더 THE 개념 블랙라벨

정답과 해설

B L A C K L A B E L

I. 함수의 극한과 연속

유형 연습 01 함수의 극한

본문 pp.15~32

01-1 4	01-2 -6	01-3 3
02-1 6	02-2 4	02-3 $\frac{2}{15}$
03-1 1	03-2 5	04-1 6
04-2 8	04-3 ㄱ	05-1 $\frac{7}{2}$
05-2 $-\frac{3}{4}$	06-1 (1) $\frac{1}{12}$ (2) 4	06-2 11
07-1 -6	07-2 12	07-3 4
08-1 4	08-2 3	08-3 $\frac{1}{4}$
09-1 (1) 2 (2) $-\frac{1}{4}$		09-2 -2
09-3 9	10-1 $\frac{\pi}{4}$	10-2 13

01-1

$x \longrightarrow 0+$일 때 $f(x) \longrightarrow 2$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)=2$

$x \longrightarrow 2-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=1$

$x \longrightarrow 3+$일 때 $f(x) \longrightarrow 1$이므로

$\lim_{x\to3+} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to0+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(x)+\lim_{x\to3+} f(x)=2+1+1=4$

답 4

01-2

$f(x)=\dfrac{|x-2|(x+a)}{x-2}$에서

(i) $x>2$일 때,

$|x-2|=x-2$이므로

$f(x)=\dfrac{(x-2)(x+a)}{x-2}=x+a$

$\therefore \lim_{x\to2+} f(x)=2+a$

(ii) $x<2$일 때,

$|x-2|=-(x-2)$이므로

$f(x)=\dfrac{-(x-2)(x+a)}{x-2}=-(x+a)$

$\therefore \lim_{x\to2-} f(x)=-(2+a)$

(i), (ii)에서

$\lim_{x\to2-} f(x)-\lim_{x\to2+} f(x)=-(2+a)-(2+a)$

$=-4-2a$

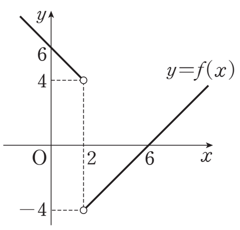
$-4-2a=8$에서 $2a=-12$

$\therefore a=-6$

답 -6

보충설명

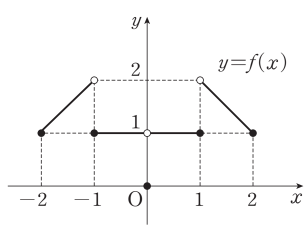
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



01-3

정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, $-2\le x\le2$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x \longrightarrow -1-$일 때 $f(x) \longrightarrow 2$이므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=2$

$x \longrightarrow 1-$일 때 $f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)=2+1=3$

답 3

02-1

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{|x-3|} & (x>3) \\ k & (x\le 3) \end{cases}$$ 에서

$x>3$일 때, $|x-3|=x-3$이므로

$$f(x)=\frac{x^2-9}{|x-3|}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x+3 & (x>3) \\ k & (x\le 3) \end{cases}$$

이때,

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(x+3)$$
$$=3+3=6$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-} k=k$$

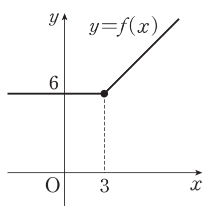
따라서 $x=3$에서의 극한값이 존재하려면

$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x)$이어야 하므로 $k=6$이다.

답 6

보충설명

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



02-2

$$f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1) \end{cases}$$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -x^2+ax+b & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 극한값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재해야 한다.

$\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)$

이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -1+}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to -1-} x(x-1)$이므로

$-1-a+b=2$

$\therefore\ b-a=3$ ……㉠

또한, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)$

이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1+} x(x-1)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+ax+b)$이므로

$0=-1+a+b$

$\therefore\ a+b=1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$\therefore\ b-2a=4$

답 4

02-3

함수 $f(x)=\begin{cases} 3|a-x|-1 & (x\ge 0) \\ a-|x-a| & (x<0) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to 0+} f(x)=3|a|-1,\ \lim_{x\to 0-} f(x)=a-|-a|$

이때, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)$

이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

$-3a-1=2a,\ 5a=-1$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{5}$

(ii) $a\ge 0$일 때,

$3a-1=a-a,\ 3a-1=0$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$$-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

답 $\dfrac{2}{15}$

03-1

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\longrightarrow 1-$일 때, $t\longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to 1-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=2$

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))$에서 $g(x)=s$로 놓으면

$x\longrightarrow 0+$일 때, $s\longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{s\to 1+} f(s)=-1$

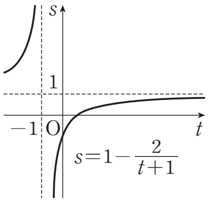
$\therefore\ \lim_{x\to 1-} g(f(x))+\lim_{x\to 0+} f(g(x))=2+(-1)=1$

답 1

03-2

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$에서 $\frac{t-1}{t+1}=s$로 놓으면

$s=1-\frac{2}{t+1}$

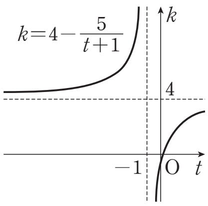


$t \longrightarrow \infty$일 때, $s \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to1-} f(s)=2$

$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $\frac{4t-1}{t+1}=k$로 놓으면

$k=4-\frac{5}{t+1}$



$t \longrightarrow -\infty$일 때,

$k \longrightarrow 4+$이므로

$\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{k\to4+} f(k)=3$

$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=2+3=5$

답 5

04-1

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)}{(2x-3)g(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{x+2}\times\frac{2x-3}{g(x)}\times\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2\right\}$$

이때, $x \longrightarrow 1$일 때 함수 $\frac{f(x)}{x+2}$, $\frac{2x-3}{g(x)}$, $\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2$이 각각 수렴하므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x+2}\times\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{g(x)}\times\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{-1}\right)^2=6$$

답 6

04-2

$\lim_{x\to1}(x+2)f(x)g(x)=12$이고 $\lim_{x\to1}(x+2)=3$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)f(x)g(x)}{x+2}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}(x+2)f(x)g(x)}{\lim_{x\to1}(x+2)}$$

$$=\frac{12}{3}=4$$

또한, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)h(x)}{5x-1}=3$이고 $\lim_{x\to1}(5x-1)=4$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)h(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)h(x)}{5x-1}\times(5x-1)\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)h(x)}{5x-1}\times\lim_{x\to1}(5x-1)$$

$$=3\times4=12$$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)\{h(x)-g(x)\}$

$=\lim_{x\to1}\{f(x)h(x)-f(x)g(x)\}$

$=\lim_{x\to1}f(x)h(x)-\lim_{x\to1}f(x)g(x)$

$=12-4=8$

답 8

04-3

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)-f(x)\}$

$=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a}f(x)$

$=\beta-\alpha$ (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $g(x)=x+1$이라 하면

$\lim_{x\to1}g(x)=2$로 존재하지만 $\lim_{x\to1}f(g(x))$에서 $g(x)=t$로 놓으면 $\lim_{x\to1}f(g(x))=\lim_{t\to2}f(t)=\lim_{t\to2}\frac{1}{t-2}$

이때, $\lim_{t\to2}\frac{1}{t-2}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases}-1 & (x>0)\\ 1 & (x\le0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x\le0)\end{cases}$

이라 하면 $f(x)g(x)=-1$, $\frac{f(x)}{g(x)}=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 모두 존재한다.

그런데 $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ㄱ

05-1

$2f(x)-5g(x)=h(x)$라 하면 $g(x)=\dfrac{2f(x)-h(x)}{5}$

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=7$이고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=0$ ……㉠

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3\times\dfrac{2f(x)-h(x)}{5}}{2\times\dfrac{2f(x)-h(x)}{5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{20f(x)-6f(x)+3h(x)}{5}}{\dfrac{4f(x)-2h(x)}{5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14f(x)+3h(x)}{4f(x)-2h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+3\times\dfrac{h(x)}{f(x)}}{4-2\times\dfrac{h(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{14+3\times0}{4-2\times0}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{7}{2}$$

답 $\dfrac{7}{2}$

다른풀이

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$는 $x\longrightarrow\infty$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\{2f(x)-5g(x)\}=7$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-5g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{2-\frac{5g(x)}{f(x)}\right\}=0$$

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{5}$이다.

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-3g(x)}{2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-3\times\dfrac{g(x)}{f(x)}}{2\times\dfrac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{4-3\times\dfrac{2}{5}}{2\times\dfrac{2}{5}}$$

$$=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

05-2

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2xf(x)g(x)-g(x)}{xf(x)-4g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2xf(x)\times\dfrac{g(x)}{x^2}-\dfrac{g(x)}{x^2}}{\dfrac{xf(x)}{x^2}-4\times\dfrac{g(x)}{x^2}}$$

$$=\frac{2-\dfrac{1}{2}}{0-4\times\dfrac{1}{2}}=-\frac{3}{4}$$

답 $-\dfrac{3}{4}$

06-1

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3\sqrt{2x-a}-\sqrt{x+8a}}{x^2-a^2}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(3\sqrt{2x-a}-\sqrt{x+8a})(3\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+8a})}{(x-a)(x+a)(3\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+8a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{9(2x-a)-(x+8a)}{(x-a)(x+a)(3\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+8a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{17(x-a)}{(x-a)(x+a)(3\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+8a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{17}{(x+a)(3\sqrt{2x-a}+\sqrt{x+8a})}=\frac{17}{12a\sqrt{a}}$$

즉, $\dfrac{17}{12a\sqrt{a}}=\dfrac{17}{\sqrt{a}}$이므로 $12a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{12}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(2\sqrt{x}-\sqrt{4x-2a})^2$

$$=\lim_{x\to\infty}x(8x-2a-4\sqrt{4x^2-2ax})$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x(4x-a-2\sqrt{4x^2-2ax})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[2x\times\frac{\{(4x-a)-2\sqrt{4x^2-2ax}\}\{(4x-a)+2\sqrt{4x^2-2ax}\}}{(4x-a)+2\sqrt{4x^2-2ax}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x(16x^2-8ax+a^2-16x^2+8ax)}{4x-a+2\sqrt{4x^2-2ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2x}{4x-a+2\sqrt{4x^2-2ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2}{4-\dfrac{a}{x}+2\sqrt{4-\dfrac{2a}{x}}}=\frac{2a^2}{8}$$

즉, $\frac{a^2}{4}=4$이므로 $a^2=16$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) 4

06-2

$x^3-ax^2+bx-ab=x^2(x-a)+b(x-a)$

$=(x-a)(x^2+b)$

즉, $\lim_{x\to a}\frac{x^2-x-2}{x^3-ax^2+bx-ab}=\lim_{x\to a}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-a)(x^2+b)}=\frac{1}{2}$

에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $(a+1)(a-2)=0$이므로 $a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+b)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+b}=\frac{-3}{1+b}=\frac{1}{2}$$

$1+b=-6$에서 $b=-7$

$\therefore\ ab=7$

(ii) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+b)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+b}=\frac{3}{4+b}=\frac{1}{2}$$

$4+b=6$에서 $b=2$

$\therefore\ ab=4$

(i), (ii)에서 ab의 값으로 가능한 것은 7 또는 4이므로 구하는 합은 11이다.

답 11

07-1

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$에서 함수 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이다.

또한, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow 0$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

$f(x)=x(ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(ax+b)}{x}=\lim_{x\to 0}(ax+b)=b=4$

$\therefore\ f(x)=x(ax+4)$

이때, 방정식 $f(x)=2x$의 한 근이 1이므로

$f(1)=2$에서 $a+4=2$

$\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=x(-2x+4)=-2x^2+4x$이므로

$f(3)=-18+12=-6$

답 -6

07-2

$\lim_{x\to -1}f(x)g(x)+\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}-\lim_{x\to 2}|f(x)-k|$의 값이 존재하려면 각각의 극한값이 존재해야 한다.

$\lim_{x\to -1}f(x)g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)\times\lim_{x\to -1+}g(x)=-g(-1)$,

$\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)\times\lim_{x\to -1-}g(x)=0$에서

$g(-1)=0$이다.

또한, $\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재하고 $x\longrightarrow 0+$일 때

$f(x)\longrightarrow 0+$이므로 $g(x)\longrightarrow 0$이다.

$\therefore\ g(0)=0$

이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x(x+1)$이다.

한편, $\lim_{x\to 2}|f(x)-k|$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2+}|f(x)-k|=|1-k|$, $\lim_{x\to 2-}|f(x)-k|=|2-k|$에서

$|1-k|=|2-k|$

$1-k\neq 2-k$이므로 $1-k=-(2-k)$

$1-k=-2+k\qquad\therefore\ k=\frac{3}{2}$

따라서 $g(2k)=g(3)=3\times 4=12$이다.

답 12

07-3

$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$이면 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1$이므로 조건에 모순된다.

따라서 $\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(a)=0$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

이때, $f(a)=0$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 a이다.

$a=\alpha$라 하면

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to \alpha} \frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$

$$=\lim_{x\to \alpha} \frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)-1}{(\alpha-\beta)+1}=\frac{3}{5}$$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$이므로

$2(\alpha-\beta)=8$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 4

08-1

$|f(x)|<3$에서 $-3<f(x)<3$이다.

부등식의 각 변에 $4x^2$을 더하고 각 변을 x^2+5로 나누면

$$\frac{4x^2-3}{x^2+5}<\frac{f(x)+4x^2}{x^2+5}<\frac{4x^2+3}{x^2+5}\ (\because\ x^2+5>0)$$

이때, $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-3}{x^2+5}=4,\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3}{x^2+5}=4$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+4x^2}{x^2+5}=4$$

답 4

다른풀이

$|f(x)|<3$에서 $-3<f(x)<3$이다.

이때, $\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{x^2}\right)=0,\ \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^2}=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}=0$이다.

주어진 식에서 분자와 분모를 각각 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+4x^2}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x^2}+4}{1+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\frac{4}{1}=4$$

08-2

이차함수 $y=3x^2-4x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y=3x^2-4x+2+a$이므로

$g(x)=3x^2-4x+2+a$

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프 사이에 $y=h(x)$의 그래프가 존재하므로

$3x^2-4x+2<h(x)<3x^2-4x+2+a\ (\because\ a>0)$

위의 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{3x^2-4x+2}{x^2}<\frac{h(x)}{x^2}<\frac{3x^2-4x+2+a}{x^2}\ (\because\ x^2>0)$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x+2}{x^2}\leq \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x^2}\leq \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x+2+a}{x^2}$$

$-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x+2}{x^2}=\lim_{t\to\infty} \frac{3t^2+4t+2}{t^2}=3,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-4x+2+a}{x^2}=\lim_{t\to\infty} \frac{3t^2+4t+2+a}{t^2}=3$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x^2}=3$$

답 3

08-3

$\sqrt{4x^2+x}<f(x)<2x+k$에서

$\sqrt{4x^2+x}-2x<f(x)-2x<k$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+x}-2x)\leq \lim_{x\to\infty} \{f(x)-2x\}\leq \lim_{x\to\infty} k$$

이때,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}$$

이고, $\lim_{x\to\infty}k=k$이므로

$$\frac{1}{4}\le\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}\le k$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-2x\}$의 값이 존재하도록 하는 실수 k의 값은 $\frac{1}{4}$이다.

답 $\frac{1}{4}$

09-1

(1) $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x+1}{3}-\alpha$ $(0\le\alpha<1)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-1}\left[\frac{x+1}{3}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-1}\left(\frac{x+1}{3}-\alpha\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{x-1}-\frac{6\alpha}{x-1}\right)$$

$$=2$$

(2) $[x]=x-\alpha$ $(0\le\alpha<1)$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-[x]+1}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x+\alpha+1}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-x+\alpha+1}-2x)(\sqrt{4x^2-x+\alpha+1}+2x)}{\sqrt{4x^2-x+\alpha+1}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+\alpha+1}{\sqrt{4x^2-x+\alpha+1}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{\alpha}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{\alpha+1}{x^2}}+2}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{4}$

09-2

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}(a[x-1]^3+2b[x]-3)=2b-3$,

$\lim_{x\to1-}(a[x-1]^3+2b[x]-3)=-a-3$이므로

$2b-3=-a-3$

$a=-2b$

$\therefore\ \frac{a}{b}=-2$

답 -2

보충설명

정수 n에 대하여 $n-1\le x<n$일 때,

$[x]=n-1$, $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$이므로

$\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

즉, $\lim_{x\to1+}[x-1]^3=0$, $\lim_{x\to1+}[x]=1$, $\lim_{x\to1-}[x-1]^3=-1$,

$\lim_{x\to1-}[x]=0$이다.

09-3

$n\le x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$$\lim_{x\to n+}\frac{[x]^2+2x}{[x]}=\frac{n^2+2n}{n}=n+2$$

$n-1\le x<n$일 때, $[x]=n-1$이므로

$$\lim_{x\to n-}\frac{[x]^2+2x}{[x]}=\frac{(n-1)^2+2n}{n-1}=\frac{n^2+1}{n-1}$$

이때, $\lim_{x\to n}\frac{[x]^2+2x}{[x]}$의 값이 존재하려면

$n+2=\frac{n^2+1}{n-1}$, $(n+2)(n-1)=n^2+1$

$n^2+n-2=n^2+1$

$\therefore\ n=3$

$$\therefore\ \lim_{x\to n}\frac{x^2+nx-2n^2}{x-n}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x-18}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+6)(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x+6)$$

$$=9$$

답 9

10-1

점 $P(t, \sqrt{2t})$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이 H이므로 $\triangle$OPH는 빗변의 길이가 $\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$인 직각삼각형이다.

이때, 이 직각삼각형의 빗변은 외접원의 지름과 일치하므로 삼각형 OPH의 외접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$2r=\overline{OP}=\sqrt{t^2+2t}$

즉, $r=\dfrac{\sqrt{t^2+2t}}{2}$이므로 삼각형 OPH의 외접원의 넓이는

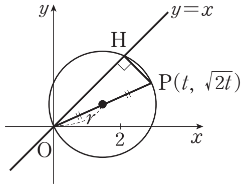
$$f(t)=\pi\times\left(\frac{\sqrt{t^2+2t}}{2}\right)^2=\frac{t^2+2t}{4}\pi$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{t^2+2t}{4}\pi}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t}{4t^2}\pi=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

보충설명

삼각형 OPH와 그 외접원은 다음 그림과 같다.



10-2

$\overline{AP}=\overline{BQ}=t\ (t>0)$라 하면 $P(3-t,\ 0)$, $Q(0,\ 2+t)$이므로

직선 PQ의 방정식은 $y=-\dfrac{2+t}{3-t}x+(2+t)$ ……㉠

직선 AB의 방정식은 $y=-\dfrac{2}{3}x+2$ ……㉡

직선 PQ와 AB의 교점 R의 좌표는 연립방정식

$\begin{cases} ㉠ \\ ㉡ \end{cases}$의 해와 같으므로

$$-\frac{2+t}{3-t}x+(2+t)=-\frac{2}{3}x+2,\ \left(\frac{2+t}{3-t}-\frac{2}{3}\right)x=t$$

$$\frac{3(2+t)-2(3-t)}{3(3-t)}x=t,\ \frac{5t}{3(3-t)}x=t$$

$$\therefore\ x=\frac{3(3-t)}{5}\quad\text{……㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$y=-\frac{2}{3}\times\frac{3(3-t)}{5}+2=\frac{2(t-3)}{5}+2=\frac{2t+4}{5}$$

$$\therefore\ R\left(\frac{9-3t}{5},\ \frac{2t+4}{5}\right)$$

이때, 점 P, Q는 각각 점 A, B에 한없이 가까워지므로 $t\longrightarrow 0+$일 때 교점 R가 한없이 가까워지는 점의 x좌표와 y좌표는 각각

$$\lim_{t\to 0+}\frac{9-3t}{5}=\frac{9}{5},\ \lim_{t\to 0+}\frac{2t+4}{5}=\frac{4}{5}$$

따라서 $a=\dfrac{9}{5}$, $b=\dfrac{4}{5}$이므로

$5(a+b)=13$

답 13

다른풀이

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(p,\ 0)$, $(q,\ 0)$이라 하면

$\overline{PA}=3-p$, $\overline{QB}=q-2$

이때, $\overline{PA}=\overline{QB}$이므로 $3-p=q-2$

$\therefore\ q=5-p$ ……㉠

직선 AB의 방정식을 l_1, 직선 PQ의 방정식을 l_2라 하면

$l_1 : y=-\dfrac{2}{3}x+2$

$l_2 : y=-\dfrac{q}{p}x+q$

l_1, l_2의 교점이 점 R이므로

$$-\frac{2}{3}x+2=-\frac{q}{p}x+q,\ \left(\frac{q}{p}-\frac{2}{3}\right)x=q-2$$

$$\frac{3q-2p}{3p}x=q-2\qquad\therefore\ x=\left(\frac{3p}{3q-2p}\right)(q-2)$$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$x=\frac{3p}{3(5-p)-2p}\times(5-p-2)$$

$$=\frac{3p(3-p)}{15-5p}=\frac{3p(3-p)}{5(3-p)}=\frac{3p}{5}\ (\because\ p<3)$$

이때, 점 P는 점 A에 한없이 가까워지므로 $p\longrightarrow 3$

따라서 $p\longrightarrow 3$일 때 $x\longrightarrow\dfrac{9}{5}$

한편, 점 $R(a,\ b)$는 직선 l_1 위의 점이므로

$p\longrightarrow 3$일 때 $y\longrightarrow\dfrac{4}{5}$

$$\therefore\ 5(a+b)=5\times\frac{13}{5}=13$$

개념마무리

본문 pp.34~37

01 -1	**02** 2	**03** 1	**04** 7
05 ④	**06** ①	**07** 12	**08** 0
09 ①	**10** ②	**11** 6	**12** -7
13 16	**14** 48	**15** 52	**16** ④
17 $\frac{6}{7}$	**18** 6	**19** 8	**20** $\frac{1}{3}$
21 0	**22** 10	**23** 27	**24** 5

01

주어진 그래프에서 $\lim\limits_{x\to2+} f(x)=-1$이고

$\lim\limits_{x\to2+} f(x)\times\lim\limits_{x\to a-}|g(x)|=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to a-}|g(x)|=1$

(i) $\lim\limits_{x\to a-} g(x)=-1$일 때,

$a=-1$

(ii) $\lim\limits_{x\to a-} g(x)=1$일 때,

$a=0$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은 -1이다.

답 -1

02

$\lim\limits_{x\to1-} f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x\longrightarrow1-$일 때, $t\longrightarrow2-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to2-} f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to1+} f(-x)$에서 $-x=s$로 놓으면

$x\longrightarrow1+$일 때, $s\longrightarrow-1-$이므로

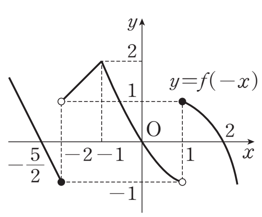
$\lim\limits_{x\to1+} f(-x)=\lim\limits_{s\to-1-} f(s)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1-} f(f(x))+\lim\limits_{x\to1+} f(-x)=1+1=2$

답 2

보충설명

함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\lim\limits_{x\to1+} f(-x)=1$이다.

03

$\lim\limits_{x\to0}\{g(x)\}^2$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2$이다.

$\lim\limits_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0+}\{f(x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2$

$\lim\limits_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim\limits_{x\to0-}\{f(x+1)\}^2=\{f(1)\}^2$

즉, $\{f(-1)\}^2=\{f(1)\}^2$에서 $(-a)^2=(2-a)^2$

$a^2=a^2-4a+4,\ 4a=4$

$\therefore\ a=1$

답 1

04

$\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1+}([x]^3+a[x]^2+b[x])=1+a+b$, ← $1<x<2$에서 $[x]=1$

$\lim\limits_{x\to1-}([x]^3+a[x]^2+b[x])=0$ ← $0<x<1$에서 $[x]=0$

이므로 $1+a+b=0$

$\therefore\ a+b=-1$ ……㉠

또한, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-2+}([x]^3+a[x]^2+b[x])=-8+4a-2b$, ← $-2<x<-1$에서 $[x]=-2$

$\lim\limits_{x\to-2-}([x]^3+a[x]^2+b[x])=-27+9a-3b$ ← $-3<x<-2$에서 $[x]=-3$

이므로

$-8+4a-2b=-27+9a-3b$

$19-5a+b=0$

$\therefore\ 5a-b=19$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4$

$\therefore\ a-b=3-(-4)=7$

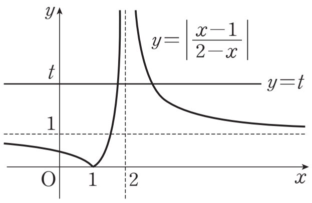
답 7

05

$y=\dfrac{x-1}{2-x}=\dfrac{-x+1}{x-2}=\dfrac{-(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-1$

이므로 함수 $y=\dfrac{x-1}{2-x}$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때, 함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프는 유리함수 $y=\dfrac{x-1}{2-x}$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(i) $t<0$일 때,

함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 0이므로 $f(t)=0$

(ii) $t=0$일 때,

함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로 $f(t)=1$

(iii) $0<t<1$일 때,

함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(iv) $t=1$일 때,

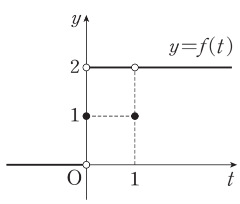
함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이므로 $f(t)=1$

(v) $t>1$일 때,

함수 $y=\left|\dfrac{x-1}{2-x}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(i)~(v)에서

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t=0) \\ 2 & (0<t<1) \\ 1 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$



따라서 $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=2$, $\lim\limits_{t\to 1+}f(t)=2$, $f(1)=1$이므로

$\lim\limits_{t\to 0+}f(t)+\lim\limits_{t\to 1+}f(t)+f(1)=5$

답 ④

06

$f(x)=\dfrac{|x-2|}{[x]+2}$에서

ㄱ. (i) $x \longrightarrow 2+$일 때,

$[x]=2$, $x-2>0$이므로 $f(x)=\dfrac{x-2}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{4}=0$

(ii) $x \longrightarrow 2-$일 때,

$[x]=1$, $x-2<0$이므로 $f(x)=\dfrac{-x+2}{3}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{-x+2}{3}=0$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$이므로 $x=2$에서 $f(x)$의 극한값이 존재한다. (참)

ㄴ. (i) $x \longrightarrow 3+$일 때,

$[x]=3$, $x-2>0$이므로 $f(x)=\dfrac{x-2}{5}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{1}{5}$

(ii) $x \longrightarrow 3-$일 때,

$[x]=2$, $x-2>0$이므로 $f(x)=\dfrac{x-2}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 3+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $[x]=x-\alpha$ $(0\leq\alpha<1)$로 놓으면

$f(x)=\dfrac{|x-2|}{[x]+2}=\dfrac{|x-2|}{x-\alpha+2}$

$x \longrightarrow -\infty$일 때 $x-2<0$이므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x+2}{x-\alpha+2}$

이때, $-x=t$로 놓으면 $x \longrightarrow -\infty$일 때 $t \longrightarrow \infty$이므로

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x+2}{x-\alpha+2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t+2}{-t-\alpha+2}=-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

07

$\lim_{x\to0} g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow -2+$이므로

$\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{t\to-2+} g(t)=g(-2)$

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=g(2)$

이때, $\lim_{x\to0} g(f(x))$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{x\to0-} g(f(x))$이다.

즉, $g(-2)=g(2)$ ……㉠

또한, $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)$이다.

$\underline{\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\times\lim_{x\to1+} g(x)}=-g(1)$

$\lim_{x\to1+} f(x)$, $\lim_{x\to1+} g(x)$의 값이 각각 존재하므로 성립한다.

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\times\lim_{x\to1-} g(x)=0$

$\therefore\ g(1)=0$

함수 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

이때, $g(0)=0$이므로 $b=0$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2+ax)$

㉠에서 $g(-2)=g(2)$이므로

$(-3)\times(4-2a)=4+2a$

$-12+6a=4+2a$, $4a=16$

$\therefore\ a=4$

따라서 $g(x)=(x-1)(x^2+4x)$이므로

$g(2)=12$

답 12

08

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to1} g(x)=g(1)$이므로

$f(1)=\alpha$, $g(1)=\beta$ (α, β는 상수)라 하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)$

$=\alpha+\beta=4$ ……㉠

$\lim_{x\to1}\{(x-2)f(x)+3xg(x)\}$

$=\lim_{x\to1}(x-2)f(x)+\lim_{x\to1} 3xg(x)$

$=\lim_{x\to1}(x-2)\times\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} 3x\times\lim_{x\to1} g(x)$

$=-\alpha+3\beta=12$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=0$, $\beta=4$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)=0$, $\lim_{x\to1} g(x)=4$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1} f(x)\times\lim_{x\to1} g(x)=0$

답 0

보충설명

함수 $f(x)$가 다항함수일 때, 임의의 실수 a에 대하여 $x \longrightarrow a$일 때의 $f(x)$의 극한값은 $x=a$에서의 함숫값과 같다.
즉, 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.

09

ㄱ. $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$$
$$=\alpha\beta$$

즉, $\lim_{x\to a} g(x)$의 값이 존재한다. (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge a)\\ -1 & (x<a)\end{cases}$라 하면

$\lim_{x\to a+}\{f(x)\}^2=1^2=1$, $\lim_{x\to a-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$에서

$\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=1$

그런데 $\lim_{x\to a+} f(x)=1$, $\lim_{x\to a-} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to a} f(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=\frac{1}{x-a}$이라 하면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}(x-a)^2=0$이고

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(x-a)=0$이지만

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

10

$\lim_{x \to a} \frac{2x^2-9x-5}{3x^2-12x-15}$에서 분모와 분자를 각각 인수분해하면

$$\lim_{x \to a} \frac{2x^2-9x-5}{3x^2-12x-15}=\lim_{x \to a} \frac{(2x+1)(x-5)}{3(x+1)(x-5)}$$

$$=\lim_{x \to a} \frac{2x+1}{3(x+1)} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, ㉠의 값이 존재하지 않으려면 $\frac{k}{0}$(k는 실수) 꼴이어야 하므로 $x \longrightarrow a$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to a} 3(x+1)=0$에서 $3(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1$

답 ②

보충설명

(분모) $\longrightarrow$ 0일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0인 함수의 극한값은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

예를 들어, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x(x+1)}$는 (분모) $\longrightarrow$ 0일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이고 극한값 1이 존재하지만 $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2}$는 (분모) $\longrightarrow$ 0일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이지만 극한값이 존재하지 않는다.

11

이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=-3$

이때, $\alpha-\beta>0$이므로

$$\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

$$=\sqrt{36+12}=\sqrt{48}=4\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore\ \lim_{x \to \infty} \sqrt{3x}(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta})$$

$$=\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x}(\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x+\beta})(\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta})}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}$$

$$=\lim_{x \to \infty} \frac{(\alpha-\beta)\sqrt{3x}}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt{x+\beta}}$$

$$=\lim_{x \to \infty} \frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta}{x}}}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2}=6$$

답 6

12

$\lim_{x \to b} \frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{x^3-b^3}=4$에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow b$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to b}(\sqrt[3]{x+a}-1)=0$에서 $\sqrt[3]{b+a}-1=0$

$\therefore\ \sqrt[3]{a+b}=1$

이때, $a,\ b$는 모두 실수이므로 $a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$$\lim_{x \to b} \frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{x^3-b^3}$$

$$=\lim_{x \to b} \frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{(x-b)(x^2+bx+b^2)}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\lim_{x \to b} \frac{\sqrt[3]{x+a}-1}{x-b}$$

$(A^{\frac{1}{3}}-1)(A^{\frac{2}{3}}+A^{\frac{1}{3}}+1)=A-1$

$$=\frac{1}{3b^2}\lim_{x \to b} \frac{(\sqrt[3]{x+a}-1)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}{(x-b)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\lim_{x \to b} \frac{x+a-1}{(x-b)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\lim_{x \to b} \frac{x-b}{(x-b)(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1)}$$

($\because$ ㉠에서 $a-1=-b$)

$$=\frac{1}{3b^2}\lim_{x \to b} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x+a}+1}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)^2}+\sqrt[3]{a+b}+1}$$

$$=\frac{1}{3b^2}\times\frac{1}{3}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{1}{9b^2}=4$$

즉, $b^2=\frac{1}{36}$이므로 $b=\pm\frac{1}{6}$

(ⅰ) $b=-\frac{1}{6}$일 때, ㉠에서 $a=\frac{7}{6}$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{7}{6}}{-\frac{1}{6}}=-7$$

(ⅱ) $b=\frac{1}{6}$일 때, ㉠에서 $a=\frac{5}{6}$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=5$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{a}{b}$의 최솟값은 -7이다.

답 -7

13

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(t, \sqrt{6t+8})$, $(t, \sqrt{3t-1})$이므로

$A(t)=\sqrt{t^2+6t+8}$, $B(t)=\sqrt{t^2+3t-1}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{24}{A(t)-B(t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24}{\sqrt{t^2+6t+8}-\sqrt{t^2+3t-1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}{(\sqrt{t^2+6t+8}-\sqrt{t^2+3t-1})(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}{(t^2+6t+8)-(t^2+3t-1)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24(\sqrt{t^2+6t+8}+\sqrt{t^2+3t-1})}{3t+9}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{24\left(\sqrt{1+\frac{6}{t}+\frac{8}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}}\right)}{3+\frac{9}{t}}$$
$$=\frac{24\times(1+1)}{3}=16$$

답 16

14

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{x^2-x-6}=2$에서 $f(x+1)$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x)$도 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

한편, $\lim_{x\to-2}\frac{f(x-1)}{x^2-x-6}=4$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to-2}f(x-1)=0$에서 $f(-3)=0$

이때, $f(x)$는 $x+3$을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$f(x)=2(x+3)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x-1)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(x-1-a)}{(x+2)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x-1-a)}{x-3}$$
$$=\frac{2(-3-a)}{-5}=\frac{2a+6}{5}$$

$\frac{2a+6}{5}=4$에서 $2a+6=20$

$\therefore\ a=7$

따라서 $f(x)=2(x+3)(x-7)$이므로

$f(-5)=2\times(-2)\times(-12)=48$

답 48

15

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-6x}{x^2-9}$의 값이 존재하므로

(분모) $\longrightarrow$ 0일 때 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

이때, $\lim_{x\to-3}(x^2-9)=0$, $\lim_{x\to3}(x^2-9)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}\{f(x)-6x\}=0$, $\lim_{x\to3}\{f(x)-6x\}=0$이다.

$f(x)$가 다항함수이고, $f(x)-6x$는 $x+3$, $x-3$을 인수로 가지므로

$f(x)-6x=(x-3)(x+3)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)

라 하면 (가)

$$\lim_{x\to\infty}(2x-5-\sqrt{f(x)})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-5-\sqrt{f(x)})(2x-5+\sqrt{f(x)})}{2x-5+\sqrt{f(x)}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-20x+25-f(x)}{2x-5+\sqrt{f(x)}}$$

이고, 위의 값이 존재하기 위해서는 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이어야 한다.

따라서 $f(x)-6x=4(x-3)(x+3)$이므로

$f(x)=4(x-3)(x+3)+6x$ (나)

$\therefore\ f(4)=28+24=52$ (다)

답 52

단계	채점 기준	배점
(가)	$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 이용하여 $f(x)$의 꼴을 구한 경우	40%
(나)	$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한 경우	40%
(다)	$f(4)$의 값을 구한 경우	20%

16

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$\lim_{x\to0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a$이므로

$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$

이때, $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow0+$일 때 $t\longrightarrow\infty$이고,

$x\longrightarrow0-$일 때 $t\longrightarrow-\infty$이므로

$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+ct+d)-(t^2-ct+d)}{t}=2c$,

$\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{-t}$

$=\lim_{t\to-\infty}\frac{(t^2+ct+d)-(t^2-ct+d)}{-t}=-2c$

즉, $2c=-2c$이므로 $c=0$

또한, $\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0+}f(t)=f(0)=3$이므로 $d=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로

$f(2)=2^2+3=7$

답 ④

17

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}$의 값은 다음과 같이 x의 값의 범위를 나누어 구할 수 있다.

(i) $x<-5$ 또는 $x>2$일 때,

$x^2+3x-10>0$이므로

$x^2+2x-8\le f(x)\le 2x^2-2x-4$에서

$\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}\le\frac{f(x)}{x^2+3x-10}\le\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}$

이때,

$\lim_{x\to2+}\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2+}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{x+4}{x+5}=\frac{6}{7}$,

$\lim_{x\to2+}\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2+}\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x+1)}{x+5}=\frac{6}{7}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$

(ii) $-5<x<2$일 때,

$x^2+3x-10<0$이므로

$x^2+2x-8\le f(x)\le 2x^2-2x-4$에서

$\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}\le\frac{f(x)}{x^2+3x-10}\le\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}$

이때,

$\lim_{x\to2-}\frac{2x^2-2x-4}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2-}\frac{2(x+1)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{2(x+1)}{x+5}=\frac{6}{7}$,

$\lim_{x\to2-}\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2-}\frac{(x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{x+4}{x+5}=\frac{6}{7}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x^2+3x-10}=\frac{6}{7}$

답 $\frac{6}{7}$

18

조건 (가)에서 $x>1$이면 함수 $f(x)$가 부등식

$2a\left(1-\frac{1}{x}\right)<f(x)<a(x^2-1)$, 즉

$2a\times\frac{x-1}{x}<f(x)<a(x^2-1)$을 만족시키므로 부등식의 각 변을 x^2-1로 나누면

$\frac{2a}{x(x+1)}<\frac{f(x)}{x^2-1}<a$ ($\because$ $x^2-1>0$)

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to1+}\frac{2a}{x(x+1)}\le\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}\le\lim_{x\to1+}a$

이때, $\lim_{x\to1+}\frac{2a}{x(x+1)}=a$이고 조건 (나)에 의하여

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=2$이므로 $a=2$

한편, $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)}{x^2-1}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1+$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-k)$ (k는 상수) ……㉠

라 할 수 있다.

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-k)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x-k}{x+1}=\frac{1-k}{2}=2$$

$\therefore k=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $f(x)=(x-1)(x+3)$이므로

$f(3)=2\times6=12$

$\therefore \dfrac{f(3)}{a}=\dfrac{12}{2}=6$

답 6

19

조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

$\therefore f(0)=0$

조건 (나)에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

$\therefore f(1)=0$ ……㉠

이때, $f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)=x(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식) ……㉡

라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)g(x)$$
$$=-g(0)=4$$

$\therefore g(0)=-4$ ……㉢

㉡을 조건 (나)에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)g(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}xg(x)$$
$$=g(1)=4$$

한편, ㉡에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)\{f(x)-1\}g(f(x))$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{(f\circ f)(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{f(x)-1\}g(f(x))}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}}_{\text{조건 (나)}}\times\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-1\}g(f(x))}{x+1}$$
$$=4\times\frac{\{f(1)-1\}g(f(1))}{2}$$
$$=2\times(-1)\times g(0)\ (\because ㉠)$$
$$=(-2)\times(-4)\ (\because ㉢)$$
$$=8$$

답 8

20

$[9x^2+2x]$는 $9x^2+2x$보다 크지 않은 최대의 정수이므로

$9x^2+2x-1<[9x^2+2x]\le 9x^2+2x$

$x>1$일 때,

$\sqrt{9x^2+2x-1}<\sqrt{[9x^2+2x]}\le\sqrt{9x^2+2x}$

$\therefore \sqrt{9x^2+2x-1}-3x<\sqrt{[9x^2+2x]}-3x\le\sqrt{9x^2+2x}-3x$

이때,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-1}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-1}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x}-3x)(\sqrt{9x^2+2x}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}=\frac{1}{3}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{[9x^2+2x]}-3x)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

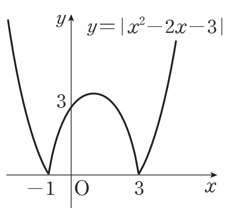
다른풀이

$|9x^2+2x|=9x^2+2x-\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

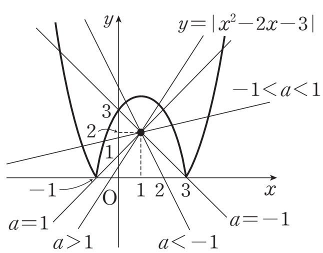
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{[9x^2+2x]}-3x)&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x-\alpha}-3x)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-\alpha}{\sqrt{9x^2+2x-\alpha}+3x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+3}\\&=\frac{2}{6}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

21

곡선 $y=|x^2-2x-3|$은 곡선 $y=x^2-2x-3$에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

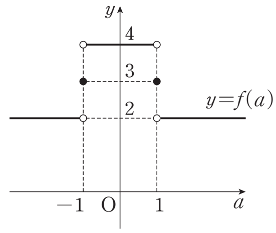


점 P(1, 2)를 지나고 기울기가 a인 직선과 곡선 $y=|x^2-2x-3|$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



$$\therefore\ f(a)=\begin{cases}2\ (a<-1\ 또는\ a>1)\\3\ (a=-1\ 또는\ a=1)\\4\ (-1<a<1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $\left|\lim_{a\to t-}f(a)-\lim_{a\to t+}f(a)\right|=2$이므로

$\lim_{a\to t-}f(a)=2$, $\lim_{a\to t+}f(a)=4$ 또는

$\lim_{a\to t-}f(a)=4$, $\lim_{a\to t+}f(a)=2$이다.

(i) $\lim_{a\to t-}f(a)=2$, $\lim_{a\to t+}f(a)=4$일 때, $t=-1$

(ii) $\lim_{a\to t-}f(a)=4$, $\lim_{a\to t+}f(a)=2$일 때, $t=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 t의 값의 합은

$-1+1=0$

답 0

보충설명

$a=1$일 때 직선의 방정식은 $y=x+1$이고, 이 직선은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로 $f(1)=3$이다.
같은 방법으로 $a=-1$일 때 직선의 방정식은 $y=-x+3$이고, 이 직선은 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 $f(-1)=3$이다.

22

(i) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+x^2}{x^2+2}=5$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$이려면

$f(x)=2x^3+4x^2+ax$ (a는 상수) 꼴이어야 한다.

이때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+4x+a)=a$이므로 $a=3$

즉, $f(x)=2x^3+4x^2+3x$이므로

$f(1)=2+4+3=9$

(ii) $n=2$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+x^2}{x^3+2}=5$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=3$이려면

$f(x)=7x^3+bx^2$ (b는 상수) 꼴이어야 한다.

이때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}(7x+b)=b$이므로 $b=3$

즉, $f(x)=7x^3+3x^2$이므로

$f(1)=7+3=10$

(iii) $n\geq 3$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+x^2}{x^{n+1}+2}=5$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=3$이려면

$f(x)=5x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수) 꼴이어야 한다.

이때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}(5x+c)=c$이므로 $c=3$

즉, $f(x)=5x^{n+1}+3x^n$이므로 $f(1)=5+3=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $f(1)$의 최댓값은 10이다.

답 10

보충설명

미정계수를 이용하여 다항함수를 직접 구할 수도 있다.

(ii)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+x^2}{x^3+2}=5$이려면 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 7인 삼차함수이어야 하므로

$f(x)=7x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수)라 하자.

이때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(7x+p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}\right)$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3$이려면 $p=3$, $q=0$, $r=0$이어야 한다.

$\therefore f(x)=7x^3+3x^2$

같은 방법으로 $n=1$일 때와 $n\geq 3$일 때도 구할 수 있다.

23

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=5$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(0,\ t)$를 지나므로 $bt=5$

$\therefore b=\frac{5}{t}$

또한, 점 P는 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$a^2+\left(\frac{5}{t}\right)^2=5$에서 $a^2=5-\frac{25}{t^2}$

$\therefore a=\sqrt{5-\frac{25}{t^2}}$ ($\because a>0$)

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{5-\frac{25}{t^2}},\ \frac{5}{t}\right)$이다.

점 Q는 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 점 Q의 좌표는 $\left(-\sqrt{5-\frac{25}{t^2}},\ \frac{5}{t}\right)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5-\frac{25}{t^2}}\times\frac{5}{t}$$
$$=\sqrt{\frac{5t^2-25}{t^2}}\times\frac{5}{t}$$
$$=\frac{5\sqrt{5t^2-25}}{t^2}$$

$$\therefore \lim_{t\to 5}\frac{t^2S(t)-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5\sqrt{5t^2-25}-50}{t-5}$$
$$=5\lim_{t\to 5}\frac{\sqrt{5t^2-25}-10}{t-5}$$
$$=5\lim_{t\to 5}\frac{(\sqrt{5t^2-25}-10)(\sqrt{5t^2-25}+10)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=5\lim_{t\to 5}\frac{5t^2-125}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=5\lim_{t\to 5}\frac{5(t+5)(t-5)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$
$$=25\lim_{t\to 5}\frac{t+5}{\sqrt{5t^2-25}+10}$$
$$=25\times\frac{10}{\sqrt{100}+10}=\frac{25}{2}$$

즉, $p=2$, $q=25$이므로

$p+q=27$

답 27

다른풀이

직선 OP와 x축이 이루는 각을 θ라 하면 점 P는 반지름이 $\sqrt{5}$인 원 위의 점이므로 점 P의 좌표는 $(\sqrt{5}\cos\theta,\ \sqrt{5}\sin\theta)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\cos\theta\times\sqrt{5}\sin\theta$

즉, $5\cos\theta\sin\theta$ ……㉠

이때, $\angle\mathrm{AOP}=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{t}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{\sqrt{t^2-5}}{t}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $S(t)=\frac{5\sqrt{5t^2-25}}{t^2}$

$$\therefore \lim_{t\to 5}\frac{t^2S(t)-50}{t-5}$$
$$=\lim_{t\to 5}\frac{5\sqrt{5t^2-25}-50}{t-5}$$
$$=5\lim_{t\to 5}\frac{\sqrt{5t^2-25}-10}{t-5}$$

$$=5\lim_{t\to5}\frac{(\sqrt{5t^2-25}-10)(\sqrt{5t^2-25}+10)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$

$$=5\lim_{t\to5}\frac{5t^2-125}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$

$$=5\lim_{t\to5}\frac{5(t+5)(t-5)}{(t-5)(\sqrt{5t^2-25}+10)}$$

$$=25\lim_{t\to5}\frac{t+5}{\sqrt{5t^2-25}+10}$$

$$=25\times\frac{10}{\sqrt{100}+10}=\frac{25}{2}$$

즉, $p=2$, $q=25$이므로

$p+q=27$

보충설명

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=r^2$

24

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-4x-2a}{(x-a)(x-2b)}=c \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x \longrightarrow 2$일 때의 극한값이 존재하므로 $a=2$ 또는 $2b=2$ 또는 $a\neq2$, $b\neq1$일 때에 대하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a=2$일 때,

㉠에서

$$c=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-4x-4}{(x-2)(x-2b)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(3x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2b)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{x-2b}$$

이때, 극한값이 존재하려면 $b\neq1$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{x-2b}=\frac{8}{2-2b}=\frac{4}{1-b}=c$

이때, $b<c$이므로 $\frac{4}{1-b}=c$를 만족시키는 정수 b, c의 순서쌍 (b, c)는

$(-3, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 4)$

(ii) $2b=2$, 즉 $b=1$일 때,

㉠에서

$c=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-4x-2a}{(x-a)(x-2)}$에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to2}(3x^2-4x-2a)=12-8-2a=0$에서

$4-2a=0 \qquad \therefore\ a=2$

$a=2$, $b=1$을 ㉠에 대입하면

$$c=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-4x-4}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(3x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{x-2}$$

그런데 $\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{x-2}$의 값은 존재하지 않으므로 모순이다.

(iii) $a\neq2$, $b\neq1$일 때,

㉠에서

$$c=\lim_{x\to2}\frac{3x^2-4x-2a}{(x-a)(x-2b)}$$

$$=\frac{12-8-2a}{(2-a)(2-2b)}$$

$$=\frac{4-2a}{(2-a)(2-2b)}$$

$$=\frac{2-a}{(2-a)(1-b)}$$

$$=\frac{1}{1-b}$$

이때, $b<c$이므로 $\frac{1}{1-b}=c$를 만족시키는 정수 b, c는

$b=0$, $c=1$

(i), (ii), (iii)에서 정수 b, c의 순서쌍 (b, c)는

$(-3, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 4)$, $(0, 1)$

이때, $c-b$의 값은 차례로 4, 3, 4, 1

따라서 $c-b$의 최댓값은 4, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$4+1=5$

답 5

유형연습 02 함수의 연속

본문 pp.44~57

01-1 5	01-2 $-\frac{10}{3}$	01-3 13
02-1 -2	02-2 1	02-3 3
03-1 ㄱ	03-2 ㄱ, ㄴ, ㄷ	04-1 6
04-2 1	04-3 68	05-1 25
05-2 6	06-1 8	06-2 0
06-3 3	07-1 8	07-2 25
07-3 10	08-1 11	08-2 3
08-3 4		

01-1

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$에서 $1+a+b=0$

$$\therefore\ b=-a-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} f(x)&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+a+1)(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2=3\end{aligned}$$

$\therefore\ a=1,\ b=-2$ ($\because$ ㉡)

따라서 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x\neq1)\\ 3 & (x=1)\end{cases}$

$$=\begin{cases}x+2 & (x\neq1)\\ 3 & (x=1)\end{cases}$$

이므로 $f(3)=3+2=5$

답 5

01-2

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\overbrace{\lim_{x\to1+} f(x)}^{=f(1)}=\lim_{x\to1-} f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to1+} f(x)=|a-1|+3$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1+|2a+1|$이므로

$$|a-1|+3=1+|2a+1|$$

$$\therefore\ |a-1|-|2a+1|=-2$$

(i) $a<-\frac{1}{2}$일 때,

$a-1<0,\ 2a+1<0$이므로

$-(a-1)+(2a+1)=-2,\ a+2=-2$

$\therefore\ a=-4$

(ii) $-\frac{1}{2}\le a<1$일 때,

$a-1<0,\ 2a+1\ge0$이므로

$-(a-1)-(2a+1)=-2,\ -3a=-2$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

(iii) $a\ge1$일 때,

$a-1\ge0,\ 2a+1>0$이므로

$(a-1)-(2a+1)=-2,\ -a-2=-2$

$\therefore\ a=0$

이때, $a=0$은 $a\ge1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-4,\ a=\frac{2}{3}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$$-4+\frac{2}{3}=-\frac{10}{3}$$

답 $-\frac{10}{3}$

01-3

$f(x)=\begin{cases}a-x & (x<-1)\\ 3x^2-6x & (-1\le x\le1)\\ -2x+b & (x>1)\end{cases}$ 에서

함수 $|f(x)|$가 모든 실수에서 연속이려면 $x=-1,\ x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속일 때,

$|f(-1)|=|3\times(-1)^2-6\times(-1)|=9$

$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|3x^2-6x|=9$

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|a-x|=|a+1|$

즉, $|a+1|=9$이므로 $a=8$ ($\because\ a>0$)

(ii) $x=1$에서 연속일 때,

$|f(1)|=|-3\times1^2+6\times1|=3$

$$\lim_{x \to 1+} |f(x)| = \lim_{x \to 1+} |-2x+b| = |-2+b|$$

$$\lim_{x \to 1-} |f(x)| = \lim_{x \to 1-} |-3x^2+6x| = 3$$

즉, $3 = |-2+b|$이므로 $b=5$ ($\because$ $b>0$)

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b=8+5=13$

답 13

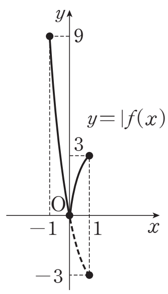
다른풀이

$-1 \le x \le 1$에서 $f(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$-1 \le x < 0$일 때, $|f(x)|=3x^2-6x$,

$0 \le x \le 1$일 때, $|f(x)|=-3x^2+6x$이다.

즉, $-1 \le x \le 1$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 하므로

직선 $y=a-x$는 점 $(-1,\ 9)$ 또는 점 $(-1,\ -9)$를 지나야 한다.

$9=a+1$에서 $a=8$ 또는 $-9=a+1$에서 $a=-10$

$\therefore$ $a=8$ ($\because$ $a>0$)

또한, 직선 $y=-2x+b$는 점 $(1,\ 3)$ 또는 점 $(1,\ -3)$을 지나야 한다.

$3=-2+b$에서 $b=5$ 또는 $-3=-2+b$에서 $b=-1$

$\therefore$ $b=5$ ($\because$ $b>0$)

$\therefore$ $a+b=8+5=13$

02-1

$y=2x+3$, $y=-x^2-t$를 연립하면

$2x+3=-x^2-t$, $x^2+2x+3+t=0$ ……㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(3+t)=-2-t$$

(ⅰ) $t<-2$일 때,

$\frac{D}{4}>0$에서 교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

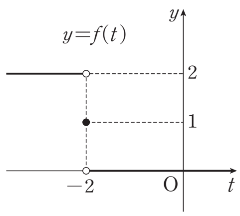
(ⅱ) $t=-2$일 때,

$\frac{D}{4}=0$에서 교점의 개수는 1이므로 $f(t)=1$

(ⅲ) $t>-2$일 때,

$\frac{D}{4}<0$에서 교점의 개수는 0이므로 $f(t)=0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(t)=\begin{cases} 2 & (t<-2) \\ 1 & (t=-2) \\ 0 & (t>-2) \end{cases}$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

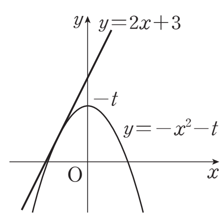


따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2$에서 불연속이다.

답 -2

보충설명

직선 $y=2x+3$과 함수 $y=-x^2-t$의 그래프는 다음 그림과 같다.



02-2

$x=\frac{1}{4}$일 때, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\left[-\log_2 \frac{1}{4}\right]=2$

$\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=[-\log_2 x]=1$

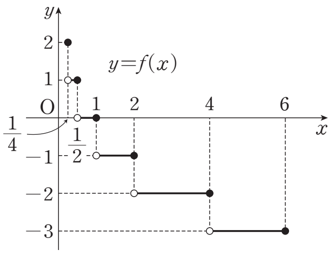
$\frac{1}{2}<x\le 1$일 때, $f(x)=[-\log_2 x]=0$

$1<x\le 2$일 때, $f(x)=[-\log_2 x]=-1$

$2<x\le 4$일 때, $f(x)=[-\log_2 x]=-2$

$4<x\le 6$일 때, $f(x)=[-\log_2 x]=-3$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 6\right]$에서 함수 $f(x)=[-\log_2 x]$가 불연속이 되는 모든 점의 x좌표를 구하면

$x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=2$, $x=4$이다.

따라서 모든 점의 x좌표의 곱은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times 4=1$

답 1

보충설명

기호 $[f(x)]$를 포함한 함수는 기호 $[f(x)]$ 안의 식의 값 $f(x)$가 정수가 아닐 때, 연속이다.

02-3

a의 값의 범위에 따라 $f(a)$의 값은 다음과 같다.

(i) $a=0$일 때,

$2ax^2+2(a-3)x-(a-3)=0$에서

$-6x+3=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore f(0)=1$

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차방정식 $2ax^2+2(a-3)x-(a-3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2+2a(a-3)=3(a-3)(a-1)$

① $\frac{D}{4}<0$, 즉 $1<a<3$일 때,

실근이 존재하지 않으므로 $f(a)=0$

② $\frac{D}{4}=0$, 즉 $a=1$ 또는 $a=3$일 때,

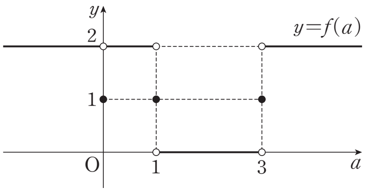
중근을 가지므로 $f(a)=1$

③ $\frac{D}{4}>0$, 즉 $a<1$ 또는 $a>3$일 때,

서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(a)=2$

(i), (ii)에서 $f(a)=\begin{cases} 0 \ (1<a<3) \\ 1 \ (a=0 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } a=3) \\ 2 \ (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1 \text{ 또는 } a>3) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(a)$가 불연속인 점의 개수는 $a=0$, $a=1$, $a=3$의 3이다.

답 3

03-1

ㄱ. $f(x)$와 $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=f(a)+g(a)$

$\therefore \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)-f(x)\}$

$=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a} f(x)$

$=f(a)+g(a)-f(a)$

$=g(a)$

따라서 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=x$라 하자.

ㄱ에서 함수 $f(x)$, $g(x)$ 모두 $x=a$에서 연속이지만

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x}{x-a}$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄷ. (반례) $f(x)=\frac{1}{x-1}$이라 하고 $a=2$라 하자.

$f(f(x))=\frac{1}{\frac{1}{x-1}-1}=\frac{1}{\frac{1-(x-1)}{x-1}}$

$=\frac{1}{\frac{2-x}{x-1}}=\frac{x-1}{2-x}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이지만 함수 $f(f(x))$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $x=a$에서 연속인 함수는 ㄱ이다.

답 ㄱ

03-2

ㄱ. $f(1)+g(1)=0+3=3$,

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=3+0=3$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $f(1)g(1)=0\times3=0$,

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=3\times0=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x=1$에서 연속이므로

$\dfrac{f(1)+a}{g(1)+b}=\dfrac{a}{b+3}$

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}=\dfrac{\lim_{x\to1}f(x)+a}{\lim_{x\to1}g(x)+b}=\dfrac{a+3}{b}$

즉, $\dfrac{a}{b+3}=\dfrac{a+3}{b}$이므로

$(a+3)(b+3)=ab,\ ab+3a+3b+9=ab$

$3a+3b=-9\qquad\therefore\ a+b=-3$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

04-1

$f(x)=\begin{cases}-x+a & (x<2)\\ 2x+b & (x\ge2)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2-4x+6 & (x<2)\\ 1 & (x\ge2)\end{cases}$

에서 $f(x)g(x)=\begin{cases}(-x+a)(x^2-4x+6) & (x<2)\\ 2x+b & (x\ge2)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$f(2)g(2)=4+b$ └ $f(2)g(2)=\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)g(x)$

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=4+b$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=(a-2)\times2=2a-4$

즉, $4+b=2a-4$이므로

$2a-b=8\qquad\cdots\cdots$㉠

또한, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{-x+a}{x^2-4x+6} & (x<2)\\ 2x+b & (x\ge2)\end{cases}$ 이므로

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 $x=2$에서 연속이려면

$\dfrac{f(2)}{g(2)}=4+b$ └ $\dfrac{f(2)}{g(2)}=\lim_{x\to2+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to2+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=4+b$

$\lim_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a-2}{2}$

즉, $4+b=\dfrac{a-2}{2}$에서 $8+2b=a-2$이므로

$a-2b=10\qquad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-4$

따라서 $a-b=2-(-4)=6$

답 6

04-2

$(x+1)(x-1)f(x)=x^4+ax+b$이므로

$x=-1$일 때,

$0=(-1)^4-a+b$에서

$a-b=1\qquad\cdots\cdots$㉠

$x=1$일 때,

$0=1^4+a+b$에서

$a+b=-1\qquad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-1$

즉, $(x^2-1)f(x)=x^4-1$이다.

$x\ne1,\ x\ne-1$일 때,

$f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

이때, 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}(x^2+1)=2$

$\therefore\ a+b+f(-1)=0+(-1)+2=1$

답 1

04-3

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x}{x^2-1}=4$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다.

$\therefore\ f(x)=4x^2+px+q$ (단, p, q는 상수) ……㉠

또한, 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to-1} g(x)=g(-1)$에서 $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)-2x}{x^2-1}=a$

이때, 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-2x\}=0$ $\quad\therefore\ f(-1)=-2$

위의 식을 ㉠에 대입하면 $4-p+q=-2$

$\therefore\ -p+q=-6$ ……㉡

(ii) $x=1$에서 연속일 때,

$\lim_{x\to1} g(x)=g(1)$에서 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2x}{x^2-1}=a$

이때, 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2x\}=0$ $\quad\therefore\ f(1)=2$

위의 식을 ㉠에 대입하면 $4+p+q=2$

$\therefore\ p+q=-2$ ……㉢

(i), (ii)에서 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $p=2$, $q=-4$

$\therefore\ f(x)=4x^2+2x-4$

이때, 함수 $g(x)$에서 $\lim_{x\to1} g(x)=g(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{(4x^2+2x-4)-2x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(x^2-1)}{x^2-1}=4=a$$

$\therefore\ f(a)=f(4)=64+8-4=68$

답 68

05-1

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$f(-1)g(-1)=(1-a+b)\times(-1)=-1+a-b$

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=(1-a+b)\times(-2)=-2+2a-2b$

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=(1-a+b)\times(-1)=-1+a-b$

즉, $-1+a-b=-2+2a-2b$이므로

$a-b=1$ ……㉠

또한, $f(1)=4$에서 $1+a+b=4$

$\therefore\ a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$이므로

$f(4)=5^2=25$

답 25

다른풀이

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=-1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$f(-1)=0$ $\quad\therefore\ 1-a+b=0$

$f(1)=4$에서 $1+a+b=4$

$\therefore\ a=2$, $b=1$

05-2

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=0$에서 연속일 때,

$f(0)g(0)=-3\times b=-3b$

$\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=-3\times b=-3b$

$\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=1\times b=b$

즉, $-3b=b$이므로 $b=0$ ……㉠

(ii) $x=2$에서 연속일 때,

$f(2)g(2)=3\times(8+2a+b)=6a+3b+24$

$\lim_{x\to2+} f(x)g(x)=3\times(8+2a+b)=6a+3b+24$

$\lim_{x\to2-} f(x)g(x)=-3\times(8+2a+b)=-6a-3b-24$

즉, $6a+3b+24=-6a-3b-24$이므로

$6a+24=-6a-24$ ($\because$ ㉠)

$12a=-48$ $\quad\therefore\ a=-4$

(i), (ii)에서 $g(x)=2x^2-4x$이므로 $g(3)=18-12=6$

답 6

다른풀이

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$g(0)=g(2)=0$이어야 한다.

즉, $b=0$, $8+2a+b=0$에서 $a=-4$

따라서 $g(x)=2x^2-4x$이므로

$g(3)=18-12=6$

06-1

함수 $f(g(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=0$에서 연속일 때,

$f(g(0))=f(0)$

$g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=f(0)$

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 1+$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=\lim_{t\to 1+} f(t)=f(1)$

$\therefore f(0)=f(1)$

(ii) $x=2$에서 연속일 때,

$f(g(2))=f(1)$

$g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 2+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=f(1)$

$x \longrightarrow 2-$일 때 $t \longrightarrow 2-$이므로

$\lim_{x\to 2-} f(g(x))=\lim_{t\to 2-} f(t)=f(2)$

$\therefore f(1)=f(2)$

(i), (ii)에서 $f(0)=f(1)=f(2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$에서

$f(0)=2$, $f(1)=1+a+b+2=a+b+3$

$f(2)=8+4a+2b+2=4a+2b+10$

즉, $a+b+3=2$, $4a+2b+10=2$에서 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$이므로

$f(3)=8$

답 8

06-2

합성함수 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$g(f(1))=g(4a)=(4a)^2-3\times 4a+3=16a^2-12a+3$

$\lim_{x\to 1+} g(f(x))=\lim_{x\to 1+} g(4a)=16a^2-12a+3$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} g(f(x))&=\lim_{x\to 1-} g(3+a^2)\\&=(3+a^2)^2-3\times(3+a^2)+3\\&=a^4+6a^2+9-9-3a^2+3\\&=a^4+3a^2+3\end{aligned}$$

즉, $16a^2-12a+3=a^4+3a^2+3$에서 $a^4-13a^2+12a=0$

$a(a^3-13a+12)=0$, $a(a+4)(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-4+0+1+3=0$

답 0

06-3

함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 연속인지 조사하면 된다.

(i) $x=-1$일 때,

$g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow -1+$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(g(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=-1$

$x \longrightarrow -1-$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(g(x))=f(0)=0$

즉, $\lim_{x\to -1+} f(g(x))\neq\lim_{x\to -1-} f(g(x))$이므로 합성함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $x=0$일 때,

$f(g(0))=f(1)=-1$

$g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=0$

$x \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=0$

즉, $f(g(0)) \neq \lim_{x \to 0} f(g(x))$이므로 합성함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $x=1$일 때,

$f(g(1))=f(1)=-1$

$g(x)=t$로 놓으면

$x \longrightarrow 1+$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(g(x))=f(0)=0$

$x \longrightarrow 1-$일 때 $t \longrightarrow 1-$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(g(x))=\lim_{t \to 1-} f(t)=-1$

즉, $\lim_{x \to 1+} f(g(x)) \neq \lim_{x \to 1-} f(g(x))$이므로 합성함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 합성함수 $(f \circ g)(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$의 3이다.

답 3

07-1

함수 $f(x)=\begin{cases} ax+4 & (x<1) \\ 2x^2-2 & (x \geq 1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속이므로

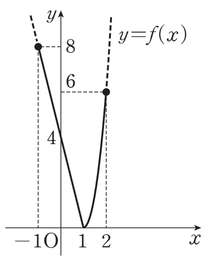
$f(1)=0$

$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+} (2x^2-2)=0$

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-} (ax+4)=a+4$

즉, $a+4=0$에서 $a=-4$

$f(x)=\begin{cases} -4x+4 & (x<1) \\ 2x^2-2 & (x \geq 1) \end{cases}$이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $M=f(-1)=8$, $x=1$일 때 최솟값 $m=f(1)=0$을 갖는다.

$\therefore M+m=8$

답 8

07-2

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{x}=4$에서 $f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 4인 일차식이므로 $f(x)-x^2=4x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+4x+a$ ……㉠

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}=8$에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to 2} f(x)=0$에서 $f(2)=0$ ……㉡

㉠에 $x=2$를 대입하면

$4+8+a=0$ ($\because$ ㉡) $\therefore a=-12$

$\therefore f(x)=x^2+4x-12=(x+2)^2-16$

따라서 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$는

$x=3$일 때 최댓값 $M=f(3)=9$

$x=-2$일 때 최솟값 $m=f(-2)=-16$

을 갖는다.

$\therefore M-m=9-(-16)=25$

답 25

07-3

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이므로 $x=-1$에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$이어야 한다.

$\lim_{x \to -1+} (x^2+ax+b)=\lim_{x \to -1-} \frac{x^3+x^2-ax+2}{x+1}=f(-1)$

에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow -1-$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x \to -1-} (x^3+x^2-ax+2)=-1+1+a+2=0$

$\therefore a=-2$ ……㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$f(x)=\begin{cases} \frac{(x+1)(x^2+2)}{x+1} & (-3 \leq x < -1) \\ x^2-2x+b & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2+2 & (-3 \leq x < -1) \\ x^2-2x+b & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

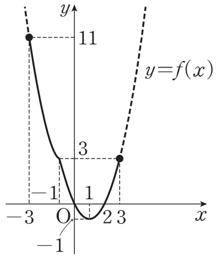
이때, $\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)$이므로

$3+b=3$

$\therefore b=0$

$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & (-3\le x<-1) \\ x^2-2x & (-1\le x\le 3) \end{cases}$ 이므로 닫힌구간

$[-3,\ 3]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-3$일 때 최댓값 $f(-3)=11$, $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=-1$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $11+(-1)=10$

답 10

08-1

$f(x)=2x^2-6x+k$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=2\times(-1)^2-6\times(-1)+k=8+k$

$f(1)=2-6+k=-4+k$

이때, 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면

$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로

$(8+k)(-4+k)<0 \qquad \therefore\ -8<k<4$

따라서 정수 k의 개수는 $-7,\ -6,\ -5,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 3$의 11이다.

답 11

08-2

$g(x)=f(x)-x$로 놓으면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(0)=f(0)-0=2>0$

$g(1)=f(1)-1=2>0$

$g(2)=f(2)-2=-2-2=-4<0$

$g(3)=f(3)-3=-5-3=-8<0$

$g(4)=f(4)-4=7-4=3>0$

$g(5)=f(5)-5=-6-5=-11<0$

즉, 주어진 방정식은 사잇값 정리에 의하여 열린구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 가능한 정수 n의 개수의 최솟값은 3이다.

답 3

08-3

$f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또한, $f(x)=f(-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ -1)$, $(-4,\ -3)$에서도 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 적어도 4개 존재하므로 n의 최댓값은 4이다.

답 4

개념마무리

본문 pp.58~61

01 ②	**02** 16	**03** $\frac{1}{4}$	**04** -2
05 9	**06** 8	**07** 2	**08** 0
09 23	**10** ③	**11** 40	**12** 5
13 ④	**14** 1	**15** ⑤	**16** 4
17 10	**18** ②	**19** 1	**20** ㄱ, ㄷ
21 5	**22** 2	**23** ①	

01

ㄱ. $\sqrt[6]{9}$는 무리수이므로

$(f\circ f)(\sqrt[6]{9})=f\{(\sqrt[6]{9})^6\}=f(9)=81$ (참)

ㄴ. (i) x가 유리수일 때,

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1$

(ii) x가 무리수일 때,

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x^6=1$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면 $\lim_{x\to a}x^2=\lim_{x\to a}x^6$이어야 한다.

$a^2=a^6$에서

$a^2(a^4-1)=0$, $a^2(a^2+1)(a^2-1)=0$

$\therefore$ $a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$ ($\because$ a는 실수)

따라서 a의 개수는 3이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

02

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & (|x|\neq2)\\ 4 & (|x|=2)\end{cases}\text{에서}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4} & (x\neq-2,\ x\neq2)\\ 4 & (x=-2,\ x=2)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 불연속이려면 $x=-2$에서는 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow-2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^2+ax+b)=0$에서 $4-2a+b=0$

$\therefore$ $b=2a-4$

$b=2a-4$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax+2a-4}{x^2-4}&=\lim_{x\to-2}\frac{(x+a-2)(x+2)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{x+a-2}{x-2}\\&=\frac{a-4}{-4}=4\end{aligned}$$

$a-4=-16$에서

$a=-12$, $b=-28$

$\therefore$ $a-b=-12-(-28)=16$

답 16

03

$(x-3)f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x-1}$에서

$x\neq3$일 때 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

이때, 함수 $f(x)$가 $x>1$에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로

$$\begin{aligned}f(3)&=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x-1}\right)\right\}\\&=\lim_{x\to3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{x-1-2}{2(x-1)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}\times\frac{x-3}{x-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to3}\frac{1}{x-1}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{1}{4}$

04

함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 $f(0)=f(4)$

$-2=16+4a+b$

$\therefore$ $4a+b=-18 \quad \cdots\cdots ㉠$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$f(1)=1+a+b$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x-2)=1$

$1=1+a+b$에서 $a+b=0$

$\therefore$ $b=-a \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면

$a=-6$, $b=6$

즉, $f(x)=\begin{cases}3x-2 & (0\le x<1)\\ x^2-6x+6 & (1\le x\le4)\end{cases}$이다.

이때, $678=4\times169+2$이므로

$f(678)=f(2)=2^2-6\times2+6=-2$

답 -2

05

$$f(x)=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7}{x-\cfrac{8}{x}}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7}{\cfrac{x^2-8}{x}}}}$$

$$=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{7x}{x^2-8}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{\cfrac{x^3-15x}{x^2-8}}}$$

$$=\cfrac{1}{x-\cfrac{2x^2-16}{x^3-15x}}=\cfrac{1}{\cfrac{x^4-17x^2+16}{x^3-15x}}$$

$$=\frac{x^3-15x}{x^4-17x^2+16}$$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x^2-8=0$, $x^3-15x=0$, $x^4-17x^2+16=0$이 되는 x의 값에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

(i) $x=0$

(ii) $x^2-8=0$에서 $x=\pm 2\sqrt{2}$

(iii) $x^3-15x=0$에서 $x(x^2-15)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{15}$

(iv) $x^4-17x^2+16=0$에서

$(x^2-1)(x^2-16)=0$

$\therefore$ $x=\pm 1$ 또는 $x=\pm 4$

(i)~(iv)에서 $x=0$, ± 1, $\pm 2\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{15}$, ± 4이므로 실수 x의 개수는 9이다.

답 9

06

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)=a$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-bx^2+b^2x-4)$$
$$=b^2-b-4$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(1-3x)$$
$$=-2$$

즉, $a=-2$, $b^2-b-4=-2$

$b^2-b-4=-2$에서 $b^2-b-2=0$

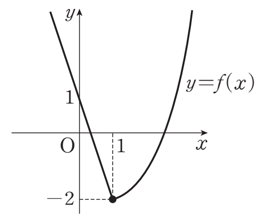
$(b+1)(b-2)=0$

$\therefore$ $b=-1$ 또는 $b=2$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

(i) $b=-1$일 때,

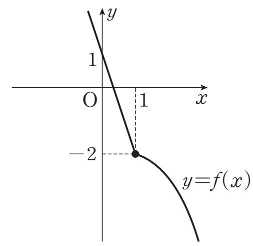
$x>1$에서 $f(x)=x^2+x-4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

(ii) $b=2$일 때,

$x>1$에서 $f(x)=-2x^2+4x-4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

(i), (ii)에서 $b=2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

답 8

보충설명

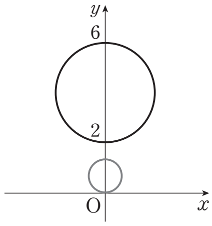
이 문제의 함수 $f(x)$와 같이 구간에 따라 함수식이 다른 함수가 일대일대응이 되기 위해서는 x의 값이 증가할 때, 함숫값은 항상 증가하거나 또는 감소해야 한다.

07

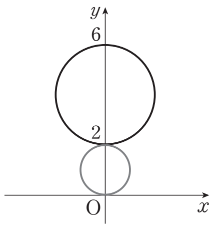
교점의 개수가 1인 두 원은 서로 외접하거나 내접해야 한다.

$0<r<6$에서 r의 값에 따라 $f(r)$를 구하면 다음과 같다.

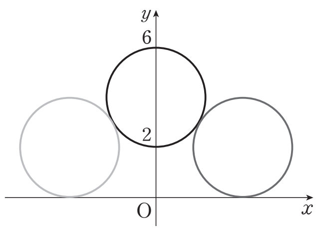
(ⅰ) $0<r<1$일 때, $f(r)=0$



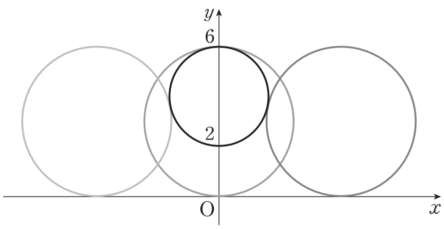
(ⅱ) $r=1$일 때, $f(r)=1$



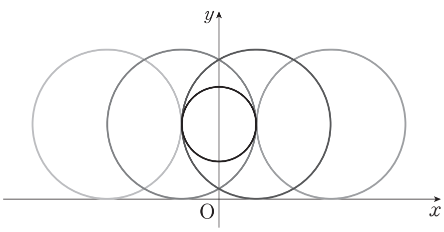
(ⅲ) $1<r<3$일 때, $f(r)=2$



(ⅳ) $r=3$일 때, $f(r)=3$

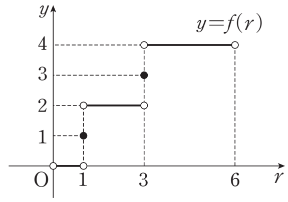


(ⅴ) $3<r<6$일 때, $f(r)=4$



(ⅰ)~(ⅴ)에서 $f(r)=\begin{cases} 0 & (0<r<1) \\ 1 & (r=1) \\ 2 & (1<r<3) \\ 3 & (r=3) \\ 4 & (3<r<6) \end{cases}$이므로 열린구간 $(a,\ b)$

에서 함수 $y=f(r)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(r)$는 $r=1$, $r=3$에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 2이다.

답 2

08

함수 $f(x)=\dfrac{x^2-a}{x^2-ax+4}$는 분모인 $x^2-ax+4=0$이 되는 x의 값에서 불연속이므로 이 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 이차방정식 $x^2-ax+4=0$이 허근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times4<0$에서 $a^2<16$

$\therefore\ -4<a<4$ ······㉠

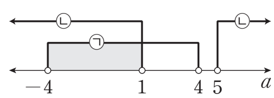
한편, $f(1)=\dfrac{1-a}{5-a}$에서 $f(1)>0$이므로 $\dfrac{1-a}{5-a}>0$

이 부등식의 양변에 $(5-a)^2$을 곱하면

$(5-a)(1-a)>0$

$\therefore\ a<1$ 또는 $a>5$ ······㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-4<a<1$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 $a=0$

답 0

09

$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (|x|<3) \\ -x+2 & (|x|\geq3) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\leq-3) \\ x^2-1 & (-3<x<3) \\ -x+2 & (x\geq3) \end{cases}$

함수 $f(-x)\{f(x)-k\}=g(x)$라 하면 함수 $g(x)$는

$x=3$에서 연속이므로

$g(3)=f(-3)\{f(3)-k\}=5(-1-k)=-5k-5$

$x \longrightarrow 3+$일 때 $-x \longrightarrow -3-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3+} g(x) &= \lim_{-x\to-3-} f(-x)\times\lim_{x\to3+}\{f(x)-k\}\\ &= \underbrace{\lim_{t\to-3-} f(t)}_{-x=t\text{로 치환}}\times\lim_{x\to3+}\{f(x)-k\}\\ &=(3+2)\times\{(-3+2)-k\}\\ &=5\times(-1-k)\\ &=-5-5k\end{aligned}$$

$x \longrightarrow 3-$일 때 $-x \longrightarrow -3+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3-} g(x) &= \lim_{-x\to-3+} f(-x)\times\lim_{x\to3-}\{f(x)-k\}\\ &= \underbrace{\lim_{t\to-3+} f(t)}_{-x=t\text{로 치환}}\times\lim_{x\to3-}\{f(x)-k\}\\ &=(3^2-1)\times\{(3^2-1)-k\}\\ &=8\times(8-k)=64-8k\end{aligned}$$

즉, $64-8k=-5-5k$에서 $69=3k$

$\therefore\ k=23$

답 23

10

ㄱ. (반례) $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<a)\\ 1 & (x\ge a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ -1 & (x\ge a)\end{cases}$

이라 하면

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)=-1$,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=-1$

이므로 두 함수 $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. (반례) $f(x)=x-a$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x<a)\\ 2 & (x\ge a)\end{cases}$라 하면

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)=0$,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=0$

이므로 두 함수 $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\{g(x)\}^2$은 $x=a$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)=\alpha$,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}=\beta$라 하자.

(단, $g(a)\neq0$, α, β는 실수)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2&=\lim_{x\to a}\left\{f(x)g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\ &=\lim_{x\to a} f(x)g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\\ &=f(a)g(a)\times\frac{f(a)}{g(a)}\\ &=\{f(a)\}^2\end{aligned}$$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

한편, $f(x)\{f(x)-g(x)\}=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)$이고 $\{f(x)\}^2$, $f(x)g(x)$는 모두 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)\{f(x)-g(x)\}$는 $x=a$에서 연속이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

11

$f(x)=\begin{cases}x^2-6 & (x\le a)\\ 2x+2 & (x>a)\end{cases}$, $g(x)=x-2a-5$에서

$f(x)g(x)=\begin{cases}(x^2-6)(x-2a-5) & (x\le a)\\ (2x+2)(x-2a-5) & (x>a)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(a)g(a)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)$

즉, $(2a+2)(-a-5)=(a^2-6)(-a-5)$이므로

$(-a-5)(2a+2-a^2+6)=0$

$(a+5)(a^2-2a-8)=0$

$(a+5)(a+2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=-5$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-5)\times(-2)\times4=40$

답 40

다른풀이

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때와 불연속일 때로 나누어 구한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때,

$f(a)=a^2-6$

$\lim_{x \to a+} f(x) = 2a+2$

$\lim_{x \to a-} f(x) = a^2-6$

$2a+2=a^2-6$에서 $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore\ a=-2$ 또는 $a=4$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

$g(a)=0$이어야 하므로

$-a-5=0$

$\therefore\ a=-5$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$(-2)\times4\times(-5)=40$

12

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(0)}{g(0)}$이어야 한다.

(i) $b<0$일 때,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x+2a+1} & (x<b) \\ \dfrac{3-x}{x+2a} & (b \le x < 0) \\ \dfrac{5-x}{x+2a} & (x \ge 0) \end{cases}$$ 이므로

$\dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{5}{2a}$

$\lim_{x \to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \dfrac{5-x}{x+2a} = \dfrac{5}{2a}$

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0-} \dfrac{3-x}{x+2a} = \dfrac{3}{2a}$

즉, $\dfrac{5}{2a} = \dfrac{3}{2a}$

이때, $a \ne 0$이므로 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(ii) $b=0$일 때,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x+2a+1} & (x<0) \\ \dfrac{5-x}{x+2a} & (x \ge 0) \end{cases}$$ 이므로

$\dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{5}{2a}$

$\lim_{x \to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \dfrac{5-x}{x+2a} = \dfrac{5}{2a}$

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0-} \dfrac{3-x}{x+2a+1} = \dfrac{3}{2a+1}$

즉, $\dfrac{5}{2a} = \dfrac{3}{2a+1}$이므로 $6a=10a+5$

$4a=-5 \qquad \therefore\ a=-\dfrac{5}{4}$

(iii) $b>0$일 때,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x+2a+1} & (x<0) \\ \dfrac{5-x}{x+2a+1} & (0 \le x < b) \\ \dfrac{5-x}{x+2a} & (x \ge b) \end{cases}$$ 이므로

$\dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{5}{2a+1}$

$\lim_{x \to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \dfrac{5-x}{x+2a+1} = \dfrac{5}{2a+1}$

$\lim_{x \to 0-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0-} \dfrac{3-x}{x+2a+1} = \dfrac{3}{2a+1}$

즉, $\dfrac{5}{2a+1} = \dfrac{3}{2a+1}$

이때, $a \ne -\dfrac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-\dfrac{5}{4}$, $b=0$

$\therefore\ b-4a=0-4\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)=5$

답 5

13

ㄱ. $x-2=t$로 놓으면 $f(x-2)$의 $x=1$에서의 연속은 $f(t)$의 $t=-1$에서의 연속을 확인한다.

함수 $f(t)$는 $t=-1$에서 연속이므로 함수 $f(x-2)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)=g(x)$라 하면

$g(1)=f(1)f(-1)=0\times1=0$

$\lim_{x \to 1+} g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)f(-x)$

$= \lim_{x \to 1+} f(x) \times \underbrace{\lim_{x \to 1+} f(-x)}_{x \to 1+\text{일 때 } -x \to -1-}$

$= -1\times1=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} g(x) &= \lim_{x\to1-} f(x)f(-x)\\ &= \lim_{x\to1-} f(x)\times \underbrace{\lim_{x\to1-} f(-x)}_{x\to1-\text{일 때 }-x\to-1+}\\ &= 0\times1=0\end{aligned}$$

이때, $\lim_{x\to1+} g(x)\neq\lim_{x\to1-} g(x)$이므로 함수

$f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f(f(3))=f(1)=0$

$x\longrightarrow3+$일 때 $t\longrightarrow1+$이므로

$\lim_{x\to3+} f(f(x))=\lim_{t\to1+} f(t)=-1$

$x\longrightarrow3-$일 때 $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to3-} f(f(x))=\lim_{t\to1-} f(t)=0$

이때, $\lim_{x\to3+} f(f(x))\neq\lim_{x\to3-} f(f(x))$이므로 함수

$f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

보충설명

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 연속일 세 가지 조건 중 한 가지라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.
보기 ㄴ은 $\lim_{x\to1} f(x)f(-x)$의 값이 존재하지 않으므로 함숫값 $f(1)f(-1)$을 확인하지 않아도 함수 $f(x)f(-x)$가 $x=1$에서 불연속임을 확인할 수 있다.
마찬가지 방법으로 보기 ㄷ은 $\lim_{x\to3} f(f(x))$의 값이 존재하지 않으므로 함숫값 $f(f(3))$을 확인하지 않아도 함수 $f(f(x))$가 $x=3$에서 불연속임을 확인할 수 있다.

14

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)g(1)=2(1+a+b)$

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x^2+ax+b)}{x-1}$

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x^2+ax+b)}{x-1}=2(1+a+b)$ ……㉠

㉠에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(2x+1)(x^2+ax+b)=0$에서

$3(1+a+b)=0,\ 1+a+b=0$

$\therefore\ b=-a-1$ ……㉡

(가)

㉡을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x^2+ax-a-1)}{x-1}=0$

$\lim_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x+a+1)(x-1)}{x-1}=0$

$\lim_{x\to1}(2x+1)(x+a+1)=0$

$3(a+2)=0$

$\therefore\ a=-2,\ b=1$ ($\because$ ㉡)

(나)

따라서 $g(x)=x^2-2x+1$이므로

$g(2)=4-4+1=1$

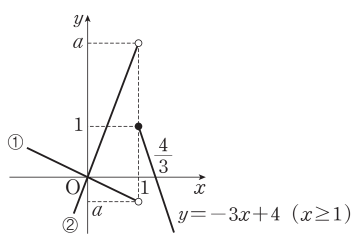
(다)

답 1

단계	채점 기준	배점
(가)	극한의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 경우	50%
(나)	상수 a, b의 값을 구한 경우	30%
(다)	$g(2)$의 값을 구한 경우	20%

15

합성함수 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.



(i) $g(f(1))=g(1)$

$\quad=2^1+2^{-1}$

$\quad=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

(ii) $f(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow1+$일 때, $t\longrightarrow1-$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)$

$\quad=2^1+2^{-1}$

$\quad=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

(iii) ① $a<0$일 때,

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때, $t \longrightarrow a+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} g(f(x)) &= \lim_{t\to a+} g(t)\\ &= \lim_{t\to a+}(2^t+2^{-t})\\ &= 2^a+2^{-a}\end{aligned}$$

② $a\ge 0$일 때,

$f(x)=t$로 놓으면 $x \longrightarrow 1-$일 때, $t \longrightarrow a-$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} g(f(x)) &= \lim_{t\to a-} g(t)\\ &= \lim_{t\to a-}(2^t+2^{-t})\\ &= 2^a+2^{-a}\end{aligned}$$

①, ②에서 $\lim_{x\to 1-} g(f(x))=2^a+2^{-a}$

(i), (ii), (iii)에서

$2^a+2^{-a}=\frac{5}{2}$, $2^a+\frac{1}{2^a}=\frac{5}{2}$

$2^a=s$ $(s>0)$로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^2+2=5s$

$2s^2-5s+2=0$, $(2s-1)(s-2)=0$

$\therefore$ $s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

즉, $2^a=\frac{1}{2}$ 또는 $2^a=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times 1=-1$

답 ⑤

다른풀이

$$g(f(x))=\begin{cases} 2^{ax}+2^{-ax} & (x<1)\\ 2^{-3x+4}+2^{3x-4} & (x\ge 1)\end{cases}$$

합성함수 $(g\circ f)(x)$, 즉 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$g(f(1))=2+2^{-1}=\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} g(f(x)) &= \lim_{x\to 1+}(2^{-3x+4}+2^{3x-4})\\ &= 2+2^{-1}\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-} g(f(x)) &= \lim_{x\to 1-}(2^{ax}+2^{-ax})\\ &= 2^a+2^{-a}\end{aligned}$$

즉, $2^a+2^{-a}=\frac{5}{2}$에서

$2^a=s$ $(s>0)$로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=\frac{5}{2}$, $2s^2-5s+2=0$

$(2s-1)(s-2)=0$ $\quad\therefore$ $s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=2$

즉, $2^a=\frac{1}{2}$ 또는 $2^a=2$이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times 1=-1$

16

두 함수 $y=x^2-2x+t+1$, $y=tx-1$을 연립하면

$x^2-2x+t+1=tx-1$에서

$x^2-(t+2)x+t+2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(t+2)^2-4(t+2)=(t+2)(t-2)$이므로

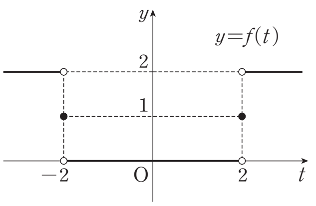
$D>0$, 즉 $t<-2$ 또는 $t>2$일 때, 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(t)=2$

$D=0$, 즉 $t=-2$ 또는 $t=2$일 때, 중근을 가지므로 $f(t)=1$

$D<0$, 즉 $-2<t<2$일 때, 허근을 가지므로 $f(t)=0$

따라서 함수 $f(t)=\begin{cases} 2 & (t<-2 \text{ 또는 } t>2)\\ 1 & (t=-2 \text{ 또는 } t=2)\\ 0 & (-2<t<2)\end{cases}$의 그래프는

다음 그림과 같다.



즉, 함수 $f(t)$는 $t=-2$, $t=2$에서 불연속이다.

함수 $(t^2-a)f(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면

$t=-2$, $t=2$에서 연속이어야 한다.

(i) $t=-2$에서 연속일 때,

$(4-a)f(-2)=4-a$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -2+}(t^2-a)f(t) &= \lim_{t\to -2+}(t^2-a)\times\lim_{t\to -2+}f(t)\\ &= (4-a)\times 0=0\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to-2-}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to-2-}(t^2-a)\times\lim_{t\to-2-}f(t)$$
$$=(4-a)\times 2=8-2a$$

즉, $4-a=0=8-2a$에서 $a=4$

(ii) $t=2$에서 연속일 때,

$(4-a)f(2)=4-a$

$$\lim_{t\to2+}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to2+}(t^2-a)\times\lim_{t\to2+}f(t)$$
$$=(4-a)\times 2=8-2a$$

$$\lim_{t\to2-}(t^2-a)f(t)=\lim_{t\to2-}(t^2-a)\times\lim_{t\to2-}f(t)$$
$$=(4-a)\times 0=0$$

즉, $4-a=8-2a=0$에서 $a=4$

(i), (ii)에서 $a=4$

답 4

다른풀이

$f(t)=\begin{cases}2\ (t<-2 \text{ 또는 } t>2)\\ 1\ (t=-2 \text{ 또는 } t=2)\\ 0\ (-2<t<2)\end{cases}$은 $t=-2$, $t=2$에서 불연속인 함수이다.

불연속인 함수와의 곱으로 이루어진 함수 $(t^2-a)f(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면

$g(t)=(t^2-a)$라 할 때 $g(-2)=0$, $g(2)=0$이어야 하므로 $4-a=0$

$\therefore\ a=4$

17

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$f(0)=b$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(-x^2+2x+b)=b$

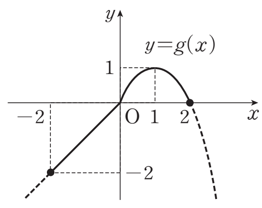
$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(x+a)=a$

$\therefore\ a=b$ ……㉠

이때, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수

$f(x)=\begin{cases}x+a & (x<0)\\ -x^2+2x+a & (x\ge0)\end{cases}$가 최댓값 c, 최솟값 1을 가지므로 함수 $f(x)-a=\begin{cases}x & (x<0)\\ -x^2+2x & (x\ge0)\end{cases}$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 최댓값 $c-a$, 최솟값 $1-a$를 갖는다.

이때, $g(x)=f(x)-a$라 하면 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $c-a=1$, 최솟값은 $1-a=-2$이므로 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=4$

㉠에서 $a=b$이므로 $b=3$

$\therefore\ a+b+c=3+3+4=10$

답 10

18

ㄱ. $f(-1)=2>0$, $f(0)=-3<0$, $f(1)=4>0$, $f(2)=1>0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$는 적어도 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-2x=g(x)$라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$g(-1)=2+2=4>0$, $g(0)=-3<0$,

$g(1)=4-2=2>0$, $g(2)=1-4=-3<0$이므로

사잇값 정리에 의하여 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)-2x=0$은 적어도 세 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(x)+x^2=h(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$h(-1)=2+1=3>0$, $h(0)=-3<0$,

$h(1)=4+1=5>0$, $h(2)=1+4=5>0$이므로 사잇값 정리에 의하여 함수 $h(x)$는 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)+x^2=0$은 적어도 두 실근을 갖는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

19

함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=0,\ x=1$에서 불연속이고 함수 $y=f(x)-k$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)-k$가 불연속인 실수 x의 개수도 3이다.

이때, 함수 $|f(x)-k|$가 불연속인 실수 x의 개수가 2이므로 $x=-1,\ x=0,\ x=1$ 중 하나에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속일 때,

$|f(-1)-k|=|-k|$

$\lim_{x\to -1+}|f(x)-k|=|-k|$

$\lim_{x\to -1-}|f(x)-k|=|1-k|$

즉, $|-k|=|1-k|$에서 $(-k)^2=(1-k)^2$

$k^2=k^2-2k+1,\ 2k=1$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

(ii) $x=0$에서 연속일 때,

$|f(0)-k|=|2-k|$

$\lim_{x\to 0+}|f(x)-k|=|-2-k|$

$\lim_{x\to 0-}|f(x)-k|=|2-k|$

즉, $|2-k|=|-2-k|$에서 $(2-k)^2=(-2-k)^2$

$k^2-4k+4=k^2+4k+4,\ 8k=0$

$\therefore\ k=0$

(iii) $x=1$에서 연속일 때,

$|f(1)-k|=|-1-k|$

$\lim_{x\to 1+}|f(x)-k|=|-1-k|$

$\lim_{x\to 1-}|f(x)-k|=|-k|$

즉, $|-1-k|=|-k|$에서 $(-1-k)^2=(-k)^2$

$k^2+2k+1=k^2,\ 2k+1=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서

$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=0,\ a_3=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|&=\left|-\frac{1}{2}\right|+|0|+\left|\frac{1}{2}\right|\\&=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

답 1

20

ㄱ. $|f(x)-k|=|4x-4[x]-k|$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=n$ (n은 정수)에서 연속이어야 한다.

$|f(n)-k|=|4n-4n-k|=|-k|$

$\lim_{x\to n+}|4x-4[x]-k|=|4n-4n-k|=|-k|$

$\lim_{x\to n-}|4x-4[x]-k|=|4n-4(n-1)-k|=|4-k|$

즉, $|-k|=|4-k|$에서 $(-k)^2=(4-k)^2$

$k^2=16-8k+k^2,\ 16-8k=0$

$\therefore\ k=2$

따라서 $k=2$이면 함수 $|f(x)-k|$는 모든 실수 x에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(g(x))$가 $x=0$에서 연속이므로 $g(x)=t$로 놓으면 $x\longrightarrow 0+$일 때 $t\longrightarrow 0-$이므로

$\lim_{x\to 0+}f(g(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=4$

$x\longrightarrow 0-$일 때 $t\longrightarrow 0+$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(g(x))=\lim_{t\to 0+}f(t)=0$

따라서 $\lim_{x\to 0+}f(g(x))\neq\lim_{x\to 0-}f(g(x))$이므로 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$f(2)g(2)=0\times(4-4a)=0$

$\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=0\times(4-4a)=0$

$\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=(8-4)\times(4-4a)=16-16a$

즉, $16-16a=0$이므로 $a=1$

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 a의 개수는 1이다. (참)

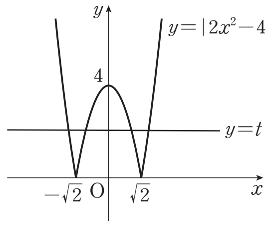
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

21

함수 $y=|2x^2-4|$의 그래프는 함수 $y=2x^2-4$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때, 함수 $y=|2x^2-4|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) $t<0$일 때,

교점의 개수는 0이므로 $f(t)=0$

(ii) $t=0$일 때,

교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(iii) $0<t<4$일 때,

교점의 개수는 4이므로 $f(t)=4$

(iv) $t=4$일 때,

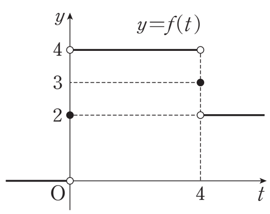
교점의 개수는 3이므로 $f(t)=3$

(v) $t>4$일 때,

교점의 개수는 2이므로 $f(t)=2$

(i)~(v)에서 $f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<4) \\ 3 & (t=4) \\ 2 & (t>4) \end{cases}$ 이므로 함수 $y=f(t)$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$, $t=4$에서 불연속이므로 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $t=0$, $t=4$에서 연속이어야 한다.

한편, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서 연속이므로

$f(0)g(0)=2\times b=2b$

$\lim_{x\to 0+} f(t)g(t)=4\times b=4b$

$\lim_{x\to 0-} f(t)g(t)=0$

즉, $2b=4b=0$에서 $b=0$ ······㉠

또한, 함수 $f(t)g(t)$가 $t=4$에서 연속이므로

$f(4)g(4)=3\times(16+4a+b)=48+12a+3b$

$=48+12a$ ($\because$ ㉠)

$\lim_{x\to 4+} f(t)g(t)=2\times(16+4a+b)=32+8a+2b$

$=32+8a$ ($\because$ ㉠)

$\lim_{x\to 4-} f(t)g(t)=4\times(16+4a+b)=64+16a+4b$

$=64+16a$ ($\because$ ㉠)

즉, $48+12a=32+8a=64+16a$에서 $a=-4$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x^2-4x$이므로

$g(5)=25-4\times5=5$

답 5

다른풀이

$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<4) \\ 3 & (t=4) \\ 2 & (t>4) \end{cases}$ 에서

$f(t)$는 $t=0$, $t=4$에서 불연속인 함수이다.

불연속인 함수와의 곱으로 이루어진 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(0)=g(4)=0$이어야 한다.

이때, $g(t)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(t)=t(t-4)$이다.

$\therefore\ g(5)=5\times1=5$

22

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

즉, 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=a$에서 연속이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$f(a)f(a-a)=f(a)\times f(0)=-6f(a)$

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=f(a)\times(-6)=-6f(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=f(a)\times3=3f(a)$

즉, $-6f(a)=3f(a)$에서 $f(a)=0$

이때, $a<0$이므로 $f(a)=a^2+4a+3=0$

$(a+1)(a+3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=-3$ ······㉠

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)f(0-a)=f(0)\times f(-a)=-6f(-a)$

$\lim_{x\to 0+} f(x)f(x-a)=(-6)\times f(-a)=-6f(-a)$

$\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-a)=3\times f(-a)=3f(-a)$

즉, $-6f(-a)=3f(-a)$에서 $f(-a)=0$

이때, $-a>0$이므로

$f(a)=-2a-6=0$에서 $a=-3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$

(ii) $a=0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$, 즉 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\{f(0)\}^2=(-6)^2=36$

$\lim_{x\to 0+} \{f(x)\}^2=(-6)^2=36$

$\lim_{x\to 0-} \{f(x)\}^2=3^2=9$

$\lim_{x\to 0+} \{f(x)\}^2\neq \lim_{x\to 0-} \{f(x)\}^2$이므로 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $a>0$일 때,

함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)f(0-a)=-6\times f(-a)=-6f(-a)$

$\lim_{x\to 0+} f(x)f(x-a)=-6\times f(-a)=-6f(-a)$

$\lim_{x\to 0-} f(x)f(x-a)=3\times f(-a)=3f(-a)$

즉, $-6f(-a)=3f(-a)$에서 $f(-a)=0$

이때, $-a<0$이므로

$f(-a)=a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$ ……㉢

또한, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$f(a)f(a-a)=f(a)\times(-6)=-6f(a)$

$\lim_{x\to a+} f(x)f(x-a)=f(a)\times(-6)=-6f(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x)f(x-a)=f(a)\times 3=3f(a)$

즉, $-6f(a)=3f(a)$에서 $f(a)=0$

이때, $a>0$이므로

$f(a)=2a-6=0$에서 $a=3$ ……㉣

㉢, ㉣에서 $a=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값은 $a=-3$ 또는 $a=3$이므로 구하는 상수 a의 개수는 2이다.

답 2

23

조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x)=x(x+3)$이고

조건 ㈏에서 $g(0)=1$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$

$\therefore\ f(0)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하자.

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x(x+3)}{f(x)}=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$에서

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=\frac{3}{b}$$

$g(0)=1$이므로 $\dfrac{3}{b}=1$ $\quad\therefore\ b=3$

즉, $g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 방정식 $x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-12<0$, $(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ ……㉠

이때, $f(1)=1\times(1^2+a+3)=a+4$이고

$a+4$가 자연수이어야 하므로 $a>-4$이고 a는 정수이다.

따라서 ㉠에서 a의 값은 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3이고

$g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$이므로 $g(2)$는 $a=3$일 때 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

답 ①

Ⅱ. 미분

유형 연습 03 미분계수와 도함수 본문 pp.73~93

01-1 -9	01-2 2	02-1 -4
02-2 2	02-3 0	03-1 -1
03-2 20	03-3 $-\frac{2}{3}$	04-1 6
04-2 10	05-1 ㄴ	06-1 ㄷ
07-1 12	07-2 2	07-3 4
08-1 8	08-2 -35	08-3 $\frac{1}{2}$
09-1 24	09-2 -15	10-1 56
10-2 8	10-3 28	11-1 15
11-2 5	11-3 10	12-1 15
12-2 2		

01-1

함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(16+4a)-(1+a)}{4-1}$$
$$=\frac{15+3a}{3}=5+a$$

즉, $5+a=2$이므로 $a=-3$

따라서 함수 $f(x)=x^2-3x$이므로 $x=-3$에서의 미분계수는

$$f'(-3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-3+\Delta x)-f(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(-3+\Delta x)^2-3(-3+\Delta x)\}-\{(-3)^2-3\times(-3)\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-9\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-9)=-9$$

답 -9

01-2

함수 $f(x)=x^2+4ax+a$에 대하여

x의 값이 $2-k$에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2)-f(2-k)}{2-(2-k)}=\frac{f(2)-f(2-k)}{k}$$

x의 값이 2에서 $2+k$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(2+k)-f(2)}{2+k-2}=\frac{f(2+k)-f(2)}{k}$$

이므로

$$\frac{f(2)-f(2-k)}{k}+\frac{f(2+k)-f(2)}{k}$$
$$=\frac{f(2+k)-f(2-k)}{k}=0$$

$\therefore f(2+k)=f(2-k)$ ……㉠

㉠을 다시 함수 $f(x)$의 식에 대입하면

$(2+k)^2+4a(2+k)+a=(2-k)^2+4a(2-k)+a$

$k^2+4k+4+8a+4ak+a=k^2-4k+4+8a-4ak+a$

$8k+8ak=0,\ 8k(1+a)=0$

그런데 $k>0$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=x^2-4x-1$

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-4(3+\Delta x)-1\}-(3^2-4\times3-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$

답 2

다른풀이

㉠에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 것을 이용하면 함수 $f(x)$의 식을 쉽게 구할 수 있다.

$x^2+4ax+a=(x+2a)^2-4a^2+a$에서 $-2a=2$

$\therefore a=-1$

이것을 다시 $f(x)$에 대입하면 $f(x)=x^2-4x-1$

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2-4(3+\Delta x)-1\}-(3^2-4\times3-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$

02-1

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}$$
$$=3f'(2)=-6$$

$\therefore\ f'(2)=-2$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{2h+h^2}\times\lim_{h\to0}(2+h)$$
$$=f'(2)\times\lim_{h\to0}(2+h)$$
$$=2f'(2)=-4$$

답 -4

02-2

$f'(a)=1$이고 함수 $g(x)$는 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2\right\}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=2f'(a)-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$$
$$=2-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=0$$
$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=2$$

답 2

다른풀이

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$에서 극한값이 존재하고

$h\longrightarrow0$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}\{f(a+2h)-f(a)-g(h)\}=0$에서 $\displaystyle\lim_{h\to0}g(h)=0$

이때, 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0}g(h)=g(0)=0$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)+g(0)}{h}\ (\because\ g(0)=0)$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2\right\}-\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=2f'(a)-g'(0)$$
$$=2-g'(0)\ (\because\ f'(a)=1)$$
$$=0$$
$$\therefore\ g'(0)=2$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$
$$=g'(0)=2$$

02-3

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 함수식 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

즉, $f(x)=(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓을 수 있다.

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{|f(2+h^2)|-|f(2-h^2)|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{|h^2Q(2+h^2)|-|-h^2Q(2-h^2)|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2\{|Q(2+h^2)|-|Q(2-h^2)|\}}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to0}\{|Q(2+h^2)|-|Q(2-h^2)|\}$$
$$=|Q(2)|-|Q(2)|=0$$

답 0

03-1

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(1)+f(1)-f(x^2)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x^2-1)f(1)}{x^2-1}-\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=f(1)-f'(1)$$
$$=2-3=-1$$

답 -1

03-2

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^2-1}=8$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때

(분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-4\}=0$에서

$f(1)=4$ ······㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=8$$

$\therefore\ f'(1)=16$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여 $f(1)+f'(1)=4+16=20$

답 20

03-3

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-2$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-2\}=0$에서 $f(2)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-2$

또한, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=1$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{g(x)+2\}=0$에서 $g(2)=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=1$

$$\lim_{x\to2}\frac{xg(2)-2g(x)}{xf(2)-2f(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{xg(2)-2g(x)}{x-2}}{\dfrac{xf(2)-2f(x)}{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{xg(2)-2g(2)+2g(2)-2g(x)}{x-2}}{\dfrac{xf(2)-2f(2)+2f(2)-2f(x)}{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{g(2)(x-2)}{x-2}-2\times\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}}{\dfrac{f(2)(x-2)}{x-2}-2\times\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}}$$
$$=\frac{g(2)-2g'(2)}{f(2)-2f'(2)}$$
$$=\frac{-2-2\times1}{2-2\times(-2)}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

04-1

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy^2+x^2y$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

$$\therefore\ f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)+2h^2+4h-f(2)}{h}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+2h+4\right\}$$
$$=f'(0)+4$$
$$=2+4=6$$

답 6

다른풀이

$f(0)=0$을 구한 뒤, 함수 $f(x)$의 도함수의 정의를 이용하여 구할 수도 있다.

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh^2+x^2h-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+xh^2+x^2h}{h}$$
$$=x^2+\lim_{h\to0}xh+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$$
$$=x^2+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because\ f(0)=0)$$
$$=x^2+f'(0)=x^2+2$$

따라서 $f'(2)=4+2=6$이다.

04-2

$f(x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면 $f(0)=3f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+f(1)+f(h)-f(1)}{h}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2f(h)}{h}=4$$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=2$ ……㉡

$\therefore\ f'(4)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4h)+f(4)+f(h)-f(4)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4h)+f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(4h)}{4h}\times4\right\}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$

$=4f'(0)+f'(0)$

$=5f'(0)=10$ ($\because$ ㉡)

답 10

다른풀이

$f(0)=0$을 구한 뒤, 함수 $f(x)$의 도함수의 정의를 이용하여 구할 수도 있다.

$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(xh)+f(x)+f(h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(xh)+f(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(xh)-f(0)+f(h)-f(0)}{h}$ ($\because\ f(0)=0$)

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(xh)-f(0)}{xh}\times x\right\}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)x+f'(0)$ ……㉠

이때, $f'(1)=4$이므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(0)+f'(0)=4,\ 2f'(0)=4$

$\therefore\ f'(0)=2$

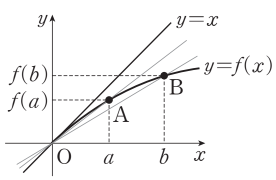
이 식을 다시 ㉠에 대입하여 정리하면

$f'(x)=2x+2$

$\therefore\ f'(4)=8+2=10$

05-1

ㄱ. $f(0)=0$이고



$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}$

이므로 $\dfrac{f(a)}{a}$는 두 점

O$(0,\ f(0))$, A$(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기이다.

$\therefore$ (직선 OA의 기울기)$=\dfrac{f(a)}{a}$

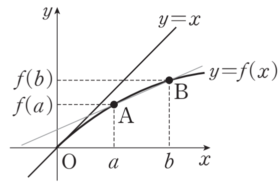
또한, $\dfrac{f(b)}{b}=\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}$이므로 $\dfrac{f(b)}{b}$는 두 점

O$(0,\ f(0))$, B$(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.

$\therefore$ (직선 OB의 기울기)$=\dfrac{f(b)}{b}$

즉, $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$이다. (거짓)

ㄴ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는



두 점 A$(a,\ f(a))$,

B$(b,\ f(b))$를 지나는

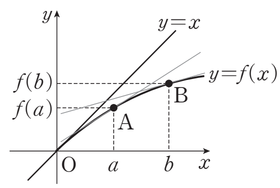
직선의 기울기이고,

이 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

$\therefore\ f(b)-f(a)<b-a$ ($\because\ b-a>0$) (참)

ㄷ. $f'(a)$는 점 A$(a,\ f(a))$



에서 그은 접선의 기울기,

$f'(b)$는 점 B$(b,\ f(b))$

에서 그은 접선의 기울기

이므로 두 점 A, B에서의

접선의 기울기를 비교하면 $f'(a)>f'(b)$

$\therefore\ f'(a)-f'(b)>0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

06-1

ㄱ. (반례) $f(x)=|x-a|$라 하면

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|a+h-a|-|a-h-a|}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|-|-h|}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|-|h|}{2h}=0$

이므로 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

한편, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{|h|}{h}$이고

(i) $h\longrightarrow 0+$일 때,

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h}{h}=1$

(ⅱ) $h \longrightarrow 0-$일 때,

$$\lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. (반례) $f(x) = \begin{cases} |x-a| & (x \neq a) \\ 1 & (x=a) \end{cases}$이라 하면

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|a+h-a|-|a-h-a|}{2h}$$

$$=0$$

즉, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재하지만

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} |x-a| = 0$, $f(a)=1$이므로

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ (거짓)

ㄷ. $h^3=t$로 놓으면 $h \longrightarrow 0+$일 때 $t \longrightarrow 0+$이고

$h \longrightarrow 0-$일 때 $t \longrightarrow 0-$이다.

즉, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h^3)-f(a)}{h^3} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a-t)-f(a)}{t}$이다.

이때, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$이고

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a-t)-f(a)}{t} = -\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$이므로

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h^3)-f(a)}{h^3}$의 값이 존재하면

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값도 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ㄷ

07-1

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-9x^2+8x$

점 $(a,\ b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(a)=a^4-3a^3+4a^2+2=b$ ……㉠

또한, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 12이므로

$f'(a)=4a^3-9a^2+8a=12$

$4a^3-9a^2+8a-12=0$에서

2	4	-9	8	-12
		8	-2	12
	4	-1	6	0

$(a-2)(4a^2-a+6)=0$

$\therefore\ a=2$

㉠에 $a=2$를 대입하면

$b=2^4-3\times2^3+4\times2^2+2=10$

$\therefore\ a+b=12$

답 12

07-2

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(3)=-5$이므로 $27+6a+b=-5$

$\therefore\ 6a+b=-32$ ……㉠

한편, $f(0)=f(2)$이므로

$c=8+4a+2b+c$

$4a+2b=-8$

$\therefore\ 2a+b=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=10$

따라서 $f'(x)=3x^2-14x+10$이므로

$f'(4)=48-56+10=2$

답 2

07-3

함수 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nx^{n-1}이다.

조건 ㈎에서 $f'(x)f(x)$의 최고차항은 $nx^{n-1}\times x^n=nx^{2n-1}$이고 $2x^3$과 같아야 하므로

$2n-1=3 \qquad \therefore\ n=2$

즉, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+px+q$ ($p,\ q$는 상수)라 하면

$f'(x)=2x+p$

조건 ㈏에서 $x=0$을 대입하면 $f'(2)=-f'(2)$이므로

$4+p=-(4+p)$, $8+2p=0$

$\therefore\ p=-4$

즉, $f(x)=x^2-4x+q$, $f'(x)=2x-4$이므로

$$f'(x)f(x)=(2x-4)(x^2-4x+q)$$
$$=2x^3-12x^2+(2q+16)x-4q$$

$2x^3-12x^2+(2q+16)x-4q=2x^3+2ax^2-4b$이므로

$-12=2a$에서 $a=-6$

$2q+16=0$에서 $q=-8$

$-4q=-4b$에서 $b=-8$

따라서 $f(x)=x^2-4x-8$에서

$$f(b-a)=f\{-8-(-6)\}=f(-2)=4+8-8$$
$$=4$$

답 4

08-1

$\lim_{x\to1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+a}{x-1}=b$에서 극한값이 존재하고

$x \longrightarrow 1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+a)=0$에서

$1-2+1-2+1+a=0$ $\therefore a=1$ ……㉠

이때, $f(x)=x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5$이라 하면 $f(1)=-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=b$$

$f(x)=x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5$에서

$f'(x)=9x^8-16x^7+7x^6-12x^5+5x^4$이므로

$f'(1)=9-16+7-12+5=-7$ $\therefore b=-7$

$\therefore a-b=1-(-7)=8$

답 8

다른풀이

㉠에서 $a=1$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x^9-2x^8+x^7-2x^6+x^5+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(9x^8-16x^7+7x^6-12x^5+5x^4)$$
$$=-7=b$$

$\therefore a-b=1-(-7)=8$

08-2

$f(x)=x^n-9x$라 하면 $f(1)=1-9=-8$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-9x+8}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

즉, $a_n=f'(1)$이다.

$f(x)=x^n-9x$에서 $f'(x)=nx^{n-1}-9$이므로

$f'(1)=n-9$ $\therefore a_n=n-9$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n-9)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}9$$
$$=\frac{10\times11}{2}-9\times10$$
$$=55-90=-35$$

답 -35

다른풀이

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-9x+8}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(nx^{n-1}-9)$$
$$=n-9=a_n$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n-9)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}9$$
$$=\frac{10\times11}{2}-9\times10$$
$$=55-90=-35$$

08-3

$\lim_{x\to-2}\frac{x^n+x^2+2x+8}{x^2-4}=a$에서 극한값이 존재하고

$x \longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^n+x^2+2x+8)=0$에서

$(-2)^n+(-2)^2+2\times(-2)+8=0$

$(-2)^n+4-4+8=0$, $(-2)^n=-8$

$\therefore n=3$ ……㉠

이때, $f(x)=x^3+x^2+2x$라 하면 $f(-2)=-8$이므로

$\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3+x^2+2x+8}{x^2-4}$

$=\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x \to -2} \left\{ \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \dfrac{1}{x-2} \right\}$

$=-\dfrac{1}{4} f'(-2)$

$f'(x)=3x^2+2x+2$이므로 $f'(-2)=12-4+2=10$

$\therefore\ a=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

따라서 $n+a=3+\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

답 $\dfrac{1}{2}$

다른풀이

㉠에서 $n=3$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+x^2+2x+8}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{3x^2+2x+2}{2x} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

즉, $a=-\dfrac{5}{2}$이므로 $n+a=3+\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

09-1

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.

$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x<0) \\ x^3+bx^2+cx & (0 \le x < 2) \\ -2x+d & (x \ge 2) \end{cases}$에서

$f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x \to 0-} f(x)$에서 $a=0$

$f(2)=\lim_{x \to 2-} f(x)$에서 $-4+d=8+4b+2c$

$\therefore\ 4b+2c-d=-12$ ……㉠

한편, $f'(x)=\begin{cases} -2 & (x<0) \\ 3x^2+2bx+c & (0<x<2) \\ -2 & (x>2) \end{cases}$에서

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 0+} f'(x)=\lim_{x \to 0-} f'(x)$, $\lim_{x \to 2+} f'(x)=\lim_{x \to 2-} f'(x)$

즉, $c=-2$, $-2=12+4b+c$에서 $b=-3$

㉠에 $b=-3$, $c=-2$를 대입하면 $d=-4$

$\therefore\ a-bcd=0-(-3)\times(-2)\times(-4)=24$

답 24

09-2

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} & (x<2) \\ x^2-2bx-4 & (x \ge 2) \end{cases}$에서

$x<2$일 때, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{(x^2+ax+3)-(4+2a+3)}{x-2}$

$=\dfrac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$

$=\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=x+a+2$

$\therefore\ g(x)=\begin{cases} x+a+2 & (x<2) \\ x^2-2bx-4 & (x \ge 2) \end{cases}$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 2+} g(x)=\lim_{x \to 2-} g(x)$에서 $-4b=4+a$

$\therefore\ a+4b=-4$ ……㉠

한편, $g'(x)=\begin{cases} 1 & (x<2) \\ 2x-2b & (x>2) \end{cases}$에서 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $\lim_{x \to 2+} g'(x)=\lim_{x \to 2-} g'(x)$

즉, $4-2b=1$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}$, $a=-10$ ($\because$ ㉠)

따라서 $ab=-15$이다.

답 -15

10-1

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 5이므로

$f(3)=-2$, $f'(3)=5$ ……㉠

$g(x)=(x^3-x^2+x-1)f(x)$에서

$g'(x)=(3x^2-2x+1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)f'(x)$

$\therefore\ g'(3)=(27-6+1)f(3)+(27-9+3-1)f'(3)$

$=22\times(-2)+20\times5$ ($\because$ ㉠)

$=-44+100=56$

답 56

10-2

조건 (가)에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow -1$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x)g(x)-6\}=0$에서 $f(-1)g(-1)=6$이고

조건 (나)에서 $f(-1)=2$이므로 $g(-1)=3$이다.

한편, 조건 (가)에서 $f(x)g(x)=h(x)$라 하면

$h(-1)=f(-1)g(-1)=6$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)g(x)-6}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}=4$$

$\therefore\ h'(-1)=4$

이때, $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$h'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$

$4=(-4)\times3+2\times g'(-1)$

$4=-12+2g'(-1)$

$2g'(-1)=16$

$\therefore\ g'(-1)=8$

답 8

10-3

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$에서

$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$
$\quad+(x-1)(x-3)\cdots(x-n)$
$\quad+(x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-n)$
$\quad+\cdots+(x-1)(x-2)(x-3)\cdots\{x-(n-1)\}$

이므로

$f'(2)=1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times(2-n)$

$=(-1)^{n-2}\times1\times2\times\cdots\times(n-2)$

$f'(n)=f'(2)(n^2-14n+43)$에서

$(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times1$

$=(-1)^{n-2}\times1\times2\times\cdots\times(n-2)\times(n^2-14n+43)$

$\therefore\ n-1=(-1)^{n-2}\times(n^2-14n+43)$ ……㉠

(i) n이 홀수일 때,

$(-1)^{n-2}=-1$이므로 ㉠에서

$n-1=-(n^2-14n+43)$

$n^2-14n+43+n-1=0,\ n^2-13n+42=0$

$(n-6)(n-7)=0$

이때, n은 홀수이므로 $n=7$

(ii) n이 짝수일 때,

$(-1)^{n-2}=1$이므로 ㉠에서

$n-1=n^2-14n+43$

$n^2-15n+44=0$

$(n-4)(n-11)=0$

이때, n은 짝수이므로 $n=4$

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 곱은 $7\times4=28$이다.

답 28

11-1

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 극한값이 존재하고 $x \longrightarrow 2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-a\}=0$에서 $f(2)=a$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$$

$\therefore\ f'(2)=4$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2b+3 \quad \therefore\ a=2b+3$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$ ……㉢

㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=b$

$\therefore\ b=4,\ a=11$ ($\because$ ㉡)

따라서 $a+b=15$이다.

답 15

11-2

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+2x+1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=3$ ……㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$ ……㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=2$ ……㉣

$g(x)=xf(x)$라 하면 곡선 $y=xf(x)$, 즉 $y=g(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는 $g'(1)$이다.

이때, $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)=3+2=5$ ($\because$ ㉡, ㉣)

답 5

11-3

다항식 x^9-x+7을 $(x+1)^2(x-1)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^9-x+7=(x+1)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-1+7=a+b+c$

$\therefore\ a+b+c=7$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+1+7=a-b+c$

$\therefore\ a-b+c=7$ ……㉢

㉡, ㉢에 의하여 $b=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$9x^8-1=2(x+1)(x-1)Q(x)+(x+1)^2Q(x)+(x+1)^2(x-1)Q'(x)+2ax+b$$

이 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$8=-2a$ ($\because\ b=0$)

$\therefore\ a=-4$

㉡ 또는 ㉢에 $a=-4$, $b=0$을 대입하면 $c=11$

따라서 $R(x)=-4x^2+11$이므로

$R\left(\frac{1}{2}\right)=(-4)\times\frac{1}{4}+11=10$

답 10

12-1

$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ 2x-1 & (x\ge1)\end{cases}$, $g(x)=ax+b$에서

$f(x)g(x)=\begin{cases}ax+b & (x<1)\\ (2x-1)(ax+b) & (x\ge1)\end{cases}$

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$이어야 한다.

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$
$=a+b$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\{f(x)g(x)\}'=\begin{cases}a & (x<1)\\ 2(ax+b)+a(2x-1) & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)g(x)\}'=\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)g(x)\}'$이어야 한다.

즉, $2(a+b)+a=a$이다.

$3a+2b=a$, $a+b=0$

$\therefore\ a=-b$

이때, $g(2)=5$이므로 $2a+b=2a-a=a=5$

$\therefore\ a=5$, $b=-5$

(i), (ii)에서 $g(x)=5x-5$이므로 $g(4)=20-5=15$

답 15

12-2

$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\le0)\\ x-2 & (x>0)\end{cases}$에서

$g(x)=(x^n+a)f(x)$라 하면

$g(x)=\begin{cases}(x^n+a)(x^2+1) & (x\le0)\\ (x^n+a)(x-2) & (x>0)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로 $g(0)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)$이어야 한다.

$g(0)=a$, $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=-2a$, $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=a$이므로

$-2a=a$ $\quad\therefore\ a=0$

$\therefore\ g(x)=\begin{cases}x^n(x^2+1) & (x\le0)\\ x^n(x-2) & (x>0)\end{cases}=\begin{cases}x^{n+2}+x^n & (x\le0)\\ x^{n+1}-2x^n & (x>0)\end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases}(n+2)x^{n+1}+nx^{n-1} & (x<0)\\ (n+1)x^n-2nx^{n-1} & (x>0)\end{cases}$에서

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)$이다.

(i) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0+}(2x-2)=-2$

$\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0-}(3x^2+1)=1$

즉, $\lim_{x\to0+}g'(x)\neq\lim_{x\to0-}g'(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $n\geq2$일 때,

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0+}\{(n+1)x^n-2nx^{n-1}\}=0$

$\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0-}\{(n+2)x^{n+1}+nx^{n-1}\}=0$

즉, $\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$, 즉 $(x^n+a)f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 최솟값은 2이다.

답 2

개 념 마 무 리

본문 pp.94~97

01 13	**02** 3	**03** 8	**04** ①
05 -8	**06** 25	**07** 5	**08** ㄴ, ㄷ
09 ⑤	**10** ④	**11** 9	**12** 4
13 -3	**14** 2	**15** 1	**16** 118
17 ④	**18** ③	**19** -24	**20** 12
21 58	**22** ㄱ, ㄴ, ㄷ	**23** (1, 1), (2, 2)	
24 $\frac{3}{2}$			

01

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+1$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f(a+1)-f(a)$$

즉, $f(a+1)-f(a)=(a-1)^2$ ……㉠

함수 $f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 8까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{f(8)-f(1)}{7} \quad \cdots\cdots㉡$$

㉠에 $a=1, 2, 3, \cdots, 7$을 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{f(2)}-f(1)=0^2\\
&\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}=1^2\\
&\cancel{f(4)}-\cancel{f(3)}=2^2\\
&\quad\vdots\\
+)\ &f(8)-\cancel{f(7)}=6^2\\
\hline
&f(8)-f(1)=0^2+1^2+2^2+\cdots+6^2\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{6\times7\times13}{6}\\
&\qquad=91
\end{aligned}$$

따라서 구하는 평균변화율은 ㉡에서 $\frac{91}{7}=13$

답 13

보충설명

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

02

함수 $f(x)=(x-2a)(x-2b)$에 대하여 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{(b-2a)(-b)-(-a)(a-2b)}{b-a}\\&=\frac{a^2-b^2}{b-a}=-(a+b) \quad \cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

한편, $f(x)=(x-2a)(x-2b)$에서

$$\begin{aligned}f'(2a)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2a+\Delta x)-f(2a)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x(2a-2b+\Delta x)}{\Delta x}\\&=2a-2b \quad \cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

이때, ㉠=㉡이므로

$-(a+b)=2a-2b$

$b=3a$

$\therefore \frac{b}{a}=3$

답 3

보충설명

함수의 곱의 미분법을 이용하면 $f'(2a)$의 값을 쉽게 구할 수 있다.

$f(x)=(x-2a)(x-2b)$에서

$f'(x)=(x-2b)+(x-2a)=2x-2a-2b$이므로

$f'(2a)=4a-2a-2b=2a-2b$

03

조건 (가)에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)-g(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)-g(h)+g(0)}{h}$$

$$(\because \text{ 조건 (나)에서 } g(0)=0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2\right\}-\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$=2f'(2)-g'(0)=2$$

이때, 조건 (나)에서 $f'(2)=5$이므로

$2f'(2)-g'(0)=2\times 5-g'(0)=2$

$\therefore\ g'(0)=8$

답 8

04

$f(x)=x^2|x-1|$에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h}\qquad\cdots\cdots㉠$$

(i) $h\longrightarrow 0+$일 때, ㉠에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+2h)^2\times 2h-(1-3h)^2\times 3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\{2(1+2h)^2-3(1-3h)^2\}$$

$$=2-3=-1$$

(ii) $h\longrightarrow 0-$일 때, ㉠에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{(1+2h)^2|2h|-(1-3h)^2|-3h|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+2h)^2\times(-2h)-(1-3h)^2\times(-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\{-2(1+2h)^2+3(1-3h)^2\}$$

$$=-2+3=1$$

(i), (ii)에서

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

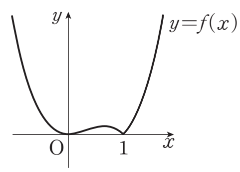
$$\neq\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}\text{이므로}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$의 값은 존재하지 않는다.

답 ①

오답피하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $x=1$에서의 우미분계수와 좌미분계수가 다르므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

$x=1$에서 그래프가 꺾여 있으므로 미분계수가 같을 수 없다.

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}$$

$$-\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)\right\}$$

$$=2f'(1)+3f'(1)=5f'(1)$$

로 계산할 수 없음에 유의한다.

보충설명

절댓값 기호, 가우스 기호가 포함된 함수의 미분계수를 구할 때는 먼저 극한값의 존재여부를 확인하여야 한다.

05

$f(0)=\alpha\ (\alpha\neq 0)$라 하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{f(x)+5x}=\dfrac{f(0)}{f(0)}=\dfrac{\alpha}{\alpha}=1\neq 3$이므로 $f(0)=0$이다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{f(x)+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-1}{\dfrac{f(x)}{x}+5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-1}{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+5}\ (\because\ f(0)=0)$$

$$=\frac{f'(0)-1}{f'(0)+5}=3$$

즉, $f'(0)-1=3f'(0)+15$이므로

$2f'(0)=-16 \qquad \therefore\ f'(0)=-8$

답 -8

06

$f(x+y)=f(x)f(y)$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)^2 \qquad \therefore\ f(0)=1\ (\because\ f(x)>0)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\ (\because\ ㉠)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{f(h)-1\}}{h}$$

$$=f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=f(x)f'(0)$$

즉, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=f'(0)=5$이므로

$\left\{\dfrac{f'(10)}{f(10)}\right\}^2=5^2=25$

답 25

07

점 $(1,\ 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=3$

한편, 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{7-8}{5-1}=-\dfrac{1}{4}$이므로

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기는 4이다.

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1

$\therefore\ f'(1)=4$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)+f(1)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to 1}\frac{f(1)(x-1)}{x-1}$$

$$=2f'(1)-f(1)$$

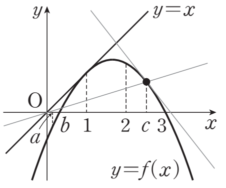
$$=2\times 4-3=5$$

답 5

08

ㄱ. $f(c)<cf'(c)$에서 $\dfrac{f(c)}{c}<f'(c)\ (\because\ c>0)$

$\dfrac{f(c)}{c}=\dfrac{f(c)-0}{c-0}$은 원점과 점 $(c,\ f(c))$를 지나는 직선의 기울기와 같고 $f'(c)$는 점 $(c,\ f(c))$에서의 접선의 기울기와 같다.

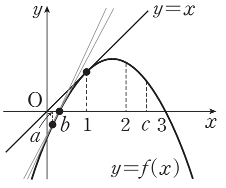


이때, 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{f(c)}{c}>f'(c)$

$\therefore\ f(c)>cf'(c)$ (거짓)

ㄴ. $f'(a),\ f'(b)$는 각각 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$에서의 접선의 기울기이고



$f(1)=\dfrac{f(1)-0}{1-0}$은 두 점 $(0,\ 0),\ (1,\ f(1))$을 이은 직선의 기울기와 같다.

세 직선의 기울기를 비교하면

$f'(a)>f'(b)>f(1)$ (참)

ㄷ. $0<a<b$이고 $0<f'(b)<f'(a)$이므로

$af'(b)<bf'(a)$

양변을 ab로 나누면

$\therefore\ \dfrac{f'(b)}{b}<\dfrac{f'(a)}{a}\ (\because\ ab>0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

09

ㄱ. $F(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{hf(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}f(1+h)=f(1)$$

($\because$ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속)

따라서 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $F(x)=(x-1)^2f(x)$라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2f(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\{hf(1+h)\}=0$$

따라서 함수 $(x-1)^2f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $F(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2f(x)}$이라 하면

$$F'(1)=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{1}{1+h^2f(1+h)}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{-h^2f(1+h)}{1+h^2f(1+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-hf(1+h)}{1+h^2f(1+h)}=0$$

따라서 함수 $\dfrac{1}{1+(x-1)^2f(x)}$은 $x=1$에서 미분가능하다.

그러므로 $x=1$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10

$f(1)=0$이므로

$f(x)=(x-1)^nQ(x)$ (n은 자연수, $Q(x)$는 다항함수)라 하면

$g(x)=|(x-1)^nQ(x)|$

$\therefore\ g(1)=0$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하기 위해서는 $g'(1)$, 즉 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$의 값이 존재해야 한다.

이때,

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{|h^nQ(1+h)|}{h}\quad(\because\ g(1)=0)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{|h^n||Q(1+h)|}{h}$$
$$=|Q(1)|\times\lim_{h\to0}\frac{|h^n|}{h}$$

이고 $|Q(1)|$은 상수이므로 $g'(1)$이 존재하기 위해서는 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{|h^n|}{h}$의 값이 존재해야 한다.

(i) $n=1$일 때,

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{|h|}{h}=1,\ \lim_{h\to0-}\frac{|h|}{h}=-1$이므로 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{|h^n|}{h}$의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $n\ge2$일 때,

$$\lim_{h\to0+}\frac{|h^n|}{h}=\lim_{h\to0+}h^{n-1}=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{|h^n|}{h}=\begin{cases}-\lim\limits_{h\to0-}h^{n-1} & (n\text{이 홀수})\\ \lim\limits_{h\to0-}h^{n-1} & (n\text{이 짝수})\end{cases}=0$$

즉, $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{|h^n|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^n|}{h}$이므로 극한값이 존재한다.

(i), (ii)에서 극한값이 존재하기 위해서는 $n\ge2$

따라서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 함수 $f(x)$의 조건은 함수 $f(x)$의 식이 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지는 것이다.

답 ④

11

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}=\frac{1}{4}$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow-1$일 때 (분자) $\longrightarrow0$이므로 (분모) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x^n+x^5+x^2+1)=0$에서

$(-1)^n+(-1)+1+1=0$

$\therefore\ (-1)^n=-1$ ……㉠

$f(x)=x^n+x^5+x^2$이라 하면

$$f(-1)=(-1)^n+(-1)^5+(-1)^2$$
$$=-1+(-1)+1\ (\because\ ㉠)$$
$$=-1$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\overbrace{(x+1)(x^2-x+1)}^{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{f(x)-f(-1)}$$

$$=3\lim_{x\to -1}\frac{x-(-1)}{f(x)-f(-1)}$$

$$=\frac{3}{f'(-1)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ f'(-1)=12$

이때, $f'(x)=nx^{n-1}+5x^4+2x$이므로

$f'(-1)=n(-1)^{n-1}+5-2$

$\qquad =n+3$ ($\because$ ㉠)

즉, $n+3=12$이므로 $n=9$

답 9

다른풀이

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^n+x^5+x^2+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2}{nx^{n-1}+5x^4+2x}$$

$$=\frac{3}{n(-1)^{n-1}+5-2}$$

$$=\frac{3}{n(-1)^{n-1}+3}$$

$$=\frac{3}{n+3}\ (\because ㉠)$$

즉, $\frac{3}{n+3}=\frac{1}{4}$이므로

$n+3=12 \qquad \therefore\ n=9$

12

조건 ㈎의 $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)+3}{x+2}=4$에서 극한값이 존재하고

$x\longrightarrow -2$일 때 (분모) $\longrightarrow 0$이므로 (분자) $\longrightarrow 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -2}\{f(x)+3\}=0$에서 $f(-2)+3=0$

$\therefore\ f(-2)=-3$

이때, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)+3}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=4$이므로

$f'(-2)=4$

㈎

조건 ㈏의 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)-5=(4+4+4)\times g(-2)$

$-3-5=12g(-2)$

$12g(-2)=-8 \qquad \therefore\ g(-2)=-\frac{2}{3}$

조건 ㈏의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-2)g(x)+(x^2-2x+4)g'(x)$이므로

$f'(-2)=-6\times g(-2)+(4+4+4)g'(-2)$

$4=-6\times\left(-\frac{2}{3}\right)+12g'(-2)$

$12g'(-2)=0 \qquad \therefore\ g'(-2)=0$

㈏

따라서 $f'(-2)-g'(-2)=4-0=4$

㈐

답 4

단계	채점 기준	배점
㈎	조건 ㈎에서 $f(-2)$, $f'(-2)$의 값을 구한 경우	40%
㈏	조건 ㈏에서 $g(-2)$, $g'(-2)$의 값을 구한 경우	40%
㈐	구하는 값을 구한 경우	20%

13

$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>2) \\ 2-x & (x\le 2)\end{cases}$이므로

$g(x)=\begin{cases} (x+b)(x-1) & (x>2) \\ a(2-x) & (x\le 2)\end{cases}$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$g(2)=\lim_{x\to 2+}g(x)=\lim_{x\to 2-}g(x)$

$(2+b)\times(2-1)=a\times(2-2)$

$2+b=0 \qquad \therefore\ b=-2$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=1$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{a(2-x)}{x-2}=-a$$

에서 $1=-a \qquad \therefore\ a=-1$

$\therefore\ a+b=-1+(-2)=-3$

답 -3

다른풀이

$g_1(x)=(x+b)(x-1)$, $g_2(x)=a(2-x)$라 하면

$g_1'(x)=2x+b-1$, $g_2'(x)=-a$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $g_1(2)=g_2(2)$에서 $2+b=0 \qquad \therefore\ b=-2$

또한, $g_1'(2)=g_2'(2)$에서

$b+3=-a \qquad \therefore\ a=-1\ (\because\ b=-2)$

$\therefore\ a+b=-3$

14

$g(x)=\begin{cases} f(x-1) & (x\ge 3) \\ f(x+1) & (x<3) \end{cases}$에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(3)=\lim_{x\to 3+} g(x)=\lim_{x\to 3-} g(x)$

즉, $f(2)=\lim_{x\to 3+} f(x-1)=\lim_{x\to 3-} f(x+1)$

$\therefore\ f(2)=f(4)$

$8+4a+2b+c=64+16a+4b+c,\ 12a+2b=-56$

$\therefore\ 6a+b=-28 \qquad \cdots\cdots$㉠

또한, $g'(3)$이 존재하므로 $\lim_{x\to 3+} g'(x)=\lim_{x\to 3-} g'(x)$이다.

이때, 함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, 함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$f'(4)=f'(2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$48+8a+b=12+4a+b$

$36=-4a \qquad \therefore\ a=-9$

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=26$

따라서 $f'(x)=3x^2-18x+26$이므로

$f'(2)=12-36+26=2$

답 2

15

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0) \qquad \cdots\cdots$㉠

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3h)g(0)-f(0)g(-3h)}{h}=3$에서

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3h)g(0)-f(0)g(-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3h)g(0)-f(0)g(0)+f(0)g(0)-f(0)g(-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3h)g(0)-f(0)g(0)}{h}-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0)g(-3h)-f(0)g(0)}{h}$

$=g(0)\times\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(3h)-f(0)}{3h}\times 3\right\}$

$\qquad -f(0)\times\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{g(-3h)-g(0)}{-3h}\times(-3)\right\}$

$=3f'(0)g(0)+3f(0)g'(0)=3$

$\therefore\ f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=1 \qquad \cdots\cdots$㉡

따라서 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수는 ㉠, ㉡에 의하여 1이다.

답 1

16

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\le x<b) \\ n+f(x) & (x\ge b) \end{cases}$에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(a)=\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)$,

$g(b)=\lim_{x\to b+} g(x)=\lim_{x\to b-} g(x)$

$m-f(a)=f(a),\ n+f(b)=m-f(b)$

$\therefore\ m=2f(a),\ n=m-2f(b) \qquad \cdots\cdots$㉠

이때, $g'(a),\ g'(b)$가 존재하므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a<x<b) \\ f'(x) & (x>b) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a-} g'(x),\ \lim_{x\to b+} g'(x)=\lim_{x\to b-} g'(x)$

$-f'(a)=f'(a),\ f'(b)=-f'(b)$

$\therefore\ f'(a)=f'(b)=0$

이때, $f(x)=x^3+3x^2-9x$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$\qquad =3(x^2+2x-3)$

$\qquad =3(x+3)(x-1)$

이므로 $a=-3,\ b=1$

이를 ㉠에 대입하면

$m=2f(-3)=2\times(-27+27+27)=54$,

$n=m-2f(1)=54-2\times(1+3-9)=64$

$\therefore\ m+n=118$

답 118

17

명제 '함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.'의 역은 '함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.'이다.

명제의 역이 성립하지 않으려면 주어진 함수는 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않은 함수이어야 한다.

ㄱ. $f(x)=x[x]$에서 $f(x)=\begin{cases} -x & (-1<x<0) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때, $f'(x)=\begin{cases} -1 & (-1<x<0) \\ 0 & (0<x<1) \end{cases}$이므로

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)}_{=0}\neq\underbrace{\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)}_{=-1}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)=x^2[x]$에서 $f(x)=\begin{cases} -x^2 & (-1<x<0) \\ 0 & (0\le x<1) \end{cases}$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때, $f'(x)=\begin{cases} -2x & (-1<x<0) \\ 0 & (0<x<1) \end{cases}$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=0$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이면서 미분가능하다.

ㄷ. $f(x)=(x+1)|x|$에서

$f(x)=\begin{cases} -x(x+1) & (x<0) \\ x(x+1) & (x\ge 0) \end{cases}$

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때, $f'(x)=\begin{cases} -(x+1)-x & (x<0) \\ (x+1)+x & (x>0) \end{cases}$이므로

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)}_{=1}\neq\underbrace{\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)}_{=-1}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

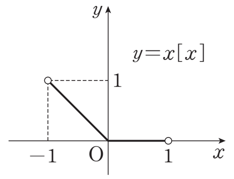
따라서 주어진 명제의 역이 성립하지 않는 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

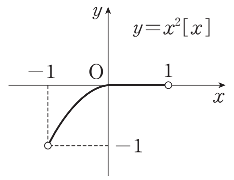
다른풀이

$-1<x<1$에서 〈보기〉의 함수의 그래프를 통해 확인할 수 있다.

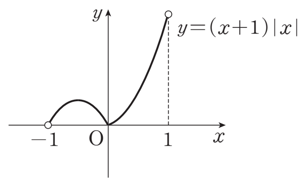
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분가능하지 않은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

18

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 식은 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 2 & (0\le x<1) \\ x+1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

ㄱ. $f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 0 & (0<x<1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$

이때, $\underbrace{\lim\limits_{x\to 1+}f'(x)}_{=1}\neq\underbrace{\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)}_{=0}$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄴ. $xf(x)=\begin{cases} x & (x<0) \\ 2x & (0\le x<1) \\ x^2+x & (x\ge 1) \end{cases}$에서

$\{xf(x)\}'=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 2 & (0<x<1) \\ 2x+1 & (x>1) \end{cases}$

이때, $\underbrace{\lim_{x \to 0+} \{xf(x)\}'}_{=2} \neq \underbrace{\lim_{x \to 0-} \{xf(x)\}'}_{=1}$이므로

함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $f(x+1)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ 2 & (-1 \le x < 0) \\ x+2 & (x \ge 0) \end{cases}$이므로

$f(x)f(x+1)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ 2 & (-1 \le x<0) \\ 2(x+2) & (0 \le x<1) \\ (x+1)(x+2) & (x \ge 1) \end{cases}$이고

$x^k f(x)f(x+1)=\begin{cases} x^k & (x<-1) \\ 2x^k & (-1 \le x<0) \\ 2x^k(x+2) & (0 \le x<1) \\ x^k(x+1)(x+2) & (x \ge 1) \end{cases}$

$x^k f(x)f(x+1)=g(x)$라 하고

$-1<x<1$에서 $g'(x)$를 구하면

$g'(x)=\begin{cases} 2kx^{k-1} & (-1<x<0) \\ 2kx^{k-1}(x+2)+2x^k & (0<x<1) \end{cases}$

(i) $k=1$일 때,

$\lim_{x \to 0+} g'(x)=\lim_{x \to 0+} \{2(x+2)+2x\}=4$

$\lim_{x \to 0-} g'(x)=\lim_{x \to 0-} 2=2$

$\therefore \lim_{x \to 0+} g'(x) \neq \lim_{x \to 0-} g'(x)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $k \ge 2$일 때,

$\lim_{x \to 0+} g'(x)=\lim_{x \to 0-} g'(x)=0$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 최솟값은 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

보충설명

ㄱ. $x=1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다는 것을 확인할 수 있다.

19

조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 4이므로

$f(1)=f(5)$ ……㉠

$f'(1)=f'(5)$ ……㉡

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)+f(5+3h)-2f(1)}{h}$

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(5+3h)-f(5)}{h}$ ($\because$ ㉠)

$=\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h \to 0} \frac{f(5+3h)-f(5)}{h}$

$=f'(1)+\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(5+3h)-f(5)}{3h} \times 3 \right\}$

$=f'(1)+3f'(5)$

$=f'(1)+3f'(1)$ ($\because$ ㉡)

$=4f'(1)$

$f(x)=3x^2-12x+4$ $(0 \le x < 4)$에서

$f'(x)=6x-12$ $(0<x<4)$이므로

$f'(1)=6-12=-6$

$\therefore$ (주어진 식)$=4f'(1)=-24$

답 -24

20

(i) $f(x)$가 상수함수일 때,

조건 (가)에서 좌변의 식이 상수이고 우변의 식은 일차식이므로 등식이 성립하지 않는다.

(ii) $f(x)$가 일차함수일 때,

조건 (나)에서 $f(x)=a(x-1)+4$ $(a \neq 0)$라 하면

$f'(x)=a$

조건 (가)에서

$ax-2\{a(x-1)+4\}=-ax+2a-8$

$=2x-10$

$\therefore a=-2,\ 2a-8=-10$

위의 두 식을 만족시키는 a는 존재하지 않으므로 $f(x)$는 일차함수가 아니다.

(iii) $f(x)$가 n $(n \ge 2)$차 함수일 때,

$f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a \neq 0)$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}

이때, 조건 (가)의 좌변에서의 최고차항은 $(an-2a)x^n$이고, 우변에서의 최고차항은 $2x$이므로

$an-2a=0$ $\quad \therefore n=2$ ($\because a \neq 0$)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수, $p\neq0$)라 하면

$f'(x)=2px+q$

위의 식을 조건 ㈎에 대입하면

$2px^2+qx-2(px^2+qx+r)=2x-10$

$-qx-2r=2x-10$

$\therefore\ q=-2,\ r=5$

이때, 조건 ㈏에서 $f(1)=4$이므로

$p+q+r=4$

$p+(-2)+5=4 \qquad \therefore\ p=1$

따라서 $f(x)=x^2-2x+5$이고 $f'(x)=2x-2$이므로

$f(3)+f'(3)=8+4=12$

답 12

21

조건 ㈎에서 $g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$g(x)=(x-1)^2Q(x)+2$이므로

$g'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

$\therefore\ g(1)=2$ ……㉠

$\quad g'(1)=0$ ……㉡

조건 ㈏에서 $f(x)=(x-2)^3g(x)+ax+b$이므로

$f'(x)=3(x-2)^2g(x)+(x-2)^3g'(x)+a$

이때,

$f(1)=(-1)^3\times g(1)+a+b$

$\qquad=-2+a+b$ ……㉢

$f'(1)=3\times(-1)^2\times g(1)+(-1)^3\times g'(1)+a$

$\qquad=6+a$ ……㉣

조건 ㈐에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(1)=g(1)$ ……㉤

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}=3$에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$ ($\because$ ㉤)

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)$

$=6+a$ ($\because$ ㉡, ㉣)

$=3$

$\therefore\ a=-3$

이 값을 ㉢에 대입하면 $-5+b=2$ ($\because$ ㉠, ㉤)

$\therefore\ b=7$

따라서 $a^2+b^2=(-3)^2+7^2=58$

답 58

22

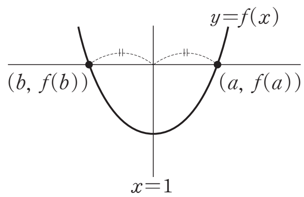
함수 $f(x)$는 $f(1-x)=f(1+x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

이때, 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-1)^2+k$ (k는 상수) ……㉠

이고 $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이다.

ㄱ. $m=0$이면 $f(b)=f(a)$이므로 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$는 다음 그림과 같이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.



이때, $a>b$이므로 $a>1$이고 $b<1$이다. (참)

ㄴ. $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$=\dfrac{\{(b-1)^2+k\}-\{(a-1)^2+k\}}{b-a}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{(b-1)^2-(a-1)^2}{b-a}$

$=\dfrac{(b-a)(a+b-2)}{b-a}$

$=a+b-2$

이때, $a+b<2$이므로 $m=a+b-2<0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $m=a+b-2$

㉠에서 $f'(x)=2(x-1)$이므로

$f'(c)=2c-2$

이때, $a+b=2c$이므로

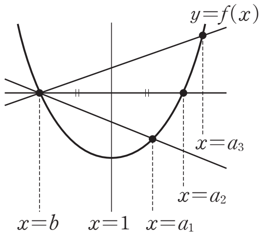
$f'(c)=2c-2=a+b-2=m$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

보충설명

$b<1$일 때, $a+b$의 값에 따른 기울기 m의 값은 다음과 같다.



(i) $a_1+b<2$이면 $m<0$

(ii) $a_2+b=2$이면 $m=0$

(iii) $a_3+b>2$이면 $m>0$

23

함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(a)=\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$

즉, $-a^2+a^2=a^3-3a^2+2a$

$a^3-3a^2+2a=0$

$a(a^2-3a+2)=0$

$a(a-1)(a-2)=0$

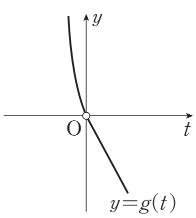
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & (x>0)\\ x^3-3x^2 & (x\le 0)\end{cases}$$ 에서

$$g(t)=\begin{cases}-2t & (t>0)\\ 3t^2-6t & (t<0)\end{cases}$$ 이므로

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



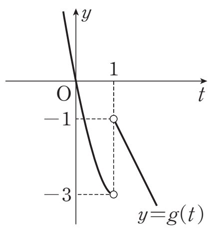
이때, $g(t)$는 모든 실수 t에 대하여 극한값이 존재하므로 $\lim_{t\to b+} g(t)\neq\lim_{t\to b-} g(t)$를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x & (x>1)\\ x^3-3x^2+2 & (x\le 1)\end{cases}$$ 에서

$$g(t)=\begin{cases}-2t+1 & (t>1)\\ 3t^2-6t & (t<1)\end{cases}$$ 이므로

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $g(t)$는 $t=1$에서

$\lim_{t\to 1+} g(t)=-1$, $\lim_{t\to 1-} g(t)=-3$이므로

$\lim_{t\to 1+} g(t)\neq\lim_{t\to 1-} g(t)$

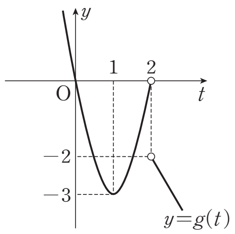
$\therefore\ b=1$

(iii) $a=2$일 때,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x>2)\\ x^3-3x^2+4 & (x\le 2)\end{cases}$$ 에서

$$g(t)=\begin{cases}-2t+2 & (t>2)\\ 3t^2-6t & (t<2)\end{cases}$$ 이므로

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, $g(t)$는 $t=2$에서

$\lim_{t\to 2+} g(t)=-2$, $\lim_{t\to 2-} g(t)=0$이므로

$\lim_{t\to 2+} g(t)\neq\lim_{t\to 2-} g(t)$

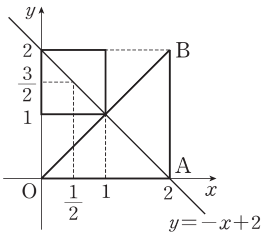
$\therefore\ b=2$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$이다.

답 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$

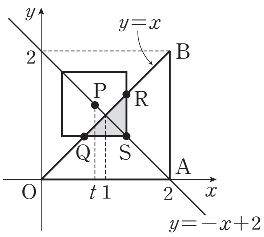
24

(i) $t \leq \frac{1}{2}$일 때,



$t<\frac{1}{2}$일 때 두 도형은 만나지 않고, $t=\frac{1}{2}$일 때 두 도형은 한 점에서 만나므로 $g(t)=0$

(ii) $\frac{1}{2}<t<1$일 때,



위의 그림과 같이 정사각형과 삼각형 OAB의 교점을 Q, R, 정사각형과 직선 $y=-x+2$의 교점을 S라 하자.

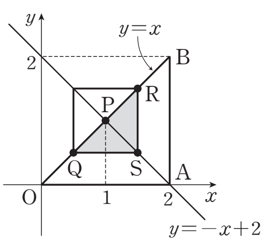
점 P의 x좌표가 t이므로 점 S의 x좌표는 $t+\frac{1}{2}$이고 점 S는 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로 $\mathrm{S}\left(t+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-t\right)$이다.

이때, 정사각형의 각 변은 x축, y축과 평행하고, 두 점 Q, R는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 Q, 점 R의 좌표는 각각 $\left(\frac{3}{2}-t, \frac{3}{2}-t\right)$, $\left(t+\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 공통부분인 삼각형 QRS의 넓이 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{1}{2}\times\left(t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+t\right)\times\left(t+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+t\right)$$
$$=\frac{1}{2}(2t-1)^2$$

(iii) $t=1$일 때,

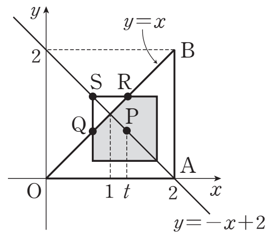


점 P의 좌표가 (1, 1)이므로 점 Q와 점 S, 점 R의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

따라서 공통부분인 삼각형 QRS의 넓이 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

(iv) $1<t<\frac{3}{2}$일 때,



점 P의 x좌표가 t이므로 점 S의 x좌표는 $t-\frac{1}{2}$이고 점 S는 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$\mathrm{S}\left(t-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}-t\right)$이다.

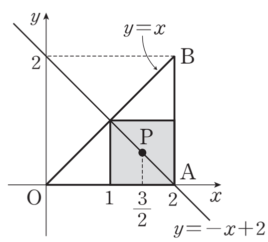
이때, 정사각형의 각 변은 x축, y축과 평행하므로 점 Q와 점 R의 좌표는 각각 $\left(t-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\right)$,

$\left(\frac{5}{2}-t, \frac{5}{2}-t\right)$이다.

따라서 공통부분의 넓이 $g(t)$는 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 삼각형 QRS의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$g(t)=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-t-t+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{5}{2}-t-t+\frac{1}{2}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}(3-2t)^2$$

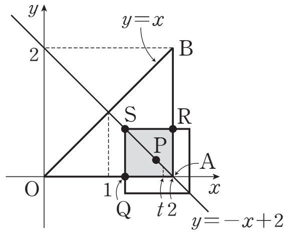
(v) $t=\frac{3}{2}$일 때,



$t=\frac{3}{2}$일 때 정사각형이 삼각형 OAB에 포함되므로 공통부분의 넓이는 정사각형의 넓이와 같다.

따라서 $g(t)=1$

(vi) $\frac{3}{2}<t<\frac{5}{2}$일 때,



점 P의 x좌표가 t이므로 점 S의 x좌표는 $t-\frac{1}{2}$이고 점 S는 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

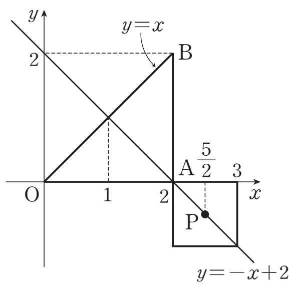
$S\left(t-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}-t\right)$이다.

이때, 정사각형의 각 변은 x축, y축과 평행하므로 점 Q와 점 R의 좌표는 각각 $\left(t-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(2,\ \frac{5}{2}-t\right)$이다.

따라서 공통부분인 사각형 AQSR의 넓이 $g(t)$는

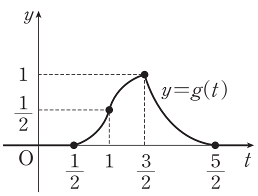
$$g(t)=\left(2-t+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{5}{2}-t\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}-t\right)^2$$

(vii) $t\geq\frac{5}{2}$일 때,



$t=\frac{5}{2}$일 때 두 도형은 한 점에서 만나고, $t>\frac{5}{2}$일 때 두 도형은 만나지 않으므로 $g(t)=0$

(i)~(vii)에서 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값은 $t=\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

다른풀이

(i)~(vii)에서 함수 $g(t)$는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \left(t\leq\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(2t-1)^2 & \left(\frac{1}{2}<t<1\right) \\ \frac{1}{2} & (t=1) \\ 1-\frac{1}{2}(3-2t)^2 & \left(1<t<\frac{3}{2}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{3}{2}\right) \\ \left(\frac{5}{2}-t\right)^2 & \left(\frac{3}{2}<t<\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t\geq\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$는 다음과 같다.

$$g'(t)=\begin{cases} 0 & \left(t\leq\frac{1}{2}\right) \\ 2(2t-1) & \left(\frac{1}{2}<t<1\right) \\ 0 & (t=1) \\ 2(3-2t) & \left(1<t<\frac{3}{2}\right) \\ 0 & \left(t=\frac{3}{2}\right) \\ -2\left(\frac{5}{2}-t\right) & \left(\frac{3}{2}<t<\frac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(t\geq\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

이때, $\lim_{t\to\frac{3}{2}+} g'(t)=-2$, $\lim_{t\to\frac{3}{2}-} g'(t)=0$이므로

$t=\frac{3}{2}$에서 $g'(t)$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $t=\frac{3}{2}$에서 함수 $g(t)$는 미분가능하지 않다.

유형연습 04 접선의 방정식과 평균값 정리 본문 pp.105~114

01-1 $\frac{8}{13}$	01-2 $y=x$	01-3 45
02-1 -3	02-2 -26	02-3 $\frac{7}{3}$
03-1 $\frac{1}{32}$	03-2 8	03-3 1
04-1 15	04-2 -7	05-1 $\frac{16}{3}$
05-2 16	05-3 0	06-1 0
06-2 2	06-3 6	07-1 $y=-x+\frac{7}{4}$
07-2 9		

01-1

$f(x)=-x^3-4x^2+6x-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2-8x+6$

점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-3-8+6=-5$이므로

직선 l의 방정식은

$y-(-1)=-5(x-1)$

$\therefore\ 5x+y-4=0$

따라서 원점과 직선 l 사이의 거리 d는

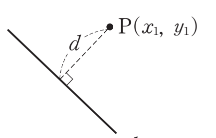
$d=\dfrac{|0+0-4|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{26}}$

$\therefore\ d^2=\dfrac{16}{26}=\dfrac{8}{13}$

답 $\dfrac{8}{13}$

보충설명

점과 직선 사이의 거리



(1) 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) 원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

01-2

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식이

$y=-2x+3$이므로

$f'(1)=-2$

또한, $(1,\ f(1))$은 $y=-2x+3$ 위의 점이므로

$f(1)=1$

$\therefore\ f'(1)=-2,\ f(1)=1$ ……㉠

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식이

$y=3x-2$이므로

$g'(1)=3$

또한, $(1,\ g(1))$은 $y=3x-2$ 위의 점이므로

$g(1)=1$

$\therefore\ g'(1)=3,\ g(1)=1$ ……㉡

$y=f(x)g(x)$에서 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1)g(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=(-2)\times1+1\times3=1$ ($\because$ ㉠, ㉡)

따라서 점 $(1,\ f(1)g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(1)g(1)=x-1$

$y-1=x-1$ ($\because$ ㉠, ㉡) $\quad\therefore\ y=x$

답 $y=x$

01-3

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=1$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow2$일 때

(분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)=3$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(2)=3$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=1$

$\therefore\ f(2)=3,\ f'(2)=1$ ……㉠

한편, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=2$에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow2$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}g(x)=-1$이고 $g(x)$는 다항함수이므로 $g(2)=-1$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=2$

$\therefore\ g(2)=-1,\ g'(2)=2$ ……㉡

$y=\{f(x)\}^2g(x)$에서

$y'=2f(x)f'(x)g(x)+\{f(x)\}^2g'(x)$

곡선 $y=\{f(x)\}^2g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$2f(2)f'(2)g(2)+\{f(2)\}^2g'(2)$

$=2\times3\times1\times(-1)+3^2\times2$

$=-6+18=12$ (∵ ㉠, ㉡)

이고

$\{f(2)\}^2g(2)=3^2\times(-1)=-9$ (∵ ㉠, ㉡)

이므로 점 $(2,\ -9)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-9)=12(x-2)\qquad \therefore\ y=12x-33$

따라서 $m=12,\ n=-33$이므로

$m-n=12-(-33)=45$

답 45

02-1

$f(x)=x^3-6x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6$

$x=2$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12-6=6$

점 P의 좌표를 $(t,\ t^3-6t+2)$ $(t\neq2)$라 하면 $f'(t)=6$이므로

$3t^2-6=6,\ t^2=4\qquad \therefore\ t=-2$ (∵ $t\neq2$)

따라서 점 P의 좌표는 $(-2,\ 6)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-6=6(x+2)$

$\therefore\ y=6x+18$

이때, 위의 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$6a+18=0\qquad \therefore\ a=-3$

답 -3

02-2

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$

점 A에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+6+1=10$

이때, 점 B의 x좌표를 $t(t\neq-1)$라 하면 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로

$3t^2-6t+1=10,\ 3t^2-6t-9=0$

$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=3$ (∵ $t\neq-1$)

이때, 점 B는 곡선 위에 있으므로 $f(3)=3^3-3^3+3+1=4$에서 점 B의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.

즉, 점 B에서의 접선의 방정식은

$y-4=10(x-3)\qquad \therefore\ y=10x-26$

따라서 구하는 접선의 y절편은 -26이다.

답 -26

02-3

삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 $\overline{AB}$의 길이는 일정하므로 직선 AB와 점 P 사이의 거리가 최대이어야 한다.

즉, $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ b)$에서의 접선이 직선 AB와 평행이어야 한다.

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$에서 $f'(x)=3x^2-4x-5$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-4a-5$

직선 AB의 기울기는

$\dfrac{18-8}{4-(-1)}=\dfrac{10}{5}=2$

즉, $3a^2-4a-5=2$이므로

$3a^2-4a-7=0,\ (3a-7)(a+1)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{7}{3}$ (∵ $-1<a<4$)

답 $\dfrac{7}{3}$

03-1

$f(x)=-2x^2+1$이라 하면 $f'(x)=-4x$

접점의 좌표를 $(t,\ -2t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 양수이므로

$f'(t)=-4t>0\qquad \therefore\ t<0$

직선 l의 방정식은 $y-(-2t^2+1)=-4t(x-t)$

$\therefore\ y=-4tx+2t^2+1$

직선 l은 점 $P(0,\ 9)$를 지나므로

$9=2t^2+1,\ t^2=4\qquad \therefore\ t=-2$ (∵ $t<0$)

이때, 직선 l의 기울기는 $f'(-2)=8$이므로 직선 l에 수직인 직선 m의 기울기는 $-\dfrac{1}{8}$이다.

직선 m과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 s라 하면 $x=s$인 점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{8}$이므로

$f'(s)=-4s=-\frac{1}{8}$ $\quad\therefore\ s=\frac{1}{32}$

답 $\frac{1}{32}$

03-2

$f(x)=x^2+1$이라 하면 $f'(x)=2x$

곡선 위의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2+1$ $\quad\cdots\cdots㉠$

직선 ㉠은 점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=-2t-t^2+1,\ t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\quad\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 두 접선의 방정식은

$y=-6x-8,\ y=2x$

따라서 두 접선의 y절편은 각각 $-8,\ 0$이므로 차는

$0-(-8)=8$

답 8

03-3

$f(x)=x^3-3x^2+5$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

곡선 위의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+5)=(3t^2-6t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+5$

이 직선은 점 $(a,\ 5)$를 지나므로

$5=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+5$

$2t^3-3(a+1)t^2+6at=0$

$t\{2t^2-3(a+1)t+6a\}=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $2t^2-3(a+1)t+6a=0$

이때, 접선이 오직 하나 존재하므로 이차방정식

$2t^2-3(a+1)t+6a=0$ $\quad\cdots\cdots㉠$

은 $t=0$을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(ⅰ) ㉠이 $t=0$을 중근으로 가질 때,
조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) ㉠이 실근을 갖지 않을 때,
㉠의 판별식을 D라 하면

$D=9(a+1)^2-48a<0$

$=9a^2-30a+9<0$

$=3a^2-10a+3<0$

$=(3a-1)(a-3)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<a<3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{1}{3}<a<3$이므로 $\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=3$

$\therefore\ \alpha\beta=\frac{1}{3}\times3=1$

답 1

04-1

$f(x)=x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+a$

$g(x)=-2x^3+3x-2$에서 $g'(x)=-6x^2+3$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 점 P를 지나므로

$f(-1)=g(-1)$

$1-a+b=-3$ $\quad\therefore\ a-b=4$ $\quad\cdots\cdots㉠$

점 P에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(-1)=g'(-1)$

$-2+a=-3$ $\quad\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-5$

이때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 x좌표는

$x^2-x-5=-2x^3+3x-2$에서

$2x^3+x^2-4x-3=0$

$(x+1)(2x^2-x-3)=0$

$(x+1)^2(2x-3)=0$

-1	2	1	-4	-3
		-2	1	3
	2	-1	-3	0

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 점 Q의 x좌표는 $\frac{3}{2}$이므로 $k=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 10k=15$

답 15

04-2

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-4$이므로

접선의 방정식은 $y-4=-4(x+2)$

$\therefore\ y=-4x-4$ ……㉠

$g(x)=x^3+ax-2$라 하면 $g'(x)=3x^2+a$

함수 $g(x)$에 대하여 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+at-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2+a$이므로 $x=t$인 점에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at-2)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+a)x-2t^3-2$ ……㉡

㉠과 ㉡은 같은 직선이므로

$3t^2+a=-4$ ……㉢

$-2t^3-2=-4$ ……㉣

㉣에서 $t^3=1$이므로 $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)=0$에서

$t=1$

즉, $t=1$을 ㉢에 대입하면

$3+a=-4$

$\therefore\ a=-7$

답 -7

05-1

함수 $f(x)=-2x^3+kx^2+3$은 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하다.

$f(0)=f(2)$이어야 하므로

$3=-16+4k+3,\ 4k=16$

$\therefore\ k=4$

한편, $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(x)=-2x^3+4x^2+3$에서

$f'(x)=-6x^2+8x$이므로

$f'(c)=-6c^2+8c=0$

$-2c(3c-4)=0 \qquad \therefore\ c=\frac{4}{3}\ (\because\ 0<c<2)$

$\therefore\ k+c=4+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$

답 $\frac{16}{3}$

05-2

함수 $f(x)=(x+2)(x-3)^2$은 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a,\ a)$에서 미분가능하다.

$f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$(-a+2)(-a-3)^2=(a+2)(a-3)^2$

$(-a+2)(a^2+6a+9)=(a+2)(a^2-6a+9)$

$-a^3-4a^2+3a+18=a^3-4a^2-3a+18$

$2a^3-6a=0,\ 2a(a^2-3)=0$

$\therefore\ a=\sqrt{3}\ (\because\ a>0)$

한편, $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=(x-3)^2+2(x+2)(x-3)$

$=(x-3)(x-3+2x+4)$

$=(x-3)(3x+1)$

이므로

$f'(c)=(c-3)(3c+1)=0$

$\therefore\ c=-\frac{1}{3}\ (\because\ -\sqrt{3}<c<\sqrt{3})$

$\therefore\ f(3c)=f(-1)=(-1+2)(-1-3)^2$

$=16$

답 16

05-3

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭인 기함수이다.

함수의 식이 차수가 홀수인 항으로만 이루어진 함수

$f(x)=ax^3+bx\ (a\neq 0,\ b$는 상수$)$라 하면 조건 ㈏에서

$a+b=3$

$8a+2b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=4$

따라서 $f(x)=-x^3+4x$이고

$f'(x)=-3x^2+4$ ……㉠

함수 $f(x)=-x^3+4x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)$이므로 롤의 정리를 만족시키는 상수 α가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, ㉠에서 $f'(\alpha)=-3\alpha^2+4=0$

$\alpha^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\because\ 0<\alpha<2\right)$

$\therefore\ f(\sqrt{3}\alpha)=f(2)=-2^3+4\times 2=0$

답 0

06-1

함수 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$는 닫힌구간 $[-2,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{16-(-4)}{5}=\frac{20}{5}=4$$

인 c가 열린구간 $(-2,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2(x+1)(x-2)+(x+1)^2$$
$$=2(x^2-x-2)+(x^2+2x+1)$$
$$=3x^2-3$$

즉, $f'(c)=3c^2-3=4,\ 3c^2-7=0$

$\therefore\ c=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$

이때, $-2<-\frac{\sqrt{21}}{3}<3,\ -2<\frac{\sqrt{21}}{3}<3$이므로

$c=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$이다.

따라서 모든 실수 c의 값의 합은 0이다.

답 0

보충설명

평균값 정리에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c의 값을 구할 때는 항상 c의 값이 주어진 구간에 속하는지를 확인해야 한다.

위의 문제에서 $c=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$이고, $-2<c<3$이므로 평균값 정리를 만족시킨다.

06-2

$g(x)=(x^2-4x-5)f(x)$에서 두 함수 $y=x^2-4x-5$, $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)$에 대하여 닫힌구간 $[1,\ 5]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c가 열린구간 $(1,\ 5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $g(1)=(1-4-5)f(1)=-8$,

$g(5)=(25-20-5)f(5)=0$이므로

$$g'(c)=\frac{g(5)-g(1)}{5-1}=\frac{8}{4}=2$$

답 2

06-3

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-2\ (\because\ f(1)=2)$$

인 실수 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에서 $|f'(c)|\le 4$이므로

$|f(2)-2|\le 4,\ -4\le f(2)-2\le 4$

$\therefore\ -2\le f(2)\le 6$

따라서 $f(2)$의 최댓값은 6이다.

답 6

07-1

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선 l의 기울기는 $f'(t)=2t-4$

한편, 점 P에서의 접선 l이 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$에 평행하므로

$f'(t)=1$

$2t-4=1\qquad \therefore\ t=\frac{5}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$이다.

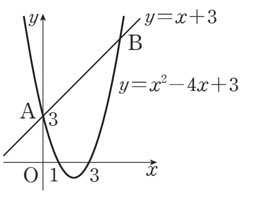
접선 l과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)\qquad \therefore\ y=-x+\frac{7}{4}$$

답 $y=-x+\frac{7}{4}$

다른풀이

곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$은 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y=x^2-4x+3$과 직선 $y=x+3$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+3=x+3$에서

$x^2-5x=0,\ x(x-5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$

따라서 두 교점을 각각 A, B라 하면

A$(0,\ 3)$, B$(5,\ 8)$

곡선 $y=x^2-4x+3$ 위의 점 P에서의 접선 l이 직선 $y=x+3$과 평행하므로 점 P의 x좌표는 선분 AB의 중점의 x좌표, 즉 $\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}$이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$이므로 점 P를 지나고 직선 l에 수직인 방정식은

$y-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)$ $\quad\therefore\ y=-x+\frac{7}{4}$

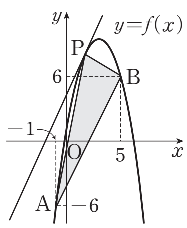
보충설명

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직일 조건

$\Rightarrow mm'=-1$

07-2

오른쪽 그림과 같이 곡선 $f(x)=-x^2+6x+1$ 위의 점 P에서의 접선이 선분 AB와 평행할 때, 선분 AB와 점 P 사이의 거리가 최대이므로 삼각형 ABP의 넓이도 최대가 된다.



즉, 점 P에서의 접선의 기울기와 직선 AB의 기울기가 같아야 한다.

점 P의 좌표를 $(t, -t^2+6t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+6$

이때, 직선 AB의 기울기는 $\frac{6-(-6)}{5-(-1)}=2$이므로

$-2t+6=2$에서 $t=2$

따라서 점 P의 y좌표는

$f(2)=-2^2+6\times2+1=9$

답 9

다른풀이

곡선 $f(x)=-x^2+6x+1$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기와 같아야하므로 점 P의 x좌표는 선분 AB의 중점의 x좌표, 즉 $\frac{-1+5}{2}=2$와 같다.

$\therefore f(2)=-2^2+6\times2+1=9$

개념마무리

본문 pp.116~119

01 6	**02** 1	**03** -1	**04** ⑤
05 108	**06** 2	**07** 1	**08** $\sqrt{5}-1$
09 20	**10** ④	**11** 56	**12** 60
13 -7	**14** ②	**15** 6	**16** ③
17 12	**18** $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$		
19 12	**20** 64	**21** 32	**22** $a\ge\frac{4}{3}$

01

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+2$에서 $f'(x)=x^3+3x^2$

곡선 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=a^3+3a^2$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{4}a^4+a^3+2\right)=(a^3+3a^2)(x-a)$

$\therefore\ y=(a^3+3a^2)x-\frac{3}{4}a^4-2a^3+2$

이때, 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식이 $y=4x+k$이므로

$a^3+3a^2=4$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$-\frac{3}{4}a^4-2a^3+2=k$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠에서 $a^3+3a^2-4=0$

$(a-1)(a^2+4a+4)=0$

$(a-1)(a+2)^2=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-2$일 때,

㉡에서 $k=-12+16+2=6$

(ii) $a=1$일 때,

㉡에서 $k=-\frac{3}{4}-2+2=-\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 k의 최댓값은 6이다.

답 6

02

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

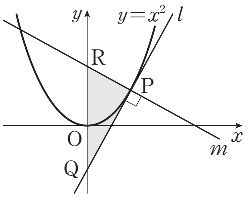
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a$이므로 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$ $\quad\therefore\ y=2a(x-a)+a^2$

이때, 직선 m은 점 P를 지나고 직선 l에 수직이므로 직선 m의 방정식은

$y-a^2=-\dfrac{1}{2a}(x-a)$ $\qquad\therefore\ y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$

다음 그림과 같이 두 직선 l, m이 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하면



$Q(0,\ -a^2)$, $R\left(0,\ a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

이때, 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\dfrac{5}{4}$이므로

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\times a\times\left(a^2+\dfrac{1}{2}+a^2\right)=\dfrac{a}{2}\times\left(2a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

$\qquad=a^3+\dfrac{a}{4}=\dfrac{5}{4}$

즉, $4a^3+a=5$에서

$4a^3+a-5=0$

$(a-1)(4a^2+4a+5)=0$

1	4	0	1	-5
		4	4	5
	4	4	5	0

$\therefore\ a=1\ (\because\ \underbrace{4a^2+4a+5}_{=(2a+1)^2+4}>0)$

답 1

03

조건 (가)의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g(3)=10f(3)+9$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g'(3)=6f(3)+10f'(3)$ ……㉡

한편, 조건 (나)에서 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow 3$일 때 (분모) $\longrightarrow$ 0이므로 (분자) $\longrightarrow$ 0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 3}\{f(x)-g(x)\}=0$에서 $f(3)-g(3)=0$

$\therefore\ f(3)=g(3)$ ……㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$f(3)=g(3)=-1$

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+1-g(x)-1}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)=2$ ……㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $f'(3)=\dfrac{4}{9}$, $g'(3)=-\dfrac{14}{9}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=-\dfrac{14}{9}(x-3)$

$\therefore\ y=-\dfrac{14}{9}x+\dfrac{11}{3}$

따라서 $a=-\dfrac{14}{9}$, $b=\dfrac{11}{3}$이므로

$3a+b=3\times\left(-\dfrac{14}{9}\right)+\dfrac{11}{3}=-\dfrac{14}{3}+\dfrac{11}{3}=-1$

답 -1

보충설명

조건 (나)에서 치환을 이용하면 다음과 같이 풀 수 있다.

$f(x)-g(x)=h(x)$라 하자.

$h(3)=f(3)-g(3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}=h'(3)=2$

이때, $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$f'(3)-g'(3)=2$

04

$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+8x-1$에서 $f'(x)=3x^2-9x+8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=3a^2-9a+8$ ……㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $Q(a+1,\ f(a+1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(a+1)=3(a+1)^2-9(a+1)+8$ ……㉡

두 점 P, Q에서의 두 접선이 서로 평행하므로

$f'(a)=f'(a+1)$에서

$3a^2-9a+8=3(a+1)^2-9(a+1)+8$

$6a-6=0 \qquad \therefore\ a=1$

이 값을 ㉠, ㉡에 대입하면

$f'(1)=f'(2)=2$

$f(1)=1-\frac{9}{2}+8-1=\frac{7}{2}$, $f(2)=8-18+16-1=5$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\left(1,\ \frac{7}{2}\right)$, $(2,\ 5)$이다.

이때, 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{7}{2}=2(x-1)$

$\therefore\ 2x-y+\frac{3}{2}=0$

따라서 두 직선 l과 m 사이의 거리는 직선 l과 점 Q$(2,\ 5)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|4-5+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

답 ⑤

보충설명

평행한 두 직선 $l: ax+by+c=0$, $l': ax+by+c'=0$ 사이의 거리를 구하는 방법은 다음 두 가지가 있다.

(1) 직선 l 위의 한 점 P와 직선 l' 사이의 거리 이용

점 P를 x좌표, y좌표가 간단한 정수인 점 P$(x_1,\ y_1)$으로 나타낼 수 있을 때, 점 P$(x_1,\ y_1)$과 직선 l' 사이의 거리 공식 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$을 이용한다.

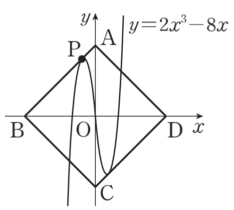
(2) 두 직선 l과 l' 사이의 거리 공식 이용

평행한 두 직선 l과 l' 사이의 거리는 $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

05

$f(x)=2x^3-8x$라 하면 $f'(x)=6x^2-8$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 곡선 $y=f(x)$ 위의 접점을 P$(t,\ 2t^3-8t)$ $(t<0)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=6t^2-8$이므로 접선의 방정식은



$y-(2t^3-8t)=(6t^2-8)(x-t)$

$\therefore\ y=(6t^2-8)(x-t)+2t^3-8t$

이때, □ABCD는 정사각형이므로 직선 AB, 직선 CD의 기울기는 1이다.

즉, $6t^2-8=1$이므로

$6t^2=9 \qquad \therefore\ t=-\frac{\sqrt{6}}{2}\ (\because\ t<0)$ ······ (가)

따라서 접점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{5\sqrt{6}}{2}\right)$이므로

직선 AB의 방정식은 $y-\frac{5\sqrt{6}}{2}=x+\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ y=x+3\sqrt{6}$ ······㉠

㉠에서 점 A의 좌표는 $(0,\ 3\sqrt{6})$ ······ (나)

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times(2\times3\sqrt{6})^2$

$=108$ ······ (다)

답 108

단계	채점 기준	배점
(가)	접선의 기울기를 이용하여 접점의 x좌표를 구한 경우	40%
(나)	정사각형 ABCD의 꼭짓점의 좌표를 구한 경우	40%
(다)	정사각형 ABCD의 넓이를 구한 경우	20%

06

$f(x)=4x^2+k$에서 $f'(x)=8x$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점을 각각 P$(t,\ 4t^2+k)$, Q$(s,\ 4s^2+k)$ $(t\neq s)$라 하면

점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=8t$

점 Q에서의 접선의 기울기는 $f'(s)=8s$

이때, 두 접선이 서로 수직이므로 $64ts=-1$

$\therefore\ ts=-\frac{1}{64}$ ······㉠

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(4t^2+k)=8t(x-t)$

$\therefore\ y=8tx-4t^2+k$ ······㉡

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-(4s^2+k)=8s(x-s)$

$\therefore\ y=8sx-4s^2+k$

두 직선의 교점의 x좌표는

$8tx-4t^2+k=8sx-4s^2+k$에서

$8x(t-s)-4(t^2-s^2)=0$

$4(t-s)\{2x-(t+s)\}=0$

$\therefore\ x=\dfrac{t+s}{2}\ (\because\ t\neq s)$

이것을 ㉡에 대입하면

$y=4ts+k=-\dfrac{1}{16}+k\ (\because$ ㉠$)$

이때, 두 직선의 교점은 항상 x축 위에 있으므로

$y=0,\ k-\dfrac{1}{16}=0$

즉, $k=\dfrac{1}{16}$이므로 $32k=2$

답 2

07

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-ax+b$에서 $f'(x)=x^2-2x-a$

점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=1-2-a=-a-1$

즉, $-a-1=2$이므로 $a=-3$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+b$

한편, 곡선 밖의 점 $\left(0,\ \dfrac{13}{3}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=t^2-2t+3=2$

$t^2-2t+1=0,\ (t-1)^2=0$

$\therefore\ t=1$

이때, $f(1)=\dfrac{1}{3}-1+3+b=b+\dfrac{7}{3}$이므로 이 접선은 $\left(1,\ b+\dfrac{7}{3}\right)$을 지나고 기울기가 2인 직선과 같다.

따라서 접선의 방정식은

$y-\left(b+\dfrac{7}{3}\right)=2(x-1)\qquad \therefore\ y=2(x-1)+b+\dfrac{7}{3}$

이 직선이 점 $\left(0,\ \dfrac{13}{3}\right)$을 지나므로

$\dfrac{13}{3}=-2+b+\dfrac{7}{3}\qquad \therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=-3+4=1$

답 1

08

$f(x)=x^2+2$라 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면 이 점에서 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

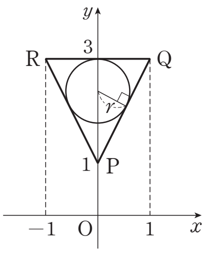
$y-(t^2+2)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2+2$

이 직선은 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-t^2+2,\ t^2=1$

$\therefore\ t=\pm1$



따라서 접점 Q, R의 좌표는 각각 $(1,\ 3),\ (-1,\ 3)$이므로

△PQR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2\qquad\cdots\cdots$㉠

△PQR의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 △PQR의 넓이는

$\dfrac{r}{2}(\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PQ})$

$=\dfrac{r}{2}(2+\sqrt{5}+\sqrt{5})$

$=r(1+\sqrt{5})\qquad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $r(1+\sqrt{5})=2$이므로

$r=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

따라서 원의 지름의 길이는

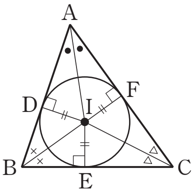
$2r=\sqrt{5}-1$

답 $\sqrt{5}-1$

보충설명

삼각형의 내접원과 넓이

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\triangle ABC=\triangle IAB+\triangle IBC+\triangle ICA$

$\qquad=\dfrac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

09

$f(x)=3x^3$이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ 3t^3)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)\qquad \therefore\ y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3\qquad \therefore\ a=\frac{2}{3}t$ ……㉠

이때, $a=\frac{2}{3}t>0$이므로 $t>0$

한편, 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(s,\ 3s^3)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-3s^3=9s^2(x-s)\qquad \therefore\ y=9s^2x-6s^3$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로 $a=-6s^3$ ……㉡

이때, $a=-6s^3>0$이므로 $s<0$

두 접선은 서로 평행하므로 $t^2=s^2$

$\therefore\ t=-s\ (\because\ t>0,\ s<0)$

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{3}t=6t^3$이므로

$9t^2=1\qquad \therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ t>0)$

㉠에서 $a=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$이므로 $90a=20$

답 20

다른풀이

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자.

점 P의 좌표를 $(t,\ 3t^3)$이라 하면 $y=3x^3$은 원점에 대하여 대칭인 기함수이고, 접선의 기울기가 같은 두 접점은 원점 대칭이므로 점 Q의 좌표는 $(-t,\ -3t^3)$ $f(-x)=-f(x)$

$f(x)=3x^3$이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $\mathrm{P}(t,\ 3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)\qquad \therefore\ y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3$ ……㉠

점 $\mathrm{Q}(-t,\ -3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-3t^3)=9t^2(x+t)\qquad \therefore\ y=9t^2x+6t^3$

이 직선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=6t^3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$9t^2a-a=0,\ 9t^2=1$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0)$

따라서 $a=6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$이므로

$90a=90\times\frac{2}{9}=20$

10

$f(x)=x^3-5x$라 하면 $f'(x)=3x^2-5$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-5t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-5$

이때, 직선 l의 기울기는 음수이므로

$f'(t)<0,\ 3t^2-5<0$

$\therefore\ -\frac{\sqrt{15}}{3}<t<\frac{\sqrt{15}}{3}$ ……㉠

직선 l의 방정식은

$y-(t^3-5t)=(3t^2-5)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-5)x-2t^3$ ……㉡

이 직선이 점 $(-3,\ 4)$를 지나므로

$4=-9t^2+15-2t^3$

$2t^3+9t^2-11=0$

$(t-1)(2t^2+11t+11)=0$

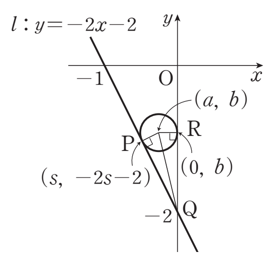
1	2	9	0	-11
		2	11	11
	2	11	11	0

$\therefore\ t=1\ (\because\ ㉠)$

이것을 ㉡에 대입하면 직선 l의 방정식은

$y=-2x-2$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선 l의 접점을 P라 하고, 원과 y축이 접하는 점을 R라 하면 점 P, R의 좌표는 각각 $(s,\ -2s-2)\ (s<0)$, $(0,\ b)$



직선 l과 y축의 교점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(0,\ -2)$이고 $\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로

$b+2=\sqrt{s^2+(-2s-2+2)^2}$

$(b+2)^2=5s^2,\ b+2=\pm\sqrt{5}s$

이때, $b>-2,\ s<0$이므로

$b+2=-\sqrt{5}s$ ……㉢

한편, 원의 중심과 점 P를 지나는 직선을 m이라 하면 직선 m과 직선 l은 서로 수직이므로 직선 m의 기울기는 $\frac{1}{2}$

$\frac{b+2s+2}{a-s}=\frac{1}{2}$, $a-s=2b+4s+4$

$a-5s=2(b+2)$

위 식에 ㉢을 대입하면

$a-5s=-2\sqrt{5}s$, $a=(5-2\sqrt{5})s$ ……㉣

$$\therefore\ -\frac{b+2}{a}=\frac{\sqrt{5}s}{(5-2\sqrt{5})s}\ (\because ㉢, ㉣)$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}\ (\because s\neq0)$$
$$=2+\sqrt{5}$$

답 ④

다른풀이

원의 중심 $(a,\ b)$는 두 직선 $2x+y+2=0$, $x=0$이 이루는 각의 이등분선 위에 있다. 점 $(a,\ b)$와 두 직선 사이의 거리가 같으므로

$\frac{|2a+b+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=|a|$, $|2a+b+2|=\sqrt{5}|a|$

$2a+b+2=\pm\sqrt{5}a$

이때, $a<0$, $b>-2$이므로 $b+2=(-2-\sqrt{5})a$

$\therefore\ -\frac{b+2}{a}=2+\sqrt{5}$

11

$f(x)=x^2-4x+1$이라 하면 $f'(x)=2x-4$

점 $(-2,\ 11)$에서 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+1)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t+1)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore\ y=(2t-4)x-t^2+1$

이 직선이 점 $(-2,\ 11)$을 지나므로

$11=(2t-4)\times(-2)-t^2+1$에서

$t^2+4t+2=0$

두 접점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=-4$, $t_1t_2=2$이고 두 접선의 기울기는 각각 $2t_1-4$, $2t_2-4$이다.

$$\therefore\ m_1m_2=(2t_1-4)(2t_2-4)$$
$$=4t_1t_2-8(t_1+t_2)+16$$
$$=4\times2-8\times(-4)+16$$
$$=56$$

답 56

12

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=-1$, $x=3$인 점에서 접하므로

$f(-1)=g(-1)$, $f'(-1)=g'(-1)$

$f(3)=g(3)$, $f'(3)=g'(3)$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 $h(-1)=h(3)=0$, $h'(-1)=h'(3)=0$이므로 $(x+1)^2$, $(x-3)^2$을 인수로 갖는다.

즉, $h(x)=(x+1)^2(x-3)^2$이므로

$$h'(x)=2(x+1)(x-3)^2+2(x+1)^2(x-3)$$
$$=2(x+1)(x-3)(x-3+x+1)$$
$$=2(x+1)(x-3)(2x-2)$$

$\therefore\ h'(4)=2\times5\times1\times6=60$

$\therefore\ f'(4)-g'(4)=h'(4)=60$

답 60

보충설명

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면

$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$ ($Q(x)$는 다항함수)

13

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ f(0))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$\therefore\ y=f'(0)x+f(0)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(1)=g'(1)(x-1)$

$\therefore\ y=g'(1)x-g'(1)+g(1)$

이때, 두 접선이 서로 일치하므로

$f'(0)=g'(1)$ ······㉠

$f(0)=-g'(1)+g(1)$ ······㉡

접선과 x축의 교점이 R이므로 점 R의 좌표는

$\left(-\dfrac{f(0)}{f'(0)},\ 0\right)$이다.

$=\left(\dfrac{g'(1)-g(1)}{g'(1)},\ 0\right)$

$\triangle\mathrm{POR}=\dfrac{1}{2}\times|f(0)|\times\left|\dfrac{-f(0)}{f'(0)}\right|$

$\triangle\mathrm{QOR}=\dfrac{1}{2}\times|g(1)|\times\left|\dfrac{-f(0)}{f'(0)}\right|$

한편, $\triangle\mathrm{POR}=2\triangle\mathrm{QOR}$이므로

$|f(0)|=2|g(1)|$

(i) $f(0)=2g(1)$일 때,

㉡에서 $g(1)=-g'(1)$이므로

$$\begin{aligned}\frac{f'(0)}{g(1)}+\frac{f(0)}{g'(1)}&=-\frac{f'(0)}{g'(1)}-\frac{2g(1)}{g(1)}\\&=-1-2\ (\because ㉠)\\&=-3\end{aligned}$$

(ii) $f(0)=-2g(1)$일 때,

㉡에서 $3g(1)=g'(1)$이므로

$$\begin{aligned}\frac{f'(0)}{g(1)}+\frac{f(0)}{g'(1)}&=\frac{3f'(0)}{g'(1)}-\frac{2g(1)}{3g(1)}\\&=3-\frac{2}{3}\ (\because ㉠)\\&=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-3)\times\dfrac{7}{3}=-7$

답 -7

14

함수 $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x<-2)\\ g(x) & (-2\le x\le 2)\\ 5x-5 & (x>2)\end{cases}$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서 연속이다.

$f(-2)=\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)$이므로

$f(-2)=g(-2)=-2\times(-2)+1=5$

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)$이므로

$f(2)=g(2)=5\times2-5=5$

$f(2)-f(-2)=4f'(c)$에서

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=0$ ······㉠

을 만족시키는 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 존재하는지 확인해 보자.

ㄱ. $g(x)=x(x-2)(x+2)$에서 $g(-2)\neq5$, $g(2)\neq5$이므로 함수 $f(x)$가 연속함수라는 조건에 모순이다.

ㄴ. $g(x)=-x^2+9$에서 $g(2)=g(-2)=5$이고 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 함수 $g(x)$는 조건을 만족시킨다.

ㄷ. $g(x)=|x|+3$에서 $g(2)=g(-2)=5$이고

$g(x)=\begin{cases}-x+3 & (x<0)\\ x+3 & (x\ge0)\end{cases}$이므로

$g'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$

즉, $g'(c)=0$을 만족시키는 c는 존재하지 않는다.

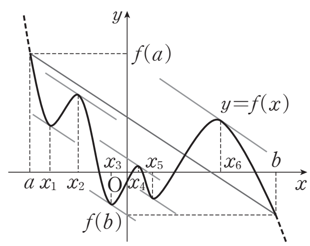
따라서 가능한 함수는 ㄴ이다.

답 ②

15

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점의 x좌표이다.

이때, 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 잇는 직선의 기울기를 m이라 하면 주어진 그래프에서 직선 m과 평행한 접선을 6개 그을 수 있다.



따라서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 6개이다.

답 6

16

$f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 롤의 정리와 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 각각 존재한다.

ㄱ. $f(1)=f(2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(x)=0$인 x가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{3-(-2)}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로

평균값 정리에 의하여 $f'(x)=\dfrac{5}{2}$인 x가 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 열린구간 $(-1,\ 1)$은 열린구간 $(-1,\ 2)$에 포함되므로 $f'(x)=\dfrac{5}{2}$인 x가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x)-4x$에서

$g(-1)=f(-1)+4=2,\ g(1)=f(1)-4=-1$

$g(2)=f(2)-8=-5$

즉, $g(-1)\neq g(1),\ g(-1)\neq g(2),\ g(1)\neq g(2)$이므로 $g'(x)=0$인 x가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 존재하지 않을 수도 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1,\ x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1,\ x+2)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(x-1,\ x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $x \longrightarrow \infty$일 때 $c \longrightarrow \infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}$

$=3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}$

$=3\lim\limits_{c\to\infty}f'(c)$

$=3\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$

$=3\times4=12$

답 12

18

$f(x)=x(x+1)(ax+1)$에서 $f(x)$는 삼차함수이므로 $a\neq0$이다.

$f'(x)=(x+1)(ax+1)+x(ax+1)+ax(x+1)$

$\quad\quad=3ax^2+2(1+a)x+1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$에서의 접선 l의 기울기는

$f'(-1)=3a-2-2a+1=a-1$

이때, 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선을 m이라 하면 직선 m의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a-1}(x+1)\ (a\neq1)$

이때, 직선 m과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $x(x+1)(ax+1)=-\dfrac{1}{a-1}(x+1)$, 즉 방정식

$(x+1)\left\{x(ax+1)+\dfrac{1}{a-1}\right\}=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x(ax+1)+\dfrac{1}{a-1}=0\ (a\neq0)$이 $x\neq-1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $x(ax+1)+\dfrac{1}{a-1}=0$, 즉 $(a^2-a)x^2+(a-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-4(a^2-a)>0$

$-3a^2+2a+1>0,\ (3a+1)(a-1)<0$

$\therefore\ -\dfrac{1}{3}<a<1$

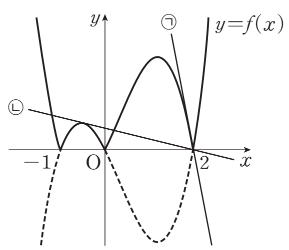
이때, $a\neq0$이므로

$-\dfrac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

답 $-\dfrac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

19

$m<0$일 때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=g(x)$가 두 직선 ㉠, ㉡ 사이에 있어야 한다.



(ⅰ) 직선 ㉠은 곡선 $y=-x(x+1)(x-2)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선과 같으므로

$h(x)=-x(x+1)(x-2)$, 즉 $h(x)=-x^3+x^2+2x$라 하면

$h'(x)=-3x^2+2x+2$

$h'(2)=-6$

따라서 직선 ㉠의 기울기는 -6이다.

(ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $-1<x<0$인 점에서 접할 때, 접점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 중근이므로

$x(x+1)(x-2)=m(x-2)$에서

$x(x+1)(x-2)-m(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+x-m)=0$

이차방정식 $x^2+x-m=0$은 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-m)=0$

$1+4m=0 \qquad \therefore\ m=-\dfrac{1}{4}$

따라서 직선 ㉡의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 실수 m의 값의 범위는 $-6<m<-\dfrac{1}{4}$이므로

$a=-6,\ b=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 8ab=12$

답 12

20

$f(x)=(x-1)^2,\ g(x)=-x^2+6x-15$라 하면

$f'(x)=2(x-1),\ g'(x)=-2x+6$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 공통인 접선의 접점의 좌표를 각각 $(t,\ (t-1)^2)$, $(s,\ -s^2+6s-15)$라 하면

$f'(t)=g'(s)$

$2(t-1)=-2s+6 \qquad \therefore\ t+s=4 \qquad \cdots\cdots㉠$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ (t-1)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t-1)^2=2(t-1)(x-t)$

$y=2(t-1)(x-t)+(t-1)^2$

$\therefore\ y=2(t-1)x-t^2+1$

이 직선이 점 $(s,\ -s^2+6s-15)$를 지나므로

$-s^2+6s-15=2(t-1)s-t^2+1$

$-s^2+6s-15=2ts-2s-t^2+1$

$t^2-s^2-2ts+8s-16=0$

$(t-s)(t+s)-2s(t-4)-16=0$

$4(2t-4)+2(t-4)(t-4)-16=0$ (∵ ㉠)

$2t^2-8t=0,\ 2t(t-4)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=4$

$\therefore\ \begin{cases} t=0 \\ s=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} t=4 \\ s=0 \end{cases}$ (∵ ㉠)

(ⅰ) $t=0,\ s=4$일 때,

$f(0)=1,\ g(4)=-7$이므로 접점은

$\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{C}(4,\ -7)$

(ⅱ) $t=4,\ s=0$일 때,

$f(4)=9,\ g(0)=-15$이므로 접점은

$\mathrm{D}(4,\ 9),\ \mathrm{B}(0,\ -15)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 □ABCD는 평행사변형이므로 구하는 넓이는

$4\times16=64$

답 64

21

$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<a) \\ 6x(x-1) & (x>a) \end{cases}$

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이고, 미분가능하다. 즉,

$f(a)=(a-1)^2(2a+1)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2} \qquad \cdots\cdots㉠$

$f'(a)=6a(a-1)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=1 \qquad \cdots\cdots㉡$

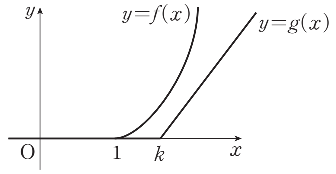
㉠, ㉡에서 $a=1$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le1) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x>1) \end{cases},$

$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<1) \\ 6x(x-1) & (x>1) \end{cases}$

한편, $g(x)=\begin{cases} 0 & (x\le k) \\ 12(x-k) & (x>k) \end{cases}$ 이고

조건 ㈏에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $k>1$이어야 조건 ㈏를 만족시킨다.

이때, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 접할 때, k의 값은 최소가 되므로 접점의 x좌표를 $t(t>1)$라 하면

$f(t)=g(t)$이므로

$(t-1)^2(2t+1)=12(t-k)$ ……㉢

$f'(t)=g'(t)$이므로

$6t(t-1)=12$, $t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$ $\therefore$ $t=2$ ($\because$ $t>1$)

이것을 ㉢에 대입하면

$12(2-k)=5$, $12k=19$ $\therefore$ $k=\dfrac{19}{12}$

즉, $p=12$, $q=19$이므로

$a+p+q=1+12+19=32$

답 32

22

$f(x)=x^3-ax$라 하면 $f'(x)=3x^2-a$

점 P의 좌표를 $(t,\ t^3-at)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-a$이므로 직선 l의 방정식은

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$

$y=(3t^2-a)(x-t)+t^3-at$

$\therefore$ $y=(3t^2-a)x-2t^3$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점의 x좌표는

$x^3-ax=(3t^2-a)x-2t^3$에서

$x^3-3t^2x+2t^3=0$,

$(x-t)(x^2+tx-2t^2)=0$

$(x-t)^2(x+2t)=0$

$$\begin{array}{c|cccc} t & 1 & 0 & -3t^2 & 2t^3 \\ & & t & t^2 & -2t^3 \\ \hline & 1 & t & -2t^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $x=t$ 또는 $x=-2t$

점 Q의 x좌표는 $-2t$이므로 접선 m의 기울기는

$f'(-2t)=12t^2-a$

이때, 두 직선 l, m이 서로 수직이므로

$f'(t)f'(-2t)=-1$

$(3t^2-a)(12t^2-a)=-1$

$36t^4-15at^2+a^2+1=0$

$t^2=u$ $(u>0)$로 놓으면 u에 대한 이차방정식

$36u^2-15au+a^2+1=0$의 두 근은 모두 0보다 크다.

따라서 두 근의 합과 곱은 모두 0보다 커야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\dfrac{15}{36}a>0$

즉, $a>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$\therefore$ $a>0$ ……㉠

(두 근의 곱)$=\dfrac{a^2+1}{36}>0$

이때, 두 근의 곱은 모든 실수 a에 대하여 성립한다.

한편, 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-15a)^2-144(a^2+1)\ge 0$

$81a^2-144\ge 0$, $9(3a-4)(3a+4)\ge 0$

$\therefore$ $a\ge\dfrac{4}{3}$ ($\because$ $a>0$) ……㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge\dfrac{4}{3}$

답 $a\ge\dfrac{4}{3}$

보충설명 1

점 Q의 x좌표를 다음과 같이 구할 수 있다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s라 하고, 점 P에서의 접선 l의 방정식을 $y=px+q$ (p, q는 상수)라 하자.

t, s는 삼차방정식 $x^3-ax=px+q$, 즉

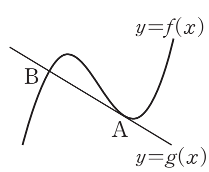
$x^3-(a+p)x-q=0$의 근이고, 이 방정식은 t를 중근으로 갖는다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t+t+s=0$ $\therefore$ $s=-2t$

보충설명 2

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선 $y=g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 이 곡선과 만날 때,



(1) 점 A의 x좌표 a는 방정식 $f(x)=g(x)$의 중근이다.

(2) 점 B의 x좌표 b는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이다.

유형연습 05 함수의 그래프

본문 pp.128~141

01-1 (1) 12 (2) $-\dfrac{9}{2}$ **01-2** -5

02-1 10 **02-2** $-\dfrac{4}{3}$ **02-3** $\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

03-1 51 **03-2** -9 **03-3** 108

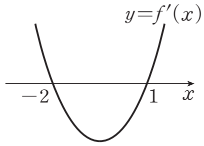
04-1 ㄷ, ㄹ **05-1** 3

05-2 $a<-4$ 또는 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 또는 $a>\dfrac{1}{2}$

05-3 5 **06-1** -4 **06-2** 12

07-1 $-\dfrac{256}{27}$ **07-2** 16

01-1



(1) 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 감소하므로

$-2<x<1$에서 $f'(x)\le 0$

함수 $f(x)$는 두 열린구간 $(-5,\ -2)$, $(1,\ 2)$에서 증가하므로

$-5<x<-2$, $1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$

즉, $f'(-2)=0$, $f'(1)=0$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항은 x^3이므로 $f'(x)$의 최고차항은 $3x^2$이다.

$f'(x)=3(x+2)(x-1)$이므로

$f'(2)=3\times 4\times 1=12$

(2) $f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$는 열린구간 $(0,\ 3)$에서 감소하므로 $0<x<3$에서 $f'(x)\le 0$이다.

$f'(0)=0\le 0$

$f'(3)=27+6a\le 0$에서 $a\le -\dfrac{9}{2}$

따라서 상수 a의 최댓값은 $-\dfrac{9}{2}$이다.

답 (1) 12 (2) $-\dfrac{9}{2}$

다른풀이

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때, $f'(-2)=0$, $f'(1)=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-2+1=-\dfrac{2a}{3}$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

(두 근의 곱)$=-2\times 1=\dfrac{b}{3}$ $\quad\therefore\ b=-6$

따라서 $f'(x)=3x^2+3x-6$이므로

$f'(2)=12+6-6=12$

01-2

$f(x)=x^4-8x^2$에서

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 열린구간 $(k,\ k+2)$에서 감소하므로 $\underbrace{k+2\le -2}_{(k,\ k+2)\subset(-\infty,\ -2)}$ 또는 $\underbrace{k=0}_{(k,\ k+2)\subset(0,\ 2)}$이다.

$\therefore\ k\le -4$ 또는 $k=0$ ······㉠

조건 (나)에서 $f'(k-1)f'(k+2)>0$이므로

$f'(k-1)>0$이고 $f'(k+2)>0$ 또는

$f'(k-1)<0$이고 $f'(k+2)<0$

(i) $f'(k-1)>0$이고 $f'(k+2)>0$일 때,

$k-1>2$이므로 $k>3$

(ii) $f'(k-1)<0$이고 $f'(k+2)<0$일 때,

$k+2<-2$이므로 $k<-4$

(i), (ii)에서 $k<-4$ 또는 $k>3$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $k<-4$

따라서 정수 k의 최댓값은 -5이다.

답 -5

02-1

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 감소해야 한다.

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 항상 감소해야 한다.

즉, $f'(x) \le 0$이어야 한다.

$f(x) = -x^3 + ax^2 + (a^2 - 6a)x + 2$에서

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + a^2 - 6a$

이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 + 3(a^2 - 6a) \le 0$

$4a^2 - 18a \le 0$

$2a(2a - 9) \le 0 \qquad \therefore\ 0 \le a \le \frac{9}{2}$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은 10이다.

답 10

02-2

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 24|x - 3a| + 5$에서

(i) $x - 3a \ge 0$, 즉 $x \ge 3a$일 때,

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 24(x - 3a) + 5$에서

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 24$

이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 9 - 3 \times 24 < 0$

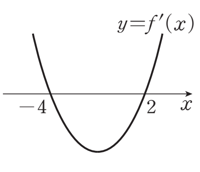
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x - 3a < 0$, 즉 $x < 3a$일 때,

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24(x - 3a) + 5$에서

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$

이므로 함수 $y = f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x < 3a$에서 함수 $f(x)$가 증가하려면 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로

$3a \le -4 \qquad \therefore\ a \le -\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a \le -\frac{4}{3}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

02-3

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2ax^2 + (a+3)x + b$에서

$f'(x) = 2x^2 + 4ax + (a+3)$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이다.

이차방정식 $f'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (2a)^2 - 2(a+3) \le 0$

$4a^2 - 2a - 6 \le 0$, $2(a+1)(2a-3) \le 0$

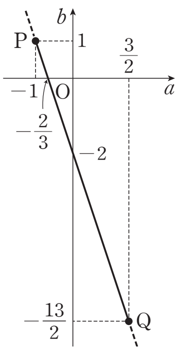
$\therefore\ -1 \le a \le \frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

조건 (나)에서

$f(1) = \frac{2}{3} + 2a + a + 3 + b = \frac{5}{3}$

$\therefore\ 3a + b = -2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{P}(-1,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ -\frac{13}{2}\right)$이라 하면 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 선분 PQ이다.

따라서 구하는 도형의 길이는

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$

답 $\frac{5\sqrt{10}}{2}$

03-1

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

함수 $f(x)$가 $x = -2$에서 극값을 가지므로

$f'(-2) = 0$에서 $12 - 4a + b = 0$

$\therefore\ 4a - b = 12 \qquad \cdots\cdots ㉠$

곡선 $y = f(x)$ 위의 $x = 2$인 점에서의 접선의 기울기가 -24이므로

$f'(2) = -24$에서 $12 + 4a + b = -24$

$\therefore\ 4a + b = -36 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -3$, $b = -24$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-24x+c$이므로 $f(1)=4$에서

$1-3-24+c=4 \qquad \therefore\ c=30$

$\therefore\ a-b+c=-3-(-24)+30=51$

답 51

03-2

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a>0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $x=0$, $x=2$이므로

$f'(0)=0$에서 $c=0$ ……㉠

$f'(2)=0$에서 $12a+4b+c=0$, $12a+4b=0$

$\therefore\ 3a+b=0$ ……㉡

이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 9를 갖고, $x=2$에서 극솟값 5를 갖는다.

$f(0)=9$에서 $d=9$ ……㉢

$f(2)=5$에서 $8a+4b+2c+d=5$

$8a+4b=-4$ ($\because$ ㉠, ㉢)

$\therefore\ 2a+b=-1$ ……㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+9$이므로 $f'(x)=3x^2-6x$

$F(x)=\{f(x)\}^2-10f(x)$에서

$F'(x)$

$=2f(x)f'(x)-10f'(x)$

$=2f'(x)\{f(x)-5\}$

$=2(3x^2-6x)(x^3-3x^2+4)$

$=6x(x-2)^3(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극대이며 극댓값은

$F(0)=\{f(0)\}^2-10f(0)$

$=9^2-10\times 9=-9$

답 -9

03-3

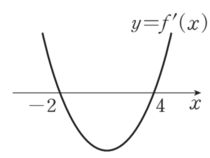
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ ……㉠

조건 (가)에서 $f'(-2)=0$

조건 (나)에서 $f'(1+x)=f'(1-x)$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f'(4)=f'(-2) \qquad \therefore\ f'(4)=0$



$\therefore\ f'(x)=3(x+2)(x-4)$

$=3x^2-6x-24$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $2a=-6$이므로

$a=-3$, $b=-24$

$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음($-$)에서 양($+$)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)=x^3-3x^2-24x+c$의 극댓값은

$f(-2)=(-2)^3-3\times(-2)^2-24\times(-2)+c=28+c$

함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(4)=4^3-3\times 4^2-24\times 4+c=-80+c$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$f(-2)-f(4)=28+c-(-80+c)=108$

답 108

04-1

$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 a, b, d이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	d	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

ㄱ. $a<x<b$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore\ f(a)<f(b)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극대이므로 극값을 1개 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f'(c)=\lim_{x\to c+} f'(x)=\lim_{x\to c-} f'(x)$이므로 함수 $f(x)$는

$x=c$에서 미분가능하다. (참)

ㄹ. $x<a$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $x_1<x_2<a$이면 $f(x_1)<f(x_2)$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

05-1

$f(x)=kx^3+kx^2+(5-k)x+2\ (k\neq0)$에서

$f'(x)=3kx^2+2kx+5-k$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-3k(5-k)\le0,\ k^2-15k+3k^2\le0$

$4k^2-15k\le0,\ k(4k-15)\le0$

그런데 $k\neq0$이므로 $0<k\le\frac{15}{4}$

따라서 조건을 만족하는 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

05-2

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+1)x^3-ax$에서

$f'(x)=x^3+(a+1)x^2-a$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$x^3+(a+1)x^2-a=0$에서

$(x+1)(x^2+ax-a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는

$x^2+ax-a=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 0 & -a \\ & & -1 & -a & a \\ \hline & 1 & a & -a & \boxed{0} \end{array}$$

즉, 이차방정식 $x^2+ax-a=0$은 $x=-1$이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=-1$이 이차방정식 $x^2+ax-a=0$의 근이 아니므로

$1-a-a\neq0 \qquad \therefore a\neq\frac{1}{2}$

이차방정식 $x^2+ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2+4a>0,\ a(a+4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>0$

따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$a<-4$ 또는 $0<a<\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{1}{2}$

답 $a<-4$ 또는 $0<a<\frac{1}{2}$ 또는 $a>\frac{1}{2}$

05-3

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+ax^3+3ax^2+4$에서

$f'(x)=2x^3+3ax^2+6ax=x(2x^2+3ax+6a)$

사차함수 $f(x)$의 극값이 하나뿐이려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 중근 또는 삼중근을 가질 때,

이차방정식 $2x^2+3ax+6a=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-48a=0$

$3a(3a-16)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=\frac{16}{3}$

(ii) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가질 때,

이차방정식 $2x^2+3ax+6a=0$이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9a^2-48a<0$

$3a(3a-16)<0 \qquad \therefore 0<a<\frac{16}{3}$

(i), (ii)에서 $0\le a\le\frac{16}{3}$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

06-1

직선의 방정식을 $y=-17x+k$ (k는 상수)라 하면 삼차방정식 $f(x)-(-17x+k)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=-17x+k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=-5,\ x=2$는 근이다.

이때, $x=-5$인 점에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=-17x+k$의 그래프가 서로 접하므로

$f(x)-(-17x+k)=(x-2)(x+5)^2$

$\therefore\ f(x)=(x-2)(x+5)^2-17x+k$

$$\begin{aligned} f'(x)&=(x+5)^2+2(x-2)(x+5)-17\\ &=3x^2+16x-12\\ &=(3x-2)(x+6) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-6$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{2}{3}$에서 극솟값을 가지므로

$a=-6$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ ab=-4$

답 -4

06-2

점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=-1$, $x=b$는 근이다.

이때, $x=-1$인 점에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 접하므로

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=(x+1)^2(x-b)\\ &=x^3+(2-b)x^2+(1-2b)x-b \end{aligned}$$

그런데 $g(x)$는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항을 갖지 않는다. 즉,

$2-b=0\qquad\therefore\ b=2$

점 B에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x)-h(x)&=(x-2)^2(x-c)\\ &=x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c \end{aligned}$$

같은 방법으로

$4+c=0\qquad\therefore\ c=-4$

이때, $f(b)+f(c)=-80$이므로

$$\begin{aligned} f(2)+f(-4)&=8+2a+(-64-4a)\\ &=-56-2a=-80 \end{aligned}$$

$2a=24\qquad\therefore\ a=12$

답 12

다른풀이 1

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$

점 $\mathrm{A}(-1,\ -1-a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$이므로

점 A에서의 접선의 방정식은

$y-(-1-a)=(3+a)(x+1)$

$\therefore\ y=(3+a)x+2$

이 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+ax=(3+a)x+2$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2\\ & & -1 & 1 & 2\\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$

한편, 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=12+a$이므로

점 B에서의 접선의 방정식은

$y-(8+2a)=(12+a)(x-2)$

$\therefore\ y=(12+a)x-16$

이 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+ax=(12+a)x-16$에서

$x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -12 & 16\\ & & 2 & 4 & -16\\ \hline & 1 & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-4,\ -64-4a)$

이때, $f(b)+f(c)=-80$이므로

$8+2a+(-64-4a)=-80$

$2a=24\qquad\therefore\ a=12$

다른풀이 2

$f(x)=x^3+ax$에서 $f'(x)=3x^2+a$,

$\frac{d}{dx}f'(x)=6x$이므로

함수 $f(x)$의 변곡점은 $(0,\ 0)$이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$에 대하여 대칭이다.

이때, 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1-a)$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 원점이므로 이 점의 x좌표를

구하면

$\frac{1\times b+2\times(-1)}{1+2}=0$에서 $b=2$

같은 방법으로 두 점 $B(2,\ f(2))$, $C(c,\ f(x))$에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 원점이므로 이 점의 x좌표를 구하면

$\frac{1\times c+2\times 2}{1+2}=0$에서 $c=-4$

이때, $f(b)+f(c)=-80$이므로

$f(2)+f(-4)=8+2a+(-64-4a)=-80$

$2a=24 \qquad \therefore\ a=12$

07-1

조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(3)=0,\ f'(3)\neq 0$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 x좌표를 $\alpha\ (\alpha\neq 3)$라 하면

$f(\alpha)=0$이므로 $f'(\alpha)=0$

$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-\alpha)^2$

조건 (다)에서 $f(1)=-8$이므로

$-2(1-\alpha)^2=-8,\ (1-\alpha)^2=4$

$\therefore\ \alpha=-1\ (\because\ \alpha\neq 3)$

즉, $f(x)=(x-3)(x+1)^2$이므로

$f'(x)=(x+1)^2+2(x-3)(x+1)$

$\quad\ =(x+1)(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극소이며 극솟값은

$f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{8}{3}\right)^2=-\frac{256}{27}$

답 $-\frac{256}{27}$

07-2

$g(x)=f(x)-f(3)$이라 하면 조건 (가)에 의하여 함수 $|g(x)|$는 $x=\alpha\ (\alpha\neq 3)$에서만 미분가능하지 않으므로

$g(\alpha)=0,\ g'(\alpha)\neq 0$

또한, $g(3)=0$이므로 $g'(3)=0$

따라서 $g(x)=k(x-\alpha)(x-3)^2(x-\beta)\ (k\neq 0)$라 할 수 있다.

(i) $\beta=\alpha$일 때,

$g(x)=k(x-\alpha)^2(x-3)^2$이므로 $g'(\alpha)=0$

이때, $g'(\alpha)=0$이면 $g'(\alpha)\neq 0$이라는 조건에 모순이다.

$\therefore\ \alpha\neq\beta$

(ii) $\beta\neq 3$일 때,

$g(\beta)=0$이므로 $g'(\beta)=0$

이때, $g(x)=k(x-\alpha)(x-3)^2(x-\beta)^2$이 되어 조건에 모순이다.

(iii) $\beta=3$일 때,

$g(x)=k(x-\alpha)(x-3)^3$

(i), (ii), (iii)에서 $\beta=3$

$\therefore\ g(x)=k(x-\alpha)(x-3)^3$

$g'(x)=k(x-3)^3+3k(x-\alpha)(x-3)^2$

$\quad\ =k(x-3)^2(x-3+3x-3\alpha)$

$\quad\ =k(x-3)^2(4x-3\alpha-3)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$

$g'(x)=f'(x)$이므로

$g'(-1)=0$

$k\times(-4)^2\times(-3\alpha-7)=0$

$\therefore\ \alpha=-\frac{7}{3}$

따라서 $g'(x)=f'(x)=4k(x-3)^2(x+1)$이므로

$\frac{f'(7)}{f'(1)}=\frac{4k\times 4^2\times 8}{4k\times(-2)^2\times 2}=16$

답 16

개 념 마 무 리

본문 pp.142~145

01 5	**02** 12	**03** $\frac{5}{3}$	**04** -24
05 ㄱ, ㄷ	**06** $2<a<\frac{5}{2}$	**07** 5	**08** 12
09 ③	**10** $-9\le k<0$		**11** 65
12 ⑤	**13** ②	**14** -48	**15** -7
16 19	**17** 27	**18** ㄱ, ㄴ, ㄷ	**19** 10
20 ㄴ, ㄷ	**21** 20	**22** 2	**23** 72

01

함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(a+\frac{1}{2},\ a+\frac{3}{2}\right)$에서 증가하려면

$a+\frac{1}{2}<x<a+\frac{3}{2}$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)\ge 0,\ f'\left(a+\frac{3}{2}\right)\ge 0$ ……㉠

이때, 구간의 길이는 1이므로 ㉠을 만족시키려면

$-4\le a+\frac{1}{2}\le -2$ 또는 $0\le a+\frac{1}{2}\le 3$

$\therefore\ -\frac{9}{2}\le a\le -\frac{5}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}\le a\le \frac{5}{2}$

따라서 정수 a는 $-4,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다.

답 5

02

$f(x)=ax^3+bx^2+2x+4$에서 $f'(x)=3ax^2+2bx+2$

이때, $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 항상 증가하거나 감소해야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이거나 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=b^2-6a\le 0$

$\therefore\ b^2\le 6a$ ……㉠

한편, $-3<a<3$이고 $f(x)$는 삼차함수이므로 $a\ne 0$

$\therefore\ -3<a<0$ 또는 $0<a<3$ ……㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ -2),\ (1,\ -1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ -3),\ (2,\ -2),\ (2,\ -1),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3)$의 12개이다.

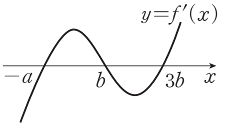
답 12

03

$f'(x)=(x+a)(x^2-4bx+3b^2)$

$\quad\ =(x+a)(x-b)(x-3b)$

에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 함수 $f(x)$가 두 열린구간 $(-\infty,\ -1)$, $(2,\ 5)$에서 감소하므로 $x<-1$, $2<x<5$에서 $f'(x)\le 0$이다. 즉,

$-1\le -a$에서 $a\le 1$ ……㉠

$b\le 2,\ 5\le 3b$에서 $\frac{5}{3}\le b\le 2$ ……㉡

이때, $\frac{b}{a}$의 값이 최소가 되려면 a는 최댓값, b는 최솟값이어야 하므로

㉠에서 $a=1$, ㉡에서 $b=\frac{5}{3}$

따라서 $\frac{b}{a}$의 최솟값은 $\frac{5}{3}$이다.

답 $\frac{5}{3}$

04

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\ne 0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 8을 가지므로

$f(1)=8,\ f'(1)=0$

$a+b+c+d=8$ ……㉠

$3a+2b+c=0$ ……㉡

점 $(0,\ 1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(0)=1 \qquad \therefore\ d=1$

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=c$이므로 접선의 방정식은

$y-1=c(x-0)$

$\therefore\ y=cx+1$

이 직선이 $y=15x+1$과 같으므로

$c=15$

(가)

㉠, ㉡에 $c=15,\ d=1$을 대입하여 정리하면

$a+b=-8,\ 3a+2b=-15$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-9$

(나)

$\therefore\ f(x)=x^3-9x^2+15x+1$

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x^2-6x+5)$

$\qquad=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극소이며 극솟값은

$f(5)=5^3-9\times5^2+15\times5+1=-24$

(다)

답 -24

단계	채점 기준	배점
(가)	주어진 조건을 이용하여 $c,\ d$의 값을 구한 경우	40%
(나)	주어진 조건을 이용하여 $a,\ b$의 값을 구한 경우	20%
(다)	극솟값을 구한 경우	40%

05

점 $(t,\ t^3-1)$과 직선 $y=2x+3$, 즉 $2x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$g(t)=\frac{|2t-t^3+1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^3+2t+4|}{\sqrt5}$$

$$\quad=\frac{|t^3-2t-4|}{\sqrt5}$$

$t^3-2t-4=0$에서

$(t-2)(\underbrace{t^2+2t+2}_{=(t+1)^2+1})=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -4 \\ & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$t<2$에서 $t^3-2t-4<0$,

$t\geq2$에서 $t^3-2t-4\geq0$이므로

$$g(t)=\begin{cases} -\dfrac{t^3-2t-4}{\sqrt5} & (t<2) \\ \dfrac{t^3-2t-4}{\sqrt5} & (t\geq2) \end{cases},$$

$$g'(t)=\begin{cases} -\dfrac{3t^2-2}{\sqrt5} & (t<2) \\ \dfrac{3t^2-2}{\sqrt5} & (t>2) \end{cases}$$

ㄱ. 함수 $g(t)=\dfrac{|t^3-2t-4|}{\sqrt5}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{t\to2+}g'(t)=\frac{10}{\sqrt5},\ \lim_{t\to2-}g'(t)=-\frac{10}{\sqrt5}$

즉, $\displaystyle\lim_{t\to2+}g'(t)\neq\lim_{t\to2-}g'(t)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄷ. $g'(t)=0$에서 $t=-\sqrt{\dfrac23}$ 또는 $t=\sqrt{\dfrac23}$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\sqrt{\frac23}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac23}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

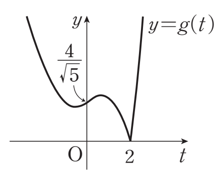
함수 $g(t)$는 $t=-\sqrt{\dfrac23}$, $t=2$에서 극소이고

$g\left(-\sqrt{\dfrac23}\right)\neq0$이므로 0이 아닌 극솟값을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

보충설명



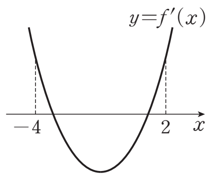
함수 $y=g(t)$의 그래프는 위의 그림과 같다.

따라서 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

06

$f(x)=\dfrac13x^3+ax^2+4x-3$에서 $f'(x)=x^2+2ax+4$

$-4<x<2$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 모두 존재하려면 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근이 모두 -4와 2 사이에 존재해야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-4>0 \qquad \therefore\ a<-2$ 또는 $a>2$

(ii) $f'(-4)>0$에서 $16-8a+4>0$

$20-8a>0 \qquad \therefore\ a<\frac{5}{2}$

(iii) $f'(2)>0$에서 $4+4a+4>0$

$8+4a>0 \qquad \therefore\ a>-2$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$ 이므로

$-4<-a<2 \qquad \therefore\ -2<a<4$

(i)~(iv)에서 $2<a<\frac{5}{2}$

답 $2<a<\frac{5}{2}$

보충설명

이차방정식의 실근의 위치

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 실수 p, q $(p<q)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 두 근이 모두 p보다 크다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다.

$\iff f(p)<0$

(4) 두 근이 모두 p, q 사이에 있다.

$\iff D\ge0,\ f(p)>0,\ f(q)>0,\ p<-\frac{b}{2a}<q$

07

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극댓값 12를 가지므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 α, 4, β $(\alpha<4<\beta)$라 할 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	4	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	12	↘	극소	↗

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4뿐이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=-4$

이때, $g(x)=f(x)+4$라 하면

$g(\alpha)=f(\alpha)+4=0,\ g(\beta)=f(\beta)+4=0$

$g'(x)=f'(x)$에서 $g'(\alpha)=f'(\alpha)=0,\ g'(\beta)=f'(\beta)=0$

따라서 $g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-4$

$f(4)=12$이므로

$(4-\alpha)^2(4-\beta)^2-4=12$

$(4-\alpha)^2(4-\beta)^2=16 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$\quad\quad =2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)$

$f'(4)=0$이므로

$2(4-\alpha)(4-\beta)(8-\alpha-\beta)=0$

$8-\alpha-\beta=0$ $(\because\ \alpha<4<\beta)$

$\therefore\ \beta=8-\alpha \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하여 정리하면

$(4-\alpha)^4=16,\ (4-\alpha)^4-16=0$

$\{(4-\alpha)^2+4\}\{(4-\alpha)+2\}\{(4-\alpha)-2\}=0$

$\therefore\ 4-\alpha=-2$ 또는 $4-\alpha=2$

이때, $\alpha<4$이므로 $\alpha=2$

$\therefore\ \beta=6$ $(\because$ ㉡$)$

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-6)^2-4$이므로

$f(3)=1^2\times(-3)^2-4=5$

답 5

08

조건 (가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3b\le 0$ ……㉠

조건 ㈐에서 $g(x)=f'(x)-f'(1)$이라 하면

$g(x)=3x^2+2ax-3-2a$

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이므로

이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+3(3+2a)\le 0$

$a^2+6a+9\le 0$, $(a+3)^2\le 0$

$\therefore\ a=-3$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$9-3b\le 0$ $\therefore\ b\ge 3$ ……㉢

$f(3)=27+9a+3b+3=3b+3$ (∵ ㉡)

㉢에 의하여

$3b+3\ge 3\times 3+3=12$

따라서 $f(3)$의 최솟값은 12이다.

답 12

09

ㄱ. (반례) $f(x)=-x^2+2x-1$이라 하면

$f'(x)=-2x+2$

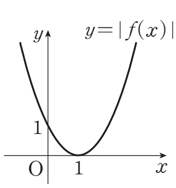
$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

그런데 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)



ㄴ. (반례) $f(x)=x^3-3x$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

한편, 함수 $y=f(|x+1|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후, $x\ge -1$인 부분을 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

따라서 함수 $f(|x-a|)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

(거짓)

ㄷ. $g(x)=f(x)-x^2|x-a|$라 하면 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(i) $x<a$일 때,

$g(x)=f(x)+x^3-ax^2$에서

$g'(x)=f'(x)+3x^2-2ax$

$\lim_{x\to a-} g'(x)=\lim_{x\to a-}\{f'(x)+3x^2-2ax\}$

$=f'(a)+a^2=a^2>0$ (∵ $a\ne 0$)

(ii) $x>a$일 때,

$g(x)=f(x)-x^3+ax^2$에서

$g'(x)=f'(x)-3x^2+2ax$

$\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a+}\{f'(x)-3x^2+2ax\}$

$=f'(a)-a^2=-a^2<0$ (∵ $a\ne 0$)

(i), (ii)에서 $x=a$의 좌우에서 $g(x)$가 증가하다가 감소하므로 $g(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

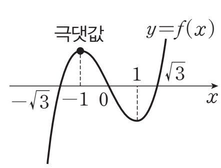
그러므로 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

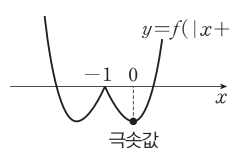
보충설명

ㄴ. 함수 $f(x)=x^3-3x$의 그래프는 [그림 1]과 같고 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

한편, 함수 $y=f(|x+1|)$의 그래프는 [그림 2]와 같고 함수 $f(|x+1|)$은 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



[그림 1]

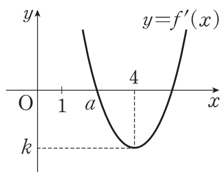


[그림 2]

10

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀐다.

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $a\geq 1$이어야 하므로

$f'(1)\geq 0$에서 $(-3)^2+k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -9$

한편, $f'(x)=(x-4)^2+k$에서 $k\geq 0$이면 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

따라서 실수 k의 값의 범위는 $-9\leq k<0$이다.

답 $-9\leq k<0$

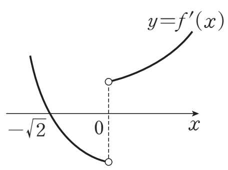
11

$$f(x)=\begin{cases} a(6x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\geq 0) \end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases} a(6-3x^2) & (x<0) \\ 3x^2-a & (x>0) \end{cases}$$

(i) $a<0$일 때,

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-\sqrt{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극대이며 극댓값은

$f(-\sqrt{2})=a(-6\sqrt{2}+2\sqrt{2})=-4a\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}(6x-x^3) & (x<0) \\ x^3+\dfrac{1}{4}x & (x\geq 0) \end{cases}$ 이므로

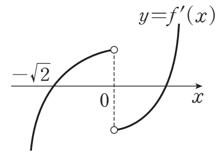
$f(4)=64+1=65$

(ii) $a=0$일 때,

$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ x^3 & (x\geq 0) \end{cases}$ 이므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.

(iii) $a>0$일 때,

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이며 극댓값은 $f(0)=0\neq\sqrt{2}$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(4)=65$

답 65

12

$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $-2,\ 0,\ 2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<2$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 감소한다.

$\therefore\ f(0)>f(2)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+0+2=-\dfrac{3a}{4}$에서 $a=0$

$-2\times 0+0\times 2+2\times(-2)=\dfrac{2b}{4}$에서 $b=-8$

$-2\times 0\times 2=-\dfrac{c}{4}$에서 $c=0$

$\therefore\ f(x)=x^4-8x^2+d$

이때, $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)=x^4-8x^2+d$이므로 극댓값은 $f(0)=d$, 극솟값은 $f(-2)=f(2)=-16+d$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$d-(-16+d)=16$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른풀이

ㄴ. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때, $f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=4x(x+2)(x-2)=4x^3-16x$

이때, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

보충설명

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

13

함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수는

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ……㉠

(i) $x=a$일 때, ㉠에서

$f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

$=$(양수)$\times$(음수)$+0\times$(양수)

$=$(음수)<0

(ii) $x=b$일 때, ㉠에서

$f'(b)g(b)+f(b)g'(b)$

$=0\times$(음수)$+$(양수)$\times$(양수)

$=$(양수)>0

(iii) $x=c$일 때, ㉠에서

$f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$

$=$(음수)$\times0+0\times$(양수)

$=0$

(iv) $x=d$일 때, ㉠에서

$f'(d)g(d)+f(d)g'(d)$

$=0\times$(양수)$+$(음수)$\times$(양수)

$=$(음수)<0

(v) $x=e$일 때, ㉠에서

$f'(e)g(e)+f(e)g'(e)$

$=$(양수)$\times$(양수)$+0\times$(양수)

$=$(양수)>0

(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 p, q의 값의 범위는

$a<p<b$이고 $d<q<e$

답 ②

14

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 2)$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 6을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 -2를 갖는다. ($\because$ 조건 (가))

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$, $f'(4)=0$에서

$c=0$, $48a+8b+c=0$

$\therefore\ b=-6a$, $c=0$ ……㉠

이때, $f(0)=6$에서 $d=6$ ……㉡

$f(4)=-2$에서 $64a+16b+4c+d=-2$

$-32a+8=0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+6$이므로

$g(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-9x+6$

이때, $g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-3x-9$

$=\dfrac{3}{4}(x^2-4x-12)$

$=\dfrac{3}{4}(x+2)(x-6)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=6$에서 극소이며 극솟값은

$$g(6)=\frac{1}{4}\times 6^3-\frac{3}{2}\times 6^2-9\times 6+6=-48$$

답 -48

보충해설

함수의 그래프의 대칭성

(1) $f(a+x)=f(a-x)$ 또는 $f(2a-x)=f(x)$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

(2) $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 또는 $f(x)+f(2a-x)=2b$

⇨ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

15

점 A에서의 접선의 기울기를 k라 하면 접선 l의 방정식은

$y-3=k\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore\ y=k(x+1)+3$ ······㉠

이 직선이 점 B$(5, -9)$를 지나므로

$-9=6k+3,\ 6k=-12$

$\therefore\ k=-2$

이 값을 ㉠에 대입하면

$y=-2x+1$

$f(x)-(-2x+1)=p(x+1)^2(x-5)$ (p는 상수)라 하면 삼차방정식 $f(x)-(-2x+1)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=-2x+1$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 $x=-1$, $x=5$는 근이다.

이때, $x=-1$인 점에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=-2x+1$의 그래프가 서로 접하므로

$f(x)=p(x+1)^2(x-5)-2x+1$

$f'(x)=2p(x+1)(x-5)+p(x+1)^2-2$

$\quad\quad=3p(x+1)(x-3)-2$

점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(5)=36p-2$이므로 접선 m의 방정식은

$y-(-9)=(36p-2)(x-5)$

$\therefore\ y=(36p-2)(x-5)-9$

직선 m과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$p(x+1)^2(x-5)-2x+1=(36p-2)(x-5)-9$에서

$p(x+1)^2(x-5)-(36p-2)(x-5)-2(x-5)=0$

$(x-5)\{p(x+1)^2-(36p-2)-2\}=0$

$p(x-5)(x^2+2x-35)=0,\ p(x-5)^2(x+7)=0$

$\therefore\ x=-7$ 또는 $x=5$

따라서 점 C의 x좌표는 -7이므로

$a=-7$

답 -7

다른풀이

삼차함수의 변곡점은 두 점 A$(-1, 3)$, B$(5, -9)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로 이 점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1\times 5+2\times(-1)}{1+2}=1$ ······㉠

즉, 삼차함수 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $x=1$이다.

같은 방법으로 두 점 B$(5, -9)$, C$(a, f(a))$에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 변곡점이므로 이 점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{1\times a+2\times 5}{1+2}=\dfrac{a+10}{3}$ ······㉡

이때, ㉠=㉡이어야 하므로 $1=\dfrac{a+10}{3}$

$\therefore\ a=-7$

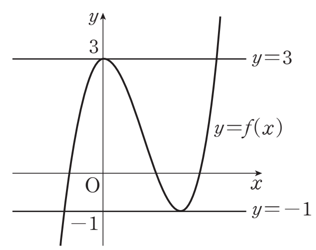
16

조건 (나)에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 극값 -1을 갖는다.

또한, 조건 (가)에 의하여 $f(0)=3,\ f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 3을 갖는다.

이때, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고, $x>0$에서 극솟값 -1을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b는 상수)이라 하자.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(0)=0$이므로 $b=0$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극값을 가질 때의 x좌표를 구하면

$f'(x)=3x^2+2ax=0$에서

$x(3x+2a)=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{2}{3}a\ (\because\ x>0)$

즉, $f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=-1$이므로

$\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^3+a\times\left(-\dfrac{2}{3}a\right)^2+3=-1$

$-\dfrac{8}{27}a^3+\dfrac{4}{9}a^3+3=-1,\ \dfrac{4}{27}a^3=-4$

$a^3=-27,\ (a+3)(a^2-3a+9)=0$

$\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$이므로

$f(4)=4^3-3\times4^2+3=19$

답 19

17

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$에서

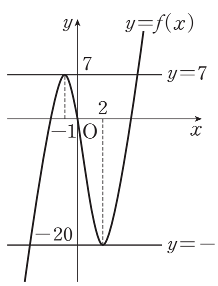
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 $f(-1)=7$, $x=2$일 때 극솟값 $f(2)=-20$을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $g(x)=|f(x)-n|$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 후, $y\le0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $g(x)=|f(x)-n|$이 한 점에서만 미분가능하지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$이 한 점에서 만나거나 두 점에서 만나야 하므로

$n\ge7$ 또는 $n\le-20$

따라서 $\alpha=7,\ \beta=-20$이므로 $\alpha-\beta=7-(-20)=27$

답 27

18

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하자.

점 P에서의 접선의 방정식을

$g(x)=bx+c$ ($b,\ c$는 상수, $b\neq0$)라 하면

$f(x)-g(x)=x^3+(a-b)x-c$

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 세 근은 $p,\ p,\ q$이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+p+q=0$

$\therefore\ 2p+q=0$ (참)

ㄴ. $p=\alpha$라 하면 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=0$이므로 접선의 방정식은

$y=f(\alpha)$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(\alpha)$의 교점이 $\mathrm{R}(r,\ f(r))$

이므로 $q=r$이다.

ㄱ에서 $2\alpha+r=0$ $\qquad\therefore\ r=-2\alpha$

주어진 조건에서 $\beta=-\alpha$이므로

$\alpha+2r=-3\alpha=3\beta$ (참)

ㄷ. $f(0)=0$이므로

$$\lim_{q\to0+}\frac{f(q)}{q}=\lim_{q\to0+}\frac{f(q)-f(0)}{q-0}=f'(0)$$

주어진 조건에서 $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$f'(0)=3\alpha\beta$

$\therefore\ \lim_{q\to0+}\dfrac{f(q)}{q}=3\alpha\beta$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

다른풀이

ㄱ. 주어진 그래프에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 변곡점은 원점이다.

이때, 삼차함수의 접선의 접점과 교점, 그리고 변곡점의 비를 이용하면 원점은 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$0=\dfrac{q+2p}{3}$ $\qquad\therefore\ 2p+q=0$ (참)

ㄴ. 삼차함수의 극점과 교점을 $2:1$로 내분하는 위치에 또 다른 극값이 존재하므로

$\beta=\dfrac{\alpha+2r}{3}$ $\qquad\therefore\ \alpha+2r=3\beta$ (참)

ㄷ. 삼차함수의 접선의 접점과 교점, 그리고 변곡점의 비를 이

용하면

$0=\dfrac{r+2\alpha}{3}$ $\qquad\therefore\ r=-2\alpha$

즉, $f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)^2(x-r)$

$\qquad\qquad\qquad\quad =(x-\alpha)^2(x+2\alpha)$

이때, $f(0)=0$이므로 $-f(\alpha)=2\alpha^3$

$\therefore\ f(\alpha)=-2\alpha^3$

따라서 $f(x)=(x-\alpha)^2(x+2\alpha)-2\alpha^3$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

$$\lim_{q\to 0+}\frac{f(q)}{q}=\lim_{q\to 0+}\frac{f(q)-f(0)}{q-0}$$

$$=f'(0)$$

㉠에서 $f'(x)=2(x-\alpha)(x+2\alpha)+(x-\alpha)^2$이므로

$f'(0)=-4\alpha^2+\alpha^2=-3\alpha^2$

이때, 삼차함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\beta=-\alpha$

$\therefore\ f'(0)=3\alpha\beta$

$\therefore\ \lim\limits_{q\to 0+}\dfrac{f(q)}{q}=3\alpha\beta$ (참)

19

$f(x)=3x^4+4(3-a)x^3+6ax^2-48x$에서

$f'(x)=12x^3+12(3-a)x^2+12ax-48$

$\quad =12\{x^3+(3-a)x^2+ax-4\}$

$\quad =12(x-1)\{x^2+(4-a)x+4\}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3-a & a & -4 \\ & & 1 & 4-a & 4 \\ \hline & 1 & 4-a & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x^2+(4-a)x+4=0$

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이어야 한다.

이때, 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 2이려면 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 중근 또는 허근을 갖거나 $x=1$을 실근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 중근 또는 허근을 가질 때,

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(4-a)^2-4\times4\le0$에서 $a^2-8a\le0$

$a(a-8)\le0$

$\therefore\ 0\le a\le8$

(ii) 이차방정식 $x^2+(4-a)x+4=0$이 $x=1$을 실근으로 가질 때,

$1+(4-a)+4=0$에서 $a=9$

(i), (ii)에서 $0\le a\le8$ 또는 $a=9$

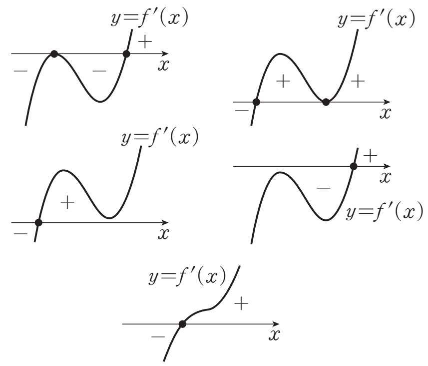
따라서 정수 a는 0, 1, 2, $\cdots$, 9의 10개이다.

답 10

보충설명

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않을 때, 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.



20

$xf'(x)=0$이 되는 x의 값은 -1, 0, 1이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$xf'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
x	−		−		+		+
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<1$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

$\therefore\ f(0)>f(1)$ (거짓)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=0$을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 극댓값 0을 가지므로 $x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점이 하나 존재한다.

또한, $f(-1)<0$이고 $x<-1$일 때 $f'(x)<0$이므로 $x \longrightarrow -\infty$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점이 하나 존재한다.

마찬가지로 $f(1)<0$이고 $x>1$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x \longrightarrow \infty$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점이 하나 존재한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 3이다. (참)

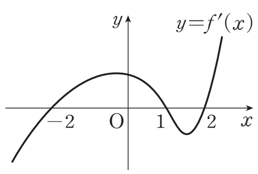
그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

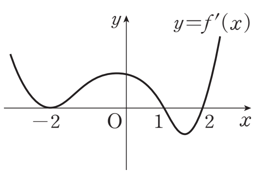
답 ㄴ, ㄷ

21

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌어야 한다.

따라서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 두 가지 경우 중 하나이어야 한다.





즉, a는 자연수, b는 홀수, c는 홀수이다.

이때, $1 \le a < b < c \le 10$이므로 b의 값으로 가능한 것은 3, 5, 7의 3가지이다.

(ⅰ) $b=3$일 때,

$1 \le a < 3$, $c=5$, 7, 9이므로

a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $2 \times 3=6$

(ⅱ) $b=5$일 때,

$1 \le a < 5$, $c=7$, 9이므로

a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $4 \times 2=8$

(ⅲ) $b=7$일 때,

$1 \le a < 7$, $c=9$이므로

a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $6 \times 1=6$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

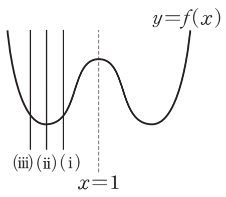
$6+8+6=20$

답 20

22

$f(1+x)=f(1-x)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

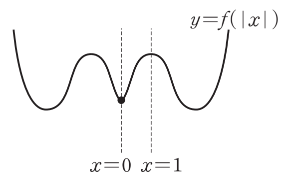


함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프의 $x \ge 0$인 부분을 y축, 즉 직선 $x=0$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

이때, $x<1$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 위치에 따라 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음과 같이 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x<0$에서 극솟값을 가질 때,

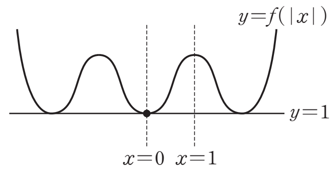
함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 직선 $y=1$과 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때,

함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 직선 $y=1$과 서로 다른 세 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지면 $x=2$에서도 같은 극솟값을 갖는다.

$f(x)-1=\underline{x^2(x-2)^2}$에서

함수 $f(x)$는 $f(1+x)=f(1-x)$에서 $x=1$ 대칭

$f(x)=x^2(x-2)^2+1$

$f'(x)=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)$

$=4x(x-1)(x-2)$

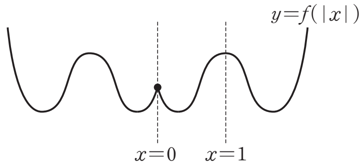
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=1^2 \times (-1)^2+1=2$

(ⅲ) 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극솟값을 가질 때,

함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 직선 $y=1$과 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 2이다.

답 2

23

삼차방정식 $f(x)=f(1)$, 즉 $f(x)-f(1)=0$의 서로 다른 두 실근을 $x=1$, $x=\alpha$ $(\alpha\neq1)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-\alpha)^2+f(1)$

또는 $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)+f(1)$

(i) $f(x)=(x-1)(x-\alpha)^2+f(1)$일 때,

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-\alpha)^2+2(x-1)(x-\alpha)\\&=(x-\alpha)(x-\alpha+2x-2)\\&=(x-\alpha)(3x-\alpha-2)\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f'(3)=f'(5)$이므로

$(3-\alpha)(7-\alpha)=(5-\alpha)(13-\alpha)$

$\alpha^2-10\alpha+21=\alpha^2-18\alpha+65$, $8\alpha=44$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{11}{2}$

즉, $f(x)=(x-1)\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+f(1)$이고

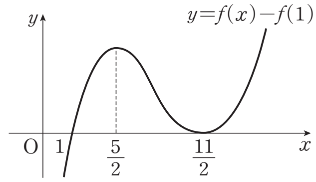
$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(x-\frac{11}{2}\right)\left(3x-\frac{15}{2}\right)\\&=3\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=\dfrac{11}{2}$

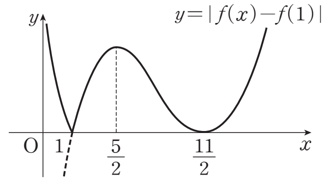
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$\frac{11}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\dfrac{5}{2}$에서 극대이고

극댓값은 $\left|f\left(\dfrac{5}{2}\right)-f(1)\right|=\left|\dfrac{3}{2}\times(-3)^2\right|=\dfrac{27}{2}$

그런데 극댓값이 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)+f(1)$일 때,

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2\\&=(x-1)(2x-2\alpha+x-1)\\&=(x-1)(3x-2\alpha-1)\end{aligned}$$

조건 (나)에서 $f'(3)=f'(5)$이므로

$2(8-2\alpha)=4(14-2\alpha)$

$16-4\alpha=56-8\alpha$, $4\alpha=40$

$\therefore\ \alpha=10$

즉, $f(x)=(x-1)^2(x-10)+f(1)$이고

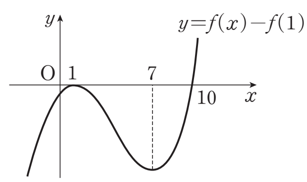
$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-1)(3x-20-1)\\&=3(x-1)(x-7)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=7$

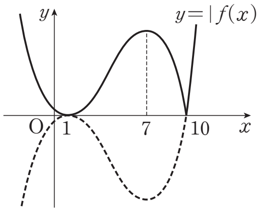
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	7	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)-f(1)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)-f(1)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=7$에서 극대이고 극댓값은 $|f(7)-f(1)|=|6^2\times(-3)|=108$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$f(x)=(x-1)^2(x-10)+f(1)$

$\therefore\ f(2)-f(5)$

$=1^2\times(-8)+f(1)-\{4^2\times(-5)+f(1)\}$

$=72$

답 72

유형연습 06 도함수의 활용

본문 pp.155~166

01-1 2	**01-2** 28	**01-3** 123
02-1 72	**03-1** 4	**03-2** $2\sqrt{2}$
04-1 2	**04-2** 2	**04-3** 4
05-1 3	**05-2** 13	**05-3** $-6<k<2$
06-1 3	**06-2** -3	**07-1** (1) 2 (2) 2
07-2 23	**08-1** (1) 3초 (2) -50 m/s	
08-2 $\frac{3}{2}<t<2$	**09-1** 75 cm^3/s	**09-2** 2 m/s

01-1

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$b-54a$	↗	b	↘	$b-2a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 b를 가지므로 $b=4$이고 $f(x)$는 $x=-3$에서 최솟값 $b-54a$를 가지므로

$4-54a=-23$

$54a=27 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=\frac{1}{2}\times4=2$

답 2

01-2

$f(x)=x^3-ax^2-a^2x+2$에서

$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{a}{3}$ 또는 $x=a$

닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$-\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-a^3+2$	↗	$\frac{5a^3}{27}+2$	↘	$-a^3+2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{a}{3}$에서 최댓값 $\frac{5a^3}{27}+2$를 가지므로

$\frac{5a^3}{27}+2=7,\ \frac{5a^3}{27}=5$

$a^3=27 \qquad \therefore\ a=3$

이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a^3+2=-3^3+2=-25$이므로 $m=-25$이다.

$\therefore\ a-m=3-(-25)=28$

답 28

01-3

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭 우함수
이므로 $f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $f(-1)=f(3)$이므로

$1+a+b=81+9a+b,\ 8a=-80$

$\therefore\ a=-10$

즉, $f(x)=x^4-10x^2+b$이므로

$f'(x)=4x^3-20x=4x(x^2-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{5}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{5}$, $x=\sqrt{5}$에서 극솟값

$f(-\sqrt{5})=f(\sqrt{5})=b-25$를 갖는다.

조건 (다)에서 $b-25=2$이므로 $b=27$

$\therefore\ f(x)=x^4-10x^2+27$

닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	18	↘	2	↗	123

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 123을 갖는다.

답 123

02-1

$2x^2=-x+19$에서 $2x^2+x-19=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm3\sqrt{17}}{4}$

즉, 곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=-x+19$는 $x=\frac{-1\pm3\sqrt{17}}{4}$인 점에서 만나므로

$0<t<\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}$

점 A와 점 D의 y좌표가 같으므로 $2t^2=-x+19$에서

$x=-2t^2+19$

따라서 점 D의 x좌표는 $x=-2t^2+19$이다.

$\therefore\ \overline{AB}=2t^2,\ \overline{AD}=-2t^2-t+19$

직사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=2t^2\times(-2t^2-t+19)=-4t^4-2t^3+38t^2$

$f'(t)=-16t^3-6t^2+76t$

$\quad\ \ =-2t(8t+19)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ $\left(\because\ 0<t<\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}\right)$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$\left(\frac{-1+3\sqrt{17}}{4}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

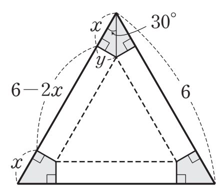
따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$f(2)=-4\times2^4-2\times2^3+38\times2^2$

$\quad\ =72$

답 72

03-1



오른쪽 그림과 같이 잘라내는 사각형의 한 변의 길이를 x $(0<x<3)$라 하면 사각형은 한 내각의 크기가 30°인 합동인 두 직각삼각형으로 나뉜다.

삼각기둥의 높이를 y라 하면

$y=x\tan30°=\frac{x}{\sqrt{3}}$

이때, 상자의 밑면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2$이므로 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2\times\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{x}{4}(6-2x)^2$$
$$=x^3-6x^2+9x$$

$\therefore\ V'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$V'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because\ 0<x<3$)

열린구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

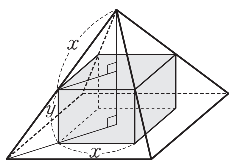
x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $V(1)=4$

답 4

03-2

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 가로와 세로의 길이를 x $(0<x<3)$, 높이를 y라 하면



$(3-x):3=y:\frac{3\sqrt{2}}{2}$에서

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=x^2y=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x^2-x^3)$$

$$\therefore\ V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x-3x^2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x(2-x)$$

$V'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because\ 0<x<3$)

열린구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은 $V(2)=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

04-1

$x^4-2x=-x^2+4x-2k$에서 $x^4+x^2-6x=-2k$

$f(x)=x^4+x^2-6x$라 하면

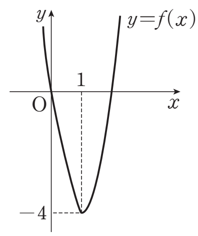
$$f'(x)=4x^3+2x-6$$
$$=2(x-1)(2x^2+2x+3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because\ \underbrace{2x^2+2x+3}_{=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 실근이 1개가 되려면

$-2k=-4$

$\therefore\ k=2$

답 2

04-2

$f(x)=x^4-4x^2+2+a$라 하면

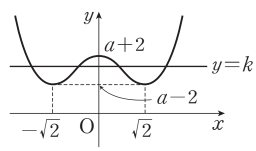
$$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$$
$$=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-2$	↗	$a+2$	↘	$a-2$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만나려면



$a-2<k<a+2$이어야 한다.

이때, 정수 k의 최솟값이 1이므로 $0\le a-2<1$

$2\le a<3$

따라서 자연수 a의 값은 2이다.

답 2

04-3

곡선 $y=3x^4-4x^3-12x^2+x$와 직선 $y=x+a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 방정식 $3x^4-4x^3-12x^2+x=x+a$, 즉 $3x^4-4x^3-12x^2=a$가 서로 다른 네 실근을 가져야 한다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

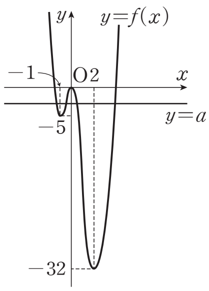
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나려면 $-5<a<0$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.



답 4

05-1

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$f(x)-g(x)=(x^3-3x^2+4x)-(3x^2-5x+k)$

$=x^3-6x^2+9x-k$

$h(x)=x^3-6x^2+9x-k$라 하면

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	$4-k$	↘	$-k$	↗

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $h(1)=4-k$를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $h(3)=-k$를 갖는다.

이때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 방정식 $h(x)=0$의 실근과 같다.

방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 (극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(4-k)\times(-k)<0$

$k(k-4)<0 \qquad \therefore\ 0<k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

다른풀이

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$f(x)-g(x)=(x^3-3x^2+4x)-(3x^2-5x+k)$

$=x^3-6x^2+9x-k$

$h(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면

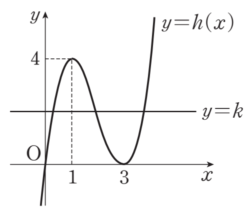
$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 방정식 $h(x)=k$의 실근과 같다.

방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위는

$0<k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

05-2

$f(x)=2x^3+ax^2+6x-6$이라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+6$

이때, 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지면 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는 점에서 함수 $g(t)$가 불연속이 되므로 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않아야 한다.

즉, $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 실근을 갖지 않아야 하므로 이차방정식 $6x^2+2ax+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$

$(a+6)(a-6)\le 0 \qquad \therefore\ -6\le a\le 6$

따라서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 6의 13개이다.

답 13

05-3

$f(x)=x^3-3x$라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

곡선 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3-3t)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-3$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-3)x-2t^3$

이때, 위의 직선은 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=-2t^3+6t^2-6$ ⋯⋯㉠

점 $(2,\ k)$에서 그은 접선이 3개이려면 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-6t^2+6+k$라 하면

$g'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	$k+6$	↘	$k-2$	↗

함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극댓값 $g(0)=k+6$을 갖고, $t=2$에서 극솟값 $g(2)=k-2$를 갖는다.

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)<0이어야 하므로

$(k+6)(k-2)<0$

$\therefore\ -6<k<2$

답 $-6<k<2$

다른풀이

㉠에서 $h(t)=-2t^3+6t^2-6$이라 하면

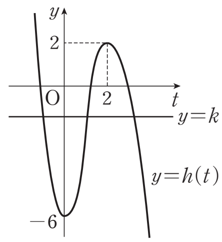
$h'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$h'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$	−	0	+	0	−
$h(t)$	↘	-6	↗	2	↘

따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $-6<k<2$이다.

06-1

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$2x^3-x^2+2x=x^3+\frac{1}{2}x^2+8x+a$

$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=a$

이때, $h(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$라 하면

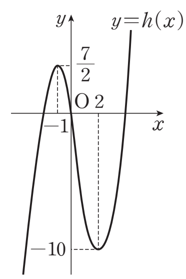
$h'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, 방정식 $h(x)=a$의 실근은 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표가 두 개는 음수이고, 하나는 양수이어야 한다.

따라서 $0<a<\frac{7}{2}$이므로 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

06-2

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+k$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=f'(1)=f'(5)=0$이므로

$f'(x)=4x(x-1)(x-5)$

$\quad=4x(x^2-6x+5)$

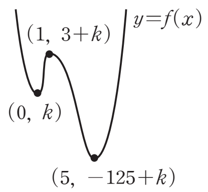
$\quad=4x^3-24x^2+20x$

$\therefore\ a=-8,\ b=10,\ c=0 \qquad \cdots\cdots㉠$

즉, $f(x)=x^4-8x^3+10x^2+k$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	k	↗	$3+k$	↘	$-125+k$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 한 개는 음수이고, 두 개는 양수이어야 하므로

$3+k=0$

$\therefore\ k=-3$

답 -3

07-1

(1) $f(x)=2x^4-k^3x+9$라 하면

$f'(x)=8x^3-k^3=(2x-k)(4x^2+2kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{k}{2}$ $(\because\ \underbrace{4x^2+2kx+k^2}_{=4\left(x+\frac{k}{4}\right)^2+\frac{3}{4}k^2}>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\dfrac{k}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{3k^4}{8}+9$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{k}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{3k^4}{8}+9$를 가지므로

$-\dfrac{3k^4}{8}+9\ge0,\ k^4\le9\times\dfrac{8}{3}$

$k^4\le24 \qquad \cdots\cdots㉠$

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 k는 1, 2의 2개이다.

(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+4$라 하면

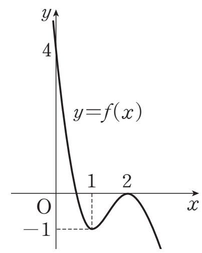
$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $f(2)=0$이므로 $x>2$에서 부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

답 (1) 2 (2) 2

07-2

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(5x^3-7x^2+k)-(8x^2+3)$

$\quad=5x^3-15x^2+k-3$

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=2$ $(\because\ 0<x<4)$

열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$k-23$	↗	

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $k-23$을 가지므로 $0<x<4$에서 $h(x)\ge0$이 항상 성립하려면

$k-23\ge0,\ k\ge23$

따라서 상수 k의 최솟값은 23이다.

답 23

08-1

(1) t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t+30$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간을 구하면 $v=0$에서

$-10t+30=0 \qquad \therefore\ t=3$

(2) 물체가 지면에 닿는 순간의 높이는 0이므로

$h(t)=0$에서

$-5t^2+30t+80=0$, $5(t+2)(t-8)=0$

$\therefore\ t=8\ (\because\ t>0)$

따라서 $t=8$일 때, 물체의 속도는

$-10\times8+30=-50(\mathrm{m/s})$

답 (1) 3초 (2) $-50\,\mathrm{m/s}$

08-2

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각

$f'(t)=4t-6$, $g'(t)=2t-4$

이때, 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로

$f'(t)g'(t)<0$이다.

즉, $(4t-6)(2t-4)<0$이므로 $\frac{3}{2}<t<2$

답 $\frac{3}{2}<t<2$

09-1

t초 후 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+t)\,\mathrm{cm}$이므로

정육면체의 한 면의 넓이를 $S\,\mathrm{cm}^2$라 하면 $S=(2+t)^2$

정육면체의 한 면의 넓이가 $25\,\mathrm{cm}^2$가 되는 순간은

$(2+t)^2=25$에서

$t+2=5\qquad\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

정육면체의 부피를 $V\,\mathrm{cm}^3$라 하면

$V=(2+t)^3$에서 $\frac{dV}{dt}=3(2+t)^2$

따라서 $t=3$에서의 정육면체의 부피의 변화율은

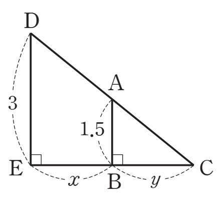
$3\times5^2=75(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

답 $75\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

09-2

t초 동안 지은이가 움직인 거리를 $x\,\mathrm{m}$, 지은이의 그림자의 길이를 $y\,\mathrm{m}$라 하자.

이때, 두 삼각형 ABC, DEC는 서로 닮음이므로



$3:(x+y)=1.5:y$

$1.5x+1.5y=3y$, $1.5x=1.5y$

$\therefore\ y=x$

한편, $x=2t$이므로 $y=2t$

$\therefore\ \frac{dy}{dt}=2$

따라서 지은이의 그림자 길이의 변화율은 $2\,\mathrm{m/s}$이다.

답 $2\,\mathrm{m/s}$

개념 마무리

본문 pp.167~170

01 16	**02** -6	**03** ④	**04** 5
05 13	**06** ⑤	**07** 52	**08** ③
09 2	**10** $\frac{5}{3}$	**11** 1	**12** -12
13 2	**14** ②	**15** 7	**16** ③
17 ①	**18** 24	**19** 148	**20** 7
21 ⑤	**22** $1<a<\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{5}{3}$ 또는 $2\le a<3$		
23 -4	**24** ㄱ, ㄴ, ㄷ		

01

$g(x)=x^4+4x^3-16x$라 하면

$g'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	16	↘	-11	↗	16

따라서 함수 $|g(x)|$, 즉 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 최댓값 16을 갖는다.

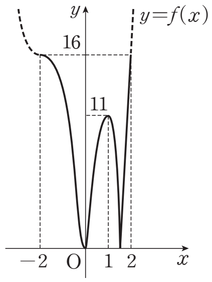
또한, $f(x)=|g(x)|$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이다. 이때, $g(x)$는 다항함수이고 $g(-2)=g(2)=16$, $g(1)=-11$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $16-0=16$

답 16

보충설명

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, 열린구간 $(1,\ 2)$에서 최솟값 0을 갖는다.

02

$g(x)=t$로 놓으면

$g(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$이므로 $t\geq -2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^3-12t+10$에서

$f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

구간 $[-2,\ \infty)$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	26	$\searrow$	-6	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 최솟값 -6을 가지므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최솟값은 -6이다.

답 -6

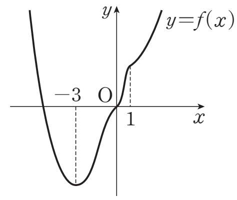
03

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

이때, $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $x=-3$, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x>-3$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

$\therefore\ f(x)\geq f(-3)$

$x<-3$일 때, $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

$\therefore\ f(x)\geq f(-3)$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-3)$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-3)$이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

보충설명

ㄱ. 다항식 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

그런데 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 극댓값이 존재하지 않는다.

04

조건 (가)에서 $f(0)=0$

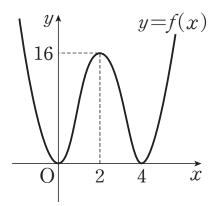
조건 (나)에서 $f'(0)=0$

조건 (다)에서 $f(2-x)=f(2+x)$이므로

$f(4)=0$, $f'(4)=0$

$\therefore\ f(x)=x^2(x-4)^2$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $f(2)=16<25$이므로 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(a)$이다. (단, $a>2$)

즉, $f(a)=25$이므로

$a^2(a-4)^2=25$

$\{a(a-4)+5\}\{a(a-4)-5\}=0$

$(a^2-4a+5)(a^2-4a-5)=0$

$(a^2-4a+5)(a+1)(a-5)=0$

$\therefore\ a=5\ (\because\ a>2)$

답 5

05

점 $\mathrm{P}(t,\ -t^2+9)$에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(t,\ 0)$이므로 $\triangle$OPH의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times(-t^2+9)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{9}{2}t$$

$$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{9}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}(t^2-3)$$

$S'(t)=0$에서 $t=\sqrt{3}\ (\because\ 0<t<3)$

열린구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(t)$는 $t=\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이다.

(가)

$f(x)=-x^2+9$라 하면 $f'(x)=-2x$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

이때, $f(\sqrt{3})=-3+9=6$이므로 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$y-6=-2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$\therefore\ y=-2\sqrt{3}x+12$

(나)

따라서 $a=-2,\ b=3,\ c=12$이므로

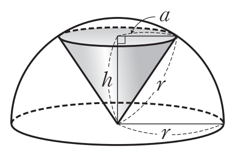
$a+b+c=-2+3+12=13$

(다)

답 13

단계	채점 기준	배점
(가)	삼각형의 넓이가 최대가 되는 t의 값을 구한 경우	40%
(나)	점 P에서의 접선의 방정식을 구한 경우	40%
(다)	구하는 값을 구한 경우	20%

06



오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 $h\ (0<h<r)$, 밑면의 반지름의 길이를 a라 하면 원뿔의 모선의 길이가 r이므로

$a^2+h^2=r^2\qquad\therefore\ a^2=r^2-h^2$

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$$V(h)=\frac{\pi}{3}a^2h=\frac{\pi}{3}(r^2-h^2)h=\frac{\pi}{3}r^2h-\frac{\pi}{3}h^3$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}r^2-\pi h^2=\frac{\pi}{3}(r^2-3h^2)$$

$V'(h)=0$에서 $h=\dfrac{r}{\sqrt{3}}\ (\because\ h>0)$

$0<h<r$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	(0)	$\cdots$	$\frac{r}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(r)
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $V(h)$는 $h=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$에서 최댓값 $V\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)$를 갖는다.

즉, $V\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)=18\pi$이므로

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}r^3-\frac{\pi}{9\sqrt{3}}r^3=18\pi$$

$$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}r^3=18\pi,\ r^3=81\sqrt{3}$$

$\therefore\ r=3\sqrt{3}$

답 ⑤

07

$x^3+3x^2-9x+9-2k=0$에서 $x^3+3x^2-9x+9=2k$

$g(x)=x^3+3x^2-9x+9$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

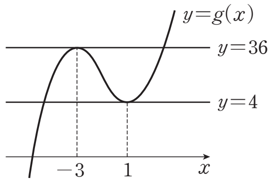
$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $g(-3)=36$, $x=1$에서 극솟값 $g(1)=4$를 갖는다.

방정식 $x^3+3x^2-9x+9-2k=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=g(x)$, $y=2k$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수와 같으므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.



20 이하의 자연수 k에 대하여

(i) $2k<4$ 또는 $2k>36$일 때,

즉, $k=1$, 19, 20일 때, 교점의 개수는 $f(k)=1$

(ii) $2k=4$ 또는 $2k=36$일 때,

즉, $k=2$, 18일 때, 교점의 개수는 $f(k)=2$

(iii) $4<2k<36$일 때,

즉, $k=3$, 4, 5, $\cdots$, 17일 때, 교점의 개수는 $f(k)=3$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{k=1}^{20} f(k)=3\times1+2\times2+15\times3=52$

답 52

08

$f(x)=t$라 하면

방정식 $(g\circ f)(x)=0$, 즉 $g(f(x))=0$의 실근은 $g(t)=0$인 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 값과 같다.

$g(t)=0$에서 $t^2-1=0$

$\therefore$ $t=-1$ 또는 $t=1$

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

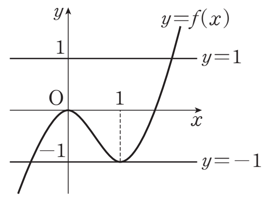
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=0$, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-1$을 갖는다.

오른쪽 그림에서 방정식 $f(x)=1$은 한 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=-1$은 두 실근을 가지므로 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



답 ③

09

$h(x)=g(x)-f(x)$이므로 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이다.

$h'(x)=g'(x)-f'(x)$이고, 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β, γ이므로

$f'(\alpha)=g'(\alpha)$, $f'(\beta)=g'(\beta)$, $f'(\gamma)=g'(\gamma)$

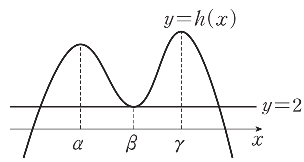
따라서 $h'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값 $h(\beta)=2$를 갖는다.

오른쪽 그림에서 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

10

$f(x)=x^3-3x^2+3k-1$이라 하면

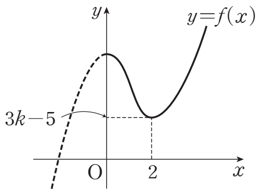
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

$x\ge0$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 극소이면서 최소이고 최솟값은 $f(2)=3k-5$이므로 부등식 $f(x)\ge0$이 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 $3k-5\ge0$이어야 한다.



$\therefore\ k\ge\dfrac{5}{3}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{5}{3}$이다.

답 $\dfrac{5}{3}$

11

$f(x)=x^4-4(a-2)^3x+27$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4(a-2)^3=4\{x^3-(a-2)^3\}$

$\quad=4\{x-(a-2)\}\{x^2+(a-2)x+(a-2)^2\}$

$f'(x)=0$에서 $x=a-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a-2$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$f(a-2)=(a-2)^4-4(a-2)^4+27$

$\quad=-3\{(a-2)^4-9\}$

$\quad=-3\{(a-2)^2+3\}\{(a-2)^2-3\}$

이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$-3\{(a-2)^2+3\}\{(a-2)^2-3\}>0$

$\{(a-2)^2+3\}\{(a-2)^2-3\}<0$

$(a-2)^2-3<0$ ($\because$ $(a-2)^2+3>0$)

$\therefore\ a^2-4a+1<0$

이때, $p<a<q$에서

$a^2-4a+1=(a-p)(a-q)$

이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$pq=1$

답 1

다른풀이

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(a-2)=(a-2)^4-4(a-2)^4+27$

$\quad=-3(a-2)^4+27$

이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$-3(a-2)^4+27>0$, $(a-2)^4<9$

$\therefore\ -\sqrt{3}<a-2<\sqrt{3}$

$\therefore\ 2-\sqrt{3}<a<2+\sqrt{3}$

따라서 $p=2-\sqrt{3}$, $q=2+\sqrt{3}$이므로

$pq=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$

12

$f(x)=x^4-x^2-2x-a$에서

$f'(x)=4x^3-2x-2$

$\quad=(x-1)(4x^2+4x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $\underbrace{4x^2+4x+2}_{=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

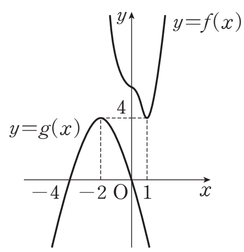
x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$f(1)=-a-2$

한편, $g(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $g(-2)=4$를 갖는다.

이때, 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이



(함수 $f(x)$의 최솟값)

$\ge$(함수 $g(x)$의 최댓값)

이어야 하므로

$-a-2\ge4\qquad\therefore\ a\le-6$

따라서 실수 a의 최댓값은 $M=-6$이므로

$g(M)=g(-6)=-(-4)^2+4=-12$

답 -12

13

$3x^{n+3}-n(n-4)>(n+3)x^3$에서

$3x^{n+3}-(n+3)x^3>n(n-4)$

$f(x)=3x^{n+3}-(n+3)x^3$이라 하면

$f'(x)=3(n+3)x^{n+2}-3(n+3)x^2$

$=3(n+3)x^2(x^n-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $x>0$)

열린구간 $(0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-n$	$\nearrow$

$x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-n$을 가지므로

$-n>n(n-4)$, $n^2-3n<0$

$\therefore$ $0<n<3$

따라서 부등식이 성립하도록 하는 자연수 n은 1, 2의 2개이다.

답 2

14

$x_P=t^3-t^2+4t$, $x_Q=2t^2-4t+2$에서

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\dfrac{dx_P}{dt}=3t^2-2t+4$, $v_Q=\dfrac{dx_Q}{dt}=4t-4$

ㄱ. $v_P=3t^2-2t+4=3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{11}{3}>0$

이므로 점 P는 항상 양의 방향으로 움직인다. (거짓)

ㄴ. 점 Q의 시각 t에서의 가속도를 a_Q라 하면

$a_Q=\dfrac{dv_Q}{dt}=4$

$t=2$에서 점 Q의 속도는 $4\times2-4=4$이므로 속도와 가속도의 크기의 차는 0이다. (거짓)

ㄷ. 두 점 P, Q가 시각 t에서 서로 반대 방향으로 움직이면

$v_P\times v_Q<0$

그런데 ㄱ에서 $v_P>0$이므로 $v_Q<0$

$4t-4<0$ $\quad\therefore$ $0<t<1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

15

시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|2t^3-12t^2+18t-7|$ $(0<t\le4)$

이때, $g(t)=2t^3-12t^2+18t-7$이라 하면

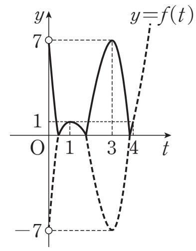
$g'(t)=6t^2-24t+18=6(t-1)(t-3)$

$g'(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

구간 $(0, 4]$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-7	$\nearrow$	1

따라서 구간 $(0, 4]$에서 함수 $y=|g(t)|$, 즉 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 P는 $t=3$에서 원점과 가장 멀리 떨어져 있으므로 $t=3$에서 점 P와 원점 사이의 거리는 7이다.

답 7

16

ㄱ. 속력은 속도의 절댓값이므로

$|v(t_1)|>|v(t_2)|$ (참)

ㄴ. $0<t<t_4$에서 함수 $v(t)$는 $t=\alpha$, $t=\beta$에서 부호가 달라지므로 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다. (거짓)

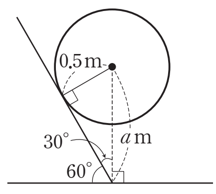
ㄷ. 함수 $y=v(t)$의 그래프의 접선의 기울기가 가속도 $a(t)$이므로 $t=t_1$, $t=t_2$, $t=t_3$에서 가속도의 부호가 3번 바뀐다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

17

오른쪽 그림과 같이 공과 경사면의 거리가 0.5 m일 때 공이 경사면과 처음으로 충돌한다. 이때, 바닥으로부터 공의 중심까지의 거리를 a m라 하면



$a=\dfrac{0.5}{\sin 30^\circ}=1$

$h(t)=1$에서 $21-5t^2=1$, $20=5t^2$

$t^2=4 \qquad \therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$

이때, t초 후의 공의 속도를 $v\,\mathrm{m}/$초라 하면

$v=\dfrac{dh}{dt}=-10t$

따라서 $t=2$일 때 공의 속도는

$-10\times 2=-20(\mathrm{m}/$초$)$

답 ①

18

t초 후 $\overline{\mathrm{BP}}$의 길이는 $20-2t$, $\overline{\mathrm{BQ}}$의 길이는 $4t$ $(0<t<5)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=l$이라 하면

$l=\sqrt{(20-2t)^2+(4t)^2}$

$\ =\sqrt{20t^2-80t+400}$

$\ =\sqrt{20(t-2)^2+320}$

즉, $t=2$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.

한편, 삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 4t\times(20-2t)=-4t^2+40t$

따라서 삼각형의 넓이의 변화율은 $\dfrac{dS(t)}{dt}=-8t+40$이므로

$t=2$에서의 넓이의 변화율은 $-8\times 2+40=24$이다.

답 24

19

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$, 원의 중심을 $C(15,\ 7)$이라 할 때, 선분 PC의 길이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\sqrt{(t-15)^2+(t^2-7)^2}$

$\quad\ =\sqrt{t^4-13t^2-30t+274}$

이때, $g(t)=t^4-13t^2-30t$라 하면 $g(t)$가 최소일 때, $f(t)$도 최소이다.

$g'(t)=4t^3-26t-30=2(t-3)(2t^2+6t+5)$

$g'(t)=0$에서 $t=3\ (\because\ \underbrace{2t^2+6t+5}_{=2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}>0)$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	-126	↗

함수 $g(t)$는 $t=3$에서 최솟값 -126을 갖는다.

함수 $g(t)$가 최솟값을 가질 때, $f(t)$ 또한 최솟값을 가지므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$\sqrt{274-126}-3=\sqrt{148}-3$

즉, $m=\sqrt{148}-3$이므로

$(m+3)^2=148$

답 148

20

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면 $v=f'(t)$

점 P가 출발한 후 운동 방향이 2번만 바뀌어야 하므로 $t>0$에서 방정식 $v=0$이 중근이 아닌 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^4-2t^3-12t^2-5at+2$에서

$v=4t^3-6t^2-24t-5a$

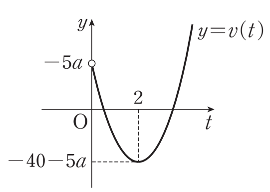
$v'=12t^2-12t-24=12(t+1)(t-2)$

$v'=0$에서 $t=2\ (\because\ t>0)$

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $v(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$v'(t)$		$-$	0	$+$
$v(t)$		↘	$-40-5a$	↗

따라서 함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$t>0$에서 함수 $y=v(t)$의 그래프와 x축과의 두 교점의 t좌표가 모두 양수이므로

$-5a>0$, $-40-5a<0$

$\therefore\ -8<a<0$

따라서 정수 a는 -7, -6, -5, $\cdots$, -1의 7개이다.

답 7

21

$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$에서

$x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$

$x^2(x-3)-t=0$에서 $x^2(x-3)=t$

$h(x)=x^2(x-3)$이라 하면

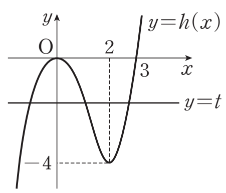
$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표가 1이면 $x-1=0$의 실근과 겹치므로 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수 $f(t)$는

(i) $t<-4$ 또는 $t>0$일 때,

$f(t)=2$

(ii) $t=-4$ 또는 $t=-2$ 또는 $t=0$일 때,

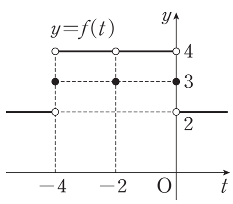
$x=1$일 때, $t=-2$

$f(t)=3$

(iii) $-4<t<-2$ 또는 $-2<t<0$일 때,

$f(t)=4$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $f(t)$는 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 불연속이다.

이때, 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(-4)=g(-2)=g(0)=0$ *

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 3차 이하의 다항함수이므로

$g(x)=ax(x+4)(x+2)$ (단, a는 실수)

조건 (나)에서 $g(-3)=6$이므로 $3a=6$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ g(1)=2\times1\times5\times3=30$

답 ⑤

풀이첨삭

* 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $t=-4$, $t=-2$, $t=0$에서 연속이어야 한다.

(i) $t=-4$에서 연속일 때,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$

$\lim_{x\to-4+}f(t)g(t)=4g(-4)$

$\lim_{x\to-4-}f(t)g(t)=2g(-4)$

즉, $3g(-4)=4g(-4)=2g(-4)$이므로 $g(-4)=0$

(ii) $t=-2$에서 연속일 때,

$f(-2)g(-2)=3g(-2)$

$\lim_{x\to-2+}f(t)g(t)=4g(-2)$

$\lim_{x\to-2-}f(t)g(t)=2g(-2)$

즉, $3g(-2)=4g(-2)=2g(-2)$이므로 $g(-2)=0$

(iii) $t=0$에서 연속일 때,

$f(0)g(0)=3g(0)$

$\lim_{x\to0+}f(t)g(t)=2g(0)$

$\lim_{x\to0-}f(t)g(t)=4g(0)$

즉, $3g(0)=4g(0)=2g(0)$이므로 $g(0)=0$

22

$x^4-2x^2+1=t-2$ ……㉠

에서 $x^4-2x^2+3=t$

$g(x)=x^4-2x^2+3$이라 하면

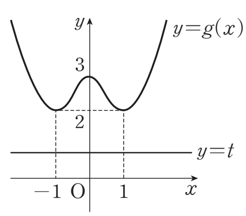
$g'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수 $f(t)$는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

$t<2$일 때 $f(t)=0$

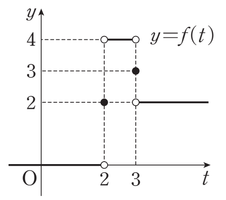
$t=2$일 때 $f(t)=2$

$2<t<3$일 때 $f(t)=4$

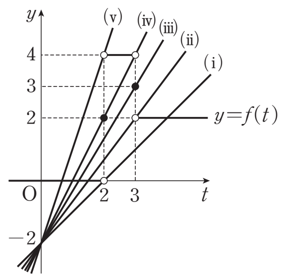
$t=3$일 때 $f(t)=3$

$t>3$일 때 $f(t)=2$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=at-2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선 $y=at-2$는 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이 또는 (ⅳ)와 (ⅴ) 사이에 존재하거나 (ⅲ) 또는 (ⅳ) 와 일치해야 한다.



(ⅰ) 직선 $y=at-2$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$0=2a-2,\ 2a=2$

$\therefore\ a=1$

(ⅱ) 직선 $y=at-2$가 점 $(3,\ 2)$를 지날 때,

$2=3a-2,\ 3a=4$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

(ⅲ) 직선 $y=at-2$가 점 $(3,\ 3)$을 지날 때,

$3=3a-2,\ 3a=5$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

(ⅳ) 직선 $y=at-2$가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때,

$2=2a-2,\ 2a=4$

$\therefore\ a=2$

(ⅴ) 직선 $y=at-2$가 점 $(2,\ 4)$를 지날 때,

$4=2a-2,\ 2a=6$

$\therefore\ a=3$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 a의 값의 범위는

$1<a<\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{5}{3}$ 또는 $2\le a<3$

답 $1<a<\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{5}{3}$ 또는 $2\le a<3$

23

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 ㈎에서 $f'(-1)=f'(3)=0$이므로

$f'(x)=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$

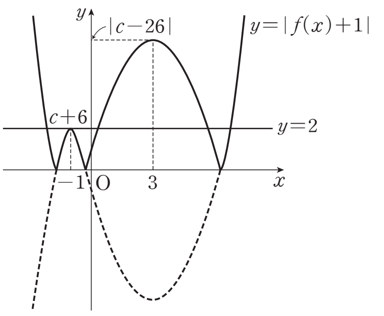
$\therefore\ a=-3,\ b=-9$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$이고, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$c+5$	↘	$c-27$	↗

함수 $y=|f(x)+1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축으로 1만큼 평행이동한 후, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때, 조건 ㈏에서 $|f(3)+1|>|f(-1)+1|$이므로 함수 $y=|f(x)+1|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



조건 ㈐에서 함수 $y=|f(x)+1|$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 5개의 점에서 만나므로 $x=-1$에서의 극댓값은

$c+6=2\qquad\therefore\ c=-4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$이므로 $f(0)=-4$이다.

답 -4

24

$f(x)=-4x^3+6ax^2-a^3-2a^2$ $(a>0)$에서

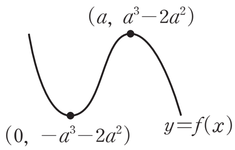
$f'(x)=-12x^2+12ax=-12x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-a^3-2a^2$	↗	a^3-2a^2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $0<a<2$일 때,

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(a)=a^3-2a^2$

(ii) $a\geq 2$일 때,

$0\leq x\leq 2$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=-a^3-2a^2+24a-32$

(i), (ii)에서

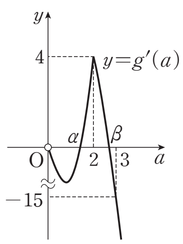
$$g(a)=\begin{cases} a^3-2a^2 & (0<a<2) \\ -a^3-2a^2+24a-32 & (a\geq 2) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

ㄱ. ㉠에서 $g(1)=1-2=-1$ (참)

ㄴ. ㉠에서 $g'(a)=\begin{cases} 3a^2-4a & (0<a<2) \\ -3a^2-4a+24 & (a>2) \end{cases}$

$\lim\limits_{a\to 2+} g'(a)=\lim\limits_{a\to 2-} g'(a)=4$이므로 함수 $g(a)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\lim\limits_{a\to 0+} g'(a)=0,\ g'(2)=4,\ g'(3)=-15$이므로 함수 $y=g'(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



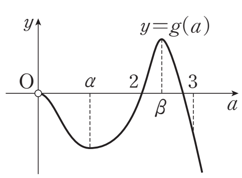
$g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값을 $\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$라 하면

$0<\alpha<2<\beta<3$

함수 $y=g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(a)$		↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(a)$는 $a=\beta$에서 극대이면서 최댓값을 가지므로 함수 $g(a)$의 최댓값은 열린구간 $(2,\ 3)$에서 존재한다. (참)



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

Ⅲ. 적분

유형연습 07 부정적분 본문 pp.178~184

01-1 (1) 18 (2) 16 **01-2** 10 **01-3** 11

02-1 (1) $\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $2\theta+C$ (단, C는 적분상수)

02-2 $-\frac{8}{3}$ **03-1** 34 **03-2** -8

04-1 2 **04-2** -3 **05-1** $\frac{32}{3}$

05-2 96 **06-1** $\frac{11}{6}$ **06-2** $\frac{5}{12}$

07-1 -10 **07-2** 32

01-1

(1) $\int f(x)dx=x^4-2ax^2+ax+C$에서

$(x^4-2ax^2+ax+C)'=f(x)$이므로

$f(x)=4x^3-4ax+a$

$f(1)=-2$에서 $4-4a+a=-2$

$3a=6 \quad \therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=4x^3-8x+2$이므로

$f(2)=4\times 2^3-8\times 2+2=18$

(2) $\int (x-1)f(x)dx=2x^3-4x^2+2x+C$에서

$(2x^3-4x^2+2x+C)'=(x-1)f(x)$이므로

$6x^2-8x+2=(x-1)f(x)$

$(6x-2)(x-1)=(x-1)f(x)$

따라서 $f(x)=6x-2$이므로

$f(3)=6\times 3-2=16$

답 (1) 18 (2) 16

01-2

두 함수 $F(x),\ G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$

도함수의 성질에 의하여

$\{F(x)-G(x)\}'=f(x)-f(x)=0$

도함수가 0인 함수는 상수함수이므로

$F(x)-G(x)=k$ (단, k는 상수)

즉, $G(x)=F(x)-k$

$=2x^3-4x+3-k$

$G(1)=0$에서 $0=2-4+3-k$ $\quad\therefore k=1$

따라서 $G(x)=2x^3-4x+2$이므로

$G(2)=2\times2^3-4\times2+2=10$

답 10

01-3

$f(x)=\int xg(x)dx$에서 $f'(x)=xg(x)$

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x^3+5x$에서

$f'(x)-g'(x)=2x^3+5x$이므로

$xg(x)-g'(x)=2x^3+5x$

이때, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 실수),

$g'(x)=4x+a$

$$\begin{aligned}\therefore\ xg(x)-g'(x)&=x\times(2x^2+ax+b)-(4x+a)\\&=2x^3+ax^2+(b-4)x-a\\&=2x^3+5x\end{aligned}$$

즉, $a=0$, $b-4=5$ $\quad\therefore a=0$, $b=9$

따라서 $g(x)=2x^2+9$이므로 $g(1)=2+9=11$

답 11

02-1

(1) $$\begin{aligned}\int(2x-1)^2dx&=\int(4x^2-4x+1)dx\\&=4\int x^2dx-4\int xdx+\int dx\\&=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C\end{aligned}$$

(단, C는 적분상수)

(2) $$\begin{aligned}\int(x-y)^2dx&=\int(x^2-2xy+y^2)dx\\&=\int x^2dx-\int 2xydx+\int y^2dx\\&=\int x^2dx-2y\int xdx+y^2\int dx\\&=\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2+C\end{aligned}$$

x를 제외한 문자는 상수로 생각한다.

(단, C는 적분상수)

(3) $$\begin{aligned}&\int(x^2-x-1)(x^2+x+1)dx\\&=\int\{(x^2)^2-(x+1)^2\}dx\\&=\int\{x^4-(x^2+2x+1)\}dx\\&=\int(x^4-x^2-2x-1)dx\\&=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-x^2-x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}&\int(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta+\int(\sin\theta-\cos\theta)^2d\theta\\&=\int\{(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2\}d\theta\\&=\int\{2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\}d\theta\\&=\int 2d\theta\\&=2\theta+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{4}{3}x^3-2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\frac{1}{3}x^3-x^2y+xy^2+C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

(4) $2\theta+C$ (단, C는 적분상수)

다른풀이

(1) $$\begin{aligned}\int(2x-1)^2dx&=\frac{1}{2(2+1)}\times(2x-1)^3+C\\&=\frac{1}{6}(2x-1)^3+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int(x-y)^2dx&=\frac{1}{2+1}\times(x-y)^{2+1}+C\\&=\frac{1}{3}(x-y)^3+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

02-2

부정적분의 성질에 의하여

$$\int\{2f(x)-g(x)\}dx=2\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$=x^3-4x^2+C_1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$
$$=3x^2+6x-6+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-2+C_3,$$
$$\int g(x)dx=-\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+4x-4+C_4$$

(단, C_3, C_4는 적분상수)

이때, $h(x)$는 함수 $f(x)-g(x)$의 한 부정적분이므로

$$h(x)=\int\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x-2+C_3\right)$$
$$-\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2+4x-4+C_4\right)$$
$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{11}{3}x^2-2x+2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

따라서 $h(1)=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}-2+2+C=-3+C$,

$h(-1)=-\frac{2}{3}-\frac{11}{3}+2+2+C=-\frac{1}{3}+C$이므로

$h(1)-h(-1)=-3+C-\left(-\frac{1}{3}+C\right)=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

03-1

함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=f'(4)=0$

$f'(x)=a(x-2)(x-4)=ax^2-6ax+8a$

$=a(x-3)^2-a$

이때, 이차함수 $f(x)$가 최댓값을 가지려면 이차함수의 최고차항의 계수는 음수이어야 한다.

$\therefore\ a<0$

함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $-a$를 가지므로 $-a=3$

$\therefore\ a=-3$

한편, $f(x)=\int f'(x)dx$

$$=\int\{-3(x-3)^2-(-3)\}dx$$
$$=\int(-3x^2+18x-24)dx$$
$$=-x^3+9x^2-24x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점을 지나므로

$f(0)=0 \qquad \therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=-x^3+9x^2-24x$이므로

$f(-1)=-(-1)^3+9\times(-1)^2-24\times(-1)=34$

답 34

03-2

조건 (가)에서 $f'(2+x)=f'(2-x)$에서 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=f'(1)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로 $f'(3)=0$

$\therefore\ f'(1)=f'(3)=0$

이때, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-3)=3(x^2-4x+3)$

$=3x^2-12x+9$

$\therefore\ f(x)=\int(3x^2-12x+9)dx$

$=x^3-6x^2+9x+C$ (단, C는 적분상수)

위의 식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3^3-6\times3^2+9\times3+C=-12$

이므로 $C=-12$

$\therefore\ f(x)=x^3-6x^2+9x-12$

이때, $f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=1-6+9-12=-8$

답 -8

04-1

주어진 그래프에서 $f'(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax\ (a<0)$라 하면

$$f(x)=\int(ax^2-2ax)dx=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C$$

(단, C는 적분상수) ……㉠

이때, $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 -1, $x=2$에서 극댓값 5를 가지므로 ㉠에서

$f(0)=C=-1$

$$f(2)=\frac{8a}{3}-4a+C=C-\frac{4a}{3}=5,\quad -1-\frac{4a}{3}=5$$

$$-6=\frac{4a}{3}\qquad \therefore\ a=-\frac{9}{2}$$

따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2-1$이므로

$$f(1)=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}-1=2$$

답 2

04-2

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때, 주어진 그래프에서 $f'(-1)=f'(1)=f'(3)=0$이므로

$$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)$$
$$=4x^3-12x^2-4x+12$$

이다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(4x^3-12x^2-4x+12)dx$$
$$=x^4-4x^3-2x^2+12x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

이때, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$C-9$	↗	$C+7$	↘	$C-9$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 최솟값 -12를 가지므로

$C-9=-12\qquad \therefore\ C=-3$

따라서 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x-3$이므로

$f(2)=2^4-4\times2^3-2\times2^2+12\times2-3=-3$

답 -3

05-1

함수 $f(x)$의 부정적분이 $F(x)$이므로 $F'(x)=f(x)$

조건 ㈎에서 $F(x)-xf(x)=x^4+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=4x^3+6x$

$f(x)-f(x)-xf'(x)=4x^3+6x$

$-xf'(x)=4x^3+6x$

$\therefore\ f'(x)=-4x^2-6$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-4x^2-6)dx$$

$$=-\frac{4}{3}x^3-6x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\quad \cdots\cdots㉠$$

$F(x)-xf(x)=x^4+3x^2$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$F(3)-3f(3)=3^4+3\times3^2=108$

$-3f(3)=108$ ($\because$ 조건 ㈏) $\qquad \therefore\ f(3)=-36$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하여 정리하면

$f(3)=-54+C,\ -36=-54+C\qquad \therefore\ C=18$

따라서 $f(x)=-\frac{4}{3}x^3-6x+18$이므로

$$f(1)=-\frac{4}{3}-6+18=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

05-2

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

$$xf(x)=\int\{f(x)+xf'(x)\}dx$$
$$=\int(8x^3-9x^2+4x-1)dx\ (\because\ \text{조건 ㈎})$$
$$=2x^4-3x^3+2x^2-x+C_1\ (\text{단, } C_1\text{은 적분상수})$$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $C_1=0$

$x\neq0$일 때, $f(x)=2x^3-3x^2+2x-1$

이때, 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $f(0)=\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(2x^3-3x^2+2x-1)=-1$

$\therefore\ f(0)=-1$

한편, $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$이므로

$$f(x)-g(x)=\int\{f'(x)-g'(x)\}dx$$
$$=\int(3x^2-2x+3)dx\ (\because\ \text{조건 (나)})$$
$$=x^3-x^2+3x+C_2\ (\text{단, } C_2\text{는 적분상수})\quad\cdots\cdots㉠$$

$f(0)+g(0)=1$에서 $-1+g(0)=1\ (\because\ f(0)=-1)$

$\therefore\ g(0)=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=C_2\qquad\therefore\ C_2=-3$

따라서 $f(x)-g(x)=x^3-x^2+3x-3$이므로

$$g(x)=f(x)-(x^3-x^2+3x-3)$$
$$=(2x^3-3x^2+2x-1)-(x^3-x^2+3x-3)$$
$$=x^3-2x^2-x+2$$

에서

$f(-1)=2\times(-1)^3-3\times(-1)^2+2\times(-1)-1=-8$

$g(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-(-2)+2=-12$

$\therefore\ f(-1)g(-2)=96$

답 96

06-1

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능하다.

이때, 함수 $f(x)$는 각 구간이 다항함수로 이루어져 있으므로

$-2a-3=a\qquad\therefore\ a=-1$

한편, $f'(x)=\begin{cases}-x & (x<1)\\ x^2+2x-4 & (x>1)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+C_1 & (x<1)\\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2-4x+C_2 & (x>1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C_1=1$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)$이므로

$\dfrac{1}{3}+1-4+C_2=-\dfrac{1}{2}+1\qquad\therefore\ C_2=\dfrac{19}{6}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+1 & (x<1)\\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2-4x+\dfrac{19}{6} & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$f(2)=\dfrac{1}{3}\times2^3+2^2-4\times2+\dfrac{19}{6}=\dfrac{11}{6}$

답 $\dfrac{11}{6}$

06-2

$f'(x)=\begin{cases}x^2 & (|x|<1)\\ -1 & (|x|>1)\end{cases}$에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+C_1 & (x<-1)\\ \dfrac{1}{3}x^3+C_2 & (-1<x<1)\\ -x+C_3 & (x>1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

$f(0)=-\dfrac{1}{24}$이므로 $C_2=-\dfrac{1}{24}$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)$, $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)$이므로

$-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{24}=1+C_1\qquad\therefore\ C_1=-\dfrac{11}{8}$

$-1+C_3=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{24}\qquad\therefore\ C_3=\dfrac{31}{24}$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x-\dfrac{11}{8} & (x<-1)\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{24} & (-1\le x<1)\\ -x+\dfrac{31}{24} & (x\ge1)\end{cases}$$

방정식 $f(x)=0$에서

$x<-1$이면 $-x-\dfrac{11}{8}=0\qquad\therefore\ x=-\dfrac{11}{8}$

$-1<x<1$이면 $\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{24}=0$, $x^3=\dfrac{1}{8}\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

$x>1$이면 $-x+\dfrac{31}{24}=0\qquad\therefore\ x=\dfrac{31}{24}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 합은

$-\dfrac{11}{8}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{31}{24}=\dfrac{5}{12}$

답 $\dfrac{5}{12}$

07-1

$f(x+y)=f(x)+f(y)+8$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+8$

$\therefore f(0)=-8$

$f'(0)=-1$이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)+8-f(0)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+8}{h}=-1 \quad ······㉡$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+8-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+8}{h}=-1\ (\because ㉡)$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=-\int dx=-x+C$

(단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=-8$이므로 $C=-8$

따라서 $f(x)=-x-8$이므로

$f(2)=-2-8=-10$

답 -10

07-2

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)+4$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+4$ $\quad\therefore f(0)=-4$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)+h(1+h)+4-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+h^2+h+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+4}{h}+h+1\right\}=10$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(h)+4}{h}=9 \quad ······㉡$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)+4-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2+4}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)+4}{h}+x^2+xh\right\}=x^2+9\ (\because ㉡)$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^2+9)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+9x+C$ (단, C는 적분상수)

이때, $f(0)=-4$이므로 $C=-4$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+9x-4$이므로

$f(3)=9+27-4=32$

답 32

개 념 마 무 리

본문 pp.185~188

01 ③	**02** $\frac{3}{4}$	**03** 2	**04** 8
05 31	**06** 16	**07** 3	**08** ①
09 2	**10** -6	**11** $-\frac{7}{4}$	**12** ①
13 1	**14** 385	**15** ③	**16** 0
17 $-\frac{9}{4}$	**18** 28	**19** 50	**20** ①
21 83	**22** $-\frac{15}{2}$	**23** 4	**24** 16

01

ㄱ. $F(x)=\int f(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$ (참)

ㄴ. $\int\{f(x)-g(x)\}dx=C$ (C는 상수)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-g(x)=0$

$\therefore f(x)=g(x)$ (참)

ㄷ. (반례) $F(x)=x^2$, $G(x)=x^2+1$은 모두 함수 $f(x)=2x$의 부정적분이지만 $F(x)\neq G(x)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

보충설명

ㄷ. $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면

$$F(x)=G(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

의 관계가 성립한다.

02

$\int\{2-f(x)\}dx=ax^4+bx^3+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2-f(x)=4ax^3+3bx^2$

$\therefore\ f(x)=-4ax^3-3bx^2+2$

$f'(x)=-12ax^2-6bx$

한편, 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=f'(2)=0$

$f'(2)=-48a-12b=0 \qquad \therefore\ b=-4a \qquad \cdots\cdots ㉠$

또한, $f(0)=2$, $f(2)=-2$이므로

$$\begin{aligned} f(2)&=-32a-12b+2 \\ &=-32a+48a+2 \ (\because ㉠) \\ &=16a+2=-2 \end{aligned}$$

$16a=-4 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{4}$

$a=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

03

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $f(0)=-2$이므로

$c=-2$

조건 (나)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$ax^2-bx-2=ax^2+bx-2$

$\therefore\ b=0$

즉, $f(x)=ax^2-2$이므로 $f'(x)=2ax$

조건 (다)에서 $f(f'(x))=f'(f(x))$이므로

$a(2ax)^2-2=2a(ax^2-2)$

$4a^3x^2-2=2a^2x^2-4a$

즉, $4a^3=2a^2$, $a^2(4a-2)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a\neq0)$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

한편, $F(x)=\int f(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$

함수 $F(x)$가 감소하는 구간에서 $F'(x)<0$, 즉 $f(x)<0$이므로

$\frac{1}{2}x^2-2<0$, $x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0 \qquad \therefore\ -2<x<2$

따라서 양수 t의 최댓값은 2이다.

답 2

04

$f(x)=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx$에서

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=0$에서 $f(0)=C=0$

$\therefore\ f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\begin{aligned} f(2)&=2+2^2+2^3+\cdots+2^n \\ &=\frac{2(2^n-1)}{2-1} \\ &=2(2^n-1) \end{aligned}$$

이때, $f(2)<1000$이므로

$2(2^n-1)<1000$

$2^n-1<500$, $2^n<501$

$2^8=256$, $2^9=512$이므로

$2^8<501<2^9$

$\therefore\ n<9$

따라서 자연수 n의 최댓값은 8이다.

답 8

보충설명

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

05

$$f(x)=\int\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^9}{9}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots+\frac{1}{9\times10}x^{10}+C$$

(단, C는 적분상수)

$$f(1)=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}+C$$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{10}\right)+C$$

$$=1-\frac{1}{10}+C=\frac{9}{10}+C$$

이때, $f(1)=4$이므로 $\frac{9}{10}+C=4$ $\quad\therefore\ C=\frac{31}{10}$

따라서

$$f(x)=\frac{1}{1\times2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots+\frac{1}{9\times10}x^{10}+\frac{31}{10}$$

이므로

$f(0)=\frac{31}{10}$ $\quad\therefore\ 10f(0)=31$

답 31

보충설명

부분분수의 변형

(1) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

(2) $\frac{1}{ABC}=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$ (단, $A\neq C$)

06

$$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx$$

$$=x^3-x^2+x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

한편, $\int g(x)dx=x^3+x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=3x^2+2x+1$

이므로

$$f(3)-g(3)=(3^3-3^2+3+C)-(3\times3^2+2\times3+1)$$

$$=(21+C)-34$$

$$=C-13=2$$

$\therefore\ C=15$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+15$이므로

$f(1)=1-1+1+15=16$

답 16

07

$f(x)$가 이차함수이고 $f(x)g(x)=3x^4+18x^3$이므로 $g(x)$도 이차함수이다.

이때, $g(x)=\int\{f(x)-x^2\}dx$에서 $f(x)-x^2$은 일차함수이므로

$f(x)-x^2=ax+b$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

라 하면

$$g(x)=\int\{f(x)-x^2\}dx$$

$$=\int(ax+b)dx$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(x)=x^2+ax+b$이므로

$$f(x)g(x)=(x^2+ax+b)\left(\frac{a}{2}x^2+bx+C\right)$$

$$=\frac{a}{2}x^4+\left(\frac{a^2}{2}+b\right)x^3+\left(\frac{3}{2}ab+C\right)x^2+(aC+b^2)x+bC$$

$$=3x^4+18x^3$$

즉, $\frac{a}{2}=3$, $\frac{a^2}{2}+b=18$, $\frac{3}{2}ab+C=0$, $aC+b^2=0$, $bC=0$

이므로 위 식을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=0$, $C=0$

따라서 $g(x)=3x^2$이므로 $g(1)=3$

답 3

08

$f'(x)=x(x-4)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)$, $x=4$에서 극솟값 $f(4)$를 갖는다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int (x^2-4x)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$$f(0)=C,\ f(4)=\frac{1}{3}\times 4^3-2\times 4^2+C=C-\frac{32}{3}$$

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 극솟값의 2배이므로

$$f(0)=2f(4)$$

$$C=2C-\frac{64}{3} \qquad \therefore\ C=\frac{64}{3}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{64}{3}$이므로

$$f(1)=\frac{1}{3}-2+\frac{64}{3}=\frac{59}{3}$$

답 ①

09

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$\therefore\ y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

즉, $f'(t)x-tf'(t)+f(t)=(-t+4)x+g(t)$에서

$$f'(t)=-t+4,\ g(t)=f(t)-tf'(t) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(t)=\int f'(t)dt$$
$$=\int (-t+4)dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+4t+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때, $f(1)=1$이므로

$$-\frac{1}{2}+4+C=1 \qquad \therefore\ C=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ f(t)=-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}$$

㉠에서

$$g(t)=\left(-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}\right)-t\times(-t+4)$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{5}{2}+t^2-4t$$
$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ g(3)=\frac{1}{2}\times 3^2-\frac{5}{2}=2$$

답 2

10

$f'(x)=3x^2+2ax-1$에서

$$f(x)=\int (3x^2+2ax-1)dx$$
$$=x^3+ax^2-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(x)$가 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$로 나누어떨어지므로

$$f(1)=f(4)=0$$
$$f(1)=1+a-1+C$$
$$=a+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$f(4)=4^3+a\times 4^2-4+C$$
$$=60+16a+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ C=4$$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-x+4$이므로

$$f(2)=2^3-4\times 2^2-2+4=-6$$

답 -6

11

주어진 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ x+1 & (-1<x<0) \\ -x+1 & (0<x<1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x<-1) \\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (-1<x<0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x+C_3 & (0<x<1) \\ -x+C_4 & (x>1) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3, C_4는 적분상수)

이때, $f(0)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$\therefore\ C_2=C_3=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$

$\frac{1}{2}-1=1+C_1 \qquad \therefore\ C_1=-\frac{3}{2}$

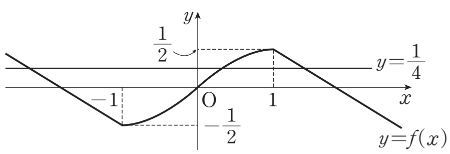
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$

$-1+C_4=-\frac{1}{2}+1 \qquad \therefore\ C_4=\frac{3}{2}$

즉, $f(x)=\begin{cases} -x-\frac{3}{2} & (x<-1) \\ \frac{1}{2}x^2+x & (-1\le x<0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x & (0\le x<1) \\ -x+\frac{3}{2} & (x\ge1) \end{cases}$ 이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$a<0$이고, $f(a)=\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$a<-1$

따라서 $f(a)=-a-\frac{3}{2}$이므로

$-a-\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=-\frac{7}{4}$

답 $-\frac{7}{4}$

12

주어진 그래프에서 $f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1) \\ 4x & (-1<x<1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<-1) \\ 2x^2+C_2 & (-1<x<1) \\ -x+C_3 & (x>1) \end{cases}$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

이때, $f(0)=0$이므로 $C_2=0$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로

$2=-1+C_1$

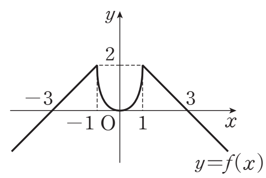
$\therefore\ C_1=3$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로 $-1+C_3=2$

$\therefore\ C_3=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<-1) \\ 2x^2 & (-1\le x<1) \\ -x+3 & (x\ge1) \end{cases}$ 이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$인 점에서 극값을 가지므로 모든 극값의 합은 $f(-1)+f(0)+f(1)=2+0+2=4$ (거짓)

ㄷ. 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $k=0$

따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는 1이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

13

$f(x)=\frac{d}{dx}\int\{x^2f(x)+2x-g(x)\}dx$에서

$f(x)=x^2f(x)+2x-g(x)$ ……㉠

$\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=x^2f(x)+x+3$에서

$g(x)+C=x^2f(x)+x+3$ (단, C는 적분상수) ……㉡

이때, $f(0)=1$이므로 ㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=-g(0)$, $g(0)+C=3$

$\therefore\ g(0)=-1$, $C=4$

이것을 ㉡에 대입하면

$g(x)=x^2f(x)+x-1$ ……㉢

㉠에서

$$f(x)=\{x^2f(x)+2x\}-\{x^2f(x)+x-1\}$$
$$=x+1$$

$$\therefore\ g(x)=x^2(x+1)+x-1\ (\because ㉢)$$
$$=x^3+x^2+x-1$$

$f(x)=g(x)$에서

$x+1=x^3+x^2+x-1$

$x^3+x^2-2=0$, $(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because \underbrace{x^2+2x+2}_{=(x+1)^2+1}>0)$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 1

14

함수 $f(x)=1+4x+9x^2+\cdots+100x^9$에 대하여

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (C는 적분상수)라 하면

$$F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$$
$$=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C\}\right]dx$$
$$=\int f'(x)dx$$
$$=f(x)+C$$

(가)

$F(0)=1$에서

$F(0)=f(0)+C=1+C=1$

$\therefore\ C=0$

따라서 $F(x)=f(x)$이므로

(나)

$$F(1)=1+4+9+\cdots+100$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2$$
$$=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

(다)

답 385

단계	채점 기준	배점
(가)	부정적분과 미분의 관계를 이용해 $F(x)$의 식을 구한 경우	40%
(나)	$F(0)=1$을 이용해 $F(x)$의 식을 구한 경우	30%
(다)	자연수의 거듭제곱의 합을 이용해 $F(1)$의 값을 구한 경우	30%

보충설명

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

15

$f'(x)=2x+|x^2-1|$에서

$f'(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -x^2+2x+1 & (-1<x<1)\end{cases}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+x^2-x+C_1 & (x<-1)\\ -\frac{1}{3}x^3+x^2+x+C_2 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{3}x^3+x^2-x+C_3 & (x>1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$f(0)=1$에서 $C_2=1$

또한, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로

$\frac{1}{3}+1+(-1)+1=-\frac{1}{3}+1-(-1)+C_1$

$\therefore\ C_1=-\frac{1}{3}$

또한, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이므로

$\frac{1}{3}+1-1+C_3=-\frac{1}{3}+1+1+1$

$\therefore\ C_3=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x^2-x-\frac{1}{3} & (x<-1) \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1 & (-1\le x<1) \\ \frac{1}{3}x^3+x^2-x+\frac{7}{3} & (x\ge 1) \end{cases}$

이므로

$$f(-2)+f(2)=\left(-\frac{8}{3}+4+2-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}+4-2+\frac{7}{3}\right)$$
$$=10$$

답 ③

16

조건 (가)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+3$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+3x+C_1$ (단, C_1은 적분상수) ……㉠

조건 (나)에서 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+6x+2$이므로

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+2x+C_2$ (단, C_2는 적분상수) ……㉡

㉠, ㉡의 양변에 $x=-1$을 각각 대입하면

$-1+g(-1)=C_1-2,\ -g(-1)=C_2$ ($\because$ 조건 (다))

$\therefore\ g(-1)=C_1-1=-C_2$ ……㉢

㉠, ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+1=C_1,\ f(0)=C_2$ ($\because$ 조건 (다))

$\therefore\ f(0)=C_1-1=C_2$ ……㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $C_1=1,\ C_2=0$이므로

$f(x)+g(x)=x^2+3x+1,$

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+2x=x(x+1)(x+2)$

이때, 조건 (다)에서 $f(-1)=-1,\ g(0)=1$이므로

$f(x)=x(x+2),\ g(x)=x+1$

$\therefore\ f(0)+g(-1)=0$

답 0

17

$f'(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ -x & (-1<x<0) \\ x & (0<x<1) \end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<-1) \\ -\frac{1}{2}x^2+C_2 & (-1<x<0) \\ \frac{1}{2}x^2+C_3 & (0<x<1) \\ x+C_4 & (x>1) \end{cases}$

(단, $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$는 적분상수)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고, $f(0)=0$이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=0$

$\therefore\ C_2=C_3=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)$에서

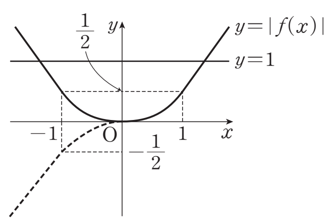
$-\frac{1}{2}=-1+C_1 \qquad \therefore\ C_1=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$에서

$1+C_4=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ C_4=-\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & (x<-1) \\ -\frac{1}{2}x^2 & (-1\le x<0) \\ \frac{1}{2}x^2 & (0\le x<1) \\ x-\frac{1}{2} & (x\ge 1) \end{cases}$ 이므로 함수

$y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)|=1$의 실근은 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같으므로

$-x-\frac{1}{2}=1,\ x-\frac{1}{2}=1$에서 $x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 곱은

$\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

답 $-\frac{9}{4}$

18

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ ⋯⋯㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\quad\therefore f(0)=1$ ⋯⋯㉡

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+f(h)-1}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$
$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\ (\because ㉡)$$
$$=2x+f'(0)$$

$f(x)=\int f'(x)dx$이므로

$$f(x)=\int\{2x+f'(0)\}dx$$
$$=x^2+f'(0)x+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

㉡에서 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+f'(0)x+1$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{x^2+f'(0)x+1\}-\{2x+f'(0)\}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x+1)+(x-1)f'(0)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{x-1+f'(0)\}}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x-1+f'(0)}{x+1}\times\frac{x-1}{x-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(0)=14$$

$\therefore f'(0)=28$

답 28

19

최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근은 $x=0$, $x=\alpha$ (중근)이므로

$f(x)=2x(x-\alpha)^2$ ⋯⋯㉠

조건 (가)에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\{xf(x)\}'$이므로

$$g(x)=\int\{xf(x)\}'dx$$
$$=xf(x)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$ ⋯⋯㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$g(x)=2x^2(x-\alpha)^2+C$

$g'(x)=4x(x-\alpha)^2+4x^2(x-\alpha)$

$\quad=4x(x-\alpha)(2x-\alpha)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\alpha$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=\alpha$에서 극소이고, 극솟값이 0이므로

$g(0)=g(\alpha)=C=0$

$\therefore g(x)=2x^2(x-\alpha)^2$

함수 $g(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극대이고, 극댓값이 32이므로

$$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=32$$
$$g\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\times\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\times\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2=32$$

$\frac{\alpha^4}{8}=32$, $\alpha^4-256=0$, $(\alpha^2+16)(\alpha+4)(\alpha-4)=0$

$\therefore \alpha=4\ (\because \alpha>0)$

따라서 $g(x)=2x^2(x-4)^2$이므로

$g(5)=2\times5^2\times(5-4)^2=50$

답 50

20

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이므로

$f'(x)=ax(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=ax^3-2ax\ (a>0)$라 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^3-2ax)dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4-ax^2+C\ (\text{단, } C\text{는 적분상수})$$

$f(0)=1$이므로

$C=1$

$f(\sqrt{2})=-3$이므로

$\frac{a}{4}\times(\sqrt{2})^4-a\times(\sqrt{2})^2+1=-3$

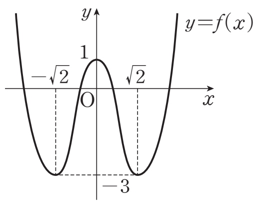
$-a+1=-3$

$\therefore\ a=4$

따라서 $f(x)=x^4-4x^2+1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



$f(-2)=f(2)=1>0$,

$f(-1)=f(1)=-2<0$,

$f(0)=1>0$

이므로 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m의 값은

$m=-2,\ m=-1,\ m=0,\ m=1$

따라서 모든 정수 m의 값의 합은

$-2-1+0+1=-2$

답 ①

21

$f(x)=(x+1)(x-5)^9$

$=\{(x-5)+6\}(x-5)^9$

$=(x-5)^{10}+6(x-5)^9$

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(x)=\int f(x)dx$

$=\int\{(x-5)^{10}+6(x-5)^9\}dx$

$=\int(x-5)^{10}dx+6\int(x-5)^9dx$

$=\frac{1}{11}(x-5)^{11}+\frac{3}{5}(x-5)^{10}+C$

(단, C는 적분상수)

$F(5)=0$에서 $C=0$

따라서 $F(x)=\frac{1}{11}(x-5)^{11}+\frac{3}{5}(x-5)^{10}$이므로

$F(4)=\frac{1}{11}\times(-1)^{11}+\frac{3}{5}\times(-1)^{10}=\frac{28}{55}$

그러므로 $p=55,\ q=28$이므로

$p+q=55+28=83$

답 83

다른풀이

$x-5=t$로 놓으면 $x=t+5$이므로

$f(t+5)=(t+6)t^9=t^{10}+6t^9$

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F(t+5)=\int f(t+5)dt=\int(t^{10}+6t^9)dt$

$=\frac{1}{11}t^{11}+\frac{3}{5}t^{10}+C$ (단, C는 적분상수)

$F(5)=0$이므로 위의 식의 양변에 $t=0$을 대입하면

$C=0$

따라서 $F(t+5)=\frac{1}{11}t^{11}+\frac{3}{5}t^{10}$이므로 양변에 $t=-1$을 대입하면

$F(4)=\frac{1}{11}\times(-1)^{11}+\frac{3}{5}\times(-1)^{10}=\frac{28}{55}$

그러므로 $p=55,\ q=28$이므로

$p+q=55+28=83$

22

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$2F(x)=(x-1)\{f(x)-4\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2F'(x)=f(x)-4+(x-1)f'(x)$

$2f(x)=f(x)-4+(x-1)f'(x)$

$\therefore\ f(x)=(x-1)f'(x)-4$ ……㉠

이때, 다항식 $f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 음이 아닌 정수)이라 하면

(i) $n=0$일 때,

$f(x)=1,\ f'(x)=0$이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $n=1$일 때,

$f(x)=x+a$ (a는 실수)라 하면 $f'(x)=1$

㉠에서

$x+a=x-1-4=x-5$

$\therefore\ a=-5 \qquad \therefore\ f(x)=x-5$

(iii) $n\geq 2$일 때,

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$

($a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$은 실수)이라 하면

$f'(x)=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$

㉠에서

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$

$=(x-1)\{nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\}-4$

$=nx^n+\{a_1(n-1)-n\}x^{n-1}+\{a_2(n-2)-a_1(n-1)\}x^{n-2}+\cdots-a_{n-1}-4$

$\therefore\ n=1$

그런데 $n\geq 2$이므로 조건을 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=x-5$이므로

$2F(x)=(x-1)\{(x-5)-4\}$

$=(x-1)(x-9)$

$=x^2-10x+9$

즉, $F(x)=\frac{1}{2}(x^2-10x+9)$

$\therefore\ F(4)=\frac{1}{2}(4^2-10\times4+9)=-\frac{15}{2}$

답 $-\frac{15}{2}$

23

주어진 그래프에서 $f'(-2)=0,\ f'(2)=0$이므로

$f'(x)=a(x+2)(x-2)=ax^2-4a\ (a<0)$라 하자.

$f'(0)=3$이므로

$-4a=3 \qquad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

따라서 $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\left(-\frac{3}{4}x^2+3\right)dx$

$=-\frac{1}{4}x^3+3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=1$이므로 $-\frac{1}{4}+3+C=1$

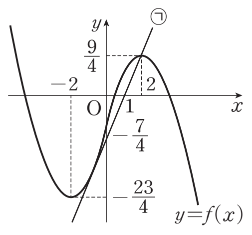
$\therefore\ C=-\frac{7}{4}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{4}x^3+3x-\frac{7}{4}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{23}{4}$	↗	$\frac{9}{4}$	↘

한편, 방정식 $f(x)=\frac{n}{2}(x-1)$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 직선 $y=\frac{n}{2}(x-1)$은 항상 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림에서 직선 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이 x축과 직선 ㉠ 사이에 있어야 한다.



이때, 직선 ㉠은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선이므로 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{3}{4}t^2+3$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{4}t^3+3t-\frac{7}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}t^2+3\right)(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$\frac{1}{4}t^3-3t+\frac{7}{4}=\left(-\frac{3}{4}t^2+3\right)(1-t)$

$\frac{1}{4}t^3-3t+\frac{7}{4}=\frac{3}{4}t^3-\frac{3}{4}t^2-3t+3$

$\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{4}t^2+\frac{5}{4}=0,\ 2t^3-3t^2+5=0$

-1	2	-3	0	5
		-2	5	-5
	2	-5	5	0

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$

$\therefore\ t=-1\ (\because\ \underbrace{2t^2-5t+5}_{=2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{15}{4}}>0)$

따라서 직선 ㉠의 기울기는

$f'(-1)=-\frac{3}{4}\times(-1)^2+3=\frac{9}{4}$이므로

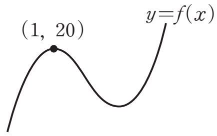
$0<\frac{n}{2}<\frac{9}{4} \qquad \therefore\ 0<n<\frac{9}{2}$

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 n은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4

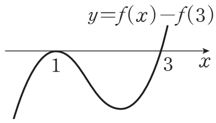
24

조건 (가)에서 $f'(1)=0$, $f(1)=20$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



조건 (나)에서 삼차방정식
$f(x)=f(3)$, 즉 $f(x)-f(3)=0$
은 서로 다른 두 실근을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖고, 방정식 $f(x)-f(3)=0$은 $x=1$ 또는 $x=3$을 중근으로 갖는다.

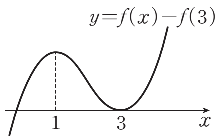
(i) $x=1$이 중근일 때,



$f(x)-f(3)$
$=(x-1)^2(x-3)$이므로
$f(x)=(x-1)^2(x-3)+f(3)$
$\therefore\ f'(x)=2(x-1)(x-3)+(x-1)^2$
$=(x-1)(3x-7)$

이때, $f'\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{5}{3}>0$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $x=3$이 중근일 때,



$f'(1)=0$, $f'(3)=0$이므로
$f'(x)=3(x-1)(x-3)$
$=3x^2-12x+9$

이때, $f'\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{5}{3}<0$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$f(x)=\int f'(x)dx$
$=\int(3x^2-12x+9)dx$
$=x^3-6x^2+9x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=20$이므로 $1-6+9+C=20$
$\therefore\ C=16$
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$이므로
$f(0)=16$

답 16

유형연습 08 정적분

본문 pp.198~213

01-1 (1) 9 (2) $-\frac{11}{2}$		**01-2** 6
02-1 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) 20		**02-2** -11
02-3 $\frac{16}{3}$	**03-1** (1) 10 (2) 9	**03-2** -6
03-3 1	**04-1** $\frac{5}{2}$	**04-2** $\frac{9}{2}$
05-1 6	**05-2** 5	**05-3** $\frac{31}{15}$
06-1 28	**06-2** 3	**07-1** $\frac{5}{2}$
07-2 10	**07-3** 33	**08-1** 2
08-2 $\frac{4}{3}$	**08-3** 5	**09-1** 2
09-2 -4	**09-3** -6	

01-1

(1) $\int_0^1(as^2+1)ds=\left[\frac{a}{3}s^3+s\right]_0^1=\frac{1}{3}a+1=4$

즉, $\frac{1}{3}a=3$이므로 $a=9$

(2) (좌변)$=\int_{-1}^{2}(x^2-3x)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$
$=\left(\frac{8}{3}-6\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

(우변)$=\int_a^2(x^2-3x)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_a^2$
$=\left(\frac{8}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2\right)$
$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2-\frac{10}{3}$

즉, $-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}a^3+\frac{3}{2}a^2-\frac{10}{3}$에서
$\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{11}{6}=0$, $2a^3-9a^2+11=0$
$(a+1)(2a^2-11a+11)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 $2a^2-11a+11=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -9 & 0 & 11 \\ & & -2 & 11 & -11 \\ \hline & 2 & -11 & 11 & \boxed{0} \end{array}$$

이때, 이차방정식
$2a^2-11a+11=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(11)^2-88>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 곱은 $\frac{11}{2}$

따라서 $2a^3-9a^2+11=0$의 모든 a의 값의 곱은

$(-1)\times\frac{11}{2}=-\frac{11}{2}$

답 (1) 9 (2) $-\frac{11}{2}$

다른풀이

(2) $2a^3-9a^2+11=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 a의 값의 곱은 $-\frac{11}{2}$이다.

01-2

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,

$f(1)=f(2)=f(4)=0$을 만족시키므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$

$\therefore \int_0^3 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^3=f(3)-f(0)$

$=-2-(-8)=6$

답 6

다른풀이

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$에서

$f'(x)=(x-2)(x-4)+(x-1)(x-4)+(x-1)(x-2)$

$=3x^2-14x+14$

$\therefore \int_0^3 f'(x)dx=\int_0^3(3x^2-14x+14)dx$

$=\Big[x^3-7x^2+14x\Big]_0^3$

$=(27-63+42)-0$

$=6$

02-1

(1) (주어진 식)$=\int_1^5 f(x)dx+\int_2^0 f(x)dx+\int_5^2 f(x)dx$

$=\int_1^0 f(x)dx$

$=-\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$

$=-\Big[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\Big]_0^1$

$=-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)$

$=-\frac{1}{4}$

(2) $\int_{-1}^3 f(x)dx=\int_{-1}^2(3x^2-x)dx+\int_2^3 5xdx$

$=\Big[x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^2+\Big[\frac{5}{2}x^2\Big]_2^3$

$=\left\{(8-2)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left(\frac{45}{2}-10\right)$

$=20$

답 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) 20

02-2

$\int_2^{-1}\{f(x)-g(x)\}dx=4$에서

$\int_{-1}^2\{f(x)-g(x)\}dx=-\int_2^{-1}\{f(x)-g(x)\}dx=-4$

한편, 정적분의 성질에 의하여

$\int_{-1}^2 f(x)dx+\int_{-1}^2 g(x)dx=10$ ……㉠

$\int_{-1}^2 f(x)dx-\int_{-1}^2 g(x)dx=-4$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\int_{-1}^2 f(x)dx=3,\ \int_{-1}^2 g(x)dx=7$

$\therefore \int_{-1}^2\{f(x)-2g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^2 f(x)dx-2\int_{-1}^2 g(x)dx$

$=3-2\times7=-11$

답 -11

02-3

$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0(2x+2)dx+\int_0^a(-x^2+2x+2)dx$

$=\Big[x^2+2x\Big]_{-a}^0+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\Big]_0^a$

$=-(a^2-2a)+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a\right)$

$=-\frac{1}{3}a^3+4a$

$g(a)=-\frac{1}{3}a^3+4a$라 하면 $g'(a)=-a^2+4$

$g'(a)=0$에서 $a=2$ ($\because a>0$)

함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$

따라서 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값 $\frac{16}{3}$을 갖는다.

답 $\frac{16}{3}$

03-1

(1) $x+|x-3|=\begin{cases} x-(x-3) & (x<3) \\ x+(x-3) & (x\geq 3) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3 & (x<3) \\ 2x-3 & (x\geq 3) \end{cases}$

$\therefore \int_1^4 (x+|x-3|)dx$

$=\int_1^3 3\,dx+\int_3^4 (2x-3)dx$

$=\Big[3x\Big]_1^3+\Big[x^2-3x\Big]_3^4$

$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$

$=10$

(2) $|x|+|x-1|=\begin{cases} -x-(x-1) & (x<0) \\ x-(x-1) & (0\leq x<1) \\ x+(x-1) & (x\geq 1) \end{cases}$

$=\begin{cases} -2x+1 & (x<0) \\ 1 & (0\leq x<1) \\ 2x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^3 (|x|+|x-1|)dx$

$=\int_{-1}^0 (-2x+1)dx+\int_0^1 dx+\int_1^3 (2x-1)dx$

$=\Big[-x^2+x\Big]_{-1}^0+\Big[x\Big]_0^1+\Big[x^2-x\Big]_1^3$

$=-(-1-1)+1+\{(9-3)-(1-1)\}$

$=9$

답 (1) 10 (2) 9

03-2

$|2x(x-a)|=\begin{cases} 2x(x-a) & (x<0 \text{ 또는 } x\geq a) \\ -2x(x-a) & (0\leq x<a) \end{cases}$이므로

$\int_0^a |f(x)|dx=\int_0^a (-2x^2+2ax)dx$

$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+ax^2\Big]_0^a$

$=-\frac{2}{3}a^3+a^3$

$=\frac{1}{3}a^3$

$\int_a^{a+2} f(x)dx=\int_a^{a+2} (2x^2-2ax)dx$

$=\Big[\frac{2}{3}x^3-ax^2\Big]_a^{a+2}$

$=\Big\{\frac{2}{3}(a+2)^3-a(a+2)^2\Big\}-\Big(\frac{2}{3}a^3-a^3\Big)$

$=4a+\frac{16}{3}$

$\frac{1}{3}a^3=4a+\frac{16}{3}$에서

$\frac{1}{3}a^3-4a-\frac{16}{3}=0,\ a^3-12a-16=0$

$(a+2)^2(a-4)=0 \quad \therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 $f(x)=2x(x-4)$이므로

$f(3)=2\times 3\times(-1)=-6$

답 -6

03-3

(i) $0\leq a\leq 2$일 때,

$|x-a|=\begin{cases} -(x-a) & (0\leq x<a) \\ x-a & (a\leq x\leq 2) \end{cases}$

$\therefore g(a)=\int_0^2 |x-a|dx$

$=\int_0^a (-x+a)dx+\int_a^2 (x-a)dx$

$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+ax\Big]_0^a+\Big[\frac{1}{2}x^2-ax\Big]_a^2$

$=\Big(-\frac{1}{2}a^2+a^2\Big)+\Big\{(2-2a)-\Big(\frac{1}{2}a^2-a^2\Big)\Big\}$

$=a^2-2a+2=(a-1)^2+1$

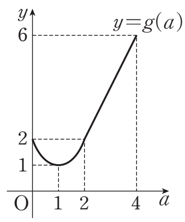
(ii) $2<a\le 4$일 때,

$|x-a|=-(x-a)\ (0\le x\le 2)$

$$\therefore\ g(a)=\int_0^2|x-a|dx$$
$$=\int_0^2(-x+a)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^2$$
$$=2a-2$$

(i), (ii)에서 함수 $y=g(a)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $g(a)$는 $a=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.



답 1

04-1

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)+3 & (0\le x<3)\\ -(x-3)+3 & (3\le x\le 6)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x & (0\le x<3)\\ -x+6 & (3\le x\le 6)\end{cases}$$

$f(x)=f(x+6)$이므로

$$\int_{22}^{25}f(x)dx=\int_{16}^{19}f(x)dx$$
$$=\int_{10}^{13}f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx$$
$$=\int_4^6 f(x)dx+\int_6^7 f(x)dx$$
$$=\int_4^6 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_4^6(-x+6)dx+\int_0^1 x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_4^6+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\{(-18+36)-(-8+24)\}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

04-2

함수 $y=f(x-1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$\int_{10}^{12}f(x-1)dx=\int_9^{11}f(x)dx$이다.

한편, $f(x-3)=f(x)$이므로

$$\int_9^{11}f(x)dx=\int_6^8 f(x)dx=\int_3^5 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$$
$$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx+\int_{10}^{12}f(x-1)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(-x^2+3x)dx+\int_0^2(-x^2+3x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{8}{3}+6\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

05-1

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 $\underbrace{\text{함수 } y=f(x)\text{의 그래프는 원점에 대하여 대칭}}_{\text{기함수}}$이다.

즉, $\int_{-3}^3 f(x)dx=0$

$$\therefore\ \int_{-3}^3(x-3x^2)f(x)dx$$
$$=\int_{-3}^3\underbrace{xf(x)}_{\text{우함수}}dx-3\int_{-3}^3\underbrace{x^2f(x)}_{\text{기함수}}dx$$
$$=2\int_0^3 xf(x)dx-0$$
$$=2\int_{-3}^0 xf(x)dx$$
$$=2\times 3=6$$

답 6

05-2

모든 실수 x에 대하여 $\underbrace{f(-x)=-f(x)}_{\text{기함수}}$, $\underbrace{g(-x)=g(x)}_{\text{우함수}}$이므로

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h(-x)=f(-x)g(-x)$

$\qquad=-f(x)g(x)=-h(x)$

즉, 함수 $h(x)$는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이므로 $h'(x)$는 우함수이다.

한편, $h(-x)=-h(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$h(0)=0$

$$\therefore \int_{-3}^{3}(x^3-2x+4)h'(x)dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\underbrace{x^3h'(x)}_{\text{기함수}}dx-2\int_{-3}^{3}\underbrace{xh'(x)}_{\text{기함수}}dx+4\int_{-3}^{3}\underbrace{h'(x)}_{\text{우함수}}dx$$

$$=0-0+4\int_{-3}^{3}h'(x)dx$$

$$=8\int_{0}^{3}h'(x)dx$$

$$=8\Big[h(x)\Big]_{0}^{3}=8\{h(3)-h(0)\}$$

$$=8h(3)\ (\because\ h(0)=0)$$

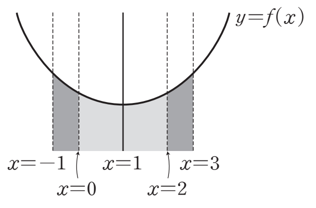
따라서 $8h(3)=40$이므로

$h(3)=5$

답 5

05-3

모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.



$\int_{0}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{32}{15}$이므로

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx=\frac{16}{15}$

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{2}^{3}f(x)dx$이므로

$\int_{2}^{3}f(x)dx=1$

$$\therefore \int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx$$

$$=\frac{16}{15}+1=\frac{31}{15}$$

답 $\frac{31}{15}$

06-1

$g(x)=f(x)-f(-x)$라 하면

$g(-x)=f(-x)-f(x)=-g(x)$이므로 함수 $y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때,

$$\int_{-2}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\{f(x)-f(-x)\}dx+\int_{2}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx$$

$$=0+\int_{2}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx$$

$$=-\int_{1}^{2}\{f(x)-f(-x)\}dx=-4$$

이므로

$\int_{1}^{2}\{f(x)-f(-x)\}dx=4$

$$\int_{1}^{2}\{f(x)-f(-x)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(-x)dx$$

$$=16-\int_{1}^{2}f(-x)dx=4$$

$$\therefore \int_{1}^{2}f(-x)dx=12$$

따라서

$$\int_{1}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(-x)dx$$

$$=16+12=28$$

답 28

06-2

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+3x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(5x^4+3x^2+1)dx$$

$$=2\Big[x^5+x^3+x\Big]_{0}^{1}=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 함수 $y=f(x)-f(-x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠－㉡을 하면

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx-\int_{-1}^{1}\{f(x)-f(-x)\}dx=6$$

$$2\int_{-1}^{1} f(-x)dx=6$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(-x)dx=3$$

답 3

다른풀이

다항함수 $f(x)$의 짝수차수의 항과 상수항의 합을 $g(x)$, 홀수차수의 항의 합을 $h(x)$라 하면 $f(x)=g(x)+h(x)$이므로 $f(-x)=g(-x)+h(-x)$이다.

$g(-x)=g(x)$

$h(-x)=-h(x)$

이때, $f(x)+f(-x)=2g(x)$이므로

$2g(x)=5x^4+3x^2+1$에서 $g(x)=\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{1} f(-x)dx&=\int_{-1}^{1}\{g(-x)+h(-x)\}dx\\&=\int_{-1}^{1} g(-x)dx+\int_{-1}^{1} h(-x)dx\\&=2\int_{0}^{1} g(x)dx\\&=2\int_{0}^{1}\left(\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx\\&=2\left[\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^1=3\end{aligned}$$

07-1

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

로 놓으면

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+k^2x$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k&=\int_0^1\left(\frac{3}{2}t^2+k^2t\right)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^3+\frac{k^2}{2}t^2\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}+\frac{k^2}{2}\end{aligned}$$

$k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$

$\therefore\ k=1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x$이므로 $f(1)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

07-2

$\int_1^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

로 놓으면

$f(x)=\frac{6}{7}x^2-2kx+2k^2$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k&=\int_1^2\left(\frac{6}{7}t^2-2kt+2k^2\right)dt\\&=\left[\frac{2}{7}t^3-kt^2+2k^2t\right]_1^2\\&=\left(\frac{16}{7}-4k+4k^2\right)-\left(\frac{2}{7}-k+2k^2\right)\\&=2k^2-3k+2\end{aligned}$$

$2k^2-4k+2=0$, $2(k-1)^2=0$

$\therefore\ k=1$

즉, $\int_1^2 f(t)dt=1$이므로 $\int_1^2 f(x)dx=1$

$\therefore\ 10\int_1^2 f(x)dx=10\times1=10$

답 10

07-3

$$\begin{aligned}f(x)&=6x^2+x+\int_0^2(x+1)f(t)dt\\&=6x^2+x+x\int_0^2 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt\end{aligned}$$

$\int_0^2 f(t)dt=k$ (k는 상수) ……㉠

로 놓으면

$f(x)=6x^2+(k+1)x+k$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}k&=\int_0^2\{6t^2+(k+1)t+k\}dt\\&=\left[2t^3+\frac{1}{2}(k+1)t^2+kt\right]_0^2\\&=16+2(k+1)+2k\\&=4k+18\end{aligned}$$

$3k=-18$ $\quad\therefore\ k=-6$

따라서 $f(x)=6x^2-5x-6$이므로 $f(3)=33$

답 33

08-1

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=3x^3+2xf(x)$

$x^2f'(x)=3x^3$

$\therefore\ f'(x)=3x$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3xdx$$

$$=\frac{3}{2}x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=\frac{3}{2}+C=2 \qquad \therefore\ C=\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$$f(-1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

답 2

08-2

$f(x)=\int_0^x (t-1)(t-3)dt$에서 $\cdots\cdots$㉠

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

㉠에서

$$f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-3)dt$$

$$=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$$

$$f(3)=\int_0^3 (t-1)(t-3)dt$$

$$=\int_0^3 (t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^3$$

$$=9-18+9=0$$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$$\frac{4}{3}-0=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

08-3

$$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt$$

$$=\int_0^x (at^2-2at)dt$$

$$=\left[\frac{a}{3}t^3-at^2\right]_0^x$$

$$=\frac{a}{3}x^3-ax^2=\frac{a}{3}x^2(x-3)$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

이때,

$$g(x)=\int g'(x)dx=\int\left(\frac{a}{3}x^3-ax^2\right)dx$$

$$=\frac{a}{12}x^4-\frac{a}{3}x^3+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로 $g(0)=C=0$ ($\because$ ㉠)

$$\therefore\ g(x)=\frac{a}{12}x^4-\frac{a}{3}x^3$$

즉, $g(n)=\frac{a}{12}n^4-\frac{a}{3}n^3$이므로 $g(n)>0$에서

$$\frac{a}{12}n^4-\frac{a}{3}n^3>0,\ \frac{a}{12}n^3(n-4)>0$$

이때, $a>0$이고 n은 자연수이므로 $\frac{a}{12}n^3>0$

$\therefore\ n-4>0$, 즉 $n>4$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

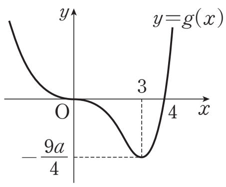
답 5

보충설명

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↘	$-\frac{9a}{4}$	↗

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



09-1

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-2h}^{1+h}f(x)dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{1-2h}^{1+h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{F(1+h)-F(1)\}-\{F(1-2h)-F(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F(1-2h)-F(1)}{-2h}\times2$$
$$=F'(1)+2F'(1)$$
$$=3F'(1)=3f(1)\ (\because\ F'(x)=f(x))$$

이때, $3f(1)=3(a-1)=3$이므로

$a-1=1$

$\therefore\ a=2$

답 2

09-2

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+3x}f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{1-x}^{1+3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1+3x)-F(1-x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(1+3x)-F(1)-F(1-x)+F(1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{F(1+3x)-F(1)}{3x}\times3\right\}$$
$$-\lim_{x\to0}\left\{\frac{F(1-x)-F(1)}{-x}\times(-1)\right\}$$
$$=3F'(1)+F'(1)$$
$$=4F'(1)=4f(1)\ (\because\ F'(t)=f(t))$$

이때, $4f(1)=4$이므로 $f(1)=1$

따라서 $f(1)=4+1+a=1$에서 $a=-4$

답 -4

09-3

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $F'(t)=f(t)$

한편, $\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^3-1}=2$에서 극한값이 존재하고

$x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\left\{\int_1^x f(t)dt-f(x)\right\}=0$이므로

$\int_1^1 f(t)dt-f(1)=0$

$\therefore\ f(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt-\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x^2+x+1)}\ (\because\ f(1)=0)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt-\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_x^1-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}f'(1)$

이때, $f(1)=0$이므로 $-\frac{1}{3}f'(1)=2$

$\therefore\ f'(1)=-6$

답 -6

개념마무리

본문 pp.215~218

01 ④	**02** $C<A<B$	**03** ①	**04** ②
05 -6	**06** $\frac{3}{4}$	**07** -13	**08** ①
09 14	**10** ③	**11** 3	**12** $\frac{4}{3}$
13 $\frac{2}{3}$	**14** 2	**15** $-\frac{1}{2}$	**16** ③
17 4	**18** -8	**19** -9	**20** 15
21 17	**22** 14	**23** $\frac{2}{3}$	**24** ㄱ, ㄴ, ㄷ

01

$A=\int_0^3(x^2-4x+11)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+11x\right]_0^3$

$=9-18+33=24$

$B=\int_0^5(t+1)^2dt-\int_0^5(t-1)^2dt$

$=\int_0^5\{(t+1)^2-(t-1)^2\}dt$

$=\int_0^5 4tdt=\left[2t^2\right]_0^5$

$=50$

$C=\int_{-1}^1(s^3+3s^2+5)ds$

$=\int_{-1}^1 s^3ds+\int_{-1}^1(3s^2+5)ds$

$=0+2\int_0^1(3s^2+5)ds$

$=2\left[s^3+5s\right]_0^1$

$=2\times6=12$

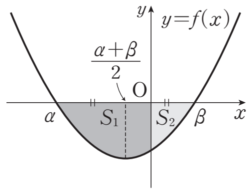
$\therefore\ C<A<B$

답 ④

02

$\alpha<0<\beta$, $\alpha+\beta<0$에서 α, β의 부호는 서로 반대이고, $|\alpha|>|\beta|$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 $S_2<S_1$



$A=\int_\alpha^0 f(x)dx,\ B=\int_0^\beta f(x)dx,\ C=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

이므로 정적분의 기하적 의미에 의하여

$A=-S_1,\ B=-S_2,\ C=-(S_1+S_2)$

$\therefore\ C<A<B$

답 $C<A<B$

03

ㄱ. (반례) $f(x)=x^2$이라 하면

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$

$3\int_0^1 f(x)dx=3\int_0^1 x^2dx=3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=3\times\frac{1}{3}=1$

$\therefore\ \int_0^3 f(x)dx\neq3\int_0^1 f(x)dx$ (거짓)

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여

$\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x^2$이라 하면

$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$

$\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2=\left\{\int_0^1 x^2dx\right\}^2=\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\right\}^2$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ \int_0^1\{f(x)\}^2dx\neq\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$ (거짓)

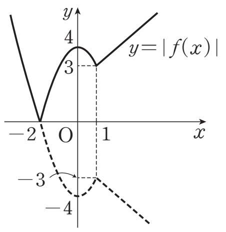
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

04

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & (x\le1) \\ -x-2 & (x>1) \end{cases}$에 대하여

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분만 남기고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \int_{-1}^{3}|f(x)|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+4)dx+\int_{1}^{3}(x+2)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+4)dx+\int_{1}^{3}(x+2)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^3$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+4\right)+\left\{\left(\frac{9}{2}+6\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$

$$=\frac{46}{3}$$

답 ②

05

조건 (가)에서 $\int_0^2|f(x)|dx=-\int_0^2 f(x)dx$이므로

$0\le x\le2$에서 $f(x)\le0$

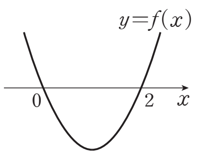
조건 (나)에서 $\int_2^3|f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$이므로

$2\le x\le3$에서 $f(x)\ge0$

이차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서 연속이다.

$\therefore f(2)=0$

한편, $f(0)=0$에서 $f(x)=ax(x-2)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a>0$



조건 (가)에서 $\int_0^2 f(x)dx=-8$이므로

$$\int_0^2(ax^2-2ax)dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2=\frac{8a}{3}-4a$$

$$=-\frac{4a}{3}=-8$$

$\therefore a=6$

따라서

$$f(x)=6x(x-2)=6x^2-12x$$

$$=6(x-1)^2-6$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최솟값 -6을 갖는다.

답 -6

06

곡선 $y=x^2-2px+p-1$은 직선 $x=p$에 대하여 대칭이고 이차방정식 $x^2-2px+p-1=0$의 두 실근이 α, β $(\alpha<\beta)$이므로 $\alpha<p<\beta$이다.

$$\therefore \int_\alpha^\beta|x-p|dx$$

$$=\int_\alpha^p(-x+p)dx+\int_p^\beta(x-p)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+px\right]_\alpha^p+\left[\frac{1}{2}x^2-px\right]_p^\beta$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{2}p^2+p^2\right)-\left(-\frac{1}{2}\alpha^2+p\alpha\right)\right\}$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{2}\beta^2-p\beta\right)-\left(\frac{1}{2}p^2-p^2\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\alpha^2-p\alpha\right)+\left(\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\beta^2-p\beta\right)$$

$$=p^2-(\alpha+\beta)p+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=p-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2-2p+2$

$$\therefore \int_\alpha^\beta|x-p|dx$$

$$=p^2-(\alpha+\beta)p+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=p^2-2p^2+\frac{1}{2}(4p^2-2p+2)$$

$$=p^2-p+1$$

$$=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 $\int_\alpha^\beta|x-p|dx$는 $p=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 $\frac{3}{4}$

07

조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+3)-f(x)=2x+3$ ……㉠

이므로 ㉠의 양변에 x 대신 $x+3$을 대입하면

$$f(x+6)-f(x+3)=2(x+3)+3$$
$$=2x+9 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$f(x+6)-f(x)=4x+12$ ……㉢

조건 ㈏에서 $\int_{-1}^{8} f(x)dx=15$이므로

$$\int_{-1}^{8} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{8} f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{-1}^{2} f(x+3)dx+\int_{-1}^{2} f(x+6)dx$$
$$=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{-1}^{2} \{f(x)+(2x+3)\}dx$$
$$+\int_{-1}^{2} \{f(x)+(4x+12)\}dx \ (\because ㉠, ㉢)$$
$$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{-1}^{2} (6x+15)dx$$
$$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+\Big[3x^2+15x\Big]_{-1}^{2}$$
$$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+(12+30)-(3-15)$$
$$=3\int_{-1}^{2} f(x)dx+54=15$$

즉, $3\int_{-1}^{2} f(x)dx=-39$이므로

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=-13$$

답 -13

08

주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로
우함수

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx=13$$

$$\therefore \int_{0}^{a} f(x)dx=\frac{13}{2}$$

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{0}^{1} xdx+\int_{1}^{2} dx+\int_{2}^{3} (-x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}+\Big[x\Big]_{1}^{2}+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{2}^{3}$$
$$=\frac{1}{2}+(2-1)+\left\{\left(-\frac{9}{2}+9\right)-(-2+6)\right\}$$
$$=2$$

이때, $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\int_{3}^{6} f(x)dx=\int_{6}^{9} f(x)dx=\cdots=2$$

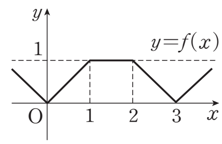
따라서 $\int_{0}^{9} f(x)dx=3\int_{0}^{3} f(x)dx=6$이므로

$2\int_{0}^{a} f(x)dx=13$이려면

$a=9+1=10$

답 ①

다른풀이



정적분의 기하적 의미에 의하여

주어진 그래프에서 $\int_{0}^{3} f(x)dx$

의 값은 윗변, 밑변의 길이가 각각

1, 3이고, 높이가 1인 등변사다리꼴의 넓이와 같으므로

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}(1+3)=2$$

같은 방법으로 $\int_{0}^{1} f(x)dx$의 값은 밑변의 길이가 1이고 높이가 1인 삼각형의 넓이와 같으므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{1}{2}$

이때, $\int_{0}^{a} f(x)dx=\frac{13}{2}=\left(3\times 2+\frac{1}{2}\right)$이므로

$$\int_{0}^{a} f(x)dx=3\int_{0}^{3} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{9} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{10} f(x)dx$$

$\therefore a=10$

09

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)-f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때, $g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$이므로

함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(우함수)×(기함수)=(기함수)

이때,

$$\int_{-1}^{3} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{1}^{3} xf(x)dx$$
$$=0+\int_{1}^{3} xf(x)dx=4$$

$$\therefore \int_{1}^{3} xf(x)dx=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\int_{-3}^{8} xf(x)dx=\int_{-3}^{3} xf(x)dx+\int_{3}^{8} xf(x)dx$$
$$=0+\int_{3}^{8} xf(x)dx=10$$

$$\therefore \int_{3}^{8} xf(x)dx=10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서

$$\int_{1}^{8} xf(x)dx=\int_{1}^{3} xf(x)dx+\int_{3}^{8} xf(x)dx$$
$$=10+4 \ (\because ㉠, ㉡)$$
$$=14$$

답 14

10

$f(-x)=-f(x)$에서 함수 $f(x)$는 그래프가 원점에 대하여 대칭인 기함수이고

$g(-x)=g(x)$에서 함수 $g(x)$는 그래프가 y축에 대하여 대칭인 우함수이다.

ㄱ. $\int_{-a}^{a} \{f(x)-g(x)\}dx$

$$=\int_{-a}^{a} f(x)dx-\int_{-a}^{a} g(x)dx=0-\int_{-a}^{a} g(x)dx$$
$$=-2\int_{0}^{a} g(x)dx=2\int_{a}^{0} g(x)dx \text{ (참)}$$

ㄴ. $g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))$이므로 함수 $g(f(x))$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} g(f(x))dx=2\int_{0}^{a} g(f(x))dx \text{ (거짓)}$$

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(f(x))$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{0} g(f(x))dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{a}{2}} g(f(x))dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx$$
$$=\int_{0}^{a} g(f(x))dx$$

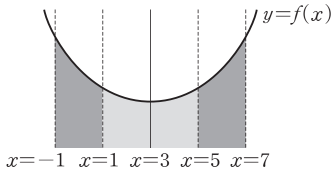
$$\therefore 2\left\{\int_{-\frac{a}{2}}^{0} g(f(x))dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a} g(f(x))dx\right\}$$
$$=2\int_{0}^{a} g(f(x))dx=\int_{-a}^{a} g(f(x))dx \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(6-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.



$$\therefore \int_{1}^{7} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{7} f(x)dx$$
$$=2\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$=2\int_{1}^{3} f(x)dx+4=10$$

즉, $2\int_{1}^{3} f(x)dx=6$이므로 $\int_{1}^{3} f(x)dx=3$

답 3

보충설명

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이면

(1) $f(m+x)=f(m-x)$

(2) $f(x)=f(2m-x)$

12

조건 ㈎에 의하여 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{0}^{4} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(2-x)=f(2+x)$의 양변에 x 대신 $x-2$를 대입하면

$f(4-x)=f(x)$

이것을 조건 ㈏에 대입하면

$2f(x)=2x^2-8x+6$에서 $f(x)=x^2-4x+3$

$$\therefore \int_0^4 f(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx \ (\because \text{㉠})$$
$$=2\int_0^2 (x^2-4x+3)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^2$$
$$=2\left(\frac{8}{3}-8+6\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

13

$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 g(t)dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$f(x)=-2x^3+\int_0^1 \{f(t)+2g(t)\}dt$$
$$=-2x^3+\int_0^1 f(t)dt+2\int_0^1 g(t)dt$$
$$=-2x^3+a+2b$$
$$g(x)=3x^2+\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt$$
$$=3x^2+\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 g(t)dt$$
$$=3x^2+a+b$$

이므로

$$a=\int_0^1 (-2t^3+a+2b)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^4+(a+2b)t\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+a+2b$$

즉, $2b=\frac{1}{2}$이므로 $b=\frac{1}{4}$ ……㉠

$$b=\int_0^1 (3t^2+a+b)dt$$
$$=\left[t^3+(a+b)t\right]_0^1$$
$$=1+a+b$$

즉, $1+a=0$이므로 $a=-1$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=-2x^3-\frac{1}{2}$, $g(x)=3x^2-\frac{3}{4}$

따라서 $f(-1)=\frac{3}{2}$, $g(-1)=\frac{9}{4}$이므로

$$\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

14

$f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$ ……㉠

$f(x)=2x^2+ax+\int_{-1}^x g(t)dt$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=2-a=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a=2$

(가)

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x)=2x^2+2x+\int_{-1}^x g(t)dt$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x+2+g(x)$

$\therefore\ g(x)=f'(x)-4x-2$

(나)

따라서 다항식 $g(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는

$$g(-1)=f'(-1)+4-2$$
$$=0+2 \ (\because \text{㉠})$$
$$=2$$

(다)

답 2

단계	채점 기준	배점
(가)	상수 a의 값을 구한 경우	30%
(나)	정적분으로 나타내어진 함수의 미분을 통해 함수 $g(x)$를 구한 경우	40%
(다)	구하는 값을 구한 경우	30%

보충설명

다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식) ……㉠

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$ ……㉡

㉠, ㉡에 각각 $x=a$를 대입하면

$f(a)=0$, $f'(a)=0$

15

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=k(x+1)(x-3)$ $(k>0)$이라 하면

$g(x)=\int_{x}^{x+3} f(t)dt$에서

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+3} f(t)dt\\
&=f(x+3)-f(x)\\
&=kx(x+4)-k(x+1)(x-3)\\
&=k\{(x^2+4x)-(x^2-2x-3)\}\\
&=6kx+3k\\
&=3k(2x+1)
\end{aligned}
$$

$g'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$

$k>0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최솟값을 가지므로 $a=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

16

ㄱ. $g(x)=\int_{0}^{x} f(x-t)dt$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=\int_{0}^{0} f(x-t)dt=0$ (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 $f(x)=kx(x-a)$ $(k>0)$라 하면

$f(x-t)=k(x-t)(x-t-a)$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ g(x)&=\int_{0}^{x} f(x-t)dt\\
&=k\int_{0}^{x}\{t^2-(2x-a)t+x^2-ax\}dt\\
&=k\left\{\int_{0}^{x} t^2dt-2x\int_{0}^{x} tdt\right.\\
&\qquad\left.+a\int_{0}^{x} tdt+(x^2-ax)\int_{0}^{x} dt\right\}
\end{aligned}
$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=k\left\{x^2-2\int_{0}^{x} tdt-2x^2+ax\right.\\
&\qquad\left.+(2x-a)\int_{0}^{x} dt+(x^2-ax)\right\}\\
&=k\left\{-2\int_{0}^{x} tdt+(2x-a)\int_{0}^{x} dt\right\}\\
&=k\left\{-2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}+(2x-a)\left[t\right]_{0}^{x}\right\}\\
&=k\{-x^2+(2x-a)x\}\\
&=k(x^2-ax)=kx(x-a)
\end{aligned}
$$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘		↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $g(0)=0$을 가지므로 $g(x)<0$을 만족시키는 실수 x가 존재한다. (거짓)

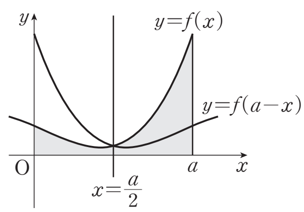
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

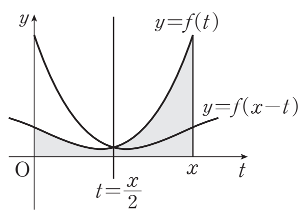
보충설명

ㄴ에서 $g'(x)=f(x)$임을 알아보자.

함수 $y=f(a-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이동시킨 것과 같으므로 다음 그림과 같다.



$\therefore\ \int_{0}^{a} f(a-x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$



같은 방법으로 함수 $y=f(x-t)$의 그래프는 함수 $y=f(t)$의 그래프를 직선 $t=\frac{x}{2}$에 대하여 대칭이동시킨 것과 같으므로

$\int_{0}^{x} f(x-t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt$

주어진 조건에서 $\int_0^x f(x-t)dt=g(x)$이므로

$\int_0^x f(t)dt=g(x)$ $\qquad\therefore\ g'(x)=f(x)$

17

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_b^x f'(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[f(t)\Big]_b^x$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(b)}{x-1}=2 \qquad \cdots\cdots㉠$$

이때, 극한값이 존재하고 $x\longrightarrow1$일 때 (분모) $\longrightarrow0$이므로 (분자) $\longrightarrow0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f(b)\}=0$이므로 $f(1)=f(b)$

$\therefore\ a-1=b^3-2b^2+ab \qquad \cdots\cdots㉡$

㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-2x^2+ax)-(b^3-2b^2+ab)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+ax-(a-1)}{x-1}\ (\because ㉡)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-x+a-1)}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & a & -a+1 \\ & & 1 & -1 & a-1 \\ \hline & 1 & -1 & a-1 & 0 \end{array}$$

$=a-1$

즉, $a-1=2$이므로 $a=3$

이 값을 ㉡에 대입하면

$b^3-2b^2+3b=2,\ b^3-2b^2+3b-2=0$

$(b-1)(b^2-b+2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore\ b=1\ (\because\ \underbrace{b^2-b+2}_{=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}>0)$

$\therefore\ a+b=3+1=4$

답 4

18

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{f(0)}^{f(x)}(3t^2-2t)dt$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[t^3-t^2\Big]_{f(0)}^{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2]-[\{f(0)\}^3-\{f(0)\}^2]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^3-\{f(0)\}^3}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(0)\}^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)-f(0)\}[\{f(x)\}^2+f(x)f(0)+\{f(0)\}^2]}{x}$$

$$-\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)+f(0)\}\{f(x)-f(0)\}}{x}$$

$$=3\{f(0)\}^2\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2f(0)\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$=[3\{f(0)\}^2-2f(0)]f'(0)$

$=(3\times2^2-2\times2)\times(-1)\ (\because\ f(0)=2,\ f'(0)=-1)$

$=-8$

답 -8

19

주어진 그래프에서

$f(x)=a(x-1)(x-5)$

$\quad=a(x^2-6x+5)\ (a>0) \qquad \cdots\cdots㉠$

라 하자.

$S(x)=\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$S'(x)=f(x)=a(x-1)(x-5)$

$S'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $S(x)$는 $x=1$에서 극대이며 극댓값은

$$S(1)=\int_2^1 f(t)dt$$

$$=-a\int_1^2(t^2-6t+5)dt$$

$$=-a\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_1^2$$

$$=-a\left\{\left(\frac{8}{3}-12+10\right)-\left(\frac{1}{3}-3+5\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{3}a$$

함수 $S(x)$는 $x=5$에서 극소이며 극솟값은

$$S(5)=\int_2^5 f(t)dt$$
$$=a\int_2^5 (t^2-6t+5)dt$$
$$=a\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_2^5$$
$$=a\left\{\left(\frac{125}{3}-75+25\right)-\left(\frac{8}{3}-12+10\right)\right\}$$
$$=-9a$$

이때, 함수 $S(x)$의 모든 극값의 합이 -22이므로

$$\frac{5}{3}a+(-9a)=-22$$

$$-\frac{22}{3}a=-22 \qquad \therefore\ a=3$$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=3(x^2-6x+5)$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{S(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{S(x)-S(2)}{x-2}\ (\because\ S(2)=0)$$
$$=S'(2)=f(2)\ (\because\ S'(x)=f(x))$$
$$=3(4-12+5)$$
$$=-9$$

답 -9

20

조건 (나)에서

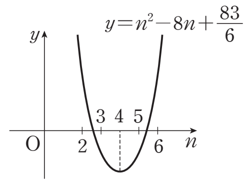
$$\int_{n+1}^{n+2} f(x)dx=\int_n^{n+1}(x-2)(x-5)dx\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

이므로

$n\geq 1$에서

$$\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_{n-1}^{n}(x-2)(x-5)dx$$
$$=\int_{n-1}^{n}(x^2-7x+10)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+10x\right]_{n-1}^{n}$$
$$=\left(\frac{1}{3}n^3-\frac{7}{2}n^2+10n\right)$$
$$-\left\{\frac{1}{3}(n-1)^3-\frac{7}{2}(n-1)^2+10(n-1)\right\}$$
$$=n^2-8n+\frac{83}{6}=a_n$$

이때, 함수 $y=n^2-8n+\frac{83}{6}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $n=3,\ 4,\ 5$일 때 $a_n<0$이다.



$$\therefore \sum_{n=1}^{6}|a_n|=(a_1+a_2)-(a_3+a_4+a_5)+a_6$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)-2(a_3+a_4+a_5)$$
$$=\sum_{n=1}^{6}\left(n^2-8n+\frac{83}{6}\right)$$
$$-2\left\{3^2+4^2+5^2-8(3+4+5)+3\times\frac{83}{6}\right\}$$
$$=\left(\frac{6\times 7\times 13}{6}-8\times\frac{6\times 7}{2}+83\right)-2\times\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$=91-168+83+9=15$$

답 15

보충설명

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

21

$f(x)=x^3-3x-1$에서

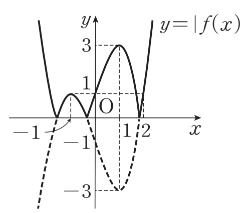
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	-3	↗

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$-1\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 $g(t)$이므로

$$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t<0)\\ -f(t) & (0\le t\le 1)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{1} g(t)dt&=\int_{-1}^{0}dt+\int_{0}^{1}\{-f(t)\}dt\\&=\int_{-1}^{0}dt+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)dt\\&=\Big[t\Big]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+t\right]_{0}^{1}\\&=-(-1)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right)\\&=\frac{13}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

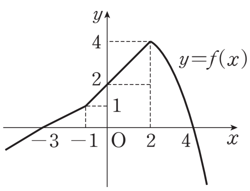
$p+q=17$

답 17

22

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (x<-1)\\ x+2 & (-1\le x<2)\\ -x^2+4x & (x\ge 2)\end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때, $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$라 하면 $g'(x)=f(x)$

$g'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 극소이며 극솟값은

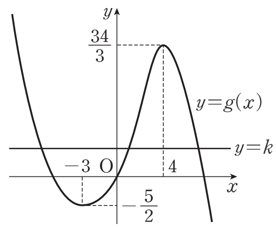
$$\begin{aligned}g(-3)&=\int_{0}^{-3}f(t)dt\\&=\int_{0}^{-1}f(t)dt+\int_{-1}^{-3}f(t)dt\\&=\int_{0}^{-1}(t+2)dt+\int_{-1}^{-3}\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{0}^{-1}+\left[\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t\right]_{-1}^{-3}\\&=\left(\frac{1}{2}-2\right)+\left\{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\right\}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극대이며 극댓값은

$$\begin{aligned}g(4)&=\int_{0}^{4}f(t)dt\\&=\int_{0}^{2}f(t)dt+\int_{2}^{4}f(t)dt\\&=\int_{0}^{2}(t+2)dt+\int_{2}^{4}(-t^2+4t)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_{2}^{4}\\&=(2+4)+\left\{\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{8}{3}+8\right)\right\}=\frac{34}{3}\end{aligned}$$

한편, 방정식 $\int_{0}^{x}f(t)dt=k$, 즉 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면



$-\frac{5}{2}<k<\frac{34}{3}$

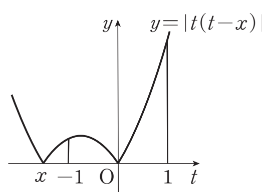
따라서 정수 k는 -2, -1, 0, $\cdots$, 11의 14개이다.

답 14

23

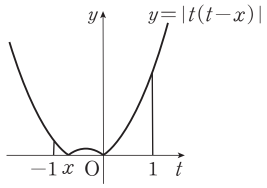
$f(x)=\int_{-1}^{1}|t(t-x)|dt=\int_{-1}^{1}|t^2-tx|dt$에서 x의 값의 범위에 따라 $f(x)$는 다음과 같다.

(i) $x\le -1$일 때,



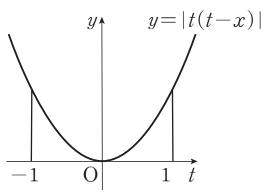
$$f(x)=\int_{-1}^{0}(-t^2+tx)dt+\int_{0}^{1}(t^2-tx)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}xt^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-x$$

(ii) $-1<x<0$일 때,



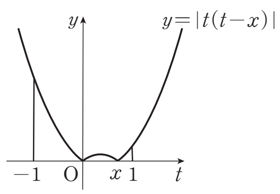
$$f(x)=\int_{-1}^{x}(t^2-tx)dt+\int_{x}^{0}(-t^2+tx)dt+\int_{0}^{1}(t^2-tx)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{-1}^{x}+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}xt^2\right]_{x}^{0}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$$

(iii) $x=0$일 때,



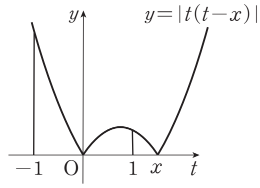
$$f(x)=\int_{-1}^{1}t^2dt=2\int_{0}^{1}t^2dt=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1}=\frac{2}{3}$$

(iv) $0<x<1$일 때,



$$f(x)=\int_{-1}^{0}(t^2-tx)dt+\int_{0}^{x}(-t^2+tx)dt+\int_{x}^{1}(t^2-tx)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}xt^2\right]_{0}^{x}+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{x}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$$

(v) $x\geq 1$일 때,

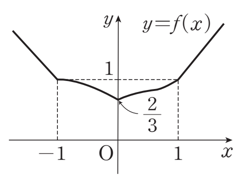


$$f(x)=\int_{-1}^{0}(t^2-tx)dt+\int_{0}^{1}(-t^2+tx)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}xt^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}xt^2\right]_{0}^{1}$$
$$=x$$

(i)~(v)에서

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x\leq -1)\\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3} & (-1<x\leq 0)\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3} & (0<x<1)\\ x & (x\geq 1)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때, 최솟값 $f(0)=\frac{2}{3}$를 갖는다.



답 $\frac{2}{3}$

24

$g(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$ ……㉠

조건 ㈎에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 작은 값부터 차례대로 x_1, x_2, x_3이라 하자.

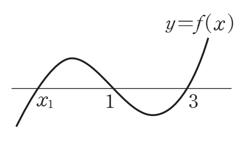
조건 ㈏에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$g'(1)=0$, $g'(3)=0$

즉, ㉠에서 $f(1)=0$, $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-x_1)(x-1)(x-3)$ ……㉡

따라서 함수 $y=g'(x)$, 즉 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(2)<0$ (참)

ㄴ. $g'(1)=0,\ g'(3)=0$이므로 $g'(-1)=0$이면

$g'(x)=(x+1)(x-1)(x-3)=x^3-3x^2-x+3$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때,

$$g(-1)=\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0$$

$$g(3)=\int_{-1}^{3} f(t)dt=\int_{-1}^{3}(t^3-3t^2-t+3)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-t^3-\frac{1}{2}t^2+3t\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)$$

$$=0$$

함수 $g(x)$는 $x=-1,\ x=3$에서 극솟값을 갖고 $g(-1)=g(3)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다. (참)

ㄷ. $g(1)=\int_{-1}^{1} f(t)dt$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-4x^2+3x-x_1x^2+4x_1x-3x_1)dx$$

(∵ ㉡)

$$=\int_{-1}^{1}(x^3+3x+4x_1x)dx+\int_{-1}^{1}(-4x^2-x_1x^2-3x_1)dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}(-4x^2-x_1x^2-3x_1)dx$$

$$=2\left[-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x_1x^3-3x_1x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{20}{3}x_1-\frac{8}{3}$$

즉, $-\frac{20}{3}x_1-\frac{8}{3}>0$이면 $x_1<-\frac{2}{5}$

$\therefore\ f(0)=-3x_1>\frac{6}{5}>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

보충설명

함수 $g(x)$의 극댓값 $g(1)$을 구하면

$$g(1)=\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{1}(t^3-3t^2-t+3)dt$$

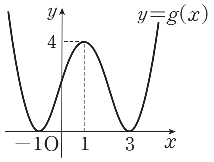
$$=2\int_{0}^{1}(-3t^2+3)dt$$

$$=2\left[-t^3+3t\right]_{0}^{1}$$

$$=2\times(-1+3)$$

$$=4$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore\ g(x)\ge 0$ (참)

유형연습 09 정적분의 활용

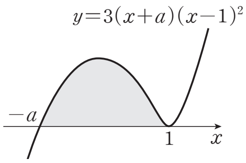
본문 pp.232~240

01-1 1	**01-2** $\frac{101}{2}$	**01-3** 113
02-1 $\frac{8}{3}$	**02-2** $\frac{16}{3}$	**03-1** $\frac{27}{4}$
03-2 16	**03-3** $\frac{8}{3}$	**04-1** $2\sqrt{2}-2$
04-2 4	**04-3** $\frac{3}{4}$	**05-1** $\frac{7}{2}$
05-2 31	**06-1** -3	**06-2** 1
06-3 ㄱ, ㄷ	**07-1** $\frac{64}{3}$	**07-2** 8

01-1

곡선 $y=3(x+a)(x-1)^2$과 x축의 교점의 x좌표는 $3(x+a)(x-1)^2=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=1$



닫힌구간 $[-a,\ 1]$에서 $y\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-a}^{1} f(x)dx=\int_{-a}^{1}\{3x^3+3(a-2)x^2-3(2a-1)x+3a\}dx$$
$$=\left[\frac{3}{4}x^4+(a-2)x^3-\frac{3(2a-1)}{2}x^2+3ax\right]_{-a}^{1}$$
$$=\left\{\frac{3}{4}+(a-2)-\frac{3(2a-1)}{2}+3a\right\}$$
$$-\left\{\frac{3}{4}a^4-a^3(a-2)-\frac{3(2a-1)}{2}a^2-3a^2\right\}$$
$$=\frac{1}{4}a^4+a^3+\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{1}{4}a^4+a^3+\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{4}=4$이므로

$a^4+4a^3+6a^2+4a-15=0$에서

$(a+3)(a-1)(a^2+2a+5)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

1	1	4	6	4	-15
		1	5	11	15
-3	1	5	11	15	0
		-3	-6	-15	
	1	2	5	0	

답 1

다른풀이

삼차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$\frac{|3|}{12}(1+a)^4=\frac{1}{4}(1+a)^4=4$에서

$(1+a)^4=16,\ a+1=2\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ a=1$

01-2

주어진 그래프에서

$f'(x)=a(x+2)(x-2)$
$\quad=ax^2-4a\ (a<0)$

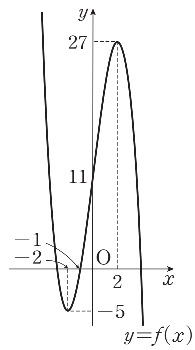
이므로

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-4ax+C$ (단, C는 적분상수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

이때, 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $f(-2)=\frac{16}{3}a+C$를 갖고 $x=2$에서 극댓값 $f(2)=-\frac{16}{3}a+C$를 갖는다.



즉, $\frac{16}{3}a+C=-5$,

$-\frac{16}{3}a+C=27$

이므로 위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ C=11$

$\therefore\ f(x)=-x^3+12x+11$
$\quad=-(x+1)(x^2-x-11)$

닫힌구간 $[-2,\ -1]$에서 $f(x)\leq 0$, 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)\geq 0$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\int_{-2}^{-1}\{-f(x)\}dx+\int_{-1}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^3-12x-11)dx$$
$$+\int_{-1}^{2}(-x^3+12x+11)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2-11x\right]_{-2}^{-1}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+6x^2+11x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{4}-6+11\right)-(4-24+22)\right\}$$
$$+\left\{(-4+24+22)-\left(-\frac{1}{4}+6-11\right)\right\}$$
$$=\frac{101}{2}$$

답 $\frac{101}{2}$

01-3

$$\int_0^{100} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{100} f(x)dx$$
$$= \int_2^{100} f(x)dx$$

$\therefore \int_0^2 f(x)dx = 0$ ……㉠

한편, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$인 이차함수이므로 $f(x)=(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

㉠에서

$$\int_0^2 \{x^2-(a+2)x+2a\}dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{(a+2)}{2}x^2 + 2ax\right]_0^2$$
$$= \frac{8}{3} - 2(a+2) + 4a$$
$$= 2a - \frac{4}{3} = 0$$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$f(x)=0$에서 $(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $\left[\frac{2}{3},\ 2\right]$에서 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이는

$$-\int_{\frac{2}{3}}^2 f(x)dx = -\int_{\frac{2}{3}}^2 \left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right]_{\frac{2}{3}}^2$$
$$= -\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{8}{81} - \frac{16}{27} + \frac{8}{9}\right)$$
$$= \frac{32}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=32$이므로 $p+q=81+32=113$

답 113

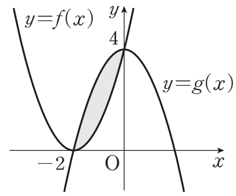
다른풀이

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구한 뒤 이차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$$\frac{|1|}{6}\left(2-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

따라서 $p=81$, $q=32$이므로 $p+q=81+32=113$

02-1



곡선 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$y-(-4)=\{(x-2)+2\}^2$에서

$y=x^2-4$

이 곡선을 x축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

$g(x)=-x^2+4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$x^2+4x+4=-x^2+4$에서 $2x(x+2)=0$

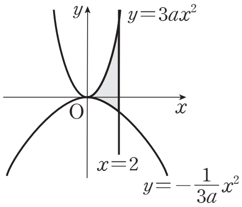
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 $f(x)\le g(x)$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0 \{g(x)-f(x)\}dx = \int_{-2}^0 (-2x^2-4x)dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-2}^0$$
$$= -\left(\frac{16}{3} - 8\right) = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

02-2



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$3ax^2 \ge -\frac{1}{3a}x^2$ ($\because a>0$)

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \left(3ax^2 + \frac{1}{3a}x^2\right)dx$$
$$= \int_0^2 \left(3a + \frac{1}{3a}\right)x^2 dx = \left(3a + \frac{1}{3a}\right)\int_0^2 x^2 dx$$
$$= \left(3a + \frac{1}{3a}\right)\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\left(3a + \frac{1}{3a}\right)$$

이때, $a>0$에서 $3a>0$, $\frac{1}{3a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a + \frac{1}{3a} \ge 2\sqrt{3a \times \frac{1}{3a}} = 2$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3a=\frac{1}{3a}\text{, 즉 } a=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{3}\times2=\frac{16}{3}$

답 $\frac{16}{3}$

보충설명

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0,\ b>0$일 때,

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

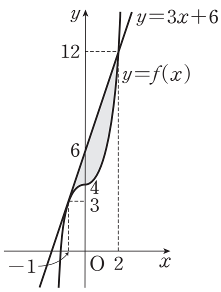
03-1

$f(x)=x^3+4$에서 $f'(x)=3x^2$

곡선 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-3=3\{x-(-1)\}$

$\therefore\ y=3x+6$



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는

$x^3+4=3x+6$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $f(x)\le3x+6$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(3x+6)-(x^3+4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=(-4+6+4)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

다른풀이

삼차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$\frac{|1|}{12}\{2-(-1)\}^4=\frac{81}{12}=\frac{27}{4}$

03-2

$f(x)=x^4-2x^2-x+5$에서 $f'(x)=4x^3-4x-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하므로 접점의 x좌표를 t라 하면

$4t^3-4t-1=-1,\ 4t(t+1)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=1$

(i) $t=-1$일 때,

$f(-1)=1-2+1+5=5$이므로 접선의 방정식은

$y-5=-(x+1)\qquad\therefore\ y=-x+4$

(ii) $t=0$일 때,

$f(0)=5$이므로 접선의 방정식은

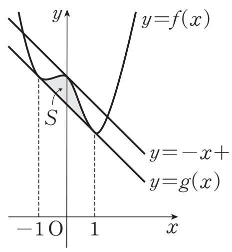
$y-5=-x\qquad\therefore\ y=-x+5$

(iii) $t=1$일 때,

$f(1)=1-2-1+5=3$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)\qquad\therefore\ y=-x+4$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 접하므로 $g(x)=-x+4$이다.



닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{(x^4-2x^2-x+5)-(-x+4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{16}{15}$$

$\therefore\ 15S=15\times\frac{16}{15}=16$

답 16

03-3

곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $2x^3+2x^2-3x=-x+k$, 즉 $2x^3+2x^2-2x=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $f(x)=2x^3+2x^2-2x$라 하면

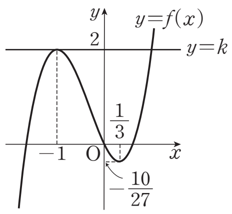
$f'(x)=6x^2+4x-2=2(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$-\frac{10}{27}$	↗

따라서 곡선 $f(x)$는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k=2$ ($\because$ $k>0$)



즉, 곡선 $y=2x^3+2x^2-3x$와 직선 $y=-x+2$의 교점은

$2x^3+2x^2-3x=-x+2$에서 $2(x+1)^2(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $2x^3+2x^2-3x\le -x+2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(-x+2)-(2x^3+2x^2-3x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^3-2x^2+2x+2)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^3+2x)dx+\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx$$

$$=0+2\int_{0}^{1}(-2x^2+2)dx$$

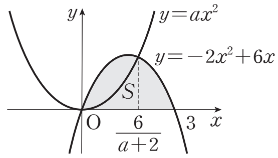
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

04-1

두 곡선 $y=-2x^2+6x$, $y=ax^2$의 교점의 x좌표는



$-2x^2+6x=ax^2$에서

$x\{(a+2)x-6\}=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\frac{6}{a+2}$

닫힌구간 $\left[0,\ \frac{6}{a+2}\right]$에서 $ax^2\le -2x^2+6x$이므로 두 곡선 $y=-2x^2+6x$, $y=ax^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{6}{a+2}}(-2x^2+6x-ax^2)dx=\left[-\frac{(a+2)}{3}x^3+3x^2\right]_0^{\frac{6}{a+2}}$$

$$=\frac{36}{(a+2)^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 곡선 $y=-2x^2+6x$와 x축의 교점의 x좌표는

$-2x^2+6x=0$에서 $-2x(x-3)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $-2x^2+6x\ge 0$이므로 곡선 $y=-2x^2+6x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3(-2x^2+6x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$2\times㉠=㉡$이므로 $\frac{72}{(a+2)^2}=9$, $(a+2)^2=8$

$\therefore$ $a=2\sqrt{2}-2$ 또는 $a=-2\sqrt{2}-2$

이때, $a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

답 $2\sqrt{2}-2$

다른풀이

이차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$㉠=\frac{|a-(-2)|}{6}\left(\frac{6}{a+2}\right)^3=\frac{36}{(a+2)^2}$,

$㉡=\frac{|-2|}{6}(3-0)^3=9$

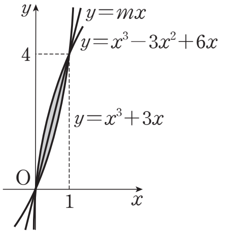
$2\times㉠=㉡$이므로 $\frac{72}{(a+2)^2}=9$, $(a+2)^2=8$

$\therefore$ $a=2\sqrt{2}-2$ 또는 $a=-2\sqrt{2}-2$

이때, $a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

04-2

곡선 $y=x^3+3x$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선의 방정식은



$y-4=(x-1)^3+3(x-1)$

∴ $y=x^3-3x^2+6x$

두 곡선의 교점의 x좌표는

$x^3+3x=x^3-3x^2+6x$에서 $3x(x-1)=0$

∴ $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x^3-3x^2+6x\geq x^3+3x$이므로 두 곡선 $y=x^3+3x$, $y=x^3-3x^2+6x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{(x^3-3x^2+6x)-(x^3+3x)\}dx$$

$$=\int_0^1(-3x^2+3x)dx$$

$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 곡선 $y=x^3+3x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$x^3+3x=mx$에서 $x\{x^2-(m-3)\}=0$

∴ $x=-\sqrt{m-3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{m-3}$

($\because$ $3<m\leq 4$)

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{m-3}]$에서 $x^3+3x\leq mx$이므로 곡선 $y=x^3+3x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{m-3}}(mx-x^3-3x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{(m-3)}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{m-3}}$$

$$=\frac{(m-3)^2}{4}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠$=2\times$㉡이므로 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{(m-3)^2}{2}$, $(m-3)^2=1$

$m-3=1$ ($\because$ $3<m\leq 4$) ∴ $m=4$

답 4

04-3

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$$

위의 넓이는 곡선 $y=ax(1-x)$에 의하여 이등분되므로 두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{7}{20}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{40}$이다. 즉,

$$\int_0^1\{ax(1-x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^4+x^3-ax^2+ax)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}a$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{6}a=\frac{7}{40}$$

$$\frac{1}{6}a=\frac{7}{40}-\frac{1}{20}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$$

∴ $a=\dfrac{1}{8}\times 6=\dfrac{3}{4}$

답 $\dfrac{3}{4}$

다른풀이

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 곡선 $y=-x^4+x$, $y=ax(1-x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. 즉,

$$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-(ax-ax^2)\}dx$$

이므로

$$\int_0^1[(-2x^4+x^3+x)-\{-2x^4+2ax^2+(2-2a)x\}]dx=0$$

$$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2a}{3}x^3+\frac{(2a-1)}{2}x^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2a}{3}+a-\frac{1}{2}=0,\ \frac{1}{3}a=\frac{1}{4}$$

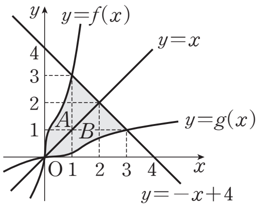
∴ $a=\dfrac{3}{4}$

05-1

$f(x)=x^3+2x$에서 $f'(x)=3x^2+2>0$

즉, 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 역함수가 존재한다.

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $A=B$



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x=x$에서 $x(x^2+1)=0$ $\quad\therefore x=0$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x=-x+4$에서

$x^3+3x-4=0$,

$(x-1)(x^2+x+4)=0$

1	1	0	3	−4
		1	1	4
	1	1	4	0

$\therefore x=1$

한편, 직선 $y=-x+4$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$-x+4=x$에서 $2x=4$

$\therefore x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=-x+4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$A=\int_0^1(x^3+2x-x)dx+\int_1^2(-x+4-x)dx$$
$$=\int_0^1(x^3+x)dx+\int_1^2(4-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[4x-x^2\right]_1^2=\frac{7}{4}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $A+B=2A=\frac{7}{2}$

답 $\frac{7}{2}$

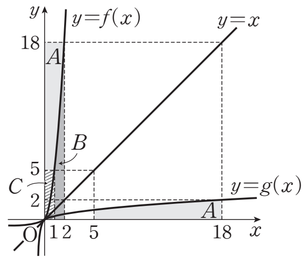
05-2

$f(x)=x^3+x^2+3x$에서

$f(1)=1+1+3=5$, $f(2)=8+4+6=18$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(1,\ 5)$, $(2,\ 18)$을 지난다.

또한, $f'(x)=3x^2+2x+3=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$에서 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 역함수가 존재하고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때, $\int_{f(1)}^{f(2)}g(x)dx=A$,

$\int_1^2 f(x)dx=B$, 빗금 친 도형의 넓이를 C라 하면

$C=1\times5=5$, $A+B+C=2\times18=36$

$$\therefore \int_1^2 f(x)dx+\int_{f(1)}^{f(2)}g(x)dx=A+B$$
$$=(A+B+C)-C$$
$$=36-5=31$$

답 31

06-1

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로 $3t^2+2at=0$에서

$t(3t+2a)=0$ $\quad\therefore t=-\frac{2}{3}a$ ($\because t>0$)

닫힌구간 $\left[0,\ -\frac{2}{3}a\right]$에서 $v(t)\le0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=-\frac{2}{3}a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{-\frac{2}{3}a}|v(t)|dt=\int_0^{-\frac{2}{3}a}(-3t^2-2at)dt$$
$$=\left[-t^3-at^2\right]_0^{-\frac{2}{3}a}$$
$$=\frac{8}{27}a^3-\frac{4}{9}a^3=-\frac{4}{27}a^3$$

즉, $-\frac{4}{27}a^3=4$에서 $\frac{4}{27}(a^3+27)=0$

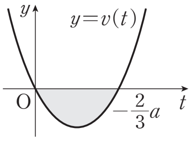
$\frac{4}{27}(a+3)(a^2-3a+9)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a^2-3a+9>0$)

답 -3

다른풀이

시각 $t=0$에서 $t=-\frac{2}{3}a$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



이차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$\frac{|3|}{6}\left(-\frac{2}{3}a\right)^3=-\frac{4}{27}a^3$

$-\frac{4}{27}a^3=4$에서 $a^3=-27$

$a^3+27=0$, $(a+3)(a^2-3a+9)=0$

$\therefore\ a=-3$

06-2

점 P의 시각 t에서의 속도는 $f(t)=2t^3-9t^2+12t$에서

$v(t)=f'(t)=6t^2-18t+12$

점 P가 출발할 때의 속도는 $v(0)=12$이므로 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직이려면 $v(t)\leq 0$이어야 한다.

$6t^2-18t+12\leq 0$에서 $6(t-1)(t-2)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq t\leq 2$

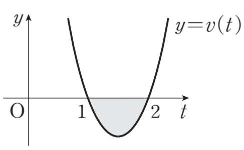
닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 $v(t)\leq 0$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^2 |v(t)|dt&=\int_1^2(-6t^2+18t-12)dt\\&=\Big[-2t^3+9t^2-12t\Big]_1^2\\&=(-16+36-24)-(-2+9-12)\\&=1\end{aligned}$$

답 1

다른풀이

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



이차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면

$\frac{|-6|}{6}(2-1)^3=1$

06-3

주어진 그래프에서 $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & (0\leq t<2)\\ -\frac{1}{2}t+2 & (2\leq t<4)\\ -2t+8 & (4\leq t<5)\\ t-7 & (5\leq t<8)\\ 1 & (t\geq 8)\end{cases}$

ㄱ. 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^4 v(t)dt$ ⋯⋯㉠

이때, ㉠은 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 1=2$ (참)

ㄴ. 속력은 속도의 크기이므로 점 P의 최고 속력은 $t=5$일 때 2이다. (거짓)

ㄷ. 운동 방향이 바뀌는 것은 $x=t$의 좌우에서 $v(t)$의 값의 부호가 바뀌는 것이므로 점 P는 $t=4$, $t=t_1$에서 운동 방향이 바뀐다.

그래프에서 $5\leq t_1<8$일 때, $v(t)=t_1-7=0$에서 $t_1=7$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 움직인 거리는

$\int_0^7 |v(t)|dt$ ⋯⋯㉡

이때, ㉡은 닫힌구간 $[0,\ 7]$에서 함수 $y=v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 1+\frac{1}{2}\times 3\times 2=2+3=5$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

다른풀이

ㄱ. $$\begin{aligned}\int_0^4 v(t)dt&=\int_0^2\frac{1}{2}tdt+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}t+2\right)dt\\&=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^2+2t\right]_2^4\\&=1+\{(-4+8)-(-1+4)\}\\&=2\end{aligned}$$

ㄷ. $\int_0^7 |v(t)|dt=\int_0^2 \frac{1}{2}tdt+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}t+2\right)dt$

$$+\int_4^5(2t-8)dt+\int_5^7(-t+7)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}t^2+2t\right]_2^4+\left[t^2-8t\right]_4^5$$

$$+\left[-\frac{1}{2}t^2+7t\right]_5^7$$

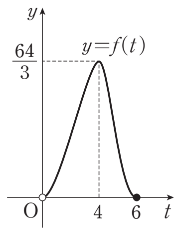
$$=1+\{(-4+8)-(-1+4)\}$$

$$+\{(25-40)-(16-32)\}$$

$$+\left(-\frac{49}{2}+49\right)-\left(-\frac{25}{2}+35\right)$$

$$=5$$

이때, 함수 $y=f(t)$, 즉 $y=|g(t)|$의 그래프는 $y=g(t)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분을 t축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $f(4)=|g(4)|=\frac{64}{3}$

답 $\frac{64}{3}$

07-1

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_P(t)$라 하면

$$x_P(t)=\int_0^t(t^2-3t)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_Q(t)$라 하면

$$x_Q(t)=\int_0^t(-t^2+5t)dt=-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2$$

두 점 P, Q가 만나는 것은 두 점의 위치가 같을 때, 즉 $x_P(t)=x_Q(t)$일 때이므로

$\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2=-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2$에서 $\frac{2}{3}t^2(t-6)=0$

$\therefore\ t=6\ (\because\ t>0)$

$0<t\le6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\left|\frac{2}{3}t^3-4t^2\right|$$

이때, $g(t)=\frac{2}{3}t^3-4t^2\ (0<t\le6)$이라 하면

$g'(t)=2t^2-8t=2t(t-4)$이므로

$g'(t)=0$에서 $t=4\ (\because\ 0<t\le6)$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$g'(t)$		$-$	0	$+$	$+$
$g(t)$		↘	$-\frac{64}{3}$	↗	0

07-2

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_P(t)$라 하면

$$x_P(t)=\int_0^t(3t^2-4t-4)dt=t^3-2t^2-4t$$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_Q(t)$라 하면

$$x_Q(t)=\int_0^t(2t-4)dt=t^2-4t$$

두 점 P, Q가 만나는 것은 두 점의 위치가 같을 때, 즉 $x_P(t)=x_Q(t)$일 때이므로

$t^3-2t^2-4t=t^2-4t$에서 $t^2(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

$3t^2-4t-4=(3t+2)(t-2)$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $3t^2-4t-4\le0$, 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $3t^2-4t-4\ge0$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|3t^2-4t-4|dt$$

$$=\int_0^2(-3t^2+4t+4)dt+\int_2^3(3t^2-4t-4)dt$$

$$=\left[-t^3+2t^2+4t\right]_0^2+\left[t^3-2t^2-4t\right]_2^3$$

$$=(-8+8+8)+\{(27-18-12)-(8-8-8)\}$$

$$=13$$

한편, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $2t-4\le0$, 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $2t-4\ge0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |2t-4|\,dt=\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^3(2t-4)dt$$
$$=\Big[-t^2+4t\Big]_0^2+\Big[t^2-4t\Big]_2^3$$
$$=(-4+8)+\{(9-12)-(4-8)\}$$
$$=5$$

따라서 두 점 P, Q의 움직인 거리의 차는

$13-5=8$

답 8

개 념 마 무 리

본문 pp.241~244

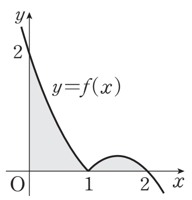
01 1	**02** 28	**03** ④	**04** ⑤
05 17	**06** 21	**07** ②	**08** 160
09 $\frac{9}{2}$	**10** $\frac{1}{48}$	**11** $2\sqrt{5}$	**12** 120
13 ④	**14** $\frac{1}{9}$	**15** 4	**16** 175
17 -3	**18** 35	**19** 27	**20** $\frac{1}{2}$
21 14	**22** ⑤	**23** 385	

01

$f(x)=|x-1|(2-x)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-2) & (x\le 1)\\ -(x-1)(x-2) & (x>1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1(x-1)(x-2)dx-\int_1^2(x-1)(x-2)dx$$
$$=\int_0^1(x^2-3x+2)dx-\int_1^2(x^2-3x+2)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_0^1-\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-\left\{\left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}$$
$$=1$$

답 1

02

$$S_1=\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1(x^2-5x+4)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\Big]_0^1=\frac{11}{6}$$
$$S_2+S_3=\int_1^4|f(x)|dx=\int_1^4\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4x\Big]_1^4$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+40-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)$$
$$=\frac{9}{2}$$

이므로

$$S_1+S_2+S_3=\frac{38}{6}=\frac{19}{3}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때, S_1, S_2, S_3이 등차수열을 이루므로

$S_1+S_3=2S_2$

이것을 ㉠에 대입하면 $3S_2=\frac{19}{3}\qquad\therefore\ S_2=\frac{19}{9}$

따라서 $p=9$, $q=19$이므로

$p+q=9+19=28$

답 28

03

함수 $y=f(x-3)+4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것과 같다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=f(x-3)+4$의 그래프가 일치하므로

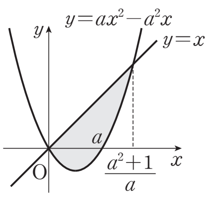
$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6\{f(x-3)+4\}dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x-3)dx+\int_3^6 4dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 4dx$$
$$=2\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 4dx$$

$$=2\int_0^3 f(x)dx+\Big[4x\Big]_3^6$$
$$=2\int_0^3 f(x)dx+12=0$$
$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=-6$$
또한, $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$이므로
$0=-6+\int_3^6 f(x)dx$ ($\because$ 조건 ㈏)
$$\therefore \int_3^6 f(x)dx=6$$
$\therefore \int_6^9 f(x)dx=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}dx$ ($\because$ 조건 ㈎)
$$=\int_6^9 f(x-3)dx+\int_6^9 4dx$$
$$=\int_3^6 f(x)dx+\Big[4x\Big]_6^9$$
$$=6+(36-24)=18$$

답 ④

04

포물선 $y=ax^2-a^2x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는
$ax^2-a^2x=x$에서 $x\{ax-(a^2+1)\}=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=\dfrac{a^2+1}{a}$
이때, $a>0$이므로 $\dfrac{a^2+1}{a}>0$
따라서 오른쪽 그림에서 도형의 넓이 $S(a)$는



$S(a)$
$$=\int_0^{\frac{a^2+1}{a}}\{x-(ax^2-a^2x)\}dx$$
$$=\int_0^{\frac{a^2+1}{a}}\{-ax^2+(a^2+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{a}{3}x^3+\frac{(a^2+1)}{2}x^2\right]_0^{\frac{a^2+1}{a}}$$
$$=-\frac{a}{3}\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3+\frac{(a^2+1)}{2}\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2$$
$$=-\frac{(a^2+1)^3}{3a^2}+\frac{(a^2+1)^3}{2a^2}$$
$$=\frac{(a^2+1)^3}{6a^2}$$
$$\therefore \frac{S(a)}{a}=\frac{(a^2+1)^3}{6a^3}=\frac{1}{6}\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$
이때, $a>0$, $\dfrac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2$$
$\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{1}{a}\text{, 즉 } a=1\text{일 때 성립}\right)$
따라서 $\dfrac{S(a)}{a}$의 최솟값은 $\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

답 ⑤

다른풀이
이차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면
$$S(a)=\frac{|a|}{6}\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^3$$
$$=\frac{a}{6}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$
$$\therefore \frac{S(a)}{a}=\frac{1}{6}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

보충설명
산술평균과 기하평균의 관계
$a>0$, $b>0$일 때,
$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

05

삼차함수 $f(x)=-(x+1)^3+8$의 그래프가 x축과 만나는 점 A의 x좌표는 $f(x)=0$에서
$-(x+1)^3+8=0$, $(x+1)^3-8=0$
$(x-1)(x^2+4x+7)=0$
$\therefore$ $x=1$ ($\because$ $\underbrace{x^2+4x+7}_{=(x+2)^2+3}>0$)
이때, $S_1=S_2$이므로 $\int_0^1\{f(x)-k\}dx=0$ * 이어야 한다. 즉,

$$\int_0^1 \{-(x+1)^3+8-k\}dx$$
$$=\int_0^1 \{-x^3-3x^2-3x+7-k\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+(7-k)x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{4}-1-\frac{3}{2}+7-k$$
$$=\frac{17}{4}-k=0$$
$$\therefore\ k=\frac{17}{4} \qquad \therefore\ 4k=4\times\frac{17}{4}=17$$

답 17

풀이첨삭

* 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 a라 하면

$$S_1=\int_0^a \{f(x)-k\}dx,\ S_2=\int_a^1 \{k-f(x)\}dx$$

이때, $S_1=S_2$이므로

$$\int_0^a \{f(x)-k\}dx=\int_a^1 \{k-f(x)\}dx$$
$$\int_0^a \{f(x)-k\}dx-\int_a^1 \{k-f(x)\}dx=0$$
$$\int_0^a \{f(x)-k\}dx+\int_a^1 \{f(x)-k\}dx=0$$
$$\therefore\ \int_0^1 \{f(x)-k\}dx=0$$

06

실수 전체의 집합에서 $f(x)\geq g(x)\geq 0$이므로

$$\int_0^t \{f(x)-g(x)\}dx=\frac{1}{2}t^3+2t^2+t$$

위의 식의 양변에 $t=2$를 대입하면

$$\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}dx=4+8+2=14$$

즉, $\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 g(x)dx=14$이고, $\int_0^2 f(x)dx=35$

이므로

$$\int_0^2 g(x)dx=21$$

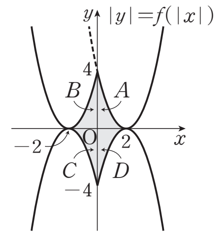
따라서 구하는 도형의 넓이는 21이다.

답 21

07

$f(x)=x^2-4x+4$에서 $f(x)=(x-2)^2$

함수 $|y|=f(|x|)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이므로 각 도형의 넓이를 A, B, C, D라 하면



$A=B=C=D$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$A+B+C+D=4A$$
$$=4\int_0^2 (x^2-4x+4)dx$$
$$=4\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2$$
$$=4\left(\frac{8}{3}-8+8\right)=\frac{32}{3}$$

답 ②

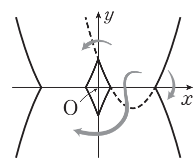
보충설명

함수 $|y|=f(|x|)$의 그래프 그리기

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

(ii) $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남긴다.

(iii) (ii)를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한다.



08

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 세 점 $(0, f(0))$, $(3, f(3))$, $(4, f(4))$에서 만나므로

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

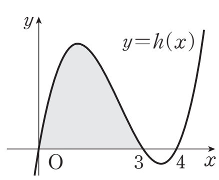
이때, $h(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고,

$h(0)=f(0)-g(0)=0$, $h(3)=f(3)-g(3)=0$,

$h(4)=f(4)-g(4)=0$

이므로 $h(x)=ax(x-3)(x-4)$ $(a>0)$라 할 수 있다.

닫힌구간 $[0, 3]$에서 $h(x)\geq 0$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이가 180이므로



$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$

$=\int_0^3 |h(x)|dx$

$=\int_0^3 ax(x-3)(x-4)dx$

$=a\int_0^3 x(x-3)(x-4)dx$

$=a\int_0^3 (x^3-7x^2+12x)dx$

$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$

$=\frac{45}{4}a=180$

$\therefore\ a=16$

따라서 $h(x)=16x(x-3)(x-4)$이므로

$f(5)-g(5)=h(5)=16\times5\times2\times1=160$

답 160

09

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하자.

함수 $f(x)=2x^2+2x+11$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 접하므로 x에 대한 이차방정식 $2x^2+2x+11=mx+n$, 즉 $2x^2+(2-m)x+11-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-m)^2-8(11-n)=0$

$m^2-4m+8n-84=0$ ……㉠

또한, 함수 $g(x)=2x^2-10x+5$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 접하므로 x에 대한 이차방정식

$2x^2-10x+5=mx+n$, 즉 $2x^2-(10+m)x+5-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(10+m)^2-8(5-n)=0$

$m^2+20m+8n+60=0$ ……㉡

㉡－㉠을 하면

$24m+144=0$ $\quad\therefore\ m=-6$

이것을 다시 ㉠에 대입하면

$8n-24=0$ $\quad\therefore\ n=3$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-6x+3$이다.

함수 $f(x)=2x^2+2x+11$의 그래프와 함수 $g(x)=2x^2-10x+5$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2+2x+11=2x^2-10x+5$, $12x=-6$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

함수 $g(x)=2x^2+2x+11$의 그래프와 직선 $y=-6x+3$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2+8x+8=0$, $2(x+2)^2=0$

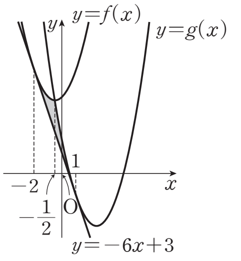
$\therefore\ x=-2$

함수 $g(x)=2x^2-10x+5$의 그래프와 직선 $y=-6x+3$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2-10x+5=-6x+3$, $2(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-6x+3$은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\{f(x)-(-6x+3)\}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\{g(x)-(-6x+3)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}(2x^2+8x+8)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-4x+2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{12}+1-4\right)-\left(-\frac{16}{3}+16-16\right)\right\}+\left\{\left(\frac{2}{3}-2+2\right)-\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

다른풀이

직선 l의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$f(x)=2x^2+2x+11$에서 $f'(x)=4x+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하면 접선의 기울기는 $f'(a)=4a+2$

$g(x)=2x^2-10x+5$에서 $g'(x)=4x-10$

함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 접점의 좌표를 $(b,\ g(b))$라 하면 접선의 기울기는 $g'(b)=4b-10$

직선 l은 두 함수의 그래프의 공통인 접선이므로

$4a+2=4b-10$, $4a-4b=-12$

$\therefore\ a-b=-3$ ……㉠

이때, 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ g(b))$는 모두 직선 l 위의 점이므로 직선 l의 기울기는

$$\begin{aligned}\frac{g(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{(2b^2-10b+5)-(2a^2+2a+11)}{b-a}\\&=\frac{2b^2-2a^2-10b-2a-6}{b-a}\\&=\frac{2(b+a)(b-a)-10b-2a-6}{b-a}\\&=\frac{6a+6b-10b-2a-6}{3}\ (\because ㉠)\\&=\frac{4(a-b)-6}{3}\\&=\frac{-18}{3}\ (\because ㉠)\\&=-6\end{aligned}$$

즉, $4a+2=-6$, $4b-10=-6$이므로 $a=-2$, $b=1$

따라서 직선 l의 방정식은

$y-f(-2)=-6\{x-(-2)\}$

$y-15=-6(x+2)$

$\therefore\ y=-6x+3$

10

$f(x)=2x^2$이라 하면 $f'(x)=4x$

점 A의 좌표를 $(a,\ 2a^2)$이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=4a$이므로 접선의 방정식은

$y-2a^2=4a(x-a)$ $\quad\therefore\ y=4ax-2a^2$

점 B의 좌표를 $(b,\ 2b^2)$이라 하면 점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(b)=4b$이므로 접선의 방정식은

$y-2b^2=4b(x-b)$ $\quad\therefore\ y=4bx-2b^2$

이때, 두 접선이 서로 수직이므로

$4a\times 4b=-1$ $\quad\therefore\ ab=-\frac{1}{16}$ ……㉠

(가)

두 직선 l_1, l_2의 교점의 좌표를 구하면

$4ax-2a^2=4bx-2b^2$에서

$4ax-4bx=2a^2-2b^2$, $4x(a-b)=2(a+b)(a-b)$

$4x=2(a+b)$

$\therefore\ x=\frac{a+b}{2}$

따라서 곡선 $y=2x^2$과 두 직선 l_1, l_2로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_b^{\frac{a+b}{2}}\{2x^2-(4bx-2b^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^a\{2x^2-(4ax-2a^2)\}dx\\&=\int_b^{\frac{a+b}{2}}(2x^2-4bx+2b^2)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^a(2x^2-4ax+2a^2)dx\\&=2\int_b^{\frac{a+b}{2}}(x-b)^2dx+2\int_{\frac{a+b}{2}}^a(x-a)^2dx\\&=\left[\frac{2}{3}(x-b)^3\right]_b^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-a)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^a\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3-\frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\\&=\frac{(a-b)^3}{6}\end{aligned}$$

(나)

㉠에서 $ab<0$이므로 $a>0$, $b<0$이다.

$a>0$, $(-b)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+(-b)\geq 2\sqrt{a\times(-b)}=2\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}$

(단, 등호는 $a=-b$일 때 성립)

이므로

$(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3\geq\frac{1}{8}$

따라서 구하는 도형의 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{48}$이다.

(다)

답 $\frac{1}{48}$

단계	채점 기준	배점
(가)	a, b 사이의 관계를 구한 경우	20%
(나)	도형의 넓이를 구한 경우	40%
(다)	산술평균과 기하평균을 이용하여 최솟값을 구한 경우	40%

11

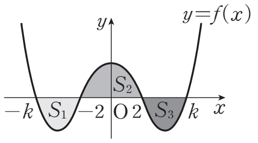
곡선 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k^2)$과 x축의 교점의 x좌표는

$(x^2-4)(x^2-k^2)=0$에서

$(x+2)(x-2)(x+k)(x-k)=0$

$\therefore\ x=-k$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$

이때, $k>2$이므로 함수 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k^2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$S_2=S_1+S_3$이므로

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx=0$$

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx=\int_{-k}^{k}(x^4-k^2x^2-4x^2+4k^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{k}\{x^4-(k^2+4)x^2+4k^2\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{(k^2+4)}{3}x^3+4k^2x\right]_0^k$$

$$=2\left\{\frac{1}{5}k^5-\frac{(k^2+4)}{3}k^3+4k^3\right\}$$

$$=-\frac{4}{15}k^5+\frac{16}{3}k^3=0$$

즉, $-\frac{4}{15}k^3(k^2-20)=0$이므로

$k=0$ 또는 $k=\pm2\sqrt{5}$

$\therefore\ k=2\sqrt{5}\ (\because\ k>2)$

답 $2\sqrt{5}$

보충설명

$S_2=S_1+S_3$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 구하면 다음과 같다.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-k}^{-2}\{-f(x)\}dx+\int_{2}^{k}\{-f(x)\}dx$$

$$=-\int_{-k}^{-2} f(x)dx-\int_{2}^{k} f(x)dx$$

$$\int_{-k}^{-2} f(x)dx+\int_{-2}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{k} f(x)dx=0$$

$$\therefore\ \int_{-k}^{k} f(x)dx=0$$

12

$$f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x<0 \text{ 또는 } x\ge2) \\ -x^2+2x & (0\le x<2) \end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 a, b $(a<b)$라 하면

$x^2-2x=k$에서 $x^2-2x-k=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=2$, $ab=-k$

$b-a=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{4+4k}$

$\quad=2\sqrt{k+1}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

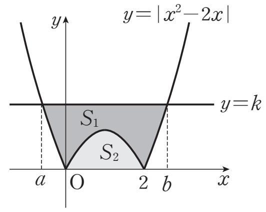
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는

$|x^2-2x|=0$에서 $|x(x-2)|=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$-x^2+2x\ge0$이므로



$$S_2=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

한편, $S_1:S_2=9:1$이므로 $S_1=9S_2$이고,

$$k(b-a)=S_1+S_2+\int_a^0(x^2-2x)dx+\int_2^b(x^2-2x)dx$$

이므로

$k(b-a)$

$$=10S_2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_a^0+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^b$$

$$=\frac{40}{3}+\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}b^3-b^2\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}$$

$$=\frac{44}{3}+\frac{1}{3}(b-a)(a^2+ab+b^2)-(b-a)(b+a)$$

$$=\frac{44}{3}+\frac{1}{3}(b-a)\{(a+b)^2-ab\}-(b-a)(b+a)$$

$$2k\sqrt{k+1}=\frac{44}{3}+\frac{2}{3}(4+k)\sqrt{k+1}-4\sqrt{k+1}\ (\because\ ㉠)$$

$(k+1)\sqrt{k+1}=11$, $(k+1)^{\frac{3}{2}}=11$

$k=\sqrt[3]{121}-1$

따라서 $a=121$, $b=-1$이므로

$a+b=121+(-1)=120$

답 120

13

삼차방정식 $-x^3+4x+k=0$의 해 중 가장 작은 값을 x_1 $(x_1<0)$이라 하면

$-x_1{}^3+4x_1+k=0\qquad\therefore\ k=x_1{}^3-4x_1\qquad\cdots\cdots$㉠

$S_1=S_2$이므로 $\int_{x_1}^{0} f(x)dx=0$에서

$$\int_{x_1}^{0}(-x^3+4x+k)dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2+kx\right]_{x_1}^{0}$$
$$=-\left(-\frac{1}{4}x_1^{\,4}+2x_1^{\,2}+kx_1\right)$$
$$=\frac{1}{4}x_1^{\,4}-2x_1^{\,2}-kx_1$$
$$=\frac{1}{4}x_1^{\,4}-2x_1^{\,2}-x_1^{\,4}+4x_1^{\,2}\ (\because ㉠)$$
$$=-\frac{3}{4}x_1^{\,4}+2x_1^{\,2}$$
$$=-\frac{3}{4}x_1^{\,2}\left(x_1^{\,2}-\frac{8}{3}\right)=0$$

$\therefore\ x_1=-\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\because\ x_1<0)$

이 값을 ㉠에 대입하면 $k=-\frac{16\sqrt{6}}{9}+\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{6}}{9}$

답 ④

14

곡선 $y=x(x-1)^2$과 직선 $y=ax$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x(x-1)^2=ax$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.

즉, $x^3-2x^2+(1-a)x=0$에서 $x\{x^2-2x+(1-a)\}=0$

이차방정식 $x^2-2x+(1-a)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(1-a)=a>0$

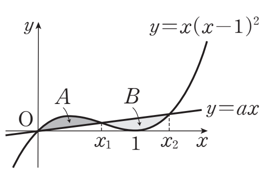
이차방정식의 두 실근을 $x_1,\ x_2\ (0<x_1<x_2)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=2,\ x_1x_2=1-a$ ……㉠

이때, 두 실근은 0이 아니므로

$1-a\neq 0$ $\quad\therefore\ a\neq 1$

두 도형 $A,\ B$의 넓이가 같으므로



$\int_{0}^{x_2}\{x(x-1)^2-ax\}dx=0$

즉, $\int_{0}^{x_2}\{x^3-2x^2+(1-a)x\}dx$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{(1-a)}{2}x^2\right]_0^{x_2}$$
$$=x_2^{\,2}\left\{\frac{1}{4}x_2^{\,2}-\frac{2}{3}x_2+\frac{(1-a)}{2}\right\}$$
$$=x_2^{\,2}\left\{\frac{1}{4}x_2^{\,2}-\frac{2}{3}x_2+\frac{(2-x_2)}{2}x_2\right\}\ (\because ㉠)$$
$$=x_2^{\,3}\left(-\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{3}\right)=0$$

$-\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{3}=0$이므로 $x_2=\frac{4}{3}\ (\because\ x_2\neq 0)$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x_1=\frac{2}{3}$

따라서 ㉠에서 $a=1-x_1x_2=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

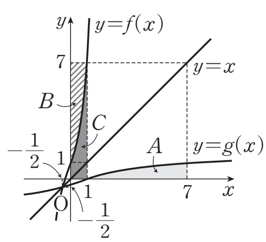
답 $\frac{1}{9}$

15

$f(x)=4x^3+2x+1$에서 $f'(x)=12x^2+2>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이고, $f(0)=1$에서 $g(1)=0$

역함수 존재

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\int_{1}^{7} g(x)dx=A$,

빗금친 부분의 넓이를 B, $\int_{0}^{1} f(x)dx=C$라 하면

$A=B,\ B+C=1\times 7=7$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{1}^{7} g(x)dx=A=B=(B+C)-C$$
$$=7-\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=7-\int_{0}^{1}(4x^3+2x+1)dx$$
$$=7-\left[x^4+x^2+x\right]_0^1$$
$$=7-3=4$$

답 4

16

최고지점에 도달할 때, $v(t)=0$이므로

$30-2t=0$　　$\therefore\ t=15$

이때, 지면으로부터 물체의 높이는

$$\begin{aligned}a&=\int_0^{15} v(t)dt\\&=\int_0^{10} t\,dt+\int_{10}^{15}(30-2t)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{10}+\left[30t-t^2\right]_{10}^{15}\\&=50+\{(450-225)-(300-100)\}\\&=75\quad\cdots\cdots㉠\end{aligned}$$

닫힌구간 $[0,\ 15]$에서 $v(t)\geq 0$, 닫힌구간 $[15,\ 20]$에서 $v(t)\leq 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=20$까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}b&=\int_0^{20}|v(t)|dt\\&=\int_0^{15} v(t)dt-\int_{15}^{20} v(t)dt\\&=\int_0^{10} t\,dt+\int_{10}^{15}(30-2t)dt-\int_{15}^{20}(30-2t)dt\\&=75-\left[30t-t^2\right]_{15}^{20}\ (\because ㉠)\\&=75-\{(600-400)-(450-225)\}\\&=100\quad\cdots\cdots㉡\end{aligned}$$

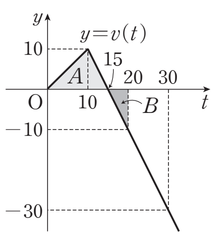
㉠, ㉡에서 $a=75$, $b=100$이므로

$a+b=75+100=175$

답 175

다른풀이

$$v(t)=\begin{cases}t & (0\leq t<10)\\30-2t & (10\leq t\leq 30)\end{cases}$$



에서 함수 $y=v(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$t=15$에서 $v(t)=0$이므로 $t=15$일 때, 물체는 최고지점에 도달한다.

닫힌구간 $[0,\ 15]$에서 $v(t)\geq 0$이므로 $t=15$일 때 물체의 높이 a는 A의 넓이와 같다.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\times 15\times 10=75$

출발한 후 20분까지 움직인 거리 b는 $A+B$의 넓이와 같으므로

$b=\frac{1}{2}\times 15\times 10+\frac{1}{2}\times 5\times 10=100$

$\therefore\ a+b=75+100=175$

17

속도 $v(t)$는 $t\geq 0$인 모든 실수 t에서 연속이므로 $t=1$에서 연속이다.

즉, $v(1)=\lim\limits_{t\to 1+} v(t)=\lim\limits_{t\to 1-} v(t)$이므로

$b=5$　　$\cdots\cdots㉠$

한편, $t=5$에서의 점 P의 위치가 -1이므로

$\int_0^5 v(t)dt=-1$

$$\begin{aligned}\int_0^5 v(t)dt&=\int_0^1(3t^2+2)dt+\int_1^5(at-a+b)dt\\&=\int_0^1(3t^2+2)dt+\int_1^5(at-a+5)dt\ (\because ㉠)\\&=\left[t^3+2t\right]_0^1+\left[\frac{a}{2}t^2-at+5t\right]_1^5\\&=3+\left\{\left(\frac{25a}{2}-5a+25\right)-\left(\frac{a}{2}-a+5\right)\right\}\\&=8a+23\end{aligned}$$

즉, $8a+23=-1$에서 $8a=-24$

$\therefore\ a=-3$

답 -3

18

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{P}}(t)=5+\int_0^t(3t^2-4t)dt=t^3-2t^2+5$

시각 t에서의 점 Q의 위치를 $x_{\mathrm{Q}}(t)$라 하면

$x_{\mathrm{Q}}(t)=k+\int_0^t 15dt=15t+k$

두 점 P, Q가 만나는 것은 두 점의 위치가 같을 때, 즉 $x_{\mathrm{P}}(t)=x_{\mathrm{Q}}(t)$일 때이므로

$t^3-2t^2+5=15t+k$

이때, 두 점 P, Q는 출발 후 두 번 만나므로

$t>0$에서 방정식 $t^3-2t^2-15t+5=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(t)=t^3-2t^2-15t+5$라 하면

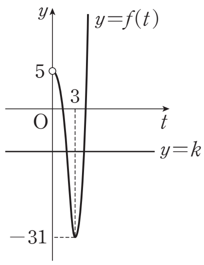
$f'(t)=3t^2-4t-15=(3t+5)(t-3)$

$f'(t)=0$에서 $t=3$ ($\because$ $t>0$)

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	-31	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-31<k<5$이므로 정수 k의 개수는 -30, -29, -28, $\cdots$, 4의 35이다.



답 35

19

닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $f(x)=x^3+3x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l의 방정식을 $g(x)=mx+n$ (m, n은 상수)이라 하면 사다리꼴 OABC의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(mx+n)dx \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$=$㉡이므로 $\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx=\int_{-3}^{0}(mx+n)dx$

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx-\int_{-3}^{0}(mx+n)dx$$

$$=\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2-mx-n)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{m}{2}x^2-nx\right]_{-3}^{0}$$

$$=-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}m+3n\right)=0$$

$$\therefore\ n=\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ g(x)=mx+\frac{3}{2}m+\frac{9}{4}$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)m+\frac{9}{4}$$

즉, 직선 l은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$를 지나므로 점 D의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

따라서 삼각형 ODC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$$

이므로 $8S=27$

답 27

다른풀이

닫힌구간 $[-3,\ 0]$에서 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $f(x)=x^3+3x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-3}^{0}(x^3+3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^{0}=-\left(\frac{81}{4}-27\right)$$

$$=\frac{27}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

점 A의 좌표를 $(0,\ a)$라 하고, 점 B의 좌표를 $(-3,\ b)$ (a, b는 상수)라 하면 사다리꼴 OABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 3\times(a+b)=\frac{3}{2}(a+b) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$=$㉡이므로 $\frac{27}{4}=\frac{3}{2}(a+b)$

$$\therefore\ a+b=\frac{9}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

한편, 직선 l의 기울기는

$$\frac{a-b}{0-(-3)}=\frac{a-b}{3}$$

$$=\frac{2a-\frac{9}{2}}{3}\ (\because ㉢)$$

$$=\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}$$

이므로 직선 l의 방정식은

$$y=\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{2}\right)x+a$$

이때, 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 일정한 점 D를 지나므로

$(4x+6)a-(9x+6y)=0$에서 $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{9}{4}$

따라서 삼각형 ODC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$이므로 $8S=27$

보충설명

㉠에서 삼차함수의 그래프의 넓이 공식을 이용하면 구하는 도형의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

즉, 곡선 $f(x)=x^3+3x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{|1|}{12}(3-0)^4=\frac{27}{4}$

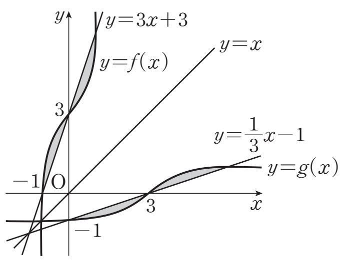
20

$f(x)=x^3+2x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(x)>0$

즉, 함수 $f(x)$는 증가함수이므로 역함수가 존재하고 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.

직선 $y=\frac{1}{3}x-1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식은

$x=\frac{1}{3}y-1 \qquad \therefore\ y=3x+3$



따라서 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+3$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x+3=3x+3$에서 $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $f(x)\geq 3x+3$, 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)\leq 3x+3$이므로

구하는 넓이는

$\int_{-1}^{0}\{f(x)-(3x+3)\}dx+\int_{0}^{1}\{(3x+3)-f(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$

$=2\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$

$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

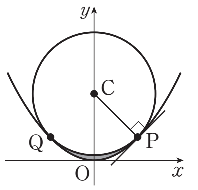
21

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 원의 교점을 각각 $\mathrm{P}\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$, $\mathrm{Q}\left(-a, \frac{1}{4}a^2\right)$ $(a>0)$이라 하고 원의 중심을 $\mathrm{C}(0, k)$ $(k>0)$라 하자.

$f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{a}{2}$이고, 이 접선은 직선 CP와 수직이므로



(직선 CP의 기울기)$=\frac{\frac{1}{4}a^2-k}{a-0}=-\frac{2}{a}$

$\frac{1}{4}a^2-k=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{4}a^2-k\right)^2}=2\sqrt{2}$

$a^2+(-2)^2=8$ ($\because$ ㉠)

$a^2=4 \qquad \therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)

이 값을 ㉠에 대입하면

$1-k=-2 \qquad \therefore\ k=3$

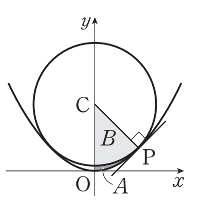
즉, $\mathrm{P}(2, 1)$, $\mathrm{Q}(-2, 1)$, $\mathrm{C}(0, 3)$이고 직선 CP의 방정식은

$y=-x+3$

오른쪽 그림과 같이 각 도형의 넓이를 A, B라 하자.

이때, $\angle\mathrm{PCO}=45°$이므로

$B=\frac{1}{8}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2=\pi$



즉, 구하는 넓이는

$$2A=2\{(A+B)-B\}$$

$$=2\left[\int_0^2\left\{(-x+3)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx-\pi\right]$$

$$=2\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^2-2\pi$$

$$=\frac{20}{3}-2\pi$$

따라서 $a=\frac{20}{3}$, $b=-2$이므로

$$3(a+b)=3\times\left\{\frac{20}{3}+(-2)\right\}=14$$

답 14

22

시각 t에서의 물체 A의 높이를 $x_A(t)$라 하면

$$x_A(t)=\int_0^t f(t)dt$$

시각 t에서의 물체 B의 높이를 $x_B(t)$라 하면

$$x_B(t)=\int_0^t g(t)dt$$

ㄱ. $t=a$에서 물체 A의 높이는 $x_A(a)=\int_0^a f(t)dt$,

물체 B의 높이는 $x_B(t)=\int_0^a g(t)dt$

주어진 그래프에서 $0\le t\le a$일 때, $f(t)\ge g(t)$이므로

$$\int_0^a f(t)dt>\int_0^a g(t)dt$$

따라서 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. $0\le t\le b$일 때, $f(t)-g(t)\ge 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커지다가 $b\le t\le c$일 때, $f(t)-g(t)\le 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 작아진다.

따라서 $t=b$일 때, 두 물체 A와 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$에서 $x_A(c)=x_B(c)$이므로

시각 $t=c$일 때, 두 물체 A, B는 같은 높이에 있다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

23

조건 ㈎에서 함수 $y=f_n(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭 (기함수)이므로

$f_n(x)=ax^3+bx$ (a, b는 실수, $a\ne 0$)

라 할 수 있다.

이때, 함수 $f_n(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$f_n'(x)=3ax^2+b\ge 0$

즉, $a>0$, $b\ge 0$

곡선 $y=f_n(x)$는 원점을 지나고 함수 $f_n(x)$는 증가함수이므로 두 곡선 $y=f_n(x)$, $y=g_n(x)$의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

조건 ㈏에서

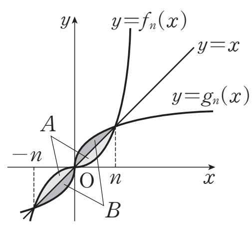
$an^3+bn=n$, $n(an^2+b-1)=0$

$\therefore\ b=1-an^2$ ($\because\ n\ge 1$)

그런데 $b\ge 0$이므로 $1-an^2\ge 0$이다.

$\therefore\ a\le\frac{1}{n^2}$ ……㉠

두 곡선 $y=f_n(x)$, $y=g_n(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=f_n(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=g_n(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면



$A=B$

$$A=\int_{-n}^0\{ax^3+(1-an^2)x-x\}dx$$
$$+\int_0^n\{x-ax^3-(1-an^2)x\}dx$$

$$=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{an^2}{2}x^2\right]_{-n}^0+\left[\frac{an^2}{2}x^2-\frac{a}{4}x^4\right]_0^n$$

$$=\frac{an^4}{2}$$

따라서 두 곡선 $y=f_n(x)$, $y=g_n(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_n=A+B=2A=an^4\le n^2$ ($\because$ ㉠)

따라서 $\sum_{n=1}^{10}S_n$의 최댓값은 $\sum_{n=1}^{10}n^2$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}n^2=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

답 385

memo