b l a c k l a b e l

A n s w e r

정답과 해설

1등급을 위한 명품 수학

블랙라벨

Speed Check

Ⅰ 이차곡선

01. 포물선

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.9

01 ③ 02 ① 03 15 04 ③
05 $x^2=4(y-1)$ 06 ② 07 ①
08 9

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.10~13

01 145 02 ① 03 12 04 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 05 15 06 14 07 ① 08 ④
09 $\frac{129}{8}$ 10 9 11 ④ 12 $\frac{125}{8}$ 13 $5\sqrt{2}$ 14 ⑤ 15 ① 16 1
17 $y^2=-10x+25$ (단, $x\neq1$) 18 ② 19 ④ 20 −13 21 4
22 ② 23 3 24 ① 25 −36 26 ② 27 ④ 28 $y^2=x+1$

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.14

01 10 02 72 03 $\frac{1}{9}$ 04 14 05 145
06 2

이것이 수능 p.15

1 8 2 50
3 ⑤ 4 32

02. 타원

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.17

01 18 02 ⑤ 03 ①
04 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 05 ③ 06 ③
07 $\frac{17}{8}$ 08 ①

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.18~21

01 ③ 02 $\sqrt{2}$ 03 ② 04 14 05 ② 06 4 07 $\frac{9}{2}$ 08 8
09 ② 10 9 11 72 12 ③ 13 5 14 ⑤ 15 ⑤ 16 ③
17 $\frac{8}{3}$ 18 26 19 $6\sqrt{2}$ 20 $4x+2y=1$ 21 ② 22 $\frac{21}{2}$ 23 2
24 ① 25 ②

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.22

01 $\frac{125}{2}$ 02 $\frac{25}{18}$ 03 ② 04 186 05 16
06 ④

이것이 수능 p.23

1 14 2 8
3 ⑤ 4 ②

03. 쌍곡선

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.25

01 ③ 02 2 03 ③ 04 ②
05 ① 06 ① 07 9 08 $36\sqrt{2}$

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.26~30

01 ④ 02 −8 03 ⑤ 04 ② 05 ⑤ 06 ③ 07 12 08 2π
09 104 10 ④ 11 $2\sqrt{2}$ km 12 ① 13 $y=\frac{1}{2}x$ 14 ②
15 $y=-\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}$ 16 $\sqrt{5}$ 17 ⑤ 18 4 19 ①
20 $\{(a, b)\,|\,a^2-b^2>-1,\ a\neq\pm b\}$ 21 ④ 22 ③ 23 2 24 ③
25 −2 26 3 27 9 28 $\frac{35\sqrt{3}}{6}$ 29 $\sqrt{6}$ 30 −5 31 ⑤

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.31

01 $6\sqrt{6}$ 02 $120\sqrt{2}$ 03 풀이 참조
04 ③ 05 ⑤

이것이 수능 p.32

1 54 2 116
3 ②

Ⅱ 평면벡터

04. 벡터의 연산

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.37

01 325 02 ① 03 ⑤ 04 ③
05 ④ 06 ③ 07 5 08 13

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.38~41

01 12 02 ② 03 ⑤ 04 8 05 ③ 06 ③ 07 15 08 28
09 ④ 10 ④ 11 60 12 ③ 13 ② 14 6 15 ③ 16 ①
17 ⑤ 18 6 19 8 20 21π 21 ③ 22 $7\sqrt{3}$ 23 ① 24 6
25 3

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.42

01 73 02 4 03 48 04 53 05 28
06 $\frac{32}{5}$

이것이 수능 p.43

1 ⑤ 2 ③
3 ③ 4 ④

05. 평면벡터의 성분과 내적

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.46

01 ② 02 8 03 ⑤ 04 $4\sqrt{15}$
05 16 06 ③ 07 ① 08 ③

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.47~51

01 $\frac{15}{4}$ 02 2 03 ④ 04 14 05 ⑤ 06 ③ 07 $2\sqrt{7}$ 08 ③
09 8 10 6π 11 $6\sqrt{5}$ 12 ① 13 ① 14 ② 15 $\frac{2}{5}$ 16 ①
17 ④ 18 ② 19 $\frac{20}{19}$ 20 92 21 60 22 18 23 ③ 24 100
25 ⑤ 26 ② 27 ⑤ 28 ⑤ 29 ④ 30 5 31 -150 32 4
33 ④

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.52

01 $4\sqrt{2}$ 02 $-4\sqrt{149}$ 03 24 04 ③
05 ②

이것이 수능 p.53

1 ③ 2 ⑤
3 486 4 40

Ⅲ 공간도형과 공간좌표

06. 공간도형

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.57

01 14 02 ⑤ 03 2 04 ②
05 ⑤ 06 ② 07 ②

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.58~62

01 ⑤ 02 ② 03 1 04 ⑤ 05 32 06 $\frac{25}{63}$ 07 ③ 08 ②
09 13 10 ③ 11 ⑤ 12 8 13 40 14 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 15 ⑤ 16 ③
17 ③ 18 22 19 $\frac{65}{2}$ 20 ④ 21 $2\sqrt{2}\pi$ 22 $2\sqrt{3}$ 23 32 24 ②
25 $8\sqrt{3}\pi+9$ 26 $\frac{80}{3}\pi+8\sqrt{3}$ 27 30 28 ③ 29 ④

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.63

01 10 02 $\frac{1}{3}$ 03 $2\sqrt{6}\pi$ 04 $2\sqrt{3}\pi$ 05 26
06 3

이것이 수능 p.64

1 28 2 8

07. 공간좌표

Step 1 / 우수 기출 대표 문제 p.66

01 ④ 02 $2\sqrt{2}$ 03 ① 04 $\sqrt{33}$
05 350 06 ④ 07 ③ 08 ②

Step 2 / 최고의 변별력 문제 pp.67~70

01 $-6\sqrt{6}$ 02 ② 03 13 04 7 05 ⑤ 06 ① 07 13
08 $\frac{1}{2}$ 09 $\frac{18}{5}$ 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 4 14 $\frac{\sqrt{62}}{3}$ 15 3
16 21 17 ③ 18 6 19 ③ 20 ② 21 ④ 22 22 23 $\frac{24}{25}$
24 ③ 25 7 26 ④

Step 3 / 종합 사고력 문제 p.71

01 3 02 $2\sqrt{29}-2$ 03 $108\pi+72$
04 ③ 05 20 06 ⑤

이것이 수능 p.72

1 ⑤ 2 ②
3 ② 4 40

I 이차곡선

01 포물선

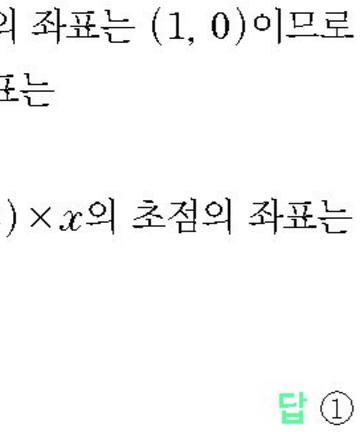
Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 9

01 ③ 02 ① 03 15 04 ③
05 $x^2=4(y-1)$ 06 ② 07 ① 08 9

01 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심 $(3, 0)$을 초점으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은
$y^2=4\times3\times x$, 즉 $y^2=12x$
위의 포물선이 점 $(k, 6)$을 지나므로
$36=12k$ $\therefore k=3$ 답 ③

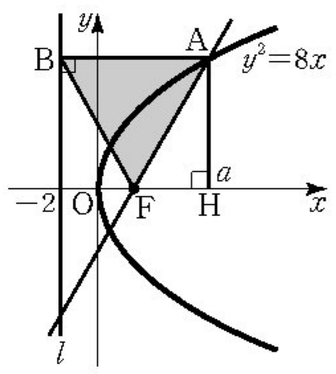
02 포물선 $y^2=4(x-a)$는 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$의 초점의 좌표는 $(1, 0)$이므로
포물선 $y^2=4(x-a)$의 초점의 좌표는
$(1+a, 0)$ ……㉠
한편, 포물선 $y^2=-8x=4\times(-2)\times x$의 초점의 좌표는
$(-2, 0)$ ……㉡
㉠, ㉡이 일치하므로
$1+a=-2$ $\therefore a=-3$ 답 ①

03 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.
세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 x좌표가 3이므로
$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=3$
$\therefore a_1+a_2+a_3=9$
한편, 점 A에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AH}$
이므로
$\overline{AF}=a_1+2$
같은 방법으로
$\overline{BF}=a_2+2$, $\overline{CF}=a_3+2$
$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}=(a_1+a_2+a_3)+6$
$=9+6=15$ 답 15



04 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$이고, 준선 l의 방정식은 $x=-2$이다.
점 $F(2, 0)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은
$y=\sqrt{3}(x-2)$
이것을 $y^2=8x$에 대입하면
$3(x-2)^2=8x$, $3x^2-20x+12=0$
$(3x-2)(x-6)=0$
$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=6$
그런데 점 A의 x좌표는 점 F의 x좌표인 2보다 커야 하므로 $x=6$이다.
이때, 포물선의 정의에 의하여
$\overline{AF}=\overline{AB}=6+2=8$
한편, 직선 AF의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이고, $\overline{AB}$는 x축에 평행하므로 $\angle BAF=60^\circ$ ($\because$ 엇각)
따라서 $\triangle ABF$는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로 구하는 넓이는
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$ 답 ③

• 다른풀이 •
포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$이고, 준선 l의 방정식은 $x=-2$이다.
점 A의 x좌표를 a라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OF}=2$이므로 $\overline{FH}=a-2$
직선 AF의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이고 $\triangle AFH$에서
$\overline{AF}=2(a-2)$, $\overline{AH}=\sqrt{3}(a-2)$
이때, 점 A의 x좌표가 a이므로
$\overline{AB}=a+2$
포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AB}$이므로
$2(a-2)=a+2$에서 $a=6$
따라서 $\overline{AB}=8$, $\overline{AH}=4\sqrt{3}$이므로 삼각형 ABF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$



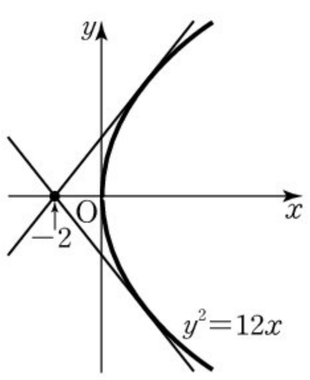
05 원의 중심 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P와 점 $(0, 2)$ 사이의 거리는 점 P와 x축 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|y|$
위의 식의 양변을 제곱하면
$x^2+y^2-4y+4=y^2$ $\therefore x^2=4(y-1)$
답 $x^2=4(y-1)$

• 다른풀이 •
원의 중심 P의 좌표를 (a, b)라 하면 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|b|$이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

위의 원이 점 $(0, 2)$를 지나므로
$(-a)^2+(2-b)^2=b^2$, $a^2-4b+4=0$
$\therefore a^2=4(b-1)$
따라서 조건을 만족시키는 점 P의 자취의 방정식은
$x^2=4(y-1)$

06 $y=ax+2a$를 $y^2=12x$에 대입하면
$(ax+2a)^2=12x$에서 $a^2x^2+4a^2x+4a^2=12x$
$\therefore a^2x^2+2(2a^2-6)x+4a^2=0$ ……㉠
(i) $a=0$일 때,
㉠에서 $-12x=0$
$\therefore x=0$
즉, 직선과 포물선은 점 $(0, 0)$에서 만나므로
$f(0)=1$
(ii) $a\neq0$일 때,
x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2a^2-6)^2-a^2\times4a^2$
$=-24a^2+36$
$=-24\left(a+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(a-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
① 직선과 포물선이 서로 다른 두 점에서 만날 때,
이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$\frac{D}{4}>0$에서 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$
② 직선과 포물선이 한 점에서 만날 때,
이차방정식 ㉠이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4}=0$에서 $a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$
③ 직선과 포물선이 만나지 않을 때,
이차방정식 ㉠이 허근을 가지므로
$\frac{D}{4}<0$에서 $a<-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $a>\frac{\sqrt{6}}{2}$
(i), (ii)에서 $f(-1)=f(1)=2$, $f(0)=1$,
$f(-3)=f(-2)=f(2)=f(3)=0$이므로
$f(-3)+f(-2)+f(-1)+\cdots+f(3)$
$=2\times2+1\times1+0\times4=5$ 답 ②

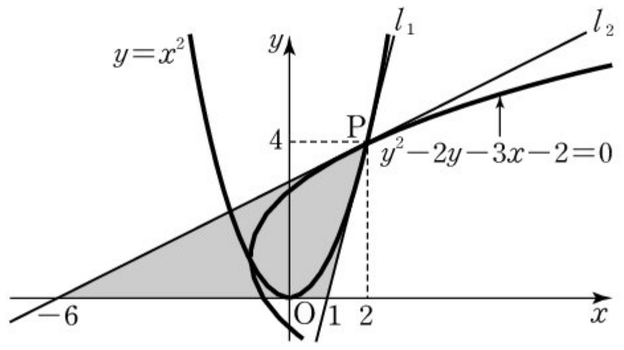
• 다른풀이 •
직선 $y=ax+2a$, 즉 $y=a(x+2)$는 점 $(-2, 0)$을 지나고 기울기가 a이므로 이 직선과 포물선이 한 점에서 만날 때를 이용하여 함수 $f(a)$를 구해 보자.
점 $(-2, 0)$에서 포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$에 그은 접선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하면 접선의 방정식은



$y=mx+\frac{3}{m}$
이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$0=-2m+\frac{3}{m}$, $-2m^2+3=0$
$m^2=\frac{3}{2}$ $\therefore m=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $m=\frac{\sqrt{6}}{2}$
즉, $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=1$
또한, 점 $(-2, 0)$을 지나는 직선이 포물선의 축과 평행할 때, 즉 $a=0$일 때 직선과 포물선이 한 점에서 만나므로
$f(0)=1$

따라서 $f(a)=\begin{cases}0 & \left(|a|>\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\\ 1 & \left(a=0 \text{ 또는 } |a|=\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\\ 2 & \left(0<|a|<\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\end{cases}$이므로
$f(-3)+f(-2)+f(-1)+\cdots+f(3)=5$

07 두 포물선 $y=x^2$, $y^2-2y-3x-2=0$의 제1사분면 위의 교점 P의 x좌표를 구하면
$x^4-2x^2-3x-2=0$
$(x+1)(x-2)(x^2+x+1)=0$
$\therefore x=2$ $(\because x>0, x^2+x+1>0)$
$\therefore$ P$(2, 4)$
포물선 $x^2=y=4\times\frac{1}{4}\times y$ 위의 점 P$(2, 4)$에서의 접선 l_1의 방정식은
$2\times x=2\times\frac{1}{4}\times(y+4)$ $\therefore y=4x-4$
포물선 $y^2-2y-3x-2=0$, 즉 $(y-1)^2=3(x+1)$은 포물선 $y^2=3x$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
점 P$(2, 4)$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(3, 3)$이므로 포물선 $y^2=3x=4\times\frac{3}{4}\times x$ 위의 점 $(3, 3)$에서의 접선의 방정식은
$3\times y=2\times\frac{3}{4}\times(x+3)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
이 직선을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이 l_2이므로 직선 l_2의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{3}{2}$
$\therefore y=\frac{1}{2}x+3$



따라서 두 포물선 $y=x^2$, $y^2-2y-3x-2=0$의 한 교점 P$(2, 4)$에서의 두 접선 l_1, l_2는 위의 그림과 같으므로 두 직선 l_1, l_2 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\{1-(-6)\}\times4=14$ 답 ①

08 접점의 좌표를 $\left(\frac{1}{4}t^2,\ t\right)$라 하면 포물선

$y^2=4x=4\times1\times x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{4}t^2,\ t\right)$에서의 접선의 방정식은

$$t\times y=2\times1\times\left(x+\frac{1}{4}t^2\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 지나므로

$$t=2\left(-2+\frac{1}{4}t^2\right),\ \frac{1}{2}t^2-t-4=0$$

$$t^2-2t-8=0,\ (t+2)(t-4)=0$$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=4$

이것을 각각 ㉠에 대입하여 정리하면 점 A에서 포물선에 그은 두 접선의 방정식은

$$y=-x-1,\ y=\frac{1}{2}x+2$$

따라서 두 접선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ -1),\ (0,\ 2)$이므로

$$l=2-(-1)=3$$

$\therefore\ l^2=3^2=9$ 답 9

• 다른풀이 •

점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$에서 포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{1}{m} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 지나므로

$$1=-2m+\frac{1}{m},\ 2m^2+m-1=0$$

$$(m+1)(2m-1)=0 \quad \therefore\ m=-1 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

이것을 각각 ㉡에 대입하면 점 A에서 포물선에 그은 두 접선의 방정식은

$$y=-x-1,\ y=\frac{1}{2}x+2$$

Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 10~13

01 145	**02** ①	**03** 12	**04** $\frac{\sqrt{14}}{4}$	**05** 15
06 14	**07** ①	**08** ④	**09** $\frac{129}{8}$	**10** 9
11 ④	**12** $\frac{125}{8}$	**13** $5\sqrt{2}$	**14** ⑤	**15** ①
16 1	**17** $y^2=-10x+25$ (단, $x\neq1$)			**18** ②
19 ④	**20** -13	**21** 4	**22** ②	**23** 3
24 ①	**25** -36	**26** ②	**27** ④	**28** $y^2=x+1$

01 점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면 점 A_n은 포물선 $y^2=4px$ 위에 있으므로

$$y_n{}^2=4px_n$$

이때, 수열 $\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$이 등차수열이므로 수열 $\{y_n{}^2\}$도 등차수열이다.

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2,\ \overline{\mathrm{A_2B_2}}=4$에서

$$y_1=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_1B_1}}=\frac{1}{2}\times2=1,$$

$$y_2=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\frac{1}{2}\times4=2$$

이므로 등차수열 $\{y_n{}^2\}$의 첫째항과 둘째항은 각각

$$y_1{}^2=1,\ y_2{}^2=4$$

등차수열 $\{y_n{}^2\}$의 공차를 d라 하면

$$d=y_2{}^2-y_1{}^2$$
$$=4-1=3$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\overline{\mathrm{A_kB_k}}{}^2=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{\overline{\mathrm{A_kB_k}}}{2}\right)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{10}y_k{}^2$$
$$=\frac{10\{2\times\overbrace{1}^{y_1{}^2}+(10-1)\times\overbrace{3}^{d}\}}{2}$$
$$=145$$ 답 145

02 두 직선 OP, OQ가 원점을 지나고 서로 수직이므로 방정식을 각각 $y=mx,\ y=-\frac{1}{m}x$ $(m>0)$라 하자.

점 P의 x좌표는 $(mx)^2=ax$에서

$$m^2x^2-ax=0,\ x(m^2x-a)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{m^2}\ (\because\ x\neq0)$$

즉, $\mathrm{P}\left(\frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\frac{a^2}{m^4}+\frac{a^2}{m^2}}=\frac{a}{m^2}\sqrt{m^2+1}$$

점 Q의 x좌표는 $\left(-\frac{1}{m}x\right)^2=ax$에서

$$\frac{1}{m^2}x^2-ax=0,\ x\left(\frac{1}{m^2}x-a\right)=0$$

$$\therefore\ x=am^2\ (\because\ x\neq0)$$

즉, $\mathrm{Q}(am^2,\ -am)$이므로

$$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{a^2m^4+a^2m^2}=am\sqrt{m^2+1}$$

따라서 삼각형 OQP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{m^2}\sqrt{m^2+1}\times am\sqrt{m^2+1}$$
$$=\frac{a^2(m^2+1)}{2m}$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)$$

$m>0,\ \frac{1}{m}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\triangle\mathrm{OQP}=\frac{a^2}{2}\left(m+\frac{1}{m}\right)$$
$$\geq\frac{a^2}{2}\times2\sqrt{m\times\frac{1}{m}}$$
$$=a^2\ (\text{단, 등호는 } m=1\text{일 때 성립})$$

이때, 삼각형 OQP의 넓이의 최솟값이 $\frac{9}{4}$이므로

$a^2=\frac{9}{4}$ $\therefore a=\frac{3}{2}$ ($\because a>0$)

포물선 $y^2=\frac{3}{2}x=4\times\frac{3}{8}\times x$의 초점의 좌표는 $\left(\frac{3}{8},\ 0\right)$이고, 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{8}$이므로 초점에서 준선까지의 거리는

$\frac{3}{8}-\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{4}$ 답 ①

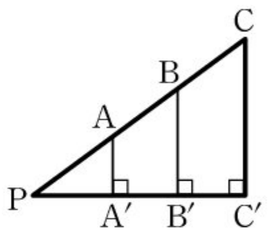
03 포물선 $y^2=24x=4\times6\times x$의 초점의 좌표는 $(6,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-6$이다.

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{24}p^2,\ p\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{24}r^2,\ r\right)$라 하고, 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면

$\triangle\mathrm{APA'}\backsim\triangle\mathrm{BPB'}\backsim\triangle\mathrm{CPC'}$이므로

$\overline{\mathrm{PA'}}:\overline{\mathrm{PC'}}=\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{CC'}}$

즉, $\left(\frac{1}{24}p^2+6\right):\left(\frac{1}{24}r^2+6\right)=p:r$



이므로

$\frac{1}{24}p^2r+6r=\frac{1}{24}pr^2+6p$

$pr(p-r)+144(r-p)=0$, $(p-r)(pr-144)=0$

$\therefore pr=144$ ($\because p\neq r$) ……㉠

이때, 선분 AC 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{CP}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{BB'}}^2=\overline{\mathrm{AA'}}\times\overline{\mathrm{CC'}}$

이때, 점 B의 y좌표를 k ($k>0$)라 하면

$k^2=pr=144$ ($\because$ ㉠)

$\therefore k=12$ ($\because k>0$)

따라서 점 B의 y좌표는 12이다. 답 12

• 다른풀이 •

포물선 $y^2=24x=4\times6\times x$의 준선의 방정식은 $x=-6$이므로

$\mathrm{P}(-6,\ 0)$

점 P를 지나는 직선을 l, 직선 l의 기울기를 m ($m>0$)이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+6)$

직선 l과 포물선 $y^2=24x$, 즉 $x=\frac{1}{24}y^2$의 교점의 y좌표는

$y=m\left(\frac{1}{24}y^2+6\right)$에서 $my^2-24y+144m=0$

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{C}(x_2,\ y_2)$라 하면 이 이차방정식의 두 실근이 y_1, y_2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$y_1y_2=\frac{144m}{m}=144$ ……㉡

한편, $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{CP}}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{CP}}$

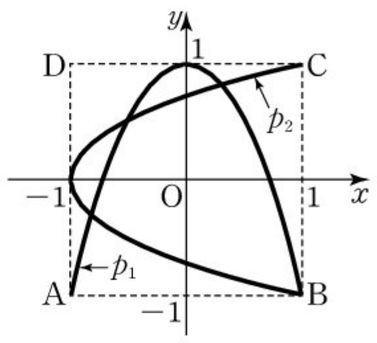
이때, 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라 하면 세 삼각형 APA′, BPB′, CPC′은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{BB'}}^2=\overline{\mathrm{AA'}}\times\overline{\mathrm{CC'}}$

점 B의 y좌표를 k ($k>0$)라 하면

$k^2=y_1y_2=144$ ($\because$ ㉡) $\therefore k=12$ ($\because k>0$)

04 정사각형 ABCD를 두 대각선의 교점이 원점, 두 변 AB, BC가 각각 x축, y축에 평행하도록 좌표평면 위에 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



포물선 p_1의 방정식을

$y=ax^2+1$ ($a<0$)

이라 하면 포물선 p_1은 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$을 지나므로

$-1=a+1$ $\therefore a=-2$

$\therefore p_1: y=-2x^2+1$

포물선 p_2는 포물선 p_1과 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$-x=-2\times(-y)^2+1$

$\therefore p_2: x=2y^2-1$

이때, 점 P의 좌표를 $(t,\ -2t^2+1)$ $(-1\le t\le1)$이라 하면 점 P의 x좌표와 점 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 좌표는 $(2t^2-1,\ t)$이다.

└ 두 점 P, Q가 각각 두 점 A, B에서 동시에 출발하였고, 속력이 같으므로

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}^2=(2t^2-1-t)^2+(t+2t^2-1)^2$

$=\{(2t^2-1)-t\}^2+\{(2t^2-1)+t\}^2$

$=2(2t^2-1)^2+2t^2$

$=8t^4-6t^2+2$

$=8\left(t^2-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{7}{8}$

$\ge\frac{7}{8}$

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}\ge\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\frac{\sqrt{14}}{4}$이다. 답 $\frac{\sqrt{14}}{4}$

05 점 P에서 두 포물선 p_1, p_2의 준선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$

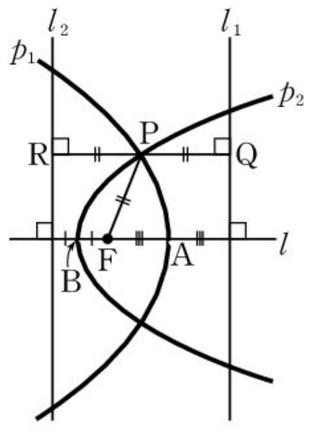
한편, $\overline{\mathrm{AF}}=10$, $\overline{\mathrm{BF}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=2(\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}})$

$=2(10+5)=30$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QR}}$

$=\frac{1}{2}\times30=15$ 답 15



06 포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

$\therefore$ B$(-p, 0)$

또한, 직선 $y=m(x-4)$의 y절편은 $-4m$이므로

C$(0, -4m)$

이때, 점 A의 좌표를 $(a, m(a-4))$ $(a>4)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치하므로

$\frac{a-p+0}{3}=p$ ……㉠

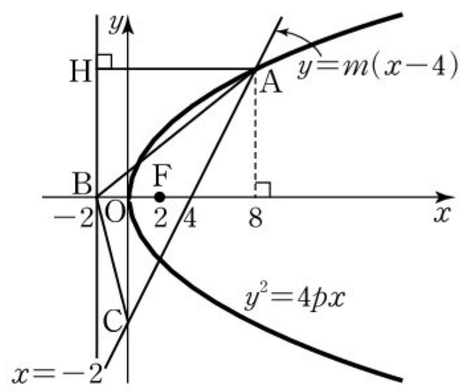
$\frac{m(a-4)+0-4m}{3}=0$ ……㉡

㉠에서 $a-p=3p$ $\therefore a=4p$ ……㉢

㉡에서 $ma-8m=0$, $m(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because m>0$) $\therefore p=2$ ($\because$ ㉢)

$\therefore \overline{BF}=2p=4$



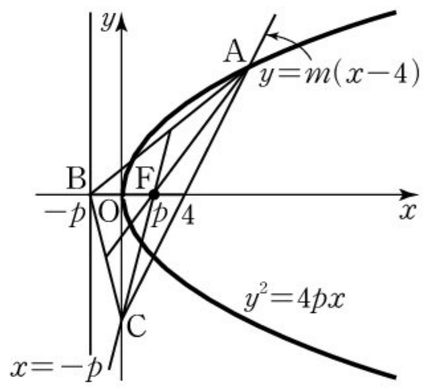
위의 그림과 같이 점 A에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH}=2+8=10$

$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=10+4=14$ 답 14

• 다른풀이 •

점 B와 포물선 $y^2=4px$의 초점 F는 x축 위에 있고, 점 F가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 삼각형 ABC의 한 중선은 직선 BF, 즉 x축 위에 있다.

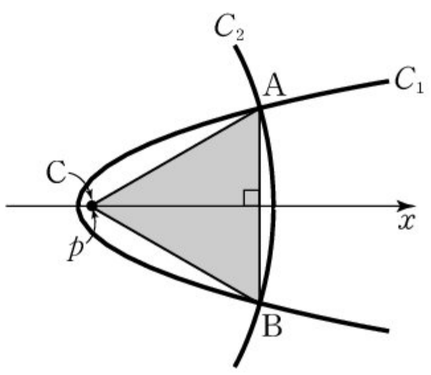


무게중심은 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하고, 직선 $y=m(x-4)$의 x절편이 4이므로

$2p:(4-p)=2:1$에서

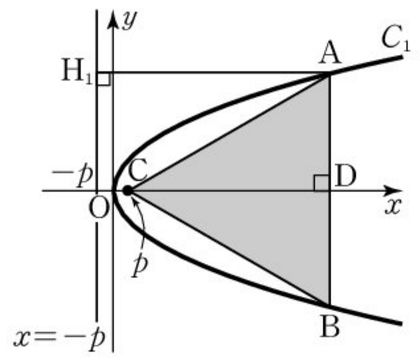
$8-2p=2p$, $4p=8$ $\therefore p=2$

07 꼭짓점 C를 점 $(p, 0)$으로 하고 선분 AB가 x축에 수직이면서 두 점 A, B가 각각 x축의 위, 아래에 있도록 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 조건을 만족시키는 두 포물선은 다음 그림과 같다.



두 포물선을 각각 C_1, C_2라 하고, 포물선 C_1의 꼭짓점이 원점 O가 되도록 하는 좌표평면을 생각하면 포물선 C_1의 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

이때, 점 A에서 포물선 C_1의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고 선분 AB와 x축이 만나는 점을 D라 하자.



$\overline{AC}=4$에서 $\overline{CD}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{AH_1}=p+(p+2\sqrt{3})=2p+2\sqrt{3}$

이때, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AH_1}=\overline{AC}=4$

즉, $2p+2\sqrt{3}=4$이므로

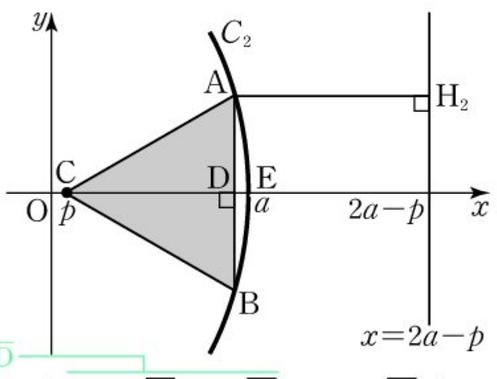
$p=2-\sqrt{3}$ ……㉠

따라서 포물선 C_1의 준선의 방정식은

$x=-2+\sqrt{3}$

한편, 포물선 C_2의 꼭짓점을 E$(a, 0)$, 점 A에서 포물선 C_2의 준선에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

초점 C$(p, 0)$과 꼭짓점 사이의 거리가 $a-p$이므로 포물선 C_2의 준선의 방정식은 $x=2a-p$이다.



점 A의 x좌표가 $2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$이고, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH_2}=\overline{AC}=4$이므로 점 H_2의 x좌표는

$2+\sqrt{3}+4=6+\sqrt{3}$

즉, $2a-p=6+\sqrt{3}$이므로

$a=\frac{6+\sqrt{3}+p}{2}$

$=\frac{6+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=4$

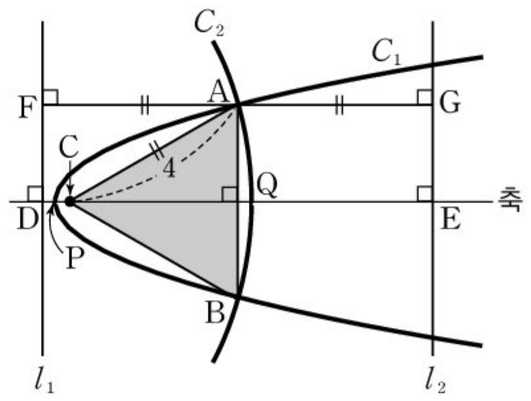
$\therefore$ E$(4, 0)$

따라서 두 포물선 C_1, C_2의 꼭짓점 사이의 거리는 4이다.

답 ①

• 다른풀이 •

다음 그림과 같이 점 C를 초점으로 하고 두 꼭짓점 A, B를 모두 지나는 포물선을 각각 C_1, C_2라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 꼭짓점을 각각 P, Q, 두 포물선 C_1, C_2의 준선을 각각 l_1, l_2, 두 직선 l_1, l_2가 축과 만나는 점을 각각 D, E, 점 A에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AG}=\overline{AC}=4$

$\therefore \overline{FG}=\overline{AF}+\overline{AG}=8$

또한, $\overline{CP}=\overline{DP}$, $\overline{CQ}=\overline{EQ}$이므로

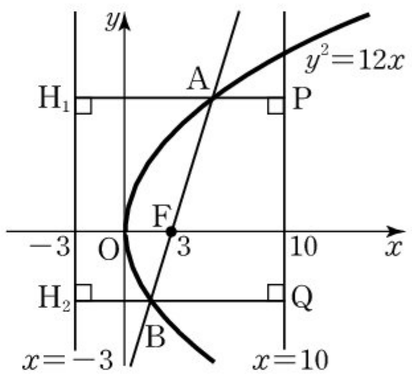
$\overline{DE}=\overline{DP}+\overline{CP}+\overline{CQ}+\overline{EQ}$

$=2\overline{CP}+2\overline{CQ}=8$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{CP}+\overline{CQ}=4$

따라서 구하는 두 포물선의 꼭짓점 P, Q 사이의 거리는 4이다.

08 포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.



위의 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH_1}$, $\overline{BF}=\overline{BH_2}$ ……㉠

$\therefore$ (□ABQP의 둘레의 길이)

$=\overline{AB}+\overline{BQ}+\overline{AP}+\overline{PQ}$

$=\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{BQ}+\overline{AP}+\overline{PQ}$

$=\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{BQ}+\overline{AP}+\overline{PQ}$ ($\because$ ㉠)

$=(\overline{AH_1}+\overline{AP})+(\overline{BH_2}+\overline{BQ})+\overline{PQ}$

$=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}+\overline{PQ}$

$=13+13+\overline{PQ}$

$=\overline{PQ}+26$ ……㉡

한편, $A\left(\frac{1}{12}\alpha^2, \alpha\right)$, $B\left(\frac{1}{12}\beta^2, \beta\right)$ $(\alpha>0, \beta<0)$라 하면 세 점 A, F, B는 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{\alpha-\beta}{\frac{1}{12}\alpha^2-\frac{1}{12}\beta^2}=\frac{\alpha}{\frac{1}{12}\alpha^2-3}$$ ← 직선 AB의 기울기 = 직선 AF의 기울기

$$\frac{\alpha-\beta}{\frac{1}{12}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha}{\frac{1}{12}\alpha^2-3}$$

$$\frac{12}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\frac{1}{12}\alpha^2-3},\ \alpha^2-36=\alpha^2+\alpha\beta$$

$\therefore \alpha\beta=-36$ ……㉢

이때, $P(10, \alpha)$, $Q(10, \beta)$에서 $\overline{PQ}=\alpha-\beta$

$\alpha>0$, $-\beta>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{PQ}=\alpha+(-\beta)$

$\geq2\sqrt{-\alpha\beta}$ (단, 등호는 $\alpha=-\beta$일 때 성립)

$=2\sqrt{36}$ ($\because$ ㉢)

$=2\times6=12$

따라서 ㉡에서

(□ABQP의 둘레의 길이)$=\overline{PQ}+26$

$\geq12+26=38$

이므로 사다리꼴 ABQP의 둘레의 길이의 최솟값은 38이다.

답 ④

blacklabel 특강 풀이첨삭

직선 AB가 직선 PQ와 평행할 때, 즉 직선 AB가 점 $F(3, 0)$을 지나고 y축에 평행할 때, 선분 PQ의 길이가 최소이고, 이때의 직선 AB의 방정식은 $x=3$

이것을 $y^2=12x$에 대입하면

$y^2=36$ $\therefore y=\pm6$

즉, $A(3, 6)$, $B(3, -6)$이므로

$\overline{PQ}=\overline{AB}=12$

09 포물선 $y^2=16x=4\times4\times x$의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

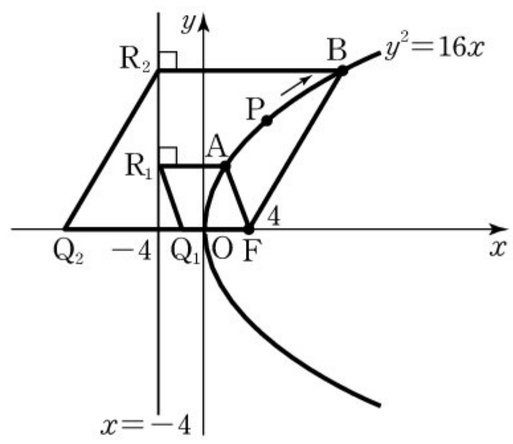
조건 (가)에서 □FPRQ가 평행사변형이고, $\overline{PF}=\overline{QF}$이므로 □FPRQ는 마름모이다. (원의 반지름이므로 길이가 서로 같다.)

$\therefore \overline{PF}=\overline{PR}$

즉, 포물선의 정의에 의하여 점 R는 준선 위에 있고 직선 PR는 준선 $x=-4$와 수직이다.

한편, $A\left(\frac{1}{16}\alpha^2, \alpha\right)$, $B\left(\frac{1}{16}\beta^2, \beta\right)$ $(\alpha>0, \beta>0)$라 하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 R_1, R_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AR_1}=\frac{1}{16}\alpha^2+4$, $\overline{BF}=\overline{BR_2}=\frac{1}{16}\beta^2+4$ ……㉠



점 P가 두 점 A, B의 위치에 있을 때의 점 Q의 위치를 각각 Q_1, Q_2라 하면 □FAR_1Q_1, □FBR_2Q_2가 각각 마름모이므로

$Q_1\left(-\frac{1}{16}\alpha^2, 0\right)$, $Q_2\left(-\frac{1}{16}\beta^2, 0\right)$

점 P가 점 A에서 점 B까지 포물선 위를 움직일 때, 점 Q는 점 Q_1에서 점 Q_2까지 x축 위를 움직이고 조건 (나)에서 점 Q가 나타내는 도형의 길이가 7이므로

$\left|-\frac{1}{16}\alpha^2-\left(-\frac{1}{16}\beta^2\right)\right|=7,\ \left|\frac{1}{16}\beta^2-\frac{1}{16}\alpha^2\right|=7$

$\therefore\ |\beta^2-\alpha^2|=112$ ……㉡

같은 방법으로 점 P가 두 점 A, B의 위치에 있을 때의 점 R의 위치가 각각 R_1, R_2이므로

$R_1(-4,\ \alpha)$, $R_2(-4,\ \beta)$

점 P가 점 A에서 점 B까지 포물선 위를 움직일 때, 점 R는 점 R_1에서 점 R_2까지 준선 위를 움직이고 조건 (나)에서 점 R가 나타내는 도형의 길이가 8이므로

$|\beta-\alpha|=8$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=3,\ \beta=11$ 또는 $\alpha=11,\ \beta=3$ ($\because\ \alpha>0,\ \beta>0$)

따라서 ㉠에 의하여

$\overline{AF}+\overline{BF}=\left(\frac{1}{16}\alpha^2+4\right)+\left(\frac{1}{16}\beta^2+4\right)$

$=\frac{9}{16}+\frac{121}{16}+8=\frac{129}{8}$ 답 $\frac{129}{8}$

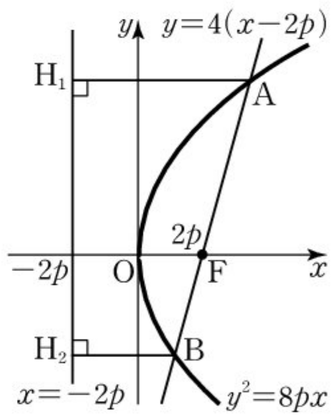
blacklabel 특강 풀이첨삭

네 점 $F(4,\ 0)$, $A\left(\frac{1}{16}\alpha^2,\ \alpha\right)$, $R_1(-4,\ \alpha)$, Q_1을 꼭짓점으로 하는 마름모 FAR_1Q_1의 두 대각선 FR_1, AQ_1의 중점이 일치하므로 $Q_1\left(-\frac{1}{16}\alpha^2,\ 0\right)$임을 알 수 있다.

같은 방법으로 네 점 $F(4,\ 0)$, $B\left(\frac{1}{16}\beta^2,\ \beta\right)$, $R_2(-4,\ \beta)$, Q_2를 꼭짓점으로 하는 마름모 FBR_2Q_2의 두 대각선 FR_2, BQ_2의 중점이 일치하므로 $Q_2\left(-\frac{1}{16}\beta^2,\ 0\right)$임을 알 수 있다.

10 포물선 $y^2=8px=4\times2p\times x$의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(2p,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2p$이다.

포물선 $y^2=8px$와 직선 $y=4(x-2p)$의 두 교점 A, B를 오른쪽 그림과 같이 정하고, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



$\{4(x-2p)\}^2=8px$에서

$16(x^2-4px+4p^2)=8px$

$\therefore\ 2x^2-9px+8p^2=0$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 위의 x에 대한 이차방정식의 두 실근이 x_1, x_2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\frac{9}{2}p$ ……㉠

또한, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH_1}=x_1+2p$, $\overline{BF}=\overline{BH_2}=x_2+2p$

$\overline{AB}=34$이므로

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$

$=(x_1+2p)+(x_2+2p)$

$=(x_1+x_2)+4p$

$=\frac{9}{2}p+4p$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{17}{2}p=34$

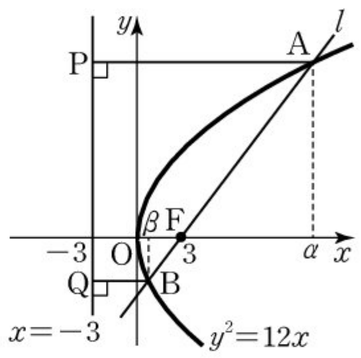
$\therefore\ p=4$

따라서 ㉠에서 $x_1+x_2=18$이므로 선분 AB의 중점 M의 x좌표는

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{18}{2}=9$ 답 9

11 포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=12x$와 직선 l의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하고, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.



$\overline{AF}:\overline{BF}=4:1$이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}:\overline{BQ}=4:1$, 즉 $(\alpha+3):(\beta+3)=4:1$

$\alpha+3=4(\beta+3)$

$\therefore\ \alpha-4\beta=9$ ……㉠

또한, 점 F가 선분 AB를 4 : 1로 내분하므로

$\frac{4\beta+\alpha}{4+1}=3$

$\therefore\ \alpha+4\beta=15$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=12,\ \beta=\frac{3}{4}$

$\therefore\ A(12,\ 12),\ B\left(\frac{3}{4},\ -3\right)$

따라서 두 점 A, F를 지나는 직선 l의 방정식은

$y=\frac{12}{9}(x-3)$, 즉 $y=\frac{4}{3}(x-3)$이므로

$4x-3y=12$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$a-b=4-(-3)=7$ 답 ④

12 포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{PF}=5$이므로 점 P의 x좌표는 $5-1=4$이다.

즉, $P(4,\ 4)$이므로 두 점 P, F를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{3}(x-1)$

이것을 $y^2=4x$에 대입하면

$\left\{\frac{4}{3}(x-1)\right\}^2=4x$, $\frac{16}{9}x^2-\frac{32}{9}x+\frac{16}{9}=4x$

$4x^2-17x+4=0$, $(4x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=4$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ -1\right)$이므로

$\overline{BQ}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

따라서 사각형 ABQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(5+\frac{5}{4}\right)\times\{4-(-1)\}=\frac{125}{8}$ 답 $\frac{125}{8}$

• 다른풀이 •

포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$의 초점 F의 좌표는 $(1,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

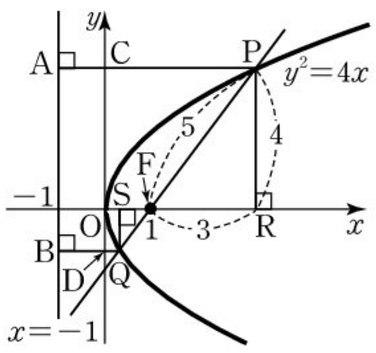
두 선분 AP, BQ가 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{PF}=5$이므로

$\overline{PC}=4$

$\overline{OF}=1$이므로 $\overline{FR}=3$

직각삼각형 PFR에서 $\overline{PR}=\sqrt{5^2-3^2}=4$



한편, 점 Q의 x좌표를 a라 하면

$\overline{OS}=\overline{DQ}=a$이므로 $\overline{SF}=1-a$

또한, 포물선의 정의에 의하여 $\overline{QF}=\overline{BQ}=a+1$

두 삼각형 PFR, QFS는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{PF}:\overline{FR}=\overline{QF}:\overline{FS}$에서 $5:3=(a+1):(1-a)$

$3(a+1)=5(1-a)$, $8a=2$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

즉, $\overline{SF}=\frac{3}{4}$, $\overline{QF}=\frac{5}{4}$이므로 $\overline{SQ}=1$

따라서 사각형 ABQP의 넓이는

$\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})\times\overline{AB}=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})(\overline{PR}+\overline{SQ})$

$=\frac{1}{2}\times\left(5+\frac{5}{4}\right)\times(4+1)$

$=\frac{125}{8}$

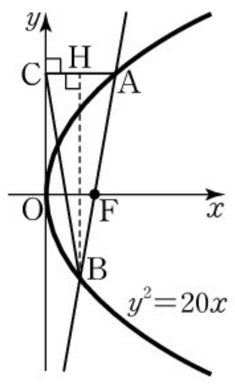
13 포물선 $y^2=20x=4\times5\times x$의 초점 F의 좌표는 $(5,\ 0)$이므로 초점 F를 지나고 기울기가 m $(m>0)$인 직선의 방정식은

$y=m(x-5)$

이 직선과 포물선 $y^2=20x$의 두 교점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는 x에 대한 이차방정식 $\{m(x-5)\}^2=20x$, 즉 $m^2x^2-(10m^2+20)x+25m^2=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_2=25$ ……㉠

한편, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 △ABC가 이등변삼각형이므로 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 BH는 변 AC를 수직이등분한다.



즉, $\overline{CH}=\overline{AH}$이고 점 H의 x좌표가 x_2이므로

$x_1=2x_2$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x_2^{\,2}=25$, $x_2^{\,2}=\frac{25}{2}$ $\therefore x_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

따라서 $x_1=2x_2=5\sqrt{2}$이므로

$\overline{AC}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

14 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다. (점F)

ㄱ. △PRM, △PFM에서

$\overline{PR}=\overline{PF}$ ($\because$ 포물선의 정의), $\overline{PM}$은 공통,

$\angle PRM=\angle PFM=90^\circ$이므로

△PRM≡△PFM (RHS 합동)

$\therefore \overline{RM}=\overline{FM}$ ……㉠

같은 방법으로 △QSM, △QFM에서

$\overline{QS}=\overline{QF}$ ($\because$ 포물선의 정의), $\overline{QM}$은 공통,

$\angle QSM=\angle QFM=90^\circ$이므로

△QSM≡△QFM (RHS 합동)

$\therefore \overline{SM}=\overline{FM}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{RM}=\overline{SM}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\angle PMR=\angle PMF$, $\angle QMF=\angle QMS$이고,

$\angle PMR+\angle PMF+\angle QMF+\angle QMS=180^\circ$이므로

$2\angle PMF+2\angle QMF=180^\circ$

$\therefore \angle PMQ=\angle PMF+\angle QMF=90^\circ$

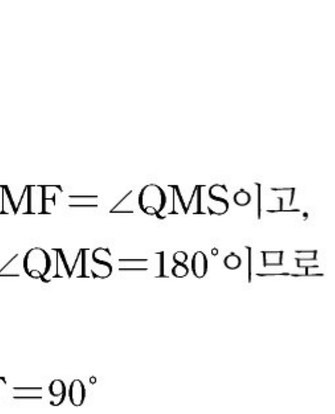
따라서 △PMQ는 $\angle PMQ=90^\circ$인 직각삼각형이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 △PMQ가 직각삼각형이므로

$\overline{MF}^2=\overline{FP}\times\overline{FQ}=\overline{PR}\times\overline{QS}$ (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

15 원 $(x-1)^2+(y-5)^2=4$에 외접하면서 동시에 직선 $y=-1$에 접하는 원의 중심을 P, 반지름의 길이를 t라 하자.



두 점 P, (1, 5) 사이의 거리와 점 P와 직선 $y=-3$ 사이의 거리는 $t+2$로 같으므로 점 P가 그리는 도형 C는 초점의 좌표가 $(1,\ 5)$이고 준선의 방정식이 $y=-3$인 포물선이다.

이때, 초점에서 준선까지 이르는 거리가 $5-(-3)=8$이므로 도형 C는 포물선 $x^2=16y$를 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=16y$의 초점의 좌표는 $(0, 4)$, 준선의 방정식은 $y=-4$이므로 이 포물선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 포물선의 초점의 좌표는 $(m, 4+n)$, 준선의 방정식은 $y=-4+n$이다.

즉, $m=1$, $4+n=5$, $-4+n=-3$이므로

$m=1$, $n=1$

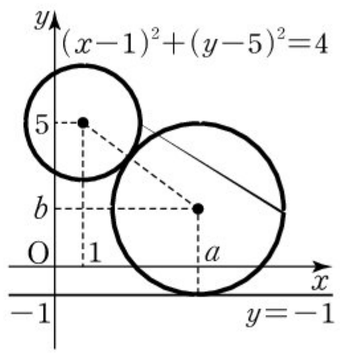
따라서 도형 C의 방정식은

$(x-1)^2=16(y-1)$ $\therefore x^2-2x-16y+17=0$

즉, $p=-2$, $q=-16$, $r=17$이므로

$p-2q+r=-2+32+17=47$ 답 ①

• 다른풀이 •



원 $(x-1)^2+(y-5)^2=4$에 외접하면서 동시에 직선 $y=-1$에 접하는 원의 중심의 좌표를 (a, b) $(b>-1)$라 하면 반지름의 길이는 $b+1$이고, 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\sqrt{(a-1)^2+(b-5)^2}=2+(b+1)$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=(b+3)^2$

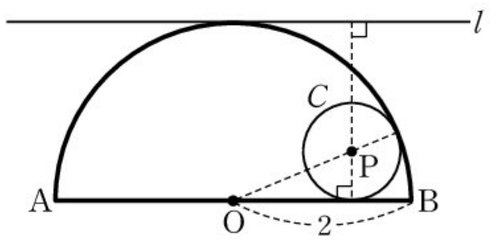
$\therefore a^2-2a-16b+17=0$

즉, 도형 C의 방정식은 $x^2-2x-16y+17=0$이므로

$p=-2$, $q=-16$, $r=17$

$\therefore p-2q+r=-2+32+17=47$

16



위의 그림과 같이 반원의 중심을 O라 하고, 선분 AB와 평행하면서 반원에 접하는 직선을 l이라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{OP}=2-r$

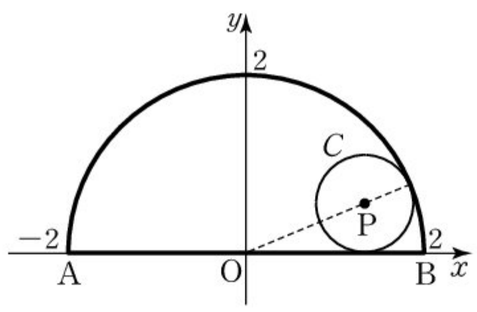
점 P와 직선 l 사이의 거리도 $2-r$이므로 점 P가 그리는 도형은 점 O를 초점으로 하고 직선 l을 준선으로 하는 포물선의 일부이다.

따라서 점 P와 포물선의 준선 사이의 거리의 최솟값은 점 O와 직선 l 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 2=1$ 답 1

• 다른풀이 •

반원의 중심을 원점 O로 하고, 선분 AB가 x축 위에 오도록 반원을 좌표평면 위에 놓으면 다음 그림과 같다.



점 P의 좌표를 (a, b) $(-2<a<2)$라 하면 원 C가 x축에 접하므로 반지름의 길이는 b이다.

$\overline{OP}=2-b$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=2-b$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+b^2=(2-b)^2$, $a^2=-4b+4$

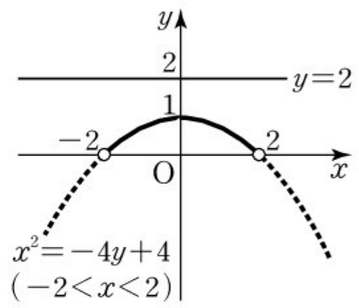
즉, 점 P가 그리는 포물선의 방정식은 $x^2=-4y+4$

즉 $x^2=-4(y-1)$ $(-2<x<2)$이므로 포물선 $x^2=-4y$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

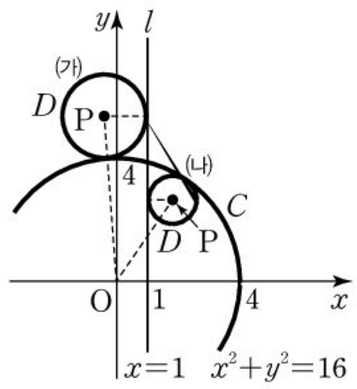
이때, 포물선 $x^2=-4y=4\times(-1)\times y$의 초점의 좌표는 $(0, -1)$, 준선의 방정식은 $y=1$이므로 포물선 $x^2=-4y+4$의 초점의 좌표는 $(0, 0)$, 준선의 방정식은 $y=2$이다.

따라서 포물선 $x^2=-4y+4$ $(-2<x<2)$는 오른쪽 그림과 같으므로 포물선 위의 한 점과 준선 사이의 거리의 최솟값은

$2-1=1$



17



조건 (가)를 만족시키는 원 D의 반지름의 길이를 r라 하면

원 D의 중심 P와 원 C의 중심 사이의 거리는 $4+r$

원 D의 중심 P와 직선 $x=5$ 사이의 거리도 $4+r$

즉, 조건 (가)를 만족시키는 점 P는 원 C의 중심 $(0, 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=5$를 준선으로 하는 포물선의 일부이다. (단, 점 P의 x좌표는 1보다 작다.)

또한, 조건 (나)를 만족시키는 원 D의 반지름의 길이를 r'이라 하면 원 D의 중심 P와 원 C의 중심 사이의 거리는 $4-r'$

원 D의 중심 P와 직선 $x=5$ 사이의 거리도 $4-r'$

즉, 조건 (나)를 만족시키는 점 P는 원 C의 중심 $(0, 0)$을 초점으로 하고 직선 $x=5$를 준선으로 하는 포물선의 일부이다. (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크다.)

이 포물선을 E라 하면 초점에서 준선까지 이르는 거리가 5이므로 포물선 E는 포물선 $y^2=-4\times\frac{5}{2}\times x$, 즉 $y^2=-10x$를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 원 D의 중심 P가 그리는 포물선의 방정식은

$y^2=-10\left(x-\frac{5}{2}\right)$ (단, $x\neq1$)

$\therefore y^2=-10x+25$ (단, $x\neq1$)

답 $y^2=-10x+25$ (단, $x\neq1$)

• 다른풀이 •

원 D의 중심 P의 좌표를 (a, b)라 하자.

(i) $a<1$일 때,

원 D가 직선 $x=1$의 왼쪽에서 접하므로 반지름의 길이는 $1-a$이다.

또한, 원 D는 원 C에 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=4+(1-a)$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+b^2=(5-a)^2$

$\therefore b^2=-10a+25$ (단, $a<1$)

(ii) $a>1$일 때,

같은 방법으로 원 D가 직선 $x=1$의 오른쪽에서 접하므로 반지름의 길이는 $a-1$이다.

또한, 원 D는 원 C에 내접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 차와 같다.

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}=|4-(a-1)|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2+b^2=(5-a)^2$

$\therefore b^2=-10a+25$ (단, $a>1$)

(i), (ii)에서 원 D의 중심 P가 그리는 자취의 방정식은

$y^2=-10x+25$ (단, $x\neq1$)

18 직선 $y=a(x+2)-1$이 포물선 $y^2=12x$와 만나려면 방정식 $\{a(x+2)-1\}^2=12x$가 실근을 가져야 한다.

$\{a(x+2)-1\}^2=12x$에서

$a^2(x+2)^2-2a(x+2)+1=12x$

$\therefore a^2x^2+2(2a^2-a-6)x+(2a-1)^2=0$ ……㉠

(i) $a=0$일 때,

㉠에서 $-12x+1=0$

$\therefore x=\frac{1}{12}$

즉, 방정식 ㉠이 실근을 갖는다.

(ii) $a\neq0$일 때,

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a^2-a-6)^2-a^2(2a-1)^2$ ($(2a^2-a)^2$)

$=-6(4a^2-2a-6)$

$=-12(a+1)(2a-3)$

이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 $\frac{D}{4}\geq0$에서

$-12(a+1)(2a-3)\geq0$, $(a+1)(2a-3)\leq0$

$\therefore -1\leq a<0$ 또는 $0<a\leq\frac{3}{2}$ ($\because a\neq0$)

(i), (ii)에서 상수 a의 값의 범위는 $-1\leq a\leq\frac{3}{2}$이므로

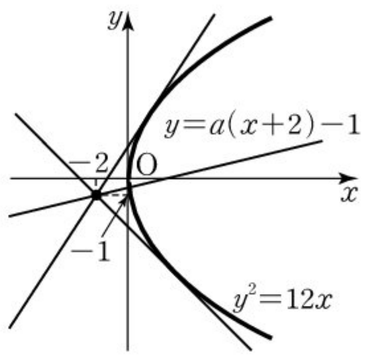
$M=\frac{3}{2}$, $m=-1$

$\therefore M-m=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$ 답 ②

• 다른풀이 •

직선 $y=a(x+2)-1$은 기울기가 a이고 한 점 $(-2, -1)$을 지난다.

이때, 직선 $y=a(x+2)-1$이 포물선 $y^2=12x$와 만나려면 오른쪽 그림과 같이 점 $(-2, -1)$에서 포물선 $y^2=12x$에 그은 두 접선 또는 두 접선 사이에 직선 $y=a(x+2)-1$이 위치해야 한다.



점 $(-2, -1)$에서 포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{3}{m}$

위의 직선이 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$-1=-2m+\frac{3}{m}$, $2m^2-m-3=0$

$(m+1)(2m-3)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{3}{2}$

따라서 $-1\leq a\leq\frac{3}{2}$이므로

$M=\frac{3}{2}$, $m=-1$

$\therefore M-m=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$

19 직선 $y=mx+k$가 m의 값에 관계없이 포물선 $y^2=4x+16$과 만나려면 방정식 $(mx+k)^2=4x+16$이 m의 값에 관계없이 실근을 가져야 한다.

$(mx+k)^2=4x+16$에서

$m^2x^2+2(km-2)x+k^2-16=0$ ……㉠

$m\neq0$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(km-2)^2-m^2(k^2-16)$

$=16m^2-4km+4$

이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 하므로 $\frac{D}{4}\geq0$에서

$16m^2-4km+4\geq0$

$\therefore 16\left(m-\frac{k}{8}\right)^2+4-\frac{k^2}{4}\geq0$

위의 부등식이 m의 값에 관계없이 성립하려면

$4-\frac{k^2}{4}\geq0$, $k^2\leq16$

$\therefore -4\leq k\leq4$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, …, 4의 9개이다. 답 ④

20 직선 $y=ax+b$가 포물선 $y^2=48x$와 한 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 $(ax+b)^2=48x$, 즉 $a^2x^2+2(ab-24)x+b^2=0$이 중근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(ab-24)^2-a^2b^2=-48ab+576$$

$\frac{D_1}{4}=0$에서 $-48ab+576=0$

$\therefore ab=12$ ……㉠

또한, 직선 $y=ax+b$가 포물선 $x^2=5(y+3)$과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2=5(ax+b+3)$, 즉 $x^2-5ax-5b-15=0$이 허근을 갖는다.
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-5a)^2-4(-5b-15)=25a^2+20b+60$

$D_2<0$에서 $25a^2+20b+60<0$

$\therefore 5a^2+4b+12<0$ ……㉡

이때, $5a^2<-4(b+3)$에서 $-4(b+3)>0$, 즉 $b<-3$이어야 하므로 ㉠을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-1, -12)$, $(-2, -6)$, $(-3, -4)$

$a=-1$, $b=-12$를 ㉡에 대입하면

$5\times(-1)^2+4\times(-12)+12=-31<0$

$a=-2$, $b=-6$을 ㉡에 대입하면

$5\times(-2)^2+4\times(-6)+12=8>0$

$a=-3$, $b=-4$를 ㉡에 대입하면

$5\times(-3)^2+4\times(-4)+12=41>0$

따라서 $a=-1$, $b=-12$이므로

$a+b=-1+(-12)=-13$ 답 -13

단계	채점 기준	배점
(가)	직선 $y=ax+b$가 포물선 $y^2=48x$와 한 점에서 만나기 위한 a, b 사이의 관계식을 구한 경우	30%
(나)	직선 $y=ax+b$가 포물선 $x^2=5(y+3)$과 만나지 않기 위한 a, b 사이의 관계식을 구한 경우	30%
(다)	조건 (가), (나)를 만족시키는 정수 a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한 경우	40%

21 포물선 $y^2=16x=4\times4\times x$ 위의 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $P(a^2, 4a)$, $Q(b^2, 4b)$라 하면 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식은 각각

$4ay=8(x+a^2)$, $4by=8(x+b^2)$

위의 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{8}{4a}\times\frac{8}{4b}=-1$ $\therefore ab=-4$ ……㉠

(i) $a^2\neq b^2$일 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4a=\frac{4(b-a)}{b^2-a^2}(x-a^2)$$

$$y=\frac{4}{a+b}(x-a^2)+4a\ (\because a\neq b)$$

$y=\frac{4}{a+b}(x+ab)$ $\therefore y=\frac{4}{a+b}(x-4)\ (\because$ ㉠)

(ii) $a^2=b^2$일 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$x=a^2$

$a^2=b^2$에서 $b=-a\ (\because a\neq b)$이므로

$ab=-a^2=-4\ (\because$ ㉠) $\therefore a^2=4$

$\therefore x=4$

(i), (ii)에서 두 점 P, Q를 지나는 직선은 항상 점 $(4, 0)$을 지나므로

$p=4$, $q=0$

$\therefore p+q=4+0=4$ 답 4

blacklabel 특강 참고

포물선 $y^2=4px$의 두 접선이 서로 수직으로 만날 때, 다음이 성립한다.

(1) 두 접선의 교점은 준선 위에 있다.

⇔ 준선 위의 한 점에서 포물선에 접선을 그으면 서로 수직이다.

[증명] 준선 $x=-p$ 위의 한 점 $(-p, k)$에서 포물선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$

이 직선이 점 $(-p, k)$를 지나므로 $k=-mp+\frac{p}{m}$

$\therefore pm^2+km-p=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 위의 이차방정식의 실근의 곱이 -1이므로 두 접선은 서로 수직이다.

(2) 두 접점을 지나는 직선은 항상 포물선의 초점을 지난다.

[증명] 두 접점의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하면 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$, $y_2y=2p(x+x_2)$

수직으로 만나는 두 접선은 준선 위의 한 점에서 만나므로 두 접선의 교점의 좌표를 $(-p, k)$라 하고 접선의 방정식에 대입하면

$ky_1=2p(x_1-p)$, $ky_2=2p(x_2-p)$

즉, 두 접점을 지나는 직선의 방정식은 $ky=2p(x-p)$이므로 항상 초점 $(p, 0)$을 지난다.

22 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

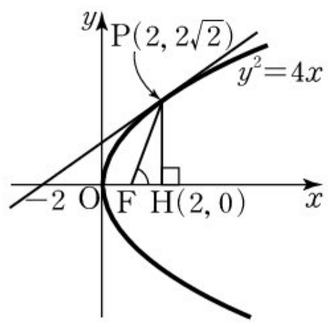
$y_1y=2(x+x_1)$

이 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=2(-2+x_1)$ $\therefore x_1=2$

$y_1^2=4x_1$이므로 $y_1^2=8$ $\therefore y_1=\pm2\sqrt{2}$

$P(2, 2\sqrt{2})$라고 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(2, 0)$



포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$의 초점 F의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$\overline{FH}=2-1=1$

직각삼각형 PFH에서 $\overline{PF}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$이므로

$\cos(\angle PFH)=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos(\angle PFO)=\cos(\pi-\angle PFH)$

$=-\cos(\angle PFH)$

$=-\frac{1}{3}$ 답 ②

23 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y_1y=4(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{4}{y_1}(x+x_1)$ ……㉠

포물선 $x^2=4y=4\times1\times y$ 위의 점 Q의 좌표를 (x_2, y_2)라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$x_2x=2(y+y_2)$ $\therefore y=\frac{x_2}{2}x-y_2$ ……㉡

두 접선 ㉠, ㉡이 서로 평행하므로

$\frac{4}{y_1}=\frac{x_2}{2}$ $\therefore x_2y_1=8$ ……㉢

한편, 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$는 각각 포물선 $y^2=8x$, $x^2=4y$ 위에 있으므로

$y_1^2=8x_1$, $x_2^2=4y_2$

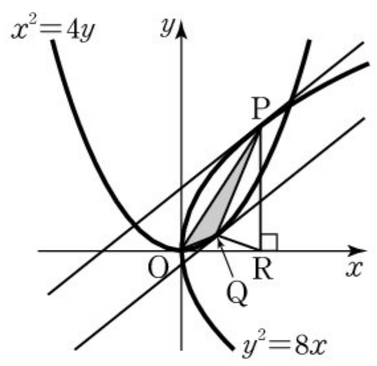
위의 두 식을 변끼리 곱하면

$(x_2y_1)^2=32x_1y_2$

㉢을 위의 식에 대입하면

$64=32x_1y_2$ $\therefore x_1y_2=2$ ……㉣

따라서 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하면 삼각형 POQ의 넓이는



$\triangle POR-\triangle QOR-\triangle PQR$

$=\frac{1}{2}x_1y_1-\frac{1}{2}x_1y_2$

$-\frac{1}{2}y_1(x_1-x_2)$

$=\frac{1}{2}x_1y_1-\frac{1}{2}x_1y_2-\frac{1}{2}x_1y_1+\frac{1}{2}x_2y_1$

$=\frac{1}{2}(x_2y_1-x_1y_2)$

$=\frac{1}{2}(8-2)$ ($\because$ ㉢, ㉣)

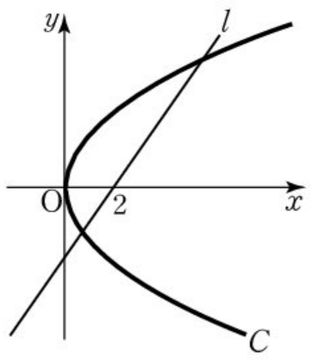
$=3$

답 3

24 $y=px-2p=p(x-2)$이므로 직선 l은 점 $(2, 0)$을 지난다.

이때, $p>0$이면 포물선 C와 직선 l이 오른쪽 그림과 같으므로 p의 값에 관계없이 교점을 갖는다.

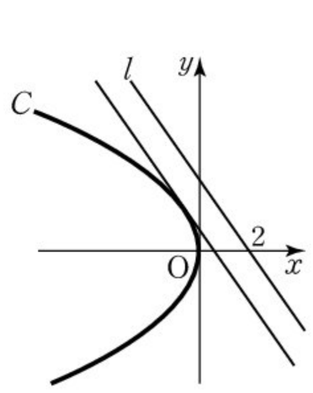
즉, 포물선 C 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 0이다.



그런데 조건에서 최솟값이 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$이므로 모순이다.

$\therefore p<0$

포물선 C 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값이 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$이려면 직선 l과 평행한 포물선 C의 접선과 직선 l 사이의 거리가 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$이어야 한다.



기울기가 p인 포물선 $y^2=2px=4\times\frac{1}{2}p\times x$의 접선의 방정식은

$y=px+\frac{\frac{1}{2}p}{p}$ $\therefore y=px+\frac{1}{2}$

직선 $y=px-2p$, 즉 $px-y-2p=0$과 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 사이의 거리가 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$이어야 하므로

($\left(0, \frac{1}{2}\right)$: 직선 $y=px+\frac{1}{2}$ 위의 점)

$\frac{\left|-\frac{1}{2}-2p\right|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $3\sqrt{2(p^2+1)}=4\left|-\frac{1}{2}-2p\right|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$18(p^2+1)=16\left(4p^2+2p+\frac{1}{4}\right)$

$23p^2+16p-7=0$

$(p+1)(23p-7)=0$

$\therefore p=-1$ ($\because p<0$)

$\therefore 8p=8\times(-1)=-8$

답 ①

25 포물선 $y^2=8x$와 원 $(x-14)^2+y^2=128$에 동시에 접하는 직선의 기울기를 m $(m\neq0)$이라 하자.

기울기가 m인 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{2}{m}$ ……㉠

이 접선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=am+\frac{2}{m}$, $am^2+2=0$

$\therefore a=-\frac{2}{m^2}$ ……㉡

직선 ㉠, 즉 $mx-y+\frac{2}{m}=0$과 원 $(x-14)^2+y^2=128$의 중심 $(14, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{128}=8\sqrt{2}$와 같아야 하므로

$\frac{\left|14m+\frac{2}{m}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=8\sqrt{2}$

$\left|14m+\frac{2}{m}\right|=8\sqrt{2(m^2+1)}$

$\left|7m+\frac{1}{m}\right|=4\sqrt{2(m^2+1)}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$49m^2+14+\frac{1}{m^2}=32(m^2+1)$

$17m^2-18+\frac{1}{m^2}=0$, $17m^4-18m^2+1=0$

$(17m^2-1)(m^2-1)=0$ $\therefore m^2=\frac{1}{17}$ 또는 $m^2=1$

이것을 ㉡에 대입하면

$a=-2\times17=-34$ 또는 $a=-2$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은

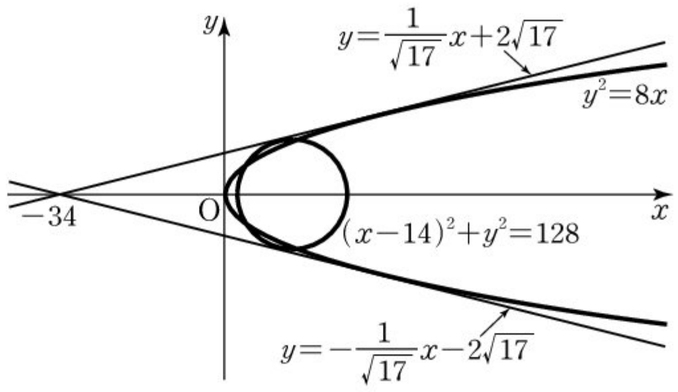
$-34+(-2)=-36$

답 -36

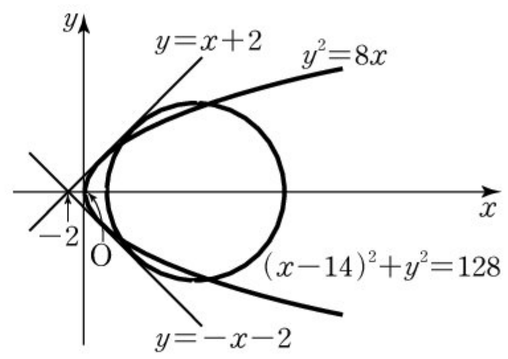
blacklabel 특강 참고

포물선 $y^2=8x$와 원 $(x-14)^2+y^2=128$이 모두 x축에 대하여 대칭이므로 두 곡선에 모두 접하는 직선은 x축에 대칭인 쌍으로 존재한다.

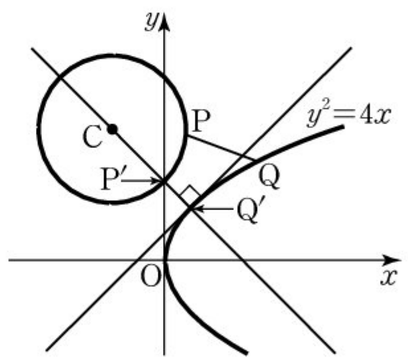
(i) $a=-34$일 때,



(ii) $a=-2$일 때,



26 다음 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 Q에서의 접선이 점 Q와 원 $(x+2)^2+(y-5)^2=8$의 중심 C$(-2, 5)$를 이은 직선과 수직일 때, 이때의 점 Q를 Q′이라 하고, 선분 CQ′과 원의 교점을 P′이라 하자.



$\overline{PQ}\geq\overline{P'Q'}$이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 선분 P′Q′의 길이이다.

포물선 $y^2=4x=4\times1\times x$ 위의 점 Q′의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$ $\quad\therefore y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$

즉, 점 Q′에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{y_1}$이다.

또한, 직선 CQ′의 기울기는 $\frac{y_1-5}{x_1+2}$이다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 Q′에서의 접선과 직선 CQ′이 서로 수직이므로

$\frac{2}{y_1}\times\frac{y_1-5}{x_1+2}=-1$ $\quad\cdots\cdots$㉠

점 Q′이 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

$y_1^2=4x_1$ $\quad\therefore x_1=\frac{y_1^2}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{2(y_1-5)}{y_1\left(\frac{y_1^2}{4}+2\right)}=-1,\ 2(y_1-5)=-y_1\left(\frac{y_1^2}{4}+2\right)$

$y_1^3+16y_1-40=0$

$(y_1-2)(y_1^2+2y_1+20)=0$

$\therefore y_1=2$ $(\because y_1^2+2y_1+20>0)$

즉, $x_1=\frac{y_1^2}{4}=\frac{4}{4}=1$이므로

Q′$(1, 2)$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\overline{P'Q'}=\overline{CQ'}-\overline{CP'}$

$=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-5)^2}-2\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

답 ②

27 포물선 $y^2=4x$의 접점의 좌표를 $\left(\frac{1}{4}t^2, t\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$ty=2\left(x+\frac{1}{4}t^2\right)$

이 직선이 점 $(-4, 2)$를 지나므로

$2t=2\left(-4+\frac{1}{4}t^2\right),\ \frac{1}{4}t^2-4=t$

$t^2-4t-16=0$

$\therefore t=2+2\sqrt{5}$ 또는 $t=2-2\sqrt{5}$

즉, 점 $(-4, 2)$에서 그은 두 접선의 접점의 좌표는

$(6+2\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5}),\ (6-2\sqrt{5}, 2-2\sqrt{5})$

위의 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$y-(2+2\sqrt{5})=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}(x-6-2\sqrt{5})$

$\therefore y=x-4$

이 직선이 x축과 만나는 점이 P, y축과 만나는 점이 Q이므로

P$(4, 0)$, Q$(0, -4)$

$\therefore \triangle OPQ=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

답 ④

• 다른풀이 •

두 접선의 접점을 A, B라 하면 직선 AB는 점 $(-4, 2)$에서의 포물선 $y^2=4x$의 극선이므로 이 직선의 방정식은

$2y=2(x-4)$ $\quad\therefore y=x-4$

따라서 P$(4, 0)$, Q$(0, -4)$이므로

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\times4\times4=8$

blacklabel 특강 참고

극선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 밖의 한 점 P(α, β)에서 포물선에 그은 두 접선의 접점을 각각 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)라 하면 두 접선의 방정식은 다음과 같다.

$\begin{cases}y_1y=2p(x+x_1)\\y_2y=2p(x+x_2)\end{cases}$

이 두 직선은 점 P를 지나므로

$\begin{cases}y_1\beta=2p(\alpha+x_1)\\y_2\beta=2p(\alpha+x_2)\end{cases}$

따라서 직선 $\beta y=2p(x+\alpha)$는 점 P에서 그은 두 접선의 접점을 지난다.

이 직선의 방정식을 포물선의 극선의 방정식이라 한다.

28 해결단계

❶ 단계	두 점 Q, R에서의 접선의 방정식을 구한 후 연립하여 점 P의 좌표를 구한다.
❷ 단계	△PQR=2임을 이용하여 두 점 Q, R의 x좌표 사이의 관계식을 세운다.
❸ 단계	점 P의 자취의 방정식을 구한다.

포물선 $y^2=x=4\times\frac{1}{4}\times x$ 밖의 한 점 P의 좌표를 (α, β)라 하고, 점 P에서 포물선에 그은 두 접선의 접점을 각각 $Q(x_1^2, x_1)$, $R(x_2^2, x_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자.

두 점 Q, R에서의 접선의 방정식은 각각

$x_1y=\frac{1}{2}(x+x_1^2)$, $x_2y=\frac{1}{2}(x+x_2^2)$

이고, 이 두 접선은 점 $P(\alpha, \beta)$를 지나므로

$x_1\beta=\frac{1}{2}(\alpha+x_1^2)$, $x_2\beta=\frac{1}{2}(\alpha+x_2^2)$

$\therefore \alpha=2x_1\beta-x_1^2$, $\alpha=2x_2\beta-x_2^2$

위의 두 식을 연립하면

$2x_1\beta-x_1^2=2x_2\beta-x_2^2$

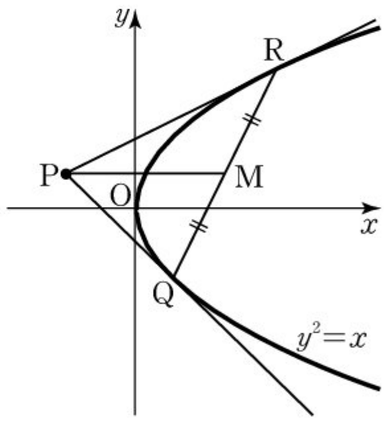
$2(x_1-x_2)\beta=x_1^2-x_2^2$

$\therefore \beta=\frac{x_1+x_2}{2}$ $(\because x_1\neq x_2)$ ……㉠

$\therefore \alpha=2x_1\times\frac{x_1+x_2}{2}-x_1^2$

$=x_1x_2$ ……㉡

즉, 점 P의 좌표는 $\left(x_1x_2, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$이다.



한편, 위의 그림과 같이 선분 QR의 중점을 M이라 하면 선분 PM은 삼각형 PQR의 넓이를 이등분하므로

$\triangle PQM=\frac{2}{2}=1$ ……㉢

또한, 점 M의 좌표는 $\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$이므로 두 점 P, M의 y좌표는 서로 같다.

즉, 선분 PM이 x축과 평행하므로

$\overline{PM}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-x_1x_2$

$=\frac{(x_2-x_1)^2}{2}$

㉢에서

$\frac{1}{2}\times\frac{(x_2-x_1)^2}{2}\times\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)=1$ $(\because x_1<x_2)$

$(x_2-x_1)^3=8$ $\therefore x_2-x_1=2$

이때,

$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2$

$=(2\beta)^2-4\alpha$ $(\because$ ㉠, ㉡$)$

$=4(\beta^2-\alpha)$

에서 $4=4(\beta^2-\alpha)$이므로

$\beta^2-\alpha=1$ $\therefore \beta^2=\alpha+1$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $y^2=x+1$이다.

답 $y^2=x+1$

• 다른풀이 •

$P(\alpha, \beta)$라 하고, 점 P에서 포물선 $y^2=x=4\times\frac{1}{4}\times x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $Q(x_1^2, x_1)$, $R(x_2^2, x_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자. 직선 QR는 점 $P(\alpha, \beta)$에서의 포물선 $y^2=x$의 극선이므로 이 직선의 방정식은

$\beta y=\frac{1}{2}(x+\alpha)$

$\therefore x-2\beta y+\alpha=0$

위의 직선이 두 점 Q, R를 지나므로

$x_1^2-2\beta x_1+\alpha=0$, $x_2^2-2\beta x_2+\alpha=0$

즉, x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-2\beta x+\alpha=0$의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=2\beta$ ……㉣

$x_1x_2=\alpha$ ……㉤

이때, $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2$에서

$(x_2-x_1)^2=4\beta^2-4\alpha$ $(\because$ ㉣, ㉤$)$

$x_2-x_1=2\sqrt{\beta^2-\alpha}$ $(\because x_2>x_1)$ ……㉥

한편, 점 P와 직선 QR, 즉 $x-2\beta y+\alpha=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\frac{|\alpha-2\beta^2+\alpha|}{\sqrt{1+(-2\beta)^2}}$

$=\frac{|2(\alpha-\beta^2)|}{\sqrt{1+4\beta^2}}$

$=\frac{2(\beta^2-\alpha)}{\sqrt{1+4\beta^2}}$ $(\because$ ㉥에서 $\beta^2-\alpha>0)$

삼각형 PQR의 넓이가 2이므로

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times d$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2^2-x_1^2)^2+(x_2-x_1)^2}\times\frac{2(\beta^2-\alpha)}{\sqrt{1+4\beta^2}}$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2+(x_2-x_1)^2}\times\frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt{1+4\beta^2}}$

$=(x_2-x_1)\sqrt{(x_2+x_1)^2+1}\times\frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt{1+4\beta^2}}$

$=2\sqrt{\beta^2-\alpha}\sqrt{4\beta^2+1}\times\frac{\beta^2-\alpha}{\sqrt{1+4\beta^2}}$ $(\because$ ㉣, ㉥$)$

$=2\sqrt{\beta^2-\alpha}(\beta^2-\alpha)$

$=2(\sqrt{\beta^2-\alpha})^3=2$

즉, $\beta^2-\alpha=1$이므로 $\beta^2=\alpha+1$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $y^2=x+1$이다.

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 14

01 10 **02** 72 **03** $\frac{1}{9}$ **04** 14 **05** 145

06 2

01 해결단계

❶ 단계	점 A의 좌표를 p를 이용하여 나타낸 후, $\overline{AF}:\overline{BF}=1:3$임을 이용하여 $\overline{BF}$의 길이를 p를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	△FBC가 직각삼각형임을 이용하여 $\overline{BC}$의 길이를 p로 나타낸다.
❸ 단계	△FBC$=3\sqrt{5}$임을 이용하여 p^2의 값을 구한 후, $30p^2$의 값을 구한다.

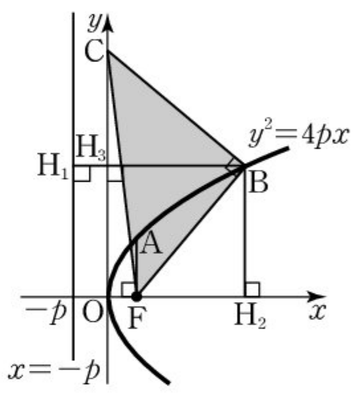
포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

점 A의 x좌표가 p이므로

A$(p,\ 2p)$이고, $\overline{AF}=2p$

$\overline{AF}:\overline{BF}=1:3$이므로 $\overline{BF}=6p$

이때, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1, x축에 내린 수선의 발을 H_2, 선분 H_1B가 y축과 만나는 점을 H_3이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{BH_1}=\overline{BF}=6p$

즉, 점 B의 x좌표는 $5p$이므로

B$(5p,\ 2\sqrt{5}p)$

한편, 두 삼각형 BCH_3, BFH_2에서

$\angle CH_3B=\angle FH_2B=90^\circ$,

$\angle CBH_3=90^\circ-\angle H_3BF=\angle FBH_2$

이므로 $\triangle BCH_3\backsim\triangle BFH_2$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{BC}:\overline{BH_3}=\overline{BF}:\overline{BH_2}$이므로

$\overline{BC}:5p=6p:2\sqrt{5}p$, $2\sqrt{5}p\times\overline{BC}=30p^2$

$\therefore\ \overline{BC}=3\sqrt{5}p$

이때, 삼각형 FBC의 넓이가 $3\sqrt{5}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6p\times3\sqrt{5}p=3\sqrt{5}$$

$$3p^2=1 \qquad \therefore\ p^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 30p^2=30\times\frac{1}{3}=10$$

답 10

• 다른풀이 •

점 F$(p,\ 0)$, B$(5p,\ 2\sqrt{5}p)$를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{2\sqrt{5}p}{4p}=\frac{\sqrt{5}}{2}$이므로 직선 BC의 방정식은

$$y-2\sqrt{5}p=-\frac{2}{\sqrt{5}}(x-5p)$$

$$\therefore\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+4\sqrt{5}p$$

따라서 C$(0,\ 4\sqrt{5}p)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{(-5p)^2+(2\sqrt{5}p)^2}=3\sqrt{5}p$

이때, 삼각형 FBC의 넓이가 $3\sqrt{5}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{BF}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6p\times3\sqrt{5}p=3\sqrt{5}$$

$$\therefore\ p^2=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ 30p^2=30\times\frac{1}{3}=10$$

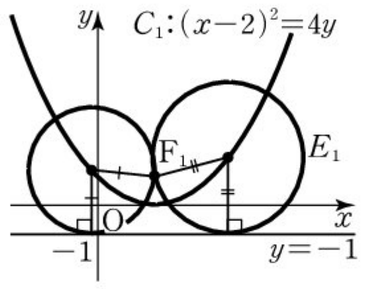
02 해결단계

❶ 단계	원 E_1이 위치할 수 있는 영역을 파악한다.
❷ 단계	원 E_2가 위치할 수 있는 영역을 파악한다.
❸ 단계	점 P를 포함하는 영역을 그림으로 나타낸 후, $\overline{PF_1}^2$의 최댓값 M, $\overline{PF_2}^2$의 최솟값 m을 구하여 $M+m$의 값을 구한다.

포물선 $C_1:(x-2)^2=4y$는 포물선 $x^2=4y$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=4y=4\times1\times y$의 초점의 좌표는 $(0,\ 1)$, 준선의 방정식은 $y=-1$이므로 포물선 C_1의 초점 F_1의 좌표는 $(2,\ 1)$, 준선의 방정식은 $y=-1$이다.

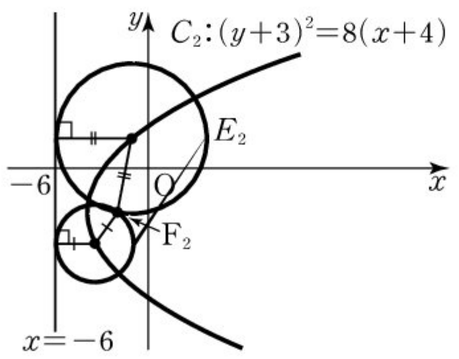
원 E_1은 포물선의 정의에 의하여 준선 $y=-1$에 접하므로 다음 그림과 같이 직선 $y=-1$의 위쪽에서 접하도록 그려진다.



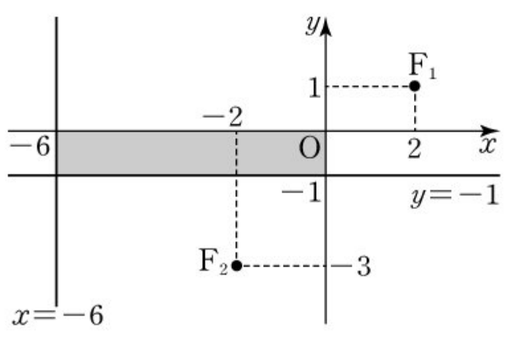
또한, 포물선 $C_2:(y+3)^2=8(x+4)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 포물선 C_2의 초점 F_2의 좌표는 $(-2,\ -3)$, 준선의 방정식은 $x=-6$이다.

원 E_2는 포물선의 정의에 의하여 준선 $x=-6$에 접하므로 다음 그림과 같이 직선 $x=-6$의 오른쪽에서 접하도록 그려진다.



즉, 두 원 E_1, E_2의 교점 P는 직선 $y=-1$의 윗부분과 직선 $x=-6$의 오른쪽 부분 및 제3사분면의 공통부분에 위치하므로 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)에 포함된다.



(단, 경계선 포함)

$\overline{PF_1}^2$의 최댓값은 점 P가 점 $(-6,\ -1)$에 위치할 때이

므로

$M=\{2-(-6)\}^2+\{1-(-1)\}^2=8^2+2^2=68$

$\overline{PF_2}^2$의 최솟값은 점 P가 점 $(-2,\ -1)$에 위치할 때이므로

$m=2^2=4$

$\therefore\ M+m=68+4=72$ 답 72

03 해결단계

❶ 단계	점 F를 지나는 직선의 방정식과 포물선의 방정식을 연립하여 이차방정식을 세운다.
❷ 단계	두 점 A, B에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구한다.
❸ 단계	$\frac{1}{\overline{AP}^2}+\frac{1}{\overline{BQ}^2}$의 값을 구한다.

포물선 $y^2=6x=4\times\frac{3}{2}\times x$의 초점 F의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로 점 F를 지나는 직선의 기울기를 $m\ (m\neq0)$이라 하면 직선의 방정식은 $y=m\left(x-\frac{3}{2}\right)$이라 할 수 있다.

위의 식을 $y^2=6x$에 대입하면

$\left\{m\left(x-\frac{3}{2}\right)\right\}^2=6x,\ m^2x^2-3m^2x+\frac{9}{4}m^2=6x$

$\therefore\ 4m^2x^2-12(m^2+2)x+9m^2=0$

$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$라 하면 $x_1,\ x_2$는 두 점 A, B의 x좌표이므로 위의 x에 대한 이차방정식의 두 근이 $x_1,\ x_2$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_2=\frac{9m^2}{4m^2}=\frac{9}{4}\ (\because\ m\neq0)$ ……㉠

또한, 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=3(x+x_1)$ $\therefore\ y=\frac{3}{y_1}(x+x_1)$

위의 접선에 수직이면서 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=-\frac{y_1}{3}(x-x_1)$

위의 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $y=0$을 대입하면

$-y_1=-\frac{y_1}{3}(x-x_1)$ $\therefore\ x=x_1+3\ (\because\ y_1\neq0)$

$\therefore\ P(x_1+3,\ 0)$

같은 방법으로 점 Q의 좌표는 $(x_2+3,\ 0)$

$\therefore\ \frac{1}{\overline{AP}^2}+\frac{1}{\overline{BQ}^2}=\frac{1}{3^2+(-y_1)^2}+\frac{1}{3^2+(-y_2)^2}$

$=\frac{1}{9+y_1^2}+\frac{1}{9+y_2^2}$

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$는 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로 $y_1^2=6x_1,\ y_2^2=6x_2$

$=\frac{1}{9+6x_1}+\frac{1}{9+6x_2}$

$=\frac{9+6x_1+9+6x_2}{9(3+2x_1)(3+2x_2)}$

$=\frac{18+6(x_1+x_2)}{9\{9+6(x_1+x_2)+4x_1x_2\}}$

$=\frac{18+6(x_1+x_2)}{9\{18+6(x_1+x_2)\}}\ (\because$ ㉠$)$

$=\frac{1}{9}$ 답 $\frac{1}{9}$

• 다른풀이 •

점 $F\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지나는 직선 $x=\frac{3}{2}$과 포물선 $y^2=6x$의 교점의 좌표는

$\left(\frac{3}{2},\ 3\right),\ \left(\frac{3}{2},\ -3\right)$

$A\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$이라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$3y=3\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\therefore\ y=x+\frac{3}{2}$

즉, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-3=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $\therefore\ y=-x+\frac{9}{2}$

$\therefore\ P\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$

같은 방법으로 점 $B\left(\frac{3}{2},\ -3\right)$을 지나고 점 B에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y=x-\frac{9}{2}$ $\therefore\ Q\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$

따라서 $\overline{AP}^2=\overline{BQ}^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)^2+3^2=18$이므로

$\frac{1}{\overline{AP}^2}+\frac{1}{\overline{BQ}^2}=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$

04 해결단계

❶ 단계	원점이 아닌 점 A의 좌표를 $\left(\frac{t^2}{16},\ t\right)$라 하고 점 A에서의 접선의 방정식을 구한 후, 접선이 y축과 만나는 점의 좌표를 구한다.
❷ 단계	조건 (나)를 이용하여 점 B의 좌표를 t를 이용하여 나타낸 후, 점 B가 나타내는 곡선 C의 방정식을 구한다.
❸ 단계	$\overline{PQ}=20$임을 이용하여 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구한다.

포물선 $y^2=16x$ 위의 원점이 아닌 점 A의 좌표를 $\left(\frac{t^2}{16},\ t\right)\ (t\neq0)$라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$ty=8\left(x+\frac{t^2}{16}\right)$ $\therefore\ y=\frac{8}{t}x+\frac{t}{2}$ ……㉠

이 접선이 y축과 만나는 점을 C라 하면 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{t}{2}\right)$이고, 삼각형 OAC의 무게중심이 B이므로 점 B의 좌표는

$\left(\frac{0+\frac{t^2}{16}+0}{3},\ \frac{0+t+\frac{t}{2}}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{t^2}{48},\ \frac{t}{2}\right)$

이때, $\frac{t^2}{48}=X,\ \frac{t}{2}=Y$로 놓으면 $t^2=48X,\ t=2Y$이므로

$(2Y)^2=48X$, $4Y^2=48X$

$\therefore Y^2=12X$ (단, $X\neq0$)

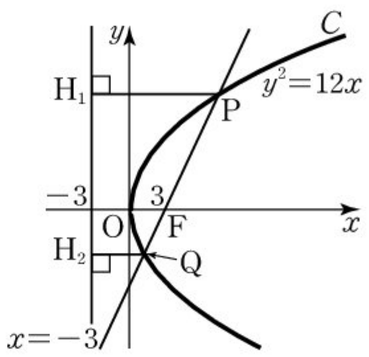
한편, 조건 (가)에서 점 A가 원점이면 점 B도 원점이므로

$t=0$이면 $X=0$, $Y=0$

즉, 점 B가 나타내는 곡선 C는 포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$

이므로 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$

이다.



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하고, 두 점 P, Q에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH_1}$, $\overline{QF}=\overline{QH_2}$이므로

$\therefore \overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}$

$=(x_1+3)+(x_2+3)$

$=(x_1+x_2)+6=20$

$\therefore x_1+x_2=14$

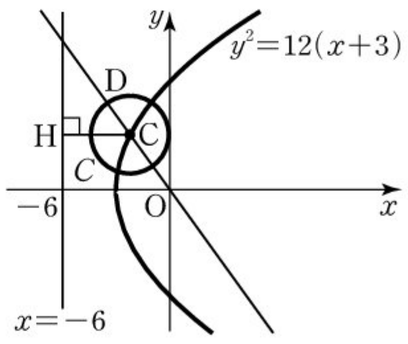
즉, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합은 14이다. 답 14

05 해결단계

❶ 단계	포물선 $y^2=12(x+3)$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구한 후, 포물선의 정의를 이용하여 선분 OD의 길이를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 식을 이용하여 $a-b^2$을 한 문자로 정리한 후, 최솟값을 가질 조건을 파악한다.
❸ 단계	p, q의 값을 각각 구한 후, $8pq$의 값을 구한다.

포물선 $y^2=12(x+3)$은 포물선 $y^2=12x$를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의 초점의 좌표는 $(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이므로 포물선 $y^2=12(x+3)$의 초점의 좌표는 $(0, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-6$이다.



원 C의 중심을 C, 점 C에서 준선 $x=-6$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{CH}=\overline{CO}$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OD}=\overline{CO}+r=\overline{CH}+r=6$

이때, $D(a, b)$ $(a<0)$이므로 $\overline{OD}=\sqrt{a^2+b^2}=6$

따라서 $a^2+b^2=36$이므로 $b^2=36-a^2$

$\therefore a-b^2=a-(36-a^2)$

$=a^2+a-36$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{145}{4}$

즉, $a-b^2$은 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{145}{4}$를 가지므로

$p=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{145}{4}$

$\therefore 8pq=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{145}{4}\right)=145$ 답 145

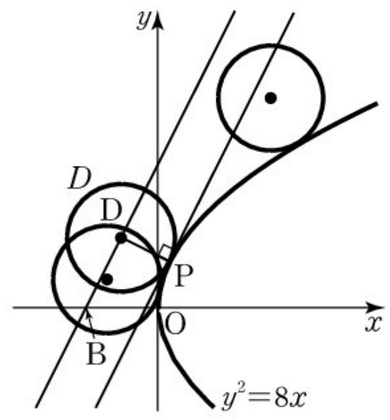
06 해결단계

❶ 단계	점 A를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 B, 포물선 $y^2=8x$의 왼쪽에서 접하는 원을 D, 원 D의 중심을 D라 하면 직선 AC의 기울기의 최댓값과 직선 BD의 기울기의 최댓값이 같음을 파악한다.
❷ 단계	원 D와 포물선 $y^2=8x$의 접점을 P라 할 때, 점 P에서의 포물선의 접선과 직선 BD가 평행할 때, 기울기가 최대임을 파악한다.
❸ 단계	접선의 방정식을 이용하여 기울기의 최댓값을 구한다.

포물선 $y^2=8(x+1)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 포물선의 방정식은 $y^2=8x$

마찬가지로 점 $A(-4, 0)$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 B라 하면 $B(-3, 0)$

포물선 $y^2=8x$의 왼쪽에서 포물선과 접하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 D, 원 D의 중심을 D라 하면 직선 BD의 기울기의 최댓값은 직선 AC의 기울기의 최댓값과 같다.



직선 BD의 기울기의 최댓값을 m $(m>0)$이라 하자.

중심이 점 B를 지나고 기울기가 m인 직선 위를 움직이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원은 포물선 $y^2=8x$와 접할 때를 제외하고 만나지 않는다.

즉, 포물선 $y^2=8x$와 원 D의 접점을 P라 할 때, 포물선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 m이어야 한다.

기울기가 m인 포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 접선의 방정식은

$y=mx+\frac{2}{m}$ $\therefore mx-y+\frac{2}{m}=0$

이 직선과 점 $B(-3, 0)$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{\left|-3m+\frac{2}{m}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $\left|-3m+\frac{2}{m}\right|=\sqrt{5(m^2+1)}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\left(3m-\frac{2}{m}\right)^2=5(m^2+1)$

$4m^4-17m^2+4=0$

$(m^2-4)(4m^2-1)=0$

$(m+2)(m-2)(2m+1)(2m-1)=0$

$\therefore\ m=2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$ $(\because\ m>0)$ ……㉠

한편, 점 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$에서 포물선 $y^2=8x$에 그은 접선의 기울기를 m'이라 하면 접선의 방정식은

$y=m'x+\frac{2}{m'}$

위의 직선이 점 B를 지나므로

$0=-3m'+\frac{2}{m'}$, $3m'^2=2$

$\therefore\ m'=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

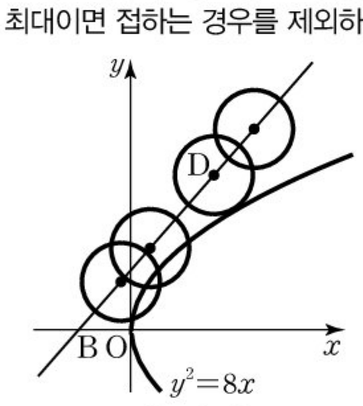
즉, 직선 BD의 기울기는 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$보다 작거나 $\frac{\sqrt{6}}{3}$보다 커야 한다.

따라서 ㉠에서 $m=2$이므로 직선 BD의 기울기, 즉 m의 최댓값은 2이고 직선 AC의 기울기의 최댓값도 2이다.

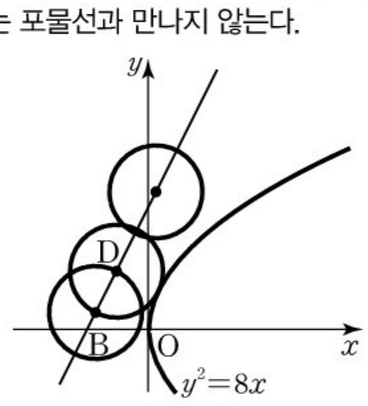
답 2

blacklabel 특강 풀이첨삭

[그림 1]과 같이 직선 BD의 기울기가 최대가 아닐 경우 중심이 직선 BD 위를 움직이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원은 포물선과 두 점에서 만나는 경우가 생긴다. 그러나 [그림 2]와 같이 직선 BD의 기울기가 최대이면 접하는 경우를 제외하고는 포물선과 만나지 않는다.



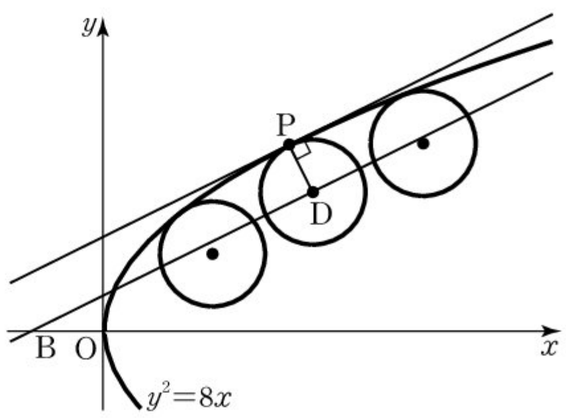
[그림 1]



[그림 2]

blacklabel 특강 참고

$m=\frac{1}{2}$은 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이 포물선 $y^2=8x$의 오른쪽에서 포물선과 접하면서 움직일 때의 직선 BD의 기울기의 최댓값이다.



이것이 수능 p. 15

1 8 2 50 3 ⑤ 4 32

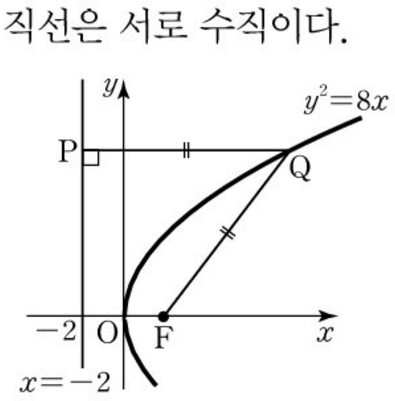
1

해결단계

❶ 단계	포물선의 정의를 이용하여 직선 PQ가 준선 $x=-2$와 수직임을 파악한다.
❷ 단계	$\overline{\mathrm{PQ}}=10$임을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구한 후, 양수 k의 값을 구한다.

포물선 $y^2=8x=4\times2\times x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

즉, 점 P는 준선 위에 있고, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=10$이므로 포물선의 정의에 의하여 다음 그림과 같이 준선 $x=-2$와 두 점 P, Q를 지나는 직선은 서로 수직이다.



$\mathrm{P}(-2,\ k)$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=10$이므로 $\mathrm{Q}(8,\ k)$

이때, 점 Q는 포물선 $y^2=8x$ 위에 있으므로

$k^2=8\times8$ $\therefore\ k=8$ $(\because\ k>0)$

답 8

2

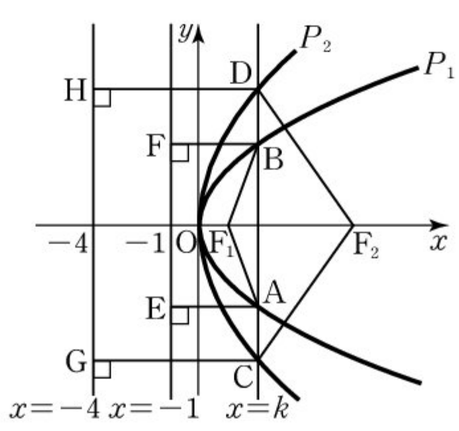
해결단계

❶ 단계	꼭짓점과 초점을 이용하여 두 포물선 P_1, P_2의 방정식과 준선의 방정식을 각각 구한 후, 포물선 위의 점에서 준선에 각각 수선의 발을 내린다.
❷ 단계	포물선의 정의를 이용하여 두 삼각형 $\mathrm{F_1AB}$, $\mathrm{F_2DC}$의 둘레의 길이를 각각 k로 나타낸다.
❸ 단계	$l_2-l_1=11$임을 이용하여 k의 값을 구한 후, $32k$의 값을 구한다.

원점을 꼭짓점으로 하고 초점이 $\mathrm{F_1}(1,\ 0)$인 포물선 P_1의 방정식은 $y^2=4x$이고, 포물선 P_1의 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

또한, 원점을 꼭짓점으로 하고 초점이 $\mathrm{F_2}(4,\ 0)$인 포물선 P_2의 방정식은 $y^2=16x$이고, 포물선 P_2의 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

다음 그림과 같이 포물선 P_1 위의 두 점 A, B에서 포물선 P_1의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 포물선 P_2 위의 두 점 C, D에서 포물선 P_2의 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.



포물선 P_1 위의 두 점 A, B의 x좌표는 k이므로

$y^2=4k$ $\therefore\ y=\pm2\sqrt{k}$

$\therefore\ \mathrm{A}(k,\ -2\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k,\ 2\sqrt{k})$

이때, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF_1}=\overline{AE}$, $\overline{BF_1}=\overline{BF}$

이므로 삼각형 F_1AB의 둘레의 길이는

$\overline{AF_1}+\overline{BF_1}+\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{AB}$

$=(1+k)+(1+k)+4\sqrt{k}$

$\therefore l_1=2k+4\sqrt{k}+2$

포물선 P_2 위의 두 점 C, D의 x좌표도 k이므로

$y^2=16k$ $\therefore y=\pm4\sqrt{k}$

$\therefore C(k, -4\sqrt{k}), D(k, 4\sqrt{k})$

이때, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{CF_2}=\overline{CG}$, $\overline{DF_2}=\overline{DH}$

이므로 삼각형 F_2DC의 둘레의 길이는

$\overline{CF_2}+\overline{DF_2}+\overline{CD}=\overline{CG}+\overline{DH}+\overline{CD}$

$=(4+k)+(4+k)+8\sqrt{k}$

$\therefore l_2=2k+8\sqrt{k}+8$

$l_2-l_1=11$이므로

$(2k+8\sqrt{k}+8)-(2k+4\sqrt{k}+2)=11$

$4\sqrt{k}+6=11$, $4\sqrt{k}=5$, $\sqrt{k}=\frac{5}{4}$

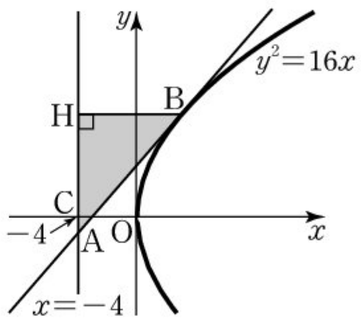
따라서 $k=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$이므로

$32k=32\times\frac{25}{16}=50$ 답 50

3 해결단계

❶ 단계	점 B의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 점 B에서의 접선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	$\overline{AC}$, $\overline{CH}$를 x_1, y_1을 이용하여 나타낸 후, $\overline{AC}\times\overline{CH}=8$임을 이용하여 세 점 A, B, H의 좌표를 각각 구한다.
❸ 단계	삼각형 ABH의 넓이를 구한다.

포물선 $y^2=16x=4\times4\times x$의 초점의 좌표는 $(4, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.



접점 B의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 B에서의 접선의 방정식은

$y_1y=8(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{8}{y_1}(x+x_1)$

준선 $x=-4$ 위의 점 A는 이 접선 위에 있으므로

$A\left(-4, \frac{8}{y_1}(x_1-4)\right)$, $H(-4, y_1)$

이때, 점 A는 제3사분면 위에 있으므로 y좌표가 음수이고 $\overline{AC}=\frac{8}{y_1}(4-x_1)$

$\overline{AC}\times\overline{CH}=8$이므로

$\overline{AC}\times\overline{CH}=\frac{8}{y_1}(4-x_1)\times y_1$

$=8(4-x_1)=8$

$4-x_1=1$ $\therefore x_1=3$

점 $B(3, y_1)$은 포물선 $y^2=16x$ 위에 있으므로

$y_1^2=16\times3=48$ $\therefore y_1=4\sqrt{3}$ $(\because y_1>0)$

$\therefore A\left(-4, -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, $B(3, 4\sqrt{3})$, $H(-4, 4\sqrt{3})$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times\left\{4\sqrt{3}-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\right\}\times\{3-(-4)\}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{14}{3}\sqrt{3}\times7=\frac{49}{3}\sqrt{3}$ 답 ⑤

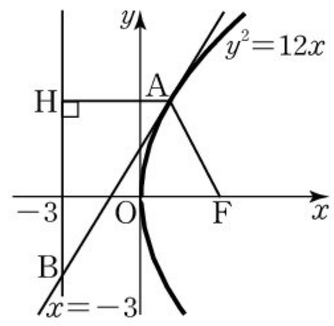
4 해결단계

❶ 단계	포물선의 정의와 $\overline{AB}=2\overline{AF}$임을 이용하여 직선 AB의 기울기를 구한 후, 직선 AB의 방정식을 구한다.
❷ 단계	점 A의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 직선이 서로 같음을 이용하여 점 A의 좌표를 구한 후, $\overline{AB}\times\overline{AF}$의 값을 구한다.

포물선 $y^2=12x=4\times3\times x$의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

다음 그림과 같이 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 A에서 준선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AH}$



즉, $\overline{AB}=2\overline{AF}=2\overline{AH}$이므로 직각삼각형 AHB에서

$\overline{AH}:\overline{AB}:\overline{BH}=1:2:\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BH}=\sqrt{3}\,\overline{AH}$

따라서 점 A에서의 접선의 기울기는

$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\frac{\sqrt{3}\,\overline{AH}}{\overline{AH}}=\sqrt{3}$

이므로 기울기가 $\sqrt{3}$인 포물선 $y^2=12x$의 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\therefore y=\sqrt{3}(x+1)$ ……㉠

한편, 점 A의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=6(x+x_1)$ $\therefore y=\frac{6}{y_1}(x+x_1)$ ……㉡

두 직선 ㉠, ㉡은 일치하므로

$\frac{6}{y_1}=\sqrt{3}$, $x_1=1$

$\therefore x_1=1$, $y_1=2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AF}=\overline{AH}=3+1=4$, $\overline{AB}=2\overline{AF}=8$이므로

$\overline{AB}\times\overline{AF}=8\times4=32$ 답 32

02 타원

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 17

01 18	02 ⑤	03 ①	04 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$
05 ③	06 ③	07 $\frac{17}{8}$	08 ①

01 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표는

$A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$, $D(0, -b)$

또한, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(a>c>0)$

이라 하면 $c=\sqrt{a^2-b^2}$

마름모 ABCD의 넓이가 $8\sqrt{5}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times2a\times2b$$

$$=2ab=8\sqrt{5}$$

$\therefore ab=4\sqrt{5}$ ……㉠

마름모 BF′DF의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{F'F}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{a^2-b^2}\times2b$$

$$=2b\sqrt{a^2-b^2}=8$$

$\therefore b\sqrt{a^2-b^2}=4$ ……㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$b^2(a^2-b^2)=16$, $a^2b^2-b^4=16$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(4\sqrt{5})^2-b^4=16$, $80-b^4=16$

$b^4=64$ $\therefore b=2\sqrt{2}$ $(\because b>0)$

이것을 ㉠에 대입하면

$a\times2\sqrt{2}=4\sqrt{5}$ $\therefore a=\sqrt{10}$

$\therefore a^2+b^2=10+8=18$ 답 18

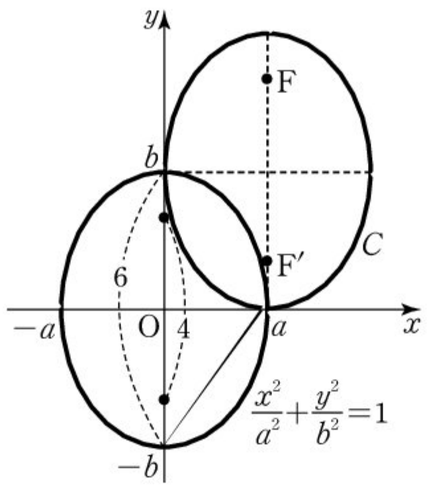
02 주어진 타원을 C라 하고 타원 C를 중심이 원점이 되도록 평행이동한 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

타원 C의 장축이 y축과 평행하므로 $b>a>0$이고, x축과 y축에 동시에 접하므로 타원 C는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

이때, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표를 $(0, c)$, $(0, -c)$ $(b>c>0)$라 하면 $c^2=b^2-a^2$이고, 타원 C의 두 초점의 좌표는 $(a, c+b)$, $(a, -c+b)$이므로

$F(a, c+b)$, $F'(a, -c+b)$

라 하자.



한편, 타원을 평행이동하여도 장축의 길이와 두 초점 사이의 거리는 변하지 않으므로 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 장축의 길이는 6이고, 두 초점 사이의 거리는 4이다.

즉, $2b=6$, $2c=4$에서 $b=3$, $c=2$

$c^2=b^2-a^2$에서 $4=9-a^2$

$a^2=5$ $\therefore a=\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

따라서 $F(\sqrt{5}, 5)$, $F'(\sqrt{5}, 1)$이므로

$$\overline{OF}\times\overline{OF'}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+5^2}\times\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}$$

$$=\sqrt{30}\times\sqrt{6}$$

$$=6\sqrt{5}$$ 답 ⑤

03 두 초점이 F, F_1인 타원의 장축의 길이가 16이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF_1}=16$ ……㉠

$\overline{QF}+\overline{QF_1}=16$ ……㉡

또한, 두 초점이 F, F_2인 타원의 장축의 길이가 24이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF_2}=24$ ……㉢

$\overline{QF}+\overline{QF_2}=24$ ……㉣

㉠, ㉢에서 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$

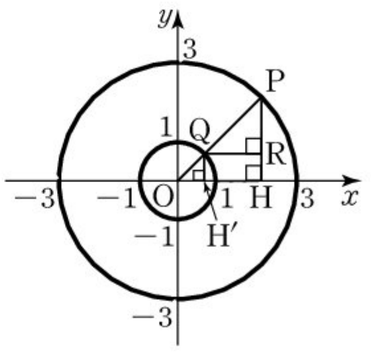
㉡, ㉣에서 $|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=8$

$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|+|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=8+8=16$ 답 ①

04 두 점 P, Q는 각각 두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로 $\overline{OP}=3$, $\overline{OQ}=1$

오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 △QOH′, △POH는 서로 닮음인 도형이고 닮음비가 1 : 3이므로 $Q(p, q)$라 하면

$P(3p, 3q)$



또한, 점 Q는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

$p^2+q^2=1$ ……㉠

점 R의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같고, 점 R의 y좌표는 점 Q의 y좌표와 같으므로

$R(3p, q)$

$3p=x$, $q=y$로 놓으면 $p=\frac{x}{3}$, $y=q$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{x}{3}\right)^2+y^2=1$ $\therefore \frac{x^2}{9}+y^2=1$ 답 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

• 다른풀이 •

직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta<2\pi)$라 하면 점 P는 반지름의 길이가 3인 원 위에 있으므로 $P(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, 점 Q는 반지름의 길이가 1인 원 위에 있으므로 $Q(\cos\theta, \sin\theta)$라 할 수 있다.
이때, 점 R의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같고, y좌표는 점 Q의 y좌표와 같으므로
$R(3\cos\theta, \sin\theta)$

즉, $x=3\cos\theta$에서 $\cos\theta=\frac{x}{3}$이고, $\sin\theta=y$

이것을 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$에 대입하면 조건을 만족시키는 점 R의 자취의 방정식은
$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

05 $y=\frac{1}{2}x+k$를 $x^2+2y^2=8$에 대입하면

$x^2+2\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=8$, $x^2+2\left(\frac{1}{4}x^2+kx+k^2\right)=8$

$\therefore \frac{3}{2}x^2+2kx+2k^2-8=0$ ……㉠

이때, 타원 $x^2+2y^2=8$과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-\frac{3}{2}(2k^2-8)>0$

$k^2-3k^2+12>0$, $2k^2<12$

$k^2<6$ $\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. 답 ③

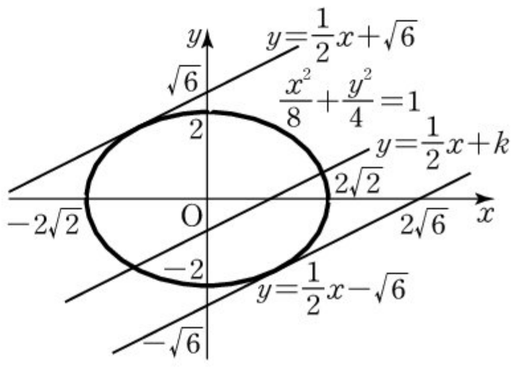
• 다른풀이 •

$x^2+2y^2=8$에서 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$이므로 이 타원의 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{6}$

직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 두 접선 사이에 위치해야 한다.

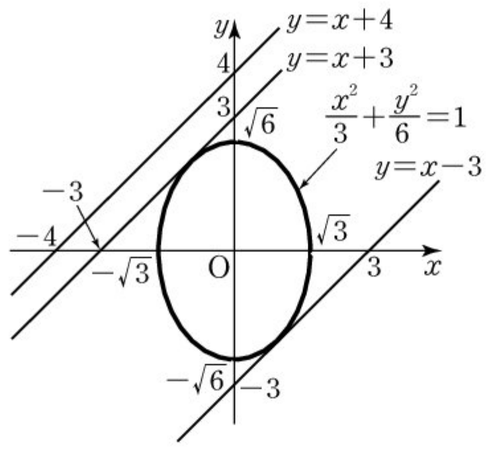


즉, $-\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$이므로 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

06 $6x^2+3y^2=18$에서 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$

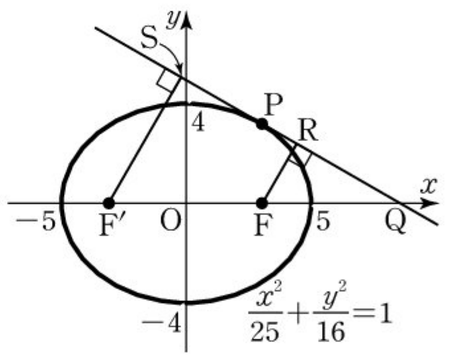
이 타원에 접하고 기울기가 직선 $y=x+4$와 같은 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1^2+6}$ $\therefore y=x\pm3$



즉, 직선 $y=x+4$와 두 직선 $y=x+3$, $y=x-3$ 사이의 거리가 각각 구하는 최솟값과 최댓값이다.
직선 $y=x+4$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|0-4+3|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
직선 $y=x+4$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리는
$\frac{|0-4-3|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$
따라서 최댓값과 최솟값의 차는
$\frac{7\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ 답 ③

07 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이므로



$c^2=25-16=9$
$\therefore c=3$ $(\because c>0)$
즉, 두 초점은 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이다.

한편, 타원 위의 점 $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{3x}{25}+\frac{\frac{16}{5}y}{16}=1$, $\frac{3}{25}x+\frac{1}{5}y=1$
$\therefore 3x+5y-25=0$

위의 식에 $y=0$을 대입하면 점 Q의 x좌표는 $x=\frac{25}{3}$

위의 그림에서 $\triangle SF'Q\backsim\triangle RFQ$(AA 닮음)이므로
$\frac{\overline{QS}}{\overline{QR}}=\frac{\overline{F'Q}}{\overline{FQ}}=\frac{\frac{25}{3}+3}{\frac{25}{3}-3}=\frac{17}{8}$ 답 $\frac{17}{8}$

08 $4x^2+y^2=4$에서 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ……㉠

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 이 점은 타원 ㉠ 위에 있으므로

$x_1^2+\frac{y_1^2}{4}=1$ ……㉡

또한, 타원 ㉠ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+\frac{y_1y}{4}=1$

이 접선이 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, -2\right)$를 지나므로

$\frac{1}{2}x_1+\frac{-2y_1}{4}=1$

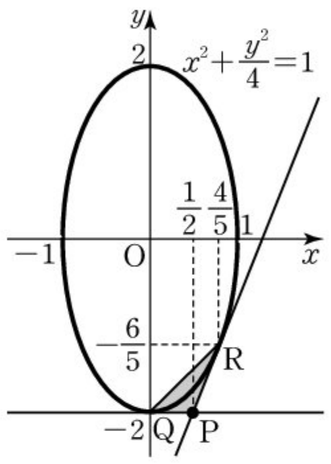
$\therefore y_1=x_1-2$ ……㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x_1^2+\frac{(x_1-2)^2}{4}=1,\ 4x_1^2+(x_1-2)^2=4$

$5x_1^2-4x_1=0,\ x_1(5x_1-4)=0$

$\therefore x_1=0$ 또는 $x_1=\frac{4}{5}$



이것을 ㉢에 대입하면

$x_1=0$일 때, $y_1=-2$

$x_1=\frac{4}{5}$일 때, $y_1=-\frac{6}{5}$

$\therefore \mathrm{Q}(0, -2), \mathrm{R}\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ 또는

$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right), \mathrm{R}(0, -2)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{6}{5}-(-2)\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ 답 ①

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 18~21

01 ③	02 $\sqrt{2}$	03 ②	04 14	05 ②
06 4	07 $\frac{9}{2}$	08 8	09 ②	10 9
11 72	12 ③	13 5	14 ⑤	15 ⑤
16 ③	17 $\frac{8}{3}$	18 26	19 $6\sqrt{2}$	
20 $4x+2y=1$		21 ②	22 $\frac{21}{2}$	23 2
24 ①	25 ②			

01 오른쪽 그림과 같이 타원

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

의 두 초점을 $\mathrm{F}_1(k_1, 0)$, $\mathrm{F}_1'(-k_1, 0)\ (k_1>0)$이라 하면 $k_1=\sqrt{a^2-b^2}$이므로 타원 E의 방정식은



$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

타원 E의 두 초점을 $\mathrm{F}_2(0, k_2)$, $\mathrm{F}_2'(0, -k_2)(k_2>0)$라 하면

$k_2=\sqrt{b^2-(a^2-b^2)}=\sqrt{2b^2-a^2}$

이때, 원 C가 타원 E의 단축을 지름으로 하고, 타원 E의 두 초점을 지나므로 $k_1=k_2$에서

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2b^2-a^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2-b^2=2b^2-a^2$

$2a^2=3b^2$

$\therefore \frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{2}$

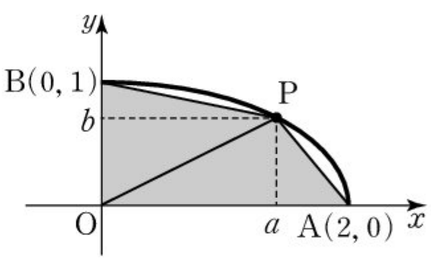
따라서 $p=2$, $q=3$이므로

$10p+q=10\times2+3=23$ 답 ③

02 타원 $x^2+4y^2=4$의 제1사분면 위의 한 점 P의 좌표를 $(a, b)\ (a>0, b>0)$라 하면

$a^2+4b^2=4$ ……㉠

주어진 타원이 x축, y축의 양의 부분과 만나는 두 점 A, B는 각각 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$이므로 사각형 OAPB의 넓이를 S라 하면



$S=\triangle\mathrm{OAP}+\triangle\mathrm{OPB}$

$=\frac{1}{2}\times2\times b+\frac{1}{2}\times1\times a$

$=\frac{1}{2}a+b$

이때, a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{a^2+(2b)^2\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\geq\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$

(단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

$4\times\frac{1}{2}\geq\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2\ (\because$ ㉠)

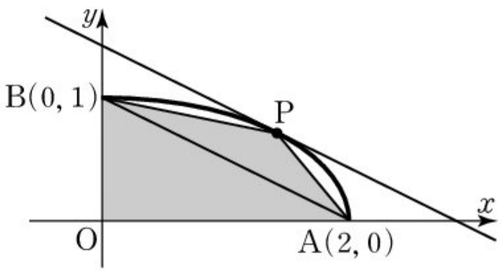
$\therefore 0<\frac{1}{2}a+b\leq\sqrt{2}\ (\because a>0, b>0)$

따라서 사각형 OAPB의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

답 $\sqrt{2}$

• 다른풀이 •

타원 $x^2+4y^2=4$가 x축, y축의 양의 부분과 만나는 두 점 A, B는 각각 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$이므로 사각형 OAPB의 넓이를 S라 하면



$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{APB}$

$=\frac{1}{2}\times2\times1+\triangle\mathrm{APB}$

$=\triangle\mathrm{APB}+1$ ……㉡

삼각형 APB의 넓이가 최대이려면 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 할 때 높이가 최대이어야 하므로 점 P에서의 접선의 기울기가 직

선 AB의 기울기인 $-\frac{1}{2}$과 같아야 한다.

기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 제1사분면에서 타원 $x^2+4y^2=4$, 즉 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 접하는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2} \qquad \therefore x+2y-2\sqrt{2}=0$$

이 직선과 점 A(2, 0) 사이의 거리가 삼각형 APB의 높이의 최댓값이므로

$$\frac{|2+0-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{5}}$$

또한, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$이므로 ㉡에서

$$S=\triangle APB+1$$
$$\le\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{5}}+1=\sqrt{2}$$

따라서 사각형 OAPB의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

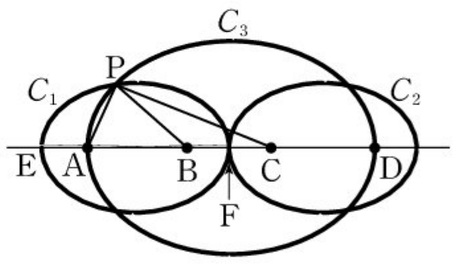
blacklabel 특강 필수 개념

코시-슈바르츠의 부등식

a, b, x, y가 실수일 때,

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$ (단, 등호는 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$일 때 성립)

03



위의 그림과 같이 타원 C_1의 두 꼭짓점을 E, F라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{EF}$
$=\overline{AB}+\overline{EA}+\overline{BF}$
$=\overline{AB}+\overline{FC}+\overline{BF}$ ($\because$ 두 타원 C_1, C_2는 합동)
$=\overline{AB}+\overline{BC}$ ……㉠

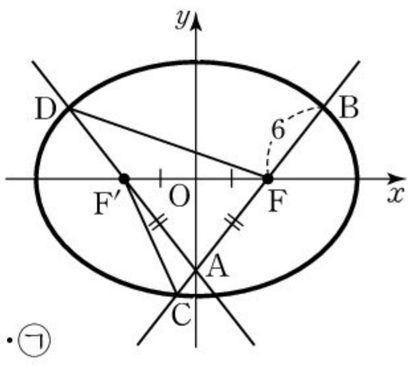
또한, 타원 C_3에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{BP}+\overline{CP}=\overline{AD}$
$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$
$=2\overline{AB}+\overline{BC}$ ($\because \overline{AB}=\overline{CD}$) ……㉡

㉡−㉠을 하면

$\overline{CP}-\overline{AP}=\overline{AB}=8$ 답 ②

04 두 초점 F, F′이 y축에 대하여 대칭이므로 주어진 타원도 y축에 대하여 대칭이다.
또한, 점 A가 y축 위에 있으므로 두 직선 AF, AF′도 y축에 대하여 대칭이다. ……㉠



삼각형 F′CA의 둘레의 길이가 20이고 $\overline{FA}=\overline{F'A}$이므로

$\overline{F'C}+\overline{AC}+\overline{F'A}=20$
$\overline{F'C}+\overline{AC}+\overline{FA}=20$
$\therefore \overline{F'C}+\overline{FC}=20$

이때, 점 C는 타원 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는 20이다.

한편, ㉠에 의하여

$\overline{DF'}=\overline{BF}=6$

타원의 정의에 의하여

$\overline{DF}+\overline{DF'}=20$
$\therefore \overline{DF}=20-6=14$ 답 14

05 타원의 두 초점이 F(6, 0), F′(−6, 0)이므로

$\overline{FF'}=12$

점 P에서의 원의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 150°이므로 x축과 만나는 점을 A라 하면

$\angle OAP=30^\circ$

직선 OP는 접선과 수직이므로 △OAP는 직각삼각형이고

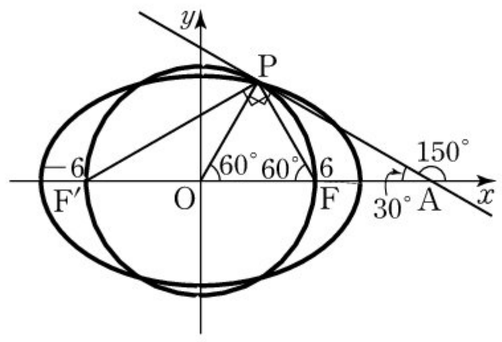
$\angle POF=60^\circ$

이때, $\overline{OP}=\overline{OF}$이므로 △POF는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{PF}=\overline{OP}=6$

$\angle PFO=60^\circ$이고, 선분 F′F가 원의 지름이므로 직각삼각형 FPF′에서

$\overline{PF'}=\overline{FF'}\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$



이때, 두 점 F, F′은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=6+6\sqrt{3}$ 답 ②

• 다른풀이 •

F(6, 0), F′(−6, 0)이므로 주어진 원의 반지름의 길이는 6이다.

$\therefore \overline{OP}=\overline{OF}=6$ ……㉠

점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하면

$\angle PAO=30^\circ$

또한, 접선이 직선 OP와 수직이므로 $\angle OPA=90^\circ$

$\therefore \angle POA=60^\circ$ ……㉡

㉠, ㉡에서 △OFP는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다.

$\therefore \overline{PF}=6$

△PF′F에서 중선정리에 의하여

$\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OF}^2)$

$\overline{PF'}^2+6^2=2\times(6^2+6^2)$, $\overline{PF'}^2=108$

$\therefore \overline{PF'}^2=6\sqrt{3}$ ($\because \overline{PF'}>0$)

따라서 두 점 F, F′은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=6+6\sqrt{3}$

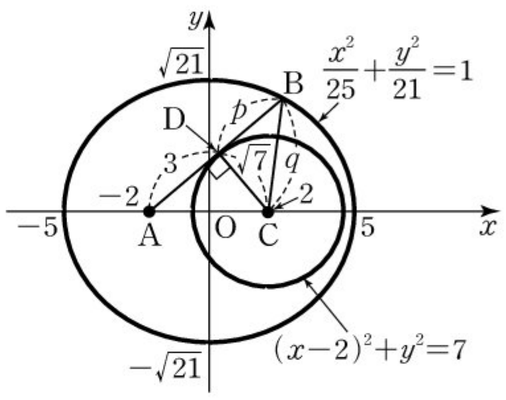
06 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$의 두 초점을 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-21=4$ $\therefore c=2$ ($\because c>0$)

즉, 점 A$(-2, 0)$과 원 $(x-2)^2+y^2=7$의 중심 C$(2, 0)$은 주어진 타원의 두 초점과 같다.

이때, 점 A를 지나면서 원에 접하는 직선의 접점을 D라 하면 $\overline{AC}=4$, $\overline{CD}=\sqrt{7}$이고, $\angle ADC=90°$이므로 직각삼각형 CDA에서

$\overline{AD}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{9}=3$



타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$의 장축의 길이는 $2\times5=10$이므로

$\overline{BD}=p$, $\overline{BC}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{AB}+\overline{BC}=10$에서

$3+p+q=10$ $\therefore p+q=7$ ……㉠

또한, 직각삼각형 BDC에서

$q^2-p^2=7$ $\therefore (q+p)(q-p)=7$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $q-p=1$ ……㉢

㉠, ㉢에서 $p=3$, $q=4$

따라서 선분 BC의 길이는 4이다. 답 4

07 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$의 두 초점을 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=100-75=25$ $\therefore c=5$ ($\because c>0$)

$\therefore$ F$(5, 0)$, F′$(-5, 0)$

또한, 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점을 $(k, 0)$, $(-k, 0)$ $(k>0)$이라 하면

$k^2=49-24=25$ $\therefore k=5$ ($\because k>0$)

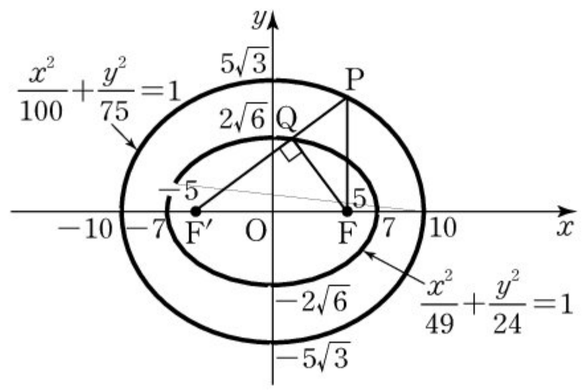
즉, 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점은 F, F′이다.

타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$의 장축의 길이는 $2\times7=14$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{F'Q}+\overline{FQ}=14$

$\overline{F'Q}=8$이므로 $\overline{FQ}=14-8=6$

이때, $\overline{FF'}=10$에서 $\overline{FF'}^2=\overline{FQ}^2+\overline{F'Q}^2$이 성립하므로 △FQF′은 직각삼각형이다.



$\overline{PQ}=a$, $\overline{PF}=b$라 하면 직각삼각형 PQF에서

$b^2=a^2+6^2$ ……㉮

또한, 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$의 장축의 길이는 $2\times10=20$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PF}=20$, $\overline{PQ}+\overline{F'Q}+\overline{PF}=20$

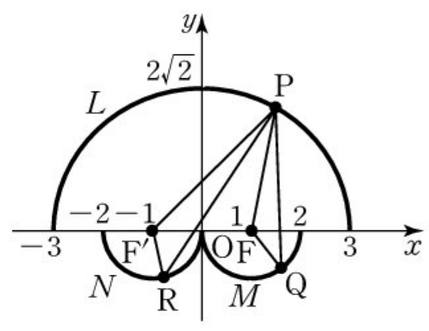
$a+8+b=20$ $\therefore b=12-a$

이것을 ㉮에 대입하면

$(12-a)^2=a^2+6^2$, $24a=108$ $\therefore a=\frac{9}{2}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $\frac{9}{2}$이다. 답 $\frac{9}{2}$

08 세 부분 L, M, N은 오른쪽 그림과 같고, 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면



$c^2=9-8=1$ $\therefore c=1$ ($\because c>0$)

즉, F$(1, 0)$, F′$(-1, 0)$이므로 타원의 두 초점은 각각 두 원 $(x-1)^2+y^2=1$, $(x+1)^2+y^2=1$의 중심과 같다.

이때, 점 P는 L 위에 있고, L의 장축의 길이는 $2\times3=6$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=6$ ……㉠

또한, 두 점 Q, R는 각각 M, N 위에 있으므로

$\overline{QF}=\overline{RF'}=1$

따라서

$\overline{PQ}\le\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PF}+1$, ← 세 점 P, F, Q가 한 직선 위에 있을 때, 등호 성립

$\overline{PR}\le\overline{PF'}+\overline{RF'}=\overline{PF'}+1$ ← 세 점 P, F′, R가 한 직선 위에 있을 때, 등호 성립

이므로

$\overline{PQ}+\overline{PR}\le(\overline{PF}+1)+(\overline{PF'}+1)$

$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+2$

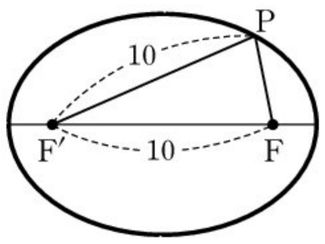
$=6+2$ ($\because$ ㉠)

$=8$

즉, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최댓값은 8이다. 답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점이 주어진 두 원의 중심과 같음을 파악한 경우	20%
(나)	$\overline{PQ}$와 $\overline{PR}$의 길이의 범위를 각각 구한 경우	40%
(다)	타원의 정의를 이용하여 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최댓값을 구한 경우	40%

09 장축의 길이가 14이고, 점 P가 타원 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

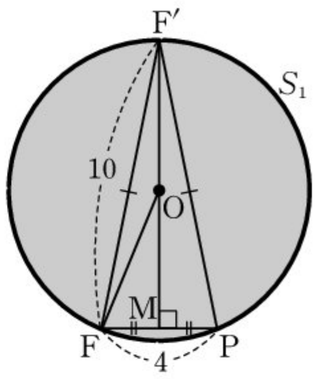


$\overline{PF}+\overline{PF'}=14$

이때, $\overline{F'P}=10$이므로 $\overline{PF}=4$

또한, $\triangle PF'F$는 $\overline{F'P}=\overline{FF'}=10$인 이등변삼각형이다.

선분 PF의 중점을 M이라 하면



$\overline{PM}=2$이고 $\overline{F'M}\perp\overline{PF}$이므로

$\overline{F'M}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

이때, $\triangle PF'F$의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하면

$\overline{OF}=\overline{OF'}=R$이므로

$\overline{OM}=4\sqrt{6}-R$

직각삼각형 OFM에서

$\overline{OF}^2=\overline{OM}^2+\overline{FM}^2$

$R^2=(4\sqrt{6}-R)^2+2^2$

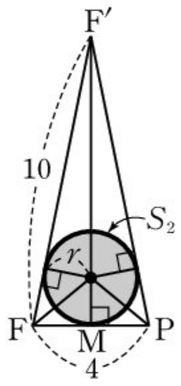
$8\sqrt{6}R=100$

$\therefore R=100\times\frac{1}{8\sqrt{6}}=\frac{25}{2\sqrt{6}}$

즉, $\triangle PF'F$의 외접원의 넓이 S_1은

$S_1=\pi\times\left(\frac{25}{2\sqrt{6}}\right)^2=\frac{625}{24}\pi$

또한, $\triangle PF'F$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 PF′F의 넓이에 의하여



$\frac{1}{2}\times\overline{FP}\times\overline{F'M}=\frac{1}{2}r(\overline{F'F}+\overline{FP}+\overline{F'P})$

$\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{6}=\frac{1}{2}r(10+4+10)$

$12r=8\sqrt{6}$ $\therefore r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

즉, $\triangle PF'F$의 내접원의 넓이 S_2는

$S_2=\pi\times\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $S_1:S_2=\frac{625}{24}\pi:\frac{8}{3}\pi=625:64$이므로

$m=625$, $n=64$

$\therefore m+n=625+64=689$ 답 ②

• 다른풀이 •

$\triangle PF'F$의 넓이를 이용하여 $\triangle PF'F$의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수도 있다.

$\overline{PF}=4$, $\overline{F'M}=4\sqrt{6}$이므로

$\triangle PF'F=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

이때, $\overline{F'P}=\overline{F'F}=10$이므로 $\triangle PF'F$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\triangle PF'F=\frac{10\times10\times4}{4R}=\frac{100}{R}$ ← 블랙라벨 수학 I 62쪽 비법노트 ©(1) 참고

즉, $\frac{100}{R}=8\sqrt{6}$이므로

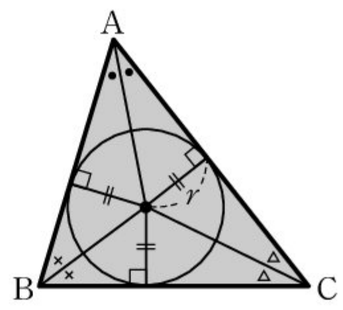
$R=\frac{25}{2\sqrt{6}}$

blacklabel 특강 필수 개념

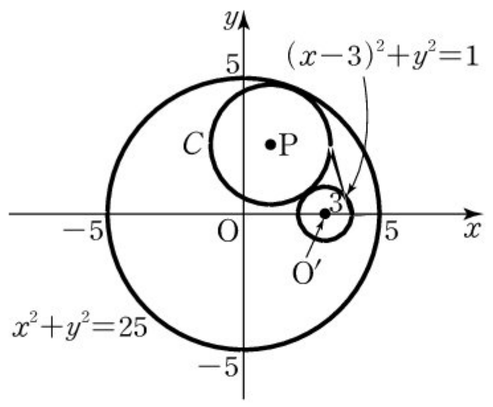
삼각형의 내접원과 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$



10 점 P를 중심으로 하는 원을 C라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.



원 $x^2+y^2=25$의 중심이 O(0, 0)이고, 이 원에 원 C가 내접하므로

$\overline{PO}+r=5$에서 $\overline{PO}=5-r$ ……㉠

원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심이 O′(3, 0)이고, 이 원과 원 C가 외접하므로

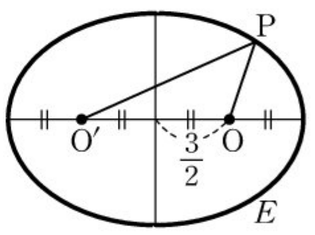
$\overline{PO'}=r+1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PO}+\overline{PO'}=(5-r)+(r+1)=6$ ……㉢

이므로 점 P가 그리는 도형 E는 두 점 O, O′을 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이다.

이때, $\overline{OO'}=3$이므로



$3-\frac{3}{2}\le\overline{PO}\le3+\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{3}{2}\le\overline{PO}\le\frac{9}{2}$

$\overline{PO}\times\overline{PO'}=\overline{PO}\times(6-\overline{PO})$ ($\because$ ㉢)

$=-\overline{PO}^2+6\overline{PO}$

$=-(\overline{PO}-3)^2+9$

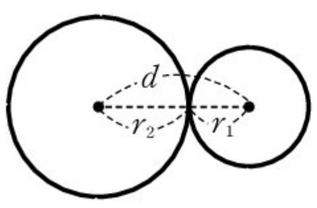
이므로 $\overline{PO}\times\overline{PO'}$는 $\overline{PO}=3$일 때 최댓값 9를 갖는다.

답 9

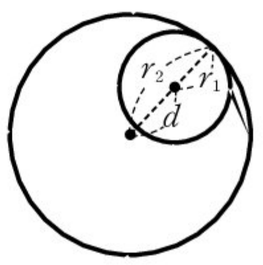
blacklabel 특강 필수 개념

접하는 두 원의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2 $(r_1<r_2)$이고, 두 원의 중심 사이의 거리를 d라 하면

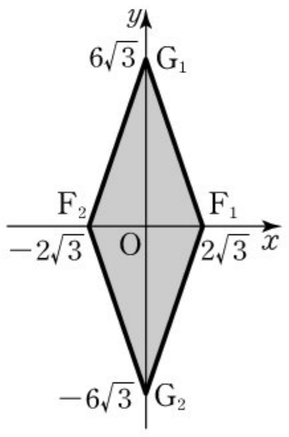
(1) 두 원이 외접할 때 $r_1+r_2=d$



(2) 두 원이 내접할 때 $r_2-r_1=d$



11 두 점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직이므로
A$(a, 0)$, B$(0, b)$라 하자.
조건 (가)에서 선분 AB의 길이가 6이므로
$\sqrt{a^2+b^2}=6 \quad \therefore a^2+b^2=36 \quad \cdots\cdots$㉠
점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로
$\mathrm{P}\left(\frac{1\times0+2\times a}{1+2}, \frac{1\times b+2\times0}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b\right)$
$\frac{2}{3}a=x$, $\frac{1}{3}b=y$로 놓으면 $a=\frac{3}{2}x$, $b=3y$
이것을 ㉠에 대입하면
$\left(\frac{3}{2}x\right)^2+(3y)^2=36$, $\frac{9}{4}x^2+9y^2=36$
$\therefore C: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}_1(c, 0)$, $\mathrm{F}_2(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면
$c^2=16-4=12 \quad \therefore c=2\sqrt{3}\ (\because c>0)$
$\therefore \mathrm{F}_1(2\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}_2(-2\sqrt{3}, 0)$
점 Q는 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이므로
$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times0-1\times a}{2-1}, \frac{2\times b-1\times0}{2-1}\right)$, 즉 $\mathrm{Q}(-a, 2b)$
$-a=x'$, $2b=y'$으로 놓으면 $a=-x'$, $b=\frac{1}{2}y'$
이것을 ㉠에 대입하면
$(-x')^2+\left(\frac{1}{2}y'\right)^2=36$, $x'^2+\frac{1}{4}y'^2=36$
$\therefore D: \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{144}=1$
타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{144}=1$의 두 초점을
$\mathrm{G}_1(0, d)$, $\mathrm{G}_2(0, -d)$ $(d>0)$
라 하면
$d^2=144-36=108$
$\therefore d=6\sqrt{3}\ (\because d>0)$
$\therefore \mathrm{G}_1(0, 6\sqrt{3})$, $\mathrm{G}_2(0, -6\sqrt{3})$

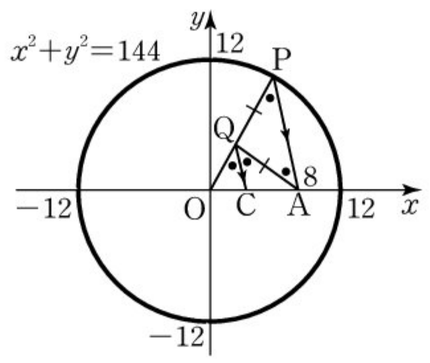


따라서 네 점 F_1, F_2, G_1, G_2를 꼭짓점으로 하는 사각형은 위의 그림과 같이 마름모이므로 그 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times12\sqrt{3}=72$ 답 72

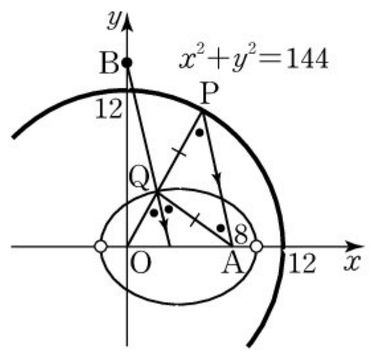
12 해결단계

❶ 단계	두 조건 (가), (나)를 이용하여 $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QP}}$임을 파악한다.
❷ 단계	점 Q가 그리는 도형이 타원의 일부임을 파악하고, 그 방정식을 구한다.
❸ 단계	$\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소일 조건을 파악한 후, 선분 PQ의 길이를 구한다.

점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}/\!/\overline{\mathrm{CQ}}$이므로
$\angle\mathrm{AQC}=\angle\mathrm{QAP}$(엇각), $\angle\mathrm{OQC}=\angle\mathrm{QPA}$(동위각)
즉, $\angle\mathrm{QAP}=\angle\mathrm{QPA}$이므로 $\triangle\mathrm{QAP}$는 $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QP}}$인 이등변삼각형이다.



$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$
$=\overline{\mathrm{OP}}=12 \quad \cdots\cdots$㉠
이므로 점 Q는 두 점 O, A를 초점으로 하고 장축의 길이가 12인 타원 위에 있다.
점 Q의 좌표를 (x, y) $(y\neq0)$라 하면 ㉠에서
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-8)^2+y^2}=12$
$\sqrt{(x-8)^2+y^2}=12-\sqrt{x^2+y^2}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$x^2-16x+64+y^2=144-24\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$
$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+10$
위의 식의 양변을 제곱하면
$9x^2+9y^2=4x^2+40x+100$
$5(x-4)^2+9y^2=180$
$\therefore \frac{(x-4)^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ (단, $y\neq0$) $\cdots\cdots$㉡



㉠에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=12-\overline{\mathrm{OQ}}$이므로
$\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}-(12-\overline{\mathrm{OQ}})$
$=\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}-12$
$\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{AQ}}$의 최솟값이 2이므로
$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}-12\geq2 \quad \therefore \overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}\geq14$
이때, y축 위의 점 B가 타원 ㉡의 내부에 있으면
$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{BQ}}$의 최솟값이 14보다 작으므로 모순이다.
즉, 점 B는 타원 ㉡의 외부에 있고 등호는 점 Q가 선분 OB 위에 있을 때 성립하므로 두 점 P, Q는 y축 위에 있다.
따라서 $\mathrm{P}(0, 12)$, $\mathrm{Q}\left(0, \frac{10}{3}\right)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=12-\frac{10}{3}=\frac{26}{3}$ 답 ③

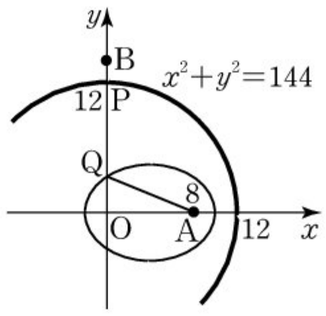
• 다른풀이 •
두 점 O, A를 초점으로 하고 장축의 길이가 12인 타원 위의 점 Q에 대하여 타원의 방정식을 구하지 않고 조건을 만족시키는 선분 PQ의 길이를 구해 보자.
㉠에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=12-\overline{\mathrm{OQ}}$이므로

$\overline{BQ}-\overline{AQ}=\overline{BQ}-(12-\overline{OQ})$

$=\overline{OQ}+\overline{BQ}-12$

$\geq\overline{BO}-12$

이때, 등호는 점 Q가 선분 OB 위에 있을 때 성립하므로 두 점 P, Q는 선분 BO 위에 있다.



위의 그림의 직각삼각형 OAQ에서

$\overline{QA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OQ}^2$, $\overline{QA}^2=8^2+\overline{OQ}^2$

$\overline{QA}^2-\overline{OQ}^2=(\overline{QA}+\overline{OQ})(\overline{QA}-\overline{OQ})$

$=12(\overline{QA}-\overline{OQ})$ ($\because$ ㉠)

$=64$

$\therefore \overline{QA}-\overline{OQ}=\frac{16}{3}$

위의 식과 ㉠을 연립하여 풀면

$\overline{QA}=\frac{26}{3}$, $\overline{OQ}=\frac{10}{3}$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{QA}=\frac{26}{3}$

13 $y=mx+2$를 $x^2+2y^2=2$에 대입하면

$x^2+2(mx+2)^2=2$

$\therefore (2m^2+1)x^2+8mx+6=0$

직선 $y=mx+2$와 타원 $x^2+2y^2=2$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 위의 x에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(4m)^2-6(2m^2+1)>0$, $4m^2-6>0$

$\therefore m^2>\frac{3}{2}$ ……㉠

직선 $y=mx+2$와 원 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$이 만나지 않기 위해서는 직선 $mx-y+2=0$과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\frac{1}{2}$보다 커야 하므로

$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>\frac{1}{2}$, $\sqrt{m^2+1}<4$

위의 부등식의 양변을 제곱하면

$m^2+1<16$ $\therefore m^2<15$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}<m^2<15$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m은 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$ 답 5

14 $y=\frac{1}{3}x+k$를 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{9}+\frac{\left(\frac{1}{3}x+k\right)^2}{4}=1$

$4x^2+x^2+6kx+9k^2=36$

$\therefore 5x^2+6kx+9k^2-36=0$ ……㉠

이때, 주어진 직선과 타원은 서로 다른 두 점에서 만나므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-5(9k^2-36)>0$

$36(k^2-5)<0$, $k^2<5$

$\therefore -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ ……㉡

두 교점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 x_1, x_2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-\frac{6}{5}k$

선분 PQ의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3}{5}k$ ……㉢

$y=\frac{1}{3}x+k=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}k\right)+k=\frac{4}{5}k$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $k=-\frac{5}{3}x$, $k=\frac{5}{4}y$이므로 $-\frac{5}{3}x=\frac{5}{4}y$

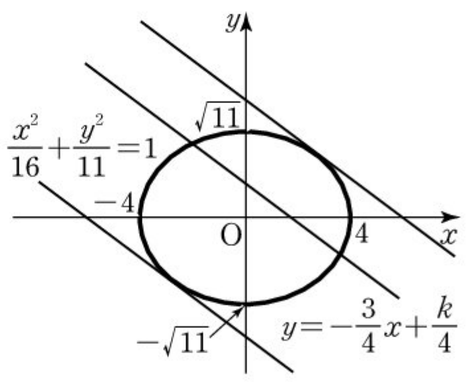
$\therefore 4x+3y=0$

또한, ㉡, ㉢에 의하여 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}$이므로 선분 PQ의 중점이 그리는 자취의 방정식은

$4x+3y=0$ $\left(\text{단, } -\frac{3\sqrt{5}}{5}<x<\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ 답 ⑤

15 $3x+4y=k$라 하면 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$

이 직선은 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$ 위의 한 점 P를 지나고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선이므로 오른쪽 그림과 같이 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 타원의 접선이거나 두 접선 사이에 있어야 한다.



타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$에 접하고 기울기가 $-\frac{3}{4}$인 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x\pm\sqrt{16\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2+11}$

$\therefore y=-\frac{3}{4}x\pm2\sqrt{5}$

즉, $-2\sqrt{5}\leq\frac{k}{4}\leq2\sqrt{5}$에서

$-8\sqrt{5}\leq k\leq8\sqrt{5}$

따라서 $M=8\sqrt{5}$, $m=-8\sqrt{5}$이므로

$M^2+m^2=(8\sqrt{5})^2+(-8\sqrt{5})^2$

$=320+320=640$ 답 ⑤

• 다른풀이 •

x, y가 실수이므로 코시－슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{12^2+(4\sqrt{11})^2\}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}\right)\geq(3x+4y)^2$

(단, 등호는 $3x=4y$일 때 성립)

$320\times1\geq(3x+4y)^2$ $\left(\because \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1\right)$

$\therefore -8\sqrt{5}\leq3x+4y\leq8\sqrt{5}$

16 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 점 P의 좌표를 $(2a, a)$ $(a>0)$라 할 수 있다.

이때, 타원 $\frac{x^2}{1+4k^2}+\frac{y^2}{1-4k^2}=1$ 위의 점 $P(2a, a)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2ax}{1+4k^2}+\frac{ay}{1-4k^2}=1$

$\frac{ay}{1-4k^2}=-\frac{2ax}{1+4k^2}+1$

$\therefore y=\frac{2(4k^2-1)}{4k^2+1}x+\frac{1-4k^2}{a}$

이 접선의 기울기가 -1이므로

$\frac{2(4k^2-1)}{4k^2+1}=-1$, $8k^2-2=-4k^2-1$

$12k^2=1$, $k^2=\frac{1}{12}$ $\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\left(\because 0<k<\frac{1}{2}\right)$ 답 ③

• 다른풀이 •

타원 $\frac{x^2}{1+4k^2}+\frac{y^2}{1-4k^2}=1$의 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{(1+4k^2)\times(-1)^2+(1-4k^2)}$

$\therefore y=-x\pm\sqrt{2}$

이때, 타원과 직선이 제1사분면에서 접하므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=-x+\sqrt{2}$

한편, 점 P와 원점을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 점 P의 좌표를 $(2a, a)$ $(a>0)$라 하면 이 직선이 점 $P(2a, a)$를 지나므로

$a=-2a+\sqrt{2}$, $3a=\sqrt{2}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{3}$

점 $P\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$가 타원 $\frac{x^2}{1+4k^2}+\frac{y^2}{1-4k^2}=1$ 위에 있으므로

$\frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}{1+4k^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{1-4k^2}=1$

$8(1-4k^2)+2(1+4k^2)=9(1+4k^2)(1-4k^2)$

$144k^4-24k^2+1=0$, $(12k^2-1)^2=0$

$12k^2-1=0$, $k^2=\frac{1}{12}$ $\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\left(\because 0<k<\frac{1}{2}\right)$

17 $4x^2+5y^2=20$에서 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

이 타원의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=5-4=1$ $\therefore c=1$ $(\because c>0)$

$\therefore F(1, 0)$, $F'(-1, 0)$

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$4x_1x+5y_1y=20$ $\therefore y=-\frac{4x_1}{5y_1}x+\frac{4}{y_1}$

이 접선이 x축과 만나는 점이 Q이므로 $Q\left(\frac{5}{x_1}, 0\right)$

또한, 직선 l의 기울기가 $-\frac{4x_1}{5y_1}$이므로 점 P를 지나고 접선 l과 수직인 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{5y_1}{4x_1}(x-x_1)$ $\therefore y=\frac{5y_1}{4x_1}x-\frac{y_1}{4}$

이 직선이 x축과 만나는 점이 R이므로 $R\left(\frac{x_1}{5}, 0\right)$

한편, 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 이 세 삼각형의 높이가 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이 $\overline{RF}$, $\overline{F'R}$, $\overline{FQ}$가 이 순서대로 등차수열을 이루어야 한다.

$\overline{RF}=1-\frac{x_1}{5}$, $\overline{F'R}=\frac{x_1}{5}+1$, $\overline{FQ}=\frac{5}{x_1}-1$이므로

$2\left(\frac{x_1}{5}+1\right)=\left(1-\frac{x_1}{5}\right)+\left(\frac{5}{x_1}-1\right)$

$\frac{3x_1}{5}+2-\frac{5}{x_1}=0$, $3x_1^2+10x_1-25=0$

$(x_1+5)(3x_1-5)=0$

$\therefore x_1=\frac{5}{3}$ $(\because x_1>0)$

점 $P\left(\frac{5}{3}, y_1\right)$은 타원 $4x^2+5y^2=20$ 위에 있으므로

$4\times\left(\frac{5}{3}\right)^2+5y_1^2=20$, $5y_1^2=\frac{80}{9}$

$y_1^2=\frac{16}{9}$ $\therefore y_1=\frac{4}{3}$ $(\because y_1>0)$

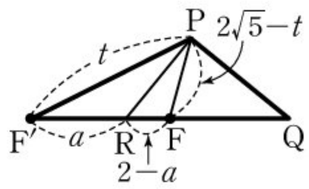
따라서 $P\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $Q(3, 0)$이므로 삼각형 PF′Q의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

• 다른풀이 •

$\overline{F'R}=a$, $\overline{PF'}=t$ $(a>0, t>0)$라 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{FR}=2-a$, $\overline{PF}=2\sqrt{5}-t$



세 선분 FR, F′R, FQ의 길이도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{F'R}=\overline{FR}+\overline{FQ}$, $2a=(2-a)+\overline{FQ}$

$\therefore \overline{FQ}=3a-2$

$\therefore \overline{F'Q}=\overline{FF'}+\overline{FQ}=2+3a-2=3a$

이때, $\overline{F'R}:\overline{FR}=\overline{F'Q}:\overline{FQ}$이므로 (비법노트 ©(6))

$a:(2-a)=3a:(3a-2)$

$6a-3a^2=3a^2-2a$, $6a^2-8a=0$

$2a(3a-4)=0$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$ $(\because a>0)$

또한, $\overline{F'R}:\overline{FR}=\overline{PF'}:\overline{PF}$이므로

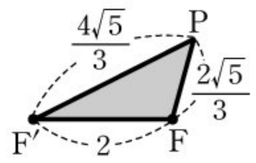
비법노트 ©(6)

$\frac{4}{3}:\frac{2}{3}=t:(2\sqrt{5}-t)$

$t=4\sqrt{5}-2t$, $3t=4\sqrt{5}$

$\therefore t=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

$s=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$라 하면 헤론의 공식에 의하여 삼각형 PF′F의 넓이는



$\triangle PF'F=\sqrt{s\left(s-\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)(s-2)\left(s-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)}$

$=\sqrt{(1+\sqrt{5})\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)(-1+\sqrt{5})\left(1+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}$

$=\sqrt{4\times\frac{4}{9}}=\frac{4}{3}$

이때, $\overline{FF'}=2$, $\overline{FQ}=3a-2=2$이므로 두 삼각형 PF′F, PFQ의 밑변의 길이는 서로 같다.

$\therefore \triangle PF'Q=2\triangle PF'F=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

18 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점에서의 접선의 기울기를 m $(m<0)$이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+\sqrt{9m^2+4}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

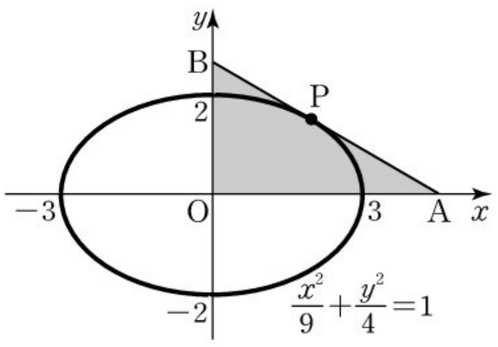
이 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$A\left(-\frac{\sqrt{9m^2+4}}{m},\ 0\right)$,

$B(0,\ \sqrt{9m^2+4})$

$m<0$이므로

$-m=t$ $(t>0)$로 놓으면



$A\left(\frac{\sqrt{9t^2+4}}{t},\ 0\right)$, $B(0,\ \sqrt{9t^2+4})$

삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{9t^2+4}}{t}\times\sqrt{9t^2+4}$

$=\frac{9t^2+4}{2t}=\frac{9}{2}t+\frac{2}{t}$

이때, $\frac{9}{2}t>0$, $\frac{2}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{9}{2}t+\frac{2}{t}\geq 2\sqrt{\frac{9}{2}t\times\frac{2}{t}}$

$=2\times 3=6$

즉, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 6이고, 등호는 $\frac{9}{2}t=\frac{2}{t}$, 즉 $t=\frac{2}{3}$일 때 성립한다.

따라서 $m=-\frac{2}{3}$이므로 ㉠에서 조건을 만족시키는 접선의 방정식은

$y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{2}$, $2x+3y-6\sqrt{2}=0$

$\therefore 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y-12=0$

그러므로 $a=2\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2$

$=8+18=26$ 답 26

• 다른풀이 •

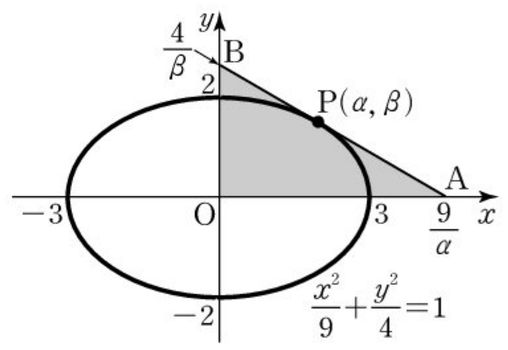
타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 제1사분면에 있는 접점을 $P(\alpha,\ \beta)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$\frac{\alpha x}{9}+\frac{\beta y}{4}=1$ $\quad\cdots\cdots$㉡

또한, 점 $P(\alpha,\ \beta)$는 주어진 타원 위에 있으므로

$\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\beta^2}{4}=1$ $\quad\cdots\cdots$㉢

이때, 접선 ㉡이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $A\left(\frac{9}{\alpha},\ 0\right)$, $B\left(0,\ \frac{4}{\beta}\right)$이고, 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.



삼각형 OAB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\alpha}\times\frac{4}{\beta}=\frac{18}{\alpha\beta}$

이고, S가 최솟값을 갖기 위해서는 분모인 $\alpha\beta$의 값이 최대가 되어야 하므로 ㉢에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\beta^2}{4}\geq 2\sqrt{\frac{\alpha^2}{9}\times\frac{\beta^2}{4}}$

$1\geq\frac{\alpha\beta}{3}$ $(\because$ ㉢$)$

$\alpha\beta\leq 3$

$\therefore S=\frac{18}{\alpha\beta}\geq 6$

여기서 등호는 $\frac{\alpha^2}{9}=\frac{\beta^2}{4}=\frac{1}{2}$, 즉 $\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\sqrt{2}$일 때 성립한다.

따라서 $\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 접선의 방정식은

$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}x}{9}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$ $\quad\therefore 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y-12=0$

19 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 밖의 한 점 P에서 타원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

$y-mx=\pm\sqrt{16m^2+9}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$y^2-2mxy+m^2x^2=16m^2+9$

$\therefore (x^2-16)m^2-2xym+(y^2-9)=0$ ……㉠

(i) $x^2-16=0$, 즉 $x=\pm4$일 때,

점 P의 좌표가 $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$이면 각각 타원에 그은 두 접선은 수직이다.

(ii) $x^2-16\neq0$일 때,

m에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근을 m_1, m_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\frac{y^2-9}{x^2-16}$

이고, 두 접선이 서로 수직이므로

$\frac{y^2-9}{x^2-16}=-1$, $y^2-9=-x^2+16$

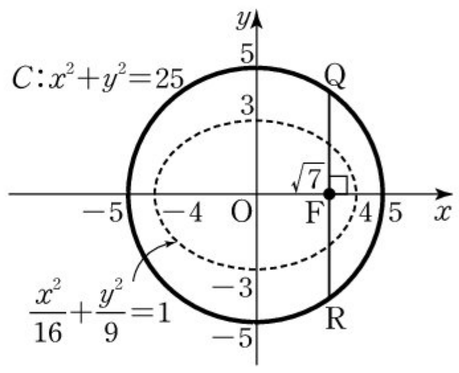
$\therefore x^2+y^2=25$

(i), (ii)에서 점 P가 나타내는 도형 C는 원 $x^2+y^2=5^2$이다.

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$의 한 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16-9=7$ $\therefore c=\sqrt{7}$ $(\because c>0)$

$\therefore \mathrm{F}(\sqrt{7}, 0)$



점 F를 지나는 직선이 원 C와 두 점 Q, R에서 만날 때 선분 QR의 길이가 최소이려면 위의 그림과 같이 직선 QR가 x축과 수직이어야 한다.

$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=5$이므로 직각삼각형 OQF에서

$\overline{\mathrm{QF}}=\sqrt{25-7}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{QF}}=2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

답 $6\sqrt{2}$

20 타원 $4x^2+y^2=1$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$에서의 접선의 방정식은 각각

$4x_1x+y_1y=1$ ……㉠

$4x_2x+y_2y=1$ ……㉡

이때, 점 $\mathrm{R}(1, 2)$는 두 접선 ㉠, ㉡의 교점이므로

$4x_1+2y_1=1$, $4x_2+2y_2=1$

즉, 두 점 P, Q는 직선 $4x+2y=1$ 위에 있다.

따라서 직선 PQ의 방정식은 $4x+2y=1$이다.

답 $4x+2y=1$

21 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}_1(-c, 0)$, $\mathrm{F}_2(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=2-1=1$ $\therefore c=1$ $(\because c>0)$

$\therefore \mathrm{F}_1(-1, 0)$, $\mathrm{F}_2(1, 0)$

(i) 점 P가 x축 위에 있을 때,

점 P가 주어진 타원의 꼭짓점 $(\sqrt{2}, 0)$과 일치하면

$\alpha=\sqrt{2}+1$, $\beta=\sqrt{2}-1$

점 P가 주어진 타원의 꼭짓점 $(-\sqrt{2}, 0)$과 일치하면

$\alpha=\sqrt{2}-1$, $\beta=\sqrt{2}+1$

$\therefore \alpha\beta=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$

(ii) 점 P가 x축 위에 있지 않을 때,

점 P에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{2m^2+1}$

$\therefore mx-y\pm\sqrt{2m^2+1}=0$

두 초점 F_1, F_2와 접선 사이의 거리를 각각 구하면

$\alpha=\frac{|-m\pm\sqrt{2m^2+1}|}{\sqrt{m^2+1}}$, $\beta=\frac{|m\pm\sqrt{2m^2+1}|}{\sqrt{m^2+1}}$

(단, 복부호 동순)

$\therefore \alpha\beta=\frac{|-m\pm\sqrt{2m^2+1}|}{\sqrt{m^2+1}}\times\frac{|m\pm\sqrt{2m^2+1}|}{\sqrt{m^2+1}}$

$=\frac{|2m^2+1-m^2|}{m^2+1}=1$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta=1$이므로 $\beta=\frac{1}{\alpha}$ (단, $\alpha>0$, $\beta>0$)

따라서 조건을 만족시키는 α, β 사이의 관계를 나타내는 그래프의 개형은 ②이다.

답 ②

• 다른풀이 •

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) $(-\sqrt{2}<x_1<\sqrt{2})$이라 하면 점 P가 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위에 있으므로

$\frac{{x_1}^2}{2}+{y_1}^2=1$ $\therefore {y_1}^2=1-\frac{{x_1}^2}{2}$ ……㉠

또한, 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{x_1x}{2}+y_1y=1$ $\therefore l: x_1x+2y_1y-2=0$

타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$의 두 초점 $\mathrm{F}_1(-1, 0)$, $\mathrm{F}_2(1, 0)$과 접선 l 사이의 거리가 각각 α, β이므로

$\alpha=\frac{|-x_1-2|}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}=\frac{x_1+2}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}$

$\beta=\frac{|x_1-2|}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}=\frac{-x_1+2}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}$

$\therefore \alpha\beta=\frac{x_1+2}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}\times\frac{-x_1+2}{\sqrt{{x_1}^2+4{y_1}^2}}$

$=\frac{4-{x_1}^2}{{x_1}^2+4{y_1}^2}$

$=\frac{4-{x_1}^2}{{x_1}^2+4\left(1-\frac{{x_1}^2}{2}\right)}$ $(\because$ ㉠$)$

$=\frac{4-{x_1}^2}{4-{x_1}^2}=1$

22 포물선 $y^2=4px$의 초점이 F이므로

$F(p, 0)$ $(p>0)$

이때, 타원 C가 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하면 점 F를 중심으로 하는 원이 포물선과 타원에 동시에 접하므로 이 원의 반지름의 길이는 p이고,

$\overline{OP}=2p$

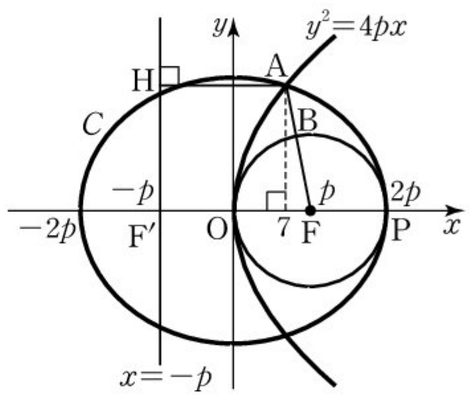
즉, 타원 C의 장축의 길이는 $4p$이다.

한편, 포물선 $y^2=4px$의 준선의 방정식이 $x=-p$이므로 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AH}=\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=7+p$

즉, 점 A의 x좌표는 7이므로 y좌표는

$y^2=4\times p\times 7$ $\therefore y=2\sqrt{7p}$ $(\because y>0)$



또한, $F'(-p, 0)$이므로 점 F'은 포물선 $y^2=4px$의 준선과 x축의 교점이고

$\overline{HF'}=2\sqrt{7p}$

한편, 타원의 정의에 의하여 $\overline{AF}+\overline{AF'}=4p$이므로

$(7+p)+\overline{AF'}=4p$ $\therefore \overline{AF'}=3p-7$

따라서 직각삼각형 AHF′에서

$\overline{AF'}^2=\overline{AH}^2+\overline{HF'}^2$

$(3p-7)^2=(7+p)^2+(2\sqrt{7p})^2$

$8p^2-84p=0$, $4p(2p-21)=0$

$\therefore p=\frac{21}{2}$ $(\because p\neq 0)$ 답 $\frac{21}{2}$

23 포물선 $y^2=4x$와 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 교점 A의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하자.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{2}{y_1}x+\frac{2x_1}{y_1}$

이므로 기울기는 $\frac{2}{y_1}$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{4}=1$, 즉 $y=-\frac{4x_1}{a^2y_1}x+\frac{4}{y_1}$

이므로 기울기는 $-\frac{4x_1}{a^2y_1}$

포물선과 타원의 점 A에서의 접선이 서로 수직이므로

$\frac{2}{y_1}\times\left(-\frac{4x_1}{a^2y_1}\right)=-1$, $8x_1=a^2{y_1}^2$

$\therefore {y_1}^2=\frac{8x_1}{a^2}$ ……㉠

점 $A(x_1, y_1)$은 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

${y_1}^2=4x_1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{8x_1}{a^2}=4x_1$

$\therefore a^2=\frac{8x_1}{4x_1}=2$ $(\because x_1>0)$ 답 2

24 점 $A(-k, 0)$ $(k>0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$

이 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(-x_1, 0)$이므로

$-x_1=-k$ $\therefore x_1=k$

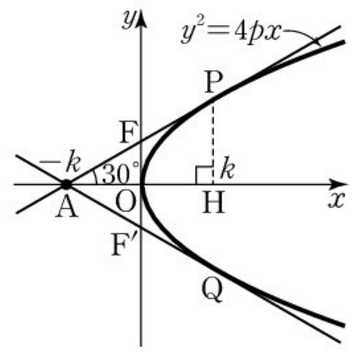
즉, 점 P의 x좌표는 k이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(k, 0)$이므로 $\overline{AH}=2k$

$\angle PAQ=60^\circ$에서 $\angle PAH=30^\circ$이므로 직각삼각형 PAH에서

$\tan 30^\circ=\frac{\overline{PH}}{\overline{AH}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\overline{PH}}{2k}$ $\therefore \overline{PH}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$ ……㉠

$\cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AP}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2k}{\overline{AP}}$ $\therefore \overline{AP}=\frac{4k}{\sqrt{3}}$



두 삼각형 PAH, FAO는 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 2 : 1이므로

$\overline{FO}=\frac{1}{2}\overline{PH}=\frac{k}{\sqrt{3}}$

$\therefore \overline{OF'}=\frac{k}{\sqrt{3}}$

즉, $F'\left(0, -\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$이고, $P\left(k, \frac{2k}{\sqrt{3}}\right)$이므로

$\overline{PF'}=\sqrt{k^2+\left(\frac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2}=2k$ $(\because k>0)$

또한, $\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$이므로

$\overline{PF}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$

따라서 타원의 정의에 의하여 두 점 F, F′을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\frac{2k}{\sqrt{3}}+2k=4\sqrt{3}+12$

$\therefore k=6$

㉠에서 $\overline{PH}=\frac{2\times 6}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$이므로 점 P의 좌표는 $(6, 4\sqrt{3})$이고, 이 점이 포물선 $y^2=4px$ 위에 있으므로

$(4\sqrt{3})^2=4p\times 6$, $24p=48$

$\therefore p=2$

$\therefore p+k=2+6=8$ 답 ①

25 해결단계

❶ 단계	점 B의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 타원과 포물선의 점 B에서의 접선의 방정식과 기울기를 각각 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	타원과 포물선이 제1사분면에서 만나는 점이 B임을 이용하여 x_1의 값의 범위를 구한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	선분 CD의 길이를 x_1을 이용하여 나타낸 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 포물선 $y^2=4px$와 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}=1$의 교점 B의 좌표를 (x_1, y_1) $(x_1>0, y_1>0)$이라 하면

$y_1^2=4px_1$ ……㉠, $\frac{x_1^2}{64}+\frac{y_1^2}{49}=1$

포물선 $y^2=4px$의 점 $B(x_1, y_1)$에서의 접선 l_1의 방정식은

$y_1y=2p(x+x_1)$, 즉 $y=\frac{2p}{y_1}x+\frac{2px_1}{y_1}$

이므로 접선 l_1의 기울기는 $m_1=\frac{2p}{y_1}$

타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}=1$의 점 $B(x_1, y_1)$에서의 접선 l_2의 방정식은

$\frac{x_1x}{64}+\frac{y_1y}{49}=1$, 즉 $y=-\frac{49x_1}{64y_1}x+\frac{49}{y_1}$

이므로 접선 l_2의 기울기는 $m_2=-\frac{49x_1}{64y_1}$

$\therefore m_1m_2=\frac{2p}{y_1}\times\left(-\frac{49x_1}{64y_1}\right)=-\frac{49px_1}{32y_1^2}$

$=-\frac{49px_1}{32\times4px_1}$ ($\because$ ㉠)

$=-\frac{49}{128}$ (거짓)

ㄴ. 점 C는 직선 $l_1: y_1y=2p(x+x_1)$과 x축의 교점이므로 $C(-x_1, 0)$

이때, 점 B가 제1사분면의 타원 위의 점이므로

$0<x_1<8$

즉, $-8<-x_1<0$이므로 점 C는 선분 AO 위에 있다. (참)

ㄷ. 점 D는 직선 $l_2: \frac{x_1x}{64}+\frac{y_1y}{49}=1$과 x축의 교점이므로

$D\left(\frac{64}{x_1}, 0\right)$

$\therefore \overline{CD}=\frac{64}{x_1}-(-x_1)=\frac{64}{x_1}+x_1$

이때, $x_1>0$, $\frac{64}{x_1}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{64}{x_1}+x_1\geq2\sqrt{\frac{64}{x_1}\times x_1}$

$=2\times8=16$

여기서 등호는 $\frac{64}{x_1}=x_1$, 즉 $x_1=8$일 때 성립한다.

그런데 $0<x_1<8$이므로 등호가 성립하지 않는다.

$\therefore \overline{CD}>16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 22

01 $\frac{125}{2}$ **02** $\frac{25}{18}$ **03** ② **04** 186 **05** 16

06 ④

01 해결단계

❶ 단계	세 점 A, B, C의 좌표를 θ를 이용하여 각각 나타낸다.
❷ 단계	삼각형 ABC의 넓이를 θ를 이용하여 나타낸 후, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 되기 위한 θ의 값을 구한다.
❸ 단계	점 B의 좌표를 구한 후, $\overline{OB}^2$의 값을 구한다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x$

직선 l이 원 $x^2+y^2=100$과 만나는 점이 A이므로

$A(10\cos\theta, 10\sin\theta)$

점 B는 점 A와 x좌표가 같고, 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ 위에 있으므로 점 B의 y좌표는

$\frac{(10\cos\theta)^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

$\frac{y^2}{25}=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$

$y^2=25\sin^2\theta$

$\therefore y=5\sin\theta$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{에서 }\sin\theta>0\right)$

$\therefore B(10\cos\theta, 5\sin\theta)$

점 C는 점 B와 y좌표가 같고, 직선 l 위에 있으므로 점 C의 x좌표는

$5\sin\theta=(\tan\theta)x$

$\therefore x=\frac{5\sin\theta}{\tan\theta}=5\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=5\cos\theta$

$\therefore C(5\cos\theta, 5\sin\theta)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}(10\sin\theta-5\sin\theta)(10\cos\theta-5\cos\theta)$

$=\frac{25}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{25}{4}\sin2\theta$ (단, $0<2\theta<\pi$)

이때, $0<x<\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값은 $x=\frac{\pi}{2}$일 때이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $2\theta=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 최대이다.

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 점 B의 좌표는 $\left(10\cos\frac{\pi}{4}, 5\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $\left(5\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\overline{OB}^2=(5\sqrt{2})^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=50+\frac{25}{2}=\frac{125}{2}$ 답 $\frac{125}{2}$

• 다른풀이 •

△ACB∽△AOH (AA 닮음)이므로 △AOH의 넓이가 최대이면 △ACB의 넓이도 최대이다.

점 A가 원 $x^2+y^2=100$ 위에 있으므로 점 A의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면

$a^2+b^2=100$이고, $\triangle AOH=\frac{1}{2}ab$

$a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore \triangle AOH\leq\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

이때, $a=b$이면 $a^2+b^2=100$에서

$2a^2=100$, $a^2=50$ $\therefore a=5\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

즉, △AOH는 $a=b$일 때, 즉 $a=5\sqrt{2}$일 때 넓이가 최대이므로 △ACB의 넓이가 최대일 때, 점 B의 x좌표는 $5\sqrt{2}$이다.

$x=5\sqrt{2}$를 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$에 대입하면

$\frac{1}{2}+\frac{y^2}{25}=1$, $y^2=\frac{25}{2}$ $\therefore y=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ($\because y>0$)

따라서 $B\left(5\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\overline{OB}^2=(5\sqrt{2})^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=50+\frac{25}{2}=\frac{125}{2}$

02 해결단계

❶ 단계	$\frac{x+3y+2}{-x+2y-7}=k$라 하고 이 식을 정리한 식이 k의 값에 관계없이 점 $(-5, 1)$과 타원 위의 한 점을 지나는 직선의 방정식임을 파악한다.
❷ 단계	❶단계에서 정리한 직선이 점 $(-5, 1)$에서 주어진 타원에 그은 접선이거나 두 접선 사이에 있어야 함을 파악한 후, k의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	M, m의 값을 각각 구한 후, $M-m$의 값을 구한다.

$\frac{x+3y+2}{-x+2y-7}=k$라 하면

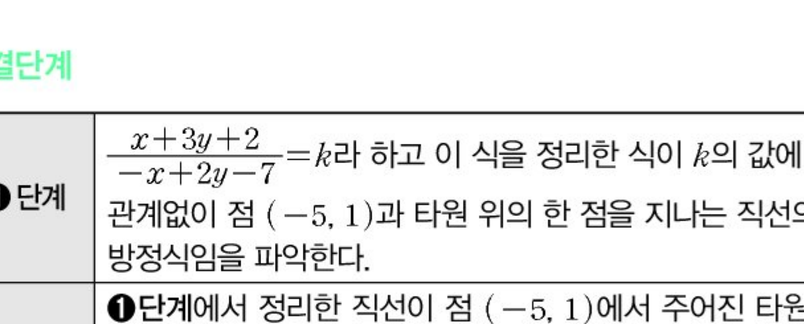
$x+3y+2=k(-x+2y-7)$에서

$(x+3y+2)+k(x-2y+7)=0$

이때, 직선 $(x+3y+2)+k(x-2y+7)=0$은 k의 값에 관계없이 점 $(-5, 1)$과 타원 위의 한 점을 지난다.

즉, 이 직선은 다음 그림과 같이 점 $(-5, 1)$에서 타원의 그은 접선이거나 두 접선 사이에 있어야 한다. ……㉠

두 직선 $x+3y+2=0$, $x-2y+7=0$의 교점



점 $(-5, 1)$에서 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 a이라 하면 접선의 방정식은

$y=ax\pm\sqrt{9a^2+1}$

이 직선이 점 $(-5, 1)$을 지나므로

$1=-5a\pm\sqrt{9a^2+1}$, $1+5a=\pm\sqrt{9a^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$25a^2+10a+1=9a^2+1$

$16a^2+10a=0$, $2a(8a+5)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-\frac{5}{8}$

이때, $(x+3y+2)+k(x-2y+7)=0$에서

$(k+1)x+(3-2k)y+2+7k=0$

$\therefore y=\frac{k+1}{2k-3}x+\frac{7k+2}{2k-3}$

즉, 직선 $(x+3y+2)+k(x-2y+7)=0$의 기울기가 $\frac{k+1}{2k-3}$이므로 ㉠을 만족시키려면

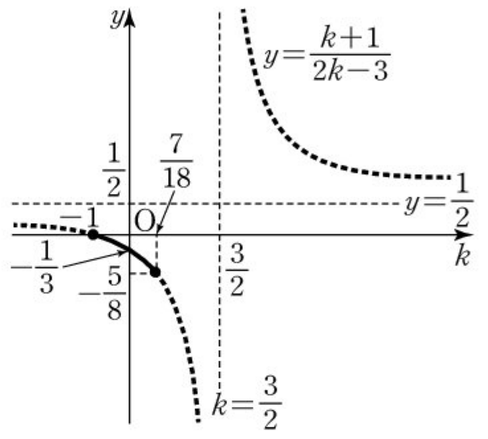
$-\frac{5}{8}\leq\frac{k+1}{2k-3}\leq 0$ ……㉡

이때,

$y=\frac{k+1}{2k-3}$

$=\frac{\frac{1}{2}(2k-3)+\frac{5}{2}}{2k-3}$

$=\frac{5}{4\left(k-\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{2}$



에서 유리함수 $y=\frac{k+1}{2k-3}$의 그래프가 위의 그림과 같으므로 ㉡에서

$-1\leq k\leq\frac{7}{18}$

따라서 $M=\frac{7}{18}$, $m=-1$이므로

$M-m=\frac{7}{18}-(-1)=\frac{25}{18}$ 답 $\frac{25}{18}$

blacklabel 특강 필수 개념

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

(1) 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만날 때, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

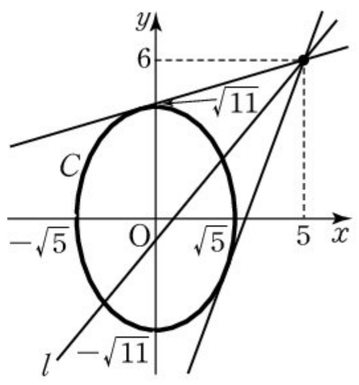
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)

(2) 직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$은 실수 k의 값에 관계없이 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지난다.
(단, 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 한 점에서 만나는 경우에만 생각한다.)

03 해결단계

❶ 단계	점 $(5, 6)$에서 타원 C에 그은 접선을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	두 점 P, Q에서의 접선이 점 $R(a, b)$를 지남을 이용하여 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 구한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	두 점 P, Q를 지나는 직선이 l임을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 직선 $l : y=k(x-5)+6$은 기울기가 k이고 점 $(5, 6)$을 지난다.



직선 l이 타원 C와 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 l이 점 $(5, 6)$에서 타원 C에 그은 두 접선 사이에 있어야 한다.

점 $(5, 6)$에서 타원 C에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면

$y=mx\pm\sqrt{5m^2+11}$

이 직선이 점 $(5, 6)$을 지나므로

$6=5m\pm\sqrt{5m^2+11}$, $6-5m=\pm\sqrt{5m^2+11}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$25m^2-60m+36=5m^2+11$, $4m^2-12m+5=0$

$(2m-1)(2m-5)=0$ $\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{5}{2}$

즉, 두 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$이고 $k\neq\frac{6}{5}$이므로 직선 l의 기울기 k의 값의 범위는

$\frac{1}{2}<k<\frac{6}{5}$ 또는 $\frac{6}{5}<k<\frac{5}{2}$ (참)

ㄴ. 두 점 P, Q의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자.

타원 C의 두 점 P, Q에서의 접선의 방정식은 각각

$\frac{x_1x}{5}+\frac{y_1y}{11}=1$, $\frac{x_2x}{5}+\frac{y_2y}{11}=1$

위의 두 접선의 교점이 $R(a, b)$이므로

$\frac{x_1a}{5}+\frac{y_1b}{11}=1$, $\frac{x_2a}{5}+\frac{y_2b}{11}=1$

즉, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{ax}{5}+\frac{by}{11}=1$ $\therefore y=-\frac{11a}{5b}x+\frac{11}{b}$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는

$-\frac{11a}{5b}$이다. (참)

ㄷ. 직선 l이 직선 PQ와 일치하므로

$-\frac{11a}{5b}x+\frac{11}{b}=k(x-5)+6$에서

$\frac{11}{b}=-5k+6$ $\therefore k=\frac{6}{5}-\frac{11}{5b}$

이때, ㄱ에서 $\frac{1}{2}<k<\frac{6}{5}$ 또는 $\frac{6}{5}<k<\frac{5}{2}$이므로

$\frac{1}{2}<\frac{6}{5}-\frac{11}{5b}<\frac{6}{5}$ 또는 $\frac{6}{5}<\frac{6}{5}-\frac{11}{5b}<\frac{5}{2}$

$0<\frac{1}{b}<\frac{7}{22}$ 또는 $-\frac{13}{22}<\frac{1}{b}<0$

$\therefore b>\frac{22}{7}$ ($\because b$는 자연수)

즉, 자연수 b의 최솟값은 4이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

04 해결단계

❶ 단계	타원의 정의와 $\overline{PF}\times\overline{PF'}=45$임을 이용하여 두 선분 PF, PF′의 길이를 각각 구한다.
❷ 단계	삼각형 PF′F에서 중선정리를 이용하여 선분 OP의 길이를 구한다.
❸ 단계	삼각형 PBA에서 중선정리를 이용하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=49-40=9$ $\therefore c=3$ ($\because c>0$)

$\therefore F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

또한, 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$과 x축의 교점이 A, B이므로

$A(7, 0)$, $B(-7, 0)$

타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$의 장축의 길이는 $2\times7=14$이므로 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=14$

$\overline{PF}=a$라 하면 $\overline{PF'}=14-a$이고, $\overline{PF}\times\overline{PF'}=45$이므로

$a(14-a)=45$, $a^2-14a+45=0$

$(a-5)(a-9)=0$ $\therefore a=5$ 또는 $a=9$

즉, $\overline{PF}=5$, $\overline{PF'}=9$

삼각형 PF′F에서 $\overline{OF}=3$이므로 중선정리에 의하여

$\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OF}^2)$

$9^2+5^2=2(\overline{OP}^2+3^2)$ $\therefore \overline{OP}^2=44$

또한, 삼각형 PBA에서 $\overline{OA}=7$이므로 중선정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{OP}^2+\overline{OA}^2)$

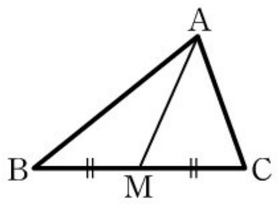
$=2(44+7^2)=186$ 답 186

blacklabel 특강 필수 개념

중선정리

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$



05 해결단계

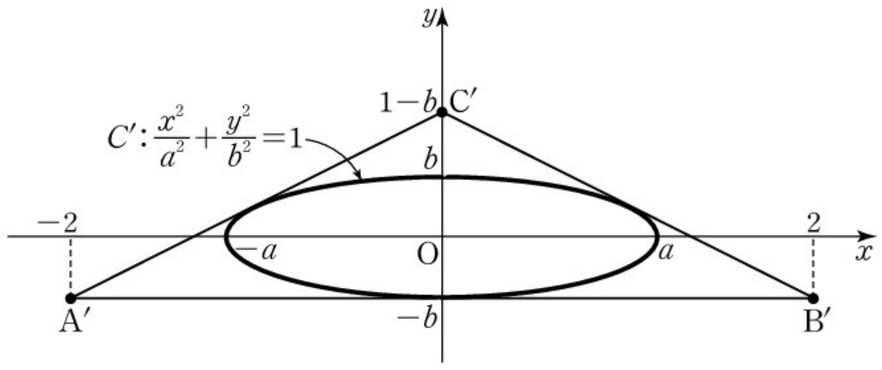
❶ 단계	삼각형 ABC에 타원 C가 내접함을 이용하여 타원의 방정식을 세운다.
❷ 단계	타원 C의 중심이 원점에 오도록 타원 C와 세 점 A, B, C를 각각 평행이동시킨다.
❸ 단계	타원이 삼각형의 각 변에 접함을 이용하여 a와 b 사이의 관계식을 구한 후, 타원 C의 넓이를 a를 이용하여 나타낸다.
❹ 단계	타원 C의 넓이가 최대가 되도록 하는 a의 값을 구한 후, $12a^2$의 값을 구한다.

삼각형 ABC는 한 변이 x축 위에 있고 y축에 대하여 대칭이므로 이 삼각형에 내접하고, 장축이 x축과 평행한 타원 C도 y축에 대하여 대칭이고, 중심은 y축 위에 있으며 x축에 접한다.

타원 C의 장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$이므로 타원 C의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$이고, 타원 C와 세 점 A, B, C를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 것을 각각 C', A′, B′, C′이라 하면

$C' : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

$A'(-2,\ -b)$, $B'(2,\ -b)$, $C'(0,\ 1-b)$



직선 A′C′의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+1-b$ ……㉠

기울기가 $\frac{1}{2}$인 타원 C'의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$

이므로 접선 A′C′의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$1-b=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-2b+b^2=\frac{1}{4}a^2+b^2$

$\therefore\ b=\frac{4-a^2}{8}$ (단, $0<a<2$)

$\because\ b=\frac{4-a^2}{8}>0$

타원 C의 넓이를 $f(a)$라 하면

$f(a)=\pi ab=\pi a\times\frac{4-a^2}{8}=\frac{\pi}{8}(-a^3+4a)$

$f'(a)=\frac{\pi}{8}(-3a^2+4)$

$f'(a)=0$에서 $-3a^2+4=0$, $a^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\because\ a>0$)

$0<a<2$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	…	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	…	(2)
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗	극대	↘	

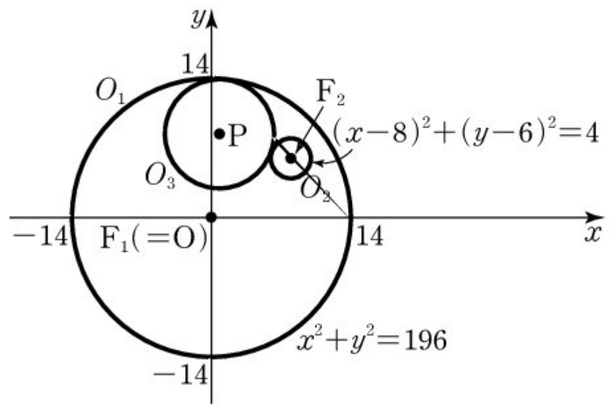
따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 극대이자 최대이므로

$12a^2=12\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=12\times\frac{4}{3}=16$ 답 16

06 해결단계

❶ 단계	원의 위치 관계를 이용하여 점 P가 그리는 타원의 장축의 길이를 구한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	두 점 P, Q가 그리는 타원의 성질을 파악한 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	타원의 두 초점과 타원 위의 한 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 최대일 조건을 파악하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 점 P를 중심으로 하는 원을 O_3이라 하고, 원 O_3의 반지름의 길이를 R라 하자.



원 $O_1 : x^2+y^2=196$에 원 O_3이 내접하므로

$\overline{PF_1}+R=14$ $\therefore\ \overline{PF_1}=14-R$

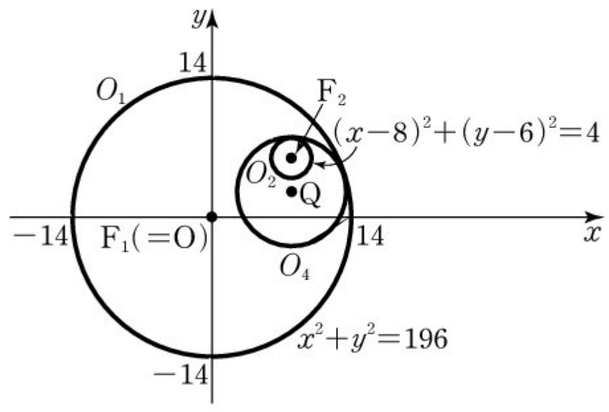
원 $O_2 : (x-8)^2+(y-6)^2=4$와 원 O_3이 외접하므로

$\overline{PF_2}=R+2$

$\therefore\ \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=(14-R)+(R+2)=16$

즉, 점 P가 그리는 도형 C는 초점이 F_1, F_2이고 장축의 길이가 16인 타원이다. (거짓)

ㄴ. 점 Q를 중심으로 하는 원을 O_4라 하고, 원 O_4의 반지름의 길이를 r라 하자.



원 O_1에 원 O_4가 내접하므로

$\overline{QF_1}+r=14$ $\therefore\ \overline{QF_1}=14-r$

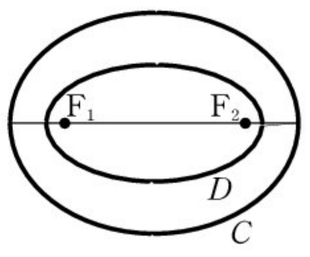
원 O_2가 원 O_4에 내접하므로

$\overline{QF_2}+2=r$ $\therefore\ \overline{QF_2}=r-2$

$\therefore\ \overline{QF_1}+\overline{QF_2}=(14-r)+(r-2)=12$

즉, 점 Q가 그리는 도형 D는 초점이 F_1, F_2이고 장축의 길이가 12인 타원이다.

따라서 두 타원 C, D의 초점이 같고 타원 C의 장축의 길이가 타원 D의 장축의 길이보다 길므로 서로 만나지 않는다. (참)



ㄷ. 삼각형 PF_1F_2의 넓이가 최대이려면 선분 F_1F_2를 밑변으로 생각했을 때, 높이가 최대이어야 하므로 점 P는 타원 C의 단축 위의 한 꼭짓점이어야 한다.

타원 C의 장축의 길이가 16이고, $F_1(0,\ 0)$, $F_2(8,\ 6)$에서 $\overline{F_1F_2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$이므로 단축의 길이는

$2\sqrt{8^2+5^2}=2\sqrt{39}$

$\therefore S_1 \le \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{39} = 5\sqrt{39}$

$\therefore {S_1}^2 \le (5\sqrt{39})^2 = 975$ ……㉠

같은 방법으로 삼각형 QF_1F_2의 넓이가 최대이려면 선분 F_1F_2를 밑변으로 생각했을 때, 높이가 최대이어야 하므로 점 Q는 타원 D의 단축 위의 한 꼭짓점이어야 한다.

타원 D의 장축의 길이가 12이고, $\overline{F_1F_2}=10$이므로 단축의 길이는

$2\sqrt{6^2-5^2}=2\sqrt{11}$

$\therefore S_2 \le \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{11} = 5\sqrt{11}$

$\therefore {S_1}^2 \le (5\sqrt{11})^2 = 275$ ……㉡

㉠, ㉡에서

${S_1}^2 + {S_2}^2 \le 975 + 275 = 1250$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

blacklabel 특강 풀이첨삭

두 타원 C, D의 장축이 x축과 평행하지 않아 그래프를 그리기 어렵다면 두 타원 C, D 대신 두 타원과 각각 합동이면서 장축이 x축과 평행하고 중심이 원점인 두 타원을 C, D라 생각하고 풀 수 있다.

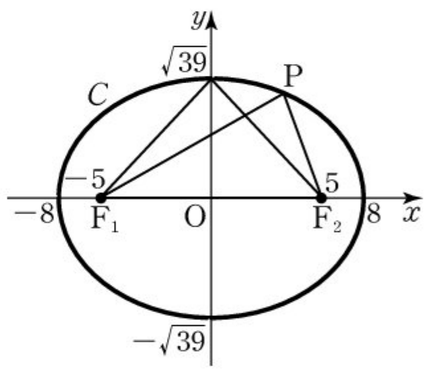
이 방법을 이용하여 삼각형 PF_1F_2의 넓이의 최댓값을 구해 보자.

타원 C의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 두 초점을 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ $(c>0)$이라 하면 장축의 길이가 16이고 두 초점 사이의 거리가 10이므로 $2a=16$, $2c=10$에서 $a=8$, $c=5$

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{39}$

오른쪽 그림에서 $\triangle PF_1F_2$의 밑변을 $\overline{F_1F_2}$로 생각한다면 밑변의 길이가 10이므로 $\triangle PF_1F_2$의 넓이는 높이에 따라 달라진다.

$\triangle PF_1F_2$의 높이는 점 P가 단축 위의 꼭짓점인 점 $(0, \sqrt{39})$ 또는 점 $(0, -\sqrt{39})$일 때 최대이므로 이때 $\triangle PF_1F_2$의 넓이도 최대가 된다.



이것이 수능 p. 23

1 14 2 8 3 ⑤ 4 ②

1 해결단계

❶ 단계	주어진 타원의 초점의 좌표를 구한다.
❷ 단계	두 삼각형 AOP, FOP가 서로 합동임을 이용하여 점 P가 직선 $y=x$ 위에 있음을 파악한다.
❸ 단계	타원의 정의를 이용하여 사각형 $AF'BP$의 둘레의 길이를 구하고 a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

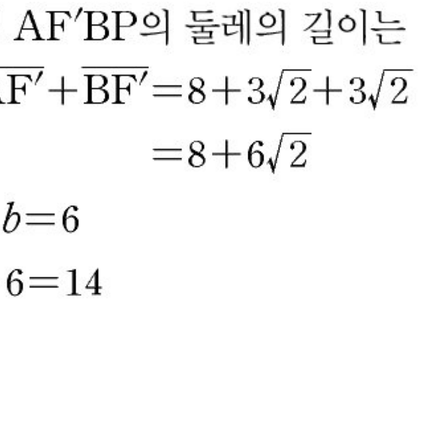
타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점의 좌표를 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16-7=9$ $\therefore c=3$ $(\because c>0)$

$\therefore F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

한편, 다음 그림과 같이 선분 PO를 그으면 $\overline{PA}=\overline{PF}$, $\overline{OA}=\overline{OF}=3$, $\overline{PO}$는 공통이므로

$\triangle AOP \equiv \triangle FOP$ (SSS 합동)



즉, 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\overline{PF'}=\overline{BP}$

이때, 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이는 $2\times4=8$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{BP}+\overline{PA}=\overline{PF'}+\overline{PF}=8$

또한, $A(0, 3)$, $B(0, -3)$, $F'(-3, 0)$이므로

$\overline{AF'}=\overline{BF'}=3\sqrt{2}$

따라서 사각형 $AF'BP$의 둘레의 길이는

$\overline{BP}+\overline{PA}+\overline{AF'}+\overline{BF'}=8+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=8+6\sqrt{2}$

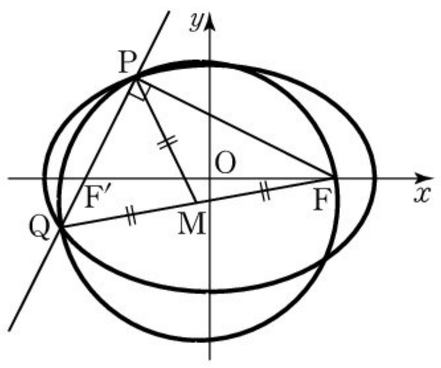
이므로 $a=8$, $b=6$

$\therefore a+b=8+6=14$ 답 14

2 해결단계

❶ 단계	세 점 P, Q, F가 중심이 M이고 반지름의 길이가 5인 원 위에 있음을 파악한다.
❷ 단계	선분 PF의 길이를 구한 후, 타원의 정의를 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	선분 PF'의 길이를 구하여 c의 값을 구한 후, 타원의 단축의 길이를 구한다.

$\overline{QM}=\overline{FM}=\overline{PM}=5$이므로 다음 그림과 같이 세 점 P, Q, F는 중심이 M이고 반지름의 길이가 5인 원 위에 있다.



즉, $\triangle PQF$는 $\angle FPQ=90^\circ$인 직각삼각형이다.

$\overline{QF}=10$, $\overline{PQ}=6$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$, $\overline{QF}+\overline{QF'}=2a$이고,

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{PF}+\overline{PQ}+\overline{QF}$

$=8+6+10=24$

이므로 $4a=24$

$\therefore a=6$

즉, $\overline{PF}+\overline{PF'}=12$이므로

$\overline{PF'}=12-8=4$

이때, $\triangle PF'F$는 직각삼각형이므로

$\overline{FF'}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}=2c$

$\therefore c=2\sqrt{5}$

$c^2=a^2-b^2$에서

$20=36-b^2$, $b^2=16$

$\therefore\ b=4\ (\because\ b>0)$

따라서 이 타원의 단축의 길이는 $2b$, 즉 8이다. 답 8

3 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B를 초점으로 하고 두 점 $(0, 6)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나는 타원의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키면서 넓이가 최대인 직사각형을 좌표평면 위에 나타낸다.
❸ 단계	❷단계를 만족시키는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 구한 후, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구한다.

두 점 A, B가 초점이고 점 $(0, 6)$을 지나는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$이라 하면

$a^2-b^2=4$ ……㉠, $\frac{36}{b^2}=1$ ……㉡

㉡에서 $b^2=36$이므로 ㉠에 대입하여 풀면 $a^2=40$

$\therefore\ \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$

또한, 두 점 A, B가 초점이고 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1\ (c>d>0)$이라 하면

$c^2-d^2=4$ ……㉢, $\frac{25}{4c^2}+\frac{9}{4d^2}=1$ ……㉣

$4\times$㉢에서 $4c^2-4d^2=16$

$\therefore\ 4c^2=16+4d^2$

이것을 ㉣에 대입하면

$\frac{25}{16+4d^2}+\frac{9}{4d^2}=1$

$100d^2+144+36d^2=64d^2+16d^4$

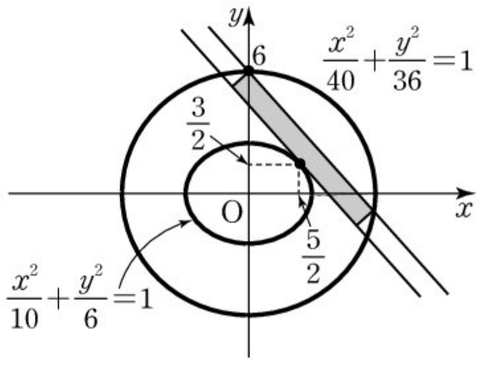
$2d^4-9d^2-18=0$, $(2d^2+3)(d^2-6)=0$

$\therefore\ d^2=6\ (\because\ d^2>0)$

이것을 ㉢에 대입하여 풀면 $c^2=10$

$\therefore\ \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$

점 P는 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$의 내부와 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$의 외부의 공통부분에 있고 직사각형은 두 점 $(0, 6)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 조건을 만족시키면서 넓이가 최대인 직사각형은 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$에 내접하고, 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$에 외접해야 한다.



타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\frac{5}{2}x}{10}+\frac{\frac{3}{2}y}{6}=1$ $\therefore\ x+y-4=0$

점 $(0, 6)$과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

또한, 직선 $x+y-4=0$, 즉 $y=-x+4$의 기울기가 -1이므로 직선 $x+y-4=0$과 평행하고 점 $(0, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+6$

직선 $y=-x+6$과 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$의 교점의 x좌표는

$\frac{x^2}{40}+\frac{(-x+6)^2}{36}=1$, $9x^2+10(-x+6)^2=360$

$19x^2-120x=0$, $x(19x-120)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{120}{19}$

$x=0$일 때, $y=0+6=6$

$x=\frac{120}{19}$일 때, $y=-\frac{120}{19}+6=-\frac{6}{19}$

즉, 직선 $y=-x+6$과 타원 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$의 두 교점의 좌표는 $(0, 6)$, $\left(\frac{120}{19}, -\frac{6}{19}\right)$이고, 이 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(0-\frac{120}{19}\right)^2+\left(6+\frac{6}{19}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\times120^2}{19^2}}=\frac{120\sqrt{2}}{19}$

따라서 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은

$\frac{120\sqrt{2}}{19}\times\sqrt{2}=\frac{240}{19}$ 답 ⑤

4 해결단계

❶ 단계	타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$의 접선의 기울기를 m이라 하고 접선의 방정식을 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 접선의 방정식에 점 P의 좌표를 대입하여 m에 대한 이차방정식을 세운다.
❸ 단계	두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$임을 이용하여 k^2의 값을 구한다.

타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{m^2+2}$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(k, 2)$를 지나므로

$2=mk\pm\sqrt{m^2+2}$, $2-mk=\pm\sqrt{m^2+2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$k^2m^2-4km+4=m^2+2$

$(k^2-1)m^2-4km+2=0$ ……㉠

두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이고, m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 타원의 두 접선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2}{k^2-1}=\frac{1}{3}$, $k^2-1=6$ $\therefore\ k^2=7$ 답 ②

03 쌍곡선

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 25

01 ③	02 2	03 ③	04 ②	05 ①
06 ①	07 9	08 $36\sqrt{2}$		

01 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$의 두 초점을 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25-21=4$ $\therefore c=2$ ($\because c>0$)

즉, 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0)$이라 하면

$a^2+b^2=4$ $\therefore b^2=4-a^2$ ……㉠

또한, 쌍곡선이 점 $(3, \sqrt{2})$를 지나므로

$\frac{9}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$

위의 식에 ㉠을 대입하여 풀면

$\frac{9}{a^2}-\frac{2}{4-a^2}=1$, $9(4-a^2)-2a^2=a^2(4-a^2)$

$a^4-15a^2+36=0$, $(a^2-12)(a^2-3)=0$

$\therefore a^2=3$ ($\because$ ㉠에서 $4-a^2>0$, 즉 $a^2<4$)

따라서 $a=\sqrt{3}$이므로 쌍곡선의 주축의 길이는

$l=2a=2\sqrt{3}$

$\therefore l^2=(2\sqrt{3})^2=12$ 답 ③

02 수직이등분선의 성질에 의하여

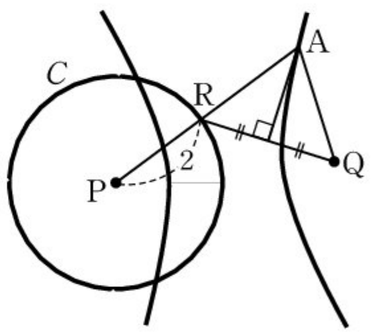
$\overline{AR}=\overline{AQ}$이므로

$|\overline{AP}-\overline{AQ}|$

$=|\overline{AP}-\overline{AR}|$

$=\overline{PR}=2$

즉, 점 A는 두 점 P, Q를 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위를 움직인다.



$\therefore d=2$ 답 2

03 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8+1=9$ $\therefore c=3$ ($\because c>0$)

$\therefore F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$

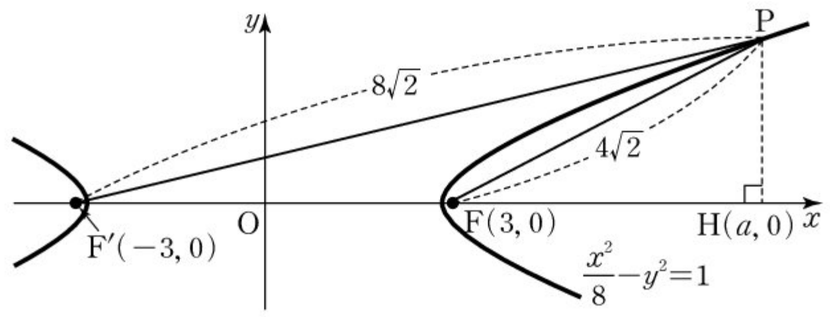
점 P가 제1사분면의 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=12\times 2\sqrt{2}=14\sqrt{2}$ ……㉠

이때, $\overline{PF}:\overline{PF'}=1:2$이므로 $2\overline{PF}=\overline{PF'}$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면

$\overline{PF}=4\sqrt{2}$, $\overline{PF'}=8\sqrt{2}$



위의 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 $H(a, 0)$ $(a>0)$이라 하자.

$\triangle PF'H$에서 $\overline{PH}^2=(8\sqrt{2})^2-(a+3)^2$,

$\triangle PFH$에서 $\overline{PH}^2=(4\sqrt{2})^2-(a-3)^2$

이므로 $(8\sqrt{2})^2-(a+3)^2=(4\sqrt{2})^2-(a-3)^2$

$128-(a^2+6a+9)=32-(a^2-6a+9)$

$12a=96$ $\therefore a=8$

$\therefore \overline{PH}=\sqrt{32-25}=\sqrt{7}$

따라서 구하는 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$ 답 ③

• 다른풀이 1 •

블랙라벨 수학 Ⅰ 62쪽 참고

삼각형의 세 변의 길이를 알면 헤론의 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

$F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$에서 $\overline{FF'}=6$이고, $\overline{PF}=4\sqrt{2}$, $\overline{PF'}=8\sqrt{2}$이므로

$s=\frac{6+4\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}=3+6\sqrt{2}$

라 하면 헤론의 공식에 의하여 삼각형 PF′F의 넓이는

$\triangle PF'F=\sqrt{s(s-6)(s-4\sqrt{2})(s-8\sqrt{2})}$

$=\sqrt{(3+6\sqrt{2})(-3+6\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$

$=\sqrt{(-9+72)\times(9-8)}$

$=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

• 다른풀이 2 •

블랙라벨 수학 Ⅰ 62쪽 참고

코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

$\overline{FF'}=6$, $\overline{PF}=4\sqrt{2}$, $\overline{PF'}=8\sqrt{2}$이므로

$\cos(\angle PF'F)=\frac{(8\sqrt{2})^2+6^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times 8\sqrt{2}\times 6}=\frac{11}{8\sqrt{2}}$

$0<\angle PF'F<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin(\angle PF'F)=\sqrt{1-\left(\frac{11}{8\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{16}$

$\therefore \triangle PF'F=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 6\times\frac{\sqrt{14}}{16}=3\sqrt{7}$

04 점 P의 좌표가 (x, y)이므로 점 Q의 좌표는 $(0, y)$이다.

점 $A(1, 0)$에 대하여

$\overline{AQ}=\sqrt{1+y^2}$, $\overline{PQ}=|x|$

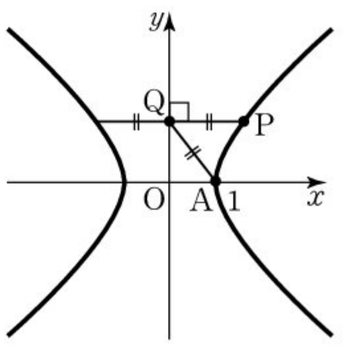
이때, $\overline{AQ}=\overline{PQ}$이므로

$\sqrt{1+y^2}=|x|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1+y^2=x^2$

$\therefore x^2-y^2=1$



답 ②

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 타원 $\frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 모두 x축, y축에 대하여 각각 대칭이므로 쌍곡선의 한 점근선에 평행하면서 타원에 접하는 직선은 모두 x축, y축에 대하여 각각 대칭이고 원점과 직선 사이의 거리가 모두 같다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로 직선 l이 이 중 한 점근선 $y=\frac{b}{a}x$에 평행하다고 하자.

기울기가 $\frac{b}{a}$이고 타원 $\frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x\pm\sqrt{8a^2\times\left(\frac{b}{a}\right)^2+b^2}$$

$$\therefore\ y=\frac{b}{a}x\pm3b$$

직선 $y=\frac{b}{a}x\pm3b$, 즉 $bx-ay\pm3ab=0$과 원점 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|\pm3ab|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=1$$

$$|\pm3ab|=\sqrt{a^2+b^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$9a^2b^2=a^2+b^2$$

양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=9$$

답 ①

06 $y=mx+1$을 $x^2-4y^2=4$에 대입하면

$$x^2-4(mx+1)^2=4$$

$$x^2-4(m^2x^2+2mx+1)=4$$

$$\therefore\ (1-4m^2)x^2-8mx-8=0$$

쌍곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 위의 x에 대한 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$1-4m^2\neq0,\ m^2=\frac{1}{4}\qquad\therefore\ m\neq\pm\frac{1}{2}$$

또한, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16m^2+8(1-4m^2)>0$$

$$16m^2-8<0,\ m^2<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{단, } m\neq\pm\frac{1}{2}\right)$$

답 ①

07 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로

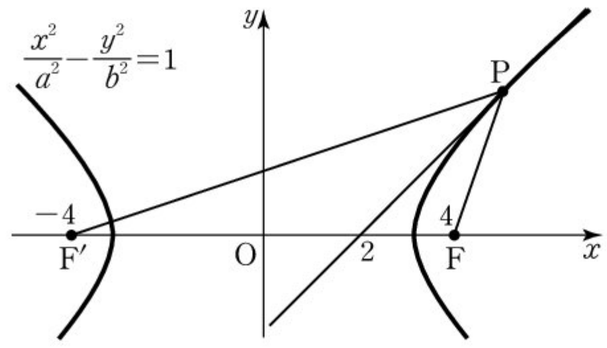
$$a^2+b^2=16\qquad\cdots\cdots㉠$$

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(5,\ k)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{5x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1\qquad\cdots\cdots㉡$$

이때, $\overline{\mathrm{FF}'}=8$이므로 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{F}$를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times4+1\times(-4)}{3+1},\ \frac{3\times0+1\times0}{3+1}\right),\ \text{즉 } (2,\ 0)$$



따라서 직선 ㉡이 점 $(2,\ 0)$을 지나야 하므로

$$\frac{10}{a^2}=1\qquad\therefore\ a^2=10,\ b^2=6\ (\because\ ㉠)$$

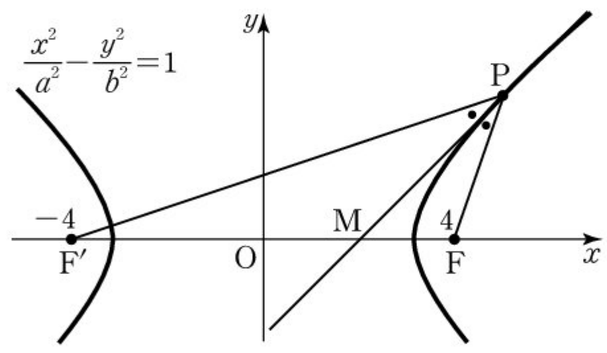
즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$이 점 $\mathrm{P}(5,\ k)$를 지나므로

$$\frac{25}{10}-\frac{k^2}{6}=1,\ \frac{k^2}{6}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ k^2=9$$

답 9

• 다른풀이 •



점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 M이라 하자.

점 P에서의 접선이 $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}$를 이등분하므로 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{\mathrm{PF}'}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{M}}:\overline{\mathrm{FM}}\qquad\cdots\cdots㉢$$

점 M이 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{F}$를 $3:1$로 내분하므로 ㉢에서

$$\overline{\mathrm{PF}'}:\overline{\mathrm{PF}}=3:1$$

$\mathrm{P}(5,\ k)$, $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$이므로

$$\sqrt{9^2+k^2}:\sqrt{1^2+k^2}=3:1$$

$$3\sqrt{1^2+k^2}=\sqrt{9^2+k^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

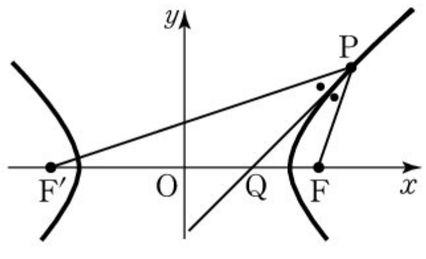
$$9(k^2+1)=k^2+81,\ 8k^2=72$$

$$\therefore\ k^2=9$$

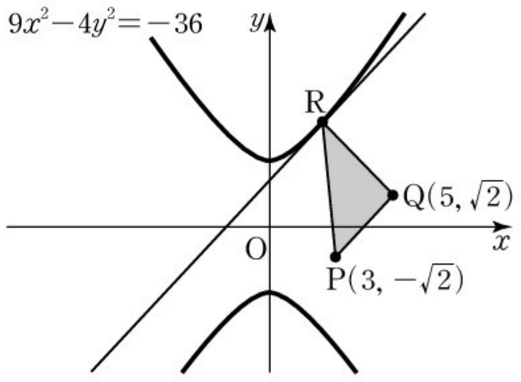
blacklabel 특강 참고

두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선은 $\angle\mathrm{FPF}'$을 이등분하므로 점 P에서의 접선과 x축의 교점 Q에 대하여

$$\overline{\mathrm{PF}'}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}'}:\overline{\mathrm{QF}}$$



08



제1사분면에서 쌍곡선 $9x^2-4y^2=-36$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최소이려면 밑변을 $\overline{PQ}$로 생각했을 때 높이가 최소이어야 하므로 점 R에서의 접선의 기울기가 직선 PQ의 기울기와 같아야 한다.

직선 PQ의 기울기가 $\frac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{5-3}=\sqrt{2}$이므로 쌍곡선 $9x^2-4y^2=-36$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$의 접선 중 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{2}x\pm\sqrt{9-4\times(\sqrt{2})^2}$ $\therefore y=\sqrt{2}x\pm1$

이때, 점 R가 제1사분면 위에 있으므로 위의 그림에서 접선의 방정식은 $y=\sqrt{2}x+1$ ……㉠

또한, 점 $R(a, b)$에서의 쌍곡선의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4}-\frac{by}{9}=-1$, 즉 $y=\frac{9a}{4b}x+\frac{9}{b}$ ……㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{9a}{4b}=\sqrt{2}$, $\frac{9}{b}=1$

$\therefore b=9$, $a=4\sqrt{2}$

$\therefore ab=4\sqrt{2}\times9=36\sqrt{2}$

답 $36\sqrt{2}$

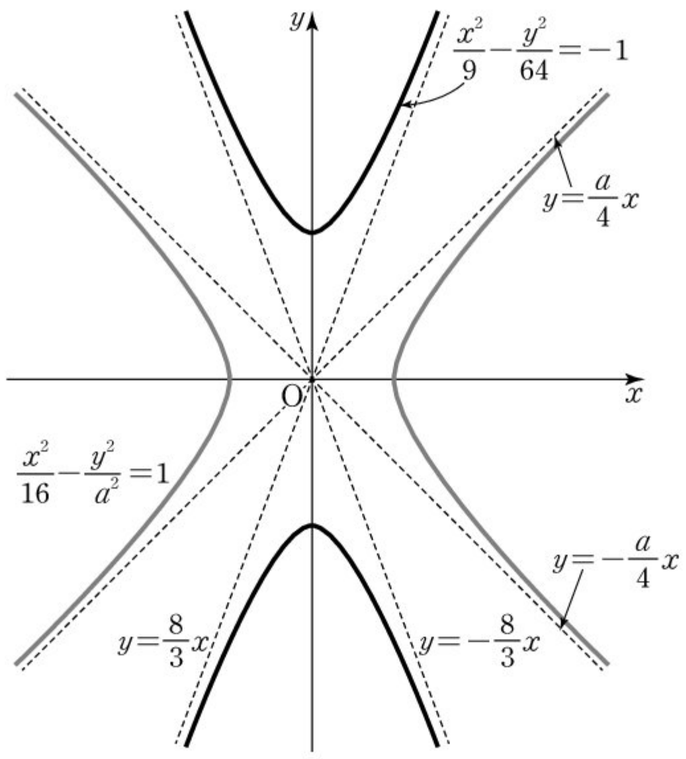
Step 2 1등급을 위한 **최고의 변별력 문제** pp. 26~30

01 ④	02 -8	03 ⑤	04 ②	05 ⑤
06 ③	07 12	08 2π	09 104	10 ④
11 $2\sqrt{2}$ km	12 ①	13 $y=\frac{1}{2}x$	14 ②	
15 $y=-\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}$		16 $\sqrt{5}$	17 ⑤	18 4
19 ①	20 $\{(a, b)\mid a^2-b^2>-1, a\neq\pm b\}$			21 ④
22 ③	23 2	24 ③	25 -2	26 3
27 9	28 $\frac{35\sqrt{3}}{6}$	29 $\sqrt{6}$	30 -5	31 ⑤

01

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=-1$의 주축은 y축 위에 있고, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{8}{3}x$이다.

또한, 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 주축은 x축 위에 있고, 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{a}{4}x$이다.



두 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=-1$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{a^2}=1$이 만나지 않으려면 위의 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=-1$의 점근선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 점근선보다 y축에 가깝거나 두 쌍곡선의 점근선이 일치해야 한다.

즉, $\frac{a}{4}\le\frac{8}{3}$에서 $a\le\frac{32}{3}$

따라서 가능한 자연수 a는 1, 2, 3, …, 10의 10개이다.

답 ④

02

쌍곡선 $x^2-y^2=8$, 즉 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8+8=16$ $\therefore c=4$ $(\because c>0)$

즉, 쌍곡선 $x^2-y^2=8$의 초점의 좌표는 $(4, 0)$, $(-4, 0)$이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이다.

쌍곡선 C_1은 쌍곡선 $x^2-y^2=8$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선 C_1의 두 초점의 좌표는

$(4+m, 0)$, $(-4+m, 0)$

이고, 점근선의 방정식은 $y=\pm(x-m)$이다.

쌍곡선 C_1의 한 초점이 쌍곡선 $C_2: x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$의 중심 $(0, 0)$과 같아야 하므로

$4+m=0$ 또는 $-4+m=0$

$\therefore m=-4$ 또는 $m=4$

(i) $m=-4$일 때,

쌍곡선 C_1의 점근선의 방정식은

$y=x+4$, $y=-x-4$

쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은 $y=\pm ax$이고, 위의 직선 중 하나와 쌍곡선 C_2의 한 점근선의 교점의 x좌표가 4이므로

$8=4a$ 또는 $8=-4a$ 또는 $-8=4a$ 또는 $-8=-4a$

$\therefore a=2$ $(\because a>0)$

(ii) $m=4$일 때,

쌍곡선 C_1의 점근선의 방정식은

$y=x-4$, $y=-x+4$

쌍곡선 C_2의 점근선의 방정식은 $y=\pm ax$이고, 위의 직선 중 하나와 쌍곡선 C_2의 한 점근선의 교점의 x좌표가 4이므로

$0=4a$ 또는 $0=-4a$

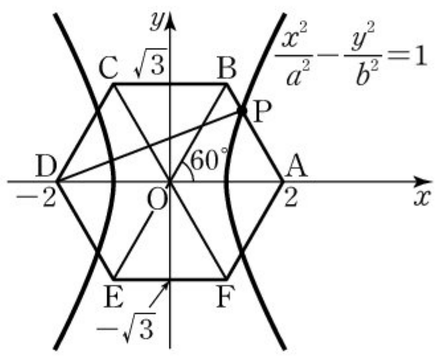
$\therefore a=0$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$, $m=-4$이므로

$am=2\times(-4)=-8$ 답 -8

03 직선 BE와 직선 CF의 교점을 원점으로 하고, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면 위에 정육각형 ABCDEF를 놓으면 다음 그림과 같다.



이때, 쌍곡선 H의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

이라 하면 두 초점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{D}(-2,\ 0)$이므로

$a^2+b^2=4$ ……㉠

직선 BE가 점근선이고, $\angle\mathrm{BOA}=60^\circ$이므로

$\frac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ $\therefore b=\sqrt{3}a$

이것을 ㉠에 대입하면

$4a^2=4$, $a^2=1$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$, $b=\sqrt{3}$

즉, 쌍곡선 H의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$이다.

따라서 구하는 값은 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2a=2$ 답 ⑤

04 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$의 주축의 길이는 $2\times2=4$이고, 두 초점의 좌표를 각각 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=4+12=16$ $\therefore c=4\ (\because c>0)$

즉, 두 초점은 두 점 P, Q와 같다.

같은 방법으로 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{15}=1$의 두 초점 역시 두 점 P, Q이고, 주축의 길이는 $2\times1=2$이다.

이때, $\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{QA}}-\overline{\mathrm{PA}}|=\overline{\mathrm{QA}}-a=4$,

$|\overline{\mathrm{QB}}-\overline{\mathrm{PB}}|=\overline{\mathrm{QB}}-b=2$

$\therefore \overline{\mathrm{QA}}=a+4$, $\overline{\mathrm{QB}}=b+2$

삼각형 QAB의 둘레의 길이가 18이므로

$\overline{\mathrm{QA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QA}}+(\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}})+\overline{\mathrm{QB}}$

$=(a+4)+(b-a)+(b+2)$

$=2b+6$

$=18$

$2b=12$ $\therefore b=6$

$\therefore \overline{\mathrm{PB}}=6$ 답 ②

05 쌍곡선 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=-1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c>0)$라 하면

$c^2=20+16=36$ $\therefore c=6\ (\because c>0)$

즉, $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$

이때, 점 P가 제4사분면의 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}=2\times4=8$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF}'}+8$ ……㉠

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}$

$=\overline{\mathrm{PF}'}+8+\overline{\mathrm{PA}}\ (\because$ ㉠$)$

$\geq\overline{\mathrm{F}'\mathrm{A}}+8$ ……㉡

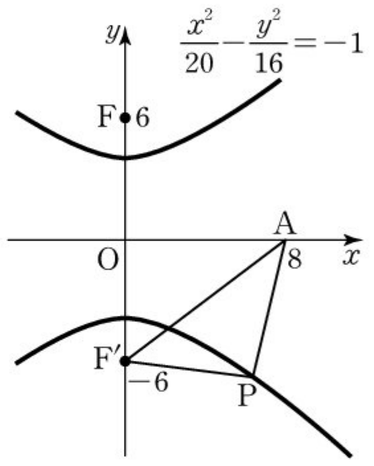
$\mathrm{A}(8,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{A}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

따라서 ㉡에서

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PA}}\geq10+8=18$

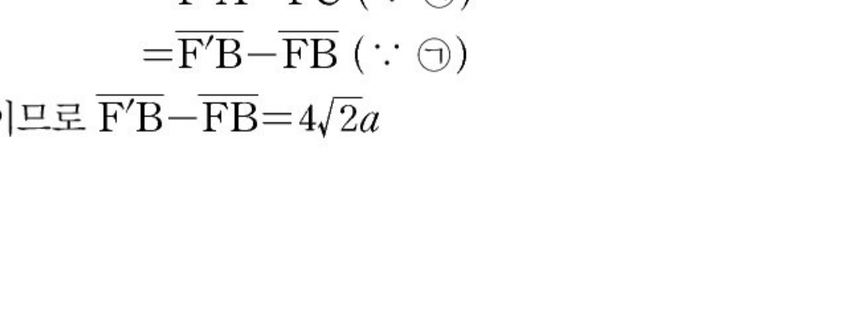
이므로 구하는 최솟값은 18이다. 답 ⑤



06 쌍곡선 $\frac{x^2}{8a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8a^2+a^2=9a^2$ $\therefore c=3a\ (\because a>0,\ c>0)$

즉, $\mathrm{F}(3a,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3a,\ 0)$



위의 그림과 같이 삼각형 FPF′에 내접하는 원의 세 접점을 각각 A, B, C라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{FC}}$ ……㉠

점 P가 제1사분면의 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2\times2\sqrt{2}a=4\sqrt{2}a$

이때,

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{A}})-(\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{FC}})$

$=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{A}}-\overline{\mathrm{FC}}\ (\because$ ㉠$)$

$=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}}-\overline{\mathrm{FB}}\ (\because$ ㉠$)$

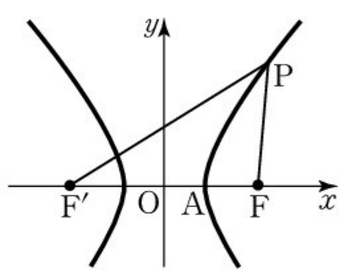
이므로 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{B}}-\overline{\mathrm{FB}}=4\sqrt{2}a$

즉, 점 B는 쌍곡선 위에 있는 동시에 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 꼭짓점이다.
따라서 점 B의 x좌표는 $2\sqrt{2}a$이다.
이때, 원의 중심의 x좌표가 $f(a)$이고 점 B의 x좌표가 구하는 원의 중심의 x좌표와 같으므로
$f(a)=2\sqrt{2}a$

$$\therefore \sum_{n=1}^{9}\left\{\frac{16}{\{f(n)\}^2}-\frac{16}{\{f(n+1)\}^2}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{9}16\left\{\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{8(n+1)^2}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{9}2\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{81}-\frac{1}{100}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{100}\right)$$
$$=2\times\frac{99}{100}=\frac{99}{50}$$

그러므로 $p=50$, $q=99$이므로
$p+q=50+99=149$ 답 ③

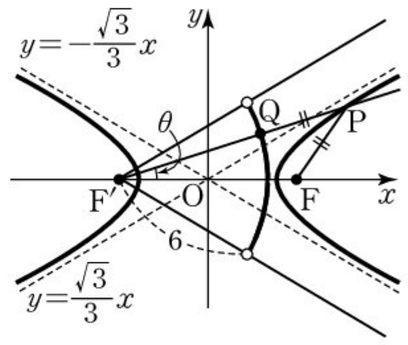
07



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면
점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ $\therefore b=\frac{4}{3}a$ ……㉠
조건 (가)에서 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이므로 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$
$\therefore \overline{PF}=\overline{PF'}-2a=30-2a$ $(\because \overline{PF'}=30)$
이때, $16\le\overline{PF}\le20$이므로
$16\le30-2a\le20$ $\therefore 5\le a\le7$ ……㉡
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 x좌표가 양수인 꼭짓점이 A이므로 점 A의 좌표는 $(a,\ 0)$
또한, 쌍곡선의 한 초점이 $F(c,\ 0)$ $(c>0)$이므로
$c=\sqrt{a^2+b^2}$
$=\sqrt{a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2}$ $(\because$ ㉠$)$
$=\sqrt{a^2+\frac{16}{9}a^2}=\frac{5}{3}a$ $(\because a>0,\ c>0)$
즉, 점 F의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}a,\ 0\right)$이므로
$\overline{AF}=\frac{5}{3}a-a=\frac{2}{3}a$
이때, 선분 AF의 길이가 자연수이므로
$a=\frac{3}{2}$, 3, $\frac{9}{2}$, 6, $\frac{15}{2}$, …
따라서 ㉡에 의하여 $a=6$이므로 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는
$2a=2\times6=12$ 답 12

08

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 점 P가 이 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여
$|\overline{F'P}-\overline{FP}|=2\times3=6$
이때, 점 P의 x좌표가 음수이면 $\overline{FP}>\overline{F'P}$이므로 선분 F′P 위에 $\overline{FP}=\overline{PQ}$를 만족시키는 점 Q가 존재하지 않는다.
즉, 점 P의 x좌표는 양수이므로 $\overline{FP}<\overline{F'P}$
$\therefore \overline{F'P}-\overline{FP}=6$
선분 F′P 위의 점 Q에 대하여 $\overline{FP}=\overline{PQ}$이므로
$\overline{F'Q}=\overline{F'P}-\overline{PQ}$
$=\overline{F'P}-\overline{FP}=6$
즉, 오른쪽 그림과 같이 점 Q는 초점 $F'(-2\sqrt{3},\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원 위에 있다.



한편, 쌍곡선의 기울기가 양수인 점근선의 방정식이 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로 이 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면
$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore \theta_1=30^\circ$
쌍곡선이 x축에 대하여 대칭이고, 점 F′이 x축 위에 있으므로 직선 F′P가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $-30^\circ<\theta<30^\circ$
따라서 점 Q는 중심각의 크기가 $2\times30^\circ=60^\circ$이고, 반지름의 길이가 6인 부채꼴의 호 위에 있으므로 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는
$2\pi\times6\times\frac{60}{360}=2\pi$ 답 2π

09 해결단계

❶ 단계	쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$로 놓고, 주어진 점근선의 방정식을 이용하여 b와 초점의 x좌표를 a를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	삼각형 F′PQ의 둘레의 길이가 74이고, 직선 FQ가 직선 l에 수직임을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한다.
❸ 단계	점 F′에서 직선 FQ에 수선의 발을 내린 후, 쌍곡선의 정의와 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{FR}+\overline{F'R}$의 값을 구한다.

쌍곡선 C의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 기울기가 양수인 점근선의 방정식이 $l: y=\frac{4}{3}x$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$에서 $b=\frac{4}{3}a$ ……㉠

쌍곡선 C의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=a^2+b^2=a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2$ ($\because$ ㉠)

$=a^2+\frac{16}{9}a^2=\frac{25}{9}a^2$

$\therefore\ c=\frac{5}{3}a$ ($\because\ c>0$) ……㉡

즉, $\mathrm{F}\left(\frac{5}{3}a,\ 0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\frac{5}{3}a,\ 0\right)$

점 Q가 y축 위에 있고 쌍곡선 C의 중심이 원점이므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=\overline{\mathrm{FQ}}$ ……㉢

점 P가 쌍곡선 C 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}-\overline{\mathrm{FP}}=2a$ $\therefore\ \overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{FP}}+2a$ ……㉣

삼각형 $\mathrm{F}'\mathrm{PQ}$의 둘레의 길이가 74이므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=(\overline{\mathrm{FP}}+2a)+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$ ($\because$ ㉢, ㉣)

$=2\overline{\mathrm{FQ}}+2a=74$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FQ}}+a=37$ ……㉤

이때, 직선 l의 기울기가 $\frac{4}{3}$이면 직선 FQ의 기울기는

$-\frac{3}{4}$이어야 하고 $\overline{\mathrm{OF}}=\frac{5}{3}a$이므로

$-\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OF}}}=-\frac{3}{4}$ $\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{OF}}=\frac{5}{4}a$

$\triangle\mathrm{OFQ}$가 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}a\right)^2+\left(\frac{5}{4}a\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{9}a^2+\frac{25}{16}a^2}$

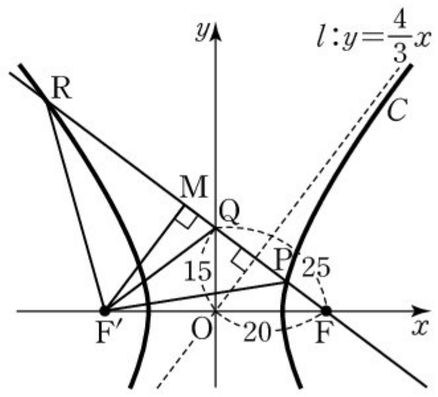
$=\sqrt{\frac{25^2}{9\times16}a^2}=\frac{25}{12}a$

이것을 ㉤에 대입하면

$\frac{25}{12}a+a=37$, $\frac{37}{12}a=37$

$\therefore\ a=12$, $b=16$, $c=20$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}=15$, $\overline{\mathrm{OF}}=20$, $\overline{\mathrm{FQ}}=25$



위의 그림과 같이 점 F'에서 직선 FQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\triangle\mathrm{FMF}'\backsim\triangle\mathrm{FOQ}$ (AA 닮음)이므로

$\overline{\mathrm{FF}'}:\overline{\mathrm{FM}}:\overline{\mathrm{F}'\mathrm{M}}=\overline{\mathrm{FQ}}:\overline{\mathrm{FO}}:\overline{\mathrm{QO}}$

$=25:20:15$

$=5:4:3$

이때, $\overline{\mathrm{FF}'}=2\overline{\mathrm{OF}}=40$이므로

$\overline{\mathrm{FM}}=32$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{M}}=24$

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}=k$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FR}}-\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}=2\times12=24$이므로 $\overline{\mathrm{FR}}=k+24$

$\therefore\ \overline{\mathrm{MR}}=k+24-32=k-8$

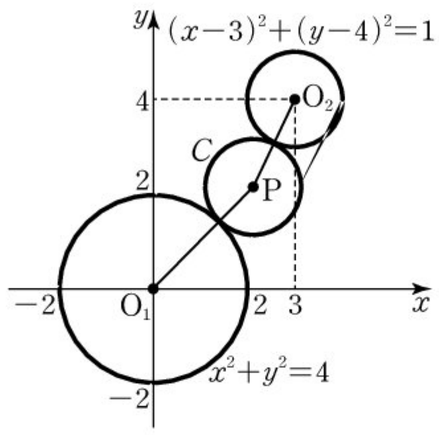
$\triangle\mathrm{F}'\mathrm{MR}$가 직각삼각형이므로

$k^2=24^2+(k-8)^2$, $16k=640$ $\therefore\ k=40$

따라서 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}=40$, $\overline{\mathrm{FR}}=64$이므로

$\overline{\mathrm{FR}}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}=64+40=104$ 답 104

10 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+(y-4)^2=1$의 중심을 각각 $\mathrm{O}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{O}_2(3,\ 4)$라 하고, 이 두 원에 외접하면서 점 P를 중심으로 하는 원을 C, 원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.



원 C가 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+(y-4)^2=1$에 모두 외접하므로

$\overline{\mathrm{PO}_1}=r+2$, $\overline{\mathrm{PO}_2}=r+1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PO}_1}-\overline{\mathrm{PO}_2}=(r+2)-(r+1)=1$

즉, 점 P의 자취는 두 점 O_1, O_2가 초점이고 주축의 길이가 1인 쌍곡선의 일부이다.

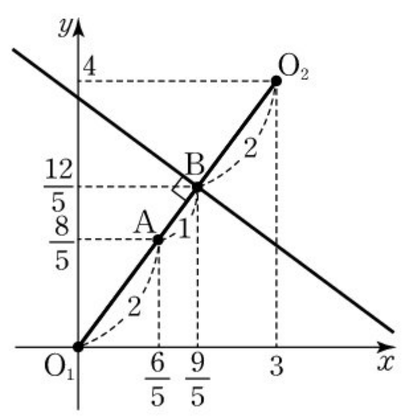
이 쌍곡선의 두 꼭짓점을 A, B라 하면 두 점 A, B는 두 초점을 지나는 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ 위에 있고,

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{\mathrm{AB}}=1$

이므로 두 점 A, B는 각각 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 $2:3$으로 내분하는 점과 $3:2$로 내분하는 점이어야 한다.

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{2\times3+3\times0}{2+3},\ \frac{2\times4+3\times0}{2+3}\right)$, 즉 $\mathrm{A}\left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$,

$\mathrm{B}\left(\frac{3\times3+2\times0}{3+2},\ \frac{3\times4+2\times0}{3+2}\right)$, 즉 $\mathrm{B}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$



이때, 주축 AB 위의 한 점을 지나면서 주축과 수직인 직선의 y절편이 최대이려면 위의 그림과 같이 점 B를 지나야 한다.

주축의 기울기는 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$의 기울기인 $\frac{4}{3}$이므로 주축과 수직이고 점 B를 지나는 직선의 방정식은

$y-\frac{12}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{9}{5}\right)$

$\therefore\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

따라서 구하는 y절편의 최댓값은 $\frac{15}{4}$이다. 답 ④

11 직선 AB를 x축으로 하고, 선분 AB의 중점을 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자.

두 점 A, B까지의 거리의 차가 2인 점 P의 자취는 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선이다.

이때, 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

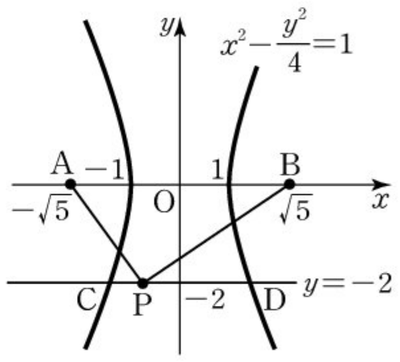
$2a=2 \qquad \therefore a=1$

쌍곡선의 두 초점이 $\mathrm{A}(-\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{5},\ 0)$이므로

$1^2+b^2=5,\ b^2=4 \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

이때, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$과 직선 $y=-2$가 만나는 두 점을 C, D라 하면 점 P에서 두 점 A, B까지의 거리의 차가 2 km 이하가 되기 위해서는 점 P가 선분 CD 위에 있어야 하므로 구하는 직선 도로의 구간의 길이는 선분 CD의 길이와 같다.



$y=-2$를 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$에 대입하면

$x^2=2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

즉, $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\ -2)$, $\mathrm{D}(\sqrt{2},\ -2)$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}$

따라서 구하는 구간의 길이는 $2\sqrt{2}$ km이다. 답 $2\sqrt{2}$ km

12 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 점 P를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y=2(x-a)+b$

이 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점이 Q이므로

$2=2(x-a)+b$에서 $2x=2a-b+2$

$\therefore x=a-\frac{1}{2}b+1$

즉, $\mathrm{Q}\left(a-\frac{1}{2}b+1,\ 2\right)$

이때, $\overline{\mathrm{OP}}=2\overline{\mathrm{PQ}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=4\overline{\mathrm{PQ}}^2$이므로

$a^2+b^2=4\left\{\left(-\frac{1}{2}b+1\right)^2+(2-b)^2\right\}$

$a^2-4b^2+20b-20=0$

$a^2-4\left(b-\frac{5}{2}\right)^2=-5$

$\therefore \frac{a^2}{5}-\frac{\left(b-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}}=-1$

즉, 점 P가 그리는 쌍곡선을 C라 하면 쌍곡선 C의 방정식은

$\frac{x^2}{5}-\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}}=-1$

이때, 쌍곡선 C는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=-1$을 y축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=-1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이므로 쌍곡선 C의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x \qquad \therefore x-2y+5=0$

즉, 직선 $x-2y+5=0$과 원점 사이의 거리는

$d=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\therefore d^2=5$ 답 ①

13 점 A가 직선 $x=2$ 위를 움직이므로 점 A의 좌표를 $(2,\ a)$ (a는 실수)라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+a^2}=\sqrt{a^2+4}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+4}-1$

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{a^2+4}-2$이고, 직선 AP가 직선 $x=2$와 수직이므로 점 P의 좌표는

$(2\sqrt{a^2+4},\ a)$

$2\sqrt{a^2+4}=x$, $a=y$로 놓으면

$x=2\sqrt{y^2+4}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2=4(y^2+4),\ x^2-4y^2=16$

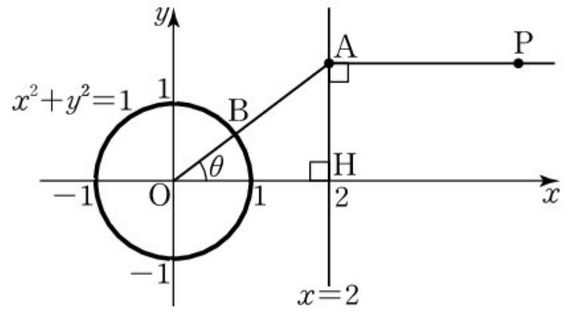
$\therefore \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

즉, 점 P가 그리는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y=\frac{2}{4}x$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$ 답 $y=\frac{1}{2}x$

• 다른풀이 •

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 직선 $x=2$가 x축과 만나는 점을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OH}}=2$이므로 $\triangle\mathrm{OHA}$에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OH}}\tan\theta=2\tan\theta$

즉, $\mathrm{A}(2,\ 2\tan\theta)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4\tan^2\theta+4}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA}}-1=\sqrt{4\tan^2\theta+4}-1$

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{4\tan^2\theta+4}-2$이므로 점 P의 좌표는

$(2\sqrt{4\tan^2\theta+4},\ 2\tan\theta)$

$2\sqrt{4\tan^2\theta+4}=x,\ 2\tan\theta=y$로 놓으면

$x=2\sqrt{y^2+4}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2=4(y^2+4),\ x^2-4y^2=16$

$\therefore \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y=\dfrac{2}{4}x$, 즉 $y=\dfrac{1}{2}x$

14 $y=m(x-2a)$를 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$x^2-\dfrac{\{m(x-2a)\}^2}{2}=1$

$x^2-\dfrac{m^2x^2-4am^2x+4a^2m^2}{2}=1$

$\therefore \left(1-\dfrac{m^2}{2}\right)x^2+2am^2x-2a^2m^2-1=0$ ……㉠

$m=\pm\sqrt{2}$일 때, $4ax-4a^2-1=0$ ……㉡

$m\neq\pm\sqrt{2}$일 때, x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(am^2)^2-\left(1-\dfrac{m^2}{2}\right)(-2a^2m^2-1)$

$=2a^2m^2+1-\dfrac{m^2}{2}$ ……㉢

ㄱ. (반례) $a=0,\ m=0$이면 ㉢에서

$\dfrac{D}{4}=1>0$

즉, x에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지므로 쌍곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

ㄴ. (반례) $m=\pm\sqrt{2}$이고 $a\neq0$이면 ㉡에서 $x=a+\dfrac{1}{4a}$

따라서 $a<-\dfrac{1}{2}$일 때 쌍곡선과 직선은 한 점에서 만난다. (거짓)

ㄷ. $a^2\geq0$이므로 $2a^2-\dfrac{1}{2}\geq-\dfrac{1}{2}$

$\left(2a^2-\dfrac{1}{2}\right)m^2\geq-\dfrac{1}{2}m^2\ (\because m^2\geq0)$

$\therefore \left(2a^2-\dfrac{1}{2}\right)m^2+1\geq-\dfrac{1}{2}m^2+1$

이때, $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$이면 $0\leq m^2<2$

$-1<-\dfrac{1}{2}m^2\leq0$ $\quad\therefore 0<-\dfrac{1}{2}m^2+1\leq1$

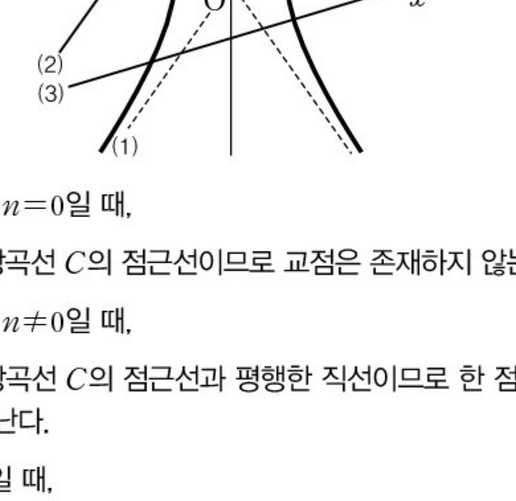
즉, $\left(2a^2-\dfrac{1}{2}\right)m^2+1>0$이므로 ㉢에서 $\dfrac{D}{4}>0$

따라서 x에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지므로 쌍곡선과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

• 다른풀이 •

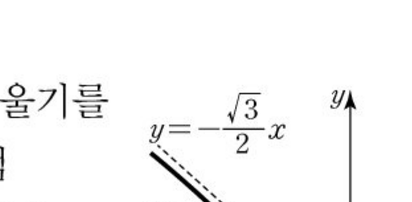
ㄷ. 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{2}x$이므로 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$이면 a의 값에 관계없이 쌍곡선과 직선은 항상 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)



blacklabel 특강 참고

쌍곡선과 직선의 위치 관계

쌍곡선 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $l:y=mx+n$에 대하여



(1) $|m|=\dfrac{b}{a}$, $n=0$일 때,

직선 l은 쌍곡선 C의 점근선이므로 교점은 존재하지 않는다.

(2) $|m|=\dfrac{b}{a}$, $n\neq0$일 때,

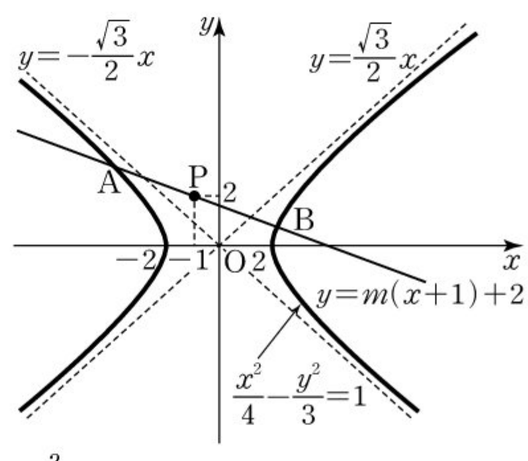
직선 l은 쌍곡선 C의 점근선과 평행한 직선이므로 한 점에서 접하지 않고 만난다.

(3) $|m|<\dfrac{b}{a}$일 때,

직선 l은 쌍곡선 C와 서로 다른 두 점에서 만난다.

15 직선 AB의 기울기를 m이라 하면 점 $P(-1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선 AB의 방정식은

$y=m(x+1)+2$ ……㉠



쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$이므로 ㉠을 대입하면

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(mx+m+2)^2}{3}=1$

$3x^2-4(mx+m+2)^2=12$

$(3-4m^2)x^2-8(m^2+2m)x-(4m^2+16m+28)=0$ ……㉡

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 $3-4m^2 \neq 0$, 즉 $m \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

일 때 x_1, x_2는 x에 대한 이차방정식 ㉡의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=\frac{8(m^2+2m)}{3-4m^2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

또한, 점 $P(-1, 2)$가 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-1 \qquad \therefore\ x_1+x_2=-2$$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$$-6+8m^2=8m^2+16m \qquad \therefore\ m=-\frac{3}{8}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y=-\frac{3}{8}(x+1)+2$$

$$\therefore\ y=-\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}$$

답 $y=-\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}$

• 다른풀이 •

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 두 점 A, B는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{3}=1 \text{에서 } 3x_1^2-4y_1^2=12 \quad \cdots\cdots ㉣$$

$$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{3}=1 \text{에서 } 3x_2^2-4y_2^2=12 \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉣−㉤을 하면

$$3x_1^2-4y_1^2-(3x_2^2-4y_2^2)=0$$

$$3(x_1+x_2)(x_1-x_2)-4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0 \quad \cdots\cdots ㉥$$

이때, 선분 AB의 중점이 $P(-1, 2)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-1,\ \frac{y_1+y_2}{2}=2$$

$$\therefore\ x_1+x_2=-2,\ y_1+y_2=4$$

이것을 ㉥에 대입하면

$$-6(x_1-x_2)-16(y_1-y_2)=0$$

$$-6(x_1-x_2)=16(y_1-y_2) \qquad \therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{8}$$

즉, 직선 AB의 기울기는 $-\frac{3}{8}$이다.

따라서 직선 AB의 방정식은

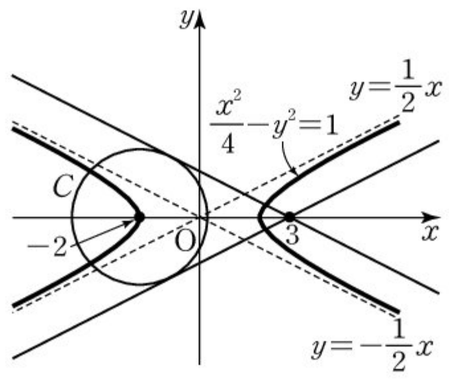
$$y-2=-\frac{3}{8}(x+1),\ \text{즉 } y=-\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}$$

→ 직선 AB는 점 $P(-1, 2)$를 지난다.

16 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

이때, 점 $(3, 0)$을 지나는 직선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만나려면 이 직선이 쌍곡선의 점근선인 $y=\pm\frac{1}{2}x$와 평행해야 하므로 직선의 방정식은

$$y=\pm\frac{1}{2}(x-3)$$



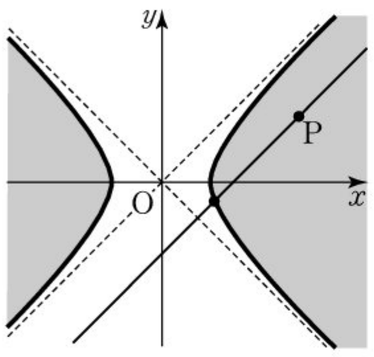
따라서 직선 $y=\frac{1}{2}(x-3)$, 즉 $x-2y-3=0$과 원 C의 중심 $(-2, 0)$ 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이와 같으므로 구하는 원 C의 반지름의 길이는

$$\frac{|-2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

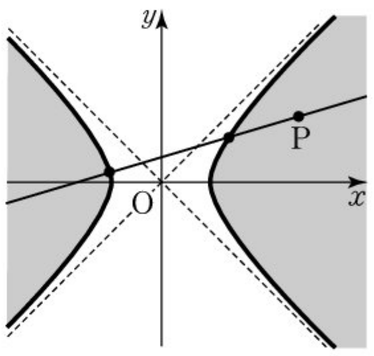
답 $\sqrt{5}$

blacklabel 특강 참고

쌍곡선에 대하여 다음 그림의 어두운 부분(경계선 제외) 위의 한 점 P를 지나는 직선은 항상 쌍곡선과 만난다. 이때, 직선이 쌍곡선 C의 점근선과 평행하면 한 점에서 만나고 (그림 1), 점근선과 평행하지 않으면 서로 다른 두 점에서 만난다. (그림 2)



[그림 1]



[그림 2]

17 ㄱ. $y=\frac{3}{4}(x-a)$를 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$에 대입하면

$$\frac{x^2}{16}-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}a\right)^2=-1$$

$$\frac{1}{8}ax=\frac{1}{16}a^2-1 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{2}a-\frac{8}{a}\ (\because\ a\neq 0)$$

즉, 직선 $y=\frac{3}{4}(x-a)$는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. (참)

ㄴ. 점 $(0, 1)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16}-\frac{y_1y}{9}=-1$$

이 직선이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$$-\frac{y_1}{9}=-1 \qquad \therefore\ y_1=9$$

점 $(x_1, 9)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_1^2}{16}-9=-1,\ x_1^2=128$$

$$\therefore\ x_1=-8\sqrt{2} \text{ 또는 } x_1=8\sqrt{2}$$

따라서 접점의 좌표가 $(-8\sqrt{2}, 9)$, $(8\sqrt{2}, 9)$이므로 접선의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 점 $(a, 0)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기가 m이므로 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{9-16m^2}$$

위의 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$am\pm\sqrt{9-16m^2}=0,\ \pm\sqrt{9-16m^2}=-am$

위의 식의 양변을 제곱하면

$9-16m^2=a^2m^2,\ (a^2+16)m^2=9$

$\therefore\ m^2=\dfrac{9}{a^2+16}$

이때, $a\neq0$인 모든 실수 a에 대하여 $a^2>0$이므로

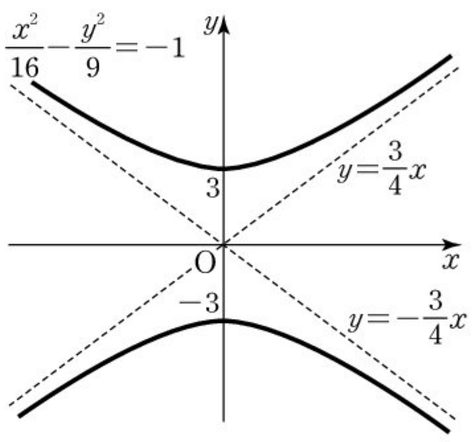
$a^2+16>16,\ 0<\dfrac{1}{a^2+16}<\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ 0<\dfrac{9}{a^2+16}<\dfrac{9}{16}$

즉, $0<m^2<\dfrac{9}{16}$이므로 $0<|m|<\dfrac{3}{4}$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른풀이 •



ㄱ. 직선 $y=\dfrac{3}{4}(x-a)$는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$의 점근선 $y=\dfrac{3}{4}x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선과 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $a>0$일 때, 점 $(a, 0)$에서 쌍곡선의 윗부분에 그은 접선의 기울기를 m_1이라 하면 $-\dfrac{3}{4}<m_1<0$이고, 쌍곡선의 아랫부분에 그은 접선의 기울기를 m_2라 하면 $0<m_2<\dfrac{3}{4}$이다.

$a<0$일 때, 점 $(a, 0)$에서 쌍곡선의 윗부분에 그은 접선의 기울기를 m_1이라 하면 $0<m_1<\dfrac{3}{4}$이고, 쌍곡선의 아랫부분에 그은 접선의 기울기를 m_2라 하면 $-\dfrac{3}{4}<m_1<0$이다.

따라서 $0<|m|<\dfrac{3}{4}$이다. (참)

blacklabel 특강 참고 ＊미적분＊

음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$의 꼭짓점이 아닌 점에서의 접선의 기울기의 범위를 구해 보자.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}\times\dfrac{dy}{dx}=0 \quad \therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$ ……㉠

이때, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 $y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$이므로 ㉠에 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2\times\left(\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}\right)}=\pm\dfrac{b}{a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}$

$\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}<1$이므로 $\left|\dfrac{dy}{dx}\right|>\dfrac{b}{a}$

즉, 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 기울기의 절댓값은 $\dfrac{b}{a}$보다 크다.

같은 방법으로 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$의 접선의 기울기의 절댓값은 $\dfrac{b}{a}$보다 작다.

blacklabel 특강 참고

쌍곡선 밖의 점에서 그은 접선의 개수

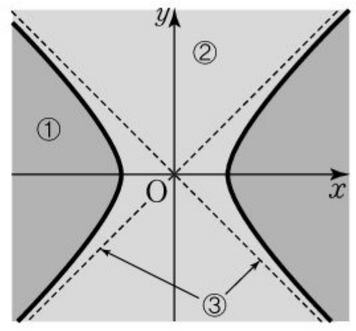
오른쪽 그림과 같이 쌍곡선으로 나누어진 각 영역(점근선 제외)을 ①, ②라 하고 점근선을 ③이라 하면 세 도형 ①, ②, ③ 위의 한 점에서 쌍곡선에 그은 접선의 개수는 다음과 같다.

도형 ① ⇨ 접선의 개수 0개

도형 ② ⇨ 접선의 개수 2개

도형 ③ ⇨ 접선의 개수 1개

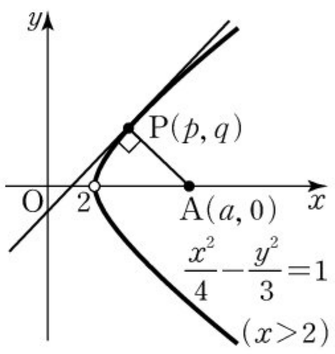
(단, 원점 제외)



18 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\ (x>2)$ 위의 점 P의 좌표를 $(p, q)\ (p>2)$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{px}{4}-\dfrac{qy}{3}=1$

$\therefore\ y=\dfrac{3p}{4q}x-\dfrac{3}{q}$



이때, 점 P에서의 접선과 직선 AP가 수직으로 만나므로

$\dfrac{3p}{4q}\times\dfrac{q}{p-a}=-1$에서

$3p=-4(p-a),\ 4a=7p$

$\therefore\ a=\dfrac{7}{4}p$

그런데 $p>2$이므로

$a=\dfrac{7}{4}p>\dfrac{7}{4}\times2=\dfrac{7}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

19 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $P(a, b)\ (a>1,\ b>0)$에서의 접선의 방정식은

$ax-\dfrac{by}{3}=1$ ……㉠

접선 ㉠이 y축과 만나는 점 A의 y좌표는

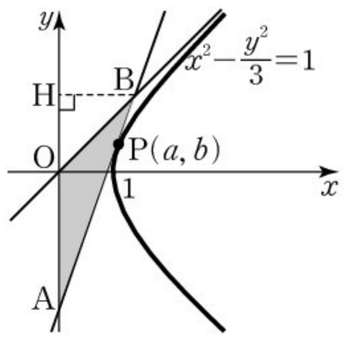
$-\dfrac{by}{3}=1$에서 $y=-\dfrac{3}{b}$

$\therefore\ \overline{OA}=\left|-\dfrac{3}{b}\right|=\dfrac{3}{b}\ (\because\ b>0)$

또한, 주어진 쌍곡선의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 이 점근선과 직선 ㉠의 교점 B의 x좌표는 $ax-\dfrac{b}{3}\times\sqrt{3}x=1$에서

$\left(a-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)x=1 \qquad \therefore\ x=\frac{3}{3a-b\sqrt{3}}$

이때, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{BH}}=\frac{3}{3a-b\sqrt{3}}$이므로 삼각형 OAB의 넓이 $S(a)$는

$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{b}\times\frac{3}{3a-b\sqrt{3}}$

$=\frac{9}{2b(3a-b\sqrt{3})}$ ……㉡

한편, 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 주어진 쌍곡선 위에 있으므로

$a^2-\frac{b^2}{3}=1$에서 $a=\sqrt{1+\frac{b^2}{3}}\ (\because a>1)$ ……㉢

따라서 $a\to\infty$일 때 $b\to\infty$이므로 ㉡, ㉢에서

$\lim_{a\to\infty}S(a)=\frac{9}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b(\sqrt{9+3b^2}-b\sqrt{3})}$

$=\frac{9}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{9+3b^2}+b\sqrt{3}}{b(9+3b^2-3b^2)}$

$=\frac{9}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{9+3b^2}+b\sqrt{3}}{9b}$

$=\frac{9}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9}{b^2}+3}+\sqrt{3}}{9}$

$=\frac{9}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}=\sqrt{3}$ 답 ①

• 다른풀이 •

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{m^2-3}$

점 P가 제1사분면 위에 있으므로 y절편이 음수이어야 한다.

$\therefore\ y=mx-\sqrt{m^2-3}$ ……㉣

이 직선이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $(0,\ -\sqrt{m^2-3})$

또한, 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선 중 기울기가 양수인 직선은 $y=\sqrt{3}x$이므로 접선 ㉣과의 교점의 x좌표는

$\sqrt{3}x=mx-\sqrt{m^2-3},\ (m-\sqrt{3})x=\sqrt{m^2-3}$

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{m^2-3}}{m-\sqrt{3}}$

즉, 점 B의 x좌표는 $\frac{\sqrt{m^2-3}}{m-\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{m^2-3}\times\frac{\sqrt{m^2-3}}{m-\sqrt{3}}=\frac{m^2-3}{2(m-\sqrt{3})}$

$=\frac{m+\sqrt{3}}{2}$

이때, $a\to\infty$이면 점 P에서의 접선이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선에 가까워지므로

$a\to\infty$일 때 $m\to\sqrt{3}+$

$\therefore\ \lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{m\to\sqrt{3}+}\frac{m+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

20

좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$에서 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 $(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$ 위에 있으므로

$x_1^{\,2}-y_1^{\,2}=-1$ ……㉠

또한, 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 쌍곡선의 접선의 방정식은

$x_1x-y_1y=-1$

이 접선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로

$ax_1-by_1=-1$ ……㉡

이때, 점 $(a,\ b)$에서 쌍곡선에 그은 접선이 두 개이려면 ㉠, ㉡을 만족시키는 접점 $(x_1,\ y_1)$도 두 개 이어야 한다.

(i) $b=0$일 때,

㉡에서 $ax_1=-1$

이때, $a=0$이면 조건을 만족시키는 접점이 존재하지 않으므로 $a\neq0$이어야 한다.

$\therefore\ x_1=-\frac{1}{a}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(-\frac{1}{a}\right)^2-y_1^{\,2}=-1$

$y_1^{\,2}=\frac{1}{a^2}+1$

$\therefore\ y_1=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}$

즉, $a\neq0,\ b=0$일 때, 접점은 두 개 존재한다.

(ii) $b\neq0$일 때,

㉡에서 $by_1=ax_1+1$

$\therefore\ y_1=\frac{a}{b}x_1+\frac{1}{b}$

이것을 ㉠에 대입하면

$x_1^{\,2}-\left(\frac{a}{b}x_1+\frac{1}{b}\right)^2=-1$

$(b^2-a^2)x_1^{\,2}-2ax_1+b^2-1=0$ ……㉢

① $b^2-a^2=0$, 즉 $a=\pm b$일 때,

㉢에서 $2ax_1+a^2-1=0\ (\because b^2=a^2)$

이때, $a=0$이면 위의 방정식을 만족시키는 실근이 존재하지 않으므로 접점이 존재하지 않는다.

또한, $a\neq0$이면 실근의 개수가 1이므로 접점은 한 개 존재한다.

② $b^2-a^2\neq0$, 즉 $a\neq\pm b$일 때,

접점이 두 개 존재하려면 x에 대한 이차방정식 ㉢이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(b^2-a^2)(b^2-1)$

$=-b^4+a^2b^2+b^2$

$=b^2(-b^2+a^2+1)>0$

$b^2>0$이므로 $-b^2+a^2+1>0$

$\therefore\ a^2-b^2>-1$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 점 $(a,\ b)$의 집합은

$\{(a,\ b)\,|\,a^2-b^2>-1,\ a\neq\pm b\}$ — (i)의 $a\neq0, b=0$의 경우가 포함된다.

답 $\{(a,\ b)\,|\,a^2-b^2>-1,\ a\neq\pm b\}$

단계	채점 기준	배점
(가)	접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하고 쌍곡선 위의 점임을 이용하여 x_1, y_1 사이의 관계식을 구한 경우	10%
(나)	점 (x_1, y_1)에서의 쌍곡선의 접선의 방정식을 구한 후, 이 직선이 점 (a, b)를 지남을 이용하여 x_1, y_1 사이의 관계식을 구한 경우	10%
(다)	$b=0$일 때, (가), (나)의 두 관계식을 이용하여 접점이 2개가 되도록 하는 a의 조건을 찾은 경우	30%
(라)	$b\neq0$일 때, (가), (나)의 두 관계식을 연립하여 접점이 2개가 되도록 하는 a, b의 조건을 찾은 경우	30%
(마)	조건을 만족시키는 점 (a, b)의 집합을 구한 경우	20%

• 다른풀이 •

좌표평면 위의 임의의 한 점 (a, b)에서 쌍곡선 $x^2-y^2=-1$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{1-m^2}$

이때, 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면

$1-m^2>0$에서

$-1<m<1$ ……㉠

직선 $y=mx\pm\sqrt{1-m^2}$이 점 (a, b)를 지나므로

$b=ma\pm\sqrt{1-m^2}$

$b-ma=\pm\sqrt{1-m^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2m^2-2abm+b^2=1-m^2$

$\therefore (a^2+1)m^2-2abm+b^2-1=0$

이때, 쌍곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그으려면 위의 m에 대한 이차방정식이 $-1<m<1$ ($\because$ ㉠)에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(m)=(a^2+1)m^2-2abm+b^2-1$이라 하자.

(i) 이차방정식 $f(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2b^2-(a^2+1)(b^2-1)>0$

$\therefore a^2-b^2>-1$

(ii) $f(1)>0$에서 $a^2+1-2ab+b^2-1>0$

$(a-b)^2>0$ $\therefore a\neq b$

(iii) $f(-1)>0$에서 $a^2+1+2ab+b^2-1>0$

$(a+b)^2>0$ $\therefore a\neq-b$

(iv) 이차함수 $y=f(m)$의 그래프의 축의 방정식이

$m=\frac{ab}{a^2+1}$이므로 $-1<\frac{ab}{a^2+1}<1$

그런데 $a^2-b^2>-1$이므로 위의 식이 성립한다. ← 풀이첨삭 참고

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 점 (a, b)의 집합은

$\{(a, b)\,|\,a^2-b^2>-1,\ a\neq\pm b\}$

blacklabel 특강 풀이첨삭

$a^2-b^2>-1$이면 $b^2<a^2+1$이므로

$-\sqrt{a^2+1}<b<\sqrt{a^2+1}$

$a>0$이면 $-a\sqrt{a^2+1}<ab<a\sqrt{a^2+1}$

$\frac{-a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}<\frac{ab}{a^2+1}<\frac{a\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$

이때, $a<\sqrt{a^2+1}$이므로

$\frac{-\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}<\frac{ab}{a^2+1}<\frac{\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$

$\therefore -1<\frac{ab}{a^2+1}<1$

같은 방법으로 $a<0$일 때도 성립한다.

21 선분 PQ와 원 C의 교점을 R라 하자.

점 P가 y축 위에 있고 주어진 쌍곡선과 원 C가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 x좌표가 양수인 점 Q와 x좌표가 음수인 점 Q에 대하여 점 R의 자취의 길이는 서로 같다.

점 Q가 $x>0$인 쌍곡선 위에 있을 때, 점 R의 자취의 길이를 구해 보자.

쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$의 기울기가 양수인 점근선의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x$, 즉 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

이므로 이 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$\tan\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore \theta_1=30^\circ$

점 P(0, 2)에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{6m^2-2}$

위의 직선이 점 P(0, 2)를 지나므로

$2=\pm\sqrt{6m^2-2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$6m^2-2=4$, $6m^2=6$ $\therefore m=\pm1$

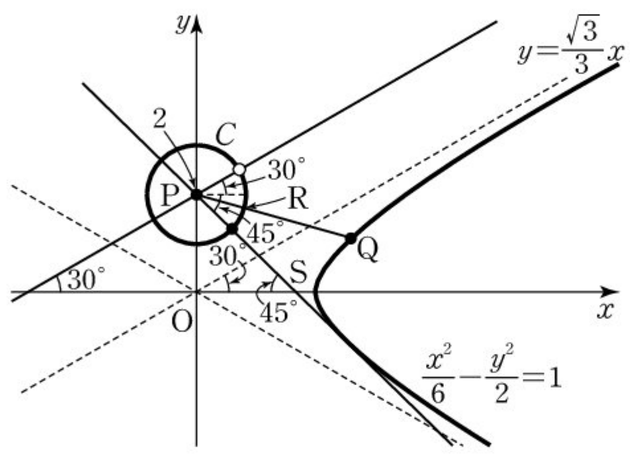
점 P에서 $x>0$인 쌍곡선에 그은 접선의 기울기는 -1이므로 접선이 x축과 만나는 점을 S라 하면 $\overline{OP}=\overline{OS}$

즉, $\triangle POS$는 직각이등변삼각형이므로

$\angle PSO=\angle OPS=45^\circ$

이때, 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$\theta_2=180^\circ-45^\circ=135^\circ$



따라서 점 Q가 $x>0$인 쌍곡선 위에 있을 때, 점 R의 자취는 중심각의 크기가

$\theta_1+(180^\circ-\theta_2)=30^\circ+(180^\circ-135^\circ)=75^\circ$

이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호와 같으므로 그 자취의 길이는

$2\pi\times1\times\frac{75}{360}=\frac{5}{12}\pi$

그러므로 구하는 자취의 길이는

$\frac{5}{12}\pi\times2=\frac{5}{6}\pi$ 답 ④

22 ㄱ. a, b의 대소 관계에 관계없이 쌍곡선의 밖의 한 점에서 쌍곡선에 최대 두 개의 접선을 그을 수 있다.

(거짓)

ㄴ. (반례) $a=b=1$, 즉 쌍곡선의 방정식을 $x^2-y^2=1$이라 하고 이 쌍곡선 밖의 점 P의 좌표를 $(2, 4)$라 하자.
점 P에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx\pm\sqrt{m^2-1}$
이 접선이 점 $\mathrm{P}(2, 4)$를 지나므로
$4=2m\pm\sqrt{m^2-1}$, $4-2m=\pm\sqrt{m^2-1}$
위의 식의 양변을 제곱하면
$4m^2-16m+16=m^2-1$
$\therefore\ 3m^2-16m+17=0$
이 이차방정식의 두 실근이 m_1, m_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$m_1m_2=\frac{17}{3}>0$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(p, q)$에서 쌍곡선에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면
$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
이 직선이 점 $\mathrm{P}(p, q)$를 지나므로
$q=pm\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$, $q-pm=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
$\therefore\ (p^2-a^2)m^2-2pqm+q^2+b^2=0$
이 m에 대한 이차방정식의 두 근이 m_1, m_2이므로
$m_1m_2=\frac{q^2+b^2}{p^2-a^2}$
$\frac{q^2+b^2}{p^2-a^2}=-1$, $q^2+b^2=-p^2+a^2$
$\therefore\ p^2+q^2=a^2-b^2$
즉, 점 $\mathrm{P}(p, q)$는 원 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 위에 있으므로
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2-b^2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

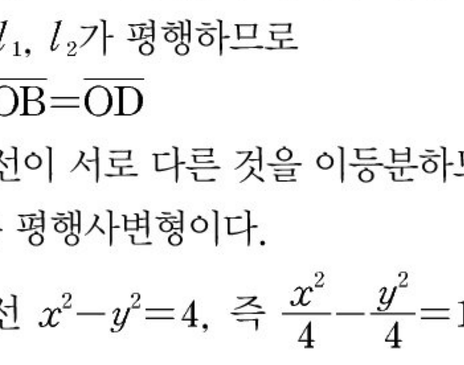
23 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2}, 2)$에서의 접선 l의 방정식은
$4\sqrt{2}x-2y=4$ $\therefore\ y=2\sqrt{2}x-2$
쌍곡선 $4x^2-y^2=4$, 즉 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$의 두 점근선의 방정식이 $y=\pm2x$이므로
$m : y=2x$, $n : y=-2x$
두 직선 l, m의 교점 Q의 좌표는
$2\sqrt{2}x-2=2x$에서 $(2\sqrt{2}-2)x=2$
$\therefore\ x=\frac{2}{2\sqrt{2}-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$,
$y=2(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}+2$
즉, $\mathrm{Q}(\sqrt{2}+1, 2\sqrt{2}+2)$
또한, 두 직선 l, n의 교점 R의 좌표는
$2\sqrt{2}x-2=-2x$에서 $(2\sqrt{2}+2)x=2$
$\therefore\ x=\frac{2}{2\sqrt{2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,
$y=-2(\sqrt{2}-1)=-2\sqrt{2}+2$
즉, $\mathrm{R}(\sqrt{2}-1, -2\sqrt{2}+2)$
$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$
이므로 $\overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{PQ}}$
$\therefore\ k=2$ 답 2

blacklabel 특강 참고

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ $\therefore\ y=\frac{b^2}{y_1}\left(\frac{x_1x}{a^2}-1\right)$ ……㉠
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로 양변을 제곱하여 정리하면
$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2$ $\therefore\ a^2y^2=b^2x^2$
위의 식에 ㉠을 대입하여 정리하면
$(b^2x_1^2-a^2y_1^2)x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0$ ……㉡
이때, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로
$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서 $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$
즉, ㉡에서 $a^2b^2x^2-2a^2b^2x_1x+a^4b^2=0$
두 점 Q, R의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2x_1$
세 점 P, Q, R는 직선 l 위의 점이므로 점 P는 선분 QR의 중점이다.

24 ㄱ. 쌍곡선 $x^2-y^2=4$가 원점에 대하여 대칭이고, 쌍곡선의 두 접선 l_1, l_2가 평행하므로
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}$
즉, 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로
□ABCD는 평행사변형이다.
이때, 쌍곡선 $x^2-y^2=4$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 점근선의 방정식은 $y=\pm x$로 두 점근선의 기울기가 각각 1, -1이므로 두 점근선은 서로 수직이다.
즉, 두 대각선 AC, BD는 서로 수직이등분하므로
□ABCD는 마름모이다. (참)

ㄴ. 직선 l_1과 y축의 오른쪽에 있는 쌍곡선의 접점을 $\mathrm{P}(a, b)$ $(a\geq2,\ a>b)$라 하면 점 P는 쌍곡선 위에 있으므로
$a^2-b^2=4$ ……㉠
(점 P는 직선 $y=x$의 아래쪽에 있으므로 $a>b$)



점 P에서의 접선 l_1의 방정식은 $ax-by=4$
점 A는 두 직선 $y=x$, $ax-by=4$의 교점이므로
$ax-bx=4$에서 $(a-b)x=4$
$\therefore\ x=\frac{4}{a-b}$, $y=\frac{4}{a-b}$

즉, $A\left(\frac{4}{a-b}, \frac{4}{a-b}\right)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{\left(\frac{4}{a-b}\right)^2+\left(\frac{4}{a-b}\right)^2}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{a-b}$ ($\because a>b$)

점 D는 두 직선 $y=-x$, $ax-by=4$의 교점이므로

$ax+bx=4$에서 $(a+b)x=4$

$\therefore x=\frac{4}{a+b}$, $y=-\frac{4}{a+b}$

즉, $D\left(\frac{4}{a+b}, -\frac{4}{a+b}\right)$이므로

$\overline{OD}=\sqrt{\left(\frac{4}{a+b}\right)^2+\left(-\frac{4}{a+b}\right)^2}$

$=\frac{4\sqrt{2}}{a+b}$ ($\because a+b>0$)

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{OD}$ ($\because \overline{OB}=\overline{OD}$)

$=\frac{4\sqrt{2}}{a-b}+\frac{4\sqrt{2}}{a+b}$

$=\frac{8\sqrt{2}a}{a^2-b^2}$

$=\frac{8\sqrt{2}a}{4}$ ($\because$ ㉠)

$=2\sqrt{2}a$

$\geq 4\sqrt{2}$ ($\because a\geq 2$)

따라서 $\overline{OA}+\overline{OB}$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 □ABCD는 마름모이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 2\overline{OA}\times 2\overline{OD}$

$=2\overline{OA}\times\overline{OD}$

$=2\times\frac{4\sqrt{2}}{a-b}\times\frac{4\sqrt{2}}{a+b}$ ($\because$ ㄴ)

$=\frac{64}{a^2-b^2}$

$=\frac{64}{4}=16$ ($\because$ ㉠) (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

• 다른풀이 •

비법노트 Ⓐ (5) ② 참조

ㄴ. 삼각형 OAD의 넓이는 $|2\times 2|=4$로 일정하므로

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OD}=4$

$\therefore \overline{OA}\times\overline{OD}=8$

이때, $\overline{OA}>0$, $\overline{OD}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{OA}+\overline{OD}\geq 2\sqrt{\overline{OA}\times\overline{OD}}$

$=2\sqrt{8}$

$=4\sqrt{2}$ (단, 등호는 $\overline{OA}=\overline{OD}$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다. (거짓)

ㄷ. □ABCD는 마름모이므로

$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCD=\triangle ODA$

이때, ㄴ에서 $\triangle OAD=4$이므로

□ABCD$=4\times 4=16$ (참)

25

△AOB가 정삼각형이므로 점 B의 좌표를 $(t, \sqrt{3}t)$ ($t>0$)이라 하자.

한 변의 길이가 $2t$인 정삼각형 AOB의 높이

점 B는 타원 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ 위에 있으므로

$\frac{t^2}{2^2}+\frac{3t^2}{6^2}=1$, $3t^2+t^2=12$

$t^2=3$ $\therefore t=\sqrt{3}$ ($\because t>0$)

즉, $B(\sqrt{3}, 3)$, $A(-\sqrt{3}, 3)$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$

이때, □ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{CD}=2\sqrt{3}$이다.

두 점 $C(a, b)$, $D(c, d)$에 대하여 $a-c=2\sqrt{3}$이므로

$c=a-2\sqrt{3}$이고, $b=d$

점 $C(a, b)$는 쌍곡선 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$ 위에 있고,

점 $D(a-2\sqrt{3}, b)$는 타원 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ 위에 있으므로

$\frac{a^2}{2^2}-\frac{b^2}{6^2}=1$ ……㉠

$\frac{(a-2\sqrt{3})^2}{2^2}+\frac{b^2}{6^2}=1$ ……㉡

㉠+㉡을 하면

$\frac{a^2}{2}-\sqrt{3}a+3=2$, $a^2-2\sqrt{3}a+2=0$

$\therefore a=\sqrt{3}+1$ ($\because a>2$)

$\therefore ac=a(a-2\sqrt{3})$

$=(\sqrt{3}+1)(-\sqrt{3}+1)$

$=-2$ 답 −2

단계	채점 기준	배점
(가)	△AOB가 정삼각형이고 점 B가 타원 위에 있음을 이용하여 점 B의 좌표를 구한 경우	30%
(나)	□ABCD가 평행사변형임을 이용하여 선분 CD의 길이를 구한 경우	20%
(다)	점 C는 쌍곡선 위에, 점 D는 타원 위에 있음을 이용하여 식을 세운 후 연립하여 a의 값을 구한 경우	40%
(라)	ac의 값을 구한 경우	10%

26

점 P가 타원 $\frac{x^2}{a+3}+\frac{y^2}{a+2}=1$ 위에 있고, 타원의 두 초점이 F_1, F_2이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\sqrt{a+3}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\overline{PF_1}^2+2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4(a+3)$ ……㉠

또한, 점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{1-a}=1$ $(0<a<1)$ 위에 있고, 쌍곡선의 두 초점도 F_1, F_2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2\sqrt{a}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$\overline{PF_1}^2-2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=4a$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=12$

$\therefore \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=3$ 답 3

27 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{5}x}{4}-\frac{1}{2}y=1 \qquad \therefore\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}x-2$ ……㉠

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{5}x}{a^2}+\frac{\frac{1}{2}y}{b^2}=1 \qquad \therefore\ y=-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}x+2b^2$ ……㉡

두 접선 ㉠, ㉡이 서로 수직으로 만나므로

$\frac{\sqrt{5}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}b^2}{a^2}\right)=-1$

$\therefore\ a^2=5b^2$ ……㉢

한편, 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\right)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$\frac{5}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$ ……㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$\frac{5}{5b^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\ \frac{5}{4b^2}=1 \qquad \therefore\ b^2=\frac{5}{4}$

따라서 $p=4,\ q=5$이므로

$p+q=4+5=9$ 답 9

28 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면 두 초점이 $\mathrm{F}(3\sqrt{2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-3\sqrt{2},\ 0)$이므로

$a^2+b^2=(3\sqrt{2})^2=18$ ……㉠

또한, 이 쌍곡선이 점 $(\sqrt{10},\ 0)$을 지나므로

$\frac{10}{a^2}=1$에서 $a^2=10$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $b^2=8$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{8}=1$

초점이 x축 위에 있고 원점을 지나는 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하면 초점의 좌표가 $\left(\frac{3}{5},\ 0\right)$이므로

$p=\frac{3}{5}$

즉, 포물선의 방정식은 $y^2=\frac{12}{5}x$

$y^2=\frac{12}{5}x$를 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{8}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{10}-\frac{1}{8}\times\frac{12}{5}x=1,\ x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0 \qquad \therefore\ x=-2$ 또는 $x=5$

포물선과 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(5,\ 2\sqrt{3})$

점 P에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{8}=1$에 그은 접선의 방정식은

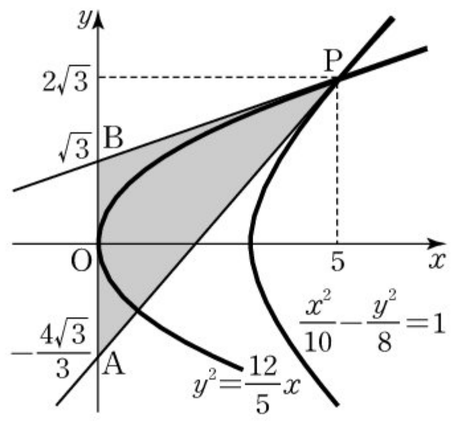
$\frac{5x}{10}-\frac{2\sqrt{3}y}{8}=1$

이므로 이 직선이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{A}\left(0,\ -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

점 P에서 포물선 $y^2=\frac{12}{5}x$에 그은 접선의 방정식은

$2\sqrt{3}y=\frac{6}{5}(x+5)$

이므로 이 직선이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3})$



따라서 삼각형 PBA의 넓이는

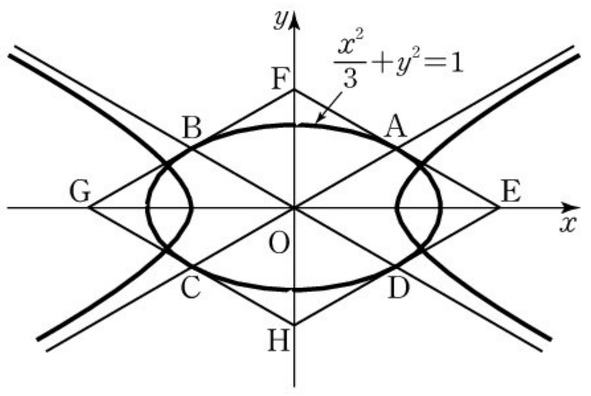
$\frac{1}{2}\times\left\{\sqrt{3}-\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}\times 5=\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt{3}}{3}\times 5$

$=\frac{35\sqrt{3}}{6}$ 답 $\frac{35\sqrt{3}}{6}$

29 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$의 두 초점의 좌표를 $(c,\ 0),\ (-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=3-1=2 \qquad \therefore\ c=\sqrt{2}\ (\because\ c>0)$

즉, 타원의 초점의 좌표는 $(\sqrt{2},\ 0),\ (-\sqrt{2},\ 0)$



위의 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 외접하면서 각 꼭짓점이 x축, y축 위에 있는 마름모의 꼭짓점을 E, F, G, H라 하면

$\triangle\mathrm{OEF}=\triangle\mathrm{OFG}=\triangle\mathrm{OGH}=\triangle\mathrm{OHE}$

이므로 마름모 EFGH의 넓이가 최소이려면 삼각형 OFG의 넓이가 최소이어야 한다.

직선 GF의 기울기를 m $(m>0)$이라 하면 이 직선이 타원에 접하므로 접선의 방정식은

$y=mx+\sqrt{3m^2+1}$ ……㉠

이 직선이 x축, y축과 만나는 점이 각각 G, F이므로

$\mathrm{G}\left(-\frac{\sqrt{3m^2+1}}{m},\ 0\right),\ \mathrm{F}(0,\ \sqrt{3m^2+1})$

삼각형 OFG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3m^2+1}}{m}\times\sqrt{3m^2+1}=\frac{3m^2+1}{2m}$

$=\frac{3}{2}m+\frac{1}{2m}$

이때, $\frac{3}{2}m>0,\ \frac{1}{2m}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{2}m+\frac{1}{2m}\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}m\times\frac{1}{2m}}$$
$$=2\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$=\sqrt{3}\left(\text{단, 등호는 } m=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 타원에 외접하는 마름모 EFGH의 넓이가 최소이려면 직선 GF의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이어야 하므로 그때의 직선 GF의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

이것을 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{2}\right)^2=1$

$2x^2+2\sqrt{6}x+3=0$, $(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2=0$

$\therefore x=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, 점 B의 좌표가 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로 직선 BD의 기울기는 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{-\frac{\sqrt{6}}{2}-0}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 직선 AC의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

한편, 쌍곡선의 초점이 $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하면

$a^2+b^2=2$ ……㉡

또한, 쌍곡선의 두 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

이것을 ㉡에 대입하면

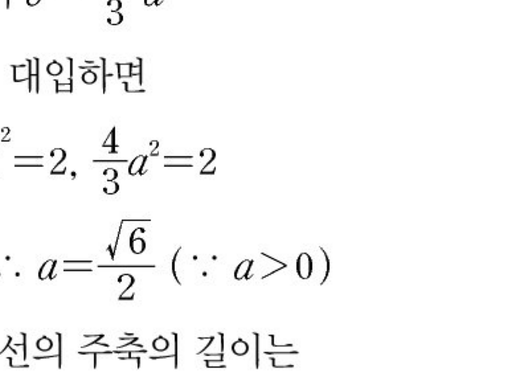
$a^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=2$, $\frac{4}{3}a^2=2$

$a^2=\frac{3}{2}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ($\because a>0$)

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

30 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$과 포물선 $y=x^2+m_1$, 즉 $x^2=y-m_1$이 점 $\mathrm{P}(p, q)$ ($|p|\geq\sqrt{5}$)에서 접한다고 하자.



쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$\frac{px}{5}-\frac{qy}{2}=1$에서 $y=\frac{2p}{5q}x-\frac{2}{q}$ ……㉠

포물선 $x^2=y-m_1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$px=\frac{y+q}{2}-m_1$에서 $y=2px-q+2m_1$ ……㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{2p}{5q}=2p$, $-\frac{2}{q}=-q+2m_1$

$\frac{2p}{5q}=2p$에서 $2p=10pq$, $2p(5q-1)=0$

$\therefore q=\frac{1}{5}$ ($\because p\neq 0$)

이것을 $-\frac{2}{q}=-q+2m_1$에 대입하면

$-10=-\frac{1}{5}+2m_1$ $\therefore m_1=-\frac{49}{10}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$과 포물선 $y=x^2+m$이 서로 다른 네 점에서 만나려면 $m<m_1$이어야 하므로

$m<-\frac{49}{10}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 m의 최댓값은 -5이다.

답 -5

• 다른풀이 •

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$과 포물선 $y=x^2+m$이 모두 y축에 대하여 대칭이므로 점 $\mathrm{P}(p, q)$ ($p\neq 0$)가 쌍곡선과 포물선의 교점이면 점 $(-p, q)$도 쌍곡선의 교점이다.

즉, 두 교점의 y좌표가 같다.

이때, 쌍곡선과 포물선의 교점의 개수가 4이므로 네 교점의 서로 다른 y좌표의 개수는 2이어야 한다.

$y=x^2+m$에서 $x^2=y-m$

이것을 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$에 대입하여 정리하면

$\frac{y-m}{5}-\frac{y^2}{2}=1$

$\therefore 5y^2-2y+2m+10=0$

위의 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-5(2m+10)$
$=-10m-49>0$

$10m<-49$ $\therefore m<-\frac{49}{10}$

31 해결단계

❶ 단계	포물선과 타원 위의 점에서 그은 접선의 기울기의 집합을 구한다.
❷ 단계	쌍곡선의 접선의 방정식을 구한 후, m의 값의 범위를 구한다.
❸ 단계	❶, ❷단계의 결과를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

포물선 $x^2=4py$ ($p\neq 0$) 위의 임의의 점에서 그은 접선의 기울기들의 집합은 실수 전체의 집합 R가 된다.

$\therefore M_1=R$ ……㉠

마찬가지로 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (x\neq\pm a)$ 위의 임의의 점에서 그은 접선의 기울기들의 집합도 실수 전체의 집합이 된다.

$\therefore M_2=R$ ……㉡

한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (|x|>a)$ 위의 점에서 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

이때, $a^2m^2-b^2>0$이어야 하므로

$m>\left|\frac{b}{a}\right|$ 또는 $m<-\left|\frac{b}{a}\right|$

$\therefore M_3=\left\{m\middle|m>\left|\frac{b}{a}\right|\text{ 또는 }m<-\left|\frac{b}{a}\right|\right\}$ ……㉢

ㄱ. ㉢에 의하여 $\left|\frac{2b}{a}\right|\in M_3$ (참)

ㄴ. ㉠, ㉡에 의하여 $M_1=M_2$ (참)

ㄷ. ㉡, ㉢에 의하여 $M_3\subset M_2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 31

01 $6\sqrt{6}$ **02** $120\sqrt{2}$ **03** 풀이 참조 **04** ③ **05** ⑤

01 해결단계

❶ 단계	선분 OA의 길이를 $3a\,(a>0)$라 하고 타원의 방정식과 쌍곡선의 방정식을 a를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	두 점 D, E의 좌표를 각각 a를 이용하여 나타낸 후, 삼각형 DOE의 넓이가 $5\sqrt{3}$임을 이용하여 a의 값을 구한다.
❸ 단계	타원의 장축의 길이를 구한다.

선분 OA의 길이를 $3a\ (a>0)$라 하면

$\overline{OB}=a$, $\overline{OC}=2a$

이때, 점 A를 한 꼭짓점으로 하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{(3a)^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$이라 하면 이 타원의 한 초점이 $C(2a,\ 0)$이므로

$(2a)^2=(3a)^2-b^2$에서 $b^2=5a^2$

$\therefore b=\sqrt{5}a\ (\because a>0,\ b>0)$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9a^2}+\frac{y^2}{5a^2}=1$이므로 $D(0,\ \sqrt{5}a)$

또한, 점 B를 한 꼭짓점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1\ (c>0)$이라 하면 이 쌍곡선의 한 초점이 $C(2a,\ 0)$이므로

$(2a)^2=a^2+c^2$에서 $c^2=3a^2$

$\therefore c=\sqrt{3}a\ (\because a>0,\ c>0)$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$이므로 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{3}a}{a}x$, 즉 $y=\pm\sqrt{3}x$

이 중 제1사분면을 지나는 점근선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이므로 점 E의 좌표는

$\sqrt{5}a=\sqrt{3}x$에서 $x=\frac{\sqrt{15}}{3}a$

$\therefore \mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}a,\ \sqrt{5}a\right)$

삼각형 DOE의 넓이가 $5\sqrt{3}$이므로

$\triangle\mathrm{DOE}=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}a\times\frac{\sqrt{15}}{3}a$

$=\frac{5\sqrt{3}}{6}a^2=5\sqrt{3}$

$a^2=6$ $\therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>0)$

따라서 타원의 장축의 길이는

$6a=6\sqrt{6}$ 답 $6\sqrt{6}$

02 해결단계

❶ 단계	$\overline{F'R}=10$을 이용하여 $\overline{PR}=\overline{PF}$임을 파악한 후, $\overline{RQ}=\overline{FQ}$임을 파악한다.
❷ 단계	점 Q가 $\overline{F'R}$를 지름으로 하는 원 위에 있음을 이용하여 $\overline{F'Q}$, $\overline{FQ}$의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overline{FP}$의 길이를 구한 후, 닮음인 도형을 찾아 $\overline{F'S}$의 길이를 구한다.
❹ 단계	$\overline{FP}\times\overline{F'S}$의 값을 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점을 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=25+24=49$ $\therefore c=7\ (\because c>0)$

$\therefore F(7,\ 0)$, $F'(-7,\ 0)$

점 P가 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

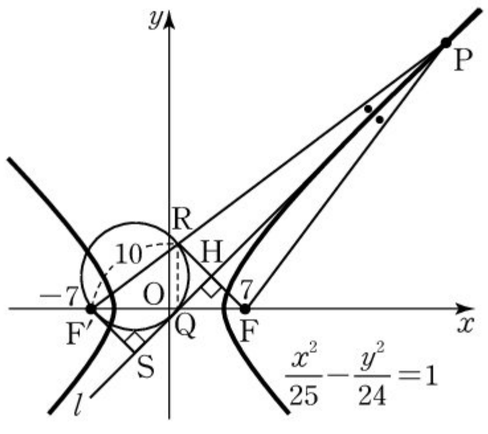
$\overline{F'P}-\overline{FP}=2\times5=10$

이때, $\overline{F'R}=10$이므로 $\overline{PR}=\overline{PF}$

선분 FR와 직선 l의 교점을 H라 하면 점 P에서의 접선 l이 $\angle F'PF$를 이등분하므로

$\angle RPH=\angle FPH$

이때, $\triangle PRF$는 $\overline{PR}=\overline{PF}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{PH}$는 선분 FR의 수직이등분선이다.



즉, $\overline{RH}=\overline{HF}$이므로 $\triangle FHQ\equiv\triangle RHQ$ (SAS 합동)

$\therefore \overline{RQ}=\overline{QF}$ ……㉠

한편, 점 Q의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면

$\overline{F'Q}=7+k$, $\overline{FQ}=7-k$

㉠에 의하여 $\overline{RQ}=7-k$

선분 F′R를 지름으로 하는 원이 점 Q를 지나므로

$\angle F'QR=90^\circ$

즉, $\triangle F'QR$가 직각삼각형이므로

$10^2=(7+k)^2+(7-k)^2$, $100=2k^2+98$

$k^2=1$ $\therefore k=1$ $(\because k>0)$

$\therefore \overline{F'Q}=8$, $\overline{FQ}=\overline{RQ}=6$

$\triangle RQF$가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PF}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{RH}=\frac{1}{2}\overline{RF}=3\sqrt{2}$

또한, $\triangle PF'F$에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{F'P}:\overline{FP}=\overline{F'Q}:\overline{FQ}$에서

$(10+\overline{PR}):\overline{FP}=8:6$

$(10+\overline{FP}):\overline{FP}=8:6$ $(\because \overline{PF}=\overline{PR})$

$8\overline{FP}=6(10+\overline{FP})$, $2\overline{FP}=60$

$\therefore \overline{FP}=\overline{PR}=30$

$\therefore \overline{F'P}=\overline{PR}+\overline{F'R}=40$

$\overline{F'S}/\!/\overline{RH}$에서 $\triangle PF'S\backsim\triangle PRH$(AA 닮음)이므로

$\overline{PF'}:\overline{PR}=\overline{F'S}:\overline{RH}$에서

$40:30=\overline{F'S}:3\sqrt{2}$, $30\overline{F'S}=120\sqrt{2}$

$\therefore \overline{F'S}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{FP}\times\overline{F'S}=30\times4\sqrt{2}=120\sqrt{2}$ 답 $120\sqrt{2}$

• 다른풀이 •

쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$의 두 초점이 F, F′이므로

$F(7, 0)$, $F'(-7, 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=10$이고 $\overline{F'R}=10$이므로 $\overline{PF}=\overline{PR}$

점 Q가 선분 F′R를 지름으로 하는 원 위에 있으므로

$\angle F'QR=90^\circ$

$\therefore \angle RQF=90^\circ$ ……㉡

$\overline{PQ}$는 공통, $\overline{PR}=\overline{PF}$, $\angle RPQ=\angle FPQ$

이므로 $\triangle PRQ\equiv\triangle PFQ$ (SAS 합동)

$\therefore \angle PQR=\angle PQF=45^\circ$ $(\because$ ㉡$)$

따라서 접선 l은 기울기가 $\tan 45^\circ=1$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$의 접선이므로 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{25-24}$ $\therefore y=x\pm1$

이때, 접선의 x절편이 양수이므로 직선 l의 방정식은

$y=x-1$ (접Q의 x좌표)

이것을 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$에 대입하여 풀면

$\frac{x^2}{25}-\frac{(x-1)^2}{24}=1$, $x^2-50x+625=0$

$(x-25)^2=0$ $\therefore x=25$, $y=24$

즉, 점 P의 좌표가 $(25, 24)$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{(25-7)^2+24^2}=\sqrt{18^2+24^2}=30$

또한, 점 $F'(-7, 0)$과 접선 $l: x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\overline{F'S}=\frac{|-7-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{FP}\times\overline{F'S}=30\times4\sqrt{2}=120\sqrt{2}$

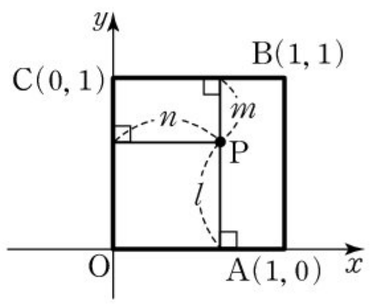
03 해결단계

❶ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 l, m, n에 대한 관계식을 세운다.
❷ 단계	각 식을 연립하여 풀어 점 P의 자취의 방정식을 구한다.
❸ 단계	점 P의 자취를 좌표평면 위에 나타낸다.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P는 정사각형 OABC의 내부에 있으므로

$0<x<1$, $0<y<1$이고,

$l=y$, $m=1-y$, $n=x$ ……㉠



이때, l, m, n을 세 변의 길이로 하는 삼각형이 직각삼각형이 되려면

$\begin{cases} l^2+m^2=n^2 & \cdots\cdots㉡ \\ m^2+n^2=l^2 & \cdots\cdots㉢ \\ n^2+l^2=m^2 & \cdots\cdots㉣ \end{cases}$

중의 하나가 성립하면 된다.

(i) ㉠을 ㉡에 대입하면

$y^2+(1-y)^2=x^2$, $x^2-2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$ ……㉤

(ii) ㉠을 ㉢에 대입하면

$(1-y)^2+x^2=y^2$

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ……㉥

(iii) ㉠을 ㉣에 대입하면

$x^2+y^2=(1-y)^2$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ……㉦

(ii)에서 $x^2=2y-1$을 (i)의 $y^2+(1-y)^2=x^2$에 대입하면

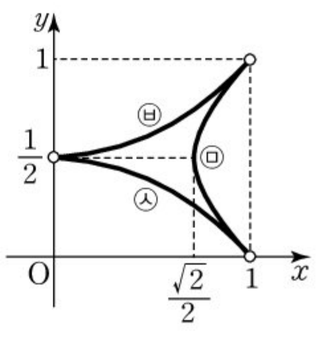
$y^2+(1-y)^2=2y-1$, $y^2-2y+1=0$

$(y-1)^2=0$ $\therefore y=1$, $x=1$

즉, ㉤과 ㉥의 그래프는 점 $(1, 1)$에서 만난다.

같은 방법으로 ㉤과 ㉦의 그래프는 점 $(1, 0)$에서 만나고, ㉥과 ㉦의 그래프는 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에서 만난다.

따라서 점 P의 자취를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

04 해결단계

❶ 단계	피타고라스 정리와 쌍곡선의 정의를 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	원점이 선분 FF′의 중점임을 이용하여 서로 닮음인 도형을 찾아 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	❶단계에서 구한 식을 활용하여 $\overline{PF}$의 길이가 자연수가 되도록 하는 k의 개수를 찾고 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{50-k}-\frac{y^2}{50+k}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=(50-k)+(50+k)=100$

$\therefore c=10$ $(\because c>0)$

$\therefore F(10, 0), F'(-10, 0)$

$\triangle PF'F$가 $\angle FPF'=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=\overline{F'F}^2=20^2=400$

이때, $\overline{PF'}=2\overline{PF}$이므로 위의 식에 대입하면

$4\overline{PF}^2+\overline{PF}^2=400$, $5\overline{PF}^2=400$

$\overline{PF}^2=80$

$\therefore \overline{PF}=4\sqrt{5}$, $\overline{PF'}=8\sqrt{5}$ $(\because \overline{PF}>0, \overline{PF'}>0)$

점 P가 쌍곡선 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

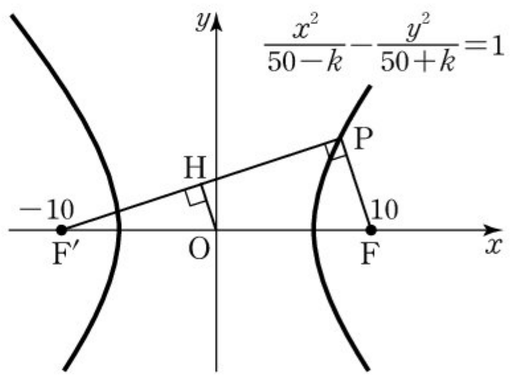
$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{50-k}$ ……㉠

$4\sqrt{5}=2\sqrt{50-k}$, $2\sqrt{5}=\sqrt{50-k}$

$20=50-k$ $\therefore k=30$ (참)

ㄴ. 원점 O에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=6$



이때, 원점 O가 선분 F′F의 중점이고 $\overline{FP}/\!/\overline{OH}$이므로 두 삼각형 FPF′, OHF′은 서로 닮은 도형이고 닮음비가 2 : 1이다.

즉, $\overline{PF}=2\overline{OH}=12$

ㄱ에서 $\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=400$이므로

$\overline{PF'}^2+12^2=400$, $\overline{PF'}^2=256$

$\therefore \overline{PF'}=16$ $(\because \overline{PF'}>0)$

따라서 삼각형 PF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PF'}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times16\times12=96$ (참)

ㄷ. 하나의 쌍곡선에 대하여 $\angle FPF'=90^\circ$를 만족시키는 제1사분면의 점 P는 오직 하나 존재한다.

이때, ㉠이 성립하므로 한 점 P에 대하여 k가 유일하게 결정된다.

즉, 조건을 만족시키는 선분 PF의 개수와 k의 개수는 같다.

$\overline{PF}<\overline{PF'}$, $\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=400$을 만족시키는 선분 PF의 길이는 1, 2, 3, …, 14의 14개이다.

이때, k의 값이 커질수록 쌍곡선이 y축에 가까워지므로 $\angle FPF'=90^\circ$를 만족시키는 점 P에 대하여 선분 PF의 길이가 길어진다.

즉, 선분 PF의 길이는 $k=1$일 때 최소이다.

$k=1$이면 ㉠에서

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{49}=14$

$\overline{PF}=a$라 하면 $\overline{PF'}=a+14$이므로

$\overline{PF'}^2+\overline{PF}^2=400$에서

$(a+14)^2+a^2=400$

$a^2+14a-102=0$

$\therefore a=\sqrt{151}-7=5.\times\times\times$ $(\because a>0)$

즉, 선분 PF의 길이가 자연수일 때의 최솟값은 6이므로 조건을 만족시키는 선분 PF의 길이는 6, 7, 8, …, 14의 9개이다. (거짓)

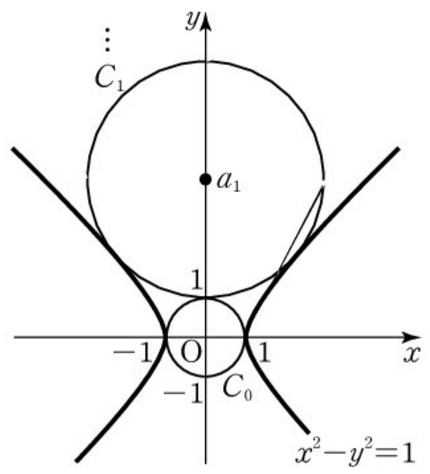
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

05 해결단계

❶ 단계	$a_0=0$이고, 원 C_0이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 접함을 이용하여 b_0의 값을 구한다.
❷ 단계	원 C_1은 원 C_0과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 모두 접함을 이용하여 a_1의 값과 접점의 y좌표를 각각 구한 후, ㄱ, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	원 C_n이 원 C_{n+1}과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 동시에 접함을 이용하여 a_n과 b_n에 대한 관계식을 세운 후, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$a_0=0$이므로 원 C_0은 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 b_0이고, 쌍곡선 $x^2-y^2=1$에 접해야 한다.

이때, 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$, $(-1, 0)$이므로 $b_0=1$



ㄱ. 원 C_1의 중심은 $(0, a_1)$, 반지름의 길이는 b_1이고, 조건 (나)에 의하여 두 원 C_0, C_1이 접하므로

$1+b_1=a_1$ ……㉠

원 C_1의 방정식은 $x^2+(y-b_1-1)^2=b_1^2$

이때, 원 C_1과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$이 접하므로

$x^2=y^2+1$을 원 C_1의 방정식에 대입하여 정리하면

$y^2+1+(y-b_1-1)^2=b_1^2$

$\therefore y^2-(b_1+1)y+b_1+1=0$ ……㉡

원 C_n과 쌍곡선이 모두 y축에 대하여 대칭이므로 원 C_n과 쌍곡선의 두 접점도 y축에 대하여 대칭이다.
즉, 두 접점의 y좌표가 같으므로 이차방정식 ㉡이 중근을 가져야 하고 판별식을 D라 하면

$D=(b_1+1)^2-4(b_1+1)$

$=(b_1+1)(b_1-3)=0$

$\therefore b_1=3\ (\because b_1>0)$

$\therefore a_1=4\ (\because$ ㉠$)$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $b_1=3$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$y^2-4y+4=0,\ (y-2)^2=0 \qquad \therefore y=2$

즉, 원 C_1과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 접점의 y좌표는 2이다. (참)

ㄷ. 원 $C_n : x^2+(y-a_n)^2={b_n}^2$과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$이 접하므로 $x^2=y^2+1$을 원 C_n의 방정식에 대입하면

$y^2+1+(y-a_n)^2={b_n}^2$

$\therefore 2y^2-2a_ny+{a_n}^2-{b_n}^2+1=0$

위의 y에 대한 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D'이라 하면

$\dfrac{D'}{4}={a_n}^2-2({a_n}^2-{b_n}^2+1)$

$=-{a_n}^2+2{b_n}^2-2=0$

$\therefore {a_n}^2=2{b_n}^2-2$ ……㉢

같은 방법으로 원 C_{n+1}이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 접하므로 ${a_{n+1}}^2=2{b_{n+1}}^2-2$ ……㉣

㉣−㉢을 하면

${a_{n+1}}^2-{a_n}^2=2{b_{n+1}}^2-2{b_n}^2$

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=2(b_{n+1}+b_n)(b_{n+1}-b_n)$ ……㉤

이때, 두 원 C_n, C_{n+1}의 중심이 각각 $(0,\ a_n)$, $(0,\ a_{n+1})$, 반지름의 길이가 각각 b_n, b_{n+1}이고 두 원이 외접하므로

$a_{n+1}-a_n=b_{n+1}+b_n$ ……㉥

이것을 ㉤에 대입하여 정리하면

$a_{n+1}+a_n=2(b_{n+1}-b_n)$ ……㉦

㉥, ㉦을 연립하여 풀면

$a_n=\dfrac{1}{2}b_{n+1}-\dfrac{3}{2}b_n,\ a_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_n$

$a_n=\dfrac{1}{2}b_{n+1}-\dfrac{3}{2}b_n$의 n 대신에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_{n+2}-\dfrac{3}{2}b_{n+1}$이므로

$\dfrac{3}{2}b_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_n=\dfrac{1}{2}b_{n+2}-\dfrac{3}{2}b_{n+1}$

$3b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_{n+2}+\dfrac{1}{2}b_n$

$\therefore b_{n+2}+b_n=6b_{n+1}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

이것이 수능 p. 32

1 54 **2** 116 **3** ②

1 해결단계

❶ 단계	쌍곡선의 주축의 길이를 이용하여 a의 값을 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q의 위치를 찾는다.
❸ 단계	$\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12임을 이용하여 b의 값을 구한 후, a^2+3b^2의 값을 구한다.

쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로

$2a=6 \qquad \therefore a=3$

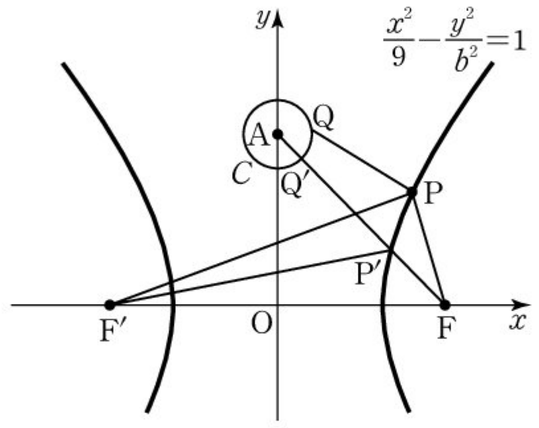
이때, 점 P는 제1사분면에서 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\times3=6$

즉, $\overline{PF'}=\overline{PF}+6$이므로

$\overline{PQ}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+(\overline{PF}+6)=(\overline{PQ}+\overline{PF})+6$

다음 그림과 같이 두 점 P, Q가 각각 선분 AF 위의 점 P′, Q′일 때, $\overline{PQ}+\overline{PF}$의 값이 최소이다.



점 P′은 선분 AF와 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 교점이고, 점 Q′은 선분 AF와 원 C의 교점이므로

$\overline{PQ}+\overline{PF'}=(\overline{PQ}+\overline{PF})+6$

$\geq(\overline{P'Q'}+\overline{P'F})+6$

$=(\overline{AF}-1)+6$

$=\sqrt{c^2+25}+5$

이때, $\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12이므로

$\sqrt{c^2+25}+5=12,\ \sqrt{c^2+25}=7$

위의 식의 양변을 제곱하면

$c^2+25=49 \qquad \therefore c^2=24$

$\therefore b^2=c^2-a^2=24-9=15$

$\therefore a^2+3b^2=9+3\times15=54$ 답 54

2 해결단계

❶ 단계	원 C와 직선 FP의 접점을 R라 하고 $\overline{PQ}=\overline{PR}$와 $\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$임을 이용하여 식을 세운다.
❷ 단계	두 삼각형 CQF′, CRF가 합동임을 보이고, 쌍곡선의 정의를 이용하여 식을 세운다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 식을 연립하여 풀고, $\overline{FP}$, $\overline{F'P}$의 길이를 각각 구한 후, $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$의 값을 구한다.

원 C와 직선 FP의 접점을 R라 하면 $\overline{PQ}=\overline{PR}$이므로

$\overline{F'Q}=\overline{F'P}+\overline{PQ}$

$=\overline{F'P}+\overline{PR}=5\sqrt{2}$ ……㉠

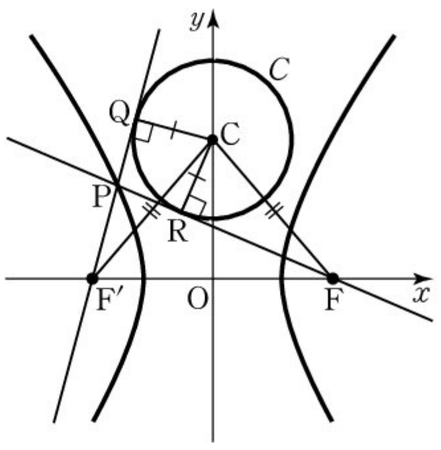
또한, 원 C의 중심을 C라 하면

$\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\angle CQF'=\angle CRF=90^\circ$이고,

원 C의 중심 C는 y축 위에 있으므로 $\overline{F'C}=\overline{FC}$

∴ $\triangle CQF'\equiv\triangle CRF$ (RHS 합동)

∴ $\overline{FR}=\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$ ……㉡



한편, 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$의 주축의 길이는

$2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{FP}-\overline{F'P}=\overline{FR}+\overline{PR}-\overline{F'P}$

$=5\sqrt{2}+\overline{PR}-\overline{F'P}=4\sqrt{2}$ ($\because$ ㉡)

∴ $\overline{PR}-\overline{F'P}=-\sqrt{2}$ ……㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$\overline{PR}=2\sqrt{2}$, $\overline{F'P}=3\sqrt{2}$

$\overline{FP}=\overline{FR}+\overline{PR}=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

∴ $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2=(7\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2$

$=98+18=116$ 답 116

3 해결단계

❶ 단계	타원 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 일치함을 이용하여 접선의 기울기를 구하고 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	두 직선 AB와 EF가 평행함과 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$인 타원의 접선의 방정식을 이용하여 a, b의 값을 각각 구하고, a^2+b^2의 값을 구하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	직선 AB와 타원의 교점 P의 좌표를 구한 후, 두 점 A, C를 초점으로 하고 점 P를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이를 구하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB이므로 두 점 $A(2\sqrt{3},\ 0)$, $B(0,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-2}{2\sqrt{3}-0}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, 타원 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. (참)

ㄴ. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$에 대하여

$E(a,\ 0)$, $F(0,\ b)$

즉, 직선 EF의 기울기는

$\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}$

ㄱ에서 직선 AB의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 $\overline{AB}/\!/\overline{EF}$이므로

$-\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ∴ $a=\sqrt{3}b$ ……㉮

한편, 직선 AB의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 이 직선은 점 $B(0,\ 2)$를 지나므로 직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

이때, 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 제1사분면에서 접하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\frac{a^2}{3}+b^2}$

이 접선과 직선 AB가 일치하므로

$\sqrt{\frac{a^2}{3}+b^2}=2$

위의 식에 ㉮을 대입하면

$\sqrt{\frac{(\sqrt{3}b)^2}{3}+b^2}=2$, $\sqrt{b^2+b^2}=2$

$\sqrt{2}b=2$ ($\because$ $b>0$) ∴ $b=\sqrt{2}$

따라서 $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2=8$ (참)

ㄷ. 점 P는 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$와 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$의 교점이므로 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$를 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$\frac{x^2}{6}+\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\right)^2}{2}=1$

$x^2+3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\right)^2=6$

$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

$(x-\sqrt{3})^2=0$ ∴ $x=\sqrt{3}$

이것을 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$에 대입하면

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+2=1$

∴ $P(\sqrt{3},\ 1)$

따라서 두 점 A, C를 초점으로 하고 점 P를 지나는 쌍곡선의 주축의 길이는 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{CP}-\overline{AP}=\sqrt{(-2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(0-1)^2}$

$-\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(0-1)^2}$

$=2\sqrt{7}-2$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

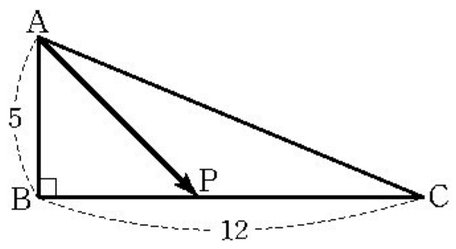
Ⅱ 평면벡터

04 벡터의 연산

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 37

01 325	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 5	08 13		

01



△ABC는 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{CP}|=x$라 하면 $\overline{BP}=12-x$이므로

직각삼각형 ABP에서

$5^2+(12-x)^2=x^2$

$24x=169 \quad \therefore x=\frac{169}{24}$

삼각형 APC의 둘레의 길이는

$l=\overline{AP}+\overline{PC}+\overline{AC}$

$=\frac{169}{24}+\frac{169}{24}+13$

$=\frac{169}{12}+13$

$\therefore 12l=12\left(\frac{169}{12}+13\right)$

$=169+156$

$=325$

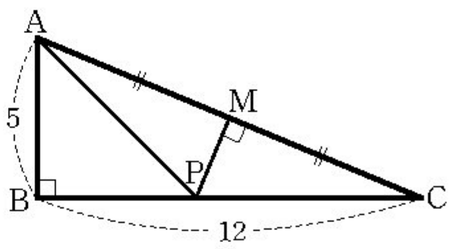
답 325

• 다른풀이 •

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

△APC가 이등변삼각형이므로 변 AC의 중점을 M이라 하면 선분 PM은 변 AC를 수직이등분한다.



∠C는 공통,

∠PMC=∠ABC=90°이므로

△PMC∽△ABC (AA 닮음)

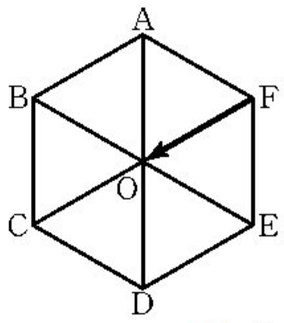
즉, $\overline{CP}:\overline{CM}=\overline{CA}:\overline{CB}$에서

$\overline{CP}:\frac{13}{2}=13:12$

$12\overline{CP}=\frac{169}{2} \quad \therefore \overline{CP}=\overline{AP}=\frac{169}{24}$

02 주어진 도형이 정육각형이므로 점 O와 각 꼭짓점 사이의 거리는 정육각형의 한 변의 길이와 같다.

따라서 벡터 $\overrightarrow{FO}$와 크기와 방향이 모두 같은 벡터는 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$의 3개이다.



답 ①

03 $\overline{AD}/\!/\overline{BM}$이고 점 M이 선분 BC의 중점이므로 두 삼각형 AED, MEB는 서로 닮은 도형이고 닮음비는 2 : 1이다.

즉, $\overline{AE}=2\overline{ME}$이므로

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})$

$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

따라서 $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$이므로

$mn=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

답 ⑤

04 △ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 높이는

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$

변 BC의 중점이 M이므로

$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$

$\therefore \overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}-2\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{MP}$

이때, 점 M에서 변 AC에 내린 수선의 발이 P이므로

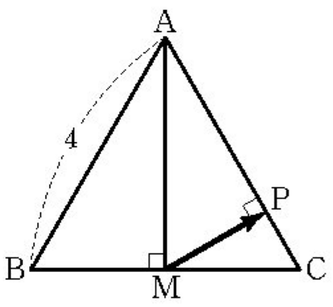
직각삼각형 AMC에서

$\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{AC}\times\overline{MP}$

$2\sqrt{3}\times 2=4\times\overline{MP}$

$\therefore \overline{MP}=\sqrt{3}$

$\therefore |\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{3}$

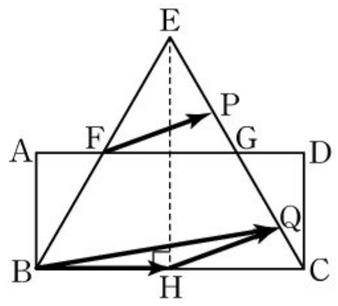


답 ③

05 점 E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 △EBC는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이므로 높이는

$\overline{EH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$

즉, $\overline{EH}=2\overline{AB}$이므로 두 점 F, G는 각각 두 변 EB, EC의 중점이다.



벡터 $\overrightarrow{FP}$의 시점을 점 H로 옮길 때의 종점을 Q라 하면 $\triangle EFG \equiv \triangle GHC$이므로 점 Q는 선분 GC 위에 있고

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\overrightarrow{BQ}$$

이때, $|\overrightarrow{BQ}|$의 값은 선분 BQ가 변 CE와 수직일 때, 즉 점 Q가 점 G에 위치할 때 최소이다.

따라서 $|\overrightarrow{BQ}|$, 즉 $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FP}\right|$의 최솟값은

$$\overline{BG}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$$ 답 ④

• 다른풀이 •

$\overrightarrow{BC} /\!/ \overrightarrow{FG}$이고 $\overline{BC}=2\overline{FG}$이므로

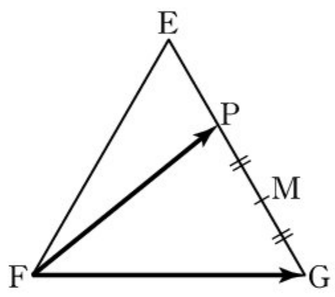
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}$$

$$\therefore \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FP}\right|=|\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FP}|$$

$\triangle EFG$에서 선분 GP의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{FM}$$

이때, $|\overrightarrow{FM}|$의 값은 점 M이 변 EG의 중점에 위치할 때 최소이다.

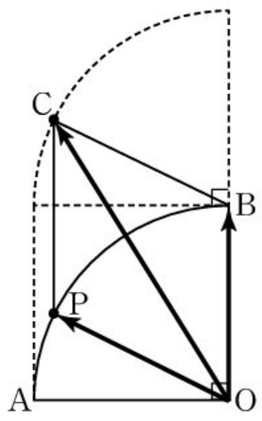


따라서 구하는 최솟값은

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FP}\right|=|2\overrightarrow{FM}|\geq 2\times\left(4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3}$$

06 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}$를 만족시키는 점 C에 대하여 □OBCP는 평행사변형이다.

즉, 벡터 $\overrightarrow{BC}$는 벡터 $\overrightarrow{OP}$의 시점을 점 B로 옮긴 것과 같으므로 조건을 만족시키는 점 C가 나타내는 도형의 길이는 부채꼴 AOB의 호의 길이와 같다.



따라서 점 C가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi\times 2\times\frac{90}{360}=\pi$$ 답 ③

07 $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{r}=10\vec{a}-k\vec{b}$에 대하여

$$\vec{p}+\vec{q}=(2\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-2\vec{b})$$
$$=3\vec{a}-\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\vec{q}-\vec{r}=(\vec{a}-2\vec{b})-(10\vec{a}-k\vec{b})$$
$$=-9\vec{a}+(k-2)\vec{b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때, 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$와 $\vec{q}-\vec{r}$가 서로 평행하기 위해서는 $\vec{q}-\vec{r}=t(\vec{p}+\vec{q})$를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재해야 한다.

㉠, ㉡을 $\vec{q}-\vec{r}=t(\vec{p}+\vec{q})$에 대입하면

$$-9\vec{a}+(k-2)\vec{b}=t(3\vec{a}-\vec{b})$$
$$=3t\vec{a}-t\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$-9=3t,\ k-2=-t$$

따라서 $t=-3$이므로

$$k-2=3 \qquad \therefore k=5$$ 답 5

08 $\overrightarrow{OA}=-3\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=(m+1)\vec{a}+6\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=n\vec{a}+\vec{b}$에 대하여 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\ (\text{단, } k\neq 0) \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(m+1)\vec{a}+6\vec{b}-(-3\vec{a}-\vec{b})$$
$$=(m+4)\vec{a}+7\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$$
$$=n\vec{a}+\vec{b}-(-3\vec{a}-\vec{b})$$
$$=(n+3)\vec{a}+2\vec{b}$$

이므로 ㉠에 대입하면

$$(m+4)\vec{a}+7\vec{b}=k\{(n+3)\vec{a}+2\vec{b}\}$$
$$=k(n+3)\vec{a}+2k\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$m+4=k(n+3),\ 7=2k$$

따라서 $k=\frac{7}{2}$이므로

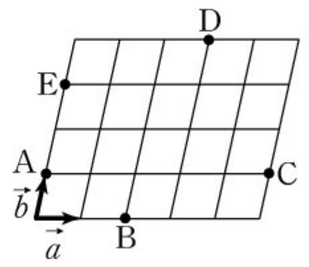
$$m+4=\frac{7}{2}(n+3),\ 2m+8=7n+21$$

$$\therefore 2m-7n=13$$ 답 13

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 38~41

01 12	02 ②	03 ⑤	04 8	05 ③
06 ③	07 15	08 28	09 ④	10 ④
11 60	12 ③	13 ②	14 6	15 ③
16 ①	17 ⑤	18 6	19 8	20 21π
21 ③	22 $7\sqrt{3}$	23 ①	24 6	25 3

01 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 정하면

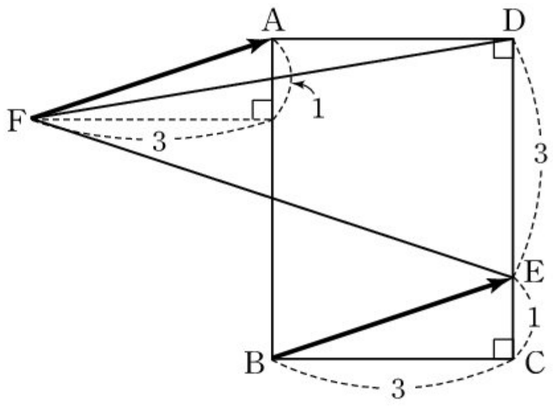


$$\overrightarrow{AD}=3\vec{a}+3\vec{b},$$
$$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b},$$
$$\overrightarrow{CE}=-5\vec{a}+2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CE}$$에서
$$3\vec{a}+3\vec{b}=m(2\vec{a}-\vec{b})+n(-5\vec{a}+2\vec{b})$$
$$3\vec{a}+3\vec{b}=(2m-5n)\vec{a}+(-m+2n)\vec{b}$$
$$\therefore 2m-5n=3,\ -m+2n=3$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m=-21,\ n=-9$$
$$\therefore n-m=-9-(-21)=12$$ 답 12

02



벡터 $\overrightarrow{BE}$의 종점을 점 A로 옮길 때의 시점이 F이므로 조건을 만족시키는 도형은 위의 그림과 같다.

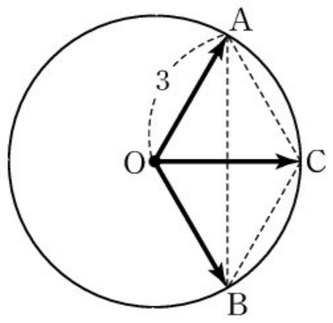
$\therefore \triangle EDF=\frac{1}{2}\times\overline{ED}\times 2\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times(2\times 3)=9$ 답 ②

03

세 점 A, B, C가 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있으므로

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=3$



이때, 점 C가 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$를 만족시키므로 오른쪽 그림과 같이 □AOBC는 평행사변형이어야 한다.

$\therefore |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OA}|=3,\ |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OB}|=3$

즉, 두 삼각형 AOC, BOC는 각각 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$\angle AOB=2\angle AOC$

$=2\times 60^\circ=120^\circ$

따라서 호 AB의 길이는

$2\pi\times 3\times\frac{120}{360}=2\pi$ 답 ⑤

04

정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라 하면

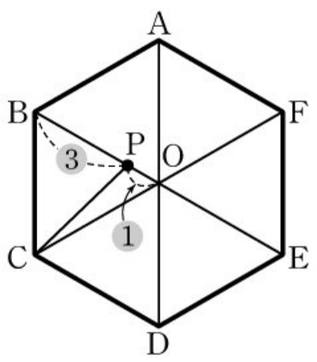
$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$에서

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CO}$

$4\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}\ (\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0},\ \overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OC})$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

즉, 점 P는 선분 OB를 1 : 3으로 내분한다. ……㉠



㉠에서

$\triangle PBC : \triangle OBC=\overline{PB} : \overline{OB}$

$=3 : 4$

$\therefore \triangle OBC=\frac{4}{3}\triangle PBC=\frac{4}{3}\ (\because \triangle PBC=1)$

따라서 정육각형 ABCDEF의 넓이는

$6\times\triangle OBC=6\times\frac{4}{3}=8$ 답 8

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 벡터를 변형하여 점 P의 위치를 파악한 경우	50%
(나)	삼각형 PBC의 넓이가 1임을 이용하여 삼각형 OBC의 넓이를 구한 경우	30%
(다)	정육각형 ABCDEF의 넓이를 구한 경우	20%

• 다른풀이 •

정육각형 ABCDEF의 세 대각선의 교점을 O라 하면

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$에서

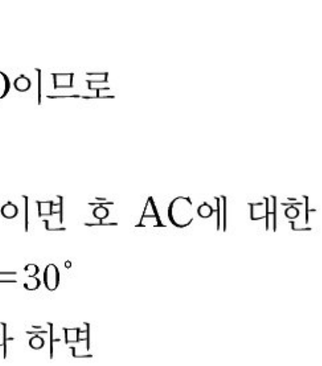
$4\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{OF}$

$4\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OF}$

$(\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0})$

$4\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OE}$ $\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EO}$

즉, 점 P는 선분 EO를 5 : 1로 외분하는 점이다.



정육각형의 넓이를 S라 하면

$\triangle OBC=\frac{1}{6}S$이므로

$\triangle PBC=\frac{3}{4}\triangle OBC$

$=\frac{1}{8}S$

이때, 삼각형 PBC의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{8}S=1$ $\therefore S=8$

05

반원의 호 AB를 삼등분한 점이 C, D이므로

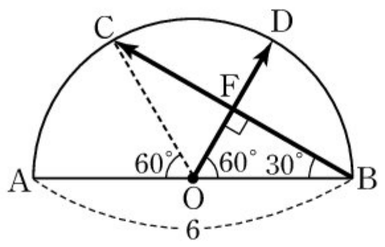
$\angle AOC=\angle COD=\angle DOB=60^\circ$

호 AC에 대한 중심각의 크기가 60°이면 호 AC에 대한 원주각의 크기는 30°이므로 $\angle ABC=30^\circ$

이때, 두 선분 OD, BC의 교점을 F라 하면

$\angle OFB=90^\circ$

이므로 선분 OF는 현 BC의 수직이등분선이다.

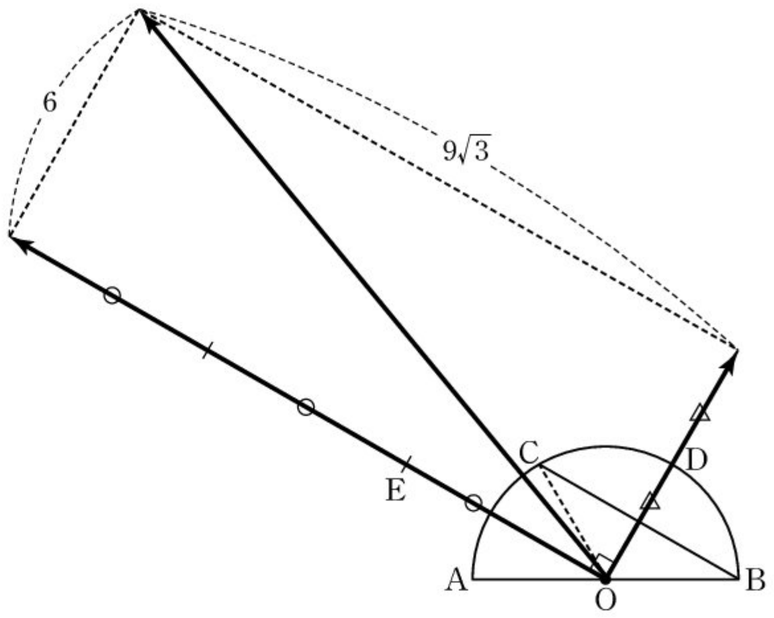


$\overline{OB}=3$이므로 직각삼각형 OBF에서

$\overline{FB}=3\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{FB}=3\sqrt{3}$

벡터 $\overrightarrow{BC}$의 시점을 점 O로 옮길 때의 종점을 E라 하면
$\angle OFB=90^\circ$이므로 $\angle EOD=90^\circ$ (엇각)



따라서 $|2\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{BC}|$의 값은 위의 그림에서 이웃하는 두 변의 길이가 각각 $9\sqrt{3}$, 6인 직사각형의 대각선의 길이와 같으므로

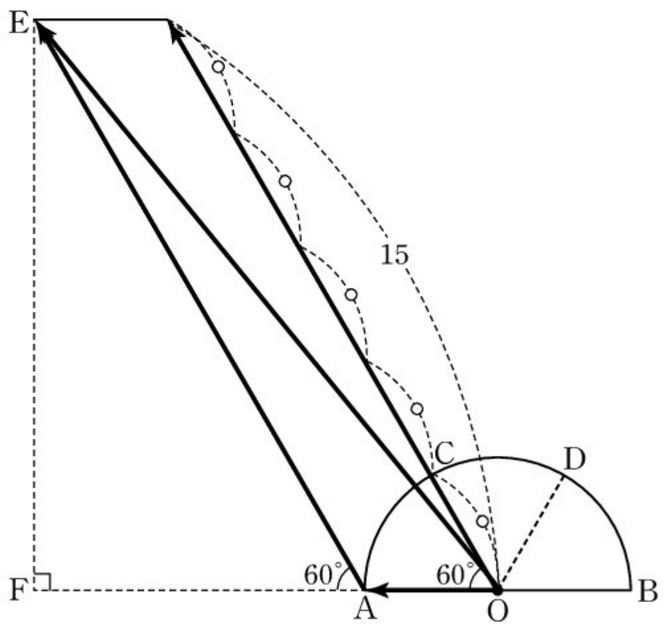
$\sqrt{(9\sqrt{3})^2+6^2}=\sqrt{279}=3\sqrt{31}$ 답 ③

• 다른풀이 •

$\overline{AB}=6$에서 주어진 반원의 반지름의 길이는 3이므로
$\overline{OA}=\overline{OC}=3$ ……㉠
두 점 C, D는 반원의 호 AB를 삼등분하므로
$\angle AOC=\angle COD=\angle DOB=60^\circ$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$이고, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$이므로

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{BC}&=2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=5\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\\&=5\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

다음 그림과 같이 벡터 $5\overrightarrow{OC}$의 시점을 점 A로 옮길 때의 종점을 E라 하면
$5\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}$



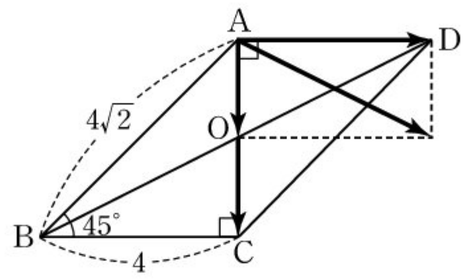
이때, 점 E에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면
$\overline{AE}=15$, $\angle EAF=60^\circ$이므로 $\triangle AEF$에서

$\overline{AF}=15\times\cos 60^\circ=\frac{15}{2}$,

$\overline{EF}=15\times\sin 60^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ |2\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{BC}|&=|\overrightarrow{OE}|\\&=\sqrt{\overline{OF}^2+\overline{EF}^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{279}=3\sqrt{31}\end{aligned}$$

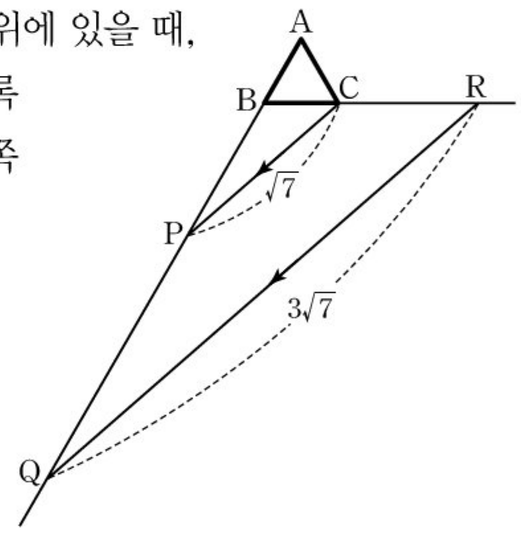
06 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4$, $\angle ABC=45^\circ$에서
$\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=4$
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$에서
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$
$\therefore\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
즉, □ABCD는 평행사변형이다.
$\therefore\ \overline{AD}=\overline{BC}=4$
또한, 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로
$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|=2$



$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}|&=|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}|\\&=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}\end{aligned}$$ 답 ③

07 조건 (가)의 $|\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$에서 $|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{7}$
조건 (나)의 $\overrightarrow{BR}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{BR}=3\overrightarrow{BC}$
조건 (다)의 $3(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BR}$에서 $3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{RQ}$
$\therefore\ \overline{BR}=3$, $\overline{RQ}=3\sqrt{7}$
정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 1이고, $|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{7}>1$
이므로 점 P는 선분 AB의 연장선 위에 있다.

(i) 점 P가 반직선 AB 위에 있을 때,
조건을 만족시키도록 도형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



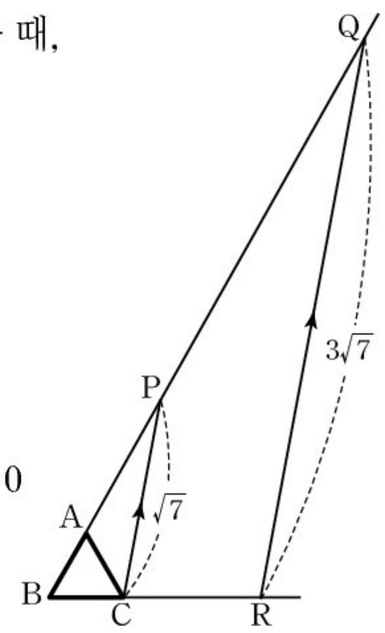
$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$에서
$\angle RBQ=\frac{2}{3}\pi$
$\overline{BQ}=x$라 하면
$\triangle BQR$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{x^2+3^2-(3\sqrt{7})^2}{2\times x\times 3}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{x^2-54}{6x},\ x^2+3x-54=0$$

$(x+9)(x-6)=0$ $\therefore\ x=6\ (\because\ x>0)$
$\therefore\ |\overrightarrow{BQ}|=6$

(ii) 점 P가 반직선 BA 위에 있을 때,
조건을 만족시키도록 도형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.
$\overline{BQ}=x$라 하면 $\triangle BRQ$에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{x^2+3^2-(3\sqrt{7})^2}{2\times x\times 3}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{x^2-54}{6x},\ x^2-3x-54=0$$

$(x+6)(x-9)=0$
$\therefore\ x=9\ (\because\ x>0)$
$\therefore\ |\overrightarrow{BQ}|=9$

(i), (ii)에서 모든 $|\overrightarrow{BQ}|$의 값의 합은

$6+9=15$ 답 15

blacklabel 특강 필수 개념

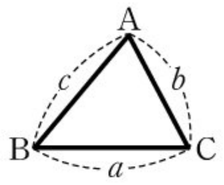
코사인법칙

△ABC에서

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



08 $\left(\frac{1}{2}+t\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2}+t\right)\overrightarrow{AD}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{AP}$

에서

$\left(\frac{1}{2}+t\right)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\left(\frac{1}{2}-t\right)(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$

$\left(\frac{1}{2}+t\right)\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{CP}=\frac{\frac{1}{2}+t}{\frac{1}{2}-t}\overrightarrow{DB}=\frac{1+2t}{1-2t}\overrightarrow{DB}$

$\therefore |\overrightarrow{CP}|=\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right||\overrightarrow{DB}|$

이때,

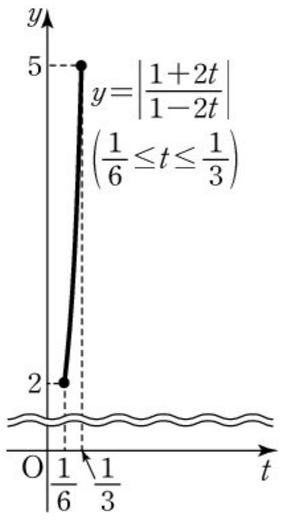
$\frac{1+2t}{1-2t}=\frac{2-(1-2t)}{1-2t}=\frac{2}{1-2t}-1$

에서 함수 $y=\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|\left(\frac{1}{6}\le t\le\frac{1}{3}\right)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$2\le\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|\le 5$

$\therefore 8\le|\overrightarrow{CP}|\le 20\ (\because |\overrightarrow{BD}|=4)$



따라서 $|\overrightarrow{CP}|$의 최댓값은 20, 최솟값은 8이므로 그 합은

$20+8=28$ 답 28

09 선분 BC의 중점을 D라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

이므로 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=12$에서

$|2\overrightarrow{AD}|=12 \quad \therefore |\overrightarrow{AD}|=6$

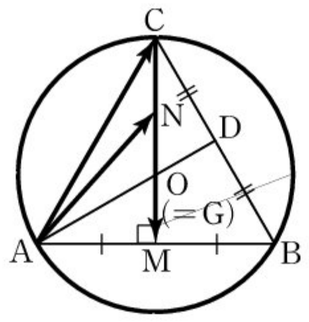
두 선분 AD, CM은 삼각형 ABC의 중선이므로 두 선분의 교점을 G라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$이고, $\overline{AD}=6$이므로

$\overline{AG}=4$, $\overline{GD}=2$

그런데 주어진 원의 반지름의 길이가 4이므로 점 G는 원의 중심 O와 같다.

즉, 삼각형 ABC의 무게중심과 외접원의 중심이 서로 같으므로 △ABC는 정삼각형이다.



점 O가 선분 CM을 2 : 1로 내분하므로 선분 OC의 중점을 N이라 하면 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{OM}$

$\therefore \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}$

$\overline{OA}=4$, $\overline{OM}=\overline{GD}=2$이므로 직각삼각형 OAM에서

$\overline{AM}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\overline{NM}=4$이므로 직각삼각형 AMN에서

$\overline{AN}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$

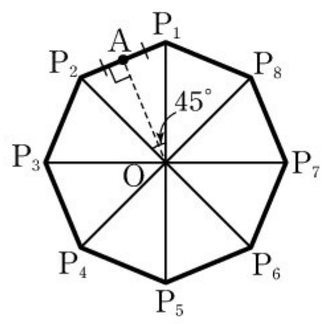
$\therefore |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{AN}|=2\sqrt{7}$ 답 ④

10 정팔각형의 네 대각선의 교점을 O라 하면

$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_8}=\vec{0}$이므로

$(\overrightarrow{AP_1}-\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AP_2}-\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AP_3}-\overrightarrow{AO})+\cdots+(\overrightarrow{AP_8}-\overrightarrow{AO})=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_8}=8\overrightarrow{AO}$ ……㉠



△OP_1P_2가 이등변삼각형이고, 변 P_1P_2의 중점이 A이므로 선분 OA는 변 P_1P_2를 수직이등분한다.

$\angle P_2OP_1=45^\circ$, $\overline{P_1P_2}=4$이므로 $\overline{OP_1}=x$라 하면

△OP_1P_2의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{OP_1}\times\overline{OP_2}\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times\overline{P_1P_2}\times\overline{OA}$

$\frac{1}{2}\times x\times x\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{OA}$

$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2=2\overline{OA} \quad \therefore x^2=4\sqrt{2}\,\overline{OA}$ ……㉡

직각삼각형 OAP_1에서

$x^2=\overline{OA}^2+2^2$

$4\sqrt{2}\,\overline{OA}=\overline{OA}^2+4\ (\because$ ㉡)

$\overline{OA}^2-4\sqrt{2}\,\overline{OA}+4=0$

$\therefore \overline{OA}=2\sqrt{2}\pm\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1\times 4}$

$=2\sqrt{2}\pm 2$

그런데 $\overline{OA}>\overline{AP_1}$이므로 $\overline{OA}=2\sqrt{2}+2$

따라서 ㉠에서

$|\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_3}+\cdots+\overrightarrow{AP_8}|=|8\overrightarrow{AO}|=8|\overrightarrow{AO}|$

$=8(2\sqrt{2}+2)$

$=16\sqrt{2}+16$ 답 ④

• 다른풀이 •

정팔각형의 네 대각선의 교점을 O, 두 직선 P_1P_8, P_2P_3의 교점을 G라 하자.

주어진 도형이 정팔각형이므로

$\angle P_1P_2P_3=\angle P_2P_1P_8=135^\circ$

$\therefore \angle GP_2P_1=\angle GP_1P_2=45^\circ$

즉, $\triangle GP_2P_1$은 직각이등변삼각형이다.

이때, $\overline{P_1P_2}=4$이므로 $\overline{GP_1}=\overline{GP_2}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

점 O에서 두 변 P_1P_8, P_2P_3에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 $\overline{OH_1}=\overline{OH_2}$이므로

$\square OH_1GH_2$는 정사각형이다.

또한, 이등변삼각형 OP_8P_1에서 점 H_1은 변 P_1P_8의 중점이므로

$\overline{P_1H_1}=2$

$\therefore \overline{GH_1}=2\sqrt{2}+2$

따라서 $\overline{OH_1}=\overline{GH_1}=2\sqrt{2}+2$이므로

$\overline{OA}=\overline{OH_1}=2\sqrt{2}+2$

11 해결단계

❶ 단계	$\square AFQP$가 평행사변형임을 파악한 후, 조건 (가), $\lvert\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FQ}\rvert=10$을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구한다.
❷ 단계	타원의 나머지 초점 F′에 대하여 $\lvert\overrightarrow{F'P}\rvert$의 값을 구한 후, $\triangle PAM$, $\triangle PMF$에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\lvert\overrightarrow{AF}\rvert$의 값을 구한다.
❸ 단계	a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

타원의 장축 위의 나머지 꼭짓점을 B라 하고, 타원의 중심을 O, 타원의 나머지 한 초점을 F′이라 하자.

조건 (나)에서 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{FQ}$이므로 $\square AFQP$는 평행사변형이다. ……㉠

즉, $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{FP}$이므로 $\lvert\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FQ}\rvert=10$에서

$\lvert\overrightarrow{FP}\rvert=10$

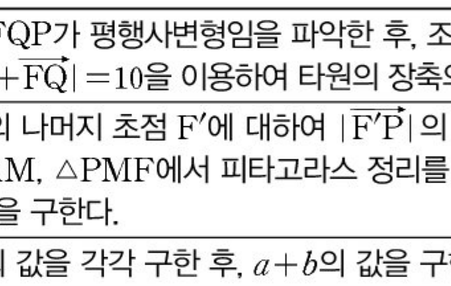
조건 (가)에서 $\lvert\overrightarrow{AP}\rvert=2$이므로 $\lvert\overrightarrow{FQ}\rvert=2$ ($\because$ ㉠)

이때, 타원은 타원의 단축에 대하여 대칭이므로

$\lvert\overrightarrow{F'P}\rvert=\lvert\overrightarrow{BQ}\rvert=2$

즉, 타원의 장축의 길이는

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10+2=12$ $\quad\therefore k=12$



한편, $\triangle PAF'$은 $\overline{PA}=\overline{PF'}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 AF′에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 선분 AF′의 중점이다.

이때, $\overline{AM}=p$, $\overline{PM}=q$라 하면

직각삼각형 PAM에서 $2^2=p^2+q^2$ ……㉡

$\overline{AF'}=2p$이고 타원의 장축의 길이가 12이면 $\overline{OA}=6$이므로

$\overline{OF}=\overline{OF'}=6-2p$

$\therefore \overline{FM}=2(6-2p)+p=12-3p$

직각삼각형 PMF에서

$10^2=(12-3p)^2+q^2$ ……㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$8p^2-72p+48=0$, $p^2-9p+6=0$

$\therefore p=\frac{9-\sqrt{57}}{2}$ ($\because 0<p<6$)

$\therefore \lvert\overrightarrow{AF}\rvert=12-2p=12-(9-\sqrt{57})$

$=3+\sqrt{57}$

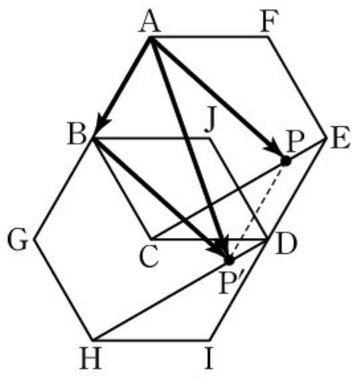
따라서 $a=3$, $b=57$이므로

$a+b=3+57=60$ 답 60

12

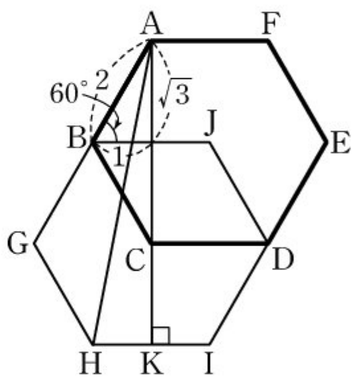
오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF와 합동인 정육각형 BGHIDJ를 그리고 벡터 $\overrightarrow{AP}$의 시점을 점 B로 옮길 때의 종점을 P′이라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP'}=\overrightarrow{AP'}$



이때, 점 P′이 선분 HD 위를 움직이므로 $\lvert\overrightarrow{AP'}\rvert$의 값은 점 P′이 점 H에 위치할 때 최대이다.

꼭짓점 A에서 변 HI에 내린 수선의 발을 K라 하면 정육각형 ABCDEF의 한 변의 길이가 2이므로



$\overline{AK}=3\sqrt{3}$, $\overline{HK}=1$

직각삼각형 AHK에서

$\overline{AH}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$

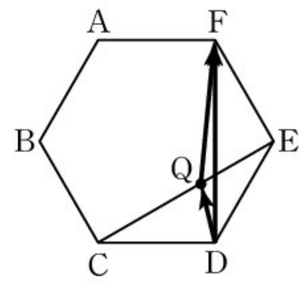
즉,

$\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\rvert=\lvert\overrightarrow{AP'}\rvert$

$\le\lvert\overrightarrow{AH}\rvert=2\sqrt{7}$

이므로 $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\rvert$의 최댓값은 $2\sqrt{7}$이다.

한편, $\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{QF}$이고 점 Q가 선분 CE 위를 움직이므로 $\lvert\overrightarrow{QF}\rvert$의 값은 점 Q가 점 E에 위치할 때 최소이다.



즉,

$\lvert\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DQ}\rvert=\lvert\overrightarrow{QF}\rvert$

$\ge\lvert\overrightarrow{EF}\rvert=2$

이므로 $\lvert\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DQ}\rvert$의 최솟값은 2이다.

따라서 $\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\rvert$의 최댓값과 $\lvert\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DQ}\rvert$의 최솟값의 합은 $2+2\sqrt{7}$이다. 답 ③

• 다른풀이 •

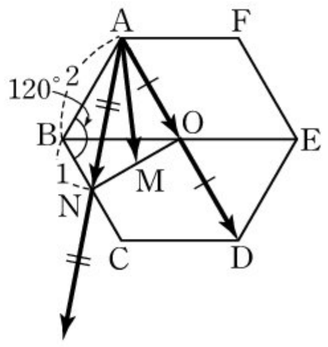
선분 BP의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$

두 선분 BC, BE의 중점을 각각 N, O라 하면 점 M은 선분 NO 위를 움직인다.

이때, $|\overrightarrow{AM}|$의 값은 점 M이 점 N의 위치에 있을 때 최대이므로

$\overline{AN}=x$라 하면 $\triangle ABN$에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos 120^\circ=\frac{1^2+2^2-x^2}{2\times1\times2}$$

$$-\frac{1}{2}=\frac{5-x^2}{4},\ x^2=7 \qquad \therefore\ x=\sqrt{7}\ (\because\ x>0)$$

따라서 $|\overrightarrow{AM}|$의 최댓값이 $\sqrt{7}$이므로 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}|$의 최댓값은 $2\sqrt{7}$이다.

13 삼각형 ABD에서 두 변 AB, AD의 중점이 각각 E, G이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$$\overline{EG}/\!/\overline{BD},\ \overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{BD}$$

이때, 점 H는 선분 BD의 중점이므로

$$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH} \qquad \therefore\ \overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}$$

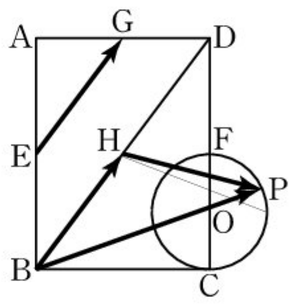
$$\therefore\ \overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{BP}$$

즉, $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{BP}|$의 최댓값과 같다.

선분 CF를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하면

$$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}|$$
$$\le|\overrightarrow{BO}|+|\overrightarrow{OP}|$$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OP}$가 같은 방향일 때, 즉 직선 BP가 점 O를 지날 때 $|\overrightarrow{BP}|$의 값이 최대이다.



중심이 O인 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{4}\times8=2$$

이므로 직각삼각형 OBC에서

$$\overline{BO}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$$

즉,

$$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|$$
$$\le|\overrightarrow{BO}|+|\overrightarrow{OP}|$$
$$=2\sqrt{10}+2$$

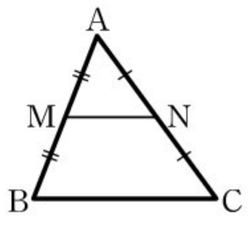
이므로 $|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$의 최댓값은 $2\sqrt{10}+2$이다. 답 ②

blacklabel 특강 필수 개념

삼각형의 중점연결정리

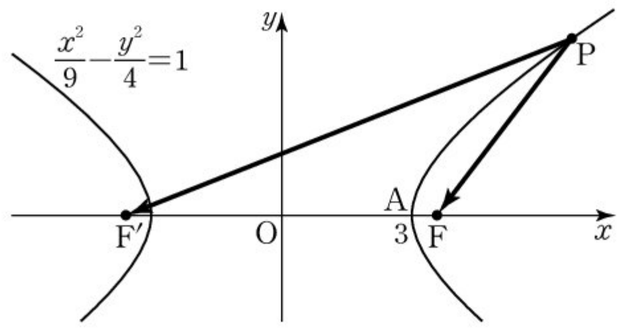
삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{BC}/\!/\overline{MN},\ \overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$$



14 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점이 F, F′이므로

$$\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF'}$$
$$=2\overrightarrow{PO}\ (\because\ \overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OF'})$$



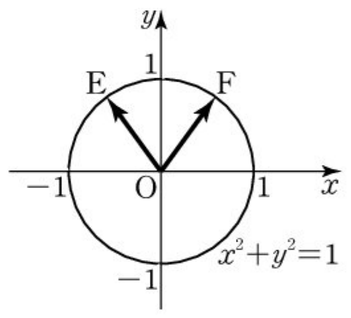
이때, $|\overrightarrow{PO}|$의 값은 점 P가 쌍곡선의 꼭짓점에 위치할 때 최소이므로 쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하면

$$|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|=|2\overrightarrow{PO}|=2|\overrightarrow{PO}|$$
$$\ge2|\overrightarrow{OA}|$$
$$=2\times3=6$$

따라서 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최솟값은 6이다. 답 6

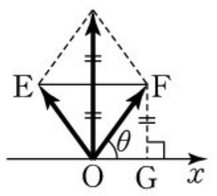
15 $\overrightarrow{OX}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$, $\overrightarrow{OY}=\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$는 각각 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$와 방향이 같고 크기가 1인 단위벡터이다.

두 점 P, Q가 사각형 ABCD의 각 변 또는 그 내부에서 움직이므로 두 선분 OB, OD가 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 E, F라 할 때, 두 점 X, Y는 호 EF 위를 움직인다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$의 크기가 각각 1로 같으므로 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$가 이루는 각의 크기가 최대일 때, 벡터 $|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}|$의 값이 최소이다.

즉, 두 점 X, Y가 각각 두 점 E, F에 위치할 때이므로 점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 G라 하고 $\angle FOG=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{4}{3}$, $\overline{OF}=1$에서



직선 OD의 기울기

$$\overline{OG}=\frac{3}{5},\ \overline{FG}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}|\ge|\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}|$$
$$=2\overline{FG}$$
$$=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

또한, 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$의 방향이 서로 같을 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$의 크기가 최대이므로

$$|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}|\le|\overrightarrow{OX}|+|\overrightarrow{OY}|=2$$

따라서 $|\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}|$, 즉 $\left|\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}+\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}\right|$의 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{8}{5}$이므로 그 곱은

$$2\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$$

답 ③

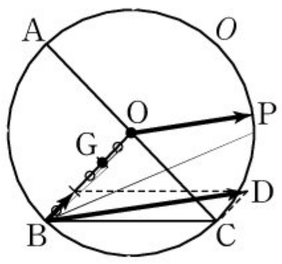
16 △ABC가 직각이등변삼각형이므로 빗변 AC는 외접원 O의 지름이다.

빗변 AC의 중점을 O라 하면 무게중심 G는 선분 BO를 2 : 1로 내분하므로

$$\overrightarrow{GO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$$

이때, 벡터 $\frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$의 시점을 점 C로 옮길 때의 종점을 D라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OP}\\&=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OP}\\&=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OP}\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$



점 P가 삼각형 ABC의 외접원 위를 움직이므로 위의 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OP}$가 같은 방향일 때, $|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OP}|$의 값이 최대가 된다.

$\overline{AC}=6$이므로 $\overline{BC}=3\sqrt{2}$

또한, $\overline{OB}=3$이므로 (원 O의 반지름의 길이)

$$|\overrightarrow{CD}|=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right|=1$$

점 D에서 선분 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle DCH=45^\circ$이므로 직각삼각형 CHD에서

$$\overline{CH}=\overline{DH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, $\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$이므로 직각삼각형 BHD에서

$$\overline{BD}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=5$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{BC}|&=|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OP}|\\&\le|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{OP}|\\&=5+3=8\end{aligned}$$

즉, 구하는 최댓값은 8이다. 답 ①

17 ㄱ. 변 AD의 중점이 M이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PM}&=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{PM}\\&=\overrightarrow{PD}\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

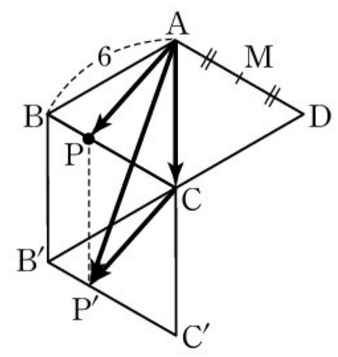
이때, $|\overrightarrow{PD}|$의 최댓값은 오른쪽 그림과 같이 점 P가 점 B에 위치할 때 최대이고, 마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 N이라 하면 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PD}|&\le|\overrightarrow{BD}|\\&=2|\overrightarrow{BN}|\\&=2\times\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서 $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PM}|$의 최댓값은 $6\sqrt{3}$이다. (참)

ㄴ. $$\begin{aligned}2\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{CP}&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}\\&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$



위의 그림과 같이 정삼각형 CB′C′을 세 점 A, C, C′이 한 직선 위에 오도록 그리고 벡터 $\overrightarrow{AP}$의 시점을 점 C로 옮길 때의 종점을 P′이라 하면

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CP'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP'}$$

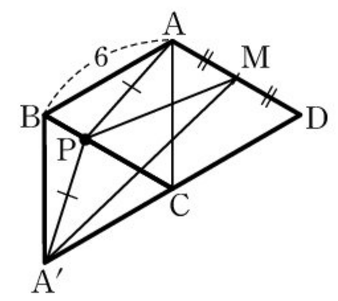
이때, $\overline{AC'}=12$, $\overline{B'C'}=6$, $\angle AC'B'=60^\circ$에서 $\triangle AB'C'$이 $\angle AB'C'=90^\circ$인 직각삼각형이고, 점 P′이 선분 B′C′ 위를 움직이므로 $|\overrightarrow{AP'}|$의 값은 점 P′이 점 B′에 위치할 때 최소이다.

$\triangle AB'C'$에서 $\overline{AB'}=6\sqrt{3}$이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}|&=|\overrightarrow{AP'}|\\&\ge|\overrightarrow{AB'}|=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 ㉡에서 $|2\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $6\sqrt{3}$이다. (참)

ㄷ.



위의 그림과 같이 정삼각형 A′CB를 정삼각형 ABC와 변 BC를 공유하도록 그리면

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{A'P}|$$

$$\begin{aligned}\therefore\ |\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{PM}|&=|\overrightarrow{A'P}|+|\overrightarrow{PM}|\\&\ge|\overrightarrow{A'M}|\quad\cdots\cdots㉢\end{aligned}$$

□ABA′C는 마름모이므로 선분 AA′은 선분 BC의 수직이등분선이다.

$$\therefore\ \overline{AA'}=\overline{BD}=6\sqrt{3}$$

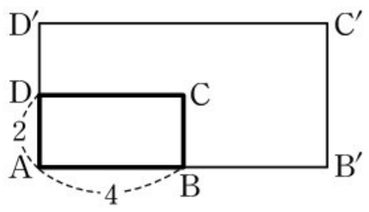
또한, $\overline{AM}=3$이므로 직각삼각형 AA′M에서

$$\overline{A'M}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+3^2}=3\sqrt{13}$$

따라서 ㉢에서 $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{PM}|$의 최솟값은 $3\sqrt{13}$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

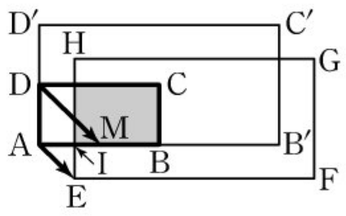
18 벡터 $2\overrightarrow{AP}$는 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 방향은 같고 크기가 2배인 벡터이므로 벡터 $2\overrightarrow{AP}$의 종점이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 가로, 세로의 길이를 각각 2배씩 늘린 직사각형 AB′C′D′이다.



또한, 벡터 $\frac{1}{2}\overrightarrow{DM}$의 시점을 점 A로 옮길 때의 종점을 E라 하면

$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AE}$

즉, 벡터 $\overrightarrow{AQ}$의 종점이 나타내는 도형은 직사각형 AB′C′D′을 벡터 $\overrightarrow{AE}$만큼 평행이동한 도형이므로 다음 그림의 직사각형 EFGH이다.



이때, 두 선분 AM, HE의 교점을 I라 하면 두 삼각형 DAM, EIA는 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 2 : 1이다.

$\overline{MA}=2$이므로 $\overline{AI}=1$

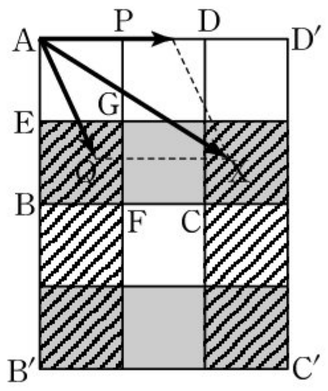
$\therefore \overline{IB}=\overline{AB}-\overline{AI}=3$

따라서 구하는 넓이는

$\overline{IB}\times\overline{BC}=3\times2=6$ 답 6

19 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$

에서 점 Q가 존재하는 영역이 정사각형 BFGE의 둘레 및 내부이므로 점 X가 존재하는 영역은 정사각형 BFGE를 벡터 $\overrightarrow{AP}$만큼 평행이동한 도형이다.



이때, 정사각형 ABCD의 가로, 세로 길이를 각각 1, 2만큼 늘린 도형을 직사각형 AB′C′D′이라 하면 점 P가 변 AD 또는 변 BC 위에 있을 때, 점 X가 존재하는 영역은 위의 그림의 어두운 부분과 같다.

같은 방법으로 점 P가 변 AB 또는 변 CD 위에 있을 때, 점 X가 존재하는 영역은 위의 그림의 빗금 친 부분과 같다.

따라서 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$3^2-1^2=8$ 답 8

20 $-t\overrightarrow{AR}+t\overrightarrow{AP}+(t^2+1)\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$에서

$t(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP})=(t^2+1)\overrightarrow{AQ}$

$t\overrightarrow{PR}=(t^2+1)\overrightarrow{AQ}$

$t>0$이므로 위의 식의 양변을 t로 나누면

$\overrightarrow{PR}=\frac{t^2+1}{t}\overrightarrow{AQ}$

$=\left(t+\frac{1}{t}\right)\overrightarrow{AQ}$

이때, $t>0$, $\frac{1}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\frac{1}{t}\geq2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$ (단, 등호는 $t=1$일 때 성립)

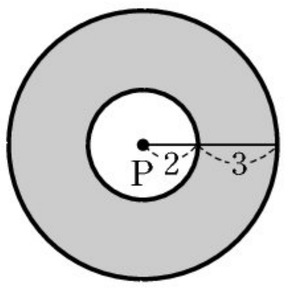
$\therefore |\overrightarrow{PR}|=\left|\left(t+\frac{1}{t}\right)\overrightarrow{AQ}\right|$

$\geq2|\overrightarrow{AQ}|=2$ ($\because$ $\overline{AQ}=1$)

또한, $|\overrightarrow{PR}|\leq5$이므로

$2\leq|\overrightarrow{PR}|\leq5$

따라서 점 R가 존재하는 영역은 오른쪽 그림과 같이 중심이 점 P이고 반지름의 길이가 2인 원의 둘레 및 그 외부와 중심이 점 P이고 반지름의 길이가 5인 원의 둘레 및 그 내부의 공통 부분이므로 구하는 넓이는



$\pi\times5^2-\pi\times2^2=21\pi$ 답 21π

21 해결단계

❶ 단계	점 P가 선분 OM 위를 움직일 때, 점 R가 나타내는 영역을 파악한다.
❷ 단계	점 P가 선분 BM 위를 움직일 때, 점 R가 나타내는 영역을 파악한다.
❸ 단계	❶, ❷단계에서 구한 영역과 도형의 합동을 이용하여 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이를 구한다.

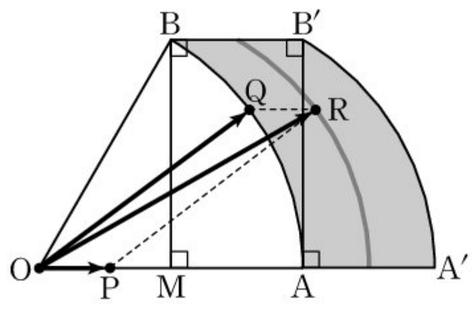
삼각형 OMB에서 $\overline{OM}=1$, $\angle BOM=60°$이므로

$\overline{OM}\perp\overline{BM}$, $\overline{BM}=\sqrt{3}$

이때, 점 P가 선분 OM 위를 움직일 때와 선분 BM 위를 움직일 때로 나누어서 생각해 보면 다음과 같다.

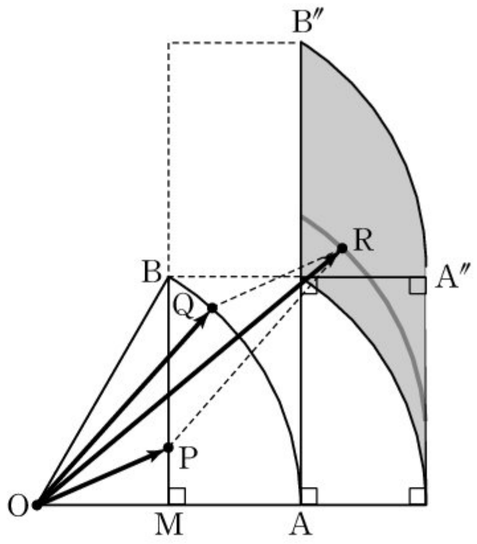
(i) 점 P가 선분 OM 위를 움직일 때,

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R에 대하여 점 P가 점 M에 위치하고 점 Q가 두 점 A, B에 위치할 때의 점 R의 위치를 각각 A′, B′이라 하면 점 R가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.

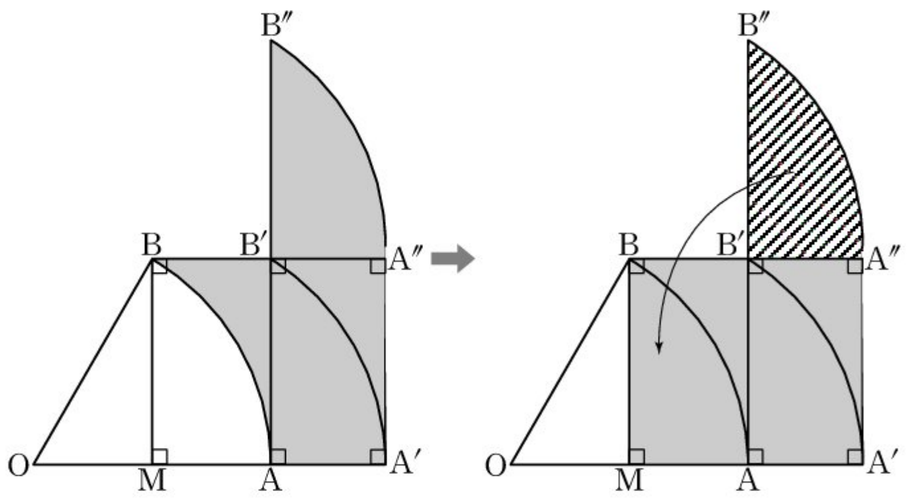


(ii) 점 P가 선분 BM 위를 움직일 때,

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R에 대하여 점 P가 점 B에 위치하고 점 Q가 두 점 A, B에 위치할 때의 점 R의 위치를 각각 A″, B″이라 하면 점 R가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



(i), (ii)에서 점 R가 나타내는 영역은 [그림 1]의 어두운 부분과 같고, [그림 2]와 같이 빗금 친 부분을 이동시키면 구하는 넓이는 직사각형 BMA′A″의 넓이와 같다.

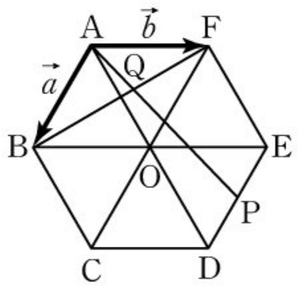


[그림 1] [그림 2]

따라서 구하는 넓이는

$\overline{A'M}\times\overline{BM}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 답 ③

22 정육각형의 세 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$라 하면



$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

세 점 B, Q, F가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BF}=k(\vec{b}-\vec{a})$

$=k\vec{b}-k\vec{a}$ (단, $k\neq0$)

$\therefore \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$

$=\vec{a}+(k\vec{b}-k\vec{a})$

$=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ ……㉠

한편, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$=2\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\times(-\vec{a})$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

세 점 A, Q, P가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AP}=l\left(\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)$

$=\frac{3}{2}l\vec{a}+2l\vec{b}$ (단, $l\neq0$) ……㉡

㉠, ㉡에서 $(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=\frac{3}{2}l\vec{a}+2l\vec{b}$

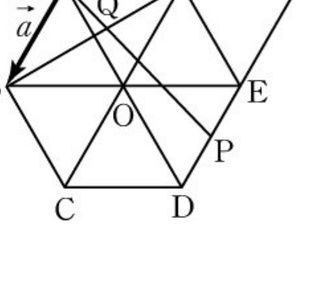
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행하지 않으므로

$1-k=\frac{3}{2}l$, $k=2l$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=\frac{4}{7}$, $l=\frac{2}{7}$

두 선분 AD와 BF가 수직이므로 교점을 G라 하면 $\overline{AB}=7$, $\angle ABG=30^\circ$이므로 직사각형 ABG에서



$\overline{AG}=\frac{7}{2}$, $\overline{BG}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{BF}=2\overline{BG}=7\sqrt{3}$

이때, $\overrightarrow{BQ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BF}$이므로

$|\overrightarrow{BQ}|=\frac{4}{7}|\overrightarrow{BF}|=\frac{4}{7}\times7\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BQ}\times\overline{AG}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\frac{7}{2}=7\sqrt{3}$ 답 $7\sqrt{3}$

• 다른풀이 •

정육각형의 세 대각선의 교점을 O, 두 직선 AF, DE의 교점을 G라 하고, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$라 하자.

△FEG는 한 변의 길이가 7인 정삼각형이므로

$\overrightarrow{FG}=\vec{b}$, $\overrightarrow{GE}=\vec{a}$

점 P는 선분 DE의 중점이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}=2\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{a}$

세 점 A, Q, P가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)$

$=\frac{3}{2}k\vec{a}+2k\vec{b}$ (단, $k\neq0$)

이때, 점 Q가 선분 BF 위에 있으므로

$\frac{3}{2}k+2k=1$, $\frac{7}{2}k=1$ $\therefore k=\frac{2}{7}$

즉, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AF}$이므로 점 Q는 선분 BF를 4 : 3으로 내분한다.

$\therefore$ △ABQ$=\frac{4}{7}$△ABF

$=\frac{4}{7}\times\left(\frac{1}{2}\times7\times7\times\sin(180^\circ-120^\circ)\right)$

$=\frac{4}{7}\times\frac{49\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3}$

23 $\overrightarrow{AP}=t(\vec{c}-\vec{b}-\vec{a})$

$=t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=t(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO})$

$=t(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CY}+\overrightarrow{AO})$

$=t(\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{AO})$

$=t\overrightarrow{AY}$

따라서 세 점 A, P, Y는 한 직선 위에 있으므로 점 P가 나타내는 도형은 직선 AY이다. 답 ①

24 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라 하자.

변 AD를 2 : 1로 내분하는 점이 N이므로

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$$
$$=\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$
$$=-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

세 점 B, P, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}=k\vec{b}$ (단, $k\neq0$)

라 하면

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=\vec{b}-k\vec{b}=(1-k)\vec{b}$

변 AB의 중점이 M이므로

$$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\left(-k\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\{(1-k)\vec{b}-\vec{a}\}$$
$$=-\frac{3}{2}\vec{a}+(1-2k)\vec{b}$$

벡터 $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PD}$와 벡터 $\overrightarrow{CN}$이 서로 평행하므로

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PD}=l\overrightarrow{CN}$ (단, $l\neq0$)

에서

$$-\frac{3}{2}\vec{a}+(1-2k)\vec{b}=l\left(-\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=-l\vec{a}-\frac{1}{3}l\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않으므로

$-\frac{3}{2}=-l$, $1-2k=-\frac{1}{3}l$

$\therefore l=\frac{3}{2}$, $k=\frac{3}{4}$

즉, $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$에서 점 P는 변 BC를 3 : 1로 내분하므로 선분 PC의 길이는

$\overline{PC}=8\times\frac{1}{4}=2$

따라서 삼각형 PCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times6=6$ 답 6

25 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$에서

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$

$\therefore \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CP}$ ……㉠

$\therefore \overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CP}$

또한, 원주각의 성질에 의하여

$\angle APB=\angle ACB$, $\angle BAP=\angle BCP$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CP}$이므로

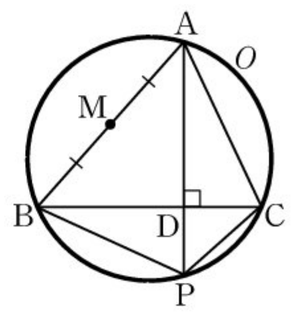
$\angle BAP=\angle APC$

즉, $\angle ACP=\angle BPC$이므로 □ABPC는 등변사다리꼴이다.

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 서로 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BC}=3$

또한, 두 선분 AP, BC의 교점을 D라 하면



$\angle ABD=\angle PCD$ (엇각)

$\angle ADB=\angle PDC=90^\circ$이므로

$\triangle ABD\backsim\triangle PCD$ (AA 닮음)

이때, ㉠에서 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CP}$이므로 두 삼각형 ABD, PCD의 닮음비는 2 : 1이다.

즉, 점 D는 선분 AP를 2 : 1로 내분하므로

$\overline{AD}=\frac{2}{3}\overline{AP}=\frac{2}{3}\times3=2$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$ 답 3

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 42

01 73 **02** 4 **03** 48 **04** 53 **05** 28 **06** $\frac{32}{5}$

01 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CF}=k\vec{b}$라 하고, 두 벡터 $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타낸다.
❷ 단계	세 점 B, E, F가 한 직선 위에 있음을 이용하여 k의 값을 구한다.
❸ 단계	△ADF에서 코사인법칙을 이용하여 선분 DF의 길이를 구한 후, $\lvert\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EF}\rvert^2$의 값을 구한다.

$\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FD}$ ……㉠

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하자.

점 D가 변 AB를 3 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$

이때, 점 E가 선분 DC를 1 : 2로 내분하므로

$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$

$$=(\vec{b}-\vec{a})+\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$ ……㉡

점 F가 선분 AC 위에 있으므로

$\overrightarrow{CF}=k\vec{b}$ (단, $k\neq0$)

라 하면

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=(\vec{b}-\vec{a})+k\vec{b}$

$=-\vec{a}+(k+1)\vec{b}$ ……㉢

세 점 B, E, F가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{BE}=l\overrightarrow{BF}$ (단, $l\neq0$)

라 하면 ㉡, ㉢에서

$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}=l\{-\vec{a}+(k+1)\vec{b}\}$

$=-l\vec{a}+l(k+1)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

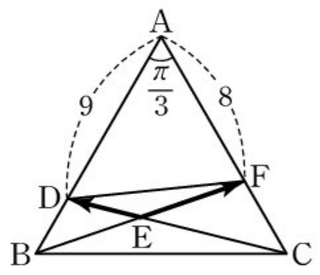
$-\frac{1}{2}=-l$, $\frac{1}{3}=l(k+1)$

$l=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(k+1)$

$k+1=\frac{2}{3}$ $\therefore k=-\frac{1}{3}$

즉, $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{3}\vec{b}$이므로 점 F는 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 12이므로



$\overline{AD}=\frac{3}{4}\overline{AB}=9$

$\overline{AF}=\frac{2}{3}\overline{AC}=8$

△ADF에서 $\angle DAF=\frac{\pi}{3}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{DF}^2=9^2+8^2-2\times9\times8\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=81+64-72=73$

따라서 ㉠에서

$|\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EF}|^2=|\overrightarrow{FD}|^2=73$ 답 73

02 해결단계

❶ 단계	두 삼각형 FPA, BPE는 닮음비가 3 : 1인 서로 닮은 도형임을 파악한다.
❷ 단계	$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$라 하고, 벡터 $\overrightarrow{CP}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 이용하여 나타낸다.
❸ 단계	m, n의 값을 각각 구한 후, $16(n-m)$의 값을 구한다.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$라 하자.

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$에서 $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}$

두 삼각형 BEP, FAP에서

$\angle BEP=\angle FAP$ (엇각),

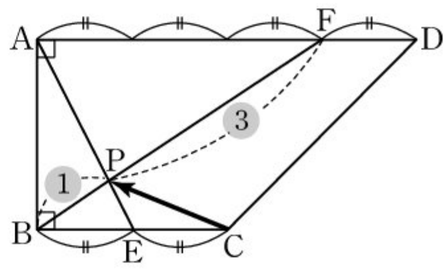
$\angle BPE=\angle FPA$ (맞꼭지각)이므로

△BEP∽△FAP (AA 닮음)

이때, 변 BC의 중점이 E이고, 변 AD를 3 : 1로 내분하는 점이 F이므로

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{AF}=\frac{3}{4}\overline{AD}=\frac{3}{4}\times2\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{BC}$

에서 $\overline{AF}=3\overline{BE}$, 즉 두 삼각형 FPA, BPE의 닮음비는 3 : 1이다.



즉, 점 P는 선분 BF를 1 : 3으로 내분하므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})$

$=\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{8}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}$

$=\left(\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)-(\vec{a}+\vec{b})$

$=-\frac{7}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

이때, $\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}=m\vec{a}+n\vec{b}$이고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 평행하지 않으므로

$m=-\frac{7}{8}$, $n=-\frac{5}{8}$

$\therefore 16(n-m)=16\left\{-\frac{5}{8}-\left(-\frac{7}{8}\right)\right\}$

$=16\times\frac{1}{4}=4$ 답 4

• 다른풀이 1 •

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$라 하자.

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$이므로 $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

한편, 점 E가 변 BC의 중점이므로

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

$=\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AD}$이고 점 F가 변 AD를 3 : 1로 내분하므로

$\overline{AF}=\frac{3}{2}\overline{BC}=\frac{3}{2}\times2\overline{BE}=3\overline{BE}$

즉, 두 삼각형 PBE, PFA는 닮음비가 1 : 3인 서로 닮은 도형이므로 $\overline{AP}=3\overline{PE}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=\frac{9}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$

$=\left(\frac{9}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}\right)-(2\vec{a}+\vec{b})$

$=-\frac{7}{8}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

• 다른풀이 2 •

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overline{AD}=2\overline{BC}$이므로 $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$

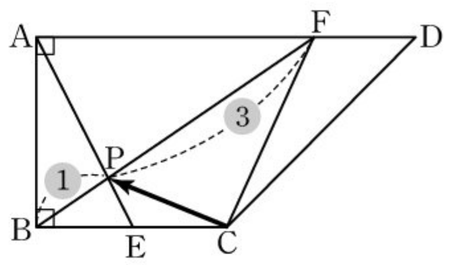
점 F가 선분 AD를 3 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{FD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{b}$ $\therefore \overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$

$=(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$



점 P가 선분 BF를 1 : 3으로 내분하므로

$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CF}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

$=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\frac{3}{4}(-\vec{b})$

$=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

이때,

$\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}$

$=m(-\vec{a})+n(\vec{a}+\vec{b})$

$=(n-m)\vec{a}+n\vec{b}$

이므로

$(n-m)\vec{a}+n\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행하지 않으므로

$n-m=\frac{1}{4}$

03 해결단계

❶ 단계	$3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$를 만족시키는 점을 Q라 하면 $\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{QP}$임을 파악한다.
❷ 단계	직선 PQ가 원의 중심 O를 지날 때, $\lvert\overrightarrow{QP}\rvert$가 최댓값과 최솟값을 가짐을 파악한다.
❸ 단계	$\lvert\overrightarrow{QP}\rvert$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여 그 곱을 구한다.

원에 정사각형 ABCD가 내접하므로 정사각형의 두 대각선의 교점을 O라 하면 점 O는 원의 중심이다.

원의 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{OA}=2$에서 $\overline{AC}=4$

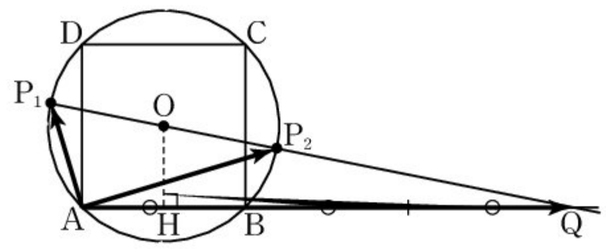
△ABC가 직각이등변삼각형이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $\overline{AB}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$를 만족시키는 점을 Q라 하면

$\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QP}$

이때, 점 P가 원 위를 움직이므로 $\lvert\overrightarrow{QP}\rvert$의 값이 최대 또는 최소일 때는 직선 PQ가 원의 중심 O를 지날 때이다.

즉, 다음 그림과 같이 점 P가 점 P_1에 위치할 때 $\lvert\overrightarrow{QP}\rvert$의 값이 최대이고, 점 P_2에 위치할 때 최소이다. ……㉠



점 O에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\overline{HB}=\sqrt{2}$ $\therefore \overline{HQ}=5\sqrt{2}$

직각삼각형 OHQ에서

$\overline{OQ}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{13}$

따라서 ㉠에서 $\lvert\overrightarrow{QP}\rvert$, 즉 $\lvert\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}\rvert$의 최댓값은 $2\sqrt{13}+2$, 최솟값은 $2\sqrt{13}-2$이므로 그 곱은

$(2\sqrt{13}+2)(2\sqrt{13}-2)=52-4=48$ 답 48

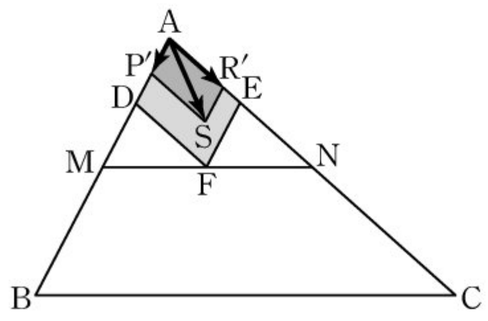
04 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$를 만족시키는 점 S가 나타내는 영역을 확인한다.
❷ 단계	$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역을 확인한다.
❸ 단계	❷단계에서 확인한 영역의 넓이를 구하여 p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

△ABC에서 두 변 AB, CA의 중점을 각각 M, N이라 하고, △AMN에서 세 변 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자.

이때, 두 점 P, R는 각각 두 변 AB, CA 위를 움직이므로 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP'}$을 만족시키는 점 P′은 변 AD 위를 움직이고, $\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AR'}$을 만족시키는 점 R′은 변 AE 위를 움직인다.

즉, $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{AR'}$을 만족시키는 점 S가 나타내는 영역은 다음 그림에서 평행사변형 ADFE의 둘레와 그 내부이다.



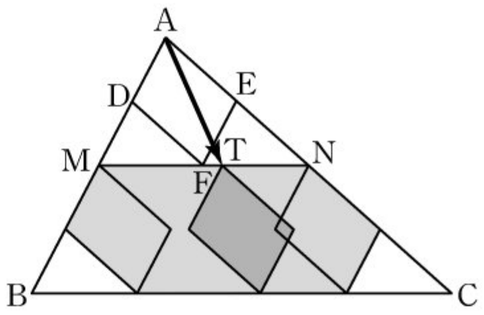
또한, 점 Q는 변 BC 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$를 만족시키는 점 T는 선분 MN 위를 움직인다.

$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

$=\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{AR'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

$=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AT}$

이므로 위의 식을 만족시키는 점 X가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



구하는 영역, 즉 육각형의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABC-\triangle AMN-2\triangle DMF$

$=9-\frac{1}{4}\times 9-\frac{2}{16}\times 9$

$=\frac{45}{8}$

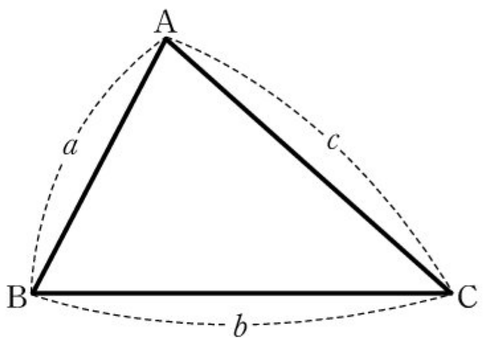
따라서 $p=8$, $q=45$이므로

$p+q=8+45=53$ 답 53

• 다른풀이 •

$\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 a, b, c (a, b, c는 양의 실수)라 하면 다음 그림과 같이 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 세 점 P, Q, R에 대하여

$0\le|\overrightarrow{AP}|\le a$, $0\le|\overrightarrow{BQ}|\le b$, $0\le|\overrightarrow{AR}|\le c$



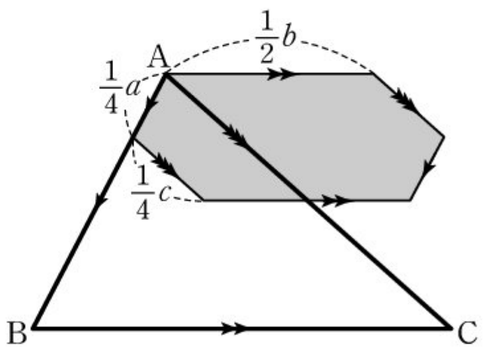
$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})$

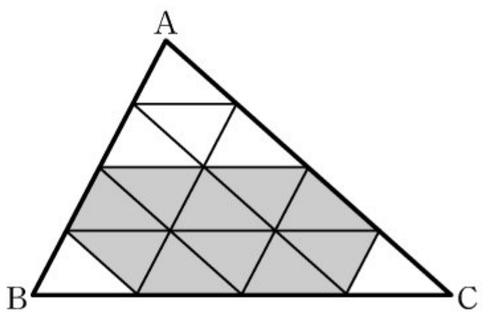
$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

에서 서로 다른 세 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{BQ}$에 대하여

$\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BQ}$를 만족시키는 점 S가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$이므로 점 X가 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



위의 그림에서 가장 작은 16개의 삼각형의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{16}$이므로 점 X가 나타내는 영역의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{10}{16}\triangle ABC$

$=\frac{10}{16}\times 9=\frac{45}{8}$

따라서 $p=8$, $q=45$이므로

$p+q=8+45=53$

05 해결단계

❶ 단계	주어진 도형을 좌표평면 위에 나타낸 후, 두 점 A, B의 좌표와 타원 C의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	벡터 $2\overrightarrow{BP}$의 종점이 나타내는 도형 C'의 방정식을 구한 후, 벡터 $\overrightarrow{AQ}$의 종점이 나타내는 도형을 파악한다.
❸ 단계	점 P가 타원 C 위를 한 바퀴 움직일 때, 점 Q가 움직이는 도형의 길이가 $\frac{\pi}{2}$임을 이용하여 점 A에서 타원 C'에 그은 접선의 기울기를 구한다.
❹ 단계	❸단계를 이용하여 b의 값을 구하고 타원 C의 두 초점 사이의 거리 l의 값을 구한 후, l^2의 값을 구한다.

길이가 10인 선분 AB에 대하여 타원 C는 중심이 B이고, 장축이 직선 AB 위에 있으며 장축의 길이가 8이므로 타원 C의 중심 B가 원점, 선분 AB가 x축 위에 오도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면

A$(-10, 0)$, B$(0, 0)$

이고, 타원 C의 방정식은

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $0<b<4$)

이라 할 수 있다.

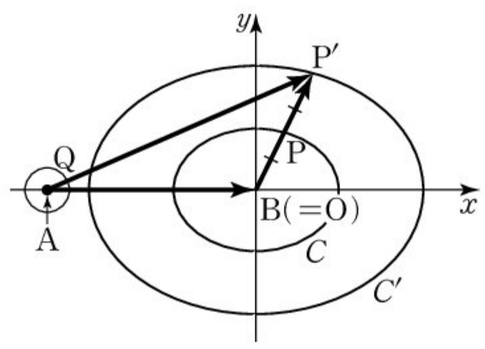
$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP'}$을 만족시키는 점을 P′이라 하면 벡터 $\overrightarrow{BP'}$의 종점이 나타내는 도형은 중심이 B, 장축의 길이가 16, 단축의 길이가 $2b$인 타원이므로 이 타원을 C'이라 하면 타원 C'의 방정식은

$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ ← 풀이첨삭 참고

이고,

$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP'}=\overrightarrow{AP'}$

즉, $\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BP}|}=\frac{\overrightarrow{AP'}}{|\overrightarrow{AP'}|}$에서 벡터 $\overrightarrow{AQ}$는 벡터 $\overrightarrow{AP'}$과 방향이 같은 단위벡터이므로 점 Q는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.



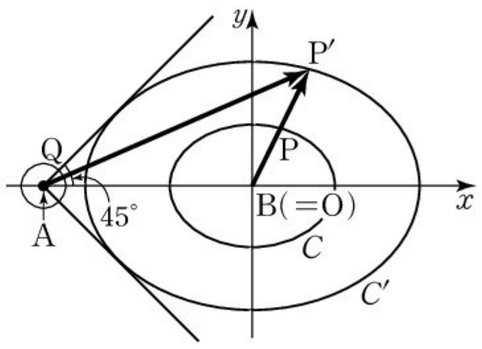
점 P가 타원 C 위를 한 바퀴 움직이면 점 P′은 타원 C' 위를 한 바퀴 움직이므로 점 Q가 움직이는 도형의 길이가 $\frac{\pi}{2}$이려면 점 Q가 움직이는 호에 대한 중심각의 크기가 $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$이어야 한다.

즉, 점 A에서 타원 C'에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 90°이어야 한다.

이때, 점 A가 x축 위에 있고, 타원 C'이 x축에 대하여 대칭이므로 점 A에서 타원 C'에 그은 두 접선은 x축에 대하여 대칭이다.

즉, 접선과 x축이 이루는 각의 크기가 $\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$이어야 하므로 기울기가 양수인 접선의 기울기는

$\tan 45^\circ=1$



기울기가 1이고 y절편이 양수인 타원 C'의 접선의 방정식은

$y=x+\sqrt{64+4b^2}$

이 접선이 점 A$(-10, 0)$을 지나므로

$0=-10+\sqrt{64+4b^2}$, $10=\sqrt{64+4b^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$100=64+4b^2$, $4b^2=36$ $\quad\therefore\ b^2=9$

즉, 타원 C의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$이므로 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=16-9=7$ $\quad\therefore\ c=\sqrt{7}\ (\because\ c>0)$

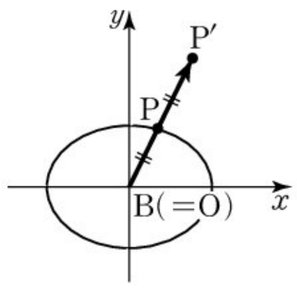
따라서 $l=2c=2\sqrt{7}$이므로

$l^2=(2\sqrt{7})^2=28$ 답 28

blacklabel 특강 풀이첨삭

타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점을 P(s, t)라 하자.

$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP'}$을 만족시키는 점을 P′이라 하면 오른쪽 그림과 같이 $2\overline{BP}=\overline{BP'}$이므로 선분 BP를 2 : 1로 외분한 점이 P′이다.



즉, 점 P′의 좌표는 $(2s, 2t)$

$2s=x'$, $2t=y'$으로 놓으면 $s=\frac{x'}{2}$, $t=\frac{y'}{2}$

점 P가 타원 위의 점이므로 $\frac{s^2}{16}+\frac{t^2}{b^2}=1$에서

$\frac{1}{16}\times\left(\frac{x'}{2}\right)^2+\frac{1}{b^2}\times\left(\frac{y'}{2}\right)^2=1$

$\therefore\ \frac{x'^2}{64}+\frac{y'^2}{4b^2}=1$

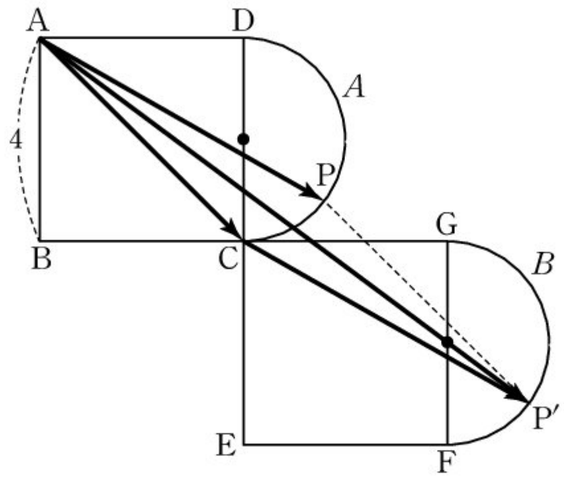
따라서 $2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BP'}$을 만족시키는 점 P′은 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ 위에 있다.

06 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP'}$을 만족시키는 점을 P′이라 하고 벡터 $\overrightarrow{AP'}$의 종점이 나타내는 도형을 파악한다.
❷ 단계	$\lvert\overrightarrow{AP'}\rvert$의 값이 최대가 되는 조건을 파악한다.
❸ 단계	선분 CD의 중점을 O_2라 할 때, $\overrightarrow{O_2P}/\!/\overrightarrow{AP'}$임을 파악한 후, 삼각형 APD의 넓이를 구한다.

주어진 정사각형과 반원을 합친 도형을 A라 하자.

도형 A와 합동이고 두 변 CE, EF가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$와 평행한 도형을 B라 하고, 도형 B의 한 꼭짓점이 점 C에 오도록 다음 그림과 같이 그려 보자.



벡터 $\overrightarrow{AP}$의 시점을 점 C로 옮길 때의 종점을 P′이라 하면

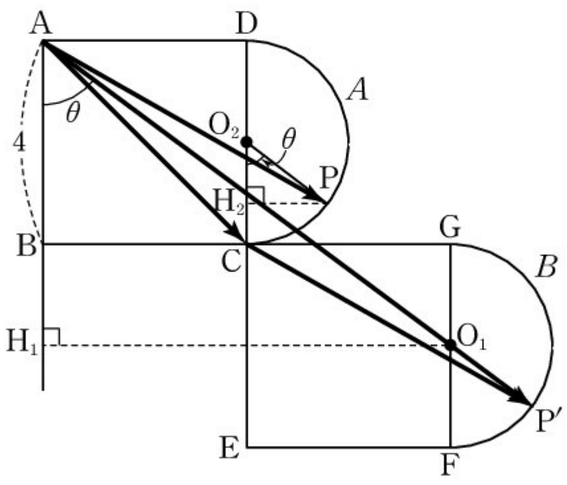
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP'}=\overrightarrow{AP'}$

이때, 점 P′이 반원의 호 GF 위에 있으므로 벡터 $\overrightarrow{AP'}$이 선분 GF를 지름으로 하는 반원의 중심을 지날 때 $\lvert\overrightarrow{AP'}\rvert$의 값이 최대이다.

선분 GF의 중점을 O_1이라 하고, 점 O_1에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 H_1, $\angle O_1AH_1=\theta$라 하자.

$\overline{AH_1}=6$, $\overline{O_1H_1}=8$이므로

$\tan\theta=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ $\quad\cdots\cdots$㉠



선분 CD의 중점을 O_2라 하고, 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H_2라 하면 $\angle PO_2H_2=\theta$이므로

$\overline{O_2H_2}=3k$, $\overline{PH_2}=4k$ $(k>0)$ $(\because$ ㉠$)$라 할 수 있다.

직각삼각형 PO_2H_2에서

$\overline{O_2P}=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$ $(\because\ \overline{O_2P}>0)$

이때, $\overline{CD}=4$에서 원의 반지름의 길이가 2이므로

$5k=2$ $\quad\therefore\ k=\frac{2}{5}$

$\therefore\ \overline{DH_2}=\overline{DO_2}+\overline{O_2H_2}=2+3k=\frac{16}{5}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형 APD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DH_2}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{16}{5}$

$=\frac{32}{5}$ 답 $\frac{32}{5}$

이것이 수능 p. 43

1 ⑤ 2 ③ 3 ③ 4 ④

1 해결단계

❶ 단계	주어진 식을 시점이 점 P인 벡터로 변형하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	❶단계에서 변형한 식이 나타내는 점 P의 위치를 파악한 후, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

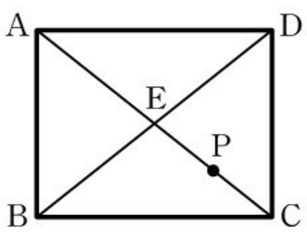
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$

$\therefore \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$ (참)

ㄴ. 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면



$\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=\overrightarrow{PE}$

ㄱ에 의하여 $\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}}{2}=\overrightarrow{CP}$

즉, 점 P는 선분 EC의 중점이다.

$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

ㄷ. $\overline{AP}:\overline{AC}=3:4$이므로 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 삼각형 ADC의 넓이는 4이다.

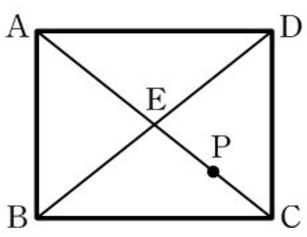
즉, 직사각형 ABCD의 넓이는

$2\triangle ADC=2\times 4=8$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

• 다른풀이 •

ㄴ. 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면



$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$이므로

$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{4}$

$=\dfrac{4\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}}{4}=\overrightarrow{PE}$

이때, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$이므로

$\dfrac{\overrightarrow{CA}}{4}=\overrightarrow{PE}$ $\therefore \overrightarrow{EP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (참)

2 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{OX}=\lvert\vec{q}\rvert\vec{p}$, $\overrightarrow{OY}=\lvert\vec{p}\rvert\vec{q}$를 만족시키는 두 점을 각각 X, Y라 하고 두 점 X, Y가 나타내는 도형을 각각 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$를 만족시키는 점을 Z라 하고 직선 OZ는 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$가 이루는 각의 이등분선임을 보인다.
❸ 단계	벡터 $\overrightarrow{OR}$는 벡터 $\overrightarrow{OZ}$의 단위벡터임을 확인하고, 점 R가 나타내는 도형의 길이를 구한다.

두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$의 크기를 각각 a, b $(a>0, b>0)$라 하면

$\lvert\vec{p}\rvert=a$, $\lvert\vec{q}\rvert=b$

$\overrightarrow{OX}=\lvert\vec{q}\rvert\vec{p}$를 만족시키는 점을 X라 하면

$\overrightarrow{OX}=\lvert\vec{q}\rvert\vec{p}=b\vec{p}$, $\lvert\overrightarrow{OX}\rvert=\lvert b\vec{p}\rvert=b\lvert\vec{p}\rvert=ab$

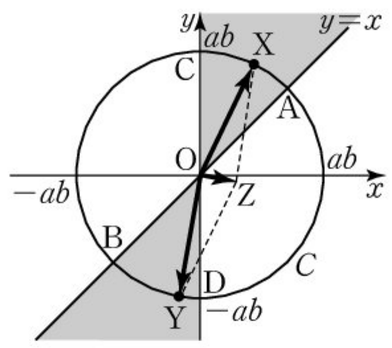
이므로 벡터 $\overrightarrow{OX}$는 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 방향이 같고 크기가 ab인 벡터이다.

같은 방법으로 $\overrightarrow{OY}=\lvert\vec{p}\rvert\vec{q}$를 만족시키는 점을 Y라 하면

$\overrightarrow{OY}=\lvert\vec{p}\rvert\vec{q}=a\vec{q}$, $\lvert\overrightarrow{OY}\rvert=\lvert a\vec{q}\rvert=a\lvert\vec{q}\rvert=ab$

이므로 벡터 $\overrightarrow{OY}$는 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 방향이 같고 크기가 ab인 벡터이다.

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 ab인 원 C를 좌표평면 위에 나타내고, 다음 그림과 같이 원 C와 직선 $y=x$의 두 교점을 A, B, 원 C와 y축의 두 교점을 C, D라 하면 두 점 X, Y는 각각 두 호 AC, BD 위에 있다.



이때, $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$를 만족시키는 점을 Z라 하면

$\lvert\overrightarrow{OX}\rvert=\lvert\overrightarrow{OY}\rvert=ab$이므로 □OYZX는 마름모이다.

$\therefore \angle XOZ=\angle YOZ$

즉, 직선 OZ는 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$가 이루는 각의 이등분선이다.

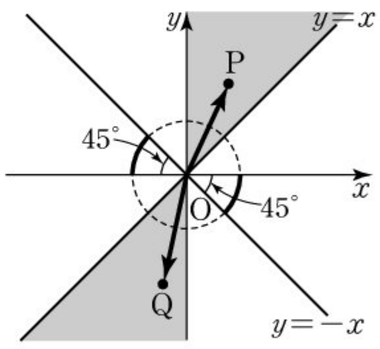
한편,

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\lvert\vec{q}\rvert\vec{p}+\lvert\vec{p}\rvert\vec{q}}{\lvert\lvert\vec{q}\rvert\vec{p}+\lvert\vec{p}\rvert\vec{q}\rvert}$

$=\dfrac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}}{\lvert\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}\rvert}=\dfrac{\overrightarrow{OZ}}{\lvert\overrightarrow{OZ}\rvert}$

이므로 벡터 $\overrightarrow{OR}$는 벡터 $\overrightarrow{OZ}$와 방향이 같은 단위벡터이다.

따라서 점 R가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 중심각의 크기가 45°인 2개의 호와 같으므로 구하는 도형의 길이는



$\left(2\pi\times 1\times\dfrac{45}{360}\right)\times 2=\dfrac{\pi}{2}$ 답 ③

3 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$를 만족시키는 점을 R라 하고 점 R가 나타나는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	$f(a)=5$가 되는 경우를 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 각각의 경우에 따른 a의 값을 구하고, 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구한다.

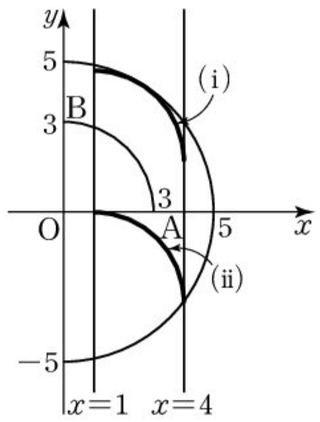
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{QR}$를 만족시키는 점을 R라 하면 $\lvert\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\rvert$의 최댓값이 5이므로

$\lvert\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\rvert=\lvert\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{OQ}\rvert=\lvert\overrightarrow{OR}\rvert\le 5$

즉, 점 R는 원 $x^2+y^2=25$의 경계 및 내부의 점이다.

점 P는 직선 $x=1$ 위에 있으므로 x좌표가 가장 클 때의 점 R는 직선 $x=4$ 위에 있을 때이고, 점 R가 나타내는

도형은 호 AB가 평행이동한 도형과 같으므로 $f(a)=5$가 되는 경우는 다음 그림과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다.



반지름의 길이가 3이고 두 호 (i), (ii)를 포함하는 두 원의 중심을 각각 $(1, a_1)$, $(1, a_2)$ $(a_1>0, a_2<0)$라 하자.

(i) 두 원 $x^2+y^2=25$, $(x-1)^2+(y-a_1)^2=9$가 서로 내접하므로

$\sqrt{1^2+a_1^2}=5-3=2$

위의 식의 양변을 제곱하면

$1+a_1^2=4$, $a_1^2=3$

$\therefore a_1=\sqrt{3}$ $(\because a_1>0)$

(ii) 두 원 $x^2+y^2=25$, $(x-1)^2+(y-a_2)^2=9$가 x좌표가 4인 점에서 만나므로 이 점의 좌표를 $(4, k)$라 하면

$4^2+k^2=25$, $k^2=9$

이때, $k<0$이므로 $k=-3$

즉, $(4-1)^2+(-3-a_2)^2=9$

$(3+a_2)^2=0$ $\therefore a_2=-3$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$\sqrt{3}\times(-3)=-3\sqrt{3}$ 답 ③

• 다른풀이 •

좌표평면 위의 정점 P와 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값이 5가 되어야 하므로

(i) $a\geq 0$일 때,

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 같은 방향일 때 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대이므로

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|\leq|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{OQ}|$

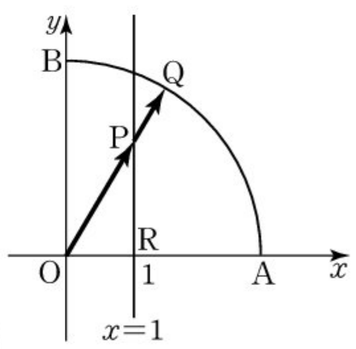
$=|\overrightarrow{OP}|+3=5$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|=2$

P$(1, a)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+a^2}=2$

$a^2=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$ $(\because a\geq 0)$



(ii) $a<0$일 때,

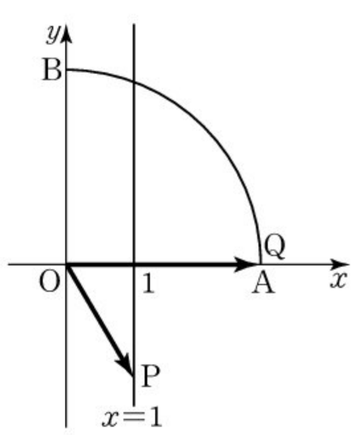
두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 같은 방향일 수 없으므로 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대이려면 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기가 최소이어야 한다.

즉, 점 Q가 점 A에 위치할 때 이므로

$\overrightarrow{OQ}=(3, 0)$

이때, $\overrightarrow{OP}=(1, a)$이므로

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(4, a)$



$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=5$에서

$\sqrt{4^2+a^2}=5$

$a^2=9$ $\therefore a=-3$ $(\because a<0)$

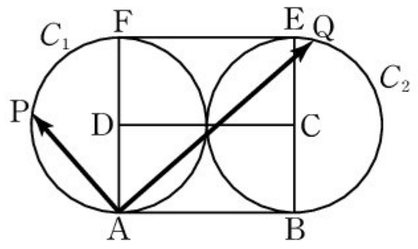
(i), (ii)에서 a의 값은 $\sqrt{3}$, -3이므로 그 곱은

$\sqrt{3}\times(-3)=-3\sqrt{3}$

4 해결단계

❶ 단계	벡터의 연산을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$를 크기를 구할 수 있는 벡터의 연산으로 변형한다.
❷ 단계	$\lvert\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\rvert$가 최댓값을 가질 때의 두 점 P, Q의 조건을 찾는다.
❸ 단계	$\lvert\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\rvert$의 최댓값을 구한다.

다음 그림과 같이 직선 AD와 원 C_1이 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F, 직선 BC와 원 C_2가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자.



□ABCD가 직사각형이고, 두 원의 반지름의 길이가 모두 1이므로 □ABEF는 한 변의 길이가 2인 정사각형이다.

$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=|(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ})|$

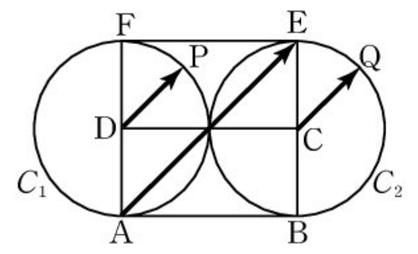
$=|(2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ}|$

$(\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC})$

$=|(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ}|$

$=|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ}|$ ……㉠

이므로 다음 그림과 같이 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{CQ}$가 모두 벡터 $\overrightarrow{AE}$와 같은 방향일 때, ㉠이 최댓값을 갖는다.



이때, 선분 AE의 길이는 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABEF의 대각선의 길이와 같으므로

$\overline{AE}=2\sqrt{2}$ $\therefore |\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$

두 선분 DP, CQ의 길이는 각각 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{DP}=\overline{CQ}=1$ $\therefore |\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{CQ}|=1$

즉,

$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CQ}|\leq|\overrightarrow{AE}|+|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{CQ}|$

$=2\sqrt{2}+1+1$

$=2\sqrt{2}+2$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은 $2\sqrt{2}+2$이다. 답 ④

05 평면벡터의 성분과 내적

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 46

01 ②	02 8	03 ⑤	04 $4\sqrt{15}$	05 16
06 ③	07 ①	08 ③		

01 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{3+1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$$

또한, 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 위치벡터는

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}}{1-2}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{7}{4}\overrightarrow{OB}$$

즉, $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{7}{4}\overrightarrow{OB}$이고, 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있지 않으므로

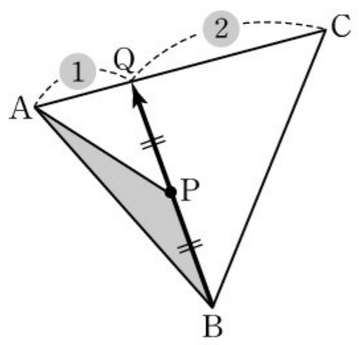
$$m=\frac{7}{4},\ n=-\frac{7}{4}$$

$$\therefore m+n=\frac{7}{4}+\left(-\frac{7}{4}\right)=0$$ 답 ②

02 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$$-\overrightarrow{PB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$$

이때, 변 AC를 1 : 2로 내분하는 점을 Q라 하면



$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$이므로

$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PQ}$

따라서 삼각형 ABC에서 $\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AC}$, $\overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{BQ}$이고,

$\triangle ABC=48$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\triangle QAB$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\triangle ABC$$

$$=\frac{1}{6}\times 48=8$$ 답 8

03 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행하므로

$k\vec{a}=\vec{v}+\vec{b}$ (단, k는 실수)

$$\therefore \vec{v}=k\vec{a}-\vec{b}$$

$$=k(3,\ 1)-(4,\ -2)$$

$$=(3k,\ k)-(4,\ -2)$$

$$=(3k-4,\ k+2)$$

$$\therefore |\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$$

$$=10k^2-20k+20$$

$$=10(k-1)^2+10$$

따라서 $|\vec{v}|^2$은 $k=1$일 때, 최솟값 10을 갖는다. 답 ⑤

04 점 H가 선분 AB를 3 : 5로 내분하므로

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{3}{8}|\overrightarrow{AB}| \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle ABC$, $\triangle ACH$가 각각 직각삼각형이므로

$\angle CAH=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AC}|} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}\ (\because ㉡)$$

$$=|\overrightarrow{AC}|^2=24$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{6}$$

또한,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AC}|}\ (\because ㉡)$$

$$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{\frac{3}{8}|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{3}{8}|\overrightarrow{AB}|^2=24$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=64 \qquad \therefore |\overrightarrow{AB}|=8$$

즉, 직각삼각형 ABC에서

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{8^2-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{10}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{10}=4\sqrt{15}$$ 답 $4\sqrt{15}$

• 다른풀이 1 • $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

점 H가 선분 AB를 3 : 5로 내분하므로

$\overline{AH}=3k$, $\overline{BH}=5k$ $(k>0)$라 하면

$\overline{AB}=8k$

$\triangle ABC$가 직각삼각형이므로

$$\overline{AC}^2=\overline{AH}\times\overline{AB}=3k\times 8k=24k^2$$

$$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6}k\ (\because k>0)$$

$$\overline{BC}^2=\overline{BH}\times\overline{AB}=5k\times 8k=40k^2$$

$$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{10}k\ (\because k>0)$$

또한, $\angle CAB=\theta$라 하면

$$\cos\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{6}k}{8k}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$이므로

$$|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=8k\times 2\sqrt{6}k\times\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$=24k^2=24$$

$$k^2=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{10}=4\sqrt{15}$

• 다른풀이 2 •

$\overline{AH}:\overline{BH}=3:5$이므로

$\overline{AH}=3k$, $\overline{BH}=5k$, $\overline{AB}=8k$ $(k>0)$

라 하자.

꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발이 H이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|$

$=8k\times 3k=24k^2$

즉, $24k^2=24$이므로 $k=1$ $(\because k>0)$

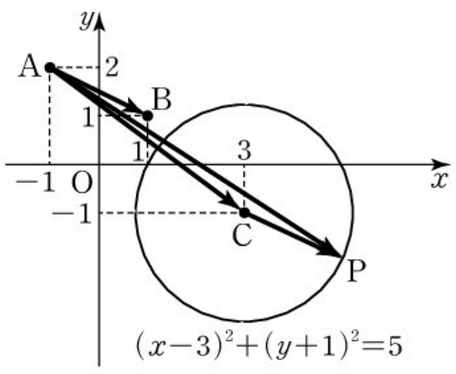
$\therefore \overline{AH}=3$, $\overline{BH}=5$, $\overline{AB}=8$

$\overline{CH}^2=\overline{AH}\times\overline{BH}=3\times 5=15$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{15}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 8\times\sqrt{15}=4\sqrt{15}$

05



원 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$의 중심을 C$(3, -1)$이라 하면

A$(-1, 2)$, B$(1, 1)$이므로

$\overrightarrow{AB}=(2, -1)$, $\overrightarrow{AC}=(4, -3)$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}$이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=(2, -1)\cdot(4, -3)+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=11+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$ ……㉠

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le 90^\circ)$라 하면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CP}|\cos\theta$

$=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=5\cos\theta$ (원의 반지름의 길이와 같으므로)

$\theta=0^\circ$일 때, 즉 벡터 $\overrightarrow{CP}$가 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 같은 방향일 때, $\cos\theta$의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}$는 최댓값 $5\cos 0^\circ=5$를 갖는다.

따라서 ㉠에서 구하는 최댓값은

$11+5=16$ 답 16

06

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$이므로

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times 1^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2$

$=8-4\vec{a}\cdot\vec{b}=4$

$-4\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\therefore |\vec{a}-t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=1^2-2t\times 1+t^2\times 2^2$

$=4t^2-2t+1$

$=4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$

따라서 $|\vec{a}-t\vec{b}|$는 $t=\frac{1}{4}$일 때 최솟값 $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

답 ③

07

직선 l의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}=(a, b)$라 하면 $\overrightarrow{u_1}$은 벡터 $\vec{u}=(3, 2)$와 수직이므로

$\overrightarrow{u_1}\cdot\vec{u}=0$에서 $(a, b)\cdot(3, 2)=0$

$3a+2b=0$ $\therefore b=-\frac{3}{2}a$

$\therefore \overrightarrow{u_1}=\left(a, -\frac{3}{2}a\right)$

또한, 직선 m의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_2}$라 하면 $\overrightarrow{u_2}$는 벡터 $\vec{d}=(0, 4)$와 평행하므로

$\overrightarrow{u_2}=k\vec{d}=k(0, 4)$

$=(0, 4k)$ (단, $k\neq 0$)

이때, 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}$

$=\frac{\left|\left(a, -\frac{3}{2}a\right)\cdot(0, 4k)\right|}{\sqrt{a^2+\left(-\frac{3}{2}a\right)^2}\sqrt{0^2+(4k)^2}}$

$=\frac{|-6ak|}{\left|\frac{\sqrt{13}}{2}a\right|\times|4k|}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2$

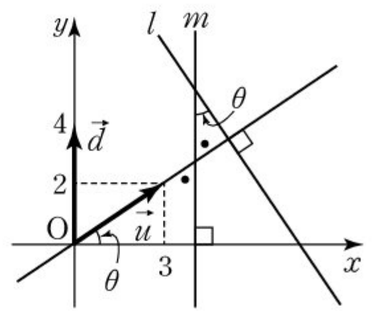
$=1-\frac{9}{13}=\frac{4}{13}$

답 ①

blacklabel 특강 참고

두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 θ이므로 벡터 $\vec{u}$와 x축이 이루는 예각의 크기도 θ이다.

$\therefore \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$



08

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 A$(3, -1)$, B$(9, 7)$이므로

$\overrightarrow{PA}=(3-x, -1-y)$, $\overrightarrow{PB}=(9-x, 7-y)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2$이므로

$(3-x, -1-y)\cdot(9-x, 7-y)$

$=(3-x)(9-x)+(-1-y)(7-y)$

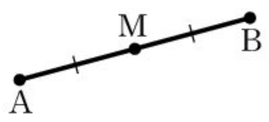
$=x^2+y^2-12x-6y+20=2$

$\therefore (x-6)^2+(y-3)^2=27$ ……㉠

이때, 선분 AB의 중점 M의 좌표는 (6, 3)이므로 원 ㉠의 중심이 점 M이다.
따라서 점 P는 원 ㉠ 위의 점이므로
$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ 답 ③

• 다른풀이 •

A(3, −1), B(9, 7)이고 선분 AB의 중점 M의 좌표는
$\left(\frac{3+9}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$, 즉 (6, 3)
$\therefore \overline{MA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$
이때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2$이므로
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$
$=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})$
$=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})$
$=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$
$=|\overrightarrow{PM}|^2-5^2=2$
따라서 $|\overrightarrow{PM}|^2=27$이므로
$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$



Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 47~51

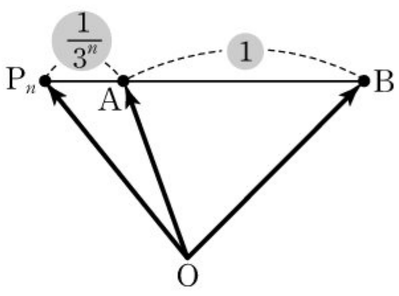
01 $\frac{15}{4}$	02 2	03 ④	04 14	05 ⑤
06 ③	07 $2\sqrt{7}$	08 ③	09 8	10 6π
11 $6\sqrt{5}$	12 ①	13 ①	14 ②	15 $\frac{2}{5}$
16 ①	17 ④	18 ②	19 $\frac{20}{19}$	20 92
21 60	22 18	23 ③	24 100	25 ⑤
26 ②	27 ⑤	28 ⑤	29 ④	30 5
31 −150	32 4	33 ④		

01 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$라 하자.
점 P는 변 CB를 3 : 1로 내분하므로
$\overrightarrow{CP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{4}\vec{a}$
점 Q는 변 OC를 1 : 3으로 내분하므로
$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\vec{b}$
이때, 점 M은 선분 AQ 위에 있으므로
$\overrightarrow{OM}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OQ}$
$=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}$ (단, $0<t<1$) ……㉠
또한, 점 M은 선분 OP 위에 있으므로
$\overrightarrow{OM}=s\overrightarrow{OP}$
$=s(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP})$
$=\frac{3}{4}s\vec{a}+s\vec{b}$ (단, $0<s<1$) ……㉡
㉠, ㉡에서 $1-t=\frac{3}{4}s$, $\frac{1}{4}t=s$이므로
$s=\frac{4}{19}$, $t=\frac{16}{19}$
즉, $\overrightarrow{OM}=\frac{4}{19}\overrightarrow{OP}$이므로
$\overline{OM}:\overline{MP}=\frac{4}{19}:\left(1-\frac{4}{19}\right)$
$=\frac{4}{19}:\frac{15}{19}$
$=4:15$
$\therefore \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}}=\frac{15}{4}$ 답 $\frac{15}{4}$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

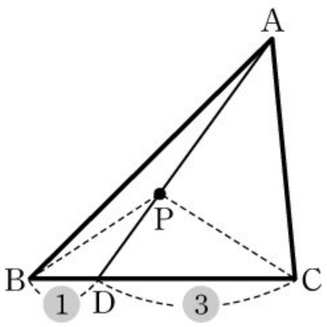
먼저 기준이 될만한 위치벡터를 정하고 문제를 풀어 나가는 것이 좋다. 점 O를 기준으로 하는 위치벡터로 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$를 정했다면, 나머지 벡터들을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대한 식으로 나타내면서 풀면 된다. 이 문제에서 점 M은 나머지 벡터의 합이나 차로 나타내어지지 않으므로 서로 다른 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 존재할 때
$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$ (단, $k\neq0$, $k\neq1$인 실수)
임을 이용하여 푼다.

02 세 점 A, B, P_n이 한 직선 위에 있고,
$\overrightarrow{OP_n}=\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3^n}\overrightarrow{OB}$
이므로 점 P_n은 선분 AB를
$\frac{1}{3^n}:\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$로 외분한다.



이때, $\overrightarrow{AP_n}=\frac{1}{3^n}\overrightarrow{BA}$가 성립하고, $\overline{AB}=4$이므로
$|\overrightarrow{AP_n}|=\frac{1}{3^n}|\overrightarrow{BA}|=\frac{4}{3^n}$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|\overrightarrow{AP_n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}$
$=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$ 답 2

03 선분 AP의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자.
두 삼각형 ABP, APC의 넓이의 비가 1 : 3이므로 선분 AP를 밑변으로 생각하면 두 삼각형의 높이의 비가 1 : 3이다.



즉, $\overline{BD}:\overline{CD}=1:3$이므로
$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{1+3}$
$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
세 삼각형 ABP, PBC, APC의 넓이의 비가 1 : 2 : 3이므로 두 삼각형 ABC, PBC의 넓이의 비는 6 : 2, 즉 3 : 1이고, 선분 BC를 밑변으로 생각하면 두 삼각형의 높이의 비가 3 : 1이다.

즉, $\overline{AD}:\overline{PD}=3:1$이므로

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{6}$이므로

$m+n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 ④

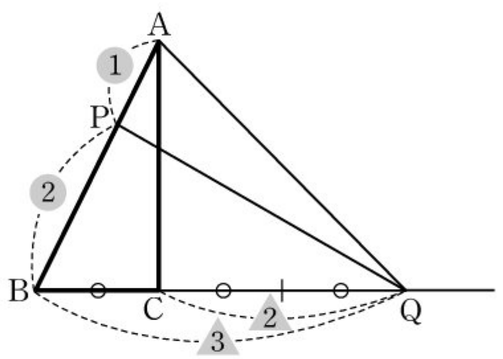
04 조건 (가)의 $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=\frac{3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}}{3-2}$에서 점 Q는 선분 BC를 3 : 2로 외분하는 점이다.

또한, 조건 (나)의 $3\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}$에서

$\overrightarrow{QP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{QB}$

이므로 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

즉, 삼각형 ABC와 두 점 P, Q는 다음 그림과 같다.



두 삼각형 ABC, ABQ에서

$\triangle ABC:\triangle ABQ=\overline{BC}:\overline{BQ}=1:3$

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 7이므로

$7:\triangle ABQ=1:3$ $\therefore \triangle ABQ=21$

같은 방법으로 두 삼각형 APQ, PBQ에서

$\triangle APQ:\triangle PBQ=\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$

따라서 삼각형 PBQ의 넓이는

$\triangle PBQ=\frac{2}{3}\triangle ABQ=\frac{2}{3}\times 21=14$ 답 14

• 다른풀이 •

조건 (가)의 $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$ $\therefore \overrightarrow{BQ}=3\overrightarrow{BC}$

즉, 점 Q는 선분 BC를 3 : 2로 외분하는 점이다.

조건 (나)의 $3\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}$에서

$3(\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QA})=\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA}$ $\therefore 3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$

즉, 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다.

05 ㄱ. 삼각형 OAC의 무게중심이 점 P이므로

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB})$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{b}{3}\overrightarrow{OB}$

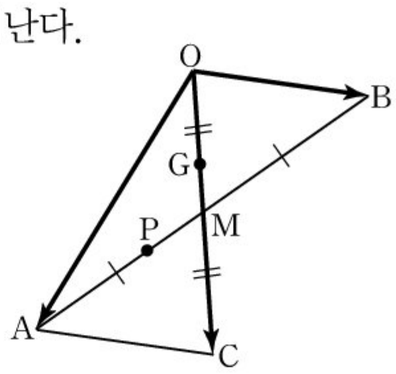
이때, 점 P가 선분 AB 위에 있으므로

$\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{3}\right)+\frac{b}{3}=1$, $\frac{a+b}{3}=\frac{2}{3}$

$\therefore a+b=2$ (참)

ㄴ. 두 삼각형 OAB, OAC의 무게중심이 각각 점 G, P이므로 직선 OG는 선분 AB의 중점을 지나고, 직선 AP는 선분 OC의 중점을 지난다.

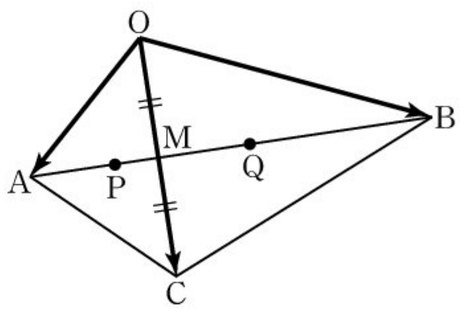
선분 AB의 중점을 M이라 하면 세 점 O, G, C가 한 직선 위에 있으므로 점 M은 직선 OC 위에 있어야 한다.



$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{OM}=\overline{CM}$

즉, □OACB는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 OBC의 무게중심이 점 Q이고, 선분 AB가 선분 OC의 중점 M을 지나므로 점 Q는 선분 AB 위에 있고, 선분 BM을 2 : 1로 내분한다.



또한, 점 P는 선분 AM을 2 : 1로 내분하므로

$\overline{PQ}=\overline{PM}+\overline{QM}=\frac{1}{3}(\overline{AM}+\overline{BM})=\frac{1}{3}\overline{AB}$

두 삼각형 OAB, CPQ에서 밑변을 각각 $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$로 생각하면 $\overline{AB}:\overline{PQ}=3:1$이고, $\overline{OM}=\overline{CM}$에서 높이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 3 : 1이다.

즉, $S_1:S_2=3:1$에서 $S_1=3S_2$ (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

06 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$

$=k\overrightarrow{OA}+3l\times\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ $(k+3l=1,\ k\geq 0,\ l\geq 0)$

이므로 오른쪽 그림과 같이

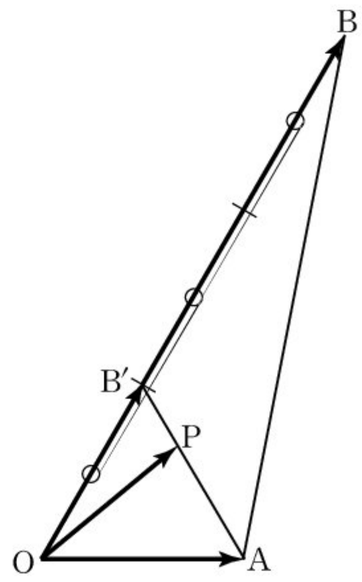
$\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$인 점 B′에 대하여

점 P는 선분 AB′ 위에 있다.

이때, $|\overrightarrow{OB}|=6$이므로

$|\overrightarrow{OB'}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{3}\times 6=2$

이고, 점 P의 자취의 길이가 2이므로 $|\overrightarrow{AB'}|=2$이다.



즉, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB'}|=|\overrightarrow{AB'}|=2$

이므로 △OAB′은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle OAB=3\triangle OAB'$

$=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

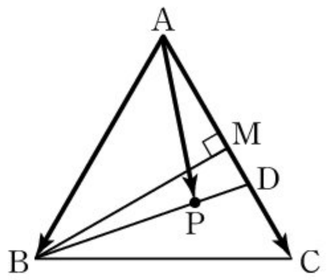
$=3\sqrt{3}$ 답 ③

07 $\overrightarrow{AP}=(1-3t)\overrightarrow{AB}+2t\overrightarrow{AC}$

$=(1-3t)\overrightarrow{AB}+3t\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\left(0\le t\le\frac{1}{3}\right)$

즉, 변 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하면 점 P는 선분 BD를 $3t:(1-3t)$로 내분하고, $0\le t\le\frac{1}{3}$이므로 점 P가 그리는 도형은 선분 BD이다.

이때, 변 AC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AD}=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AC}|=\frac{2}{3}\times6=4$,

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\times6=3$이므로

$\overline{MD}=\overline{AD}-\overline{AM}=4-3=1$

직각삼각형 ABM에서

$\overline{BM}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 도형의 길이는 직각삼각형 BDM에서

$\overline{BD}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$ 답 $2\sqrt{7}$

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 식을 변형하여 점 P가 점 B와 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 잇는 선분 위에 있음을 파악한 경우	60%
(나)	△ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형임을 이용하여 점 P가 그리는 도형의 길이를 구한 경우	40%

blacklabel 특강 참고

코사인법칙을 이용하여 선분 BD의 길이를 구할 수도 있다.
삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=4$, $\angle A=60^\circ$이므로
$\overline{BD}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos60^\circ=28$
$\therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{7}\ (\because\ \overline{BD}>0)$

08 선분 AC의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{EM}$

$\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EP}$에서

$\overrightarrow{EM}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EP}$

$x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{EM}$

$\therefore\ x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MP}$ ……㉠

변 AB의 중점을 N이라 하면

$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{MP}$이므로 점 P는 직선 MN 위에 있다.

이때, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$이므로 $\overrightarrow{MP}=-2x\overrightarrow{MN}$ ($\because$ ㉠)

점 P가 삼각형 ABC의 내부에 위치하려면 점 P는 선분 MN 위에 있어야 하므로

$0<-2x<1$에서 $-\frac{1}{2}<x<0$

따라서 $b-a$의 값은 $a=-\frac{1}{2}$, $b=0$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 답 ③

09 $\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=(k+3)\overrightarrow{AB}$에서

$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PA}+3(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{AB})+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$

$4\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{AB}$

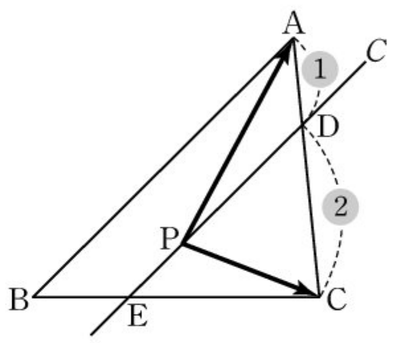
$\therefore\ \frac{k}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{PD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$이므로

$\frac{k}{6}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PD}$

따라서 점 P가 나타내는 도형 C는 점 D를 지나고 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 평행한 직선이므로 변 BC를 1 : 2로 내분하는 점을 E라 할 때, 도형 C와 삼각형 ABC는 두 점 D, E에서 만난다.



이때, $\overline{AB}:\overline{DE}=3:2$이고, $\overline{AB}=12$이므로

$\overline{DE}=\frac{2}{3}\overline{AB}=\frac{2}{3}\times12=8$ 답 8

10 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 중심이 원점 O이고, 반지름의 길이가 1인 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=1$ ……㉠

이때, Q(4, 0)이고, $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$이므로 점 R의 좌표를 (x, y)라 하면

$(x, y)=3(a, b)+(4, 0)$

$=(3a+4, 3b)$

즉, $x=3a+4$, $y=3b$이므로

$a=\frac{x-4}{3}$, $b=\frac{y}{3}$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$

$\therefore\ (x-4)^2+y^2=9$

따라서 점 R는 중심의 좌표가 (4, 0)이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있으므로 점 R의 자취의 길이는

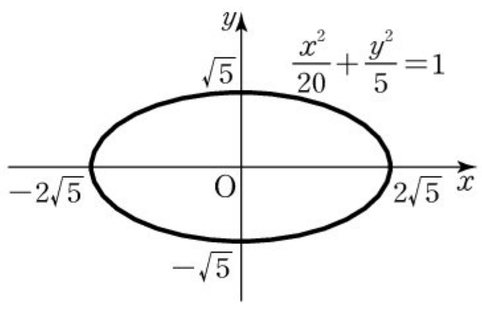
$2\pi\times3=6\pi$ 답 6π

• 다른풀이 •

점 P가 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있으므로 벡터 $3\overrightarrow{OP}$의 종점이 나타내는 도형은 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

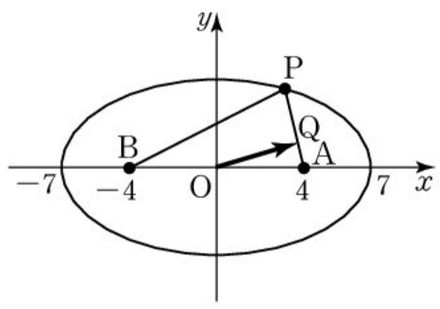
이 원을 C라 하면 Q$(4, 0)$이므로 $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 도형은 원 C를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 것이다.
즉, 점 R가 나타내는 도형은 중심이 점 Q이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 점 R의 자취의 길이는
$2\pi\times3=6\pi$

11 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(4, -2)$이므로
$x\vec{a}+y\vec{b}=x(1, 2)+y(4, -2)$
$=(x+4y, 2x-2y)$
$|x\vec{a}+y\vec{b}|=10$이므로
$|x\vec{a}+y\vec{b}|=\sqrt{(x+4y)^2+(2x-2y)^2}$
$=\sqrt{x^2+8xy+16y^2+4x^2-8xy+4y^2}$
$=\sqrt{5x^2+20y^2}=10$
위의 식의 양변을 제곱하면
$5x^2+20y^2=100 \quad \therefore \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$



즉, 도형 C는 타원이고, 타원 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ 위를 움직이는 두 점 Q, R가 $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\vec{0}$를 만족시키므로 벡터 $\overrightarrow{OQ}$는 벡터 $\overrightarrow{OR}$와 크기가 같고, 방향은 반대이다.
이때, $|\overrightarrow{QR}|$의 값이 최대이기 위해서는 두 점 Q, R가 타원의 장축의 양 끝 점이어야 하므로
$(|\overrightarrow{QR}|\text{의 최댓값})=2\sqrt{5}-(-2\sqrt{5})=4\sqrt{5}$
(장축의 길이)
$|\overrightarrow{QR}|$의 값이 최소이기 위해서는 두 점 Q, R가 타원의 단축의 양 끝 점이어야 하므로
$(|\overrightarrow{QR}|\text{의 최솟값})=\sqrt{5}-(-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$
(단축의 길이)
따라서 $|\overrightarrow{QR}|$의 최댓값과 최솟값의 합은
$4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{5}$

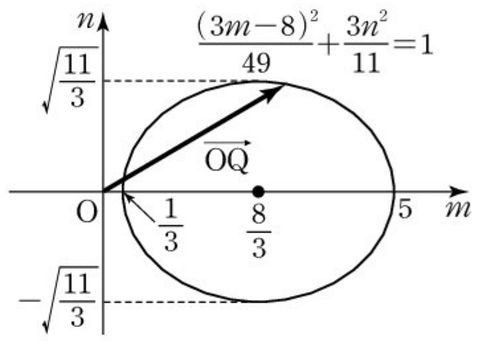
12 $|\vec{t}-\vec{a}|+|\vec{t}-\vec{b}|=14$에서
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{t}=\overrightarrow{OP}$라 하면
$|\vec{t}-\vec{a}|+|\vec{t}-\vec{b}|=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|$
$=|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|$
$=\overline{AP}+\overline{BP}=14$
즉, 점 P는 두 점 A$(4, 0)$, B$(-4, 0)$을 초점으로 하고, 장축의 길이가 14인 타원 위에 있다.
한편, 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하면
$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\vec{t}+\frac{2}{3}\vec{a}$
따라서 $\left|\frac{1}{3}\vec{t}+\frac{2}{3}\vec{a}\right|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값과 같다.



위의 그림에서 점 P의 좌표가 $(7, 0)$일 때, $|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대이므로 $|\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은
$\left|\frac{1}{3}(7, 0)+\frac{2}{3}(4, 0)\right|=|(5, 0)|=5$ 답 ①

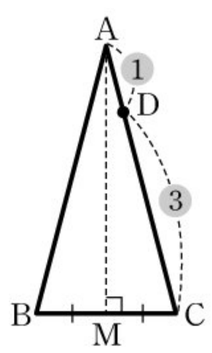
blacklabel 특강 풀이첨삭

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{x+8}{3}, \frac{y}{3}\right)$이다.
$\frac{x+8}{3}=m$, $\frac{y}{3}=n$으로 놓으면 $x=3m-8$, $y=3n$
점 P(x, y)는 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$ 위에 있으므로
$\frac{(3m-8)^2}{49}+\frac{(3n)^2}{33}=1 \quad \therefore \frac{\left(m-\frac{8}{3}\right)^2}{\frac{49}{9}}+\frac{n^2}{\frac{11}{3}}=1$
따라서 점 Q(m, n)의 자취를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 Q의 좌표가 $(5, 0)$일 때, $|\overrightarrow{OQ}|$는 최댓값 5를 갖는다.



13 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$
이때, $\overline{AB}=\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4$이므로
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=8$, $|\vec{b}-\vec{a}|=4$
$|\vec{b}-\vec{a}|=4$에서 $|\vec{b}-\vec{a}|^2=16$이므로
$|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=16$
$8^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+8^2=16$
$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=56$ ……㉠
한편, 변 AC를 $1:3$으로 내분하는 점이 D이므로
$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{b}$
$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$
$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot(-\vec{b})$
$=-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=-\frac{1}{4}\times8^2+56\ (\because ㉠)=40$ 답 ①

• 다른풀이 1 •
변 BC의 중점을 M이라 하면 선분 AM은 변 BC를 수직이등분하므로
$\overline{BM}=\overline{CM}=2$
$\overline{AB}=8$이므로 직각삼각형 ABM에서
$\overline{AM}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$



이때, $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{b}$라 하면

$|\vec{a}|=2\sqrt{15}$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ……㉡ ($\angle AMC=90^\circ$이므로)

이고, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\vec{a}-\vec{b}$

점 D는 선분 AC를 1 : 3으로 내분하므로

$$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}=\frac{3}{4}(\vec{a}-\vec{b})=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}$$

$$=2\vec{b}+\left(\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}\right)\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

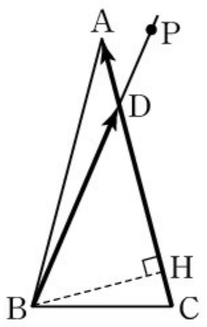
$$=\frac{3}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{5}{4}|\vec{b}|^2$$

$$=\frac{3}{4}\times(2\sqrt{15})^2+\frac{1}{2}\times 0-\frac{5}{4}\times 2^2\ (\because ㉡)$$

$$=40$$

• 다른풀이 2 •

오른쪽 그림과 같이 선분 BD의 연장선 위의 한 점을 P라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$가 이루는 각은 $\angle ADP$이므로 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면



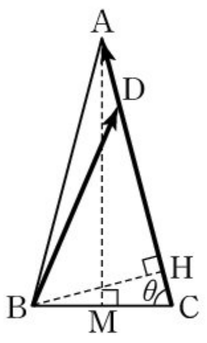
$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{CA}|\cos(\angle ADP)$$

$$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{CA}|\cos(\angle BDH)$$

$$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{CA}|\times\frac{|\overrightarrow{DH}|}{|\overrightarrow{BD}|}$$

$$=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DH}| \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M, $\angle ACB=\theta$라 하면 $\overline{CM}=2$, $\overline{AC}=8$이므로



$$\cos\theta=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$\overline{BC}=4$이므로 삼각형 BCH에서

$$\overline{CH}=\overline{BC}\cos\theta$$

$$=4\times\frac{1}{4}=1$$

이때, $\overline{AC}=8$이고, 선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이 D이므로

$$\overline{CD}=\frac{3}{4}\overline{AC}=\frac{3}{4}\times 8=6$$

$$\therefore \overline{DH}=\overline{CD}-\overline{CH}=6-1=5$$

따라서 ㉢에서

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DH}|$$

$$=8\times 5=40$$

14 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 $P(p, q)$ $(p>0, q>0)$에서의 접선의 방정식은

$$qy=x+p \qquad \therefore y=\frac{1}{q}(x+p)$$

이 접선이 x축과 만나는 점이 Q이므로

$Q(-p, 0)$

점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{q}$이므로 점 P를 지나고 점 P에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y-q=-q(x-p) \qquad \therefore y=-q(x-p-1)$$

이 직선이 x축과 만나는 점이 R이므로

$R(p+1, 0)$

즉, 세 점 P, Q, R의 위치벡터는 각각

$\overrightarrow{OP}=(p, q)$, $\overrightarrow{OQ}=(-p, 0)$, $\overrightarrow{OR}=(p+1, 0)$

이므로

$$\overrightarrow{OX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OR}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OR}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})$$

$$=-\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}+\frac{7}{6}\overrightarrow{OR}$$

$$=-(p, q)+\frac{1}{2}(-p, 0)+\frac{7}{6}(p+1, 0)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}p+\frac{7}{6}, -q\right)$$

$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OQ}=12$에서

$$\left(-\frac{1}{3}p+\frac{7}{6}, -q\right)\cdot(-p, 0)=12$$

$$\frac{1}{3}p^2-\frac{7}{6}p=12,\ 2p^2-7p-72=0$$

$$(2p+9)(p-8)=0 \qquad \therefore p=8\ (\because p>0)$$

이때, 점 $P(8, q)$가 포물선 $y^2=2x$ 위에 있으므로

$$q^2=2\times 8=16 \qquad \therefore q=4\ (\because q>0)$$

$$\therefore p-q=8-4=4$$

답 ②

15 이차방정식 $x^2-8x+10=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=10$ ……㉠

한편, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=6$이므로

$$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta+|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=36$$

이때, $|\overrightarrow{OA}|=\alpha$, $|\overrightarrow{OB}|=\beta$이므로

$$\alpha^2-2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2=36$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta\cos\theta=36$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$8^2-2\times 10-2\times 10\times\cos\theta=36,\ 20\cos\theta=8$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

16 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 α라 하자.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로

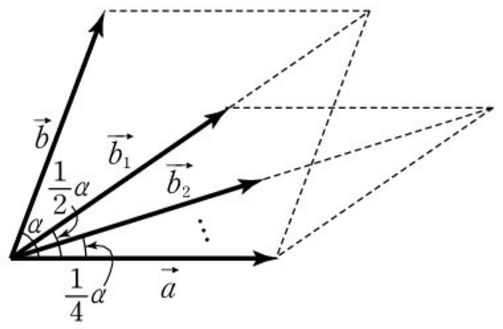
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=\cos\alpha$$

$|\overrightarrow{b_1}|=\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}\right|=1$, $|\overrightarrow{b_2}|=\left|\dfrac{\vec{a}+\overrightarrow{b_1}}{|\vec{a}+\overrightarrow{b_1}|}\right|=1$, …,

$|\overrightarrow{b_n}|=\left|\dfrac{\vec{a}+\overrightarrow{b_{n-1}}}{|\vec{a}+\overrightarrow{b_{n-1}}|}\right|=1$, …

에서 벡터 $\overrightarrow{b_1}$은 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 방향이 같고 크기가 1이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\overrightarrow{b_1}$이 이루는 각의 크기는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 α이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\overrightarrow{b_1}$이 이루는 각의 크기는 $\frac{1}{2}\alpha$이다.



같은 방법으로 두 벡터 $\vec{a}$, $\overrightarrow{b_2}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{1}{4}\alpha$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\overrightarrow{b_n}$이 이루는 각의 크기는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha$이다.

즉, $\theta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\alpha$이므로

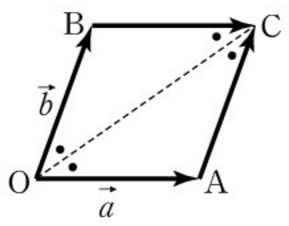
$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n=\frac{\frac{1}{2}\alpha}{1-\frac{1}{2}}=\alpha=60^\circ$$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$

$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ①

blacklabel 특강 풀이첨삭

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하고 벡터 $\overrightarrow{OA}$의 시점을 점 B로 옮길 때의 종점을 C라 하면 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로 □OACB는 마름모이다.



이때, ∠AOC=∠BCO (엇각),
∠BOC=∠BCO ($\because \overline{OB}=\overline{BC}$)이므로
∠AOC=∠BOC
즉, $\overline{OC}$는 ∠AOB의 이등분선이므로 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 이등분한다.

17 $\angle AOP_1=\angle P_1OP_2=\cdots=90^\circ\times\frac{1}{6}=15^\circ$이고,

$\overline{OP_3}\perp\overline{AB}$에서

$\overline{OP_3}=\overline{OP_1}\cos 30^\circ=\overline{OP_2}\cos 15^\circ$ ……㉠

이므로

$X=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

$=|\overrightarrow{OP_1}||\overrightarrow{OP_3}|\cos 30^\circ$

$=|\overrightarrow{OP_3}|\times|\overrightarrow{OP_1}|\cos 30^\circ$

$=|\overrightarrow{OP_3}|\times|\overrightarrow{OP_3}|$ ($\because$ ㉠)$=|\overrightarrow{OP_3}|^2$

$Y=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

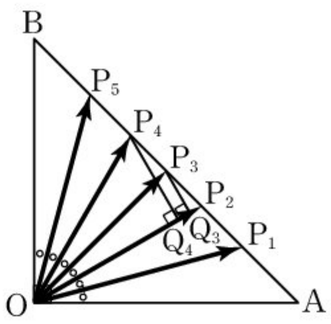
$=|\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OP_3}|\cos 15^\circ$

$=|\overrightarrow{OP_3}|\times|\overrightarrow{OP_2}|\cos 15^\circ$

$=|\overrightarrow{OP_3}|\times|\overrightarrow{OP_3}|$ ($\because$ ㉠)$=|\overrightarrow{OP_3}|^2$

$\therefore X=Y$ ……㉡

한편, 오른쪽 그림과 같이 두 점 P_3, P_4에서 선분 OP_2에 내린 수선의 발을 각각 Q_3, Q_4라 하면



$|\overrightarrow{OQ_3}|=|\overrightarrow{OP_3}|\cos 15^\circ$,

$|\overrightarrow{OQ_4}|=|\overrightarrow{OP_4}|\cos 30^\circ$이고,

$|\overrightarrow{OQ_4}|<|\overrightarrow{OQ_3}|$이므로

$|\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OQ_4}|<|\overrightarrow{OP_2}||\overrightarrow{OQ_3}|$

$|\overrightarrow{OP_2}|\times|\overrightarrow{OP_4}|\cos 30^\circ<|\overrightarrow{OP_2}|\times|\overrightarrow{OP_3}|\cos 15^\circ$

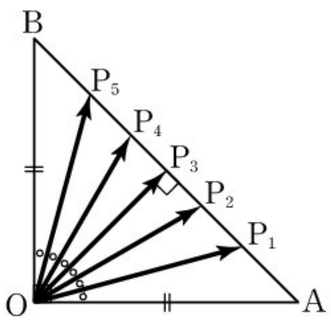
$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_4}<\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

$\therefore Z<Y$ ……㉢

㉡, ㉢에 의하여 $Z<X=Y$ 답 ④

• 다른풀이 •

△OAB가 직각이등변삼각형이므로 ∠BOA의 이등분선인 선분 OP_3은 변 AB의 수직이등분선이다.



직각삼각형 OP_1P_3의 꼭짓점 P_1에서 직선 OP_3에 내린 수선의 발은 P_3이므로

$X=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}=|\overrightarrow{OP_3}||\overrightarrow{OP_3}|=|\overrightarrow{OP_3}|^2$

같은 방법으로 직각삼각형 OP_2P_3의 꼭짓점 P_2에서 직선 OP_3에 내린 수선의 발도 P_3이므로

$Y=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=|\overrightarrow{OP_3}||\overrightarrow{OP_3}|=|\overrightarrow{OP_3}|^2$

한편 두 삼각형 OP_3P_2, OP_3P_4에서

$\overline{OP_3}$은 공통,

$\angle P_3OP_2=\angle P_3OP_4$,

$\angle OP_3P_4=\angle OP_3P_2=90^\circ$이므로

$\triangle OP_3P_2\equiv\triangle OP_3P_4$ (ASA 합동)

$\therefore Z=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_4}$

$=(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{P_3P_2})\cdot(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{P_3P_4})$

$=(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{P_3P_2})\cdot(\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{P_3P_2})$

$=|\overrightarrow{OP_3}|^2-|\overrightarrow{P_3P_2}|^2$

$\therefore Z<X=Y$ ($\because |\overrightarrow{P_3P_2}|>0$)

18 두 선분 AC, BD가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ ……㉠

ㄱ. 세 점 A, P, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PC}=l\overrightarrow{AC}$ (단, k, l은 0이 아닌 실수)

$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=(k+l)\overrightarrow{AC}$

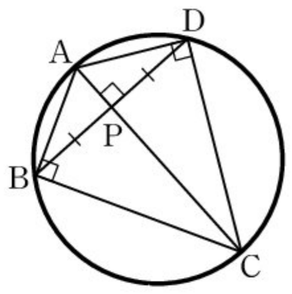
세 점 B, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{PB}=m\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{PD}=n\overrightarrow{BD}$ (단, m, n은 0이 아닌 실수)

$\therefore \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=(m+n)\overrightarrow{BD}$

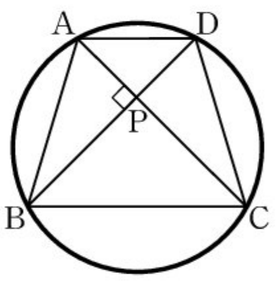
$\therefore (\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$
$=\{(k+l)\overrightarrow{AC}\}\cdot\{(m+n)\overrightarrow{BD}\}$
$=(k+l)(m+n)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
$=0$ ($\because$ ㉠) (참)

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이면 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 이루는 각의 크기가 90°이므로 선분 AC는 원의 지름이다.



원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 선분 AC는 선분 BD를 수직이등분한다.
$\therefore \overline{BP}=\overline{DP}$ ……㉡
이때, 두 삼각형 ABP, ADP에서
$\overline{AP}$는 공통, $\angle APB=\angle APD=90°$, $\overline{BP}=\overline{DP}$
이므로 $\triangle ABP\equiv\triangle ADP$ (SAS 합동)
$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle ABP=\angle ADP$ ……㉢
$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}$
$=-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BP}|\cos(\angle ABP)$
$=-|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{DP}|\cos(\angle ADP)$
$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DP}$ ($\because$ ㉡, ㉢) (참)

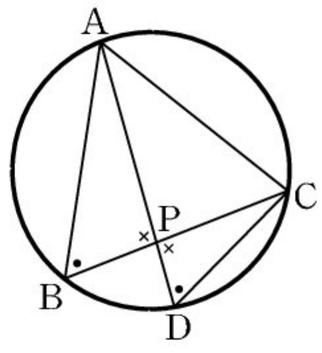
ㄷ. $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$에서 두 선분 AD, BC가 서로 평행하므로
$\angle ADB=\angle DBC$ (엇각) ……㉣
호 AB에 대한 원주각의 크기는 같으므로
$\angle ADB=\angle ACB$ ……㉤
또한, 호 AD에 대한 원주각의 크기는 같으므로
$\angle ABD=\angle ACD$ ……㉥
$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$
$=\angle ACD+\angle ADB$ ($\because$ ㉣, ㉥)
$=\angle ACD+\angle ACB$ ($\because$ ㉤)
$=\angle BCD$
즉, □ABCD는 등변사다리꼴이고, △APD, △BPC는 직각이등변삼각형이다.



$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$이므로 $\overline{AD}=a$라 하면
$\overline{BC}=2a$
직각삼각형 APD에서 $\overline{AP}=\overline{DP}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$
직각삼각형 BPC에서 $\overline{BP}=\overline{CP}=\sqrt{2}a$
$\therefore \overline{BD}=\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\sqrt{2}a=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$
삼각형 ACD의 꼭짓점 D에서 변 AC에 내린 수선의 발이 P이므로
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{3\sqrt{2}}{2}a=\frac{3}{2}a^2$
삼각형 ABD의 꼭짓점 A에서 변 BD에 내린 수선의 발이 P이므로
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BD}|$
$=\sqrt{2}a\times\frac{3\sqrt{2}}{2}a=3a^2$
$\therefore 2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

19 세 점 A, B, C가 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있으므로
$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$
조건 (가)의 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$에서
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$이므로
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$
$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$
$1^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1^2=1^2$
$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}$
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$이므로
$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$
$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$
$=1^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1^2=3$
$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$
같은 방법으로 계산하면
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$에서 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$,
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}$에서 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}$
이므로 △ABC는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이다.
한편, 점 P가 선분 BC를 2 : 3으로 내분하므로
$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ……㉠
$|\overrightarrow{AP}|^2$
$=\left|\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right|^2$
$=\frac{9}{25}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{12}{25}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{25}|\overrightarrow{AC}|^2$ ……㉡
이때, △ABC가 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형이고 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기가 60°이므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°$
$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
이것을 ㉡에 대입하면
$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{9}{25}\times(\sqrt{3})^2+\frac{12}{25}\times\frac{3}{2}+\frac{4}{25}\times(\sqrt{3})^2=\frac{57}{25}$
$\therefore |\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{57}}{5}$
$|\overrightarrow{BP}|=\frac{2}{5}|\overrightarrow{BC}|=\frac{2\sqrt{3}}{5}$, $|\overrightarrow{CP}|=\frac{3}{5}|\overrightarrow{BC}|=\frac{3\sqrt{3}}{5}$이고,
두 삼각형 ABP, CDP가 서로 닮은 도형이므로



$|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{CP}|:|\overrightarrow{DP}|$
에서
$\frac{\sqrt{57}}{5}:\frac{2\sqrt{3}}{5}=\frac{3\sqrt{3}}{5}:|\overrightarrow{DP}|$,
$\frac{\sqrt{57}}{5}|\overrightarrow{DP}|=\frac{18}{25}$
$\therefore |\overrightarrow{DP}|=\frac{18}{5\sqrt{57}}=\frac{6\sqrt{57}}{95}$
즉,

$$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{DP}|$$
$$=\frac{\sqrt{57}}{5}+\frac{6\sqrt{57}}{95}=\frac{5\sqrt{57}}{19}$$

이므로 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{25}{19}|\overrightarrow{AP}|$

그런데 점 P가 선분 AD 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{25}{19}\overrightarrow{AP}$$
$$=\frac{25}{19}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)\ (\because \text{㉠})$$
$$=\frac{15}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{10}{19}\overrightarrow{AC}$$
$$=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m=\frac{15}{19}$, $n=\frac{10}{19}$이므로

$$2m-n=2\times\frac{15}{19}-\frac{10}{19}=\frac{20}{19}$$

답 $\frac{20}{19}$

• 다른풀이 •

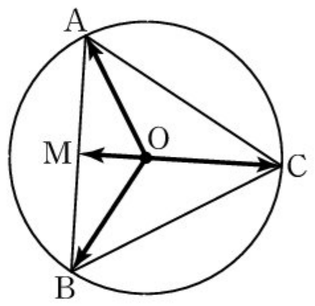
조건 (가)의 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

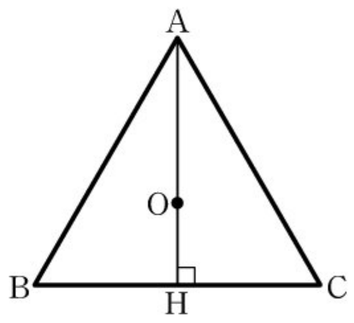
즉, 세 점 O, C, M은 한 직선 위에 있고 $|\overrightarrow{OM}|:|\overrightarrow{OC}|=1:2$이므로 점 O는 선분 CM을 2 : 1로 내분한다.



즉, 점 O는 △ABC의 무게중심이므로 △ABC는 정삼각형이다.

꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 O는 선분 AH를 2 : 1로 내분하고,

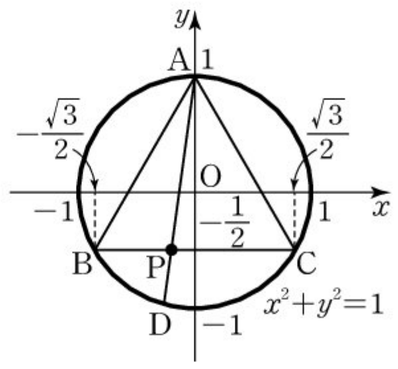
$\overline{OA}=1$이므로 $\overline{AH}=\frac{3}{2}$



이때, 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{3}$



한편, 주어진 원과 정삼각형 ABC를 점 O가 원점, 변 BC가 x축과 평행하도록 좌표평면 위에 놓으면

원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이고,

$$A(0,\ 1),\ B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$

점 P가 선분 BC를 2 : 3으로 내분하므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\qquad\cdots\cdots\text{㉡}$$
$$=\frac{3}{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{10},\ -\frac{3}{2}\right)$$

D$(p,\ q)$라 하면 $\overrightarrow{AD}=(p,\ q-1)$이고, 세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$ (단, $k\neq0$) $\qquad\cdots\cdots$㉢

$$(p,\ q-1)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}k,\ -\frac{3}{2}k\right)$$

$$\therefore p=-\frac{\sqrt{3}}{10}k,\ q=-\frac{3}{2}k+1$$

점 D$(p,\ q)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}k\right)^2+\left(-\frac{3}{2}k+1\right)^2=1$$

$$\frac{57}{25}k^2-3k=0,\ \frac{57}{25}k\left(k-\frac{25}{19}\right)=0$$

$\therefore k=\frac{25}{19}$ $(\because k\neq0)$

따라서 ㉡, ㉢에서

$$\overrightarrow{AD}=\frac{25}{19}\overrightarrow{AP}$$
$$=\frac{25}{19}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{15}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{10}{19}\overrightarrow{AC}$$

blacklabel 특강 참고

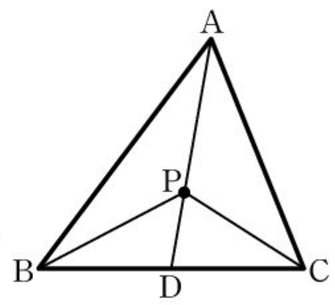
삼각형 ABC와 그 내부의 한 점 P, 선분 AP의 연장선과 선분 BC의 교점 D에 대하여

$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$이면

(1) $\overline{BD}:\overline{DC}=c:b$

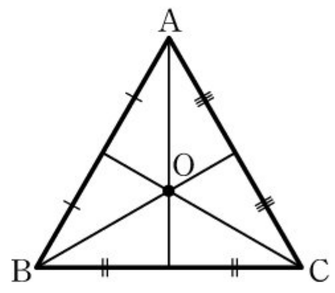
(2) $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=a:b:c$

(3) $a=b=c=1$이면 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.



이 문제에서 외접원의 중심 O에 대하여 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$이므로 반직선 CO, AO, BO는 각각 삼각형 ABC의 각 변을 이등분한다.

즉, 점 O가 삼각형 ABC의 무게중심이므로 △ABC는 정삼각형이다.



20 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$의 두 초점을 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=100-64=36$ $\quad\therefore c=6\ (\because c>0)$

$\therefore$ F$(6,\ 0)$, F′$(-6,\ 0)$

$$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF'})$$
$$=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF})\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF})$$
$$=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OF}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OP}|^2-36\qquad\cdots\cdots\text{㉠}$$

이때, 주어진 타원의 장축의 길이가 20, 단축의 길이가 16이므로 타원 위의 점 P에 대하여

$8 \le |\overrightarrow{OP}| \le 10$

즉, ㉠에서 $28 \le |\overrightarrow{OP}|^2 - 36 \le 64$

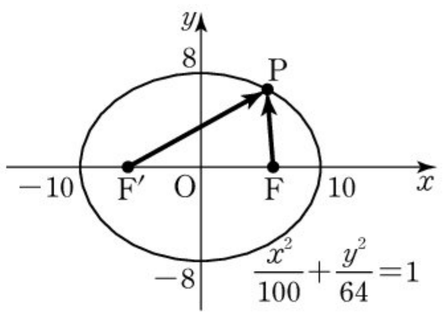
$\therefore 28 \le \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{F'P} \le 64$

따라서 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{F'P}$의 최댓값은 $M=64$, 최솟값은 $m=28$이므로

$M+m=64+28=92$ 답 92

• 다른풀이 •

타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이라 하면



$c=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

$\therefore F(6, 0), F'(-6, 0)$

이때, 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ 위의 임의의 한 점 P의 좌표를 $(10\cos\theta, 8\sin\theta)$라 하면

$\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{F'P}$

$=(10\cos\theta-6, 8\sin\theta) \cdot (10\cos\theta+6, 8\sin\theta)$

$=10^2\cos^2\theta-6^2+8^2\sin^2\theta$

$=64(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+36\cos^2\theta-36$

$=64+36\cos^2\theta-36$

$=36\cos^2\theta+28$

그런데 $-1 \le \cos\theta \le 1$에서 $0 \le \cos^2\theta \le 1$이므로

$\cos^2\theta=1$일 때, $M=36+28=64$

$\cos^2\theta=0$일 때, $m=0+28=28$

$\therefore M+m=64+28=92$

21 세 점 A, B, C는 한 원 위의 점이므로

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ ……㉠

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$에서

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$x^2|\overrightarrow{OA}|^2+10x(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})+25|\overrightarrow{OB}|^2=9|\overrightarrow{OC}|^2$

$x^2+10x(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})+25=9$ ($\because$ ㉠)

$10x(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})=-x^2-16$

$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=\frac{-x^2-16}{10x}$

$=-\frac{1}{10}\left(x+\frac{16}{x}\right)$

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{16}{x} \ge 2\sqrt{x \times \frac{16}{x}}$

$=8$ (단, 등호는 $x=4$일 때 성립)

즉, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \le -\frac{1}{10} \times 8 = -\frac{4}{5}$이므로

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$는 $x=4$일 때 최댓값 $-\frac{4}{5}$를 갖는다.

$x=4$일 때, 주어진 식은

$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

이므로

$3\overrightarrow{CO}=4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$

$\therefore \frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}$

이때, 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 하면

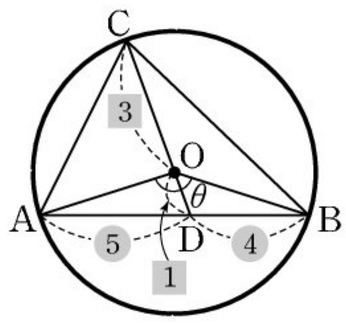
$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}$

이므로 $\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OD}$에서

$\overline{CO} : \overline{OD}=3 : 1$

$\therefore \overline{CD} : \overline{OD}=4 : 1$ ……㉡

즉, 조건을 만족시키는 세 점 A, B, C와 선분 AB의 내분점 D는 다음 그림과 같다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$에서

$-\frac{4}{5}=1\times1\times\cos\theta$ $\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$

즉, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는

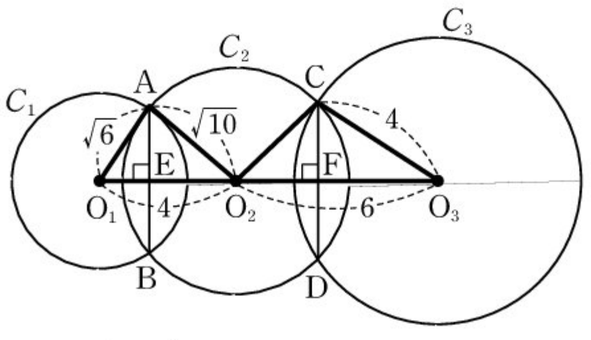
$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

따라서 ㉡에서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=4\triangle OAB=4\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

$\therefore 50S=50\times\frac{6}{5}=60$ 답 60

22 두 원 C_1, C_2의 두 교점을 A, B, 두 원 C_2, C_3의 두 교점을 C, D라 하고, 두 선분 AB, CD가 선분 O_1O_3과 만나는 점을 각각 E, F라 하자.



$\overline{O_1O_2}=4$이므로 $\overline{O_1E}=x$라 하면

$\overline{O_2E}=4-x$

두 직각삼각형 AO_1E, AO_2E에서

$\overline{AE}^2=(\sqrt{6})^2-x^2=(\sqrt{10})^2-(4-x)^2$

$8x=12$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{O_1E}=\frac{3}{2}, \overline{O_2E}=\frac{5}{2}$

$\overline{O_2O_3}=6$이므로 $\overline{O_2F}=y$라 하면

$\overline{O_3F}=6-y$

두 직각삼각형 CO_2F, CO_3F에서

$\overline{CF}^2=(\sqrt{10})^2-y^2=4^2-(6-y)^2$

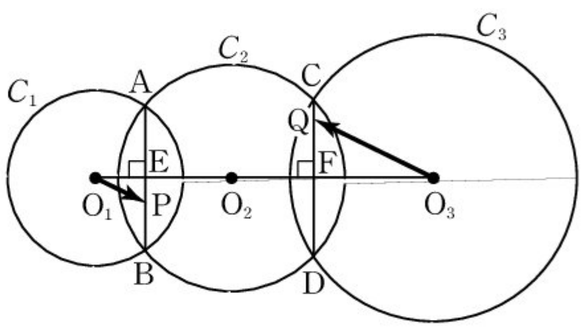
$12y=30 \qquad \therefore y=\frac{5}{2}$

$\therefore \overline{O_2F}=\frac{5}{2}, \overline{O_3F}=\frac{7}{2}$

이때, $\overline{O_2E}=\overline{O_2F}=\frac{5}{2}$이므로

$\overline{AB}=\overline{CD}=2\overline{AE}$

$=2\times\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}$



$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}$

$=(\overrightarrow{O_1E}+\overrightarrow{EP})\cdot(\overrightarrow{O_3F}+\overrightarrow{FQ})$

$=\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{O_3F}+\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{O_3F}+\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}$

$=\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{O_3F}+\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}$ ……㉠

에서 두 벡터 $\overrightarrow{O_1E}$, $\overrightarrow{FO_3}$이 이루는 각의 크기가 $0°$이므로

$\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{O_3F}=\overrightarrow{O_1E}\cdot(-\overrightarrow{FO_3})$

$=-\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{FO_3}$

$=-|\overrightarrow{O_1E}||\overrightarrow{FO_3}|\cos 0°$

$=-\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}\times 1=-\frac{21}{4}$ ……㉡

$\overrightarrow{O_1E}\cdot\overrightarrow{O_3F}<0$이므로 $|2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|$의 값이 최대이려면 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}<0$이고, $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}$의 값이 최소이어야 한다.

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{FQ}$가 서로 평행하므로 두 벡터가 서로 반대 방향일 때 $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}<0$이고,

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{EP}\cdot(-\overrightarrow{QF})$

$=-\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{QF}$

$=-|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{QF}|\cos 0°$

$=-|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{QF}|$

$0\le|\overrightarrow{EP}|\le\frac{\sqrt{15}}{2}$, $0\le|\overrightarrow{QF}|\le\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로

$0\le|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{QF}|\le\frac{15}{4}$

$\therefore -\frac{15}{4}\le\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FQ}\le\frac{15}{4}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-9\le\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}\le-\frac{3}{2}$이므로

$3\le|2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|\le 18$

따라서 $|2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|$의 최댓값은 18이다. 답 18

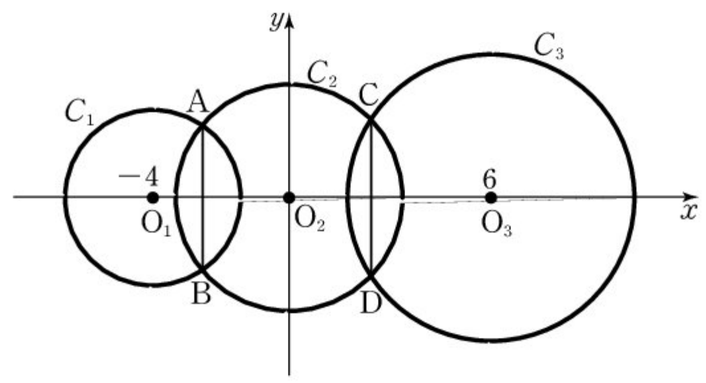
• 다른풀이 •

주어진 세 원 C_1, C_2, C_3을 점 O_2가 원점 O, 선분 O_1O_3이 x축 위에 오도록 좌표평면 위에 놓으면 다음 그림과 같고, 세 원의 방정식은 각각

$C_1:(x+4)^2+y^2=6$ ……㉮

$C_2:x^2+y^2=10$ ……㉯

$C_3:(x-6)^2+y^2=16$ ……㉰



두 원 C_1, C_2의 두 교점을 A, B, 두 원 C_2, C_3의 두 교점을 C, D라 하자.

두 원 C_1, C_2의 두 교점 A, B의 x좌표는 ㉮, ㉯에서

$10+8x+16=6$, $8x=-20 \qquad \therefore x=-\frac{5}{2}$

$\therefore A\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

두 원 C_2, C_3의 두 교점 C, D의 x좌표는 ㉯, ㉰에서

$10-12x+36=16$, $12x=30 \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

$\therefore C\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right), D\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

점 P는 선분 AB 위에 있고, 점 Q는 선분 CD 위에 있으므로

$P\left(-\frac{5}{2}, a\right), Q\left(\frac{5}{2}, b\right)$

$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}\le a\le\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\le b\le\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

라 하면 $O_1(-4, 0)$, $O_3(6, 0)$이므로

$\overrightarrow{O_1P}=\left(\frac{3}{2}, a\right), \overrightarrow{O_3Q}=\left(-\frac{7}{2}, b\right)$

$\therefore |2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|=\left|(3, 2a)\cdot\left(-\frac{7}{2}, b\right)\right|$

$=\left|-\frac{21}{2}+2ab\right|$

이때, $-\frac{\sqrt{15}}{2}\le a\le\frac{\sqrt{15}}{2}$, $-\frac{\sqrt{15}}{2}\le b\le\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로

$-\frac{15}{4}\le ab\le\frac{15}{4}$, $-18\le-\frac{21}{2}+2ab\le-3$

$3\le\left|-\frac{21}{2}+2ab\right|\le 18$

$\therefore 3\le|2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|\le 18$

따라서 $|2\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_3Q}|$의 최댓값은 18이다.

23 점 D에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

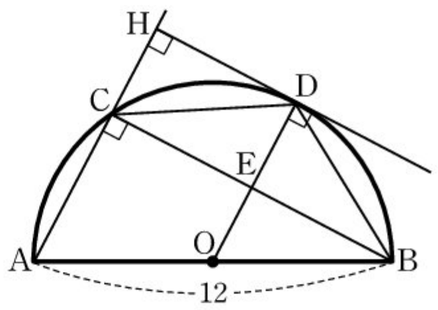
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CD}|\cos(\angle HCD)$

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CD}|\times\frac{|\overrightarrow{CH}|}{|\overrightarrow{CD}|}$

$=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CH}|$ ……㉠

반원 위의 점 C의 위치가 정해져 있다고 가정하면 $|\overrightarrow{AC}|$의 값이 정해지므로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$의 값이 최대이려면 $|\overrightarrow{CH}|$의 값이 최대이어야 한다.

이때, 점 D가 호 BC 위를 움직이므로 다음 그림과 같이 직선 DH가 점 D에서의 접선일 때 $|\overrightarrow{CH}|$의 값이 최대이다.



$\angle ACB=90^\circ$에서 두 직선 BC, DH가 서로 평행하므로 반원의 중심을 O라 하고, 두 선분 OD, BC의 교점을 E라 하면

$|\overrightarrow{CH}|=|\overrightarrow{ED}|$

또한, 두 직선 AC, OE가 서로 평행하고 점 O가 선분 AB의 중점이므로

$|\overrightarrow{OE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$

$\therefore |\overrightarrow{CH}|=|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{OD}|-|\overrightarrow{OE}|$

$=6-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$

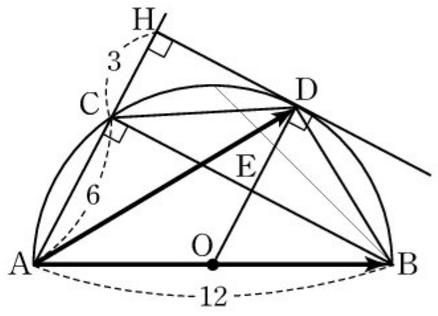
$\overline{AC}=a\ (0<a<12)$라 하면

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CH}|\ (\because$ ㉠)

$=a\left(6-\frac{1}{2}a\right)$

$=-\frac{1}{2}(a-6)^2+18$

따라서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$의 값은 $a=6$, 즉 $|\overrightarrow{AC}|=6$일 때 최대이다.



□AODC가 마름모이므로 $\overline{CD}=6$

직각삼각형 CDH에서 $\overline{DH}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

직각삼각형 ADH에서 $\overline{AD}=\sqrt{9^2+(3\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos(\angle DAB)$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\times\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB}|}$

$=|\overrightarrow{AD}|^2$

$=(6\sqrt{3})^2=108$ 답 ③

24 해결단계

❶ 단계	$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$와 조건 ㈏를 이용하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 값이 최소가 되기 위한 조건을 파악한다.
❷ 단계	$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값 M과 그때의 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다.
❸ 단계	두 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 점 P의 좌표를 구하여 삼각형 PAB의 넓이 S를 구한 후, MS의 값을 구한다.

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$이므로

$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|^2$

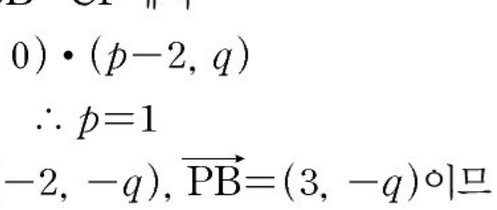
$=|\overrightarrow{PA}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PB}|^2$

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{BA}|^2}{2}$

$=\frac{45-|\overrightarrow{BA}|^2}{2}\ (\because$ 조건 ㈏) ……㉠

즉, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 값이 최소이려면 $|\overrightarrow{BA}|$의 값이 최대이어야 한다.

이때, 점 A는 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에, 점 B는 중심이 C(2, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B가 각각 두 점 $(-1, 0)$, $(4, 0)$에 위치할 때 $|\overrightarrow{BA}|$의 값이 최대이다.



즉, $|\overrightarrow{BA}|$의 최댓값이 5이므로 ㉠에서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최솟값 M은

$M=\frac{45-5^2}{2}=10$

이때, P(p, q)라 하면

$\overrightarrow{OA}=(-1, 0)$, $\overrightarrow{OP}=(p, q)$, $\overrightarrow{CB}=(2, 0)$,

$\overrightarrow{CP}=(p-2, q)$

조건 ㈎의 $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}$에서

$2(-1, 0)\cdot(p, q)=(2, 0)\cdot(p-2, q)$

$-2p=2p-4$, $4p=4$ $\therefore p=1$

즉, P$(1, q)$이고, $\overrightarrow{PA}=(-2, -q)$, $\overrightarrow{PB}=(3, -q)$이므로 조건 ㈏에서

$(-2)^2+(-q)^2+3^2+(-q)^2=45$, $2q^2=32$

$q^2=16$ $\therefore q=-4$ 또는 $q=4$

따라서 P$(1, -4)$ 또는 P$(1, 4)$이므로 삼각형 PAB의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times5\times4=10$

$\therefore MS=10\times10=100$ 답 100

25 $\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+t\vec{b}$에서 점 P가 나타내는 직선의 방향벡터는 $\vec{b}=(3, -4)$

또한,

$\overrightarrow{OQ}=(1-s)\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-s\vec{a}-\vec{b}=(\vec{a}-\vec{b})-s\vec{a}$

에서 점 Q가 나타내는 직선의 방향벡터는

$-\vec{a}=(1, -3)$

$\therefore \cos\theta=\frac{|\vec{b}\cdot(-\vec{a})|}{|\vec{b}||(-\vec{a})|}$

$=\frac{|(3, -4)\cdot(1, -3)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}$

$=\frac{15}{5\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \cos^2\theta=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{9}{10}$ 답 ⑤

26 두 점 $A(t, -2)$, $B(7, t)$를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u_1}$이라 하면

$\vec{u_1}=\overrightarrow{AB}=(7-t, t+2)$

직선 $\frac{x-15}{4}=\frac{8-y}{5}$의 방향벡터를 $\vec{u_2}$라 하면

$\vec{u_2}=(4, -5)$

이때, 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$에서

$(7-t, t+2)\cdot(4, -5)=0$

$4(7-t)-5(t+2)=0$

$28-4t-5t-10=0$

$9t=18 \quad \therefore t=2$ 답 ②

• 다른풀이 •

두 점 $A(t, -2)$, $B(7, t)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{t+2}{7-t}$

직선 $\frac{x-15}{4}=\frac{8-y}{5}$, 즉 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{107}{4}$과 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{t+2}{7-t}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-1$

$5t+10=28-4t$

$9t=18 \quad \therefore t=2$

27 점 $(4, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, -1)$인 직선 l의 방정식은

$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-1} \quad \therefore y=-x+6$

직선 l 위의 점 A의 좌표를 $(a, -a+6)$이라 하고, $C(3, 7)$이라 하면 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발이 점 A이므로 벡터 $\overrightarrow{AC}$와 직선 l은 서로 수직이다.

$\overrightarrow{AC}=(3-a, a+1)$이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$에서

$(3-a, a+1)\cdot(1, -1)=0$

$3-a-(a+1)=0$

$\therefore a=1$

$\therefore A(1, 5)$

같은 방법으로 직선 m: $\frac{x-2}{4}=-\frac{y+2}{5}$, 즉 $y=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ 위의 점 B의 좌표를 $\left(b, -\frac{5}{4}b+\frac{1}{2}\right)$이라 하면 점 C에서 직선 m에 내린 수선의 발이 점 B이므로 벡터 $\overrightarrow{BC}$와 직선 m은 서로 수직이다.

직선 m의 방향벡터를 $\vec{d}$라 하면 $\vec{d}=(4, -5)$이고,

$\overrightarrow{BC}=\left(3-b, \frac{5}{4}b+\frac{13}{2}\right)$이므로

$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{d}=0$에서

$\left(3-b, \frac{5}{4}b+\frac{13}{2}\right)\cdot(4, -5)=0$

$4(3-b)-5\left(\frac{5}{4}b+\frac{13}{2}\right)=0$

$\therefore b=-2$

$\therefore B(-2, 3)$

따라서 $\overrightarrow{OA}=(1, 5)$, $\overrightarrow{OB}=(-2, 3)$이므로

$|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}|=|(1, 5)\cdot(-2, 3)|$

$=|-2+15|=13$ 답 ⑤

28 ㄱ. $A(1, 2)$, $B(-3, 1)$에서 두 점 A, B의 위치벡터는

$\overrightarrow{OA}=(1, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(-3, 1)$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OA}+t(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ ……㉠

이므로 도형 C는 방향벡터가

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-3, 1)-(1, 2)$

$=(-4, -1)$

인 직선이다.

그런데 벡터 $\vec{u}=(1, 4)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하지 않으므로 도형 C는 벡터 $\vec{u}$에 평행하지 않다. (거짓)

ㄴ. $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$에서 $(1-t)+t=1$이고, $0\le t\le 1$에서 $0\le 1-t\le 1$이므로 점 P는 선분 AB 위에 있다.

따라서 도형 C의 길이는 선분 AB의 길이와 같으므로

$\sqrt{(-3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$ (참)

ㄷ. ㉠에서

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=(1, 2)+t(-4, -1)$

$=(-4t+1, -t+2)$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P의 위치벡터는

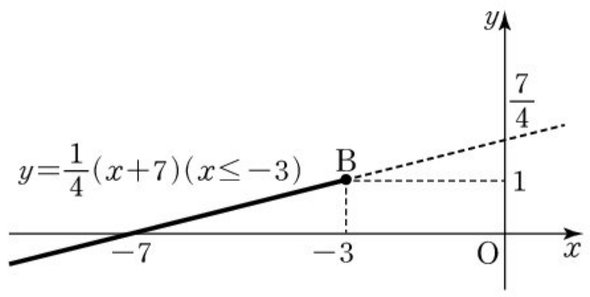
$\overrightarrow{OP}=(x, y)$이므로

$(x, y)=(-4t+1, -t+2)$

즉, $x=-4t+1$, $y=-t+2$에서

$x=-4(-y+2)+1 \quad \therefore y=\frac{1}{4}(x+7)$

또한, $t\ge 1$에서 $-4t+1\le -3$이므로 $x\le -3$



따라서 직선 $y=\frac{1}{4}(x+7)$ $(x\le -3)$은 위의 그림과 같으므로 도형 C는 제2사분면과 제3사분면을 지난다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

29 원점 O에 대한 세 점 $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(0, -1)$의 위치벡터는

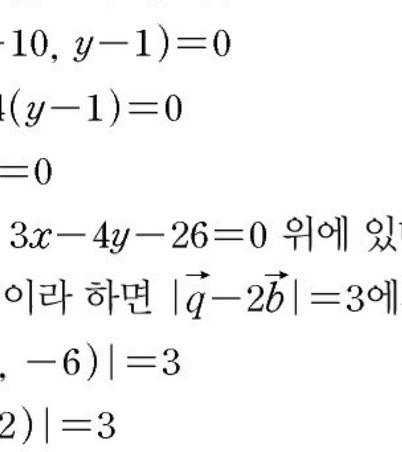
$\overrightarrow{OA}=(1, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(4, 1)$, $\overrightarrow{OC}=(0, -1)$

좌표평면 위의 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P의 위치벡터는 $\overrightarrow{OP}=(x, y)$이므로

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$
$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$
$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}$
$=(1, 2)+(4, 1)+(0, -1)-3(x, y)$
$=(5-3x, 2-3y)$
이때, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=9$에서
$\sqrt{(5-3x)^2+(2-3y)^2}=9$
$\sqrt{(3x-5)^2+(3y-2)^2}=9$
위의 식의 양변을 제곱하면
$(3x-5)^2+(3y-2)^2=81$
$\therefore \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=9$ ……㉠

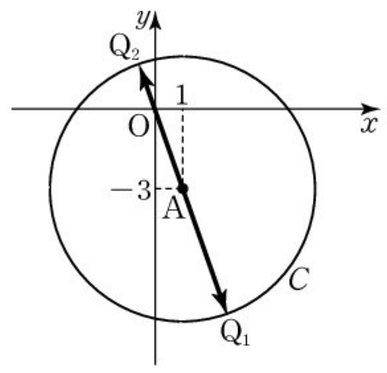
즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다.
$y=0$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{77}{9}$ $\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{77}}{3}$
따라서 원 ㉠이 x축과 만나는 두 점의 좌표가
$\left(\frac{5+\sqrt{77}}{3}, 0\right), \left(\frac{5-\sqrt{77}}{3}, 0\right)$
이므로 두 점 사이의 거리는
$\frac{5+\sqrt{77}}{3}-\frac{5-\sqrt{77}}{3}=\frac{2\sqrt{77}}{3}$ 답 ④

30 P(x, y)라 하면 $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$에서
$(-3, 4)\cdot\{(x, y)-(10, 1)\}=0$
$(-3, 4)\cdot(x-10, y-1)=0$
$-3(x-10)+4(y-1)=0$
$\therefore 3x-4y-26=0$
즉, 점 P는 직선 $3x-4y-26=0$ 위에 있다.
한편, Q(x', y')이라 하면 $|\vec{q}-2\vec{b}|=3$에서
$|(x', y')-2(3, -6)|=3$
$|(x'-6, y'+12)|=3$
$\sqrt{(x'-6)^2+(y'+12)^2}=3$
위의 식의 양변을 제곱하면
$(x'-6)^2+(y'+12)^2=9$
즉, 점 Q는 원 $(x-6)^2+(y+12)^2=9$ 위에 있다.



원 $(x-6)^2+(y+12)^2=9$의 중심을 C$(6, -12)$라 하면 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소이기 위해서는 직선 PQ가 점 C를 지나야 한다.
점 C$(6, -12)$에서 직선 $3x-4y-26=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=\frac{|3\times6-4\times(-12)-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$
$=\frac{40}{5}=8$
따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은
$\overline{CH}-3=8-3=5$ 답 5

31 원점 O와 두 점 A$(1, -3)$, P(x, y)에 대하여
$\overrightarrow{OA}=(1, -3)$, $\overrightarrow{OP}=(x, y)$
이때, $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=5$에서 $|\overrightarrow{AP}|=5$이므로 도형 C는 중심이 A$(1, -3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.
원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}$
이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ})$
$=|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}$
이때, $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=5+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}$ ……㉠



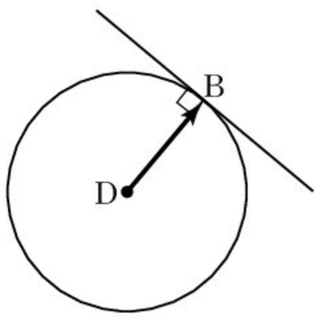
두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값은 $\theta=0^\circ$일 때, 즉 점 Q가 점 Q_1의 위치에 있을 때 최대이고, $\theta=180^\circ$일 때, 즉 점 Q가 점 Q_2의 위치에 있을 때 최소이다.
원 C 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{AQ}|=5$이므로
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AQ}|=5\sqrt{10}$,
최솟값은 $-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AQ}|=-5\sqrt{10}$
따라서 ㉠에 의하여
$M=10+5\sqrt{10}$, $m=10-5\sqrt{10}$
$\therefore Mm=(10+5\sqrt{10})(10-5\sqrt{10})$
$=100-250=-150$ 답 -150

32 P(x, y)라 하면 A$(2, 1)$이므로
$|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA}|=|(x, y)-2(2, 1)|$
$=|(x-4, y-2)|$
$=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$
$|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{2}$에서
$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=4\sqrt{2}$
위의 식의 양변을 제곱하면

$(x-4)^2+(y-2)^2=32$

즉, D(4, 2)라 하면 점 P가 나타내는 도형은 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이다.

이때, 오른쪽 그림과 같이 직선 BD는 점 B에서의 접선과 수직이므로 점 B에서의 접선의 법선벡터를 $\overrightarrow{BD}$라 할 수 있다.



마찬가지로 점 C에서의 접선은 직선 CD와 수직이므로 점 C에서의 접선의 법선벡터를 $\overrightarrow{CD}$라 할 수 있다.

$\overrightarrow{BD}=(4, -4)$, $\overrightarrow{CD}=(4-a, 2-b)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{CD}|}$$
$$=\frac{|(4, -4)\cdot(4-a, 2-b)|}{4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{|4(4-a)-4(2-b)|}{4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{|-a+b+2|}{8}=\frac{1}{4}$$

즉, $|-a+b+2|=2$에서

$-a+b+2=2$ 또는 $-a+b+2=-2$

$\therefore a-b=0$ 또는 $a-b=4$

그런데 $a\neq b$이므로 $a-b=4$ 답 4

• 다른풀이 •

X(4, 2)라 하면 원점 O(0, 0)과 A(2, 1)에 대하여

$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OX}$이므로

$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{XP}$

즉, $|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{2}$에서 $|\overrightarrow{XP}|=4\sqrt{2}$이므로 점 P가 나타내는 도형은 점 X를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 원이다.

즉, 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-2)^2=32$

이 원 위의 점 B(0, 6)에서의 접선의 방정식은

$(0-4)(x-4)+(6-2)(y-2)=32$

$\therefore x-y=-6$

점 B에서의 접선의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$이라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(1, -1)$

같은 방법으로 점 C(a, b)에서의 접선의 방정식은

$(a-4)(x-4)+(b-2)(y-2)=32$

이므로 점 C에서의 접선의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면

$\overrightarrow{n_2}=(a-4, b-2)$

blacklabel 특강 필수 개념

원의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$

(3) 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

33 원점 O에 대한 두 점 A(−2, 4), B(2, 7)의 위치벡터는

$\overrightarrow{OA}=(-2, 4)$, $\overrightarrow{OB}=(2, 7)$

P(x, y)라 하면 점 P의 위치벡터는 $\overrightarrow{OP}=(x, y)$이므로

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(2, 7)-(-2, 4)=(4, 3)$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$
$=(x, y)-(-2, 4)=(x+2, y-4)$

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AP}|^2$에서

$2(4, 3)\cdot(x+2, y-4)=|(x+2, y-4)|^2$

$8(x+2)+6(y-4)=(x+2)^2+(y-4)^2$

$x^2+y^2-4x-14y+28=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-7)^2=25$

즉, 점 P가 나타내는 도형 C는 점 B(2, 7)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이다.

원 C 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP}$이므로

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP})$
$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BP}$ ……㉠

$\overrightarrow{OD}=(2, -1)$이므로

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}$
$=(-2, 4)-(2, -1)=(-4, 5)$

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}$
$=(2, 7)-(2, -1)=(0, 8)$

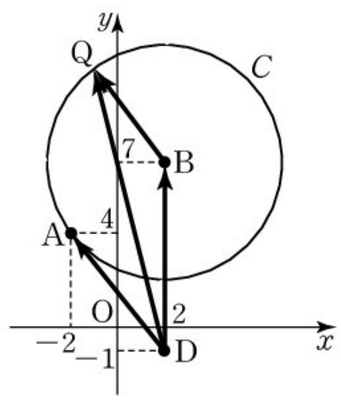
$\therefore \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(-4, 5)\cdot(0, 8)=40$

두 벡터 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BP}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0^\circ\leq\theta\leq90^\circ)$라 하면

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BP}|\cos\theta$
$=\sqrt{(-4)^2+5^2}\times5\times\cos\theta$
$=5\sqrt{41}\cos\theta$

$\therefore \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BP}$ ($\because$ ㉠)
$=40+5\sqrt{41}\cos\theta$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DP}$는 $\theta=0^\circ$일 때, 즉 두 벡터 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BP}$가 서로 평행할 때 최댓값을 갖고, 이때의 점 P의 위치가 Q이므로 다음 그림과 같이 두 직선 AD, BQ는 서로 평행해야 한다.



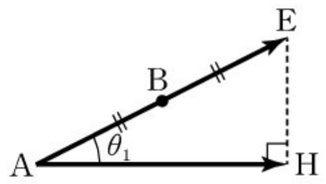
직선 AD의 기울기는 $\frac{-1-4}{2-(-2)}=-\frac{5}{4}$이고, 점 Q에서의 접선은 직선 BQ와 수직이므로 점 Q에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{5}$이다. 답 ④

• 다른풀이 •

$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$라 하면 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AP}|^2$에서

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AP}|^2$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AP}$가 이루는 각의 크기를 θ_1 $(0^\circ \le \theta_1 \le 90^\circ)$이라 하고, 점 E에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면



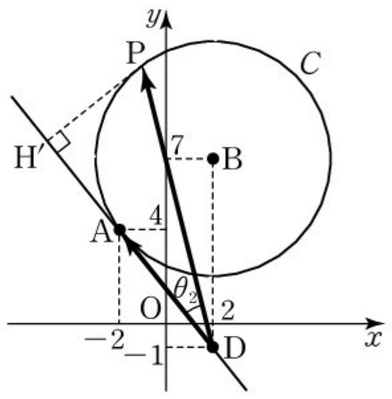
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AH}|\,|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AP}|^2$$

즉, $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AP}|$에서 점 H가 점 P와 일치하므로 점 P가 나타내는 도형 C는 선분 AE를 지름으로 하는 원이고 이 원의 중심은 점 B이다.

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DP}$가 이루는 각의 크기를 θ_2 $(0^\circ \le \theta_2 \le 90^\circ)$라 하고 점 P에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DP} = |\overrightarrow{DA}|\,|\overrightarrow{DH'}| = \sqrt{41}\,|\overrightarrow{DH'}|$$

따라서 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DP}$의 값이 최대이려면 다음 그림과 같이 직선 PH′이 직선 DH′과 수직이어야 하므로 점 Q에서의 접선이 직선 AD와 수직이다.



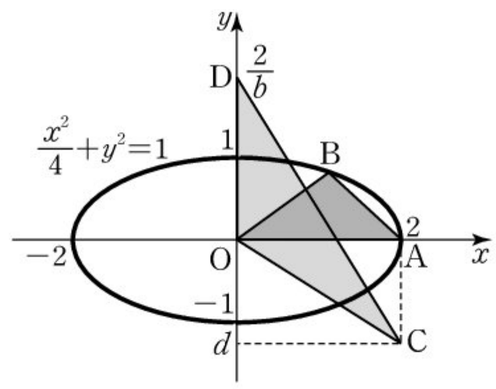
이때, 직선 AD의 기울기가 $-\frac{5}{4}$이므로 구하는 기울기는 $\frac{4}{5}$이다.

조건 (다)의 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 2$에서

$(a, b) \cdot (e, f) = 2$, $(a, b) \cdot (0, f) = 2$

$bf = 2 \qquad \therefore f = \frac{2}{b}$ $(\because b > 0)$

$\therefore$ C$(2, d)$, D$\left(0, \frac{2}{b}\right)$



위의 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는

$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times b = b$

삼각형 OCD의 넓이는

$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{b} \times 2 = \frac{2}{b}$

$4b > 0$, $\frac{2}{b} > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4S_1 + S_2 = 4b + \frac{2}{b} \ge 2\sqrt{4b \times \frac{2}{b}} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$ (단, 등호는 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 성립)

따라서 $4S_1 + S_2$의 최솟값은 $4\sqrt{2}$이다. 답 $4\sqrt{2}$

Step 3 1등급을 넘어서는 종합 사고력 문제 p. 52

01 $4\sqrt{2}$ 02 $-4\sqrt{149}$ 03 24 04 ③ 05 ②

01 해결단계

❶ 단계	세 점 B, C, D의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낸 후, 세 조건 (가), (나), (다)를 이용하여 미지수의 값 또는 미지수 사이의 관계식을 구한다.
❷ 단계	$4S_1 + S_2$를 한 문자를 이용하여 나타낸 후, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $4S_1 + S_2$의 최솟값을 구한다.

B(a, b), C(c, d), D(e, f) $(0 < a < 2,\ 0 < b < 1)$라 하면

A$(2, 0)$이므로 네 점 A, B, C, D의 위치벡터는

$\overrightarrow{OA} = (2, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b)$, $\overrightarrow{OC} = (c, d)$, $\overrightarrow{OD} = (e, f)$

조건 (가)의 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 4$에서

$(2, 0) \cdot (c, d) = 4$

$2c = 4 \qquad \therefore c = 2$

조건 (나)의 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$에서

$(2, 0) \cdot (e, f) = 0$

$2e = 0 \qquad \therefore e = 0$

02 해결단계

❶ 단계	네 조건 (가), (나), (다), (라)를 이용하여 세 점 P, Q, R가 나타내는 도형을 각각 구한다.
❷ 단계	$\lvert\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BQ}\rvert$의 값이 최대일 조건을 파악한다.
❸ 단계	❷단계를 만족시키는 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{QR}$의 값을 구한다.

A$(-3, 5)$, B$(0, 1)$, C$(2, 1)$, D$(-2, 1)$이므로 네 점 A, B, C, D의 위치벡터는

$\overrightarrow{OA} = (-3, 5)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (2, 1)$,

$\overrightarrow{OD} = (-2, 1)$

조건 (가)에서

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(2, 1)$

$= (-3, 5) + (2t, t)$

$= (2t - 3, t + 5)$

$2t - 3 = x$, $t + 5 = y$로 놓으면

$t = \frac{x+3}{2}$, $t = y - 5$에서 $\frac{x+3}{2} = y - 5$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

$-2 \le t \le 5$에서 $-7 \le 2t - 3 \le 7$

$\therefore -7 \le x \le 7$

즉, 점 P는 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$ $(-7\le x\le 7)$ 위에 있다.

한편, 조건 (나)의 $|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}|=3$에서 $|\overrightarrow{BQ}|=3$이므로 점 Q는 점 B(0, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

또한, 조건 (다)에서 $\overrightarrow{RC}\cdot\overrightarrow{RD}=0$이므로 점 R의 좌표를 (x', y')이라 하면

$\overrightarrow{RC}=(2-x', 1-y')$, $\overrightarrow{RD}=(-2-x', 1-y')$

$(2-x', 1-y')\cdot(-2-x', 1-y')=0$에서

$(2-x')(-2-x')+(1-y')^2=0$

$x'^2-4+(y'-1)^2=0$ $\quad\therefore x^2+(y-1)^2=4$

즉, 점 R는 점 B(0, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

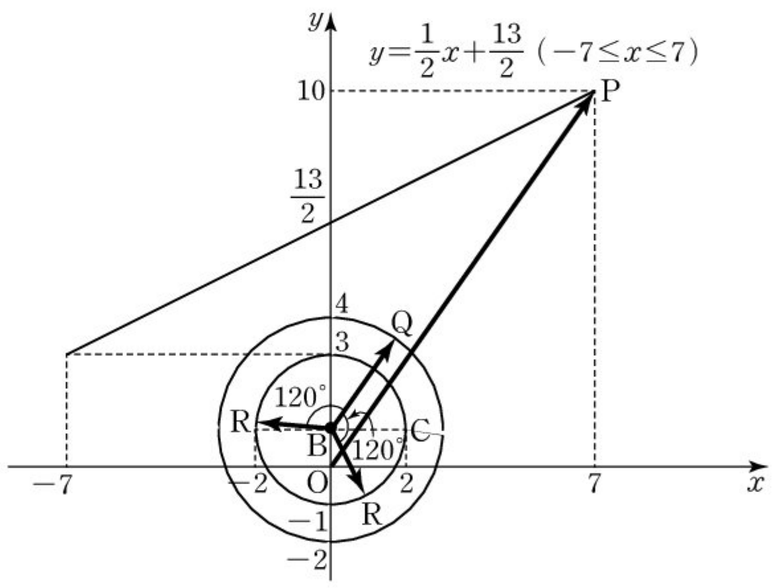
이때, $|\overrightarrow{BQ}|=3$, $|\overrightarrow{BR}|=2$이고, 조건 (라)에서 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BR}=-3$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{BR}$가 이루는 각의 크기를 θ $(90^\circ\le\theta\le 180^\circ)$라 하면

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BR}<0$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BR}}{|\overrightarrow{BQ}||\overrightarrow{BR}|}$$

$$=-\frac{-3}{3\times 2}=\frac{1}{2}$$

$180^\circ-\theta=60^\circ$ $\quad\therefore\theta=120^\circ$



한편, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BQ}|$의 값이 최대이려면 위의 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BQ}$가 같은 방향이어야 하므로

$$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{OP}|+|\overrightarrow{BQ}|$$

$$=|\overrightarrow{OP}|+3$$

즉, $|\overrightarrow{OP}|$의 값이 최대이면 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BQ}|$의 값도 최대이고,

P(7, 10)일 때 $|\overrightarrow{OP}|$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{BQ})$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{BR}$가 이루는 각의 크기가 120°이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BR}$가 이루는 각의 크기도 120°이다.

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ $(\because$ ㉠$)$

$$=-|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{BR}|\cos(180^\circ-120^\circ)$$
$$-|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{BQ}|\cos 0^\circ$$

$$=-\sqrt{149}\times 2\times\frac{1}{2}-\sqrt{149}\times 3\times 1$$

$$=-4\sqrt{149}$$

답 $-4\sqrt{149}$

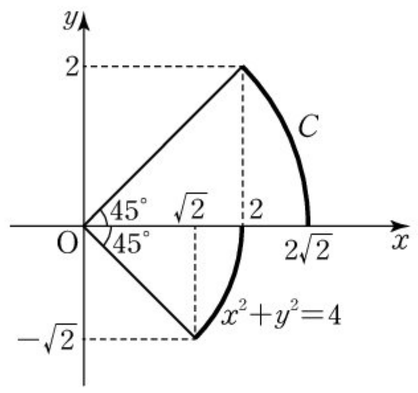
03 해결단계

❶ 단계	두 점 P, Q가 나타내는 곡선을 좌표평면 위에 나타낸다.
❷ 단계	$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}$를 만족시키는 점 A와 점 Y가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.
❸ 단계	영역 D를 좌표평면 위에 나타내고 점 R의 좌표를 구한 후, $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.
❹ 단계	❸단계에서 구한 값을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

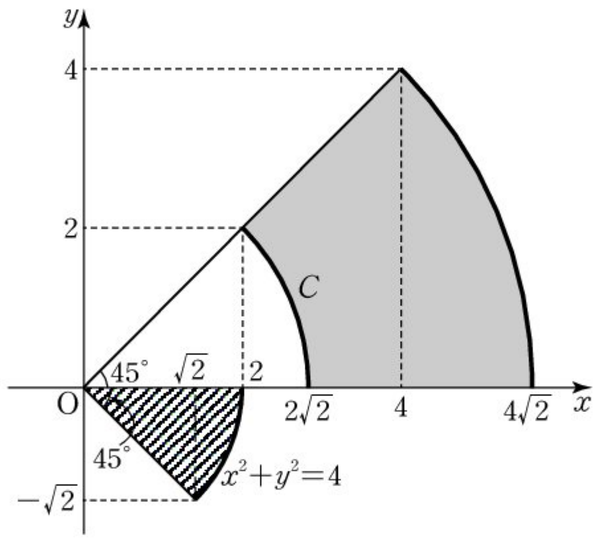
$\overrightarrow{OQ}=2$이므로 점 Q는 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있다.

또한, $\angle POQ=45^\circ$이고, 점 Q는 직선 OP의 아랫부분에 있으므로 곡선 C 위의 점 P가 두 점 $(2, 2)$, $(2\sqrt{2}, 0)$에 위치할 때, 점 Q의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$이다.

즉, 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



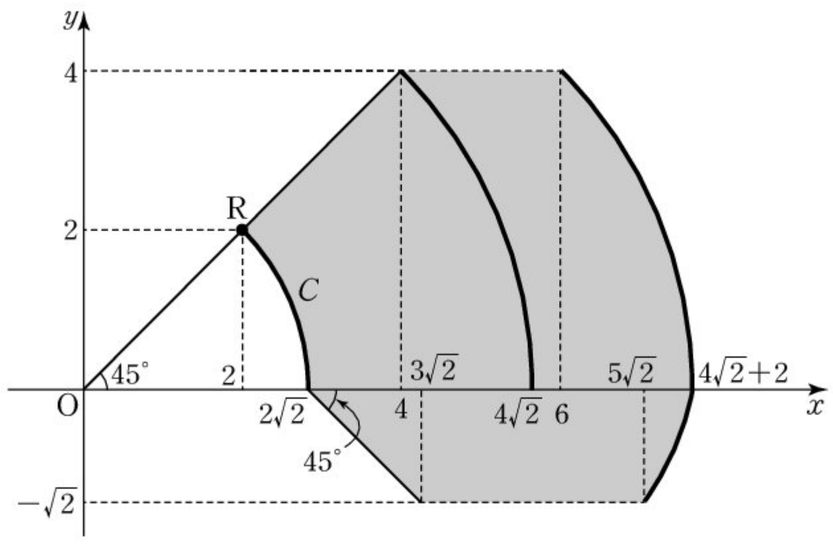
이때, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}$라 하면 점 A는 다음 그림의 어두운 부분에 존재하고, 벡터 $\overrightarrow{OY}$의 종점 Y는 다음 그림의 빗금 친 부분에 존재한다.



즉,

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OY}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D는 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



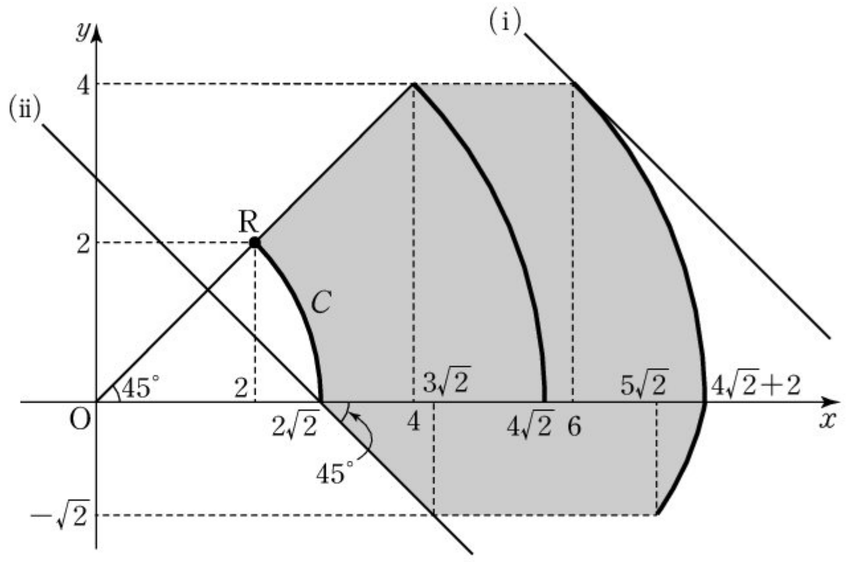
영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점 R의 좌표는 $(2, 2)$이고, 영역 D에 속하는 점 Z의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}=(2,\ 2)\cdot(x,\ y)$

$=2x+2y=k$ (단, k는 실수)

$2y=-2x+k$ $\therefore y=-x+\frac{k}{2}$

이때, 함수 $y=-x+\frac{k}{2}$의 그래프는 기울기가 -1이고 y절편이 $\frac{k}{2}$인 직선이므로 다음 그림과 같이 이 직선이 점 $(6,\ 4)$를 지날 때 k의 값이 최대가 되고, 이 직선이 두 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(3\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$를 잇는 선분을 포함할 때 k의 값이 최소가 된다.



(i) 점 $(6,\ 4)$를 지날 때,

$4=-6+\frac{k}{2}$, $\frac{k}{2}=10$ $\therefore k=20$

(ii) 두 점 $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(3\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$를 잇는 선분을 포함할 때,

$0=-2\sqrt{2}+\frac{k}{2}$, $\frac{k}{2}=2\sqrt{2}$ $\therefore k=4\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $20+4\sqrt{2}$이므로

$a=20$, $b=4$

$\therefore a+b=20+4=24$ 답 24

04 해결단계

❶ 단계	주어진 등식을 이용하여 두 점 P, Q의 위치를 파악한 후, ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	세 점 A, Q, D가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재해야 함을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	❶단계에서 구한 두 점 P, Q의 위치를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PC}$ $\therefore \overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$

이때, 변 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 X라 하면

$\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PX}$이므로 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PX}$

즉, 점 P는 선분 BX의 중점이다.

같은 방법으로 $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PB}$ $\therefore \frac{1}{5}\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}$

변 BC를 2 : 3으로 내분하는 점을 Y라 하면

$\frac{2}{5}\overrightarrow{PC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PY}$이므로 $\frac{1}{5}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PY}$

즉, 점 P는 선분 AY를 5 : 1로 내분한다.

또한, $\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$2\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$ $\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}$

변 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 Z라 하면

$\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PZ}$이므로 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PZ}$

즉, 점 P는 선분 CZ를 2 : 1로 내분한다.

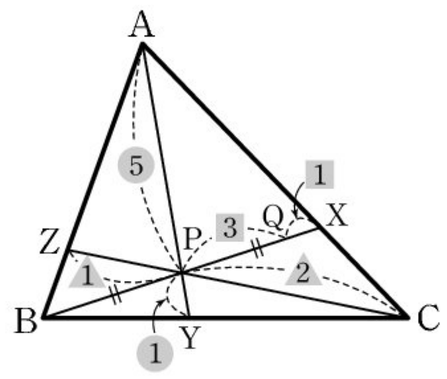
한편, $\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}$ $\therefore \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QC}$

이때, 변 AC를 2 : 1로 내분하는 점이 X이므로

$\frac{1}{3}\overrightarrow{QA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QX}$에서 $\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QX}$

즉, 점 Q는 선분 PX를 3 : 1로 내분한다.



ㄱ. 위의 그림에서

$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PX}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BP}$

이므로 $3\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{PQ}$ (참)

ㄴ. 점 Q가 선분 PX를 3 : 1로 내분하므로 점 Q는 선분 BX를 7 : 1로 내분한다. 즉,

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{8}\overrightarrow{AX}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

점 D는 선분 BC를 4 : 1로 내분하므로

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

세 점 A, Q, D가 한 직선 위에 있으면 0이 아닌 실수 k에 대하여 $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}$라 할 수 있다. 즉,

$\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}k\overrightarrow{AC}$

그런데 위의 식을 만족시키는 상수 k가 존재하지 않으므로 세 점 A, Q, D는 한 직선 위에 있지 않다. (거짓)

ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$\triangle ABX:\triangle ABC=\overline{AX}:\overline{AC}=2:3$

$\therefore \triangle ABX=\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{2}{3}S$

또한, 두 삼각형 ABX, APQ에서

$\triangle ABX:\triangle APQ=\overline{BX}:\overline{PQ}=8:3$

$\therefore \triangle APQ=\frac{3}{8}\triangle ABX$

$=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}S=\frac{1}{4}S$

즉, 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 APQ의 넓이의 4배이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

05 해결단계

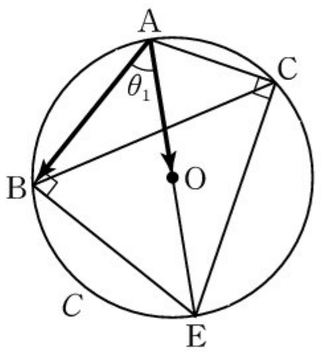
❶ 단계	직선 AO가 삼각형의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하면 △ABE는 직각삼각형임을 이용하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	ㄱ과 같은 방법으로 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}$의 값을 구하고 이것과 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$의 값을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{AD}$를 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 이용하여 나타낸 후, ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	ㄴ에서 구한 관계식을 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2<0$이므로 △ABC는 $\angle BAC>90^\circ$인 둔각삼각형이다.

즉, 외접원의 중심 O는 삼각형 ABC의 외부에 있다.

삼각형 ABC의 외접원을 C라 하자.

ㄱ. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$가 이루는 각의 크기를 θ_1 $(0^\circ\le\theta_1\le90^\circ)$이라 하고, 직선 AO가 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 E라 하면 선분 AE는 원 C의 지름이므로 △ABE는 $\angle ABE=90^\circ$인 직각삼각형이다.



즉, $\cos\theta_1=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AE}|}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\theta_1\\&=|\overrightarrow{AB}|\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AE}|\cos\theta_1\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\times\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AE}|}\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{9}{2}\ (\because\ \overline{AB}=3)\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. ㄱ과 같은 방법으로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$가 이루는 각의 크기를 θ_2 $(0^\circ\le\theta_2\le90^\circ)$라 하면 직각삼각형 AEC에서

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AE}|}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}&=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AO}|\cos\theta_2\\&=|\overrightarrow{AC}|\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AE}|\cos\theta_2\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AE}|\times\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AE}|}\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=2\ (\because\ \overline{AC}=2)\end{aligned}$$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$\overrightarrow{AO}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ (단, a, b는 실수)

라 할 수 있다.

ㄱ에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{9}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=\overrightarrow{AB}\cdot(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC})\\&=a|\overrightarrow{AB}|^2+b\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=a\times3^2+b\times(-2)\\&\qquad(\because\ \overline{AB}=3,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2)\\&=9a-2b=\frac{9}{2}\qquad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

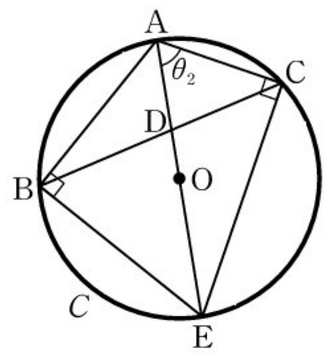
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=2$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}&=\overrightarrow{AC}\cdot(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC})\\&=a\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+b|\overrightarrow{AC}|^2\\&=a\times(-2)+b\times2^2\\&\qquad(\because\ \overline{AC}=2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2)\\&=-2a+4b=2\qquad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{11}{16}$, $b=\dfrac{27}{32}$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}=\dfrac{11}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{27}{32}\overrightarrow{AC}$



이때, 두 선분 AO, BC의 교점이 D이면 세 점 A, D, O는 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AO}$

$=\dfrac{11}{16}t\overrightarrow{AB}+\dfrac{27}{32}t\overrightarrow{AC}$ (단, $0<t<1$)

또한, 점 D는 선분 BC 위에 있으므로

$\dfrac{11}{16}t+\dfrac{27}{32}t=1$, $\dfrac{49}{32}t=1$ $\quad\therefore\ t=\dfrac{32}{49}$

따라서 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{22}{49}\overrightarrow{AB}+\dfrac{27}{49}\overrightarrow{AC}$이므로 점 D는 선분 BC를 27 : 22로 내분한다.

$\therefore\ \overline{BD}:\overline{DC}=27:22$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{11}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{27}{32}\overrightarrow{AC}$이므로

$$\overrightarrow{AO}=\frac{11}{16}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{27}{32}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$-\frac{17}{32}\overrightarrow{OA}+\frac{11}{16}\overrightarrow{OB}+\frac{27}{32}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$\therefore\ -17\overrightarrow{OA}+22\overrightarrow{OB}+27\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

즉, $l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=\vec{0}$를 만족시키려면

$l=-17k$, $m=22k$, $n=27k$ (단, k는 자연수)

이어야 하므로

$l+m+n=-17k+22k+27k=32k$

따라서 $l+m+n$의 최솟값은 $k=1$일 때 32이다.

(거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

이것이 수능 p. 53

1 ③ 2 ⑤ 3 486 4 40

1 해결단계

❶ 단계	삼각형 ABC의 한 변 BC의 중점을 M이라 하고, 주어진 식을 이용하여 점 P가 선분 AM의 중점임을 확인한다.
❷ 단계	❶단계에서 확인한 점 P의 위치를 이용하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

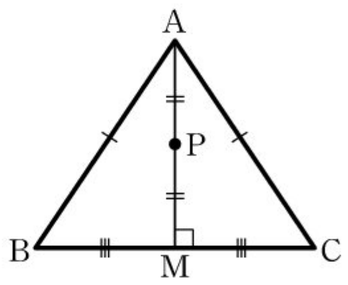
$2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PA}=-\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}$

이때, 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2}$ $\therefore \overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PM}$

즉, 다음 그림과 같이 점 P는 선분 AM의 중점이다.



ㄱ. $\triangle PBC$는 $\overline{PB}=\overline{PC}$인 이등변삼각형이므로
$|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ (참)

ㄴ. 선분 AM과 선분 BC는 서로 수직이고 점 P는 선분 AM의 중점이므로 선분 PA와 선분 BC는 서로 수직이다.
$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (참)

ㄷ. $\triangle ABC=2\triangle ABM$
$=2\times2\triangle ABP=4\triangle ABP$
$=4\times4=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

2 해결단계

❶ 단계	조건 (가)를 이용하여 선분 AB가 주어진 원의 지름임을 확인한다.
❷ 단계	주어진 원의 중심을 O라 하고 조건 (나)를 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$가 서로 평행함을 보이고 각 벡터의 크기를 구한다.
❸ 단계	$\angle ABC=\theta$라 하고 $\cos\theta$의 값을 구한 후, $|\overrightarrow{AD}|^2$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$는 서로 수직이다.

즉, 선분 AB는 원의 지름이고, $|\overrightarrow{AB}|=8$이므로 주어진 원의 지름의 길이는 8이다.

주어진 원의 중심을 O라 하면 조건 (나)에서

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CB}$

이때, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$이므로

$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{CB}$

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$는 서로 평행하다.

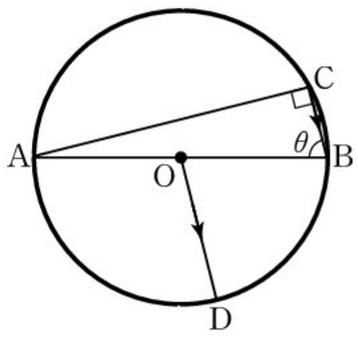
또한, 점 D는 원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{OD}|=4$에서

$2|\overrightarrow{CB}|=4$ $\therefore |\overrightarrow{CB}|=2$

이때, 오른쪽 그림과 같이

$\angle ABC=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$



또한,

$\angle BOD=\angle ABC=\theta$ ($\because$ 엇각)

에서

$\angle AOD=180^\circ-\theta$

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2$
$=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2$
$=|\overrightarrow{OD}|^2-2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$
$=|\overrightarrow{OD}|^2+2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta+|\overrightarrow{OA}|^2$
$=4^2+2\times4\times4\times\dfrac{1}{4}+4^2$
$=40$ 답 ⑤

• 다른풀이 •

조건 (가)에서 선분 AB는 원의 지름이고, $|\overrightarrow{AB}|=8$이므로 원의 중심을 O라 하면

$|\overrightarrow{AO}|=4$

조건 (나)에서

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AD}=5\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

이때, 선분 BC를 4 : 5로 외분하는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

즉, 삼각형 ABE에서

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{AD}:\overline{AE}=1:2$

이므로 $\overline{OD}/\!/\overline{BE}$, $\overline{BE}=2\overline{OD}=2\times4=8$

$\therefore \overline{BC}=\dfrac{1}{4}\overline{BE}=\dfrac{1}{4}\times8=2$,

$\overline{CE}=\dfrac{5}{4}\overline{BE}=\dfrac{5}{4}\times8=10$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}^2=8^2-2^2=60$

이므로 직각삼각형 AEC에서

$\overline{AE}^2=60+10^2=160$

따라서 $\overline{AE}=4\sqrt{10}$이므로 $\overline{AD}=2\sqrt{10}$

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2=\overline{AD}^2=40$

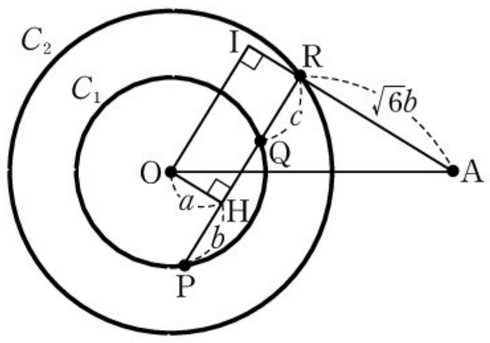
3 해결단계

❶ 단계	두 조건 (가), (나)를 이용하여 $\overline{AR}\perp\overline{PR}$임을 확인한다.
❷ 단계	원의 중심 O에서 선분 PQ와 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 피타고라스 정리를 이용하여 두 선분 AI, AR의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}$의 최댓값 M과 최솟값 m을 각각 구한 후, Mm의 값을 구한다.

조건 (가)에서 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에서 두 직선 AR, PQ는 서로 수직이므로

$\overline{AR} \perp \overline{PR}$

이때, 다음 그림과 같이 점 O에서 선분 PQ와 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



$\overline{OH}=a$, $\overline{HP}=\overline{HQ}=b$, $\overline{QR}=c$라 하면

조건 (나)에서 $\overline{PQ} : \overline{AR}=2 : \sqrt{6}$이므로

$2b : \overline{AR}=2 : \sqrt{6}$ $\quad\therefore\ \overline{AR}=\sqrt{6}b$

직각삼각형 OHQ에서 $a^2+b^2=5$ ……㉠

직각삼각형 OHR에서 $a^2+(b+c)^2=14$ ……㉡

또한,

$\overline{OI}=\overline{HR}=b+c$,

$\overline{IA}=\overline{IR}+\overline{AR}=\overline{OH}+\overline{AR}=a+\sqrt{6}b$

이므로 직각삼각형 AIO에서

$(a+\sqrt{6}b)^2+(b+c)^2=44$ ……㉢

㉡, ㉢에서

$2\sqrt{6}ab+6b^2=30$ ……㉣

㉠, ㉣에서

$6a^2-2\sqrt{6}ab=0$, $6a\left(a-\frac{\sqrt{6}}{3}b\right)=0$

$\therefore\ a=\frac{\sqrt{6}}{3}b\ (\because\ a\neq 0)$

세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으므로

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$이므로

$\overline{AI}=a+\sqrt{6}b=\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

한편, 원 C_1 위의 점 S에 대하여

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AR}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OS})$

$=\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}$

에서

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{AO}|\cos(\angle OAR)$

$=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{AO}|\times\frac{|\overrightarrow{AI}|}{|\overrightarrow{AO}|}$

$=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{AI}|$

$=3\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=24$

또한, 두 벡터 $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{OS}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}=|\overrightarrow{AR}||\overrightarrow{OS}|\cos\theta$

$=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos\theta$

$=3\sqrt{10}\cos\theta$

이므로 $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}$는 $\cos\theta=1$일 때 최댓값을 갖고, $\cos\theta=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ -3\sqrt{10}\le\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{OS}\le 3\sqrt{10}$

즉, $24-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS}\le 24+3\sqrt{10}$이므로

$M=24+3\sqrt{10}$, $m=24-3\sqrt{10}$

$\therefore\ Mm=(24+3\sqrt{10})(24-3\sqrt{10})=486$ 답 486

4 해결단계

❶ 단계	원 O의 중심을 O라 하고, 정점 O을 이용하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$를 변형한다.
❷ 단계	점 Q가 어느 위치에 있을 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최대, 최소가 되는지 파악한다.
❸ 단계	점 O를 원점으로 하는 좌표평면을 나타낸 후 세 점 A, B, C의 좌표를 구한 후, 벡터의 성분을 구해 내적을 계산한다.
❹ 단계	$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하고 그 합을 구한다.
❺ 단계	a, b의 값을 각각 구해 a^2+b^2의 값을 구한다.

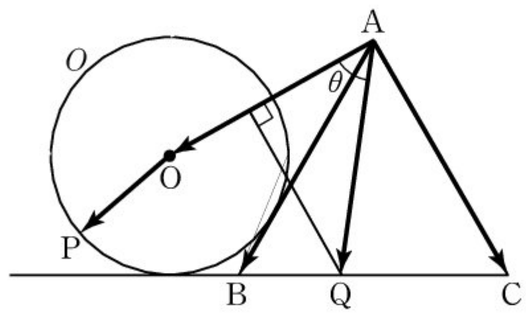
원 O의 중심을 O라 하면 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ ……㉠

다음 그림과 같이 $\angle OAQ=\theta$라 하면

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$



이때, 선분 BC 위에 있는 점 Q에 대하여 점 Q가 점 B에서 점 C까지 이동함에 따라 $|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$의 값이 작아지므로

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}\le\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ ……㉡

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ' $(0^\circ\le\theta'\le 180^\circ)$이라 하면

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$

$=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'\ (\because\ \overrightarrow{OP}=1)$

이때, 선분 BC 위에 있는 점 Q에 대하여 점 Q가 점 B 또는 점 C에 위치할 때, $|\overrightarrow{AQ}|$의 값이 2로 가장 크다.

또한, $0^\circ\le\theta'\le 180^\circ$에서 $-1\le\cos\theta'\le 1$이므로

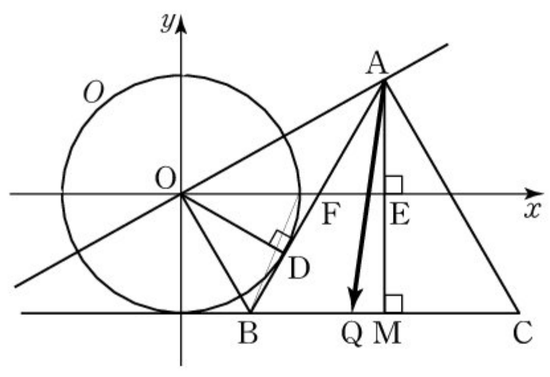
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 점 Q가 점 B 또는 점 C에 위치할 때, 최솟값 -2, 최댓값 2를 갖는다. ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-2\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+2$ ……㉣

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M, 점 O에서 선분 AB와 선분 AM에 내린 수선의 발을 각각 D, E, 두 선분 AB, OE의 교점을 F라 하고, 원의 중심 O를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 다음 그림과 같다.



$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$이고, 선분 EM의 길이는 원 O의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{EM}=1$ $\quad\therefore\ \overline{AE}=\sqrt{3}-1$

이때, $\angle AFE=\angle ABM=60^\circ$ (동위각)이므로 직각삼

각형 AFE에서

$\overline{FE}=\dfrac{\overline{AE}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$

또한, $\angle OFB=\angle AFE=60^\circ$ (맞꼭지각)이므로 직각삼

각형 ODF에서

$\overline{OF}=\dfrac{\overline{OD}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{OE}=\overline{OF}+\overline{FE}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

즉, $A\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}-1\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$,

$C\left(\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}, -1\right)$이므로

$\overline{OE}-\overline{BM}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)-\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}-1\right)$

$=(-1, -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=\left(\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}, -1\right)-\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}-1\right)$

$=(1, -\sqrt{3})$

따라서

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, 1-\sqrt{3}\right)\cdot(-1, -\sqrt{3})$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$

$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+3$

$=\dfrac{12-2\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}, 1-\sqrt{3}\right)\cdot(1, -\sqrt{3})$

$=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}(1-\sqrt{3})$

$=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+3$

$=\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}$

이므로 ㉣에서

$\dfrac{6-4\sqrt{3}}{3}-2\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\dfrac{12-2\sqrt{3}}{3}+2$

$\therefore -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\le\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\dfrac{18-2\sqrt{3}}{3}$

즉, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{18-2\sqrt{3}}{3}+\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)=6-2\sqrt{3}$

이므로 $a=6$, $b=-2$

$\therefore a^2+b^2=6^2+(-2)^2=40$ 답 40

III 공간도형과 공간좌표

06 공간도형

Step 1 출제율 100% 우수 기출 대표 문제 p. 57

01 14 02 ⑤ 03 2 04 ② 05 ⑤
06 ② 07 ②

01 삼각기둥 ABC-DEF의 서로 다른 세 꼭짓점을 지나는 평면은

(i) 삼각기둥의 면

평면 ABC, 평면 DEF, 평면 ABED, 평면 BCFE, 평면 ACFD의 5개

(ii) 삼각기둥의 면이 아닌 평면

평면 ABF, 평면 BCD, 평면 ACE, 평면 AEF, 평면 BDF, 평면 CDE의 6개

(i), (ii)에서

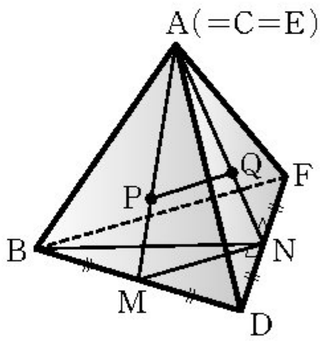
$a=5+6=11$

이 중 직선 AF를 포함하는 평면은 평면 AEF, 평면 ACFD, 평면 ABF의 3개이므로

$b=3$

$\therefore a+b=11+3=14$ 답 14

02 오른쪽 그림과 같이 주어진 전개도로 만든 정사면체 ABDF에서 두 모서리 BD, DF의 중점을 각각 M, N이라 하자.



ㄱ. $\overline{AN}\perp\overline{FD}$, $\overline{BN}\perp\overline{FD}$이므로

(평면 ABN)$\perp\overline{FD}$

$\therefore \overline{AB}\perp\overline{FD}$ (참)

ㄴ. 두 점 P, Q가 각각 두 삼각형 BCD, FDE의 무게중심이므로

$\overline{AP}:\overline{AM}=\overline{AQ}:\overline{AN}=2:3$

$\therefore \overline{PQ}/\!/\overline{MN}$ ……㉠

삼각형 BDF에서 삼각형의 중점연결 정리에 의하여

$\overline{MN}/\!/\overline{BF}$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PQ}/\!/\overline{BF}$ (참)

ㄷ. ㄱ과 같은 방법으로 $\overline{AD}\perp\overline{BF}$ ……㉢

ㄴ에서 $\overline{PQ}/\!/\overline{BF}$ ……㉣

㉢, ㉣에서

$\overline{PQ}\perp\overline{AD}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

03 직육면체의 8개의 꼭짓점 중 두 점을 이은 선분이 직육면체의 모서리인 경우, 대각선인 경우, 각 면의 대각선인 경우로 나누어 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 구한다.

(i) 직육면체의 모서리인 경우

모서리 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 BF, CG, EF, HG의 4개이다.

같은 방법으로 직육면체의 다른 모서리의 경우에도 꼬인 위치에 있는 모서리는 각각 4개씩 존재한다.

(ii) 직육면체의 대각선인 경우

대각선 DF와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 AB, BC, AE, CG, EH, HG의 6개이다.

같은 방법으로 직육면체의 다른 대각선의 경우에도 꼬인 위치에 있는 모서리는 각각 6개씩 존재한다.

(iii) 직육면체의 각 면의 대각선인 경우

대각선 AC와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 DH, BF, EH, HG, GF, EF의 6개이다.

같은 방법으로 직육면체의 각 면의 다른 대각선의 경우에도 꼬인 위치에 있는 모서리는 각각 6개씩 존재한다.

(i), (ii), (iii)에서 $M=6$, $m=4$이므로

$M-m=6-4=2$ 답 2

04 $\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HQ}\perp\overline{AB}$

점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\triangle ABH=\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{1}{3}\times 24=8$

즉, 삼각형 ABH의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{HQ}=8$

$\frac{1}{2}\times 8\times\overline{HQ}=8$

$\therefore \overline{HQ}=2$

직각삼각형 PQH에서

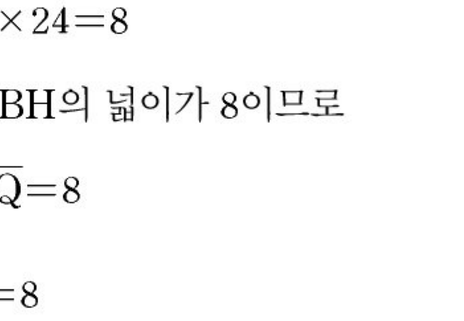
$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 답 ②

05 정사각형 ABEF에서 $\overline{AF}/\!/\overline{BE}$이므로 두 직선 AF와 BD가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BE와 BD가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\therefore \theta=\angle DBE$

이때, 두 점 C, D에서 평면 β에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하면 $\overline{DD'}\perp\beta$이고 $\overline{D'C'}\perp\overline{BC'}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DC'}\perp\overline{BC'}$이다.

($\overline{D'C'}/\!/\overline{EF}$, $\overline{EF}\perp\overline{BE}$이므로)



즉, 삼각형 DBC′은 직각삼각형이고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 60°이므로 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 직각삼각형 CBC′에서

$\overline{BC'}=\overline{BC}\cos 60^\circ=a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a$

또한, 정사각형 ABCD의 대각선의 길이는

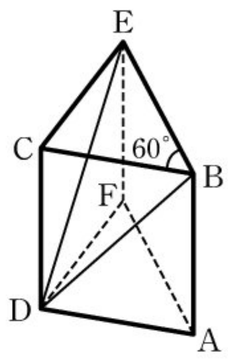
$\overline{BD}=\sqrt{2}a$

따라서 직각삼각형 DBC′에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BC'}}{\overline{BD}}=\frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 답 ⑤

• 다른풀이 •

주어진 입체도형을 오른쪽 그림과 같은 삼각기둥 BCE－ADF로 생각하자.



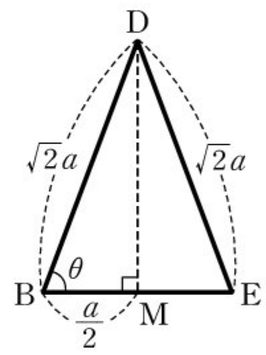
□ABCD, □ABEF가 각각 정사각형이므로 $\overline{BE}=\overline{BC}$이고, $\angle CBE=60^\circ$이므로 △BCE는 정삼각형이다.

즉, 삼각기둥 BCE－ADF의 모든 모서리의 길이는 같으므로 한 모서리의 길이를 a라 하자.

두 직선 AF, BE가 평행하므로 두 직선 AF, BD가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BE, BD가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\therefore \angle DBE=\theta$

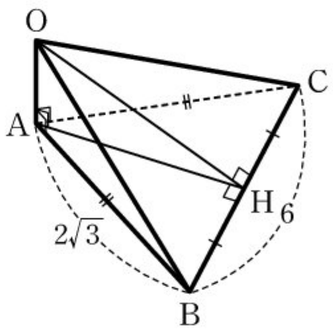
$\overline{BE}=a$, $\overline{BD}=\overline{DE}=\sqrt{2}a$이므로 꼭짓점 D에서 선분 BE에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{BM}=\overline{EM}=\frac{a}{2}$



따라서 직각삼각형 DBM에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BM}}{\overline{BD}}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

06 △ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}=2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이므로 꼭짓점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 모서리 BC의 중점이다.



$\overline{BC}=6$이므로 $\overline{BH}=3$이고,

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로 직사각형 ABH에서

$\overline{AH}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$

$\overline{OH}$는 한 변의 길이가 6인 정삼각형 OBC의 높이이므로

$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

한편, $\overline{AB}\perp\overline{OA}$, $\overline{AC}\perp\overline{OA}$이고 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$가 평면 ABC에 포함되므로

$\overline{OA}\perp$(평면 ABC) $\therefore \overline{OA}\perp\overline{AH}$

이때, 평면 OBC와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 △OAH는 $\angle OAH=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

삼각형 OBC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times r\times(6+6+6)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$

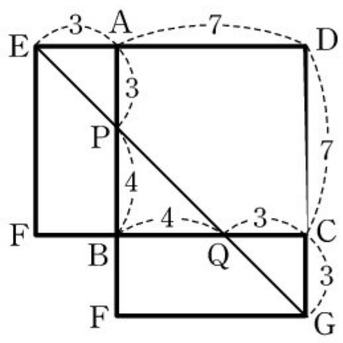
$9r=9\sqrt{3}$ $\therefore r=\sqrt{3}$

따라서 삼각형 OBC의 내접원의 넓이는 $\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$

이므로 내접원의 밑면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$3\pi\cos\theta=3\pi\times\frac{1}{3}=\pi$ 답 ②

07 주어진 직육면체의 전개도의 일부인 세 평면 AEFB, ABCD, BFGC는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점 E에서 부터 두 모서리 AB, BC를 지나 꼭짓점 G까지 이르는 최단 거리의 선은 선분 EG와 같다.



△DEG가 직각이등변삼각형이므로 △AEP, △CQG, △BQP도 직각이등변삼각형이고

$\overline{AE}=\overline{AP}=\overline{CG}=\overline{CQ}=3$, $\overline{PB}=\overline{BQ}=4$이므로

$\overline{PE}=\overline{QG}=3\sqrt{2}$, $\overline{PQ}=4\sqrt{2}$

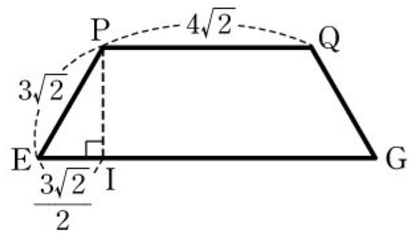
한편, 정사각형 EFGH의 대각선의 길이는

$\overline{EG}=7\sqrt{2}$

등변사다리꼴 EPQG의 꼭짓점 P에서 변 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{EI}=\frac{7\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \overline{PI}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$



따라서 등변사다리꼴 EPQG의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2}+7\sqrt{2})\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{33\sqrt{3}}{2}$

꼭짓점 Q의 평면 EADH 위로의 정사영을 Q′이라 하면

$\overline{AQ'}=\overline{BQ}=4$

두 꼭짓점 P, G의 평면 EADH 위로의 정사영이 각각 A, H이므로 사각형 EAQ′H의 넓이를 S'이라 하면

$S'=\frac{1}{2}\times(7+4)\times 3=\frac{33}{2}$

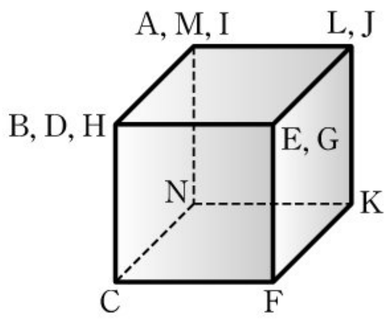
사각형 EPQG의 평면 EADH 위로의 정사영이 사각형 EAQ′H이므로 $S\cos\theta=S'$에서

$\frac{33\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{33}{2}$ $\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ②

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 58~62

01 ⑤	02 ②	03 1	04 ⑤	05 32
06 $\frac{25}{63}$	07 ③	08 ②	09 13	10 ③
11 ⑤	12 8	13 40	14 $\frac{\sqrt{7}}{4}$	15 ⑤
16 ③	17 ③	18 22	19 $\frac{65}{2}$	20 ④
21 $2\sqrt{2}\pi$	22 $2\sqrt{3}$	23 32	24 ②	25 $8\sqrt{3}\pi+9$
26 $\frac{80}{3}\pi+8\sqrt{3}$		27 30	28 ③	29 ④

01 주어진 전개도로 정육면체를 만들면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서

$\overline{AC}/\!/\overline{JF}$ (참)

ㄴ. $\overline{AN}\perp$(평면 ABEJ)

이므로 $\overline{AN}\perp\overline{JH}$ ……㉠

두 선분 AG, JH는 정사각형 ABEJ의 대각선이므로

$\overline{AG}\perp\overline{JH}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{JH}\perp$(평면 ANG)이므로

$\overline{JH}\perp\overline{GN}$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $\overline{AC}/\!/\overline{JF}$이므로 직선 AC와 직선 JH가 이루는 예각의 크기는 직선 JF와 직선 JH가 이루는 예각의 크기와 같다.

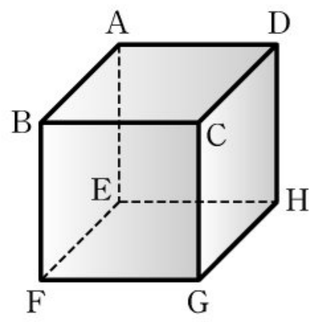
$\therefore \angle HJF=\theta$

이때, △JHF는 정삼각형이므로 $\theta=60^\circ$

$\therefore \cos\theta=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

02 오른쪽 그림과 같은 직육면체 ABCD-EFGH의 면과 모서리의 위치 관계를 이용하자.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}\perp\overline{BF}$, $\overline{AB}\perp\overline{AD}$이지만 두 직선 BF와 AD는 꼬인 위치에 있다. (거짓)

ㄴ. 한 평면을 α, 평면 α에 수직인 두 직선을 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 서로 평행하지 않다고 가정하자.

(i) 두 직선 l, m이 한 점에서 만날 때,

평면 α와 두 직선 l, m의 교점을 각각 A, B, 두 직선 l, m의 교점을 C라 하면 두 직선 l, m이 서로 평행하지 않으므로 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 도형은 삼각형이어야 한다.

그런데 $\angle CAB=90^\circ$, $\angle CBA=90^\circ$에서 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 도형은 삼각형이 될 수 없으므로 모순이다.

즉, 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

(ii) 두 직선이 꼬인 위치에 있을 때,

직선 m을 직선 l과 한 점에서 만나도록 평행이동

시킨 도형을 m'이라 하면 직선 m'은 평면 α와 수직이다.

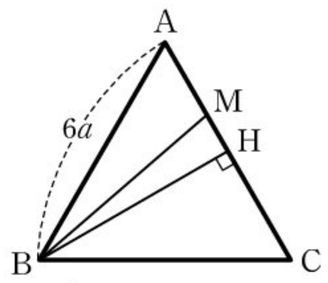
이때, (i)과 같은 방법으로 두 직선 l, m'은 서로 평행하므로 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

(i), (ii)에서 두 직선 l, m은 서로 평행하다. (참)

ㄷ. 위의 그림에서 직선 AB에 평행한 두 평면 CGHD와 EFGH는 서로 수직이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

03 정사면체의 한 모서리의 길이를 $6a$ $(a>0)$라 하자.



점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AB}=6a$에서

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 6a=3a$, $\overline{BH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6a=3\sqrt{3}a$

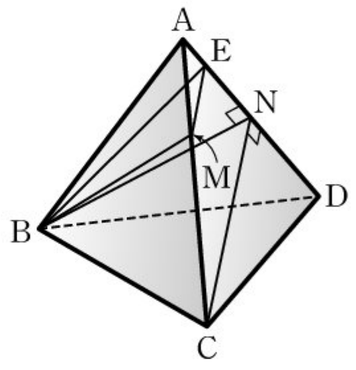
점 M이 모서리 AC를 1 : 2로 내분하므로 $\overline{AM}=2a$

$\therefore \overline{MH}=3a-2a=a$

직각삼각형 BHM에서

$\overline{BM}=\sqrt{(3\sqrt{3}a)^2+a^2}=2\sqrt{7}a$ $(\because a>0)$

한편, 선분 AN을 1 : 2로 내분하는 점을 E라 하면 직선 CN은 직선 ME와 평행하므로 두 직선 BM과 CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM과 ME가 이루는 각의 크기와 같다.



$\overline{CN}=3\sqrt{3}a$이고, 두 삼각형 AME, ACN의 닮음비가 1 : 3이므로 $\overline{EM}=\frac{1}{3}\overline{CN}=\sqrt{3}a$

또한, $\overline{AE}=a$이므로 $\overline{EN}=3a-a=2a$이고,

$\overline{BN}=3\sqrt{3}a$이므로 직각삼각형 BNE에서

$\overline{BE}=\sqrt{(3\sqrt{3}a)^2+(2a)^2}=\sqrt{31}a$ $(\because a>0)$

이때, $(\sqrt{31}a)^2=(2\sqrt{7}a)^2+(\sqrt{3}a)^2$, 즉

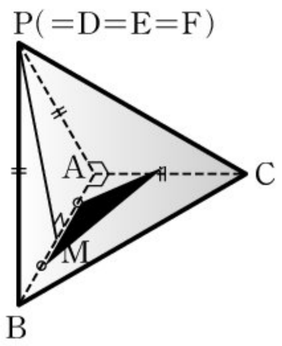
$\overline{BE}^2=\overline{BM}^2+\overline{EM}^2$

이므로 $\triangle BME$는 $\angle BME=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 두 직선 BM, ME가 이루는 각의 크기는 90°이므로

$\sin\theta=\sin 90^\circ=1$ 답 1

04 주어진 전개도로 사면체 PABC를 만들면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $\triangle ACP$는 $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle CAP=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{CP}=\sqrt{2}\,\overline{AP}$

이때, $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로 $\overline{CP}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다. (참)

ㄷ. $\triangle PAB$는 $\overline{PA}=\overline{PB}$인 이등변삼각형이고 $\overline{AM}=\overline{BM}$이므로

$\overline{PM}\perp\overline{AB}$ ……㉠

$\overline{AC}\perp$(평면 PAB)이므로

$\overline{PM}\perp\overline{AC}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{PM}\perp$(평면 ABC)이므로

$\overline{PM}\perp\overline{BC}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

05 먼저, 모서리 AB에 대하여 생각해 보자.

모서리 AB를 포함하여 서로 꼬인 위치에 있는 모서리들은 세 모서리 AB, CD, EF 또는 세 모서리 AB, DE, CF이다.

각 경우에 대하여 만들 수 있는 집합을 나열하면 다음과 같다.

(i) 세 모서리 AB, CD, EF로 만들 수 있는 집합은

$\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{EF}\}$, $\{\overline{CD}, \overline{EF}\}$,

$\{\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}\}$

(ii) 세 모서리 AB, DE, CF로 만들 수 있는 집합은

$\{\overline{AB}, \overline{DE}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CF}\}$, $\{\overline{DE}, \overline{CF}\}$,

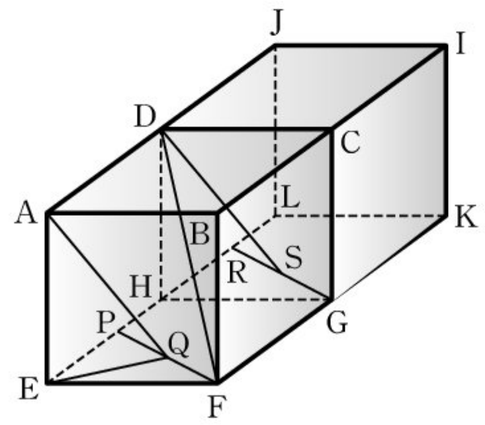
$\{\overline{AB}, \overline{DE}, \overline{CF}\}$

(i), (ii)에서 모서리 AB에 대하여 만들 수 있는 집합 X는 $4+4=8$(개)이다.

따라서 나머지 세 모서리 AC, AD, AE와 각각 꼬인 위치에 있는 모서리들로 만들 수 있는 집합은 8개씩이므로 구하는 집합 X의 개수는

$4\times 8=32$ 답 32

06 정육면체 ABCD－EFGH와 합동인 정육면체 DCIJ－HGKL을 면 CDHG를 공유하도록 붙이면 다음 그림과 같다.



선분 HL의 중점을 R, 선분 RG의 중점을 S라 하면 두 직선 AQ, DS가 평행하므로 직선 AQ와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 직선 DS와 직선 DF가 이루는 각의 크기와 같다. ……㉠

$\overline{DF}$는 한 모서리의 길이가 2인 정육면체의 대각선이므로

$\overline{DF}=2\sqrt{3}$

또한, 직각삼각형 PEF에서 $\overline{PE}=1$, $\overline{EF}=2$이므로

$\overline{PF}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

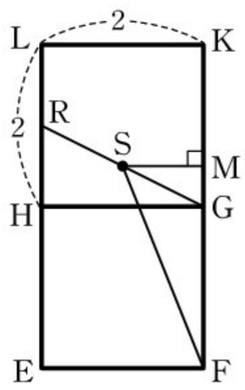
점 Q는 직각삼각형 PEF의 외심이므로

$\overline{EQ}=\overline{PQ}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

즉, 직각삼각형 AEQ에서 $\overline{AQ}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\therefore \overline{DS}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

한편, 점 S에서 변 GK에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{MG}=\frac{1}{2}$이므로



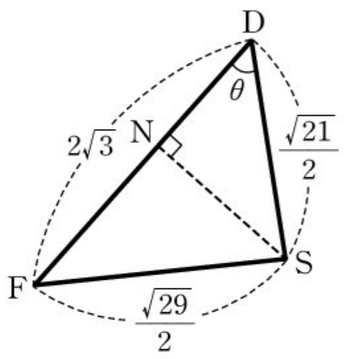
$\overline{MF}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

또한, $\overline{SM}=1$이므로 직각삼각형 SFM에서

$\overline{SF}=\sqrt{1^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$

$(2\sqrt{3})^2<\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$에서 △DFS가 예각삼각형이므로 $\angle FDS=\theta$ ($\because$ ㉠)

점 S에서 변 DF에 내린 수선의 발을 N이라 하고 $\overline{DN}=a$라 하면



$\overline{FN}=2\sqrt{3}-a$

두 직각삼각형 DNS, FSN에서

$\overline{SN}^2=\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2-a^2$

$=\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-(2\sqrt{3}-a)^2$

$4\sqrt{3}a=10 \quad \therefore a=\frac{5}{2\sqrt{3}}$

따라서 △DNS에서 $\cos\theta=\frac{\frac{5}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{5}{3\sqrt{7}}$이므로

$\cos^2\theta=\left(\frac{5}{3\sqrt{7}}\right)^2=\frac{25}{63}$ 답 $\frac{25}{63}$

blacklabel 특강 참고

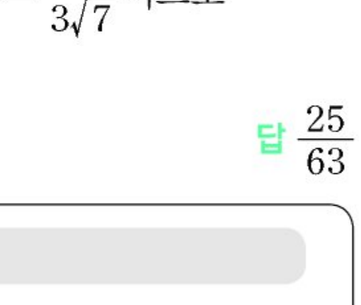
코사인법칙을 이용하면 $\cos\theta$의 값을 쉽게 구할 수 있다.

삼각형 DFS에서 $\overline{DF}=2\sqrt{3}$, $\overline{DS}=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $\overline{FS}=\frac{\sqrt{29}}{2}$이므로

$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2}{2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{21}}{2}}=\frac{5}{3\sqrt{7}}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{25}{63}$

07 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼수선의 정리에 의하여



$\overline{AB}\perp\overline{OD}$

이때, 삼각형 OAB의 넓이가 18이고, $\overline{AB}=6$이므로

$\frac{1}{2}\times6\times\overline{OD}=18$

$\therefore \overline{OD}=6$

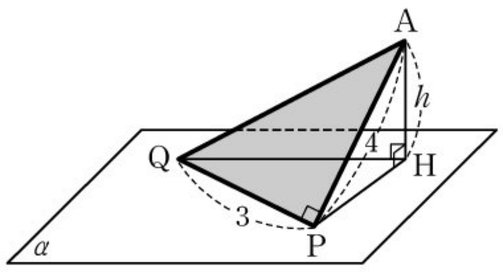
또한, 평면 ABC와 평면 OAB가 이루는 각의 크기가 30°이므로 $\angle ODH=30^\circ$

$\therefore \overline{OH}=\overline{OD}\sin30^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 20이므로 사면체 OABC의 부피는

$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{OH}=\frac{1}{3}\times20\times3=20$ 답 ③

08



점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 AH의 길이를 h라 하면 직각삼각형 APH에서 $\overline{AP}=4$이므로

$\overline{PH}=\sqrt{4^2-h^2}=\sqrt{16-h^2}$

또한, 직각삼각형 AQP에서 $\overline{PQ}=3$이므로

$\overline{QA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 AQH에서

$\overline{QH}=\sqrt{5^2-h^2}=\sqrt{25-h^2}$

한편, $\overline{AH}\perp\alpha$, $\overline{AP}\perp\overline{PQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HP}\perp\overline{PQ}$

따라서 선분 PQ가 그리는 도형은 고정된 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{QH}$인 원과 반지름의 길이가 $\overline{PH}$인 원으로 둘러싸인 부분이므로 구하는 넓이는

$\pi\times\overline{QH}^2-\pi\times\overline{PH}^2=\pi(25-h^2)-\pi(16-h^2)$

$=9\pi$ 답 ②

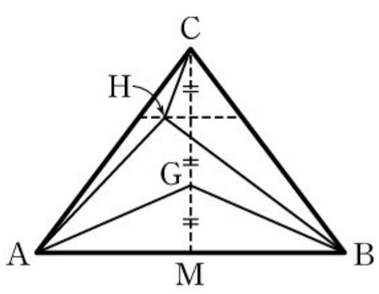
09 모서리 AB의 중점을 M이라 하면 △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$

$\overline{AB}=12$에서 $\overline{AM}=6$이고, $\overline{AC}=10$이므로 직각삼각형 AMC에서

$\overline{CM}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times12\times8=48$

삼각형 HAB의 넓이는 삼각형 GAB의 넓이의 2배이고, 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로



$\triangle HAB=2\triangle GAB$

$=2\times\frac{1}{3}\triangle ABC$

$=\frac{2}{3}\times48=32$

또한, 삼각형 HBC의 넓이는 삼각형 HAC의 넓이의 3배이므로

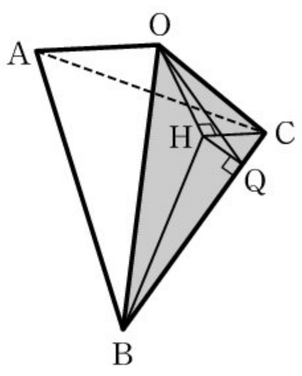
$\triangle HBC=3\triangle HAC$에서 $\triangle HAC=\frac{1}{3}\triangle HBC$

이때, $\triangle HAB+\triangle HBC+\triangle HAC=\triangle ABC$이므로

$32+\triangle HBC+\frac{1}{3}\triangle HBC=48$

$\frac{4}{3}\triangle HBC=16 \quad \therefore \triangle HBC=12$

점 H에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼각형 HBC에서



$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{HQ}=12$이므로

$\frac{1}{2}\times 10\times\overline{HQ}=12$

$\therefore \overline{HQ}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 OHQ에서 $\overline{OH}=1$이므로

$\overline{OQ}=\sqrt{1^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{25}}=\frac{13}{5}$

또한, 선분 OH와 평면 ABC는 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OQ}\perp\overline{BC}$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OQ}$

$=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{13}{5}=13$ 답 13

10 두 평면 ABCD, EFGH가 평행하므로 직선 PE와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기는 직선 PE와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기와 같다.

선분 EG의 중점을 I라 하면 $\triangle BEG$, $\triangle FEG$는 모두 이등변삼각형이므로 $\overline{BI}\perp\overline{EG}$, $\overline{FI}\perp\overline{EG}$

점 B에서 밑면 EFGH에 내린 수선의 발이 점 F이므로

$\angle BFI=90^\circ$

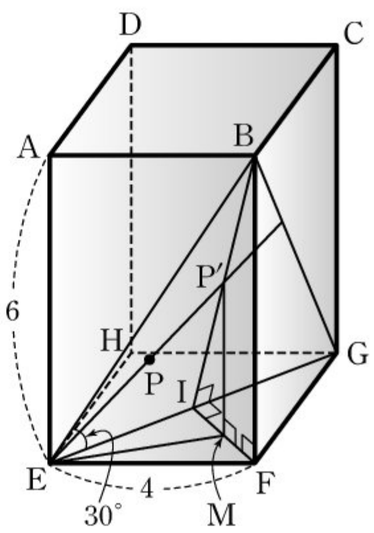
이때, □EFGH는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로

$\overline{EG}=\overline{HF}=4\sqrt{2} \quad \therefore \overline{EI}=\overline{IF}=2\sqrt{2}$

$\overline{BF}=6$이므로 직가삼각형 BIF에서

$\overline{BI}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{11}$

$\therefore \cos(\angle BIF)=\frac{\overline{IF}}{\overline{BI}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$



한편, 직선 PE와 BI의 교점을 P′, 점 P′에서 밑면 EFGH에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 선분 IF 위에 있고

$\angle P'EI=30^\circ$

$\overline{EI}=2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 P′EI에서

$\overline{P'E}=\frac{\overline{EI}}{\cos 30^\circ}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, $\overline{P'I}=\overline{EI}\tan 30^\circ=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

직각삼각형 P′IM에서

$\overline{IM}=\overline{P'I}\cos(\angle BIF)$

$=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{22}}{11}=\frac{4\sqrt{33}}{33}$

직각삼각형 EIM에서

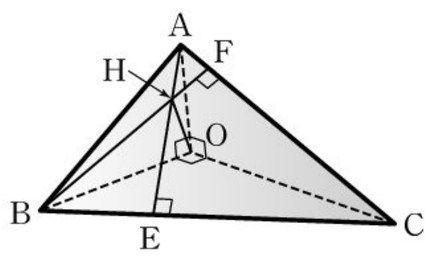
$\overline{EM}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{4\sqrt{33}}{33}\right)^2}=\frac{2\sqrt{70}}{\sqrt{33}}$

선분 P′E의 평면 EFGH 위로의 정사영이 선분 EM이므로 직선 PE, 즉 직선 P′E와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 직선 P′E와 직선 EM이 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $\angle P'EM=\theta$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{EM}}{\overline{P'E}}=\frac{\frac{2\sqrt{70}}{\sqrt{33}}}{\frac{4\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{385}}{22}$ 답 ③

11 다음 그림과 같이 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 E, 점 B에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 F라 하자.



ㄱ. $\overline{OA}\perp\overline{OB}$, $\overline{OA}\perp\overline{OC}$이므로

$\overline{OA}\perp$(면 OBC)

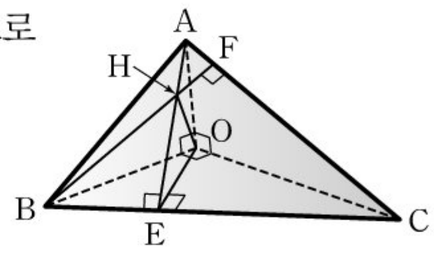
또한, $\overline{AE}\perp\overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OE}\perp\overline{BC}$

따라서 $\overline{BC}\perp$(면 OEA)이므로

$\overline{BC}\perp\overline{OH}$ (참)



ㄴ. 사면체 OABC의 부피를 구하면

$\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times\overline{OC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\overline{OC}$

$=\frac{1}{6}\times 3\times 4\times 6=12$ ……㉠

또한, 세 직각삼각형 OAB, OBC, OAC에서

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

이때, $\overline{BE}=x$ $(x>0)$라 하면 $\overline{CE}=2\sqrt{13}-x$이므로

두 직각삼각형 ABE, AEC에서

$5^2-x^2=(3\sqrt{5})^2-(2\sqrt{13}-x)^2$

$4\sqrt{13}x=32 \qquad \therefore x=\frac{8}{\sqrt{13}}$

따라서 $\overline{AE}=\sqrt{5^2-\left(\frac{8}{\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{13}}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AE}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}\times\frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{13}}=3\sqrt{29}$ ……㉡

한편, $\overline{OB}\perp\overline{OC}$, $\overline{OB}\perp\overline{OA}$이므로

$\overline{OB}\perp$(면 OCA)

또한, $\overline{BF}\perp\overline{AC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OF}\perp\overline{AC}$

따라서 $\overline{AC}\perp$(면 OFB)이므로

$\overline{AC}\perp\overline{OH}$

이때, ㄱ에서 $\overline{BC}\perp\overline{OH}$이므로

$\overline{OH}\perp$(면 ABC)

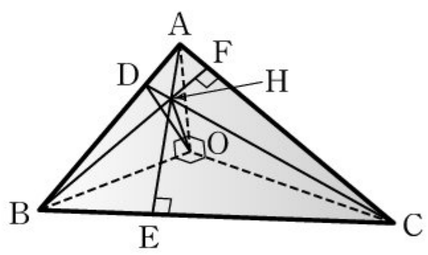
㉠에서 사면체 OABC의 부피가 12이므로

$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{OH}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{29}\times\overline{OH}$ ($\because$ ㉡)

$=\sqrt{29}\times\overline{OH}=12$

$\therefore \overline{OH}=\frac{12}{\sqrt{29}}$ (거짓)

ㄷ.



$\overline{OC}\perp\overline{OA}$, $\overline{OC}\perp\overline{OB}$이므로

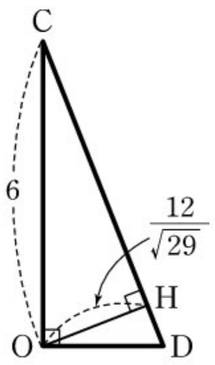
$\overline{OC}\perp$(면 OAB) ……㉢

$\therefore \overline{OC}\perp\overline{OD}$

또한, $\overline{OH}\perp$(면 ABC)이므로 $\overline{OH}\perp\overline{CD}$

오른쪽 그림의 직각삼각형 OCD에서

$\overline{CH}=\sqrt{6^2-\left(\frac{12}{\sqrt{29}}\right)^2}=\frac{30}{\sqrt{29}}$



△OCD, △HCO는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{OC}:\overline{OD}=\overline{CH}:\overline{OH}$에서

$6:\overline{OD}=\frac{30}{\sqrt{29}}:\frac{12}{\sqrt{29}}$

$\frac{30}{\sqrt{29}}\overline{OD}=\frac{72}{\sqrt{29}} \qquad \therefore \overline{OD}=\frac{12}{5}$

이때, 직각삼각형 OAB에서 변 AB를 밑변으로 생각할 때의 높이를 h라 하면 △OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$에서

$\frac{5}{2}h=6 \qquad \therefore h=\frac{12}{5}$

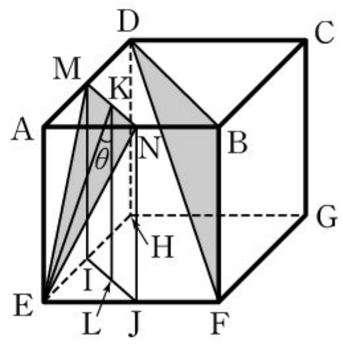
따라서 점 D는 점 O에서 모서리 AB에 내린 수선의 발이므로

$\overline{OD}\perp\overline{AB}$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

12 두 모서리 EH, EF의 중점을 각각 I, J라 하면 평면 BDF와 평면 MIJN은 평행하므로 평면 ENM과 평면 BDF가 이루는 예각의 크기는 평면 ENM과 평면 MIJN이 이루는 예각의 크기와 같다.

따라서 선분 MN과 선분 IJ의 중점을 각각 K, L이라 하면



$\overline{EK}\perp\overline{MN}$, $\overline{LK}\perp\overline{MN}$이므로

$\angle EKL=\theta$

이때, 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a\,(a>0)$라 하면

$\overline{KL}=2a$

또한, △EJI는 $\overline{EI}=\overline{EJ}=a$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{EL}=\overline{IL}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

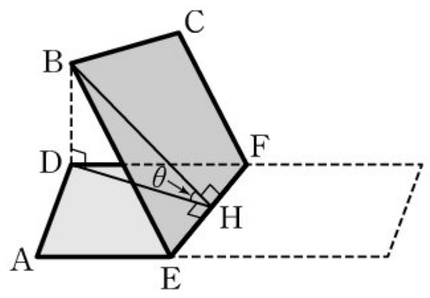
직각삼각형 ELK에서

$\overline{EK}=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{KL}}{\overline{EK}}=\frac{2a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore 9\cos^2\theta=9\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=8$ 답 8

13



[그림 1]

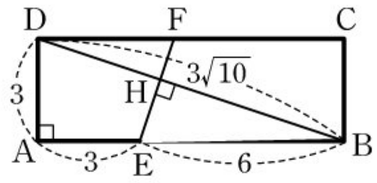
점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D이므로

$\overline{BD}\perp$(평면 AEFD)

따라서 점 D에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{BH}\perp\overline{EF}$

$\therefore \angle BHD=\theta$



[그림 2]

[그림 2]와 같이 종이를 펼치면

△BHE∽△BAD (AA 닮음)이므로

$\overline{BH}:\overline{BE}=\overline{BA}:\overline{BD}$

이때, $\overline{AB}=9$, $\overline{AE}=3$에서 $\overline{BE}=9-3=6$이고,

$\overline{BD}=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$이므로

$\overline{BH}:6=9:3\sqrt{10}$

$3\sqrt{10}\times\overline{BH}=54$

$\therefore \overline{BH}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$

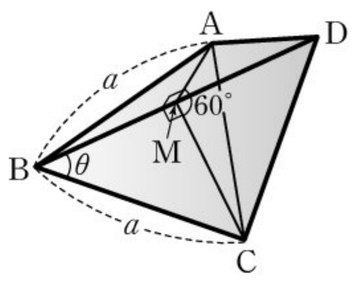
따라서 $\overline{DH}=\overline{BD}-\overline{BH}=3\sqrt{10}-\frac{9\sqrt{10}}{5}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$이므로

[그림 1]의 직각삼각형 BHD에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{6\sqrt{10}}{5}}{\frac{9\sqrt{10}}{5}}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 60\cos\theta=60\times\frac{2}{3}=40$$ 답 40

14 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a $(a>0)$라 하자.



오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD를 대각선 BD를 따라 접은 후 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 대각선 AC의 중점이므로

$$\overline{AM}=\overline{MC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

이때, $\angle AMC=60^\circ$이므로 $\triangle AMC$는 정삼각형이다.

$$\therefore\ \overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{a^2+a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{2\times a\times a}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}a^2}{2a^2}=\frac{3}{4}$$

θ가 예각이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

• 다른풀이 •

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $2a$ $(a>0)$라 하면

$\overline{AC}=2\sqrt{2}a$

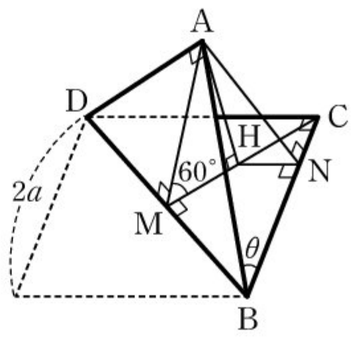
정사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD는 서로 다른 것을 수직이등분하므로 교점을 M이라 하면

$\overline{AM}\perp\overline{BD}$, $\overline{CM}\perp\overline{BD}$이고, $\overline{AM}=\overline{CM}=\sqrt{2}a$

꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH}=\overline{AM}\cos 60^\circ=\sqrt{2}a\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\overline{AH}=\overline{AM}\sin 60^\circ=\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$



이때, 점 H는 선분 CM의 중점이므로 점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 N이라 하면

$$\overline{HN}=\frac{1}{4}\overline{CD}=\frac{1}{2}a$$

즉, 직각삼각형 AHN에서

$$\overline{AN}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$$

또한, 선분 AH가 평면 BCD와 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AN}\perp\overline{BC}$

따라서 $\triangle ABN$이 직각삼각형이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

15 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

또한, 두 삼각형 ABC, AFC에서

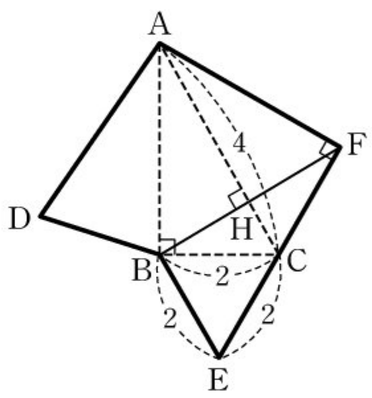
$\overline{AC}$는 공통, $\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{CF}$, $\angle ABC=\angle AFC=90^\circ$

이므로

$\triangle ABC\equiv\triangle AFC$ (RHS 합동) ……㉠

$\therefore\ \overline{AF}=\overline{AB}=2\sqrt{3}$

이때, 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}$$

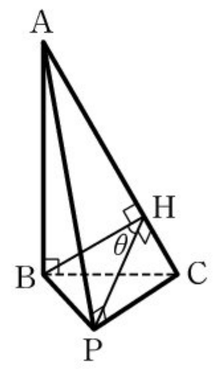
에서

$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=\frac{1}{2}\times4\times\overline{BH}$$

$$2\sqrt{3}=2\overline{BH}\qquad\therefore\ \overline{BH}=\sqrt{3}$$

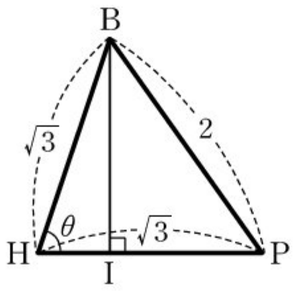
또한, ㉠에 의하여 $\overline{FH}\perp\overline{AC}$이고 $\overline{FH}=\sqrt{3}$

주어진 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하면 오른쪽 그림과 같이 두 평면 ACP, ABC가 이루는 예각의 크기는 두 직선 BH, PH가 이루는 예각의 크기와 같다.



$\therefore\ \angle BHP=\theta$

이때, 삼각형 BPH의 꼭짓점 B에서 변 PH에 내린 수선의 발을 I라 하면 다음 그림과 같다.



$\overline{HI}=x$라 하면 $\overline{PI}=\sqrt{3}-x$이므로

두 직각삼각형 BHI, BIP에서

$$(\sqrt{3})^2-x^2=2^2-(\sqrt{3}-x)^2$$

$$2\sqrt{3}x=2\qquad\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{HI}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$ 답 ⑤

• 다른풀이 •

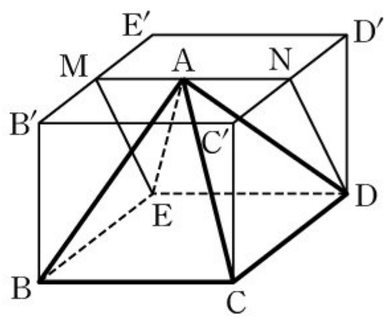
블랙라벨 수학 Ⅰ 62쪽 참고

코사인법칙을 이용하면 $\cos\theta$의 값을 쉽게 구할 수 있다.

삼각형 BPH에서 $\overline{HB}=\overline{PH}=\sqrt{3}$, $\overline{BP}=2$이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{BH}^2+\overline{PH}^2-\overline{BP}^2}{2\times\overline{BH}\times\overline{PH}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

16 다음 그림과 같이 면 BCDE를 밑면으로 하고 사각뿔 A－BCDE가 내접하는 직육면체를 B′C′D′E′－BCDE라 하고, 두 모서리 B′E′, C′D′의 중점을 각각 M, N이라 하자.

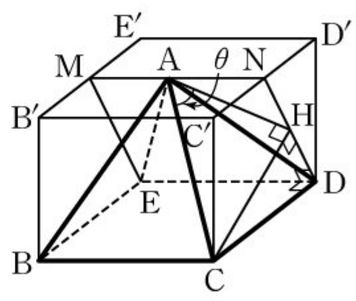


점 A는 선분 MN의 중점이므로 평면 AED는 평면 EDNM과 일치한다.

점 C에서 평면 EDNM에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}\perp$(평면 EDNM), $\overline{CD}\perp\overline{DE}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{DE}$

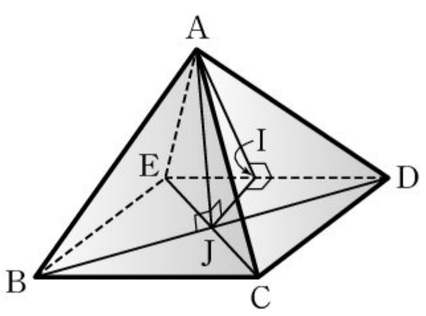
이때, □EDNM이 직사각형이므로 점 H는 선분 DN 위에 있다.



또한, 선분 AC의 평면 EDNM 위로의 정사영이 선분 AH이므로 직선 AC와 평면 AED, 즉 평면 EDNM이 이루는 예각의 크기는 직선 AC와 직선 AH가 이루는 예각의 크기와 같다.

따라서 $\angle CAH=\theta$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \quad \cdots\cdots ㉠$$



한편, 위의 그림과 같이 점 A에서 모서리 ED와 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{IJ}\perp\overline{DE}$

사각뿔 A－BCDE의 한 변의 길이를 a $(a>0)$라 하면

△AED는 정삼각형이고, 모서리 ED의 중점이 I이므로

$$\overline{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

또한, 점 J는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로

$$\overline{IJ}=\frac{1}{2}a$$

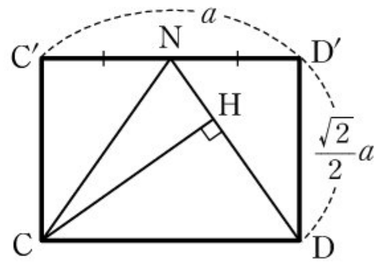
직각삼각형 AJI에서

$$\overline{AJ}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

즉, 직육면체 B′C′D′E′－BCDE의 높이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$이다.

오른쪽 그림에서 $\overline{C'D'}=a$,

$\overline{DD'}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$이고 모서리 C′D′의 중점이 N이므로



$$\overline{C'N}=\frac{1}{2}a$$

직각삼각형 DD′N에서

$$\overline{DN}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

삼각형 CDN에서

$$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\overline{CH}$$

$$\therefore\ \overline{CH}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

즉, ㉠에서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$$\sin^2\theta=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$$

그러므로 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=3+2=5$ 답 ③

blacklabel 특강 참고

두 평면 EDNM, BCDE가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\overline{CD}\perp\overline{ED}$, $\overline{ND}\perp\overline{ED}$이므로

$\angle CDH=\alpha$

$\overline{CH}\perp$(평면 EDNM)에서

$\overline{CH}\perp\overline{DN}$이므로

직각삼각형 CDH에서

$\overline{CH}=\overline{CD}\sin\alpha$

이때, $\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$이므로

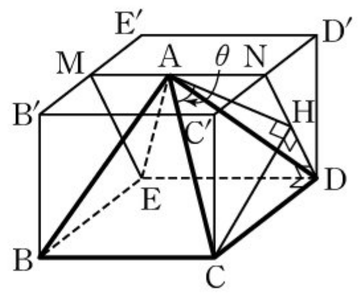
$$\sin\theta=\frac{\overline{CD}\sin\alpha}{\overline{AC}}$$
$$=\sin\alpha\ (\because\ \overline{AC}=\overline{CD})$$

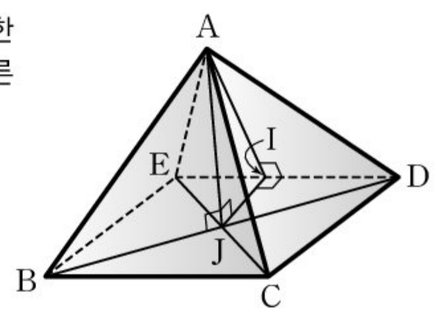
이때, 사각뿔 A－BCDCE의 한 모서리의 길이를 a라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{AJ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로

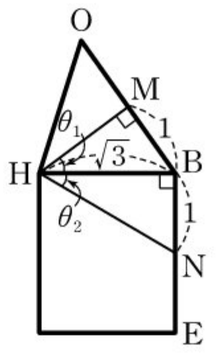
$$\sin\alpha=\frac{\overline{AJ}}{\overline{AI}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$





17 점 M에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 하고 주어진 도형을 평면 OBH로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



$\angle MHB=\theta_1$, $\angle NHB=\theta_2$라 하면

$\theta=\theta_1+\theta_2$

$\triangle ABC$는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{HB}=\sqrt{3}$

이때, $\overline{MB}=1$이므로

직각삼각형 BMH에서 $\overline{HM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta_1=\dfrac{\overline{MB}}{\overline{HB}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cos\theta_1=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{HB}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

또한, $\overline{BN}=1$이므로 직각삼각형 BHN에서

$\overline{HN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$

$\therefore \sin\theta_2=\dfrac{\overline{BN}}{\overline{HN}}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\theta_2=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HN}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}$

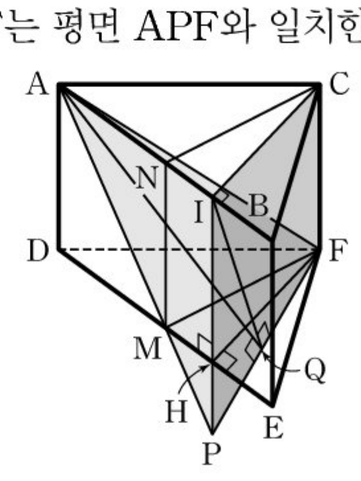
$=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

답 ③

18 해결단계

❶ 단계	두 평면 AMF와 CHF의 그림을 확장하여 교선을 파악한다.
❷ 단계	점 A에서 ❶단계에서 파악한 교선에 수선을 그리고, 두 직선 사이의 각의 cos값을 구한다.
❸ 단계	p, q의 값을 각각 구한 후, $p+q$의 값을 구한다.

모서리 AB의 중점을 N, 점 C에서 모서리 AB에 내린 수선의 발을 I라 하고, 선분 AM과 선분 IH의 연장선이 만나는 점을 P라 하면 평면 CHF는 평면 CIPF와 일치하고 평면 AMF는 평면 APF와 일치한다.



이때, $\overline{AI}\perp$(평면 CIPF)이므로 점 A에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{IQ}\perp\overline{PF}$

즉, 평면 APF와 평면 CIPF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AQ, IQ가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle AQI=\theta$

한편, $\overline{AC}=4$, $\overline{CF}=2$이므로 직각삼각형 AFC에서

$\overline{AF}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{AN}=\overline{NB}=2$, $\overline{NI}=\overline{IB}=1$

즉, $\overline{AI}=3$이고 $\overline{AC}=4$이므로 직각삼각형 AIC에서

$\overline{CI}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

직각삼각형 CIB에서 $\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+1^2}=2\sqrt{2}$

또한, 직각삼각형 ANM에서 $\overline{AM}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 AMN, MPH의 닮음비가 2 : 1이므로

$\overline{PH}=1$, $\overline{MP}=\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AP}=\overline{AM}+\overline{MP}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

또한, 직각삼각형 FHP에서 $\overline{PF}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle APF$에서 $\overline{PQ}=a$ $(a>0)$라 하면

$\overline{FQ}=2\sqrt{2}-a$이므로

$\overline{AQ}^2=(3\sqrt{2})^2-a^2=(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2}-a)^2$

$6=4\sqrt{2}a$ $\quad\therefore a=\dfrac{6}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \overline{AQ}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{135}{8}}=\dfrac{3\sqrt{30}}{4}$

또한, $\overline{IP}=3$이므로 직각삼각형 IPQ에서

$\overline{IQ}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{63}{8}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{4}$

$\triangle AQI$에서 $\angle AIQ=90^\circ$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{IQ}}{\overline{AQ}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{4}\times\dfrac{4}{3\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$

$\therefore \cos^2\theta=\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}\right)^2=\dfrac{7}{15}$

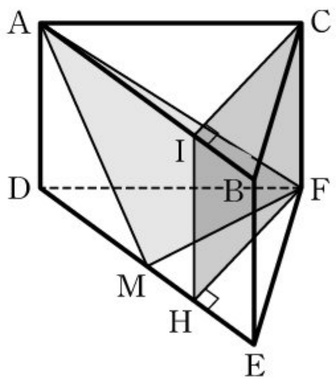
따라서 $p=15$, $q=7$이므로

$p+q=15+7=22$

답 22

• 다른풀이 •

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면 평면 CHF는 평면 CIHF와 일치하므로 두 평면 AMF, CHF가 이루는 예각의 크기는 두 평면 AMF, CIHF가 이루는 예각의 크기와 같다.



또한, $\overline{AI}\perp$(평면 CIHF),

$\overline{DH}\perp$(평면 CIHF)에서 두 점 A, M의 평면 CIHF 위로의 정사영은 각각 I, H이므로 삼각형 AMF의 평면 CIHF 위로의 정사영은 삼각형 IHF이다.

$\therefore \triangle AMF\cos\theta=\triangle IHF$ ……㉠

모서리 DE의 중점이 M, 선분 ME의 중점이 H이고

$\overline{DE}=4$이므로

$\overline{DM}=\overline{EM}=2$, $\overline{MH}=\overline{EH}=1$

즉, $\overline{DH}=3$이고, $\overline{DF}=4$이므로 직각삼각형 FDH에서

$\overline{FH}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

$\therefore \triangle IHF=\dfrac{1}{2}\times\overline{IH}\times\overline{FH}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$ ……㉡

직각삼각형 FMH에서

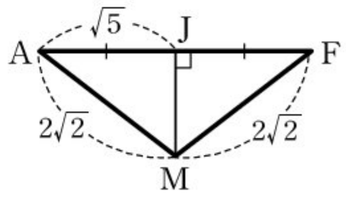
$\overline{FM}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AD}=2$이므로 직각삼각형 ADM에서

$\overline{AM}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=4$이므로 직각삼각형 ADF에서

$\overline{AF}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$



즉, $\triangle AMF$는 이등변삼각형이므로 선분 AF의 중점을 J라 하면 선분 MJ는 선분 AF를 수직이등분한다.

즉, $\overline{AJ}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 AMJ에서

$\overline{MJ}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \triangle AMF=\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{MJ}$

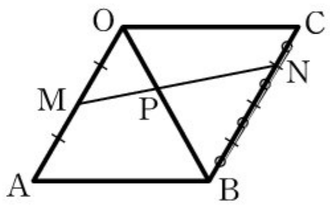
$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$ ……㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에서

$\sqrt{15}\cos\theta=\sqrt{7}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$

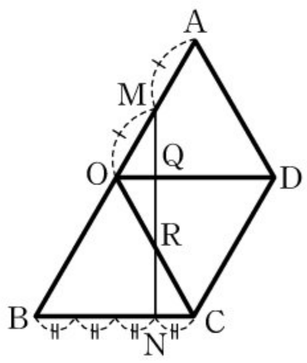
$\therefore \cos^2\theta=\frac{7}{15}$

19 주어진 사각뿔의 두 옆면 OAB, OBC를 이용하여 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{MP}+\overline{PN}$의 값이 최소가 되려면 점 P는 두 선분 MN, OB의 교점이어야 한다.



이때, 두 삼각형 POM과 PBN은 서로 닮은 도형이고, 닮음비가 2 : 3이므로 점 P는 선분 OB를 2 : 3으로 내분한다. ……㉠

또한, 주어진 사각뿔의 두 옆면 OAD, OCD, OBC를 이용하여 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{MQ}+\overline{QR}+\overline{RN}$의 값이 최소가 되려면 두 점 Q, R는 각각 선분 MN과 두 선분 OD, OC의 교점이어야 한다.



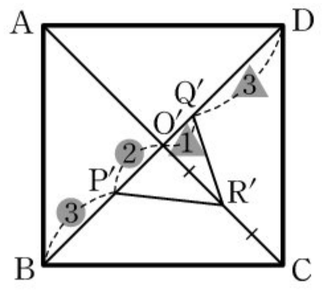
이때, 두 삼각형 OMQ, BMN은 서로 닮은 도형이고 닮음비가 1 : 3이므로

$\overline{OQ}=\frac{1}{3}\overline{BN}$

즉, $\overline{OQ}=\frac{1}{4}\overline{BC}$이므로 점 Q는 선분 OD를 1 : 3으로 내분한다. ……㉡

또한, 두 삼각형 OQR, CNR가 합동이므로 점 R는 선분 OC의 중점이다. ……㉢

꼭짓점 O와 세 점 P, Q, R의 평면 ABCD 위로의 정사영을 각각 O′, P′, Q′, R′이라 하면 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 밑면 ABCD는 다음 그림과 같다.



사각뿔 O – ABCD의 한 모서리의 길이가 20이므로

$\overline{BD}=\overline{AC}=20\sqrt{2}$

$\therefore \overline{O'B}=\overline{O'C}=\overline{O'D}=10\sqrt{2}$

$\therefore \overline{O'P'}=4\sqrt{2}$, $\overline{O'Q'}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\overline{O'R'}=5\sqrt{2}$

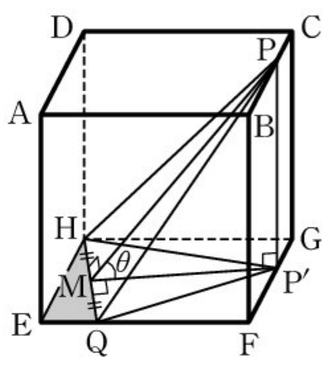
따라서 삼각형 PQR의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는 삼각형 P′Q′R′의 넓이와 같으므로

$\triangle P'Q'R'=\frac{1}{2}\times\left(4\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\times5\sqrt{2}$

$=\frac{65}{2}$

답 $\frac{65}{2}$

20 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 P′, 점 P′에서 선분 HQ에 내린 수선의 발을 M이라 하자.



$\overline{PP'}\perp$(평면 EFGH),

$\overline{P'M}\perp\overline{HQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PM}\perp\overline{HQ}$

또한, 삼각형 PHQ의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 P′HQ이고, 이 도형이 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$\overline{P'M}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

이때, $\overline{PP'}=\sqrt{15}$이므로 $\triangle PMP'$에서

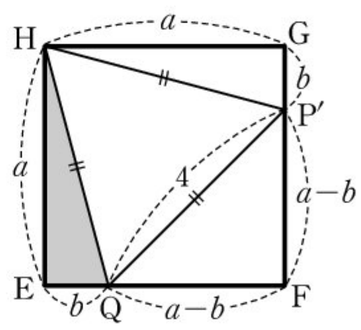
$\overline{PM}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{15})^2}=3\sqrt{3}$

두 평면 EFGH와 PHQ가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle PMP'=\theta$이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{P'M}}{\overline{PM}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$ ……㉠

한편, □EFGH에서 오른쪽 그림과 같이 $\overline{EH}=a$, $\overline{EQ}=b$라 하면



$\triangle EQH\equiv\triangle GP'H$(RHS 합동)

이므로

$\overline{GP'}=b$

$\therefore \overline{FP'}=\overline{FQ}=a-b$

이때, $\overline{HQ}=\overline{QP'}=4$이므로

직각삼각형 EQH에서 $a^2+b^2=16$

직각이등변삼각형 QFP′에서 $\sqrt{2}(a-b)=4$

$\therefore a-b=2\sqrt{2}$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$이므로

$(2\sqrt{2})^2=16-2ab$, $2ab=8$

$\therefore ab=4$

따라서 삼각형 EQH의 넓이는

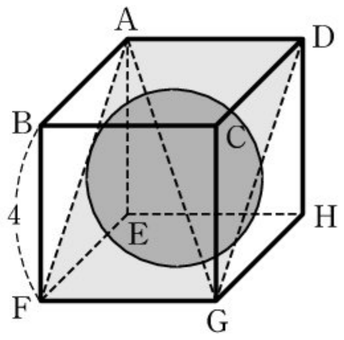
$\frac{1}{2}\times\overline{EH}\times\overline{EQ}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times4=2$

이므로 삼각형 EQH의 평면 PHQ 위로의 정사영의 넓이는

$2\times\cos\theta=2\times\frac{2}{3}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{4}{3}$ 답 ④

21 선분 AG가 정육면체의 대각선이므로 삼각형 AFG를 포함하는 평면 AFGD에 의하여 잘린 구의 단면은 지름의 길이가 4인 원이다.



즉, 삼각형 AFG에 의하여 잘린 구의 단면의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times2^2=2\pi$

평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\theta=45^\circ$이므로

$\cos\theta=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 AFG에 의하여 잘린 구의 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이는

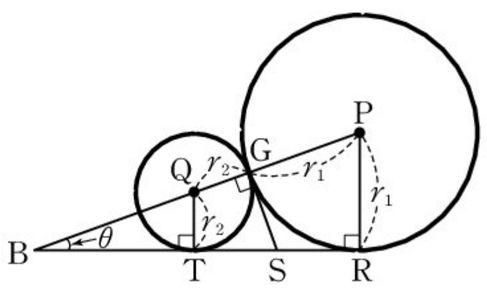
$2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\pi$

같은 방법으로 삼각형 AGH에 의하여 잘린 구의 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이도 $\sqrt{2}\pi$이므로 도형 K의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이는

$\sqrt{2}\pi+\sqrt{2}\pi=2\sqrt{2}\pi$ 답 $2\sqrt{2}\pi$

22 $\overline{BG}\perp$(평면 ACD), $\overline{PG}\perp$(평면 ACD)이므로 네 점 B, Q, G, P는 한 직선 위에 있다.

중심이 P인 구와 평면 α의 접점을 R, 직선 AG와 모서리 CD의 교점을 S, 중심이 Q인 구와 평면 α의 접점을 T라 하고, 중심이 P인 구의 반지름의 길이를 r_1, 중심이 Q인 구의 반지름의 길이를 r_2라 하면 두 구를 평면 PBR로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



$\overline{BS}$는 한 변의 길이가 6인 정삼각형 BCD의 높이이므로

$\overline{BS}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

즉, $\overline{AS}=\overline{BS}=3\sqrt{3}$이고, 삼각형 ACD의 무게중심 G가 선분 AS를 2 : 1로 내분하므로

$\overline{GS}=\frac{1}{3}\overline{AS}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

직각삼각형 BSG에서

$\overline{BG}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

이때, $\angle GBS=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{BG}}{\overline{BS}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ……㉠

(i) $\triangle PBR\backsim\triangle SBG$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BP}:\overline{PR}=\overline{BS}:\overline{SG}$, 즉

$(2\sqrt{6}+r_1):r_1=3\sqrt{3}:\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}r_1=\sqrt{3}(2\sqrt{6}+r_1)$, $2r_1=2\sqrt{6}$

$\therefore r_1=\sqrt{6}$

(ii) $\triangle QBT\backsim\triangle SBG$ (AA 닮음)이므로

$\overline{BQ}:\overline{QT}=\overline{BS}:\overline{SG}$, 즉

$(2\sqrt{6}-r_2):r_2=3\sqrt{3}:\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}r_2=\sqrt{3}(2\sqrt{6}-r_2)$, $4r_2=2\sqrt{6}$

$\therefore r_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(i), (ii)에서

$\overline{PQ}=r_1+r_2$

$=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

이때, 선분 PQ의 평면 α 위로의 정사영은 선분 TR이므로 구하는 길이는

$\overline{TR}=\overline{PQ}\times\cos\theta$

$=\frac{3\sqrt{6}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because$ ㉠)

$=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	네 점 B, Q, G, P 및 두 구와 평면 α의 접점을 지나는 단면을 이용한 경우	20%
(나)	두 선분 BS, BG의 길이를 이용하여 직선 PQ와 평면 α가 이루는 각의 cos 값을 구한 경우	30%
(다)	두 구의 반지름의 길이를 이용하여 선분 PQ의 길이를 구한 경우	30%
(라)	(나), (다)의 결과를 이용하여 정사영의 길이를 구한 경우	20%

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

이 문제는 정사면체의 내접구와 외접구의 성질을 알고 있으면 쉽게 해결할 수 있다.

① 정사면체의 내접구는 정사면체의 각 면의 무게중심에서 정사면체의 면과 접한다.

② 정사면체의 높이가 h일 때, 내접구와 외접구의 반지름의 길이는 각각 $\frac{1}{4}h$, $\frac{3}{4}h$이다. 즉, 내접구와 외접구의 반지름의 길이의 비는 1 : 3이다.

③ 정사면체의 한 모서리의 길이가 a일 때, 정사면체의 높이는 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$이고, 이것은 내접구와 외접구의 반지름의 길이의 합과 같다.

위의 성질을 이용하면 문제에서 정사면체의 한 모서리의 길이가 6이므로 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}\times6=2\sqrt{6}$이다.

$\therefore r_2=\frac{1}{4}\times2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

이때, 선분 BG의 길이는 정사면체의 내접구와 외접구의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\overline{BG}=2\sqrt{6}$

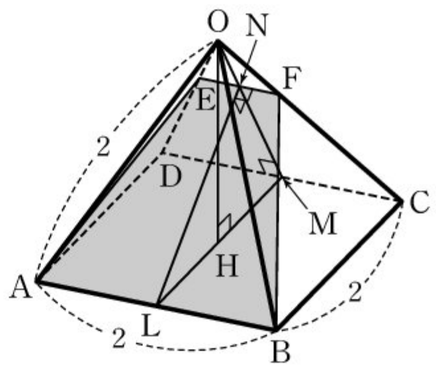
두 삼각형 QBT, PBR에서 $\frac{\overline{QT}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{PR}}{\overline{BP}}$이고, 정사면체의 내접구와 외접구의 반지름의 길이의 비는 1 : 3이므로

$\frac{1}{3}=\frac{r_1}{2\sqrt{6}+r_1}$, $2\sqrt{6}+r_1=3r_1$

$2r_1=2\sqrt{6}$ $\therefore r_1=\sqrt{6}$

$\therefore r_1+r_2=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

23



두 모서리 AB, CD의 중점을 각각 L, M, 선분 EF의 중점을 N이라 하고, 꼭짓점 O에서 면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

△ODC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{OM}\perp\overline{DC}$이고, 선분 LM의 중점이 H이므로

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$, $\overline{LH}=\overline{MH}=\frac{1}{2}\times 2=1$

직각삼각형 OHM에서 $\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

$\angle OMH=\alpha$라 하면 직각삼각형 OHM에서

$\cos\alpha=\frac{\overline{HM}}{\overline{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

직각삼각형 LMN에서

$\overline{MN}=\overline{LM}\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{LN}=\overline{LM}\sin\alpha=2\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

또한, $\overline{ON}=\overline{OM}-\overline{MN}=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$\overline{ON}:\overline{OM}=1:3$이므로

$\overline{EF}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{2}{3}$

$\overline{EF}/\!/\overline{DC}$, $\overline{DC}/\!/\overline{AB}$이므로 $\overline{EF}/\!/\overline{AB}$

즉, □ABFE는 사다리꼴이고, 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{EF})\times\overline{LN}=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{2}{3}\right)\times\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$=\frac{8\sqrt{6}}{9}$

한편, 직각삼각형 LMN에서

$\cos(\angle NLM)=\frac{\overline{LN}}{\overline{LM}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$S=\frac{8\sqrt{6}}{9}\cos(\angle NLM)$

$=\frac{8\sqrt{6}}{9}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$

$=\frac{16}{9}$

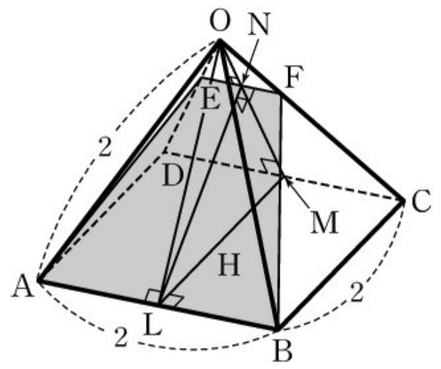
$\therefore 18S=18\times\frac{16}{9}=32$ 답 32

• 다른풀이 •

세 선분 AB, CD, EF의 중점을 각각 L, M, N이라 하면 △OAB, △OCD가 각각 정삼각형이고 $\overline{CD}/\!/\overline{EF}$에서 △OEF도 정삼각형이므로 세 선분 OL, OM, ON은 각각 선분 AB, CD, EF를 수직이등분한다.

또한, (평면 ODC)⊥(평면 ABFE)이고, $\overline{OL}\perp\overline{AB}$, $\overline{ON}\perp\overline{EF}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB}\perp\overline{NL}$, $\overline{EF}\perp\overline{NL}$



사각뿔 O－ABCD의 한 모서리의 길이가 2이므로

$\overline{ML}=2$이고, △OAB, △OCD에서

$\overline{OL}=\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

$\overline{ON}=a$라 하면 $\overline{MN}=\sqrt{3}-a$이고 두 직각삼각형 OLN, LMN에서

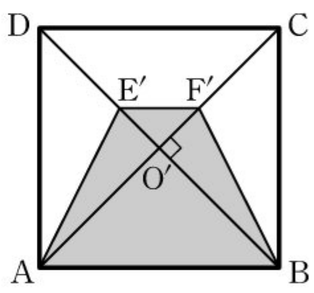
$(\sqrt{3})^2-a^2=2^2-(\sqrt{3}-a)^2$

$2=2\sqrt{3}a$ $\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $\overline{ON}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{MN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 점 N은 선분 OM을 1 : 2로 내분한다.

따라서 두 점 E, F는 각각 두 선분 OD, OC를 1 : 2로 내분한다.

한편, 꼭짓점 O와 두 점 E, F의 밑면 ABCD 위로의 정사영을 각각 O′, E′, F′이라 하자.



밑면 ABCD는 한 변의 길이가 2인 정사각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BD}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{O'A}=\overline{O'B}=\overline{O'C}=\overline{O'D}=\sqrt{2}$

두 점 E′, F′이 각각 두 선분 O′D, O′C를 1 : 2로 내분하므로

$\overline{O'E'}=\overline{O'F'}=\frac{1}{3}\overline{O'C}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

따라서 사각형 ABFE의 평면 ABCD 위로의 정사영은 사각형 ABF′E′이므로 그 넓이는

$S=\triangle O'AB+\triangle O'BF'+\triangle O'F'E'+\triangle O'E'A$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}$

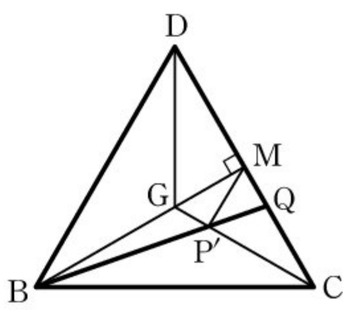
$=\frac{16}{9}$

$\therefore 18S=18\times\frac{16}{9}=32$

24

점 P의 평면 BCD 위로의 정사영을 P′이라 하자.

두 선분 BP, PQ의 평면 BCD 위로의 정사영이 각각 선분 BP′, P′Q이므로 $\overline{BP'}+\overline{P'Q}$의 값이 최소이려면 점 P′이 선분 BQ 위에 있어야 한다.



또한, 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발은 정삼각형 BCD의 무게중심과 같으므로 이 무게중심을 G라 할 때, 점 P′은 두 선분 BQ와 GC의 교점이어야 한다.
모서리 CD의 중점을 M이라 하면 점 Q가 선분 CM을 2 : 1로 내분하고 점 G가 선분 BM을 2 : 1로 내분하므로
$\overrightarrow{MB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\vec{b}$

점 P′이 선분 GC 위에 있으므로

$\overrightarrow{MP'}=(1-k)\overrightarrow{MG}+k\overrightarrow{MC}$

$=\frac{1}{3}(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ (단, $0<k<1$) ……㉠

또한, 점 P′이 선분 BQ 위에 있으므로

$\overrightarrow{MP'}=(1-s)\overrightarrow{MB}+s\overrightarrow{MQ}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$ (단, $0<s<1$) ……㉡

㉠=㉡이므로

$\frac{1}{3}(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로

$\frac{1}{3}(1-k)=1-s$, $k=\frac{1}{3}s$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$k=\frac{1}{4}$, $s=\frac{3}{4}$

$\therefore \overrightarrow{MP'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MG}+\frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$에서

점 P′은 선분 GC를 1 : 3으로 내분하므로 점 P는 모서리 AC를 1 : 3으로 내분한다.
삼각형 ABC에서 변 AC의 중점을 N이라 하면 중선정리에 의하여



$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{BN}^2+\overline{AN}^2)$

$4^2+3^2=2(\overline{BN}^2+2^2)$

$\therefore \overline{BN}^2=\frac{17}{2}$

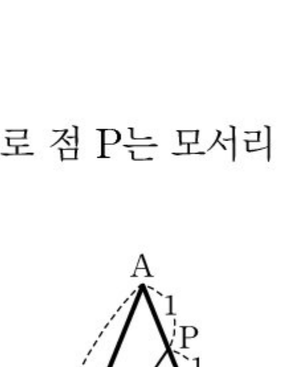
또한, 삼각형 ABN에서 점 P가 선분 AN의 중점이므로 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{BN}^2=2(\overline{BP}^2+\overline{AP}^2)$

$4^2+\frac{17}{2}=2(\overline{BP}^2+1^2)$, $\overline{BP}^2=\frac{45}{4}$

$\therefore \overline{BP}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ($\because \overline{BP}>0$)

삼각형 ACD의 꼭짓점 A에서 변 CD에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 선분 AH_1은 변 CD의 수직이등분선이므로



$\overline{CH_1}=\overline{DH_1}=\frac{3}{2}$

$\angle ACD=\theta_1$이라 하면

$\cos\theta_1=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8}$

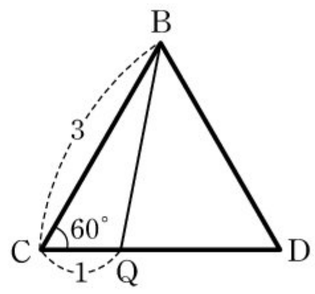
삼각형 PCQ에서 $\overline{PC}=3$, $\overline{CQ}=1$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{PC}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{PC}\times\overline{CQ}\times\cos\theta_1$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{3}{8}=\frac{31}{4}$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{\sqrt{31}}{2}$ ($\because \overline{PQ}>0$)

△BCD는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로 $\angle BCQ=60^\circ$, $\overline{BC}=3$
삼각형 BCQ에서 $\overline{CQ}=1$이므로 코사인법칙에 의하여

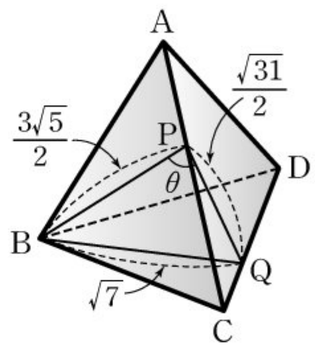


$\overline{BQ}^2=\overline{BC}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CQ}\times\cos60^\circ$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\frac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{BQ}=\sqrt{7}$ ($\because \overline{BQ}>0$)

따라서 삼각형 BPQ에서 두 선분 BP, PQ가 이루는 각의 크기가 θ이므로 코사인법칙에 의하여



$\cos\theta$

$=\frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{2}\right)^2-(\sqrt{7})^2}{2\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{31}}{2}}$

$=\frac{8}{\sqrt{155}}$

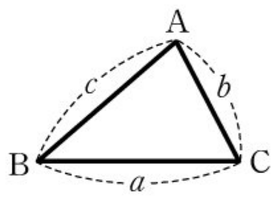
$\therefore \cos^2\theta=\frac{64}{155}$ 답 ②

blacklabel 특강 필수 개념

코사인법칙

(1) 코사인법칙

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

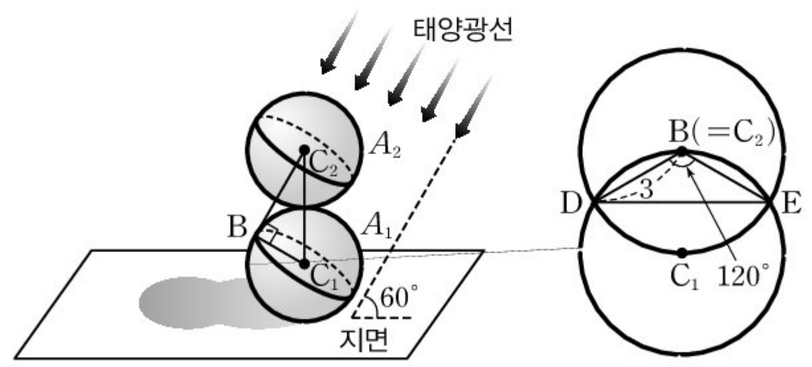


(2) 코사인법칙의 변형

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

25



[그림 1] [그림 2]

두 구 A_1, A_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하자.
구의 중심을 지나는 단면 중 [그림 1]과 같이 태양광선과 수직인 단면을 생각하면 지면에 생긴 그림자는 [그림 2]와 같이 포개어진 두 원에 대한 그림자가 된다.
[그림 1]에서 $\overline{BC_2}$ // (태양광선), $\overline{BC_1}$ ⊥ (태양광선)이므로
$\angle BC_2C_1=30^\circ$, $\angle BC_1C_2=60^\circ$
두 구의 중심 사이의 거리가 6이므로

$\overline{BC_1}=6\cos60^\circ=6\times\frac{1}{2}=3$

이것은 구의 반지름의 길이와 같으므로 [그림 2]에서 두 원은 서로의 중심을 지난다.

$\therefore \overline{BE}=\overline{EC_1}=\overline{BC_1}=3$

즉, $\triangle C_1BE$는 정삼각형이므로 $\angle C_1BE=60^\circ$

$\therefore \angle DBE=120^\circ$

이때, [그림 2]에서 두 원이 겹쳐진 부분의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 DBE의 넓이})-\triangle BDE\}$

$=2\left\{\pi\times3^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times3\times3\times\underbrace{\sin(180^\circ-120^\circ)}_{\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$

$=6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}$

이므로 [그림 2]의 도형의 넓이는

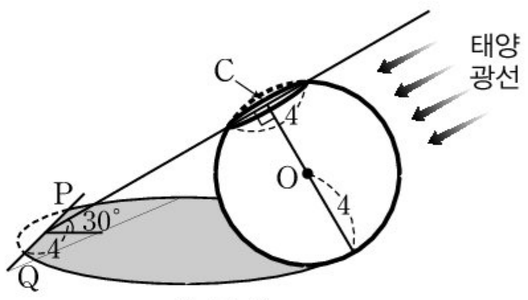
$2\times(\pi\times3^2)-\left(6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)=12\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$

따라서 [그림 1]에서 구의 중심을 지나고 태양광선과 수직인 단면이 지면과 이루는 각의 크기가 30°이므로 구하는 그림자의 넓이를 S라 하면

$S\cos 30^\circ=12\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(12\pi+\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)=8\sqrt{3}\pi+9$ 답 $8\sqrt{3}\pi+9$

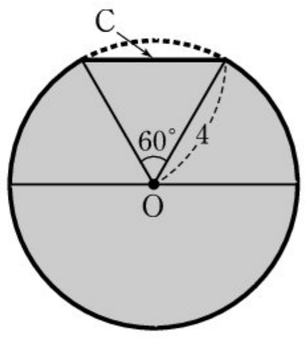
26



[그림 1]

$\overline{PQ}=4$이므로 [그림 1]과 같이 선분 PQ를 포함하고, 직육면체의 윗면과 30°의 각을 이루는 평면으로 구를 자른 단면은 지름의 길이가 4인 원이다.

이때, 단면인 원의 중심을 C, 구의 중심을 O라 하면 태양광선에 수직이고 구의 중심을 지나는 평면으로 자른 구의 단면은 [그림 2]와 같으므로 [그림 2]에서 어두운 부분의 넓이를 S라 하면

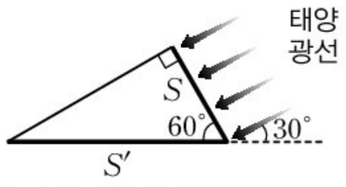


[그림 2]

$S=\pi\times4^2\times\frac{300}{360}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2$

$=\frac{40}{3}\pi+4\sqrt{3}$

따라서 오른쪽 그림과 같이 태양광선이 구의 중심을 지나는 평면에 수직으로 비출 때, 직육면체의 윗면에 생긴 구의 그림자의 넓이를 S'이라 하면



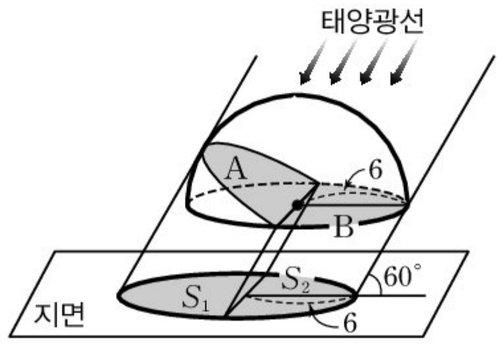
$S'\cos 60^\circ=S$이므로

$S'=\frac{S}{\cos 60^\circ}$

$=2\left(\frac{40}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)$

$=\frac{80}{3}\pi+8\sqrt{3}$ 답 $\frac{80}{3}\pi+8\sqrt{3}$

27



위의 그림과 같이 지면 위에 그림자를 만드는 부분은 태양광선과 수직인 평면 위의 반원 A와 지면과 평행한 평면 위의 반원 B로 나눌 수 있다.

두 반원 A, B의 지면 위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

반구의 밑면과 면 A가 이루는 각의 크기가 30°이므로 $\underbrace{30^\circ}_{=90^\circ-60^\circ}$

$S_1\cos 30^\circ=(\text{반원 A의 넓이})$

$=\frac{1}{2}\times\pi\times6^2=18\pi$

$\therefore S_1=\frac{18\pi}{\cos 30^\circ}=18\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}=12\sqrt{3}\pi$

한편, S_2는 반원 B의 넓이와 같으므로

$S_2=\frac{1}{2}\times\pi\times6^2=18\pi$

따라서 지면에 나타나는 반구의 그림자의 넓이는

$S_1+S_2=12\sqrt{3}\pi+18\pi$

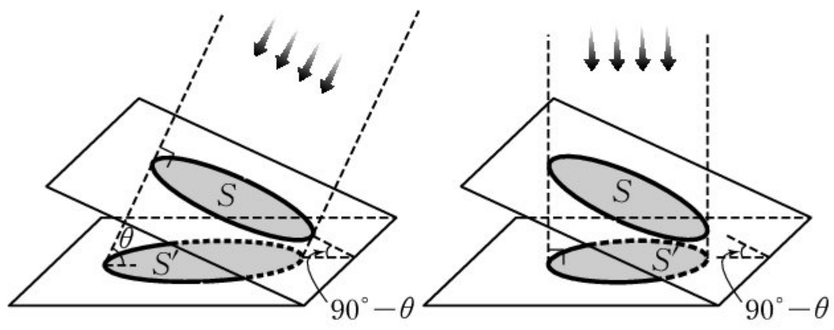
$=(12\sqrt{3}+18)\pi$

$\therefore a=12,\ b=18$

$\therefore a+b=12+18=30$ 답 30

blacklabel 특강 풀이첨삭

태양광선이 지면과 이루는 각의 크기를 θ, 태양광선과 수직으로 만나는 부분의 넓이를 S, 그 그림자의 넓이를 S'이라 하면 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있다.



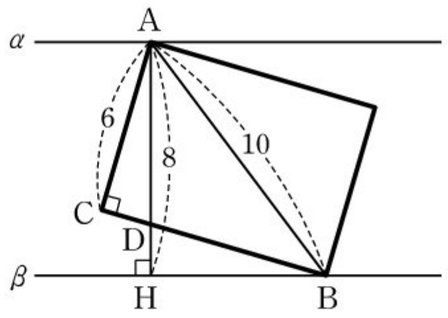
[그림 1] [그림 2]

$\therefore S'\cos(90^\circ-\theta)=S$

이때, $S'=S\cos(90^\circ-\theta)$라 하지 않도록 주의한다. 이 식이 의미하는 상황은 [그림 2]와 같으므로 [그림 1]의 상황과 그 차이를 구분할 수 있어야 한다.

28

점 A에서 원기둥의 옆면을 따라 원기둥의 밑면에 내린 수선의 발을 C, 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하면 네 점 A, B, C, H는 한 평면 위에 있고 이 평면이 두 평면 α, β와 각각 수직이므로 평면 ABHC로 원기둥을 자른 단면은 다음 그림과 같다.



△ABC에서 $\overline{AC}=6$, $\overline{AB}=10$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

즉, 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 4이다.

이때, △AHB에서 $\overline{HB}=\sqrt{10^2-8^2}=6$이므로 두 선분 AH, BC의 교점을 D라 하면

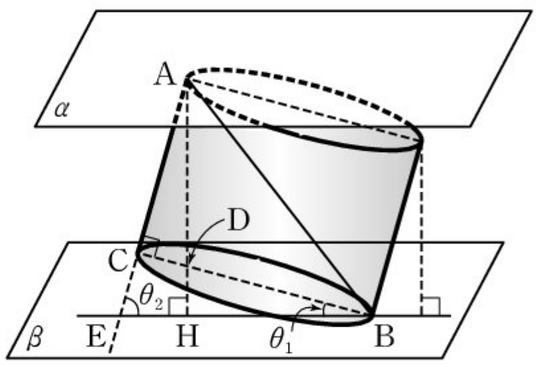
△ACD≡△BHD (ASA 합동)

$\overline{CD}=\overline{HD}=a$라 하면 $\overline{BD}=8-a$이므로 △BHD에서

$(8-a)^2=a^2+6^2$

$16a=28 \qquad \therefore a=\frac{7}{4}$

$\therefore \overline{CD}=\overline{HD}=\frac{7}{4}$, $\overline{BD}=\overline{AD}=\frac{25}{4}$



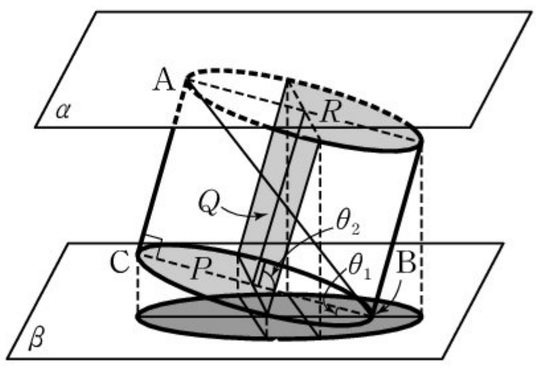
원기둥의 밑면이 평면 β와 이루는 각의 크기를 θ_1, 직선 AC가 평면 β와 만나는 점을 E라 할 때, $\angle AEH=\theta_2$라 하자.

△BHD에서 $\cos\theta_1=\frac{\overline{HB}}{\overline{BD}}=\frac{6}{\frac{25}{4}}=\frac{24}{25}$

△AEH∽△ADC (AA 닮음)이므로

$\cos\theta_2=\cos(\angle ADC)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

$=\frac{7}{4}\times\frac{4}{25}=\frac{7}{25}$



위의 그림과 같이 밑면의 두 반원의 넓이를 각각 P, R라 하고, 두 밑면의 중심을 지나고 평면 ABC에 수직인 평면으로 원기둥을 잘랐을 때의 단면의 넓이를 Q라 하면

$P=R=\frac{1}{2}\times\pi\times4^2=8\pi$

$Q=6\times8=48$

따라서 원기둥의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$P\cos\theta_1+Q\cos\theta_2+R\cos\theta_1$

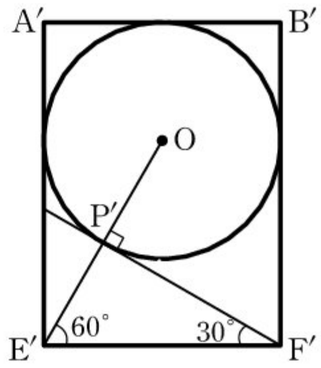
$=8\pi\times\frac{24}{25}+48\times\frac{7}{25}+8\pi\times\frac{24}{25}$

$=\frac{48(7+8\pi)}{25}$

답 ③

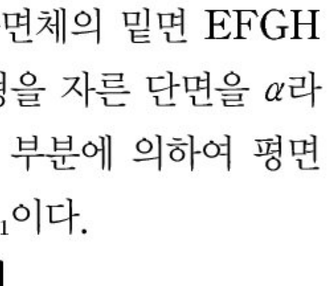
29

직육면체 안의 구의 중심을 O라 하고 O를 지나면서 면 AEFB와 평행한 평면으로 직육면체를 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\angle E'P'F'=90^\circ$이므로 점 P′은 점 F′에서 원 O에 그은 접선과 선분 OE′의 교점이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 변 E′F′에 내린 수선의 발을 I라 하면 원 O의 반지름의 길이가 4이고, $\overline{A'E'}=4+4\sqrt{3}$이므로



$\overline{E'I}=4$, $\overline{OI}=4\sqrt{3}$

△OE′I가 직각삼각형이므로

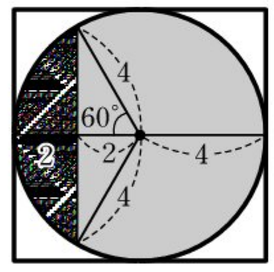
$\angle OE'I=60^\circ$, $\overline{OE'}=8$

점 P′에서 선분 E′F′에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{P'E'}=4$이므로 △P′E′J에서 $\overline{E'J}=2$

또한, 직선 P′J를 포함하고 면 ADHE와 평행한 평면으로 구를 잘랐을 때, 구의 중심 O를 포함한 도형과 구의 중심 O를 포함하지 않은 도형의 그림자의 넓이가 각각 S_1, S_2이다.

이때, 구의 중심 O를 지나면서 직육면체의 밑면 EFGH에 평행한 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 α라 하면 단면 α에서 [그림 1]의 어두운 부분에 의하여 평면 PFGQ에 생기는 그림자의 넓이가 S_1이다.



[그림 1]

위의 그림에서 어두운 부분의 넓이를 구하면

$\pi\times4^2\times\frac{240}{360}+\frac{1}{2}\times4\times4\times\underbrace{\sin(180^\circ-120^\circ)}_{=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}$

단면 α와 평면 PFGQ가 이루는 각의 크기가 30°이므로

$S_1\cos30^\circ=\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}$에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}S_1=\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}$

$\therefore S_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)=\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi+8$

또한, 단면 α에서 [그림 1]의 빗금 친 부분에 의하여 평면 EPQH에 생기는 그림자의 넓이가 S_2이다.

[그림 1]에서 빗금 친 부분의 넓이를 구하면

$16\pi-\left(\frac{32}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$

단면 α와 평면 EPQH가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$S_2\cos60^\circ=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}S_2=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$

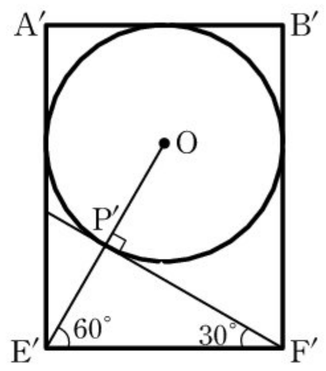
$$\therefore S_2=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}$$

$$\therefore S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2=\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi+8+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{64\sqrt{3}}{9}\pi+8+\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi-8$$
$$=\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$$

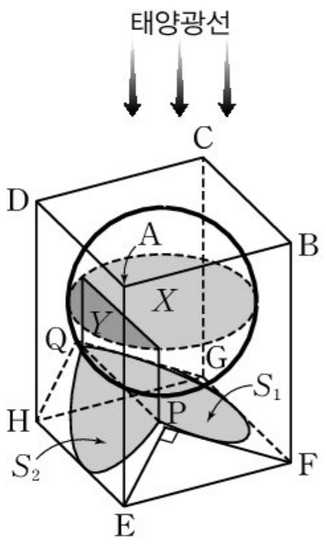
답 ④

• 다른풀이 •

오른쪽 그림의 직사각형 $A'E'F'B'$에서 $\angle P'F'E'=30^\circ$, $\angle P'E'F'=60^\circ$이므로 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH가 밑면 EFGH와 이루는 각의 크기가 각각 30°, 60°이다.



이때, 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나면서 밑면과 평행한 평면으로 자른 구의 단면 중 면 PFGQ에 그림자가 생기는 영역의 넓이를 X, 면 EPQH에 그림자가 생기는 영역의 넓이를 Y라 하면



$$X=S_1\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}S_1$$

$$Y=S_2\cos 60^\circ=\frac{1}{2}S_2$$

X, Y의 합은 반지름의 길이가 4인 원의 넓이와 같으므로

$$X+Y=\pi\times 4^2$$

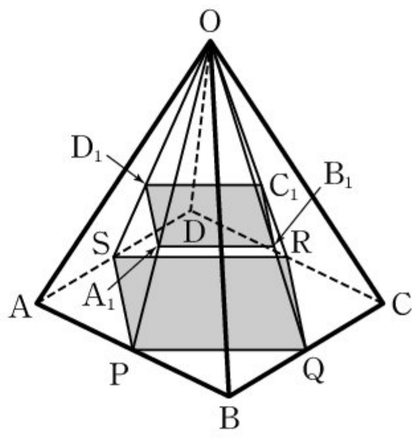
$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_1+\frac{1}{2}S_2=16\pi$$

위의 식의 양변에 $\frac{2}{\sqrt{3}}$을 곱하면

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}S_1+\frac{1}{2}S_2\right)\times\frac{2}{\sqrt{3}}=16\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2=\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$$

오른쪽 그림의 사각뿔에서 네 모서리 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하면



$$\square PQRS=\frac{1}{2}\square ABCD \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한, 삼각형 OAB의 무게중심이 A_1이므로 삼각형 OPQ에서 $\overline{OP}:\overline{OA_1}=3:2$

$\overline{PQ}:\overline{A_1B_1}=3:2$

즉, 두 사각형 PQRS와 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 비는 $9:4$이므로

$$\square A_1B_1C_1D_1=\frac{4}{9}\square PQRS \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\square A_1B_1C_1D_1=\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\square ABCD$$
$$=\frac{2}{9}\square ABCD$$

같은 방법으로 S_n과 S_{n+1} 사이의 관계식을 구하면

$S_{n+1}=\frac{2}{9}S_n$이고, $\square ABCD=35$이므로

$$S_1=\frac{2}{9}\times 35=\frac{70}{9}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{70}{9}$, 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{\frac{70}{9}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{\frac{70}{9}}{\frac{7}{9}}=10$$

답 10

02 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 만족시키는 입체도형을 그림으로 나타낸 후, 모서리 BD의 중점 N에 대하여 두 평면 ABD, BCD가 이루는 각의 크기가 두 직선 AN, CN이 이루는 각의 크기와 같음을 파악한다.
❷ 단계	피타고라스 정리를 이용하여 선분 AC의 길이를 구한다.
❸ 단계	△ANC에서 $\cos\theta$의 값을 구한다.

마름모 모양의 종이 ABCD를 선분 BD를 접는 선으로 하여 접어 만든 입체도형에서 모서리 AC의 중점을 M이라 하면

$\overline{DM}\perp$(평면 ABC)

모서리 BD의 중점을 N이라 하면 △ABD, △BCD가 정삼각형이므로

$\overline{AN}\perp\overline{BD}$, $\overline{CN}\perp\overline{BD}$

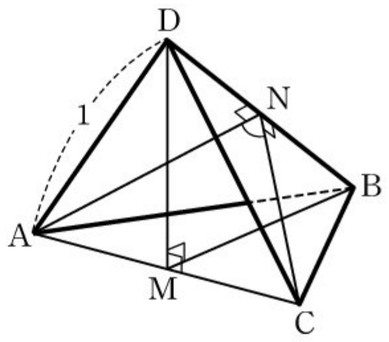
즉, 두 평면 ABD와 BCD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AN, CN이 이루는 각의 크기와 같다.

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 63

01 10 **02** $\frac{1}{3}$ **03** $2\sqrt{6}\pi$ **04** $2\sqrt{3}\pi$ **05** 26
06 3

01 해결단계

❶ 단계	네 모서리 AB, BC, CD, DA의 중점을 각각 P, Q, R, S라 할 때, 사각형 PQRS와 사각형 ABCD의 넓이 사이의 관계를 구한다.
❷ 단계	닮음비를 이용하여 S_n과 S_{n+1} 사이의 관계를 구한다.
❸ 단계	등비급수의 합을 구한다.



△ABD, △BCD는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\overline{AN}=\overline{CN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

△ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{BM}\perp\overline{AC}$

$\overline{AM}=a\ (a>0)$라 하면 $\overline{AD}=\overline{AB}=1$이므로 두 직각삼각형 AMD, AMB에서

$\overline{DM}=\overline{BM}=\sqrt{1-a^2}$

△BDM이 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=\sqrt{2(1-a^2)}$

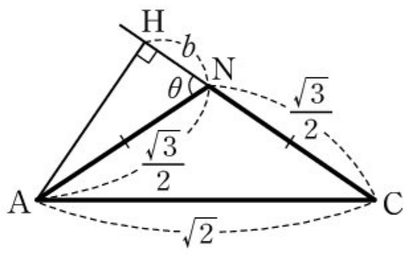
이때, $\overline{BD}=1$에서 $\sqrt{2(1-a^2)}=1$

위의 식의 양변을 제곱하면

$2(1-a^2)=1,\ a^2=\frac{1}{2}\qquad\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$

$\therefore \overline{AM}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \overline{AC}=\sqrt{2}$

삼각형 ANC의 점 A에서 직선 CN에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{HN}=b$라 하면



$\overline{AH}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-b^2$

$=(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+b\right)^2$

$\frac{1}{2}=\sqrt{3}b\qquad\therefore b=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore \overline{HN}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

두 직선 AN, CN이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\angle ANH=\theta$

따라서 직각삼각형 ANH에서

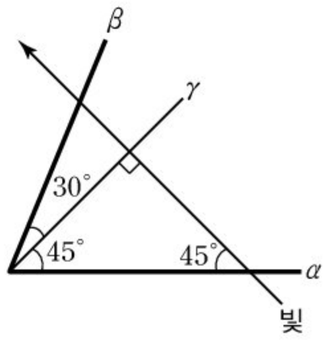
$\cos\theta=\frac{\overline{HN}}{\overline{AN}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

03 해결단계

❶ 단계	빛과 수직인 평면이 두 평면 α, β와 이루는 각의 크기를 구한다.
❷ 단계	정사영을 이용하여 두 평면 α, β 위에 놓인 두 도형의 넓이 사이의 관계식을 구하여 유리판 α 위의 도형의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 빛과 수직인 평면을 γ라 하면 두 평면 α, γ가 이루는 각의 크기는 45°, 두 평면 β, γ가 이루는 각의 크기는 30°이다.



유리판 α 위의 도형을 A, 유리판 β 위의 반지름의 길이가 2인 원 모양의 그림자를 S, 그 넓이를 각각 A, S라 하자.

도형 A와 그림자 S의 평면 γ 위로의 정사영이 일치하므로 $A\cos 45^\circ=S\cos 30^\circ$

도형 S는 반지름의 길이가 2인 원이므로

$A\times\frac{\sqrt{2}}{2}=(\pi\times 2^2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

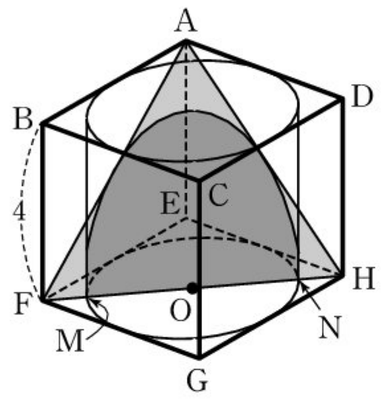
$\therefore A=2\sqrt{6}\pi$

따라서 유리판 α 위의 도형의 넓이는 $2\sqrt{6}\pi$이다.

답 $2\sqrt{6}\pi$

04 해결단계

❶ 단계	두 평면 AFH, EFH가 이루는 각의 크기의 cos 값을 구한다.
❷ 단계	평면 AFH와 원기둥이 만나서 생기는 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영을 파악한다.
❸ 단계	평면 AFH와 원기둥이 만나서 생기는 단면의 넓이를 구한다.



정육면체 ABCD-EFGH 안에 원기둥을 넣으면 구하고자 하는 단면은 위의 그림과 같이 단축의 길이가 $\overline{MN}$인 타원의 절반이고 평면 AFH와 원기둥이 만나서 생기는 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영은 지름이 $\overline{MN}$인 반원이다.

$\overline{AF}=\overline{FH}=\overline{AH}=4\sqrt{2}$

한편, 정삼각형 AFH의 평면 EFGH 위로의 정사영은 직각이등변삼각형 EFH이다.

삼각형 AFH는 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정삼각형이므로 점 A에서 $\overline{FH}$에 내린 수선의 발을 O라 하면

$\overline{AO}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

또한, 삼각형 EFH에서 $\overline{EO}=\frac{1}{2}\overline{EG}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이므로 평면 AFH와 평면 EFH가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{EO}}{\overline{AO}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 단면의 넓이를 S라 하면

$S\cos\theta=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2$

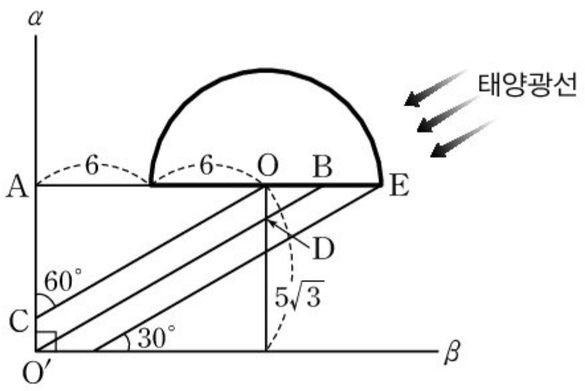
$\therefore S=2\pi\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$

답 $2\sqrt{3}\pi$

05 해결단계

❶ 단계	태양광선으로 반구를 비췄을 때, 평면 α와 평면 β 위에 그림자를 만드는 영역을 확인한다.
❷ 단계	❶단계에서 확인한 영역의 넓이를 구한 후, 각 영역의 평면 α 또는 β 위에 생긴 그림자의 넓이를 각각 구한다.
❸ 단계	a, b, c, d의 값을 각각 구한 후, $a+b+c+d$의 값을 구한다.

반구의 밑면의 중심을 O라 하고, 점 O를 지나고 두 평면 α, β에 모두 수직인 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $\overline{OC}/\!/\overline{BO'}$이므로

$\angle BO'A=\angle OCA=60^\circ$

직각삼각형 $BO'A$에서 $\overline{O'A}=5\sqrt{3}$이므로

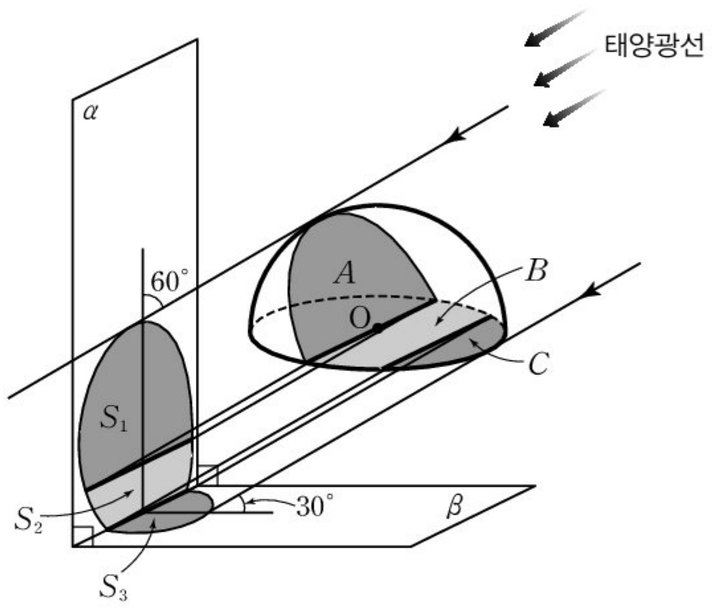
$\overline{AB}=5\sqrt{3}\tan 60^\circ$

$=5\sqrt{3}\times\sqrt{3}=15$

이때, $\overline{OA}=12$이므로

$\overline{OB}=\overline{AB}-\overline{OA}=15-12=3$

즉, 점 B는 선분 OE의 중점이다.



위의 그림과 같이 평면 α, β 위에 그림자를 만드는 부분은 태양광선과 수직인 평면 위의 반원 A와 평면 β와 평행한 평면 위의 반원의 일부인 B, C로 나눌 수 있다.

두 영역 A, B의 평면 α 위로의 그림자의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하고, 영역 C의 평면 β 위로의 그림자의 넓이를 S_3이라 하자.

태양광선과 수직인 평면이 평면 α와 이루는 각의 크기가 30°이므로

$S_1\cos 30^\circ=$(반원 A의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\pi\times 6^2$

$=18\pi$

$\therefore S_1=\frac{18\pi}{\cos 30^\circ}=18\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}=12\sqrt{3}\pi$

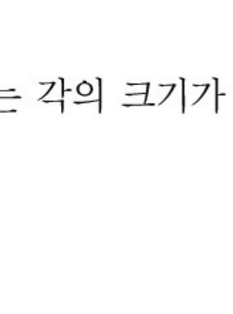
한편, 반구의 밑면은 반지름의 길이가 6인 원이고, $\overline{OB}=3$이므로

$\angle FOB=60^\circ$

$\therefore \overline{FB}=6\sin 60^\circ=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,

$\overline{FG}=2\overline{FB}=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

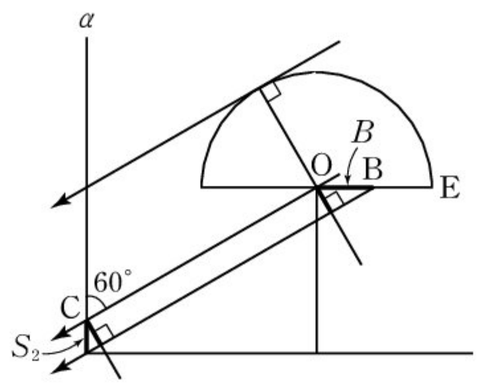
즉, 영역 B의 넓이는 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로



(영역 B의 넓이)

$=2\times\left(\pi\times 6^2\times\frac{30}{360}\right)+\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 3$

$=6\pi+9\sqrt{3}$ ……㉠



태양광선이 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이므로

$S_2\cos 30^\circ=$(영역 B의 넓이)$\times\cos 60^\circ$

$\therefore S_2=(6\pi+9\sqrt{3})\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{3}\pi+9$

두 영역 B, C는 반원을 이루므로

(영역 C의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\pi\times 6^2-(6\pi+9\sqrt{3})$

$=12\pi-9\sqrt{3}$

반구의 밑면은 평면 β와 평행하므로 S_3은 영역 C의 넓이와 같다.

$\therefore S_3=12\pi-9\sqrt{3}$

$\therefore S_1+S_2+S_3$

$=12\sqrt{3}\pi+(2\sqrt{3}\pi+9)+(12\pi-9\sqrt{3})$

$=9-9\sqrt{3}+(12+14\sqrt{3})\pi$

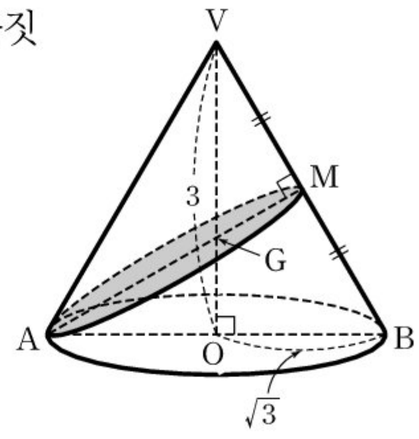
따라서 $a=9$, $b=-9$, $c=12$, $d=14$이므로

$a+b+c+d=9+(-9)+12+14=26$ 답 26

06 해결단계

❶ 단계	단면 중에서 장축의 길이가 최소인 경우의 타원을 찾는다.
❷ 단계	❶단계에서 찾은 타원의 방정식을 구한다.
❸ 단계	정사영시킨 밑면 위의 타원의 방정식을 구하여 두 초점 사이의 거리를 구한 후, $4l^2$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 꼭짓점을 V, 단면과 밑면이 공유하는 점을 A, 점 A를 지나는 밑면의 지름의 다른 끝 점을 B라 하자.



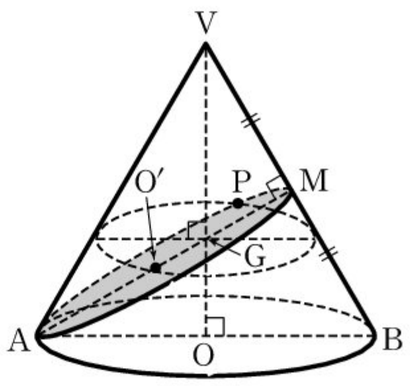
이때, $\overline{OB}=\sqrt{3}$, $\overline{VO}=3$이므로 직각삼각형 VOB에서

$\overline{VB}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

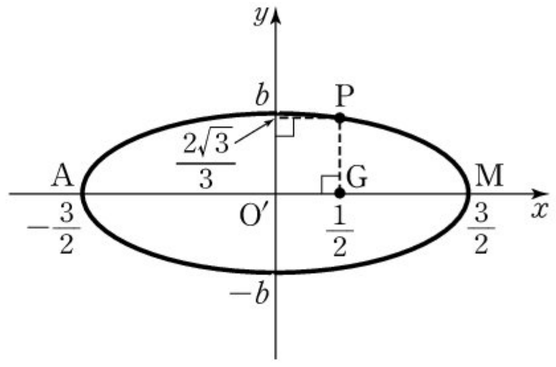
즉, $\overline{VA}=\overline{VB}=\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로 $\triangle VAB$는 정삼각형이고, 모선 VB의 중점을 M이라 하면 선분 AM이 장축의 길이가 최소인 타원의 장축이므로 이 타원의 장축의 길이는 $\overline{AM}=\overline{VO}=3$이다. ← $\triangle VAB$는 정삼각형이므로

또한, 두 선분 VO와 AM의 교점을 G라 하면 점 G는 정삼각형 VAB의 무게중심이므로

$\overline{VG}=\frac{2}{3}\overline{VO}=\frac{2}{3}\times 3=2$



[그림 1]



[그림 2]

점 G를 지나고 밑면에 평행한 면으로 자른 단면인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r:\overline{OB}=\overline{VG}:\overline{VO}$에서

$r:\sqrt{3}=2:3 \qquad \therefore r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

즉, [그림 1]과 같이 원과 타원의 교점 중 하나를 P라 하면

$\overline{GP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

타원의 중심을 O′이라 할 때, [그림 2]와 같이 점 O′을 원점으로 하고 직선 AM을 x축으로 하는 좌표평면 위에 타원을 놓으면

$\overline{O'A}=\overline{O'M}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\frac{3}{2}$

이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 할 수 있다.

위의 타원이 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$을 지나므로

$\overline{O'G}=\overline{O'M}-\overline{GM}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}+\frac{\frac{4}{3}}{b^2}=1 \qquad \therefore b^2=\frac{3}{2}$

즉, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$

단면의 타원과 밑면에 정사영시킨 타원의 두 단축의 길이는 같으므로 정사영시킨 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1\ (c>0)$이라 할 수 있다.

이때, 정사영시킨 타원의 장축의 길이는

$2c=\overline{AM}\cos(\angle MAB)$

$=3\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore c=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

즉, 밑면에 정사영시킨 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{27}{16}}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$

$\sqrt{\frac{27}{16}-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$에서 두 초점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$이므로

$l=\frac{\sqrt{3}}{4}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 4l^2=4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=4\times\frac{3}{4}=3$ 답 3

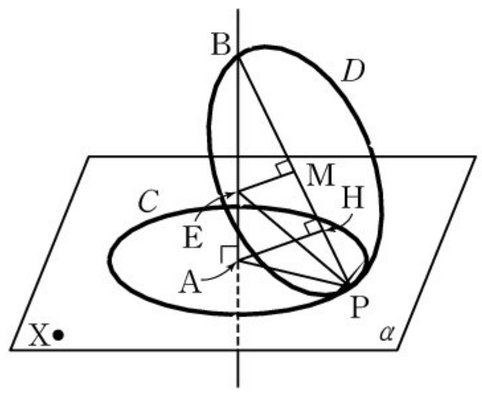
이것이 수능 p. 64

1 28 2 8

1 해결단계

❶ 단계	선분 BP의 중점을 M이라 하고 점 M을 지나고 직선 AH에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 E라 할 때, $\overline{PE}=\overline{BE}$임을 확인하고 그 길이를 구한다.
❷ 단계	점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 평면 α에 의하여 잘려서 생기는 두 부분 중 점 B가 속한 부분을 S라 하면 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 원 D가 나타내는 도형은 S가 됨을 확인한다.
❸ 단계	도형 S 위의 점 Q에 대하여 선분 XQ의 길이의 최댓값을 구한다.

다음 그림과 같이 선분 BP의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 직선 AH와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 E라 하자.



점 M은 원 D의 중심이고, 직선 ME는 선분 BP의 수직이등분선이므로

$\overline{BE}=\overline{PE}$ ……㉠

이때, 직각삼각형 APB에서

$\overline{BP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

두 삼각형 APB, MEB는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AP}:\overline{ME}=\overline{AB}:\overline{BM}$에서

$\sqrt{3}:\overline{ME}=3:\sqrt{3},\ 3\overline{ME}=3 \qquad \therefore \overline{ME}=1$

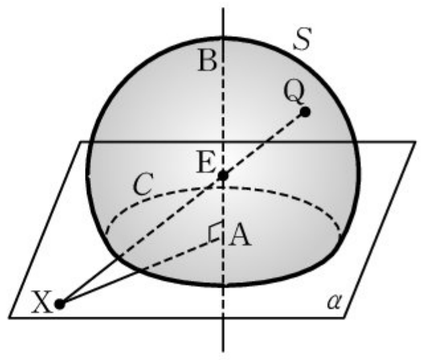
직각삼각형 MEB에서

$\overline{BE}=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$

㉠에서 $\overline{PE}=\overline{BE}=2$

직선 ME는 원의 중심 M을 지나고 원 D를 포함하는 평면에 수직인 직선이므로 원 D 위의 임의의 점 Q에 대하

여 $\overline{QE}=\overline{BE}=2$를 만족시키므로 점 Q는 점 E를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다.
이 구가 평면 α에 의하여 잘려서 생기는 두 부분 중 점 B가 속한 부분을 S라 하면 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 원 D가 나타내는 도형은 S가 된다.
다음 그림과 같이 원 D 위의 점 Q는 도형 S 위의 점이므로 선분 XQ의 길이는 선분 XQ가 구의 중심 E를 지날 때, 최댓값을 갖는다.

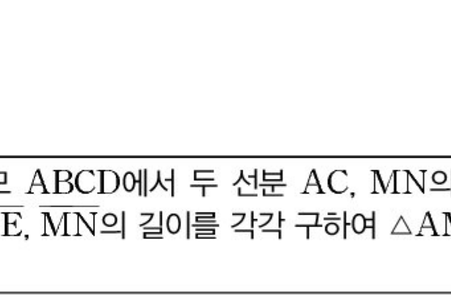


직각삼각형 EXA에서
$\overline{XE}=\sqrt{5^2+1}=\sqrt{26}$
이고, $\overline{EQ}=2$이므로
$\overline{XQ}\le\overline{XE}+\overline{EQ}=\sqrt{26}+2$
따라서 $\overline{XQ}$의 최댓값은 $\sqrt{26}+2$이므로
$m=2,\ n=26$
$\therefore\ m+n=2+26=28$ 답 28

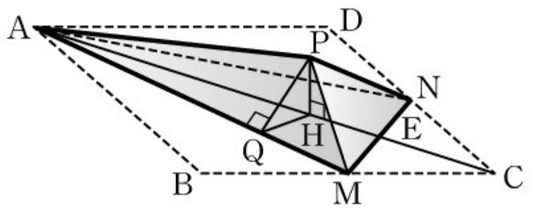
2 해결단계

❶ 단계	마름모 ABCD에서 두 선분 AC, MN의 교점을 E라 하고, $\overline{AE}$, $\overline{MN}$의 길이를 각각 구하여 $\triangle AMN$의 넓이를 구한다.
❷ 단계	마름모 ABCD 모양의 종이를 접어서 만든 사면체 PAMN에서 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ}\perp\overline{AM}$임을 확인한 후, 두 평면 AMN, PAM이 이루는 각의 크기를 θ라 한다.
❸ 단계	삼각형 PAM의 넓이 공식과 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{PQ}$, $\overline{QH}$의 길이를 각각 구하여 $\cos\theta$의 값을 구한다.
❹ 단계	❸단계에서 구한 $\cos\theta$의 값을 이용하여 삼각형 AMN의 정사영의 넓이를 구한 후, p, q의 값을 각각 구해 그 합을 구한다.

마름모 ABCD에서 두 선분 AC, BD를 긋고, 선분 AC와 두 선분 MN, BD의 교점을 각각 E, F라 하면 다음 그림과 같다.



$\angle BAD=60^\circ$이므로 $\triangle ABD$와 $\triangle CDB$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.
즉, $\overline{AF}=\overline{CF}=2\sqrt{3}$이므로
$\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{AF}=\frac{3}{2}\times2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
또한, 두 점 M, N은 각각 선분 BC, CD의 중점이므로
$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times4=2$
즉, 삼각형 AMN의 넓이는
$\triangle AMN=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AE}$
$=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ ……㉠
한편, 마름모 ABCD 모양의 종이를 접어서 만든 사면체 PAMN의 점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 선분 AM에 내린 수선의 발을 Q라 하면 다음 그림과 같다.



$\overline{PH}\perp$(평면 AMN), $\overline{PQ}\perp\overline{AM}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{HQ}\perp\overline{AM}$
즉, 두 평면 AMN, PAM이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\angle PQH=\theta$
이때, $\overline{AE}\perp\overline{MN}$이므로 $\triangle AME$에서
$\overline{AM}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1}=2\sqrt{7}$
즉, 삼각형 PAM의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{MP}\times\sin(180^\circ-120^\circ)=\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$
이므로
$\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{PQ}$
$2\sqrt{3}=\sqrt{7}\,\overline{PQ}$
$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$
이때, $\overline{HE}=k\ (k>0)$라 하면 두 직각삼각형 PAH, PHE에서
$\overline{AP}^2-\overline{AH}^2=\overline{PE}^2-\overline{HE}^2$이므로
$4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$
$6\sqrt{3}k=14$ $\therefore\ k=\frac{14}{6\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$
$\triangle PHE$에서 $\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$이므로
$\triangle PHQ$에서 $\overline{QH}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}}{7}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2}=\frac{10\sqrt{21}}{63}$
$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}}=\frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}}=\frac{5}{9}$
따라서 삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는
$\triangle AMN\times\cos\theta=3\sqrt{3}\times\frac{5}{9}\ (\because$ ㉠$)$
$=\frac{5}{3}\sqrt{3}$
즉, $p=3,\ q=5$이므로
$p+q=3+5=8$ 답 8

07 공간좌표

Step 1 출제율 100% **우수 기출 대표 문제** p. 66

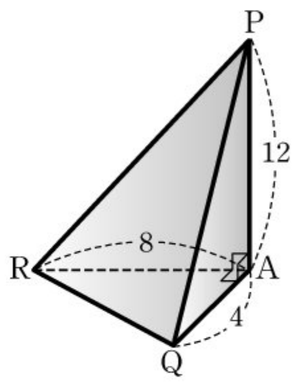
01 ④	02 $2\sqrt{2}$	03 ①	04 $\sqrt{33}$	05 350
06 ④	07 ③	08 ②		

01 점 A$(-2, 4, -6)$을 xy평면, yz평면, zx평면에 대하여 대칭이동한 점이 각각 P, Q, R이므로

P$(-2, 4, 6)$, Q$(2, 4, -6)$, R$(-2, -4, -6)$

$\therefore \overline{AP}=12$, $\overline{AQ}=4$, $\overline{AR}=8$

따라서 사면체 APQR는 오른쪽 그림과 같으므로 그 부피는



$\frac{1}{3}\times\triangle AQR\times\overline{AP}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}\right)\times\overline{AP}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times8\right)\times12$

$=64$

답 ④

02 점 P는 xy평면 위에 있으므로 z좌표는 0이고, $\overline{OP}=4$이므로

x좌표는 $4\sin30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$,

y좌표는 $4\cos30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ P$(2, 2\sqrt{3}, 0)$

점 Q는 yz평면 위에 있으므로 x좌표는 0이고, $\overline{OQ}=4$이므로

y좌표는 $4\cos30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

z좌표는 $4\sin30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore$ Q$(0, 2\sqrt{3}, 2)$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

• 다른풀이 1 •

점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=4\cos30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

점 H에서 직선 OP에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{OH'}=2\sqrt{3}\cos30^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\therefore \overline{PH'}=\overline{OP}-\overline{OH'}=4-3=1$

이때, $\overline{QH}\perp$(xy평면), $\overline{HH'}\perp\overline{OP}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{QH'}\perp\overline{OP}$

따라서 △OQH′이 직각삼각형이므로

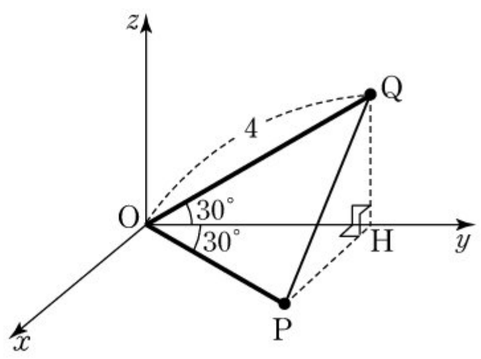
$\overline{QH'}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

또한, △QH′P가 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+1^2}=2\sqrt{2}$

• 다른풀이 2 •

$\overline{OP}=\overline{OQ}$이고 두 직선 OP, OQ가 y축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 서로 같으므로 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선의 발은 일치한다.



이 수선의 발을 H라 하면

$\overline{QH}=\overline{PH}=4\sin30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$

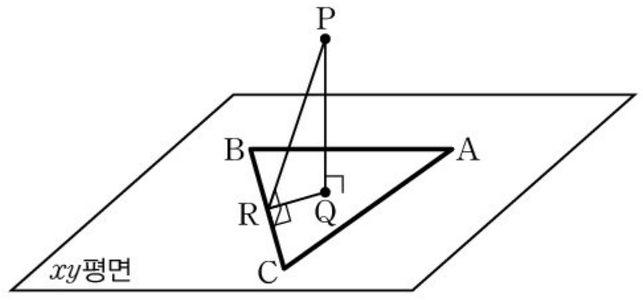
또한, 두 점 P, Q는 각각 xy평면, yz평면 위에 있으므로 두 직선 PH와 QH는 서로 수직이다.

$\therefore \angle PHQ=90^\circ$

따라서 △PHQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$

03 다음 그림과 같이 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하자.



$\overline{PQ}\perp$(xy평면), $\overline{QR}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PR}\perp\overline{BC}$

이때, 점 Q는 이등변삼각형 ABC의 무게중심이므로 선분 AR는 점 Q를 지나고 변 BC의 수직이등분선이다.

즉, $\overline{RC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}=\sqrt{7}$이고, $\overline{AC}=5$이므로

직각삼각형 ARC에서

$\overline{AR}=\sqrt{5^2-(\sqrt{7})^2}=3\sqrt{2}$

또한, 점 Q는 선분 AR를 2 : 1로 내분하므로

$\overline{QR}=\frac{1}{3}\overline{AR}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

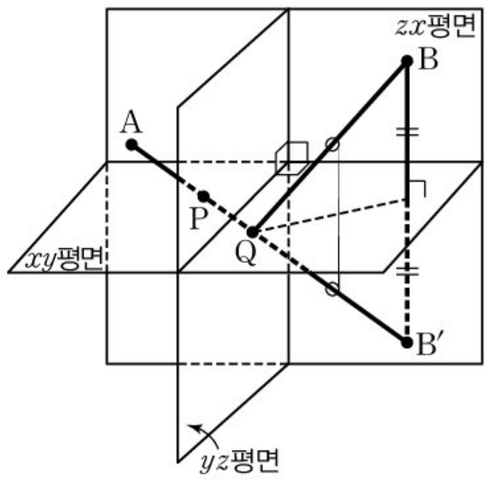
한편, 점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는 $(1, 1, 0)$이므로 $\overline{PQ}=4$

직각삼각형 PRQ에서 $\overline{PR}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=3\sqrt{2}$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 $3\sqrt{2}$이다. 답 ①

04 점 B$(-2, 1, 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′$(-2, 1, -3)$이고 점 P가 xy평면 위에 있으므로

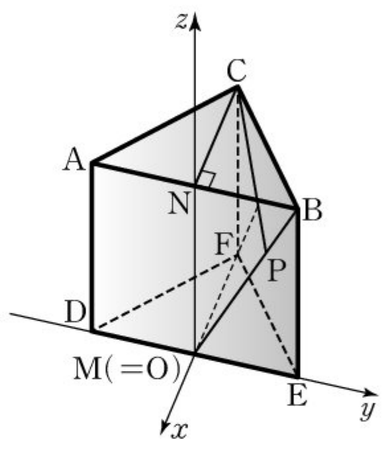
$\overline{PB}=\overline{PB'}$



$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$
$\geq \overline{AB'}$
$=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-4)^2}$
$=\sqrt{33}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 $\sqrt{33}$이다. 답 $\sqrt{33}$

05 정삼각기둥 ABC-DEF를 점 M이 원점 O, 모서리 MF가 x축, 모서리 DE가 y축 위에 오고, 모서리 CF가 z축과 평행하도록 좌표공간에 놓으면 다음 그림과 같다.



평면 ABC가 z축과 만나는 점을 N이라 하면 정삼각기둥의 한 모서리의 길이가 6이므로 점 N의 좌표는 $(0, 0, 6)$이고, B$(0, 3, 6)$

이때, 점 P는 선분 BM을 1 : 2로 내분하므로

$P\left(\frac{1\times0+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times3}{1+2}, \frac{1\times0+2\times6}{1+2}\right)$, 즉

P$(0, 2, 4)$

한편, $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\overline{CN}=3\sqrt{3}$

$\therefore$ C$(-3\sqrt{3}, 0, 6)$

$l=\overline{CP}$
$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+2^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{35}$

$\therefore 10l^2=10\times(\sqrt{35})^2=10\times35=350$ 답 350

06 세 점 P, Q, R가 각각 x축, y축, z축 위에 있으므로

P$(p, 0, 0)$, Q$(0, q, 0)$, R$(0, 0, r)$

라 하자.

세 점 P, Q, R는 두 점 A$(2, 2, 2)$, B$(1, -1, 4)$에서 같은 거리에 있으므로

$\overline{PA}=\overline{PB}$, $\overline{QA}=\overline{QB}$, $\overline{RA}=\overline{RB}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(2-p)^2+2^2+2^2=(1-p)^2+(-1)^2+4^2$

$2p=-6 \quad \therefore p=-3$

$\overline{QA}=\overline{QB}$에서 $\overline{QA}^2=\overline{QB}^2$이므로

$2^2+(2-q)^2+2^2=1^2+(-1-q)^2+4^2$

$6q=-6 \quad \therefore q=-1$

$\overline{RA}=\overline{RB}$에서 $\overline{RA}^2=\overline{RB}^2$이므로

$2^2+2^2+(2-r)^2=1^2+(-1)^2+(4-r)^2$

$4r=6 \quad \therefore r=\frac{3}{2}$

즉, P$(-3, 0, 0)$, Q$(0, -1, 0)$, R$\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-3+0+0}{3}, \frac{0+(-1)+0}{3}, \frac{0+0+\frac{3}{2}}{3}\right)$, 즉

$\left(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 $a=-1$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{2}$이므로

$a-3b+2c=-1-(-1)+1=1$ 답 ④

07 구 $x^2+y^2+z^2-2kx-10y-6z+18=0$이 xy평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은 $z=0$을 대입하면 (xy평면 위의 점은 z좌표가 0이므로)

$x^2+y^2-2kx-10y+18=0$

$\therefore (x-k)^2+(y-5)^2=k^2+7$

즉, 중심이 $(k, 5, 0)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{k^2+7}$인 원이다.

또한, 구 $x^2+y^2+z^2-2kx-10y-6z+18=0$이 yz평면과 만나서 생기는 도형의 방정식은 $x=0$을 대입하면 (yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로)

$y^2+z^2-10y-6z+18=0$

$\therefore (y-5)^2+(z-3)^2=16$

즉, 중심이 $(0, 5, 3)$이고, 반지름의 길이가 4인 원이다.

이때, 두 원의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$(k^2+7)\pi : 16\pi=2:1$

$k^2+7=32$, $k^2=25$

$\therefore k=5$ ($\because k>0$) 답 ③

blacklabel 특강 필수 개념

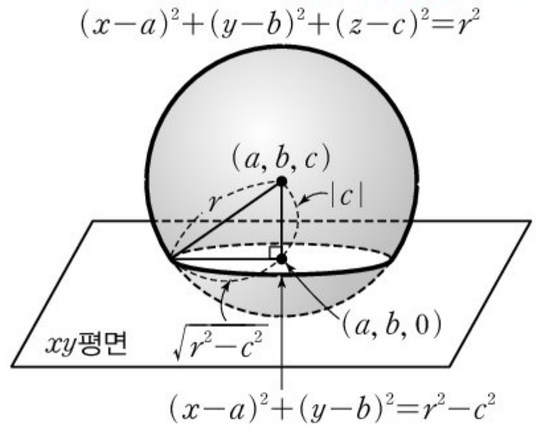
구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$과

(1) xy평면의 교선의 방정식 (단, $r^2>c^2$)
⇨ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2-c^2$ ← 구의 방정식에 $z=0$을 대입

(2) yz평면의 교선의 방정식 (단, $r^2>a^2$)
⇨ $(y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$ ← 구의 방정식에 $x=0$을 대입

(3) zx평면의 교선의 방정식 (단, $r^2>b^2$)
⇨ $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2-b^2$ ← 구의 방정식에 $y=0$을 대입

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$



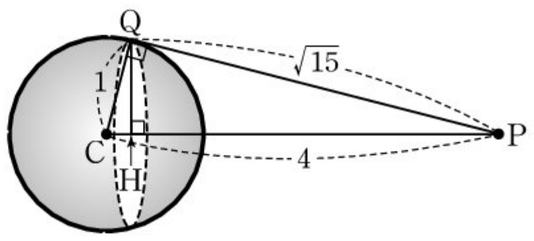
08 구 $x^2+y^2+z^2=1$의 중심을 C라 하면 C(0, 0, 0)이므로 점 P(1, $\sqrt{6}$, 3)에 대하여

$\overline{CP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+3^2}=4$

또한, 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 Q라 하면

$\overline{CQ}=1$이고, $\triangle PQC$는 $\angle PQC=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



이때, 삼각형 PQC의 꼭짓점 Q에서 변 CP에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PQC에서

$\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times1=\frac{1}{2}\times4\times\overline{QH}$

$\therefore \overline{QH}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

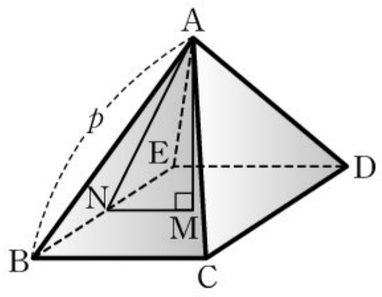
따라서 접점 Q가 그리는 도형은 중심이 H이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{15}}{4}$인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}\pi$ 답 ②

Step 2 1등급을 위한 최고의 변별력 문제 pp. 67~70

01 $-6\sqrt{6}$	02 ②	03 13	04 7	05 ⑤
06 ①	07 13	08 $\frac{1}{2}$	09 $\frac{18}{5}$	10 ②
11 ③	12 ④	13 4	14 $\frac{\sqrt{62}}{3}$	15 3
16 21	17 ③	18 6	19 ③	20 ②
21 ④	22 22	23 $\frac{24}{25}$	24 ③	25 7
26 ④				

01 다음 그림과 같이 사각뿔 A-BCDE의 한 모서리의 길이를 p ($p>0$), 꼭짓점 A에서 밑면 BCDE에 내린 수선의 발을 M, 선분 BE의 중점을 N이라 하자.



점 M은 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로

$\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}p$

선분 AN은 정삼각형 ABE의 높이이므로

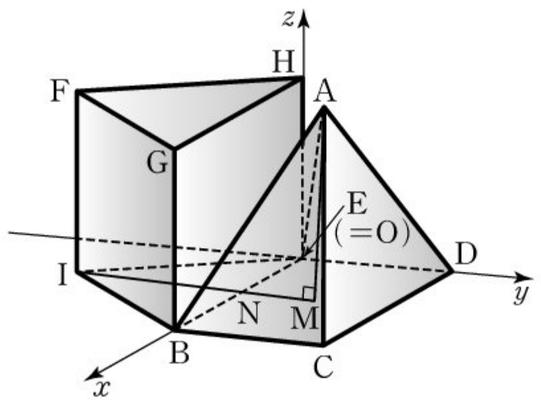
$\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}p$

직각삼각형 ANM에서

$\overline{AM}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)^2-\left(\frac{1}{2}p\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}p$ ($\because p>0$)

이때, 점 A의 z좌표가 $6\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}p=6\sqrt{2}$ $\therefore p=12$



사각뿔 A-BCDE와 삼각기둥 FGH-IBE의 높이가 같으므로 $c=6\sqrt{2}$

또한, 정삼각형 IBE의 한 변의 길이가 12이므로

$\overline{NE}=\frac{1}{2}\times12=6$, $\overline{IN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}$

따라서 F(6, $-6\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$)이므로

$a=6$, $b=-6\sqrt{3}$, $c=6\sqrt{2}$

$\therefore \frac{bc}{a}=\frac{-6\sqrt{3}\times6\sqrt{2}}{6}=-6\sqrt{6}$ 답 $-6\sqrt{6}$

02 점 P($n-1$, $2n+1$, $3-n$)을 z축에 대하여 대칭이동한 점은 P′($-n+1$, $-2n-1$, $3-n$)이므로

$a_{3n-2}=-n+1$, $a_{3n-1}=-2n-1$, $a_{3n}=3-n$

또한, 점 Q($2n+1$, $-n+2$, $3n-1$)을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점은 Q′($2n+1$, $-n+2$, $-3n+1$)이므로

$b_{3n-2}=2n+1$, $b_{3n-1}=-n+2$, $b_{3n}=-3n+1$

$\therefore \sum_{n=1}^{30}(a_n+b_n)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})+(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k})\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(-4k+3)+(-2k+4)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(-6k+7)$

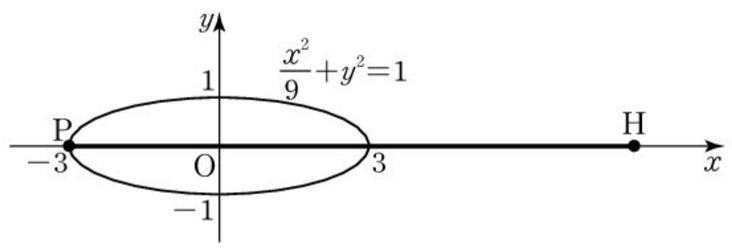
$=-6\times\frac{10\times11}{2}+7\times10=-260$ 답 ②

03 점 A(9, 0, 5)에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 H(9, 0, 0)이므로

$\overline{AH}=5$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}=\sqrt{25+\overline{PH}^2}$

즉, $\overline{PH}$가 최대이면 $\overline{AP}$도 최대이다.



위의 그림에서 점 P가 점 (-3, 0, 0)의 위치에 있을 때

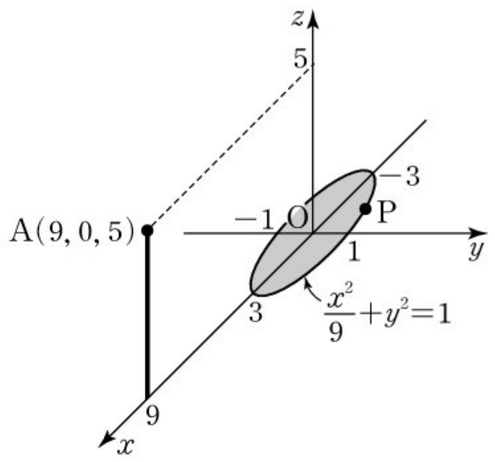
$\overline{PH}$가 최대이므로

$\overline{PH} \le 12$

$\therefore \overline{AP}=\sqrt{25+\overline{PH}^2} \le \sqrt{25+12^2}=13$

따라서 $\overline{AP}$의 최댓값은 13이다. 답 13

• 다른풀이 •



점 P의 좌표를 $(3\cos\theta, \sin\theta, 0)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(3\cos\theta-9)^2+\sin^2\theta+(-5)^2}$

$=\sqrt{9\cos^2\theta-54\cos\theta+81+(1-\cos^2\theta)+25}$

$=\sqrt{8\cos^2\theta-54\cos\theta+107}$

$=\sqrt{8\left(\cos\theta-\frac{27}{8}\right)^2+\frac{127}{8}}$

따라서 $\overline{AP}$는 $\cos\theta=-1$일 때 최대이므로

$\overline{AP} \le \sqrt{8\times\frac{35^2}{8^2}+\frac{127}{8}}=\sqrt{169}=13$

04

$t\ (t>0)$초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$P(8-t, 0, 0)$, $Q(0, 3, 4-3t)$

$\therefore \overline{PQ}^2=(t-8)^2+3^2+(4-3t)^2$

$=(t^2-16t+64)+9+(16-24t+9t^2)$

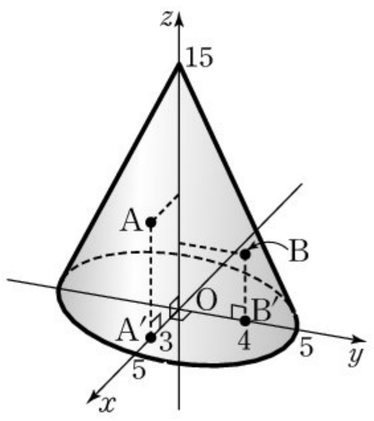
$=10t^2-40t+89$

$=10(t-2)^2+49$

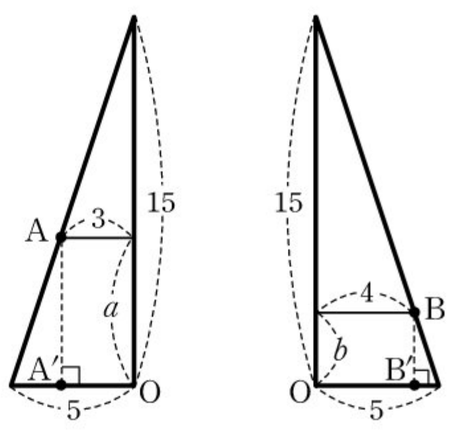
따라서 선분 PQ의 길이는 $t=2$일 때 최소이고, 이때의 길이는 $\sqrt{49}=7$이다. 답 7

05

원뿔을 점 O가 원점, 두 직선 OA′, OB′이 각각 x축, y축 위에 오도록 좌표공간에 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\overline{OA'}=3$, $\overline{OB'}=4$이고, 밑면인 원의 반지름의 길이는 5, 원뿔의 높이는 15이므로 주어진 원뿔을 zx평면 $(x>0)$, yz평면 $(y>0)$으로 잘랐을 때의 단면은 각각 다음 그림과 같다.



두 점 A, B의 z좌표를 각각 a, b라 하면

$3:5=(15-a):15$ $\therefore a=6$

$4:5=(15-b):15$ $\therefore b=3$

따라서 $A(3, 0, 6)$, $B(0, 4, 3)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$ 답 ⑤

06

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하고 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(a, b, 0)$

xy평면에서 선분 OB는 직선 $y=x$ $(0\le x\le 4)$ 위에 있으므로 점 H가 선분 OB 위에 있으려면

$a=b$ (단, $0\le a\le 4$)

한편, $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$에서

$\overline{AB}=4$

△ABC가 정삼각형이므로

$\overline{BC}=4$에서 $\overline{BC}^2=16$

$\therefore (a-4)^2+(a-4)^2+c^2=16$ ……㉠

$\overline{AC}=4$에서 $\overline{AC}^2=16$

$\therefore (a-4)^2+a^2+c^2=16$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

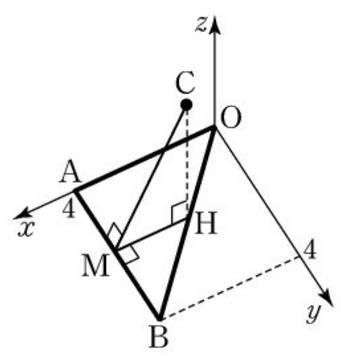
$a=2$, $c=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 $C(2, 2, \pm 2\sqrt{2})$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{2^2+2^2+(\pm 2\sqrt{2})^2}=4$ 답 ①

• 다른풀이 •

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{CH}\perp$(xy 평면), $\overline{HM}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$



이때, △ABC는 정삼각형이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.

또한, $\angle OAB=90°$에서 $\overline{OA}\parallel\overline{HM}$이므로 점 H는 선분 OB의 중점이다.

두 삼각형 CBH, COH에서 $\overline{CH}$는 공통, $\overline{BH}=\overline{OH}$, $\angle CHB=\angle CHO=90°$이므로

△CBH≡△COH (SAS 합동)

$\therefore \overline{OC}=\overline{BC}$

따라서 $A(4, 0, 0)$, $B(4, 4, 0)$에서 $\overline{AB}=4$이고

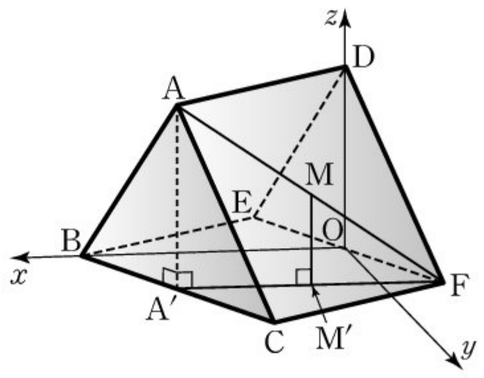
△ABC는 정삼각형이므로

$\overline{OC}=4$

07

다음 그림과 같이 선분 AF의 중점을 M이라 하고, 두 점

A, M에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, M′이라 하자.



△ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{AA'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

두 삼각형 AA′F, MM′F는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 2 : 1이므로 ……㉠

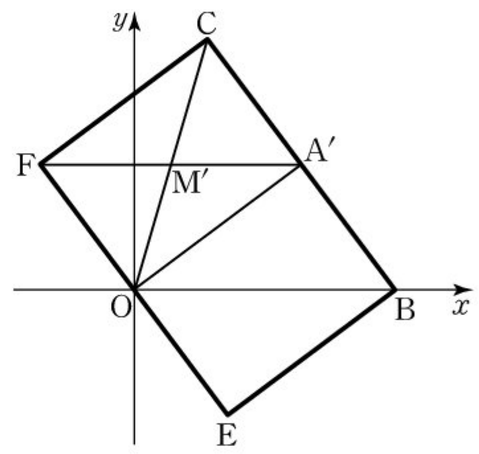
$\overline{AA'}:\overline{MM'}=2:1$에서

$3\sqrt{3}:\overline{MM'}=2:1$

$\therefore \overline{MM'}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

한편, xy평면에 직사각형 BCFE를 나타내면 다음 그림과 같고, 점 A′은 선분 BC의 중점이므로

$\overline{BA'}=\overline{CA'}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$



$\overline{CF}=4$이므로 직각삼각형 A′CF에서

$\overline{A'F}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

㉠에서 $\overline{A'F}:\overline{M'F}=2:1$이므로

$5:\overline{M'F}=2:1$ $\therefore \overline{M'F}=\frac{5}{2}$

이때, □OA′CF는 직사각형이므로 두 대각선은 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분한다.

즉, $\overline{M'O}=\overline{M'F}=\frac{5}{2}$

M(a, b, c)이므로

$a^2+b^2+c^2=\overline{OM}^2$

$=\overline{MM'}^2+\overline{M'O}^2$

$=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{27}{4}+\frac{25}{4}=13$ 답 13

• 다른풀이 1 •

점 A의 xy평면 위로의 정사영을 A′이라 하면

$\overline{AA'}\perp(xy$평면$)$ ……㉡

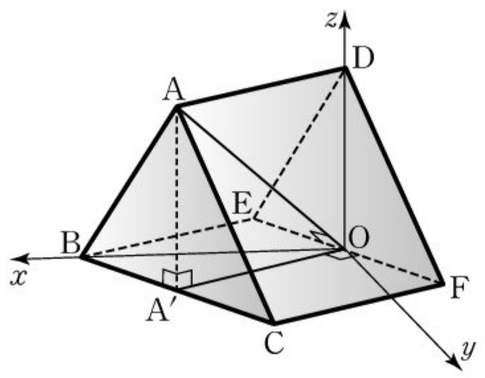
이고, 삼각기둥 ABC－DEF의 밑면이 정삼각형이고 면 BCFE가 xy평면 위에 있으므로 점 A′은 모서리 BC의 중점이다.

이때, 선분 EF의 중점이 O이므로

$\overline{OA'}\perp\overline{EF}$ ……㉢

㉡, ㉢에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OA}\perp\overline{EF}$ ……㉣



△ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{A'B}=3$, $\overline{AA'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

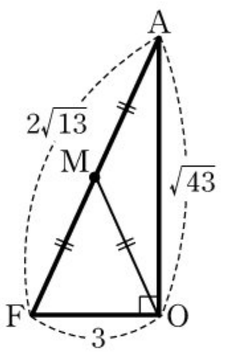
$\overline{OA'}=\overline{AD}=4$이므로 직각삼각형 AA′O에서

$\overline{OA}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{43}$

㉣에서 $\angle AOF=90^\circ$이므로 직각삼각형 OAF에서

$\overline{AF}=\sqrt{(\sqrt{43})^2+3^2}=2\sqrt{13}$

즉, 삼각형 OAF는 오른쪽 그림과 같으므로 선분 AF의 중점을 M이라 하면 점 M은 삼각형 OAF의 외심이다.



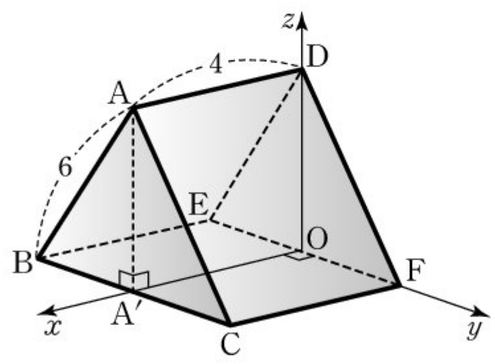
$\therefore \overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\sqrt{13}$

M(a, b, c)이므로

$a^2+b^2+c^2=\overline{OM}^2=13$

• 다른풀이 2 •

다음 그림과 같이 점 A에서 xy평면에 내린 정사영을 A′이라 하고, 주어진 세 조건 (가), (나), (다)를 만족시키는 경우 중에서 점 A′이 x축 위에 오도록 삼각기둥 ABC－DEF를 좌표공간에 놓자.



$\overline{OA'}=\overline{AD}=4$이므로 A′$(4, 0, 0)$

△ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{A'C}=3$, $\overline{AA'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

$\therefore$ A$(4, 0, 3\sqrt{3})$, F$(0, 3, 0)$

따라서 선분 AF의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+0}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

이므로 $a=2$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=4+\frac{9}{4}+\frac{27}{4}$

$=13$

08 해결단계

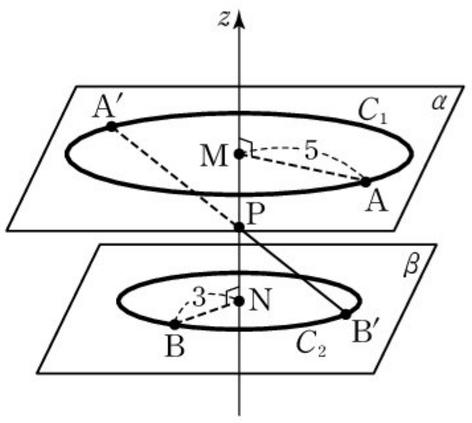
❶ 단계	두 점 A, B에서 z축에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, 두 점 M, N을 각각 중심으로 하고 xy평면과 평행한 평면 위에 있는 원을 생각한다.
❷ 단계	**❶단계**의 두 원 위의 한 점을 각각 A′, B′이라 할 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소이려면 선분 A′B′이 z축 위의 한 점을 지날 때임을 파악한다.
❸ 단계	**❷단계**를 만족시키는 점 P의 위치를 파악한 후, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$의 값을 각각 구하여 $\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$의 값을 구한다.

두 점 $A(3, 4, 7)$, $B(2\sqrt{2}, 1, 3)$에서 z축에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 $M(0, 0, 7)$, $N(0, 0, 3)$이므로

$\overline{MN}=7-3=4$, $\overline{AM}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\overline{BN}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

두 점 M, N을 지나고 xy평면과 평행한 두 평면을 각각 α, β라 하고, 두 평면 α, β 위에 두 점 M, N을 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 5, 3인 원을 C_1, C_2라 하자.



이때, 선분 A′B′이 z축과 만나도록 원 C_1 위의 점 A′, 원 C_2 위의 점 B′을 정하면

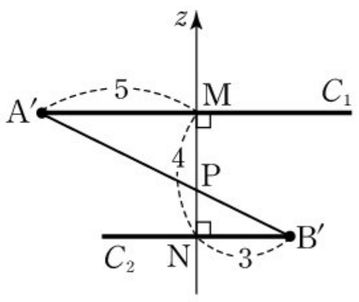
$\overline{A'P}=\overline{AP}$, $\overline{B'P}=\overline{BP}$

이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{A'B'}$

오른쪽 그림에서 두 삼각형 A′MP, B′NP는 서로 닮은 도형이고 닮음비가 5 : 3이므로



$\overline{MP} : \overline{NP}=5 : 3$

$\therefore \overline{MP}=4\times\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$,

$\overline{NP}=4\times\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$

즉, 직각삼각형 A′MP에서

$\overline{A'P}=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

직각삼각형 B′NP에서

$\overline{B'P}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

선분 AP가 z축과 이루는 예각의 크기는 선분 A′P가 z축과 이루는 예각의 크기와 같으므로

$\theta_1=\angle A'PM$

$\therefore \cos\theta_1=\frac{\overline{MP}}{\overline{A'P}}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

또한, 평면 β가 xy평면과 평행하고 선분 BP가 xy평면과 이루는 예각의 크기는 선분 B′P가 xy평면과 이루는 예각의 크기와 같으므로

$\theta_2=$(선분 B′P가 xy평면과 이루는 예각의 크기)

$=$(선분 B′P가 평면 β와 이루는 예각의 크기)

$=$(두 직선 B′P, B′N이 이루는 예각의 크기)

$=\angle PB'N$

$\therefore \cos\theta_2=\frac{\overline{B'N}}{\overline{B'P}}=3\times\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

09

$A(0, 0, 3)$, $B(5, 4, 0)$, $C(0, 4, 0)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\overline{BC}=5$

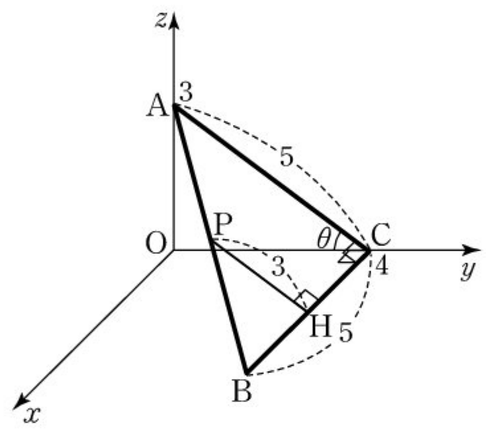
이때, $\overline{OA}\perp$(xy평면), $\overline{OC}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AC}\perp\overline{BC}$

즉, 평면 ABC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle ACO=\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}=\frac{4}{5}$



한편, 두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BH}=\overline{PH}=3$

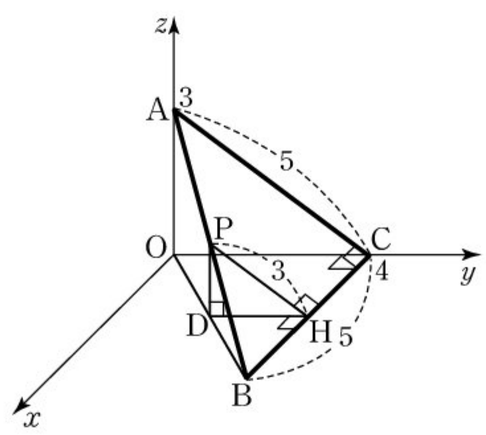
$\therefore \triangle PBH=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle PBH\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$

답 $\frac{18}{5}$

• 다른풀이 •



점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$\overline{PD}\perp$(xy평면), $\overline{PH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH}\perp\overline{BC}$

두 직각삼각형 ABC, PBH는 서로 닮은 도형이고

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{BC}=5$, $\overline{PH}=3$이므로

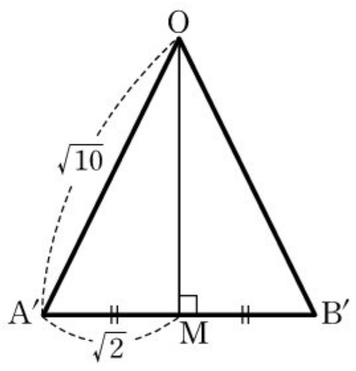
$\overline{BH} : \overline{BC}=\overline{PH} : \overline{AC}$

$\overline{BH} : 5=3 : 5$, $5\overline{BH}=15$

$\therefore \overline{BH}=3$

또한, 두 직각삼각형 OBC, DBH는 서로 닮은 도형이고
$\overline{OC}=4$, $\overline{BH}=3$이므로
$\overline{DH}:\overline{OC}=\overline{BH}:\overline{BC}$
$\overline{DH}:4=3:5$, $5\overline{DH}=12$
$\therefore \overline{DH}=\frac{12}{5}$
따라서 삼각형 PBH의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 DBH의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BH}\times\overline{DH}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{5}=\frac{18}{5}$

10 O(0, 0, 0), A(2, 1, 3), B(−3, 3, 1)에서
$\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$
$\overline{OB}=\sqrt{(-3)^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}$
$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{33}$
이때, $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$이므로 $\triangle OAB$는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각삼각형이다.
$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$
$=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\sqrt{19}$
$=\frac{\sqrt{266}}{2}$
한편, 두 점 A, B의 yz평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 하면 삼각형 OAB의 yz평면 위로의 정사영이 OA′B′이고 A′(0, 1, 3), B′(0, 3, 1)이므로
$\overline{OA'}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
$\overline{OB'}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$
$\overline{A'B'}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$
이때, 선분 A′B′의 중점을 M이라 하면 $\triangle OA'B'$이 이등변삼각형이므로
$\overline{OM}\perp\overline{A'B'}$
$\overline{A'M}=\frac{1}{2}\overline{A'B'}=\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 OA′M에서



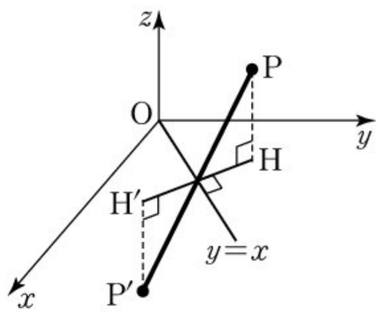
$\overline{OM}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$
$\therefore \triangle OA'B'=\frac{1}{2}\times\overline{A'B'}\times\overline{OM}$
$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$
$=4$
따라서 $\triangle OAB\cos\theta=\triangle OA'B'$에서
$\frac{\sqrt{266}}{2}\cos\theta=4$ $\therefore \cos\theta=\frac{8}{\sqrt{266}}$
$\therefore \cos^2\theta=\frac{64}{266}=\frac{32}{133}$ 답 ②

11 선분 AB를 점 A가 원점 O가 되도록 평행이동하였을 때 점 B가 평행이동한 점을 B′(a, b, c)라 하자.
$\overline{AB}=\overline{OB'}$이고 두 직선 AB, OB′이 서로 평행하므로 두 선분 AB, OB′의 xy평면, yz평면 위로의 정사영의 길이는 각각 같다.
점 B′의 xy평면 위로의 정사영을 C라 하면
C$(a, b, 0)$
선분 AB의 xy평면 위로의 정사영의 길이는 선분 OC의 길이와 같으므로
$\sqrt{a^2+b^2}=12$ $\therefore a^2+b^2=144$ ……㉠
점 B′의 yz평면 위로의 정사영을 D라 하면
D$(0, b, c)$
선분 AB의 yz평면 위로의 정사영의 길이는 선분 OD의 길이와 같으므로
$\sqrt{b^2+c^2}=5$ $\therefore b^2+c^2=25$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $a^2=144-b^2$, $c^2=25-b^2$이고, $a^2\geq0$, $c^2\geq0$이므로
$144-b^2\geq0$, $25-b^2\geq0$
$b^2\leq144$, $b^2\leq25$ $\therefore 0\leq b^2\leq25$ ……㉢
점 B′의 zx평면 위로의 정사영을 E라 하면
E$(a, 0, c)$
선분 AB의 zx평면 위로의 정사영의 길이는 선분 OE의 길이와 같으므로
$\overline{OE}=\sqrt{a^2+c^2}$
$=\sqrt{(144-b^2)+(25-b^2)}$
$=\sqrt{169-2b^2}$
이때, ㉢에서
$-50\leq-2b^2\leq0$, $119\leq169-2b^2\leq169$
$\sqrt{119}\leq\sqrt{169-2b^2}\leq13$
$\therefore \sqrt{119}\leq\overline{OE}\leq13$
따라서 $M=13$, $m=\sqrt{119}$이므로
$M^2+m^2=13^2+(\sqrt{119})^2$
$=169+119$
$=288$ 답 ③

12 점 A(4, 3, 1)을 점 M(−2, 1, 5)에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표를 (p, q, r)라 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로
$\frac{4+p}{2}=-2$, $\frac{3+q}{2}=1$, $\frac{1+r}{2}=5$
$\therefore p=-8$, $q=-1$, $r=9$
즉, B(−8, −1, 9)이므로 이 점을 xy평면 위의 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는
(−1, −8, −9)
(x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다.)
따라서 $a=-1$, $b=-8$, $c=-9$이므로
$a-b-c=-1-(-8)-(-9)=16$ 답 ④

blacklabel 특강 해결실마리

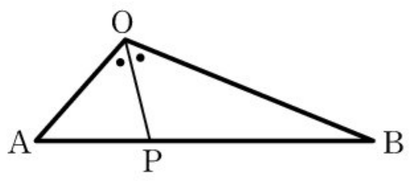
좌표공간의 한 점 P를 xy평면 위의 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하고, 두 점 P, P′에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하자.



두 점 H, H′은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 P′의 x좌표와 y좌표는 점 P의 x좌표와 y좌표를 서로 바꾸어 구할 수 있다.

또한, 두 점 P, P′은 xy평면 위에 있는 직선에 대하여 대칭이므로 점 P′의 z좌표는 점 P의 z좌표의 부호를 바꾸어서 구해야 한다.

13 삼각형 OAB에서



$A(1, 3, 2)$, $B(4, 2, -6)$

이므로

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$

$\overline{OB}=\sqrt{4^2+2^2+(-6)^2}=2\sqrt{14}$

이때, 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

즉, 점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하므로

$P\left(\frac{1\times4+2\times1}{1+2}, \frac{1\times2+2\times3}{1+2}, \frac{1\times(-6)+2\times2}{1+2}\right)$, 즉

$P\left(2, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

따라서 $a=2$, $b=\frac{8}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$이므로

$a+b+c=2+\frac{8}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=4$ 답 4

14 점 P(3, 2, 7)의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영이 각각 A, B, C이므로

$A(3, 2, 0)$, $B(0, 2, 7)$, $C(3, 0, 7)$

삼각형 ABC의 무게중심을 G_1이라 하면

$G_1\left(\frac{3+0+3}{3}, \frac{2+2+0}{3}, \frac{0+7+7}{3}\right)$, 즉

$G_1\left(2, \frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

또한, 점 P(3, 2, 7)의 x축, y축, z축 위로의 정사영이 각각 D, E, F이므로

$D(3, 0, 0)$, $E(0, 2, 0)$, $F(0, 0, 7)$

삼각형 DEF의 무게중심을 G_2라 하면

$G_2\left(\frac{3+0+0}{3}, \frac{0+2+0}{3}, \frac{0+0+7}{3}\right)$, 즉

$G_2\left(1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

따라서 두 삼각형 ABC, DEF의 무게중심 G_1, G_2 사이의 거리는

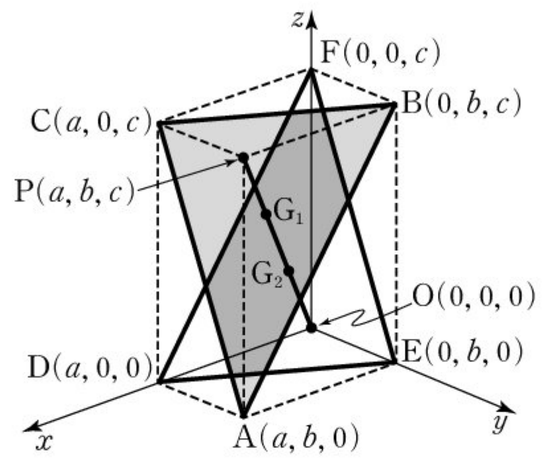
$\overline{G_1G_2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{1+\frac{4}{9}+\frac{49}{9}}$

$=\frac{\sqrt{62}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{62}}{3}$

단계	채점 기준	배점
(가)	점 P의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 구한 후, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 구한 경우	40%
(나)	점 P의 x축, y축, z축 위로의 정사영을 구한 후, 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구한 경우	40%
(다)	두 삼각형 ABC, DEF의 무게중심 사이의 거리를 구한 경우	20%

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우



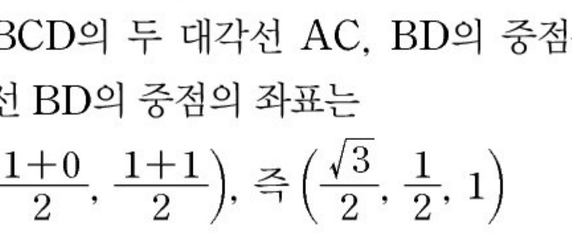
점 P의 좌표를 (a, b, c)라 하고 삼각형 ABC의 무게중심을 G_1, 삼각형 DEF의 무게중심을 G_2라 하면

$G_1\left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}\right)$, $G_2\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

이때, 직선 OP를 포함하는 평면 OAPF를 그려 보면 다음 그림과 같이 네 점 P, G_1, G_2, O가 한 직선 위에 있고,

$\overline{PG_1}=\overline{G_1G_2}=\overline{G_2O}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3}$임을 알 수 있다.

즉, 두 점 G_1, G_2는 선분 OP를 삼등분하는 점이다.



15 조건 (나)에서 두 점 D, H가 z축 위에 있고, 육면체 ABCD−EFGH의 네 옆면이 모두 정사각형이므로 평면 ABCD는 z축에 수직이다.

이때, 점 A의 z좌표가 1이므로 세 점 B, C, D의 z좌표는 모두 1이고 점 D가 z축 위에 있으므로 $D(0, 0, 1)$

또한, 점 A의 좌표는 $(\sqrt{3}, -1, 1)$이므로 조건 (가)에서 점 B의 좌표는 $(\sqrt{3}, 1, 1)$

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\sqrt{3}+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ ……㉠

$C(p, q, 1)$이라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\sqrt{3}+p}{2}, \frac{q+0}{2}, 1\right)$ ……㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{\sqrt{3}+p}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+q}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore p=0$, $q=2$ $\quad\therefore$ C$(0, 2, 1)$

직선 CG가 z축과 평행하고, $\overline{\text{CG}}=2$이므로

G$(0, 2, -1)$

따라서 $a=0$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a+b-c=0+2-(-1)=3$ 답 3

16 선분 AO는 정육면체 ABCD-EFOG의 대각선이므로 정육면체의 한 변의 길이를 a $(a>0)$라 하면

$\overline{\text{AO}}=\sqrt{3}a$

이때, A$(0, 0, 3\sqrt{3})$이므로

$\overline{\text{AO}}=3\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=3$

즉, $\overline{\text{AB}}=3$, $\overline{\text{BO}}=3\sqrt{2}$이고, 삼각형 ABO에서 선분 BP가 $\angle$ABO의 이등분선이므로 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\text{AP}}:\overline{\text{PO}}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BO}}$

$=3:3\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$

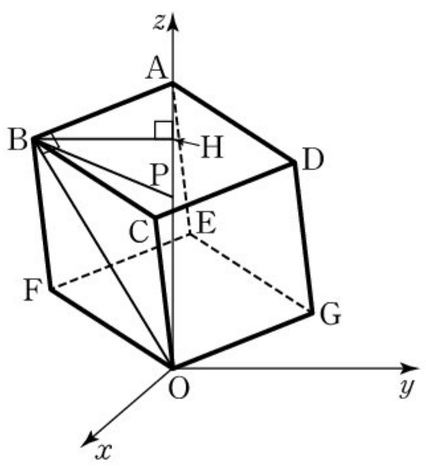
$\therefore \overline{\text{PO}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\overline{\text{AO}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\times 3\sqrt{3}$

$=3\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)$

$=6\sqrt{3}-3\sqrt{6}$

즉, 점 P의 z좌표는 $6\sqrt{3}-3\sqrt{6}$이다.



한편, 위의 그림과 같이 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle$OAB는 $\angle$OBA$=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{\text{OB}}^2=\overline{\text{OH}}\times\overline{\text{OA}}$, $(3\sqrt{2})^2=\overline{\text{OH}}\times 3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{\text{OH}}=2\sqrt{3}$

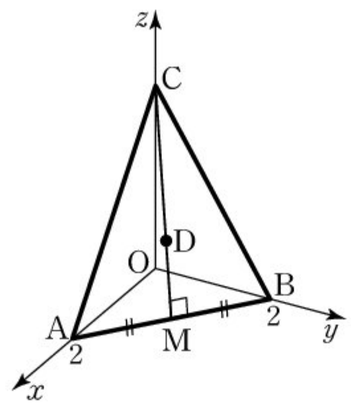
즉, 점 B의 z좌표가 $2\sqrt{3}$이므로 삼각형 ABP의 무게중심의 z좌표는

$\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+(6\sqrt{3}-3\sqrt{6})}{3}=\frac{11}{3}\sqrt{3}-\sqrt{6}$

따라서 $p=\frac{11}{3}$, $q=-1$이므로

$6p+q=6\times\frac{11}{3}+(-1)=21$ 답 21

17



위의 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면

M$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 M$(1, 1, 0)$

또한, $\triangle$ABC는 $\overline{\text{CA}}=\overline{\text{CB}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\text{AB}}\perp\overline{\text{CM}}$

이때, 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\text{AB}}\times\overline{\text{CM}}=8$, $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\overline{\text{CM}}=8$

$\therefore \overline{\text{CM}}=4\sqrt{2}$

z축의 양의 방향 위의 점 C의 좌표를 $(0, 0, c)$ $(c>0)$라 하면

$\overline{\text{CM}}^2=1^2+1^2+(-c)^2=32$

$c^2=30$ $\quad\therefore c=\sqrt{30}$ $(\because c>0)$

즉, 점 C의 좌표는 $(0, 0, \sqrt{30})$이므로 점 D의 좌표는

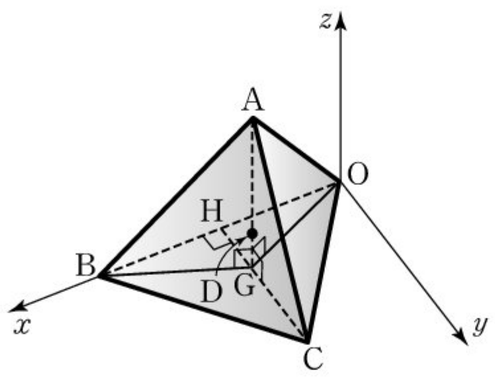
$\left(\frac{2+0+0}{3}, \frac{0+2+0}{3}, \frac{0+0+\sqrt{30}}{3}\right)$, 즉

$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{30}}{3}\right)$

$\therefore \overline{\text{DO}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{38}{9}}=\frac{\sqrt{38}}{3}$ 답 ③

18 다음 그림과 같이 정사면체 OABC의 꼭짓점 C에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H, 꼭짓점 A에서 선분 CH에 내린 수선의 발을 G라 하자.



$\triangle$OBC가 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$\overline{\text{OH}}=\frac{1}{2}\times 6=3$, $\overline{\text{CH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$

$\therefore$ C$(3, 3\sqrt{3}, 0)$

이때, 점 B의 좌표는 $(6, 0, 0)$이므로 삼각형 OBC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{0+0+3\sqrt{3}}{3}, \frac{0+0+0}{3}\right)$, 즉 $(3, \sqrt{3}, 0)$

또한, $\overline{\text{CG}}=\frac{2}{3}\overline{\text{CH}}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 AGC에서

$\overline{\text{AG}}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

한편, 점 D는 정사면체 OABC에 내접하는 구의 중심이므로 선분 AG 위에 있다.

또한, $\overline{AD}=\overline{CD}=x$ $(x>0)$라 하면 $\overline{DG}=2\sqrt{6}-x$이므로 직각삼각형 DGC에서

$(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6}-x)^2=x^2$, $4\sqrt{6}x=36$

$\therefore x=\dfrac{9}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

즉, $\overline{DG}=2\sqrt{6}-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이므로

$D\left(3, \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

따라서 $a=3$, $b=\sqrt{3}$, $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$이므로

$\dfrac{ab^2}{c^2}=\dfrac{3\times(\sqrt{3})^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{9}{\frac{6}{4}}=6$ 답 6

blacklabel 특강 참고

한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 높이를 h라 하면

$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

이때, 정사면체에 내접하는 구의 중심은 높이를 꼭짓점에서부터 3 : 1로 내분하는 점이므로 내접하는 구의 반지름의 길이는

$\dfrac{h}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$

19 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면 구의 중심이 $(-3, 2, 1)$이므로 구 S의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=r^2$ ……㉠

$y=z=0$을 ㉠에 대입하면

$(x+3)^2+4+1=r^2$

$\therefore x=-3\pm\sqrt{r^2-5}$

이때, 구 S에 의하여 잘린 x축의 길이가 4이므로

$|(-3+\sqrt{r^2-5})-(-3-\sqrt{r^2-5})|=4$

$2\sqrt{r^2-5}=4$, $r^2=9$

$\therefore r=3$ $(\because r>0)$

즉, $S : (x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$이므로 이 구와 xy평면, zx평면이 만나서 생기는 두 원을 각각 C_1, C_2라 하면

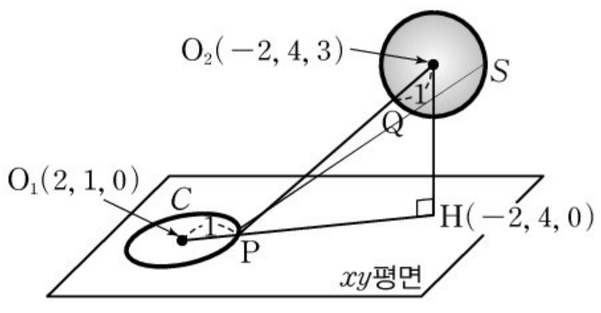
$z=0$일 때, $C_1 : (x+3)^2+(y-2)^2=8$

$y=0$일 때, $C_2 : (x+3)^2+(z-1)^2=5$

따라서 원 C_1의 넓이는 $A=8\pi$, 원 C_2의 넓이는 $B=5\pi$이므로

$A+B=8\pi+5\pi=13\pi$ 답 ③

20



위의 그림과 같이 원 C와 구 S의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 구 S의 중심 O_2의 xy평면 위로의 정사영을 H라 하면 H$(-2, 4, 0)$ ($z=0$을 대입)

두 점 P, Q 사이의 거리가 최소이려면 점 P는 선분 O_1H와 원 C의 교점이고, 점 Q는 선분 PO_2와 구 S의 교점이어야 한다.

이때, $\overline{PH}=\overline{O_1H}-\overline{O_1P}=\sqrt{4^2+(-3)^2}-1=5-1=4$, $\overline{O_2H}=3$이므로 직각삼각형 O_2PH에서

$\overline{PO_2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{PO_2}-\overline{QO_2}$

$=5-1=4$ 답 ②

21 $x^2+y^2+z^2-10x-8y-6z+25=0$에서

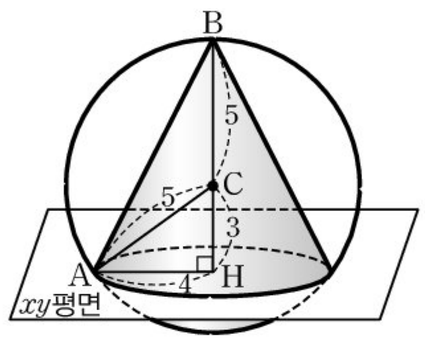
$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=25$

즉, 중심이 $(5, 4, 3)$, 반지름의 길이가 5인 구이다.

이때, 주어진 구와 xy평면이 만나서 생기는 원의 방정식은 $z=0$을 대입하면

$(x-5)^2+(y-4)^2=16$

즉, 중심이 $(5, 4, 0)$이고 반지름의 길이가 4인 원이다.



원기둥의 밑면 위의 한 점을 A, 직원뿔의 꼭짓점을 B, 구의 중심을 C, 밑면인 원의 중심을 H라 하면 구에 내접하고 밑면이 xy평면 위에 있는 직원뿔 중 부피가 더 큰 직원뿔은 위의 그림과 같이 점 B의 z좌표가 양수일 때이다.

H$(5, 4, 0)$, C$(5, 4, 3)$이므로

$\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}=5+3=8$

따라서 구하는 직원뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times\pi\times\overline{AH}^2\times\overline{BH}=\dfrac{1}{3}\times\pi\times4^2\times8$

$=\dfrac{128}{3}\pi$ 답 ④

• 다른풀이 •

$x^2+y^2+z^2-10x-8y-6z+25=0$에서

$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=5^2$ ……㉠

이므로 주어진 구는 중심이 $(5, 4, 3)$이고 반지름의 길이가 5이다.

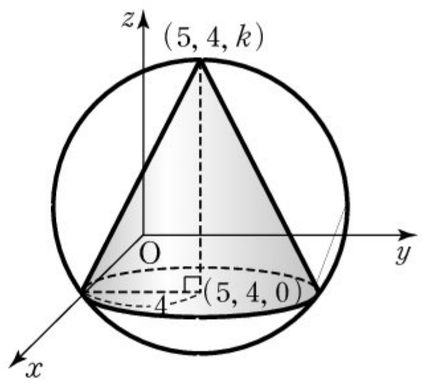
이 구에 내접하는 직원뿔의 밑면이 xy평면 위에 있으므로 ㉠에 $z=0$을 대입하면

$(x-5)^2+(y-4)^2+3^2=5^2$

$\therefore (x-5)^2+(y-4)^2=4^2$

즉, 직원뿔의 밑면은 중심이 $(5, 4, 0)$이고 반지름의 길이가 4인 원이다.

이때, 직원뿔의 꼭짓점의 xy평면 위로의 정사영이 밑면의 중심이므로 꼭짓점의 좌표를 $(5, 4, k)$라 할 수 있다.



점 $(5, 4, k)$가 구 $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=5^2$ 위에 있으므로 $x=5$, $y=4$, $z=k$를 대입하면

$(k-3)^2=5^2$, $k-3=\pm5$

$\therefore k=8$ 또는 $k=-2$

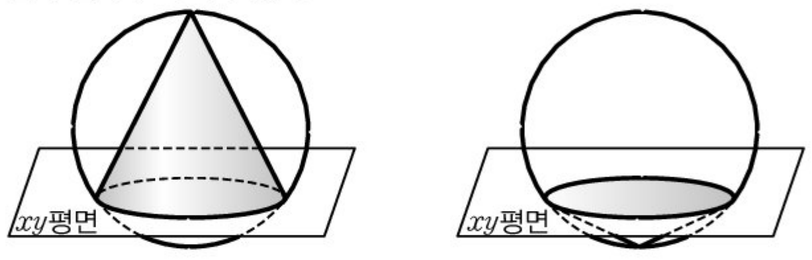
조건을 만족시키는 직원뿔 중 부피가 더 큰 직원뿔은 $k=8$일 때이므로 직원뿔의 높이는 8이다.

따라서 구하는 직원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times8=\frac{128}{3}\pi$

blacklabel 특강 참고

주어진 구에 내접하면서 밑면이 xy평면 위에 있는 직원뿔은 다음 그림과 같이 두 가지가 있다.

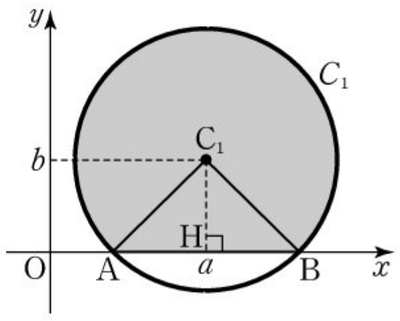


22 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-b)^2=3b^2$의 중심의 좌표는 (a, b, b)이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{3}b$이다.

이 구와 xy평면이 만나서 생기는 원 C_1의 방정식은 구의 방정식에 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-b)^2=2b^2$

원 C_1과 x축의 교점을 A, B, 원 C_1의 중심을 C_1이라 하고, 점 C_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C_1과 그 내부로 이루어진 도형에서 $y\geq0$인 부분은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



이때, $\overline{AC_1}=\overline{BC_1}=\sqrt{2}b$, $\overline{C_1H}=b$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=b$ $\therefore \overline{AB}=2b$

즉, $\triangle C_1AB$는 직각이등변삼각형이므로 위의 그림의 어두운 부분의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{2}b)^2\times\frac{270}{360}+\frac{1}{2}\times2b\times b=\frac{3b^2}{2}\pi+b^2$

같은 방법으로 구와 zx평면이 만나서 생기는 원 C_2의 방정식은 구의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(z-b)^2=2b^2$

두 원 C_1, C_2는 서로 합동이고 원 C_2의 중심에서 z축까지의 거리가 $\overline{C_1H}$와 같으므로 구하는 두 부분의 넓이는 서로 같다.

즉, $2\left(\frac{3b^2}{2}\pi+b^2\right)=192\pi+128$이므로

$b^2=64$ $\therefore b=8$ ($\because b>0$)

한편, 주어진 구가 yz평면과 만나지 않으므로

$a^2>3b^2=192$ $\therefore a=\sqrt{192}=13.\times\times\times$

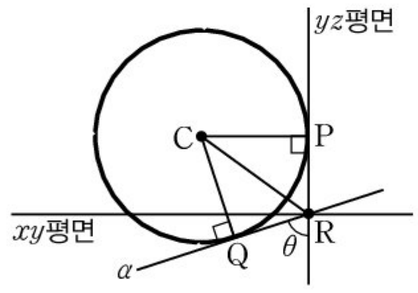
따라서 자연수 a의 최솟값은 14이므로 $a+b$의 최솟값은

$14+8=22$ 답 22

23 구 $(x-4)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=16$의 중심의 좌표는 $(4, 5, 3)$이고 구의 반지름의 길이는 4이므로 주어진 구는 yz평면에 접한다.

즉, 구에 접하면서 y축을 포함하는 두 평면 중 한 평면이 yz평면이므로 나머지 한 평면을 α라 하자.

이때, 구의 중심과 xy평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작으므로 구의 중심을 지나면서 xy평면과 평행한 평면으로 구를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



구의 중심을 C, 구와 yz평면의 접점을 P, 구와 평면 α의 접점을 Q라 하고, 구의 중심을 지나면서 xy평면과 평행한 평면이 y축과 만나는 점을 R라 하자.

C(4, 5, 3), P(0, 5, 3), R(0, 5, 0)이므로

$\overline{CP}=4$, $\overline{PR}=3$, $\overline{CR}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\angle CRP=\theta'$이라 하면

$\sin\theta'=\frac{4}{5}$, $\cos\theta'=\frac{3}{5}$

$\therefore \sin2\theta'=2\sin\theta'\cos\theta'$

$=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

이때, $2\theta'+\theta=\pi$에서 $2\theta'=\pi-\theta$이므로

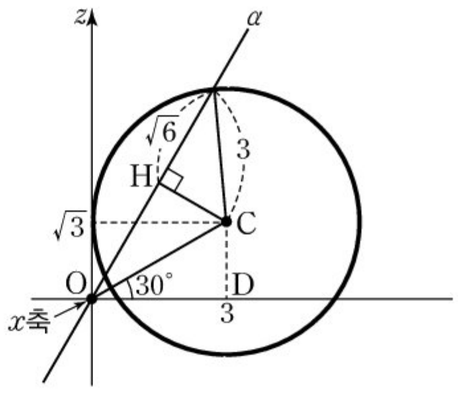
$\sin(\pi-\theta)=\frac{24}{25}$ $\therefore \sin\theta=\frac{24}{25}$ 답 $\frac{24}{25}$

24 $x^2+y^2+z^2-6y-2\sqrt{3}z+3=0$에서

$x^2+(y-3)^2+(z-\sqrt{3})^2=3^2$

즉, 주어진 구는 중심이 $(0, 3, \sqrt{3})$이고 반지름의 길이가 3이다.

이때, 구의 중심이 yz평면 위에 있으므로 yz평면으로 구를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



구의 중심을 C라 하고, 중심 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면 평면 α가 자른 단면인 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$

점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 $D(0, 3, 0)$이라 하면

$\triangle HOC\equiv\triangle DOC$

$\triangle DOC$에서 $\angle CDO=90^\circ$, $\overline{OD}=3$, $\overline{CD}=\sqrt{3}$이므로

$\angle HOC=\angle DOC=30^\circ$

따라서 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle HOD=60^\circ$

이때, 단면인 원의 넓이가 $\pi\times(\sqrt{6})^2=6\pi$이므로 평면 α에 의하여 잘린 구의 단면의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$6\pi\times\cos 60^\circ=6\pi\times\frac{1}{2}$

$=3\pi$ 답 ③

25 네 개의 구 S_1, S_2, S_3, S_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4라 하자.

조건 (가), (나), (다)에서 구 S_1은 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하고, 중심의 좌표가 모두 양수이므로 구 S_1의 중심 O_1의 좌표는 $(1, 1, 1)$이다. (구 S_1의 반지름의 길이가 1이므로)

이때, 구 S_2는 xy평면, zx평면, 구 S_1에 동시에 접하고, 중심의 좌표가 모두 양수이므로 구 S_2의 중심 O_2의 좌표를 $(p, 1, 1)$ $(p>0)$이라 하면 $\overline{O_1O_2}=2$에서

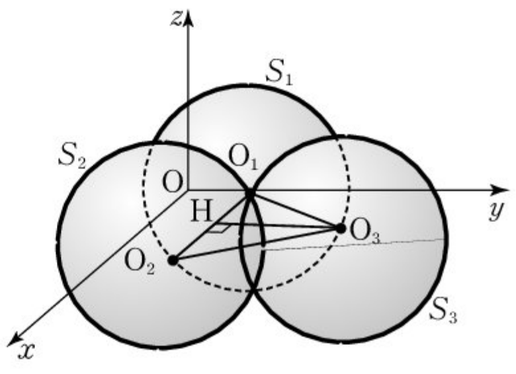
$\sqrt{(p-1)^2}=2$, $(p-1)^2=4$

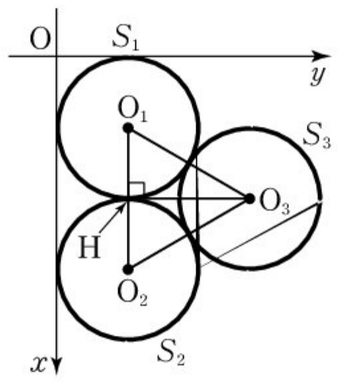
$p-1=\pm2$ $\therefore p=3$ $(\because p>0)$

즉, S_2는 중심 O_2의 좌표가 $(3, 1, 1)$이고, 반지름의 길이가 1인 구이다.

조건 (가), (다)에서 구 S_3은 xy평면과 두 구 S_1, S_2에 동시에 접하고, 중심의 좌표가 모두 양수이다.

다음 그림과 같이 좌표공간에 세 개의 구 S_1, S_2, S_3을 나타내고 구 S_3의 중심 O_3에서 선분 O_1O_2에 내린 수선의 발을 H라 하자.





$\triangle O_1O_2O_3$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

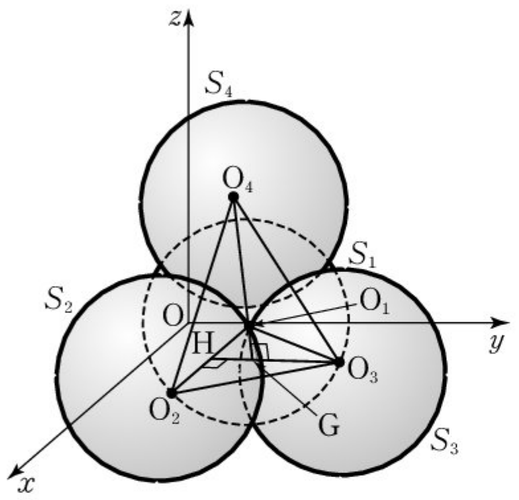
$\overline{O_1H}=\overline{O_2H}=1$ $\therefore H(2, 1, 1)$

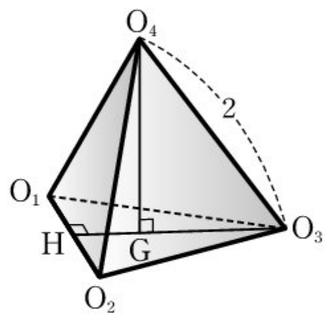
이때, $\overline{O_3H}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$이므로 구 S_3의 중심 O_3의 좌표는 $(2, 1+\sqrt{3}, 1)$이다.

조건 (다)에서 구 S_4는 세 구 S_1, S_2, S_3에 동시에 접하므로

$\overline{O_1O_4}=\overline{O_2O_4}=\overline{O_3O_4}=2$

즉, 네 점 O_1, O_2, O_3, O_4를 꼭짓점으로 하는 입체도형은 한 모서리의 길이가 2인 정사면체이므로 구 S_4의 중심 O_4에서 평면 $O_1O_2O_3$에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 $O_1O_2O_3$의 무게중심이다.





즉, 점 G의 좌표는

$\left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{1+1+1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1+1+1}{3}\right)$

$\therefore G\left(2, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

또한,

$\overline{O_3G}=\frac{2}{3}\overline{O_3H}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

이므로 직각삼각형 O_3O_4G에서

$\overline{O_4G}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore O_4\left(2, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

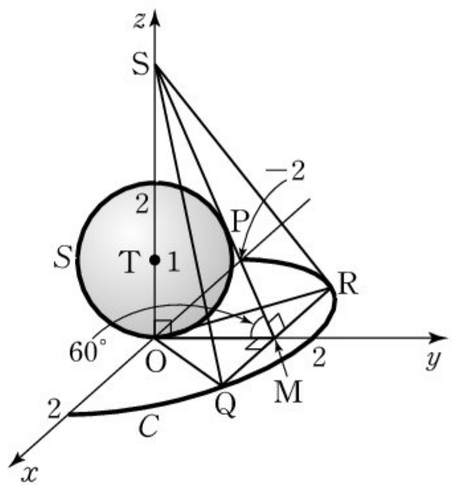
따라서 $a=2$, $b=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c=1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$이므로

$a^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$=4+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=7$ 답 7

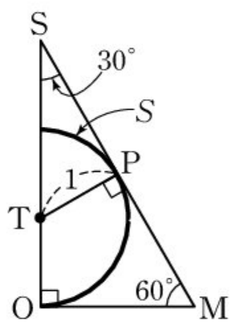
26 구 S: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$의 중심을 T라 하면 $T(0, 0, 1)$이고 구 S의 반지름의 길이는 1이다.

원 $C : x^2+y^2=4$는 xy평면 위에 있고 중심이 $(0, 0, 0)$, 반지름의 길이가 2이다.
구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R를 포함하는 평면이 z축과 만나는 점을 S라 하자.



이등변삼각형 OQR에서 선분 QR의 중점을 M이라 하면 $\overline{OS}\perp(xy$평면$)$, $\overline{OM}\perp\overline{QR}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{SM}\perp\overline{QR}$

이때, 평면 SQR와 xy평면이 이루는 예각의 크기가 60°이므로



직각삼각형 SOM에서

$\angle SMO=60^\circ$ $\therefore\ \angle MSO=30^\circ$

한편, 선분 SM과 구 S의 접점이 P이므로

$\angle SPT=90^\circ$

즉, 직각삼각형 STP에서

$\overline{ST}=\dfrac{\overline{TP}}{\sin 30^\circ}=1\times 2=2$

$\therefore$ S$(0, 0, 3)$

따라서 직각삼각형 SOM에서 $\overline{SO}=3$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{3}$, $\overline{SM}=2\sqrt{3}$

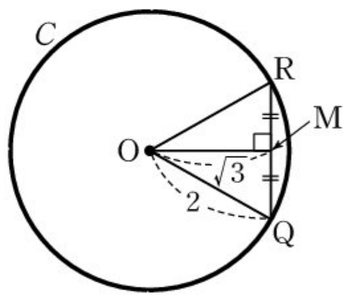
즉, xy평면 위의 원 C에서

$\overline{OQ}=\overline{OR}=2$, $\overline{OM}=\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 OMQ에서

$\overline{MQ}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

$\therefore\ \overline{QR}=2\overline{MQ}=2\times 1=2$



답 ④

Step 3 1등급을 넘어서는 **종합 사고력 문제** p. 71

01 3 **02** $2\sqrt{29}-2$ **03** $108\pi+72$ **04** ③
05 20 **06** ⑤

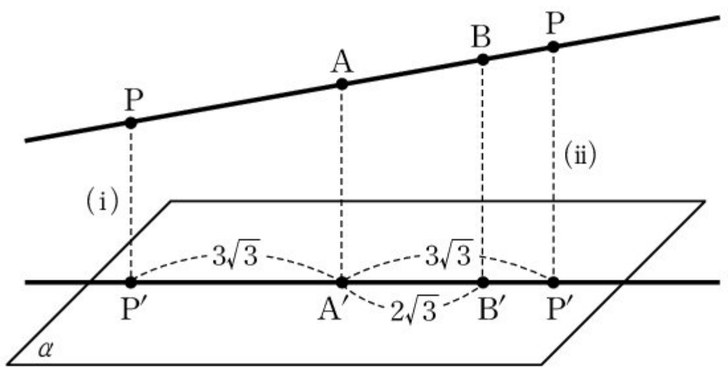
01 해결단계

❶ 단계	$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{A'B'}:\overline{A'P'}$임을 이용하여 $\overline{AB}:\overline{AP}$를 구한다.
❷ 단계	조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 구한다.

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{A'B'}:\overline{A'P'}$이므로

$\overline{AB}:\overline{AP}=2\sqrt{3}:3\sqrt{3}=2:3$

즉, 점 P는 선분 AB를 3 : 5 또는 3 : 1로 외분하는 점이다.



두 점 A$(1, 4, -3)$, B$(-2, 1, 3)$에 대하여

(i) 점 P가 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 경우

$$\mathrm{P}\left(\frac{3\times(-2)-5\times 1}{3-5},\ \frac{3\times 1-5\times 4}{3-5},\ \frac{3\times 3-5\times(-3)}{3-5}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{11}{2},\ \frac{17}{2},\ -12\right)$$

(ii) 점 P가 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 경우

$$\mathrm{P}\left(\frac{3\times(-2)-1\times 1}{3-1},\ \frac{3\times 1-1\times 4}{3-1},\ \frac{3\times 3-1\times(-3)}{3-1}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2},\ 6\right)$$

그런데 $a<0$이므로 점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 6\right)$이다.

따라서 $a=-\dfrac{7}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=6$이므로

$a-b+c=-\dfrac{7}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+6=3$ 답 3

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

한 직선 위에 있는 세 점 A, B, P 사이의 거리의 비가 세 점이 평면 α 위에 정사영된 후에도 똑같이 유지된다는 점을 생각하면 쉽게 풀 수 있다. 직선이나 도형 위의 점들 사이의 길이의 비가 정사영이 되었을 때도 변하지 않는다는 사실을 이용하는 문제는 자주 나오는 편이므로 이를 잘 알아두도록 하자.

02 해결단계

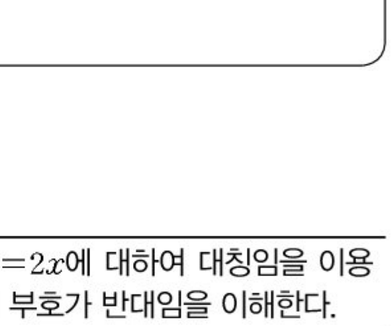
❶ 단계	두 구가 xy평면 위의 직선 $y=2x$에 대하여 대칭임을 이용하여 두 구의 중심의 z좌표의 부호가 반대임을 이해한다.
❷ 단계	두 구의 중심에서 각각 xy평면에 내린 수선의 발 H, H′에 대하여 직선 $y=2x$가 선분 HH′의 수직이등분선임을 이용하여 구 S'의 중심 C′의 좌표를 구한다.
❸ 단계	선분 PQ의 길이가 최소이기 위해서는 두 점 P, Q가 선분 CC′과 두 구 S, S'의 교점의 위치에 있어야 함을 알고, 최솟값을 구한다.

구 $S : (x-6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(6, 2, 3)$이고, 구 S를 xy평면 위의 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 구 S'의 중심을 C′$(a, b, -3)$이라 할 수 있다.

두 점 C, C′에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면

H$(6, 2, 0)$, H′$(a, b, 0)$

이고, 오른쪽 그림과 같이 두 점 H, H′은 직선 $y=2x$에 대



하여 대칭이므로 직선 $y=2x$는 선분 HH′의 수직이등분선이다.

(i) 선분 HH′의 중점 $\left(\frac{a+6}{2}, \frac{b+2}{2}, 0\right)$이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+2}{2}=2\times\frac{a+6}{2}$$

$$\therefore 2a-b+10=0 \quad \cdots\cdots㉠$$

(ii) 직선 HH′이 직선 $y=2x$와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-6}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+2b-10=0 \quad \cdots\cdots㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=6$

$\therefore$ C′$(-2, 6, -3)$

따라서 두 구 S, S' 위를 각각 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소이기 위해서는 두 점 P, Q가 선분 CC′과 두 구 S, S'의 교점의 위치에 있어야 하므로 이때의 최솟값은

$$\overline{CC'}-(1+1)=\sqrt{8^2+(-4)^2+6^2}-2$$

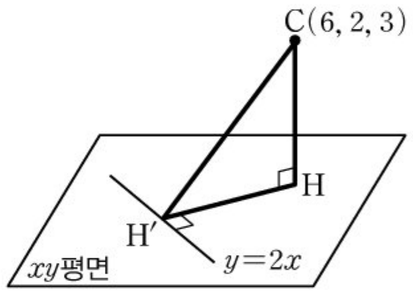
$$=2\sqrt{29}-2$$

답 $2\sqrt{29}-2$

• 다른풀이 •

구 $S:(x-6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$의 중심을 C라 하면 C$(6, 2, 3)$

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 $y=2x$에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.



H$(6, 2, 0)$이므로 $\overline{CH}=3$

선분 HH′의 길이는 xy평면에서 점 $(6, 2)$와 직선 $y=2x$, 즉 $2x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{HH'}=\frac{|2\times6-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

즉, 직각삼각형 CHH′에서

$$\overline{CH'}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{29}$$

이때, 구 S'의 중심을 C′이라 하면

$$\overline{C'H'}=\overline{CH'}=\sqrt{29}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$2\times(\sqrt{29}-1)=2\sqrt{29}-2$$

서울대 선배들의 강추문제 1등급 비법 노하우

좌표공간의 점을 xy평면 위의 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동하면 대칭이동한 점의 z좌표는 원래의 점의 z좌표와 절댓값은 같고, 부호는 다르다.

점 C를 대칭이동한 점 C′의 좌표를 바로 구하기 어려우므로 점 C′에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H′이라 하고 점 H′의 좌표를 구하여 점 C′의 좌표를 구한다.

결국 이 문제는 좌표평면 위의 점 $(6, 2)$를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 점을 찾으면 구 S'의 중심을 찾을 수 있어 간단한 계산으로 두 구 위를 움직이는 두 점 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있다.

03 해결단계

❶ 단계	주어진 구를 xy평면, zx평면으로 잘랐을 때 생기는 원의 방정식을 각각 구한다.
❷ 단계	두 평면에 의하여 생긴 단면의 교선을 빗변으로 하고 단면의 중심을 한 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각이등변삼각형임을 파악한다.
❸ 단계	단면의 넓이의 합을 구한다.

구 $(x-4)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=108$을 xy평면으로 잘라 생기는 단면의 방정식은 $z=0$을 대입하면

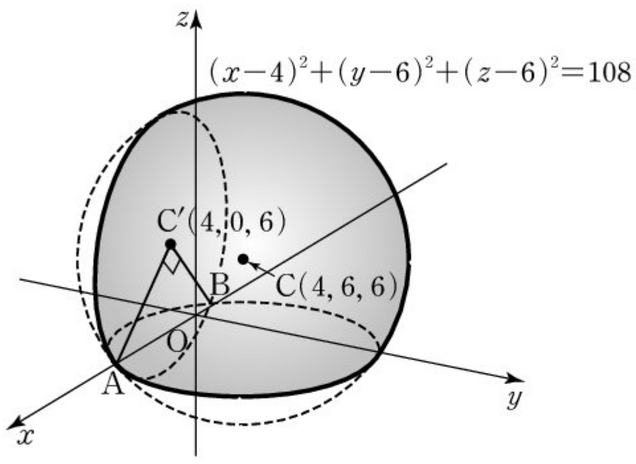
$$(x-4)^2+(y-6)^2+36=108$$

$$\therefore (x-4)^2+(y-6)^2=72$$

또한, 주어진 구를 zx평면으로 잘라 생기는 단면의 방정식은 $y=0$을 대입하면

$$(x-4)^2+36+(z-6)^2=108$$

$$\therefore (x-4)^2+(z-6)^2=72 \quad \cdots\cdots㉠$$



위의 그림과 같이 두 단면은 각각 반지름의 길이가 $6\sqrt{2}$인 원의 일부이고, 단면의 교선을 선분 AB라 하면 두 점 A, B의 x좌표는 ㉠에 $z=0$을 대입하면

$$(x-4)^2+36=72,\ (x-4)^2=36$$

$$x-4=\pm6 \quad \therefore x=10 \text{ 또는 } x=-2$$

A$(10, 0, 0)$, B$(-2, 0, 0)$라 하고 ㉠의 중심을 C′$(4, 0, 6)$이라 하면

$$\overline{AC'}=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{BC'}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}=10-(-2)=12$$

따라서 $\overline{AC'}^2+\overline{BC'}^2=\overline{AB}^2$이므로 $\triangle$ABC′은 $\angle$AC′B$=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 구하는 단면의 넓이의 합은

$$2\left\{\pi\times(6\sqrt{2})^2\times\frac{270}{360}+\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2})^2\right\}=2(54\pi+36)$$

$$=108\pi+72$$

답 $108\pi+72$

04 해결단계

❶ 단계	도형 S 위의 점을 P(x, y, z)라 하고, $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$을 만족시키는 도형의 방정식을 구하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❷ 단계	선분 OP의 길이의 최솟값은 점 P가 원점 O와 도형 S의 중심을 이은 선분 위에 있을 때임을 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	닮음비를 이용하여 그림자인 원의 반지름의 길이를 구한 후 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

두 점 A(2, 1, −1), B(−4, 7, 2)로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점을 P(x, y, z)라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP}=2 : 1$이므로 $\overline{AP}=2\overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$

$=4\{(x+4)^2+(y-7)^2+(z-2)^2\}$

$x^2+y^2+z^2+12x-18y-6z+90=0$

$\therefore (x+6)^2+(y-9)^2+(z-3)^2=36$

즉, 점 P가 나타내는 도형 S는 중심의 좌표가 (−6, 9, 3)이고, 반지름의 길이가 6인 구이다.

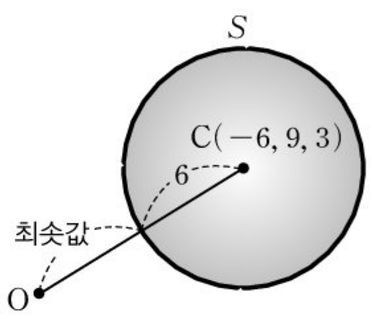
ㄱ. 구 S의 반지름의 길이가 6이므로 구의 겉넓이는

$4\pi\times6^2=144\pi$ (참)

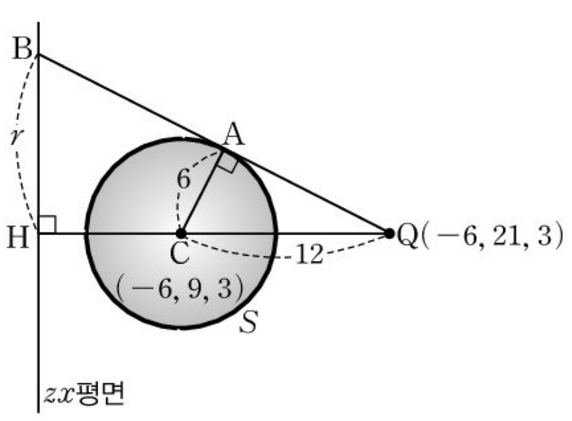
ㄴ. 구 S의 중심을 C(−6, 9, 3)이라 하면 구 S 위의 점과 원점 O 사이의 거리의 최솟값은 두 점 O, C 사이의 거리에서 구의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$\overline{OC}-6=\sqrt{(-6)^2+9^2+3^2}-6$

$=3\sqrt{14}-6$ (거짓)



ㄷ.



두 점 C(−6, 9, 3), Q(−6, 21, 3)은 x좌표, z좌표가 같으므로 직선 CQ는 zx평면에 수직이다.

즉, 점 Q의 위치에 전구가 켜져 있을 때 zx평면에 생기는 구 S의 그림자는 원이다.

이때, 점 Q에서 구 S에 그은 접선의 접점을 A, 이 접선과 zx평면의 교점을 B라 하면

$\overline{CA}=6$, $\overline{CQ}=21-9=12$

이므로 직각삼각형 ACQ에서

$\overline{AQ}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$

또한, 직선 CQ와 zx평면이 만나는 점을 H라 하면 두 삼각형 QBH, QCA는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{BH} : \overline{HQ}=\overline{CA} : \overline{AQ}$

그림자인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r : 21=6 : 6\sqrt{3}$

$r\sqrt{3}=21$

$\therefore r=7\sqrt{3}$

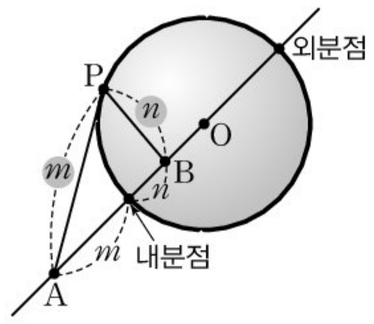
따라서 그림자인 원의 넓이는

$\pi\times(7\sqrt{3})^2=147\pi$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

blacklabel 특강 참고

좌표공간의 두 점 A, B로부터 거리의 비가 $m : n$ $(m\neq n)$인 점 P의 자취는 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 $m : n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구가 된다.



05 해결단계

❶ 단계	점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하고, 조건 (가), (다)를 이용하여 점 H의 위치를 파악한다.
❷ 단계	점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발이 직선 $y=x$ 위에 있음을 파악한 후, a의 값을 구한다.
❸ 단계	조건 (나)를 이용하여 사면체 PABC의 높이를 구한 후, 조건 (다)를 이용하여 점 H의 좌표를 구한다.
❹ 단계	b의 값을 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)에서

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{2}$

이므로 △ABC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면

조건 (다)에서 점 H와 직선 AB 사이의 거리가 $\frac{7\sqrt{6}}{2}$이다.

이때, 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

이고

$\frac{7\sqrt{6}}{2}>\frac{\sqrt{6}}{2}$

이므로 점 H는 삼각형 ABC의 외부에 존재한다.

점 H에서 두 직선 BC, AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 (직선 PH)⊥(평면 ABC)이므로

삼수선의 정리에 의하여

(직선 PH_1)⊥(직선 BC), (직선 PH_2)⊥(직선 AC)

조건 (가)에서 두 삼각형 PCA, PCB의 넓이가 서로 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PH_2}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PH_1}$

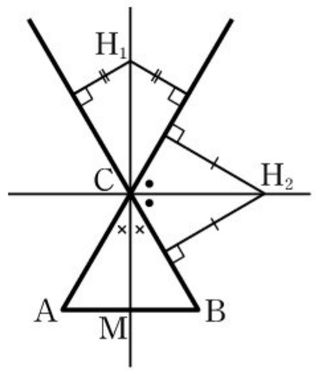
$\therefore \overline{PH_1}=\overline{PH_2}$

이때, $\overline{PH}$는 공통, $\angle PHH_1=\angle PHH_2=90^\circ$이므로

$\triangle PHH_1\equiv\triangle PHH_2$ (RHS 합동)

$\therefore \overline{HH_1}=\overline{HH_2}$

점 H에서 두 직선 BC, AC까지 이르는 거리가 같으므로 점 H는 오른쪽 그림과 같이 ∠ACB의 이등분선 또는 ∠ACB의 외각의 이등분선 위에 있어야 한다.



그런데 △ABC가 정삼각형이므로

$\angle BCH_2=60^\circ$

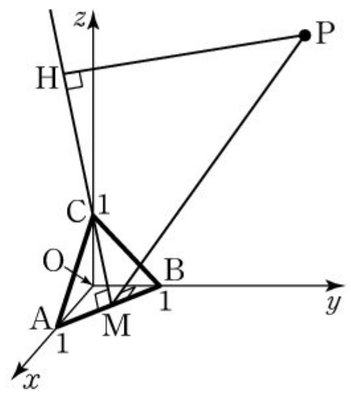
즉, ∠ACB의 외각의 이등분선과 직선 AB는 평행하고 변 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overline{CM}=\frac{\sqrt{6}}{2}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

따라서 점 H는 직선 CM 위에 있어야 한다.

한편, $\overline{PH}\perp$(평면 ABC), $\overline{HM}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$

즉, (평면 PHM)$\perp\overline{AB}$이므로

(평면 PCM)$\perp\overline{AB}$ ……㉠



점 P$(a, 5, b)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P′이라 하면 P′$(a, 5, 0)$이고, 점 C$(0, 0, 1)$에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.

㉠에서 평면 PCM이 xy평면 위의 직선 AB와 수직이므로 세 점 O, M, P′은 한 직선 위에 있다.

이때, 두 점 O, M이 xy평면 위의 직선 $y=x$ 위에 있으므로

└ 선분 AB의 중점이므로 M$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$a=5$

한편, 조건 (나)에서 사면체 PABC의 부피가 4이므로

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times\overline{PH}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times\overline{PH}$$

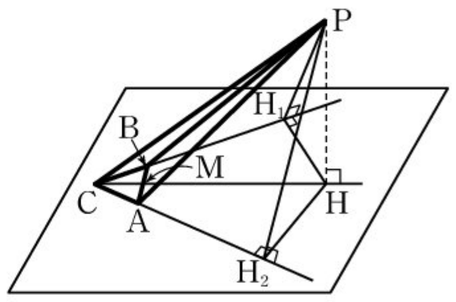
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\overline{PH}=4$$

$$\therefore\ \overline{PH}=4\times\frac{6}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$$

또한, 조건 (다)에 의하여 $\overline{HM}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$이고, $\overline{CM}=\frac{\sqrt{6}}{2}$이므로

$\overline{HM}:\overline{CM}=7:1$

(i) 점 H가 반직선 CM 위에 있을 때,



위의 그림에서 점 H는 선분 CM을 8 : 7로 외분하므로 점 H의 좌표는

$$\left(\frac{8\times\frac{1}{2}-7\times0}{8-7}, \frac{8\times\frac{1}{2}-7\times0}{8-7}, \frac{8\times0-7\times1}{8-7}\right)$$, 즉

$(4, 4, -7)$

△PCH가 직각삼각형이므로 세 점 P$(5, 5, b)$, C$(0, 0, 1)$, H$(4, 4, -7)$에 대하여

$\overline{PC}^2=\overline{PH}^2+\overline{CH}^2$

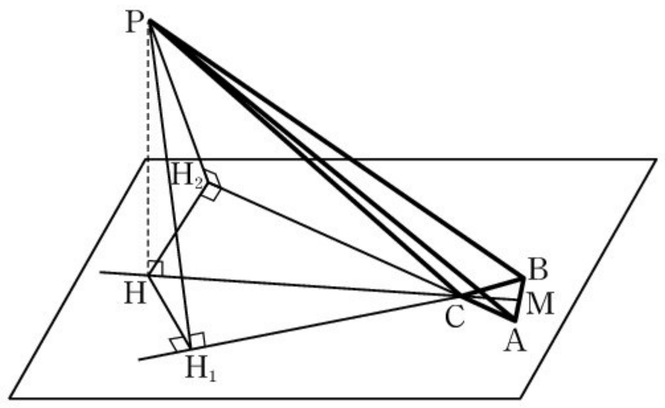
$5^2+5^2+(b-1)^2$

$=\{1^2+1^2+(b+7)^2\}+\{4^2+4^2+(-8)^2\}$

$-16b=96$ $\therefore\ b=-6$

그런데 $b>0$이므로 모순이다.

(ii) 점 H가 반직선 MC 위에 있을 때,



위의 그림에서 점 H는 선분 CM을 6 : 7로 외분하므로 점 H의 좌표는

$$\left(\frac{6\times\frac{1}{2}-7\times0}{6-7}, \frac{6\times\frac{1}{2}-7\times0}{6-7}, \frac{6\times0-7\times1}{6-7}\right)$$, 즉

$(-3, -3, 7)$

△PCH가 직각삼각형이므로 세 점 P$(5, 5, b)$, C$(0, 0, 1)$, H$(-3, -3, 7)$에 대하여

$\overline{PC}^2=\overline{PH}^2+\overline{CH}^2$

$5^2+5^2+(b-1)^2$

$=\{8^2+8^2+(b-7)^2\}+\{(-3)^2+(-3)^2+6^2\}$

$12b=180$ $\therefore\ b=15$

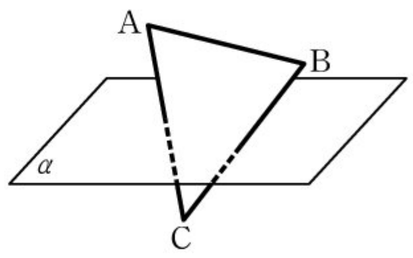
(i), (ii)에서 $b=15$이므로

$a+b=5+15=20$ 답 20

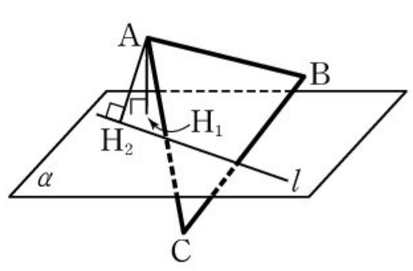
06 해결단계

❶ 단계	주어진 조건을 이용하여 세 점 A, B, C와 평면 α의 위치 관계를 파악한다.
❷ 단계	평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되도록 하는 평면의 조건을 파악하여 ㄱ의 참, 거짓을 판별한다.
❸ 단계	$d(\alpha)$가 최대가 되려면 평면 β가 평면 ABC 위의 어느 점을 지나야 하는지 파악하고 ㄴ의 참, 거짓을 판별한다.
❹ 단계	세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 세 점 A, B, C 중에서 평면 β와 가장 가까이 있는 점을 찾고 ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

평면 α는 선분 AC와 만나고 선분 BC와도 만나지만 선분 AB와는 만나지 않으므로 세 점 A, B, C와 평면 α의 위치 관계는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 평면 ABC와 평면 α의 교선을 l이라 하고, 점 A에서 평면 α와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



$\overline{AH_1}\le\overline{AH_2}$

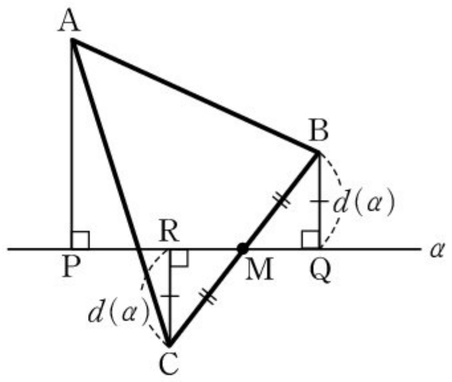
이때, 점 A와 평면 α 사이의 거리 $\overline{AH_1}$은 두 점 H_1, H_2가 일치할 때, 즉 평면 ABC와 평면 α가 수직일 때 최대이다.

같은 방법으로 두 점 B, C와 평면 α 사이의 거리 역시 평면 ABC와 평면 α가 수직일 때 최대이다.

평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면이 β이므로 $d(\alpha)$가 최대가 되도록 하는 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다. (참)

ㄴ. 선분 BC의 중점을 M, 세 점 A, B, C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하자.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC} \geq \overline{BC}$이고 평면 α가 점 M을 지날 때, $\overline{BQ}=\overline{CR}$이고 $\overline{AP} \geq \overline{BQ}$, $\overline{AP} \geq \overline{CR}$이므로 $d(\alpha)$, 즉 $\overline{BQ}=\overline{CR}$는 최대이다.



따라서 $\overline{AC} \geq \overline{BC}$일 때, $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면 β는 선분 BC의 중점을 지난다.

같은 방법으로 $\overline{AC} \leq \overline{BC}$일 때, $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면 β는 선분 AC의 중점을 지난다. (참)

ㄷ. 세 점 A(2, 3, 0), B(0, 1, 0), C(2, −1, 0)에 대하여

$\overline{AC}=3-(-1)=4$, $\overline{BC}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

이므로 $\overline{AC}>\overline{BC}$

ㄴ에 의하여 평면 α가 선분 BC의 중점을 지날 때 $d(\alpha)$는 최대이고, 이때의 $d(\alpha)$의 값은 점 B 또는 점 C와 평면 α 사이의 거리이다.

즉, 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면이 β이므로 $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

이것이 수능 p. 72

1 ⑤ 2 ② 3 ② 4 40

1 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B의 좌표를 이용하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 점이 y축 위에 있음을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

두 점 A(3, 1, a), B(b, 1, −2)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times b+1\times 3}{3+1}, \frac{3\times 1+1\times 1}{3+1}, \frac{3\times(-2)+1\times a}{3+1}\right)$

즉, 점 $\left(\frac{3b+3}{4}, 1, \frac{a-6}{4}\right)$이 y축 위에 있으므로

$\frac{3b+3}{4}=0$, $\frac{a-6}{4}=0$

$\therefore a=6$, $b=-1$

$\therefore a+b=6+(-1)=5$ 답 ⑤

2 해결단계

❶ 단계	두 점 A, B의 좌표를 이용하여 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표를 구한다.
❷ 단계	❶단계에서 구한 점이 x축 위에 있음을 이용하여 a, b의 값을 각각 구한 후, $a+b$의 값을 구한다.

두 점 A(5, a, −3), B(6, 4, b)에 대하여 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3\times 6-2\times 5}{3-2}, \frac{3\times 4-2\times a}{3-2}, \frac{3\times b-2\times(-3)}{3-2}\right)$

즉, 점 $(8, 12-2a, 3b+6)$이 x축 위에 있으므로

$12-2a=0$, $3b+6=0$

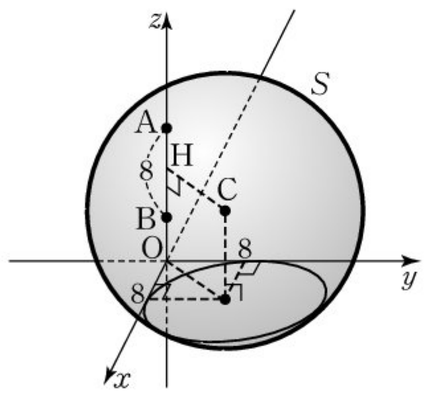
$\therefore a=6$, $b=-2$

$\therefore a+b=6+(-2)=4$ 답 ②

3 해결단계

❶ 단계	구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π임을 이용하여 구 S의 반지름의 길이와 중심의 x좌표, y좌표를 각각 구한다.
❷ 단계	구의 중심을 C라 하고, 점 C에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 피타고라스 정리와 원의 성질을 이용하여 두 선분 CH, AH의 길이를 각각 구한다.
❸ 단계	❷단계에서 구한 길이와 피타고라스 정리를 이용하여 구 S의 반지름의 길이를 구한다.

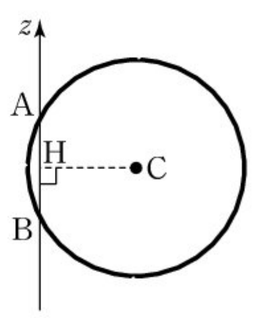
구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이므로 원의 반지름의 길이는 8이고, 구 S가 x축, y축에 각각 접하므로 구 S의 중심의 x좌표, y좌표는 각각 8이다.



구의 중심을 C라 하고, 점 C에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 구 S의 중심과 z축 사이의 거리는 xy평면에 생긴 원의 중심과 원점 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$

z축과 구가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 수직이등분하므로



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$

따라서 구 S의 반지름의 길이를 r라 하면 직각각형 CHA에서

$r=\overline{CA}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12$ 답 ②

• 다른풀이 •

구 S의 중심의 좌표를 (a, b, c) $(a>0, b>0, c>0)$라 하고, 구의 중심에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면

A(a, 0, 0), B(0, b, 0)

구 S가 x축, y축과 접하므로 구의 반지름의 길이에서

$\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$ $\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

즉, 구의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ ……㉠

이라 할 수 있다.

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은 ㉠에 $z=0$을 대입하면

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이 원의 넓이가 64π이므로 $a=8$

또한, ㉠에 $x=y=0$을 대입하면

$(z-c)^2=c^2-64$ $\therefore z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$2\sqrt{c^2-64}=8$, $c^2-64=16$ $\therefore c^2=80$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

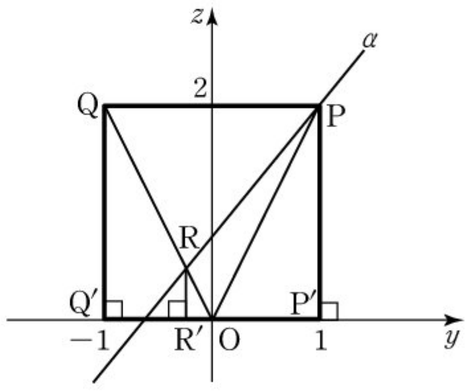
$\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{8^2+80}=12$

4 해결단계

❶ 단계	yz평면 위에 원뿔을 나타내고 도형 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길이와 같은 선분을 찾는다.
❷ 단계	평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 한 후, 삼각형의 닮음을 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구한다.
❸ 단계	❷**단계**에서 구한 값을 이용하여 k의 값을 구한 후, $50k$을 구한다.

원 C가 yz평면과 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하면 점 Q의 좌표는 $(0, -1, 2)$이고, 원뿔을 yz평면으로 자른 단면은 삼각형 OPQ이다.

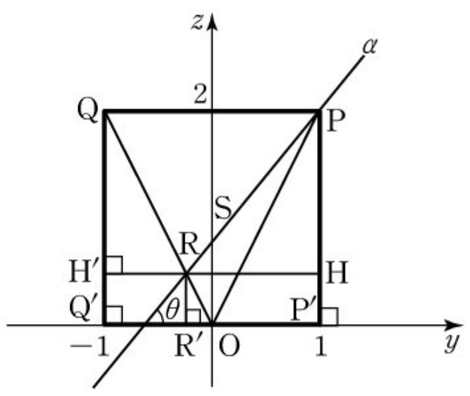
이때, 선분 QO와 평면 α가 만나는 점을 R, 세 점 P, Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 P′, Q′, R′이라 하고 이를 yz평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, 타원 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길이는 선분 P′R′의 길이와 같으므로

$\overline{P'R'}=\frac{5}{4}$

이때, 점 R에서 두 선분 PP′, QQ′에 내린 수선의 발을 각각 H, H′, 평면 α와 z축이 만나는 점을 S, 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 다음 그림과 같다.



$\overline{QH'}=\overline{PH}$

$=\overline{RH}\tan\theta$

$=\overline{P'R'}\tan\theta$

$=\frac{5}{4}\tan\theta$

또한,

$\overline{RH'}=\overline{P'Q'}-\overline{P'R'}$

$=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

이때, 두 삼각형 QQ′O, QH′R는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{QQ'}:\overline{OQ'}=\overline{QH'}:\overline{RH'}$에서

$2:1=\frac{5}{4}\tan\theta:\frac{3}{4}$

$\frac{5}{4}\tan\theta=\frac{3}{2}$ $\therefore \tan\theta=\frac{6}{5}$

점 S의 좌표는 $(0, 0, k)$이고, $\angle QPS=\theta$ ($\because$ 엇각)이므로

$\tan\theta=\frac{2-k}{1}$

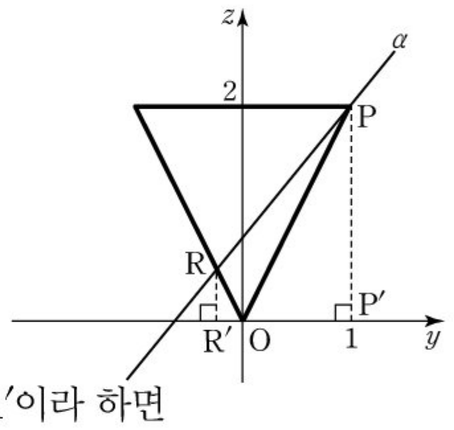
따라서 $\frac{6}{5}=2-k$에서 $k=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$이므로

$50k=50\times\frac{4}{5}=40$ 답 40

• 다른풀이 •

yz평면으로 원뿔을 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.

단면에서 평면 α가 원뿔의 모선과 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 R라 하고, 두 점 P, R에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P′, R′이라 하면



$\overline{P'R'}=\frac{5}{4}$

P′$(0, 1, 0)$이므로 점 R′의 y좌표는 $-\frac{1}{4}$이다.

이때, 원뿔의 모선의 방정식이 $z=\pm2y$이므로 $z=-2y$에 $y=-\frac{1}{4}$을 대입하면

$z=\frac{1}{2}$

즉, k는 두 점 P$(0, 1, 2)$, R$\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선의 z절편이다.

두 점 P, R를 지나는 직선의 방정식은

$z-2=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}(y-1)$

$\therefore z=\frac{6}{5}y+\frac{4}{5}$

따라서 $k=\frac{4}{5}$이므로

$50k=50\times\frac{4}{5}=40$

Tomorrow

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo

Tomorrow

better than today

memo

T o m o r r o w

better than today

memo

Tomorrow

better than today

memo