

THE 개념
블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L



I. 경우의 수

01. 여러 가지 순열

1 중복순열

기본 + 필수연습

본문 pp.012~017

- 01 (1) 32 (2) 4 (3) 49 (4) 3125
 02 (1) $n=6$ (2) $n=4$ (3) $r=3$ (4) $r=4$
 03 (1) 729 (2) 64 04 48
 05 (1) 62 (2) 768 06 33 07 1344
 08 (1) 200 (2) 196 09 175 10 111
 11 232 12 48 13 108 14 27
 15 729 16 192

01

- (1) ${}_2\Pi_5=2^5=32$
 (2) ${}_4\Pi_1=4^1=4$
 (3) ${}_7\Pi_2=7^2=49$
 (4) ${}_5\Pi_5=5^5=3125$

답 (1) 32 (2) 4 (3) 49 (4) 3125

02

- (1) ${}_n\Pi_2=36$ 에서 $n^2=6^2 \therefore n=6$
 (2) ${}_{n+1}\Pi_n=625$ 에서 $(n+1)^n=5^4 \therefore n=4$
 (3) ${}_7\Pi_r=343$ 에서 $7^r=7^3 \therefore r=3$
 (4) ${}_8\Pi_{r-1}=512$ 에서 $8^{r-1}=8^3 \therefore r=4$

답 (1) $n=6$ (2) $n=4$ (3) $r=3$ (4) $r=4$

03

- (1) 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
 ${}_3\Pi_6=3^6=729$

- (2) 서로 다른 3개의 스티커를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 (1) 729 (2) 64

04

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지
 십의 자리, 일의 자리에 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$3 \times 16 = 48$$

답 48

05

- (1) 서로 다른 6자루의 연필을 서로 다른 2개의 필통에 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

이때 한 필통에 연필 6자루를 다 담는 경우는 제외시켜야 하므로 구하는 경우의 수는

$$64 - 2 = 62$$

- (2) 4개의 문자 a, b, c, d 중에서 서로 다른 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

그 각각에 대하여 양 끝을 제외한 나머지 자리에 3개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 4개의 문자 a, b, c, d 에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$12 \times 64 = 768$$

답 (1) 62 (2) 768

다른 풀이

(1) 2개의 필통에 나누어 답을 연필의 수를 순서쌍으로 나타내면

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

각각의 경우에 대하여 서로 다른 연필 6개를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 62$$

06

3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

문자 a 가 두 번 이상 나오는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 문자 a 가 0번, 1번 나오는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) a 가 0번 나올 때,

a 를 제외한 2개의 문자 b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

(ii) a 가 1번 나올 때,

네 자리 중 문자 a 가 들어갈 자리 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

a 를 제외한 2개의 문자 b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나머지 세 자리에 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

따라서 문자 a 가 1번 나오는 경우의 수는

$$4 \times 8 = 32$$

(i), (ii)에서 문자 a 가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$$81 - (16 + 32) = 33$$

답 33

다른 풀이

3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 나열할 때, 문자 a 가 2번, 3번, 4번 나오는 경우의 수를 각각 구하여 풀 수도 있다.

(i) a 가 2번 나올 때,

네 자리 중 문자 a 가 들어갈 자리 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

2개의 문자 b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나머지 두 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 문자 a 가 2번 나오는 경우의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

(ii) a 가 3번 나올 때,

네 자리 중 문자 a 가 들어갈 자리 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

2개의 문자 b, c 중에서 1개를 택하여 나머지 한 자리에 놓는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

따라서 문자 a 가 3번 나오는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(iii) a 가 4번 나올 때,

$aaaa$ 의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 문자 a 가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$$24 + 8 + 1 = 33$$

07

서로 다른 4개의 기호 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

서로 다른 4개의 기호 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

서로 다른 4개의 기호 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$$

따라서 3개 이상 5개 이하의 기호를 택하여 일렬로 나열할 때, 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$$64 + 256 + 1024 = 1344$$

답 1344

08

- (1) 홀수의 일의 자리의 숫자는 홀수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지
 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지
 백의 자리, 십의 자리에 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_5\P_2=5^2=25$
 따라서 구하는 홀수의 개수는
 $2 \times 4 \times 25 = 200$

- (2) (i) 숫자 0이 1개 포함되는 경우
 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 세 자리 중 숫자 0이 들어갈 자리 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나머지 세 자리에 나열하는 경우의 수는
 ${}_4\P_3=4^3=64$
 즉, 이 경우의 수는
 $3 \times 64 = 192$

- (ii) 숫자 0이 3개 포함되는 경우
 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 세 자리 중 숫자 0이 들어갈 자리 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$
 4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 1개를 택하여 나머지만 한 자리에 놓는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
 즉, 이 경우의 수는
 $1 \times 4 = 4$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $192 + 4 = 196$

답 (1) 200 (2) 196

09

백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 짝수이라면 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

- (i) 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우
 4개의 홀수 3, 5, 7, 9 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 백의 자리와 일의 자리에 나열하는 경우의 수는
 ${}_4\P_2=4^2=16$

7개의 숫자 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 중에서 1개를 택하여 십의 자리에 놓는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$

즉, 이 경우의 수는

$$16 \times 7 = 112$$

- (ii) 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 경우
 3개의 짝수 2, 4, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 백의 자리와 일의 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_3\P_2=3^2=9$$

7개의 숫자 중에서 1개를 택하여 십의 자리에 놓는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$

즉, 이 경우의 수는

$$9 \times 7 = 63$$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$112 + 63 = 175$$

답 175

10

만든 네 자리 자연수가 4200보다 큰 경우는 다음과 같다.

- (i) 42□□ 꼴인 경우

4개의 숫자 0, 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 십의 자리와 일의 자리에 나열하면 되므로

$${}_4\P_2=4^2=16$$

그런데 4200이 만들어지는 경우는 제외해야 하므로 이 경우의 수는

4200의 1가지

$$16 - 1 = 15$$

- (ii) 44□□, 46□□ 꼴인 경우

각 경우에 대하여 4개의 숫자 0, 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 십의 자리와 일의 자리에 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$2 \times {}_4\P_2 = 2 \times 4^2 = 32$$

- (iii) 6□□□ 꼴인 경우

4개의 숫자 0, 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_4\P_3=4^3=64$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$15 + 32 + 64 = 111$$

답 111

11

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d 의 4개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256 \quad \therefore p = 256$$

X 에서 Y 로의 일대일대응의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d 의 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$4! = 24 \quad \therefore q = 24$$

$$\therefore p - q = 256 - 24 = 232$$

답 232

12

구하는 함수 f 의 개수는 X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수에서 $f(a) = 3$ 인 함수 f 의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(ii) $f(a) = 3$ 인 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 b, c 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$64 - 16 = 48$$

답 48

다른 풀이

$f(a) \neq 3$ 이므로 $f(a)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4의 3가지이다.

이때 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 b, c 에 대응시키는 경우의 수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times 16 = 48$$

13

(i) x 가 홀수일 때,

$x + f(x)$ 의 값이 홀수가 되려면 $f(x)$ 의 값이 짝수이어야 한다.

즉, 집합 Y 의 원소 2, 4, 6의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 3, 5에 대응시키면 되므로 이 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

(ii) x 가 짝수일 때,

$x + f(x)$ 의 값이 홀수가 되려면 $f(x)$ 의 값이 홀수이어야 한다.

즉, 집합 Y 의 원소 3, 5의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 원소 2, 4에 대응시키면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

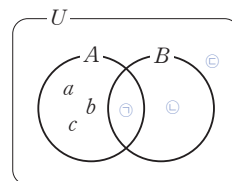
$$27 \times 4 = 108$$

답 108

14

$A \cap B^c = \{a, b, c\}$ 이므로 전체집합 U 의 원소 중에서 a, b, c 를 제외한 원소인 d, e, f 는 $(A \cap B^c)^c$ 에 속해야 한다.

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 3개의 원소 d, e, f 는 집합 $A \cap B^c$ 또는 집합 $B \cap A^c$ 또는 집합 $(A \cup B)^c$ 에 속하므로 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

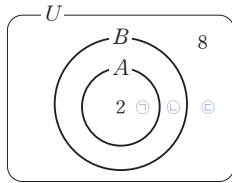
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

답 27

15

조건 (가)에서 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이고, 조건 (나)에서 집합 A 는 2를 반드시 원소로 가지며, 조건 (다)에서 집합 B 는 8을 반드시 원소로 갖지 않으므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 전체집합 U 의 원소 중 2, 8을 제외한 6개의 원소 1, 3, 4, 5, 6, 7은 집합 A 또는 집합 $B-A$ 또는 집합 $U-B$ 에 속하므로 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개의 집합에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

답 729

16

전체집합 U 의 6개의 원소 중에서 집합 $A \cup B$ 의 원소 5개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_5 = 6$$

각각의 경우에 대하여 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5 = 32$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$6 \times 32 = 192$$

답 192

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.018~019

01 81	02 729	03 1280	04 150
05 8	06 602	07 1488	08 ⑤
09 2752번째	10 325	11 311	12 400
13 40			

01

주사위의 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 이 중에서 15의 약수는 1, 3, 5이다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

답 81

02

3개의 상자에 담은 탁구공의 개수가 서로 다르므로 각 상자에 담은 탁구공의 개수는

0, 1, 5 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3

즉, 탁구공을 담은 경우의 수는 3이다.

또한, 각 상자에 담은 탁구공의 개수가 서로 다르므로 3개의 상자를 서로 다른 상자로 생각할 수 있다.

서로 다른 종류의 탁구채 5개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 담은 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 243 = 729$$

답 729

03

책이 6권이므로 두 가방 A, B에 들어 있는 책의 수의 합은 3, 두 가방 C, D에 들어 있는 책의 수의 합도 3이어야 한다. 6권의 책 중에서 두 가방 A, B에 들어갈 책 3권을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

이때 서로 다른 책 3권을 두 가방 A, B에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

같은 방법으로 남아 있는 서로 다른 책 3권을 두 가방 C, D에 넣는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 8 \times 8 = 1280$$

답 1280

04

비밀번호의 첫 번째 자리를 정하는 경우의 수는 서로 다른 세 개의 문자 a, b, c 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

비밀번호의 마지막 자리를 정하는 경우의 수는 서로 다른 두 개의 숫자 1, 2 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2C_1=2$

비밀번호의 두 번째, 세 번째 자리를 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 문자 또는 숫자 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 조건을 만족시키는 비밀번호의 개수는

$$3 \times 2 \times 25 = 150$$

답 150

05

전구 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 전구를 꺼거나 끄는 두 가지 방법 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

전구 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 전구를 꺼거나 끄는 두 가지 방법 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

전구 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 전구를 꺼거나 끄는 두 가지 방법 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

⋮

전구 n 개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 전구를 꺼거나 끄는 두 가지 방법 중에서 n 개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_n=2^n$$

이때 $2^7=128$, $2^8=256$ 이므로 $2^n \geq 200$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 8

06

6명의 학생을 3개의 학급 A, B, C에 배정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_6=3^6=729$

이때 어느 학생도 A 학급에 배정하지 않는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_6=2^6=64$ 학급 B, C

같은 방법으로 어느 학생도 B 학급에 배정하지 않는 경우의 수는

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

또한, 모든 학생을 C 학급에 배정하는 경우의 수는

$$1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$729 - (64 + 64 - 1) = 602$$

답 602

보충 설명 공통수학2 p.188 개념 07 참고
(*)에서 어느 학생도 A 학급에 배정하지 않는 경우와 어느 학생도 B 학급에 배정하지 않는 경우의 수의 합에는 모든 학생을 C 학급에 배정하는 경우의 수가 두 번 더해졌으므로 해당 경우를 한 번 빼 주어야 한다.
모든 학생을 A 또는 C 학급에 배정하는 경우

07

조건 (4)에서 양 끝 자리에 들어가는 두 숫자는 (1, 7), (2, 6), (3, 5), (5, 3), (6, 2), (7, 1)의 6가지이다.

이때 다섯 자리 비밀번호 중 가운데 세 자리에 사용되는 숫자의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 숫자를 사용하지 않을 때,
이 경우의 수는 서로 다른 기호 2개 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

(ii) 숫자를 1개 사용할 때,
사용할 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$ ← 조건 (4)에서 양 끝 자리에 들어가는 두 숫자는 제외해야 한다.

가운데 세 자리 중에서 숫자가 들어갈 자리를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

나머지 두 자리에 기호를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 기호 2개 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

즉, 이 경우의 수는

$$5 \times 3 \times 4 = 60$$

(iii) 숫자를 2개 사용할 때,

사용할 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10 \quad \leftarrow \text{조건 ①에서 양 끝 자리에 들어가는 두 숫자는 제외해야 한다.}$$

가운데 세 자리 중에서 숫자가 들어갈 자리 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

나머지 한 자리에 기호를 넣는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

즉, 이 경우의 수는

$$10 \times 3 \times 2! \times 2 = 120$$

두 숫자가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수

(iv) 숫자를 3개 사용할 때,

이 경우의 수는 서로 다른 숫자 5개 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5P_3=60$$

(i)~(iv)에서 비밀번호의 가운데 세 자리를 만드는 경우의 수는

$$8 + 60 + 120 + 60 = 248$$

따라서 조건을 만족시키는 비밀번호의 개수는

$$6 \times 248 = 1488$$

답 1488

08

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지

3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

즉, 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$2 \times 27 = 54$$

이때 각 자리의 숫자의 합이 7보다 큰 자연수는 2222뿐이므로 구하는 자연수의 개수는

$$54 - 1 = 53$$

답 ⑤

09

한 자리 자연수의 개수는 $7 - 0$ 은 자연수가 아니므로 제외해야 한다.

두 자리 자연수를 만들 때, 십의 자리에는 0이 올 수 없고 일의 자리에는 8개의 숫자가 올 수 있으므로 두 자리 자연수의 개수는

$$7 \times 8 = 56$$

세 자리 자연수를 만들 때, 백의 자리에는 0이 올 수 없고 십의 자리, 일의 자리에는 8개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 세 자리 자연수의 개수는

$$7 \times {}_8\Pi_2 = 7 \times 8^2 = 448$$

같은 방법으로 천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 네 자리 자연수의 개수는

$$4 \times {}_8\Pi_3 = 4 \times 8^3 = 2048$$

천의 자리의 숫자가 5이고 백의 자리의 숫자가 0 또는 1 또는 2인 네 자리 자연수의 개수는

$$3 \times {}_8\Pi_2 = 3 \times 8^2 = 192$$

따라서 5300보다 작은 자연수의 개수는

$$7 + 56 + 448 + 2048 + 192 = 2751$$

이므로 5300은 2752번째 수이다.

답 2752번째

다른 풀이

한 자리 자연수를 백의 자리, 십의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로, 두 자리 자연수를 백의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로 생각하면 세 자리 이하의 자연수는 각 자리에 8개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열한 것과 같으므로 세 자리 이하의 자연수의 개수는

$${}_8\Pi_3 - 1 = 8^3 - 1 = 511$$

000인 경우

천의 자리의 숫자가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 네 자리 자연수의 개수는

$$4 \times {}_8\Pi_3 = 4 \times 8^3 = 2048$$

천의 자리의 숫자가 5이고 백의 자리의 숫자가 0 또는 1 또는 2인 네 자리 자연수의 개수는

$$3 \times {}_8\Pi_2 = 3 \times 8^2 = 192$$

따라서 5300보다 작은 자연수의 개수는

$$511 + 2048 + 192 = 2751$$

이므로 5300은 2752번째 수이다.

10

$f(1)+f(3)$ 의 값이 짝수이려면 $f(1), f(3)$ 의 값이 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

(i) $f(1), f(3)$ 의 값이 모두 홀수인 경우

$f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 3, 5, 7의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

(ii) $f(1), f(3)$ 의 값이 모두 짝수인 경우

$f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 4, 6의 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

(i), (ii)에서 $f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$9+4=13$$

그 각각에 대하여 $f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$13 \times 25 = 325$$

답 325

11

조건 (가)에서 $f(1)+f(2)=4$ 이므로

$f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=f(2)=2$ 또는

$f(1)=3, f(2)=1$ 이다. 조건 (나)를 만족시킨다.

(i) $f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 인 경우

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

즉, 이 경우의 함수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

(ii) $f(1)=f(2)=2$ 인 경우

조건 (나)에서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 1이어야 하므로 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 집합 X 의 원소 2, 3, 4, 5의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.

즉, 이 경우의 함수의 개수는

$${}_5\Pi_3 - {}_4\Pi_3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$250 + 61 = 311$$

답 311

12

조건 (가)에서 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$ 이고, $f(4)=2$ 또는 $f(4)=4$ 또는 $f(4)=6$ 이다.

이때 $f(3)=1$ 이면 조건 (나)를 만족시키는 $f(1), f(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

같은 방법으로 $f(4)=6$ 이면 조건 (나)를 만족시키는 $f(5), f(6)$ 의 값이 존재하지 않는다.

즉, 다음과 같이 경우를 나누어 함수의 개수를 구할 수 있다.

(i) $f(3)=3, f(4)=2$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값은 1, 2 중 하나이어야 하고,

$f(5), f(6)$ 의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로

이 경우의 함수의 개수는

$${}_2\Pi_2 \times {}_4\Pi_2 = 2^2 \times 4^2 = 64$$

(ii) $f(3)=3, f(4)=4$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값은 1, 2 중 하나이어야 하고,

$f(5), f(6)$ 의 값은 5, 6 중 하나이어야 하므로

이 경우의 함수의 개수는

$${}_2\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 2^2 \times 2^2 = 16$$

(iii) $f(3)=5, f(4)=2$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하고,

$f(5), f(6)$ 의 값은 3, 4, 5, 6 중 하나이어야 하므로

이 경우의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_2 \times {}_4\Pi_2 = 4^2 \times 4^2 = 256$$

(iv) $f(3)=5, f(4)=4$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하고,

$f(5), f(6)$ 의 값은 5, 6 중 하나이어야 하므로

이 경우의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 4^2 \times 2^2 = 64$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$64 + 16 + 256 + 64 = 400$$

답 400

13

조건 (가)에서 $n(A)=3$ 이므로 전체집합 U 의 원소 중에서 집합 A 의 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

이때 조건 (나)에서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 집합 A 의 원소를 제외한 나머지 2개의 원소는 집합 B 또는 집합 $(A \cup B)^c$ 에 속한다. 즉, 집합 B 의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 집합에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$10 \times 4 = 40$$

답 40

답 30

2 같은 것이 있는 순열

기본 + 필수연습

본문 pp.022~028

17 (1) 4 (2) 20 (3) 12 (4) 360	18 30
19 12 20 126	
21 (1) 360 (2) 2520 22 40 23 170	
24 (1) 150 (2) 30 25 15 26 135	
27 (1) 420 (2) 840 28 1120 29 240	
30 18 31 80 32 120 33 45	

17

(1) $\frac{4!}{3!} = 4$

(2) $\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$

(3) $\frac{4!}{2!} = 12$

(4) $\frac{6!}{2!} = 360$

답 (1) 4 (2) 20 (3) 12 (4) 360

18

a 를 맨 뒤에 고정시키고 그 앞에 나머지 문자 b, a, n, a, n 의

5개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

19

1, 4의 순서가 정해져 있으므로 1, 4를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, 2, 3, X를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 1, 두 번째 X는 4로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

답 12

20

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하자.

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 5칸 가야 하므로 구하는 경우의 수는 9개의 문자 $a, a, a, a, b, b, b, b, b$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{4! \times 5!} = 126$$

답 126

21

(1) $l \square \square \square \square \square l$ 과 같이 양 끝에 l 을 고정시키고 가운데 자리에 나머지 문자 a, b, e, e, h, t 를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

(2) 두 개의 e 를 하나의 문자 E로 생각하고 a, b, E, h, l, t 를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

답 (1) 360 (2) 2520

22

파란 공 3개, 빨간 공 2개, 노란 공 1개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

이때 2개의 빨간 공을 하나의 공으로 생각하여 나머지 공과 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 - 20 = 40$$

답 40

★다른 풀이

파란 공 3개와 노란 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$



그 각각에 대하여 위의 그림과 같이 나열된 공의 양 끝과 사이 사이의 5개의 자리에 빨간 공 2개를 나열할 자리를 정하는 경우의 수는

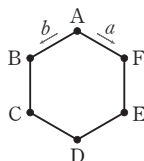
$${}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 10 = 40$$

23

꼭짓점 A의 위치에 있는 점 P가 시계방향으로 1만큼 이동하는 것을 a , 반시계방향으로 1만큼 이동하는 것을 b 라 하자. 점 P가 9회 이동해서 꼭짓점 D까지 이동할 때 가능한 경우는 다음과 같다.



(i) 시계방향으로 9만큼 이동할 때,

경우의 수는 1

(ii) 시계방향으로 6만큼, 반시계방향으로 3만큼 이동할 때, 9개의 문자 $a, a, a, a, a, a, b, b, b$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{6! \times 3!} = 84$$

(iii) 시계방향으로 3만큼, 반시계방향으로 6만큼 이동할 때, 9개의 문자 $a, a, a, b, b, b, b, b, b$ 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{3! \times 6!} = 84$$

(iv) 반시계방향으로 9만큼 이동할 때,

경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 84 + 84 + 1 = 170$$

답 170

보충 설명

시계 방향으로 1만큼 x 회, 시계 반대 방향으로 1만큼 $(9-x)$ 회 이동한다고 하면

$$x - (9-x) = 3 \text{ 또는 } x - (9-x) = 9 \text{ 또는}$$

$$x - (9-x) = -3 \text{ 또는 } x - (9-x) = -9$$

일 때 점 A에서 점 D까지 이동할 수 있다. 각 경우에 x 의 값은 순서대로 6, 9, 3, 0이다.

(ii) (i) (iii) (iv)

24

(1) 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$210 - 60 = 150$$

(2) 1, 2, 2, 3, 3 중에서 4개의 숫자를 택하는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(iii) 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$12 + 12 + 6 = 30$$

답 (1) 150 (2) 30

다른 풀이

(1) (i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$60 + 90 = 150$$

보충 설명

맨 앞자리에 0이 오는 경우에는 0110222와 같이 맨 앞에 0이 하나만 있는 경우, 0011222와 같이 맨 앞에 0이 2개 있는 경우를 모두 포함한다.

따라서 풀이에서 모든 경우의 수에서 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수를 빼는 것으로 충분하다.

25

짝수의 일의 자리의 숫자는 0 또는 짝수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2의 2가지이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

나머지 자리에 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

즉, 이 경우의 수는 $12 - 3 = 9$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 9 = 15$$

답 15

26

다섯 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합이 11인 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 1, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

(ii) 1, 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(iii) 1, 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(iv) 1, 2, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(v) 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(vi) 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(i)~(vi)에서 구하는 자연수의 개수는

$$10 + 60 + 10 + 20 + 30 + 5 = 135$$

답 135

27

(1) 4, 5, 6을 모두 X로 바꾸어 생각하여 1, 1, 2, 3, X, X, X를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 4, 두 번째 X는 5, 세 번째 X는 6으로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 3!} = 420$$

(2) 자음 p, s, t, v 를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, o, X, i, X, i, X, e의 8개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 p , 두 번째 X는 s , 세 번째 X는 t , 네 번째 X는 v 로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 4!} = 840$$

답 (1) 420 (2) 840

28

f, l 을 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

f, l 의 사이에 나머지 문자를 나열할 때, 모음 u, e, u 를 모두 X로 바꾸어 생각하여 s, X, c, c, X, s, s, X 의 8개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 e , 두 번째와 세 번째 X는 u 로 바꾸면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 3! \times 3!} = 560$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 560 = 1120$$

답 1120

29

A, B, C를 모두 X로 바꾸어 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

나열된 3개의 X 중에서 두 번째 X는 A로 바꾸고 첫 번째 X와 세 번째 X에 각각 B, C를 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

$B \rightarrow A \rightarrow C$ 또는 $C \rightarrow A \rightarrow B$
따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 2 = 240$$

답 240

30

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 1칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 이 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

오른쪽으로 2칸

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1

Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

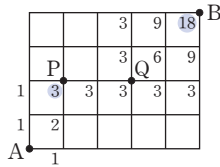
따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 1 \times 6 = 18$$

답 18

다른 풀이

합의 법칙을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 18이다.

31

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 1칸, 아래쪽으로 3칸 가야 하므로 이 경우의 수는

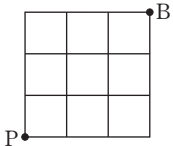
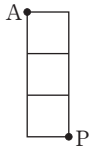
$$\frac{4!}{3!} = 4$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 3칸 가야 하므로 이 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

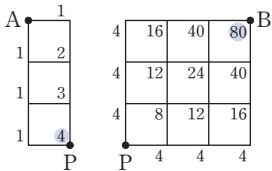
$$4 \times 20 = 80$$



답 80

다른 풀이

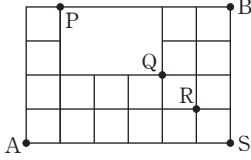
합의 법칙을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 80이다.

32

다음 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q, R, S 중에서 어느 한 지점은 반드시 지나야 한다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} \times 1 = 5 \times 1 = 5$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 15 \times 6 = 90$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!} \times \frac{4!}{3!} = 6 \times 4 = 24$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

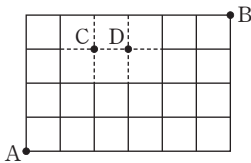
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 90 + 24 + 1 = 120$$

답 120

다른 풀이 1

다음 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C, D라 하면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 $A \rightarrow C$ 또는 $D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



(i) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{5!}{4!} = 10 \times 5 = 50$$

(iii) $A \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{4!}{3!} = 20 \times 4 = 80$$

(iv) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 1 \times 4 = 40$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$210 - (50 + 80 - 40) = 120$$

다른 풀이 2

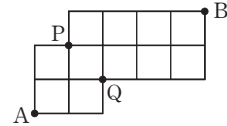
합의 법칙을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

1	5			20	56	120	B
1	4			15	36	64	
1	3	6	10	15	21	28	
1	2	3	4	5	6	7	
A	1	1	1	1	1	1	1

따라서 구하는 경우의 수는 120이다.

33

다음 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q 중에서 어느 한 지점은 반드시 지나야 한다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{4!} = 3 \times 5 = 15$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 3 \times 10 = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 30 = 45$$

답 45

다른 풀이

합의 법칙을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

		3	9	18	30	45	B
1		3	6	9	12	15	
1		2	3	3	3	3	
A	1	1					

따라서 구하는 경우의 수는 45이다.

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.029-030

14 66	15 360	16 13	17 120
18 ⑤	19 45	20 20	21 630
22 85	23 267	24 33	25 48

14

양 끝에 놓이는 공의 색에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 양 끝에 파란 공을 놓을 때,

양 끝에 놓인 공을 제외한 파란 공 3개, 빨간 공 2개, 노란 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

(ii) 양 끝에 빨간 공을 놓을 때,

양 끝에 놓인 공을 제외한 파란 공 5개, 노란 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!} = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 6 = 66$$

답 66

15

b 와 b 사이에 있는 문자에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) b 와 b 사이에 a 가 있을 때,

b, a, b 를 하나의 문자 A 로 생각하여 A, a, a, c, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

(ii) b 와 b 사이에 c 가 있을 때,

b, c, b 를 하나의 문자 C 로 생각하여 C, a, a, a, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

(iii) b 와 b 사이에 d 가 있을 때,

b, d, b 를 하나의 문자 D 로 생각하여 D, a, a, a, c, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$180 + 120 + 60 = 360$$

답 360

16

4분음표와 8분음표의 구성에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 4분음표 3개로 구성할 때,

♩♩♩를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$1$$

(ii) 4분음표 2개와 8분음표 2개로 구성할 때,

♩♩♩♩를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(iii) 4분음표 1개와 8분음표 4개로 구성할 때,

♩♩♩♩♩를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(iv) 8분음표 6개로 구성할 때,

♩♩♩♩♩♩를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$1$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 6 + 5 + 1 = 13$$

답 13

17

수학을 공부하는 3시간을 한 번 이상 포함하면서 5일 동안의 전체 공부 시간이 12시간이 되도록 공부 계획서를 작성할 때, 12시간을 구성하는 공부 시간으로 가능한 경우는

$$1 + 1 + 3 + 3 + 4 \text{ 또는 } 1 + 2 + 2 + 3 + 4 \text{ 또는}$$

$$1 + 2 + 3 + 3 + 3 \text{ 또는 } 2 + 2 + 2 + 3 + 3$$

의 네 가지이다.

(가)

(i) $12 = 1 + 1 + 3 + 3 + 4$ 일 때,
국어 2일, 수학 2일, 과학 1일
 국어, 국어, 수학, 수학, 과학을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(ii) $12 = 1 + 2 + 2 + 3 + 4$ 일 때,
국어 1일, 영어 2일, 수학 1일, 과학 1일
 국어, 영어, 영어, 수학, 과학을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(iii) $12 = 1 + 2 + 3 + 3 + 3$ 일 때,
국어 1일, 영어 1일, 수학 3일
 국어, 영어, 수학, 수학, 수학을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(iv) $12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$ 일 때,
영어 3일, 수학 2일
 영어, 영어, 영어, 수학, 수학을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

(i)~(iv)에서 구하는 공부 계획서의 개수는
 $30 + 60 + 20 + 10 = 120$

답 120

18

주어진 7장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면

$\boxed{1}, \boxed{2}$ 와 $\boxed{2}, \boxed{2}$ 는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.

(i) $\boxed{1}, \boxed{1}$ 이 서로 이웃하지 않는 경우

$\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{0}$ 의 양 끝과 사이사이의 4곳에

$\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}$ 를 하나씩 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) $\boxed{1}, \boxed{1}$ 이 서로 이웃하는 경우

$\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{0}$ 의 양 끝과 사이사이의 4곳 중 1곳에

$\boxed{1}, \boxed{1}$ 을 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

그 각각에 대하여 $\boxed{1}, \boxed{1}$ 을 나열하고 남은 3곳 중 2곳에 $\boxed{2}, \boxed{2}$ 를 하나씩 나열하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

즉, 이 경우의 수는

$$4 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 12 = 18$$

답 ⑤

19

네 자리 자연수가 3의 배수가 되려면 뽑은 4개의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

이때 4개의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우는

0, 1, 1, 4 또는 1, 1, 2, 5 또는 1, 2, 4, 5이다.

(i) 0, 1, 1, 4일 때,

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리의 숫자는 1 또는 4이어야 한다.

① 천의 자리의 숫자가 1인 경우

남은 0, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

② 천의 자리의 숫자가 4인 경우

남은 0, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

①, ②에서 0, 1, 1, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$6 + 3 = 9$$

(ii) 1, 1, 2, 5일 때,

1, 1, 2, 5로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(iii) 1, 2, 4, 5일 때,

1, 2, 4, 5로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$9 + 12 + 24 = 45$$

답 45

보충 설명

전체 경우의 수에서 천의 자리에 0이 오는 경우의 수를 빼서 (*)를 구할 수도 있다.

0, 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이때 천의 자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 0, 1, 1, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 $12 - 3 = 9$

20

조건 (㉞)에서 notebook의 자음 n, t, b, k를 모두 X로 바꾸어 생각하자.

조건 (㉞)에서 notebook의 모음 o, e, o, o는 서로 이웃하지 않아야 하므로 4개의 X의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리 중 모음이 들어갈 4개의 자리를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$



택한 4개의 자리에 모음을 하나씩 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

이때 첫 번째 X는 b로, 두 번째 X는 k로, 세 번째 X는 n으로, 네 번째 X는 t로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$5 \times 4 = 20$$

답 20

21

조건 (㉞)에서 남학생 A와 여학생 a를 한 명 x로 생각한다. 또한, 조건 (㉞)에서 같은 쌍에 속하는 남학생과 여학생의 순서가 정해져 있으므로 B와 b를 모두 y, C와 c를 모두 z, D와

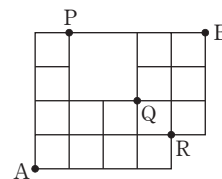
d를 모두 w로 바꾸어 생각하여 x, y, y, z, z, w, w를 일렬로 나열한 후 x는 A, a로, 첫 번째 y, z, w는 각각 B, C, D로, 두 번째 y, z, w는 각각 b, c, d로 바꾸어 생각하면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$$

답 630

22

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R을 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q, R 중에서 어느 한 지점은 반드시 지나야 한다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} \times 1 = 5 \times 1 = 5$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 10 \times 6 = 60$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

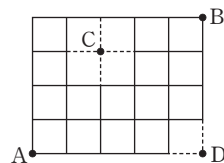
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 60 + 20 = 85$$

답 85

다른 풀이 1

다음 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C, D라 하면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



(i) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 4 = 40$$

(iii) $A \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

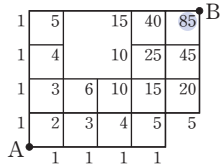
$$1 \times 1 = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$126 - 40 - 1 = 85$$

다른 풀이 2

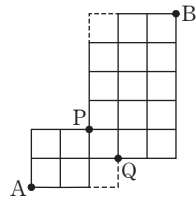
합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 85이다.

23

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q 중에서 어느 한 지점을 반드시 지나야 한다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \left(\frac{7!}{3! \times 4!} - 1 \right) = 6 \times 34 = 204$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{4!}{3!} - 1 \right) \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 3 \times 21 = 63$$

점선으로 된 길을 지나는 경우를 제외

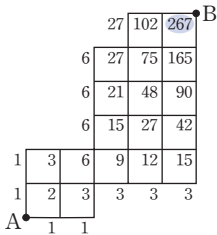
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$204 + 63 = 267$$

답 267

다른 풀이

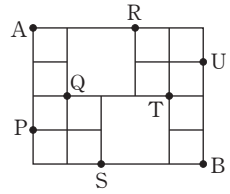
합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 267이다.

24

오른쪽 그림과 같이 6개의 지점 P, Q, R, S, T, U를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q, R 중에서 어느 한 지점을 반드시 지나야 하고, 그 이후 S, T, U 중에서 어느 한 지점을 지나야 한다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{3!}{2!} \times 1 = 1 \times 3 \times 1 = 3$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} \times 1 = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

(iii) $A \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 1 \times 3 = 9$$

(iv) $A \rightarrow R \rightarrow T \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 1 \times 3 \times 3 = 9$$

(v) $A \rightarrow R \rightarrow U \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{3!}{2!} \times 1 = 1 \times 3 \times 1 = 3$$

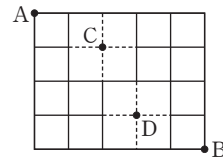
(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$3 + 9 + 9 + 9 + 3 = 33$$

답 33

다른 풀이 1

다음 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C, D라 하면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 $A \rightarrow C$ 또는 $D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.



(i) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 3 \times 20 = 60$$

(iii) $A \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{3!}{2!} = 20 \times 3 = 60$$

(iv) A → C → D → B로 가는 경우의 수는

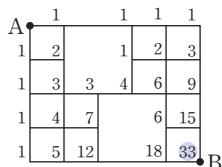
$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$126 - (60 + 60 - 27) = 33$$

다른 풀이 2

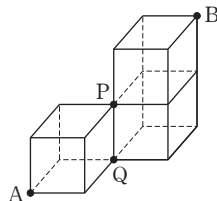
합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 33이다.

25

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가기 위해 P, Q 중에서 어느 한 지점은 반드시 지나야 한다.



이때 P 지점을 지나는 경우에는 A → Q → P → B로 가는 경우가 포함되어 있다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$2! \times \frac{4!}{2!} = 2 \times 12 = 24$$

(iii) A → Q → P → B로 가는 경우의 수는

$$2! \times 1 \times 3! = 2 \times 1 \times 6 = 12$$

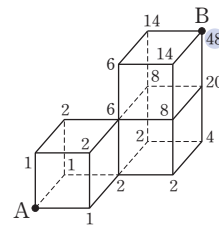
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 24 - 12 = 48$$

답 48

다른 풀이

합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같이 구할 수 있다.



따라서 구하는 경우의 수는 48이다.

STEP 2 개념 마무리

본문 p.031

1 52	2 93	3 50	4 38
5 18	6 84		

1

문자열 *bbb*와 이웃한 자리를 X, 문자열 *bbb*와 이웃하지 않는 자리를 Y로 나타내자.

조건 (가)에서 문자열의 형태는

bbbXYY, *XbbbXY*, *YXbbbX*, *YYXbbb*

의 4가지이고 조건 (나)에서 X에 나열될 수 있는 문자는 *a* 또는 *c*이다.

(i) *bbbXYY*일 때,

① X에 *a*가 나열되는 경우

세 문자 *a*, *b*, *c* 중에서 2개를 택하여 Y에 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

bbbaaa, *bbbabb*의 2가지이다.

b가 5개이므로 4개 이하가 아니다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$9 - 2 = 7$$

② X에 *c*가 나열되는 경우

①과 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 7이다.

①, ②에서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$7 + 7 = 14$$

(ii) $XbbbXY$ 일 때,

b 가 아닌 두 문자 a, c 중에서 2개를 택하여 X 에 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

세 문자 a, b, c 중에서 1개를 택하여 Y 에 놓는 경우의 수는

$$3$$

즉, 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

(iii) $YXbbbX$ 일 때,

(ii)와 같은 방법으로, 만들 수 있는 문자열의 개수는 12

(iv) $YYXbbb$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로, 만들 수 있는 문자열의 개수는 14

(i)~(iv)에서 구하는 모든 문자열의 개수는

$$14 + 12 + 12 + 14 = 52$$

답 52

2

조건 (4)에서 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 2 이하이므로 다음과 같이 치역의 원소의 개수가 1일 때와 2일 때로 경우를 나눌 수 있다.

(i) 치역의 원소의 개수가 1일 때,

조건 (7)에서 $(f \circ f)(5) = 5$ 이므로 함수 f 는 $f(x) = 5$ 의 1개이다.

(ii) 치역의 원소의 개수가 2일 때,

$f(5) = 5$ 인 경우와 $f(5) \neq 5$ 인 경우로 나누면 다음과 같다.

① $f(5) = 5$ 일 때,

치역의 5가 아닌 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

정의역 X 에서 5를 제외한 나머지 4개의 원소는 치역의 원소 2개 중 하나에 대응되어야 하고, 이것은 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 정의역 X 의 원소가 모두 5에 대응하면 치역의 원소의 개수가 1이 되어 조건에 모순이다.

즉, 이때의 함수 f 의 개수는

$$4 \times (16 - 1) = 60$$

② $f(5) = k$ ($k \neq 5$ 인 자연수)일 때,

k 는 1, 2, 3, 4 중 하나이어야 하므로 그 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

조건 (7)에서 $f(5) = k$ 이면

$(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(k) = 5$ 이고 조건 (4)에서 함수 f 의 치역은 $\{k, 5\}$ 이다.

이때 정의역 X 에서 $k, 5$ 를 제외한 나머지 3개의 원소를 치역의 원소 $k, 5$ 에 대응시키는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

즉, 이때의 함수 f 의 개수는

$$4 \times 8 = 32$$

①, ②에서 함수 f 의 개수는

$$60 + 32 = 92$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$1 + 92 = 93$$

답 93

3

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ 이므로 두 조건 (4), (5)에서

$$(A^c \cup B^c) \cap C^c = (A \cap B)^c \cap C^c$$

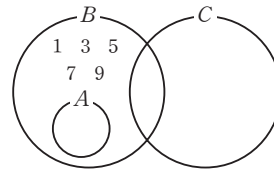
$$= A^c \cap C^c$$

$$= (A \cup C)^c$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\therefore A \cup C = \{2, 4, 6, 8\} \quad \dots\dots ⑦$$

또한, 두 조건 (7), (4)에서 $U = B \cup C$ 이고, $A \cap C = \emptyset$ 이므로 세 집합 A, B, C 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 A, C 는 공집합이 아니므로

$$n(A) \neq 0, n(C) \neq 0$$

(i) $n(A) = 1, n(C) = 3$ 일 때,

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

한편, $B \neq U$ 이므로 $n(B \cap C) \neq 3$ 이고, 집합 $B \cap C$ 는 집합 C 의 진부분집합이므로 집합 C 의 3개의 원소는 집합 $B \cap C$ 또는 집합 $C - B$ 에 속해야 한다.

즉, 집합 C 의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 1을 빼면 되므로

$${}_2\Pi_3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

즉, 이 경우의 수는

$$4 \times 7 = 28$$

(ii) $n(A) = 2, n(C) = 2$ 일 때,

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

한편, $B \neq U$ 이므로 $n(B \cap C) \neq 2$ 이고, 집합 $B \cap C$ 는 집합 C 의 진부분집합이므로 집합 C 의 2개의 원소는 집합 $B \cap C$ 또는 집합 $C - B$ 에 속해야 한다.

즉, 집합 C 의 원소를 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 집합에서 2개를 택하는 중복순열의 수에서 1을 빼면 되므로

$${}_2\Pi_2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

즉, 이 경우의 수는

$$6 \times 3 = 18$$

(iii) $n(A) = 3, n(C) = 1$ 일 때,

집합 A 를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

한편, $B \neq U$ 이므로 $B \cap C = \emptyset$

즉, 이 경우의 수는 4

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$28 + 18 + 4 = 50$$

답 50

4

노란색 깃발은 2개, 초록색 깃발은 4개이므로

$$0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 4$$

또한, 빨간색 깃발의 왼쪽에 있는 노란색 깃발의 개수가 a 이므로 오른쪽에 있는 노란색 깃발의 개수는 $2 - a$ 이고, 빨간색 깃발의 오른쪽에 있는 초록색 깃발의 개수가 b 이므로 왼쪽에 있는 초록색 깃발의 개수는 $4 - b$ 이다.

이때 빨간색 깃발의 왼쪽에 있는 노란색 깃발 a 개와 초록색 깃발 $(4 - b)$ 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{(a - b + 4)!}{a! \times (4 - b)!}$$

빨간색 깃발의 오른쪽에 있는 노란색 깃발 $(2 - a)$ 개와 초록색 깃발 b 개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{(-a + b + 2)!}{(2 - a)! \times b!}$$

따라서 7개의 깃발을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{(a - b + 4)!}{a! \times (4 - b)!} \times \frac{(-a + b + 2)!}{(2 - a)! \times b!} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a + b \geq 4$ 가 되도록 나열하는 경우의 수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $a = 0, b = 4$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노0초0, (오)노2초4

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{0!}{0! \times 0!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = 1 \times 15 = 15$$

(ii) $a = 1, b = 3$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노1초1, (오)노1초3

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 2 \times 4 = 8$$

(iii) $a = 1, b = 4$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노1초0, (오)노1초4

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{1!}{1! \times 0!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} = 1 \times 5 = 5$$

(iv) $a = 2, b = 2$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노2초2, (오)노0초2

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{0! \times 2!} = 6 \times 1 = 6$$

(v) $a = 2, b = 3$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노2초1, (오)노0초3

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{3!}{0! \times 3!} = 3 \times 1 = 3$$

(vi) $a = 2, b = 4$ 일 때, $\leftarrow$ (원)노2초0, (오)노0초4

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{2!}{2! \times 0!} \times \frac{4!}{0! \times 4!} = 1 \times 1 = 1$$

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 8 + 5 + 6 + 3 + 1 = 38$$

답 38

다른 풀이

빨간색 깃발의 왼쪽에 있는 깃발의 개수를 L ($L \geq a$)이라 하면 빨간색 깃발의 왼쪽에 있는 초록색 깃발의 개수는

$L - a$ 이므로

$$L - a = 4 - b \quad \therefore b = a + 4 - L$$

이것을 $a + b \geq 4$ 에 대입하면

$$2a + 4 - L \geq 4 \quad \therefore 2a \geq L \geq a \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

다음과 같이 경우를 나누어 깃발을 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

(i) $a=0$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서 } L=0 \text{이므로}$$

$$\frac{0!}{0! \times 0!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

(ii) $a=1$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서 } L=1 \text{ 또는 } L=2 \text{이므로}$$

$$\frac{1!}{1! \times 0!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} = 5 \text{ 또는}$$

$$\frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 8$$

즉, 이 경우의 수는

$$5+8=13$$

(iii) $a=2$ 일 때,

$$\textcircled{1}\text{에서 } L=2 \text{ 또는 } L=3 \text{ 또는 } L=4 \text{이므로}$$

$$\frac{2!}{2! \times 0!} \times \frac{4!}{0! \times 4!} = 1 \text{ 또는}$$

$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{3!}{0! \times 3!} = 3 \text{ 또는}$$

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{2!}{0! \times 2!} = 6$$

즉, 이 경우의 수는

$$1+3+6=10$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$15+13+10=38$$

5

조건 (가)에서 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자를

1, 2, a , b (a , b 는 3 이하의 자연수)라 하면

$$2 \leq a+b \leq 6 \text{에서}$$

$$5 \leq 1+2+a+b \leq 9$$

조건 (나)에서 네 자리 자연수가 3의 배수이므로 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

즉, $1+2+a+b=6$ 또는 $1+2+a+b=9$ 이므로

$$a+b=3 \text{ 또는 } a+b=6$$

(i) $a+b=3$ 일 때,

$$a=1, b=2 \text{ 또는 } a=2, b=1 \text{이므로}$$

4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) $a+b=6$ 일 때,

$$a=3, b=3 \text{이므로}$$

4개의 숫자 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6+12=18$$

답 18

6

오른쪽 그림과 같이 다섯 지점

P, Q, R, S, T를 잡자.

(i) C 지점을 거쳐갈 때, 한 번 지

나간 길을 다시 지나지 않으면

서 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

① $A \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 1 \times 1 \times 20 = 20$$

② $A \rightarrow Q \rightarrow C \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 3 \times 1 \times 1 \times 10 = 30$$

①, ②에서의 경우의 수는

$$20+30=50$$

(ii) D 지점을 거쳐갈 때, 한 번 지나간 길을 다시 지나지 않으면서 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

③ $A \rightarrow R \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 1 \times 4 = 40$$

④ $A \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow T \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times 1 \times 1 \times 1 = 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 10$$

③, ④의 경우의 수는

$$40+10=50$$

(iii) C, D 지점을 모두 거쳐갈 때,

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가면 한 번 지나간 길을 다시 지나지 않으므로 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 1 \times 4 = 16$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$50+50-16=84$$

답 84

02. 중복조합과 이항정리

1 중복조합

기본 + 필수연습

본문 pp.037-044

- 01 (1) 715 (2) 21 (3) 1 (4) 462
 02 (1) $n=12$ (2) $n=11$ (3) $r=5$ (4) $r=8$
 03 (1) 11 (2) 20 04 56
 05 (1) 8 (2) 78 06 1120 07 14
 08 455 09 330 10 18
 11 (1) 35 (2) 500 12 8 13 1
 14 (1) 55 (2) 35 15 9 16 201
 17 350 18 1008 19 300 20 792
 21 336 22 35

01

- (1) ${}_{10}H_4 = {}_{10+4-1}C_4 = {}_{13}C_4 = 715$
 (2) ${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$
 (3) ${}_{100}H_0 = {}_{100+0-1}C_0 = {}_{99}C_0 = 1$
 (4) ${}_6H_6 = {}_{6+6-1}C_6 = {}_{11}C_6 = {}_{11}C_5 = 462$
 답 (1) 715 (2) 21 (3) 1 (4) 462

02

- (1) ${}_{10}H_3 = {}_{10+3-1}C_3 = {}_{12}C_3$ 이므로 $n=12$
 (2) ${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2$ 이므로 $n=11$
 (3) ${}_2H_r = {}_{2+r-1}C_r = {}_{1+r}C_r = {}_{1+r}C_1$ 이므로
 ${}_{1+r}C_1 = {}_6C_1$ 에서 $1+r=6 \quad \therefore r=5$
 (4) ${}_4H_r = {}_{4+r-1}C_r = {}_{3+r}C_r = {}_{3+r}C_3$ 이므로
 ${}_{3+r}C_3 = {}_{11}C_3$ 에서 $3+r=11 \quad \therefore r=8$
 답 (1) $n=12$ (2) $n=11$ (3) $r=5$ (4) $r=8$

03

- (1) 2개의 숫자 1, 2 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_2H_{10} = {}_{2+10-1}C_{10} = {}_{11}C_{10} = {}_{11}C_1 = 11$

- (2) 딸기, 사과, 바나나, 오렌지 중에서 3개의 과일을 사는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

답 (1) 11 (2) 20

보충 설명 본문 p.035 한 걸음 더 참고

- (1)의 경우의 수를 다음과 같이 구할 수 있다.
 2개의 숫자 1, 2 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 각 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.
 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)
 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)
 $\vdots$
 (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
 (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
 (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)
 택한 10개의 숫자가 중복되지 않도록 각 순서쌍의 첫 번째, 두 번째, 세 번째, ..., 열 번째 숫자에 각각 0, 1, 2, ..., 9를 더하면 다음과 같다.
 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)
 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)
 $\vdots$
 (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)
 (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)
 (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)
 이때 각 행은 11개의 숫자 1, 2, 3, ..., 11 중에서 서로 다른 10개의 숫자를 택하는 조합을 나타내므로 구하는 경우의 수는
 ${}_2H_{10} = {}_{2+10-1}C_{10} = {}_{11}C_{10} = {}_{11}C_1 = 11$
- 04
 a, b, c, d 가 모두 자연수이므로
 $a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1$
 (a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

이라 하면 주어진 방정식에서

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=9$$

$$\therefore a'+b'+c'+d'=5$$

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $a'+b'+c'+d'=5$ 에서

a', b', c', d' 이 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같다.

즉, 4개의 문자 a', b', c', d' 에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

답 56

05

- (1) 똑같은 7통의 편지를 서로 다른 2개의 우체통에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_7 = {}_{2+7-1}C_7 = {}_8C_7 = {}_8C_1 = 8$$

- (2) 3명의 후보에게 11명의 회원이 각각 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 11개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{11} = {}_{3+11-1}C_{11} = {}_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = 78$$

답 (1) 8 (2) 78

06

같은 종류의 우유 3병을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

같은 종류의 주스 5병을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 56 = 1120$$

답 1120

07

연필, 볼펜, 지우개 중에서 n 개의 문구를 사는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_n &= {}_{3+n-1}C_n \\ &= {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 120$ 에서

$$(n+2)(n+1) = 240, n^2 + 3n - 238 = 0$$

$$(n+17)(n-14) = 0 \quad \therefore n = 14 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 14

08

사인펜, 볼펜, 형광펜, 붓펜을 각각 적어도 2개씩 고르려면 먼저 4가지 종류의 펜을 2개씩 고른 후, 더 필요한 12개의 펜을 고르면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{12} = {}_{4+12-1}C_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$$

답 455

09

먼저 바구니 A에 4개, 바구니 B에 2개의 사과를 담은 후, 남은 7개의 사과를 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_7 = {}_{5+7-1}C_7 = {}_{11}C_7 = {}_{11}C_4 = 330$$

답 330

10

서로 다른 3개의 주머니에 7개의 사탕을 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

이때 각 주머니에 넣는 사탕의 개수의 최댓값은 4이므로 어느 주머니라도 사탕의 개수가 5 이상인 경우는 제외시켜야 한다.

사탕 5개를 넣을 주머니를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

그 각각에 대하여 남은 2개의 사탕을 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 6=18$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$36-18=18$$

답 18

다른 풀이

같은 종류의 사탕 7개를 서로 다른 3개의 주머니에 4 이하의 개수로 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

4개, 3개, 0개로 나누어 넣는 경우의 수는 $3!=6$

4개, 2개, 1개로 나누어 넣는 경우의 수는 $3!=6$

3개, 3개, 1개로 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

3개, 2개, 2개로 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6+6+3+3=18$$

11

(1) $(a+b+c+d)^4$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d 에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

(2) $(x+y)^4$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y 에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

$(p+q+r)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 p, q, r 에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

$(a+b+c+d)^2$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d 에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$5 \times 10 \times 10=500$$

답 (1) 35 (2) 500

12

$(x+y+z+w)^n$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_4H_n &= {}_{4+n-1}C_n \\ &= {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_3 \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=165$ 에서

$$(n+3)(n+2)(n+1)=990=11 \times 10 \times 9$$

$\therefore n=8$ ($\because n$ 은 자연수)

답 8

13

$(a+b+c+d)^9$ 의 전개식에서 문자 d 가 포함되지 않는 서로 다른 항의 개수는 $(a+b+c)^9$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같다. 즉, 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$p={}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$$

한편, $(a+b+c+d)^9$ 의 전개식에서 문자 d 의 차수가 4 이상인 서로 다른 항의 개수는 $d^4 \times (a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같다.

또한, 그 개수는 $(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수, 즉 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$q={}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56 \quad (*)$$

$$\therefore q-p=56-55=1$$

답 1

보충 설명

(*)에서 $(a+b+c+d)^9$ 의 전개식에서 문자 d 의 차수가 4 이상인 서로 다른 항의 개수 q 는 $(a+b+c+d)^9$ 의 전개식의 서로 다른 항의 개수에서 문자 d 의 차수가 3 이하인 서로 다른 항의 개수를 빼서 구할 수 있다.

(i) $(a+b+c+d)^9$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_9 = {}_{4+9-1}C_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = 220$

(ii) $(a+b+c+d)^9$ 의 전개식에서 문자 d 의 차수가 0, 1, 2, 3인 서로 다른 항의 개수는 각각 $(a+b+c)^9$, $d \times (a+b+c)^8$, $d^2 \times (a+b+c)^7$, $d^3 \times (a+b+c)^6$ 의 전개식의 서로 다른 항의 개수와 같으므로 ${}_3H_9 + {}_3H_8 + {}_3H_7 + {}_3H_6$
 $= {}_{3+9-1}C_9 + {}_{3+8-1}C_8 + {}_{3+7-1}C_7 + {}_{3+6-1}C_6$
 $= {}_{11}C_9 + {}_{10}C_8 + {}_9C_7 + {}_8C_6$
 $= {}_{11}C_2 + {}_{10}C_2 + {}_9C_2 + {}_8C_2$
 $= 55 + 45 + 36 + 28 = 164$
 (i), (ii)에서 $q = 220 - 164 = 56$

14

(1) $x = 2x' + 2$, $y = 2y' + 2$, $z = 2z' + 2$
 $(x', y', z'$ 은 음이 아닌 정수)

라 하면 $x + y + z = 24$ 에서

$$2(x' + y' + z') + 6 = 24$$

$$2(x' + y' + z') = 18$$

$$\therefore x' + y' + z' = 9$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $x' + y' + z' = 9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x' , y' , z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(2) $x = x' + 1$, $y = y' + 1$, $z = z' + 1$, $w = w' + 1$
 $(x', y', z', w'$ 은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x + y + z + w \leq 7$ 에서

$$(x' + 1) + (y' + 1) + (z' + 1) + (w' + 1) \leq 7$$

$$\therefore x' + y' + z' + w' \leq 3$$

즉, $x' + y' + z' + w' = 0$ 또는 $x' + y' + z' + w' = 1$

또는 $x' + y' + z' + w' = 2$ 또는 $x' + y' + z' + w' = 3$ —(*)

(i) $x' + y' + z' + w' = 0$ 일 때,

음이 아닌 정수 x' , y' , z' , w' 의 순서쌍 (x', y', z', w') 의 개수는 $(0, 0, 0, 0)$ 의 ${}_4H_0$ 이다.

(ii) $x' + y' + z' + w' = 1$ 일 때,

음이 아닌 정수 x' , y' , z' , w' 의 순서쌍 (x', y', z', w') 의 개수는 서로 다른 4개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_1 = {}_{4+1-1}C_1 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) $x' + y' + z' + w' = 2$ 일 때,

음이 아닌 정수 x' , y' , z' , w' 의 순서쌍 (x', y', z', w') 의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

(iv) $x' + y' + z' + w' = 3$ 일 때,

음이 아닌 정수 x' , y' , z' , w' 의 순서쌍 (x', y', z', w') 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$1 + 4 + 10 + 20 = 35$$

답 (1) 55 (2) 35

다른 풀이

(1) $x = 2x'$, $y = 2y'$, $z = 2z'$ (x' , y' , z' 은 자연수)이라 하면 $x + y + z = 24$ 에서

$$2(x' + y' + z') = 24 \quad \therefore x' + y' + z' = 12$$

방정식 $x' + y' + z' = 12$ 를 만족시키는 자연수 x' , y' , z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(2) ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ 이므로 (*)에서

$$\begin{aligned} {}_4H_0 + {}_4H_1 + {}_4H_2 + {}_4H_3 &= {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= \underbrace{({}_4C_0 + {}_4C_1)}_{= {}_5C_1} + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &\quad (\because {}_3C_0 = {}_4C_0) \\ &= \underbrace{({}_5C_1 + {}_5C_2)}_{= {}_6C_2} + {}_6C_3 \\ &= {}_6C_2 + {}_6C_3 = {}_7C_3 = 35 \end{aligned}$$

보충 설명

보통 자연수 범위에서

짝수는 $2n$, 홀수는 $2n-1$ (n 은 자연수)

로 나타내지만 중복조합을 이용할 때에는 변수의 범위가 음이 아닌 정수이어야 하므로

짝수를 $2n+2$, 홀수를 $2n+1$ (n 은 음이 아닌 정수)

로 나타내는 것이 편리하다.

15

x, y 가 자연수, 즉 $x \geq 1, y \geq 1$ 이므로

$x = x' + 1, y = y' + 1$ (x', y' 은 음이 아닌 정수)이라 하면

$x + y + 2z = 8$ 에서

$$(x' + 1) + (y' + 1) + 2z = 8$$

$$\therefore x' + y' + 2z = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 z 도 자연수이므로 z 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $z = 1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $x' + y' = 4$

방정식 $x' + y' = 4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y' 의 순서쌍 (x', y')의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(ii) $z = 2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $x' + y' = 2$

방정식 $x' + y' = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y' 의 순서쌍 (x', y')의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $z = 3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $x' + y' = 0$

방정식 $x' + y' = 0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y' 의 순서쌍 (x', y')의 개수는 (0, 0)의 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$5 + 3 + 1 = 9$$

답 9

16

조건 (ㄴ)에서 $a + b \leq 2$ 이고, a, b 가 음이 아닌 정수이므로

$a + b = 0$ 또는 $a + b = 1$ 또는 $a + b = 2$

(i) $a + b = 0$ 일 때,

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 (0, 0)의 1이다.

이때 조건 (ㄷ)에서 $c + d + e = 8$ 이고, 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e 의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$$1 \times 45 = 45$$

(ii) $a + b = 1$ 일 때,

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_1 = {}_{2+1-1}C_1 = {}_2C_1 = 2$$

이때 조건 (ㄷ)에서 $c + d + e = 7$ 이고, 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e 의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$$2 \times 36 = 72$$

(iii) $a + b = 2$ 일 때,

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이때 조건 (ㄷ)에서 $c + d + e = 6$ 이고, 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d, e 의 순서쌍 (c, d, e)의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$$3 \times 28 = 84$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$$45 + 72 + 84 = 201$$

답 201

17

$f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 5

이 각각의 경우에 대하여 함수값 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 가 $f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키려면 공역 X 의 5개의 원소 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역 X 의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$\begin{aligned} 5 \times {}_5H_4 &= 5 \times {}_{5+4-1}C_4 = 5 \times {}_8C_4 \\ &= 5 \times 70 = 350 \end{aligned}$$

답 350

18

$f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6

$f(2)f(3)=4$ 를 만족시키는 함수값 $f(2)$, $f(3)$ 을 정하는 경우의 수는 $f(2)=1$, $f(3)=4$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=2$ 또는 $f(2)=4$, $f(3)=1$ 의 3이다.

또한, $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$ 을 만족시키려면 공역 X 의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역 X 의 원소 4, 5, 6에 대응시키면 되므로 함수값 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 을 정하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$6 \times 3 \times 56 = 1008$$

답 1008

19

조건 (가)를 만족시키려면 공역 Y 의 6개의 원소 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 2개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 정의역 X 의 원소 4, 5에 대응시키면 되므로 함수값 $f(4)$, $f(5)$ 를 정하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

조건 (나)를 만족시키려면 공역 Y 의 4개의 원소 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 정의역 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 함수값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 을 정하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$15 \times 20 = 300$$

답 300

20

$-3 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 4$ 를 만족시키려면 서로 다른 8개의 정수 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c, d, e 로 정하면 된다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 서로 다른 8개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8H_5 = {}_{8+5-1}C_5 = {}_{12}C_5 = 792$$

답 792

21

$1 \leq a < b < c \leq 4 \leq d \leq e \leq f \leq 10$ 에서 $1 \leq a < b < c \leq 4$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 $4 \leq d \leq e \leq f \leq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (d, e, f) 의 개수를 각각 구해 보자.

(i) $1 \leq a < b < c \leq 4$ 를 만족시키려면 서로 다른 4개의 자연수

1, 2, 3, 4에서 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 a, b, c 로 정하면 되므로 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(ii) $4 \leq d \leq e \leq f \leq 10$ 을 만족시키려면 서로 다른 7개의 자연수 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 d, e, f 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e, f) 의 개수는

$${}_7H_3 = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f) 의 개수는

$$4 \times 84 = 336$$

답 336

22

$1 \leq a \leq b < c < d \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 을 만족시키는 모든 경우의 수에서 $1 \leq a \leq b = c \leq d \leq 6$,

$1 \leq a \leq b \leq c = d \leq 6$ 인 경우의 수를 뺀 다음, 중복하여 뺀 $1 \leq a \leq b = c = d \leq 6$ 인 경우의 수를 더하여 구할 수 있다.

(i) $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = 126$$

(ii) $1 \leq a \leq b = c \leq d \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$$

(iii) $1 \leq a \leq b \leq c = d \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 (ii)와 같은 방법으로

$$56$$

(iv) $1 \leq a \leq b = c = d \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 6개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_2 = {}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2 = 21$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $126 - 56 - 56 + 21 = 35$

답 35

다른 풀이

$1 \leq a \leq b < c < d \leq 6$ 에서 a, b, c, d 가 모두 자연수이므로 c 의 최솟값은 2이고, 최댓값은 5이다. 따라서 c 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $c=2$ 일 때,

$1 \leq a \leq b < 2 < d \leq 6$ 에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $(1, 1)$ 의 1이다.

이때 d 로 가능한 자연수는 3, 4, 5, 6의 4가지이므로

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$1 \times 4 = 4$$

(ii) $c=3$ 일 때,

$1 \leq a \leq b < 3 < d \leq 6$ 에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 2개의 자연수 1, 2에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이때 d 로 가능한 자연수는 4, 5, 6의 3가지이므로

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

(iii) $c=4$ 일 때,

$1 \leq a \leq b < 4 < d \leq 6$ 에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 3개의 자연수 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

이때 d 로 가능한 자연수는 5, 6의 2가지이므로

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iv) $c=5$ 일 때,

$1 \leq a \leq b < 5 < d \leq 6$ 에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4개의 자연수 1, 2, 3, 4에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

이때 d 로 가능한 자연수는 6의 1가지이므로

이 경우의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$10 \times 1 = 10$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$4 + 9 + 12 + 10 = 35$$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.045~046

01 896	02 141	03 46	04 168
05 51	06 16	07 16	08 27
09 109	10 ④	11 150	12 120
13 156			

01

같은 종류의 마스크 5개를 학생 4명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

서로 다른 종류의 수건 2장을 학생 4명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$56 \times 16 = 896$$

답 896

02

주머니 3개에 넣는 빵의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 빵 3개를 1개의 주머니에 모두 넣는 경우

빵 3개를 넣을 주머니를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

그 각각에 대하여 빵이 들어 있지 않은 2개의 주머니에 각각 음료수를 1캔씩 넣은 후, 남은 음료수 3캔을 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 10 = 30$$

(ii) 빵을 2개의 주머니에 2개, 1개로 나누어 넣는 경우

빵을 각각 2개, 1개 넣을 2개의 주머니를 택하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

그 각각에 대하여 빵이 들어 있지 않은 1개의 주머니에 음료수를 1캔 넣은 후, 남은 음료수 4캔을 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

즉, 이 경우의 수는

$$6 \times 15 = 90$$

(iii) 빵을 3개의 주머니에 1개씩 나누어 넣는 경우

모든 주머니에 빵이 들어 있으므로 음료수 5캔을 서로 다른 3개의 주머니에 나누어 넣으면 된다.

이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 90 + 21 = 141$$

답 141

03

택한 청포도 맛 사탕의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 청포도 맛 사탕의 개수가 0인 경우

자두 맛 사탕, 우유 맛 사탕, 박하 맛 사탕을 1개씩 먼저 택한 후 더 필요한 5개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 $\overset{=8-3}{3}$ 개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(ii) 청포도 맛 사탕의 개수가 1인 경우

자두 맛 사탕, 우유 맛 사탕, 박하 맛 사탕을 1개씩 먼저 택한 후 더 필요한 4개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 $\overset{=8-1-3}{3}$ 개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(iii) 청포도 맛 사탕의 개수가 2인 경우

자두 맛 사탕, 우유 맛 사탕, 박하 맛 사탕을 1개씩 먼저 택한 후 더 필요한 3개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는 서로 다른 $\overset{=8-2-3}{3}$ 개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$21 + 15 + 10 = 46$$

답 46

04

흰 공을 세 상자 A, B, C에 나누어 넣고, 각 경우에 따라 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 검은 공을 넣는 경우의 수를 구하면 된다.

(i) 흰 공 4개를 1개의 상자에 모두 넣는 경우

흰 공 4개를 넣을 상자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

그 각각에 대하여 흰 공이 들어 있지 않은 2개의 상자에 검은 공을 2개씩 넣은 후, 남은 검은 공 2개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(ii) 흰 공을 2개의 상자에 3개, 1개로 나누어 넣는 경우

흰 공을 각각 3개, 1개 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

그 각각에 대하여 흰 공이 1개 들어 있는 상자에 검은 공 1개, 흰 공이 들어 있지 않은 상자에 검은 공 2개를 넣은 후, 남은 검은 공 3개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, 이 경우의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

(iii) 흰 공을 2개의 상자에 2개씩 나누어 넣는 경우

흰 공을 2개씩 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

그 각각에 대하여 흰 공이 들어 있지 않은 상자에 검은 공 2개를 넣은 후, 남은 검은 공 4개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 15 = 45$$

- (iv) 흰 공을 3개의 상자에 2개, 1개, 1개로 나누어 넣는 경우
흰 공을 2개 넣을 상자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

그 각각에 대하여 흰 공을 1개씩 넣은 두 상자에 검은 공을 각각 1개씩 넣은 후, 남은 검은 공 4개를 서로 다른 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 15 = 45$$

- (i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$18 + 60 + 45 + 45 = 168$$

답 168

05

6개의 과일에서 택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하고, 순서쌍 (x, y, z) 로 나타내면

$(0, 2, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$

- (i) 두 종류의 과일만 택하는 경우

(x, y, z) 가 $(0, 2, 2)$ 일 때, 즉 배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_2, {}_2H_2$ 이고, 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외시켜야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore {}_2H_2 \times {}_2H_2 - 2 &= {}_{2+2-1}C_2 \times {}_{2+2-1}C_2 - 2 \\ &= {}_3C_2 \times {}_3C_2 - 2 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 - 2 \\ &= 3 \times 3 - 2 = 7 \end{aligned}$$

같은 방법으로 (x, y, z) 가 $(2, 0, 2)$ 또는 $(2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

즉, 이 경우의 수는

$$7 + 7 + 7 = 21$$

- (ii) 세 종류의 과일을 택하는 경우

(x, y, z) 가 $(1, 1, 2)$ 일 때, 즉 사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 ${}_2H_1, {}_2H_1, {}_2H_2$ 이고, 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외시켜야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore {}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_2 - 2 \\ &= {}_{2+1-1}C_1 \times {}_{2+1-1}C_1 \times {}_{2+2-1}C_2 - 2 \\ &= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_2 - 2 \\ &= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 - 2 \\ &= 2 \times 2 \times 3 - 2 = 10 \end{aligned}$$

같은 방법으로 (x, y, z) 가 $(1, 2, 1)$ 또는 $(2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

즉, 이 경우의 수는

$$10 + 10 + 10 = 30$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$21 + 30 = 51$$

답 51

다른 풀이

6개의 과일에서 택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z 라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.

이때 과일을 받지 못하는 학생은 없고, 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.

- (i) 두 종류의 과일만 택하는 경우

(x, y, z) 가 $(0, 2, 2)$ 일 때, 학생 A가 받는 배와 귤의 개수를 순서쌍 (y', z') 으로 나타내면 $\leftarrow$ 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 $1 \leq y' + z' \leq 3$
 $(0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (1, 2), (2, 1)$
이므로 경우의 수는 7이다.

같은 방법으로 (x, y, z) 가 $(2, 0, 2)$ 또는 $(2, 2, 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

즉, 이 경우의 수는

$$7 + 7 + 7 = 21$$

- (ii) 세 종류의 과일을 택하는 경우

(x, y, z) 가 $(1, 1, 2)$ 일 때, 학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 개수를 순서쌍 (x', y', z') 으로 나타내면 $\leftarrow$ 과일을 받지 못하는 학생은 없으므로 $1 \leq x' + y' + z' \leq 3$
 $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 0, 2), (1, 1, 1)$
이므로 경우의 수는 10이다.

같은 방법으로 (x, y, z) 가 $(1, 2, 1)$ 또는 $(2, 1, 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

즉, 이 경우의 수는

$$10 + 10 + 10 = 30$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$21 + 30 = 51$$

06

$(x+y+a)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

같은 방법으로 $(x+y+b)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_3 = 10$$

이때 두 다항식 $(x+y+a)^3$ 과 $(x+y+b)^3$ 의 전개식에서 $(x+y)^3$ 을 전개하여 나오는 항은 서로 일치하고, $(x+y)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$10 + 10 - 4 = 16$$

답 16

07

x, y 가 음이 아닌 정수가 되는 z 의 값은 0, 3, 6, 9이므로 z 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다. -(*)

(i) $z=0$ 일 때,

$$3x + 3y + 2z = 18 \text{에서}$$

$$3x + 3y = 18 \quad \therefore x + y = 6$$

방정식 $x+y=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

(ii) $z=3$ 일 때,

$$3x + 3y + 2z = 18 \text{에서}$$

$$3x + 3y = 12 \quad \therefore x + y = 4$$

방정식 $x+y=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(iii) $z=6$ 일 때,

$$3x + 3y + 2z = 18 \text{에서}$$

$$3x + 3y = 6 \quad \therefore x + y = 2$$

방정식 $x+y=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(iv) $z=9$ 일 때,

$$3x + 3y + 2z = 18 \text{에서}$$

$$3x + 3y = 0 \quad \therefore x + y = 0$$

방정식 $x+y=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는 $(0, 0)$ 의 1이다.

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$7 + 5 + 3 + 1 = 16$$

답 16

보충 설명

(*)에서 z 가 3의 배수가 아닌 수, 예를 들어 $z=1$ 이면

$$3x + 3y + 2z = 18 \text{에서 } 3(x+y) = 16 \text{이므로 방정식}$$

$x+y=\frac{16}{3}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $z=3N$ (N 은 음이 아닌 정수)일 때,

$3x + 3y + 2z = 18$ 에서 $x+y+2N=6$ 꼴이 되어 정수 N 의 값에 따라 방정식의 해의 개수를 구할 수 있다.

08

x, y, z 가 주사위의 눈의 수이므로

$$1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6, 1 \leq z \leq 6$$

즉,

$$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1$$

(단, x', y', z' 은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x+y+z=10$ 에서

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) = 10$$

$$\therefore x' + y' + z' = 7$$

방정식 $x'+y'+z'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

이때 $0 \leq x' \leq 5, 0 \leq y' \leq 5, 0 \leq z' \leq 5$ 이므로 x', y', z' 의 값 중 어느 하나라도 6 이상인 경우는 제외시켜야 한다.

x', y', z' 의 값 중 어느 하나라도 6 이상인 경우는 세 수가 6, 1, 0 또는 7, 0, 0이므로 그 경우의 수는

$$3! + \frac{3!}{2!} = 6 + 3 = 9 \quad (*)$$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$36 - 9 = 27$$

답 27

보충 설명

(*)의 경우의 순서쌍 (x', y', z') 은

$(6, 1, 0), (6, 0, 1), (1, 6, 0), (1, 0, 6), (0, 6, 1),$

$(0, 1, 6), (7, 0, 0), (0, 7, 0), (0, 0, 7)$ 이다.

09

조건 (가)에서 $a+b+c=2d+7 \quad \dots\dots ㉠$

조건 (나)에서 d 는 $d \leq 2$ 인 음이 아닌 정수이므로 d 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $d=0$ 일 때,

$$㉠ \text{에서 } a+b+c=7$$

조건 (나)의 $c \geq d+1$ 에서 $c \geq 1$

즉, $c=c'+1$ (c' 은 음이 아닌 정수)이라 하면

$$a+b+(c'+1)=7 \quad \therefore a+b+c'=6$$

방정식 $a+b+c'=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c' 의 순서쌍 (a, b, c') 의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

(ii) $d=1$ 일 때,

$$㉠ \text{에서 } a+b+c=9$$

조건 (나)의 $c \geq d+1$ 에서 $c \geq 2$

즉, $c=c'+2$ (c' 은 음이 아닌 정수)라 하면

$$a+b+(c'+2)=9 \quad \therefore a+b+c'=7$$

방정식 $a+b+c'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c' 의 순서쌍 (a, b, c') 의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

(iii) $d=2$ 일 때,

$$㉠ \text{에서 } a+b+c=11$$

조건 (나)의 $c \geq d+1$ 에서 $c \geq 3$

즉, $c=c'+3$ (c' 은 음이 아닌 정수)이라 하면

$$a+b+(c'+3)=11 \quad \therefore a+b+c'=8$$

방정식 $a+b+c'=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c' 의 순서쌍 (a, b, c') 의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$28 + 36 + 45 = 109$$

답 109

10

조건 (가)에서 $x=1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f(x) \leq f(x+1)$ 이므로 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$

조건 (나)에서 3의 배수 a 에 대하여 $f(a)=b$ 라 하면

$$f(f(a))=a \text{에서 } f(b)=a$$

이때 $a > b$ 이면 $f(b) > f(a)$ 가 되고, $a < b$ 이면 $f(b) < f(a)$ 가 되므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(a)=a$ 가 되어야 하므로

$$f(3)=3, f(6)=6$$

함숫값 $f(1), f(2)$ 를 정하는 경우의 수는 공역 X 의 3개의 원소 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

함숫값 $f(4), f(5)$ 를 정하는 경우의 수는 공역 X 의 4개의 원소 3, 4, 5, 6에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$6 \times 10 = 60$$

답 ④

11

$X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}, Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이고,

조건 (가)에서 함수 f 의 치역에 속하는 집합 Y 의 원소 3개를 택하는 경우의 수는 집합 Y 의 서로 다른 5개의 원소에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

$\dots\dots ㉠$

치역에 속하는 3개의 원소에 각각 대응하는 정의역 X 의 원소의 개수를 a, b, c 라 하자. $-(*)$

집합 X 의 원소의 개수는 7이므로

$$a+b+c=7$$

이때 치역의 각 원소에 정의역의 원소가 적어도 하나는 대응되어야 하므로 $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$

$$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1 \quad (a', b', c' \text{은 음이 아닌 정수})$$

이라 하면 $a+b+c=7$ 에서

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=7 \quad \therefore a'+b'+c'=4$$

방정식 $a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \times 15 = 150$$

답 150

다른 풀이

$X = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}, Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 조건 $(*)$ 를 만족시키는 함수 f 의 치역을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

이 10가지의 치역 중 한 경우를 $\{1, 3, 5\}$ 라 할 때, 집합 X 에서 집합 $\{1, 3, 5\}$ 로의 함수 중 조건 $(*)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 에는 치역의 원소의 개수가 1인 함수와 2인 함수가 모두 포함되어 있으므로 이를 제외해야 한다.

(i) 치역의 원소의 개수가 1인 함수

치역이 $\{1\}$ 또는 $\{3\}$ 또는 $\{5\}$ 인 경우이므로

그 개수는 3

(ii) 치역의 원소의 개수가 2인 함수

집합 X 에서 집합 $\{1, 3\}$ 으로의 함수 중 조건 $(*)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_7 = {}_{2+7-1}C_7 = {}_8C_7 = {}_8C_1 = 8$$

이 중 치역의 원소의 개수가 1인 함수, 즉 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{3\}$ 인 함수 2개가 포함되어 있으므로 치역이 $\{1, 3\}$ 인 함수의 개수는

$$8 - 2 = 6$$

치역이 $\{1, 5\}$ 또는 $\{3, 5\}$ 인 함수도 6개씩 존재하므로

치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는

$$6 + 6 + 6 = 18$$

(i), (ii)와 $\textcircled{2}$ 에 의하여 치역이 $\{1, 3, 5\}$ 인 함수의 개수는

$$36 - 3 - 18 = 15$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \times 15 = 150$$

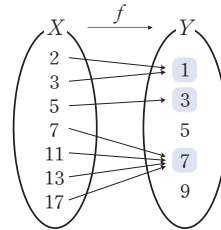
보충 설명

예를 들어, 치역이 $\{1, 3, 7\}$ 이고 $(*)$ 에서 $a=2, b=1, c=4$ 이면 조건 $(*)$ 에 의하여

$$f(2)=f(3)=1, f(5)=3,$$

$$f(7)=f(11)=f(13)=f(17)=7$$

로 함수 f 가 유일하게 결정되므로 치역에 속하는 3개의 원소에 각각 대응하는 정의역 X 의 원소의 개수만 정하면 된다.



12

조건 $(*)$ 에서 $a \times b \times c \times d \times e$ 는 홀수이므로 a, b, c, d, e 는 모두 홀수이어야 한다.

이때 조건 $(*)$ 에서 $a < b < 8$ 이고, 1부터 8까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이므로 두 홀수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_4C_2 = 6$$

(가)

그 각각에 대하여 조건 $(*)$ 에서 $8 \leq c \leq d \leq e < 16$ 이고, 8부터 16까지의 자연수 중 홀수는 9, 11, 13, 15의 4개이므로 세 홀수 c, d, e 의 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

(나)

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$6 \times 20 = 120$$

(다)

답 120

단계	채점 기준	배점
(가)	조합을 이용하여 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구한 경우	40%
(나)	중복조합을 이용하여 순서쌍 (c, d, e) 의 개수를 구한 경우	40%
(다)	두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한 경우	20%

13

$2 \leq |a| \leq |b| \leq |c| + 2 \leq 5$ 에서 $|c| + 2$ 의 최솟값은 2이고 최댓값은 5이므로 $|c| + 2$ 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $|c| + 2 = 2$ 일 때,

$c = 0$ 이므로 c 의 개수는 1이다.

이때 $2 \leq |a| \leq |b| \leq 2$ 이므로 $|a| = |b| = 2$ 이고

두 정수 a, b 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$1 \times 4 = 4$$

(ii) $|c| + 2 = 3$ 일 때,

$|c| = 1$ 에서 $c = \pm 1$ 이므로 c 의 개수는 2이다.

이때 $2 \leq |a| \leq |b| \leq 3$ 이므로 $|a|, |b|$ 의 순서쌍

$(|a|, |b|)$ 의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

두 정수 a, b 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

(iii) $|c| + 2 = 4$ 일 때,

$|c| = 2$ 에서 $c = \pm 2$ 이므로 c 의 개수는 2이다.

이때 $2 \leq |a| \leq |b| \leq 4$ 이므로 $|a|, |b|$ 의 순서쌍

$(|a|, |b|)$ 의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

두 정수 a, b 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의

값을 가질 수 있으므로 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$2 \times 6 \times 4 = 48$$

(iv) $|c| + 2 = 5$ 일 때,

$|c| = 3$ 에서 $c = \pm 3$ 이므로 c 의 개수는 2이다.

이때 $2 \leq |a| \leq |b| \leq 5$ 이므로 $|a|, |b|$ 의 순서쌍

$(|a|, |b|)$ 의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

두 정수 a, b 는 각각 절댓값이 같고 부호가 다른 두 개의 값을 가질 수 있으므로 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$2 \times 10 \times 4 = 80$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$4 + 24 + 48 + 80 = 156$$

답 156

다른 풀이

$|c| + 2 = C$ (C 는 2 이상, 5 이하의 자연수)라 하면 주어진 부등식에서

$$2 \leq |a| \leq |b| \leq C \leq 5$$

이것을 만족시키는 정수 $|a|, |b|, C$ 의 순서쌍 $(|a|, |b|, C)$ 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

이때 0이 아닌 정수 n 에 대하여 $|n|$ 의 값이 자연수이면 정수 n 의 값으로 가능한 것은 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 정수이다.

즉, 세 정수 a, b, c 가 모두 0이 아닌 정수라 할 때, 20개의 순서쌍 $(|a|, |b|, C)$ 각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c) 로 가능한 것의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

이 중에서 $C = 2$ 인 경우는 $c = 0$ 이므로 c 의 값이 1개뿐이다.

즉, 순서쌍 $(|a|, |b|, 2)$ 각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c) 로 가능한 것의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$20 \times 8 - 4 = 156$$

2 이항정리

기본 + 필수연습

본문 pp.051~058

- 23 풀이 참조 24 (1) 21 (2) 240
 25 풀이 참조 26 (1) 1024 (2) 0 (3) 1024 (4) 64
 27 (1) -12 (2) 2160 28 2 29 22
 30 (1) -129 (2) -60 31 3
 32 ⑤ 33 126 34 11 35 84
 36 1287 37 (1) 11 (2) 8 38 6
 39 1024 40 6^{10} 41 $\left(\frac{9}{5}\right)^6$ 42 21

23

- (1) $(x-1)^6$
 $= {}_6C_0 x^6 + {}_6C_1 x^5(-1) + {}_6C_2 x^4(-1)^2 + {}_6C_3 x^3(-1)^3$
 $+ {}_6C_4 x^2(-1)^4 + {}_6C_5 x(-1)^5 + {}_6C_6(-1)^6$
 $= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$
 (2) $(x+3y)^4$
 $= {}_4C_0 x^4 + {}_4C_1 x^3(3y) + {}_4C_2 x^2(3y)^2 + {}_4C_3 x(3y)^3$
 $+ {}_4C_4(3y)^4$
 $= x^4 + 12x^3y + 54x^2y^2 + 108xy^3 + 81y^4$
 (3) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$
 $= {}_3C_0 x^3 + {}_3C_1 x^2\left(-\frac{1}{x}\right) + {}_3C_2 x\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + {}_3C_3\left(-\frac{1}{x}\right)^3$
 $= x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

답 풀이 참조

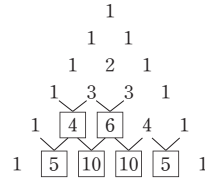
24

- (1) 전개식의 일반항은
 ${}_7C_r 3^{7-r}(-x)^r = {}_7C_r 3^{7-r}(-1)^r x^r$
 x^6 항은 $r=6$ 일 때이므로 x^6 의 계수는
 ${}_7C_6 \times 3^{7-6} \times (-1)^6 = {}_7C_1 \times 3^{7-6} \times (-1)^6$
 $= 7 \times 3 \times 1 = 21$
 (2) 전개식의 일반항은
 ${}_5C_r (3a)^{5-r} (2b)^r = {}_5C_r 3^{5-r} 2^r a^{5-r} b^r$
 ab^4 항은 $r=4$ 일 때이므로 ab^4 의 계수는
 ${}_5C_4 \times 3^{5-4} \times 2^4 = {}_5C_1 \times 3^{5-4} \times 2^4 = 5 \times 3 \times 16 = 240$

답 (1) 21 (2) 240

25

파스칼의 삼각형에서 각 행의 이웃하는 두 수의 합은 그 두 수의 아래쪽 중앙에 있는 수와 같으므로 파스칼의 삼각형을 완성하면 다음과 같다.



파스칼의 삼각형에서 6행의 수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이므로 $(x-y)^5$

$$= 1 \times x^5 + 5 \times x^4(-y) + 10 \times x^3(-y)^2$$

$$+ 10 \times x^2(-y)^3 + 5 \times x(-y)^4 + 1 \times (-y)^5$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

답 풀이 참조

26

- (1) ${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10} = 2^{10} = 1024$
 (2) ${}_8C_0 - {}_8C_1 + {}_8C_2 - \cdots + {}_8C_8 = 0$
 (3) ${}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}$
 $= 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$
 (4) ${}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7$
 $= \frac{1}{2}({}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \cdots + {}_7C_7)$
 $= \frac{1}{2} \times 2^7 = 2^6 = 64$

답 (1) 1024 (2) 0 (3) 1024 (4) 64

27

- (1) 전개식의 일반항은
 ${}_4C_r (x^3)^{4-r} (-3y^2)^r = {}_4C_r x^{12-3r} (-3)^r y^{2r}$
 $= {}_4C_r (-3)^r x^{12-3r} y^{2r}$
 $x^9 y^2$ 항은 $r=1$ 일 때이므로 $x^9 y^2$ 의 계수는
 ${}_4C_1 \times (-3) = 4 \times (-3) = -12$

(2) 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(3x)^{6-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = {}_6C_r 3^{6-r} x^{6-r} \frac{(-2)^r}{x^{2r}}$$

$$= {}_6C_r 3^{6-r} (-2)^r \frac{x^{6-r}}{x^{2r}}$$

$\frac{1}{x^6}$ 항은 $2r - (6 - r) = 6$, 즉 $r = 4$ 일 때이므로 $\frac{1}{x^6}$ 의 계수는

$${}_6C_4 \times 3^2 \times (-2)^4 = {}_6C_2 \times 3^2 \times (-2)^4$$

$$= 15 \times 9 \times 16 = 2160$$

답 (1) -12 (2) 2160

28

$(5+2x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 5^{4-r} (2x)^r = {}_4C_r 5^{4-r} 2^r x^r$$

x^3 항은 $r = 3$ 일 때이므로 x^3 의 계수는

$$a = {}_4C_3 \times 5 \times 2^3 = {}_4C_1 \times 5 \times 2^3 = 4 \times 5 \times 8 = 160$$

$(1-kx)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s 1^{5-s} (-kx)^s = {}_5C_s (-k)^s x^s$$

x^2 항은 $s = 2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$$b = {}_5C_2 \times (-k)^2 = 10k^2$$

이때 $a = 4b$ 이므로

$$160 = 4 \times 10k^2, k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 (\because k > 0)$$

답 2

29

전개식의 일반항은

$${}_{12}C_r x^{12-r} \left(-\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_{12}C_r (-1)^r \frac{x^{12-r}}{x^{nr}}$$

이때 전개식에서 상수항이 존재하려면 $nr = 12 - r$, 즉 $(n+1)r = 12$ 를 만족시키는 두 자연수 n, r 의 값이 존재해야 하므로 $(n+1)r = 12$ 에서

$$n = 1, r = 6 \text{ 또는 } n = 2, r = 4 \text{ 또는 } n = 3, r = 3 \text{ 또는}$$

$$n = 5, r = 2 \text{ 또는 } n = 11, r = 1$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 5 + 11 = 22$$

답 22

30

(1) $(x-1)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} (-1)^r = {}_4C_r (-1)^r x^{4-r}$$

$(2-x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_s 2^{3-s} (-x)^s = {}_3C_s 2^{3-s} (-1)^s x^s$$

즉, $(x-1)^4(2-x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (-1)^r x^{4-r} \times {}_3C_s 2^{3-s} (-1)^s x^s$$

$$= {}_4C_r \times {}_3C_s (-1)^{r+s} 2^{3-s} x^{4-r+s} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 x^3 항은 $4 - r + s = 3$, 즉

$$r - s = 1 \quad (r, s \text{는 음이 아닌 정수, } r \leq 4, s \leq 3)$$

일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)$ 이다.

(i) $r = 1, s = 0$ 일 때,

①에서 x^3 의 계수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_0 \times (-1)^1 \times 2^3 = 4 \times 1 \times (-1) \times 8$$

$$= -32$$

(ii) $r = 2, s = 1$ 일 때,

①에서 x^3 의 계수는

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 \times (-1)^3 \times 2^2 = 6 \times 3 \times (-1) \times 4$$

$$= -72$$

(iii) $r = 3, s = 2$ 일 때,

①에서 x^3 의 계수는

$${}_4C_3 \times {}_3C_2 \times (-1)^5 \times 2^1 = {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times (-1)^5 \times 2^1$$

$$= 4 \times 3 \times (-1) \times 2 = -24$$

(iv) $r = 4, s = 3$ 일 때,

①에서 x^3 의 계수는

$${}_4C_4 \times {}_3C_3 \times (-1)^7 \times 2^0 = {}_4C_0 \times {}_3C_0 \times (-1)^7 \times 2^0$$

$$= 1 \times 1 \times (-1) \times 1 = -1$$

(i)~(iv)에서 구하는 x^3 의 계수는

$$-32 + (-72) + (-24) + (-1) = -129$$

(2) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r \frac{x^{6-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$(x^2 - 3x + 2) \left(x + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - 3x \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 + 2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^6$$

이므로 전개식에서 x 의 계수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) x^2 과 ㉠의 $\frac{1}{x}$ 항의 곱일 때,

㉠에서 $\frac{1}{x}$ 항이 되도록 하는 음이 아닌 정수 r 은 존재하지 않는다. $r-(6-r)=1$ 인 경우

(ii) $-3x$ 와 ㉠의 상수항의 곱일 때,

㉠에서 상수항은 $r=6-r$, 즉 $r=3$ 일 때이므로 ${}_6C_3=20$

즉, 이 경우의 x 의 계수는

$$(-3) \times 20 = -60$$

(iii) 2와 ㉠의 x 항의 곱일 때,

㉠에서 x 항이 되도록 하는 음이 아닌 정수 r 은 존재하지 않는다. $(6-r)-r=1$ 인 경우

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 계수는 -60 이다.

답 (1) -129 (2) -60

31

$(1+x)^m$ 의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r x^r$$

$(2+x^2)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s 2^{5-s} (x^2)^s = {}_5C_s 2^{5-s} x^{2s}$$

즉, $(1+x)^m(2+x^2)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r x^r \times {}_5C_s 2^{5-s} x^{2s} = {}_mC_r \times {}_5C_s 2^{5-s} x^{r+2s} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠에서 x^2 항은

$$r+2s=2 \quad (r, s \text{는 음이 아닌 정수}, r \leq m, s \leq 5)$$

일 때이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 은

$(2, 0), (0, 1)$ 이다.

(i) $r=2, s=0$ 일 때,

㉠에서 x^2 의 계수는

$${}_mC_2 \times {}_5C_0 \times 2^5 = \frac{m(m-1)}{2} \times 1 \times 32 = 16m(m-1)$$

(ii) $r=0, s=1$ 일 때,

㉠에서 x^2 의 계수는

$${}_mC_0 \times {}_5C_1 \times 2^4 = 1 \times 5 \times 16 = 80$$

(i), (ii)에서 $(1+x)^m(2+x^2)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는

$$16m(m-1) + 80$$

즉, $16m(m-1) + 80 = 176$ 에서

$$16m(m-1) = 96, m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m+2)(m-3) = 0 \quad \therefore m = 3 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

답 3

32

${}_3C_0 = {}_4C_0 = 1$ 이고, ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ 이므로

$${}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_8$$

$$= {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_8 \quad (\because {}_3C_0 = {}_4C_0 = 1)$$

$$= {}_5C_1 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_8$$

$$= {}_6C_2 + {}_6C_3 + \cdots + {}_{11}C_8$$

$\vdots$

$$= {}_{11}C_7 + {}_{11}C_8$$

$$= {}_{12}C_8 = {}_{12}C_4$$

따라서 주어진 식의 값과 같은 것은 ㉠이다.

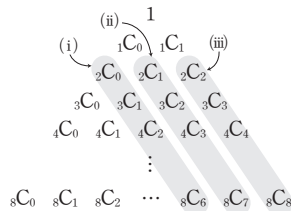
답 ㉠

다른 풀이

주어진 식의 값은 파스칼의 삼각형에서 ${}_3C_0$, 즉 1부터 시작하여 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 수들을 더한 값이므로 마지막 수인 ${}_{11}C_8$ 의 왼쪽 아래에 있는 ${}_{12}C_8$ 과 같다.

33

주어진 파스칼의 삼각형에서 색칠된 부분을 다음 그림과 같이 세 부분 (i), (ii), (iii)으로 나누어 생각할 수 있다.



${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ 이므로

$$(i) {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6$$

$$= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6 \quad (\because {}_2C_0 = {}_3C_0 = 1)$$

$$= {}_4C_1 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_6$$

$\vdots$

$$= {}_8C_5 + {}_8C_6$$

$$= {}_9C_6$$

$$(ii) {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_8C_7$$

$$= ({}_3C_1 - 1) + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_8C_7 \quad (\because {}_2C_1 = {}_3C_1 - 1)$$

$$= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_8C_7 - 1$$

$$= {}_4C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_8C_7 - 1$$

$\vdots$

$$= {}_8C_6 + {}_8C_7 - 1$$

$$= {}_9C_7 - 1$$

$$(iii) {}_2C_2 + {}_3C_3 + {}_4C_4 + \cdots + {}_8C_8$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 7$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 합은

$$\begin{aligned} {}_9C_6 + ({}_9C_7 - 1) + 7 &= {}_9C_6 + {}_9C_7 + 6 \\ &= {}_{10}C_7 + 6 = {}_{10}C_3 + 6 \\ &= 120 + 6 = 126 \end{aligned}$$

답 126

★ 다른 풀이

(i)의 식의 값은 파스칼의 삼각형에서 ${}_2C_0$, 즉 1부터 시작하여 오른쪽 아래의 대각선 방향으로 수들을 더한 값이므로 마지막 수인 ${}_8C_6$ 의 왼쪽 아래에 있는 ${}_9C_6$ 과 같다.

34

${}_1C_0 = {}_2C_0 = 1$ 이고, ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_nC_r = {}_nC_r$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} \\ &= {}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} \quad (\because {}_1C_0 = {}_2C_0 = 1) \\ &= {}_3C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} \\ &= {}_4C_2 + {}_4C_3 + \cdots + {}_nC_{n-1} \\ &\vdots \\ &= {}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-1} \\ &= {}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } {}_{n+1}C_2 = \frac{(n+1)n}{2} > 55 \text{에서 } n(n+1) > 110$$

$$n^2 + n - 110 > 0, (n+11)(n-10) > 0$$

$$\therefore n > 10 \quad (\because n > 0)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

답 11

다른 풀이 대수 p.267 개념 03 참고

대수에서의 수열의 합을 이용하여 풀 수도 있다.

$$\begin{aligned} {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} \\ &= {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_nC_1 \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n+1)}{2} > 55 \text{에서 } n(n+1) > 110$$

$$n^2 + n - 110 > 0, (n+11)(n-10) > 0$$

$$\therefore n > 10 \quad (\because n > 0)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

35

$(1+x^4)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^4)^r = {}nC_r x^{4r}$$

x^8 항은 $r=2$ 일 때이고, $(1+x^4)^2$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x^4)^2$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x^4)^3$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_3C_2$

$(1+x^4)^4$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_4C_2$

$\vdots$

$(1+x^4)^8$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_8C_2$

따라서 구하는 x^8 의 계수는

$$\begin{aligned} {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_2 \\ &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_2 \quad (\because {}_2C_2 = {}_3C_3 = 1) \\ &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \cdots + {}_8C_2 \\ &\vdots \\ &= {}_8C_3 + {}_8C_2 \\ &= {}_9C_3 = 84 \end{aligned}$$

답 84

다른 풀이

대수에서의 등비수열의 합을 이용하여 풀 수도 있다.

주어진 식은 첫째항이 $1+x^4$, 공비가 $1+x^4$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 8항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} (1+x^4) + (1+x^4)^2 + (1+x^4)^3 + \cdots + (1+x^4)^8 \\ &= \frac{(1+x^4)\{(1+x^4)^8 - 1\}}{(1+x^4) - 1} \\ &= \frac{(1+x^4)^9 - (1+x^4)}{x^4} \end{aligned}$$

즉, 전개식에서 x^8 의 계수는 $(1+x^4)^9$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수와 같다.

$(1+x^4)^9$ 의 전개식의 일반항은 ${}_9C_r(x^4)^r = {}_9C_r x^{4r}$ 이고,

x^{12} 항은 $r=3$ 일 때이므로 구하는 x^8 의 계수는

$${}_9C_3 = 84$$

보충 설명

등비수열의 합 | 첫째항이 a , 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

(1) $r \neq 1$ 일 때,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(2) $r=1$ 일 때,

$$S_n = na$$

36

주어진 다항식의 전개식에서 x^{16} 항은 x^4 과 $(1+x^3)^n$ 의 x^{12} 항의 곱일 때 나타나므로 x^{16} 의 계수는 $(1+x^3)^n$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수와 같다.

$(1+x^3)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^3)^r = {}_nC_r x^{3r}$$

x^{12} 항은 $r=4$ 일 때이고, $(1+x^3)^4$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x^3)^4$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x^3)^5$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수는 ${}_5C_4$

$(1+x^3)^6$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수는 ${}_6C_4$

⋮

$(1+x^3)^{12}$ 의 전개식에서 x^{12} 의 계수는 ${}_{12}C_4$

따라서 구하는 x^{16} 의 계수는

$${}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{12}C_4$$

$$= {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{12}C_4 \quad (\because {}_4C_4 = {}_5C_5 = 1)$$

$$= {}_6C_5 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{12}C_4$$

⋮

$$= {}_{12}C_5 + {}_{12}C_4$$

$$= {}_{13}C_5 = 1287$$

답 1287

37

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

(1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 1$ 이므로

$$2000 < 2^n - 1 < 3000$$

$$\therefore 2001 < 2^n < 3001$$

이때 $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$ 이므로

$$n = 11$$

(2) ${}_9C_1 + {}_9C_3 + {}_9C_5 + \cdots + {}_9C_9 = 2^{9-1} = 2^8$

또한,

$${}_{16}C_0 - {}_{16}C_1 + {}_{16}C_2 - \cdots + {}_{16}C_{16} = 0 \text{이므로}$$

$${}_{16}C_1 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_3 - \cdots - {}_{16}C_{16} = {}_{16}C_0 = 1$$

$$\therefore \frac{{}_9C_1 + {}_9C_3 + {}_9C_5 + \cdots + {}_9C_9}{{}_{16}C_1 - {}_{16}C_2 + {}_{16}C_3 - \cdots - {}_{16}C_{16}} = 2^8$$

$$\therefore n = 8$$

답 (1) 11 (2) 8

38

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1},$$

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \text{이고, } n \text{이 자연수이므로}$$

$$\frac{{}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}}{{}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n} = \frac{2^{2n-1}}{2^n} = 2^{n-1}$$

$$\text{즉, } 2^{n-1} = 32 = 2^5 \text{이므로}$$

$$n-1=5 \quad \therefore n=6$$

답 6

39

동아리의 학생 11명 중에서

6명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_6$

7명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_7$

8명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_8$

⋮

11명을 모두 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_{11}$

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{11}C_6 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_8 + \cdots + {}_{11}C_{11}$$

$$= {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + \cdots + {}_{11}C_5$$

$$= 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$$

답 1024

40

$(x+1)^n$ 의 전개식은

$$(x+1)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n$$

위의 등식의 양변에 $x=5$, $n=10$ 을 대입하면

$$(5+1)^{10}$$

$$= {}_{10}C_0 \times 5^{10} + {}_{10}C_1 \times 5^9 + {}_{10}C_2 \times 5^8 + \cdots + {}_{10}C_9 \times 5 + {}_{10}C_{10}$$

$$\therefore {}_{10}C_0 \times 5^{10} + {}_{10}C_1 \times 5^9 + {}_{10}C_2 \times 5^8 + \cdots + {}_{10}C_9 \times 5 + {}_{10}C_{10} = 6^{10}$$

답 6^{10}

41

$(a+b)^n$ 의 전개식은

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_n b^n$$

위의 등식의 양변에 $a=2, b=-\frac{1}{5}, n=6$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \left(2-\frac{1}{5}\right)^6 &= {}_6C_0 \times 2^6 + {}_6C_1 \times 2^5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &\quad + {}_6C_2 \times 2^4 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + {}_6C_6 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^6 \\ \therefore {}_6C_0 \times 2^6 - {}_6C_1 \times \frac{2^5}{5} + {}_6C_2 \times \frac{2^4}{5^2} - {}_6C_3 \times \frac{2^3}{5^3} \\ &\quad + {}_6C_4 \times \frac{2^2}{5^4} - {}_6C_5 \times \frac{2}{5^5} + {}_6C_6 \times \frac{1}{5^6} \\ &= \left(2-\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{9}{5}\right)^6 \end{aligned}$$

답 $\left(\frac{9}{5}\right)^6$

42

$(1+x)^n$ 의 전개식은

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

위의 등식의 양변에 $x=20, n=21$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} (1+20)^{21} &= {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \times 20 + {}_{21}C_2 \times 20^2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 20^{21} \\ \text{이때 } {}_{21}C_2 \times 20^2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 20^{21} &\text{은 } \frac{400}{=20^2} \text{으로 나누어떨어} \\ \text{지므로} & \\ 21^{21} &= 1 + 21 \times 20 + 400({}_{21}C_2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 20^{19}) \\ &= 1 + 20 + 400(1 + {}_{21}C_2 + \cdots + {}_{21}C_{21} \times 20^{19}) \\ \text{따라서 구하는 나머지는} & \\ 1+20 &= 21 \end{aligned}$$

답 21

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.059-061

14 3	15 $\frac{3}{2}$	16 2	17 7
18 2	19 480	20 -2	21 8
22 252	23 2688	24 5	25 1170
26 ④	27 462	28 10	29 1024
30 11	31 ④		

14

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r a^{4-r} \frac{x^{4-r}}{x^r}$$

상수항은 $4-r=r$ 일 때이므로

$$2r=4 \quad \therefore r=2$$

이때 상수항은 54이므로

$${}_4C_2 a^2 = 54 \text{에서 } 6a^2 = 54$$

$$a^2=9 \quad \therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

답 3

15

$(2x-a)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}(-a)^r = {}_6C_r 2^{6-r}(-a)^r x^{6-r}$$

x^3 항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$ 일 때이므로

x^3 의 계수는

$${}_6C_3 \times 2^3 \times (-a)^3 = 20 \times 8 \times (-a^3) = -160a^3$$

또한, x^4 항은 $6-r=4$, 즉 $r=2$ 일 때이므로

x^4 의 계수는

$${}_6C_2 \times 2^4 \times (-a)^2 = 15 \times 16 \times a^2 = 240a^2$$

이때 x^3 의 계수와 x^4 의 계수의 합이 0이므로

$$-160a^3 + 240a^2 = 0 \text{에서}$$

$$-80a^2(2a-3)=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2} \quad (\because a>0)$$

답 $\frac{3}{2}$

16

$$\left(\sqrt{3x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 \left(\sqrt{3x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

$$= \left\{ \left(\sqrt{3x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{3x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right\}^4$$

$$= \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^4 \quad \leftarrow (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(3x^2)^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r 3^{4-r}(-1)^r \frac{x^{8-2r}}{x^r} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $8-2r \geq r$, 즉 $8-3r \geq 0$ 일 때, $r \leq \frac{8}{3}$

㉠에서 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 3^{4-r} (-1)^r x^{8-3r} \quad (r=0, 1, 2)$$

이때 r 의 값은 짝수이므로 (*)

① $r=0$ 일 때,

$x^{8-3 \times 0} = x^8$ 항의 계수는 ${}_4C_0 \times 3^4 \times (-1)^0 = 81$ 이므로
주어진 조건을 만족시키지 않는다.

② $r=2$ 일 때,

$x^{8-3 \times 2} = x^2$ 항의 계수는 ${}_4C_2 \times 3^2 \times (-1)^2 = 54$ 이므로
주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $8-2r < r$, 즉 $3r-8 > 0$ 일 때, $r > \frac{8}{3}$

㉠에서 전개식의 일반항은

$${}_4C_r 3^{4-r} (-1)^r \frac{1}{x^{3r-8}} \quad (r=3, 4)$$

이때 r 의 값은 짝수이므로 (*)

③ $r=4$ 일 때,

$\frac{1}{x^{3 \times 4 - 8}} = \frac{1}{x^4}$ 항의 계수는 ${}_4C_4 \times 3^0 \times (-1)^4 = 1$ 이므로
주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 2이다.

답 2

보충 설명

${}_4C_r \times 3^{4-r} \times (-1)^r = 54$ 에서 $(-1)^r$ 의 값은 -1 과 1 중 1
이 되어야 하므로 (*)에서 r 의 값은 짝수이어야 한다.

17

$(x+2)^{20}$, 즉 $(2+x)^{20}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{20}C_r 2^{20-r} x^r$$

x^k 의 계수가 x^{k+1} 의 계수보다 커야 하므로

$${}_{20}C_k \times 2^{20-k} > {}_{20}C_{k+1} \times 2^{19-k}$$

$$\frac{20!}{k!(20-k)!} \times 2^{20-k} > \frac{20!}{(k+1)!(19-k)!} \times 2^{19-k}$$

$$\frac{2}{20-k} > \frac{1}{k+1}$$

$$2k+2 > 20-k, \quad 3k > 18$$

$$\therefore k > 6$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 7이다.

답 7

18

$\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = {}_4C_r a^r \frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 = x^2 \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 - \frac{1}{x} \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$$

이므로 전개식에서 x^3 의 계수는 다음과 같이 경우를 나누어
구할 수 있다.

(i) x^2 과 ㉠의 x 항의 곱일 때,

㉠에서 x 항은 $4-r-2r=1$, 즉 $r=1$ 일 때이므로

x 의 계수는

$${}_4C_1 \times a^1 = 4a$$

즉, 이 경우의 x^3 의 계수는

$$1 \times 4a = 4a$$

(ii) $-\frac{1}{x}$ 과 ㉠의 x^4 항의 곱일 때,

㉠에서 x^4 항은 $4-r-2r=4$, 즉 $r=0$ 일 때이므로

x^4 의 계수는

$${}_4C_0 \times a^0 = 1$$

즉, 이 경우의 x^3 의 계수는

$$(-1) \times 1 = -1$$

(i), (ii)에서 x^3 의 계수는 $4a-1$ 이므로

$$4a-1=7 \text{에서 } 4a=8$$

$$\therefore a=2$$

답 2

19

$(x^2+1)^5$, 즉 $(1+x^2)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (x^2)^r = {}_5C_r x^{2r}$$

$(x^3+4)^n$, 즉 $(4+x^3)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s 4^{n-s} (x^3)^s = {}_nC_s 4^{n-s} x^{3s}$$

따라서 $(x^2+1)^5 (x^3+4)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{2r} \times {}_nC_s 4^{n-s} x^{3s} = {}_5C_r \times {}_nC_s 4^{n-s} x^{2r+3s} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠에서 x^4 항은

$$2r+3s=4 \quad (r, s \text{는 음이 아닌 정수, } r \leq 5, s \leq n)$$

일 때이므로

$$r=2, s=0$$

이것을 ㉠에 대입하면 x^4 의 계수는

$${}_5C_2 \times {}_nC_0 4^n = 10 \times 4^n$$

이므로 $10 \times 4^n = 640$ 에서

$$4^n = 64 = 4^3 \quad \therefore n = 3$$

한편, ㉠에서 x^7 항은

$$2r + 3s = 7 \quad (r, s \text{는 음이 아닌 정수, } r \leq 5, s \leq 3)$$

일 때이므로

$$r = 2, s = 1$$

이것을 ㉠에 대입하면 x^7 의 계수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times 4^2 = 10 \times 3 \times 16 = 480$$

따라서 구하는 x^7 의 계수는 480이다.

답 480

20

$(x+3)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} 3^r = {}_5C_r 3^r x^{5-r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} x^2 (x-2a)(x+3)^5 &= \left(\frac{1}{10} x^3 - \frac{1}{5} ax^2 \right) (x+3)^5 \\ &= \frac{1}{10} x^3 (x+3)^5 - \frac{1}{5} ax^2 (x+3)^5 \end{aligned}$$

의 전개식에서 x^5 의 계수는 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(i) $\frac{1}{10} x^3$ 과 ㉠의 x^2 항의 곱일 때,

㉠에서 x^2 항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$ 일 때이므로

$$x^2 \text{의 계수는 } {}_5C_3 \times 3^3 = {}_5C_2 \times 3^3 = 10 \times 27 = 270$$

즉, 이 경우의 x^5 의 계수는

$$\frac{1}{10} \times 270 = 27$$

(ii) $-\frac{1}{5} ax^2$ 과 ㉠의 x^3 항의 곱일 때,

㉠에서 x^3 항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$ 일 때이므로

$$x^3 \text{의 계수는 } {}_5C_2 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$$

즉, 이 경우의 x^5 의 계수는

$$-\frac{1}{5} a \times 90 = -18a$$

(i), (ii)에서 x^5 의 계수는 $27 - 18a$ 이므로

$$27 - 18a = 63 \text{에서 } 18a = -36$$

$$\therefore a = -2$$

답 -2

21

$${}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \dots + {}_nC_2$$

$$= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 - {}_3C_3 \quad \leftarrow {}_3C_3 \text{을 더하고 뺀다.}$$

$$= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \dots + {}_nC_2 - 1$$

$$= {}_5C_3 + {}_5C_2 + \dots + {}_nC_2 - 1$$

$\vdots$

$$= {}_nC_3 + {}_nC_2 - 1$$

$$= {}_{n+1}C_3 - 1$$

$$\text{즉, } {}_{n+1}C_3 - 1 < 100 \text{에서 } {}_{n+1}C_3 < 101$$

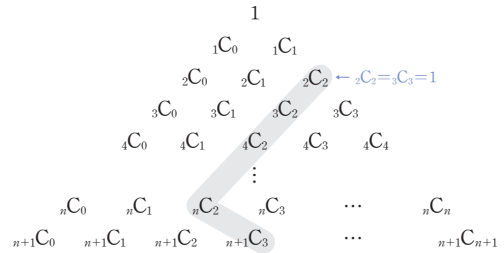
$$n=8 \text{일 때 } {}_9C_3 = 84, n=9 \text{일 때 } {}_{10}C_3 = 120$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 8이다.

답 8

보충 설명

파스칼의 삼각형에서 확인하면 다음 그림과 같다.



$$\therefore {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_nC_2 - {}_2C_2$$

$$= {}_{n+1}C_3 - {}_2C_2 = {}_{n+1}C_3 - 1$$

22

$(1+x^2)^n$ ($n \geq 4$)의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (x^2)^r = {}_nC_r x^{2r}$$

x^8 항은 $2r=8$, 즉 $r=4$ 일 때이므로 x^8 의 계수 a_n 은

$$a_n = {}_nC_4$$

$$\therefore a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$

$$= {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4$$

$$= {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 \quad (\because {}_4C_4 = {}_5C_5 = 1)$$

$$= {}_6C_5 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4$$

$$= {}_7C_5 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4$$

$$= {}_8C_5 + {}_8C_4 + {}_9C_4$$

$$= {}_9C_5 + {}_9C_4$$

$$= {}_{10}C_5 = 252$$

답 252

23

$(1+2x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(2x)^r = {}nC_r 2^r x^r$$

x^5 항은 $r=5$ 일 때이고, $(1+2x)^5$ 의 전개식에서부터 나오므로

$$(1+2x)^5 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{의 계수는 } {}_5C_5 \times 2^5$$

$$(1+2x)^6 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{의 계수는 } {}_6C_5 \times 2^5$$

$$(1+2x)^7 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{의 계수는 } {}_7C_5 \times 2^5$$

$$(1+2x)^8 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{의 계수는 } {}_8C_5 \times 2^5$$

따라서 구하는 x^5 의 계수는

$${}_5C_5 \times 2^5 + {}_6C_5 \times 2^5 + {}_7C_5 \times 2^5 + {}_8C_5 \times 2^5$$

$$= 2^5 \times ({}_5C_5 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5)$$

$$= 32 \times ({}_6C_6 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5) \quad (\because {}_5C_5 = {}_6C_6 = 1)$$

$$= 32 \times ({}_7C_6 + {}_7C_5 + {}_8C_5)$$

$$= 32 \times ({}_8C_6 + {}_8C_5)$$

$$= 32 \times {}_9C_6 = 32 \times {}_9C_3$$

$$= 32 \times 84 = 2688$$

답 2688

다른 풀이

대수에서의 등비수열의 합을 이용하여 풀 수도 있다.

주어진 식은 첫째항이 $1+2x$, 공비가 $1+2x$ 인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$$(1+2x) + (1+2x)^2 + (1+2x)^3 + \cdots + (1+2x)^8$$

$$= \frac{(1+2x)\{(1+2x)^8 - 1\}}{(1+2x) - 1}$$

$$= \frac{(1+2x)^9 - (1+2x)}{2x}$$

즉, 전개식에서 x^5 의 계수는 $(1+2x)^9$ 의 전개식에서 x^6 의 계수를 2로 나눈 것과 같다.

$$(1+2x)^9 \text{의 전개식의 일반항은 } {}_9C_r(2x)^r = {}_9C_r 2^r x^r \text{이고,}$$

x^6 항은 $r=6$ 일 때이므로 구하는 x^6 의 계수는

$${}_9C_6 \times 2^6 \div 2 = {}_9C_3 \times 2^5$$

$$= 84 \times 32 = 2688$$

24

$(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 $(1+x)$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, ..., $(1+x)^{10}$ 의 각각의 전개식의 x^n 의 계수를 더하면 된다.

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$ 이므로

$$f(1) = {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 = {}_{11}C_2$$

$$f(2) = {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 = {}_{11}C_3$$

$$f(3) = {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_3 = {}_{11}C_4$$

⋮

$$f(10) = {}_{10}C_{10} = {}_{11}C_{11}$$

$$\therefore f(n) = {}_{11}C_{n+1}$$

이때 $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) = f(5)$ 이고

$$f(5) > f(6) > f(7) > f(8) > f(9) > f(10) \text{이므로}$$

$f(n) > f(n+1)$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 5

다른 풀이

대수에서의 등비수열의 합을 이용하여 풀 수도 있다.

주어진 식은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$ 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{10}$$

$$= \frac{(1+x)\{(1+x)^{10} - 1\}}{(1+x) - 1}$$

$$= \frac{(1+x)^{11} - (1+x)}{x}$$

즉, 전개식에서 x^n 의 계수는 $(1+x)^{11}$ 의 전개식에서 x^{n+1} 의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$ 의 전개식의 일반항은 ${}_{11}C_r x^r$ 이므로 x^{n+1} 의 계수는 ${}_{11}C_{n+1}$

$$\therefore f(n) = {}_{11}C_{n+1} = \frac{11!}{(n+1)!(10-n)!}$$

이때 $f(n) > f(n+1)$ 이려면

$$\frac{11!}{(n+1)!(10-n)!} > \frac{11!}{(n+2)!(9-n)!}$$

$$\frac{1}{10-n} > \frac{1}{n+2}, \quad 10-n < n+2$$

$$2n > 8 \quad \therefore n > 4$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

보충 설명

이항계수의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$f(1) = {}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{10}C_1$$

$$= {}_2C_2 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 \quad (\because {}_1C_1 = {}_2C_2 = 1)$$

$$= {}_3C_2 + {}_3C_1 + \cdots + {}_{10}C_1$$

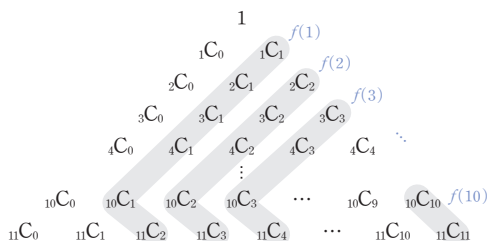
⋮

$$= {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1$$

$$= {}_{11}C_2$$

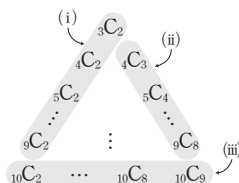
$f(2), f(3), \dots, f(10)$ 의 경우에도 같은 방법으로 구할 수 있다.

또한, 이것을 파스칼의 삼각형에서 확인하면 다음 그림과 같다.



25

주어진 파스칼의 삼각형에서 색칠된 부분을 다음 그림과 같이 세 부분 (i), (ii), (iii)으로 나누어 생각할 수 있다.



$$(i) \quad {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \dots + {}_9C_2$$

$$= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \dots + {}_9C_2 - {}_3C_3 \quad \leftarrow {}_3C_3 \text{을 더하고 뺀다.}$$

$$= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \dots + {}_9C_2 - {}_3C_3$$

$$= {}_5C_3 + {}_5C_2 + \dots + {}_9C_2 - {}_3C_3$$

$\vdots$

$$= {}_9C_3 + {}_9C_2 - {}_3C_3$$

$$= {}_{10}C_3 - {}_3C_3$$

$$= 120 - 1 = 119$$

$$(ii) \quad {}_4C_3 + {}_5C_4 + {}_6C_5 + {}_7C_6 + {}_8C_7 + {}_9C_8$$

$$= {}_4C_1 + {}_5C_1 + {}_6C_1 + {}_7C_1 + {}_8C_1 + {}_9C_1$$

$$= 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$$

$$(iii) \quad {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_4 + \dots + {}_{10}C_9$$

$$= {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_4 + \dots + {}_{10}C_9 + {}_{10}C_{10}$$

$$- ({}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_{10})$$

$$= 2^{10} - (1 + 10 + 1)$$

$$= 1024 - 12 = 1012$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 합은

$$119 + 39 + 1012 = 1170$$

답 1170

26

$$\neg. \quad {}_8C_1 + {}_8C_2 + {}_8C_3 + \dots + {}_8C_8$$

$$= ({}_8C_0 + {}_8C_1 + {}_8C_2 + {}_8C_3 + \dots + {}_8C_8) - {}_8C_0$$

$$= 2^8 - 1$$

$$= 256 - 1$$

$$= 255 \quad (\text{참})$$

$$\neg. \quad {}_9C_0 - {}_9C_1 + {}_9C_2 - {}_9C_3 + \dots - {}_9C_9 = 0 \text{이므로}$$

$$1 - {}_9C_1 + {}_9C_2 - {}_9C_3 + \dots - {}_9C_9 = 0$$

$$\therefore {}_9C_1 - {}_9C_2 + {}_9C_3 - \dots + {}_9C_9 = 1 \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. \quad {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{12}C_3$$

$$= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{12}C_3 \quad (\because {}_3C_3 = {}_4C_4 = 1)$$

$$= {}_5C_4 + {}_5C_3 + \dots + {}_{12}C_3$$

$\vdots$

$$= {}_{12}C_4 + {}_{12}C_3$$

$$= {}_{13}C_4 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

27

$${}_kC_1 + {}_kC_2 + {}_kC_3 + \dots + {}_kC_k = 31 \text{에서}$$

$${}_kC_1 + {}_kC_2 + {}_kC_3 + \dots + {}_kC_k$$

$$= ({}_kC_0 + {}_kC_1 + {}_kC_2 + {}_kC_3 + \dots + {}_kC_k) - {}_kC_0$$

$$= 2^k - 1$$

$$\text{즉, } 2^k - 1 = 31 \text{에서}$$

$$2^k = 32 = 2^5$$

$$\therefore k = 5$$

이것을 주어진 식에 대입하면 구하는 값은

$$\begin{aligned}
 & {}_5C_0 + {}_6C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 \\
 &= {}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 \quad (\because {}_5C_0 = {}_6C_0 = 1) \\
 &= {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 \\
 &= {}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 \\
 &= {}_9C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 \\
 &= {}_{10}C_4 + {}_{10}C_5 \\
 &= {}_{11}C_5 \\
 &= 462
 \end{aligned}$$

답 462

28

집합 $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 의 원소의 개수는 n 이므로
 집합 A 의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가
 k ($1 \leq k \leq n$)인 부분집합의 개수는 ${}_nC_k$ 이다.

즉, n 의 값에 따라 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 짝
 수인 것의 개수는 다음과 같다.

(i) n 이 짝수일 때,

$$\begin{aligned}
 & {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \dots + {}_nC_n \\
 &= ({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \dots + {}_nC_n) - {}_nC_0 \quad (*) \\
 &= 2^{n-1} - 1
 \end{aligned}$$

즉, $2^{n-1} - 1 > 400$ 에서

$$2^{n-1} > 401$$

이때 n 은 짝수이므로 $n-1$ 은 홀수이고

$$2^7 = 128, 2^9 = 512 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 9 \quad \therefore n \geq 10$$

$$\therefore n = 10, 12, 14, \dots$$

(ii) n 이 홀수일 때,

$$\begin{aligned}
 & {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \dots + {}_nC_{n-1} \\
 &= ({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \dots + {}_nC_{n-1}) - {}_nC_0 \quad (*) \\
 &= 2^{n-1} - 1
 \end{aligned}$$

즉, $2^{n-1} - 1 > 400$ 에서

$$2^{n-1} > 401$$

이때 n 은 홀수이므로 $n-1$ 은 짝수이고

$$2^8 = 256, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11$$

$$\therefore n = 11, 13, 15, \dots$$

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

보충 설명

(*)에서 자연수 n 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) n 이 1보다 큰 홀수일 때,

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots + {}_nC_{n-1} = 2^{n-1}$$

(2) n 이 짝수일 때,

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots + {}_nC_n = 2^{n-1}$$

29

$(1+x)^n$ 의 전개식은

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n$$

위의 등식의 양변에 $x = -\frac{3}{4}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 & \left\{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right\}^n \\
 &= {}_nC_0 + {}_nC_1\left(-\frac{3}{4}\right) + {}_nC_2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + {}_nC_n\left(-\frac{3}{4}\right)^n \\
 &= {}_nC_0 - \frac{3}{4}{}_nC_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2{}_nC_2 - \dots + (-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n{}_nC_n \\
 &= f(n)
 \end{aligned}$$

따라서 $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f(5)} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^5} \\
 &= 4^5 = 2^{10} \\
 &= 1024
 \end{aligned}$$

답 1024

30

$$22^5 = (2+20)^5$$

$$\begin{aligned}
 &= {}_5C_0 \times 2^5 + {}_5C_1 \times 2^4 \times 20 + {}_5C_2 \times 2^3 \times 20^2 + \dots \\
 &\quad + {}_5C_5 \times 20^5
 \end{aligned}$$

위의 전개식에서 ${}_5C_0 \times 2^5$, ${}_5C_1 \times 2^4 \times 20$ 을 제외한 항은 모두
 1000의 배수이므로 ${}_5C_0 \times 2^5 + {}_5C_1 \times 2^4 \times 20$ 만 계산하면 백
 의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 구할 수 있다.

이때

$${}_5C_0 \times 2^5 + {}_5C_1 \times 2^4 \times 20 = 32 + 5 \times 16 \times 20 \\ = 32 + 1600 = 1632$$

이므로

$$a=6, b=3, c=2$$

$$\therefore a+b+c=6+3+2=11$$

답 11

31 본문 p.050 한 걸음 더 참고

$(1+x)^{10} = (1+x)^5(1+x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r \times {}_5C_s x^s = {}_5C_r \times {}_5C_s x^{r+s}$$

이때 x^5 항은 $r+s=5$ (r, s 는 음이 아닌 정수, $r \leq 5, s \leq 5$)

일 때이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (r, s)는

(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)

따라서 x^5 의 계수는

$${}_5C_0 \times {}_5C_5 + {}_5C_1 \times {}_5C_4 + {}_5C_2 \times {}_5C_3 + {}_5C_3 \times {}_5C_2 + {}_5C_4 \times {}_5C_1 \\ + {}_5C_5 \times {}_5C_0 \\ = ({}_5C_0)^2 + ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_2)^2 + ({}_5C_3)^2 + ({}_5C_4)^2 + ({}_5C_5)^2$$

답 ④

STEP 2 개념 마무리

본문 p.062

1 148	2 13	3 704	4 -15
5 금요일	6 28		

1

두 조건 (가), (나)를 만족시킬 수 있도록 학생 A에게 먼저 연필을 2자루, 학생 B에게 먼저 지우개를 1개 주고, 남은 연필 5자루와 지우개 3개를 세 명의 학생에게 나누어 주는 것으로 생각한다.

연필 5자루를 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

지우개 3개를 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 모든 경우의 수는

$$21 \times 10 = 210 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 조건 (다)에서 학생 C가 받는 연필과 지우개의 개수의 합이 2 이상이므로 모든 경우의 수 ㉠에서 학생 C가 연필과 지우개를 합하여 0개 또는 1개 받는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 학생 C가 연필과 지우개를 합하여 0개 받는 경우

남은 연필 5자루를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

남은 지우개 3개를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

즉, 이 경우의 수는

$$6 \times 4 = 24$$

(ii) 학생 C가 연필을 1자루, 지우개를 0개 받는 경우

남은 연필 5자루 중에서 1자루를 학생 C에게 주고 다시 남은 연필 4자루를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

남은 지우개 3개를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

즉, 이 경우의 수는

$$5 \times 4 = 20$$

(iii) 학생 C가 연필을 0자루, 지우개를 1개 받는 경우

남은 연필 5자루를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

남은 지우개 3개 중에서 1개를 학생 C에게 주고 다시 남은 지우개 2개를 A, B의 2명에게 나누어 주면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

즉, 이 경우의 수는

$$6 \times 3 = 18$$

(i), (ii), (iii)에서 학생 C가 연필과 지우개를 합하여 0개 또는 1개 받는 경우의 수는

$$24 + 20 + 18 = 62$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$210 - 62 = 148$$

답 148

다른 풀이

방정식의 해의 개수를 이용하여 문제를 해결할 수도 있다.

세 명의 학생 A, B, C가 받는 연필의 개수를 각각 a_1, b_1, c_1 , 지우개의 개수를 각각 a_2, b_2, c_2 라 하면

$$a_1 + b_1 + c_1 = 7, a_2 + b_2 + c_2 = 4$$

(단, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 는 음이 아닌 정수)

이때 두 조건 ㉑, ㉒에서 학생 A는 연필을 2개 이상, 학생 B는 지우개를 1개 이상 받으므로

$$a_1 \geq 2, b_2 \geq 1$$

$a_1 = a_1' + 2, b_2 = b_2' + 1$ (a_1', b_2' 은 음이 아닌 정수)이라 하면

$$a_1' + b_1 + c_1 = 5, a_2 + b_2' + c_2 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

방정식 $a_1' + b_1 + c_1 = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1, c_1 의 순서쌍 (a_1', b_1, c_1)의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

방정식 $a_2 + b_2' + c_2 = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2', c_2 의 순서쌍 (a_2, b_2', c_2)의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, ㉑을 만족시키는 해의 개수는

$$21 \times 10 = 210$$

이때 조건 ㉒에서 학생 C가 받는 연필과 지우개의 개수의 합은 2 이상이어야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하거나 연필 또는 지우개를 1개 받는 경우는 제외시켜야 한다.

(i) 학생 C가 아무것도 받지 못할 때,

㉑에서

$$a_1' + b_1 = 5, a_2 + b_2' = 3 \quad (\because c_1 = c_2 = 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

방정식 $a_1' + b_1 = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1 의 순서쌍 (a_1', b_1)의 개수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

방정식 $a_2 + b_2' = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2' 의 순서쌍 (a_2, b_2')의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

즉, ㉒을 만족시키는 해의 개수는

$$6 \times 4 = 24$$

(ii) 학생 C가 연필 1개만 받을 때,

㉑에서

$$a_1' + b_1 = 4, a_2 + b_2' = 3 \quad (\because c_1 = 1, c_2 = 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

방정식 $a_1' + b_1 = 4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1 의 순서쌍 (a_1', b_1)의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

방정식 $a_2 + b_2' = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2' 의 순서쌍 (a_2, b_2')의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

즉, ㉒을 만족시키는 해의 개수는

$$5 \times 4 = 20$$

(iii) 학생 C가 지우개 1개만 받을 때,

㉑에서

$$a_1' + b_1 = 5, a_2 + b_2' = 2 \quad (\because c_1 = 0, c_2 = 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

방정식 $a_1' + b_1 = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_1', b_1 의 순서쌍 (a_1', b_1)의 개수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

방정식 $a_2 + b_2' = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a_2, b_2' 의 순서쌍 (a_2, b_2')의 개수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

즉, ㉒을 만족시키는 해의 개수는

$$6 \times 3 = 18$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$210 - (24 + 20 + 18) = 210 - 62 = 148$$

2

$(a+b-c+d)^6$ 의 전개식에서 a, b 의 차수가 1 이상인 항을 $a^p b^q (-c)^r d^s$ 꼴로 나타낼 때, $p+q+r+s=6$ 이고

p 와 q 는 자연수, r 과 s 는 음이 아닌 정수이어야 한다.

$p=p'+1, q=q'+1$ (p', q' 은 음이 아닌 정수)이라 하면

$p+q+r+s=6$ 에서

$$(p'+1) + (q'+1) + r + s = 6$$

$$\therefore p' + q' + r + s = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $(a+b-c+d)^6$ 의 전개식에서 계수가 음수인 항은 c 의 차수가 4 이하의 홀수인 1 또는 3일 때이다.

(i) c 의 차수가 1일 때,

$r=1$ 을 ①에 대입하면 $p'+q'+s=3$ 이고, 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', s 의 순서쌍 (p', q', s) 의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(ii) c 의 차수가 3일 때,

$r=3$ 을 ①에 대입하면 $p'+q'+s=1$ 이고, 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 p', q', s 의 순서쌍 (p', q', s) 는 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 의 3개이다.

(i), (ii)에서 구하는 항의 개수는 ${}_4H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$
 $10+3=13$

답 13

3

$a=2^{x_1} \times 3^{y_1}$, $b=2^{x_2} \times 3^{y_2}$, $c=2^{x_3} \times 3^{y_3}$, $d=2^{x_4} \times 3^{y_4}$ 이라 하면

$$x_1+x_2+x_3+x_4=5, y_1+y_2+y_3+y_4=5$$

(단, $i=1, 2, 3, 4$ 에 대하여 x_i, y_i 는 음이 아닌 정수이고, $(x_i, y_i) \neq (0, 0)$)

이때 $a+b+c+d$ 가 짝수이라면 a, b, c, d 가 모두 짝수이거나 a, b, c, d 중에서 2개만 짝수이어야 한다. (*)

(i) a, b, c, d 가 모두 짝수일 때,

자연수 a, b, c, d 가 모두 2의 배수이므로

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1, x_4 \geq 1$$

$$x_1=x_1'+1, x_2=x_2'+1, x_3=x_3'+1, x_4=x_4'+1$$

(x_1', x_2', x_3', x_4' 은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 에서

$$(x_1'+1)+(x_2'+1)+(x_3'+1)+(x_4'+1)=5$$

$$\therefore x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=1$$

방정식 $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌

정수 x_1', x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1', x_2', x_3', x_4') 은

$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ 의 4개이다.

$${}_4H_1 = {}_{4+1-1}C_1 = {}_4C_1 = 4$$

한편, 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4 의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$$4 \times 56 = 224$$

(ii) a, b, c, d 중에서 2개만 짝수일 때,

x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이어야 한다.

서로 다른 4개에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

예를 들어, 택한 두 자연수가 x_1, x_2 일 때, $x_3=0, x_4=0$ 이다.
 a, b 가 짝수, c, d 가 홀수인 경우

이때

$$x_1=x_1'+1, x_2=x_2'+1 \quad (x_1', x_2' \text{은 음이 아닌 정수})$$

이라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 에서

$$(x_1'+1)+(x_2'+1)=5$$

$$\therefore x_1'+x_2'=3$$

방정식 $x_1'+x_2'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2' 의 순서쌍 (x_1', x_2') 의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

한편, $x_3=0, x_4=0$ 이므로

$$y_3 \geq 1, y_4 \geq 1$$

$y_3=y_3'+1, y_4=y_4'+1$ (y_3', y_4' 은 음이 아닌 정수)이라 하면 $y_1+y_2+y_3+y_4=5$ 에서

$$y_1+y_2+(y_3'+1)+(y_4'+1)=5$$

$$\therefore y_1+y_2+y_3'+y_4'=3$$

방정식 $y_1+y_2+y_3'+y_4'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3', y_4' 의 순서쌍 (y_1, y_2, y_3', y_4') 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

즉, 이 경우의 순서쌍의 개수는

$$6 \times 4 \times 20 = 480$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$224+480=704$$

답 704

보충 설명

일반적으로 a, b, c, d 가 음이 아닌 정수일 때,
 $a+b+c+d$ 가 짝수가 되는 경우는 다음 세 가지이다.

- (i) a, b, c, d 가 모두 짝수인 경우
 - (ii) a, b, c, d 중 2개는 짝수, 2개는 홀수인 경우
 - (iii) a, b, c, d 가 모두 홀수인 경우
- 그런데 이 문제에서는 $a \times b \times c \times d = 2^5 \times 3^5$ 이므로
 a, b, c, d 중 적어도 하나는 반드시 2를 인수로 가져야 한다.
 따라서 (*)에서 (iii) 네 수 a, b, c, d 가 모두 홀수인 경우는
 생각하지 않는다.

4

$\left(2x^4 - \frac{1}{4x^6}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (2x^4)^{n-r} \left(-\frac{1}{4x^6}\right)^r$$

$$= {}_nC_r 2^{n-r} \left(-\frac{1}{4}\right)^r \frac{x^{4n-4r}}{x^{6r}}$$

상수항은 $4n - 4r = 6r$ 일 때이므로

$$4n = 10r \quad \therefore n = \frac{5}{2}r$$

즉, $r=2$ 일 때 자연수 n 은 최솟값 5를 갖는다.

$$\therefore m=5$$

이때 $\left(2x^4 - \frac{1}{4x^6}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (2x^4)^{5-r} \left(-\frac{1}{4x^6}\right)^r$$

$$= {}_5C_r 2^{5-r} \left(-\frac{1}{4}\right)^r \frac{x^{20-4r}}{x^{6r}}$$

x^{10} 항은 $20 - 4r - 6r = 10$, 즉 $r=1$ 일 때이므로

x^{10} 의 계수는

$${}_5C_1 \times 2^4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^1 = 5 \times 16 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -20$$

$$\therefore a = -20$$

$$\therefore m+a=5+(-20)=-15$$

답 -15

5

$$33^7 = (2+31)^7$$

$$= {}_7C_0 \times 2^7 + {}_7C_1 \times 2^6 \times 31 + {}_7C_2 \times 2^5 \times 31^2 + \dots$$

$$+ {}_7C_7 \times 31^7$$

위의 전개식에서 ${}_7C_0 \times 2^7$, ${}_7C_7 \times 31^7$ 을 제외한 항은 모두 7의
 배수이므로 ${}_7C_0 \times 2^7 + {}_7C_7 \times 31^7$ 만 계산하면 33^7 일째 되는
 날이 무슨 요일인지 알 수 있다.

$${}_7C_0 \times 2^7 + {}_7C_7 \times 31^7 = 128 + 31^7$$

$$= 7 \times 18 + 2 + 31^7$$

오늘부터 31⁷일째 되는 날이 수요일이므로 33⁷일째 되는 날
 은 수요일로부터 2일 뒤인 금요일이다.

답 금요일

6

$$(1+x)^8 = {}_8C_0 + {}_8C_1 x + {}_8C_2 x^2 + \dots + {}_8C_8 x^8 \text{이고}$$

$$(1+x)^{12} = {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 x + {}_{12}C_2 x^2 + \dots + {}_{12}C_{12} x^{12} \text{이므로}$$

$$(1+x)^8 (1+x)^{12}$$

$$= ({}_8C_0 + {}_8C_1 x + {}_8C_2 x^2 + \dots + {}_8C_8 x^8)$$

$$\times ({}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 x + {}_{12}C_2 x^2 + \dots + {}_{12}C_{12} x^{12})$$

으로 나타낼 수 있다.

이때 위의 식의 전개식에서 x^8 의 계수는

$${}_8C_0 \times {}_{12}C_8 + {}_8C_1 \times {}_{12}C_7 + {}_8C_2 \times {}_{12}C_6 + \dots + {}_8C_8 \times {}_{12}C_0$$

$$= {}_8C_0 \times {}_{12}C_4 + {}_8C_1 \times {}_{12}C_5 + {}_8C_2 \times {}_{12}C_6 + \dots + {}_8C_8 \times {}_{12}C_{12}$$

한편, $(1+x)^8 (1+x)^{12} = (1+x)^{20}$ 이고, $(1+x)^{20}$ 의 전개식
 의 일반항은 ${}_{20}C_r x^r$ 이므로 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_{20}C_8$ 이다.

$$\therefore {}_8C_0 \times {}_{12}C_4 + {}_8C_1 \times {}_{12}C_5 + {}_8C_2 \times {}_{12}C_6 + \dots + {}_8C_8 \times {}_{12}C_{12}$$

$$= {}_{20}C_8 = {}_{20}C_{12}$$

따라서 $n=20$, $r=8$ ($\because n \geq 2r$)이므로

$$n+r=20+8=28$$

답 28

보충 설명

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 을 이용하여 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$${}_8C_0 \times {}_{12}C_8 + {}_8C_1 \times {}_{12}C_7 + {}_8C_2 \times {}_{12}C_6 + \dots + {}_8C_8 \times {}_{12}C_0$$

이고, 이 식은 총 20개의 어떤 요소를 8개와 12개로 나누어
 각각 k 개, $(8-k)$ 개 ($k=0, 1, 2, \dots, 8$)를 뽑는 모든 경우
 의 수의 합을 의미한다.

결국 이 식의 값은 서로 다른 20개에서 8개를 택하는 경우의
 수, 즉 ${}_{20}C_8$ 임을 알 수 있다.

II. 확률

03. 확률의 뜻과 활용

1 확률

기본 + 필수연습

본문 pp.069-076

- 01 (1) {1, 2, 4, 8, 16}
 (2) {1}, {2}, {4}, {8}, {16}
 (3) {1} (4) {1, 2, 4, 8}
- 02 (1) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20}
 (2) {12} (3) {2, 6, 10, 14, 18}
 (4) {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20}
- 03 A와 C, B와 C 04 $\frac{3}{7}$ 05 $\frac{7}{50}$
- 06 (1) $\frac{1}{6}$ (2) 1 (3) 0 07 36 08 64
- 09 63 10 (1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{4}{21}$ (3) $\frac{2}{7}$ 11 $\frac{11}{18}$
- 12 (1) $\frac{19}{35}$ (2) $\frac{24}{35}$ 13 $\frac{3}{7}$ 14 $\frac{1}{9}$
- 15 $\frac{8}{25}$ 16 $\frac{8}{15}$ 17 0.29

01

- (1) $S = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
 (2) {1}, {2}, {4}, {8}, {16}
 (3) $A = \{1\}$
 (4) $B = \{1, 2, 4, 8\}$

- 답 (1) {1, 2, 4, 8, 16}
 (2) {1}, {2}, {4}, {8}, {16}
 (3) {1}
 (4) {1, 2, 4, 8}

02

표본공간을 S라 하면

$S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ 이고,
 $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B = \{6, 12, 18\}$ 이므로

- (1) $A \cup B = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20\}$
 (2) $A \cap B = \{12\}$

(3) $A^C = \{2, 6, 10, 14, 18\}$

(4) $B^C = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}$

- 답 (1) {4, 6, 8, 12, 16, 18, 20}
 (2) {12}
 (3) {2, 6, 10, 14, 18}
 (4) {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20}

03

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서 표본공간 S는

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

뒷면이 한 번만 나오는 사건 A는

$A = \{HT, TH\}$

뒷면이 적어도 한 번 나오는 사건 B는

$B = \{HT, TH, TT\}$

앞면이 두 번 나오는 사건 C는

$C = \{HH\}$

$A \cap B = \{HT, TH\}$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

$A \cap C = \emptyset$ 이므로 두 사건 A, C는 서로 배반사건이다.

$B \cap C = \emptyset$ 이므로 두 사건 B, C는 서로 배반사건이다.

따라서 서로 배반사건인 두 사건은 A와 C, B와 C이다.

답 A와 C, B와 C

04

7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}^7C_2 = 21$

꺼낸 2개의 공의 색이 같으려면 흰 공 3개 중에서 2개를 꺼내거나 검은 공 4개 중에서 2개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_3C_2 + {}_4C_2 = 3 + 6 = 9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

05

50타석당 7번 꼴로 출루하므로 구하는 확률은

$$\frac{7}{50}$$

답 $\frac{7}{50}$

06

(1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

눈의 수를 순서쌍으로 나타낼 때, 나오는 두 눈의 수가 서로 같은 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지 따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 반드시 일어나는 사건이므로 구하는 확률은 1이다.

(3) 절대로 일어나지 않는 사건이므로 구하는 확률은 0이다.

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) 1 (3) 0

07

표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에서

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $A^C = \{4, 5, 7\}$

$B_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 약수}\}$ 에서

$B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{1, 2\}$, $B_3 = \{1, 3\}$, $B_4 = \{1, 2, 4\}$,

$B_5 = \{1, 5\}$, $B_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $B_7 = \{1, 7\}$

두 사건 A^C , B_n 이 서로 배반사건이 되려면 $A^C \cap B_n = \emptyset$ 이어야 하므로 n 의 값은 1, 2, 3, 6이다.

따라서 모든 자연수 n 의 값의 곱은

$$1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$$

답 36

08

표본공간을 S 라 하면

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건 A 는

$A = \{3, 6, 9\}$

$$\therefore A^C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

★사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^C 의 부분집합이고, A^C 의 원소가 6개이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^6 = 64$$

답 64

09

표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에서 5의 배수인 사건 A 는

$$A = \{5, 10\}$$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^C 의 부분집합이고, 사건 B 와 서로 배반인 사건은 B^C 의 부분집합이므로 두 사건 A , B 와 모두 배반인 사건은 $A^C \cap B^C$ 의 부분집합이다. -(*)

이때

$$A^C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B^C = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

이므로

$$A^C \cap B^C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

즉, ★ $A^C \cap B^C$ 의 원소가 6개이므로 두 사건 A , B 와 모두 배반인 사건이면서 공사건이 아닌 것의 개수는

$$2^6 - 1 = 63$$

답 63

보충 설명

(*)에서 드모르간의 법칙을 이용하여 풀 수도 있다.

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 10\} \text{이므로}$$

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C = \{1, 3, 6, 7, 8, 9\}$$

10

s, u, b, j, e, c, t 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

(1) s, u 를 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6!$$

그 각각에 대하여 s, u 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6! \times 2!}{7!} = \frac{2}{7}$$

- (2) s, u 사이에 들어갈 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_2=20$$

s, u 와 그 사이에 있는 2개의 문자를 포함하여 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4!$$

그 각각에 대하여 s, u 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20 \times 4! \times 2!}{7!} = \frac{4}{21}$$

- (3) j, e, c, t 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$

그 각각에 대하여 j, e, c, t 의 양 끝과 사이사이의 5개의 자리에 s, u, b 를 하나씩 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_3=60$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4! \times 60}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$\text{답 (1) } \frac{2}{7} \quad (2) \frac{4}{21} \quad (3) \frac{2}{7}$$

11

6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_6\Pi_4=6^4=1296$$

- (i) $1\square\square\square, 2\square\square\square, 3\square\square\square$ 꼴인 경우

각 경우에 대하여 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$3 \times {}_6\Pi_3=3 \times 6^3=648$$

- (ii) $41\square\square, 42\square\square, 43\square\square, 44\square\square$ 꼴인 경우

각 경우에 대하여 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 십의 자리와 일의 자리에 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$4 \times {}_6\Pi_2=4 \times 6^2=144$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{648+144}{1296} = \frac{792}{1296} = \frac{11}{18}$$

$$\text{답 } \frac{11}{18}$$

12

7장의 카드 중에서 4장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4={}_7C_3=35$$

- (1) 카드 4장에 적힌 네 수의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.

- (i) 카드 4장에 적힌 수가 모두 홀수일 때,

1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$$1$$

- (ii) 짝수와 홀수가 적힌 카드를 각각 2장씩 뽑을 때,

짝수 2, 4, 6이 적힌 3장의 카드에서 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

홀수 1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드에서 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 6=18$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1+18}{35} = \frac{19}{35}$$

- (2) 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수가 홀수인 경우는 다음과 같다.

- (i) 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수가 7일 때,

7이 적힌 카드를 뽑고, 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 6장의 카드에서 3장을 뽑으면 되므로 이 경우의 수는

$$1 \times {}_6C_3=20$$

- (ii) 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수가 5일 때,

5가 적힌 카드를 뽑고, 1, 2, 3, 4가 적힌 4장의 카드에서 3장을 뽑으면 되므로 이 경우의 수는

$$1 \times {}_4C_3=1 \times {}_4C_1=4$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{20+4}{35} = \frac{24}{35}$$

$$\text{답 (1) } \frac{19}{35} \quad (2) \frac{24}{35}$$

13

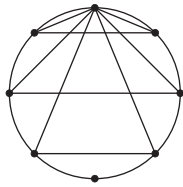
만들 수 있는 삼각형의 개수는 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_3=56$$

이때 오른쪽 그림과 같이 한 꼭짓점에 대하여 3개의 이등변삼각형을 만들 수 있고, 점은 모두 8개가 있으므로 만들 수 있는 이등변삼각형의 개수는 $3 \times 8 = 24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$



답 $\frac{3}{7}$

14

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이차방정식 $4x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$D = a^2 - 16b \geq 0$$

$$\therefore a^2 \geq 16b$$

부등식 $a^2 \geq 16b$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 1), (5, 1), (6, 1), (6, 2)$

의 4개이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

15

오른쪽 그림에서 가장 작은 원부터

차례대로 원의 넓이가 $\pi, 9\pi, 25\pi$

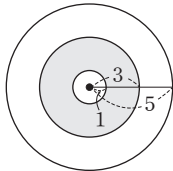
이므로 색칠한 부분의 넓이는

$$9\pi - \pi = 8\pi$$

따라서 화살이 색칠한 부분에 맞을

확률은

$$\frac{\text{(색칠한 부분의 넓이)}}{\text{(과녁 전체의 넓이)}} = \frac{8\pi}{25\pi} = \frac{8}{25}$$



답 $\frac{8}{25}$

16

10개의 제비 중에서 2개의 제비를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

바구니에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n 이라 하면 꺼낸

2개의 제비가 모두 당첨 제비일 확률은

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2} = \frac{n(n-1)}{90}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n-1)}{90} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0, (n+5)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 6 \quad (\because n > 0)$$

이 시행에서 3번에 1번 꼴로 모두 당첨 제비를 꺼냈으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

같은 시행을 한 번 할 때, 당첨 제비가 하나만 나오려면 6개의 당첨 제비에서 하나를 꺼내고, 나머지 4개의 제비에서 하나를 꺼내면 되므로 이 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

17

조사에 응한 학생은 972명이고, 아르바이트 시간이 4시간

이하인 학생은 $32 + 253 = 285$ (명)이므로 구하는 확률은

$$\frac{285}{972} = 0.293 \times \times \times$$

이때 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 구하는 확률은 0.29이다.

답 0.29

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.077~078

01 9	02 45	03 $\frac{3}{8}$	04 $\frac{5}{12}$
05 $\frac{1}{6}$	06 $\frac{1}{3}$	07 $\frac{8}{21}$	08 $\frac{1}{3}$
09 $\frac{1}{15}$	10 $\frac{5}{7}$	11 $\frac{13}{36}$	12 $\frac{11}{20}$

01

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하의 자연수이다.

이때 2 이상 12 이하의 자연수 중에서 12의 약수는 2, 3, 4, 6, 12이므로

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$$

또한, 12 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11이므로 2 이상 12 이하의 소수가 아닌 자연수는 4, 6, 8, 9, 10, 12이다. 즉,

$$B^C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\therefore A \cap B^C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$$

따라서 사건 $A \cap B^C$ 의 원소의 개수는

$$n(A \cap B^C) = 9$$

답 9

보충 설명

사건 $A \cap B^C$ 는 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 12의 약수이면서 소수가 아닌 자연수인 사건이므로 두 눈의 수의 합이 4, 6, 12인 사건이다.

02

두 사건 A, C 가 서로 배반사건이므로

$$A \cap C = \emptyset \quad \therefore C \subset A^C$$

또한, 두 사건 B, C^C 가 서로 배반사건이므로

$$B \cap C^C = \emptyset \quad \therefore B \subset C$$

$$\therefore B \subset C \subset A^C$$

$B = \{3, 5, 7\}$, $A^C = \{3, 5, 6, 7, 9\}$, $n(C) = 4$ 이므로 사건 C 의 모든 원소의 합의 최대가 되는 것은 $C = \{3, 5, 7, 9\}$ 일 때이고 사건 C 의 모든 원소의 합의 최소가 되는 것은

$$C = \{3, 5, 6, 7\}$$
일 때이다.

따라서 $M = 3 + 5 + 7 + 9 = 24$, $m = 3 + 5 + 6 + 7 = 21$ 이므로

$$M + m = 24 + 21 = 45$$

답 45

03

4명의 학생에게 4장의 카드를 나누어 주는 경우의 수는

$$4! = 24$$

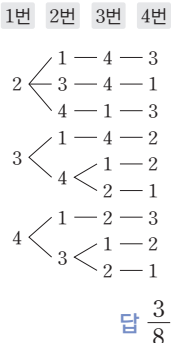
이때 자신의 번호와 다른 숫자가 적힌

카드를 받는 경우의 수는 오른쪽 수형

도와 같이 9이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$



04

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일대응의 개수는

$$4! = 24$$

정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이고, 치역과 공역이 같다.

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(1) \times f(2)$ 가 2의 배수이고 $f(3)$ 이 5의 배수일 때,

집합 Y 의 원소 중 5의 배수는 5뿐이므로

$$f(3) = 5$$

이때 함수 f 가 일대일대응이므로 $f(1)$ 또는 $f(2)$ 는 항상 2의 배수이다. (*)

즉, 이 경우의 함수 f 의 개수는

$$3! = 6$$

(ii) $f(1) \times f(2)$ 가 5의 배수이고 $f(3)$ 이 2의 배수일 때,

$f(1) \times f(2)$ 가 10의 배수는 아니어야 하고, 집합 Y 의 원소 중 5의 배수는 5뿐이므로

$$f(1) = 5, f(2) = 3 \text{ 또는 } f(1) = 3, f(2) = 5$$

이 각각의 경우에 대하여 집합 Y 의 원소 중 2의 배수는 4, 6이므로

$$f(3) = 4 \text{ 또는 } f(3) = 6$$

즉, 이 경우의 함수 f 의 개수는

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$6 + 4 = 10$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

보충 설명

(*)에서 $f(3)=5$ 이고 함수 f 가 일대일대응이므로

$f(1), f(2), f(4)$ 의 값은 3, 4, 6 중 하나씩이다.

이때 3, 4, 6 중 4, 6이 2의 배수이므로 $f(1), f(2)$ 중 적어도 하나는 반드시 2의 배수이다.

05

필수 과제를 A, 선택 과제를 B, 보충 과제를 C라 하자.

같은 종류의 과제끼리는 구별하지 않으므로 7개의 과제 A, A, B, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

이때 필수 과제 2개를 모두 끝내기 전에는 선택 과제를 하나도 하지 않도록 과제 수행 순서를 정해야 하므로 필수 과제와 선택 과제를 모두 X로 나타내면

앞에 있는 2개의 X는 A로, 뒤에 있는 2개의 X는 B로 바꾸면 된다.

7개의 과제 X, X, X, X, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

06

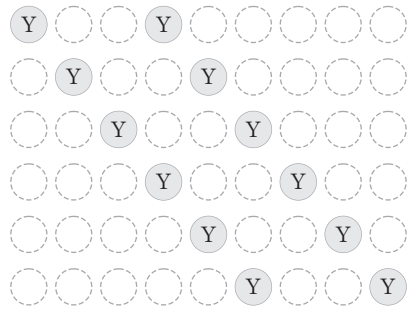
9개의 구슬을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

노란색 구슬을 Y라 할 때, 노란색 구슬 사이에 놓이는 다른 색 구슬의 개수가 짝수인 경우는 다음과 같다.

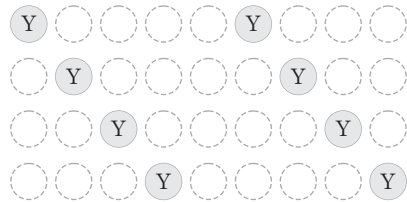
(i) 노란색 구슬 사이에 2개의 구슬이 놓일 때,

노란색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음 그림과 같으므로 Y의 자리를 정하는 경우의 수는 6



(ii) 노란색 구슬 사이에 4개의 구슬이 놓일 때,

노란색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음 그림과 같으므로 Y의 자리를 정하는 경우의 수는 4



(iii) 노란색 구슬 사이에 6개의 구슬이 놓일 때,

노란색 구슬이 들어갈 수 있는 위치는 다음 그림과 같으므로 Y의 자리를 정하는 경우의 수는 2



(i), (ii), (iii)에서 노란색 구슬 사이에 놓이는 다른 색 구슬의 개수가 짝수가 되도록 노란색 구슬의 자리를 정하는 경우의 수는

$$6 + 4 + 2 = 12$$

그 각각에 대하여 나머지 자리에 흰색 구슬 4개, 파란색 구슬 3개를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $12 \times 35 = 420$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{420}{1260} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

다른 풀이

노란색 구슬 2개를 기준으로 왼쪽, 사이, 오른쪽에 있는 구슬의 개수를 각각 a, b, c 라 하면

$$a + b + c = 7 \quad \cdots \textcircled{1}$$

㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

이때 노란색 구슬 2개가 서로 이웃하지 않으면서 노란색 구슬 사이에 놓이는 다른 색 구슬의 개수가 짝수이어야 하므로

$$b=2 \text{ 또는 } b=4 \text{ 또는 } b=6$$

이어야 한다.

(i) $b=2$ 일 때,

㉠에서 $a+c=5$ 이므로 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c 의 순서쌍 (a, c) 의 개수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) $b=4$ 일 때,

㉠에서 $a+c=3$ 이므로 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c 의 순서쌍 (a, c) 의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) $b=6$ 일 때,

㉠에서 $a+c=1$ 이므로 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c 의 순서쌍 (a, c) 의 개수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_2H_1 = {}_{2+1-1}C_1 = {}_2C_1 = 2$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$6+4+2=12$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

보충 설명

㉠에서 순서쌍 (a, b, c) 가 정해지면 남은 7개의 자리에 흰색 구슬 4개와 파란색 구슬 3개를 놓는 방법의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!}$$

으로 항상 같다.

즉, 임의의 순서쌍 (a, b, c) 에 대해서 흰색 구슬 4개와 파란색 구슬 3개를 나열하는 경우의 수는 항상 동일하므로 조건을 만족시키는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눌 때 이 값은 약분되어 없어진다. 따라서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수만 세어 확률을 구해도 된다.

07

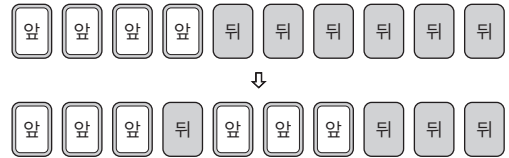
10장의 카드 중에서 뒤집을 4장의 카드를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$

앞면이 보이는 카드를 x 장, 뒷면이 보이는 카드를 $(4-x)$ 장 뒤집었을 때, 뒷면이 보이는 카드가 4장이므로

$$x + \{6 - (4-x)\} = 4, 2x = 2$$

$$\therefore x = 1$$

즉, 앞면이 보이는 카드 1장과 뒷면이 보이는 카드 3장을 뒤집어야 한다.



앞면이 보이는 4장의 카드 중 뒤집을 카드 1장을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

뒷면이 보이는 6장의 카드 중 뒤집을 카드 3장을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4 \times 20}{210} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

답 $\frac{8}{21}$

08

집합 A 의 원소는 4개이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$

집합 A 의 부분집합 16개 중에서 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는

$${}_{16}C_2 = 120$$

택한 두 집합의 합집합과 집합 A 가 서로 같은 집합인 경우는 다음과 같다.

(i) 공통인 원소가 없을 때,

두 집합의 원소의 개수는 각각 0, 4 또는 1, 3 또는

2, 2이므로 이 경우의 수는

$${}_4C_0 \times {}_4C_4 + {}_4C_1 \times {}_3C_3 + {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

$$= 1 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$$

(ii) 공통인 원소가 1개 있을 때,

공통인 원소 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는

각각 0, 3 또는 1, 2이므로 이 경우의 수는

$${}_3C_0 \times {}_3C_3 + {}_3C_1 \times {}_2C_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 = 1 + 3 = 4$$

즉, 공통인 원소가 1개인 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

(iii) 공통인 원소가 2개 있을 때,

공통인 원소 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는

각각 0, 2 또는 1, 1이므로 이 경우의 수는

$${}_2C_0 \times {}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 1 \times 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \\ = 1 + 1 = 2$$

즉, 공통인 원소가 2개인 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(iv) 공통인 원소가 3개 있을 때,

공통인 원소 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

두 집합의 공통인 원소를 제외한 나머지 원소의 개수는

각각 0, 1이므로 이 경우의 수는

$$1$$

즉, 공통인 원소가 3개인 경우의 수는

$$4 \times 1 = 4$$

(i)~(iv)에서 합집합과 집합 A 가 서로 같은 집합인 경우의 수는

$$8 + 16 + 12 + 4 = 40$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

09

주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼내어 일렬로 나열하는 경우는 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 다음과 같다.

(i) 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼낸 경우

꺼낸 4개의 공에 적혀 있는 숫자는 1, 2, 3, 4이므로

4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

(ii) 1이 적혀 있는 공을 두 개 꺼낸 경우

2, 3, 4가 적혀 있는 공에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

1이 적혀 있는 공 2개와 2, 3, 4가 적혀 있는 공 중에서

택한 2개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

즉, 이 경우의 수는

$$3 \times 12 = 36$$

(i), (ii)에서 4개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$24 + 36 = 60$$

한편, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 숫자를 a, b, c, d 라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$ 인 경우의 수는 꺼내는 공에 따라 오직 한 가지씩으로 결정된다.

즉, (i)에서 1가지, (ii)에서 3가지이므로 이 경우의 수는

$$1 + 3 = 4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

보충 설명

5개의 공에서 4개의 공을 택하기만 하면 공에 적혀 있는 숫자에 따라 크기 순서대로 나열할 수 있다. 즉, 택한 4개의 공을 일렬로 나열하였을 때 공에 적혀 있는 숫자의 크기 순서대로 나열하는 경우의 수는 5개의 공에서 4개의 공을 택하는 경우의 수와 같다.

다른 풀이

공에 적혀 있는 숫자 1, 1, 2, 3, 4를 $1_a, 1_b, 2, 3, 4$ 로 생각하면 4개의 공을 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_4 = 120$$

나열된 순서대로 공에 적혀 있는 숫자를 a, b, c, d 라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$ 인 경우의 수를 1이 적혀 있는 공의 개수에 따라 나누어 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수로 구하면 다음과 같다.

(i) 1이 적혀 있는 공을 한 개 꺼낸 경우

$(1_a, 2, 3, 4), (1_b, 2, 3, 4)$ 의 2가지

(ii) 1이 적혀 있는 공을 두 개 꺼낸 경우

$(1_a, 1_b, X, Y), (1_b, 1_a, X, Y)$ 의 2가지이고, 각 경우에 대하여 X, Y 에 들어갈 수를 택하는 경우의 수는 2, 3, 4가 적혀 있는 공 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times {}_3C_2 = 2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2+6}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

10

방정식 $x+2y=30$ 을 만족시키는 두 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 14), (4, 13), (6, 12), \dots, (28, 1)$ ㉠

의 14개이다.

이때 $x=30-2y$ 이므로 $xy \leq 100$ 에서

$$y(30-2y) \leq 100, 2y^2-30y+100 \geq 0$$

$$y^2-15y+50 \geq 0, (y-5)(y-10) \geq 0$$

$$\therefore y \leq 5 \text{ 또는 } y \geq 10$$

㉠에서 $y \leq 5$ 또는 $y \geq 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는

$(28, 1), (26, 2), (24, 3), (22, 4), (20, 5),$

$(10, 10), (8, 11), (6, 12), (4, 13), (2, 14)$

의 10개이므로 구하는 확률은

$$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

답 $\frac{5}{7}$

11

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

직선 $y=x+a$ 와 원 $x^2+y^2=b$ 가 만나려면 연립방정식

$$\begin{cases} y=x+a \\ x^2+y^2=b \end{cases} \text{의 실수인 해가 존재해야 한다.}$$

$y=x+a$ 를 $x^2+y^2=b$ 에 대입하면 $x^2+(x+a)^2=b$ 에서

$$2x^2+2ax+a^2-b=0$$

x 에 대한 이차방정식 $2x^2+2ax+a^2-b=0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - b) = -a^2 + 2b \geq 0 \quad \therefore a^2 \leq 2b$$

부등식 $a^2 \leq 2b$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2),$
 $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)$

의 13개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{36}$ 이다.

답 $\frac{13}{36}$

다른 풀이

직선 $y=x+a$ 와 원 $x^2+y^2=b$

가 만나려면 오른쪽 그림과 같이

원 $x^2+y^2=b$ 의 중심과 직선

$y=x+a$ 사이의 거리가 원의

반지름의 길이인 $\sqrt{b}$ 보다 작거나

같아야 한다.

원 $x^2+y^2=b$ 의 중심인 원점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x+a$, 즉

$x-y+a=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \leq \sqrt{b}$$

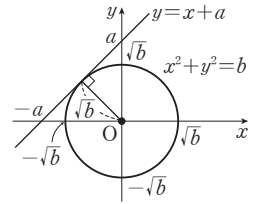
$$|a| \leq \sqrt{2b} \quad \therefore a^2 \leq 2b$$

부등식 $a^2 \leq 2b$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2),$
 $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6)$

의 13개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{13}{36}$ 이다.



12

최근 5번의 경기에서 이 농구 선수가 시도한 2점 슛의 개수를 x , 3점 슛의 개수를 y 라 하자.

2점 슛 점수의 총합이 78점이므로 성공한 2점 슛의 개수는

$$\frac{78}{2} = 39$$

이때 2점 슛의 성공률이 65%이므로

$$\frac{39}{x} = \frac{65}{100} \text{에서 } x=60$$

3점 슛 점수의 총합이 48점이므로 성공한 3점 슛의 개수는

$$\frac{48}{3} = 16$$

이때 3점 슛의 성공률이 40%이므로

$$\frac{16}{y} = \frac{40}{100} \text{에서 } y=40$$

즉, 시도한 전체 슛의 개수는 $60+40=100$

성공한 슛의 개수는 $39+16=55$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$$

답 $\frac{11}{20}$

2 확률의 덧셈정리

기본 + 필수연습

본문 pp.081-086

18 $\frac{1}{30}$	19 $\frac{43}{100}$	20 $\frac{7}{15}$	21 $\frac{9}{10}$
22 (1) $\frac{11}{12}$ (2) $\frac{4}{7}$	23 $\frac{13}{18}$	24 $\frac{1}{9}$	
25 $\frac{2}{3}$	26 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{9}{25}$	28 $\frac{7}{15}$
29 $\frac{1}{4}$	30 $\frac{15}{28}$	31 $\frac{121}{126}$	32 $\frac{99}{128}$
33 $\frac{83}{105}$			

18

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{7}{10} = \frac{1}{30}$$

답 $\frac{1}{30}$

19

3의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A , 7의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{33}{100}, P(B) = \frac{14}{100}$$

$A \cap B$ 는 3과 7의 공배수인 21의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{4}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{33}{100} + \frac{14}{100} - \frac{4}{100} = \frac{43}{100} \end{aligned}$$

답 $\frac{43}{100}$

20

2명 모두 남학생을 뽑는 사건을 A , 2명 모두 여학생을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{15}{45}, P(B) = \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{6}{45}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{15}{45} + \frac{6}{45} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{15}$

21

첫 번째와 마지막 순서 중 적어도 한 곳에 여자 참가자가 배정되는 사건을 A 라 하면 A^C 는 첫 번째와 마지막 순서 모두 남자 참가자가 배정되는 사건이다.

5명의 경연 순서를 정하는 경우의 수는

5!

첫 번째와 마지막 순서 모두 남자 참가자를 배정하는 경우의 수는

$${}_2P_2 \times 3!$$

$$\text{즉, } P(A^C) = \frac{{}_2P_2 \times 3!}{5!} = \frac{1}{10} \text{이므로 구하는 확률은}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^C) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{10}$

22

- (1) $\star P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$ 에서
 $P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cup B^c)$
 $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$
- (2) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로
 $A \cap B = \emptyset$ 에서 $P(A \cap B) = 0$
 $A \cup B = S$ 이므로 $P(A \cup B) = 1$
 즉, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 에서
 $P(A) + P(B) = 1$ ㉠
 $P(A \cup B) = 5P(A) - 2P(B)$ 에서
 $5P(A) - 2P(B) = 1$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $P(A) = \frac{3}{7}, P(B) = \frac{4}{7}$

답 (1) $\frac{11}{12}$ (2) $\frac{4}{7}$

23

- $P(A) : P(B) = 1 : 4$ 에서
 $P(B) = 4P(A)$
 이것을 $P(A)P(B) = \frac{1}{81}$ 에 대입하면
 $4\{P(A)\}^2 = \frac{1}{81}, \{P(A)\}^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{18}\right)^2$
 $\therefore P(A) = \frac{1}{18} (\because 0 \leq P(A) \leq 1)$
 $\therefore P(B) = \frac{2}{9} (\because P(B) = 4P(A))$
 이때 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$
 $\therefore \star P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$
 $= 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

답 $\frac{13}{18}$

24

- $\star P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ 에서
 $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
 $\star P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 에서
 $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B)$
 즉,
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
 $+ P(A^c \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$
 $= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
 이므로
 $P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B^c) - P(A^c \cap B)$
 $= \frac{5}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

25

A를 포함하여 대표를 뽑는 사건을 A, B를 포함하여 대표를 뽑는 사건을 B라 하자.

(i) A를 포함하여 대표를 뽑는 경우

A를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 경우와 같으므로

$$P(A) = \frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{84}{210}$$

(ii) B를 포함하여 대표를 뽑는 경우

B를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 경우와 같으므로

$$P(B) = \frac{{}_9C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{84}{210}$$

(iii) A, B를 모두 포함하여 대표를 뽑는 경우

A, B를 제외한 8명 중에서 2명을 뽑는 경우와 같으므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_8C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{28}{210}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{84}{210} + \frac{84}{210} - \frac{28}{210} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

26

이차방정식 $12x^2 - 7ax + a^2 = 0$ 에서

$$(4x-a)(3x-a)=0$$

$$\therefore x = \frac{a}{4} \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

표본공간을 S , $\frac{a}{4}$ 가 정수인 사건을 A , $\frac{a}{3}$ 가 정수인 사건을 B 라 하면

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}, A = \{a | a \text{는 } 4 \text{의 배수}\},$$

$$B = \{a | a \text{는 } 3 \text{의 배수}\}, A \cap B = \{a | a \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$$

이므로 각각의 확률은

$$P(A) = \frac{10}{40}, P(B) = \frac{13}{40}, P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

이때 이차방정식 $12x^2 - 7ax + a^2 = 0$ 이 정수인 해를 가질 확률은 $P(A \cup B)$ 이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{40} + \frac{13}{40} - \frac{3}{40} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

27

X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 서로 다른 5개의 원소에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

$f(1)=0$ 인 사건을 A , $f(3)=0$ 인 사건을 B 라 하면

$f(1)f(3)=0$ 인 사건은 $A \cup B$, $f(1)=f(3)=0$ 인 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) $f(1)=0$ 일 때,

$f(1)=0$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 서로 다른 5개의 원소에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

(ii) $f(3)=0$ 일 때,

$f(3)=0$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 서로 다른 5개의 원소에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

(iii) $f(1)=f(3)=0$ 일 때,

$f(1)=f(3)=0$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는 집합 Y 의 서로 다른 5개의 원소에서 1개를 택하여 집합 X 의 원소 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1 = 5$$

(i), (ii), (iii)에서 각각의 확률은

$$P(A) = \frac{25}{125}, P(B) = \frac{25}{125}, P(A \cap B) = \frac{5}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{25}{125} + \frac{25}{125} - \frac{5}{125} = \frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

28

두 수의 합이 짝수하려면 두 수 모두 짝수이거나 두 수 모두 홀수이어야 한다.

꺼낸 2개의 공에 모두 짝수가 적혀 있는 사건을 A , 2개의 공에 모두 홀수가 적혀 있는 사건을 B 라 하자.

(i) 꺼낸 2개의 공에 모두 짝수가 적혀 있는 경우

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14가 각각 하나씩 적힌 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우와 같으므로

$$P(A) = \frac{{}_7C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{21}{105}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공에 모두 홀수가 적혀 있는 경우

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15가 각각 하나씩 적힌 8개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우와 같으므로

$$P(B) = \frac{{}_8C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{28}{105}$$

이때 두 사건 A , B 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{21}{105} + \frac{28}{105} = \frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

29

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

두 눈의 수의 합이 4인 사건을 A , 차가 3인 사건을 B 라 하고, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\},$$

$$B = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{6}{36}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{3}{36} + \frac{6}{36} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

30

서로 같은 색의 공 2개를 꺼내는 사건을 A , 서로 같은 숫자가 적힌 공 2개를 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) 서로 같은 색의 공 2개를 꺼내는 경우

흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내거나 검은 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우와 같으므로

$$P(A) = \frac{{}_4C_2}{{}_8C_2} + \frac{{}_4C_2}{{}_8C_2} = \frac{6}{28} + \frac{6}{28} = \frac{12}{28}$$

(ii) 서로 같은 숫자가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우

2가 적힌 흰 공과 검은 공, 3이 적힌 흰 공과 검은 공, 4가 적힌 흰 공과 검은 공을 꺼내는 3가지 경우가 있으므로

$$P(B) = \frac{3}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{12}{28} + \frac{3}{28} = \frac{15}{28}$$

답 $\frac{15}{28}$

31

꺼낸 4개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A 라 하면 A^C 는 꺼낸 4개의 공이 모두 흰 공인 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

$$= 1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

답 $\frac{121}{126}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하지 않고 다음과 같이 풀 수도 있다.

(i) 꺼낸 4개의 공 중에서 검은 공이 1개인 경우

검은 공 4개 중에서 1개, 흰 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우와 같으므로 이때의 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{40}{126}$$

(ii) 꺼낸 4개의 공 중에서 검은 공이 2개인 경우

검은 공 4개 중에서 2개, 흰 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우와 같으므로 이때의 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_2}{{}_9C_4} = \frac{60}{126}$$

(iii) 꺼낸 4개의 공 중에서 검은 공이 3개인 경우

검은 공 4개 중에서 3개, 흰 공 5개 중에서 1개를 꺼내는 경우와 같으므로 이때의 확률은

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_5C_1}{{}_9C_4} = \frac{20}{126}$$

(iv) 꺼낸 4개의 공 중에서 검은 공이 4개인 경우

검은 공 4개 중에서 4개를 꺼내는 경우와 같으므로 이때의 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_9C_4} = \frac{1}{126}$$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$\frac{40}{126} + \frac{60}{126} + \frac{20}{126} + \frac{1}{126} = \frac{121}{126}$$

32

○, ×로 답하는 7개의 문제에 답을 표시하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_7 = 2^7 = 128$$

7문제 중에서 세 문제 이상 맞는 사건을 A 라 하면 A^C 는 모두 틀리거나 한 문제 또는 두 문제만 맞는 사건이다.

(i) 모두 틀리는 경우

이 경우의 수는 1이므로 이때의 확률은

$$\frac{1}{128}$$

(ii) 한 문제만 맞는 경우

7개의 문제 중에서 한 문제를 택하는 경우와 같으므로 이 때의 확률은

$$\frac{{}_7C_1}{128} = \frac{7}{128}$$

(iii) 두 문제만 맞는 경우

7개의 문제 중에서 두 문제를 택하는 경우와 같으므로 이 때의 확률은

$$\frac{{}_7C_2}{128} = \frac{21}{128}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(A^c) = \frac{1}{128} + \frac{7}{128} + \frac{21}{128} = \frac{29}{128}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{29}{128} = \frac{99}{128} \end{aligned}$$

답 $\frac{99}{128}$

33

15개의 점 중에서 서로 다른 2개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2 = 105$

서로 다른 두 점 사이의 거리는 항상 1 이상이므로 서로 다른 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A 라 하면 A^c 는 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

이때 두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는

$$4 \times 3 + 2 \times 5 = 22 \quad \leftarrow \text{가로로 4쌍씩 3줄, 세로로 2쌍씩 5줄}$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{22}{105}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{22}{105} = \frac{83}{105} \end{aligned}$$

답 $\frac{83}{105}$

보충 설명

두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는 길이가 1인 선분을 택하는 경우의 수로 이해할 수 있다.

주어진 그림에서 길이가 1인 선분의 개수를 구해 보자.

가로 방향의 선분에서 길이가 1인 선분은 4개이고 각 경우에 대하여 $y=1, 2, 3$ 의 3가지 경우가 있으므로 가로 방향의 선분의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

세로 방향의 선분에서 길이가 1인 선분은 2개이고 각 경우에 대하여 $x=1, 2, 3, 4, 5$ 의 5가지 경우가 있으므로 세로 방향의 선분의 개수는

$$5 \times 2 = 10$$

따라서 두 점 사이의 거리가 1인 두 점을 택하는 경우의 수는 $12 + 10 = 22$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.087~089

13 ③	14 $\frac{5}{12}$	15 $\frac{2}{5}$	16 $\frac{2}{3}$
17 $\frac{37}{45}$	18 $\frac{16}{105}$	19 $\frac{2}{3}$	20 $\frac{49}{60}$
21 $\frac{11}{36}$	22 $\frac{3}{14}$	23 $\frac{9}{44}$	24 $\frac{1}{70}$
25 $\frac{2}{5}$	26 ⑤	27 $\frac{109}{120}$	28 4
29 $\frac{49}{55}$	30 $\frac{97}{114}$		

13

ㄱ. 두 사건 A, A^c 는 서로 배반사건이므로

$$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(S) = 1 \quad (\text{참})$$

ㄴ. (반례) $S = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ 이면

$$A \cup B = S \text{ 이므로 } P(A \cup B) = 1 \text{ 이지만 } B \neq A^c \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. (반례) $S = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ 이면

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \text{ 이지만 } A \cap B = \{1\} \text{ 이므로}$$

로 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄹ. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

이때 $(A \cup B) \subset S$ 이므로

$$0 \leq P(A \cup B) \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq P(A) + P(B) \leq 1 \quad (\text{참})$$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

14

$P(A \cap B^c) = P((A^c \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cup B)$ 에서

$$\frac{1}{6} = 1 - P(A^c \cup B) \quad \therefore P(A^c \cup B) = \frac{5}{6}$$

이때 두 사건 A^c , B 가 서로 배반사건이므로

$$A^c \cap B = \emptyset \text{에서 } P(A^c \cap B) = 0$$

즉, $P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B)$ 에서

$$\frac{5}{6} = P(A^c) + \frac{1}{4} \quad \therefore P(A^c) = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

다른 풀이

두 사건 A^c , B 가 서로 배반사건이므로

$$A^c \cap B = \emptyset \iff B - A = \emptyset \iff B \subset A$$

즉, $A \cap B = B$ 이므로

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

$$\frac{1}{6} = P(A) - \frac{1}{4} \quad \therefore P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

15

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $P(A^c) = 1 - P(A)$ 이므로 $\frac{2}{5} \leq P(A^c) \leq \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{2}{5} \leq 1 - P(A) \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{5} \leq -P(A) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq P(A) \leq \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$ 이고

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq P(A \cup B) \leq \frac{3}{5} + \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq \frac{17}{20} \text{에서}$$

$$-\frac{17}{20} \leq -P(A \cup B) \leq -\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{20} \leq 1 - P(A \cup B) \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{20} \leq P((A \cup B)^c) \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{3}{20} \leq P(A^c \cap B^c) \leq \frac{1}{4}$$

따라서 $M = \frac{1}{4}$, $m = \frac{3}{20}$ 이므로

$$M + m = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

16

천의 자리에는 0이 올 수 없고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_3 = 5 \times 6^3 = 1080$$

만든 네 자리 자연수가 2의 배수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 하면 네 자리 자연수가 2의 배수 또는 5의 배수인 사건은 $A \cup B$ 이고 2의 배수인 동시에 5의 배수, 즉 10의 배수인 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) 네 자리 자연수가 2의 배수일 때,

천의 자리에는 0이 올 수 없고, 일의 자리에는 0, 2, 4의 3가지 중 하나가 와야 하며 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 2의 배수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_2 \times 3 = 5 \times 6^2 \times 3 = 540$$

$$\therefore P(A) = \frac{540}{1080}$$

(ii) 네 자리 자연수가 5의 배수일 때,

천의 자리에는 0이 올 수 없고, 일의 자리에는 0, 5의 2가지 중 하나가 와야 하며 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 5의 배수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_2 \times 2 = 5 \times 6^2 \times 2 = 360$$

$$\therefore P(B) = \frac{360}{1080}$$

(iii) 네 자리 자연수가 10의 배수일 때,

천의 자리에는 0이 올 수 없고, 일의 자리에는 0이 와야 하며 백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 10의 배수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_2 \times 1 = 5 \times 6^2 \times 1 = 180$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{180}{1080}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{540}{1080} + \frac{360}{1080} - \frac{180}{1080} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

17

10개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

꺼낸 2개의 공의 색깔이 같은 사건을 A, 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 같은 사건을 B라 하면 꺼낸 2개의 공의 색깔이 같거나 공에 적힌 숫자가 같은 사건은 $A \cup B$ 이고 꺼낸 2개의 공의 색깔과 공에 적힌 숫자가 각각 같은 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) 꺼낸 2개의 공의 색깔이 같을 때,

빨간색 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

노란색 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

$$\therefore P(A) = \frac{10+10}{45} = \frac{20}{45}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 같을 때,

숫자 1이 적힌 공 8개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

숫자 2가 적힌 공 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_2C_2 = 1$$

$$\therefore P(B) = \frac{28+1}{45} = \frac{29}{45}$$

(iii) 꺼낸 2개의 공의 색깔과 공에 적힌 숫자가 각각 같을 때, 숫자 1이 적힌 빨간색 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

숫자 1이 적힌 노란색 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{6+6}{45} = \frac{12}{45}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{20}{45} + \frac{29}{45} - \frac{12}{45} = \frac{37}{45}$$

답 $\frac{37}{45}$

18

7명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$7!$$

이때 1학년 학생 2명 사이에 2학년 학생 1명만 서는 사건을 A, 2학년 학생 2명 사이에 1학년 학생 1명만 서는 사건을 B라 하자.

(i) 1학년 학생 2명 사이에 2학년 학생 1명이 설 때,

1학년 학생 2명 사이에 설 2학년 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

이 2학년 학생의 양 옆의 1학년 학생의 위치를 정하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

[1학년 - 2학년 - 1학년]을 한 명으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5!$$

$$\therefore P(A) = \frac{2 \times 2 \times 5!}{7!} = \frac{2}{21}$$

(ii) 2학년 학생 2명 사이에 1학년 학생 1명이 설 때,

(i)과 같은 방법으로

$$P(B) = \frac{2}{21}$$

(iii) 1학년과 2학년 학생 4명이 교대로 설 때,

[1학년 - 2학년 - 1학년 - 2학년] 또는

[2학년 - 1학년 - 2학년 - 1학년]의 2가지 방법으로 설 수 있다.

그 각각에 대하여 1학년 2명, 2학년 2명의 자리를 정하는 경우의 수는

$$2! \times 2!$$

1학년과 2학년 학생 4명을 한 명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 24$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2 \times 2! \times 2! \times 4!}{7!} = \frac{4}{105}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{2}{21} - \frac{4}{105} = \frac{16}{105}$$

답 $\frac{16}{105}$

19

X 에서 Y 로의 일대일함수 f 의 개수는

$${}_6P_4 = 360 \quad \text{정의역 } X \text{의 임의의 두 원소 } x_1, x_2 \text{에 대하여 } x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2) \text{이다.}$$

$f(a) < f(b)$ 인 사건을 A , $f(a) < f(c)$ 인 사건을 B 라 하면 $f(a) < f(b)$ 이거나 $f(a) < f(c)$ 인 사건은 $A \cup B$, $f(a) < f(b)$ 이고 $f(a) < f(c)$, 즉 $f(a) < f(b) < f(c)$ 또는 $f(a) < f(c) < f(b)$ 인 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) $f(a) < f(b)$ 일 때,

$f(a), f(b)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

집합 Y 의 나머지 원소 4개에서 서로 다른 2개를 택하여 정의역의 나머지 원소 c, d 에 하나씩 대응시키는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

$$\therefore P(A) = \frac{15 \times 12}{360} = \frac{180}{360}$$

(ii) $f(a) < f(c)$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로

$$P(B) = \frac{180}{360}$$

(iii) $f(a) < f(b) < f(c)$ 또는 $f(a) < f(c) < f(b)$ 일 때,

$f(a), f(b), f(c)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times 2! = 40 \quad \text{--- } f(b), f(c) \text{의 값을 바꾸는 경우의 수}$$

이때 집합 Y 의 나머지 원소 3개에서 1개를 택하여 정의역의 나머지 원소 d 에 대응시키는 경우의 수는

$$3$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{40 \times 3}{360} = \frac{120}{360}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{180}{360} + \frac{180}{360} - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

20

세 자리 자연수의 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, ..., 9의 9개, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 0, 1, 2, ..., 9의 10개이므로 세 자리 자연수의 개수는

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

이때 $a > b$ 인 사건을 A , $b > c$ 인 사건을 B 라 하면

$a > b$ 또는 $b > c$ 인 사건은 $A \cup B$ 이고 $a > b > c$ 인 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) $a > b$ 일 때,

$a > b$ 를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_2 = 45$$

이때 c 는 10개의 숫자 0, 1, 2, ..., 9에서 하나를 택하면 되므로 이 경우의 수는

$$10$$

$$\therefore P(A) = \frac{45 \times 10}{900} = \frac{450}{900}$$

(ii) $b > c$ 일 때,

$b > c$ 를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{10}C_2 = 45$$

이때 a 는 9개의 숫자 1, 2, 3, ..., 9에서 하나를 택하면 되므로 이 경우의 수는

$$9$$

$$\therefore P(B) = \frac{45 \times 9}{900} = \frac{405}{900}$$

(iii) $a > b > c$ 일 때,

$a > b > c$ 를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 10개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
 ${}_{10}C_3 = 120$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{120}{900}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{450}{900} + \frac{405}{900} - \frac{120}{900} = \frac{49}{60}$$

답 $\frac{49}{60}$

다른 풀이

세 자리 자연수의 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, ..., 9의 9개, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 0, 1, 2, ..., 9의 10개이므로 세 자리 자연수의 개수는 $9 \times 10 \times 10 = 900$

이때 $a > b$ 또는 $b > c$ 인 사건을 A 라 하면 A^C 는 $a \leq b \leq c$ 인 사건이다.

$a \leq b \leq c$ 를 만족시키는 한 자리 자연수 a, b, c 의 순서쌍의 개수는 $1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수와 같다.

이것은 9개의 숫자 1, 2, 3, ..., 9에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_9H_3 = {}_{9+3-1}C_3 = {}_{11}C_3 = 165$$

$$\therefore P(A^C) = \frac{165}{900}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^C) \\ = 1 - \frac{165}{900} = \frac{49}{60}$$

21

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$(a-3)(b-5) > 0$ 에서

$$a-3 > 0, b-5 > 0 \text{ 또는 } a-3 < 0, b-5 < 0$$

$a-3 > 0, b-5 > 0$ 인 사건을 A , $a-3 < 0, b-5 < 0$ 인 사건을 B 라 하고, 두 눈의 수 a, b 를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 $A = \{(4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$,

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{8}{36}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{3}{36} + \frac{8}{36} = \frac{11}{36}$$

답 $\frac{11}{36}$

보충 설명

주사위의 눈의 수는 1부터 6까지의 자연수로 이루어져 있으므로 다음과 같이 표로 나타내면 조건을 만족시키는 경우의 수를 찾기 쉽다.

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	○	○				
2	○	○				
3	○	○				
4	○	○				
5						
6				○	○	○

따라서 $(a-3)(b-5) > 0$ 인 경우의 수는

$$8 + 3 = 11$$

22

방정식 $a+b+c=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

$a=2c$ 인 사건을 A , $c=2b$ 인 사건을 B 라 하면

$$A = \{(0, 6, 0), (2, 3, 1), (4, 0, 2)\},$$

$$B = \{(6, 0, 0), (3, 1, 2), (0, 2, 4)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{28}, P(B) = \frac{3}{28}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{3}{28} + \frac{3}{28} = \frac{3}{14}$$

답 $\frac{3}{14}$

보충 설명

$a=2c$ 인 사건을 A , $c=2b$ 인 사건을 B 라 할 때, 두 사건 A , B 가 서로 배반사건인지 확인해 보자.

두 조건을 동시에 만족시키려면 $a=2c=4b$ 이어야 하므로

$a+b+c=6$ 에 $a=4b$, $c=2b$ 를 대입하면

$$4b+b+2b=6 \quad \therefore 7b=6$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b 의 값은 존재하지 않으므로 두 사건 A , B 는 서로 배반사건이다.

23

12개의 구슬 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{12}C_3=220$$

2와 3이 적힌 구슬은 각각 1개씩 꺼내고 4가 적힌 구슬은 꺼내지 않는 사건을 A , 2가 적힌 구슬을 1개, 3이 적힌 구슬을 2개 꺼내는 사건을 B , 2가 적힌 구슬을 2개, 3이 적힌 구슬을 1개 꺼내는 사건을 C 라 하자.

(i) 2와 3이 적힌 구슬을 각각 1개씩 꺼낼 때,

2와 3이 적힌 구슬을 각각 1개씩 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

1이 적힌 구슬을 1개 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

$$\therefore P(A) = \frac{9 \times 3}{220} = \frac{27}{220}$$

(ii) 2가 적힌 구슬을 1개, 3이 적힌 구슬을 2개 꺼낼 때,

2가 적힌 구슬을 1개 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

3이 적힌 구슬을 2개 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$$\therefore P(B) = \frac{3 \times 3}{220} = \frac{9}{220}$$

(iii) 2가 적힌 구슬을 2개, 3이 적힌 구슬을 1개 꺼낼 때,

(ii)와 같은 방법으로

$$P(C) = \frac{3 \times 3}{220} = \frac{9}{220}$$

이때 세 사건 A , B , C 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{220} + \frac{9}{220} + \frac{9}{220} = \frac{9}{44}$$

답 $\frac{9}{44}$

24

8개의 좌석에 6명이 앉는 경우의 수는

$${}_8P_6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

1열에 2쌍의 부부가 앉는 사건을 A , 2열에 2쌍의 부부가 앉는 사건을 B 라 하자.

(i) 1열에 2쌍의 부부가 앉을 때,

1열에 이웃하여 앉을 2쌍의 부부와 그 자리를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

2열에 남은 1쌍의 부부가 앉을 자리는 다음 그림과 같으

므로 2열에 앉을 자리를 정하는 경우의 수는 3



세 쌍의 부부가 각각 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! \times 2! \times 2! = 8$$

$$\therefore P(A) = \frac{6 \times 3 \times 8}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{140}$$

(ii) 2열에 2쌍의 부부가 앉을 때,

(i)과 같은 방법으로

$$P(B) = \frac{1}{140}$$

이때 두 사건 A , B 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{140} + \frac{1}{140} = \frac{1}{70}$$

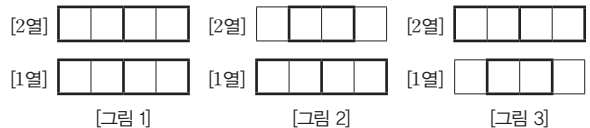
답 $\frac{1}{70}$

다른 풀이

8개의 좌석에 6명이 앉는 경우의 수는

$${}_8P_6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

다음 그림과 같이 같은 열에 이웃하여 앉을 수 있도록 구분된 좌석에 세 쌍의 부부가 앉는 사건을 각각 A , B , C 라 하자.



(i) [그림 1]과 같이 앉을 때,

세 쌍의 부부가 4쌍의 이웃한 좌석 중에서 한 쌍씩 택하여 이웃하여 앉는 경우의 수는

$${}_4P_3 \times 2! \times 2! \times 2! = 24 \times 8$$

$$\therefore P(A) = \frac{24 \times 8}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{105}$$

(ii) [그림 2]와 같이 앉을 때,

세 쌍의 부부가 3쌍의 이웃한 좌석 중에서 한 쌍씩 택하여 이웃하여 앉는 경우의 수는

$${}_3P_3 \times 2! \times 2! \times 2! = 6 \times 8$$

$$\therefore P(B) = \frac{6 \times 8}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{420}$$

(iii) [그림 3]과 같이 앉을 때,

(ii)와 같은 방법으로

$$P(C) = \frac{1}{420}$$

이때 세 사건 A, B, C 는 모두 서로 배반사건이므로 (i), (ii),

(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{105} + \frac{1}{420} + \frac{1}{420} = \frac{1}{70}$$

25

꺼낸 구슬에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 하면 10의 배수인 사건은 $A \cap B$, 10과 서로소인 사건, 즉 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 사건은 $A^c \cap B^c$ 이다.

(i) 꺼낸 구슬에 적힌 수가 2의 배수일 때, (가)

1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수의 개수는

$$100 \div 2 = 50$$

$$\therefore P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

(ii) 꺼낸 구슬에 적힌 수가 5의 배수일 때,

1부터 100까지의 자연수 중에서 5의 배수의 개수는

$$100 \div 5 = 20$$

$$\therefore P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

(iii) 꺼낸 구슬에 적힌 수가 10의 배수일 때,

1부터 100까지의 자연수 중에서 10의 배수의 개수는

$$100 \div 10 = 10$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

(다)

답 $\frac{2}{5}$

단계	채점 기준	배점
(가)	꺼낸 구슬에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 할 때, 구하는 확률의 사건을 A, B 를 이용하여 나타낸 경우	20%
(나)	확률의 덧셈정리를 이용하여 $P(A \cup B)$ 를 구한 경우	40%
(다)	여사건의 확률을 구한 경우	40%

26

7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7!$$

이때 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 짝수가 되는 사건을 A 라 하면 A^c 는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되는 사건이다.

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 카드에 적힌 숫자가 모두 홀수이어야 하므로 그 경우의 수는

$${}_4P_2 \times 5! \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{4개의 홀수 1, 3, 5, 7 중에서 2개를 택하여 양 끝에 놓고} \\ \text{나머지 5개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수} \end{array}$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{{}_4P_2 \times 5!}{7!} = \frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

답 ⑤

27

집합 S 의 원소의 개수는 7이므로 집합 S 의 부분집합의 개수는

$$2^7 = 128$$

이때 원소가 2개 이상인 부분집합은 전체 부분집합에서 공집합과 원소의 개수가 1인 부분집합을 제외시킨 것과 같으므로 집합 S 의 부분집합 중 원소가 2개 이상인 집합의 개수는

$$128 - (1 + 7) = 120$$

공집합 1개 원소의 개수가 1인 부분집합 7개

원소가 2개 이상인 부분집합의 모임 T 에서 임의로 뽑은 집합 하나의 모든 원소의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면 A^C 는 모든 원소의 곱이 홀수인 사건이다.

이때 부분집합의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 집합 S 의 원소 중 홀수인 1, 3, 5, 7 중 2개 이상을 원소로 갖는 부분집합이어야 한다.

즉, 원소가 2개 이상이면서 모든 원소의 곱이 홀수인 집합의 개수는

$$2^4 - (1+4) = 16 - 5 = 11$$

공집합 1 원소의 개수가 1인 집합

$$\therefore P(A^C) = \frac{11}{120}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{11}{120} = \frac{109}{120}$$

답 $\frac{109}{120}$

28

10개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_2$$

뽑은 2개의 제비 중에서 적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A 라 하면 A^C 는 당첨 제비가 하나도 없는 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_{10-k}C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{(10-k)(9-k)}{90}$$

이때 $P(A) = \frac{2}{3}$ 이므로

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } \frac{(10-k)(9-k)}{90} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$(10-k)(9-k) = 30, \quad k^2 - 19k + 60 = 0$$

$$(k-4)(k-15) = 0 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k \leq 8)$$

당첨 제비가 9개 이상이면 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률이 1이다. **답 4**

29

카드에 적힌 두 수의 합을 X 라 하면

$$3 \leq X \leq 21$$

11장의 카드 중에서 2장을 동시에 꺼낼 때, 모든 경우의 수는

$${}_{11}C_2 = 55$$

카드에 적힌 두 수의 합이 7 이상인 사건을 A 라 하면 A^C 는 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 사건이다.

이때 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 경우는 다음과 같다.

(i) $X=3$ 일 때,

1, 2가 나오는 경우이므로 경우의 수는 1

(ii) $X=4$ 일 때,

1, 3이 나오는 경우이므로 경우의 수는 1

(iii) $X=5$ 일 때,

1, 4 또는 2, 3이 나오는 경우이므로 경우의 수는 2

(iv) $X=6$ 일 때,

1, 5 또는 2, 4가 나오는 경우이므로 경우의 수는 2

(i)~(iv)에서 카드에 적힌 두 수의 합이 7 미만인 경우의 수는 $1+1+2+2=6$

$$\therefore P(A^C) = \frac{6}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{6}{55} = \frac{49}{55}$$

답 $\frac{49}{55}$

30

서로 다른 20개에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{20}C_3 = 1140$$

$$7^1=7, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=16807, \dots \text{에서 } 7^n$$

의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복되므로

$$a_1=a_5=a_9=a_{13}=a_{17}=7, \quad a_2=a_6=a_{10}=a_{14}=a_{18}=9,$$

$$a_3=a_7=a_{11}=a_{15}=a_{19}=3, \quad a_4=a_8=a_{12}=a_{16}=a_{20}=1$$

이때 택한 3개의 수의 합이 10보다 큰 사건을 A 라 하면 A^C 는 3개의 수의 합이 10 이하인 사건이고, 3개의 수의 합이

10 이하인 경우는 $1+1+1, 1+1+3,$

$1+1+7, 1+3+3, 3+3+3$ 일 때이다.

(i) $1+1+1$ 또는 $3+3+3$ 일 때,

각 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, 이 경우의 수는

$$10 \times 2 = 20$$

(ii) $1+1+3$ 또는 $1+1+7$ 또는 $1+3+3$ 일 때,
 각 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개, 서로 다른 5개에
 서 1개를 택하는 조합의 수의 곱과 같으므로

$${}_5C_2 \times {}_5C_1 = 10 \times 5 = 50$$

즉, 이 경우의 수는

$$50 \times 3 = 150$$

(i), (ii)에서 3개의 수의 합이 10 이하인 경우의 수는

$$20 + 150 = 170$$

$$\therefore P(A^C) = \frac{170}{1140} = \frac{17}{114}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^C) \\ &= 1 - \frac{17}{114} = \frac{97}{114} \end{aligned}$$

답 $\frac{97}{114}$

STEP 2 개념 마무리

본문 p.090

- | | | | |
|-----------------|------------------|--------------------|-------|
| 1 52 | 2 $\frac{8}{27}$ | 3 $\frac{42}{143}$ | 4 255 |
| 5 $\frac{3}{4}$ | 6 424 | | |

1

$2 < a+b < 5$ 에서 $a+b=3$ 또는 $a+b=4$ 이므로

자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$

$$\therefore A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

이때 사건 A 의 원소 (a, b) 에 대하여 등식 $ab=n+1$, 즉 $n=ab-1$ 을 만족시키는 n 의 값은 다음과 같다.

(i) (a, b) 가 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$ 일 때,

$$ab=2 \text{이므로 } n=2-1=1$$

(ii) (a, b) 가 $(1, 3)$ 또는 $(3, 1)$ 일 때,

$$ab=3 \text{이므로 } n=3-1=2$$

(i), (ii)에서 $n=1$ 또는 $n=2$

두 사건 A, B_n 이 서로 배반사건이 되려면 $A \cap B_n = \emptyset$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n 의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

따라서 구하는 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+5+6+7+8+9+10=52$$

답 52

다른 풀이

$2 < a+b < 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$ 이므로

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

한편, 두 수 a, b 가 등식 $ab=n+1$ 을 만족시키는 사건이

B_n 이므로

$\uparrow ab=2$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b)

$$B_1 = \{(1, 2), (2, 1)\}, B_2 = \{(1, 3), (3, 1)\},$$

$$B_3 = \{(1, 4), (4, 1)\}, B_4 = \{(1, 5), (5, 1)\},$$

$$B_5 = \{(2, 3), (3, 2)\}, B_6 = \emptyset, B_7 = \{(2, 4), (4, 2)\},$$

$$B_8 = \emptyset, B_9 = \{(2, 5), (5, 2)\}, B_{10} = \emptyset$$

따라서 $A \cap B_n = \emptyset$ 인 n 의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이

므로 구하는 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+5+6+7+8+9+10=52$$

2

4명의 학생을 각각의 열에 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

각 열에서 학생들이 물품보관함을 고르는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

즉, 모든 경우의 수는

$$24 \times 81$$

4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 이 순서대로 1열, 2열,

3열, 4열에 학생들을 배열했다고 하자.

학생 A가 1열에서 1번 물품보관함을 배정받았다고 할 때,

2열에서 학생 B가 배정받을 수 있는 물품보관함은 6, 10의

2가지이다. 각 경우에 대하여 3열, 4열에서 학생 C, D가 배

정받을 수 있는 경우의 수는 2가지씩 존재하므로 이 경우의

수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

이때 학생 A가 택할 수 있는 물품보관함의 수는

3

4명의 학생을 각각의 열에 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

즉, 어떤 두 물품보관함도 이웃하지 않게 배정하는 경우의 수는
 $8 \times 3 \times 24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8 \times 3 \times 24}{24 \times 81} = \frac{8}{27}$$

답 $\frac{8}{27}$

3

13개의 좌석 중 네 곳에 4명의 관객이 앉는 경우의 수는

$${}_{13}P_4 = 13 \times 12 \times 11 \times 10$$

4명의 관객을 A, B, C, D라 하고, 이 순서대로 관객이 좌석에 앉았다고 하자. 관객들 양 끝과 사이사이의 빈 자리의 개수를 다음 그림과 같이 각각 a, b, c, d, e 라 하면 4명의 관객이 서로 이웃하지 않게 앉으려면 $b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$ 이어야 한다.

$$a \quad \text{A} \quad b \quad \text{B} \quad c \quad \text{C} \quad d \quad \text{D} \quad e$$

모든 좌석의 개수는 13이고 A, B, C, D가 앉을 좌석의 개수는 4이므로

$$a + b + c + d + e = 9$$

(단, $a \geq 0, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1, e \geq 0$ 인 정수)

이때

$$b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1$$

(b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

이라 하면 $a + b + c + d + e = 9$ 에서

$$a + b' + c' + d' + e = 6$$

방정식 $a + b' + c' + d' + e = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d', e 의 순서쌍 (a, b', c', d', e) 의 개수는 서로 다른 5개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_6 = {}_{5+6-1}C_6 = {}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = 210$$

4명의 관객이 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

즉, 4명의 관객이 어느 누구와도 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$$210 \times 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{210 \times 24}{13 \times 12 \times 11 \times 10} = \frac{42}{143}$$

답 $\frac{42}{143}$

4

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $0 < P(A^c) \leq P(B)$ 에서

$$0 < 1 - P(A) \leq P(B)$$

$$0 < 1 - P(A) \text{에서 } P(A) < 1$$

$$\therefore A \neq S \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$1 - P(A) \leq P(B) \text{에서}$$

$$P(A) + P(B) \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{에서 } P(A) + P(B) = 1$$

즉, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$ 이므로

$$A \cup B = S$$

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $B = A^c$

즉, 사건 A가 정해지면 사건 B가 하나로 정해진다.

표본공간 S의 원소의 개수가 8이므로 사건 A를 정하는 경우의 수는

$$2^8 - 1 = 255 \quad (\because \textcircled{2})$$

답 255

5

방정식 $a + b + c + d = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

$a = 2b$ 인 사건을 A, $c = 2d$ 인 사건을 B라 하면 $a \neq 2b$ 이고 $c \neq 2d$ 인 사건은 $A^c \cap B^c$ 이다.

(i) $a = 2b$ 일 때,

$$a + b + c + d = 6 \text{에서 } 3b + c + d = 6 \text{이므로}$$

① $b = 0$ 일 때,

방정식 $c + d = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d 의 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $(0, 6), (1, 5), \dots, (6, 0)$ 의 7이다. ← 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2H_6 = 7$ 과 같다.

② $b = 1$ 일 때,

방정식 $c + d = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d 의 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 의 4이다. ← 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2H_3 = 4$ 와 같다.

③ $b=2$ 일 때,

방정식 $c+d=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d 의 순서쌍 (c, d) 의 개수는 $(0, 0)$ 의 1이다.

①, ②, ③에서 사건 A 가 일어나는 경우의 수는

$$7+4+1=12$$

(ii) $c=2d$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 12

(iii) $a=2b$ 이고 $c=2d$ 일 때,

$$a+b+c+d=6 \text{에서}$$

$$3b+3d=6 \quad \therefore b+d=2$$

방정식 $b+d=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d 의 순서쌍 (b, d) 의 개수는 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 의 3

이므로 사건 $A \cap B$ 가 일어나는 경우의 수는 3

(i), (ii), (iii)에서 각각의 확률은

$$P(A) = \frac{12}{84}, P(B) = \frac{12}{84}, P(A \cap B) = \frac{3}{84}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{12}{84} + \frac{12}{84} - \frac{3}{84} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

6

6명이 가위바위보를 할 때, 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_6 = 3^6$$

어떤 사람도 이기지 못하는 사건을 A 라 하면 A^c 는 적어도 한 사람이 이기는 사건이다.

6명 중 이기는 n 명을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_n \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, 4, 5)$$

이기는 n 명이 가위, 바위, 보 중 하나를 택하면 지는 $(6-n)$ 명이 택하는 것은 각각 보, 가위, 바위로 정해진다.

이때 이기는 사람이 가위, 바위, 보 중 하나를 택하는 경우의

수는 3이므로 6명이 가위바위보를 했을 때 n 명이 이기는 경우의 수는

$${}_6C_n \times 3$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{({}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5) \times 3}{3^6}$$

$$= \frac{2^6 - 2}{3^5} = \frac{62}{243}$$

따라서 어떤 사람도 이기지 못할 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{62}{243} = \frac{181}{243}$$

즉, $p=243, q=181$ 이므로

$$p+q=243+181=424$$

답 424

다른 풀이

6명이 가위바위보를 할 때, 모든 경우의 수는

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

어떤 사람도 이기지 못하는 사건을 A 라 하면 A^c 는 적어도 한 사람이 이기는 사건이다.

6명이 가위바위보를 할 때, 승자가 나오려면 6명이 가위, 바위, 보 중에서 2개만을 택해야 한다.

가위, 바위, 보 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

가위, 바위가 나오고 승부가 정해졌다고 할 때, 6명이 가위, 바위 중에서 하나를 택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

이때 6명이 모두 가위 또는 바위만을 내는 경우는 제외시켜야 하므로 승부가 정해지는 경우의 수는

$$64 - 2 = 62$$

즉, 6명이 가위바위보를 했을 때 승부가 정해지는 경우의 수는

$$62 \times 3 = 186$$

따라서 적어도 한 사람이 이길 확률은

$$P(A^c) = \frac{186}{729}$$

이므로 어떤 사람도 이기지 못할 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{186}{729} = \frac{181}{243}$$

즉, $p=243, q=181$ 이므로

$$p+q=243+181=424$$

04. 조건부확률

1 조건부확률

기본 + 필수연습

본문 pp.094~100

01 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$	02 $\frac{7}{10}$	03 $\frac{1}{5}$
04 $\frac{14}{55}$	05 $\frac{11}{12}$	06 $\frac{1}{2}$
08 $\frac{5}{8}$	09 $\frac{33}{59}$	10 $\frac{17}{40}$
12 $\frac{35}{66}$	13 0.62	14 $\frac{2}{3}$
16 $\frac{1}{3}$	17 $\frac{5}{32}$	18 $\frac{9}{25}$

01

(1) 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$(2) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$

02

카드에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 15 이하인 사건을 B라 하면

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 20\}, B = \{1, 2, 3, \dots, 15\},$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{10}{20}} = \frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

03

$$P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A|B^c) \text{에서}$$

$$\frac{1}{5} = P(B^c) \times \frac{1}{4} \text{이므로 } P(B^c) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore P(B) = 1 - P(B^c)$$

$$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

04

A가 당첨 제비를 뽑지 않는 사건을 A, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하자.

A가 당첨 제비를 뽑지 않을 확률은

$$P(A) = \frac{7}{11}$$

A가 당첨 제비를 뽑지 않았을 때, B가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(B|A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \leftarrow A가 뽑은 제비를 제외하면 남은 제비 10개 중 당첨제비는 4개이다.$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{7}{11} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{55}$$

답 $\frac{14}{55}$

05

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P((A \cup B)^c)}{P(B^c)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \text{이고}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{29}{40}$$

이므로

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{29}{40} = \frac{11}{40}$$

①에서 구하는 확률은

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P((A \cup B)^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{11}{40}}{\frac{3}{10}} = \frac{11}{12}$$

답 $\frac{11}{12}$

06

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{6} \text{이므로 } P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B^c) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

한편, $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ 에서

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

⑦에서 구하는 확률은

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

07

$$P(A|B) + P(B|A)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= P(A \cap B) \left\{ \frac{1}{P(B)} + \frac{1}{P(A)} \right\}$$

$$= P(A \cap B) \times \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{5}} \right)$$

$$= 9P(A \cap B)$$

$$\text{즉, } 9P(A \cap B) = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{15}$$

답 $\frac{1}{15}$

08

임의로 택한 한 명이 대수를 선택한 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{64}{174}, \quad P(A \cap B) = \frac{40}{174}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{174}}{\frac{64}{174}} = \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

다른 풀이

구하는 확률은 대수를 선택한 전체 학생 중에서 대수를 선택한 여학생을 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{대수를 선택한 여학생의 수})}{(\text{대수를 선택한 전체 학생의 수})} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$$

09

임의로 택한 한 명이 해외를 선택한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{120 \times 0.55 + 80 \times 0.65}{120 + 80} = \frac{118}{200}$$

$$P(A \cap B) = \frac{120 \times 0.55}{120 + 80} = \frac{66}{200}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{66}{200}}{\frac{118}{200}} = \frac{33}{59}$$

답 $\frac{33}{59}$

다른 풀이

설문 조사 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	남학생	여학생	합계
해외	66 120×0.55	52 80×0.65	118
국내	54	28	82
합계	120	80	200

구하는 확률은 해외를 선택한 전체 학생 중에서 해외를 선택한 남학생을 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{해외를 선택한 남학생의 수})}{(\text{해외를 선택한 전체 학생의 수})} = \frac{66}{118} = \frac{33}{59}$$

10

바구니 A를 택하는 사건을 A, 신선한 귤을 꺼내는 사건을 B라 하자.

두 바구니 중에서 바구니 A를 택할 확률은

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

바구니 A에서 신선한 귤을 1개 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{17}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{17}{20} = \frac{17}{40} \end{aligned}$$

답 $\frac{17}{40}$

11

지영이가 미술책을 꺼내는 사건을 A, 대현이가 음악책을 꺼내는 사건을 B라 하면

지영이가 꺼낸 책을 제외하면 남은 책 (n+1)권 중 음악책은 2권이다.

$$P(A) = \frac{n}{n+2}, P(B|A) = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{즉, } \frac{2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{10} \text{ 이므로}$$

$$20n = 3(n+1)(n+2)$$

$$3n^2 - 11n + 6 = 0, (n-3)(3n-2) = 0$$

$$\therefore n = 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 3

12

첫 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 A, 두 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 B라 하자.

p_1 은 첫 번째에 빨간 구슬이, 두 번째에 파란 구슬이 나올 확률이므로

$$p_1 = P(A^c \cap B)$$

이때 첫 번째에 빨간 구슬이 나올 확률은

$$P(A^c) = \frac{7}{12}$$

첫 번째에 빨간 구슬이 나왔을 때, 두 번째에 파란 구슬이 나올 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{5}{11}$$

$$\therefore p_1 = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

또한, p_2 는 첫 번째에 파란 구슬이, 두 번째에 빨간 구슬이 나올 확률이므로

$$p_2 = P(A \cap B^c)$$

이때 첫 번째에 파란 구슬이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

첫 번째에 파란 구슬이 나왔을 때, 두 번째에 빨간 구슬이 나올 확률은

$$P(B^c|A) = \frac{7}{11}$$

$$\therefore p_2 = P(A)P(B^c|A) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$$

$$\therefore p_1 + p_2 = \frac{35}{132} + \frac{35}{132} = \frac{70}{132} = \frac{35}{66}$$

답 $\frac{35}{66}$

다른 풀이

$p_1 + p_2$ 는 첫 번째와 두 번째에 나온 구슬의 색깔이 서로 다를 확률이므로 전체 확률에서 첫 번째와 두 번째에 나온 구슬의 색깔이 서로 같은 확률을 빼서 구할 수도 있다.

첫 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 A, 두 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

첫 번째 두 번째 모두 파란 구슬이 나올 확률

$$= \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c|A^c)$$

첫 번째 두 번째 모두 빨간 구슬이 나올 확률

$$= \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

$$\begin{aligned}\therefore p_1 + p_2 &= 1 - \{P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c)\} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{33} + \frac{7}{22}\right) = \frac{35}{66}\end{aligned}$$

13

이번 시범 경기에서 바람이 부는 사건을 A , 이 양궁 선수가 엑스텐을 맞히는 사건을 B 라 하자.

이번 시범 경기에서 바람이 불고 엑스텐을 맞힐 확률은

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0.3 \times 0.2 = 0.06\end{aligned}$$

이번 시범 경기에서 바람이 불지 않고 엑스텐을 맞힐 확률은

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= 0.7 \times 0.8 = 0.56\end{aligned}$$

이때 두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= 0.06 + 0.56 = 0.62\end{aligned}$$

답 0.62

14

유진이가 학교, 학원, 스터디 카페에 가는 사건을 각각 A , B , C 라 하고, 우산을 두고 오는 사건을 D 라 하자.

(i) 학교에 우산을 두고 왔을 때,

학교에 우산을 두고 올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$P(A \cap D) = \frac{1}{6}$$

(ii) 학원에 우산을 두고 왔을 때,

학교에는 우산을 두고 오지 않고, 학원에 우산을 두고 오는 사건이므로

$$P(B \cap D) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

(iii) 스터디 카페에 우산을 두고 왔을 때,

학교, 학원에는 우산을 두고 오지 않고, 스터디 카페에 우산을 두고 오는 사건이므로

$$P(C \cap D) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{2}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이

유진이가 학교, 학원, 스터디 카페 중 어디에도 우산을 두고 오지 않는 확률은

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}$$

이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

15

주머니 A에서 홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A , 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건을 B 라 하자.

이때 두 수의 곱이 홀수이려면 두 수 모두 홀수이어야 한다.

주머니 A에서 홀수가 적힌 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{2}{4} \times \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \quad \begin{array}{l} \text{홀수가 적힌 4개의 공과 짝수가 적힌 2개의} \\ \text{공 중에서 홀수가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률} \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{6}{15} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

주머니 A에서 짝수가 적힌 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\begin{aligned}P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \left(1 - \frac{2}{4}\right) \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \quad \begin{array}{l} \text{홀수가 적힌 3개의 공과 짝수가 적힌 3개의} \\ \text{공 중에서 홀수가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률} \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

이때 두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{10}$

16

상자 A를 택하는 사건을 A, 검은 공 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \quad \text{상자 A에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \quad \text{상자 B에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

이때 두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

한편, 검은 공 2개를 꺼냈을 때, 상자에 남은 공이 모두 흰 공 이려면 상자 B에서 공을 꺼냈어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

17

용의자의 진술이 진실인 사건을 A, 거짓말 탐지기가 참이라 판단하는 사건을 B라 하자.

진술이 진실이고, 그 문장을 거짓말 탐지기가 참이라 판단할 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{80} \end{aligned}$$

진술이 거짓말이고, 그 문장을 거짓말 탐지기가 참이라 판단 할 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

이때 두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{27}{80} + \frac{1}{16} = \frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{32}$$

답 $\frac{5}{32}$

18

주사위의 눈이 3의 배수인 사건을 A, 꺼낸 공 중에서 단 하나만 검은 공인 사건을 B라 하자.

3의 배수의 눈이 나와서 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{12}{20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

3의 배수의 눈이 나오지 않아서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{8}{15} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

이때 두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{16}{45} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.101~102

01 $\frac{11}{90}$	02 $\frac{2}{3}$	03 ④	04 $\frac{2}{5}$
05 4	06 $\frac{4}{75}$	07 0.834	08 6
09 $\frac{2}{49}$	10 13	11 $\frac{20}{79}$	12 $\frac{2}{5}$

01

$P(A^c) = 1 - P(A)$ 에서

$$P(A^c) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

한편, $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$ 에서

$$\frac{1}{6} = 1 - P(A \cup B) \quad \therefore P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$\therefore P(B|A^c) - P(A^c|B)$

$$= \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} - \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(B \cap A^c) \left\{ \frac{1}{P(A^c)} - \frac{1}{P(B)} \right\}$$

$$= \{P(A \cup B) - P(A)\} \left\{ \frac{1}{P(A^c)} - \frac{1}{P(B)} \right\}$$

$$= \left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5} \right) \times \left(\frac{1}{\frac{1}{5}} - \frac{1}{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= \frac{1}{30} \times \frac{11}{3} = \frac{11}{90}$$

답 $\frac{11}{90}$

02

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

$$= P(A \cup B) + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}$$

$$= P(A \cup B) - \frac{1}{2}$$

$P(A \cup B) = 1$ 일 때, $P(B)$ 가 최대이므로

$$M = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$B \subset A$ 일 때, $P(B)$ 가 최소이므로

$$m = \frac{1}{6} \quad \text{--- } B \subset A \text{이면 } A \cap B = B \text{ 이므로 } P(B) = P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore M + m = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

03

$$\begin{aligned} \neg. P(B|A) + P(B^c|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$\neg. A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이므로

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \quad (\text{참})$$

$\neg. P(A^c|B) = 0$ 에서

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 0 \text{ 이므로}$$

$$P(A^c \cap B) = 0 \quad \therefore A^c \cap B = \emptyset$$

즉, $B \subset A$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.

(거짓)

$\neg. 0 < P(A|B) < P(B|A)$ 에서

$$0 < \frac{P(A \cap B)}{P(B)} < \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$0 < \frac{1}{P(B)} < \frac{1}{P(A)}$$

$$\therefore P(A) < P(B) \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

답 ④

04

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$a > b$ 인 사건을 A , $a \times b$ 가 4의 배수인 사건을 B 라 하자.

$a > b$ 인 순서쌍 (a, b) 는

(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1),
(5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4),
(6, 5)

$$\text{의 15개이므로 } P(A) = \frac{15}{36}$$

또한, $a > b$ 이면서 $a \times b$ 가 4의 배수인 순서쌍 (a, b) 는

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 4)

$$\text{의 6개이므로 } P(A \cap B) = \frac{6}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

05

임의로 택한 한 명이 반려견을 키우는 학생인 사건을 A ,
X 학교 학생인 사건을 B 라 하자.

$$P(A) = \frac{200 \times \frac{22}{100} + 300 \times \frac{x}{100}}{200 + 300} = \frac{44 + 3x}{500},$$

$$P(A \cap B) = \frac{200 \times \frac{22}{100}}{200 + 300} = \frac{11}{125} \text{ 이므로}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{125}}{\frac{44 + 3x}{500}} = \frac{44}{44 + 3x}$$

$$\text{즉, } \frac{44}{44 + 3x} = \frac{11}{14} \text{ 에서}$$

$$44 \times 14 = 11(3x + 44), 56 = 3x + 44$$

$$\therefore x = 4$$

답 4

다른 풀이

주어진 상황을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	X 학교	Y 학교	합계
반려견 ○	$\frac{44}{200 \times \frac{22}{100}}$	$\frac{3x}{300 \times \frac{x}{100}}$	$44 + 3x$
반려견 ×	156	$300 - 3x$	$456 - 3x$
합계	200	300	500

주어진 확률은 반려견을 키우는 전체 학생 중에서 반려견을 키우는 X 학교 학생을 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{반려견을 키우는 X 학교 학생의 수})}{(\text{반려견을 키우는 전체 학생의 수})} = \frac{44}{44 + 3x}$$

$$\text{즉, } \frac{44}{44 + 3x} = \frac{11}{14} \text{ 에서}$$

$$44 \times 14 = 11(3x + 44), 56 = 3x + 44$$

$$\therefore x = 4$$

06

함수 f 가 $f(1)f(4)=4$ 를 만족시키려면

$f(1)=1, f(4)=4$ 또는 $f(1)=2, f(4)=2$ 또는

$f(1)=4, f(4)=1$ 이어야 하므로 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$3 \times {}_5\Pi_3 = 3 \times 5^3 = 3 \times 125 = 375$$

$f(2), f(3), f(5)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나면 된다.

이때 함수 f 중에서 임의로 택한 하나의 함수가 $f(3)=5$ 를 만족시키는 함수인 사건을 A , 일대일대응인 사건을 B 라 하자.

$f(3)=5$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$3 \times {}_5\Pi_2 = 3 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75$$

$f(2), f(5)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나면 된다.

$$\therefore P(A) = \frac{75}{375}$$

함수 f 가 $f(3)=5$ 를 만족시키는 일대일대응이려면

$f(1)=1, f(4)=4$ 또는 $f(1)=4, f(4)=1$ 이어야 하므로

이 경우의 함수 f 의 개수는

$$2 \times {}_2P_2 = 2 \times 2! = 4$$

$f(2), f(5)$ 의 값이 2, 3 중 하나씩이어야 한다.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{375}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{375}}{\frac{75}{375}} = \frac{4}{75}$$

답 $\frac{4}{75}$

07

비가 온 다음 날에 비가 오지 않을 확률은

$$1 - 0.4 = 0.6$$

비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률은

$$1 - 0.9 = 0.1$$

비가 온 날을 ○, 비가 오지 않은 날을 ×라 하고 월요일에 비가 왔을 때, 같은 주 목요일에 비가 오지 않는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

	월	화	수	목
(i)	○	○	○	×
(ii)	○	○	×	×
(iii)	○	×	○	×
(iv)	○	×	×	×

(i) $\bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \times$ 인 경우의 확률은

$$0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.096$$

(ii) $\bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow \times \rightarrow \times$ 인 경우의 확률은

$$0.4 \times 0.6 \times 0.9 = 0.216$$

(iii) $\bigcirc \rightarrow \times \rightarrow \bigcirc \rightarrow \times$ 인 경우의 확률은

$$0.6 \times 0.1 \times 0.6 = 0.036$$

(iv) $\bigcirc \rightarrow \times \rightarrow \times \rightarrow \times$ 인 경우의 확률은

$$0.6 \times 0.9 \times 0.9 = 0.486$$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$0.096 + 0.216 + 0.036 + 0.486 = 0.834$$

답 0.834

보충 설명

월요일, 화요일, 수요일, 목요일에 비가 오는 사건을 각각 A , B , C , D 라 하면

(i)은 사건 $A \cap B \cap C \cap D^c$,

(ii)는 사건 $A \cap B \cap C^c \cap D^c$,

(iii)은 사건 $A \cap B^c \cap C \cap D^c$,

(iv)는 사건 $A \cap B^c \cap C^c \cap D^c$

이고, 각 사건은 배반사건이다.

08

A가 ♥가 그려진 카드를 꺼내는 사건을 A , B가 ♥가 그려진 카드를 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) A, B가 모두 ♥가 그려진 카드를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{5}{n+5} \times \frac{4}{n+4} \quad \begin{array}{l} \text{♥가 그려진 카드 4장과 ♠가 그려진} \\ \text{카드 } n \text{장 중에서 ♥가 그려진 카드를} \\ \text{뽑을 확률} \end{array} \\ &= \frac{20}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

(ii) A, B가 모두 ♠가 그려진 카드를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c|A^c) \\ &= \frac{n}{n+5} \times \frac{n-1}{n+4} \quad \begin{array}{l} \text{♥가 그려진 카드 5장과 ♠가 그려진} \\ \text{카드 } (n-1) \text{장 중에서 ♠가 그려진} \\ \text{카드를 뽑을 확률} \end{array} \\ &= \frac{n^2-n}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 A와 B가 꺼낸 카드의 모양이 같을 확률은

$$\frac{20}{(n+5)(n+4)} + \frac{n^2-n}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2-n+20}{(n+5)(n+4)}$$

$$\text{즉, } \frac{n^2-n+20}{(n+5)(n+4)} = \frac{5}{11} \text{ 이므로}$$

$$11n^2 - 11n + 220 = 5n^2 + 45n + 100$$

$$3n^2 - 28n + 60 = 0, (n-6)(3n-10) = 0$$

$$\therefore n = 6 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 6

09

흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 상자에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 같은 색인 사건을 A , 주어진 시행 후 8개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 꺼낸 3개의 공이 모두 흰색인 사건을 B 라 하자.

$$\text{이때 } P(A) = \frac{{}_3C_2 + {}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{3+6}{21} = \frac{3}{7} \text{ 이므로}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

(i) 처음 상자에서 꺼낸 2개의 공이 같은 색일 때,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{{}_4C_3}{{}_8C_3} \quad \begin{array}{l} \text{흰 공 4개와 검은 공 4개에서} \\ \text{흰 공 3개를 꺼낼 확률} \end{array} \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{1}{14} = \frac{3}{98} \end{aligned}$$

(ii) 처음 상자에서 꺼낸 2개의 공이 다른 색일 때,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{{}_3C_3}{{}_8C_3} \quad \begin{array}{l} \text{흰 공 3개와 검은 공 5개에서} \\ \text{흰 공 3개를 꺼낼 확률} \end{array} \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{56} = \frac{1}{98} \end{aligned}$$

두 사건 $A \cap B$, $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{3}{98} + \frac{1}{98} = \frac{2}{49} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{49}$

10

C가 가위, 바위, 보를 내는 사건을 각각 A , B , C 라 하고, C가 혼자 이기는 사건을 D 라 하자.

(i) C가 가위를 내어 혼자 이겼을 때,

A, B는 모두 보를 내야 하므로

$$P(A \cap D) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{144}$$

(ii) C가 바위를 내어 혼자 이겼을 때,
A, B는 모두 가위를 내야 하므로

$$P(B \cap D) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

(iii) C가 보를 내어 혼자 이겼을 때,
A, B는 모두 바위를 내야 하므로

$$P(C \cap D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 C가 혼자 이길 확률은

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ = \frac{1}{144} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} = \frac{1}{8}$$

따라서 C가 혼자 이겼을 때, C가 보를 냈을 확률은

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{8}} = \frac{4}{9}$$

즉, $p=9$, $q=4$ 이므로

$$p+q=9+4=13$$

답 13

11

K 자동차 중에서 임의로 택한 한 대가 전기차인 사건을 D ,
A 공장에서 생산한 차인 사건을 A , B 공장에서 생산한 차인 사건을 B , C 공장에서 생산한 차인 사건을 C 라 하면

$$P(A) = \frac{40}{100}, P(B) = \frac{25}{100}, P(C) = \frac{35}{100}$$

(i) 임의로 택한 자동차가 A 공장에서 생산된 전기차일 확률은

$$P(A \cap D) = P(A)P(D|A) \\ = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{3}{25}$$

(ii) 임의로 택한 자동차가 B 공장에서 생산된 전기차일 확률은

$$P(B \cap D) = P(B)P(D|B) \\ = \frac{25}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{1}{10}$$

(iii) 임의로 택한 자동차가 C 공장에서 생산된 전기차일 확률은

$$P(C \cap D) = P(C)P(D|C) \\ = \frac{35}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{7}{40}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ = \frac{3}{25} + \frac{1}{10} + \frac{7}{40} = \frac{79}{200}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{79}{200}} = \frac{20}{79}$$

답 $\frac{20}{79}$

12

꺼낸 1개의 쿠폰이 당첨 쿠폰인 사건을 C , 주머니 A에서 꺼낸 쿠폰인 사건을 A , 주머니 B에서 꺼낸 쿠폰인 사건을 B 라 하자.

두 개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 하나도 나오지 않으면 주머니 A에서 쿠폰 1개를 꺼내므로

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow (\text{뒷면, 뒷면})이 나올 확률$$

이때 사건 B 는 사건 A 의 여사건이므로

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

한편, 주머니 A에는 당첨 쿠폰이 4개, 비당첨 쿠폰이 2개 들어 있으므로 주머니 A에서 쿠폰을 꺼냈을 때, 그 쿠폰이 당첨 쿠폰일 확률은

$$P(C|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

주머니 B에는 당첨 쿠폰이 2개, 비당첨 쿠폰이 4개 들어 있으므로 주머니 B에서 쿠폰을 꺼냈을 때, 그 쿠폰이 당첨 쿠폰일 확률은

$$P(C|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

이때

$$P(A \cap C) = P(A)P(C|A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

주머니 A에서 쿠폰을 꺼내고, 그 쿠폰이 당첨 쿠폰일 확률

$$P(B \cap C) = P(B)P(C|B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

주머니 B에서 쿠폰을 꺼내고, 그 쿠폰이 당첨 쿠폰일 확률

이고, 두 사건 A , B 는 서로 배반사건이므로

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

2 사건의 독립과 종속

기본 + 필수연습

본문 pp.107~113

19 (1) 종속 (2) 독립

20 (1) 독립 (2) 독립

21 (1) 0.7 (2) 0.42 (3) 0.28

22 $\frac{16}{625}$

23 (1) $\frac{3}{40}$ (2) $\frac{1}{6}$

24 $\frac{3}{8}$

25 $\frac{1}{4}$

26 $\frac{14}{25}$

27 (1) $\frac{13}{256}$ (2) $\frac{15}{16}$

28 $\frac{11}{27}$

29 $\frac{16}{81}$

30 $\frac{67}{240}$

31 $\frac{40}{81}$

32 $\frac{13}{729}$

33 $\frac{432}{625}$

19

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간을 S 는
 $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

이고,

$A = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$,

$B = \{HTH, HTT, TTH, TTT\}$,

$C = \{HHH, TTT\}$

이므로

$$P(A) = \frac{7}{8}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{4}$$

(1) $A \cap B = \{HTH, HTT, TTH\}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\text{이때 } P(A)P(B) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A 와 B 는 서로 종속이다.

(2) $B \cap C = \{TTT\}$ 이므로

$$P(B \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$\text{이때 } P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

따라서 두 사건 B 와 C 는 서로 독립이다.

답 (1) 종속 (2) 독립

20

$$(1) P(A)P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이다.

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{11}{15} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$\text{이때 } P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이다.

답 (1) 독립 (2) 독립

21

(1) 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c|B) = P(A^c)$$

$$= 1 - 0.3 = 0.7$$

(2) 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$= (1 - 0.3) \times 0.6$$

$$= 0.7 \times 0.6 = 0.42$$

(3) 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$= (1 - 0.3) \times (1 - 0.6)$$

$$= 0.7 \times 0.4 = 0.28$$

답 (1) 0.7 (2) 0.42 (3) 0.28

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 (3) P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\
 &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
 &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\} \\
 &= 1 - (0.3 + 0.6 - 0.3 \times 0.6) \\
 &= 1 - 0.9 + 0.18 = 0.28
 \end{aligned}$$

22

4개의 문제에 임의로 답할 때, 3문제를 맞힐 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{16}{625}$$

문제를 맞지 못할 확률은 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

답 $\frac{16}{625}$

23

(1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A|B) = \frac{3}{8} \\
 \text{또한, } P(A \cap B) &= P(A)P(B) \text{ 이므로} \\
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ 에서} \\
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\
 \frac{1}{2} &= \frac{3}{8} + P(B) - \frac{3}{8}P(B) \\
 \frac{5}{8}P(B) &= \frac{1}{8} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{5} \\
 \therefore P(A \cap B) &= P(A)P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}
 \end{aligned}$$

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
 \text{이때 } P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \text{ 에서} \\
 P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A)P(B) \\
 \frac{1}{6} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}P(B), \quad \frac{1}{5}P(B) = \frac{1}{30} \\
 \therefore P(B) &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{3}{40}$ (2) $\frac{1}{6}$

24

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) &= \{P(A) - P(A \cap B)\} + \{P(B) - P(A \cap B)\} \\
 &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \\
 &= P(A) + P(B) - 2P(A)P(B) \quad (\because \textcircled{7}) \\
 &= \frac{1}{10} + P(B) - 2 \times \frac{1}{10} \times P(B) \\
 &= \frac{1}{10} + \frac{4}{5}P(B)
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{10} + \frac{4}{5}P(B) = \frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$\frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

다른 풀이

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A와 B^c, A^c와 B도

각각 서로 독립이다. 즉,

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = P(A)\{1 - P(B)\}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \{1 - P(A)\}P(B)$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{1}{10}, \quad P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{2}{5} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{10}\{1 - P(B)\} + \frac{9}{10}P(B) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{8}$$

25

A, B가 한 발 쏘아 10점을 맞추는 사건을 각각 A, B라 하면

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ 에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{5}P(B)$$

$$\frac{2}{5}P(B) = \frac{3}{10} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

26

두 주머니 A, B에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A^c) = \frac{4}{5}, P(B^c) = \frac{3}{5}$$

두 수의 합이 짝수일 확률은 다음과 같다.

(i) 두 주머니에서 모두 짝수가 적힌 공을 꺼내는 경우

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

(ii) 두 주머니에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼내는 경우

두 주머니 A, B에서 홀수가 적힌 공을 꺼내는 사건은 각각 A^c , B^c 이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A^c , B^c 도 서로 독립이다. 즉,

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2}{25} + \frac{12}{25} = \frac{14}{25}$$

답 $\frac{14}{25}$

27

(1) 서로 다른 2개의 동전을 한 번 던질 때, 두 동전 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(i) 두 동전 모두 앞면인 경우가 3번 나올 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}$$

(ii) 두 동전 모두 앞면인 경우가 4번 나올 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{256}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256}$$

(2) 서로 다른 2개의 동전을 한 번 던질 때, 서로 다른 면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \quad \text{— (앞, 뒤), (뒤, 앞)}$$

이므로 서로 다른 2개의 동전을 4번 던질 때, 모두 서로 같은 면이 나올 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

답 (1) $\frac{13}{256}$ (2) $\frac{15}{16}$

28

한 개의 주사위를 4번 던져 나온 눈의 수를 모두 곱하여 9의 배수가 되려면 4번 중 적어도 두 번은 3의 배수의 눈이 나와야 한다.

또한, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) 3의 배수의 눈이 1번도 나오지 않을 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

(ii) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{16}{81} + \frac{32}{81}\right) = \frac{11}{27}$$

답 $\frac{11}{27}$

29

5번째 게임에서 건우가 승리하려면 건우는 4번째 게임까지 2번 이기고, 5번째 게임에서 이겨야 한다.

건우가 4번째 게임까지 2번 이길 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

이때 5번째 게임에서 건우가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{8}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

답 $\frac{16}{81}$

30

주머니에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$$

이므로 서로 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

또한, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(i) 서로 다른 색의 공을 꺼낸 경우

주사위를 4번 던질 때, 짝수의 눈이 3번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{8}{15} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{8}{15} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15}$$

(ii) 서로 같은 색의 공을 꺼낸 경우

주사위를 5번 던질 때, 짝수의 눈이 3번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{7}{15} \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{15} \times \frac{5}{16} = \frac{7}{48}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2}{15} + \frac{7}{48} = \frac{67}{240}$$

답 $\frac{67}{240}$

31

서로 다른 두 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타낼 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4 이하인 경우는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)

의 6가지이므로 서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 4 이하일 확률은

$$\frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

즉, 나온 두 눈의 수의 합이 5 이상일 확률은

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(i) 나온 두 눈의 수의 합이 4 이하인 경우

윳가락을 3번 던져 평평한 면이 나오는 횟수가 등근 면이 나오는 횟수보다 많으려면 등근 면이 0회 또는 1회 나와야 한다.

① 등근 면이 0회, 평평한 면이 3회 나올 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

② 등근 면이 1회, 평평한 면이 2회 나올 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

①, ②에서 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{8}{27} + \frac{4}{9}\right) = \frac{10}{81}$$

(ii) 나온 두 눈의 수의 합이 5 이상인 경우

윳가락을 2번 던져 평평한 면이 나오는 횟수가 등근 면이 나오는 횟수보다 많으려면 등근 면이 0회, 평평한 면이 2회 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{5}{6} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{10}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{10}{81} + \frac{10}{27} = \frac{40}{81}$$

답 $\frac{40}{81}$

32

주사위를 6번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x 라 하면 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $6-x$ 이다.

이때 점 P가 3 이상의 위치에 있어야 하므로

$$x - 2(6-x) \geq 3 \text{에서}$$

$$3x - 12 \geq 3, 3x \geq 15 \quad \therefore x \geq 5$$

또한, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올

확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) 3의 배수의 눈이 5번 나올 확률은

$${}_6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{243}$$

(ii) 3의 배수의 눈이 6번 나올 확률은

$${}_6C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{243} + \frac{1}{729} = \frac{13}{729}$$

답 $\frac{13}{729}$

두 공의 색이 서로 같으려면 모두 흰 공이거나 모두 검은 공이어야 하므로 두 공의 색이 서로 같을 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$$

즉, 두 공이 서로 다른 색일 확률은

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

한편, 4번의 시행에서 같은 색의 공을 꺼낸 횟수를 k 라 하면 점 P 의 좌표는 $(k, 4-k)$ 이다.

이 점이 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 내부에 있으려면 $k=1$ 또는 $k=2$ 이어야 하므로

$P(1, 3)$ 또는 $P(2, 2) \text{ } - (*)$

(i) $P(1, 3)$ 인 경우

원점에 있던 점 P 가 x 축의 양의 방향으로 1만큼, y 축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동해야 하므로 4번의 시행 중 두 공의 색이 서로 같은 사건은 1번 일어나야 한다.

즉, 이 경우의 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$$

(ii) $P(2, 2)$ 인 경우

원점에 있던 점 P 가 x 축의 양의 방향으로 2만큼, y 축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동해야 하므로 4번의 시행 중 두 공의 색이 서로 같은 사건은 2번 일어나야 한다.

즉, 이 경우의 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{216}{625} + \frac{216}{625} = \frac{432}{625}$$

답 $\frac{432}{625}$

보충 설명

(*)에서 점 $P(k, 4-k)$ 가 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 내부에 있으려면 점 $P(k, 4-k)$ 와 원의 중심 $(1, 2)$ 사이의 거리가 2보다 작아야 한다.

즉, $\sqrt{(k-1)^2 + (2-k)^2} \leq 2$ 에서 $(k-1)^2 + (2-k)^2 \leq 4$ 이때 k 는 0 이상 4 이하의 정수이므로 위의 부등식을 만족시키는 경우는

$k=1$ 또는 $k=2$

따라서 $P(1, 3)$ 또는 $P(2, 2)$ 이다.

13 ②	14 ④	15 $\frac{5}{8}$	16 $\frac{31}{45}$
17 $\frac{39}{64}$	18 ⑤	19 $\frac{7}{18}$	20 $\frac{8}{25}$
21 $\frac{53}{512}$	22 $\frac{17}{81}$	23 7	24 $\frac{4}{27}$
25 $\frac{7}{16}$	26 $\frac{3}{4}$	27 $\frac{15}{64}$	28 $\frac{52}{243}$

13

$A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{4, 8, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 6\}$

이므로

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{3}$$

ㄱ. $A \cap B = \{12\}$ 이므로 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

$$\text{ㄴ. } A \cap C = \{3, 6\} \text{에서 } P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$\text{이때 } P(A)P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$$

즉, 두 사건 A 와 C 는 서로 종속이다. (참)

$$\text{ㄷ. } B \cap C = \emptyset \text{에서 } P(B \cap C) = 0$$

$$\text{이때 } P(B)P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$$

즉, 두 사건 B 와 C 는 서로 종속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

14

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{1}{4} = P(B) - \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{2} = P(A) \times \frac{3}{4} \quad \therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

답 ④

다른 풀이

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A^C, B 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(A^C)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

따라서 $P(A)P(B) = P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ 에서

$$P(A) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad \therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

15

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

또한, $P(B|A) = 2P(A|B)$ 에서

$$P(B) = 2P(A) \quad \dots\dots\textcircled{8}$$

한편,

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= 2P(A) - 2\{P(A)\}^2 \quad (\because \textcircled{8}) \end{aligned}$$

이므로

$$2P(A) - 2\{P(A)\}^2 = \frac{3}{8}$$

$$16\{P(A)\}^2 - 16P(A) + 3 = 0$$

$$\{4P(A) - 3\}\{4P(A) - 1\} = 0$$

$\textcircled{8}$ 에서 $P(B) = 2P(A) \leq 1$, 즉 $P(A) \leq \frac{1}{2}$ 이어야 하므로

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{8}$

16

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A) = P(A|B) = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 A 와 B^C , A^C 와 B , A^C 와 B^C 도 모두 서로 독립이다.

즉, $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) = P(A^C \cap B^C) + \frac{1}{5}$ 에서

$$P(A)P(B^C) + P(A^C)P(B) = P(A^C)P(B^C) + \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3}\{1 - P(B)\} + \frac{2}{3}P(B) = \frac{2}{3}\{1 - P(B)\} + \frac{1}{5} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(B) + \frac{2}{3}P(B) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(B) + \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(B) = \frac{8}{15}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{15} - \frac{8}{45} = \frac{31}{45} \end{aligned}$$

답 $\frac{31}{45}$

17

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 A, B^C 도 서로 독립이다.

즉, $P(A|B^C) + P(B^C|A) = \frac{3}{4}$ 에서

$$P(A) + P(B^C) = \frac{3}{4} \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이때

$$\begin{aligned} P(A \cup B^C) &= P(A) + P(B^C) - P(A \cap B^C) \quad -(*) \\ &= P(A) + P(B^C) - P(A)P(B^C) \\ &= \frac{3}{4} - P(A)P(B^C) \quad (\because \textcircled{7}) \end{aligned}$$

이므로 $P(A)P(B^C)$ 가 최대이면 $P(A \cup B^C)$ 는 최소이다.

한편, $P(A) > 0, P(B^C) > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$P(A) + P(B^C) \geq 2\sqrt{P(A)P(B^C)}$$

$$\frac{3}{4} \geq 2\sqrt{P(A)P(B^c)} \quad (\because \textcircled{9})$$

$$\therefore P(A)P(B^c) \leq \frac{9}{64}$$

(단, 등호는 $P(A)=P(B^c)=\frac{3}{8}$ 일 때 성립)

따라서 $P(A)P(B^c)$ 의 최댓값이 $\frac{9}{64}$ 이므로

$P(A \cup B^c)$ 의 최솟값은

$$\frac{3}{4} - \frac{9}{64} = \frac{39}{64}$$

답 $\frac{39}{64}$

다른 풀이

(*)에서

$$\begin{aligned} P(A \cup B^c) &= P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ &= P(A) + P(B^c) - P(A)P(B^c) \\ &= \frac{3}{4} - P(A) \left\{ \frac{3}{4} - P(A) \right\} \quad (\because \textcircled{9}) \\ &= \{P(A)\}^2 - \frac{3}{4}P(A) + \frac{3}{4} \\ &= \left\{ P(A) - \frac{3}{8} \right\}^2 + \frac{39}{64} \quad \dots\dots\textcircled{10} \end{aligned}$$

이때 $0 < P(A) \leq 1$ 이므로 $\textcircled{10}$ 은 $P(A)=\frac{3}{8}$ 일 때 최솟값

$\frac{39}{64}$ 를 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{39}{64}$ 이다.

18 본문 p.104 한 걸음 더 참고

ㄱ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

이때 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 이므로 $P(A \cap B) \neq 0$

즉, $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄴ. 사건 A 와 그 여사건 A^c 는 서로 배반사건이므로

$$A \cap A^c = \emptyset \quad \therefore P(A \cap A^c) = 0$$

이때 $0 < P(A) < 1$ 에서 $0 < P(A^c) < 1$ 이므로

$$P(A)P(A^c) \neq 0$$

$$\therefore P(A \cap A^c) \neq P(A)P(A^c)$$

즉, 사건 A 와 그 여사건 A^c 는 서로 종속이다. (참)

ㄷ. $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)$$

이때 $0 < P(B) < 1$ 이므로

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A, B 는 서로 종속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

19

4개의 스위치 a, b, c, d 가 닫히는 사건을 각각 A, B, C, D 라 하면 P 에서 Q 로 전류가 흐르는 사건은

$(A \cap B \cap D) \cup (C \cap D)$ 이다.

이때 네 사건 A, B, C, D 는 각각 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{2}{3}$$

이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P((A \cap B \cap D) \cup (C \cap D)) \\ &= P(A \cap B \cap D) + P(C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D) \\ &= P(A)P(B)P(D) + P(C)P(D) \\ &\quad - P(A)P(B)P(C)P(D) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{18}$

20

화영이가 1학기 수행평가에서 A, B, C 를 받는 사건을 각각 A, B, C 라 하고, 2학기 수행평가에서 A, B, C 를 받는 사건을 각각 A', B', C' 이라 하면 각 사건에 대한 확률은

$$P(A) = P(A') = \frac{1}{5}, P(B) = P(B') = \frac{2}{5},$$

$$P(C) = P(C') = \frac{2}{5}$$

이때 화영이의 수행평가 점수가 85점이 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 1학기에 A, 2학기에 C를 받는 경우

두 사건 A, C'은 서로 독립이므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap C') &= P(A)P(C') \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

(ii) 1학기에 B, 2학기에 B를 받는 경우

두 사건 B, B'은 서로 독립이므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} P(B \cap B') &= P(B)P(B') \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

(iii) 1학기에 C, 2학기에 A를 받는 경우

두 사건 C, A'은 서로 독립이므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} P(C \cap A') &= P(C)P(A') \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 각 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$$

답 $\frac{8}{25}$

21

월요일부터 금요일까지 총 5장의 행운권을 받는다.

(i) 행운권이 3장 당첨될 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{4^5}$$

(ii) 행운권이 4장 당첨될 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{15}{4^5}$$

(iii) 행운권이 5장 당첨될 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^5}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{90}{4^5} + \frac{15}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{106}{4^5} = \frac{53}{512}$$

답 $\frac{53}{512}$

22

(i) 3번째 게임을 마친 후 A가 상금을 가질 때,

A가 3번 연속으로 이겨야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

(ii) 4번째 게임을 마친 후 A가 상금을 가질 때,

3번째 게임까지 A가 2번, B가 1번 이기고 마지막 게임

에서 A가 이겨야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

(iii) 5번째 게임을 마친 후 A가 상금을 가질 때,

4번째 게임까지 A가 2번, B가 2번 이기고 마지막 게임

에서 A가 이겨야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$$

답 $\frac{17}{81}$

23

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\begin{aligned} &\leftarrow \text{6의 약수: 1, 2, 3, 6} \\ \frac{4}{6} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

주사위를 한 번 던질 때, 소수의 눈이 나올 확률은

$$\begin{aligned} &\leftarrow \text{소수: 2, 3, 5} \\ \frac{3}{6} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

한편, 두 수 a, b는 $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 3$ 인 정수이므로

$a - b = 2$ 를 만족시키는 a, b의 값은

$a = 2$, $b = 0$ 또는 $a = 3$, $b = 1$

(i) $a = 2$, $b = 0$ 인 경우

A가 주사위를 3번 던져서 6의 약수의 눈이 2번 나오고,

B가 주사위를 3번 던져서 소수의 눈이 나오지 않아야 하

므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(ii) $a = 3$, $b = 1$ 인 경우

A가 주사위를 3번 던져서 6의 약수의 눈이 3번 나오고,

B가 주사위를 3번 던져서 소수의 눈이 1번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 \times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{27} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

따라서 $p=6$, $q=1$ 이므로

$$p+q=6+1=7$$

답 7

24

한 번의 시행에서 A가 쿠폰을 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, B가 쿠폰을 받을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

A, B가 이 순서대로 번갈아가며 게임을 할 때, B가 주사위를 세 번 던져서 이기려면 다섯 번째 순서까지 A는 0개 또는 1개의 쿠폰을, B는 한 개의 쿠폰을 받고, 여섯 번째 순서에 B가 두 번째 쿠폰을 받아야 한다.

이때 A가 받은 쿠폰의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) A가 받은 쿠폰의 개수가 0인 경우

A는 한 개의 동전을 세 번 던져 세 번 모두 뒷면이 나와야 하고 B는 한 개의 주사위를 두 번 던져 한 번은 4 이하의 눈이, 한 번은 5 이상의 눈이 나와야 한다.

또한, 마지막에 B가 던진 주사위는 4 이하의 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$$

(ii) A가 받은 쿠폰의 개수가 1인 경우

A는 한 개의 동전을 세 번 던져 앞면이 한 번, 뒷면이 두 번 나와야 하고 B는 한 개의 주사위를 두 번 던져 한 번은 4 이하의 눈이, 한 번은 5 이상의 눈이 나와야 한다.

또한, 마지막에 B가 던진 주사위는 4 이하의 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

답 $\frac{4}{27}$

25

한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$$

이때 주어진 시행을 3번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

즉, 카드를 1번 또는 3번 뒤집어야 한다.

(i) 카드를 1번 뒤집는 경우

3번의 시행 중에서 앞면이 나오는 횟수가 2인 경우가 1번 이어야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

(ii) 카드를 3번 뒤집는 경우

3번의 시행 중에서 앞면이 나오는 횟수가 2인 경우가 3번 이어야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{16}$$

답 $\frac{7}{16}$

26

$ab=6$ 인 사건을 A, $a=3$ 인 사건을 B라 하자.

이때 두 수 a , b 는 $1 \leq a \leq 5$, $0 \leq b \leq 3$ 인 정수이므로 $ab=6$ 을 만족시키는 a , b 의 값은

$a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$

(i) $a=2, b=3$ 인 경우

주머니에서 2가 적힌 공을 꺼내고, 동전 3개를 동시에 던져 나온 앞면의 개수가 3이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{5} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$$

(ii) $a=3, b=2$ 인 경우

주머니에서 3이 적힌 공을 꺼내고, 동전 3개를 동시에 던져 나온 앞면의 개수가 2이어야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{5} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{40}$$

(i), (ii)에서 $ab=6$ 인 확률은

$$P(A) = \frac{1}{40} + \frac{3}{40} = \frac{1}{10}$$

이때 $ab=6, a=3$ 인 경우는 (ii)이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{10}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

27

동전을 6번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 a 라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $6-a$ 이다.

$X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_6 = 2$ 이어야 하므로

$a - (6-a) = 2$ 에서

$$2a - 6 = 2 \quad \therefore a = 4$$

또한, 한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \text{이다.}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

답 $\frac{15}{64}$

28

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

조건 (㉠)에서 가능한 n 의 값은 2, 3, 4이고 조건 (㉡)에서 3의 배수의 눈은 연속해서 나오지 않으므로 $n=2$ 또는 $n=3$ 의 경우만 확인하면 된다.

(i) $n=2$ 인 경우

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오면

○, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 ×로 나타내보자.

$n=2$ 일 때 가능한 경우는 ○×○××, ○××○×,

○×××○, ×○×○×, ×○××○, ××○×○

의 6가지이므로 이 경우의 확률은

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{48}{243}$$

(ii) $n=3$ 인 경우

한 개의 주사위를 5번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오면

○, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 ×로 나타내보자.

$n=3$ 일 때 가능한 경우는 ○×○×○의 1가지이므로 이 경우의 확률은

$$1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{48}{243} + \frac{4}{243} = \frac{52}{243}$$

답 $\frac{52}{243}$

STEP

2 개념 마무리

본문 p.117

1 $\frac{1}{4}$

2 $\frac{1}{37}$

3 $\frac{1}{5}$

4 $\frac{1}{4}$

5 $\frac{89}{140}$

6 $\frac{127}{512}$

1

남학생 수와 여학생 수의 비가 3:2이므로 이 고등학교의 전체 학생의 60%는 남학생, 40%는 여학생이다.

전체 학생의 80%가 스마트폰을 2시간 이상, 20%가 스마트

폰을 2시간 미만 사용하고 있고, 스마트폰을 2시간 이상 사용하는 여학생의 비율은 $\frac{1}{4}=0.25$ 이므로 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	남학생	여학생	합계
2시간 이상 사용	0.55	0.25	0.8
2시간 미만 사용	0.05	0.15	0.2
합계	0.6	0.4	1

임의로 택한 한 명이 스마트폰 사용 시간이 2시간 미만인 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A)=0.2, P(A \cap B)=0.05$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

보충 설명

주어진 조건을 이용하여 표를 작성하고 나머지 칸을 다음의

① → ② → ③ → ④와 같은 순서로 계산하면 된다.

	남학생	여학생	합계
2시간 이상 사용	③ 0.55 0.8-①	① 0.25 $\frac{1}{4}=0.25$	0.8
2시간 미만 사용	④ 0.05 $0.2-②$ 또는 0.6-③	② 0.15 0.4-①	0.2
합계	0.6	0.4	1

2

공을 서로 교환한 후 각 주머니에 들어 있는 검은 공과 흰 공의 개수가 같은 사건을 A , 검은 공만 서로 교환하는 사건을 B 라 하자.

공을 서로 교환한 후 각 주머니에 들어 있는 검은 공과 흰 공의 개수가 같으려면 주머니 A 는 공을 서로 교환한 후 검은 공의 개수가 1개 줄어야 한다.

주머니 A 에서 꺼내는 공에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 주머니 A 에서 검은 공 3개를 꺼낸 경우

주머니 A 에서 검은 공 3개를 꺼내고, 주머니 B 에서 검은 공 2개를 꺼내어 교환해야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_3 \times {}_2C_2}{{}_7C_3} = \frac{4}{35} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{175}$$

(ii) 주머니 A 에서 검은 공 2개와 흰 공 1개를 꺼낸 경우

주머니 A 에서 검은 공 2개와 흰 공 1개를 꺼내고, 주머니 B 에서 검은 공 1개와 흰 공 1개를 꺼내어 교환해야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{18}{35} \times \frac{3}{5} = \frac{54}{175}$$

(iii) 주머니 A 에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 꺼낸 경우

주머니 A 에서 검은 공 1개와 흰 공 2개를 꺼내고, 주머니 B 에서 흰 공 2개를 꺼내어 교환해야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{12}{35} \times \frac{3}{10} = \frac{18}{175}$$

(i), (ii), (iii)에서 공을 서로 교환한 후 각 주머니에 들어 있는 검은 공과 흰 공의 개수가 같을 확률은

$$P(A) = \frac{2}{175} + \frac{54}{175} + \frac{18}{175} = \frac{74}{175}$$

이때 두 주머니의 검은 공과 흰 공의 개수가 같고 검은 공만 서로 교환된 경우는 (i)이므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{175}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{175}}{\frac{74}{175}} = \frac{1}{37}$$

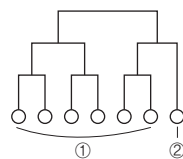
답 $\frac{1}{37}$

3

A 가 우승하는 사건을 A , 대진표에서 A 의 위치가 ①인 사건을 B 라 하자.

(i) A 의 위치가 ①일 때,

위치를 정할 확률은 $P(B) = \frac{6}{7}$



A가 우승하려면 3번의 경기를 모두 이겨야 하므로

$$P(A|B) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{6}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

(ii) A의 위치가 ②일 때,

$$\text{위치를 정할 확률은 } P(B^c) = \frac{1}{7}$$

A가 우승하려면 2번의 경기를 모두 이겨야 하므로

$$P(A|B^c) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A|B^c) = \frac{1}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= \frac{6}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

이때 A가 2번의 경기만 치루려면 ②의 위치에서 경기해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B^c|A) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{7} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

4

조건 (나)에서 $A \cap B = \emptyset$, 즉 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이므로

$$P(A \cap B) = 0, P(A \cap B \cap C) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore P(A \cup B \cup C)$$

$$\begin{aligned} &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) \\ &\quad - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

($\because$ ⑦, 조건 (다))

한편, $P(A) > 0, P(C) > 0$ 이고, 조건 (나)에서

$$P(A)P(C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4} \text{이므로 산술평균과 기하평균}$$

의 관계에 의하여

$$P(A) + P(C) \geq 2\sqrt{P(A)P(C)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\left(\text{단, 등호는 } P(A) = P(C) = \frac{1}{2} \text{일 때 성립} \right)$$

(나)

㉠에서

$$P(A \cup B \cup C) \geq 1 + P(B) - P(B \cap C) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + P(B \cap C^c)$$

이때 조건 (가)에서 $S = A \cup B \cup C$ 이므로

$$1 \geq \frac{3}{4} + P(B \cap C^c) \quad \therefore P(B \cap C^c) \leq \frac{1}{4}$$

따라서 $P(B \cap C^c)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

(다)

답 $\frac{1}{4}$

단계	채점 기준	배점
(가)	$P(A \cup B \cup C)$ 를 확률의 덧셈정리에 의하여 나타낸 경우	20%
(나)	산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $P(A) + P(C)$ 의 최솟값을 구한 경우	40%
(다)	$P(B \cap C^c)$ 의 최댓값을 구한 경우	40%

5

5번의 경기만에 우승팀이 결정되는 사건을 A, K팀이 첫 번째 경기에서 이기는 사건을 B라 하자.

한 팀이 5번째 경기에서 이겨 우승하려면 4번째 경기까지 세 번을 이기고 한 번을 진 뒤 마지막 5번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) K팀이 5번째 경기에서 이겨 우승했을 때,

한 경기에서 K팀이 N팀을 이길 확률은 $\frac{3}{5}$ 이므로 K팀이

5번째 경기에서 이겨 우승할 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \frac{3}{5} = \frac{648}{5^5}$$

(ii) N팀이 5번째 경기에서 이겨 우승했을 때,

한 경기에서 N팀이 K팀을 이길 확률은 $\frac{2}{5}$ 이므로 N팀이

5번째 경기에서 이겨 우승할 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \frac{2}{5} = \frac{192}{5^5}$$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 5번의 경기만에
우승팀이 결정될 확률은

$$P(A) = \frac{648}{5^5} + \frac{192}{5^5} = \frac{840}{5^5}$$

이때 K팀이 첫 번째 경기에서 이기고 5번 만에 우승팀이 결
정되는 사건은

$\overbrace{KKKNK}^{K팀이 우승하는 경우}, \overbrace{KKNKK}^{K팀이 우승하는 경우}, \overbrace{KNKKK}^{N팀이 우승하는 경우}, \overbrace{KNNNN}^{N팀이 우승하는 경우}$

의 4가지이므로 사건 $A \cap B$ 의 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \\ &= \frac{486}{5^5} + \frac{48}{5^5} = \frac{534}{5^5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{534}{5^5}}{\frac{840}{5^5}} = \frac{89}{140} \end{aligned}$$

답 $\frac{89}{140}$

6

두 개의 동전을 동시에 던질 때,

앞면이 2개 나올 확률은 ${}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$,

앞면이 1개 나올 확률은 ${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$,

앞면이 나오지 않을 확률은 ${}_2C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

이다.

꼭짓점 A에서 출발한 말이 두 개의 동전을 5회 던진 후 꼭짓
점 A에 놓여 있으려면 말이 이동하지 않거나 5의 배수만큼
이동해야 하므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) 말이 이동하지 않은 경우

5번의 시행 중 앞면이 나오지 않는 사건이 5번 일어나야
하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{5!}{5!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

(ii) 말이 5만큼 이동한 경우

$\overbrace{2\text{만큼 이동하는 횟수를 } a, 1\text{만큼 이동하는 횟수를 } b, 이}$
 $\overbrace{동하지 않는 횟수를 } c\text{라 하자.}$

두 개의 동전을 5회 던져 5만큼 이동하려면 a, b, c 의 순
서쌍 (a, b, c) 는 $(0, 5, 0), (1, 3, 1), (2, 1, 2)$ 의
3가지가 가능하다.

① (a, b, c) 가 $(0, 5, 0)$ 일 때,

5번의 시행 중 앞면이 1개 나오는 사건이 5번 일어나
야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{5!}{5!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

② (a, b, c) 가 $(1, 3, 1)$ 일 때,

5번의 시행 중 앞면이 2개 나오는 사건이 1번, 앞면이
1개 나오는 사건이 3번, 앞면이 나오지 않는 사건이 1
번 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} \frac{5!}{3!1!1!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \\ = 20 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{32} \end{aligned}$$

③ (a, b, c) 가 $(2, 1, 2)$ 일 때,

5번의 시행 중 앞면이 2개 나오는 사건이 2번, 앞면이
1개 나오는 사건이 1번, 앞면이 나오지 않는 사건이 2
번 일어나야 하므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} \frac{5!}{2!1!2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ = 30 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{15}{256} \end{aligned}$$

(iii) 말이 10만큼 이동한 경우

5번의 시행 중 앞면이 2개 나오는 사건이 5번 일어나야 하
므로 이 경우의 확률은

$$\frac{5!}{5!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{1024} + \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{15}{256} + \frac{1}{1024} = \frac{127}{512}$$

답 $\frac{127}{512}$

III. 통계

05. 이산확률변수와 이항분포

1 이산확률변수의 확률분포

기본 + 필수연습

본문 pp.122~124

01 풀이 참조

02 (1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{13}{15}$

03 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{5}{12}$

04 $\frac{1}{18}$

05 $\frac{1}{3}$

06 (1) $P(X=x) = \frac{{}_5C_x \times {}_3C_{3-x}}{{}_8C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$

(2) 풀이 참조 (3) $\frac{5}{7}$

07 $\frac{5}{36}$

01

약수의 개수가 1인 경우는 1의 1가지,

약수의 개수가 2인 경우는 2, 3, 5의 3가지,

약수의 개수가 3인 경우는 4의 1가지,

약수의 개수가 4인 경우는 6의 1가지

이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{6}, P(X=2) = \frac{1}{2}, P(X=3) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

답 풀이 참조

02

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} + a\right) = 1 \text{에서}$$

$$2a + \frac{11}{15} = 1, 2a = \frac{4}{15} \quad \therefore a = \frac{2}{15}$$

$$(2) P(0 \leq X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{15}\right) = \frac{13}{15}$$

답 (1) $\frac{2}{15}$ (2) $\frac{13}{15}$

다른 풀이

$$(2) P(0 \leq X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= 1 - P(X=-1)$$

$$= 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

03

(1) 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$-\frac{1}{6} + 3k$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} + 3k$	$\frac{1}{3} - 2k$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\left(-\frac{1}{6} + 3k\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6} + 3k\right) + \left(\frac{1}{3} - 2k\right) = 1 \text{에서}$$

$$4k + \frac{2}{3} = 1, 4k = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \frac{1}{12}$$

$$(2) X^2 + 4X \leq 0 \text{에서 } X(X+4) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq X \leq 0$$

$$\therefore P(X^2 + 4X \leq 0) = P(-4 \leq X \leq 0)$$

$$= P(X=-1) + P(X=0)$$

$$= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{5}{12}$

04

확률의 총합은 1이므로

$$a + b + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1 \text{에서 } a + b + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$3 \leq X \leq 5$ 인 사건을 A , $X \leq 3$ 인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = P(3 \leq X \leq 5)$$

$$= P(X=3) + P(X=5)$$

$$= b + \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(X \leq 3) \\ &= P(X=1) + P(X=3) \\ &= a + b = \frac{1}{2} \quad (\because \ominus) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(X=3) = b$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{에서}$$

$$b = \left(b + \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{2}, \quad b = \frac{b}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{12} \quad \therefore b = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad (\because \ominus)$$

$$\therefore ab = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

답 $\frac{1}{18}$

05

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{a}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} \\ &= \frac{a(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})} \\ &= \frac{a}{2}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) \end{aligned}$$

이때 확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \{(\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{49}-\sqrt{47})\} \\ = 1 \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{2} \times (-1+7) = 1, \quad 3a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{1}{6}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) \\ &\quad (x=1, 2, 3, \dots, 24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(5 \leq X \leq 12) \\ &= P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + \dots \\ &\quad + P(X=12) \\ &= \frac{1}{6} \{(\sqrt{11}-\sqrt{9}) + (\sqrt{13}-\sqrt{11}) + (\sqrt{15}-\sqrt{13}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{25}-\sqrt{23})\} \\ &= \frac{1}{6} \times (-3+5) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

06

(1) 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

8개의 공 중에서 임의로 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_3$ 이고, 흰 공이 x 개 나오는 경우의 수는 ${}_5C_x \times {}_3C_{3-x}$ 이므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_5C_x \times {}_3C_{3-x}}{{}_8C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

(2) X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_5C_0 \times {}_3C_3}}{{}_8C_3} = \frac{1}{56},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_2}}{{}_8C_3} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1}}{{}_8C_3} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_0}}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$	1

(3) 흰 공의 개수가 2 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X=2) + P(X=3) \\ &= \frac{15}{28} + \frac{5}{28} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

답 (1) $P(X=x) = \frac{{}_5C_x \times {}_3C_{3-x}}{{}_8C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$

(2) 풀이 참조 (3) $\frac{5}{7}$

07

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \quad \leftarrow (1, 1) \text{이 나오는 경우}$$

$$P\left(X=\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}, \quad \leftarrow (1, 2), (2, 1) \text{이 나오는 경우}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}, \quad \leftarrow (1, 3), (2, 2), (3, 1) \text{이 나오는 경우}$$

$$P\left(X=\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \leftarrow (2, 3), (3, 2) \text{가 나오는 경우}$$

$$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4} \leftarrow (3, 3) \text{이 나오는 경우}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1

한편, $X^2-2X<0$ 에서

$$X(X-2)<0 \quad \therefore 0<X<2$$

$$\therefore P(X^2-2X<0)=P(0<X<2)$$

$$=P(X=1)+P\left(X=\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{9}=\frac{5}{36}$$

답 $\frac{5}{36}$

STEP 1 개념 마무리

본문 p.125

- 01 2 02 $\frac{7}{10}$ 03 $\frac{1}{4}$ 04 $\frac{1}{2}$
 05 $\frac{3}{16}$ 06 $\frac{4}{5}$

01

$$P(0\leq X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3+a}{8}+\frac{1}{8}=\frac{a+5}{8}$$

$$\text{즉, } \frac{a+5}{8}=\frac{7}{8} \text{이므로}$$

$$a+5=7 \quad \therefore a=2$$

02

$$X^2-8X+15\geq 0 \text{에서}$$

$$(X-3)(X-5)\geq 0 \quad \therefore X\leq 3 \text{ 또는 } X\geq 5$$

$$\therefore P(X^2-8X+15\geq 0)$$

$$=P(X\leq 3 \text{ 또는 } X\geq 5)$$

$$=P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

03

$p_{n+2}-p_n=d$, 즉 $p_{n+2}=p_n+d$ 에 $n=1, 2, 3, \dots, 6$ 을 차례대로 대입하면 다음과 같다.

$$p_3=p_1+d$$

$$p_4=p_2+d$$

$$p_5=p_3+d=p_1+2d$$

$$p_6=p_4+d=p_2+2d$$

$$p_7=p_5+d=p_1+3d$$

$$p_8=p_6+d=p_2+3d$$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3+\dots+p_8=1$ 에서

$$(p_1+p_3+p_5+p_7)+(p_2+p_4+p_6+p_8)$$

$$=\{p_1+(p_1+d)+(p_1+2d)+(p_1+3d)\}$$

$$+\{p_2+(p_2+d)+(p_2+2d)+(p_2+3d)\}$$

$$=4p_1+4p_2+12d=1$$

$$\therefore p_1+p_2+3d=\frac{1}{4}$$

$$\therefore p_1+p_8=p_1+p_2+3d=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

04

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 다음과 같다.

(i) 숫자 2가 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$$X=4+6+8=18$$

(ii) 숫자 4가 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$$X=2+6+8=16$$

(iii) 숫자 6이 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$$X=2+4+8=14$$

(iv) 숫자 8이 적힌 면이 바닥에 닿을 때,

$$X=2+4+6=12$$

(i)~(iv)에서 X 가 가질 수 있는 값은 12, 14, 16, 18이다.

이때 각 값에 대한 확률은 모두 $\frac{1}{4}$ 이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	12	14	16	18	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

한편, $X^2-15X \geq 0$ 에서

$$X(X-15) \geq 0 \quad \therefore X \leq 0 \text{ 또는 } X \geq 15$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2-15X \geq 0) &= P(X \leq 0 \text{ 또는 } X \geq 15) \\ &= P(X=16) + P(X=18) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

05

한 개의 주사위를 한 번 던져 짝수의 눈이 나올 확률과 홀수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$ 이다.

이때 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times {}_2C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{16},$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{1}{2} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{2} \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{7}{16}, \end{aligned}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{16},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\begin{aligned} \therefore P(X=1) - P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{7}{16} - \frac{5}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{16}$

06

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이므로 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}, \quad \leftarrow (1, 1) \text{을 택한 경우}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{2}{5}, \quad \leftarrow (1, 2) \text{를 택한 경우}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_2C_1 \times {}_1C_1 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}, \quad \leftarrow (1, 3), (2, 2) \text{를 택한 경우}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_2C_1 \times {}_1C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5} \quad \leftarrow (2, 3) \text{을 택한 경우}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

한편, $|X-3| \leq 1$ 에서

$$-1 \leq X-3 \leq 1 \quad \therefore 2 \leq X \leq 4$$

$$\begin{aligned} \therefore P(|X-3| \leq 1) &= P(2 \leq X \leq 4) \\ &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{5}$

② 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

기본 + 필수연습

본문 pp.129~135

08 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{32}{9}$ (3) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

09 기댓값: $\frac{11}{3}$, 분산: $\frac{14}{9}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{14}}{3}$

10 기댓값: 5, 분산: 144, 표준편차: 12

11 (1) 기댓값: $\frac{1}{6}$, 분산: $\frac{23}{36}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{23}}{6}$

(2) 기댓값: -4, 분산: 23, 표준편차: $\sqrt{23}$

12 (1) $\frac{1}{25}$ (2) $-\frac{1}{5}$ 13 $\frac{25}{3}$ 14 $\frac{1}{8}$

15 $\frac{\sqrt{14}}{5}$ 16 $\frac{8}{9}$ 17 3 18 3

19 13 20 32 21 23 22 80

23 14 24 5 25 $5\sqrt{3}$

08

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{3} + a + \frac{1}{9} = 1 \text{에서 } a + \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$(1) E(X) = (-2) \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{9} \\ = \frac{2}{3}$$

$$(2) E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{2}{9} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{9} \\ = 4$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

$$(3) \sigma(X) = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{32}{9}$ (3) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

09

주어진 확률질량함수를 이용하여 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

따라서

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{1}{3} \\ = \frac{11}{3}$$

이때

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{15} + 2^2 \times \frac{2}{15} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{4}{15} + 5^2 \times \frac{1}{3} \\ = 15$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 15 - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

답 기댓값: $\frac{11}{3}$, 분산: $\frac{14}{9}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{14}}{3}$

10

$$E(X) = -3, V(X) = 36, \sigma(X) = \sqrt{36} = 6 \text{이므로}$$

$$E(Y) = E(-2X - 1) \\ = -2E(X) - 1 \\ = (-2) \times (-3) - 1 \\ = 5$$

$$V(Y) = V(-2X - 1) \\ = (-2)^2 V(X) \\ = 4 \times 36 \\ = 144$$

$$\sigma(X) = \sigma(-2X - 1) \\ = |-2| \sigma(X) \\ = 2 \times 6 \\ = 12 \quad \leftarrow \sqrt{V(Y)} = \sqrt{144} = 12$$

답 기댓값: 5, 분산: 144, 표준편차: 12

11

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + a = 1 \text{에서 } a + \frac{7}{12} = 1 \quad \therefore a = \frac{5}{12}$$

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \text{이고}$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{5}{12} = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{23}{36},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{23}{36}} = \frac{\sqrt{23}}{6}$$

$$(2) E(6X - 5) = 6E(X) - 5 = 6 \times \frac{1}{6} - 5 = -4$$

$$V(6X - 5) = 6^2 V(X) = 36 \times \frac{23}{36} = 23$$

$$\sigma(6X - 5) = |6| \sigma(X) = 6 \times \frac{\sqrt{23}}{6} = \sqrt{23}$$

답 (1) 기댓값: $\frac{1}{6}$, 분산: $\frac{23}{36}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{23}}{6}$

(2) 기댓값: -4, 분산: 23, 표준편차: $\sqrt{23}$

12

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{5} + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{4}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X) = (-1) \times a + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times b = -a + b$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times a + 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times b$$

$$= a + b = \frac{4}{5} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$V(X) = \frac{19}{25} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$\frac{19}{25} = \frac{4}{5} - (-a + b)^2$$

$$\therefore (a - b)^2 = \frac{4}{5} - \frac{19}{25} = \frac{1}{25}$$

(2) (1)에서 $(a - b)^2 = \frac{1}{25}$ 이므로

$$a - b = \frac{1}{5} \quad (\because a > b)$$

$$\text{한편, } E(X) = -a + b = -(a - b) \text{이므로}$$

$$E(X) = -\frac{1}{5}$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{25} \quad (2) -\frac{1}{5}$$

다른 풀이

(2) $a + b = \frac{4}{5}$, $a - b = \frac{1}{5}$ 에서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{10}$

$$\therefore E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{10} = -\frac{1}{5}$$

13

확률의 총합은 1이므로 $a + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + b = 1$ 에서

$$a + b = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{2} - b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X) = 1 \times a + 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} + 7 \times b$$

$$= a + 7b + \frac{13}{6}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - b\right) + 7b + \frac{13}{6} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 6b + \frac{8}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $a \geq 0$, $b \geq 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$0 \leq b \leq \frac{1}{2}$$

$E(X)$ 는 $b = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 M 을 가지므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$M = 6 \times \frac{1}{2} + \frac{8}{3} = \frac{17}{3} \quad \begin{array}{l} \text{--- } a=0, b=\frac{1}{2} \text{일 때 평균이 최대이므로} \\ \text{--- } M=1 \times 0 + 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} + 7 \times \frac{1}{2} = \frac{17}{3} \end{array}$$

$E(X)$ 는 $b = 0$ 일 때 최솟값 m 을 가지므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$m = 6 \times 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \quad \begin{array}{l} \text{--- } a=\frac{1}{2}, b=0 \text{일 때 평균이 최소이므로} \\ \text{--- } m=1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} + 7 \times 0 = \frac{8}{3} \end{array}$$

$$\therefore M + m = \frac{17}{3} + \frac{8}{3} = \frac{25}{3}$$

$$\text{답 } \frac{25}{3}$$

14

확률의 총합은 1이므로 $a + \frac{1}{4} + a + 2b = 1$ 에서

$$2a + 2b = \frac{3}{4} \quad \therefore a + b = \frac{3}{8}$$

$$\therefore a = \frac{3}{8} - b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1) \times a + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times a + 2 \times 2b \\ &= 4b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times a + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times a + 2^2 \times 2b \\ &= 2a + 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2a + 8b - (4b)^2 \\ &= -16b^2 + 8b + 2\left(\frac{3}{8} - b\right) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -16b^2 + 6b + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이때 $V(X) = \frac{5}{4}$ 이므로

$$-16b^2 + 6b + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad 16b^2 - 6b + \frac{1}{2} = 0$$

$$32b^2 - 12b + 1 = 0, \quad (4b - 1)(8b - 1) = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{4} \quad \text{또는} \quad b = \frac{1}{8}$$

(i) $b = \frac{1}{4}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = \frac{1}{8}$$

이때 $a < b$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b = \frac{1}{8}$ 일 때,

㉠에서 $a = \frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a - b = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

15

1부터 10까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{10}C_3$ 이고, 꺼낸 공 중에서 소수가 적힌 공이 x 개 있는 경우의 수는

${}_4C_x \times {}_6C_{3-x}$ 이므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_4C_x \times {}_6C_{3-x}}{{}_{10}C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_0 \times {}_6C_3}}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_6C_1}}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_3 \times {}_6C_0}}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{30} = 2$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{\frac{14}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

답 $\frac{\sqrt{14}}{5}$

16

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=1) = \frac{1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}, \quad \leftarrow (0, 1) \text{이 나오는 경우}$$

$$P(X=2) = \frac{1 \times {}_3C_1 + {}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}, \quad \leftarrow (0, 2), (1, 1) \text{이 나오는 경우}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{5}, \quad \leftarrow (1, 2) \text{가 나오는 경우}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{5} \quad \leftarrow (2, 2) \text{가 나오는 경우}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{15} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{3},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{15} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{2}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} = 8$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

17

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 -3, -1, 1, 3이고, 앞면이 나오는 횟수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 앞면이 0번 나오는 경우

세 점수의 합이 -3이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=-3) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

(ii) 앞면이 1번 나오는 경우

세 점수의 합이 -1이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=-1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

(iii) 앞면이 2번 나오는 경우

세 점수의 합이 1이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=1) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

(iv) 앞면이 3번 나오는 경우

세 점수의 합이 3이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

(i)~(iv)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-1	1	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = (-3) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0,$$

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - 0 = 3$$

$$\therefore E(X) + V(X) = 0 + 3 = 3$$

답 3

18

$E(X) = 5$ 이므로

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = -5 \text{에서}$$

$$5a + b = -5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또한, $\sigma(X) = 3$ 이므로

$$\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X) = 6 \text{에서}$$

$$3|a| = 6$$

$$|a| = 2 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -2$ 일 때,

$$\text{㉠에서 } b = 5$$

(ii) $a = 2$ 일 때,

㉠에서 $b = -15$ 이므로 $b > 0$ 의 조건을 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a + b = -2 + 5 = 3$$

답 3

19

$$E(4X + 3) = 11 \text{에서}$$

$$4E(X) + 3 = 11, \quad 4E(X) = 8 \quad \therefore E(X) = 2$$

$$\sigma(3X - 7) = 6 \text{에서}$$

$$|3|\sigma(X) = 6 \quad \therefore \sigma(X) = 2$$

$$\text{이때 } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= \{\sigma(X)\}^2 + \{E(X)\}^2 \\ &= 2^2 + 2^2 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(2X^2 - 3) &= 2E(X^2) - 3 \\ &= 2 \times 8 - 3 = 13 \end{aligned}$$

답 13

20

$E(X) = 60$ 이므로

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 150 \text{에서}$$

$$60a + b = 150 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\sigma(X) = 15$ 이므로

$$\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X) = 30 \text{에서}$$

$$15|a| = 30$$

$$|a| = 2 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$120 + b = 150 \quad \therefore b = 30$$

$$\therefore a + b = 2 + 30 = 32$$

답 32

21

확률의 총합은 1이므로

$$P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 5) = 1 \text{에서}$$

$$\frac{-k+2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2k+2}{6} + \frac{5k+2}{6} = 1, \quad \frac{6k+8}{6} = 1$$

$$6k + 8 = 6, \quad 6k = -2 \quad \therefore k = -\frac{1}{3}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	2	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

$$E(X) = (-1) \times \frac{7}{18} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times \frac{7}{18} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 5^2 \times \frac{1}{18} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{23}{9}$$

$$\therefore V(3X - 1) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{23}{9} = 23$$

답 23

22

X 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $X=1$ 일 때,

앞면이 3개, 뒷면이 2개 나오거나 앞면이 2개, 뒷면이 3개 나올 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=1) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

(ii) $X=3$ 일 때,

앞면이 4개, 뒷면이 1개 나오거나 앞면이 1개, 뒷면이 4개 나올 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=3) = {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

(iii) $X=5$ 일 때,

모두 앞면이 나오거나 모두 뒷면이 나올 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = \frac{5}{8}$, $b = \frac{5}{16}$, $c = \frac{1}{16}$ 이므로

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{5}{16} + 5 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{8}$$

$$\therefore E\left(\frac{4a}{c}X + \frac{b}{c}\right) = E(40X + 5)$$

$$= 40E(X) + 5 = 40 \times \frac{15}{8} + 5 = 80$$

답 80

23

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

6장의 카드 중에서 임의로 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2$ 이고, 뽑은 카드에 적힌 두 수를 각각 a, b ($a < b$)라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 두 수 중 작은 수의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a=1$ 일 때,

가능한 경우는 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)의 5가지이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=1) = \frac{5}{{}_6C_2} = \frac{1}{3}$$

(ii) $a=2$ 일 때,

가능한 경우는 (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)의 4가지이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=2) = \frac{4}{{}_6C_2} = \frac{4}{15}$$

(iii) $a=3$ 일 때,

가능한 경우는 (3, 4), (3, 5), (3, 6)의 3가지이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=3) = \frac{3}{{}_6C_2} = \frac{1}{5}$$

(iv) $a=4$ 일 때,

가능한 경우는 (4, 5), (4, 6)의 2가지이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=4) = \frac{2}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}$$

(v) $a=5$ 일 때,

가능한 경우는 (5, 6)의 1가지이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=5) = \frac{1}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

(i)~(v)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{2}{15} + 5^2 \times \frac{1}{15} \\ &= 7 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 7 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(-3X+5) &= (-3)^2 V(X) \\ &= 9 \times \frac{14}{9} = 14 \end{aligned}$$

답 14

24

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 4, 8이다.

X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=2) = \frac{1}{3}, P(X=4) = \frac{1}{2}, P(X=8) = \frac{1}{6}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{6} = 4,$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{2} + 8^2 \times \frac{1}{6} = 20$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 20 - 4^2 = 4$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{4} = 2$$

이때 $\sigma(aX+4) = 10$ 에서

$a\sigma(X) = 10$ ($\because a > 0$)이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

답 5

25

한 개의 주사위를 한 번 던져 짝수의 눈이 나올 확률과 홀수의 눈이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$ 이다.

짝수의 눈이 3번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$$3+3+3=9$$

짝수의 눈이 2번, 홀수의 눈이 1번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$$3+3-2=4$$

짝수의 눈이 1번, 홀수의 눈이 2번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$$3-2-2=-1$$

홀수의 눈이 3번 나올 때, 바둑돌이 위치한 점의 좌표는

$$-2-2-2=-6$$

즉, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $-6, -1, 4, 9$ 이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=-6) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

$$P(X=-1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=4) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=9) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-6	-1	4	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= (-6) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-6)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{8} + 4^2 \times \frac{3}{8} + 9^2 \times \frac{1}{8} \\ &= 21 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 21 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma(-2X-3) &= |-2|\sigma(X) \\ &= 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $5\sqrt{3}$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.136~137

07 2	08 3	09 55	10 $\frac{9}{4}$
11 $\frac{\sqrt{26}}{9}$	12 56	13 $\frac{17}{36}$	14 21
15 28	16 8	17 146	18 ⑤

07

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{8} + b + \frac{1}{8} = 1 \quad \therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

이것을 ①에 대입하여 풀면 $b = \frac{3}{8}$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{1}{8} = 3,$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} + 4^2 \times \frac{3}{8} + 5^2 \times \frac{1}{8}$$

$$= 11$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 11 - 3^2 = 2$$

답 2

08

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이고,

$$P(X=x) = \begin{cases} a & (x=3m) \\ \frac{1}{3}b & (x=3m-1) \\ \frac{1}{6}b & (x=3m-2) \end{cases} \quad (m \text{은 자연수})$$

X 의 확률질량함수에 대한 각각의 확률은 다음과 같다.

$$P(X=3) = P(X=6) = a,$$

$$P(X=2) = P(X=5) = P(X=8) = \frac{1}{3}b,$$

$$P(X=1) = P(X=4) = P(X=7) = \frac{1}{6}b$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	a	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	a	$\frac{1}{6}b$	$\frac{1}{3}b$	1

확률의 총합은 1이므로

$$2a + 3 \times \frac{1}{6}b + 3 \times \frac{1}{3}b = 1, \quad 2a + \frac{3}{2}b = 1$$

$$\therefore 4a + 3b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X) = \frac{55}{12} \text{에서}$$

$$(3+6) \times a + (1+4+7) \times \frac{1}{6}b + (2+5+8) \times \frac{1}{3}b = \frac{55}{12}$$

$$\therefore 9a + 7b = \frac{55}{12} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 36ab = 36 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 3$$

답 3

09

$$P(X \leq k) = ak^3 \text{이므로}$$

$$P(X=k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1)$$

$$= ak^3 - a(k-1)^3 = a\{k^3 - (k-1)^3\}$$

$$= a(3k^2 - 3k + 1)$$

$$\text{즉, } P(X=1) = a, P(X=2) = 7a, P(X=3) = 19a,$$

$$P(X=4) = 37a \text{이고, 확률의 총합은 1이므로}$$

$$a + 7a + 19a + 37a = 1, \quad 64a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{64}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{64} + 2 \times \frac{7}{64} + 3 \times \frac{19}{64} + 4 \times \frac{37}{64} = \frac{55}{16}$$

$$\text{즉, } m = \frac{55}{16} \text{이므로}$$

$$16m = 16 \times \frac{55}{16} = 55$$

답 55

10

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2} + a + b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2} - a$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2} - a$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times a + 3 \times \left(\frac{1}{2} - a\right) = -a + \frac{3}{2},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times a + 3^2 \times \left(\frac{1}{2} - a\right) = -5a + \frac{9}{2}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= -5a + \frac{9}{2} - \left(-a + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$= -5a + \frac{9}{2} - \left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right)$$

$$= -a^2 - 2a + \frac{9}{4}$$

$$= -(a+1)^2 + \frac{13}{4}$$

한편, $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq \frac{1}{2} - a \leq 1$ 에서

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

따라서 $a=0$ 일 때, $V(X)$ 가 최대이므로 $V(X)$ 의 최댓값은 $-1 + \frac{13}{4} = \frac{9}{4}$

답 $\frac{9}{4}$

11

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3P_2 \times \frac{3!}{2! \times 1!}}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=3) = \frac{3!}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{2}{9} = \frac{19}{9},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{9} + 2^2 \times \frac{2}{3} + 3^2 \times \frac{2}{9} = \frac{43}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{43}{9} - \left(\frac{19}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

답 $\frac{\sqrt{26}}{9}$

12

첫 번째로 꺼낸 공이 흰 공일 때 $X=1$

첫 번째로 꺼낸 공이 검은 공이고, 두 번째로 꺼낸 공이 흰 공일 때 $X=2$

첫 번째와 두 번째로 꺼낸 공이 모두 검은 공이고, 세 번째로 꺼낸 공이 흰 공일 때 $X=3$

즉, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{15} = \frac{7}{5},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{1}{15} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore 15\{E(X) + E(X^2)\} = 15 \times \left(\frac{7}{5} + \frac{7}{3}\right) = 56$$

답 56

13

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} + \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{3}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} + \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{11}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} + \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{17}{60},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{60}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{60}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{11}{20} + 2 \times \frac{17}{60} + 3 \times \frac{1}{60} = \frac{7}{6},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{20} + 1^2 \times \frac{11}{20} + 2^2 \times \frac{17}{60} + 3^2 \times \frac{1}{60} = \frac{11}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{11}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \end{aligned}$$

답 $\frac{17}{36}$

14

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}a + \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{2} + a^2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2}$$

한편, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ 이므로 $\sigma(X) = E(X)$ 에서

$$\sqrt{V(X)} = E(X), V(X) = \{E(X)\}^2$$

$$\therefore E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \{E(X)\}^2$$

$$\text{즉, } E(X^2) = 2\{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2} = 2\left(\frac{2}{5}a + \frac{1}{2}\right)^2, \frac{2}{25}a^2 - \frac{4}{5}a = 0$$

$$a^2 - 10a = 0, a(a - 10) = 0 \quad \therefore a = 10 \quad (\because a > 1)$$

$$\text{따라서 } E(X) = \frac{2}{5} \times 10 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$E(4X + 3) = 4E(X) + 3$$

$$= 4 \times \frac{9}{2} + 3 = 21$$

답 21

15

확률변수 X 가 1, 2, 3, 4, 5의 값을 갖는 확률을 각각 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 라 하면

$$E(X) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $P(Y = k) = \frac{1}{2}P(X = k) + \frac{1}{10}$ 이므로 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{10}$	1

$$E(Y)$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{10}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{10}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{10}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{10}\right) + 5 \times \left(\frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5) + \frac{1+2+3+4+5}{10}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\text{따라서 } a = \frac{7}{2} \text{이므로 } 8a = 8 \times \frac{7}{2} = 28$$

답 28

16

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_6C_3} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2}$$

이때 $E(aX - 1) = 11$ 에서

$$aE(X) - 1 = 11, \frac{3}{2}a - 1 = 11$$

$$\frac{3}{2}a = 12 \quad \therefore a = 8$$

답 8

17

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

(i) $X=1$ 일 때,

주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 0이 적힌 공을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

주머니 A에서 3이 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 0 또는 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

(iv) $X=4$ 일 때,

주머니 A에서 1 또는 3이 적힌 공을 꺼내고, 주머니 B에서 4가 적힌 공을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$P(X=4) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

(v) $X=5$ 일 때,

주머니 A에서 5가 적힌 공을 꺼내면 항상 성립하므로 이 경우의 확률은

$$P(X=5) = \frac{1}{3}$$

(i)~(v)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	1

(가)

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{2}{9} + 5 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{32}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{2}{9} + 5^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{130}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{130}{9} - \left(\frac{32}{9}\right)^2 = \frac{146}{81} \end{aligned}$$

(나)

$$\therefore V(9X+3) = 9^2 V(X)$$

$$= 81 \times \frac{146}{81} = 146$$

(다)

답 146

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 X 의 확률분포를 구한 경우	40%
(나)	$V(X)$ 를 구한 경우	40%
(다)	$V(9X+3)$ 을 구한 경우	20%

18

조건 (가)에서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이다.

2, 4, 6, 8의 4개에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(i) $X=3$ 일 때,

2, 4를 택할 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=3) = \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

(ii) $X=4$ 일 때,

2, 6을 택할 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=4) = \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

(iii) $X=5$ 일 때,

2, 8 또는 4, 6을 택할 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=5) = \frac{2}{{}_4C_2} = \frac{1}{3}$$

(iv) $X=6$ 일 때,

4, 8을 택할 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=6) = \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

(v) $X=7$ 일 때,

6, 8을 택할 때이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=7) = \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

(i)~(v)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

같은 방법으로 조건 (나)에서 확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이고, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	6	8	10	12	14	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(4, 8) (4, 12) (4, 16) (8, 12) (8, 16) (12, 16)

또한, 조건 (다)에서 확률변수 Z 가 가질 수 있는 값은 5, 9, 13, 17, 21이고, Z 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Z	5	9	13	17	21	합계
$P(Z=z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1, 9) (1, 17) (1, 25) (9, 17) (9, 25) (17, 25)

$$\therefore P(X=5) = \frac{1}{3} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이고,

확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이다.

또한, 각 값에 대한 확률이 값이 작은 수부터 순서대로 동일하므로

$$Y=2X$$

$$\therefore E(Y) = E(2X) = 2E(X) \text{ (참)}$$

ㄷ. 확률변수 Y 가 가질 수 있는 값은 6, 8, 10, 12, 14이고
확률변수 Z 가 가질 수 있는 값은 5, 9, 13, 17, 21이다.
또한, 각 값에 대한 확률이 값이 작은 수부터 순서대로 동
일하므로

$$\begin{aligned} Z &= 2Y - 7 \\ \therefore V(Z) &= V(2Y - 7) \\ &= 2^2 V(Y) = 4V(Y) \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄴ. 다음과 같이 직접 $E(X)$, $E(Y)$ 를 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} \\ &= 5 \\ E(Y) &= 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{6} + 14 \times \frac{1}{6} \\ &= 10 \\ \therefore E(Y) &= 2E(X) \text{ (참)} \end{aligned}$$

3 이항분포

기본 + 필수연습

본문 pp.141~145

26 (1) $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ (2) 이항분포를 따르지 않는다.

27 (1) $P(X=x) = {}_5C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$(2) \frac{1}{243}$$

28 (1) 평균: 30, 분산: 25, 표준편차: 5

(2) 평균: 270, 분산: 108, 표준편차: $6\sqrt{3}$

29 평균: 200, 분산: 100, 표준편차: 10

30 (1) $P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$

$$(2) \frac{67}{256}$$

31 $\frac{6}{7}$ 32 10 33 7 34 12

35 108 36 48 37 1

38 평균: 10, 분산: $\frac{499}{50}$ 39 443 40 13

26

(1) 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은
 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 한 개의 주사위를 10회 던질 때, 3의 배수

의 눈이 나오는 횟수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

(2) 이항분포를 따르지 않는다.

답 (1) $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ (2) 이항분포를 따르지 않는다.

27

(1) 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_5C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

(2) $P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}$

답 (1) $P(X=x) = {}_5C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}$

$(x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$(2) \frac{1}{243}$$

28

(1) 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30$$

$$V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$$

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(450, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 450 \times \frac{3}{5} = 270$$

$$V(X) = 450 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 108$$

$$\sigma(X) = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

답 (1) 평균: 30, 분산: 25, 표준편차: 5

(2) 평균: 270, 분산: 108, 표준편차: $6\sqrt{3}$

29

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

$$\sigma(X) = \sqrt{100} = 10$$

답 평균: 200, 분산: 100, 표준편차: 10

30

(1) 씨앗을 4개 심었으므로 4회의 독립시행이고, 씨앗 하나가

싹이 날 확률이 $\frac{3}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(4, \frac{3}{4}\right)$ 을 따른다. 즉, X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

(2) $P(X \leq 2)$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= {}_4C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 + {}_4C_1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{256} + \frac{3}{64} + \frac{27}{128} = \frac{67}{256}$$

답 (1) $P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$

(2) $\frac{67}{256}$

31

확률변수 X 는 이항분포 $B(8, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x p^x (1-p)^{8-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$\therefore P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8)$$

$$= {}_8C_7 p^7 (1-p)^1 + {}_8C_8 p^8 (1-p)^0$$

$$= 8p^7(1-p) + p^8$$

$$= p^7(8-8p+p)$$

$$= p^7(8-7p)$$

즉, $p^7(8-7p) = 2p^7$ 이므로

$$8-7p=2 \quad (\because 0 < p < 1)$$

$$7p=6 \quad \therefore p=\frac{6}{7}$$

답 $\frac{6}{7}$

32

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_nC_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\therefore P(X=2) = {}_nC_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2},$$

$$P(X=3) = {}_nC_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3}$$

이때 $4P(X=2) = P(X=3)$ 이므로

$$\begin{aligned} 4 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-2} \\ = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

$n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-3}$ 으로 나누면

$$2 \times \frac{2}{5} = \frac{n-2}{6} \times \frac{3}{5}, \quad 8=n-2 \quad \therefore n=10$$

답 10

33

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{25}C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{25-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 25)$$

$$\therefore P(X=n) = {}_{25}C_n \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{25-n},$$

$$P(X=n+1) = {}_{25}C_{n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{24-n}$$

이때 $\frac{P(X=n)}{P(X=n+1)} < 2$ 를 만족시켜야 하므로

$$P(X=n) < 2P(X=n+1) \quad (\because P(X=n+1) > 0)$$

$$\frac{25!}{n!(25-n)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{25-n}$$

$$< 2 \times \frac{25!}{(n+1)!(24-n)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \left(\frac{4}{5}\right)^{24-n}$$

양변을 $\frac{25!}{n!(24-n)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{24-n}$ 으로 나누면

$$\frac{1}{25-n} \times \frac{4}{5} < 2 \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{5}$$

$$2n+2 < 25-n, 3n < 23 \quad \therefore n < \frac{23}{3}$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 7이다.

답 7

34

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$E(X^2) = V(X) + 16 \text{에서}$$

$$E(X^2) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 + 16, \{E(X)\}^2 = 16$$

$$\therefore E(X) = -4 \text{ 또는 } E(X) = 4$$

이때 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n$$

$$n \text{은 자연수이므로 } \frac{1}{3}n = 4 \quad \therefore n = 12$$

답 12

35

확률변수 X 가 이항분포 $B(50, p)$ ($0 < p < \frac{1}{2}$)를 따르므로

$$E(X) = 50p, V(X) = 50p(1-p)$$

$$\text{이때 } V(X) = 8 \text{이므로}$$

$$50p(1-p) = 8, 50p - 50p^2 = 8$$

$$25p^2 - 25p + 4 = 0, (5p-1)(5p-4) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{5} \left(\because 0 < p < \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{따라서 } E(X) = 50 \times \frac{1}{5} = 10,$$

$$V(X) = 50 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 8 \text{에서}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$8 = E(X^2) - 10^2 \quad \therefore E(X^2) = 108$$

답 108

36

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p)$$

$$\star E(2X) = 2E(X) = 2np = 24 \text{에서}$$

$$np = 12 \quad \dots\dots \ominus$$

$$\star V(2X) = 2^2 V(X)$$

$$= 4np(1-p)$$

$$= 48(1-p) \quad (\because \ominus)$$

$$\text{이때 } V(2X) = 36 \text{이므로 } 48(1-p) = 36$$

$$1-p = \frac{3}{4} \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

$$\text{이것을 } \ominus \text{에 대입하여 풀면 } n = 48$$

답 48

37

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{100}C_x \frac{4^{100-x}}{5^{100}}$$

$$= {}_{100}C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{100-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 100)$$

이므로 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다. 즉,

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}$$

$$= \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore \star \sigma\left(\frac{X}{4} + 4\right) = \left|\frac{1}{4}\right| \sigma(X) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

답 1

38

1개의 세트에서 세탁기와 건조기가 모두 불량일 확률은

$$\frac{5}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{1}{500}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(5000, \frac{1}{500}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 5000 \times \frac{1}{500} = 10$$

$$V(X) = 5000 \times \frac{1}{500} \times \frac{499}{500} = \frac{499}{50}$$

$$\text{답 평균 : 10, 분산 : } \frac{499}{50}$$

39

주사위를 36회 던져 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하자.

주사위를 1회 던져 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(36, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 36 \times \frac{2}{3} = 24, V(Y) = 36 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 8$$

이때 6의 약수의 눈이 나오지 않는 횟수는 $36 - Y$ 이므로

$$X = 3Y + (36 - Y) = 2Y + 36$$

$$\therefore E(X) = E(2Y + 36) = 2E(Y) + 36$$

$$= 2 \times 24 + 36 = 84,$$

$$V(X) = V(2Y + 36) = 2^2 V(Y)$$

$$= 4 \times 8 = 32$$

따라서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$= 32 + 84^2 = 7088$$

$$\therefore \frac{1}{16} E(X^2) = \frac{1}{16} \times 7088 = 443$$

답 443

40

흰 공 2개, 검은 공 x 개가 들어 있는 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 검은 공이 나올 확률은

$$\frac{x}{2+x}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{x}{2+x}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = n \times \frac{x}{2+x} = \frac{nx}{x+2}$$

$$\therefore \frac{nx}{x+2} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한,

$$V(X) = n \times \frac{x}{2+x} \times \frac{2}{2+x}$$

$$= \frac{2nx}{(x+2)^2} = \frac{12}{x+2} \quad (\because \textcircled{1})$$

이므로 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{12}{x+2} + 6^2$$

$$\text{즉, } \frac{12}{x+2} + 36 = 38 \text{이므로}$$

$$\frac{12}{x+2} = 2, 2x+4=12, 2x=8 \quad \therefore x=4$$

이것을 ①에 대입하면

$$\frac{4n}{6} = 6, 4n = 36 \quad \therefore n = 9$$

$$\therefore x+n = 4+9 = 13$$

답 13

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.146~147

19 10	20 28	21 $\frac{1}{12}$	22 1
23 5	24 35	25 5	26 6100
27 8	28 4	29 $75\sqrt{3}$	30 116

19

확률변수 X 가 이항분포 $B(4, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x p^x (1-p)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= {}_4C_0 p^0 (1-p)^4 + {}_4C_1 p^1 (1-p)^3$$

$$= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3$$

확률변수 Y 가 이항분포 $B(4, 1-p)$ 를 따르므로 Y 의 확률질량함수는

$$P(Y=y) = {}_4C_y (1-p)^y p^{4-y} \quad (y=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore P(Y=2) = {}_4C_2 (1-p)^2 p^2 = 6(1-p)^2 p^2$$

이때 $P(X < 2) = P(Y=2)$ 에서

$$(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = 6(1-p)^2 p^2$$

$$(1-p)^2 + 4p(1-p) = 6p^2 \quad (\because 0 < p < 1)$$

$$p^2 - 2p + 1 + 4p - 4p^2 = 6p^2$$

$$\therefore 9p^2 = 2p + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore (9p-1)^2 = 81p^2 - 18p + 1$$

$$= 9(2p+1) - 18p + 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 18p + 9 - 18p + 1 = 10$$

답 10

20

50세인 남자가 40년 후까지 생존할 확률은 0.2, 50세인 여자가 40년 후까지 생존할 확률은 0.4이므로

둘 다 50세인 부부가 40년 후에 둘 다 생존하지 못할 확률은
 $(1-0.2) \times (1-0.4) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

즉, 둘 다 50세인 남녀 부부가 40년 후에 부부 중 적어도 한
 쪽이 생존하고 있을 확률은

$$1 - 0.48 = 0.52$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(6, 0.52)$ 를 따르므로 X
 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_6C_x (0.52)^x (0.48)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 5) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= {}_6C_5 (0.52)^5 (0.48)^1 + {}_6C_6 (0.52)^6 (0.48)^0 \\ &= (0.52)^5 \times ({}_6C_5 \times 0.48 + {}_6C_6 \times 0.52) \\ &= \left(\frac{13}{25}\right)^5 \times 3.4 = \frac{13^5}{5^{10}} \times \frac{17}{5} \\ &= \frac{17 \times 13^5}{5^{11}} \end{aligned}$$

따라서 $a=17$, $n=11$ 일 때 $a+n$ 이 최솟값을 가지므로
 $a+n$ 의 최솟값은
 $17+11=28$

답 28

21

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=10) \\ &= 3^{10} \left\{ {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 (2p)^{10} + {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 (2p)^9 \right. \\ &\quad \left. + {}_{10}C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 (2p)^8 + \dots + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} (2p)^0 \right\} \\ &= 3^{10} \left(\frac{1}{6} + 2p\right)^{10} = \left\{ 3 \left(\frac{1}{6} + 2p\right) \right\}^{10} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 6p\right)^{10} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} + 6p = 1 \text{ 이므로 } 6p = \frac{1}{2} \quad \therefore p = \frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

다른 풀이

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=k) &= 3^{10} \times {}_{10}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \times (2p)^{10-k} \\ &= 3^k \times 3^{10-k} \times {}_{10}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \times (2p)^{10-k} \\ &= {}_{10}C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k (6p)^{10-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 10) \end{aligned}$$

이므로 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 의 확률질량함수 꼴이다.

따라서 $1 - \frac{1}{2} = 6p$ 이므로

$$6p = \frac{1}{2} \quad \therefore p = \frac{1}{12}$$

22

확률변수 X 가 이항분포 $B(10, p)$ 를 따르므로 X 의 확률
 질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x p^x (1-p)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X=0) &= {}_{10}C_0 p^0 (1-p)^{10} = (1-p)^{10}, \\ P(X=1) &= {}_{10}C_1 p^1 (1-p)^9 = 10p(1-p)^9, \\ P(X=2) &= {}_{10}C_2 p^2 (1-p)^8 = 45p^2(1-p)^8 \end{aligned}$$

이때 $P(X=0) - P(X=1) = -\frac{1}{5}P(X=2)$ 이므로

$$(1-p)^{10} - 10p(1-p)^9 = -\frac{1}{5} \times 45p^2(1-p)^8$$

$$(1-p)^2 - 10p(1-p) = -9p^2 \quad \left(\because 0 < p < \frac{1}{2}\right)$$

$$p^2 - 2p + 1 - 10p + 10p^2 = -9p^2$$

$$20p^2 - 12p + 1 = 0, (2p-1)(10p-1) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{10} \quad \left(\because 0 < p < \frac{1}{2}\right)$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{10}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{10} = 1$$

답 1

23

확률변수 X 가 이항분포 $B(200, p)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} V(X) &= 200p(1-p) \\ &= -200(p^2 - p) \\ &= -200\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + 50 \end{aligned}$$

따라서 $V(X)$ 는 $p = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 50을 가지므로 확률변
 수 Y 는 이항분포 $B\left(240, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(Y) = 240 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 45$$

$$\begin{aligned}\therefore V\left(\frac{1}{3}Y+5\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 V(Y) \\ &= \frac{1}{9} \times 45 = 5\end{aligned}$$

답 5

24

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 80 \times \frac{1}{4} = 20, \quad V(X) = 80 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 15$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 15 + 20^2 = 415\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= E(X^2) - 2xE(X) + x^2 \\ &= 415 - 2x \times 20 + x^2 \\ &= x^2 - 40x + 415 \\ &= (x-20)^2 + 15\end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=20$ 일 때 최솟값 15를 갖는다.

따라서 $a=20$, $b=15$ 이므로

$$a+b=20+15=35$$

답 35

단계	채점 기준	배점
(가)	$E(X)$, $E(X^2)$ 을 각각 구한 경우	40%
(나)	확률변수 X 의 평균과 분산을 이용하여 이차함수 $f(x)$ 의 식을 구한 경우	30%
(다)	$a+b$ 의 값을 구한 경우	30%

25

한 개의 주사위를 한 번 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6이다.

이때 오른쪽 그림에서

$$f(1) > 0, f(2) > 0 \text{이므로}$$

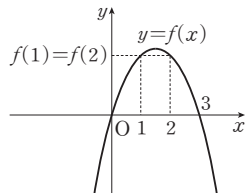
사건 A 가 일어날 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

답 5



26

10회의 시행 중에서 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수

Y 라 하면 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

Y 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(Y) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

이때 동전의 뒷면이 나오는 횟수는 $10-Y$ 이므로

$$X = 500Y + 100(10-Y) = 400Y + 1000$$

$$\begin{aligned}\therefore E(X) &= E(400Y + 1000) \\ &= 400E(Y) + 1000 \\ &= 400 \times 5 + 1000 = 3000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(2X+100) &= 2E(X) + 100 \\ &= 2 \times 3000 + 100 = 6100\end{aligned}$$

답 6100

27

추가로 넣는 흰 공의 개수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항

분포 $B\left(2, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

이때 주머니에 들어 있는 9개의 공 중에서 흰 공의 개수는

$$X = 3 + Y \text{이므로}$$

$$E(X) = E(3+Y) = 3 + E(Y) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{7}{2} + 1 = 8$$

답 8

다른 풀이

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이고, 각 값에 대한 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P(X=3) = {}_2C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$P(X=4) = {}_2C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=5) = {}_2C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$$E(X) = 3 \times \frac{9}{16} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{7}{2} + 1 = 8$$

28

주사위에서 나온 두 눈의 수의 합이 a 이하일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(200, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 200p, V(X) = 200p(1-p)$$

즉, $8E(X) > 9V(X)$ 에서

$$1600p > 1800p(1-p), 8p > 9p(1-p)$$

$$9p^2 - p > 0, p(9p-1) > 0$$

$$\therefore p > \frac{1}{9} \quad (\because 0 \leq p \leq 1)$$

이때 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 합을 확률변수 Y 라 하고 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\text{따라서 } P(Y \leq 3) = P(Y=2) + P(Y=3) = \frac{1}{12},$$

$$P(Y \leq 4) = P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$p > \frac{1}{9}$ 을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

$$P(Y \leq a) > \frac{1}{9} \text{이고, } P(Y \leq 3) = \frac{1}{12} < \frac{1}{9} < P(Y \leq 4) = \frac{1}{6} \text{이므로 } a \geq 4$$

답 4

29

5개의 동전을 동시에 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$2^5 = 32$$

이때 $mn < 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(0, 5), (1, 4), (4, 1), (5, 0)$ 의 4개이다.

(i) (m, n) 이 $(0, 5)$ 또는 $(5, 0)$ 일 때, $\hookrightarrow m+n=5$ 이어야 한다.

5개의 동전 모두 앞면 또는 모두 뒷면이 나올 확률은

$${}_5C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

(ii) (m, n) 이 $(1, 4)$ 또는 $(4, 1)$ 일 때,

5개의 동전 중 앞면이 1개, 뒷면이 4개 또는 앞면이 4개, 뒷면이 1개 나올 확률은

$${}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 사건 A 가 일어날 확률은

$$\frac{1}{16} + \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{3}{8}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 20 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{20 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore E(2X) = 2E(X) = 2 \times \frac{15}{2} = 15,$$

$$\sigma(4X-1) = |4| \sigma(X) = 4 \times \frac{5\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}$$

$$\therefore E(2X) \times \sigma(4X-1) = 15 \times 5\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$$

답 $75\sqrt{3}$

30

주머니에서 임의로 꺼낸 2개의 공의 색이 다를 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$$

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 60회 반복할 때, 다른 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는

이항분포 $B\left(60, \frac{8}{15}\right)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 60 \times \frac{8}{15} = 32$$

이때 같은 색의 공이 나오는 횟수는 $60-Y$ 이므로 점 P 의 x 좌표는 $3(60-Y) = 180-3Y$, y 좌표는 Y 이다.

즉, 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 60회 반복한 후, 점 P 의 x 좌표와 y 좌표의 합은

$$X = 180 - 3Y + Y = 180 - 2Y$$

$$\therefore E(X) = E(180 - 2Y) = 180 - 2E(Y) \\ = 180 - 2 \times 32 = 116$$

답 116

1 25	2 7	3 13	4 $3+3\sqrt{2}$
5 $\frac{11}{4}$	6 28		

1

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	...	k	합계
$P(X=x)$	a	b	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}$	...	$\frac{b}{k}$	1

$$E(X) = 0 \times a + 1 \times b + 2 \times \frac{b}{2} + 3 \times \frac{b}{3} + \cdots + k \times \frac{b}{k} = bk$$

$$E(X^2) = 0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times \frac{b}{2} + 3^2 \times \frac{b}{3} + \cdots + k^2 \times \frac{b}{k}$$

$$= (1+2+3+\cdots+k)b$$

k 가 짝수이면 $k+1$ 을 $\frac{k}{2}$ 번 더한 것이고,
 k 가 홀수이면 $k+1$ 을 $\frac{k-1}{2}$ 번 더한 값에

$$= \frac{bk(k+1)}{2}$$

이므로 $E(X^2) = 2E(X)$ 에서 가운데 수 $\frac{k+1}{2}$ 를 더한 것이다.

$$\frac{bk(k+1)}{2} = 2bk$$

$\frac{k(k+1)}{2} = (k+1) \times \frac{k}{2}$
 $= (k+1) \times \frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2}$

이때 $bk > 0$ 이므로

$$\frac{k+1}{2} = 2, k+1=4 \quad \therefore k=3$$

한편, 확률의 총합은 1이므로

$$a + b + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} = 1 \text{에서}$$

$$a + \frac{11}{6}b = 1 \quad \therefore a = 1 - \frac{11}{6}b \quad \cdots \textcircled{1}$$

또한, $E(X) = 3b$, $E(X^2) = 6b$ 이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 6b - (3b)^2$$

$$= -9b^2 + 6b$$

$$= -9\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 + 1$$

따라서 $b = \frac{1}{3}$ 일 때 $V(X)$ 가 최대이므로 $V(X)$ 가 최대가

되도록 하는 a 의 값은

$$1 - \frac{11}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18} \quad (\because \textcircled{1})$$

즉, $p=18$, $q=7$ 이므로

$$p+q=18+7=25$$

답 25

보충 설명

등차수열의 합 | 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제 k 번째 항까지의 합은

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

2

$E(X)=0$, $V(X)=1$ 이므로

확률변수 $Y=aX+b$ 의 평균과 분산은

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$= a \times 0 + b = b$$

$$V(Y) = V(aX+b) = a^2V(X)$$

$$= a^2 \times 1 = a^2$$

$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$ 에서

$$a^2 = E(Y^2) - b^2 \quad \therefore E(Y^2) = a^2 + b^2$$

$$\therefore E((Y-2)^2) = E(Y^2 - 4Y + 4)$$

$$= E(Y^2) - 4E(Y) + 4$$

$$= a^2 + b^2 - 4b + 4 = a^2 + (b-2)^2$$

즉, $E((Y-2)^2) \leq 5$ 에서 $a^2 + (b-2)^2 \leq 5$

이때 a, b 는 자연수이므로

(i) $a=1$ 일 때,

$$1^2 + (b-2)^2 \leq 5, (b-2)^2 \leq 4$$

$$\therefore b=1, 2, 3, 4 \quad \leftarrow (a, b) \text{는 } (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$$

(ii) $a=2$ 일 때,

$$2^2 + (b-2)^2 \leq 5, (b-2)^2 \leq 1$$

$$\therefore b=1, 2, 3 \quad \leftarrow (a, b) \text{는 } (2, 1), (2, 2), (2, 3)$$

(i), (ii)에서 $E((Y-2)^2) \leq 5$ 를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4+3=7$$

답 7

다른 풀이

치환을 이용해서 다음과 같이 풀 수도 있다.

$$Z=Y-2 \text{로 놓으면 } Z=Y-2=aX+b-2$$

$$E(Z) = E(aX+b-2)$$

$$= aE(X) + b - 2$$

$$= b - 2 \quad (\because E(X)=0)$$

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(aX + b - 2) \\ &= a^2 V(X) \\ &= a^2 \quad (\because V(X) = 1) \end{aligned}$$

이때 $E((Y-2)^2) = E(Z^2) \leq 5$ 이므로

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= V(Z) + \{E(Z)\}^2 \\ &= a^2 + (b-2)^2 \leq 5 \end{aligned}$$

- (i) $a=1$ 일 때,
 $1^2 + (b-2)^2 \leq 5, (b-2)^2 \leq 4$
 $\therefore b=1, 2, 3, 4$
- (ii) $a=2$ 일 때,
 $2^2 + (b-2)^2 \leq 5, (b-2)^2 \leq 1$
 $\therefore b=1, 2, 3$
- (i), (ii)에서 $E(Z^2) \leq 5$ 를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $4+3=7$

3

주머니에 들어 있는 검은 공의 개수를 x 라 하면 흰 공의 개수는 $8-x$ 이다.

검은 공을 1개 꺼내는 경우는 동전 2개 중 앞면이 한 개 나오고 검은 공을 1개 꺼내는 경우 또는 동전 2개 모두 앞면이 나오고 흰 공을 1개, 검은 공을 1개 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$\begin{aligned} P(X=1) &= {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{x}{8} + {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{{}_xC_1 \times {}_{8-x}C_1}{{}_8C_2} \\ &= \frac{x}{16} + \frac{x(8-x)}{112} \\ &= \frac{-x^2 + 15x}{112} \end{aligned}$$

즉, $P(X=1) = \frac{9}{28}$ 에서

$$\frac{-x^2 + 15x}{112} = \frac{9}{28}$$

$$x^2 - 15x + 36 = 0, (x-3)(x-12) = 0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x \leq 8)$$

따라서 주머니에는 검은 공 3개와 흰 공 5개가 들어 있고, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=2$ 인 경우는 동전 2개 모두 앞면이 나오고 검은 공을 2개 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$\begin{aligned} P(X=2) &= {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{28} = \frac{3}{112} \\ \therefore P(X=0) &= 1 - \{P(X=1) + P(X=2)\} \\ &= 1 - \left(\frac{9}{28} + \frac{3}{112}\right) = \frac{73}{112} \quad (*) \end{aligned}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{73}{112}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{112}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{73}{112} + 1 \times \frac{9}{28} + 2 \times \frac{3}{112} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore E(24X+4) = 24E(X) + 4 = 24 \times \frac{3}{8} + 4 = 13$$

답 13

보충 설명

(*)에서 $P(X=0)$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 동전 2개 중 앞면이 한 개도 나오지 않을 확률은

$${}_2C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(ii) 동전 2개 중 앞면이 한 개 나오고 검은 공을 꺼내지 않을 확률은

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$$

(iii) 동전 2개 모두 앞면이 나오고 검은 공을 꺼내지 않을 확률은

$${}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{5}{56}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} + \frac{5}{56} = \frac{73}{112}$$

4

만들 수 있는 삼각형의 개수는 서로 다른 8개의 점에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_3 = 56$$

이때 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ 이고, X 의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $X=2$ 일 때,

삼각형 ABD와 합동인 직각이등변삼각형, 즉 넓이가 2인

삼각형의 개수는 $4 \times 6 = 24$ 이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=2) = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

(ii) $X=2\sqrt{2}$ 일 때,

삼각형 ABG와 합동인 직각삼각형, 즉 넓이가 $2\sqrt{2}$ 인 삼각형의 개수는 $2 \times \overbrace{12=24}^{\text{정육면체의 모서리의 개수}}$ 이므로 이 경우의 확률은 $\overbrace{\frac{24}{56}=\frac{3}{7}}^{\text{정육면체의 한 모서리를 한 변으로 하는 삼각형 ABG와 합동인 직각삼각형의 개수}}$

(iii) $X=2\sqrt{3}$ 일 때,

삼각형 ACF와 합동인 정삼각형, 즉 넓이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형의 개수는 $56 - (24 + 24) = 8$ 이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=2\sqrt{3}) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

(i), (ii), (iii)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{3}{7} + 2\sqrt{2} \times \frac{3}{7} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{6+6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E\left(\frac{7}{2}X - \sqrt{3}\right) &= \frac{7}{2}E(X) - \sqrt{3} \\ &= \frac{7}{2} \times \frac{6+6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{7} - \sqrt{3} \\ &= 3+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $3+3\sqrt{2}$

5

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

즉, X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이므로

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(X=1) \\ &= {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P(X \geq 2) \\ &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P(Y=2)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{11}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

보충 설명

$$P(Y=0) = P(X=0), P(Y=1) = P(X=1),$$

$$P(Y=2) = P(X \geq 2) \text{이므로 } Y \text{의 확률질량함수는}$$

$$P(Y=y) = \begin{cases} {}_4C_y \left(\frac{1}{2}\right)^4 & (y=0, 1) \\ 1 - P(Y \leq 1) & (y=2) \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다.

6

100원짜리 동전의 개수를 t 라 하면 500원짜리 동전의 개수는 $20-t$ 이다.

이때 500원짜리 동전 $(20-t)$ 개를 던져 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 Y 라 하면 1개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 두 확률변수 X, Y 는 각각 이항분포

$$B\left(t, \frac{1}{2}\right), B\left(20-t, \frac{1}{2}\right) \text{을 따른다.}$$

즉, $E(X) = \frac{1}{2}t$, $E(Y) = \frac{1}{2}(20-t)$ 이므로 상금의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(100X + 500Y) &= 100E(X) + 500E(Y) \\ &= 100 \times \frac{1}{2}t + 500 \times \frac{1}{2}(20-t) \\ &= 50t + 250(20-t) \\ &= -200t + 5000 \end{aligned}$$

이 게임에서 상금의 기댓값이 3600원이므로

$$-200t + 5000 = 3600, 200t = 1400$$

$$\therefore t = 7$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(7, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 7 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times \frac{7}{4} = 28$$

답 28

06. 연속확률변수와 정규분포

1 연속확률변수의 확률분포

기본 + 필수연습

본문 pp.153~156

- 01 (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수
(3) 이산확률변수 (4) 연속확률변수

- 02 $\neg$ 03 $\frac{5}{2}$ 04 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{13}{18}$
05 $\frac{1}{2}$ 06 $\frac{81}{250}$ 07 $\frac{3}{16}$ 08 $\frac{1}{16}$
09 $\frac{4}{7}$

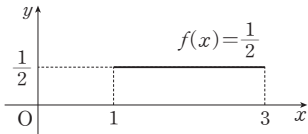
01

- (1) 하루 입장객 수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0 또는 자연수와 같이 셀 수 있으므로 X 는 이산확률변수이다.
- (2) 승용차의 속력을 확률변수 X 라 하면 X 는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가질 수 있으므로 연속확률변수이다.
- (3) 페이지당 오타의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0 또는 자연수와 같이 셀 수 있으므로 X 는 이산확률변수이다.
- (4) 교실의 실내 온도를 확률변수 X 라 하면 X 는 어떤 범위에 속하는 모든 실수의 값을 가질 수 있으므로 연속확률변수이다.

답 (1) 이산확률변수 (2) 연속확률변수
(3) 이산확률변수 (4) 연속확률변수

02

- ㄱ. $f(x) = \frac{1}{2}$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ ($1 \leq x \leq 3$)의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) > 0$



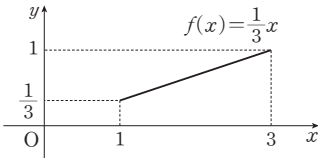
이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$(3-1) \times \frac{1}{2} = 1$$

즉, $f(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 있다.

- ㄴ. $f(x) = \frac{1}{3}x$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ ($1 \leq x \leq 3$)의

그래프는 다음 그림과 같으므로 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) > 0$

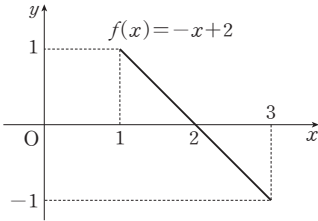


이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + 1 \right) \times (3-1) = \frac{4}{3}$$

즉, $f(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 없다.

- ㄷ. $f(x) = -x+2$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ ($1 \leq x \leq 3$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



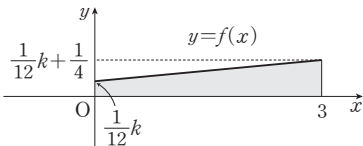
$2 < x \leq 3$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 없다.

따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

03

함수 $f(x) = \frac{1}{12}(x+k)$ ($0 \leq x \leq 3$)의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

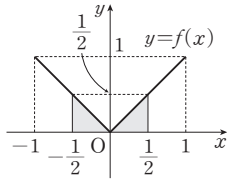
$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{12}k + \left(\frac{1}{12}k + \frac{1}{4} \right) \right\} \times 3 = 1$$

$$\frac{1}{4}k + \frac{3}{8} = 1, \frac{1}{4}k = \frac{5}{8} \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

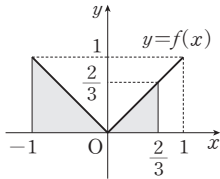
04

- (1) $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- (2) $P\left(X \leq \frac{2}{3}\right)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1, x=\frac{2}{3}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P\left(X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{18}$$

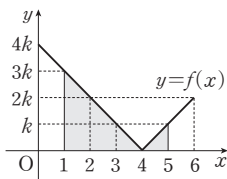
답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{13}{18}$

다른 풀이

- (2) $P\left(X \leq \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(X \geq \frac{2}{3}\right)$
- $$= 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right) \times \frac{1}{3} = \frac{13}{18}$$

05

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4k + \frac{1}{2} \times 2 \times 2k = 1, 10k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{10}$$

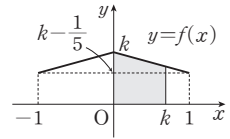
이때 $P(1 \leq X \leq 5)$ 는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(1 \leq X \leq 5) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

06

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1, x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$2 \times \left[\frac{1}{2} \times \left\{ \left(k - \frac{1}{5} \right) + k \right\} \times 1 \right] = 1$$

$$2k - \frac{1}{5} = 1, 2k = \frac{6}{5} \quad \therefore k = \frac{3}{5}$$

이때 $P(0 \leq X \leq k)$ 는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(0 \leq X \leq k) = P\left(0 \leq X \leq \frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{25} \right) \right\} \times \frac{3}{5} = \frac{81}{250}$$

답 $\frac{81}{250}$

07

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

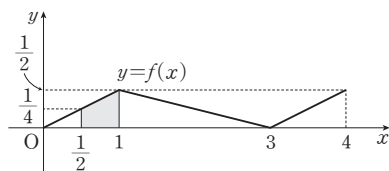
$$\frac{1}{2} \times 3 \times k + \frac{1}{2} \times 1 \times k = 1$$

$$2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

즉, $P(k \leq X \leq 2k) = P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right)$ 은 다음 그림의 색칠한

부분의 넓이와 같고, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$



$$\begin{aligned}\therefore P(k \leq X \leq 2k) &= P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{16}$

08

함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(4-x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}\therefore P(0 \leq X \leq 2) &= P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \\ \text{또한, } P(1 \leq X \leq 2) &= P(2 \leq X \leq 3) \text{이므로} \\ P(1 \leq X \leq 3) &= \frac{5}{8} \text{에서 } P(1 \leq X \leq 2) = \frac{5}{16} \\ \therefore P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) &= P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) + P(1 \leq X \leq 2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{5}{16} = \frac{7}{16}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\frac{7}{2} \leq X \leq 4\right) &= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= P(0 \leq X \leq 2) - P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{16} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{16}$

09

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로 $3P(2 \leq X \leq 4) = 4P(6 \leq X \leq 8)$ 에서 $3P(2 \leq X \leq 4) = 4P(0 \leq X \leq 2)$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 4) = \frac{4}{3}P(0 \leq X \leq 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, $P(0 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 8) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{3}P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \therefore P(0 \leq X \leq 2) = \frac{3}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(2 \leq X \leq 6) &= 1 - \{P(0 \leq X \leq 2) + P(6 \leq X \leq 8)\} \\ &= 1 - 2P(0 \leq X \leq 2) \\ &= 1 - 2 \times \frac{3}{14} = \frac{4}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{4}{7}$

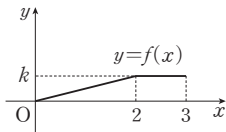
STEP 1 개념 마무리

본문 p.157

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|------|
| 01 $\frac{1}{32}$ | 02 $\frac{5}{8}$ | 03 $\frac{17}{2}$ | 04 ⑤ |
| 05 $\frac{1}{5}$ | 06 $\frac{3}{4}$ | | |

01

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times 2 \times k + 1 \times k = 1$$

$$2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2 \text{에서 } f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x \text{이므로}$$

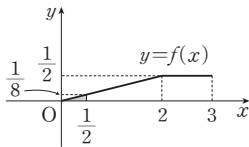
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

이때 $P(0 \leq X \leq k) = P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 은 오른쪽 그림의 색칠

한 부분, 즉 $y=f(x)$ 의 그래프

와 x 축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$ 로 둘러

싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

답 $\frac{1}{32}$

02

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

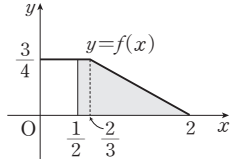
$$\frac{9}{8}a^2 + \frac{1}{2} \times (2-a) \times \frac{9}{8}a = 1, \quad \frac{9a^2+18a}{16} = 1$$

$$9a^2+18a-16=0, \quad (3a+8)(3a-2)=0$$

$$\therefore a = \frac{2}{3} \quad (\because 0 < a < 2)$$

이때 $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right)$ 는 오른쪽

그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

보충 설명

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이고, $P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ 이므로

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\right) = 1 - P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

03

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 10 \times a = 1, \quad 5a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}x & (0 \leq x < 4) \\ -\frac{1}{30}x + \frac{1}{3} & (4 \leq x \leq 10) \end{cases} \quad \text{에서 } f(1) = \frac{1}{20} \text{이므로}$$

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

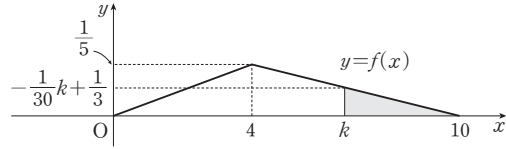
$$3P(X \leq 1) = 2P(X \geq k) \text{에서}$$

$$\frac{3}{40} = 2P(X \geq k) \quad \therefore P(X \geq k) = \frac{3}{80} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{한편, } P(4 \leq X \leq 10) = \frac{1}{2} \times (10-4) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$4 < k < 10$ 이어야 한다.

이때 $P(X \geq k)$ 는 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



즉, ①에서

$$\frac{1}{2} \times (10-k) \times \left(-\frac{1}{30}k + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{80}$$

$$\frac{1}{60}(k-10)^2 = \frac{3}{80}, \quad (k-10)^2 = \frac{9}{4}$$

$$k-10 = \frac{3}{2} \text{ 또는 } k-10 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore k = \frac{17}{2} \quad (\because 4 < k < 10)$$

답 $\frac{17}{2}$

04

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (2+5) \times k = 1, \quad \frac{7}{2}k = 1 \quad \therefore k = \frac{2}{7} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. ㄱ에서 $k = \frac{2}{7}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{21}x & \left(0 \leq x < \frac{3}{2}\right) \\ \frac{2}{7} & \left(\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{2}\right) \\ -\frac{4}{21}x + \frac{20}{21} & \left(\frac{7}{2} \leq x \leq 5\right) \end{cases}$$

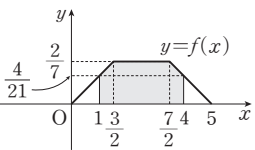
즉, 구하는 확률은 오른쪽

그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$P(1 \leq X \leq 4)$$

$$= P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) + P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right) + P\left(\frac{7}{2} \leq X \leq 4\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{21} + \frac{2}{7}\right) \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{2}{7}$$



$$+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{7} + \frac{4}{21}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{17}{21} \text{ (참)}$$

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=\frac{5}{2}$ 에 대하여 대칭이므로
 $0 \leq x \leq 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(5-x)$ 가
 성립한다.
 즉, $0 \leq a \leq 5$ 인 a 에 대하여 $P(X \leq a)=P(X \geq 5-a)$
 이다. (참)
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05

$0 \leq x \leq 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$ 이므로
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이다.
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$ 으로
 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$P(0 \leq X \leq 3)=P(3 \leq X \leq 6)=\frac{1}{2}$$

이때 $P(0 \leq X \leq 2)=\frac{2}{5}$ 이므로

$$P(2 \leq X \leq 3)=P(0 \leq X \leq 3)-P(0 \leq X \leq 2)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 4)=P(2 \leq X \leq 3)+P(3 \leq X \leq 4)$$

$$=2P(2 \leq X \leq 3)$$

$$=2 \times \frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

06

$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축
 및 두 직선 $x=0$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이다.
 조건 ㉞에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여
 대칭이므로

$$P(0 \leq X \leq 2)=P(2 \leq X \leq 4)=\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

조건 ㉝에서 $P(2 \leq X \leq x)=a-\frac{(4-x)^2}{8}$ 에 $x=4$ 를 대입

하면 $P(2 \leq X \leq 4)=a$ 이므로

$$a=\frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{㉞})$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq x)=\frac{1}{2}-\frac{(4-x)^2}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ &= 2P(2 \leq X \leq 3) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

2 정규분포

기본 + 필수연습

본문 pp.162~168

10 (1) $N(7, 12^2)$ (2) $N(-5, 20^2)$

11 $E(X_1)=E(X_2)<E(X_3)$,
 $\sigma(X_1)<\sigma(X_2)=\sigma(X_3)$

12 (1) 0.8664 (2) 0.9772 (3) 0.8413 (4) 0.1498

13 (1) $Z=\frac{X-8}{2}$ (2) 0.7745 14 7

15 0.45 16 24

17 (1) 0.9772 (2) 0.0919 (3) 0.617

18 1.7289 19 10 20 0.8413 21 16

22 167 23 0.5328 24 169점 25 55

10

(1) 확률변수 X 의 평균은 7이고, 분산은 144이므로 표준편
 차는 $\sqrt{144}=12$ 이다.

즉, 확률변수 X 는 정규분포 $N(7, 12^2)$ 을 따른다.

(2) 확률변수 X 의 평균은 -5이고, 분산은 400이므로 표준
 편차는 $\sqrt{400}=20$ 이다.

즉, 확률변수 X 는 정규분포 $N(-5, 20^2)$ 을 따른다.

답 (1) $N(7, 12^2)$ (2) $N(-5, 20^2)$

11

두 학교 A, B의 정규분포곡선은 모두 직선 $x=m_1$ 에 대하
 여 대칭이고, 학교 C의 정규분포곡선은 직선 $x=m_2$ 에 대하
 여 대칭이므로

$$E(X_1)=E(X_2)=m_1, E(X_3)=m_2$$

이때 그림에서 $m_1 < m_2$ 이므로 X_1, X_2, X_3 의 평균 사이의 대소 관계는

$$E(X_1) = E(X_2) < E(X_3)$$

한편, 그림에서 두 학교 B, C의 정규분포곡선의 모양은 같고, 학교 A의 정규분포곡선이 두 학교 B, C의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이가 더 높다.

따라서 X_1, X_2, X_3 의 표준편차 사이의 대소 관계는

$$\sigma(X_1) < \sigma(X_2) = \sigma(X_3)$$

$$\text{답 } E(X_1) = E(X_2) < E(X_3),$$

$$\sigma(X_1) < \sigma(X_2) = \sigma(X_3)$$

12

$$(1) P(-1.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 2 \times 0.4332 = 0.8664$$

$$(2) P(Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

$$(3) P(Z \geq -1)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(Z \geq 0)$$

$$= 0.3413 + 0.5 = 0.8413$$

$$(4) P(-1 \leq Z \leq -0.5)$$

$$= P(0.5 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.3413 - 0.1915 = 0.1498$$

$$\text{답 } (1) 0.8664 \quad (2) 0.9772 \quad (3) 0.8413 \quad (4) 0.1498$$

13

(1) 확률변수 X 가 정규분포 $N(8, 4)$, 즉 $N(8, 2^2)$ 을 따르므로 확률변수 X 를 확률변수 Z 로 표준화하면

$$Z = \frac{X-8}{2}$$

$$(2) P(6 \leq X \leq 11)$$

$$= P\left(\frac{6-8}{2} \leq Z \leq \frac{11-8}{2}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$

$$\text{답 } (1) Z = \frac{X-8}{2} \quad (2) 0.7745$$

14

$$\sigma(-4X) = 20 \text{에서 } |-4| \times \sigma(X) = 20$$

$$4\sigma(X) = 20 \quad \therefore \sigma(X) = 5$$

$$\therefore \sigma = 5$$

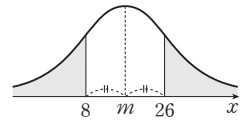
또한, 확률변수 X 의 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq 8) = P(X \geq 16 + 2\sigma),$$

$$\text{즉 } P(X \leq 8) = P(X \geq 26) \text{에서}$$

$$m = \frac{8+26}{2} = 17$$

$$\therefore m - 2\sigma = 17 - 2 \times 5 = 7$$



답 7

15

$$P(m-a \leq X \leq m) = P(m \leq X \leq m+a) \\ = 0.2$$

$$\text{또한, } P(X \geq m-b) = 0.75 \text{에서}$$

$$P(m-b \leq X \leq m) + P(X \geq m) = 0.75$$

$$P(m \leq X \leq m+b) + 0.5 = 0.75$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m+b) = 0.25$$

$$\therefore P(m-a \leq X \leq m+b)$$

$$= P(m-a \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+b)$$

$$= 0.2 + 0.25 = 0.45$$

답 0.45

16

$$F(x+12) - F(x) = P(X \leq x+12) - P(X \leq x) \\ = P(x \leq X \leq x+12)$$

이므로 $F(x+12) - F(x)$ 의 값이 최대가 되려면

$P(x \leq X \leq x+12)$ 가 최대이어야 한다.

이때 확률변수 X 의 평균이 30이므로 X 의 확률밀도함수는 $x=30$ 일 때 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=30$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(x \leq X \leq x+12)$ 가 최대가 되려면

$$\frac{x + (x+12)}{2} = 30$$

$$x+6=30 \quad \therefore x=24$$

답 24

17

확률변수 X 가 정규분포 $N(200, 30^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-200}{30}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(1) P(X \geq 140) = P\left(Z \geq \frac{140-200}{30}\right) \\ = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\ = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

$$(2) P(230 \leq X \leq 245) \\ = P\left(\frac{230-200}{30} \leq Z \leq \frac{245-200}{30}\right) \\ = P(1 \leq Z \leq 1.5) \\ = P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.4332 - 0.3413 = 0.0919$$

$$(3) |X - 200| \geq 15 \text{에서} \\ X - 200 \leq -15 \text{ 또는 } X - 200 \geq 15 \\ \therefore X \leq 185 \text{ 또는 } X \geq 215 \\ \therefore P(|X - 200| \geq 15) \\ = P(X \leq 185) + P(X \geq 215) \\ = P\left(Z \leq \frac{185-200}{30}\right) + P\left(Z \geq \frac{215-200}{30}\right) \\ = P(Z \leq -0.5) + P(Z \geq 0.5) = 2P(Z \geq 0.5) \\ = 2\{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5)\} \\ = 2 \times (0.5 - 0.1915) = 0.617$$

답 (1) 0.9772 (2) 0.0919 (3) 0.617

18

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(50, 5^2),$

$N(100, 10^2)$ 을 따르므로

$$P(40 \leq X \leq 55) + P(85 \leq Y \leq 120) \\ = P\left(\frac{40-50}{5} \leq \frac{X-50}{5} \leq \frac{55-50}{5}\right) \\ + P\left(\frac{85-100}{10} \leq \frac{Y-100}{10} \leq \frac{120-100}{10}\right) \\ = P(-2 \leq Z \leq 1) + P(-1.5 \leq Z \leq 2) - (*) \\ = \{P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1)\} \\ + \{P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 2)\} \\ = (0.4772 + 0.3413) + (0.4332 + 0.4772) \\ = 1.7289$$

답 1.7289

보충 설명

확률변수 X 가 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$Z_1 = \frac{X-50}{5}$ 이라 하면 확률변수 Z_1 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

또한, 확률변수 Y 가 정규분포 $N(100, 10^2)$ 을 따르므로

$Z_2 = \frac{Y-100}{10}$ 이라 하면 확률변수 Z_2 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2 가 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 이를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 하나의 확률변수 Z 를 이용하여 (*)와 같이 쓸 수 있다.

19

확률변수 X 가 정규분포 $N(42, \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-42}{\sigma}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따른다.

$$P(X \geq 30) = 0.8849 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{30-42}{\sigma}\right) = 0.8849$$

$$P\left(Z \geq -\frac{12}{\sigma}\right) = 0.8849$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) + P(Z \geq 0) = 0.8849$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) + 0.5 = 0.8849$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.3849$ 이므로

$$\frac{12}{\sigma} = 1.2 \quad \therefore \sigma = 10$$

답 10

20

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고

$$P(X \geq 42) = P(X \leq 48) \text{이므로}$$

$$m = \frac{42+48}{2} = 45$$

한편, $P(m \leq X \leq m+6) = 0.1915$ 에서

$$P\left(\frac{m-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+6-m}{\sigma}\right) = 0.1915$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0.1915$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이므로

$$\frac{6}{\sigma} = 0.5 \quad \therefore \sigma = 12$$

$$\therefore P(X \leq 57) = P\left(Z \leq \frac{57-45}{12}\right)$$

$$= P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

답 0.8413

21

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(20, \sigma^2), N(40, 4^2)$ 을 따르므로

$$V(X) = \sigma^2, V(Y) = 4^2 = 16$$

이때 $V(2X+3) = V(Y)$ 에서 $2^2 V(X) = V(Y)$ 이므로

$$4\sigma^2 = 16, \sigma^2 = 4 \quad \therefore \sigma = 2 \quad (\because \sigma > 0)$$

즉, Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하면

$$P(X \geq a) = P(Y \leq 48) \text{에서}$$

$$P\left(\frac{X-20}{2} \geq \frac{a-20}{2}\right) = P\left(\frac{Y-40}{4} \leq \frac{48-40}{4}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-20}{2}\right) = P(Z \leq 2)$$

$$\text{즉, } \frac{a-20}{2} = -2 \text{이므로 } a-20 = -4$$

$$\therefore a = 16$$

답 16

22

파인애플의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(1250, 50^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-1250}{50}$ 이라 하면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

파인애플의 무게가 1325g 이상일 확률은

$$P(X \geq 1325) = P\left(Z \geq \frac{1325-1250}{50}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

따라서 2500개의 파인애플 중 무게가 1325g 이상인 것의 개수는

$$2500 \times 0.0668 = 167$$

답 167

23

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

타이어 A의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$P(X \leq m-3) = 0.1587 \text{에서}$$

$$P(X \leq m-3) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{m-3-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq -\frac{3}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{3}{\sigma} = 1 \quad \therefore \sigma = 3$$

한편, 타이어 B의 무게를 Y kg이라 하면 확률변수 Y 는 정규분포 $N(m+6, (2\sigma)^2)$, 즉 $N(m+6, 6^2)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & P(m \leq Y \leq m+9) \\ &= P\left(\frac{m-(m+6)}{6} \leq \frac{Y-(m+6)}{6} \leq \frac{m+9-(m+6)}{6}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328 \end{aligned}$$

답 0.5328

24

수험생의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(156, 25^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-156}{25}$ 이라 하면 확률변수

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

응시한 인원 1000명 중 성적이 상위 300등 이내만 입학할 수 있으므로 입학하기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{300}{1000} = 0.3$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-156}{25}\right) = 0.3$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-156}{25}\right) = 0.3 \quad \leftarrow 0.3 < 0.5 \text{이므로 } \frac{k-156}{25} > 0 \text{이다.}$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-156}{25}\right) = 0.3$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-156}{25}\right) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$ 이므로

$$\frac{k-156}{25} = 0.52, \quad k-156 = 13$$

$$\therefore k = 169$$

따라서 이 학과에 입학하기 위한 최저 점수는 169점이다.

답 169점

25

학생들의 시험 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분

포 $N(m, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{15}$ 이라 하면 확률변

수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 보충 학습 대상이 될 확률이 0.16이므로

$$P(X \leq 40) = 0.16$$

$$P\left(Z \leq \frac{40-m}{15}\right) = 0.16$$

$$P\left(Z \geq \frac{m-40}{15}\right) = 0.16$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-40}{15}\right) = 0.16 \quad \leftarrow 0.16 < 0.5 \text{이므로 } \frac{m-40}{15} > 0 \text{이다.}$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-40}{15}\right) = 0.16$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-40}{15}\right) = 0.5 - 0.16 = 0.34$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$ 이므로

$$\frac{m-40}{15} = 1, \quad m-40 = 15 \quad \therefore m = 55$$

답 55

STEP 1

개념 마무리

본문 pp.169-171

07 7	08 ⑤	09 11	10 ⑤
11 0.1359	12 ④	13 66	14 155
15 0.0668	16 68	17 ④	18 10
19 91점	20 78점		

07

$$V\left(\frac{1}{5}X\right) = 1 \text{에서 } \frac{1}{25}V(X) = \frac{\sigma^2}{25} = 1$$

$$\sigma^2 = 25 \quad \therefore \sigma = 5 \quad (\because \sigma > 0)$$

이때 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq m-6) = P(X \geq 3m+2) \text{에서}$$

$$m = \frac{(m-6) + (3m+2)}{2}$$

$$2m = 4m - 4, \quad 2m = 4 \quad \therefore m = 2$$

$$\therefore m + \sigma = 2 + 5 = 7$$

답 7

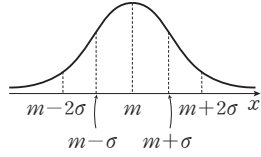
08

오른쪽 그림과 같이 확률변수

X 의 정규분포곡선은 직선

$x=m$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $P(X \geq m+\sigma) = a$ 에서



$$P(m \leq X \leq m+\sigma) = \frac{1}{2} - a \text{ 이므로}$$

$$P(m-2\sigma \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m-2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m+2\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a\right) = b$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma) = a + b - \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(m+\sigma \leq X \leq m+2\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m+2\sigma) - P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= \left(a + b - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - a\right)$$

$$= 2a + b - 1$$

답 ⑤

09

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수는 $x=m$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로 $P(k-6 \leq X \leq k)$ 가 최대가 되려면

$$\frac{(k-6)+k}{2} = m$$

$k=8$ 일 때 $P(k-6 \leq X \leq k)$ 가 최댓값을 가지므로

$$m = \frac{(8-6)+8}{2} = 5$$

한편, 확률변수 $Y = \frac{1}{3}X + 1$ 의 분산이 4이므로

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{3}X + 1\right) = \frac{1}{9}V(X) = 4$$

$$\therefore V(X) = \sigma^2 = 36$$

$$\therefore \sigma = 6 \quad (\because \sigma > 0)$$

$$\therefore m + \sigma = 5 + 6 = 11$$

답 11

10

ㄱ. 정규분포곡선에서 $E(X) = 10$, $E(Y) = 20$ 이므로

$$E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 10 + 5 = 25$$

$$E\left(\frac{1}{2}Y + 5\right) = \frac{1}{2}E(Y) + 5 = \frac{1}{2} \times 20 + 5 = 15$$

$$\therefore E(2X+5) \neq E\left(\frac{1}{2}Y + 5\right) \text{ (거짓)}$$

ㄴ. 표준편차의 값이 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양옆으로 퍼진 모양이 된다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 가운데 부분의 높이가 낮으므로

$$\sigma(X) > \sigma(Y)$$

이때 표준편차는 양의 값을 갖고 분산은 표준편차의 제곱이므로

$$V(X) > V(Y) \text{ (참)}$$

ㄷ. Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

$\sigma(X) = \sigma_1$ 이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(10, \sigma_1^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 10) &= P\left(\frac{0-10}{\sigma_1} \leq \frac{X-10}{\sigma_1} \leq \frac{10-10}{\sigma_1}\right) \\ &= P\left(-\frac{10}{\sigma_1} \leq Z \leq 0\right) \end{aligned}$$

$\sigma(Y) = \sigma_2$ 라 하면 확률변수 Y 는 정규분포 $N(20, \sigma_2^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(10 \leq Y \leq 20) &= P\left(\frac{10-20}{\sigma_2} \leq \frac{Y-20}{\sigma_2} \leq \frac{20-20}{\sigma_2}\right) \\ &= P\left(-\frac{10}{\sigma_2} \leq Z \leq 0\right) \end{aligned}$$

이때 ㄴ에서 $\sigma(X) > \sigma(Y)$, 즉 $\sigma_1 > \sigma_2$ 이므로

$$P\left(-\frac{10}{\sigma_1} \leq Z \leq 0\right) < P\left(-\frac{10}{\sigma_2} \leq Z \leq 0\right)$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq 10) < P(10 \leq Y \leq 20) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

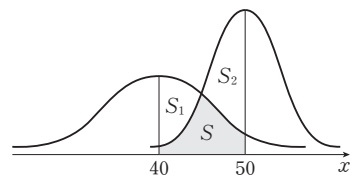
답 ⑤

11

오른쪽 그림에서 색

칠한 부분의 넓이를

S 라 하자.



$$P(40 \leq X \leq 50) = S_1 + S_2 \text{이므로}$$

$$S_1 = P(40 \leq X \leq 50) - S$$

$$\text{또한, } P(40 \leq Y \leq 50) = S_2 + S \text{이므로}$$

$$S_2 = P(40 \leq Y \leq 50) - S$$

$$\therefore S_2 - S_1$$

$$= \{P(40 \leq Y \leq 50) - S\} - \{P(40 \leq X \leq 50) - S\}$$

$$= P(40 \leq Y \leq 50) - P(40 \leq X \leq 50)$$

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하면

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(40, 10^2)$,

$N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$$S_2 - S_1 = P(40 \leq Y \leq 50) - P(40 \leq X \leq 50)$$

$$= P\left(\frac{40-50}{5} \leq \frac{Y-50}{5} \leq \frac{50-50}{5}\right) \\ - P\left(\frac{40-40}{10} \leq \frac{X-40}{10} \leq \frac{50-40}{10}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

답 0.1359

12

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, (2\sigma)^2)$,

$N(m+2, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$\neg. P(X \leq -2) = P\left(\frac{X-m}{2\sigma} \leq \frac{-2-m}{2\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq -\frac{m+2}{2\sigma}\right)$$

$$P\left(Y \geq \frac{3}{2}m+3\right)$$

$$= P\left(\frac{Y-(m+2)}{\sigma} \geq \frac{\frac{3}{2}m+3-(m+2)}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{\frac{1}{2}m+1}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{m+2}{2\sigma}\right)$$

이때 $-\frac{m+2}{2\sigma}$ 와 $\frac{m+2}{2\sigma}$ 는 크기가 같고 부호가 반대이

므로

$$P\left(Z \leq -\frac{m+2}{2\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{m+2}{2\sigma}\right)$$

$$\therefore P(X \leq -2) = P\left(Y \geq \frac{3}{2}m+3\right) \text{ (참)}$$

$$\neg. P(m \leq X \leq m+2) = P\left(\frac{m-m}{2\sigma} \leq Z \leq \frac{m+2-m}{2\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\frac{1}{2}P(m+2 \leq Y \leq m+4)$$

$$= \frac{1}{2}P\left(\frac{m+2-(m+2)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+4-(m+2)}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right)$$

$$\text{이때 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) \neq \frac{1}{2}P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) \text{이므로}$$

$$P(m \leq X \leq m+2) \neq \frac{1}{2}P(m+2 \leq Y \leq m+4) \text{ (거짓)}$$

$$\neg. P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-m}{2\sigma}\right)$$

$$P(Y \leq b) = P\left(Z \leq \frac{b-(m+2)}{\sigma}\right)$$

이때 $P(X \geq a) + P(Y \leq b) = 1$ 이라면

$$\frac{a-m}{2\sigma} = \frac{b-(m+2)}{\sigma} \text{ 이어야 하므로}$$

$$a-m = 2b-2m-4$$

$$\therefore 2b-a = m+4 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

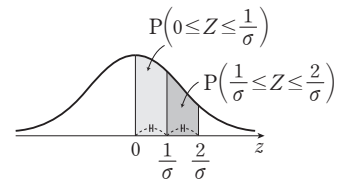
보충 설명

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) + P\left(\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) \text{이므로}$$

(*)에서 등호가 성립하려면

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = P\left(\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) \text{ 이어야 한다.}$$

그런데 확률변수 Z 가 표준정규분포를 따를 때, Z 의 확률밀도함수 $f(z)$ 는 $z > 0$ 에서 z 의 값이 커질수록 함숫값이 작아지므로 등호를 만족시키는 양수 σ 는 존재하지 않는다.



13

확률변수 X 의 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

조건 ㉞에서 $P(10 \leq X \leq 30) = P(50 \leq X \leq 70)$ 이므로

$$m = \frac{10+70}{2} = \frac{30+50}{2} = 40 \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

조건 ㉝에서 $P(X \leq 40 - \sigma) = P(X \geq 55)$ 이므로

$$\frac{(40 - \sigma) + 55}{2} = 40 \quad (\because \textcircled{㉞})$$

$$95 - \sigma = 80 \quad \therefore \sigma = 15$$

$$\text{즉, } P\left(\frac{5m+10}{\sigma} \leq X \leq 50\right) = P(30 \leq X \leq k) \text{에서}$$

$$P(14 \leq X \leq 50) = P(30 \leq X \leq k)$$

$$\text{따라서 } \frac{14+k}{2} = \frac{30+50}{2} = 40 \text{이어야 하므로}$$

$$14+k=80 \quad \therefore k=66$$

답 66

14

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

확률변수 X 의 정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq 3) = 0.3 \text{에서 } m > 3 \text{이고}$$

$$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{m-3}{\sigma}\right) \quad \leftarrow \begin{matrix} 0.3 < 0.5 \\ m > 3 \text{이므로} \\ \frac{3-m}{\sigma} < 0 \end{matrix}$$

$$= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right)$$

$$= 0.3$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$ 이

므로

$$\frac{m-3}{\sigma} = 0.52$$

$$\therefore m-3 = 0.52\sigma \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

또한, $P(3 \leq X \leq 80) = 0.3$ 에서

$$P(X \leq 3) + P(3 \leq X \leq 80) = 0.6 > 0.5$$

이므로 $3 < m < 80$ 이고

$$P(3 \leq X \leq 80)$$

$$= P\left(\frac{3-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) \quad \leftarrow 3 < m < 80 \text{이므로 } \frac{3-m}{\sigma} < 0, \frac{80-m}{\sigma} > 0$$

$$= P\left(\frac{3-m}{\sigma} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right)$$

$$= 0.2 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right)$$

$$= 0.3$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.25) = 0.1$ 이

므로

$$\frac{80-m}{\sigma} = 0.25$$

$$\therefore 80-m = 0.25\sigma \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞}$, $\textcircled{㉞}$ 을 연립하여 풀면 $m=55$, $\sigma=100$

$$\therefore m+\sigma=55+100=155$$

답 155

15

정규분포를 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수 $y=f(x)$

의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고 평균 m 으로부터의 거리가 가까울수록 함숫값은 커진다.

(i) $f(6) > f(12)$ 에서 6이 12보다 평균 m 에 더 가까워야 하므로

$$|6-m| < |12-m|$$

$$\text{즉, } (6-m)^2 < (12-m)^2 \text{에서}$$

$$m^2 - 12m + 36 < m^2 - 24m + 144$$

$$12m < 108 \quad \therefore m < 9$$

(ii) $f(0) < f(14)$ 에서 14가 0보다 평균 m 에 더 가까워야 하므로

$$|0-m| > |14-m|$$

$$\text{즉, } m^2 > (14-m)^2 \text{에서}$$

$$m^2 > m^2 - 28m + 196$$

$$28m > 196 \quad \therefore m > 7$$

(i), (ii)에서 $7 < m < 9$ 이고 m 은 자연수이므로

$$m=8$$

즉, 확률변수 X 는 정규분포 $N(8, 4^2)$ 을 따르므로
 $Z = \frac{X-8}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포
 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \leq 2) &= P\left(Z \leq \frac{2-8}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668\end{aligned}$$

답 0.0668

16

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.
 확률변수 X 는 정규분포 $N(30, 4\sigma^2)$, 즉 $N(30, (2\sigma)^2)$ 을
 따르므로

$$\begin{aligned}P(28 \leq X \leq 36) &= P\left(\frac{28-30}{2\sigma} \leq \frac{X-30}{2\sigma} \leq \frac{36-30}{2\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

확률변수 Y 는 정규분포 $N(36, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}P(a \leq Y \leq a+4) &= P\left(\frac{a-36}{\sigma} \leq \frac{Y-36}{\sigma} \leq \frac{a+4-36}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-36}{\sigma} \leq Z \leq \frac{a-32}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$P(28 \leq X \leq 36) = P(a \leq Y \leq a+4)$ 에서

$$P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-36}{\sigma} \leq Z \leq \frac{a-32}{\sigma}\right)$$

이때 두 확률이 같기 위해서는 두 구간의 위치가 일치하거나
 직선 $z=0$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

(i) 두 구간이 일치하는 경우

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sigma} &= \frac{a-36}{\sigma} \text{이고 } \frac{3}{\sigma} = \frac{a-32}{\sigma} \text{이어야 하므로} \\ a &= 35\end{aligned}$$

(ii) 두 구간이 직선 $z=0$ 에 대하여 대칭인 경우

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma} &= \frac{a-32}{\sigma} \text{이고 } -\frac{3}{\sigma} = \frac{a-36}{\sigma} \text{이어야 하므로} \\ a &= 33\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합은
 $35 + 33 = 68$

답 68

17

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

확률변수 Y 가 정규분포 $N(2m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$P(Y \leq m+4) = 0.3085$ 에서

$$\begin{aligned}P(Y \leq m+4) &= P\left(\frac{Y-2m}{\sigma} \leq \frac{m+4-2m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{4-m}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{m-4}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.3085\end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-4}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.3085 = 0.1915$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$

이므로

$$\frac{m-4}{\sigma} = 0.5 \quad \therefore \sigma = 2m - 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따르므로

$P(X \leq 8) + P(Y \leq 8) = 1$ 에서

$$\begin{aligned}P\left(Z \leq \frac{8-m}{2}\right) + P\left(Z \leq \frac{8-2m}{\sigma}\right) &= 1 \\ \text{즉, } \frac{8-m}{2} + \frac{8-2m}{\sigma} &= 0 \text{이어야 하므로}\end{aligned} \quad (*)$$

$$\sigma(8-m) + 2(8-2m) = 0$$

①을 위의 식에 대입하면

$$(2m-8)(8-m) + 2(8-2m) = 0$$

$$2m^2 - 20m + 48 = 0, \quad m^2 - 10m + 24 = 0$$

$$(m-4)(m-6) = 0 \quad \therefore m = 6 \quad (\because m > 5)$$

$$\therefore \sigma = 2m - 8 = 2 \times 6 - 8 = 4$$

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(6, 2^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X \leq \sigma) &= P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-6}{2}\right) \\ &= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587\end{aligned}$$

답 ④

보충 설명

(*)에서 확률변수 Z 의 정규분포곡선은 직선 $z=0$ 에 대하여
 대칭이므로 $P(Z \leq a) + P(Z \leq b) = 1$ 이면 두 값 a, b 는 서로
 절댓값이 같고 부호가 다른 값이어야 한다.

18

식빵 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(500, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-500}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

식빵의 무게가 490g 이상일 확률을 p 라 하면

$$\begin{aligned} p &= P(X \geq 490) \\ &= P\left(Z \geq \frac{490-500}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq -\frac{10}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이때 이 제과점에서 생산되는 식빵 10000개 중 정상 제품의 개수가 8413개이므로

$$10000 \times p = 8413 \quad \therefore p = 0.8413$$

$$\text{즉, } P\left(Z \geq -\frac{10}{\sigma}\right) = 0.8413 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} P\left(Z \geq -\frac{10}{\sigma}\right) &= P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.8413 \end{aligned}$$

이므로

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{10}{\sigma} = 1 \quad \therefore \sigma = 10$$

답 10

19

게임 대회 참가자의 예선 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(85, 5^2)$ 을 따른다.

참가자 300명 중 상위 36명 안에 들기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{36}{300} = 0.12$$

이때 $Z = \frac{X-85}{5}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P\left(Z \geq \frac{k-85}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-85}{5}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-85}{5}\right) = 0.12 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-85}{5}\right) = 0.5 - 0.12 = 0.38$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.38$ 이므로

$$\frac{k-85}{5} = 1.2, \quad k-85 = 6$$

$$\therefore k = 91$$

따라서 본선 진출 자격을 얻기 위한 최저 점수는 91점이다.

답 91점

단계	채점 기준	배점
(가)	확률변수 X 를 정하고 X 가 따르는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 구한 경우	20%
(나)	구하는 확률을 식으로 나타내고 X 를 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 표준화한 경우	50%
(다)	표준정규분포표를 이용하여 최저 점수를 구한 경우	30%

20

지원한 학생 200명의 입학 시험 점수를 X 점이라 하면 확률

변수 X 는 정규분포 $N(70, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-70}{4}$

이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 추가 합격자의 최저 점수가 76점이므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 76) &= P\left(Z \geq \frac{76-70}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07 \end{aligned}$$

즉, 200명의 지원자 중 시험 점수가 76점 이상인 지원자 수는 $200 \times 0.07 = 14$

이때 추가 합격자가 10명이므로 최초 합격자 수는

$$14 - 10 = 4$$

최초 합격자의 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{4}{200} = 0.02 \text{이므로}$$

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-70}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{4}\right) \\
 &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{4}\right) = 0.02 \\
 \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-70}{4}\right) &= 0.5 - 0.02 = 0.48 \\
 \text{이때 주어진 표준정규분포표에서 } P(0 \leq Z \leq 2) &= 0.48 \text{이므로} \\
 \frac{k-70}{4} &= 2, \quad k-70=8 \\
 \therefore k &= 78 \\
 \text{따라서 최초 합격자의 최저 점수는 78점이다.}
 \end{aligned}$$

답 78점

3 이항분포와 정규분포의 관계

기본 + 필수연습

본문 pp.173~175

- 26 (1) $N(150, 5^2)$ (2) $N(140, 10^2)$
 27 0.8185 28 (1) 0.0896 (2) 25
 29 0.9319 30 0.9772 31 365

26

$$(1) E(X) = 180 \times \frac{5}{6} = 150$$

$$V(X) = 180 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 25$$

이때 시행 횟수 180은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(150, 5^2)$ 을 따른다.

$$(2) E(X) = 490 \times \frac{2}{7} = 140$$

$$V(X) = 490 \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} = 100$$

이때 시행 횟수 490은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(140, 10^2)$ 을 따른다.

답 (1) $N(150, 5^2)$ (2) $N(140, 10^2)$

27

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(448, \frac{1}{8}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 448 \times \frac{1}{8} = 56$$

$$V(X) = 448 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = 49$$

이때 시행 횟수 448은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(56, 7^2)$ 을 따른다.

즉, $Z = \frac{X-56}{7}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 P(49 \leq X \leq 70) &= P\left(\frac{49-56}{7} \leq Z \leq \frac{70-56}{7}\right) \\
 &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185
 \end{aligned}$$

답 0.8185

28

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(25, \frac{4}{5}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$$

$$V(X) = 25 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 4$$

이때 시행 횟수 25는 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 2^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-20}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
 (1) P(X \leq 17) + P(X \geq 24) \\
 &= P\left(Z \leq \frac{17-20}{2}\right) + P\left(Z \geq \frac{24-20}{2}\right) \\
 &= P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 2) \\
 &= \{P(Z \leq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)\} \\
 &\quad + \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)\} \\
 &= (0.5 - 0.4332) + (0.5 - 0.4772) \\
 &= 0.0896
 \end{aligned}$$

$$(2) P(X \geq a) = 0.0062 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 P(X \geq a) &= P\left(Z \geq \frac{a-20}{2}\right) \\
 &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-20}{2}\right) \\
 &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-20}{2}\right) = 0.0062
 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-20}{2}\right) = 0.5 - 0.0062 = 0.4938$$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a-20}{2} = 2.5, a-20=5 \quad \therefore a=25$$

답 (1) 0.0896 (2) 25

29

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 24 \text{에서}$$

$$n \times \frac{1}{3} = 24 \quad \therefore n = 72$$

$$\therefore V(X) = 72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 16$$

이때 시행 횟수 $n=72$ 는 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$ 을 따른다.

즉, $Z = \frac{X-24}{4}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\frac{n}{4} \leq X \leq \frac{n}{2}\right) &= P(18 \leq X \leq 36) \\ &= P\left(\frac{18-24}{4} \leq Z \leq \frac{36-24}{4}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.4332 + 0.4987 \\ &= 0.9319 \end{aligned}$$

답 0.9319

30

전체 직원 1600명 중 구내식당에서 점심 식사를 하는 직원이 X 명이라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(1600, \frac{9}{10}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 1600 \times \frac{9}{10} = 1440$$

$$V(X) = 1600 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 144$$

이때 1600은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(1440, 12^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-1440}{12}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 식당에 온 직원들이 모두 식사를 하려면 구내식당에 온 직원의 수가 1464명 이하이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 1464) &= P\left(Z \leq \frac{1464-1440}{12}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

답 0.9772

31

9개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 검은 공의 개수가 2일 확률은

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_1}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(980, \frac{5}{14}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 980 \times \frac{5}{14} = 350$$

$$V(X) = 980 \times \frac{5}{14} \times \frac{9}{14} = 225$$

이때 980은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(350, 15^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-350}{15}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq n) \geq 0.8413$ 에서

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= P\left(Z \leq \frac{n-350}{15}\right) \\ &= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-350}{15}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-350}{15}\right) \geq 0.8413 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{n-350}{15}\right) \geq 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{n-350}{15} \geq 1, n-350 \geq 15 \quad \therefore n \geq 365$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 365이다.

답 365

STEP 1 개념 마무리

본문 p.176

21 ④ 22 0.0668 23 28 24 0.01
25 0.07

21

세 확률변수 X_1, X_2, X_3 의 평균과 분산을 각각 구하면 다음과 같다.

$$E(X_1) = 144 \times \frac{1}{2} = 72, V(X_1) = 144 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 36$$

$$E(X_2) = 162 \times \frac{4}{9} = 72, V(X_2) = 162 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = 40$$

$$E(X_3) = 192 \times \frac{3}{8} = 72, V(X_3) = 192 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 45$$

즉, 세 확률변수 X_1, X_2, X_3 은 각각 근사적으로 정규분포 $N(72, 36), N(72, 40), N(72, 45)$ 를 따른다.

이때 세 확률변수의 평균의 값이 모두 같으므로 세 정규분포 곡선의 대칭축의 위치는 모두 같다.

또한, 평균의 값이 일정할 때, 표준편차의 값이 커질수록 곡선의 가운데 부분의 높이가 낮아지고 양옆으로 퍼진 모양이 되므로 세 정규분포곡선을 바르게 나타낸 것은 ④이다.

답 ④

22

주어진 식은 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 에 대하여 $P(X \geq 92)$ 와 같다.

이때

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80, V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

이고, 시행 횟수 400은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다. 즉, $Z = \frac{X-80}{8}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} P(X \geq 92) &= P\left(Z \geq \frac{92-80}{8}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

답 0.0668

23

태블릿 PC 400대 중 충전이 충분하지 않은 태블릿 PC 수를 X 대라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{10} = 40$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 36$$

이때 400은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-40}{6}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq n) = 0.02$ 에서

$$\begin{aligned} P(X \leq n) &= P\left(Z \leq \frac{n-40}{6}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{40-n}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-n}{6}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-n}{6}\right) = 0.02 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-n}{6}\right) = 0.5 - 0.02 = 0.48$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{40-n}{6} = 2, 40-n = 12 \quad \therefore n = 28$$

답 28

24

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

이 공장에서 생산되는 인형의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(500, 25^2)$ 을 따르므로 인형의 무게가 450g 이하이거나 550g 이상일 확률은

$$\begin{aligned} &P(X \leq 450) + P(X \geq 550) \\ &= P\left(\frac{X-500}{25} \leq \frac{450-500}{25}\right) + P\left(\frac{X-500}{25} \geq \frac{550-500}{25}\right) \\ &= P(Z \leq -2) + P(Z \geq 2) \\ &= 2P(Z \geq 2) \\ &= 2\{0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)\} \\ &= 2 \times (0.5 - 0.48) \\ &= 2 \times 0.02 = 0.04 \end{aligned}$$

따라서 하루에 생산한 2400개의 인형 중 폐기 처분하는 인형의 개수를 Y 라 하면 확률변수 Y 는 이항분포 $B(2400, 0.04)$ 를 따르므로

$$E(Y) = 2400 \times 0.04 = 96$$

$$V(Y) = 2400 \times 0.04 \times 0.96 = \left(\frac{96}{10}\right)^2 = \left(\frac{48}{5}\right)^2$$

이때 2400은 충분히 크므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N\left(96, \left(\frac{48}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 120) &= P\left(\frac{Y-96}{\frac{48}{5}} \geq \frac{120-96}{\frac{48}{5}}\right) \\ &= P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.49 = 0.01 \end{aligned}$$

답 0.01

25

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 72회 던지는 시행에서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 72 \times \frac{1}{3} = 24, V(X) = 72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 16$$

이때 시행 횟수 72는 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-24}{4}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편, 72회 시행 후 얻은 점수를 Y 점이라 하면

$$Y = 10X - 2(72 - X) = 12X - 144$$

따라서 이 게임을 72회 시행한 후 216점 이상의 점수를 얻은 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 216) &= P(12X - 144 \geq 216) = P(X \geq 30) \\ &= P\left(Z \geq \frac{30-24}{4}\right) = P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07 \end{aligned}$$

답 0.07

STEP 2 개념 마무리

본문 p.177

1 1025

2 ④

3 50

4 0.0013

1

확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$P(x \leq X \leq 4) = a(4+x)(4-x)$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$P(0 \leq X \leq 4) = 16a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{16}$$

즉, $P(x \leq X \leq 4) = \frac{1}{16}(4+x)(4-x)$ ($0 \leq x \leq 4$)이므로

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 2a) &= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{8}\right) \\ &= P(0 \leq X \leq 4) - P\left(\frac{1}{8} \leq X \leq 4\right) \\ &= 1 - \frac{1}{16} \times \left(4 + \frac{1}{8}\right) \times \left(4 - \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 - \frac{1023}{1024} \\ &= \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

따라서 $p=1024$, $q=1$ 이므로

$$p+q=1024+1=1025$$

답 1025

2

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 3^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{3}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= P(X \geq m+3x) \\ &= P\left(Z \geq \frac{m+3x-m}{3}\right) \\ &= P(Z \geq x) \end{aligned}$$

$$\neg. f(0) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(a)=P(Z \geq a)$, $f(b)=P(Z \geq b)$ 이므로 $a < b$ 이면
 $P(Z \geq a) > P(Z \geq b)$
 $\therefore f(a) > f(b)$ (거짓)

ㄷ. $f(x)=P(Z \geq x) < \frac{1}{2}$ 이 성립하려면 $x > 0$ 이어야 한다.

$$-f(x) < \frac{1}{2} - 2f\left(\frac{x}{2}\right) \text{의 양변에 } \frac{1}{2} \text{을 더하면}$$

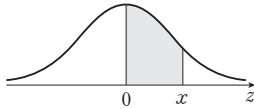
$$\frac{1}{2} - f(x) < 1 - 2f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 $P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} - f(x) = P(Z \geq 0) - P(Z \geq x)$$

$$= P(0 \leq Z \leq x) \quad (\because x > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

즉, $\frac{1}{2} - f(x)$ 의 값은 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



또한, $f\left(\frac{x}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{x}{2}\right)$ 이므로

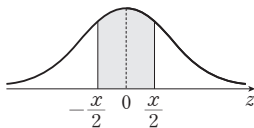
$$1 - 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \left\{ \frac{1}{2} - f\left(\frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$= 2 \left\{ P(Z \geq 0) - P\left(Z \geq \frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) \quad (\because x > 0)$$

$$= P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

즉, $1 - 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ 의 값은 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



㉠, ㉢에서 두 부분의 넓이를 비교하면 -(*)

$P(0 \leq Z \leq x) < P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$ 이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

$$\therefore -f(x) < \frac{1}{2} - 2f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

보충 설명

㉠에서

$$P(0 \leq Z \leq x) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) = P\left(\frac{x}{2} \leq Z \leq x\right)$$

㉢에서

$$P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq 0\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$$

이때 $P\left(\frac{x}{2} \leq Z \leq x\right) < P\left(0 \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$ 이므로 (*)에서

$$P(0 \leq Z \leq x) < P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$$

3

이 테니스 선수가 서브를 성공하는 횟수를 X 번이라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{a}{100}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 36 \times \frac{a}{100} = \frac{9}{25}a$$

$$V(X) = 36 \times \frac{a}{100} \times \left(1 - \frac{a}{100}\right) = \left\{ \frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50} \right\}^2$$

이때 36은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규

분포 $N\left(\frac{9}{25}a, \left\{ \frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50} \right\}^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq 24) = 0.0228$ 에서

$$P(X \geq 24) = P\left(Z \geq \frac{24 - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}\right)$$

$$= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{24 - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{24 - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{24 - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}}\right) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{24 - \frac{9}{25}a}{\frac{3\sqrt{a(100-a)}}{50}} = 2, \quad 24 - \frac{9}{25}a = \frac{3\sqrt{a(100-a)}}{25}$$

$$200 - 3a = \sqrt{a(100-a)} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하면

$$9a^2 - 1200a + 40000 = -a^2 + 100a$$

$$10a^2 - 1300a + 40000 = 0, \quad a^2 - 130a + 4000 = 0$$

$$(a-50)(a-80) = 0$$

$$\therefore a = 50 \quad (\because \textcircled{1} \text{에서 } a \leq \frac{200}{3})$$

답 50

다른 풀이

이 테니스 선수가 서브를 성공하는 횟수를 X 번, 서브 성공 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(36, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 36p, \quad V(X) = 36p(1-p) \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

한편, 이 테니스 선수의 서브 횟수 36은 충분히 크므로 확률변수 X 가 근사적으로 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하자.

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$$N(0, 1) \text{을 따르므로 } P(X \geq 24) = 0.0228 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 24) &= P\left(Z \geq \frac{24-m}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{24-m}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{24-m}{\sigma}\right) = 0.0228 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{24-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이때 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{24-m}{\sigma} = 2 \quad \therefore 24-m = 2\sigma \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

이때 ①에서 $m = 36p$, $\sigma = \sqrt{36p(1-p)} = 6\sqrt{p(1-p)}$ 이므로 이것을 ②에 대입하면

$$24 - 36p = 2 \times 6\sqrt{p(1-p)}$$

즉, $2 - 3p = \sqrt{p(1-p)}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$9p^2 - 12p + 4 = -p^2 + p$$

$$10p^2 - 13p + 4 = 0, \quad (5p-4)(2p-1) = 0$$

$$\therefore p = \frac{4}{5} \text{ 또는 } p = \frac{1}{2}$$

$p = \frac{4}{5}$ 이면 $m = \frac{144}{5}$, $\sigma = \frac{12}{5}$ 이므로 ②를 만족시키지 않는다.

따라서 $p = \frac{1}{2}$ 이므로 서브 성공 확률은 50%이다.

$$\therefore a = 50$$

4

한 개의 주사위를 한 번 던져 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 주사위를 180회 던지는 시행에서 6의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30, \quad V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25$$

이때 시행 횟수 180은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-30}{5}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편, 180회 시행 후 A와 B가 갖게 되는 돈을 각각 Y_A 원, Y_B 원이라 하면

$$\begin{aligned} Y_A &= 120000 + 600X - 200(180 - X) \\ &= 800X + 84000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_B &= 120000 - 600X + 200(180 - X) \\ &= -800X + 156000 \end{aligned}$$

이 게임을 180회 시행한 후 A와 B가 가진 금액이 같거나 A가 B보다 더 많은 금액을 갖고 있으려면

$$800X + 84000 \geq -800X + 156000 \text{에서}$$

$$1600X \geq 72000 \quad \therefore X \geq 45$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 45) &= P\left(Z \geq \frac{45-30}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 3) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 = 0.0013 \end{aligned}$$

답 0.0013

07. 통계적 추정

1 모평균의 추정

기본 + 필수연습

본문 pp.188~197

- 01 ㄱ, ㄷ, ㄹ 02 (1) 64 (2) 24 (3) 4
 03 평균 : 70, 분산 : 6, 표준편차 : $\sqrt{6}$
 04 0.9772 05 $119.02 \leq m \leq 120.98$ 06 2.58
 07 $\frac{31}{36}$ 08 3
 09 평균 : 4, 분산 : $\frac{5}{2}$, 표준편차 : $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 10 4 11 3 12 118.59 13 18
 14 14 15 0.8185 16 36
 17 $486.08 \leq m \leq 493.92$ 18 64
 19 74 20 64

01

ㄱ. 표본조사 ㄴ. 전수조사
 ㄷ. 표본조사 ㄹ. 표본조사
 따라서 표본조사가 적합한 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

02

(1) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(2) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_4P_3 = 24$$

(3) 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_3 = 4$$

답 (1) 64 (2) 24 (3) 4

03

$m=70$, $\sigma^2=144$ 에서 $\sigma=12$, $n=24$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 70, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{144}{24} = 6,$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{24}} = \sqrt{6}$$

답 평균 : 70, 분산 : 6, 표준편차 : $\sqrt{6}$

04

$m=100$, $\sigma=15$, $n=225$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 100, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{225}} = 1$$

즉, 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(100, 1^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 100}{1}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 102) &= P\left(Z \leq \frac{102-100}{1}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$

답 0.9772

05

$n=100$, $\bar{x}=120$, $\sigma=5$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$120 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \leq m \leq 120 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 119.02 \leq m \leq 120.98$$

답 $119.02 \leq m \leq 120.98$

06

$n=256$, $\sigma=8$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{256}} = 2.58$$

답 2.58

07

확률변수 $\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은 $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$

이므로

$$P(\bar{X} \leq 0) = P(\bar{X} = -1) + P\left(\bar{X} = -\frac{1}{2}\right) + P(\bar{X} = 0)$$

크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ —(*)

(i) $\bar{X} = -1$, 즉 $X_1 + X_2 = -2$ 일 때,

X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 가 $(-1, -1)$ 일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(ii) $\bar{X} = -\frac{1}{2}$, 즉 $X_1 + X_2 = -1$ 일 때,

X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 가 $(-1, 0), (0, -1)$ 일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

(iii) $\bar{X} = 0$, 즉 $X_1 + X_2 = 0$ 일 때,

X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 가 $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$ 일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{18} = \frac{31}{36}$$

답 $\frac{31}{36}$

다른 풀이

(*)에서 여사건의 확률을 이용하여

$P(\bar{X} \leq 0) = 1 - P(\bar{X} > 0)$ 으로 구할 수도 있다.

(i) $\bar{X} = \frac{1}{2}$, 즉 $X_1 + X_2 = 1$ 일 때,

X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 가 $(0, 1), (1, 0)$ 일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(ii) $\bar{X} = 1$, 즉 $X_1 + X_2 = 2$ 일 때,

X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 가 $(1, 1)$ 일 때이므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{36}\right) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

08

주머니에 숫자 2가 적힌 공 1개, 숫자 5가 적힌 공 n 개가 들어 있으므로 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 확률변수 X 라 하면

$$P(X=2) = \frac{1}{n+1}, P(X=5) = \frac{n}{n+1}$$

첫 번째 꺼낸 공에 적힌 숫자를 X_1 , 두 번째 꺼낸 공에 적힌 숫자를 X_2 , 세 번째 꺼낸 공에 적힌 숫자를 X_3 이라 하면

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$\bar{X} = 4$, 즉 $X_1 + X_2 + X_3 = 12$ 인 경우를 X_1, X_2, X_3 의 순서쌍 (X_1, X_2, X_3) 으로 나타내면

$(2, 5, 5), (5, 2, 5), (5, 5, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X}=4) &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \\ &\quad + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \\ &\quad + \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3n^2}{(n+1)^3} = \frac{27}{64} \end{aligned}$$

$$9(n+1)^3 = 64n^2$$

$$9n^3 + 27n^2 + 27n + 9 = 64n^2$$

$$9n^3 - 37n^2 + 27n + 9 = 0$$

$$(n-3)(9n^2 - 10n - 3) = 0$$

$$\therefore n = 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 3

09

정사면체를 한 번 던져서 정사면체가 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

모평균 m , 모분산 σ^2 을 구하면

$$m = 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4} = 4$$

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} + 7^2 \times \frac{1}{4} - 4^2 = 5$$

이때 표본의 크기 $n=2$ 이므로

$$E(\bar{X})=m=4$$

$$V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{5}{2}$$

$$\sigma(\bar{X})=\sqrt{V(\bar{X})}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

답 평균: 4, 분산: $\frac{5}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

다른 풀이

크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하고 $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$X_1 \backslash X_2$	1	3	5	7
1	1	2	3	4
3	2	3	4	5
5	3	4	5	6
7	4	5	6	7

따라서 $\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, $\bar{X}$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\bar{X}$	1	2	3	4	5	6	7	합계
$P(\bar{X}=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{4}{16} \\ &\quad + 5 \times \frac{3}{16} + 6 \times \frac{2}{16} + 7 \times \frac{1}{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= 1^2 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times \frac{2}{16} + 3^2 \times \frac{3}{16} + 4^2 \times \frac{4}{16} \\ &\quad + 5^2 \times \frac{3}{16} + 6^2 \times \frac{2}{16} + 7^2 \times \frac{1}{16} - 4^2 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma(\bar{X})=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

10

확률의 총합은 1이므로 $a+2a+3a+4a=1$ 에서

$$10a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{10}$$

즉, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

모평균 m , 모분산 σ^2 을 구하면

$$m=1 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 5 \times \frac{3}{10} + 7 \times \frac{4}{10} = 5$$

$$\sigma^2=1^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{2}{10} + 5^2 \times \frac{3}{10} + 7^2 \times \frac{4}{10} - 5^2 = 4$$

이때 표본의 크기 $n=9$ 이므로

$$V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{4}{9}$$

$$\therefore \frac{V(3\bar{X}-1)=3^2 V(\bar{X})}{V(a\bar{X}+b)=a^2 V(\bar{X})}=9 \times \frac{4}{9}=4$$

답 4

11

스무디 1잔의 제조 시간을 X 초라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(150, 12^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=9$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(150, \frac{12^2}{9})$, 즉 $N(150, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 Z 에 대하여 $Z=\frac{\bar{X}-150}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 142) &= P\left(Z \leq \frac{142-150}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -2) \end{aligned}$$

이때 $P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2)$ 이므로

$$P(\bar{X} \leq 142) = P(Z \geq k-1) \text{에서}$$

$$k-1=2 \quad \therefore k=3$$

답 3

12

라면 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(120, 6^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=64$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(120, \frac{6^2}{64})$, 즉 $N(120, (\frac{3}{4})^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 120}{\frac{3}{4}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq c) \leq 0.03$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{c-120}{\frac{3}{4}}\right) \leq 0.03$$

이때 $0.03 < 0.5$ 이므로 $\frac{c-120}{\frac{3}{4}} < 0$ 이고

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{c-120}{\frac{3}{4}}\right) &= P\left(Z \geq \frac{120-c}{\frac{3}{4}}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-c}{\frac{3}{4}}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-c}{\frac{3}{4}}\right) \leq 0.03 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-c}{\frac{3}{4}}\right) \geq 0.5 - 0.03 = 0.47$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.88) = 0.47$ 이므로

$$\frac{120-c}{\frac{3}{4}} \geq 1.88$$

$$120 - c \geq 1.88 \times \frac{3}{4} = 1.41$$

$$\therefore c \leq 120 - 1.41 = 118.59$$

따라서 상수 c 의 최댓값은 118.59이다.

답 118.59

13

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(20, \frac{4^2}{36}\right)$, 즉 $N\left(20, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$ 을

따르고, 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(12, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(12, 2^2)$

을 따르므로 $P(\bar{X} \geq a) = P(\bar{Y} \leq 18)$ 에서

$$P\left(\frac{\bar{X}-20}{\frac{2}{3}} \geq \frac{a-20}{\frac{2}{3}}\right) = P\left(\frac{\bar{Y}-12}{2} \leq \frac{18-12}{2}\right)$$

$$\therefore P\left(Z \geq \frac{a-20}{\frac{2}{3}}\right) = P(Z \leq 3)$$

이때 $P(Z \leq 3) = P(Z \geq -3)$ 이므로

$$\frac{a-20}{\frac{2}{3}} = -3 \quad \therefore a = 18$$

답 18

14

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(40, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(40, 4^2)$ 을 따르

고, 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(60, \frac{\sigma^2}{49}\right)$, 즉 $N\left(60, \left(\frac{\sigma}{7}\right)^2\right)$

을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 42) &= P\left(\frac{\bar{X}-40}{4} \leq \frac{42-40}{4}\right) \\ &= P(Z \leq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \geq 61) &= P\left(\frac{\bar{Y}-60}{\frac{\sigma}{7}} \geq \frac{61-60}{\frac{\sigma}{7}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{7}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{7}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{7}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이때 $P(\bar{X} \leq 42) + P(\bar{Y} \geq 61) = 1$ 이므로

$$\{0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.5)\} + \left\{0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{7}{\sigma}\right)\right\} = 1$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 0.5) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{7}{\sigma}\right)$$

따라서 $0.5 = \frac{7}{\sigma}$ 이므로 $\sigma = 14$

답 14

15

탑승객의 짐의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(20, 8^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=16$ 이므로 16명의

짐의 무게의 평균을 $\bar{X}$ kg이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(20, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(20, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 20}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(16 \leq \bar{X} \leq 22) &= P\left(\frac{16-20}{2} \leq Z \leq \frac{22-20}{2}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 + 0.3413 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

답 0.8185

16

휴대폰 배터리 1개의 수명을 X 시간이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(50, 4^2)$ 을 따르고, 표본의 크기가 n 이므로 n 개의 배터리 수명의 평균을 $\bar{X}$ 시간이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{4^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(50, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq 51) = 0.9332$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{51-50}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) &= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9332 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.9332 - 0.5 = 0.4332$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1.5$$

$$\sqrt{n} = 6 \quad \therefore n = 36$$

답 36

17

표본의 크기 $n = 25$, 표본평균 $\bar{x} = 490$, 모표준편차 $\sigma = 10$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$490 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}} \leq m \leq 490 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore 486.08 \leq m \leq 493.92$$

답 $486.08 \leq m \leq 493.92$

18

$n > 50$ 에서 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용할 수 있다.

표본평균 $\bar{x} = 60$, 표본표준편차 $s = 6$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$30 - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} \leq m \leq 30 + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}}$$

이때 주어진 신뢰구간이 $28.53 \leq m \leq 31.47$ 이므로

$$30 - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} = 28.53, \quad 30 + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} = 31.47$$

$$\text{즉, } 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{n}} = 1.47 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

답 64

19

$a - l \leq m \leq a + 2l$ 에서

$$(a + 2l) - (a - l) = 3l$$

즉, $3l$ 의 값은 신뢰도 99%로 추정된 모평균의 신뢰구간의 길이와 같다.

이때 모표준편차 $\sigma = 10$, 표본의 크기는 n 이므로

$$3l = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \quad \therefore l = \frac{17.2}{\sqrt{n}}$$

$$\text{그런데 } l < 2 \text{이므로 } \frac{17.2}{\sqrt{n}} < 2, \sqrt{n} > 8.6$$

$$\therefore n > 73.96$$

따라서 n 의 최솟값은 74이다.

n 은 자연수이다.

답 74

20

크기가 16인 표본으로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}=5 \quad (\text{단, } k \text{는 양수})$$

$$\therefore k\sigma=10 \quad \dots\dots\text{㉠}$$

크기가 n 인 표본으로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$d-c=2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$$

$$\text{㉠에서 } k\sigma=10 \text{이므로 } \frac{20}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{n}=8 \quad \therefore n=64$$

답 64

다른 풀이

신뢰도가 $\alpha\%$ 로 일정하고 신뢰구간의 길이 $d-c=\frac{5}{2}$ 는

$b-a=5$ 의 $\frac{1}{2}$ 배이므로 표본의 크기는 $2^2=4$ (배)가 되어야 한다.

$$\therefore n=16 \times 4=64$$

STEP 1 개념 마무리

본문 pp.198~200

01 9	02 $\frac{1}{9}$	03 8	04 37
05 8	06 ⑤	07 0.84	08 137
09 89	10 0.2119	11 0.1587	12 31
13 121.29	14 144	15 6	16 ②

01

크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\bar{X}$ 이므로 임의추출한 표본을 X_1, X_2 라 하고 $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ 의 값을 구하면 다음 표와 같다.

$X_1 \backslash X_2$	2	5	8	10
2	2	$\frac{7}{2}$	5	6
5	$\frac{7}{2}$	5	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$
8	5	$\frac{13}{2}$	8	9
10	6	$\frac{15}{2}$	9	10

따라서 서로 다른 $\bar{X}$ 는 2, $\frac{7}{2}$, 5, 6, $\frac{13}{2}$, $\frac{15}{2}$, 8, 9, 10이므로 그 개수는 9이다.

답 9

02

확률의 총합은 1이므로 $a+2b=1$ 에서

$$a=1-2b \quad \dots\dots\text{㉠}$$

크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면 $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\bar{X}=4$, 즉 $X_1+X_2=8$ 인 경우를 X_1, X_2 의 순서쌍 (X_1, X_2) 로 나타내면 (2, 6), (4, 4), (6, 2)이다.

(i) (2, 6) 또는 (6, 2)일 때,

이 경우의 확률은 $ab+ba=2ab$

(ii) (4, 4)일 때,

이 경우의 확률은 $b \times b=b^2$

이때 $P(\bar{X}=4)=\frac{1}{4}$ 이므로 (i), (ii)에서

$$2ab+b^2=\frac{1}{4}$$

위 등식에 ㉠을 대입하면 $2b(1-2b)+b^2=\frac{1}{4}$

$$-3b^2+2b=\frac{1}{4}, \quad 12b^2-8b+1=0$$

$$(2b-1)(6b-1)=0 \quad \therefore b=\frac{1}{2} \text{ 또는 } b=\frac{1}{6}$$

이 값을 ㉠에 대입하여 풀면

$$a=0, b=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{6}$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로

$$a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{6} \quad \therefore ab=\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

03

주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

모평균 m , 모분산 σ^2 을 구하면

$$m=1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 7^2 \times \frac{1}{5} + 9^2 \times \frac{1}{5} - 5^2 = 8$$

이때 표본의 크기 $n=25$ 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{8}{25}$$

$$\therefore V(5\bar{X}) = 5^2 V(\bar{X}) = 25 \times \frac{8}{25} = 8$$

답 8

04

모집단이 이항분포 $B(18, \frac{1}{3})$ 을 따르므로 모평균 m , 모분산 σ^2 을 구하면

$$m = 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$\sigma^2 = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$$

이때 표본의 크기 $n=4$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 6$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = 1$$

따라서 $V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 \\ &= 1 + 6^2 = 37 \end{aligned}$$

답 37

05

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{6} + a + b = 1$ 에서

$$a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모평균 m 을 구하면

$$m = 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times a + 6 \times b = 3a + 6b + \frac{1}{6}$$

$$E(\bar{X}) = m = \frac{14}{3} \text{이므로}$$

$$3a + 6b + \frac{1}{6} = \frac{14}{3}, \quad 3a + 6b = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a + 2b = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{6}, \quad b = \frac{2}{3}$$

(가)

모분산 σ^2 을 구하면

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{2}{3} - \left(\frac{14}{3}\right)^2 \\ &= \frac{35}{9} \end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 n 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{35}{9n}$$

(나)

$$V(\bar{X}) \leq \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{35}{9n} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore n \geq \frac{70}{9}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

(다)

답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	확률의 총합과 $E(\bar{X})$ 를 이용하여 a, b 의 값을 각각 구한 경우	40%
(나)	표본평균의 분산과 모분산의 관계를 이용하여 $V(\bar{X})$ 를 n 으로 나타낸 경우	40%
(다)	n 의 최솟값을 구한 경우	20%

06

모집단의 확률변수 X 가 정규분포 $N(300, 36^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=36$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = 300, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{36}{\sqrt{36}} = 6$$

$$\neg. E(X) + E(\bar{X}) = 300 + 300 = 600 \quad (\text{참})$$

$$\neg. \sigma(X) + \sigma(\bar{X}) = 36 + 6 = 42 \quad (\text{참})$$

ㄷ. Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 를 따르는 확률변수라 하자.

$$\begin{aligned} P(X \leq 336) &= P\left(\frac{X-300}{36} \leq \frac{336-300}{36}\right) \\ &= P(Z \leq 1) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편, 확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(300, 6^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 294) &= P\left(\frac{\bar{X}-300}{6} \leq \frac{294-300}{6}\right) \\ &= P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \geq 1) \quad \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} P(X \leq 336) + P(\bar{X} \leq 294) \\ &= P(Z \leq 1) + P(Z \geq 1) \\ &= 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

07

모집단이 정규분포 $N(m, 15^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=25$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{15^2}{25}\right)$, 즉 $N(m, 3^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-m}{3}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-m-3| \leq 6) \\ &= P(-3 \leq \bar{X}-m \leq 9) \\ &= P(-1 \leq \frac{\bar{X}-m}{3} \leq 3) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 3) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.3413 + 0.4987 = 0.84 \end{aligned}$$

답 0.84

08

모집단이 정규분포 $N(m, 3^2)$ 을 따르고, 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$|\bar{X}-m| \leq \frac{2}{3}$ 일 확률이 99% 이상이 되려면

$$P\left(|\bar{X}-m| \leq \frac{2}{3}\right) \geq 0.99$$

$$\begin{aligned} P\left(|\bar{X}-m| \leq \frac{2}{3}\right) &= P\left(-\frac{2}{3} \leq \bar{X}-m \leq \frac{2}{3}\right) \\ &= P\left(-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(-\frac{2\sqrt{n}}{9} \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{9}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{9}\right) \geq 0.99 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{2\sqrt{n}}{9}\right) \geq 0.495$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.6) = 0.495$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{n}}{9} \geq 2.6$$

$$\sqrt{n} \geq 11.7 \quad \therefore n \geq 136.89$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 137이다.

답 137

09

이 헬스장을 이용하는 회원들의 하루 운동 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(90, 10^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=225$ 이므로 225명의 하루 운동 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(90, \frac{10^2}{225}\right)$, 즉 $N\left(90, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-90}{\frac{2}{3}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이 헬스장의 회원 중에서 임의추출한 225명의 하루 운동 시간의 평균이 k 분 이상일 확률이 93%이므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq k) &= P\left(Z \geq \frac{k-90}{\frac{2}{3}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{3(k-90)}{2}\right) \\ &= 0.93 \end{aligned}$$

$0.93 > 0.5$ 이므로 $\frac{3(k-90)}{2} < 0$ 이고

$$\begin{aligned} P\left(Z \geq \frac{3(k-90)}{2}\right) &= P\left(Z \leq \frac{3(90-k)}{2}\right) \\ &= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{3(90-k)}{2}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{3(90-k)}{2}\right) = 0.93 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{3(90-k)}{2}\right) = 0.93 - 0.5 = 0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\frac{3(90-k)}{2} = 1.5 \quad \therefore k = 89$$

답 89

10

이 공장에서 생산한 생수 1병의 용량을 X mL라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(500, 10^2)$ 을 따르고, 표본의 크기 $n=25$ 이므로 생수 한 세트에 포함된 생수 25병의 용량의 평균을 $\bar{X}$ mL라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(500, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(500, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-500}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편, 생수 한 세트의 용량이 12460 mL 이하이면 불량품으로 판정하므로 임의로 선택한 생수 한 세트가 불량품으로 판정되려면 $25\bar{X} \leq 12460$, 즉 $\bar{X} \leq 498.4$ 이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 498.4) &= P\left(Z \leq \frac{498.4-500}{2}\right) \\ &= P(Z \leq -0.8) \\ &= P(Z \geq 0.8) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5 - 0.2881 = 0.2119 \end{aligned}$$

답 0.2119

11

Z 를 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수라 하자.

이 회사에서 생산하는 노트북 1대의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(900, 20^2)$ 을 따른다.

또한, 표본의 크기 $n=4$ 이므로 노트북 4대의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(900, \frac{20^2}{4}\right)$, 즉 $N(900, 10^2)$ 을 따른다.

이때 이 회사에서 생산하는 노트북 중에서 임의추출한 4대의 무게의 합이 x g 이하일 확률이 0.8413이므로

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \leq x) &= P\left(\bar{X} \leq \frac{1}{4}x\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X}-900}{10} \leq \frac{\frac{1}{4}x-900}{10}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{1}{40}x-90\right) = 0.8413 \end{aligned}$$

$0.8413 > 0.5$ 이므로 $\frac{1}{40}x-90 > 0$ 이고

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{1}{40}x-90\right) &= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{40}x-90\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{40}x-90\right) \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{40}x-90\right) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{1}{40}x-90 = 1 \quad \therefore \frac{1}{4}x = 910$$

따라서 임의로 선택한 노트북 1대의 무게가 $\left(\frac{1}{4}x + 10\right)$ g, 즉 920 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 920) &= P\left(\frac{X-900}{20} \geq \frac{920-900}{20}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

답 0.1587

12

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 주어진 신뢰구간이 $34.36 \leq m \leq 75.64$ 이므로

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 34.36, \quad \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 75.64$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$\bar{x}=55, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8$$

즉, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{에서}$$

$$55-1.96 \times 8 \leq m \leq 55+1.96 \times 8$$

$$55-15.68 \leq m \leq 55+15.68$$

$$\therefore 39.32 \leq m \leq 70.68$$

따라서 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간에 속하는 자연수는 40, 41, 42, ..., 70이므로 그 개수는 31이다.

답 31

13

$n > 50$ 에서 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5를 이용할 수 있다.

표본평균 $\bar{x}=20$, 표본표준편차 $s=5$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하면

$$20-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 20+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

이때 주어진 신뢰구간이 $18.71 \leq m \leq a$ 이므로

$$20-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 18.71 \text{에서}$$

$$2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 1.29$$

$$\sqrt{n}=10 \quad \therefore n=100$$

$$\text{또한, } 20+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = a \text{에서}$$

$$a=20+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{100}} = 21.29$$

$$\therefore n+a=100+21.29=121.29$$

답 121.29

14

모표준편차를 σ 라 하고, 표준정규분포를 따르는 확률변수

Z 에 대하여 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하자.

이때 표본의 크기는 81이고, 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 l 이므로

$$l=2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{81}} = \frac{2}{9}k\sigma$$

같은 신뢰도로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 $\frac{3}{4}l$ 이 되

도록 하는 표본의 크기를 n 이라 하면

$$\frac{3}{4}l=2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \frac{3}{4} \times \frac{2}{9}k\sigma = \frac{2}{\sqrt{n}}k\sigma$$

$$\sqrt{n}=12 \quad \therefore n=144$$

따라서 구하는 표본의 크기는 144이다.

답 144

15

모집단 A에서 임의추출한 크기가 n_1 인 표본으로 추정한 모평균 m_1 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

모집단 B에서 임의추출한 크기가 n_2 인 표본으로 추정한 모평균 m_2 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.6 \times \frac{2\sigma}{\sqrt{n_2}} = \frac{10.4\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

$$\text{즉, } \frac{4\sigma}{\sqrt{n_1}} > \frac{10.4\sigma}{\sqrt{n_2}} \text{이어야 하므로}$$

$$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} > 2.6, \quad \frac{n_2}{n_1} > 6.76$$

$$\therefore n_2 > 6.76n_1$$

따라서 $n_2 \geq 6n_1$ 을 항상 만족시키는 자연수 k 의 최댓값은 6이다.

답 6

16

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ㄱ. 표본의 크기 n 이 일정할 때, 신뢰도 $\alpha\%$ 를 높이면 k 의 값이 커지므로 ㉠의 값은 커진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다. (거짓)

ㄴ. ㉠에 n 대신 $4n$ 을 대입하면

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2} \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$ 배가 된다. (참)

ㄷ. 신뢰도 $\alpha\%$ 를 낮추면 k 의 값이 작아지고, 표본의 크기 n 이 커지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지므로 ㉠의 값은 작아진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

2 모비율의 추정

기본 + 필수연습

본문 pp.204-207

21 평균: $\frac{1}{4}$, 분산: $\frac{1}{400}$, 표준편차: $\frac{1}{20}$

22 0.0668 23 $0.0484 \leq p \leq 0.1516$

24 $0.451 \leq p \leq 0.549$ 25 0.6826 26 400

27 100 28 864

21

$p = \frac{1}{4}$, $n = 75$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = \frac{1}{4}$$

$$V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{75} = \frac{1}{400}$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{V(\hat{p})} = \sqrt{\frac{1}{400}} = \frac{1}{20}$$

답 평균: $\frac{1}{4}$, 분산: $\frac{1}{400}$, 표준편차: $\frac{1}{20}$

22

$p = \frac{1}{3}$, $n = 200$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = \frac{1}{3}$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{200}} = \frac{1}{30}$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{30}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \geq \frac{23}{60}) &= P\left(Z \geq \frac{\frac{23}{60} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{30}}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

답 0.0668

23

$n = 225$, $\hat{p} = 0.1$ 이고, 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$0.1 - 2.58 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{225}} \leq p \leq 0.1 + 2.58 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{225}}$$

$$\therefore 0.0484 \leq p \leq 0.1516$$

답 $0.0484 \leq p \leq 0.1516$

24

표본의 크기 $n = 400$, 표본비율 $\hat{p} = \frac{200}{400} = 0.5$ 이고, 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.5 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}} \leq p \leq 0.5 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}$$

$$\therefore 0.451 \leq p \leq 0.549$$

답 $0.451 \leq p \leq 0.549$

25

임의추출한 900개의 전구 중 수명이 6개월 이상인 것의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.9$, 표본의 크기 $n=900$ 이므로 $E(\hat{p})=p=0.9$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{900}} = 0.01$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.9, 0.01^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.9}{0.01}$ 라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(0.89 \leq \hat{p} \leq 0.91)$$

$$= P\left(\frac{0.89 - 0.9}{0.01} \leq Z \leq \frac{0.91 - 0.9}{0.01}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

답 0.6826

26

임의추출한 n 개의 사과 중 1등급인 것의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.8$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.8$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = \frac{0.4}{\sqrt{n}}$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.8, \left(\frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.8}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\hat{p} \geq 0.75) = 0.9938 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{0.75 - 0.8}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{\sqrt{n}}{8}\right) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)$$

$$= P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)$$

$$= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right)$$

$$= 0.9938$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.9938 - 0.5 = 0.4938$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{8} = 2.5 \text{에서}$$

$$\sqrt{n} = 20 \quad \therefore n = 400$$

답 400

27

표본비율 $\hat{p} = 0.5$ 이고, 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.5 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} \leq p \leq 0.5 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}}$$

$$\therefore 0.5 - \frac{0.98}{\sqrt{n}} \leq p \leq 0.5 + \frac{0.98}{\sqrt{n}}$$

이때 주어진 신뢰구간이 $0.402 \leq p \leq 0.598$ 이므로

$$0.5 - \frac{0.98}{\sqrt{n}} = 0.402, \quad 0.5 + \frac{0.98}{\sqrt{n}} = 0.598$$

$$\text{즉, } \frac{0.98}{\sqrt{n}} = 0.098 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 10 \quad \therefore n = 100$$

답 100

28

표본비율 $\hat{p} = 0.6$ 이고, 표본의 크기 n 은 충분히 크므로 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}$$

신뢰구간의 길이가 0.086 이하가 되어야 하므로

$$2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}} \leq 0.086$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \times 2.58 \times \sqrt{0.6 \times 0.4}}{0.086} = 12\sqrt{6}$$

$$\therefore n \geq 864$$

따라서 표본의 크기 n 의 최솟값은 864이다.

답 864

STEP 1 개념 마무리

본문 p.208

17	144	18	0.9544	19	400	20	38.4
21	150	22	45				

17

$p=0.9$ 이므로

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{n}} = \frac{0.3}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

이때 $\sigma(\hat{p})=0.025$ 이므로

$$\frac{0.3}{\sqrt{n}} = 0.025, \sqrt{n} = 12$$

$$\therefore n = 144$$

답 144

18

임의추출한 주민 100명 중 새로운 정책에 찬성하는 주민의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하자.

모비율 $p=0.5$, 표본의 크기 $n=100$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.5$$

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.05\end{aligned}$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.5, 0.05^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p}-0.5}{0.05}$ 라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\frac{40}{100} \leq \hat{p} \leq \frac{60}{100}\right) &= P(0.4 \leq \hat{p} \leq 0.6) \\ &= P\left(\frac{0.4-0.5}{0.05} \leq Z \leq \frac{0.6-0.5}{0.05}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times 0.4772 = 0.9544\end{aligned}$$

답 0.9544

19

모비율 $p=0.2$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.2$$

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{n}} = \frac{0.4}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2, \left(\frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

즉, $Z = \frac{\hat{p}-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}$ 라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로 표준정

규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(|\hat{p}-0.2| \leq 0.04) \geq 0.9544$$
에서

$$P(-0.04 \leq \hat{p}-0.2 \leq 0.04) \geq 0.9544$$

$$P\left(-\frac{0.04}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\hat{p}-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}} \leq \frac{0.04}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0.9544$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{10} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) \geq 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) \geq 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) \geq 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{10} \geq 2 \text{에서 } \sqrt{n} \geq 20 \quad \therefore n \geq 400$$

따라서 조건을 만족시키는 n 의 최솟값은 400이다.

답 400

20

임의추출한 400명 중 매일 아침 커피를 마시는 사람의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.36$, 표본의 크기 $n=400$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.36$$

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{p}) &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{400}} = 0.024\end{aligned}$$

표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.36, 0.024^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p} - 0.36}{0.024}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 근사적으로

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P\left(\hat{p} \geq \frac{a}{100}\right) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{\frac{a}{100} - 0.36}{0.024}\right) = P\left(Z \geq \frac{5a - 180}{12}\right) = 0.1587$$

이때 $0.1587 < 0.5$ 이므로 $\frac{5a - 180}{12} > 0$ 이고

$$\begin{aligned} P\left(Z \geq \frac{5a - 180}{12}\right) &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5a - 180}{12}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5a - 180}{12}\right) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{5a - 180}{12}\right) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{5a - 180}{12} = 1$$

$$5a - 180 = 12, \quad 5a = 192$$

$$\therefore a = 38.4$$

답 38.4

21

$\beta - \alpha$ 의 값은 신뢰도 95%로 추정된 모바일의 신뢰구간의 길이와 같다.

이때 표본비율 $\hat{p} = 0.4$ 이고, 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}}$$

신뢰구간의 길이가 0.1568 이상이 되어야 하므로

$$2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}} \geq 0.1568$$

$$\sqrt{n} \leq \frac{2 \times 1.96 \times \sqrt{0.4 \times 0.6}}{0.1568} = 5\sqrt{6}$$

$$\therefore n \leq 150$$

따라서 조건을 만족시키는 n 의 최댓값은 150이다.

답 150

22

표본의 크기를 n , 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$n = 225, \quad \hat{p} = \frac{k}{225} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.6 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{225}}$$

이때 신뢰구간의 길이가 0.104 이하가 되어야 하므로

$$2 \times 2.6 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{225}} \leq 0.104$$

$$\frac{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}{15} \leq 0.02, \quad \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})} \leq 0.3$$

양변을 제곱하면

$$\hat{p} - \hat{p}^2 \leq 0.09, \quad 100\hat{p}^2 - 100\hat{p} + 9 \geq 0$$

$$(10\hat{p} - 1)(10\hat{p} - 9) \geq 0$$

$$\therefore \hat{p} \leq \frac{1}{10} \quad \text{또는} \quad \hat{p} \geq \frac{9}{10}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{k}{225} \leq \frac{1}{10} \quad \text{또는} \quad \frac{k}{225} \geq \frac{9}{10} \text{이므로}$$

$$k \leq 22.5 \quad \text{또는} \quad k \geq 202.5$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k 는

1, 2, 3, ..., 22와 203, 204, 205, ..., 225이므로 그 개수는 45이다.

답 45

STEP 2

개념 마무리

본문 p.209

1 ④

2 28

3 100

4 0.98

1

모집단이 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르고, 표본의 크기가 n 이

므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

ㄱ. $m=0, n=4$ 일 때, $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(0, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(4) &= P\left(\bar{X} \geq \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = P\left(\bar{X} \geq \frac{1}{2}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{\frac{1}{2}}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

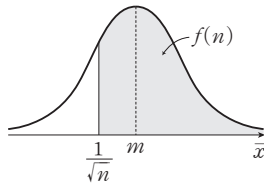
$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } f(n) &= P\left(\bar{X} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{1 - m\sqrt{n}}{4}\right) \end{aligned}$$

이때 $m \leq 0$ 이면 $n_1 > n_2$ 일 때 $f(n_1) \leq f(n_2)$ 이다.

(거짓)

ㄷ. $f(n) = P\left(\bar{X} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{2}$ 이 성립하려면 다음 그림과

같이 $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq m$ 이어야 한다.



이때 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ 이므로

$$m \geq \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \quad \therefore m > 0 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

2

확률변수 X 는 정규분포 $N(30, 3^2)$ 을 따르므로 이 제과점에서 판매하는 과자 한 상자에 담긴 9개의 과자 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(30, \frac{3^2}{9}\right)$, 즉 $N(30, 1^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 30}{1}$ 이라 하면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 제과점에서 판매하는 과자 한 상자에는 임의추출한 9개의 과자가 들어 있고, 한 상자의 무게가 254.16g 이하이거나 284.04g 이상이면 반품되므로 제과점에서 판매하는 상자 하나가 반품될 확률은

$$\begin{aligned} &P(9\bar{X} \leq 254.16 \text{ 또는 } 9\bar{X} \geq 284.04) \\ &= P(\bar{X} \leq 28.24 \text{ 또는 } \bar{X} \geq 31.56) \\ &= P(\bar{X} \leq 28.24) + P(\bar{X} \geq 31.56) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 28.24 - 30) + P(Z_{\bar{X}} \geq 31.56 - 30) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq -1.76) + P(Z_{\bar{X}} \geq 1.56) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 1.76) + P(Z_{\bar{X}} \geq 1.56) \\ &= \{P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.76)\} \\ &\quad + \{P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.56)\} \\ &= (0.5 - 0.46) + (0.5 - 0.44) \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

즉, 확률변수 Y 는 이항분포 $B(400, 0.1)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 400 \times 0.1 = 40$$

$$V(Y) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36$$

표본의 크기가 충분히 크므로 확률변수 Y 는 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

$Z_Y = \frac{Y - 40}{6}$ 이라 하면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(Y \leq n) \leq 0.02$ 에서

$$P\left(Z_Y \leq \frac{n - 40}{6}\right) \leq 0.02$$

이때 $0.02 < 0.5$ 이므로 $\frac{n - 40}{6} < 0$ 이고

$$\begin{aligned} P\left(Z_Y \leq \frac{n - 40}{6}\right) &= P\left(Z_Y \geq \frac{40 - n}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{40 - n}{6}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{40 - n}{6}\right) \leq 0.02 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{40 - n}{6}\right) \geq 0.5 - 0.02 = 0.48$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z_Y \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{40 - n}{6} \geq 2, \quad 40 - n \geq 12$$

$$\therefore n \leq 28$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 28이다.

답 28

3

$$E(\hat{p}_1)=p, \sigma(\hat{p}_1)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{400}}=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{20}$$

이때 표본의 크기 400이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_1$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(p, \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{20}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$E(\hat{p}_2)=p, \sigma(\hat{p}_2)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

이때 표본의 크기 n 이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_2$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(p, \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right)^2\right)$ 을 따른다.

Z 가 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수일 때, 두 확

률변수 $\frac{\hat{p}_1-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{20}}, \frac{\hat{p}_2-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}}$ 는 모두 근사적으로 표

준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(|\hat{p}_1-p| \leq 2k) \geq P(|\hat{p}_2-p| \leq 4k) \text{에서}$$

$$P(-2k \leq \hat{p}_1-p \leq 2k) \geq P(-4k \leq \hat{p}_2-p \leq 4k)$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{-40k}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{40k}{\sqrt{p(1-p)}}\right) &= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{40k}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\geq P\left(\frac{-4k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{4k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{4k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{40k}{\sqrt{p(1-p)}}\right) &\geq P\left(0 \leq Z \leq \frac{4k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{40k}{\sqrt{p(1-p)}} \geq \frac{4k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \text{이므로}$$

$$10 \geq \sqrt{n} \quad \therefore n \leq 100$$

따라서 조건을 만족시키는 n 의 최댓값은 100이다.

답 100

4

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\begin{aligned} P(-2 \leq Z \leq 2) &= 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times 0.48 = 0.96 \end{aligned}$$

즉, 신뢰도 96%로 추정된 모바일의 신뢰구간의 길이가 0.04이면

$$2 \times 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1600}} = 0.04, \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = 0.4$$

$$\hat{p} - \hat{p}^2 = 0.16, 100\hat{p}^2 - 100\hat{p} + 16 = 0$$

$$25\hat{p}^2 - 25\hat{p} + 4 = 0, (5\hat{p} - 1)(5\hat{p} - 4) = 0$$

$$\therefore \hat{p} = 0.2 \quad (\because 0 < \hat{p} < 0.5)$$

처음 임의추출한 1600명의 사용자를 모집단으로 하여 400명을 임의추출할 때, 모바일이 0.2이므로 400명의 표본비율을 $\hat{q}$ 이라 하면

$$E(\hat{q}) = 0.2, \sigma(\hat{q}) = \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{400}} = 0.02$$

이때 표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{q}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.02^2)$ 을 따른다.

즉, $Z = \frac{\hat{q} - 0.2}{0.02}$ 라 하면 Z 는 근사적으로 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\hat{q} \geq \frac{64}{400}\right) &= P(\hat{q} \geq 0.16) \\ &= P\left(Z \geq \frac{0.16 - 0.2}{0.02}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.48 = 0.98 \end{aligned}$$

답 0.98

다른 풀이

(*)에서 $\hat{p} = 0.2$ 이므로 처음 임의추출한 1600명 중 임의추출한 한 명이 주 1회 이상 웹툰을 열람하는 사용자일 확률이 0.2이다.

이들 중 400명을 임의추출할 때, 이들 중 주 1회 이상 웹툰을 열람하는 사용자의 수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(400, 0.2)$ 를 따르므로

$$E(X) = 400 \times 0.2 = 80$$

$$V(X) = 400 \times 0.2 \times 0.8 = 64$$

표본의 크기가 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X - 80}{8}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 64) &= P\left(Z \geq \frac{64 - 80}{8}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.48 = 0.98 \end{aligned}$$