, $\beta=6$ ($\because$ ㉣)

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-6)^2-4$이므로

$f(3)=1^2\times(-3)^2-4=5$

답 5

25

$y=x^4-4x^3+8x-15$에서

$y'=4x^3-12x^2+8$

이때 $f(x)=4x^3-12x^2+8$이라 하면

$f'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

열린구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	-8	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

또한, 곡선 $y=x^4-4x^3+8x-15$는 점 $(2,\ -15)$를 지나므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-15)=-8(x-2)$ $\qquad\therefore\ y=-8x+1$

답 $y=-8x+1$

26

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$f(0)=4$, $f(3)=4$이므로

$f(x)=x(x-3)(x-k)+4$ (k는 상수)라 하면

$f'(x)=(x-3)(x-k)+x(x-k)+x(x-3)$

이때 $f'(0)=(-3)\times(-k)=3k$이므로

$3k=0$ $\qquad\therefore\ k=0$

즉, $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	0	↗	4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=3$에서 최댓값 4, $x=2$에서 최솟값 0을 가지므로

$M=4$, $m=0$ $\qquad\therefore\ M+m=4$

답 4

27

$g(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2\geq-2$이므로

$g(x)=t$로 놓으면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-12t+10$ $(t\geq-2)$에서

$f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

구간 $[-2,\ \infty)$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	26	↘	-6	↗

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$, 즉 $g(x)=2$일 때 최솟값 -6을 가지므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값은 -6이다.

답 -6

보충 설명

$t=2$일 때, $g(x)=2$이므로

$x^2-6x+7=2$, $x^2-6x+5=0$

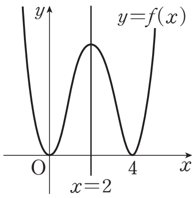
$(x-1)(x-5)=0$ $\qquad\therefore\ x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$ 또는 $x=5$에서 최솟값 -6을 갖는다.

28

조건 ㈎, ㈏에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

조건 ㈐에서 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(4)=0,\ f'(4)=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=x^2(x-4)^2$이므로

$f(2)=16<25$

즉, 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 25가 되려면 $f(a)=25$이어야 한다.

즉, $f(a)=25$에서

$a^2(a-4)^2=25,\ \{a(a-4)\}^2-25=0$

$\{a(a-4)+5\}\{a(a-4)-5\}=0$

$(a^2-4a+5)(a^2-4a-5)=0$

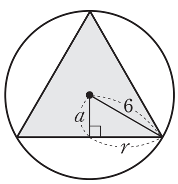
$(a^2-4a+5)(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>4)$

답 5

29

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 $r\ (0<r<6)$, 구의 중심에서 원뿔의 밑면까지의 거리를 $a\ (0<a<6)$라 하자. 원뿔의 꼭짓점과 구의 중심을 지나는 평면으로 자른 구의 단면은 오른쪽 그림과 같다.



피타고라스 정리에 의하여

$r^2+a^2=36 \qquad \therefore r^2=36-a^2$

원뿔의 부피를 $V(a)$라 하면

$V(a)=\frac{1}{3}\times r^2\pi\times(a+6)=\frac{1}{3}(36-a^2)(a+6)\pi$에서

$V'(a)=-(a+6)(a-2)\pi$

$V'(a)=0$에서 $a=2\ (\because 0<a<6)$

열린구간 $(0,\ 6)$에서 함수 $V(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(a)$		$+$	0	$-$	
$V(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이므로 원뿔의 부피가 최대일 때, 원뿔의 높이는

$a+6=2+6=8$

답 8

30

곡선 $y=-x^2(x-4)$가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0, 4이므로 $A(4,\ 0)$

이때 점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2(t-4))\ (0<t<4)$라 하면 점 H의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.

삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times t\times\{-t^2(t-4)\}$$

$$=-\frac{1}{2}t^3(t-4)$$

$$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2(t-4)-\frac{1}{2}t^3=-2t^3+6t^2$$

$$=-2t^2(t-3)$$

$S'(t)=0$에서 $t=3\ (\because 0<t<4)$

$0<t<4$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 POH의 넓이의 최댓값은

$S(3)=\frac{27}{2}$

답 $\frac{27}{2}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.158

1 $\frac{5}{3}$ **2** ③ **3** -48 **4** -1

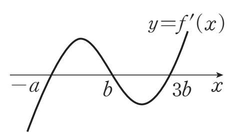
5 20 **6** $3\sqrt{3}$

1

$f'(x)=(x+a)(x^2-4bx+3b^2)$

$=(x+a)(x-b)(x-3b)$

이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $f(x)$가 두 열린구간 $(-\infty, -1)$, $(2, 5)$에서 감소하므로 $x<-1$, $2<x<5$에서 $f'(x)\le 0$이다. 즉,

$-1\le -a$에서 $0<a\le 1$ ……㉠

$b\le 2$, $5\le 3b$에서 $\frac{5}{3}\le b\le 2$ ……㉡

이때 $\frac{b}{a}$의 값이 최소가 되려면 a는 최대, b는 최소이어야 한다.

㉠에서 a의 최댓값은 1, ㉡에서 b의 최솟값은 $\frac{5}{3}$이므로

$\frac{b}{a}$의 최솟값은 $\frac{5}{3}$이다.

답 $\frac{5}{3}$

2

점 (t, t^3-1)과 직선 $y=2x+3$, 즉 $2x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$f(t)=\frac{|2t-t^3+1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^3+2t+4|}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{|t^3-2t-4|}{\sqrt{5}}$$

$t^3-2t-4=0$에서

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(t-2)\underbrace{(t^2+2t+2)}_{=(t+1)^2+1>0}=0$

$\therefore t=2$ (단, t는 실수)

즉, $t<2$에서 $t^3-2t-4<0$이고 $t\ge 2$에서 $t^3-2t-4\ge 0$이므로

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{t^3-2t-4}{\sqrt{5}} & (t<2) \\ \dfrac{t^3-2t-4}{\sqrt{5}} & (t\ge 2) \end{cases},$$

$$f'(t)=\begin{cases} -\dfrac{3t^2-2}{\sqrt{5}} & (t<2) \\ \dfrac{3t^2-2}{\sqrt{5}} & (t>2) \end{cases}$$

ㄱ. 함수 $f(t)=\frac{|t^3-2t-4|}{\sqrt{5}}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{t\to 2+} f'(t)=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $\lim_{t\to 2-} f'(t)=-\frac{10}{\sqrt{5}}=-2\sqrt{5}$

즉, $\lim_{t\to 2+} f'(t)\ne \lim_{t\to 2-} f'(t)$이므로 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $f'(t)=0$에서 $t=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ 또는 $t=\sqrt{\frac{2}{3}}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	…	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	…	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	…	2	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(t)$는 $t=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $t=2$에서 극소이고

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\ne 0$이므로 0이 아닌 극솟값을 갖는다. (참)

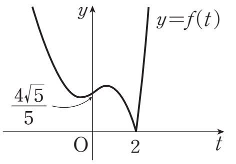
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

보충 설명

함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.



3

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\ne 0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 2)$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈏에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 -2를 갖는다.

즉, 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$, $f'(4)=0$에서

$c=0$, $48a+8b+c=0$

$\therefore 6a+b=0$, $c=0$ ……㉠

또한, $f(0)=6$, $f(4)=-2$에서

$d=6$, $64a+16b+4c+d=-2$

$\therefore 16a+4b+c=-2$, $d=6$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=0$, $d=6$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6$이므로

$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2-9x+6$

$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x-9$

$=\frac{3}{4}(x^2-4x-12)$

$=\frac{3}{4}(x+2)(x-6)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=6$에서 극소이며 극솟값은

$g(6)=-48$

답 -48

보충 설명 1 본문 p.143 한 걸음 더 참고

함수의 그래프의 대칭성 |

(1) $f(a+x)=f(a-x)$ 또는 $f(2a-x)=f(x)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

(2) $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 또는 $f(x)+f(2a-x)=2b$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

보충 설명 2

조건 ㈎에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 이것을 이용하여 함수 $f(x)$의 식을 완성할 수도 있다.

함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=2$이므로 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서

$-\frac{b}{3a}=2 \quad \therefore 6a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

또한, 점 $(2,\ 2)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $f(2)=2$에서

$8a+4b+2c+d=2 \quad \cdots\cdots$ ㉣

이때 조건 ㈏에서 $f'(0)=0,\ f(0)=6$이므로

$c=0,\ d=6$

이것을 ㉣에 대입하면

$8a+4b=-4 \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉤

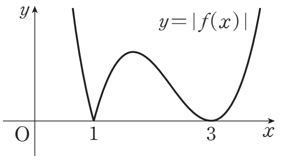
㉢, ㉤을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{3}{2} \quad \therefore f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+6$

4

조건 ㈎에서 $f(1)=0$, 조건 ㈏에서 $f(3)=0$

이때 함수 $|f(x)|$는 $x\neq1$인 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore f'(3)=0$

즉, $f(x)=k(x-1)(x-3)^2$ ($k\neq0$인 상수)으로 나타낼 수 있으므로

$f'(x)=k(x-3)^2+2k(x-1)(x-3)$

$=k(x-3)(3x-5)$

$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{k\times(-1)\times1}{k\times1\times(-1)^2}=-1$

답 -1

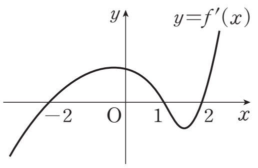
보충 설명

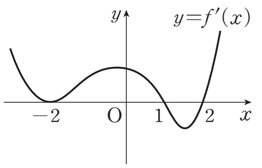
조건 ㈎는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 $x=1$에서 꺾이는 모양임을 의미하므로 $f(1)=0$임을 알 수 있다.

5

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌어야 한다.

따라서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 두 가지 경우 중 하나이어야 한다.





즉, a는 자연수, b는 홀수, c는 홀수이어야 한다.

이때 $1\leq a<b<c\leq10$이므로 b의 값으로 가능한 것은 3, 5, 7의 3가지이다.

(i) $b=3$일 때,

$1\leq a<3,\ c=5,\ 7,\ 9$이므로

$a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $2\times3=6$

(ii) $b=5$일 때,

$1\leq a<5,\ c=7,\ 9$이므로

$a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $4\times2=8$

(iii) $b=7$일 때,

$1 \le a < 7$, $c=9$이므로

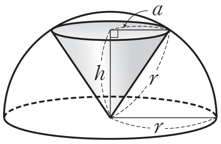
a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $6\times1=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$6+8+6=20$

답 20

6



오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 h $(0<h<r)$, 밑면의 반지름의 길이를 a라 하면 원뿔의 모선의 길이가 r이므로

$a^2+h^2=r^2 \qquad \therefore\ a^2=r^2-h^2$

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\frac{\pi}{3}a^2h=\frac{\pi}{3}(r^2-h^2)h=\frac{\pi}{3}r^2h-\frac{\pi}{3}h^3$에서

$V'(h)=\frac{\pi}{3}r^2-\pi h^2=\frac{\pi}{3}(r^2-3h^2)$

$V'(h)=0$에서 $h=\frac{r}{\sqrt{3}}$ $(\because\ 0<h<r)$

$0<h<r$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\cdots$	$\frac{r}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	r
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(h)$는 $h=\frac{r}{\sqrt{3}}$에서 극대이면서 최대이므로 원뿔의 부피의 최댓값은 $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$이다.

즉, $V\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=18\pi$이므로

$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}r^3-\frac{\pi}{9\sqrt{3}}r^3=18\pi$

$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}r^3=18\pi$, $r^3=81\sqrt{3}=3^{\frac{9}{2}}$

$\therefore\ r=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

답 $3\sqrt{3}$

06. 도함수의 활용(3)

1 방정식과 부등식에의 활용

기본 + 필수연습 본문 pp.164~169

01 2

02 (1) $-5<k<27$ (2) $k=-5$ 또는 $k=27$

(3) $k<-5$ 또는 $k>27$

03 풀이 참조 **04** 풀이 참조

05 (1) 0, $\frac{5}{3}$ (2) 6 **06** 4

07 $-15<k<-7$ **08** 3 **09** 42

10 (1) $-2<k<-\frac{50}{27}$ (2) $k=-2$ 또는 $k=-\frac{50}{27}$

(3) $k<-2$ 또는 $k>-\frac{50}{27}$

11 $-6<k<2$ **12** (1) 2 (2) 2

13 23

01

$f(x)=x^4-6x^2+8x+4$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x+8$

$=4(x+2)(x-1)^2$

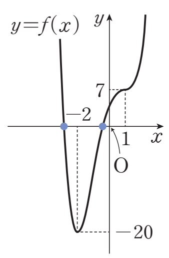
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	7	$\nearrow$

즉, 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $x^4-6x^2+8x+4=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

02

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+5$ 극대	↘	$k-27$ 극소	↗

(1) (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(k+5)(k-27)<0$

$\therefore\ -5<k<27$

(2) (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$(k+5)(k-27)=0$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=27$

(3) (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$(k+5)(k-27)>0$

$\therefore\ k<-5$ 또는 $k>27$

답 (1) $-5<k<27$
(2) $k=-5$ 또는 $k=27$
(3) $k<-5$ 또는 $k>27$

다른 풀이

$x^3-3x^2-9x+k=0$에서 $-x^3+3x^2+9x=k$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=-x^3+3x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=-x^3+3x^2+9x$라 하면

$g'(x)=-3x^2+6x+9$

$\quad=-3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

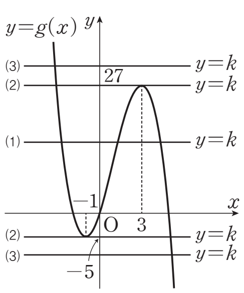
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	-5	↗	27	↘

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(1) $-5<k<27$

(2) $k=-5$ 또는 $k=27$

(3) $k<-5$ 또는 $k>27$



03

$f(x)=-x^4+2x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

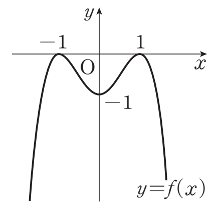
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 0이므로 $f(x)\le 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^4+2x^2-1\le 0$이 성립한다.



답 풀이 참조

04

$x^3+x^2+5\ge -2x^2+9x$에서

$x^3+x^2+5+2x^2-9x\ge 0$

$\therefore\ x^3+3x^2-9x+5\ge 0$

$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$\quad=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

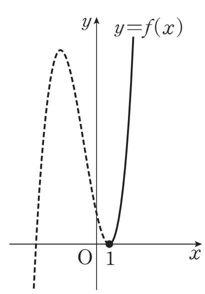
$x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	↗

$x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로 $f(x)\ge 0$, 즉

$x^3+3x^2-9x+5\ge 0$

따라서 $x\ge 1$에서 부등식 $x^3+x^2+5\ge -2x^2+9x$가 성립한다.



답 풀이 참조

05

(1) $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+k=0$에서 $-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의

개수와 같다.

$f(x)=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2$이라 하면

$f'(x)=-4x^3-4x^2+8x=-4x(x+2)(x-1)$

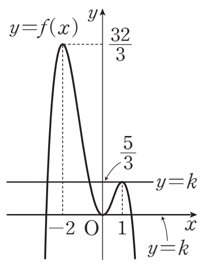
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗	$\frac{5}{3}$	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$k=0$ 또는 $k=\frac{5}{3}$



(2) $f(x)=g(x)$에서

$x^3-3x^2+4x=3x^2-5x+k$, 즉 $x^3-6x^2+9x=k$

방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 두 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$h(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

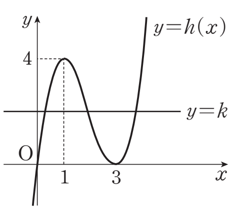
$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4	↘	0	↗

이때 $h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 서로 다른 세 점에서 만나려면



$0<k<4$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$

답 (1) 0, $\frac{5}{3}$ (2) 6

06

곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+x$와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+x=x+a$, 즉 $3x^4-4x^3-12x^2=a$가 서로 다른 네 실근을 가져야 한다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

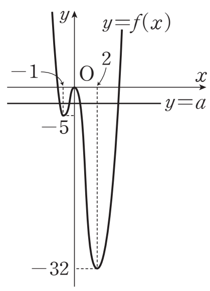
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면

$-5<a<0$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.



답 4

07

$4x^3-12x+7+k=0$에서 $-4x^3+12x-7=k$

주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=-4x^3+12x-7$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 한 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=-4x^3+12x-7$이라 하면

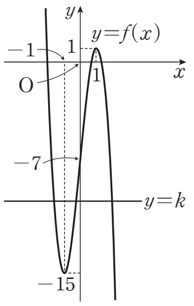
$f'(x)=-12x^2+12=-12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-15	↗	1	↘

이때 $f(0)=-7$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 한 개는 양수이려면

$-15<k<-7$

답 $-15<k<-7$

08

$f(x)=g(x)$에서 $2x^3-x^2+2x=x^3+\frac{1}{2}x^2+8x+a$, 즉

$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=a$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 한 개는 양수이어야 한다.

$h(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$라 하면

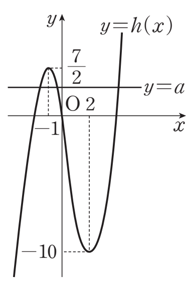
$h'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

이때 $h(0)=0$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 한 개는 양수이려면

$0<a<\frac{7}{2}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

09

$3x^4-8x^3-6x^2=-24x+k$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

주어진 방정식이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=3x^4-8x^3-6x^2+24x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 세 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

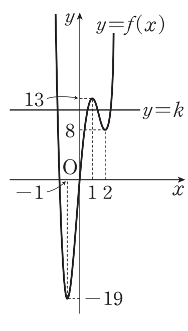
$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19	↗	13	↘	8	↗

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 세 개는 양수이려면

$8<k<13$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 9, 10, 11, 12이므로 그 합은

$9+10+11+12=42$

답 42

10

$f(x)=x^3-4x^2+5x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-8x+5$

$\quad=(x-1)(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$k+2$ 극대	$\searrow$	$k+\frac{50}{27}$ 극소	$\nearrow$

(1) (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$$(k+2)\left(k+\frac{50}{27}\right)<0$$

$\therefore\ -2<k<-\frac{50}{27}$

(2) (극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$$(k+2)\left(k+\frac{50}{27}\right)=0$$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=-\frac{50}{27}$

(3) (극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 하므로

$$(k+2)\left(k+\frac{50}{27}\right)>0$$

$\therefore\ k<-2$ 또는 $k>-\frac{50}{27}$

답 (1) $-2<k<-\frac{50}{27}$

(2) $k=-2$ 또는 $k=-\frac{50}{27}$

(3) $k<-2$ 또는 $k>-\frac{50}{27}$

다른 풀이

$x^3-4x^2+5x+k=0$에서

$-x^3+4x^2-5x=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=-x^3+4x^2-5x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=-x^3+4x^2-5x$라 하면

$g'(x)=-3x^2+8x-5$

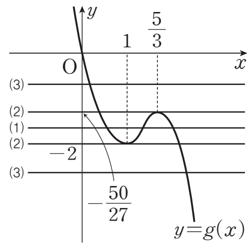
$=-(x-1)(3x-5)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\frac{50}{27}$	$\searrow$

이때 $g(0)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) $-2<k<-\frac{50}{27}$

(2) $k=-2$ 또는 $k=-\frac{50}{27}$

(3) $k<-2$ 또는 $k>-\frac{50}{27}$

11

$f(x)=x^3-3x$라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3-3t)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-3$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-3)x-2t^3$

이 직선이 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$\underbrace{k=-2t^3+6t^2-6}_{(*)}$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 $(2,\ k)$에서 그은 접선이 3개이려면 t에 대한 삼차방정식 ㉠, 즉 $2t^3-6t^2+6+k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-6t^2+6+k$라 하면

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$k+6$ 극대	$\searrow$	$k-2$ 극소	$\nearrow$

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(k+6)(k-2)<0$

$\therefore\ -6<k<2$

답 $-6<k<2$

다른 풀이

$(*)$에서 $h(t)=-2t^3+6t^2-6$이라 하면

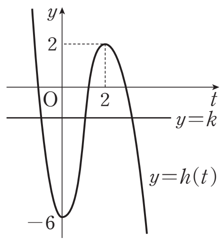
$h'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$h'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	↘	-6	↗	2	↘

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면
$-6<k<2$



12

(1) $f(x)=2x^4-a^3x+9$라 하면

$f'(x)=8x^3-a^3=(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{a}{2}$ $\left(\because\ \underbrace{4x^2+2ax+a^2}_{=4\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+\frac{3}{4}a^2}>0\right)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3a^4}{8}+9$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a}{2}$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-\dfrac{3a^4}{8}+9$이므로 주어진 부등식이 성립하려면

$-\dfrac{3a^4}{8}+9\geq 0\qquad\therefore\ a^4\leq 24$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a는 1, 2의 2개이다.
$1^4=1,\ 2^4=16,\ 3^4=81,\ \cdots$

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+4$라 하면

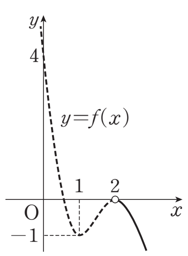
$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
즉, $x>2$에서 $f'(x)<0$이므로 $x>2$에서 $f(x)$가 감소하고, $f(2)=0$이므로 부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.



따라서 실수 a의 최솟값은 2이다.

답 (1) 2 (2) 2

13

$f(x)\geq g(x)$에서

$5x^3-7x^2+k\geq 8x^2+3$

$\therefore\ 5x^3-15x^2+k-3\geq 0$

$h(x)=5x^3-15x^2+k-3$이라 하면

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ $(\because\ 0<x<4)$

$0<x<4$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-23$	↗	

$0<x<4$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $k-23$이므로
$0<x<4$에서 $h(x)\geq 0$, 즉 $f(x)\geq g(x)$가 성립하려면

$k-23\geq 0\qquad\therefore\ k\geq 23$

따라서 실수 k의 최솟값은 23이다.

답 23

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.170~171

01 2	**02** 2	**03** 13	**04** 52
05 2	**06** $0<k<\frac{1}{4}$		**07** -3
08 30	**09** $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$		**10** $\frac{32}{3}$
11 $\frac{5}{3}$	**12** 3		

01

$x^4-2x=-x^2+4x-2k$에서 $x^4+x^2-6x=-2k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^4+x^2-6x$의 그래프와 직선 $y=-2k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^4+x^2-6x$라 하면

$f'(x)=4x^3+2x-6$

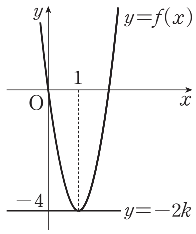
$\quad\quad =2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $\underbrace{2x^2+2x+3}_{=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-2k$가 한 점에서 만나려면

$-2k=-4$

$\therefore\ k=2$

답 2

02

$f(x)=x^4-4x^2+2+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-8x$

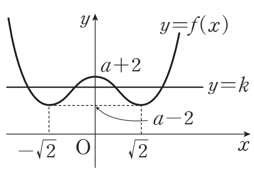
$\quad\quad =4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-2$	↗	$a+2$	↘	$a-2$	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만나려면



$a-2<k<a+2$

이때 정수 k의 최솟값이 1이므로 $0\le a-2<1$

$\therefore\ 2\le a<3$

따라서 자연수 a의 값은 2이다.

답 2

03

$g(x)=2x^3+ax^2+6x-6$이라 하면

$g'(x)=6x^2+2ax+6$

이때 삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지면 삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖는 점에서 함수 $f(t)$가 불연속이 되므로 삼차함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않아야 한다.

즉, $g'(x)=0$이 중근을 갖거나 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $6x^2+2ax+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$

$(a+6)(a-6)\le 0 \qquad \therefore\ -6\le a\le 6$

따라서 함수 $f(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 6의 13개이다.

답 13

보충 설명

삼차함수 $g(x)$가 극값을 가지면 (극댓값)$\times$(극솟값)의 부호에 따라 방정식 $g(x)=0$의 실근의 개수는 3 또는 2 또는 1이므로 극값을 갖는 점에서 함수 $f(t)$는 불연속이다.

그러나 삼차함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 방정식 $g(x)=0$의 실근의 개수는 1이므로 $f(t)=1$로 상수함수이고 연속이다.

04

$x^3+3x^2-9x+9-2k=0$에서 $x^3+3x^2-9x+9=2k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3+3x^2-9x+9$의 그래프와 직선 $y=2k$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=x^3+3x^2-9x+9$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x-9$

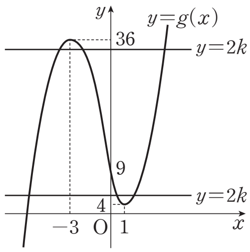
$\quad\quad =3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	36	↘	4	↗

이때 $g(0)=9$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(ⅰ) $2k<4$ 또는 $2k>36$, 즉 $k<2$ 또는 $k>18$일 때, 교점의 개수는 $f(k)=1$

(ⅱ) $2k=4$ 또는 $2k=36$, 즉 $k=2$ 또는 18일 때, 교점의 개수는 $f(k)=2$

(ⅲ) $4<2k<36$, 즉 $2<k<18$일 때, 교점의 개수는 $f(k)=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$

$=1+2+3+3+\cdots+3+2+1+1$

$=3\times1+2\times2+15\times3=52$

답 52

05

$h(x)=g(x)-f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이다.

$h'(x)=g'(x)-f'(x)$이고, 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β, γ이므로

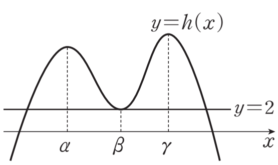
$f'(\alpha)=g'(\alpha)$, $f'(\beta)=g'(\beta)$, $f'(\gamma)=g'(\gamma)$

즉, $h'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값 $h(\beta)=2$를 가지므로 오른쪽 그림에서 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

06

$4x^3-3x^2+k=0$에서 $4x^3-3x^2=-k$

주어진 방정식이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=4x^3-3x^2$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=4x^3-3x^2$이라 하면

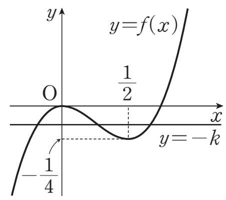
$f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이려면



$-\frac{1}{4}<-k<0$ $\therefore\ 0<k<\frac{1}{4}$

답 $0<k<\frac{1}{4}$

07

방정식 $f(x)=0$이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 한다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+k$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ ……㉠

한편, $f'(0)=f'(1)=f'(5)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-5)$

$=4x(x^2-6x+5)$

$=4x^3-24x^2+20x$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-8$, $b=10$, $c=0$

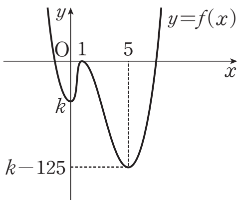
(가)

즉, $f(x)=x^4-8x^3+10x^2+k$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↗	$k+3$	↘	$k-125$	↗

(나)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k+3=0$

$\therefore\ k=-3$

(다)

답 -3

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 조건을 이용하여 a, b, c의 값을 각각 구한 경우	30 %
(나)	함수 $y=f(x)$의 그래프의 극값을 구한 경우	30 %
(다)	실수 k의 값을 구한 경우	40 %

08

곡선 $y=x^3-3x^2-7x$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-3x^2-7x=2x+k$, 즉 $x^3-3x^2-9x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. (*)

$f(x)=x^3-3x^2-9x-k$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$5-k$ 극대	↘	$-27-k$ 극소	↗

(극댓값)×(극솟값)<0이어야 하므로

$(5-k)(-27-k)<0$, $(k+27)(k-5)<0$

$\therefore\ -27<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값 M은 4, 최솟값 m은 -26이므로

$M-m=4-(-26)=30$

답 30

다른 풀이

(*)에서 $x^3-3x^2-9x=k$가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

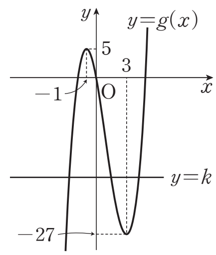
$g'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	5	↘	-27	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-27<k<5$

따라서 정수 k의 최댓값 M은 4, 최솟값 m은 -26이므로

$$M-m=4-(-26)$$
$$=30$$

09

$f(x)=x^4-4(a-2)^3x+27$이라 하면

$$f'(x)=4x^3-4(a-2)^3$$
$$=4\{x^3-(a-2)^3\}$$
$$=4\{x-(a-2)\}\{x^2+(a-2)x+(a-2)^2\}$$

$=\left(x+\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{3(a-2)^2}{4}$

$f'(x)=0$에서 $x=a-2$ $(\because x^2+(a-2)x+(a-2)^2>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$$f(a-2)=(a-2)^4-4(a-2)^4+27$$
$$=-3(a-2)^4+27$$

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$-3(a-2)^4+27>0$

$(a-2)^4<9$

$-\sqrt{3}<a-2<\sqrt{3}$

$\therefore\ 2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

답 $2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

10

$f(x)\le g(x)$에서

$-x^4+x^3-x^2\le\frac{7}{3}x^3-5x^2+a$

$\therefore\ -x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a\le0$

$h(x)=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a$라 하면

$h'(x)=-4x^3-4x^2+8x$

$=-4x(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↗	$\frac{32}{3}-a$	↘	$-a$	↗	$\frac{5}{3}-a$	↘

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $\frac{32}{3}-a$이므로 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\le0$, 즉 $f(x)\le g(x)$가 성립하려면

$\frac{32}{3}-a\le0\qquad\therefore\ a\ge\frac{32}{3}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

답 $\frac{32}{3}$

11

$f(x)=x^3-3x^2+3k-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$3k-1$	↘	$3k-5$	↗

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $3k-5$이므로 $x\ge0$에서 $f(x)\ge0$이 성립하려면

$3k-5\ge0\qquad\therefore\ k\ge\frac{5}{3}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{5}{3}$이다.

답 $\frac{5}{3}$

12

$f(x)\ge g(x)$에서 $2x^3+3x^2+k\ge6x^2+2$

$\therefore\ 2x^3-3x^2+k-2\ge0$

$h(x)=2x^3-3x^2+k-2$라 하면

$h'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-3$	↗	

$0<x<3$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $k-3$이므로 $0<x<3$에서 $h(x)\ge0$, 즉 $f(x)\ge g(x)$가 성립하려면

$k-3\ge0\qquad\therefore\ k\ge3$

따라서 실수 k의 최솟값은 3이다.

답 3

2 속도와 가속도

기본 + 필수연습

본문 pp.174~179

14 (1) 속도 : -4, 가속도 : -4 (2) $\frac{1}{3}$, 3

15 (1) 2초, 24 m (2) 12 m/s **16** 180

17 $245\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$ **18** (1) 20 (2) 12

19 10 **20** (1) 2 (2) $1<t<5$ **21** 9

22 ㄱ, ㄴ **23** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **24** $75\ \text{cm}^3/\text{s}$

25 $16\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$

14

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+3,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

따라서 $t=1$에서의 속도와 가속도는 각각

$v=3\times1-10\times1+3=-4$, $a=6\times1-10=-4$

(2) 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=3t^2-10t+3=0$에서

$(3t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

이때 $0<t<\frac{1}{3}$ 또는 $t>3$이면 $v>0$이고, $\frac{1}{3}<t<3$

이면 $v<0$이므로 $t=\frac{1}{3}$, $t=3$의 좌우에서 v의 부호가 바뀐다.

따라서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 시각은 $\frac{1}{3}$, 3이다.

답 (1) 속도 : -4, 가속도 : -4 (2) $\frac{1}{3}$, 3

15

(1) t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-12t+24$

자동차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$v=-12t+24=0$에서 $t=2$

따라서 자동차가 제동할 때까지 걸린 시간은 2초이고, 그때까지 달린 거리는

$x=-6\times4+24\times2=24(\text{m})$

(2) 자동차가 제동 후 1초가 되는 순간의 속도는

$v=-12\times1+24=12(\text{m/s})$

답 (1) 2초, 24 m (2) 12 m/s

16

시각 t에서의 도형의 넓이 S의 변화율은

$$\frac{dS}{dt}=(t+2)(4t+3)+t(4t+3)+4t(t+2)$$
$$=12t^2+22t+6$$

따라서 $t=3$에서의 도형의 넓이의 변화율은

$12\times9+22\times3+6=180$

답 180

17

원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이가 각각 매초 2 cm, 1 cm씩 늘어나므로 t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이는 각각

$3+2t$, $5+t$

t초 후에 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이가 같게 된다고 하면

$3+2t=5+t$ $\quad\therefore\ t=2$

한편, t초 후의 원기둥의 부피를 V cm^{3}라 하면

$$V=\pi(3+2t)^2\times(5+t)$$
$$=(t+5)(2t+3)^2\pi$$

이므로 원기둥의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt}=(2t+3)^2\pi+(t+5)\times2(2t+3)\times2\times\pi$$
$$=(2t+3)^2\pi+4(t+5)(2t+3)\pi$$
$$=(12t^2+64t+69)\pi$$

따라서 $t=2$에서의 부피의 변화율은

$(12\times4+64\times2+69)\pi=245\pi(\text{cm}^3/\text{s})$

답 245π cm^3/s

18

(1) 점 P가 다시 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$x=4t^3-20t^2+25t=0$에서

$t(2t-5)^2=0$ $\quad\therefore\ t=\frac{5}{2}$ ($\because\ t>0$)

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=12t^2-40t+25$, $a=\frac{dv}{dt}=24t-40$

따라서 $t=\frac{5}{2}$에서의 가속도는

$a=24\times\frac{5}{2}-40=20$

(2) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=t^2+4$, $v_Q=4t$

$v_P=v_Q$에서 $t^2+4=4t$

$t^2-4t+4=0$, $(t-2)^2=0$

$\therefore\ t=2$

두 점 P, Q의 $t=2$에서의 위치는 각각

$x_P=\frac{1}{3}\times8+4\times2-\frac{2}{3}=10$, $x_Q=2\times4-10=-2$

따라서 구하는 거리는

$10-(-2)=12$

답 (1) 20 (2) 12

19

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+2pt+q$, $a=\frac{dv}{dt}=-6t+2p$

$t=2$에서의 속도가 16이므로

$v=-3\times4+2p\times2+q=16$에서

$4p+q=28$ ……㉠

또한, $t=2$에서의 가속도가 0이므로

$a=-6\times2+2p=0$에서

$2p=12$ $\therefore p=6$

이것을 ㉠에 대입하면 $4\times6+q=28$

$\therefore q=4$

$\therefore p+q=6+4=10$

답 10

20

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-2t$, $a=\frac{dv}{dt}=12t-2$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=6t^2-2t=0$에서

$2t(3t-1)=0$ $\therefore t=\frac{1}{3}$ $(\because t>0)$

이때 $0<t<\frac{1}{3}$이면 $v<0$이고, $t>\frac{1}{3}$이면 $v>0$이므로

$t=\frac{1}{3}$의 좌우에서 v의 부호가 바뀐다.

따라서 $t=\frac{1}{3}$에서의 점 P의 가속도는

$a=12\times\frac{1}{3}-2=2$

(2) 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=6t-6$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=t-5$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로

$v_Pv_Q<0$에서 $(6t-6)(t-5)<0$

$\therefore 1<t<5$

답 (1) 2 (2) $1<t<5$

21

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-78t+216$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=6t^2-78t+216=0$에서

$6(t-4)(t-9)=0$ $\therefore t=4$ 또는 $t=9$

이때 $0<t<4$, $t>9$이면 $v>0$이고, $4<t<9$이면 $v<0$이므로 $t=4$, $t=9$의 좌우에서 v의 부호가 바뀐다.

따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 9이다.

답 9

22

점 P는 음의 방향으로 움직인다.

ㄱ. $t=a$일 때 $v(a)<0$이고, $t=c$일 때 $v(c)>0$이므로 점 P의 운동 방향이 서로 반대이다. (참)

점 P는 양의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $a<t<c$에서 점 P의 속도는 증가한다. (참)

ㄷ. $t=b$, $t=d$에서 $v(t)=0$이고 $t=b$, $t=d$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$, $t=d$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

즉, $0<t<f$에서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (거짓)

ㄹ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$t=a$, $t=c$, $t=e$인 점에서 속도 $v(t)$의 그래프의 접선의 기울기가 0이므로 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 $t=a$, $t=c$, $t=e$의 세 번이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

23

t초 후 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(t,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ 2t)$

이므로 t초 후 두 점 P, Q의 중점 M의 좌표는

$\mathrm{M}\left(\frac{t}{2},\ t\right)$

선분 OM의 길이를 x라 하면

$$x=\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+t^2}$$
$$=\sqrt{\frac{t^2}{4}+t^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}t\ (\because\ t>0)$$

따라서 선분 OM의 길이의 변화율은

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

24

t초 후 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+t)$ cm이므로

정육면체의 한 면의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$S=(2+t)^2$

t초 후 정육면체의 한 면의 넓이가 $25\,\mathrm{cm}^2$가 된다고 하면

$(2+t)^2=25$에서 $t+2=5\ (\because\ t>0)$

$\therefore\ t=3$

정육면체의 부피를 $V\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$V=(2+t)^3$

이므로 정육면체의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}=3(2+t)^2$

따라서 $t=3$에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$3\times5^2=75(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

답 $75\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

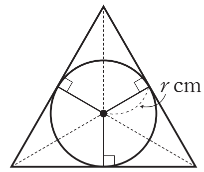
25

t초 후 정삼각형의 한 변의 길이는 $(8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)$ cm이므로

정삼각형의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)^2$$

오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$$S=\frac{3r}{2}(8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)$$

즉, $\frac{\sqrt{3}}{4}(8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)^2=\frac{3r}{2}(8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t)$에서

$r=t+4$

원의 넓이를 $T\,\mathrm{cm}^2$라 하면

$T=\pi r^2=(t+4)^2\pi$

이므로 원의 넓이의 변화율은

$$\frac{dT}{dt}=2\pi(t+4)$$

한편, 정삼각형의 한 변의 길이가 $16\sqrt{3}$ cm가 되는 시각 t는

$8\sqrt{3}+2\sqrt{3}t=16\sqrt{3}$에서 $t=4$

따라서 $t=4$에서의 원의 넓이의 변화율은

$2\pi\times8=16\pi(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

답 $16\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

STEP 1 개념 마무리 본문 pp.180~181

13 (1) 속도 : -3, 가속도 : 0 (2) 4 (3) 1, 3

14 ①	**15** 7	**16** 17	**17** 21
18 ②	**19** ③	**20** ①	**21** 155 m
22 24	**23** 30		

13

(1) 점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+9,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-12$$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는

$v=3\times4-12\times2+9=-3$

$a=6\times2-12=0$

(2) $3t^2-12t+9=9$에서 $3t^2-12t=0,\ 3t(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\ (\because\ t>0)$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$x=64-6\times16+9\times4=4$

(3) 점 P가 운동방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-12t+9=0$에서

$3(t^2-4t+3)=0$, $3(t-1)(t-3)=0$

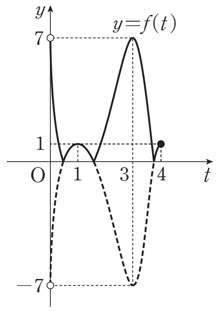
$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=3$

이때 $0<t<1$ 또는 $t>3$이면 $v>0$이고 $1<t<3$이면 $v<0$이므로 $t=1$, $t=3$의 좌우에서 v의 부호가 바뀐다.

따라서 점 P가 운동방향을 바꿀 때의 시각은 1, 3이다.

답 (1) 속도 : -3, 가속도 : 0 (2) 4 (3) 1, 3

따라서 $0<t\le4$에서 함수 $y=|g(t)|$, 즉 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 점 P는 $t=3$에서 원점과 가장 멀리 떨어져 있고, 그때의 점 P와 원점 사이의 거리는 7이다.



답 7

14

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3kt^2-12t+1,\ a=\frac{dv}{dt}=6kt-12$$

$t=k$에서의 점 P의 속도가 1이므로

$v=3k^3-12k+1=1$에서

$3k^3-12k=0$, $3k(k+2)(k-2)=0$

$\therefore$ $k=2$ ($\because$ $k>0$)

따라서 $t=2k$, 즉 $t=4$에서의 점 P의 가속도는

$a=6\times2\times4-12$

$=36$

답 ①

15

시각 t에서의 점 P와 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|2t^3-12t^2+18t-7|$ (단, $0<t\le4$)

이때 $g(t)=2t^3-12t^2+18t-7$이라 하면

$g'(t)=6t^2-24t+18=6(t-1)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

$0<t\le4$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		↗	1	↘	-7	↗	1

16

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=t^2+2kt-k+12=(t+k)^2-k^2-k+12$$

점 P가 출발 후 운동 방향을 단 한 번도 바꾸지 않으려면 $t\ge0$에서 $v\ge0$이어야 한다.

이때 이차함수 $y=v(t)$의 그래프의 축의 방정식은 $t=-k$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $-k\ge0$, 즉 $k\le0$일 때,

함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

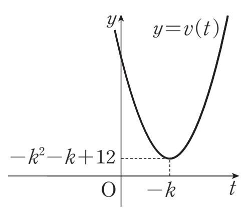
$v(-k)=-k^2-k+12\ge0$

이어야 하므로

$k^2+k-12\le0$,

$(k+4)(k-3)\le0$

$\therefore$ $-4\le k\le0$ ($\because$ $k\le0$)



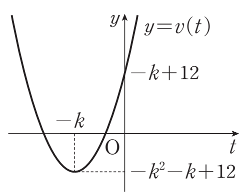
(ii) $-k<0$, 즉 $k>0$일 때,

함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

$v(0)=-k+12\ge0$

이어야 하므로

$0<k\le12$ ($\therefore$ $k>0$)



(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$-4\le k\le12$이므로

구하는 정수 k의 개수는

$12-(-4)+1=17$

답 17

17

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=2t^2+7,\ g'(t)=12t-11$

$f'(t)=g'(t)$, 즉 $2t^2+7=12t-11$에서

$2t^2-12t+18=0,\ 2(t-3)^2=0$

$\therefore\ t=3 \qquad \therefore\ a=3$

이때 $t=3$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$f(3)=\dfrac{2}{3}\times27+7\times3-10=29$,

$g(3)=6\times9-11\times3+1=22$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$29-22=7 \qquad \therefore\ b=7$

$\therefore\ ab=3\times7=21$

답 21

18

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_{P}, v_{Q}라 하면

$v_{\mathrm{P}}=\dfrac{dx_{\mathrm{P}}}{dt}=3t^2-2t+4,\ v_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dx_{\mathrm{Q}}}{dt}=4t-4$

ㄱ. $v_{\mathrm{P}}=3t^2-2t+4=3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{11}{3}>0$

이므로 점 P는 항상 양의 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄴ. 점 Q의 시각 t에서의 가속도를 a_{Q}라 하면

$a_{\mathrm{Q}}=\dfrac{dv_{\mathrm{Q}}}{dt}=4$ (거짓)

ㄷ. 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}<0$

그런데 ㄱ에서 $v_{\mathrm{P}}>0$이므로 $v_{\mathrm{Q}}<0$

$4t-4<0 \qquad \therefore\ 0<t<1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

19

ㄱ. 속력은 속도의 절댓값이므로

$|v(t_1)|>|v(t_3)|$ (참)

ㄴ. $t=t_2$, $t=t_4$에서 $v(t)=0$이고 $t=t_2$, $t=t_4$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=t_2$, $t=t_4$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

즉, $0<t<t_6$에서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다. (거짓)

ㄷ. 점 P의 시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점의 접선의 기울기와 같다.

$t=t_1$, $t=t_3$, $t=t_5$인 점에서의 접선의 기울기는 0이고, $t=t_1$, $t=t_5$의 좌우에서 $v(t)$가 감소하다가 증가하고, $t=t_3$의 좌우에서 $v(t)$가 증가하다가 감소하므로

$0<t<t_6$에서 점 P의 가속도의 부호는 세 번 바뀐다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

20

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

ㄱ. $b<t<d$에서 $v(t)=x'(t)<0$이므로 $b<t<d$에서 점 P의 속도는 음의 값이다. (참)

ㄴ. $t=a$, $t=b$, $t=d$에서 $v(t)=x'(t)=0$이고, $t=a$, $t=b$, $t=d$의 좌우에서 $v(t)=x'(t)$의 부호가 바뀐다.

즉, 점 P가 운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 $t=a$이다. (거짓)

ㄷ. $0<t<a$에서 $v(t)=x'(t)<0$이고, $v(e)=x'(e)>0$이므로 $t=e$일 때는 출발할 때와 반대 방향으로 움직인다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

21

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-8t+20$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$v=-8t+20=0$에서 $t=\dfrac{5}{2}$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 $\dfrac{5}{2}$초이고, 그때의 높이는

$x=-4\times\dfrac{25}{4}+20\times\dfrac{5}{2}+105=130(\mathrm{m})$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는
$(130-105)+130=155(\mathrm{m})$

답 155 m

22

t초 후 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이는 $20-2t$, $\overline{\mathrm{BQ}}$의 길이는 $4t$ $(0<t<5)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=l$이라 하면

$l=\sqrt{(20-2t)^2+(4t)^2}$
$=\sqrt{20t^2-80t+400}$
$=\sqrt{20(t-2)^2+320}$

즉, $t=2$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.
한편, 삼각형 PBQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times 4t\times(20-2t)=-4t^2+40t$

이므로 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

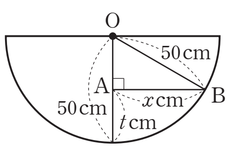
$\frac{dS}{dt}=-8t+40$

따라서 $t=2$에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은
$-8\times 2+40=24$

답 24

23

t초 후의 수면의 높이는 $t\,\mathrm{cm}$ $(0<t<50)$, t초 후의 수면의 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$라 하자.
오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{OA}}=50-t(\mathrm{cm})$
이므로 직각삼각형 OAB에서
$x^2+(50-t)^2=50^2$
$\therefore\ x^2=-t^2+100t$
t초 후의 수면의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면
$S=\pi x^2=(-t^2+100t)\pi$

$\therefore\ \frac{dS}{dt}=(-2t+100)\pi$

이때 t초 후의 수면의 넓이의 변화율이 $40\pi\,\mathrm{cm}^2/s$이므로
$(-2t+100)\pi=40\pi$
$-2t=-60\qquad\therefore\ t=30$

답 30

STEP 2 개념 마무리

본문 p.182

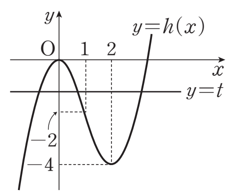
1 30　**2** 4　**3** -12　**4** 2
5 7　**6** $-20\,\mathrm{m/s}$

1

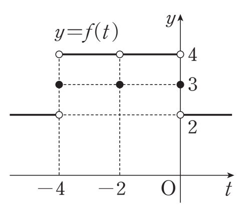
$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$에서
$x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$
$x^2(x-3)-t=0$에서 $x^2(x-3)=t$
$h(x)=x^2(x-3)=x^3-3x^2$이라 하면
$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	0	↘	−4	↗

함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표가 1이면 주어진 사차방정식은 $x=1$을 중근으로 갖는다.
즉, t의 값의 범위에 따라 $f(t)$의 값을 구하면 다음과 같다.
(i) $t<-4$ 또는 $t>0$일 때,
　$f(t)=2$
(ii) $t=-4$ 또는 $\underline{t=-2}$ 또는 $t=0$일 때,
　$x=1$일 때, $t=-2$
　$f(t)=3$
(iii) $-4<t<-2$ 또는 $-2<t<0$일 때,
　$f(t)=4$
(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $f(t)$는 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 불연속이다.
이때 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\underline{g(-4)=g(-2)=g(0)=0}$ (*)

조건 ㈎에서 함수 $g(t)$는 3차 이하의 다항함수이므로

$g(t)=at(t+4)(t+2)$ (단, a는 상수)

조건 ㈏에서 $g(-3)=6$이므로

$3a=6 \qquad \therefore a=2$

따라서 $g(t)=2t(t+4)(t+2)$이므로

$g(1)=2\times1\times5\times3=30$

답 30

보충 설명

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 연속이어야 한다.

(i) $t=-4$에서 연속일 때,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$

$\lim_{t\to-4+} f(t)g(t)=4g(-4)$

$\lim_{t\to-4-} f(t)g(t)=2g(-4)$

즉, $3g(-4)=4g(-4)=2g(-4)$이므로 $g(-4)=0$

(ii) $t=-2$에서 연속일 때,

$f(-2)g(-2)=3g(-2)$

$\lim_{t\to-2+} f(t)g(t)=4g(-2)$

$\lim_{t\to-2-} f(t)g(t)=4g(-2)$

즉, $3g(-2)=4g(-2)$이므로 $g(-2)=0$

(iii) $t=0$에서 연속일 때,

$f(0)g(0)=3g(0)$

$\lim_{t\to0+} f(t)g(t)=2g(0)$

$\lim_{t\to0-} f(t)g(t)=4g(0)$

즉, $3g(0)=2g(0)=4g(0)$이므로 $g(0)=0$

(i), (ii), (iii)에서 $g(-4)=g(-2)=g(0)=0$, 즉 (*)가 성립한다.

2

$x^3-4x^2-ax+18=0$에서 $x^3-4x^2+18=ax$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-4x^2+18$의 그래프와 직선 $y=ax$의 교점의 개수와 같다.

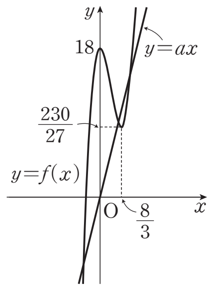
$f(x)=x^3-4x^2+18$이라 하면

$f'(x)=3x^2-8x=x(3x-8)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	18	$\searrow$	$\frac{230}{27}$	$\nearrow$



함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선 $y=ax$의 기울기 a가 원점에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선의 기울기보다 커야 한다.

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-4t^2+18)=(3t^2-8t)(x-t)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-(t^3-4t^2+18)=(3t^2-8t)\times(-t)$

$t^3-4t^2+18=3t^3-8t^2$, $2t^3-4t^2-18=0$

$2(t-3)(t^2+t+3)=0 \qquad \therefore t=3$ ($\because \underbrace{t^2+t+3}_{=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}>0$)

접선의 기울기는

$f'(3)=3\times3^2-8\times3=3$

따라서 $a>3$일 때, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

3

$f(x)=x^4-x^2-2x-a$에서

$f'(x)=4x^3-2x-2$

$=2(x-1)(2x^2+2x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because \underbrace{2x^2+2x+1}_{=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

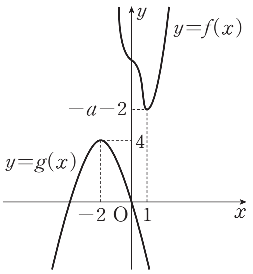
x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a-2$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$f(1)=-a-2$

한편, $g(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $g(-2)=4$를 갖는다.

이때 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이



($f(x)$의 최솟값)

$\geq$($g(x)$의 최댓값)

이어야 하므로

$-a-2\geq 4$　　$\therefore a\leq -6$

따라서 실수 a의 최댓값 M은 -6이므로

$g(M)=g(-6)=-(-6)^2-4\times(-6)=-12$

답 -12

4

$3x^{n+3}-n(n-4)>(n+3)x^3$에서

$3x^{n+3}-(n+3)x^3>n(n-4)$

$f(x)=3x^{n+3}-(n+3)x^3$이라 하면

$f'(x)=3(n+3)x^{n+2}-3(n+3)x^2$

$=3(n+3)x^2(x^n-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-n$	↗

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-n$이므로 양수 x에 대하여 부등식 $f(x)>n(n-4)$가 항상 성립하려면

$-n>n(n-4)$, $n^2-3n<0$, $n(n-3)<0$

$\therefore 0<n<3$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 자연수 n은 1, 2의 2개이다.

답 2

5

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=4t^3-6t^2-24t-5a$

점 P의 운동 방향이 두 번만 바뀌려면 $v(t)=0$이고, 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌는 t의 값이 두 개만 존재해야 한다.

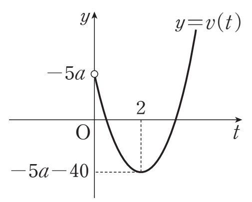
$v'(t)=12t^2-12t-24=12(t+1)(t-2)$

$v'(t)=0$에서 $t=2$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $v(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$v'(t)$		$-$	0	$+$
$v(t)$		↘	$-5a-40$	↗

함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t>0$에서 함수 $y=v(t)$의 그래프가 t축과 두 점에서 만나려면



$-5a>0$, $-5a-40<0$

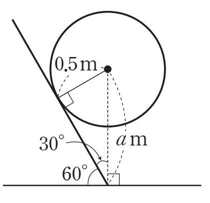
$\therefore -8<a<0$

따라서 정수 a는 -7, -6, -5, $\cdots$, -1의 7개이다.

답 7

6

오른쪽 그림과 같이 공의 중심과 경사면 사이의 거리가 0.5 m일 때 공이 경사면과 처음으로 충돌한다. 이 순간의 바닥으로부터 공의 중심까지의 거리를 a m라 하면



$a=\dfrac{0.5}{\sin 30^\circ}=1$

즉, $h(t)=1$에서 $21-5t^2=1$

$20=5t^2$, $t^2=4$　　$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

한편, t초 후 공의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh(t)}{dt}=-10t$

따라서 $t=2$에서의 공의 속도는

$-10\times 2=-20$(m/s)

답 -20 m/s

III. 적분

07. 부정적분

1 부정적분

기본 + 필수연습 본문 pp.186~190

01 ㄴ, ㄹ
02 (1) $x+C$ (2) $-x^3+C$ (3) x^5+C
03 (1) $-x-2$ (2) $-3x^2+x-5$
04 (1) $5x^3-\frac{1}{2}x^2+x$ (2) $5x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$
05 (1) $a=2$, $b=2$ (2) -8 **06** $-\frac{9}{2}$ **07** 10
08 (1) 11 (2) 4 **09** 5 **10** 3
11 15 **12** 16

01

ㄱ. $(x^3+x^2)'=3x^2+2x$

ㄴ. $\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)'=x^2+x$

ㄷ. $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)'=x^2-x$

ㄹ. $\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+100\right)'=x^2+x$

따라서 함수 x^2+x의 부정적분인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

02

(1) $(x)'=1$이므로

$$\int 1dx=x+C$$

(2) $(-x^3)'=-3x^2$이므로

$$\int(-3x^2)dx=-x^3+C$$

(3) $(x^5)'=5x^4$이므로

$$\int 5x^4dx=x^5+C$$

답 (1) $x+C$ (2) $-x^3+C$ (3) x^5+C

03

(1) $f(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2-2x+C\right)'=-x-2$

(2) $f(x)=\left(-x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+C\right)'=-3x^2+x-5$

답 (1) $-x-2$ (2) $-3x^2+x-5$

04

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)=5x^3-\frac{1}{2}x^2+x$

(2) $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=5x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 (1) $5x^3-\frac{1}{2}x^2+x$ (2) $5x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

05

(1) $f(x)=(ax^3+bx^2-1)'=3ax^2+2bx$

$f(-1)=2$에서 $3a-2b=2$ ……㉠

$f'(x)=6ax+2b$이므로

$f'(0)=4$에서 $2b=4$ $\therefore b=2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3a-4=2$, $3a=6$ $\therefore a=2$

(2) $(x-1)f(x)=(2x^3-4x^2+2x+C)'$

$=6x^2-8x+2$

$=2(3x-1)(x-1)$

따라서 $f(x)=2(3x-1)$이므로

$f(-1)=2\times(-4)=-8$

답 (1) $a=2$, $b=2$ (2) -8

06

$f(x)=(x^3+ax^2+x+C)'$

$=3x^2+2ax+1$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+1=0$의 모든 근의 합이 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2a}{3}=3$, $2a=-9$ $\therefore a=-\frac{9}{2}$

답 $-\frac{9}{2}$

07

두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$

도함수의 성질에 의하여

$\{F(x)-G(x)\}'=f(x)-f(x)=0$

이때 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$F(x)-G(x)=k$ (k는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}G(x)&=F(x)-k\\&=2x^3-4x+3-k\end{aligned}$$

$G(1)=0$에서 $2-4+3-k=0$ $\therefore k=1$

따라서 $G(x)=2x^3-4x+2$이므로

$G(2)=16-8+2=10$

답 10

다른 풀이

두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로 두 함수 $F(x)$, $G(x)$는 상수항을 제외한 식이 같다. 즉,

$G(x)=2x^3-4x+C$

이때 $G(1)=0$에서 $2-4+C=0$ $\therefore C=2$

따라서 $G(x)=2x^3-4x+2$이므로

$G(2)=16-8+2=10$

08

(1) $\dfrac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+5$

$\therefore f(3)=9-3+5=11$

(2) $$\begin{aligned}f(x)&=\int\left\{\frac{d}{dx}(6x^4+x^3)\right\}dx\\&=6x^4+x^3+C\end{aligned}$$

$f(1)=6$에서

$6+1+C=6$, $7+C=6$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=6x^4+x^3-1$이므로

$f(-1)=6-1-1=4$

답 (1) 11 (2) 4

09

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2-8x)\right\}dx\\&=2x^2-8x+C\\&=2(x-2)^2-8+C\end{aligned}$$

즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-8+C$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$-8+C=3$ $\therefore C=11$

따라서 $f(x)=2x^2-8x+11$이므로

$f(1)=2-8+11=5$

답 5

10

$\dfrac{d}{dx}\left[\int\{f(x)+x^3-3x\}dx\right]=\int\left[\dfrac{d}{dx}\{-f(x)+2x^2\}\right]dx$

에서

$f(x)+x^3-3x=-f(x)+2x^2+C_1$

즉, $2f(x)=-x^3+2x^2+3x+C_1$에서

$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+\dfrac{3}{2}x+C_2$ $\left(\text{단, } C_2=\dfrac{1}{2}C_1\right)$

이때 $f(1)=5$이므로

$-\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+C_2=5$, $2+C_2=5$ $\therefore C_2=3$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+x^2+\dfrac{3}{2}x+3$이므로

$f(-1)=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{3}{2}+3=3$

답 3

11

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=x$에서

$\int\left[\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int x\,dx$

$\therefore f(x)+g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$ ← $\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)'=x$이므로 $\int x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2+C$

양변에 $x=0$을 대입하면

$C_1=f(0)+g(0)=5+(-1)=4$

$\therefore f(x)+g(x)=\frac{1}{2}x^2+4$ ……㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int 2dx$

$\therefore f(x)-g(x)=2x+C_2$ ← $(2x)'=2$이므로 $\int 2dx=2x+C$

양변에 $x=0$을 대입하면

$C_2=f(0)-g(0)=5-(-1)=6$

$\therefore f(x)-g(x)=2x+6$ ……㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+10$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+5$

㉠−㉡을 하면 $2g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-2$

$\therefore g(x)=\frac{1}{4}x^2-x-1$

$\therefore f(2)+g(-4)=(1+2+5)+(4+4-1)$
$=8+7=15$

답 15

12

조건 ㈎에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=6$이므로

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 6dx$

$\therefore f(x)+g(x)=6x+C_1$ ← $(6x)'=6$이므로 $\int 6dx=6x+C$

양변에 $x=0$을 대입하면

$C_1=f(0)+g(0)=4+(-2)=2$ ($\because$ 조건 ㈐)

$\therefore f(x)+g(x)=6x+2$ ……㉠

조건 ㈏에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=16x$이므로

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 16xdx$

$\therefore f(x)g(x)=8x^2+C_2$ ← $(8x^2)'=16x$이므로 $\int 16dx=8x^2+C$

양변에 $x=0$을 대입하면

$C_2=f(0)g(0)=4\times(-2)=-8$ ($\because$ 조건 ㈐)

$\therefore f(x)g(x)=8x^2-8=8(x+1)(x-1)$ ……㉡

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 일차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases} f(x)=4x+4 \\ g(x)=2x-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)=2x-2 \\ g(x)=4x+4 \end{cases}$

그런데 조건 ㈐에서 $f(0)=4$, $g(0)=-2$이므로

$f(x)=4x+4$, $g(x)=2x-2$

$\therefore f(1)g(2)=(4+4)\times(4-2)=8\times2=16$

답 16

다른 풀이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 일차함수이고 조건 ㈐에서 $f(0)=4$, $g(0)=-2$이므로

$f(x)=ax+4$, $g(x)=bx-2$ (a, b는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)+g(x)=(a+b)x+2$,
$f(x)g(x)=(ax+4)(bx-2)$

조건 ㈎에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=6$이므로

$\frac{d}{dx}\{(a+b)x+2\}=6$ $\quad\therefore a+b=6$ ……㉢

조건 ㈏에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=16x$이므로

$\frac{d}{dx}\{(ax+4)(bx-2)\}=a(bx-2)+b(ax+4)$
$=2abx-2a+4b$
$=16x$

에서 $2ab=16$, $-2a+4b=0$

$\therefore ab=8$, $a=2b$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $a=4$, $b=2$

따라서 $f(x)=4x+4$, $g(x)=2x-2$이므로

$f(1)g(2)=8\times2=16$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.191

01 4	**02** 18	**03** 11	**04** 10
05 −5	**06** 2	**07** 21	

01

$\int f(x)dx=x^3-x^2+x+C$에서

$f(x)=(x^3-x^2+x+C)'=3x^2-2x+1$

이때 $f'(x)=6x-2$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6-2=4$$

답 4

02

$\int f(x)dx=x^4-2ax^2+ax+C$에서

$f(x)=(x^4-2ax^2+ax+C)'=4x^3-4ax+a$

$f(1)=-2$에서 $4-4a+a=-2$

$3a=6 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=4x^3-8x+2$이므로

$f(2)=32-16+2=18$

답 18

03

$f(x)=\int xg(x)dx$에서 $f'(x)=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x^3+5x$에서

$f'(x)-g'(x)=2x^3+5x$이므로

$xg(x)-g'(x)=2x^3+5x$ ⋯ (*)

이때 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=4x+a$

$$\begin{aligned}\therefore xg(x)-g'(x)&=x(2x^2+ax+b)-(4x+a)\\&=2x^3+ax^2+(b-4)x-a\\&=2x^3+5x\end{aligned}$$

즉, $a=0$, $b-4=5$에서 $a=0$, $b=9$

따라서 $g(x)=2x^2+9$이므로

$g(1)=2+9=11$

답 11

보충 설명

$g(x)$가 n차 함수이면 $xg(x)$는 $(n+1)$차, $g'(x)$는 $(n-1)$차 함수이므로 (*)의 좌변은 $(n+1)$차 함수이다. 이때 (*)의 우변의 최고차항이 $2x^3$이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

04

$f(x)=2x^3-5x^2+12x-7$에서

$f'(x)=6x^2-10x+12$

함수 $f(x)+g(x)$는 함수 $-f(x)+2g(x)$의 부정적분 중 하나이므로

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=-f(x)+2g(x)$

$\therefore f'(x)+g'(x)=-f(x)+2g(x)$

위의 식에 $f(x)$와 $f'(x)$를 대입하면

$6x^2-10x+12+g'(x)$

$=-2x^3+5x^2-12x+7+2g(x)$

$\therefore 2g(x)-g'(x)=2x^3+x^2+2x+5$

이때 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=3x^2+2ax+b$

$$\begin{aligned}\therefore\ &2g(x)-g'(x)\\&=2(x^3+ax^2+bx+c)-(3x^2+2ax+b)\\&=2x^3+(2a-3)x^2+(2b-2a)x+2c-b\\&=2x^3+x^2+2x+5\end{aligned}$$

즉, $2a-3=1$, $2b-2a=2$, $2c-b=5$에서

$a=2$, $b=3$, $c=4$

따라서 $g(x)=x^3+2x^2+3x+4$이므로

$g(1)=1+2+3+4=10$

답 10

05

$\frac{d}{dx}\left\{\int(-3x^2+bx+c)dx\right\}=ax^2+6x-8$의 좌변은

$\frac{d}{dx}\left\{\int(-3x^2+bx+c)dx\right\}=-3x^2+bx+c$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$-3x^2+bx+c=ax^2+6x-8$이 성립한다.

따라서 $a=-3$, $b=6$, $c=-8$이므로

$a+b+c=-3+6+(-8)=-5$

답 -5

06

$$g(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}$$
$$=f(x)$$
$$=-3x^2+12x$$

$\therefore\ g(-1)=-3-12=-15$

$$h(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$$
$$=f(x)+C$$
$$=-3x^2+12x+C$$
$$=-3(x-2)^2+12+C$$

즉, 이차함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $12+C$를 갖는다.

이때 함수 $h(x)$의 최댓값이 10이므로

$12+C=10 \qquad \therefore\ C=-2$

따라서 $h(x)=-3x^2+12x-2$이므로

$h(-1)=-3-12-2=-17$

$\therefore\ g(-1)-h(-1)=-15-(-17)=2$

답 2

07

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C_1$이라 하면

$$F(x)=\int\left(\frac{d}{dx}\left[\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]\right)dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$$
$$=\int f'(x)dx$$
$$=f(x)+C_2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(가)

$f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+6x^5$에서

$f(0)=1$

이때 $F(0)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=f(0)+C_2,\ 1=1+C_2$

$\therefore\ C_2=0$

따라서 $F(x)=f(x)=1+2x+3x^2+\cdots+6x^5$이므로

(나)

$$F(1)=1+2+3+4+5+6$$
$$=21$$

(다)

답 21

단계	채점 기준	배점
(가)	부정적분과 미분의 관계를 이용하여 $F(x)$와 $f(x)$ 사이의 관계식을 구한 경우	40 %
(나)	$F(0)=1$임을 이용하여 $F(x)$의 식을 구한 경우	40 %
(다)	$F(1)$의 값을 구한 경우	20 %

2 부정적분의 계산

기본 + 필수연습

본문 pp.195~203

13 (1) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (2) $\frac{1}{72}x^{72}+C$

14 (1) $-x^2+5x+C$ (2) $-x^4+2x^2+3x+C$ (3) $\frac{1}{4}x^4-x+C$

15 (1) $\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

16 $f(x)=x^3+2x^2+2x-1$

17 (1) $\frac{1}{4}x^4-8x+C$ (2) x^2+8x+C (3) $-\frac{1}{2}x^2+4x+C$ (4) $x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

18 (1) -21 (2) -35 **19** 5 **20** -5

21 $\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+8x+C$ **22** 17

23 -8 **24** 20 **25** 34

26 $f(x)=-4x^3+9x^2+8$ **27** $\frac{32}{3}$ **28** 9

29 $\frac{11}{6}$ **30** $\frac{5}{12}$ **31** 42 **32** 32

13

(1) $\int x^9dx=\frac{1}{10}x^{10}+C$ (2) $\int x^{71}dx=\frac{1}{72}x^{72}+C$

답 (1) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (2) $\frac{1}{72}x^{72}+C$

14

(1) $\int(-2x+5)dx=\int(-2x)dx+\int 5dx$

$$=-2\int xdx+5\int dx$$
$$=-2\left(\frac{1}{2}x^2+C_1\right)+5(x+C_2)$$
$$=-x^2+5x+C$$

(2) $\int(-4x^3+4x+3)dx$

$=\int(-4x^3)dx+\int 4x\,dx+\int 3\,dx$

$=-4\int x^3dx+4\int x\,dx+3\int dx$

$=-4\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)+4\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right)+3(x+C_3)$

$=-x^4+2x^2+3x+C$

(3) $\int(x-1)(x^2+x+1)dx$

$=\int(x^3-1)dx=\int x^3dx-\int dx$

$=\left(\frac{1}{4}x^4+C_1\right)-(x+C_2)$

$=\frac{1}{4}x^4-x+C$

답 (1) $-x^2+5x+C$ (2) $-x^4+2x^2+3x+C$

(3) $\frac{1}{4}x^4-x+C$

15

(1) $\int(x-1)^3dx+\int(x+1)^3dx$

$=\int\{(x-1)^3+(x+1)^3\}dx$

$=\int(2x^3+6x)dx$

$=2\int x^3dx+6\int x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$

(2) $\int\frac{x^3}{x^2-x+1}dx+\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$

$=\int\frac{x^3+1}{x^2-x+1}dx$

$=\int\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx$

$=\int(x+1)dx$

$=\int x\,dx+\int dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

답 (1) $\frac{1}{2}x^4+3x^2+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

16

$f'(x)=3x^2+4x+2$에서

$f(x)=\int(3x^2+4x+2)dx$

$=x^3+2x^2+2x+C$

이때 $f(1)=4$이므로 $5+C=4$ $\therefore C=-1$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2+2x-1$

답 $f(x)=x^3+2x^2+2x-1$

17

(1) $\int(x-2)(x^2+2x+4)dx=\int(x^3-8)dx$

$=\int x^3dx-8\int dx$

$=\frac{1}{4}x^4-8x+C$

(2) $\int(\sqrt{x}-2)^2dx+\int(\sqrt{x}+2)^2dx$

$=\int\{(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{x}+2)^2\}dx$

$=\int(2x+8)dx$

$=2\int x\,dx+8\int dx$

$=x^2+8x+C$

(3) $\int\frac{2x}{x+2}dx-\int\frac{x^2-8}{x+2}dx$

$=\int\left(\frac{2x}{x+2}-\frac{x^2-8}{x+2}\right)dx$

$=\int\frac{-x^2+2x+8}{x+2}dx$

$=\int\frac{-(x+2)(x-4)}{x+2}dx$

$=\int(-x+4)dx$

$=-\int x\,dx+4\int dx$

$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$

(4) $\int (x+y)^2 dy$

$=\int (x^2+2xy+y^2)dy$

$=\underbrace{x^2\int dy+2x\int y\,dy+\int y^2 dy}_{y\text{ 이외의 문자는 상수로 생각한다.}}$

$=x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

답 (1) $\frac{1}{4}x^4-8x+C$ (2) x^2+8x+C

(3) $-\frac{1}{2}x^2+4x+C$ (4) $x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3+C$

18

(1) $f(x)=\int (2x-1)^2dx-\int x(2x+1)^2dx$

$=\int (4x^2-4x+1)dx-\int (4x^3+4x^2+x)dx$

$=\int (-4x^3-5x+1)dx$

$=-x^4-\frac{5}{2}x^2+x+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$이므로

$f(x)=-x^4-\frac{5}{2}x^2+x+3$

$\therefore f(2)=-16-10+2+3=-21$

(2) $f(x)=\int (2+3\sqrt{x})^2dx+\int (2-3\sqrt{x})^2dx$

$=\int \{(2+3\sqrt{x})^2+(2-3\sqrt{x})^2\}dx$

$=\int (18x+8)dx=9x^2+8x+C$

$f(2)=0$에서 $36+16+C=0$ $\therefore C=-52$

따라서 $f(x)=9x^2+8x-52$이므로

$f(1)=9+8-52=-35$

답 (1) -21 (2) -35

19

$f(x)=\int (1+2x+3x^2+\cdots+10x^9)dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+C$

이때 $f(0)=5$이므로 $C=5$

따라서 $f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}+5$이므로

$f(-1)=-1+1-1+\cdots+1+5=5$

답 5

20

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (3x^2+ax+5)dx$

$=x^3+\frac{a}{2}x^2+5x+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

즉, $f(x)=x^3+\frac{a}{2}x^2+5x+3$이므로

$f(-2)=5$에서

$-8+2a-10+3=5,\ 2a=20$ $\therefore a=10$

따라서 $f(x)=x^3+5x^2+5x+3$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{5}{1}=-5$

답 -5

21

$f'(x)=6x^2-4x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (6x^2-4x)dx$

$=2x^3-2x^2+C_1$

$f(-1)=4$에서 $-2-2+C_1=4$ $\therefore C_1=8$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+8$이므로

$\int f(x)dx=\int (2x^3-2x^2+8)dx$

$=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+8x+C$

답 $\int f(x)dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+8x+C$

22

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x-1$이므로

$f'(x)=3x-1$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(3x-1)dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-2,\ 5)$를 지나므로 $f(-2)=5$에서

$6+2+C=5 \qquad \therefore\ C=-3$

$$\therefore\ f(x)=\frac{3}{2}x^2-x-3$$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(4,\ k)$를 지나므로

$f(4)=k$에서 $k=24-4-3=17$

답 17

23

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(-3x^2+12x-9)dx$$
$$=-x^3+6x^2-9x+C$$

또한,

$f'(x)=-3x^2+12x-9$

$=-3(x-1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -12를 가지므로

$f(1)=-12$에서

$-1+6-9+C=-12 \qquad \therefore\ C=-8$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-9x-8$이고 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 극댓값은

$f(3)=-27+54-27-8=-8$

답 -8

24

주어진 그래프에 의하여

$f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a\ (a>0)$

라 할 수 있다.

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(ax^2-a)dx$$
$$=\frac{a}{3}x^3-ax+C \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4, $x=1$에서 극솟값 0을 가지므로 ㉠에서

$$f(-1)=-\frac{a}{3}+a+C=\frac{2a}{3}+C=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$f(1)=\frac{a}{3}-a+C=-\frac{2a}{3}+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3,\ C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(3)=27-9+2=20$

답 20

25

함수 $f(x)$가 $x=2,\ x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=f'(4)=0$

즉, 0이 아닌 실수 a에 대하여

$f'(x)=a(x-2)(x-4)$

$=ax^2-6ax+8a$

$=a(x-3)^2-a$

라 할 수 있다.

이때 이차함수 $f'(x)$가 최댓값을 가지려면 이차함수의 최고차항의 계수는 음수이어야 하므로

$a<0$

즉, 함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $-a$를 가지므로

$-a=3 \qquad \therefore\ a=-3$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(-3x^2+18x-24)dx$

$=-x^3+9x^2-24x+C$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나므로

$f(0)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=-x^3+9x^2-24x$이므로

$f(-1)=1+9+24=34$

답 34

26

$xf(x)=F(x)-3x^4+6x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=F'(x)-12x^3+18x^2$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)+xf'(x)=f(x)-12x^3+18x^2$

$xf'(x)=-12x^3+18x^2$

$\therefore\ f'(x)=-12x^2+18x$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\int(-12x^2+18x)dx$

$=-4x^3+9x^2+C$

$f(0)=8$에서 $C=8$이므로

$f(x)=-4x^3+9x^2+8$

답 $f(x)=-4x^3+9x^2+8$

27

조건 (가)에서 $F(x)-xf(x)=x^4+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=4x^3+6x$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)-f(x)-xf'(x)=4x^3+6x$

$-xf'(x)=4x^3+6x$

$\therefore\ f'(x)=-4x^2-6$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(-4x^2-6)dx$

$=-\frac{4}{3}x^3-6x+C$ ……㉠

조건 (나)에서 $F(3)=0$이므로

$F(x)-xf(x)=x^4+3x^2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$F(3)-3f(3)=81+27=108$

$-3f(3)=108$ $\therefore\ f(3)=-36$

㉠에서 $f(3)=-36-18+C$, 즉 $-36=-54+C$이므로

$C=18$

따라서 $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-6x+18$이므로

$f(1)=-\frac{4}{3}-6+18=\frac{32}{3}$

답 $\frac{32}{3}$

28

$F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$(x+2)f'(x)=3(x+2)(x-2)$

$\therefore\ f'(x)=3(x-2)=3x-6$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(3x-6)dx$

$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$ ……㉠

$F(0)=30$이므로 $F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$F(0)=2f(0)$에서 $2f(0)=30$ $\therefore\ f(0)=15$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=C$ $\therefore\ C=15$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$이므로

$f(2)=6-12+15=9$

답 9

29

$$f'(x)=\begin{cases} -x & (x<1) \\ x^2+2x-4 & (x>1) \end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+C_1 & (x<1) \\ \frac{1}{3}x^3+x^2-4x+C_2 & (x\geq1) \end{cases}$$

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$에서

$\frac{1}{3}+1-4+C_2=-\frac{1}{2}+1 \qquad \therefore C_2=\frac{19}{6}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+1 & (x<1) \\ \frac{1}{3}x^3+x^2-4x+\frac{19}{6} & (x\geq1) \end{cases}$ 이므로

$f(2)=\frac{8}{3}+4-8+\frac{19}{6}=\frac{11}{6}$

답 $\frac{11}{6}$

30

$$f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x<-1) \\ \frac{1}{3}x^3+C_2 & (-1\leq x<1) \\ -x+C_3 & (x\geq1) \end{cases}$$

$f(0)=-\frac{1}{24}$이므로 $C_2=-\frac{1}{24}$

또한, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로

$x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$에서

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{24}=1+C_1 \qquad \therefore C_1=-\frac{11}{8}$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$에서

$-1+C_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{24} \qquad \therefore C_3=\frac{31}{24}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -x-\frac{11}{8} & (x<-1) \\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{24} & (-1\leq x<1) \\ -x+\frac{31}{24} & (x\geq1) \end{cases}$$

방정식 $f(x)=0$에서

$x<-1$이면 $-x-\frac{11}{8}=0 \qquad \therefore x=-\frac{11}{8}$

$-1\leq x<1$이면 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{24}=0$, $x^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$

$x\geq1$이면 $-x+\frac{31}{24}=0 \qquad \therefore x=\frac{31}{24}$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$-\frac{11}{8}+\frac{1}{2}+\frac{31}{24}=\frac{5}{12}$

답 $\frac{5}{12}$

31

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \qquad \therefore f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h} \quad (\because ㉠) \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh}{h} \\ &=x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h} \\ &=x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because f(0)=0) \\ &=x+f'(0) \\ &=x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)dx \\ &=\int(x+4)dx \\ &=\frac{1}{2}x^2+4x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$f(6)=18+24=42$

답 42

32

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)+4$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+4 \quad \therefore\ f(0)=-4$

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)+4-f(1)}{h}\ (\because ㉠)\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+h^2+h+4}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+4}{h}+h+1\right\}\\ &=1+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+4}{h}\\ &=1+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=-4)\\ &=1+f'(0) \end{aligned}$$

이때 $f'(1)=10$이므로

$1+f'(0)=10 \quad \therefore\ f'(0)=9$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)+4-f(x)}{h}\ (\because ㉠)\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2+4}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)+4}{h}+x^2+xh\right\}\\ &=x^2+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+4}{h}\\ &=x^2+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=-4)\\ &=x^2+f'(0)=x^2+9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x)&=\int f'(x)dx=\int (x^2+9)dx\\ &=\frac{1}{3}x^3+9x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+9x-4$이므로

$f(3)=9+27-4=32$

답 32

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.204~205

08 31	**09** $-\frac{8}{3}$	**10** 16	**11** 3
12 -6	**13** 2	**14** $\frac{59}{3}$	**15** $\frac{3}{4}$
16 -3	**17** 96	**18** 10	**19** -5

08

$$\begin{aligned} f(x)&=\int\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^9}{9}\right)dx\\ &=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots+\frac{1}{9\times10}x^{10}+C \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(1)&=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}+C\\ &=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)\\ &\qquad+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)+C\\ &=1-\frac{1}{10}+C=\frac{9}{10}+C \end{aligned}$$

이때 $f(1)=4$이므로 $\frac{9}{10}+C=4 \quad \therefore\ C=\frac{31}{10}$

따라서

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4\\ &\qquad+\cdots+\frac{1}{9\times10}x^{10}+\frac{31}{10} \end{aligned}$$

이므로 $f(0)=\frac{31}{10}$

$\therefore\ 10f(0)=10\times\frac{31}{10}=31$

답 31

보충 설명

부분분수로의 변형 |

(1) $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$, $AB\neq 0$)

(2) $\dfrac{1}{ABC}=\dfrac{1}{C-A}\left(\dfrac{1}{AB}-\dfrac{1}{BC}\right)$ (단, $A\neq C$, $ABC\neq 0$)

09

조건 (가)에서 부정적분의 성질에 의하여

$$\int\{2f(x)-g(x)\}dx=2\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$=x^3-4x^2+C_1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 부정적분의 성질에 의하여

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$
$$=3x^2+6x-6+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-2+C_3,$$

$$\int g(x)dx=-\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+4x-4+C_4$$

이때 $h(x)$는 함수 $f(x)-g(x)$의 한 부정적분이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=\int\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int f(x)dx-\int g(x)dx\\&=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-2+C_3\right)\\&\quad-\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+4x-4+C_4\right)\\&=\frac{2}{3}x^3-\frac{11}{3}x^2-2x+2+C\end{aligned}$$

따라서 $h(1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{3}-2+2+C=-3+C$,

$h(-1)=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{3}+2+2+C=-\dfrac{1}{3}+C$이므로

$h(1)-h(-1)=-3+C-\left(-\dfrac{1}{3}+C\right)=-\dfrac{8}{3}$

답 $-\dfrac{8}{3}$

다른 풀이

조건 (가)에서 x^3-4x^2이 함수 $2f(x)-g(x)$의 한 부정적분이므로

$(x^3-4x^2)'=2f(x)-g(x)$

$\therefore\ 2f(x)-g(x)=3x^2-8x \quad \cdots\cdots ㉢$

조건 (나)에서 $3x^2+6x-6$이 함수 $f(x)+g(x)$의 한 부정적분이므로

$(3x^2+6x-6)'=f(x)+g(x)$

$\therefore\ f(x)+g(x)=6x+6 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}x+2$, $g(x)=-x^2+\dfrac{20}{3}x+4$이므로

$f(x)-g(x)=2x^2-\dfrac{22}{3}x-2$

이때 $h(x)$는 $f(x)-g(x)$의 한 부정적분이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=\int\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int\left(2x^2-\frac{22}{3}x-2\right)dx\\&=\frac{2}{3}x^3-\frac{11}{3}x^2-2x+C\end{aligned}$$

따라서 $h(1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{3}-2+C=-5+C$,

$h(-1)=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{3}+2+C=-\dfrac{7}{3}+C$이므로

$h(1)-h(-1)=-5+C-\left(-\dfrac{7}{3}+C\right)=-\dfrac{8}{3}$

10

$$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$$

한편, $\int g(x)dx=x^3+x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2+2x+1$

이때 $f(3)-g(3)=2$이므로

$$\begin{aligned}f(3)-g(3)&=(27-9+3+C)-(27+6+1)\\&=(21+C)-34\\&=C-13=2\end{aligned}$$

$\therefore\ C=15$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+15$이므로

$f(1)=1-1+1+15=16$

답 16

11

$f(x)$가 이차함수이고 $f(x)\underset{\text{다항함수}}{\underline{g(x)}}=3x^4+18x^3$이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

이때 $g(x)=\int\{f(x)-x^2\}dx$에서 $f(x)-x^2$은 일차함수이므로

$f(x)-x^2=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

라 하면

$$\begin{aligned}g(x)&=\int\{f(x)-x^2\}dx\\&=\int(ax+b)dx\\&=\frac{a}{2}x^2+bx+C\end{aligned}$$

$f(x)=x^2+ax+b$이므로

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=(x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)\\&=\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}+b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab+C\right)x^2\\&\qquad+(aC+b^2)x+bC\\&=3x^4+18x^3\end{aligned}$$

즉, $\frac{a}{2}=3$, $\frac{a^2}{2}+b=18$, $\frac{3}{2}ab+C=0$, $aC+b^2=0$, $bC=0$

이므로

$a=6$, $b=0$, $C=0$

따라서 $g(x)=3x^2$이므로 $g(1)=3$

답 3

12

$f'(x)=3x^2+2ax-1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx\\&=\int(3x^2+2ax-1)dx\\&=x^3+ax^2-x+C\end{aligned}$$

$f(x)$가 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=f(4)=0$에서

$$\begin{aligned}f(1)&=1+a-1+C\\&=a+C=0 \qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(4)&=64+16a-4+C\\&=60+16a+C=0 \qquad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-x+4$이므로

$f(2)=8-16-2+4=-6$

답 -6

13

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore\ y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$

즉, $f'(t)x-tf'(t)+f(t)=(-t+4)x+g(t)$에서

$f'(t)=-t+4$, $g(t)=f(t)-tf'(t) \qquad\cdots\cdots㉠$

$$\begin{aligned}f(t)&=\int f'(t)dt\\&=\int(-t+4)dt\\&=-\frac{1}{2}t^2+4t+C\end{aligned}$$

이때 $f(1)=1$이므로

$-\frac{1}{2}+4+C=1 \qquad \therefore\ C=-\frac{5}{2}$

$\therefore\ f(t)=-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}$

㉠에서

$$\begin{aligned}g(t)&=f(t)-tf'(t)\\&=\left(-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}\right)-t(-t+4)\\&=-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}+t^2-4t\\&=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ g(3)=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2$

답 2

14

$f'(x)=x(x-4)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)$, $x=4$에서 극솟값 $f(4)$를 갖는다. 이때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x^2-4x)dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$$

이므로

$f(0)=C$, $f(4)=\frac{64}{3}-32+C=C-\frac{32}{3}$

함수 $f(x)$의 극댓값은 극솟값의 2배이므로

$f(0)=2f(4)$

$C=2C-\frac{64}{3}$　　$\therefore C=\frac{64}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{64}{3}$이므로

$f(1)=\frac{1}{3}-2+\frac{64}{3}=\frac{59}{3}$

답 $\frac{59}{3}$

15

$\int\{2-f(x)\}dx=ax^4+bx^3+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2-f(x)=4ax^3+3bx^2$

$\therefore f(x)=-4ax^3-3bx^2+2$, $f'(x)=-12ax^2-6bx$

한편, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 2, $x=2$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f'(0)=f'(2)=0$, $f(0)=2$, $f(2)=-2$

$f'(2)=0$에서 $-48a-12b=0$

$\therefore 4a+b=0$　　……㉠

또한, $f(2)=-2$에서

$-32a-12b+2=-2$

$\therefore 8a+3b=1$　　……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{4}$, $b=1$

$\therefore a+b=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

16

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때 주어진 그래프에서 $f'(-1)=f'(1)=f'(3)=0$이므로

$$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)=4x^3-12x^2-4x+12$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x^3-12x^2-4x+12)dx=x^4-4x^3-2x^2+12x+C$$

또한, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$C-9$	↗	$C+7$	↘	$C-9$	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 최솟값 -12를 가지므로

$C-9=-12$　　$\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-3$이므로

$f(2)=16-32-8+24-3=-3$

답 -3

17

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$$xf(x)=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx=\int(8x^3-9x^2+4x-1)dx\ (\because \text{조건 (가)})=2x^4-3x^3+2x^2-x+C_1$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $C_1=0$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=2x^3-3x^2+2x-1$

$\therefore f(0)=-1$

$f(0)+g(0)=1$에서 $-1+g(0)=1$

$\therefore g(0)=2$

한편, $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$이므로

$$f(x)-g(x)=\int\{f'(x)-g'(x)\}dx$$
$$=\int(3x^2-2x+3)dx\ (\because \text{ 조건 (나)})$$
$$=x^3-x^2+3x+C_2$$
위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)-g(0)=C_2 \qquad \therefore C_2=-1-2=-3$
즉, $f(x)-g(x)=x^3-x^2+3x-3$이므로
$$g(x)=f(x)-(x^3-x^2+3x-3)$$
$$=(2x^3-3x^2+2x-1)-(x^3-x^2+3x-3)$$
$$=x^3-2x^2-x+2$$
따라서 $f(-1)=-2-3-2-1=-8$,
$g(-2)=-8-8+2+2=-12$이므로
$f(-1)g(-2)=(-8)\times(-12)=96$

답 96

18

$f'(x)=2x+|x^2-1|\ (x\neq-1,\ x\neq1)$에서
$$f'(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -x^2+2x+1 & (-1<x<1) \end{cases}$$ 이므로
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x^2-x+C_1 & (x<-1) \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C_2 & (-1\le x<1) \\ \frac{1}{3}x^3+x^2-x+C_3 & (x\ge1) \end{cases}$$
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$f(0)=1$에서 $C_2=1$
또한, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=-1,\ x=1$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서
$$\frac{1}{3}+1-1+1=-\frac{1}{3}+1+1+C_1$$
$$\therefore C_1=-\frac{1}{3}$$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서
$$\frac{1}{3}+1-1+C_3=-\frac{1}{3}+1+1+1$$
$$\therefore C_3=\frac{7}{3}$$
따라서 $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x^2-x-\frac{1}{3} & (x<-1) \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1 & (-1\le x<1) \\ \frac{1}{3}x^3+x^2-x+\frac{7}{3} & (x\ge1) \end{cases}$$
이므로
$$f(-2)+f(2)=\left(-\frac{8}{3}+4+2-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}+4-2+\frac{7}{3}\right)$$
$$=10$$

답 10

19

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy(x+y)-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$
㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)-1 \qquad \therefore f(0)=1$
$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h(1+h)-1-f(1)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-h^2-h-1}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}-h-1\right\}$$
$$=-1+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$
$$=-1+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=1)$$
$$=-1+f'(0)$$
이때 $f'(1)=4$이므로 $-1+f'(0)=4 \qquad \therefore f'(0)=5$
도함수의 정의에 의하여
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh(x+h)-1-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-x^2h-xh^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-1}{h}-x^2-xh\right\}$$

$$=-x^2+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$
$$=-x^2+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because f(0)=1)$$
$$=-x^2+f'(0)=-x^2+5$$
$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+5)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+5x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+5x+1$이므로

$f(-3)=9-15+1=-5$

답 -5

STEP 2 개념 마무리

본문 p.206

1 -7	**2** 1	**3** 83	**4** 50
5 $-\frac{15}{2}$	**6** $-\frac{7}{4}$		

1

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$\frac{d}{dx}f(x)=x^2+g(x)$에서

$2ax+b=x^2+g(x)$

$\therefore g(x)=-x^2+2ax+b$

$\frac{d}{dx}\left[\int\{f(x)+g(x)\}dx\right]=-4x$에서

$f(x)+g(x)=-4x$이므로

$(ax^2+bx+c)+(-x^2+2ax+b)=-4x$

$\therefore (a-1)x^2+(2a+b+4)x+b+c=0$

위의 식은 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ 2a+b+4=0,\ b+c=0$

$\therefore a=1,\ b=-6,\ c=6$

따라서 $f(x)=x^2-6x+6$, $g(x)=-x^2+2x-6$이므로

$f(2)+g(1)=(4-12+6)+(-1+2-6)$

$=-7$

답 -7

2

$f(x)=\frac{d}{dx}\left[\int\{x^2f(x)+2x-g(x)\}dx\right]$에서

$f(x)=x^2f(x)+2x-g(x)$ ······㉠

$\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=x^2f(x)+x+3$에서

$g(x)+C=x^2f(x)+x+3$ ······㉡

이때 $f(0)=1$이므로 ㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=-g(0),\ g(0)+C=3$

$\therefore g(0)=-1,\ C=4$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$g(x)=x^2f(x)+x-1$ ······㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^2f(x)+2x-\{x^2f(x)+x-1\}$

$=x+1$

$\therefore g(x)=x^2(x+1)+x-1$ ($\because$ ㉢)

$=x^3+x^2+x-1$

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$x+1=x^3+x^2+x-1$

$x^3+x^2-2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore x=1$ ($\because \underbrace{x^2+2x+2}_{=(x+1)^2+1}>0$)

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 1

3 본문 p.194 한 걸음 더 참고

$f(x)=(x+1)(x-5)^9$

$=\{(x-5)+6\}(x-5)^9$

$=(x-5)^{10}+6(x-5)^9$

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(x)=\int f(x)dx$

$=\int\{(x-5)^{10}+6(x-5)^9\}dx$

$=\int(x-5)^{10}dx+6\int(x-5)^9dx$

$=\frac{1}{11}(x-5)^{11}+\frac{3}{5}(x-5)^{10}+C$

$F(5)=0$에서 $C=0$

즉, $F(x)=\frac{1}{11}(x-5)^{11}+\frac{3}{5}(x-5)^{10}$이므로

$F(4)=\frac{1}{11}\times(-1)^{11}+\frac{3}{5}\times(-1)^{10}=\frac{28}{55}$

따라서 $p=55$, $q=28$이므로

$p+q=55+28=83$

답 83

다른 풀이

$x-5=t$로 놓으면 $x=t+5$이므로

$f(t+5)=(t+6)t^9=t^{10}+6t^9$

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(t+5)=\int f(t+5)dt=\int(t^{10}+6t^9)dt$

$=\frac{1}{11}t^{11}+\frac{3}{5}t^{10}+C$

$F(5)=0$이므로 위의 식의 양변에 $\underbrace{t=0}_{t=x-5=5-5=0}$을 대입하면

$C=0$

즉, $F(t+5)=\frac{1}{11}t^{11}+\frac{3}{5}t^{10}$이므로 양변에 $\underbrace{t=-1}_{t=x-5=4-5=-1}$을 대입하면

$F(4)=\frac{1}{11}\times(-1)^{11}+\frac{3}{5}\times(-1)^{10}=\frac{28}{55}$

따라서 $p=55$, $q=28$이므로

$p+q=55+28=83$

4

최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=0$, $x=\alpha$ (중근)이므로

$f(x)=2x(x-\alpha)^2$ ……㉠

조건 ㈎에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$g(x)=\int\{xf(x)\}'dx=xf(x)+C$ ……㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$g(x)=2x^2(x-\alpha)^2+C$

$g'(x)=4x(x-\alpha)^2+4x^2(x-\alpha)=4x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 ㈏에서 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극소이고 극솟값이 0이므로

$g(0)=g(\alpha)=C=0$ $\quad\therefore g(x)=2x^2(x-\alpha)^2$

또한, 함수 $g(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극대이고 극댓값이 32이므로

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\times\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\times\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2=32$

$\frac{\alpha^4}{8}=32$, $\alpha^4-256=0$

$(\alpha+4)(\alpha-4)(\alpha^2+16)=0$

$\therefore \alpha=4$ $(\because \alpha>0)$

따라서 $g(x)=2x^2(x-4)^2$이므로

$g(5)=2\times5^2\times(5-4)^2=50$

답 50

5

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$2F(x)=(x-1)\{f(x)-4\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2F'(x)=f(x)-4+(x-1)f'(x)$

$2f(x)=f(x)-4+(x-1)f'(x)$

$\therefore f(x)=(x-1)f'(x)-4$ ……㉠

이때 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 음이 아닌 정수)이라 하자. $-(*)$

(i) $n=0$일 때,

$f(x)=1$, $f'(x)=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=1$일 때,

$f(x)=x+a$ (a는 실수)라 하면

$f'(x)=1$

㉠에서

$x+a=(x-1)\times1-4=x-5$

$\therefore\ a=-5$

$\therefore\ f(x)=x-5$

(iii) $n\geq2$일 때,

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$

($a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$은 실수)

이라 하면

$$f'(x)=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$$

㉠에서

$$\begin{aligned}&x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n\\&=(x-1)\{nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\}-4\\&=nx^n+\{a_1(n-1)-n\}x^{n-1}\\&\quad+\{a_2(n-2)-a_1(n-1)\}x^{n-2}+\cdots-a_{n-1}-4\end{aligned}$$

$\therefore\ n=1$

그런데 $n\geq2$이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=x-5$이므로

$$\begin{aligned}2F(x)&=(x-1)\{(x-5)-4\}\\&=(x-1)(x-9)\\&=x^2-10x+9\end{aligned}$$

따라서 $F(x)=\frac{1}{2}(x^2-10x+9)$이므로

$F(4)=\frac{1}{2}\times(16-40+9)=-\frac{15}{2}$

답 $-\frac{15}{2}$

보충 설명

(*)에서 $F(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{n+1}$이므로 주어진 등식의 최고차항의 계수를 비교하면

$2\times\frac{1}{n+1}=1,\ 2=n+1\qquad\therefore\ n=1$

즉, $f(x)=x+a$라 하면 ㉠에서

$x+a=(x-1)\times1-4\qquad\therefore\ a=-5$

따라서 $f(x)=x-5$이다.

6

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<-1\text{ 또는 }x>1)\\ x+1 & (-1<x<0)\\ -x+1 & (0<x<1)\end{cases}\text{ 이므로}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x<-1)\\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (-1\leq x<0)\\ -\frac{1}{2}x^2+x+C_3 & (0\leq x<1)\\ -x+C_4 & (x\geq1)\end{cases}$$

이때 $f(0)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=0$에서

$C_2=C_3=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$\frac{1}{2}-1=1+C_1\qquad\therefore\ C_1=-\frac{3}{2}$

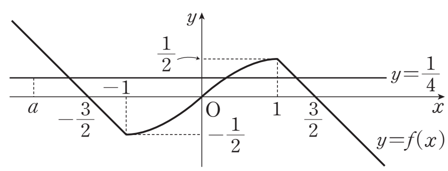
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$-1+C_4=-\frac{1}{2}+1\qquad\therefore\ C_4=\frac{3}{2}$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x-\frac{3}{2} & (x<-1)\\ \frac{1}{2}x^2+x & (-1\leq x<0)\\ -\frac{1}{2}x^2+x & (0\leq x<1)\\ -x+\frac{3}{2} & (x\geq1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $a<0$이고, $f(a)=\frac{1}{4}$이므로 $a<-\frac{3}{2}$

따라서 $f(a)=-a-\frac{3}{2}$이므로

$-a-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ a=-\frac{7}{4}$

답 $-\frac{7}{4}$

08. 정적분

1 정적분

기본 + 필수연습

본문 pp.213~220

01 (1) 2 (2) $-\frac{15}{2}$

02 (1) $6x^2-8x$ (2) $(x-1)(x^2+4)$

03 (1) -7 (2) 52 **04** (1) -116 (2) 10

05 9 **06** 10 **07** $-\frac{73}{12}$ **08** $\frac{13}{24}$

09 6 **10** (1) 9 (2) 3 **11** 4

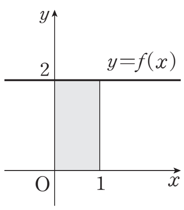
12 $\frac{1}{4}$ **13** 45 **14** $-\frac{5}{4}$ **15** 1

16 20 **17** -9 **18** $\frac{16}{3}$

19 (1) 91 (2) 17 **20** 5

01

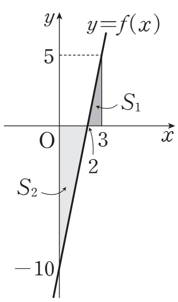
(1) $f(x)=2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 정적분의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$\int_0^1 2dx=2\times1=2$$

(2) $f(x)=5x-10$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 도형 중에서 $f(x)\geq0$인 부분의 넓이를 S_1, $f(x)\leq0$인 부분의 넓이를 S_2라 하면



$$\int_0^3(5x-10)\,dx=S_1-S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times5-\left(\frac{1}{2}\times2\times10\right)$$
$$=-\frac{15}{2}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{15}{2}$

02

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x(6t^2-8t)dt=6x^2-8x$

(2) $\frac{d}{dx}\int_3^x(t-1)(t^2+4)dt=(x-1)(x^2+4)$

답 (1) $6x^2-8x$ (2) $(x-1)(x^2+4)$

03

(1) $\int_{-1}^0(12x^3+4x-2)dx=\left[3x^4+2x^2-2x\right]_{-1}^0$

$=-(3+2+2)=-7$

(2) $\int_2^3(9t^2-2t)dt=\left[3t^3-t^2\right]_2^3$

$=(81-9)-(24-4)=52$

답 (1) -7 (2) 52

04

(1) $\int_{-2}^0(x+3)^3dx+\int_{-2}^0(x-3)^3dx$

$=\int_{-2}^0\{(x+3)^3+(x-3)^3\}dx$

$=\int_{-2}^0(2x^3+54x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+27x^2\right]_{-2}^0$

$=-(8+108)=-116$

(2) $\int_1^3\left(\frac{9}{2}x^2-9x\right)dx-\int_3^1\left(-\frac{3}{2}t^2+5t\right)dt$

$=\int_1^3\left(\frac{9}{2}x^2-9x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{3}{2}x^2+5x\right)dx$

$=\int_1^3\left\{\left(\frac{9}{2}x^2-9x\right)+\left(-\frac{3}{2}x^2+5x\right)\right\}dx$

$=\int_1^3(3x^2-4x)dx$

$=\left[x^3-2x^2\right]_1^3$

$=(27-18)-(1-2)=10$

답 (1) -116 (2) 10

05

$$\int_{-1}^{1}(x^2+4x)dx+\int_{1}^{2}(x^2+4x)dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\right)=9$$

답 9

06

$$2|x+2|=\begin{cases}-2x-4 & (x<-2)\\ 2x+4 & (x\geq-2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{-3}^{1}2|x+2|dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(-2x-4)dx+\int_{-2}^{1}(2x+4)dx$$
$$=\left[-x^2-4x\right]_{-3}^{-2}+\left[x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\{(-4+8)-(-9+12)\}+\{(1+4)-(4-8)\}$$
$$=10$$

답 10

07

(주어진 식)

$$=\int_{1}^{2}(x-2)(x^2+2x+4)dx-\int_{-1}^{0}(x+1)(4x+5)dx$$
$$=\int_{1}^{2}(x^3-8)dx-\int_{-1}^{0}(4x^2+9x+5)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x\right]_{1}^{2}-\left[\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2+5x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left\{(4-16)-\left(\frac{1}{4}-8\right)\right\}+\left(-\frac{4}{3}+\frac{9}{2}-5\right)$$
$$=-\frac{17}{4}-\frac{11}{6}=-\frac{73}{12}$$

답 $-\frac{73}{12}$

08

함수 $f(x)=x-2$를 주어진 식에 대입하면

$$\int_{-1}^{1}(x-2)^2dx=k\left\{\int_{-1}^{1}(x-2)dx\right\}^2$$ 에서

$$\int_{-1}^{1}(x-2)^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2-4x+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{3}-2+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2-4\right)=\frac{26}{3}$$

$$k\left\{\int_{-1}^{1}(x-2)dx\right\}^2=k\left(\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{1}\right)^2$$
$$=k\times\left\{\left(\frac{1}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right\}^2=16k$$

따라서 $\frac{26}{3}=16k$이므로

$$k=\frac{26}{3}\times\frac{1}{16}=\frac{13}{24}$$

답 $\frac{13}{24}$

09

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$이므로

$$f'(x)=(x-2)(x-4)+(x-1)(x-4)+(x-1)(x-2)$$
$$=3x^2-14x+14$$
$$\therefore \int_{0}^{3}f'(x)dx=\int_{0}^{3}(3x^2-14x+14)dx$$
$$=\left[x^3-7x^2+14x\right]_{0}^{3}$$
$$=27-63+42$$
$$=6$$

답 6

10

(1) $\int_{0}^{1}(as^2+1)ds=\left[\frac{a}{3}s^3+s\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}a+1$

즉, $\frac{1}{3}a+1=4$에서 $\frac{1}{3}a=3$ $\quad\therefore a=9$

(2) $\int_{a}^{0}(t^2-4t+3)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{a}^{0}$

$$=-\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2+3a\right)$$

즉, $-\frac{1}{3}a^3+2a^2-3a=0$에서

$a^3-6a^2+9a=0$, $a(a-3)^2=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 (1) 9 (2) 3

11

$$(\text{좌변})=\int_0^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{(a+2)}{3}x^3+ax^2\right]_0^2$$
$$=4-\frac{8}{3}(a+2)+4a=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}$$

$$(\text{우변})=\int_a^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{(a+2)}{3}x^3+ax^2\right]_a^2$$
$$=\left\{4-\frac{8}{3}(a+2)+4a\right\}-\left\{\frac{1}{4}a^4-\frac{(a+2)}{3}a^3+a^3\right\}$$
$$=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}$$

즉, $\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}$에서

$\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3=0$, $\frac{1}{12}a^3(a-4)=0$

따라서 $a=0$ 또는 $a=4$이므로 모든 상수 a의 값의 합은

$0+4=4$

답 4

보충 설명

주어진 문제에서 $\int_0^2 f(x)dx=\int_a^2 f(x)dx$ 꼴만 보고 $a=0$으로 착각하기 쉽다. 적분 구간이 달라도 그 정적분의 값은 같을 수 있음에 유의하자.

12

$$\int_0^2 (3a^2x^2-2ax+1)dx=\left[a^2x^3-ax^2+x\right]_0^2$$
$$=8a^2-4a+2=8\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}$$

즉, 주어진 정적분은 $a=\frac{1}{4}$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$을 갖는다.

답 $\frac{1}{4}$

13

$$\int_4^5 \frac{x^4}{x^2-2}dx-\int_2^5 \frac{4}{x^2-2}dx+\int_2^4 \frac{x^4}{x^2-2}dx$$
$$=\int_2^4 \frac{x^4}{x^2-2}dx+\int_4^5 \frac{x^4}{x^2-2}dx-\int_2^5 \frac{4}{x^2-2}dx$$
$$=\int_2^5 \frac{x^4}{x^2-2}dx-\int_2^5 \frac{4}{x^2-2}dx$$
$$=\int_2^5 \frac{x^4-4}{x^2-2}dx=\int_2^5 \frac{(x^2+2)(x^2-2)}{x^2-2}dx$$
$$=\int_2^5 (x^2+2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_2^5$$
$$=\left(\frac{125}{3}+10\right)-\left(\frac{8}{3}+4\right)=45$$

답 45

14

$$\int_{-1}^3 (4x^2+ax)dx-\int_{-1}^3 (x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^3 \{(4x^2+ax)-(x^2+2x+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^3 \{3x^2+(a-2)x-1\}dx$$
$$=\left[x^3+\frac{1}{2}(a-2)x^2-x\right]_{-1}^3$$
$$=\left\{27+\frac{9}{2}(a-2)-3\right\}-\left\{-1+\frac{1}{2}(a-2)+1\right\}$$
$$=\left(\frac{9}{2}a+15\right)-\left(\frac{1}{2}a-1\right)=4a+16$$

즉, $4a+16=11$에서 $4a=-5$ $\therefore a=-\frac{5}{4}$

답 $-\frac{5}{4}$

15

$$\int_{-2}^3 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx$$
$$=-\int_1^{-2} f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx+\int_4^3 f(x)dx$$
$$=-\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}+\left(-\frac{2}{5}\right)=1$$

답 1

16

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{2}(3x^2-x)dx+\int_{2}^{3}5xdx$$
$$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{5}{2}x^2\right]_{2}^{3}$$
$$=\left\{(8-2)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left(\frac{45}{2}-10\right)$$
$$=20$$

답 20

17

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=\begin{cases} 2 & (x<0) \\ -\frac{1}{2}x+2 & (x\ge 0) \end{cases}$ 이므로

$$xf(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x & (x\ge 0) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{6} xf(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}2xdx+\int_{0}^{6}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)dx$$
$$=\left[x^2\right]_{-3}^{0}+\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2\right]_{0}^{6}$$
$$=-9+(-36+36)=-9$$

답 -9

18

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0}(2x+2)dx+\int_{0}^{a}(-x^2+2x+2)dx$$
$$=\left[x^2+2x\right]_{-a}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_{0}^{a}$$
$$=-(a^2-2a)+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a\right)$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+4a$$

$g(a)=-\frac{1}{3}a^3+4a$라 하면 $g'(a)=-a^2+4$

$g'(a)=0$에서 $-a^2+4=0$, $a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

$a>0$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값 $\frac{16}{3}$을 가지므로 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$의 최댓값은 $\frac{16}{3}$이다.

답 $\frac{16}{3}$

19

(1) $|3x^2+3x|=\begin{cases} 3x^2+3x & (x<-1 \text{ 또는 } x>0) \\ -3x^2-3x & (-1\le x\le 0) \end{cases}$

$3x(x+1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

$$\therefore \int_{-2}^{4}|3x^2+3x|dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(3x^2+3x)dx+\int_{-1}^{0}(-3x^2-3x)dx+\int_{0}^{4}(3x^2+3x)dx$$
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{4}$$
$$=\left\{\left(-1+\frac{3}{2}\right)-(-8+6)\right\}-\left(1-\frac{3}{2}\right)+(64+24)$$
$$=91$$

(2) $|x+2|+|x-1|=\begin{cases} \underbrace{-2x-1}_{=-(x+2)-(x-1)} & (x<-2) \\ \underbrace{3}_{=(x+2)-(x-1)} & (-2\le x<1) \\ \underbrace{2x+1}_{=(x+2)+(x-1)} & (x\ge 1) \end{cases}$

$$\therefore \int_{-3}^{2}(|x+2|+|x-1|)dx$$
$$=\int_{-3}^{-2}(-2x-1)dx+\int_{-2}^{1}3dx+\int_{1}^{2}(2x+1)dx$$
$$=\left[-x^2-x\right]_{-3}^{-2}+\left[3x\right]_{-2}^{1}+\left[x^2+x\right]_{1}^{2}$$
$$=\{(-4+2)-(-9+3)\}+\{3-(-6)\}+\{(4+2)-(1+1)\}$$
$$=17$$

답 (1) 91 (2) 17

20

$$|2x-6|=\begin{cases} -2x+6 & (x<3) \\ 2x-6 & (x\ge 3) \end{cases}$$

(ⅰ) $a<3$일 때,

$$\int_0^a |2x-6|dx=\int_0^a (-2x+6)dx$$
$$=\left[-x^2+6x\right]_0^a=-a^2+6a$$

즉, $-a^2+6a=13$이므로 $a^2-6a+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-13=-4<0$이므로 조건을 만족시키는

실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a\geq 3$일 때,

$$\int_0^a |2x-6|dx=\int_0^3 (-2x+6)dx+\int_3^a (2x-6)dx$$
$$=\left[-x^2+6x\right]_0^3+\left[x^2-6x\right]_3^a$$
$$=(-9+18)+\{a^2-6a-(9-18)\}$$
$$=a^2-6a+18$$

즉, $a^2-6a+18=13$이므로

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a\geq 3$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 5이다.

답 5

STEP 1 개 념 마 무 리

본문 pp.221~222

01 ④	**02** 60	**03** 2	**04** 5
05 $\frac{7}{4}$	**06** ㄴ	**07** 284	**08** 54
09 -11	**10** $2+\sqrt{3}$	**11** -6	**12** $\frac{46}{3}$

01

$$A=\int_0^3 (x^2-4x+11)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+11x\right]_0^3$$
$$=9-18+33=24$$
$$B=\int_0^5 (t+1)^2dt-\int_0^5 (t-1)^2dt$$
$$=\int_0^5 \{(t+1)^2-(t-1)^2\}dt$$
$$=\int_0^5 4tdt=\left[2t^2\right]_0^5=50$$
$$C=\int_{-1}^1 (s^3+3s^2+5)ds=\left[\frac{1}{4}s^4+s^3+5s\right]_{-1}^1$$
$$=\left(\frac{1}{4}+1+5\right)-\left(\frac{1}{4}-1-5\right)=12$$

$\therefore C<A<B$

답 ④

02

$$\int_0^1 \{-2x+6x^2-12x^3+\cdots+(-1)^n n(n+1)x^n\}dx$$
$$=\left[-x^2+2x^3-3x^4+\cdots+(-1)^n nx^{n+1}\right]_0^1 \qquad \cdots\cdots㉠$$

(ⅰ) n이 홀수일 때,

㉠에서

$-1+2-3+\cdots-n$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+\{-(n-2)+(n-1)\}-n$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n-1}{2}\text{개}}-n$

$=\frac{n-1}{2}-n=-\frac{n+1}{2}$

그런데 $-\frac{n+1}{2}=30$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) n이 짝수일 때,

㉠에서

$-1+2-3+\cdots+n$

$=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+\{-(n-1)+n\}$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n}{2}\text{개}}=\frac{n}{2}$

즉, $\frac{n}{2}=30$에서 $n=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $n=60$

답 60

03

$f(x)=ax^3+3x^2-4x+b$에서

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (ax^3+3x^2-4x+b)dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4+x^3-2x^2+bx\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{4}+1-2+b=\frac{a}{4}+b-1$$

즉, $\frac{a}{4}+b-1=-2$이므로 $a+4b=-4$ ······㉠

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{2}(ax^3+3x^2-4x+b)dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4+x^3-2x^2+bx\right]_{-2}^{2}$$
$$=(4a+8-8+2b)-(4a-8-8-2b)$$
$$=4b+16$$

즉, $4b+16=8$이므로 $4b=-8$ $\therefore b=-2$ ······㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a-8=-4$ $\therefore a=4$

$\therefore a+b=4+(-2)=2$

답 2

04

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $-6x^2-4x+3$이므로

$f'(x)=-6x^2-4x+3$

$\therefore f(x)=\int(-6x^2-4x+3)dx=-2x^3-2x^2+3x+C$

$\int_0^2 f(x)dx=\frac{14}{3}$에서

$$\int_0^2(-2x^3-2x^2+3x+C)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+Cx\right]_0^2$$
$$=-8-\frac{16}{3}+6+2C=2C-\frac{22}{3}$$

즉, $2C-\frac{22}{3}=\frac{14}{3}$에서 $2C=12$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=-2x^3-2x^2+3x+6$이므로

$f(1)=-2-2+3+6=5$

답 5

05

$$\int_a^1(6x^2-4ax+a)dx=\left[2x^3-2ax^2+ax\right]_a^1$$
$$=(2-2a+a)-(2a^3-2a^3+a^2)$$
$$=-a^2-a+2$$
$$=-\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 주어진 정적분은 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$를 가지므로

$m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{9}{4}$

$\therefore m+n=-\frac{1}{2}+\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$

답 $\frac{7}{4}$

06

ㄱ. (반례) $f(x)=x^2$이면

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$$
$$3\int_0^1 f(x)dx=3\int_0^1 x^2dx=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=3\times\frac{1}{3}=1$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)dx\neq 3\int_0^1 f(x)dx \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) $f(x)=x^2$이면

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$
$$\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2=\left(\int_0^1 x^2dx\right)^2=\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$
$$\therefore \int_0^1\{f(x)\}^2dx\neq\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2 \text{ (거짓)}$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

07

$$\int_0^{15}f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^7 f(x)dx+\int_7^{15}f(x)dx$$
$$=(0+1)^2+(2+1)^2+(6+1)^2+(14+1)^2$$
$$=1^2+3^2+7^2+15^2$$
$$=1+9+49+225=284$$

답 284

08

$$\int_3^6 (x+1)^2dx-\int_{-1}^6 (x-1)^2dx+\int_{-1}^3 (x-1)^2dx$$

$$=\int_3^6 (x+1)^2dx+\int_6^{-1} (x-1)^2dx+\int_{-1}^3 (x-1)^2dx$$

$$=\int_3^6 (x+1)^2dx+\int_6^3 (x-1)^2dx$$

$$=\int_3^6 (x+1)^2dx-\int_3^6 (x-1)^2dx$$

$$=\int_3^6 \{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$$

$$=\int_3^6 4x\,dx=\Big[2x^2\Big]_3^6=72-18=54$$

답 54

09

$\int_2^{-1} \{f(x)-g(x)\}dx=4$이므로

$$\int_{-1}^2 \{f(x)-g(x)\}dx=-\int_2^{-1}\{f(x)-g(x)\}dx=-4$$

한편, 정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 g(x)dx=10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{-1}^2 f(x)dx-\int_{-1}^2 g(x)dx=-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\int_{-1}^2 f(x)dx=3,\ \int_{-1}^2 g(x)dx=7$$

$$\therefore \int_{-1}^2 \{f(x)-2g(x)\}dx=\int_{-1}^2 f(x)dx-2\int_{-1}^2 g(x)dx$$

$$=3-2\times7=-11$$

답 -11

10

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ 4-2x & (x\ge1) \end{cases}$$

(i) $-1<a<1$일 때,

$$\int_{-1}^a f(x)dx=\int_{-1}^a (x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^a=\left(\frac{1}{2}a^2+a\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

즉, $\frac{1}{2}a^2+a+\frac{1}{2}=0$에서

$a^2+2a+1=0,\ (a+1)^2=0 \qquad \therefore\ a=-1$

그런데 $a>-1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a\ge1$일 때,

$$\int_{-1}^a f(x)dx=\int_{-1}^1 (x+1)dx+\int_1^a (4-2x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^1+\Big[4x-x^2\Big]_1^a$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$+\{(4a-a^2)-(4-1)\}$$

$$=-a^2+4a-1$$

즉, $-a^2+4a-1=0$에서

$a^2-4a+1=0 \qquad \therefore\ a=2\pm\sqrt{3}$

이때 $a\ge1$이므로 $a=2+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값은 $2+\sqrt{3}$이다.

답 $2+\sqrt{3}$

11

$$|2x(x-a)|=\begin{cases} 2x(x-a) & (x<0 \text{ 또는 } x>a) \\ -2x(x-a) & (0\le x\le a) \end{cases}$$이므로

$$\int_0^a |f(x)|dx=\int_0^a (-2x^2+2ax)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+ax^2\right]_0^a$$

$$=-\frac{2}{3}a^3+a^3=\frac{1}{3}a^3$$

$$\int_a^{a+2} f(x)dx=\int_a^{a+2} (2x^2-2ax)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-ax^2\right]_a^{a+2}$$

$$=\left\{\frac{2}{3}(a+2)^3-a(a+2)^2\right\}-\left(\frac{2}{3}a^3-a^3\right)$$

$$=4a+\frac{16}{3}$$

즉, $\frac{1}{3}a^3=4a+\frac{16}{3}$에서

$\frac{1}{3}a^3-4a-\frac{16}{3}=0,\ a^3-12a-16=0$

$(a+2)^2(a-4)=0 \qquad \therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

따라서 $f(x)=2x(x-4)$이므로

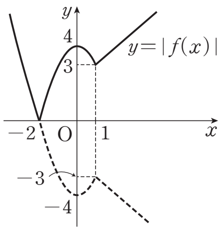
$f(3)=2\times3\times(-1)=-6$

답 -6

12

$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x<1) \\ -x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$에서

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \int_{-1}^{3}|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^2+4)dx+\int_{1}^{3}(x+2)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{3}$

$=\left\{\left(-\frac{1}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right\}+\left\{\left(\frac{9}{2}+6\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right\}$

$=\frac{46}{3}$

답 $\frac{46}{3}$

2 여러 가지 정적분

기본 + 필수연습

본문 pp.226~229

21 (1) $\frac{8}{3}$ (2) 54		**22** 6	**23** 1
24 72	**25** -4	**26** 6	**27** 3
28 $-\frac{80}{3}$	**29** $-\frac{20}{3}$	**30** $\frac{5}{2}$	

21

(1) $\int_{-1}^{1}x(2x^2+4x+6)dx$

$=\int_{-1}^{1}(2x^3+4x^2+6x)dx$

$=\int_{-1}^{1}\underbrace{(2x^3+6x)}_{\text{기함수}}dx+\int_{-1}^{1}\underbrace{4x^2}_{\text{우함수}}dx$

$=0+2\int_{0}^{1}4x^2dx$

$=2\left[\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{1}=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

(2) $\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx+\int_{3}^{-3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^3+4x^2)dx-\int_{-3}^{3}(x^3+x^2)dx$

$=\int_{-3}^{3}\{(x^3+4x^2)-(x^3+x^2)\}dx$

$=\int_{-3}^{3}\underbrace{3x^2}_{\text{우함수}}dx=2\int_{0}^{3}3x^2dx$

$=2\left[x^3\right]_{0}^{3}=2\times 27=54$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) 54

22

$f(x-2)=f(x+2)$에서 $x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이므로 모든 실수 t에서 $f(t)=f(t+4)$를 만족시킨다.

즉, $\int_{-3}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{5}f(x)dx=\int_{5}^{9}f(x)dx$이므로

$\int_{-3}^{9}f(x)dx=\int_{-3}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{9}f(x)dx$

$=3\int_{1}^{5}f(x)dx=3\times 2=6$

답 6

23

$\int_{-a}^{a}(6x^2-2x+3)dx$

$=\int_{-a}^{a}(-2x)dx+\int_{-a}^{a}(6x^2+3)dx$

$=0+2\int_{0}^{a}(6x^2+3)dx$

$=2\left[2x^3+3x\right]_{0}^{a}=4a^3+6a$

즉, $4a^3+6a=10$에서

$2a^3+3a=5$, $2a^3+3a-5=0$

$(a-1)\underbrace{(2a^2+2a+5)}_{=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0}=0$ $\quad\therefore a=1$

답 1

24

(주어진 식)

$=\int_{-1}^{1}(1+2^2x+3^2x^2+\cdots+11^2x^{10}+12^2x^{11})dx$

$=\int_{-1}^{1}(2^2x+4^2x^3+6^2x^5+\cdots+12^2x^{11})dx$

$\qquad+\int_{-1}^{1}(1+3^2x^2+5^2x^4+\cdots+11^2x^{10})dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(1+3^2x^2+5^2x^4+\cdots+11^2x^{10})dx$

$=2\Big[x+3x^3+5x^5+\cdots+11x^{11}\Big]_0^1$

$=2\times(1+3+5+7+9+11)$

$=2\times36$

$=72$

답 72

25

$|x|=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$ 이므로

$\int_{-2}^{2}(5x^4+2x^3-3ax^2-|x|+1)dx$

$=\int_{-2}^{2}2x^3dx+\int_{-2}^{2}(5x^4-3ax^2-|x|+1)dx$

$=0+\int_{-2}^{0}(5x^4-3ax^2+x+1)dx$

$\qquad+\int_{0}^{2}(5x^4-3ax^2-x+1)dx$

$=\Big[x^5-ax^3+\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{-2}^{0}+\Big[x^5-ax^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^2$

$=-(-32+8a+2-2)+(32-8a-2+2)$

$=64-16a$

즉, $64-16a=128$에서

$16a=-64 \qquad \therefore\ a=-4$

답 -4

다른 풀이

$|-x|=|x|$이므로 $y=|x|$는 우함수이다.

$\therefore\ \int_{-2}^{2}(5x^4+2x^3-3ax^2-|x|+1)dx$

$\quad=\int_{-2}^{2}2x^3dx+\int_{-2}^{2}(5x^4-3ax^2-|x|+1)dx$

$\quad=0+2\int_{0}^{2}(5x^4-3ax^2-|x|+1)dx$

$\quad=2\int_{0}^{2}(5x^4-3ax^2-x+1)dx$

$\quad=2\Big[x^5-ax^3-\frac{1}{2}x^2+x\Big]_0^2$

$\quad=2\times(32-8a)=64-16a$

즉, $64-16a=128$에서

$16a=-64 \qquad \therefore\ a=-4$

26

모든 실수 x에 대하여 $\underbrace{f(-x)=-f(x)}_{\text{기함수}}$이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=0$

$\therefore\ \int_{-3}^{3}(x-3x^2)f(x)dx=\int_{-3}^{3}\underbrace{xf(x)}_{\text{우함수}}dx-3\int_{-3}^{3}\underbrace{x^2f(x)}_{\text{기함수}}dx$

$=2\int_{0}^{3}xf(x)dx-0$

$=2\int_{-3}^{0}xf(x)dx$

$=2\times3=6$

답 6

27

$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+3x^2+1)dx$

$=2\int_{0}^{1}(5x^4+3x^2+1)dx$

$=2\Big[x^5+x^3+x\Big]_0^1$

$=2\times3=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 함수 $f(x)-f(-x)$는 기함수이므로

$y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉,

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx-\int_{-1}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx=6$

$2\int_{-1}^{1}f(-x)dx=6 \qquad \therefore\ \int_{-1}^{1}f(-x)dx=3$

답 3

다른 풀이

$g(-x)=g(x)$

함수 $f(x)$의 짝수 차수의 항과 상수항의 합을 $g(x)$, 홀수 차수의 항의 합을 $h(x)$라 하면 $f(x)=g(x)+h(x)$이므로 $f(-x)=g(-x)+h(-x)$이다.

$h(-x)=-h(x)$

이때 $f(x)+f(-x)=2g(x)$이므로

$2g(x)=5x^4+3x^2+1$에서 $g(x)=\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{1} f(-x)dx &= \int_{-1}^{1}\{g(-x)+h(-x)\}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \underbrace{g(-x)dx}_{\text{우함수}} + \int_{-1}^{1} \underbrace{h(-x)dx}_{\text{기함수}} \\ &= 2\int_{0}^{1} g(x)dx+0 \\ &= 2\int_{0}^{1}\left(\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^1=2\times\frac{3}{2}=3\end{aligned}$$

28

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-3}^{-1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{3}^{5} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^{5} f(x)dx &= \int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx \\ &\quad +\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx \\ &= 4\int_{-1}^{1} f(x)dx=4\int_{-1}^{1}(2x^2-4)dx \\ &= 8\int_{0}^{1}(2x^2-4)dx=8\left[\frac{2}{3}x^3-4x\right]_0^1 \\ &= 8\times\left(\frac{2}{3}-4\right)=-\frac{80}{3}\end{aligned}$$

답 $-\frac{80}{3}$

29

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이므로

$2^2-2\times2+a=-4\times2+3 \qquad \therefore a=-5$

또한, $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_{9}^{11} f(x)dx=\int_{5}^{7} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{9}^{11} f(x)dx &= \int_{1}^{3} f(x)dx \\ &= \int_{1}^{2}(-4x+3)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x-5)dx \\ &= \left[-2x^2+3x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-5x\right]_2^3 \\ &= \{(-8+6)-(-2+3)\} \\ &\quad +\left\{(9-9-15)-\left(\frac{8}{3}-4-10\right)\right\} \\ &= -\frac{20}{3}\end{aligned}$$

답 $-\frac{20}{3}$

30

$$\begin{aligned}f(x) &= -|x-3|+3 \ (0\le x\le 6) \\ &= \begin{cases}(x-3)+3=x & (0\le x<3) \\ -(x-3)+3=-x+6 & (3\le x\le 6)\end{cases}\end{aligned}$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+6)=f(x)$이므로

$$\int_{22}^{25} f(x)dx=\int_{16}^{19} f(x)dx=\int_{10}^{13} f(x)dx=\int_{4}^{7} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{22}^{25} f(x)dx &= \int_{4}^{7} f(x)dx \\ &= \int_{4}^{6} f(x)dx+\int_{6}^{7} f(x)dx \\ &= \int_{4}^{6} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx \\ &= \int_{4}^{6}(-x+6)dx+\int_{0}^{1} x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_4^6+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \{(-18+36)-(-8+24)\}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.230

13 9	**14** 10	**15** 3	**16** 10
17 102	**18** $\frac{9}{2}$		

13

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}xf(x)dx&=\int_{-2}^{2}(ax^2+bx)dx\\&=\int_{-2}^{2}bx\,dx+\int_{-2}^{2}ax^2dx\\&=0+2a\int_{0}^{2}x^2dx\\&=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2\\&=2a\times\frac{8}{3}\\&=\frac{16}{3}a\end{aligned}$$

즉, $\frac{16}{3}a=32$이므로 $a=6$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}x^2f(x)dx&=\int_{-2}^{2}(ax^3+bx^2)dx\\&=\int_{-2}^{2}ax^3dx+\int_{-2}^{2}bx^2dx\\&=0+2b\int_{0}^{2}x^2dx\\&=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2\\&=2b\times\frac{8}{3}\\&=\frac{16}{3}b\end{aligned}$$

즉, $\frac{16}{3}b=-16$이므로 $b=-3$

따라서 $f(x)=6x-3$이므로

$f(2)=6\times2-3=12-3=9$

답 9

14

$f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-f(0)$, $2f(0)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

또한, 모든 실수 x에 대하여 $\overbrace{f(-x)=-f(x)}^{\text{기함수}}$이므로 다항함수 $f(x)$는 홀수 차수의 항의 합으로만 이루어진 함수이다.

즉, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $\underbrace{\text{짝수 차수의 항 또는 상수항의 합으로만 이루어진 함수}}_{\text{우함수}}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^{2}(x+1)f'(x)dx&=\int_{-2}^{2}\{xf'(x)+f'(x)\}dx\\&=\int_{-2}^{2}\underbrace{xf'(x)}_{\text{기함수}}dx+\int_{-2}^{2}\underbrace{f'(x)}_{\text{우함수}}dx\\&=0+2\int_{0}^{2}f'(x)dx\\&=2\Big[f(x)\Big]_0^2\\&=2f(2)-2f(0)\\&=2f(2)\ (\because f(0)=0)\end{aligned}$$

따라서 $2f(2)=20$이므로

$f(2)=10$

답 10

15

$g(x)=f(x)+f(-x)$라 하면

$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$

즉, 함수 $f(x)+f(-x)$는 우함수이므로

$y=f(x)+f(-x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx=8$에서

$2\int_{0}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx=8$

$\int_{0}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx=4$

$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(-x)dx=4$ ······㉠

한편, $h(x)=f(x)-f(-x)$라 하면

$h(-x)=f(-x)-f(x)=-h(x)$

즉, 함수 $f(x)-f(-x)$는 기함수이므로

$y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$\int_{-1}^{0}\{f(x)-f(-x)\}dx=-2$에서

$\int_{0}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx=2$

$\therefore \int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(-x)dx=2$ ······㉡

㉠+㉡을 하면 $2\int_0^1 f(x)dx=6$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx=3$

답 3

16

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\underbrace{y\text{축에 대하여 대칭}}_{\text{우함수}}$이므로

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=13$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=\dfrac{13}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx&=\int_0^1 xdx+\int_1^2 dx+\int_2^3(-x+3)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\Big[x\Big]_1^2+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3\\&=\frac{1}{2}+(2-1)+\left\{\left(-\frac{9}{2}+9\right)-(-2+6)\right\}\\&=2\end{aligned}$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=\int_6^9 f(x)dx=\cdots=2$

따라서 $\int_0^9 f(x)dx=3\int_0^3 f(x)dx=3\times2=6$이므로

$\int_0^a f(x)dx=\underbrace{\dfrac{13}{2}}_{=6+\frac{1}{2}}$이려면

$a=9+1=10$

답 10

다른 풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\underbrace{y\text{축에 대하여 대칭}}_{\text{우함수}}$이므로

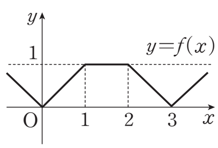
$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=13$

$\therefore \int_0^a f(x)dx=\dfrac{13}{2}$

정적분의 정의에 의하여

주어진 그래프에서 $\int_0^3 f(x)dx$

의 값은 윗변, 아랫변의 길이가 각



각 1, 3이고 높이가 1인 등변사다리꼴의 넓이와 같으므로

$\int_0^3 f(x)dx=\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times1=2$

같은 방법으로 $\int_0^1 f(x)dx$의 값은 밑변의 길이가 1이고

높이가 1인 삼각형의 넓이와 같으므로

$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$

이때 $\int_0^a f(x)dx=\dfrac{13}{2}=3\times2+\dfrac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx&=3\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx\\&=\int_0^9 f(x)dx+\int_9^{10} f(x)dx\\&=\int_0^{10} f(x)dx\end{aligned}$$

$\therefore a=10$

17

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)$이므로

$-4+16=-3+6+a \qquad \therefore a=9$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$이므로

$\int_{-6}^{-1} f(x)dx=\int_{-1}^{4} f(x)dx=\int_4^9 f(x)dx$

$$\begin{aligned}\therefore &\int_{-6}^{9} f(x)dx\\&=\int_{-6}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{4} f(x)dx+\int_4^9 f(x)dx\\&=3\int_{-1}^{4} f(x)dx\\&=3\left\{\int_{-1}^{1}(-3x^2+6x+9)dx+\int_1^4(-4x+16)dx\right\}\\&=3\left\{0+2\int_0^1(-3x^2+9)dx+\int_1^4(-4x+16)dx\right\}\\&=3\left(2\Big[-x^3+9x\Big]_0^1+\Big[-2x^2+16x\Big]_1^4\right)\\&=3\times[2\times(-1+9)+\{(-32+64)-(-2+16)\}]\\&=3\times34=102\end{aligned}$$

답 102

18 본문 p.225 한 걸음 더 참고

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\int_{10}^{12} f(x-1)dx=\int_9^{11} f(x)dx$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x-3)=f(x)$이므로

$$\int_9^{11} f(x)dx=\int_6^8 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx+\int_{10}^{12} f(x-1)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 (-x^2+3x)dx+\int_0^2 (-x^2+3x)dx \ (\because \text{ 조건 (가)})$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

3 정적분으로 정의된 함수

기본 + 필수연습 본문 pp.234~239

31 (1) x^4+3x (2) $4x$		**32** (1) -1 (2) 0	
33 $\frac{5}{2}$	**34** 10	**35** 33	**36** $\frac{7}{2}$
37 $\frac{2}{3}$	**38** 36	**39** 6	**40** 0
41 -5	**42** 극댓값 : 7, 극솟값 : -20		
43 -44	**44** $-\frac{1}{2}$	**45** 3	**46** 420
47 -4			

31

(1) $\frac{d}{dx}\int_2^x (t^4+3t)dt=x^4+3x$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x-2}^x (t^2+2t+5)dt$

$$=(x^2+2x+5)-\{(x-2)^2+2(x-2)+5\}$$
$$=(x^2+2x+5)-(x^2-2x+5)$$
$$=4x$$

답 (1) x^4+3x (2) $4x$

32

(1) $f(x)=x^2-x-1$이라 하고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{\Big[F(x)\Big]_0^h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=F'(0)=f(0)=-1$$

(2) $f(t)=t^3-8$이라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=\lim_{x\to 2}\frac{\Big[F(t)\Big]_2^x}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$
$$=F'(2)=f(2)=8-8=0$$

답 (1) -1 (2) 0

33

$$\int_0^1 f(t)dt=k \ (k\text{는 상수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+k^2x \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^1\left(\frac{3}{2}t^2+k^2t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{k^2}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{k^2}{2}$$

즉, $k^2-2k+1=0$에서 $(k-1)^2=0$

$\therefore k=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x$이므로

$$f(1)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

34

$$\int_1^2 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$$f(x)=\frac{6}{7}x^2-2kx+2k^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_1^2\left(\frac{6}{7}t^2-2kt+2k^2\right)dt$$

$$=\left[\frac{2}{7}t^3-kt^2+2k^2t\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{16}{7}-4k+4k^2\right)-\left(\frac{2}{7}-k+2k^2\right)$$

$$=2k^2-3k+2$$

즉, $2k^2-4k+2=0$에서 $2(k-1)^2=0$

$\therefore\ k=1$

따라서 $\int_1^2 f(t)dt=1$이므로 $\int_1^2 f(x)dx=1$

$\therefore\ 10\int_1^2 f(x)dx=10\times1=10$

답 10

35

$$f(x)=6x^2+x+\int_0^2(x+1)f(t)dt$$

$$=6x^2+x+x\int_0^2 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt$$

이때

$$\int_0^2 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$$f(x)=6x^2+(k+1)x+k \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^2\{6t^2+(k+1)t+k\}dt$$

$$=\left[2t^3+\frac{1}{2}(k+1)t^2+kt\right]_0^2$$

$$=16+2(k+1)+2k=4k+18$$

즉, $3k=-18$에서 $k=-6$

따라서 $f(x)=6x^2-5x-6$이므로

$f(3)=54-15-6=33$

답 33

36

$$\int_2^x f(t)dt=x^3-2x^2+ax+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x+a$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^2 f(t)dt=8-8+2a+1$$

$0=2a+1 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-\frac{1}{2}$이므로

$f(2)=12-8-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

답 $\frac{7}{2}$

37

$$\int_0^1 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면 주어진 등식은

$$\int_0^x f(t)dt=x^3-2x^2-2kx$$

위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-4x-2k \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^1(3t^2-4t-2k)dt=\left[t^3-2t^2-2kt\right]_0^1=1-2-2k$$

$3k=-1 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=3x^2-4x+\frac{2}{3}$이므로 $f(0)=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

38

$$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3-ax^2+5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}f(x)=3x^2-2ax \qquad \therefore\ f'(x)=3x^2-2ax$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=1-a+5$$

$0=-a+6 \qquad \therefore a=6$

따라서 $f'(x)=3x^2-12x$이므로

$f'(a)=f'(6)=108-72=36$

답 36

39

$$\int_2^x (x-t)f(t)dt=x^3-ax^2+12x-8$$에서

$$x\int_2^x f(t)dt-\int_2^x tf(t)dt=x^3-ax^2+12x-8$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-2ax+12$$

$$\therefore \int_2^x f(t)dt=3x^2-2ax+12$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-2a$

한편, 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_2^2 (2-t)f(t)dt=8-4a+24-8$$

$0=-4a+24 \qquad \therefore a=6$

따라서 $f(x)=6x-12$이므로

$f(3)=18-12=6$

답 6

40

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt=-x^3+ax^2+bx$$에서

$$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=-x^3+ax^2+bx$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=-3x^2+2ax+b$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt=-3x^2+2ax+b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-6x+2a$

한편, 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 (1-t)f(t)dt=-1+a+b$$

$0=-1+a+b \qquad \therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt=-3+2a+b$$

$0=-3+2a+b \qquad \therefore 2a+b=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-1$

$\therefore a+2b=2+2\times(-1)=0$

답 0

41

$$\int_{-1}^x (x-t)f'(t)dt=x^3-4x^2-11x-6$$에서

$$x\int_{-1}^x f'(t)dt-\int_{-1}^x tf'(t)dt=x^3-4x^2-11x-6$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2-8x-11$$

$$\therefore \int_{-1}^x f'(t)dt=3x^2-8x-11$$

이때 $\int_{-1}^x f'(t)dt=\Big[f(t)\Big]_{-1}^x=f(x)-f(-1)$이므로

$f(x)-f(-1)=3x^2-8x-11$

$\therefore f(x)=3x^2-8x-1 \ (\because f(-1)=10)$

$\therefore f(2)=12-16-1=-5$

답 -5

42

$$f(x)=\int_0^x (-6t^2-6t+12)dt$$에서

$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1(-6t^2-6t+12)dt=\left[-2t^3-3t^2+12t\right]_0^1$$
$$=-2-3+12=7$$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(-2)=\int_0^{-2}(-6t^2-6t+12)dt=\left[-2t^3-3t^2+12t\right]_0^{-2}$$
$$=16-12-24=-20$$

답 극댓값: 7, 극솟값: -20

43

$f(x)=\int_x^{x+1}(3t^2-6t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{3(x+1)^2-6(x+1)\}-(3x^2-6x)$$
$$=6x-3$$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$f(0)=\int_0^1(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^1=1-3=-2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{27}{8}-\frac{27}{4}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{11}{4}$$

$$f(3)=\int_3^4(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_3^4$$
$$=(64-48)-(27-27)=16$$

따라서 최댓값 $M=16$, 최솟값 $m=-\frac{11}{4}$이므로

$$Mm=16\times\left(-\frac{11}{4}\right)=-44$$

답 -44

44

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=k(x+1)(x-3)$ $(k>0)$이라 하면

$g(x)=\int_x^{x+3}f(t)dt$에서

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_x^{x+3}f(t)dt$$
$$=f(x+3)-f(x)$$
$$=kx(x+4)-k(x+1)(x-3)$$
$$=6kx+3k=3k(2x+1)$$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$

$k>0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최솟값을 가지므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

답 $-\frac{1}{2}$

45

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\left[F(t)\right]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$

즉, $\frac{1}{2}f(1)=3$에서 $f(1)=6$

이때 $f(x)=x^2+ax+2$에서

$f(1)=1+a+2=a+3$

따라서 $a+3=6$에서 $a=3$

답 3

46

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_8^{x^3}f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_8^{x^3}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x^3)-F(8)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{F(x^3)-F(8)}{x^3-8}\times(x^2+2x+4)\right\}$$

$$=12F'(8)=12f(8) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=x^2-3x-5$에서

$f(8)=64-24-5=35$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$12\times35=420$

답 420

47

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+3x}f(t)dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1-x}^{1+3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1+3x)-F(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1+3x)-F(1)-F(1-x)+F(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{F(1+3x)-F(1)}{3x}\times3\right\}-\lim_{x\to0}\left\{\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\times(-1)\right\}$$

$$=3F'(1)+F'(1)$$

$$=4F'(1)=4f(1)$$

즉, $4f(1)=4$에서 $f(1)=1$

이때 $f(x)=4x^2+x+a$이므로

$f(1)=4+1+a=a+5$

따라서 $a+5=1$에서 $a=-4$

답 -4

STEP 1 개념 마무리 본문 pp.240~241

19 10	**20** 73	**21** $\frac{2}{3}$	**22** -2
23 -5	**24** 14	**25** 2	**26** 5
27 $-\frac{2}{3}$	**28** 1	**29** 4	**30** ⑤

19

$$\int_0^1 tf(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$$f(x)=4x^2+6x+k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^1(4t^3+6t^2+kt)dt$$

$$=\left[t^4+2t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=1+2+\frac{k}{2}$$

즉, $\frac{k}{2}=3$에서 $k=6$

따라서 $f(x)=4x^2+6x+6$이므로

$f(-2)=16-12+6=10$

답 10

20

$$f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)dt$$

$$=x^2-x\int_0^2 f(t)dt$$

이때

$$\int_0^2 f(t)dt=k\ (k\text{는 상수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓으면

$$f(x)=x^2-kx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k=\int_0^2(t^2-kt)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{k}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-2k$$

즉, $3k=\frac{8}{3}$에서 $k=\frac{8}{9}$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{8}{9}x$이므로

$f(9)=81-8=73$

답 73

21

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 g(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$f(x)=-2x^3+\int_0^1\{f(t)+2g(t)\}dt$$
$$=-2x^3+\int_0^1 f(t)dt+2\int_0^1 g(t)dt$$
$$=-2x^3+a+2b$$

$$g(x)=3x^2+\int_0^1\{f(t)+g(t)\}dt$$
$$=3x^2+\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 g(t)dt$$
$$=3x^2+a+b$$

이므로

$$a=\int_0^1(-2t^3+a+2b)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^4+(a+2b)t\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+a+2b$$

즉, $2b=\frac{1}{2}$에서 $b=\frac{1}{4}$ ……㉠

$$b=\int_0^1(3t^2+a+b)dt$$
$$=\left[t^3+(a+b)t\right]_0^1$$
$$=1+a+b$$

즉, $1+a=0$에서 $a=-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=-2x^3-\frac{1}{2}$, $g(x)=3x^2-\frac{3}{4}$

따라서 $f(-1)=\frac{3}{2}$, $g(-1)=\frac{9}{4}$이므로

$$\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

22

$\int_1^x(t^3-6t)dt=2x^3-f(x)$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^3-6x=6x^2-f'(x)$

$\therefore f'(x)=-x^3+6x^2+6x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+3x^2+C$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1(t^3-6t)dt=2-f(1)$

$0=2-f(1)$ $\therefore f(1)=2$

㉡에서 $f(1)=-\frac{1}{4}+2+3+C$이므로

$-\frac{1}{4}+2+3+C=2$ $\therefore C=-\frac{11}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^3+3x^2-\frac{11}{4}$이므로

$f(-1)=-\frac{1}{4}-2+3-\frac{11}{4}=-2$

답 -2

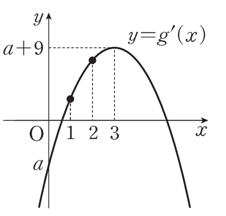
23

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=-x^2+6x+a$

$=-(x-3)^2+a+9$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 증가하려면 이 구간에서 $g'(x)\geq 0$이어야 하므로 함수 $y=g'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$g'(1)\geq 0$에서 $5+a\geq 0$

$\therefore a\geq -5$

따라서 실수 a의 최솟값은 -5이다.

답 -5

24

$x^2f(x)=\frac{3}{4}x^4+2\int_1^x tf(t)dt+\frac{5}{4}$ ……㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=3x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=3x^3$, $f'(x)=3x$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx=\frac{3}{2}x^2+C$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\frac{3}{4}+2\int_1^1 tf(t)dt+\frac{5}{4}$

$=\frac{3}{4}+0+\frac{5}{4}=2$

㉡에서 $f(1)=\frac{3}{2}+C$이므로

$\frac{3}{2}+C=2$ $\therefore\ C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{27}{2}+\frac{1}{2}=14$

답 14

25

다항식 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$ ……㉠

(*)

$f(x)=2x^2+ax+\int_{-1}^{x} g(t)dt$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=2-a+\int_{-1}^{-1} g(t)dt=2-a$

㉠에서 $2-a=0$이므로

$a=2$

(가)

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x)=2x^2+2x+\int_{-1}^{x} g(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x+2+g(x)$

$\therefore\ g(x)=f'(x)-4x-2$

(나)

따라서 다항식 $g(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는

$g(-1)=f'(-1)+4-2$

$=0+2$ ($\because$ ㉠)

$=2$

(다)

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	정적분의 정의와 인수정리를 이용하여 상수 a의 값을 구한 경우	30%
(나)	정적분으로 나타내어진 함수의 미분을 이용하여 다항식 $g(x)$를 $f'(x)$를 포함한 식으로 나타낸 경우	40%
(다)	나머지정리를 이용하여 다항식 $g(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구한 경우	30%

보충 설명

(*)에서 다항식 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(x)=(x+1)^2Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식)

$\therefore\ f(-1)=0$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$

$\therefore\ f'(-1)=0$

26

$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ ……㉠

$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$=\int_0^x f(t)dt$

$=\int_0^x (at^2-2at)dt$

$=\left[\frac{a}{3}t^3-at^2\right]_0^x$

$=\frac{a}{3}x^3-ax^2$

$=\frac{a}{3}x^2(x-3)$

$g(x)=\int g'(x)dx$

$=\int\left(\frac{a}{3}x^3-ax^2\right)dx$

$=\frac{a}{12}x^4-\frac{a}{3}x^3+C$

㉠에서 $g(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore\ g(x)=\frac{a}{12}x^4-\frac{a}{3}x^3$

즉, $g(n)=\frac{a}{12}n^4-\frac{a}{3}n^3$이므로 $g(n)>0$에서

$\frac{a}{12}n^4-\frac{a}{3}n^3>0$, $\frac{a}{12}n^3(n-4)>0$

이때 $a>0$이고 n은 자연수이므로

$n-4>0 \qquad \therefore\ n>4$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 5

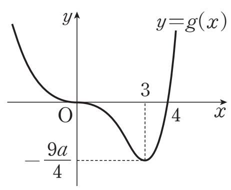
보충 설명

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$a>0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↘	$-\frac{9a}{4}$	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



27

주어진 그래프에서 $f(2)=f(4)=0$이고 $f(x)$의 이차항의 계수가 양수이므로

$f(x)=a(x-2)(x-4)$ (단, $a>0$)

이때 $f(0)=4$에서 $8a=4 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-4)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

$g(x)=\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$g(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$

또한, 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned}g(4)&=\int_2^4 f(t)dt\\&=\int_2^4\left(\frac{1}{2}t^2-3t+4\right)dt\\&=\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t\right]_2^4\\&=\left(\frac{32}{3}-24+16\right)-\left(\frac{4}{3}-6+8\right)\\&=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$0+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

28

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2$에서

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$

$\therefore\ \int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 1을 갖는다.

답 1

29

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_b^x f'(t)dt&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[f(t)\Big]_b^x\\&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(b)}{x-1}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$x\longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f(b)\}=0$이므로 $f(1)=f(b)$

$\therefore\ a-1=b^3-2b^2+ab$ ······㉡

㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-2x^2+ax)-(b^3-2b^2+ab)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+ax-(a-1)}{x-1}\ (\because ㉡)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-x+a-1)}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & a & -a+1 \\ & & 1 & -1 & a-1 \\ \hline & 1 & -1 & a-1 & 0 \end{array}$$

$=a-1$

즉, $a-1=2$이므로 $a=3$

이것을 ㉡에 대입하면

$b^3-2b^2+3b=2,\ b^3-2b^2+3b-2=0$

$(b-1)(b^2-b+2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore\ b=1\ (\because\ \underbrace{b^2-b+2}_{=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}>0)$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

답 4

30

$g(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_1^x(x-t)f(t)dt=\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=3$

$x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}g(x)=0$이므로 $g(2)=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)=3$$

$g(x)=\int_1^x(x-t)f(t)dt$에서

$g(x)=x\int_1^xf(t)dt-\int_1^xtf(t)dt$ ······㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=\int_1^xf(t)dt+xf(x)-xf(x)$

$\therefore\ g'(x)=\int_1^xf(t)dt$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=\int_1^2f(t)dt=3$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=2\int_1^2f(t)dt-\int_1^2tf(t)dt$

$0=2\times3-\int_1^2tf(t)dt$

$\therefore\ \int_1^2tf(t)dt=6$

$$\therefore\ \int_1^2(4x+1)f(x)dx=4\int_1^2xf(x)dx+\int_1^2f(x)dx$$
$$=4\times6+3=27$$

답 ⑤

STEP 2 개념 마무리

본문 p.242

1 -6	**2** 14	**3** 3	**4** -13
5 ③	**6** -6		

1

조건 ㈎에서 $\int_0^2|f(x)|dx=-\int_0^2f(x)dx$이므로

$0\le x\le2$에서 $f(x)\le0$

조건 ㈏에서 $\int_2^3|f(x)|dx=\int_2^3f(x)dx$이므로

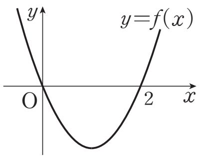
$2\le x\le3$에서 $f(x)\ge0$

이때 이차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\therefore\ f(2)=0$

한편, $f(0)=0$에서

$f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a>0$

조건 ㈎에서 $\int_0^2 f(x)dx=-8$이므로

$$\int_0^2(ax^2-2ax)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2=\frac{8}{3}a-4a$$
$$=-\frac{4}{3}a=-8$$

$\therefore\ a=6$

따라서

$f(x)=6x(x-2)=6x^2-12x=6(x-1)^2-6$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -6을 갖는다.

답 -6

2

모든 실수 x에 대하여

우함수

$f(-x)-f(x)=0$, 즉 $f(-x)=f(x)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $g(x)=xf(x)$라 하면

(기함수)×(우함수)=(기함수)

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

즉,

$$\int_{-1}^3 xf(x)dx=\int_{-1}^1 xf(x)dx+\int_1^3 xf(x)dx$$
$$=0+\int_1^3 xf(x)dx=4$$

$\therefore \int_1^3 xf(x)dx=4$

또한,

$$\int_{-3}^8 xf(x)dx=\int_{-3}^3 xf(x)dx+\int_3^8 xf(x)dx$$
$$=0+\int_3^8 xf(x)dx=10$$

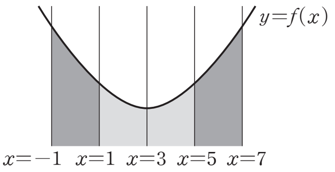
$\therefore \int_3^8 xf(x)dx=10$

$$\therefore \int_1^8 xf(x)dx=\int_1^3 xf(x)dx+\int_3^8 xf(x)dx$$
$$=4+10=14$$

답 14

3

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(6-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.



$$\therefore \int_1^7 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx+\int_5^7 f(x)dx$$
$$=2\int_1^3 f(x)dx+\int_{-1}^1 f(x)dx$$
$$=2\int_1^3 f(x)dx+4=10$$

즉, $2\int_1^3 f(x)dx=6$이므로 $\int_1^3 f(x)dx=3$

답 3

보충 설명

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이면 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $f(m+x)=f(m-x)$

(2) $f(x)=f(2m-x)$

4

조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+3)-f(x)=2x+3$ ……㉠

이므로 ㉠의 양변에 x 대신 $x+3$을 대입하면

$f(x+6)-f(x+3)=2(x+3)+3$

$=2x+9$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$f(x+6)-f(x)=4x+12$ ……㉢

조건 ㈏에서 $\int_{-1}^8 f(x)dx=15$이므로

$$\int_{-1}^8 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx+\int_5^8 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 f(x+3)dx+\int_{-1}^2 f(x+6)dx$$
$$=\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2\{f(x)+(2x+3)\}dx$$
$$+\int_{-1}^2\{f(x)+(4x+12)\}dx\ (\because ㉠, ㉢)$$
$$=3\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2(6x+15)dx$$

$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+\left[3x^2+15x\right]_{-1}^{2}$

$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+\{(12+30)-(3-15)\}$

$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+54=15$

즉, $3\int_{-1}^{2} f(x)dx=-39$이므로

$\int_{-1}^{2} f(x)dx=-13$

답 -13

5

ㄱ. $g(x)=\int_{0}^{x} f(x-t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=\int_{0}^{0} f(x-t)dt=0$ (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 $f(x)=kx(x-a)$ ($k>0$인 상수)라 하면

$f(x-t)=k(x-t)(x-t-a)$

$$\begin{aligned}\therefore\ g(x)&=\int_{0}^{x} f(x-t)dt\\&=k\int_{0}^{x}\{t^2-(2x-a)t+x^2-ax\}dt\\&=k\left\{\int_{0}^{x} t^2dt-2x\int_{0}^{x} tdt\right.\\&\qquad\left.+a\int_{0}^{x} tdt+(x^2-ax)\int_{0}^{x} dt\right\}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=k\left\{x^2-2\int_{0}^{x} tdt-2x^2+ax\right.\\&\qquad\left.+(2x-a)\int_{0}^{x} dt+(x^2-ax)\right\}\\&=k\left\{-2\int_{0}^{x} tdt+(2x-a)\int_{0}^{x} dt\right\}\\&=k\left\{-2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}+(2x-a)\left[t\right]_{0}^{x}\right\}\\&=k\{-x^2+(2x-a)x\}\\&=k(x^2-ax)\\&=kx(x-a)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

즉, 방정식 $g'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=0$을 가지므로 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x가 존재한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

6

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$F'(t)=f(t)$

한편, $\lim_{x\to1}\dfrac{\int_{1}^{x} f(t)dt-f(x)}{x^3-1}=2$에서 $x\longrightarrow1$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\left\{\int_{1}^{x} f(t)dt-f(x)\right\}=0$이므로

$\int_{1}^{1} f(t)dt-f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=0$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x} f(t)dt-f(x)}{x^3-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x} f(t)dt-\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x^2+x+1)}\quad(\because\ f(1)=0)\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x} f(t)dt-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x} f(t)dt}{x-1}-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left[F(t)\right]_{1}^{x}-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}f'(1)\end{aligned}$$

이때 $f(1)=0$이므로 $-\frac{1}{3}f'(1)=2$

$\therefore\ f'(1)=-6$

답 -6

09. 정적분의 활용

1 넓이

기본 + 필수연습

본문 pp.249~256

01 $\frac{9}{2}$	**02** $\frac{15}{32}$	**03** 8	**04** $\frac{37}{12}$
05 1	**06** 3	**07** $\frac{35}{6}$	**08** -4
09 27	**10** $\frac{8}{3}$	**11** $\frac{27}{4}$	**12** $\frac{9}{4}$
13 4	**14** 9	**15** 2	**16** 6
17 $2\sqrt{2}-2$	**18** $\frac{3}{4}$	**19** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{13}{4}$	
20 $\frac{7}{2}$			

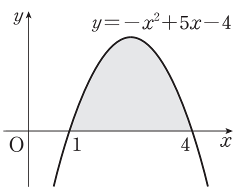
01

곡선 $y=-x^2+5x-4$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+5x-4=0$에서

$-(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=4$



닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 $-x^2+5x-4\geq 0$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_1^4 |-x^2+5x-4|\,dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4$$

$$=\frac{8}{3}-\left(-\frac{11}{6}\right)=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

다른 풀이 본문 p.247 한 걸음 더 참고

공식을 이용하면 구하는 넓이는

$$\frac{|-1|}{6}\times(4-1)^3=\frac{9}{2}$$

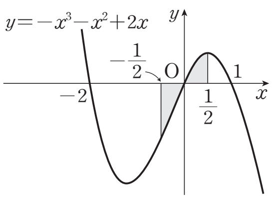
02

곡선 $y=-x^3-x^2+2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3-x^2+2x=0$에서

$-x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]$에서

$-x^3-x^2+2x\leq 0$,

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$에서

$-x^3-x^2+2x\geq 0$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|-x^3-x^2+2x|\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^3-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\left(-\frac{53}{192}\right)+\frac{37}{192}=\frac{15}{32}$$

답 $\frac{15}{32}$

03

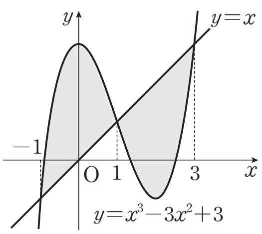
곡선 $y=x^3-3x^2+3$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3=x$에서

$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$



닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $x^3-3x^2+3\geq x$,

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $x^3-3x^2+3\leq x$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3-3x^2+3)-x\}\,dx+\int_1^3\{x-(x^3-3x^2+3)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)\,dx+\int_1^3(-x^3+3x^2+x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$

$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3$$

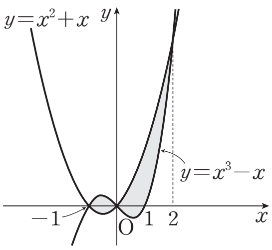
$$=\left\{\frac{7}{4}-\left(-\frac{9}{4}\right)\right\}+\left\{\frac{9}{4}-\left(-\frac{7}{4}\right)\right\}$$

$$=4+4=8$$

답 8

04

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2+x$의 교점의 x좌표는



$x^3-x=x^2+x$에서

$x^3-x^2-2x=0$

$x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x^3-x\geq x^2+x$,

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-x\leq x^2+x$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{(x^3-x)-(x^2+x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(x^2+x)-(x^3-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

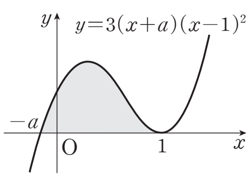
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-\left(-\frac{5}{12}\right)+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

답 $\frac{37}{12}$

05

곡선 $y=3(x+a)(x-1)^2$과 x축의 교점의 x좌표는



$3(x+a)(x-1)^2=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $\underbrace{[-a,\ 1]}_{a>0}$에서 $3(x+a)(x-1)^2\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-a}^{1}3(x+a)(x-1)^2dx$$

$$=\int_{-a}^{1}\{3x^3+3(a-2)x^2-3(2a-1)x+3a\}dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4+(a-2)x^3-\frac{3(2a-1)}{2}x^2+3ax\right]_{-a}^{1}$$

$$=\left\{\frac{3}{4}+(a-2)-\frac{3(2a-1)}{2}+3a\right\}-\left\{\frac{3}{4}a^4-a^3(a-2)-\frac{3a^2(2a-1)}{2}-3a^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}a^4+a^3+\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{4}$$

따라서 $\frac{1}{4}a^4+a^3+\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{4}=4$이므로

$a^4+4a^3+6a^2+4a-15=0$

$(a+3)(a-1)(\underbrace{a^2+2a+5}_{=(a+1)^2+4>0})=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

1	1	4	6	4	-15
		1	5	11	15
-3	1	5	11	15	0
		-3	-6	-15	
	1	2	5	0	

답 1

다른 풀이 본문 p.247 한 걸음 더 참고

공식을 이용하면 구하는 넓이는

$\frac{|3|}{12}\times\{1-(-a)\}^4=\frac{1}{4}(1+a)^4=4$에서

$(1+a)^4=16$, $a+1=2\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ a=1$

06

$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<1)\\ x^2-2x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$에서

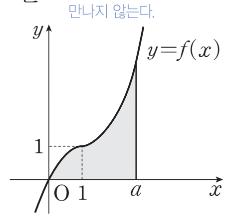
곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표는 ← $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$이므로 $x\geq 1$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축은 만나지 않는다.

$x<1$일 때, $-x^2+2x=0$에서

$-x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0\ (\because\ x<1)$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



닫힌구간 $[0,\ a]$에서 $f(x)\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}(-x^2+2x)dx+\int_{1}^{a}(x^2-2x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_{1}^{a}$$

$$=\frac{2}{3}+\left\{\left(\frac{1}{3}a^3-a^2+2a\right)-\frac{4}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}a^3-a^2+2a-\frac{2}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a^2+2a-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$에서

$a^3-3a^2+6a-18=0$

$(a-3)(a^2+6)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a$는 실수$)$

답 3

07

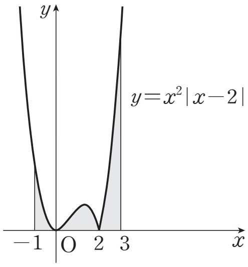
$y=x^2|x-2|$

$$=\begin{cases} -x^3+2x^2 & (x<2) \\ x^3-2x^2 & (x\geq 2) \end{cases}$$

곡선 $y=x^2|x-2|$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2|x-2|=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=x^2|x-2|$는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{3} x^2|x-2|dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+2x^2)dx+\int_{2}^{3}(x^3-2x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_{2}^{3}$$

$$=\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{11}{12}\right)\right\}+\left\{\frac{9}{4}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{43}{12}=\frac{35}{6}$$

답 $\frac{35}{6}$

08

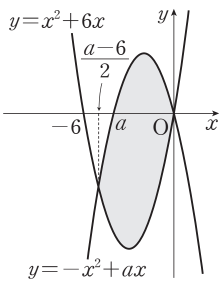
두 곡선 $y=x^2+6x$, $y=-x^2+ax$의 교점의 x좌표는

$x^2+6x=-x^2+ax$에서

$2x^2+(6-a)x=0$

$x(2x+6-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{a-6}{2}$



닫힌구간 $\left[\frac{a-6}{2},\ 0\right]$에서 $-x^2+ax\geq x^2+6x$이므로

구하는 넓이는

$$\int_{\frac{a-6}{2}}^{0}\{(-x^2+ax)-(x^2+6x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{a-6}{2}}^{0}\{-2x^2+(a-6)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{a-6}{2}x^2\right]_{\frac{a-6}{2}}^{0}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{a-6}{2}\right)^3-\left(\frac{a-6}{2}\right)^3$$

$$=-\frac{(a-6)^3}{24}$$

따라서 $-\frac{(a-6)^3}{24}=\frac{125}{3}$이므로

$(a-6)^3=-1000=(-10)^3$, $a-6=-10$

$\therefore\ a=-4$

답 -4

다른 풀이 본문 p.247 한 걸음 더 참고

두 곡선 $y=x^2+6x$, $y=-x^2+ax$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=2x^2+(6-a)x$와 x축의 교점의 x좌표와 같다.

공식을 이용하면

$$\frac{|2|}{6}\times\left(0-\frac{a-6}{2}\right)^3=-\frac{(a-6)^3}{24}=\frac{125}{3}$$이므로

$(a-6)^3=(-10)^3\qquad\therefore\ a=-4$

09

$y=|x^2+3x|$

$$=\begin{cases} x^2+3x & (x<-3 \text{ 또는 } x>0) \\ -x^2-3x & (-3\leq x\leq 0) \end{cases}$$

$-x^2-3x-x-8=-(x+2)^2-4$이므로 $-3\leq x\leq 0$일 때 곡선과 직선은 만나지 않는다.

곡선 $y=|x^2+3x|$와 직선 $y=x+8$의 교점의 x좌표는

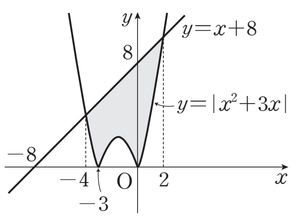
$x<-3$ 또는 $x>0$일 때, $x^2+3x=x+8$에서

$x^2+2x-8=0$

$(x+4)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=|x^2+3x|$와 직선 $y=x+8$은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는 $-(*)$



$$\int_{-4}^{2}\{(x+8)-|x^2+3x|\}dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}\{x+8-(x^2+3x)\}dx$$

$$+\int_{-3}^{0}\{x+8-(-x^2-3x)\}dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{x+8-(x^2+3x)\}dx$$

$$=\int_{-4}^{-3}(-x^2-2x+8)dx+\int_{-3}^{0}(x^2+4x+8)dx$$
$$+\int_{0}^{2}(-x^2-2x+8)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^{-3}+\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+8x\right]_{-3}^{0}$$
$$+\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{0}^{2}$$
$$=\left\{-24-\left(-\frac{80}{3}\right)\right\}-(-15)+\frac{28}{3}$$
$$=\frac{8}{3}+15+\frac{28}{3}=27$$

답 27

다른 풀이

(*)에서 구하는 넓이는 곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이에서 곡선 $y=-x^2-3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이에 두 배한 것을 뺀 것과 같다.

$$\therefore \int_{-4}^{2}\{(x+8)-(x^2+3x)\}dx-2\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx$$
$$=\int_{-4}^{2}(-x^2-2x+8)dx-2\int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx$$
$$=\frac{|-1|}{6}\times\{2-(-4)\}^3-2\times\frac{|-1|}{6}\times\{0-(-3)\}^3$$

본문 p.247 한 걸음 더 참고

$$=36-9$$
$$=27$$

10

곡선 $f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-(-4)=\{(x-2)+2\}^2$

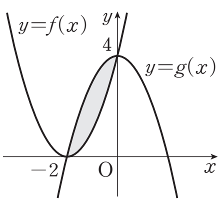
$\therefore\ y=x^2-4$

이 곡선을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$-y=x^2-4 \qquad \therefore\ y=-x^2+4$

$\therefore\ g(x)=-x^2+4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는



$x^2+4x+4=-x^2+4$에서

$2x^2+4x=0,\ 2x(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $g(x)\geq f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\{-x^2+4-(x^2+4x+4)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(-2x^2-4x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

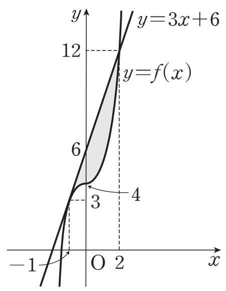
답 $\frac{8}{3}$

11

$f(x)=x^3+4$에서 $f'(x)=3x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은



$y-3=3\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=3x+6$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는

$x^3+4=3x+6$에서

$x^3-3x-2=0,\ (x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $3x+6\geq f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(3x+6)-(x^3+4)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

12

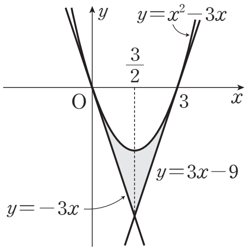
$f(x)=x^2-3x$라 하면 $f'(x)=2x-3$

$f'(0)=-3$, $f'(3)=3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 각각

$y-0=-3(x-0)$,

$y-0=3(x-3)$

$\therefore\ y=-3x,\ y=3x-9$



두 접선 $y=-3x$, $y=3x-9$의 교점의 x좌표는

$-3x=3x-9$에서 $x=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\{(x^2-3x)-(-3x)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\{(x^2-3x)-(3x-9)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}$$

$$=\frac{9}{8}+\left(9-\frac{63}{8}\right)=\frac{9}{4}$$

답 $\frac{9}{4}$

보충 설명

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\int_0^{\frac{3}{2}}\{(x^2-3x)-(-3x)\}dx$와 같다.

13

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=0$, $x=2$는 모두 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근이다.

또한, $x=2$인 점에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 접하므로 $f(x)-g(x)=-3x(x-2)^2$으로 나타낼 수 있다. —(*)

이때 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $g(x)\geq f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^2|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^2 3x(x-2)^2dx$$

$$=\int_0^2(3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$$

$$=4$$

답 4

보충 설명 본문 p.247 한 걸음 더 참고

(*)에서 공식을 이용하면 구하는 넓이는

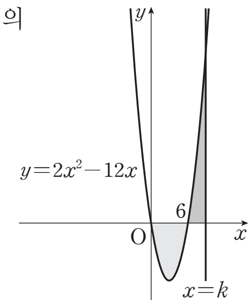
$$\frac{|-3|}{12}\times(2-0)^4=\frac{1}{4}\times16=4$$

14

곡선 $y=2x^2-12x$와 x축의 교점의 x좌표는 $2x^2-12x=0$에서

$2x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$



곡선 $y=2x^2-12x$와 x축으로 둘러싸인 도형과 이 곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^k(2x^2-12x)dx=0$에서

$\left[\frac{2}{3}x^3-6x^2\right]_0^k=0$, $\frac{2}{3}k^3-6k^2=0$

$\frac{2}{3}k^2(k-9)=0\qquad\therefore\ k=9\ (\because\ k>6)$

답 9

15

두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^2(x-4)=ax(x-4)$에서

$x(x-4)(x-a)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=4$

두 곡선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^4 \{x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$에서

$\int_0^4 \{x^3-(a+4)x^2+4ax\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+4)x^3+2ax^2\right]_0^4=0$

$64-\frac{64}{3}(a+4)+32a=0,\ \frac{32}{3}a-\frac{64}{3}=0$

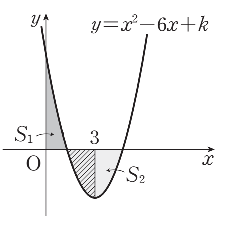
$\therefore\ a=2$

답 2

16

$S_1 : S_2=1 : 2$에서 $S_2=2S_1$

곡선 $y=x^2-6x+k=(x-3)^2+k-9$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 도형의 넓이는



$\frac{S_2}{2}=S_1$

즉, 곡선 $y=x^2-6x+k$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형과 이 곡선과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^3 (x^2-6x+k)dx=0$에서

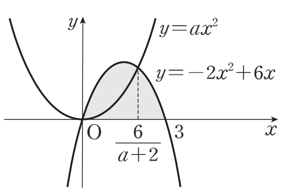
$\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+kx\right]_0^3=0,\ 9-27+3k=0$

$3k=18 \qquad \therefore\ k=6$

답 6

17

두 곡선 $y=-2x^2+6x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는



$-2x^2+6x=ax^2$에서

$x\{(a+2)x-6\}=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{6}{a+2}$

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{6}{a+2}\right]$에서 $-2x^2+6x\geq ax^2$이므로 두 곡선 $y=-2x^2+6x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{6}{a+2}} (-2x^2+6x-ax^2)dx=\left[-\frac{a+2}{3}x^3+3x^2\right]_0^{\frac{6}{a+2}}$

$=\frac{36}{(a+2)^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

한편, 곡선 $y=-2x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-2x^2+6x=0$에서 $-2x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $-2x^2+6x\geq 0$이므로 곡선 $y=-2x^2+6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^3 (-2x^2+6x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$2\times ㉠=㉡$이므로 $\frac{72}{(a+2)^2}=9,\ (a+2)^2=8$

$\therefore\ a=2\sqrt{2}-2$ 또는 $a=-2\sqrt{2}-2$

이때 $a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

답 $2\sqrt{2}-2$

보충 설명 본문 p.247 한 걸음 더 참고

공식을 이용하면

$㉠=\frac{|a-(-2)|}{6}\left(\frac{6}{a+2}-0\right)^3=\frac{36}{(a+2)^2}$,

$㉡=\frac{|-2|}{6}\times(3-0)^3=9$

18

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $-x^4+x\geq x^4-x^3$이므로 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^1 \{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$

$=\int_0^1 (-2x^4+x^3+x)dx$

$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{7}{20}$

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분되므로 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{7}{20}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{40}$이다.

이때 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $ax(1-x)\geq x^4-x^3$이므로

$\int_0^1 \{ax(1-x)-(x^4-x^3)\}dx$

$=\int_0^1 (-x^4+x^3-ax^2+ax)dx$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}a+\frac{1}{20}=\frac{7}{40}$$

즉, $\frac{1}{6}a=\frac{5}{40}$이므로 $\frac{1}{6}a=\frac{1}{8}$

$\therefore\ a=\frac{1}{8}\times 6=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. 즉,

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx$$

이므로

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$-2\int_0^1\{(-x^4+x)-ax(1-x)\}dx=0$$

$$\int_0^1[(-2x^4+x^3+x)-2\{-x^4+ax^2-(a-1)x\}]dx=0$$

$$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}ax^3+\frac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$\frac{1}{3}a=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ a=\frac{3}{4}$

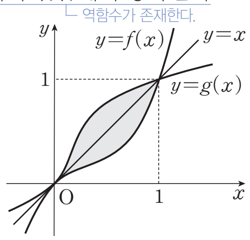
19

(1) $f(x)=2x^3-2x^2+x$에서

$$f'(x)=6x^2-4x+1=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
└ 역함수가 존재한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$2x^3-2x^2+x=x$에서 $2x^2(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x\geq f(x)$이므로 구하는 넓이는

$$2\int_0^1\{x-f(x)\}dx=2\int_0^1\{x-(2x^3-2x^2+x)\}dx$$
$$=2\int_0^1(-2x^3+2x^2)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+13x$에서

$$f'(x)=3x^2-12x+13$$
$$=3(x-2)^2+1>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
└ 역함수가 존재한다.

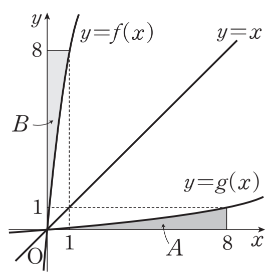
이때 $f(0)=0$, $f(1)=8$이므로

$g(0)=0$, $g(8)=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이다.



$$\therefore\ \underbrace{\int_0^8 g(x)dx}_{(A\text{의 넓이})}=(B\text{의 넓이})$$
$$=1\times 8-\int_0^1 f(x)dx$$
$$=8-\int_0^1(x^3-6x^2+13x)dx$$
$$=8-\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{13}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=8-\frac{19}{4}=\frac{13}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{13}{4}$

20

$f(x)=x^3+2x$에서 $f'(x)=3x^2+2>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
└ 역함수가 존재한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x=x$에서 $x(x^2+1)=0\qquad\therefore\ x=0$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x=-x+4$에서

$x^3+3x-4=0$, $(x-1)\underbrace{(x^2+x+4)}_{=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0}=0$

$\therefore\ x=1$

한편, 직선 $y=-x+4$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x+4=x$에서

$2x=4 \qquad \therefore\ x=2$

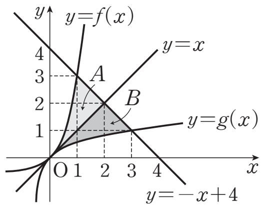
이때 $f(0)=0$, $f(1)=3$이므로

$g(0)=0$, $g(3)=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이다.



따라서 구하는 넓이는

$A+B=2A$

$$=2\left\{\int_0^1 (x^3+2x-x)dx+\int_1^2 (-x+4-x)dx\right\}$$

$$=2\left\{\int_0^1 (x^3+x)dx+\int_1^2 (-2x+4)dx\right\}$$

$$=2\left(\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[-x^2+4x\right]_1^2\right)$$

$$=2\times\left\{\frac{3}{4}+(4-3)\right\}$$

$$=2\times\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$$

답 $\frac{7}{2}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.257~259

01	$\frac{64}{3}$	**02**	1	**03**	$\frac{32}{3}$	**04**	28
05	$\frac{20}{3}$	**06**	$\frac{16}{3}$	**07**	$\frac{8}{3}$	**08**	160
09	④	**10**	16	**11**	$\frac{8}{3}$	**12**	$3\sqrt{2}$
13	$\frac{8\sqrt{6}}{9}$	**14**	$2\sqrt{5}$	**15**	4	**16**	4
17	k의 최솟값 : 3, $\int_2^9 g(x)dx=\frac{17}{4}$					**18**	40

01

곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-4x-8=0$에서

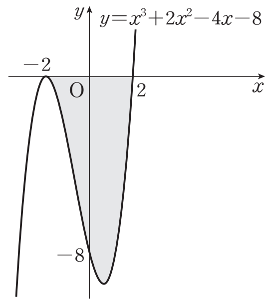
$(x+2)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서

$x^3+2x^2-4x-8\le0$

이므로 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^2 |x^3+2x^2-4x-8|dx$$

$$=\int_{-2}^2 (-x^3-2x^2+4x+8)dx$$

$$=2\int_0^2 (-2x^2+8)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

다른 풀이 본문 p.247 한 걸음 더 참고

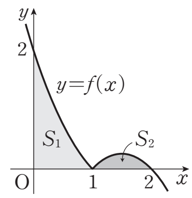
공식을 이용하면 구하는 넓이는

$$\frac{|1|}{12}\times\{2-(-2)\}^4=\frac{64}{3}$$

02

$$f(x)=|x-1|(2-x)$$
$$=\begin{cases}(x-1)(x-2) & (x<1)\\ -(x-1)(x-2) & (x\ge1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ S_1+S_2$

$$=\int_0^1 (x-1)(x-2)dx+\int_1^2 \{-(x-1)(x-2)\}dx$$

$$=\int_0^1 (x^2-3x+2)dx-\int_1^2 (x^2-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)$$

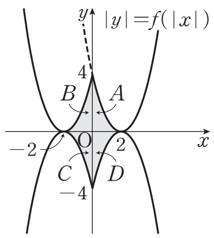
$$=1$$

답 1

03

$f(x)=x^2-4x+4$에서 $f(x)=(x-2)^2$

함수 $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 남긴 다음, $x\ge0$, $y\ge0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이다. 오른쪽 그림과 같이 각 사분면에서 $|y|=f(|x|)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, B, C, D라 하면



$A=B=C=D$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}A+B+C+D&=4A\\&=4\int_0^2(x^2-4x+4)dx\\&=4\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2\\&=4\times\frac{8}{3}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{32}{3}$

보충 설명

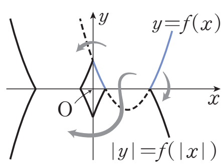
공통수학2 p.239 참고

$|y|=f(|x|)$의 그래프 그리기

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $x\ge0$, $y\ge0$인 부분만 남긴다.

(iii) (ii)를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.



04

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\ge0$이므로

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^1(x^2-5x+4)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1=\frac{11}{6}\end{aligned}$$

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 $f(x)\le0$이므로

$$\begin{aligned}S_2+S_3&=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^4=\frac{8}{3}-\left(-\frac{11}{6}\right)=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ S_1+S_2+S_3=\frac{11}{6}+\frac{9}{2}=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $2S_2=S_1+S_3$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$3S_2=\frac{19}{3}\qquad\therefore\ S_2=\frac{19}{9}$

따라서 $p=9$, $q=19$이므로

$p+q=9+19=28$

답 28

05

두 함수 $y=x^2$, $y=|x|+2$의 그래프의 교점의 x좌표는

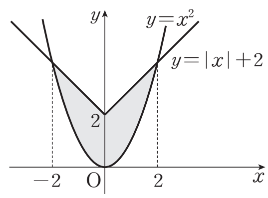
$x<0$일 때, $x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0\qquad\therefore\ x=-2\ (\because\ x<0)$

$x\ge0$일 때, $x^2=x+2$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0\qquad\therefore\ x=2\ (\because\ x\ge0)$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 $|x|+2\ge x^2$이고, 두 함수 $y=x^2$, $y=|x|+2$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는



$$\begin{aligned}\int_{-2}^2(|x|+2-x^2)dx&=2\int_0^2(-x^2+x+2)dx\\&=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2\\&=2\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}\end{aligned}$$

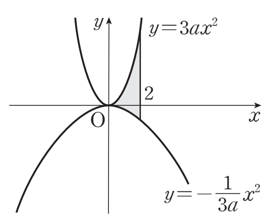
답 $\frac{20}{3}$

06

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$3ax^2\ge-\frac{1}{3a}x^2\ (\because\ a>0)$

즉, 구하는 넓이는



$$\begin{aligned}&\int_0^2\left\{3ax^2-\left(-\frac{1}{3a}x^2\right)\right\}dx\\&=\int_0^2\left(3a+\frac{1}{3a}\right)x^2dx=\left(3a+\frac{1}{3a}\right)\int_0^2x^2dx\\&=\left(3a+\frac{1}{3a}\right)\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}\left(3a+\frac{1}{3a}\right)\end{aligned}$$

이때 $a>0$에서 $3a>0$, $\frac{1}{3a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+\frac{1}{3a}\geq 2\sqrt{3a\times\frac{1}{3a}}=2$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 3a=\frac{1}{3a}\text{, 즉 } a=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은

$$\frac{8}{3}\times 2=\frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

보충 설명

산술평균과 기하평균의 관계 | $a>0$, $b>0$일 때,

공통수학2 p.222 참고

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

07

$f(x)=x^2-x$에서

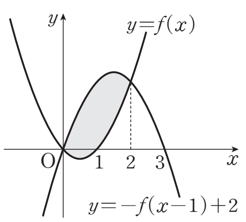
$$\begin{aligned}-f(x-1)+2&=-\{(x-1)^2-(x-1)\}+2\\&=-(x^2-2x+1-x+1)+2\\&=-x^2+3x\end{aligned}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)+2$의 교점의 x좌표는

$x^2-x=-x^2+3x$에서

$2x^2-4x=0$, $2x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$ $-(*)$



닫힌구간 $[0, 2]$에서

$-x^2+3x\geq x^2-x$이므로

구하는 넓이는

$$\int_0^2\{(-x^2+3x)-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

보충 설명 본문 p.247 한 걸음 더 참고

$(*)$에서 공식을 이용하면 구하는 넓이는

$$\frac{|1-(-1)|}{6}\times(2-0)^3=\frac{8}{3}$$

08

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 세 점

$(0, f(0))$, $(3, f(3))$, $(4, f(4))$에서 만나므로

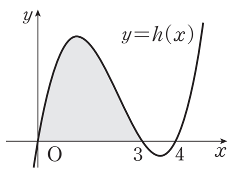
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고,

$h(0)=f(0)-g(0)=0$, $h(3)=f(3)-g(3)=0$,

$h(4)=f(4)-g(4)=0$

즉, $h(x)=ax(x-3)(x-4)$ $(a>0)$라 할 수 있다.

닫힌구간 $[0, 3]$에서 $h(x)\geq 0$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이가 180이므로



$$\int_0^3|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^3|h(x)|dx$$

$$=\int_0^3 ax(x-3)(x-4)dx$$

$$=a\int_0^3 x(x-3)(x-4)dx$$

$$=a\int_0^3(x^3-7x^2+12x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$$

$$=\frac{45}{4}a$$

즉, $\frac{45}{4}a=180$이므로 $a=16$

따라서 $h(x)=16x(x-3)(x-4)$이므로

$f(5)-g(5)=h(5)=16\times5\times2\times1=160$

답 160

09

$$y=2|x|=\begin{cases}-2x & (x<0)\\2x & (x\geq 0)\end{cases}$$

$x\geq 0$일 때, 점 B에서 곡선 $y=ax^2+2$와 직선 $y=2x$가 접하므로 이차방정식 $ax^2+2=2x$, 즉 $ax^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2a=0 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

즉, 점 B의 x좌표는 $\frac{1}{2}x^2-2x+2=0$에서

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\quad\therefore\ x=2$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 $\frac{1}{2}x^2+2>2|x|$이고, 두 함수

$y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=2|x|$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭

이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-2|x|\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-2x\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+2x\right]_0^2$$

$$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 ④

10

$f(x)=x^4-2x^2-x+5$에서 $f'(x)=4x^3-4x-1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접하므로 접점의 x좌표를

t라 하면 $f'(t)=g'(t)$에서

$4t^3-4t-1=-1$, $4t^3-4t=0$

$4t(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때,

$f(-1)=1-2+1+5=5$이므로 접선의 방정식은

$y-5=-(x+1)$ $\quad\therefore\ y=-x+4$

(ii) $t=0$일 때,

$f(0)=5$이므로 접선의 방정식은

$y-5=-x$ $\quad\therefore\ y=-x+5$

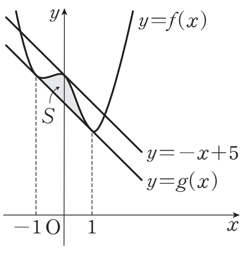
(iii) $t=1$일 때,

$f(1)=1-2-1+5=3$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)$ $\quad\therefore\ y=-x+4$

이때 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 접하므로

$g(x)=\overbrace{-x+4}^{k=4}$



닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)\geq g(x)$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{(x^4-2x^2-x+5)-(-x+4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{8}{15}=\frac{16}{15}$$

$\therefore\ 15S=15\times\frac{16}{15}=16$

답 16

11

곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 개수가 2이므로 방정식 $2x^3+2x^2-3x=-x+k$, 즉

$2x^3+2x^2-2x=k$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이때 $f(x)=2x^3+2x^2-2x$라 하면

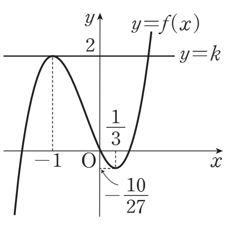
$f'(x)=6x^2+4x-2=2(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$-\frac{10}{27}$	↗

즉, 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$k=2$ ($\because\ k>0$) (가)

곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표는

$2x^3+2x^2-3x=-x+2$에서

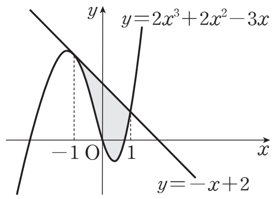
$2x^3+2x^2-2x-2=0$, $2(x+1)^2(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ (나)

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서

$-x+2\geq 2x^3+2x^2-3x$

이므로 구하는 넓이는



$$\int_{-1}^{1}\{(-x+2)-(2x^3+2x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^3-2x^2+2x+2)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(다)

답 $\frac{8}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구한 경우	40%
(나)	곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한 경우	20%
(다)	곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한 경우	40%

12

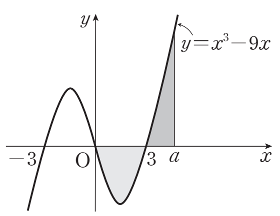
곡선 $y=x^3-9x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-9x=0$에서

$x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 곡선 $y=x^3-9x$와 x축으로 둘러싸인 도형과 이 도형과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 같으므로



$$\int_0^a(x^3-9x)dx=0\text{에서}$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_0^a=0,\ \frac{1}{4}a^4-\frac{9}{2}a^2=0$$

$$\frac{1}{4}a^2(a^2-18)=0\qquad\therefore\ a=3\sqrt{2}\ (\because\ a>3)$$

답 $3\sqrt{2}$

13

삼차방정식 $-x^3+4x+k=0$의 근 중 가장 작은 값을 $x_1\ (x_1<0)$이라 하면

$-x_1{}^3+4x_1+k=0\qquad\therefore\ k=x_1{}^3-4x_1\qquad\cdots\cdots㉠$

이때 $S_1=S_2$이므로 $\int_{x_1}^{0}f(x)dx=0$에서

$$\int_{x_1}^{0}(-x^3+4x+k)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2+kx\right]_{x_1}^{0}$$

$$=-\left(-\frac{1}{4}x_1{}^4+2x_1{}^2+kx_1\right)$$

$$=\frac{1}{4}x_1{}^4-2x_1{}^2-kx_1$$

$$=\frac{1}{4}x_1{}^4-2x_1{}^2-x_1{}^4+4x_1{}^2\ (\because\ ㉠)$$

$$=-\frac{3}{4}x_1{}^4+2x_1{}^2$$

$$=-\frac{3}{4}x_1{}^2\left(x_1{}^2-\frac{8}{3}\right)=0$$

$\therefore\ x_1=-\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\because\ x_1<0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $k=-\frac{16\sqrt{6}}{9}+\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{6}}{9}$

답 $\frac{8\sqrt{6}}{9}$

14

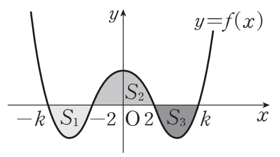
곡선 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k^2)$과 x축의 교점의 x좌표는

$(x^2-4)(x^2-k^2)=0$에서

$(x+2)(x-2)(x+k)(x-k)=0$

$\therefore\ x=-k$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$

이때 $k>2$이므로 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같다.



$S_2=S_1+S_3$이므로

$$\int_{-k}^{k}f(x)dx=0\text{에서}$$

$$\int_{-k}^{k}\{x^4-(k^2+4)x^2+4k^2\}dx$$

$$=2\int_0^k\{x^4-(k^2+4)x^2+4k^2\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k^2+4}{3}x^3+4k^2x\right]_0^k$$

$$=2\left(\frac{1}{5}k^5-\frac{k^2+4}{3}\times k^3+4k^3\right)$$

$=-\dfrac{4}{15}k^5+\dfrac{16}{3}k^3=0$

즉, $-\dfrac{4}{15}k^3(k^2-20)=0$이므로

$k=2\sqrt{5}$ ($\because$ $k>2$)

답 $2\sqrt{5}$

보충 설명

$S_2=S_1+S_3$에서

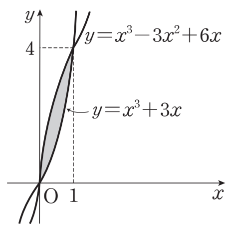
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-k}^{-2}\{-f(x)\}dx+\int_{2}^{k}\{-f(x)\}dx$$

$$=-\int_{-k}^{-2} f(x)dx-\int_{2}^{k} f(x)dx$$

즉, $\displaystyle\int_{-k}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{k} f(x)dx=0$이므로

$\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)dx=0$

15



곡선 $y=x^3+3x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-4=(x-1)^3+3(x-1)$

$\therefore$ $y=x^3-3x^2+6x$

두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3+3x=x^3-3x^2+6x$에서

$3x^2-3x=0$, $3x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^3-3x^2+6x\ge x^3+3x$이므로 두 곡선 $y=x^3+3x$, $y=x^3-3x^2+6x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_{0}^{1}\{(x^3-3x^2+6x)-(x^3+3x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{1}(-3x^2+3x)dx$

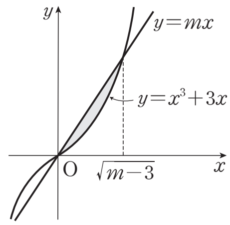
$=\left[-x^3+\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$ ……㉠

한편, 곡선 $y=x^3+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^3+3x=mx$에서

$x^3-(m-3)x=0$, $x\{x^2-(m-3)\}=0$

$\therefore$ $x=-\sqrt{m-3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{m-3}$



이때 $3<m\le4$이므로 $0<\sqrt{m-3}\le1$

닫힌구간 $[0, \sqrt{m-3}]$에서

$mx\ge x^3+3x$이므로 곡선

$y=x^3+3x$와 직선 $y=mx$로

둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{m-3}}\{mx-(x^3+3x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{m-3}}\{-x^3+(m-3)x\}dx$

$=\left[-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{m-3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{m-3}}$

$=\dfrac{(m-3)^2}{4}$ ……㉡

㉠$=2\times$㉡이므로

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{(m-3)^2}{2}$, $(m-3)^2=1$

$m-3=1$ ($\because$ $3<m\le4$)

$\therefore$ $m=4$

답 4

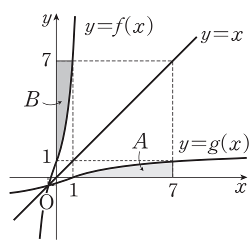
16

$f(x)=4x^3+2x+1$에서 $f'(x)=12x^2+2>0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
역함수가 존재한다.

이때 $f(0)=1$, $f(1)=7$이므로

$g(1)=0$, $g(7)=1$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

이다.

따라서 구하는 넓이는

$\displaystyle\int_{1}^{7} g(x)dx=(B$의 넓이$)$

(A의 넓이)

$=1\times7-\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx$

$=7-\displaystyle\int_{0}^{1}(4x^3+2x+1)dx$

$=7-\left[x^4+x^2+x\right]_0^1$

$=7-3=4$

답 4

17

$f(x)=x^3+3x^2+kx+2$에서

$f'(x)=3x^2+6x+k$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않아야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9-3k\le 0 \qquad \therefore\ k\ge 3$

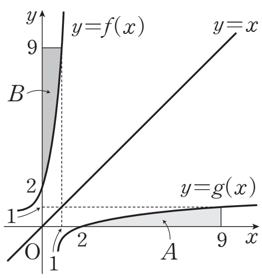
따라서 k의 최솟값은 3이고, 이때의 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+3x^2+3x+2=(x+1)^3+1$

이때 $f(0)=2,\ f(1)=9$이므로

$g(2)=0,\ g(9)=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림에서 (A의 넓이)$=$(B의 넓이)이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\underbrace{\int_2^9 g(x)dx}_{(A\text{의 넓이})}=(B\text{의 넓이})$$

$$=1\times 9-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=9-\int_0^1 (x^3+3x^2+3x+2)dx$$

$$=9-\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1$$

$$=9-\frac{19}{4}=\frac{17}{4}$$

답 k의 최솟값 : 3, $\displaystyle\int_2^9 g(x)dx=\frac{17}{4}$

18

$f(x)=x^3+3x^2+4x+1$에서

$f'(x)=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1>0$이므로 $\underbrace{\text{함수 } f(x)\text{는 실수 전체의 집합에서 증가한다}}_{\text{역함수가 존재한다.}}$.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3+3x^2+4x+1=x$에서

$x^3+3x^2+3x+1=0,\ (x+1)^3=0$

$\therefore\ x=-1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는

$x^3+3x^2+4x+1=-x+10$에서

$x^3+3x^2+5x-9=0$

$(x-1)(\underbrace{x^2+4x+9}_{=(x+2)^2+5>0})=0$

$\therefore\ x=1$ ($\because$ x는 실수)

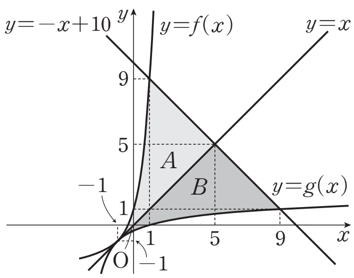
한편, 직선 $y=-x+10$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x+10=x$에서 $x=5$

이때 $f(0)=1,\ f(1)=9$이므로

$g(1)=0,\ g(9)=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림에서 (A의 넓이)$=$(B의 넓이)이다.



따라서 구하는 넓이는

(A의 넓이)$+$(B의 넓이)

$=2\times$(A의 넓이)

$$=2\left[\int_{-1}^1 \{f(x)-x\}dx+\int_1^5 \{(-x+10)-x\}dx\right]-(*)$$

$$=2\left\{\int_{-1}^1 (x^3+3x^2+3x+1)dx+\int_1^5 (-2x+10)dx\right\}$$

$$=2\left(\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^1+\left[-x^2+10x\right]_1^5\right)$$

$$=2\times\left[\left\{\frac{15}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}+(25-9)\right]$$

$$=2\times 20=40$$

답 40

보충 설명

$(*)$에서 $\displaystyle\int_1^5 \{(-x+10)-x\}dx$는 밑변의 길이가 $9-1=8$, 높이가 $5-1=4$인 삼각형의 넓이이므로

$2\left[\displaystyle\int_{-1}^1 \{f(x)-x\}dx+\frac{1}{2}\times 8\times 4\right]$로 구할 수도 있다.

2 속도와 거리

기본 + 필수연습

본문 pp.262~265

21 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$	**22** $\frac{56}{3}$
23 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$	**24** 1
25 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$	**26** 6
27 8	**28** $\frac{64}{3}$

21

(1) 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^1(3t^2-9t+6)dt$$

$$=1+\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$$

(2) 시각 $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^3(3t^2-9t+6)dt$$

$$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_2^3=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

답 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

22

$v(t)=t^2-1=(t+1)(t-1)$이므로 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $v(t)\le0$, 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 $v(t)\ge0$이다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4|t^2-1|dt$$

$$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^4(t^2-1)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^4$$

$$=\frac{2}{3}+\left\{\frac{52}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}+18=\frac{56}{3}$$

답 $\frac{56}{3}$

23

(1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 원점에서 출발 후 시각 $t=1$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 점 P의 위치는

$0<t<1$이면 $v(t)>0$, $1<t<3$이면 $v(t)<0$

$$0+\int_0^1(t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

(2) 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a(t^2-4t+3)dt=0$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-2a^2+3a=0,\ \frac{1}{3}a(a^2-6a+9)=0$$

$$\frac{1}{3}a(a-3)^2=0 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$이므로 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $v(t)\ge0$, 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $v(t)\le0$이다.

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^3|t^2-4t+3|dt$$

$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$

$$=\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$

24

$f(t)=2t^3-9t^2+12t$에서

$v(t)=f'(t)=6t^2-18t+12$

점 P가 출발할 때의 속도는 $v(0)=12>0$이므로 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직이려면 $v(t)\le0$이어야 한다.

즉, $6t^2-18t+12\leq 0$에서

$6(t^2-3t+2)\leq 0$, $6(t-1)(t-2)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq t\leq 2$

즉, 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\leq 0$이므로 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인 거리는

$$\int_1^2 |6t^2-18t+12|\,dt$$

$$=\int_1^2 (-6t^2+18t-12)\,dt$$

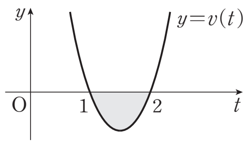
$$=\Big[-2t^3+9t^2-12t\Big]_1^2$$

$$=(-4)-(-5)=1$$

답 1

다른 풀이 본문 p.247 한 걸음 더 참고

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

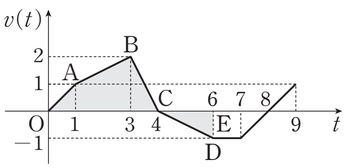


공식을 이용하면

$$\frac{|6|}{6}\times(2-1)^3=1$$

25

(1) 다음 그림과 같이 A~E를 정하자.



시각 $t=6$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)\,dt$$

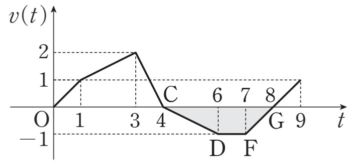
$$=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt$$

$$=\square\mathrm{OABC}-\triangle\mathrm{CDE}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times2+\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times1$$

$$=\frac{1}{2}+3+1-1=\frac{7}{2}$$

(2) 다음 그림과 같이 C, D, F, G를 정하자.



점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=4$ 또는 $t=8$ ($\because\ t>0$)

즉, 점 P가 출발 후 시각 $t=4$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고 시각 $t=8$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_4^8 |v(t)|\,dt=\square\mathrm{CDFG}$$

$$=\frac{1}{2}\times(1+4)\times1=\frac{5}{2}$$

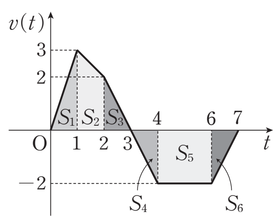
답 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

26

물체가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 물체의 위치의 변화량은 0이므로

$\int_0^a v(t)\,dt=0$이다.

오른쪽 그림과 같이 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 t축에 수직인 직선들로 둘러싸인 각 도형의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6이라 하면



$$S_1=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times(2+3)\times1=\frac{5}{2},$$

$$S_3=\frac{1}{2}\times1\times2=1,\ S_4=\frac{1}{2}\times1\times2=1,$$

$$S_5=2\times2=4,\ S_6=\frac{1}{2}\times1\times2=1$$

이때 $S_1+S_2+S_3=S_4+S_5$에서

$S_1+S_2+S_3-(S_4+S_5)=0$이므로

$$\int_0^6 v(t)\,dt=0\qquad\therefore\ a=6$$

답 6

27

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=0+\int_0^t(3s^2-4s-4)ds$$
$$=t^3-2t^2-4t$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{Q}}(t)=0+\int_0^t(2s-4)ds$$
$$=t^2-4t$$

두 점 P, Q가 만날 때는 $\underline{x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)}$이므로
두 점의 위치가 같다.

$t^3-2t^2-4t=t^2-4t$에서

$t^3-3t^2=0$

$t^2(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

이때 $v_{\mathrm{P}}(t)=3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $v_{\mathrm{P}}(t)\le 0$, 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $v_{\mathrm{P}}(t)\ge 0$이다.

즉, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|3t^2-4t-4|dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+4t+4)dt+\int_2^3(3t^2-4t-4)dt$$
$$=\Big[-t^3+2t^2+4t\Big]_0^2+\Big[t^3-2t^2-4t\Big]_2^3$$
$$=8+\{(-3)-(-8)\}$$
$$=13$$

또한, $v_{\mathrm{Q}}(t)=2t-4=2(t-2)$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $v_{\mathrm{Q}}(t)\le 0$이고, 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $v_{\mathrm{Q}}(t)\ge 0$이다.

즉, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^3|2t-4|dt$$
$$=\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^3(2t-4)dt$$
$$=\Big[-t^2+4t\Big]_0^2+\Big[t^2-4t\Big]_2^3$$
$$=4+\{(-3)-(-4)\}$$
$$=5$$

따라서 두 점 P, Q의 움직인 거리의 차는

$13-5=8$

답 8

28

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{P}}(t)=0+\int_0^t(s^2-3s)ds=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$$x_{\mathrm{Q}}(t)=0+\int_0^t(-s^2+5s)ds=-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2$$

두 점 P, Q가 만날 때는 $\underline{x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)}$이므로
두 점의 위치가 같다.

$\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2=-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2$에서

$\frac{2}{3}t^3-4t^2=0,\ \frac{2}{3}t^2(t-6)=0\qquad\therefore\ t=6\ (\because\ t>0)$

$0<t\le 6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=|x_{\mathrm{P}}(t)-x_{\mathrm{Q}}(t)|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right)-\left(-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2\right)\right|$$
$$=\left|\frac{2}{3}t^3-4t^2\right|$$

이때 $g(t)=\frac{2}{3}t^3-4t^2\ (0<t\le 6)$이라 하면

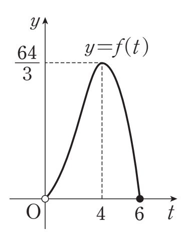
$g'(t)=2t^2-8t=2t(t-4)$

$g'(t)=0$에서 $t=4\ (\because\ 0<t\le 6)$

$0<t\le 6$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$g'(t)$		$-$	0	$+$	$+$
$g(t)$		$\searrow$	$-\frac{64}{3}$	$\nearrow$	0

이때 함수 $y=f(t)$, 즉 $y=|g(t)|$의 그래프는 $y=g(t)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 t축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0<t\le 6$에서 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은

$$f(4)=|g(4)|=\frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

STEP 1 **개념 마무리** 본문 p.266

19 -3	**20** 8	**21** 175	**22** ③
23 35			

19

속도 $v(t)$는 $t\ge0$인 모든 실수 t에서 연속이므로 $t=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{t\to1+}v(t)=\lim_{t\to1-}v(t)=v(1)$이므로

$b=5$ ……㉠

한편, 시각 $t=5$에서의 점 P의 위치가 -1이므로

$0+\int_0^5 v(t)dt$

$=\int_0^1(3t^2+2)dt+\int_1^5\{a(t-1)+5\}dt$ ($\because$ ㉠)

$=\left[t^3+2t\right]_0^1+\left[\frac{a}{2}t^2-at+5t\right]_1^5$

$=3+\left\{\left(\frac{15}{2}a+25\right)-\left(-\frac{a}{2}+5\right)\right\}$

$=8a+23$

즉, $8a+23=-1$에서 $8a=-24$

$\therefore a=-3$

답 -3

20

시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 4이므로

$0+\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1(3t^2-12t+k)dt$

$=\left[t^3-6t^2+kt\right]_0^1$

$=k-5$

즉, $k-5=4$에서 $k=9$

$\therefore v(t)=3t^2-12t+9$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$3t^2-12t+9=0$, $3(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, 점 P는 출발 후 시각 $t=3$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $v(t)\ge0$, 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 $v(t)\le0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^1(3t^2-12t+9)dt+\int_1^3(-3t^2+12t-9)dt$

$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^1+\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3$

$=4+\{0-(-4)\}=8$

답 8

21

물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서

$30-2t=0$ $\therefore t=15$

이때 지면으로부터 물체의 높이는

$a=\int_0^{15}v(t)dt$

$=\int_0^{10}tdt+\int_{10}^{15}(30-2t)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{10}+\left[30t-t^2\right]_{10}^{15}$

$=50+(225-200)$

$=75$ ……㉠

닫힌구간 $[0,\ 15]$에서 $v(t)\ge0$, 닫힌구간 $[15,\ 20]$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=20$까지 물체가 움직인 거리는

$b=\int_0^{20}|v(t)|dt$

$=\int_0^{10}tdt+\int_{10}^{15}(30-2t)dt+\int_{15}^{20}(-30+2t)dt$

$=75+\left[-30t+t^2\right]_{15}^{20}$ ($\because$ ㉠)

$=75+\{-200-(-225)\}$

$=100$ ……㉡

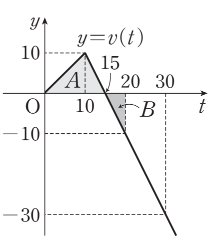
㉠, ㉡에서 $a+b=75+100=175$

답 175

다른 풀이

$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t<10) \\ 30-2t & (10\le t\le30) \end{cases}$

에서 함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$t=15$에서 $v(t)=0$이므로

$t=15$일 때, 물체는 최고 지점에 도달한다.

닫힌구간 $[0,\ 15]$에서 $v(t)\geq 0$이므로 $t=15$일 때 물체의 높이 a는 A의 넓이와 같다.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\times 15\times 10=75$

출발 후 20분까지 움직인 거리 b는 A의 넓이와 B의 넓이의 합과 같으므로

$b=\frac{1}{2}\times 15\times 10+\frac{1}{2}\times 5\times 10=75+25=100$

$\therefore\ a+b=75+100=175$

22

ㄱ. 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량 $\int_0^4 v(t)dt$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 1=2$ (참)

ㄴ. 속력은 속도의 절댓값이므로 점 P의 최고 속력은 시각 $t=5$일 때 $|-2|=2$이다. (거짓)

ㄷ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=4$ 또는 $t=t_1$ $(5<t_1<8)$

$5\leq t<8$에서 $v(t)=t-7$이므로

$v(t_1)=t_1-7=0$에서 $t_1=7$

즉, 점 P가 출발 후 시각 $t=7$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리 $\int_0^7 |v(t)|dt$는 닫힌구간 $[0,\ 7]$에서 $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times 2=2+3=5$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

다른 풀이

주어진 그래프에서 $v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t & (0\leq t<2) \\ -\frac{1}{2}t+2 & (2\leq t<4) \\ -2t+8 & (4\leq t<5) \\ t-7 & (5\leq t<8) \\ 1 & (t\geq 8)\end{cases}$

ㄱ. $\int_0^4 v(t)dt=\int_0^2 \frac{1}{2}t\,dt+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}t+2\right)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^2+2t\right]_2^4$

$=1+(4-3)=2$ (참)

ㄷ. $\int_0^7 |v(t)|dt$

$=\int_0^2 \frac{1}{2}t\,dt+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}t+2\right)dt+\int_4^5(2t-8)dt+\int_5^7(-t+7)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^2+2t\right]_2^4+\left[t^2-8t\right]_4^5+\left[-\frac{1}{2}t^2+7t\right]_5^7$

$=1+(4-3)+\{-15-(-16)\}+\left(\frac{49}{2}-\frac{45}{2}\right)$

$=5$ (참)

23

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{P}}(t)=5+\int_0^t(3s^2-4s)ds=t^3-2t^2+5$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{Q}}(t)=k+\int_0^t 15dt=15t+k$

(가)

두 점 P, Q가 만날 때는 $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$이므로

$t^3-2t^2+5=15t+k \qquad \therefore\ t^3-2t^2-15t+5=k$

이때 두 점 P, Q가 출발 후 두 번만 만나려면 $t>0$에서 방정식 $t^3-2t^2-15t+5=k$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(나)

$f(t)=t^3-2t^2-15t+5$라 하면

$f'(t)=3t^2-4t-15=(3t+5)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=3$ $(\because\ t>0)$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	-31	↗

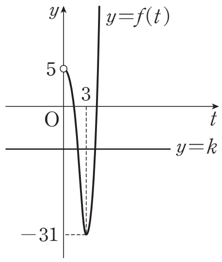
즉, $t>0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$-31<k<5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는

$-30,\ -29,\ -28,\ \cdots,\ 4$의 35개

이다.



(다)

답 35

단계	채점 기준	배점
(가)	시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 구한 경우	30%
(나)	두 점 P, Q가 만나는 시각 t에 대한 방정식을 세운 경우	30%
(다)	조건을 만족시키는 정수 k의 개수를 구한 경우	40%

STEP 2 개념 마무리

본문 p.267

1 120 **2** 27 **3** $\frac{1}{2}$ **4** ㄱ, ㄴ, ㄷ

5 ②

1

$$f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ -x^2+2x & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$x^2-2x=k$에서 $x^2-2x-k=0$ ← $k>1$이므로 $-x^2+2x=k$는 해를 갖지 않는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k$ ……㉠

$\therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\ (\because\ \beta>\alpha)$

$=\sqrt{4+4k}\ (\because\ ㉠)$

$=2\sqrt{k+1}$ ……㉡

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$|x^2-2x|=0$에서 $|x(x-2)|=0$

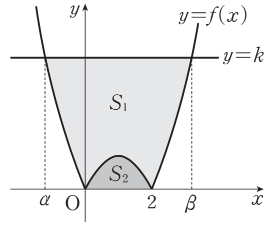
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$-x^2+2x\ge 0$이므로

$S_2=\int_0^2(-x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$



이때 $S_1:S_2=9:1$에서 $S_1=9S_2$이고,

$k(\beta-\alpha)=S_1+S_2+\int_\alpha^0(x^2-2x)dx+\int_2^\beta(x^2-2x)dx$

이므로

$k(\beta-\alpha)$

$=10S_2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_\alpha^0+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^\beta$

$=10\times\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha^2\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}\beta^3-\beta^2\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}$

$=\frac{44}{3}+\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-(\beta^2-\alpha^2)$

$=\frac{44}{3}+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$

$=\frac{44}{3}+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$

㉠, ㉡을 위의 식에 대입하면

$2k\sqrt{k+1}=\frac{44}{3}+\frac{2}{3}(4+k)\sqrt{k+1}-4\sqrt{k+1}$

$(k+1)\sqrt{k+1}=11,\ (k+1)^{\frac{3}{2}}=11$

$\therefore\ k=\sqrt[3]{121}-1$

따라서 $a=121,\ b=-1$이므로

$a+b=121+(-1)=120$

답 120

2

닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 $x^3+3x^2\ge 0$이므로 곡선 $y=x^3+3x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-3}^0(x^3+3x^2)dx$ ……㉠

직선 l의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하면 직선 l과 x축, y축 및 $x=-3$으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(mx+n)dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로 $\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx=\int_{-3}^{0}(mx+n)dx$

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx-\int_{-3}^{0}(mx+n)dx=0$$

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2-mx-n)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{m}{2}x^2-nx\right]_{-3}^{0}=0$$

$$\frac{27}{4}+\frac{9}{2}m-3n=0$$

$$\therefore\ n=\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ l : y=mx+\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}$$

$$=m\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{9}{4}$$

즉, 직선 l은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$를 지나므로 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$이다.

따라서 삼각형 OPA의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$$

$$\therefore\ 8S=8\times\frac{27}{8}=27$$

답 27

다른 풀이

닫힌구간 $[-3, 0]$에서 $x^3+3x^2\ge0$이므로 곡선 $y=x^3+3x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^{0}$$

$$=\frac{27}{4} \quad \cdots\cdots ㉢$$

직선 l이 두 점 $(0, a)$, $(-3, b)$ $(a>0, b>0)$를 지날 때, 직선 l과 x축, y축 및 직선 $x=-3$으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(a+b)\times3=\frac{3}{2}(a+b) \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢=㉣이므로 $\frac{27}{4}=\frac{3}{2}(a+b)$

$$\therefore\ a+b=\frac{9}{2} \quad \cdots\cdots ㉤$$

한편, 직선 l의 기울기는

$$\frac{a-b}{0-(-3)}=\frac{a-b}{3}$$

$$=\frac{2a-\frac{9}{2}}{3}\ (\because ㉤)$$

$$=\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}$$

이므로 직선 l의 방정식은

$$y=\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}\right)x+a$$

a에 대하여 정리하면

$6y=4ax-9x+6a \qquad \therefore\ (4x+6)a-(9x+6y)=0$

이때 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지나므로

$4x+6=0$, $9x+6y=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{3}{2},\ y=\frac{9}{4}$$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$이다.

따라서 삼각형 OPA의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{8} \qquad \therefore\ 8S=8\times\frac{27}{8}=27$$

보충 설명 본문 p.247 한 걸음 더 참고

㉢에서 공식을 이용하면

$$\frac{|1|}{12}\times\{0-(-3)\}^4=\frac{27}{4}$$

3

$f(x)=x^3+2x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
역함수가 존재한다.

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식은

$$x=\frac{1}{3}y-1 \qquad \therefore\ y=3x+3$$

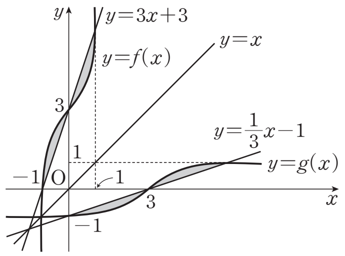
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+3$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x+3=3x+3$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

또한, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.
닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $f(x)\geq 3x+3$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\leq 3x+3$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{f(x)-(3x+3)\}dx+\int_{0}^{1}\{(3x+3)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

4

시각 t에서의 물체 A의 높이를 $x_A(t)$라 하면

$$x_A(t)=\int_0^t f(t)dt$$

시각 t에서의 물체 B의 높이를 $x_B(t)$라 하면

$$x_B(t)=\int_0^t g(t)dt$$

ㄱ. 시각 $t=a$일 때, 물체 A의 높이는

$$x_A(a)=\int_0^a f(t)dt$$

시각 $t=a$일 때, 물체 B의 높이는

$$x_B(a)=\int_0^a g(t)dt$$

닫힌구간 $[0,\ a]$에서 $f(t)\geq g(t)$이므로

열린구간 $(0,\ a)$에서 $f(t)>g(t)$이므로 $\int_0^a f(t)dt\neq\int_0^a g(t)dt$

$$\int_0^a f(t)dt>\int_0^a g(t)dt$$

즉, 시각 $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. 닫힌구간 $[0,\ b]$에서 $f(t)-g(t)\geq 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.
또한, 닫힌구간 $[b,\ c]$에서 $f(t)-g(t)\leq 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 작아진다.
즉, 시각 $t=b$일 때, 두 물체 A, B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$에서 $x_A(c)=x_B(c)$이므로
시각 $t=c$일 때, 두 물체 A, B는 같은 높이에 있다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

5

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$$x_1(t)=0+\int_0^t(s^2-6s+5)ds=\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하면

$$x_2(t)=0+\int_0^t(2s-7)ds=t^2-7t$$

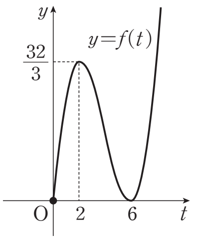
즉, 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리 $f(t)$는

$$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right)-(t^2-7t)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$$

이때 $g(t)=\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t$라 하면

$g'(t)=t^2-8t+12$
$g'(t)=0$에서 $t^2-8t+12=0$, $(t-2)(t-6)=0$
$\therefore\ t=2$ 또는 $t=6$
$t\geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗



함수 $y=f(t)=|g(t)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가한다.

$\therefore\ a=2,\ b=6$

따라서 시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_{2}^{6}|2t-7|\,dt$$

$$=\int_{2}^{\frac{7}{2}}(-2t+7)\,dt+\int_{\frac{7}{2}}^{6}(2t-7)\,dt$$

$$=\left[-t^2+7t\right]_{2}^{\frac{7}{2}}+\left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^{6}$$

$$=\left(\frac{49}{4}-10\right)+\left\{-6-\left(-\frac{49}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{17}{2}$$

답 ②

B L A C K L A B E L